

MINISTERE DE LA POLITIQUE ET DE LA PROGRAMMATION SCIENTIFIQUE

Centre interuniversitaire d'excellence en océanographie

(Actions concertées)

13937



Vlaams Instituut voor de Zee  
*Flanders Marine Institute*

**Modèles tridimensionnels des courants marins**

par

Benoît ROISIN

(Université de Liège)

Rapport ACN 3

TABLE DES MATIERES

Introduction . . . . .	3
<u>Chapitre I - Modèles tridimensionnels. Analyse et comparaison de quelques modèles</u>	
1.- Les hypothèses relatives aux systèmes marins . . . . .	7
2.- Les notations . . . . .	9
3.- Les équations gouvernant le modèle . . . . .	10
4.- Le problème à résoudre et les grandes classes de modèles tridimensionnels . . . . .	18
5.- Les divers modèles et leurs particularités . . . . .	24
<u>Chapitre II - Modèles de Welander, Jelesnianski et Forristall</u>	
1.- Le modèle de Welander . . . . .	33
2.- Les modèles de Jelesnianski et de Forristall . . . . .	34
3.- Paramétrisation de la viscosité turbulente verticale . . . . .	38
4.- Résolution d'un modèle de Welander-Jelesnianski-Forristall modifié . . . . .	41
5.- Discussion des résultats . . . . .	45
<u>Chapitre III - Modèle de Nihoul (1977)</u>	
1.- Présentation du modèle . . . . .	50
2.- Comparaison avec le modèle de Welander-Jelesnianski-Forristall et le modèle modifié . . . . .	56
<u>Chapitre IV - Discussion de la solution de Nihoul</u>	
1.- Recherche de relations fonctionnelles générales $D(\lambda)$ et $m(\lambda)$ . Influence de la fonction $\lambda(\xi)$ . . . . .	60
2.- Etude des termes de convolution temporelle . . . . .	74
3.- Temps caractéristiques liant les diverses variables temporelles . . . . .	92
4.- Résolution du problème aux valeurs propres . . . . .	95
<u>Chapitre V - Application à la dispersion</u>	
1.- Introduction . . . . .	99
2.- Paramétrisation de l'effet cisailant . . . . .	103
3.- Recherche du profil de concentration suivant la profondeur . . . . .	112
4.- Recherche du profil de concentration d'un corps sédimentable . . . . .	115
Conclusions . . . . .	120
Bibliographie . . . . .	122

## Introduction

Le but de ce travail est d'atteindre une meilleure connaissance des courants marins et, plus particulièrement, de la variation verticale des courants horizontaux. Certes, cette étude ne peut tenir compte de tous les phénomènes dont le milieu marin est le siège; celui-ci est si complexe de par tous ses mécanismes internes et par toutes ses interactions avec son environnement (atmosphère, côtes, estuaires, fond, ...), qu'une modélisation s'impose. Un modèle hydrodynamique d'un système marin est une approche mais une approche très fructueuse car il permet de simplifier considérablement l'étude envisagée et ainsi de conduire à des résultats concrets tels un profil de vitesse, une tension de cisaillement au fond, etc.

Dans l'étude envisagée ici, on se limitera à une mer peu profonde sans aucune stratification. Les résultats ne seront donc pas applicables aux mers stratifiées telle la mer Méditerranée tandis qu'ils le seront à la mer du Nord où les marées importantes et les tempêtes sont deux facteurs qui entretiennent constamment une turbulence complète de la colonne d'eau et empêchent toute stratification verticale [Ronday (1976)].

La compréhension d'un système marin ne se conçoit guère sans la connaissance des courants. Or, la variation de ces courants suivant la verticale, en d'autres mots le profil de vitesse, n'a cependant guère été étudiée. Bien que sa connaissance soit d'une importance capitale pour une bonne compréhension et pour des prévisions valables, le profil de vitesse est resté encore à l'état de concept empirique. Sur bases d'observations relativement nombreuses et diversifiées, certains auteurs [Van Veen (1938), Bowden (1965)] ont proposé plusieurs lois empiriques du profil de vitesse mais la recherche de celui-ci par voie théorique a été peu exploitée. La raison de cette lacune est triple : tout d'abord, un modèle tridimensionnel complet comporte un maillage tridimensionnel, joint à une discrétisation

temporelle; à l'heure actuelle, le problème ainsi posé dépasse la capacité d'un ordinateur; ceci justifie l'attention de nombreux chercheurs sur les modèles bidimensionnels et le succès de ces modèles. Ensuite se pose le problème des conditions aux limites; l'effet du vent en surface, les éventuels dépôts aux fonds, le profil de vitesse et l'élévation de la surface aux frontières en mer ouverte ou aux estuaires ne sont qu'un exemple de quantités délicates à paramétriser, intervenant dans les conditions aux frontières [Nihoul (1973)]. Enfin, signalons la dépendance étroite du profil de vitesse vis-à-vis de paramètres mal connus, typiques des écoulements turbulents.

Parmi ces paramètres, la viscosité turbulente verticale joue un rôle essentiel. Ce dernier facteur, crucial lors de la détermination du profil vertical, est en toute généralité fonction de l'espace et du temps; sa variation avec la profondeur et sa liaison avec les facteurs caractéristiques de l'écoulement sont importantes mais encore non totalement connues. Une hypothèse doit être faite *a priori* si l'on veut entamer une résolution numérique du modèle.

Ainsi, deux modèles de résolution sont proposés : d'une part, on peut approcher le profil vertical de vitesse et résoudre un modèle intégré sur la profondeur, appelé modèle bidimensionnel ou, d'autre part, paramétriser la viscosité turbulente et résoudre un modèle tridimensionnel. Il va sans dire que la seconde méthode est plus complète et donc plus précise mais peut être plus longue. La question se pose de savoir lequel de ces deux modèles doit recevoir la préférence : est-il préférable d'approcher *a priori* le profil vertical de vitesse ou de paramétriser la viscosité turbulente verticale ?

Plusieurs modèles tridimensionnels ont déjà été proposés; la première partie de ce travail consiste à les comparer et à les examiner de façon critique (chapitre I). Parmi ceux-ci, trois modèles poursuivant la même idée et se complétant mutuellement retiendront davantage notre attention. Certains prolongements seront apportés et certaines modifications seront entreprises (chapitre II).



La plupart de ces modèles se basent sur une viscosité turbulente constante; cette supposition rend le problème entièrement linéaire et donc plus ou moins aisé à résoudre. Néanmoins, les observations montrent une dépendance quadratique entre la tension de cisaillement au fond et la vitesse moyenne du courant, et révèlent une couche limite logarithmique au voisinage du fond. Ces deux faits sont intimement liés et sont le fruit des variations verticale et temporelle de la viscosité turbulente verticale [Weatherly (1977)]. De tels modèles entièrement linéaires ne permettent pas de retrouver ces faits à l'issue de leur résolution. C'est là leur très grande faiblesse.

Une paramétrisation adéquate de la viscosité turbulente verticale est celle qui contient un facteur non-linéaire conduisant ultérieurement à la dépendance quadratique et au profil logarithmique observés. La première paramétrisation de ce type appliquée aux modèles tridimensionnels est due à Nihoul [Nihoul (1977a)]. Conformément aux lois de la turbulence près des parois, cet auteur introduit comme facteur dans la viscosité turbulente verticale la vitesse de friction, racine carrée de la tension de cisaillement au fond, par unité de masse spécifique. C'est l'introduction de ce facteur non-linéaire judicieux qui permettra de retrouver la relation quadratique énoncée ci-dessus. Il introduit dans un second facteur la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la coordonnée verticale; ce dernier facteur conduira au profil logarithmique observé.

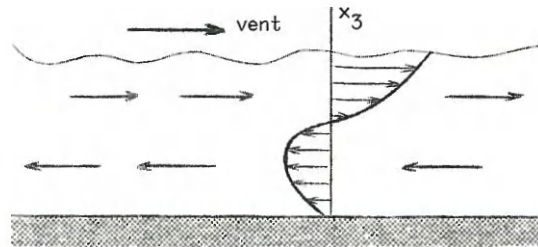
Tous calculs effectués, il s'avère (chapitre III) que le profil de vitesse dépend dans une large mesure du comportement linéaire de la viscosité turbulente près du fond mais très peu de la valeur de celle-ci dans les couches supérieures. Ainsi, une erreur dans la loi de la viscosité turbulente dans les couches supérieures n'affectera que très peu les résultats. Cette insensibilité du profil de vitesse à la paramétrisation qui l'engendre est un argument en faveur des modèles tridimensionnels.

Outre cet avantage, les modèles tridimensionnels sont supérieures aux modèles intégrés sur la profondeur pour d'autres raisons :

- la connaissance plus complète du milieu marin est un avantage indéniable;

- la paramétrisation de la tension de cisaillement au fond, nécessaire pour fermer un modèle bidimensionnel n'est plus indispensable pour la résolution d'un modèle tridimensionnel;

- dans un lac ou une mer peu profonde sous l'action du vent [Gedney et Lick (1972)], le profil de la vitesse horizontale selon la profondeur comprend deux parties : en surface, un flux dû au vent et, au fond, un reflux compensant le flux, assurant le retour des masses d'eau. Au total, la vitesse moyenne  $\bar{u}$  obtenue par intégration sur la profondeur ne représente rien de significatif; la connaissance du profil  $u(x_3)$  s'avère indispensable.



- l'étude de la résistance des colonnes en coques cylindriques soutenant les plateformes *offshore* réclame, pour être précise, la connaissance du profil vertical de la vitesse.

On serait tenter de croire que la supériorité des modèles tridimensionnels sur les modèles intégrés sur la profondeur est acquise aux dépens d'un accroissement considérable des calculs jusqu'au-delà de la capacité actuelle des ordinateurs. Cependant il n'en est rien si l'on parvient à dissocier le modèle tridimensionnel en un modèle bidimensionnel joint à un modèle unidimensionnel. Car alors, la résolution de ce dernier peut être entreprise par voie analytique et donc être établie une fois pour toutes; les calculs numériques restant ne sont guère plus étendus que ceux d'un modèle bidimensionnel (*cf.* chapitre I, § 4).

## Chapitre I

### Modèles tridimensionnels

#### Analyse et comparaison de quelques modèles

Avant toute étude approfondie, il est nécessaire de construire le modèle c'est-à-dire de choisir les équations de départ et de convenir de toutes les simplifications et modélisations qui seront admises. Quand le problème sera ainsi posé, on présentera plusieurs modèles tridimensionnels et on les comparera.

#### 1.- Les hypothèses relatives aux systèmes marins

On citera ici les hypothèses généralement admises lors de la construction d'un modèle de systèmes marins. Il importe de bien garder en mémoire la présence de ces hypothèses car elles consistent en une limitation des modèles. Par exemple, l'approximation tangente plane écarte l'étude d'un océan très étendu, l'homogénéité du fluide écarte l'étude d'une mer stratifiée telle la Méditerranée.

i) Approximation tangente plane : on néglige la courbure de la terre dans la zone étudiée et la surface de la mer si celle-ci était au repos serait assimilée à un plan horizontal.

ii) Le milieu est beaucoup plus étendu que profond : par exemple, la mer du Nord s'étend horizontalement sur environ 1000 km tandis que sa profondeur dépasse rarement 100 m. Les bancs de sable sont nombreux dans sa partie sud et le long des côtes anglaises, françaises, belges, néerlandaises et allemandes. La profondeur est de l'ordre de 20 m et se réduit encore à proximité des côtes et des estuaires. Par contre, le

long de la Norvège, le plateau continental semble s'être effondré et on observe un chenal large d'environ 100 km d'une profondeur allant de 300 à 500 m. Cette région profonde se prolonge dans le Skagerrak et s'arrête dans le Kattegat. Ainsi, mises à part quelques parties plus profondes, le milieu est beaucoup plus étendu que profond et la vitesse est essentiellement horizontale.

iii) La rotation de la terre n'est pas négligeable et sera prise en compte; cependant, on supposera que son effet est identique en tous les points du milieu, on ne tiendra pas compte de la variation de l'effet de la rotation de la terre avec la latitude. Cette hypothèse est compatible avec l'approximation tangente plane et est même induite par celle-ci.

iv) Le fluide est homogène et incompressible, sa masse spécifique est assimilée à une constante. [Pour une discussion détaillée de cette hypothèse et de la valeur de la masse spécifique à choisir, cf. Nihoul (1975)]. Dans certains modèles, on admettra des variations de la masse spécifique par sauts successifs suivant la profondeur ou par variation de la température et, dans ce cas, les équations de Boussinesq seront utilisées [e.g. Nihoul (1977b), Cheng (1976)].

v) La pression varie de manière hydrostatique avec la profondeur. Cette hypothèse très précise sera justifiée lors de l'établissement des équations.

vi) La viscosité moléculaire est supposée négligeable vis-à-vis de la viscosité turbulente.

vii) Les tourbillons dont la longueur caractéristique est de l'ordre du mètre ou moins sont quasi homogènes et isotropes, il en résulte que la viscosité turbulente horizontale doit être du même ordre de grandeur que la viscosité turbulente verticale. Cependant, l'effet de cette dernière l'emporte dans une large mesure sur l'effet de la viscosité horizontale. Ceci résulte de la disproportion entre la profondeur et l'étendue du milieu. Toutefois, certains auteurs [Freeman (1972) et Cheng (1976)] prennent en compte l'effet d'une viscosité turbulente horizontale constante.



A cette liste d'hypothèses générales, chaque auteur ajoute des hypothèses plus spécifiques du milieu qu'il étudie et des calculs qu'il opère.

## 2.- Les notations

Afin de lever la doute éventuel sur la signification de certaines notations, nous consignons ici les divers symboles employés ultérieurement. Ces notations sont celles utilisées par Nihoul [Nihoul (1977a)].

- On désignera les coordonnées spatiales par  $x_1$  et  $x_2$  (coordonnées horizontales d'orientation quelconque) et  $x_3$  (coordonnée verticale orientée vers le haut). Les vecteurs de base seront notés  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ . A cause de l'approximation tangente plane (hypothèse n° 1), ce référentiel n'est pas curviligne.

- Les trois composantes de la vitesse  $u$  sont  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ ; on notera les composantes de la vitesse moyenne sur la profondeur  $\bar{u}$  par  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  et  $\bar{u}_3$ ; si l'on utilise le formalisme des nombres complexes, on écrira :  $u = u_1 + i u_2$ ,  $\bar{u} = \bar{u}_1 + i \bar{u}_2$ .

- La masse spécifique est notée  $\rho$ .

- Les tensions de cisaillement, quelles qu'elles soient et dans toutes les circonstances, sont rapportées à l'unité de masse spécifique; une tension est donc une force par unité de surface et par unité de masse spécifique, elle a la dimension du carré d'une vitesse.

La tension de cisaillement au fond est notée  $\tau_b = \tau_{b_1} e_1 + \tau_{b_2} e_2$  ( $b = \text{bottom}$ ) et, en notation complexe,  $\tau_b = \tau_{b_1} + i \tau_{b_2}$ .

La tension de cisaillement en surface est notée  $\tau_s = \tau_{s_1} e_1 + \tau_{s_2} e_2$  et, en notation complexe,  $\tau_s = \tau_{s_1} + i \tau_{s_2}$ .

-  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $9,81 \text{ m/s}^2$ ).

-  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la terre ( $7,27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ).

-  $\varphi$  est la latitude ( $55^\circ$  en moyenne pour la mer du Nord).

-  $f = 2\Omega \sin \varphi$  est le paramètre de Coriolis ( $1,19 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  pour  $\varphi = 55^\circ$ ). Ce paramètre bien que variant avec le point étudié (variation de la latitude  $\varphi$ ) sera assimilé à une constante (hypothèse n° 3).



- $U = U_1 + i U_2$  est la vitesse du vent, dans le formalisme complexe; il s'agit d'une vitesse de référence, prise à 10 m au-dessus du niveau de l'eau.
- $\zeta(x_1, x_2, t)$  est l'élévation instantanée de la surface; l'interface air-mer a donc l'équation  $x_3 = \zeta$ .
- $h(x_1, x_2)$  est la profondeur du milieu marin à l'endroit considéré (grandeur positive); le fond a donc l'équation  $x_3 = -h$ .
- $H(x_1, x_2, t) = h + \zeta$  est la hauteur instantanée de la colonne d'eau.
- $p$  est la pression;  $p_a$  est la pression atmosphérique régnant à la surface.
- $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$  est un opérateur.
- $\phi = -\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right)$  est une fonction de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $t$ , indépendante de  $x_3$ .
- $\tilde{\nu}_H$  et  $\tilde{\nu}$  sont les viscosités turbulentes horizontale et verticale.
- $z_0$  est la longueur de rugosité du fond (fond sablonneux sans ride :  $z_0 \sim 6 \times 10^{-4}$  m).
- $\xi = \frac{x_3 + h}{H}$  est la variable verticale réduite.

### 3.- Les équations gouvernant le modèle

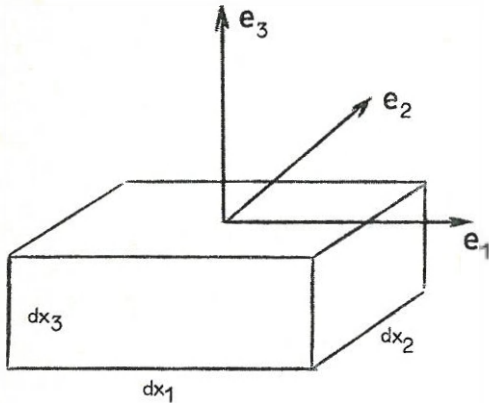
On rappelle ici brièvement les équations utilisées mais l'accent sera mis sur l'établissement de l'équation classique d'Ekman [Ekman (1905)]. Cette dernière, issue des équations de Navier-Stokes, est l'aboutissement logique de toutes les hypothèses admises. Cependant, il faut être conscient de toutes les approximations qu'elle suppose; c'est pourquoi, on l'établira explicitement.

#### 3.1.- Equation de continuité

Vu l'hypothèse n° 4, on écrit de suite :

$$(1.1) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 .$$

3.2.- Equation de conservation de la quantité de mouvement - Equation classique d'Ekman



Soit un élément fluide, une "particule" de dimensions  $dx_1$ ,  $dx_2$ ,  $dx_3$ . Newton nous permet d'écrire :

$$(1.2) \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \Sigma F_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

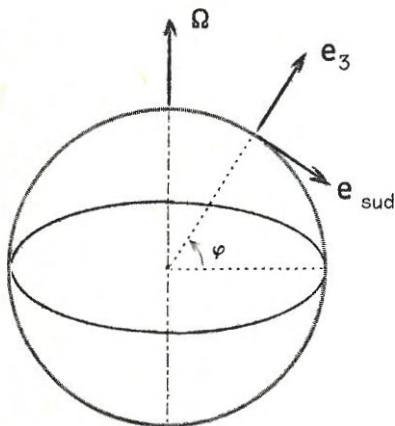
avec

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + 2(\Omega \wedge u)_i$$

et

$$F_i = -\rho g \delta_{i3} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \Sigma_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \tau_{ij}) .$$

Dans le bilan des forces, nous avons négligé les forces astronomiques. Celles-ci dérivent d'un potentiel et peuvent donc entrer dans le terme du gradient de pression. De plus, dans la mer du Nord, ces forces internes jouent un rôle secondaire; les marées sont dues en grande partie à l'amplification dans le bassin de la mer du Nord des ondes de marée de l'océan Atlantique [Ronday (1976)].



$\Omega$  est le vecteur de la vitesse de la rotation de la terre :

$$\Omega = -\Omega \cos \varphi e_{sud} + \Omega \sin \varphi e_3$$

et

$$e_{sud} = \cos \alpha e_1 - \sin \alpha e_2$$

puisque  $e_1$  et  $e_2$  sont d'orientation quelconque.

$$\begin{aligned} \Omega \wedge u &= (\Omega \cos \varphi \sin \alpha u_3 - \Omega \sin \varphi u_2) e_1 \\ &+ (\Omega \cos \varphi \cos \alpha u_3 + \Omega \sin \varphi u_1) e_2 \\ &- \Omega \cos \varphi (\cos \alpha u_2 + \sin \alpha u_1) e_3 . \end{aligned}$$

En vertu de l'hypothèse n° 2,  $u_3 \ll u_1, u_2$  et le terme d'accélération de Coriolis peut se simplifier :

$$2(\Omega \wedge \mathbf{u}) = -f u_2 \mathbf{e}_1 + f u_1 \mathbf{e}_2 - f \cotg \varphi (\cos \alpha u_2 + \sin \alpha u_1) \mathbf{e}_3 .$$

$\tau_{ij}$  est la tension de cisaillement agissant sur la face perpendiculaire à l'axe  $\mathbf{e}_j$ , dans la direction de  $\mathbf{e}_i$ . Par similitude avec l'effet de viscosité moléculaire (négligé ici par l'hypothèse n° 6), on écrit en régime turbulent :

$$(1.3) \quad \tau_{ij} = \tilde{\nu}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{pas de sommation sur } j).$$

On peut aussi paramétriser les tensions de cisaillement grâce à la notion de longueur de mélange due à Prandtl; cette paramétrisation n'est en réalité qu'un cas particulier de (3).

Parmi les  $\tilde{\nu}_j$ , on distingue :

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 = \tilde{\nu}_2 = \tilde{\nu}_H & : \quad \text{viscosité turbulente horizontale} \\ \tilde{\nu}_3 = \tilde{\nu}(x_1, t) & . \end{aligned}$$

On peut enfin réécrire (2) :

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ = f u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ = -f u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_2}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ = f \cotg \varphi (\cos \alpha u_2 + \sin \alpha u_1) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_3}{\partial x_1}) \\ + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_3}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}) . \end{aligned}$$

On analyse les ordres de grandeur des termes de ces équations en adoptant les valeurs caractéristiques suivantes [e.g. Nihoul (1975)] :

$$u_1 \sim u_2 \sim 1 \text{ m/s} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1} ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \sim \frac{\partial}{\partial x_2} \sim 10^{-5} \text{ m}^{-1} \quad (10^5 \text{ m} \sim \text{longueur d'onde des marées}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \sim \frac{1}{50} \text{ m}^{-1} ,$$

$$\zeta \sim 1 \text{ m}$$

$$g \sim 10 \text{ m/s}^2$$

$$\tilde{v}_H \sim \tilde{v} \sim 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$$

[Nihoul (1975)].

Par l'équation de continuité, on peut écrire :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \lesssim \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \sim 10^{-5} \Rightarrow u_3 \lesssim 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$$

cet ordre de grandeur explique la quasi-horizontalité de la vitesse dans un milieu beaucoup plus étendu que profond.

Remarquons que les valeurs de  $\tilde{v}_H$  et  $\tilde{v}$  données ci-dessus sont estimées par la théorie de Kolmogorov en supposant que les tourbillons isotropes et homogènes ont une longueur caractéristique inférieure ou de l'ordre du mètre; les valeurs données ci-dessus sont donc les ordres de grandeur de la réalité physique. Cependant, lors du traitement numérique des termes de viscosité, il faut prendre garde de ne pas diminuer artificiellement l'effet de la viscosité turbulente horizontale : les mailles horizontales sont assez étendues ( $\Delta x_1 \sim \Delta x_2 \sim 10 \text{ km}$ ) : les dérivées  $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$  subissent donc ainsi un lissage considérable qui diminue exagérément leur valeur. Pour contrecarrer cet effet numérique et garder aux termes

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{v}_H \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{v}_H \frac{\partial u_i}{\partial x_2})$$

leur valeur réelle, il est nécessaire d'augmenter artificiellement la



valeur de  $\tilde{\nu}_H$ . C'est la raison pour laquelle Freeman [Freeman (1972)] choisit :

$$\tilde{\nu}_H = 10^3 \text{ m}^2/\text{s} \gg \tilde{\nu} = 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s} .$$

Les modèles de Freeman et de Cheng [Freeman (1972), Cheng (1976)] tiennent compte des termes de viscosité turbulente verticale. Cependant, même estimés à leur valeur exacte, ces termes sont petits et négligeables devant les termes de viscosité turbulente verticale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\nu}_H \frac{\partial u_i}{\partial x_2}) &\sim u_i 10^{-7} \text{ m/s}^2 \\ &\text{(pour } \nu_H \sim 10^3 \text{ m}^2/\text{s}) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x_3}) &\sim u_i (4 \times 10^{-6}) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La comparaison des ordres de grandeur des divers termes des équations précédentes (1.4), (1.5) et (1.6) permet de négliger certains termes, il reste :

$$\begin{aligned} (1.7) \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= f u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) \\ (1.8) \quad (I) \quad &\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3} &= -f u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\nu} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \\ (1.9) \quad &\left\{ \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g \end{aligned} \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Les termes non linéaires peuvent à leur tour être négligés; certains auteurs [Gedney et Lick (1972), Forristall (1974)] négligent ces termes d'advection en utilisant le raisonnement sommaire suivant : l'ordre de grandeur du gradient  $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  sur  $\frac{\partial u_j}{\partial t}$  est donné par le nombre de Rossby :

$$Ro = \frac{U}{fL}$$

où, ici,  $U \sim 1 \text{ m/s}$ ,  $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  et  $L \sim 10^5 \text{ m}$ , soit

$$Ro \sim 0,1 .$$

Dans la réalité, les termes d'advection sont négligeables pour la plupart des points envisagés sauf à des endroits précis tels les points d'amphidromie [Ronday (1976)] et près des côtes où la profondeur varie



rapidement. Un modèle *global* étudiant tout un système marin dans son ensemble ne peut ignorer les termes d'advection car il existe toujours une région où ils sont non négligeables; mais un modèle *local*, étudiant la situation en un point précis, peut parfaitement omettre les termes non-linéaires voyant ainsi exclus de son domaine de validité les points d'amphidromie et la proximité des côtes. Cette remarque s'applique tout spécialement à l'équation d'Ekman qui sera établie ci-dessous et il importe de la garder constamment à l'esprit.

Une discussion plus détaillée des ordres de grandeur des termes d'advection peut être trouvée dans Nihoul [Nihoul (1977a)].

Après suppression des termes non-linéaires d'advection, il reste :

$$\begin{array}{l}
 (1.10) \\
 (1.11) \quad (II) \\
 (1.9)
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u_1}{\partial t} = f u_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{v} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}) \\
 \frac{\partial u_2}{\partial t} = - f u_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{v} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}) \\
 0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} - g .
 \end{array} \right.$$

D'une part Freeman [Freeman (1972)] et Cheng [Cheng (1976)] utilisent les équations du groupe I auxquelles ils ajoutent encore les termes de viscosité turbulente horizontale (*cf.* ci-dessus).

Nihoul utilise les équations du type I où les termes d'advection sont pris en compte par une procédure itérative [Nihoul (1977a), Nihoul et Runfola (1978)].

Beaucoup d'autres auteurs [Forristall (1974), Gedney et Lick (1972), Jelesnianski (1970), Liggett et Hadjithodorou (1969), Witten et Thomas (1976)] utilisent les équations du groupe II.

Dans l'étude qui suit nous nous limiterons également aux équations II.

L'équation (1.9) s'intègre de  $x_3$  à  $\zeta$  pour obtenir :

$$(1.12) \quad p = p_a + \rho g(\zeta - x_3)$$

puisque  $\rho$  est supposé garder une valeur constante.  $p_a$  est la pression atmosphérique, fonction de  $x_1$ ,  $x_2$  et  $t$ . On reconnaît aisément en

(1.12) la distribution hydrostatique linéaire, admise à l'hypothèse n° 5; les simplifications opérées sur base des ordres de grandeur des divers termes constituent donc la justification de l'hypothèse 5.

Utilisant (1.12), on peut éliminer la pression de (1.10) et (1.11) :

$$(1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = f u_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \end{array} \right.$$

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} = -f u_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right). \end{array} \right.$$

Ces équations sont remarquables car

- elles sont linéaires en  $u_1$  et  $u_2$ ,
- elles ne font plus intervenir les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  devant  $u_1$  et  $u_2$ .

Elles sont appelées équations classiques d'Ekman [Ekman (1905)].

Puisque ces équations ne font plus intervenir  $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial u_i}{\partial x_2}$ , elles constituent les équations d'un modèle *local* pour lequel la remarque de la page 15 s'applique (validité à l'exclusion de certains points). Les variables  $x_1$  et  $x_2$  passent au second plan et seront souvent ignorées par la suite lors de l'utilisation de cette équation.

En vue de simplifier l'écriture, on introduit le formalisme des nombres complexes, en posant :

$$(1.15) \quad u = u_1 + i u_2 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\phi = - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) .$$

(1.13) et (1.14) se combinent pour donner l'équation unique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - i f u - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$$

ou

$$(1.16) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = - i f u + \phi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) .$$

### 3.3.- Equation de conservation de l'énergie

Cette équation n'est utile que si l'on étudie un éventuel transfert de température et une modification subséquente de la masse spécifique  $\rho$  [Cheng (1976)]. Cette équation peut aussi être avantageusement remplacée par l'équation régissant l'évolution de la poussée [e.g. Nihoul (1977b)].

### 3.4.- Equation de dispersion d'un élément en suspension

On se limite dans ce cas à la dispersion d'un constituant semi-passif dont la concentration  $c$  suit alors l'équation d'évolution classique [e.g. Nihoul (1977b)] :

$$(1.17) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 c)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 c)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 c)}{\partial x_3} = Q - kc + m \frac{\partial c}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\kappa} \frac{\partial c}{\partial x_3})$$

où  $Q$  est le taux de production-destruction au sein du milieu,  $-kc$  est le terme de production-destruction de l'élément par lui-même, semblable à la désintégration radioactive,  $m$  est la vitesse de migration verticale (on a négligé une éventuelle migration horizontale),  $\tilde{\kappa}_H$  et  $\tilde{\kappa}$  sont les diffusivités turbulentes horizontale et verticale.

Cette équation sera abondamment utilisée dans le chapitre V.

### 3.5.- Equation de l'élévation de la surface

La vitesse verticale  $u_3$  vaut en surface :

$$(1.18) \quad u_{3s} = \frac{D\zeta}{Dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{1s} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u_{2s} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$$

et au fond :

$$(1.19) \quad u_{3b} = - \frac{Dh}{Dt} = - \frac{\partial h}{\partial t} - u_{1b} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - u_{2b} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} .$$

[L'équation (1.19) se réduit généralement à  $0 = 0$  car au fond la vitesse  $u$  s'annule et  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$ .]

D'autre part, intégrant (1.1) de  $-h$  à  $\zeta$  par rapport à  $x_3$  et prenant garde lors de la permutation des dérivées et des intégrales, on

obtient :

$$\frac{\partial(H\bar{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H\bar{u}_2)}{\partial x_2} - u_{1s} \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} - u_{2s} \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} - u_{1b} \frac{\partial h}{\partial x_1} - u_{2b} \frac{\partial h}{\partial x_2} + u_{3s} - u_{3b} = 0$$

où

$$(1.20) \quad \bar{u}_1 = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u_1 dx_3$$

et

$$(1.21) \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u_2 dx_3$$

utilisant (1.18) et (1.19), cette relation se simplifie :

$$(1.22) \quad \frac{\partial(H\bar{u}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(H\bar{u}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

Cette équation de continuité, qui traduit la conservation de la masse dans la colonne d'eau, ne fait plus intervenir  $u_3$  mais contient  $H = h + \zeta$ . Puisque la bathymétrie du milieu est connue, l'équation (1.22) constitue une équation liant  $\bar{u}_1$ ,  $\bar{u}_2$  et  $\zeta$ .

#### 4.- Le problème à résoudre et les grandes classes de modèles tridimensionnels

Mis à part le problème thermique, la variabilité de la masse spécifique et la dispersion, le problème actuel est d'aboutir à la connaissance des fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = u_1 + i u_2, u_3, \tilde{v} \text{ et } p & \text{de } x_1, x_2, x_3 \text{ et } t \\ \tau_b, \zeta, \bar{u} = \bar{u}_1 + i\bar{u}_2 & \text{de } x_1, x_2 \text{ et } t \end{array} \right.$$

où  $\tau_b$  est la tension de cisaillement au fond :

$$(1.23) \quad \tau_b = \tau_{b1} + i \tau_{b2} = (\tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3})_{x_3 = -h}$$

Pour la résolution, on dispose des équations précédentes réunies dans le tableau suivant.

N°	Origine de l'équation	Fonctions y intervenant	Variables
(1)	Continuité	$\overline{u}$ $u_1, u_2, u_3$	} $x_1, x_2, x_3$ et $t$
(16)	Deux premières équations de Navier-Stokes ou équation d'Ekman	$u, \zeta, \tilde{v}$	
(12)	Distribution hydrostatique de la pression	$p, \zeta$	
(22)	Equation de continuité intégrée sur la profondeur	$\zeta, \overline{u_1}, \overline{u_2}$	} $x_1, x_2$ et $t$
(23)	Définition de $\tau_b$	$\tau_b, \tilde{v}, u$	

Une résolution de principe serait la suivante :

Si l'on se fixe *a priori* la fonction  $\tilde{v}$ , c'est-à-dire si l'on paramétrise initialement la viscosité turbulente, on peut tout d'abord rechercher  $u$  et  $\zeta$  en résolvant simultanément (1.16) et (1.22) grâce aux conditions initiales et limites :

- $u = u_0$  et  $\zeta = \zeta_0$  pour  $t = 0$ .
- $\tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \tau_s$  en  $x_3 = \zeta$ ;  $\tau_s$  est la tension de cisaillement due au vent, calculée à partir de la vitesse du vent (donnée météorologique) moyennant l'utilisation d'une paramétrisation convenable [e.g. Ronday (1976)].
- $u = 0$  en  $x_3 = -h + z_0$  où  $z_0$  est la hauteur de rugosité au fond.
- Conditions aux frontières appropriées :
  - côte, île,
  - rivière, estuaire,
  - mer ouverte.

A ce stade, on peut alors comparer les profils de  $u$  obtenus avec les profils observés et ajuster la paramétrisation de  $\tilde{v}$  de manière à obtenir un meilleur accord avec les observations. L'idéal serait d'aboutir à un principe variationnel qui dicterait la paramétrisation optimale.

Ensuite, par des calculs plus ou moins simples, on déduit

$$u_3 \quad \text{par} \quad (1.1),$$

$$\overline{u} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\zeta} u \, dx_3 \quad \text{par} \quad (1.20) \text{ et } (1.21),$$



$$P \quad \text{par} \quad (1.12)$$

et  $\tau_b$  par (1.23).

A ce stade, on peut comparer les valeurs de  $\tau_b$  et de  $\bar{u}$ , en déduire une relation mutuelle ou tester l'exactitude d'une relation déjà existante par exemple [Nihoul et Ronday (1976)] :

$$\tau_b = - m \tau_s + D |\bar{u}| \bar{u} .$$

Au total, le problème n'a pas suffisamment de données théoriques, la théorie de la turbulence ne fournit pas la fonction  $\tilde{v}$ . Une paramétrisation s'impose pour fermer le modèle. Dans la littérature, on peut relever les paramétrisations suivantes, si l'on écrit

$$\tilde{v} = H^2 \sigma(x_1, x_2, t) \times \lambda(x_3) ,$$

dissociant ainsi la viscosité turbulente en un produit d'une fonction de  $x_3$  par une fonction des autres variables.

$$H^2 \sigma(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \text{une constante} \\ \kappa H |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{[Nihoul (1977a)]}$$

$$\lambda(x_3) = \left\{ \begin{array}{l} \text{une constante} \quad \text{[Welander (1957), Jelesnianski (1970),} \\ \quad \text{Forristall (1974), ...]} \\ \text{une fonction étagée} \quad \text{[Cheng (1976)]} \\ \text{une loi linéaire [Thomas (1975)] ou linéaire par} \\ \quad \text{morceaux [Davies (1977)]} \\ \text{une loi exponentielle} \quad \text{[Witten et Thomas (1976)]} \\ \text{une loi parabolique} \quad \text{[Nihoul (1977a)]} . \end{array} \right.$$

Les auteurs ajustent la constante ou les coefficients des lois choisies de manière à obtenir *a posteriori* un accord satisfaisant avec les résultats expérimentaux.

Du point de vue numérique, la difficulté ne réside pas dans le choix de  $\sigma$  et  $\lambda$  mais, avant cela, dans la résolution simultanée des équations (1.16) et (1.22); l'équation (1.16) est en réalité une double équation à quatre dimensions :  $x_1, x_2, x_3$  et  $t$  [on note  $3D + t$ ].

Pour surmonter cette difficulté, plusieurs modèles ont été présentés; ceux-ci peuvent être classés en trois grandes catégories.

1°) Modèles 3D + t

Le modèle s'attaque dans ce cas à la résolution des équations précitées à quatre dimensions. L'auteur se heurte de suite :

- à la disproportion entre les variations de  $x_1$  et  $x_2$  ( $\sim 10^5$  m) et  $x_3$  ( $\sim 10^2$  m) ;

- au nombre impressionnant de noeuds de discrétisation (maillage tridimensionnel).

Il utilise alors un remède :

- soit il construit un modèle en couches et supprime les deux difficultés ci-dessus [Cheng (1976) : couches de type I ou de type II, cf. détails plus loin].

- soit il utilise une transformation de la coordonnée  $x_3$  de manière à simplifier le maillage [Freeman (1972) :  $\sigma = \frac{-x_3 + \zeta}{h + \zeta} \Rightarrow 0 \leq \sigma \leq 1$ ].

L'avantage de tels modèles est de pouvoir garder les termes en  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  sans trop de problèmes et donc de garder les termes d'advection et de viscosité horizontale.

2°) Modèles 1D + t et, ensuite, 2D + t : ou modèles du type Ekman

Principe

Dans (1.16),  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial u}{\partial x_2}$  n'interviennent pas; il est donc possible de figer  $x_1$  et  $x_2$  et de résoudre *analytiquement* cette équation; on garde les termes  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{P_a}{\rho} + g\zeta \right)$  et  $\tau_s$  comme "coefficients" littéraux dans la solution, ne pouvant encore attribuer de valeur à

$$\Phi = - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{P_a}{\rho} + g\zeta \right) .$$

On calcule ensuite  $\tau_b$  par dérivation de  $u$ , on intègre l'équation (1.16) sur la profondeur et on résout le modèle "classique" 2D + t à deux dimensions spatiales, où on a attribué à  $\tau_b$  sa valeur exacte.

Malheureusement la solution analytique est malaisée; cette solution, dans le cas de  $\tilde{v}$  constant, peut se trouver dans l'article de

Jelesnianski (1970), Appendice A. Aussi, les modèles de Liggett (1969), Gedney (1972), Witten (1976) se limitent au cas stationnaire conduisant à une équation différentielle ordinaire; la recherche de la solution analytique est alors grandement facilitée.

Les *désavantages* de ces modèles sont :

- la recherche d'une solution analytique d'une équation aux dérivées partielles de type parabolique;
- la nécessité d'éliminer les termes d'advection avant toute résolution.

Les *remèdes* sont :

- se limiter au cas stationnaire mais c'est alors restreindre fortement le champs d'application du modèle;
- négliger les termes non-linéaires lors d'une première résolution et, en tenir compte comme forces extérieures, lors d'une seconde résolution [Nihoul et Runfola (1978)].

L'*avantage* évident de ces modèles est la non-paramétrisation de  $\tau_b$ .

En outre, il convient de citer le modèle original de Jelesnianski (1970). Celui-ci ne se limite pas au problème stationnaire mais se désintéresse du profil de  $u$  suivant  $x_3$  pour ne s'attacher qu'à la connaissance de

$$\tau_b = \left[ \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3 = -h} .$$

Son résultat est une intégrale de convolution dépendant de manière littérale des forces extérieures  $\tau_s$  et  $\Phi$ . Cette connaissance exacte de  $\tau_b$  lui permet de se lancer ensuite dans le problème de la résolution du modèle 2D + t.

### 3°) Modèles 2D + t et, ensuite, 1D + t :

Ces modèles sont cités en dernier lieu car plus récents que les précédents.

### Principe

On intègre (1.16) sur la profondeur, faisant ainsi apparaître la nouvelle inconnue  $\bar{u}(x_1, x_2, t)$  et  $\tau_b$ , la tension de cisaillement au fond. On s'attache à résoudre en premier lieu le problème 2D + t ainsi obtenu. Mais, pour entamer les calculs numériques, il est nécessaire de paramétriser  $\tau_b$ . Par exemple, on lie  $\tau_b$  à  $\bar{u}$  comme le révèle les observations. Plusieurs lois ont été présentées :

i) linéaire :

$$\tau_b = r \frac{\bar{u}}{\rho} \quad [\text{Forristall (1974)}]$$

avec  $r = \frac{\pi^2}{4} \frac{\nu}{h^2}$  dû à Fisher (1959);

ii) quadratique :

$$\tau_b = (-m \tau_s) + D |\bar{u}| \bar{u} \quad [\text{Cheng (1976), Runday (1976) et Nihoul (1977b)}]$$

La résolution du modèle 2D + t peut être entreprise numériquement, donnant pour résultats  $\bar{u}$  et  $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$ . Connaissant cette dernière fonction de  $x_1, x_2, t$ , on peut résoudre numériquement le problème 1D + t. Du profil de  $u$  suivant la profondeur, on déduit  $\tau_b$  par

$$\tau_b = \left[ \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_{x_3 = -h}$$

Le désavantage de cette catégorie de modèles est la paramétrisation initiale de  $\tau_b$ . Mais les avantages sont non-négligeables :

- possibilité d'utiliser des résultats d'un modèle 2D + t déjà existant;
- résolution numérique et non analytique de l'équation (1.16);
- possibilité de prise en compte des termes non-linéaires par itérations successives [Nihoul et Runfola (1978)].

Si l'on suit la logique du schéma de principe des calculs adopté jusqu'ici, il ressort que :

- l'optimisation de  $\sigma$  et  $\lambda$  doit se faire par comparaison des profils  $u$  avec les observations;
- l'optimisation de  $\tau_b$  doit se faire par comparaison des résultats finaux avec la paramétrisation initiale (comparaison entre la sortie et l'entrée, sans recours aux observations).

Mais, une idée tout aussi valable serait la réciproque :

- l'optimisation de  $\sigma$  et  $\lambda$  par comparaison de  $\tau_{b_{in}}$  avec  $\tau_{b_{out}}$ ,
- l'optimisation de  $\tau_{b_{in}}$  par comparaison des profils  $u$  avec les observations.

A ce sujet, le modèle de Nihoul (1977a) utilise une variante dans les conditions limites modifiant le raisonnement ci-dessus (cf. détails plus loin).

##### 5.- Les divers modèles et leurs particularités

Ce paragraphe a pour but de passer en revue certains modèles et de relever pour chacun d'eux :

- les hypothèses spécifiques au modèle,
- les originalités,
- les limitations,
- les résultats obtenus,

et d'y apporter certaines remarques complémentaires.

##### 1°) Modèles 3D + t

##### Freeman, Hale et Danard (1972)

Les auteurs ont en vue la résolution du problème en conservant :

- les termes non-linéaires d'advection,
- les termes de viscosité horizontale,
- une variation possible de la masse spécifique sur la profondeur.

Ils introduisent la variable adimensionnelle  $\sigma$  normalisée sur la profondeur :



$$\sigma = \frac{-x_3 + \zeta}{h + \zeta} \quad \sigma = 0 \text{ en surface, } \sigma = 1 \text{ au fond,}$$

et la vitesse verticale associée à cette variable

$$\omega = \frac{d\sigma}{dt},$$

devant s'annuler à la surface et au fond, par définition de  $\sigma$ .

Ils opèrent ce changement de variables et de fonctions puis se fixent les conditions initiales et limites :

-  $u_1 = u_2 = \omega = 0$  en  $t \leq 0$  ;

-  $\zeta = 0$  ,  $\rho = \rho(\sigma)$  en  $t \leq 0$  ;

-  $u_1 = u_2 = \omega = 0$  sur les frontières latérales; celles-ci ne peuvent donc former qu'une côte d'un bassin fermé. Cette limitation est très restrictive;

- au fond,  $\tau_b = 0$  , arguant que  $|\tau_b| \ll |\tau_s|$  ; cette hypothèse est très discutable si la profondeur est faible ou si les courants de marée sont comparables aux courants engendrés par le vent (les marées sont naturellement exclues dans un bassin fermé de taille habituelle);

- en surface,

$$\tau_s = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}}} C [|U_1| U_1 + i |U_2| U_2] ;$$

cette paramétrisation de la tension due au vent n'est pas correcte car  $\tau_s$  n'est pas parallèle à la vitesse du vent  $U = U_1 + i U_2$  et dépend de l'orientation du système d'axes horizontaux. Une paramétrisation correcte serait :

$$\tau_s = \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}}} C |U_1 + i U_2| (U_1 + i U_2) .$$

La résolution numérique par différences finies utilise un maillage tridimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \Delta y = 13 \text{ km} \\ \Delta \sigma = 0,2 \text{ (soit } \Delta x_3 = 15 \text{ m pour une profondeur de } 75 \text{ m)} \end{array} \right.$$

la taille horizontale des mailles (ordre de grandeur habituel) induit un lissage exagéré des dérivées

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1} , \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_2}$$

c'est pourquoi, les auteurs ont choisi une viscosité turbulente  $\tilde{\nu}_H$  élevée :

$$\tilde{\nu}_H = 10^3 \text{ m}^2/\text{s}$$

afin de rétablir l'importance réelle des termes de viscosité turbulente horizontale. Une telle correction n'a pas été apportée aux termes non-linéaires :

$$u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2}$$

et il faut craindre une sous-estimation de ceux-ci.

Les auteurs se limitent à la résolution de deux cas simplifiés :

- cas I : vent constant, profondeur constante (75 m), masse spécifique variable avec la profondeur;
- cas II : vent constant, profondeur variable, masse spécifique constante ( $1000 \text{ kg/m}^3$ ).

Cependant Gedney et Lick (1972) font remarquer que le profil de vitesse suivant la profondeur dépend davantage de la bathymétrie que de la variation de la masse spécifique; le cas I ci-dessus doit donc être considéré comme académique.

Les auteurs ont l'espoir de surmonter les problèmes numériques qui surgissent lors de la résolution du cas général : profondeur et masse spécifique variables.

En résumé, ce modèle présente :

les avantages

- de conserver les termes non-linéaires d'advection (peut-être sous-estimés);
- d'introduire une viscosité turbulente horizontale  $\tilde{\nu}_H$  ;

et les désavantages

- de fixer la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$  à une constante,

- de négliger totalement la tension de fond  $\tau_b$  ;
- d'utiliser une paramétrisation fautive de la tension due au vent;
- de limiter l'étude aux lacs (frontières-côtes).

Cheng, Powell et Dillon (1976)

Il s'agit ici d'un modèle 3D + t à considérer comme généralisant un modèle 2D + t perfectionné car les variations des fonctions suivant la profondeur sont stylisées par un modèle en couches. D'autre part, le modèle admet :

- les termes non-linéaires d'advection,
- une viscosité turbulente horizontale constante et d'effet petit,
- une variation de la température provoquant une stratification (variation de la masse spécifique).

Le modèle se scinde en trois modèles séparés :

- i) modèle à une seule couche : il s'agit ici d'un modèle 2D + t perfectionné (termes non-linéaires pris en compte, gradient thermique éventuel, effet de viscosité turbulente horizontale non négligé);
- ii) modèle multi-couche I (*multi-level model*) où les couches successives sont fixées au départ, les interfaces restent invariantes; dans chaque couche, la masse spécifique et la vitesse horizontale sont assimilées à leur valeur moyenne sur l'épaisseur de la couche et varient dans le temps;
- iii) modèle multi-couche II (*multi-layer model*) où les interfaces sont libres de se mouvoir mais, à l'intérieur de chaque couche, la masse spécifique et la vitesse  $y$  sont assimilées à leur valeur moyennes constantes.

En résumé, ce modèle présente :

les avantages

- de pouvoir étudier une situation très générale,
- de donner un embryon de variation à la viscosité turbulente tant horizontale que verticale (fonctions étagées);

les désavantages

- de devoir paramétriser la tension au fond comme le requiert tout modèle bidimensionnel,

- de devoir choisir *a priori* le nombre et la disposition des couches; ce choix est très difficile pour l'utilisateur. En effet, par exemple, dans une mer stratifiée, la profondeur de la thermocline dépend étroitement de l'intensité de la turbulence dans la couche supérieure et donc de la tension de cisaillement du vent. Il existe donc un lien entre la profondeur de la thermocline et la tension due au vent mais cette relation est encore ignorée. D'autre part, en l'absence de vent, dans une mer à faibles marées, on peut observer une stratification régulière de la colonne d'eau [e.g. Nihoul (1977b)]; dans ce cas, la distinction entre différentes couches n'a plus guère de signification.

## 2°) Modèles 1D + t et, ensuite, 2D + t

### Liggett et Hadjitheodorou (1969)

Les auteurs considèrent

- i) un lac rectangulaire à profondeur variable,
- ii) pour lequel la viscosité verticale  $\tilde{\nu}$  est constante,
- iii) dans un état stationnaire,
- iv) non-soumis à un gradient de pression atmosphérique.

Toutes ces conditions rendent le modèle trop simple et une comparaison avec les observations ne peut être faite. Ce modèle doit être considéré comme une tête de file conduisant à une lignée de modèles successifs dissipant une à une ces conditions trop restrictives.

### Gedney et Lick (1972)

Ce modèle est une généralisation du précédent à un bassin de forme quelconque; les auteurs illustrent leur modèle sur le lac Erié, en tenant compte des îles. Mais les limitations sont encore sévères :

- i) viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$  constante,
- ii) état stationnaire,
- iii) aucun gradient de pression atmosphérique.

Les résultats représentent au mieux la réalité si  $\tilde{\nu} = 3,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ; dans ce cas, l'accord des vitesses est bon tant en grandeur qu'en direction, excepté en certains points particuliers où les



auteurs craignent des erreurs de mesure des observations. Peut-être les termes non-linéaires sont-ils non négligeables à ces endroits ?

Witten et Thomas (1976)

Ce modèle prolonge le précédent en donnant à la viscosité turbulente verticale une forme exponentielle :

$$\tilde{\nu} = \tilde{\nu}_0 \exp(ax_3) ,$$

la valeur maximale étant atteinte en surface.

Mais le problème est toujours restreint

- i) au cas stationnaire,
- ii) sans aucun gradient de pression atmosphérique.

Le modèle est illustré par deux exemples simples :

- bassins infini à profondeur constante,
- bassin elliptique à pente constante,

mais est plus général et peut résoudre des problèmes à géométrie et bathymétrie quelconques.

Remarque

La loi exponentielle de  $\tilde{\nu}$  n'est pas heureuse;

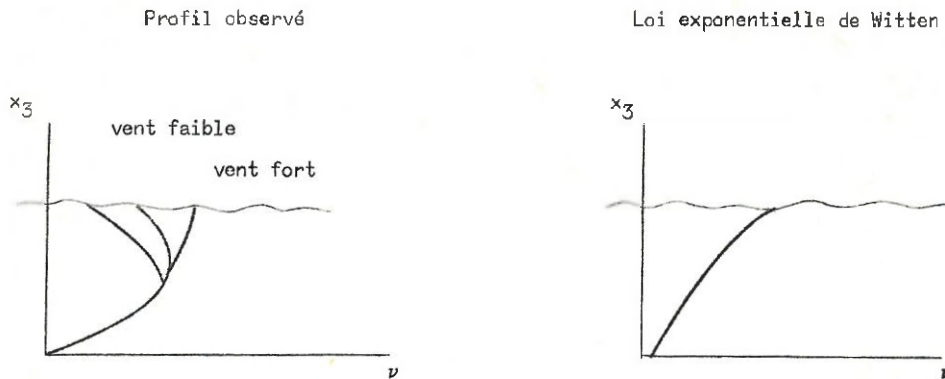
En effet, si l'on paramétrise de mieux en mieux la variation verticale de la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$ , on peut distinguer plusieurs étapes de raffinement :

- une première approche est la loi  $\tilde{\nu} = \text{constante}$  où la constante est ajustée à la valeur moyenne de  $\tilde{\nu}$  sur la profondeur [Gedney et Lick (1972)];

- une seconde approche est la loi linéaire tenant en compte la valeur moyenne et la variation moyenne sur la profondeur [Thomas (1975)];

- une troisième approche consiste à tenir compte à la fois de la valeur moyenne, de la variation moyenne et de la courbure du profil de  $\tilde{\nu}$  avec la profondeur.

Or les observations montrent [Bowden (1965), Roday (1976)] que  $\tilde{\nu}$  croît d'abord linéairement à partir du fond et plafonne ensuite vers une valeur constante dans la couche de surface (vent fort) ou diminue et atteint une valeur minimale en surface (vent faible).



Le profil de Witten ne respecte donc ni le début linéaire à partir de zéro au fond, ni la courbure, ni l'éventuelle décroissance en surface de la loi observée de  $\tilde{v}$  ; la forme exponentielle de ce modèle n'apportera donc pas de meilleurs résultats que ceux obtenus par la loi linéaire de Thomas (1975).

Ici, il convient de noter la loi en  $(x_3 + h)^{3/4}$  proposée par Fjeldstad (1929), la loi parabolique proposée par Nihoul (1977a) et la loi hyperbolique qui sera utilisée plus loin (loi de Michaelis-Menten-Monod ou loi de Mellor-Yamada).

Welander (1957), Jelesnianski (1970)

Ces modèles sont dans la lignée des précédents et libèrent la contrainte draconienne du cas stationnaire. Vu l'importance de ces modèles et de leurs conséquences, leur discussion est rejetée dans le second chapitre.

3°) Modèles 2D + t et, ensuite, 1D + t

Nihoul (1977a)

L'auteur suppose le modèle 2D + t entièrement résolu sur base d'une paramétrisation convenable de  $\tau_b$ , par exemple :

$$\tau_b = -m \tau_s + D |\bar{u}| \bar{u} .$$

Le but essentiel de ce modèle est de traiter les calculs de résolution du modèle 1D + t avec une viscosité turbulente  $\tilde{v}$  variable dont la loi générale n'est pas précisée totalement :

$$\tilde{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \kappa H |\tau_b(x_1, x_2, t)|^{\frac{1}{2}} \lambda(x_3)$$

$\lambda(x_3)$  étant laissé arbitraire mais physiquement admissible (croissance linéaire à partir du fond et courbure dans le sens convenable).

Ce modèle est la base de ce travail; son étude sera donc approfondie ultérieurement et certains prolongements seront apportés à cette occasion (chapitre III).

#### Forristall (1974)

- Ce modèle s'attaque d'abord à la résolution du modèle 2D + t
- en supposant le gradient de pression atmosphérique négligeable;
  - en prenant  $\tilde{v} = \text{constante}$ .

Dans une première version, la tension de cisaillement  $\tau_b$  est paramétrisée par la loi linéaire :

$$\tau_b = \frac{\pi^2}{4} \frac{\tilde{v}}{h^2} \bar{u} ,$$

utilisant le coefficient de Fisher (1959).

Dans une seconde version, l'auteur utilise les résultats de Jelesnianski (1970) :  $\tau_b$  égale la somme d'intégrales de convolution où interviennent l'histoire antérieure de  $\tau_b$  et  $\phi$ . Après résolution du modèle 2D + t, le profil de  $u$  est calculé numériquement en utilisant les formules de Jelesnianski (1970) fournissant les courants horizontaux.

Au large, loin des côtes, les résultats obtenus par les deux versions diffèrent en général de moins de 10 % ; en traitant des cas très simplifiés pour lesquels existent des solutions analytiques, les auteurs ont montré que la seconde version conduisait évidemment aux meilleurs résultats et préfèrent donc utiliser celle-ci bien qu'elle occasionne une augmentation du nombre de calculs.

#### Remarque

La seconde version du modèle de Forristall revient à résoudre d'abord partiellement un modèle 1D + t, ensuite le modèle 2D + t et, enfin, achever la résolution du modèle 1D + t :

1D + t partiel → 2D + t → 1D + t  
(calcul de  $\tau_b$ ) (calcul de  $\bar{u}$ ) [calcul de  $u(x_3)$ ]  
↑ ↑  
Formule de Jelesnianski Formule de Jelesnianski  
pour  $\tau_b$  pour  $u$



## Chapitre II

### Modèles de Welander, Jelesnianski et Forristall

Le but de ce chapitre est d'étudier le modèle de Welander (1957), prolongé et appliqué par Jelesnianski (1970) et Forristall (1974). L'accent sera placé sur le modèle et ses résultats, les applications seront passées sous silence car celles-ci ne nous intéressent pas directement.

Nous prolongerons certains calculs de manière à mettre en évidence la faiblesse d'un tel modèle basé sur une viscosité turbulente verticale prise égale à une constante.

Afin de remédier à cette faiblesse, nous étudierons la manière de paramétriser ce coefficient et nous appliquerons ensuite la paramétrisation ainsi choisie en construisant un modèle modifié, plus proche de la réalité.

Les résultats de ce modèle seront étudiés en termes de temps de réponse du système marin à des modifications extérieures tenant compte de son inertie propre.

#### 1.- Le modèle de Welander

Dans la version originale de 1957, Welander s'attache à résoudre l'équation classique d'Ekman (1.16)

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\phi(t) - i f u + \frac{\partial}{\partial z} \left( \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

où  $\tilde{\nu}$  est égal à une constante notée  $\nu$  et

$$\phi(t) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right) ,$$

accompagnée des conditions initiale :  $u = 0$  pour  $t \leq 0$  et limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_s(t) & \text{en surface } (z = 0) \\ u = 0 & \text{au fond } (z = -h) . \end{array} \right.$$

Pour ce faire, il utilise les résultats de Fjeldstad (1930) et Hidaka (1933). Ces derniers auteurs ont écrit la solution du même problème dans le cas où la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  est assimilée à une constante et où les fonctions  $\phi(t)$  et  $\tau_s(t)$  sont des fonctions échelons unitaires de Heaviside.

Welander superpose de telles solutions particulières afin de calculer la solution du problème fixé pour lequel  $\tau_s(t)$  et  $\phi(t)$  sont des fonctions quelconques du temps. Cette superposition basée sur le théorème de Duhamel est délicate.

Finalement, la solution apparaît comme la somme de deux intégrales de convolution, la première contenant le terme d'élévation de la surface et du gradient de pression atmosphérique

$$-\phi(t) = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{p_a}{\rho} + g\zeta \right)$$

et la seconde la tension de cisaillement due au vent  $\tau_s(t)$  ; le profil de vitesse avec la profondeur est donc dépendant de l'histoire de ces deux forces extérieures agissant sur le système.

## 2.- Les modèles de Jelesnianski et de Forristall

Jelesnianski (1970) a montré qu'il était possible de trouver la même solution de l'équation d'Ekmán par utilisation de la transformée de Laplace. Après avoir calculé le profil de la vitesse  $u$  avec la profondeur, il s'attache à calculer la tension sur le fond  $\tau_b(t)$  et la vitesse moyenne  $\bar{u}(t)$ , par dérivation et intégration respectivement [cf. (1.23), (1.20) et (1.21)].

Les résultats de ces calculs se résument à :

$$(2.2) \quad \tau_b = \frac{2v}{H} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau - v\beta_n^2\tau) d\tau$$

$$+ \frac{2v}{H} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \phi(t-\tau) \exp(-if\tau - v\beta_n^2\tau) d\tau$$

et

$$(2.3) \quad \bar{u} = \frac{2}{H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau - v\beta_n^2\tau) d\tau$$

$$+ \frac{2}{H^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\beta_n^2} \int_0^t \phi(t-\tau) \exp(-if\tau - v\beta_n^2\tau) d\tau$$

où  $\beta_n = \frac{\pi}{H} (n + \frac{1}{2})$ .

$\tau_b$  et  $\bar{u}$  sont donc deux fonctions du temps, dépendant de l'histoire antérieure de  $\tau_s$  et  $\phi$ , les noyaux des intégrales de convolution étant des sommes d'exponentielles. Ces noyaux étant difficilement utilisables, Jelesnianski et Forristall ont proposé des simplifications visant à ne retenir que le premier ou les deux premiers termes de chaque série, en choisissant de nouveaux coefficients au mieux :

par exemple,  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \exp(-v\beta_n^2\tau)$  est assimilé à

$$A [\exp(-v\beta_0^2\tau) - \exp(-v\beta_1^2\tau)]$$

et la constante  $A$  est choisie de manière à conserver la valeur moyenne de la fonction :

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \beta_n \exp(-v\beta_n^2\tau) d\tau = A \int_0^{\infty} [\exp(-v\beta_0^2\tau) - \exp(-v\beta_1^2\tau)] d\tau$$

c'est-à-dire

$$A = \frac{1}{H} \frac{9\pi^2}{64} = 1,3879 \frac{1}{H}.$$

En procédant de la même manière pour chaque noyau, Jelesnianski obtient la relation fonctionnelle suivante permettant de calculer  $\tau_b$  à partir de  $\tau_s$  et  $\phi$  :

$$(2.4) \quad \tau_b = 2,7758 \frac{v}{H^2} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau) \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) - \exp\left(-\frac{9\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) \right] d\tau \\ + 2,4674 \frac{v}{H} \int_0^t \phi(t-\tau) \exp\left(-if\tau - \frac{v\pi^2 \tau}{4H^2}\right) d\tau .$$

Forristall modifie la dépendance de  $\tau_b$  vis-à-vis de  $\tau_s$  de manière à mieux placer la valeur maximale du noyau; il obtient :

$$(2.5) \quad \tau_b = 3,1416 \frac{v}{H^2} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau) \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) - \exp\left(-\frac{11,5 v\tau}{H^2}\right) \right] d\tau \\ + 2,4674 \frac{v}{H} \int_0^t \phi(t-\tau) \exp\left(-if\tau - \frac{v\pi^2 \tau}{4H^2}\right) d\tau .$$

Il nous semble logique de poursuivre le même raisonnement à partir de l'expression (2.3) de  $\bar{u}$ ; en procédant de manière analogue, nous déduisons deux expressions similaires pour  $\bar{u}$  :

$$(2.6) \quad \bar{u} = 1,3879 \frac{1}{H} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau) \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v\tau}{4H^2}\right) - \exp\left(-\frac{9\pi^2 v\tau}{4H^2}\right) \right] d\tau \\ + 0,8225 \int_0^t \phi(t-\tau) \exp\left(-if\tau - \frac{\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) d\tau$$

et, si l'on désire mieux placer la valeur maximale du noyau :

$$(2.7) \quad \bar{u} = 1,5708 \frac{1}{H} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-if\tau) \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v\tau}{4H^2}\right) - \exp\left(-\frac{11,5 v\tau}{H^2}\right) \right] d\tau \\ + 0,8225 \int_0^t \phi(t-\tau) \exp\left(-if\tau - \frac{\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) d\tau .$$

L'élimination de l'intégrale de convolution où intervient le terme  $\phi$  entre (2.4) et (2.6) ou (2.5) et (2.7) permet d'obtenir deux relations donnant explicitement  $\tau_b$  en fonction de  $\bar{u}$  et de  $\tau_s$ . Limitons-nous à la seconde d'entre elles, la plus précise puisque résultat de simplifications plus judicieuses :

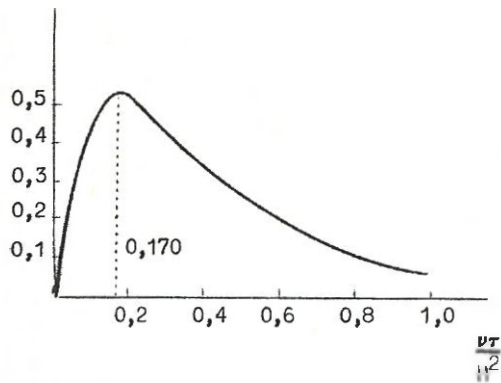


$$(2.8) \quad \tau_b = 3 \frac{v}{H} \bar{u} - 1,5708 \frac{v}{H^2} \int_0^t \tau_s(t - \tau) \exp(-i\tau) \times \\ \times \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v}{4H^2} \tau\right) - \exp\left(-\frac{11,5 v}{H^2} \tau\right) \right] d\tau .$$

De cette dernière relation liant  $\tau_b$ ,  $\bar{u}$  et l'histoire de  $\tau_s$ , nous concluons que  $\tau_b$  ne semble pas dépendre de l'histoire temporelle de  $\bar{u}$  mais être uniquement lié à sa valeur instantanée; ceci est une conséquence directe des approximations des noyaux des intégrales; en réalité, comme nous le verrons ultérieurement,  $\tau_b$  dépend de l'histoire immédiate de  $\bar{u}$ , remontant à environ deux minutes, et de l'histoire plus lointaine de  $\tau_s$ , remontant à environ deux à trois heures.

Le noyau de l'intégrale de convolution atteint un maximum pour

$$\tau = 0,170 \frac{H^2}{v}$$



En conséquence, de ce modèle, nous concluons que la vitesse moyenne  $\bar{u}$  est liée à la valeur instantanée de  $\tau_b$  mais dépend de l'histoire de  $\tau_s$  durant un temps caractéristique de l'ordre de :

$$(2.9) \quad t_* = 0,170 \frac{H^2}{v} .$$

Si l'on adopte comme Davies (1977)

$$v = 6,5 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s} \quad \text{pour} \quad H = 65 \text{ m} ,$$

on calcule

$$t_* = 1,1 \times 10^4 \text{ s} \quad \text{soit environ} \quad 3 \text{ heures} .$$

Une autre conclusion de la relation (2.8) est la dépendance linéaire entre  $\tau_b$  et  $\bar{u}$ ; ce fait est dû à la constance de  $v$  avec la profondeur et le temps, rendant le problème, et tous les résultats auquel il conduit, entièrement linéaires. Le coefficient de proportionnalité

$$k = \frac{3\nu}{H} \approx 3,0 \times 10^{-3} \text{ m/s} \quad [\text{pour les valeurs de Davies (1977)}]$$

est à rapprocher du coefficient de glissement liant empiriquement  $\tau_b$  à la vitesse au fond :

$$k = 2 \times 10^{-3} \text{ m/s} \quad [\text{Heaps (1972), Davies (1977)}].$$

Si, grâce à ce coefficient empirique, la loi linéaire donne un ordre de grandeur valable de  $\tau_b$ , les observations ont cependant montré qu'une loi quadratique était mieux adaptée :

$$\tau_b = D |\bar{u}| \bar{u} + \text{fonction de } \tau_s$$

[Heaps (1967), Runday (1976)]. Non seulement cette loi quadratique représente mieux le lien observé entre  $\tau_b$  et  $\bar{u}$  mais est aussi une conséquence directe du profil logarithmique des vitesses, également observé [Weatherly (1977)].

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad \div \quad u_* = |\tau_b|^{\frac{1}{2}}.$$

### 3.- Paramétrisation de la viscosité turbulente verticale $\tilde{\nu}$

Nous avons remarqué au paragraphe précédent qu'une version entièrement linéarisée du modèle tridimensionnel conduisait à des résultats incompatibles avec la loi quadratique liant  $\tau_b$  à  $\bar{u}$  et avec le profil logarithmique, faits qui ont été observés dans de très nombreuses situations. Il s'avère donc nécessaire de paramétriser la viscosité turbulente  $\tilde{\nu}$  avec davantage de circonspection.

Il est bien connu qu'en écoulement turbulent, près d'une paroi, s'établit un profil logarithmique de la vitesse : si l'on prend l'axe  $x_1$  dans le sens de la vitesse près du fond, la loi logarithmique s'écrit :

$$u_1 = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}$$

où  $z = x_3 + h$  est la cote comptée à partir du fond,  $u_* = |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$  est la vitesse de friction,  $z_0$  est la hauteur de rugosité à laquelle la vitesse s'annule virtuellement,  $\kappa$  est la constante de von Karman. On en déduit

par dérivation :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{z}$$

or, on définit la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$  par :

$$\tau_b = \tilde{\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

et donc, on peut ainsi obtenir une expression donnant la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$  près du fond :

$$u_*^2 = |\tau_b| = \tilde{\nu} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right| = \tilde{\nu} \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{z},$$

c'est-à-dire  $\tilde{\nu} = \kappa z u_*$

ou encore

$$(2.10) \quad \tilde{\nu} = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} (x_3 + h).$$

Il est donc évident que si l'on adopte une paramétrisation de  $\tilde{\nu}$  telle que, près du fond, elle s'identifie à (2.10), on obtiendra un modèle tridimensionnel qui conduira à un profil logarithmique près du fond et, donc, aussi à la loi quadratique entre  $\tau_b$  et  $\bar{u}$ .

Afin de rechercher cette paramétrisation, il est utile d'introduire ici la variable verticale réduite

$$(2.11) \quad \xi = \frac{x_3 + h}{z + h} = \frac{z}{H} \quad \xi_0 \leq \xi \leq 1.$$

L'expression (2.11) se transforme aisément :

$$(2.12) \quad \tilde{\nu} = \kappa H |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \xi.$$

Cette loi est valable au voisinage du fond. On peut songer à la généraliser à toute la colonne d'eau de deux façons :

i)

$$(2.13) \quad \tilde{\nu} = \kappa H |\tau|^{\frac{1}{2}} \ell(\xi)$$

où  $\tau$  est la tension de cisaillement à la cote  $\xi$  et  $\ell(\xi)$  est une fonction de  $\xi$  qui reste à choisir pourvu qu'elle obéisse à

$$(2.14) \quad \ell(\xi) \sim \xi \quad \text{pour } \xi \text{ petit } (\xi \sim 0).$$

La nouvelle paramétrisation de  $\tilde{v}$  (2.13) ainsi obtenue par généralisation de (2.12) permet de calculer la tension de cisaillement à la cote  $\xi$  ; en effet, par définition de  $\tilde{v}$ , on peut écrire :

$$(2.15) \quad \tau = \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\tilde{v}}{H} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

remplaçant  $\tilde{v}$  par sa paramétrisation (2.13)

$$\tau = \kappa |\tau|^{\frac{1}{2}} \lambda(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

prenant les modules des deux membres, on peut éliminer le facteur  $|\tau|^{\frac{1}{2}}$  :

$$|\tau|^{\frac{1}{2}} = \kappa \lambda(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|$$

et donc

$$(2.16) \quad \tau = \kappa^2 \lambda^2(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial \xi} .$$

Introduisant le concept de longueur de mélange dû à Prandtl, on peut écrire :

$$(2.17) \quad \tau = \frac{\lambda_m^2}{H} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial \xi} .$$

On voit ainsi que la fonction  $\lambda(\xi)$  peut être interprétée comme la longueur de mélange rendue adimensionnelle  $\frac{\lambda_m}{\kappa H}$ . La paramétrisation (2.13) revient par conséquent à faire une hypothèse sur les variations de la *longueur de mélange* en  $t$ ,  $x_1$  et  $x_2$  d'une part et en  $x_3$  d'autre part.

ii)

$$(2.18) \quad \tilde{v} = \kappa H |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \lambda(\xi)$$

avec évidemment

$$(2.19) \quad \lambda(\xi) \sim \xi \quad \text{pour } \xi \sim 0$$

afin de satisfaire à (2.12).

Cette paramétrisation utilisée par Nihoul [Nihoul (1977a)] revient à faire une hypothèse sur les variations de la *viscosité turbulente* en  $t$ ,  $x_1$  et  $x_2$  d'une part et  $x_3$  d'autre part.



Cette hypothèse qui consiste à généraliser à toute la colonne d'eau la formule applicable dans la couche limite de fond est justifiée dans des mers continentales comme la mer du Nord par les faibles profondeurs et le rôle dominant joué par la friction sur le fond dans la génération et le maintien de la turbulence.

L'expression (2.18) conduisant à une formulation plus simple du problème, elle sera utilisée dans la suite.

On écrira donc

$$(2.20) \quad \tilde{v} = \sigma H^2 \lambda$$

où

$$(2.21) \quad \sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$$

est une fonction de  $t$ ,  $x_1$  et  $x_2$  et où  $\lambda(\xi)$  est une fonction de  $\xi$  vérifiant (2.19).

On peut montrer que la différence entre les formules (2.13) et (2.17) n'affecte pas sensiblement les modèles. Ceci est dû évidemment au fait que les deux formules sont identiques dans la couche limite qui détermine le profil vertical de vitesse.

#### 4.- Résolution d'un modèle de Welander-Jelesnianski-Forristall modifié

Compte tenu des remarques du paragraphe précédent, il serait intéressant d'étudier les modifications apportées au modèle de Welander-Jelesnianski-Forristall si l'on adopte la paramétrisation (2.20).

Le problème posé revient alors à résoudre l'équation d'Ekman modifiée par (2.11) et (2.20) :

$$(2.22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{H} \left[ \frac{\partial h}{\partial t} - \xi \frac{\partial H}{\partial t} \right] \frac{\partial u}{\partial \xi} = -ifu + \phi(t) + \sigma(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \lambda(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right].$$

Si l'on se souvient de (1.18) et (1.19), on remarque que le second terme du premier membre est quadratique en les vitesses et est donc du même type que les termes non-linéaires d'advection déjà négligés; on négligera donc aussi ce terme [pour discussion plus détaillée cf. Nihoul (1977a)].

Il reste donc l'équation :

$$(2.23) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -ifu + \phi(t) + \sigma(t) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \lambda(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi} \right]$$

accompagnée des conditions initiales

$$(2.24) \quad u = 0 \quad \text{pour} \quad t \leq 0$$

et limites

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 0 \end{array} \right. \quad \text{en} \quad \xi = \xi_0 = \frac{z_0}{H} \approx \frac{z_0}{h}$$

$$(2.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma H \lambda \frac{\partial u}{\partial \xi} = \tau_s(t) \end{array} \right. \quad \text{en} \quad \xi = 1 .$$

La condition d'annulation de la vitesse en  $t \leq 0$  n'est pas physiquement réalisable pour le milieu étudié; cependant, d'une part, la résolution qui suit s'étend très facilement au cas d'une condition initiale non-homogène et, d'autre part, nous montrerons que cette condition initiale a une influence négligeable après un temps suffisant et qu'elle peut donc être prise arbitraire, soit nulle pour simplifier les calculs.

#### 4.1.- Résolution de l'équation

Les calculs étant analogues à ceux développés par Nihoul (1977a), nous nous contenterons ici d'exprimer le schéma de résolution.

i) On cherche à rendre homogène les conditions aux limites et à éliminer le terme de Coriolis, en posant :

$$(2.27) \quad u = \frac{\tau_s}{\sigma H} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\lambda(\xi')} + \exp(-ift) v(\xi, t) .$$

ii) On opère le changement de variable :

$$dy = \sigma dt \quad , \quad y = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$$

et le changement de fonctions :

$$T_s(y) = \frac{\tau_s \exp(ift)}{\sigma H} \quad , \quad F(y) = \frac{\phi \exp(ift)}{\sigma} .$$

iii) On suppose résolu le problème aux valeurs propres suivant :

$$\frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{df_n}{d\xi} \right) + \alpha_n f_n(\xi) = 0$$

avec

$$\lambda \frac{df_n}{d\xi} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1$$

$$f_n = 0 \quad \text{en} \quad \xi = \xi_0 .$$

Remarquant que l'annulation de  $\lambda(\xi)$  en  $\xi = 0$  est source de singularités de ce problème aux valeurs propres, la valeur de  $\xi_0$  bien que très petite ( $10^{-5}$  à  $10^{-4}$ ) ne peut être assimilée à zéro, dans la seconde condition aux limites. La résolution reste une résolution de principe, la discussion des résultats ultérieurs ne demandera pas la connaissance explicite des fonctions et valeurs propres.

On notera :

$$(2.28) \quad a_n = \int_{\xi_0}^1 f_n d\xi = \frac{1}{\alpha_n} \left( \lambda \frac{df_n}{d\xi} \right)_{\xi_0}$$

$$(2.29) \quad \frac{f_n(1)}{\alpha_n} = \int_{\xi_0}^1 f_n(\xi) d\xi \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\lambda(\xi')} .$$

et on supposera les fonctions normalisées sur l'intervalle  $[\xi_0, 1]$  ; de plus, il n'est pas difficile de montrer que ces fonctions sont orthogonales et qu'elles forment un ensemble complet.

iv) La solution finale s'écrit :

$$(2.30) \quad u = \frac{\tau_s}{\sigma H} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi'}{\lambda(\xi')} + \exp(-ift) \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\xi) \times$$

$$\times \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \left[ \alpha_n F(y') - \frac{f_n(1)}{\alpha_n} \frac{dT_s}{dy'} \right] dy' .$$

C'est l'expression du profil de vitesse, calculable à partir des deux "forces" extérieures au système, de la tension de cisaillement due au vent  $\tau_s$  et du terme de pression  $\Phi$ .

On remarque de suite le comportement logarithmique près du fond puisque  $\lambda(\xi) \sim \xi$  pour  $\xi \sim \xi_0 \sim 0$  [cf. (2.19)].

4.2.- Recherche de  $\bar{u}(t)$  et de  $\tau_b(t)$

On calcule de préférence les fonctions  $\bar{U} = \bar{u} \exp(ift)$  et  $T_b = \frac{\tau_b \exp(ift)}{\sigma H}$ . Posant

$$b_n = \int_{\xi_0}^1 \lambda \frac{df_n}{d\xi} d\xi = \alpha_n \int_{\xi_0}^1 \xi f_n d\xi,$$

on obtient immédiatement grâce à (1.20), (1.21) et (1.23) :

$$(2.31) \quad \bar{U} = T_s \int_{\xi_0}^1 \frac{1-\xi}{\lambda} d\xi + \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] F(y') dy' - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n f_n(1)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy'$$

$$(2.32) \quad T_b = T_s + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_n^2 \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] F(y') dy' - \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(1) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy'.$$

En vue de simplifier ces expressions, on ne garde que les premiers termes de chaque développement asymptotique de chaque intégrale, obtenu par intégration par parties successives. Les termes dus aux conditions initiales contiennent un facteur  $\exp(-\alpha_n y)$  et sont donc négligeables si l'on étudie la situation suffisamment longtemps après l'origine des temps choisie. Il reste alors

$$(2.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{U} = B_0 T_s + B_1 \frac{dT_s}{dy} - A_1 F - A_2 \frac{dF}{dy} \end{array} \right.$$

$$(2.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_b = T_s - B_0 \frac{dT_s}{dy} + F + A_1 \frac{dF}{dy} \end{array} \right.$$

avec

$$B_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n f_n(1)}{\alpha_n} = \int_{\xi_0}^1 \frac{1-\xi}{\lambda(\xi)} d\xi$$

$$B_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n f_n(1)}{\alpha_n^2} = - \int_{\xi_0}^1 \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \int_{\xi}^1 d\xi' \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1-\xi''}{\lambda(\xi'')} d\xi'' \\ = - \int_{\xi_0}^1 \frac{1-\xi}{\lambda} d\xi \int_{\xi}^1 d\xi' \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{d\xi''}{\lambda(\xi'')}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

$$A_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\alpha_n} = - \int_{\xi_0}^1 d\xi \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \xi'}{\lambda(\xi')} d\xi'$$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{\alpha_n^2} = \int_{\xi_0}^1 d\xi \left[ \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' \right]^2 .$$

Tous ces coefficients sont calculables à partir de la seule connaissance de la fonction  $\lambda(\xi)$  et de la constante  $\xi_0$  ; la résolution du problème aux valeurs propres n'est donc pas nécessaire.

#### 5.- Discussion des résultats

Afin d'illustrer les résultats par des chiffres, on choisit un profil  $\lambda(\xi)$  physiquement admissible :

$$\lambda(\xi) = \xi(1 - a\xi) \quad \text{avec} \quad a = 0,80 ;$$

ce profil parabolique vérifie évidemment la condition (2.19). Et, on adopte la valeur de  $\xi_0$  telle que

$$\ln \xi_0 = - 10 \quad (\xi_0 \sim 4,5 \times 10^{-5}) .$$

Les calculs conduisent à

$$\begin{aligned} B_0 &= 9,60 & B_1 &= - 86,15 \\ A_1 &= - 8,85 & A_2 &= 79,17 . \end{aligned}$$

A partir de ces valeurs et des relations (2.33) et (2.34), on peut calculer les ordres de grandeur de la durée de l'histoire de  $\tau_s$  et de  $\phi$  dont dépendent les valeurs de  $\bar{u}$  et de  $\tau_b$  .

Par exemple, utilisant  $dy = \sigma dt$  , (2.33) devient

$$U = B_0 T_s + \frac{B_1}{\sigma} \frac{\partial T_s}{\partial t} - A_1 F - \frac{A_2}{\sigma} \frac{\partial F}{\partial t} .$$

De cette relation se déduisent aisément les temps caractéristiques suivants :



$$t_1 = - \frac{B_1}{B_0 \sigma}$$

donne l'ordre de grandeur de la durée de l'histoire de  $\tau_s$  nécessaire à l'évaluation de  $\bar{u}$  ; et

$$t_2 = - \frac{A_2}{A_1 \sigma}$$

donne l'ordre de grandeur de la durée de l'histoire de  $\phi$  nécessaire à l'évaluation de  $\bar{u}$  .

Ces temps ne sont pas seulement des constantes mathématiques surgissant du problème mais sont des grandeurs physiques pouvant être interprétées comme les temps d'adaptation de  $\bar{u}$  consécutive à des variations de  $\tau_s$  et de  $\phi$  .

Si l'on se fixe

$$\sigma \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1} ,$$

ordre de grandeur habituel de  $\sigma$  dans le Southern Bight, en dehors du renversement de la marée, on calcule par le procédé précédent

- la durée de l'histoire de  $\tau_s$  dont dépendent  $\bar{u}$  :

$$- \frac{B_1}{B_0 \sigma} \approx 8970 \text{ s} \quad (2\text{h}29')$$

et  $\tau_b$  :

$$\frac{B_0}{\sigma} \approx 9600 \text{ s} \quad (2\text{h}40')$$

- la durée de l'histoire de  $\phi$  dont dépendent  $\bar{u}$  :

$$- \frac{A_2}{A_1 \sigma} \approx 8950 \text{ s} \quad (2\text{h}29')$$

et  $\tau_b$  :

$$- \frac{A_1}{\sigma} \approx 8850 \text{ s} \quad (2\text{h}27') .$$

### Conclusions

De la comparaison de ces valeurs, on déduit aisément que les courants et la tension de fond s'adaptent aux forces extérieures au système dans un délai d'environ deux à trois heures. Ce temps est à rapprocher du temps

caractéristique donné par (2.9)

$$t_* = 0,170 \frac{H^2}{\nu} \sim 3 \text{ heures ,}$$

résultant du modèle de Welander où la viscosité turbulente verticale avait été prise égale à une constante.

Ces temps caractéristiques d'adaptation sont par ailleurs inversement proportionnels à  $\sigma$  et donc proportionnels à  $H^2$  et inversement proportionnels à la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$ , puisque

$$(2.20) \quad \tilde{\nu} = \sigma H^2 \lambda .$$

Plus la hauteur  $H$  de la colonne d'eau est grande, plus l'inertie de la masse d'eau est considérable et plus important est le délai d'adaptation du système aux variations des forces extérieures.

Plus la viscosité turbulente verticale est grande, plus la turbulence induit un mélange intense de la colonne d'eau et plus petit est le délai d'adaptation des courants et tension sur les forces extérieures.

Enfin, il convient de remarquer la quasi-égalité des temps d'adaptation de  $\tau_b$  et de  $\bar{u}$ ; ce fait est à rapprocher de la dépendance instantanée de  $\tau_b$  vis-à-vis de  $\bar{u}$ , trouvée en résolvant le modèle à viscosité turbulente constante et en éliminant l'intégrale en  $\phi$  [cf. (2.8)].

Physiquement,  $\tau_b$  et  $\bar{u}$  sont deux variables d'état de l'écoulement et dépendent de manières différentes des mêmes forces extérieures qui, pour le modèle tridimensionnel, peuvent être considérées comme  $\tau_s$  et  $\Phi$ . Dès lors, des liens physiques lient d'une part  $\tau_b$  à  $\Phi$  et  $\tau_s$  [cf. (2.34)] et, d'autre part,  $\bar{u}$  à  $\Phi$  et  $\tau_s$  [cf. (2.33)].

Cependant, mathématiquement, l'élimination du terme  $\Phi$  entre ces deux relations peut être entreprise et on obtient ainsi une relation donnant  $\tau_b$  à partir de  $\bar{u}$  et de  $\tau_s$  :

$$(2.35) \quad \tau_b = -\frac{1}{A_1} \bar{u} + \left(\frac{A_2}{A_1^2} - 1\right) \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left(\frac{B_0}{A_1} + 1\right) \tau_s + \left(\frac{B_1}{A_1} - \frac{A_2 B_0}{A_1^2}\right) \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tau_s}{\partial t}$$

relation obtenue en se limitant aux dérivées temporelles premières dans les développements.

On peut déduire immédiatement de cette relation, un temps caractéristique de corrélation entre  $\bar{u}$  et  $\tau_b$  :

$$t_0 = - \frac{A_1}{\sigma} \left( \frac{A_2}{A_1} - 1 \right) \sim 100 \text{ s} .$$

Remarques

i) De l'expression (2.35), on peut déduire également un temps caractéristique liant  $\tau_b$  à  $\tau_s$  :

$$t_1 = - \frac{A_1}{\sigma (B_0 + A_1)} \left( \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_0 A_2}{A_1^2} \right) \sim 360 \text{ s} \quad (\sim 6 \text{ min}) .$$

Ce temps est de loin inférieur à 9000 s ( $\sim 2 \text{ h } 30'$ ) trouvé antérieurement. On en conclut que les dépendances de  $\tau_b$  et  $\bar{u}$  vis-à-vis de  $\tau_s$  au-delà d'environ 400 s sont identiques de telle sorte que la dépendance lointaine (entre 400 s et 9000 s) de  $\tau_b$  vis-à-vis de  $\tau_s$  est toute entière contenue dans les termes en  $\bar{u}$  et  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$ .

ii) Malgré son aspect linéaire, la relation (2.35) cache la dépendance quadratique de  $\tau_b$  en  $\bar{u}$  ; en effet, si l'on se rappelle que

$$\tau_b = \frac{\tau_b}{\sigma H} \exp(ift) = \frac{\tau_b}{\kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}} \exp(ift) \sim |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$$

et  $U = \bar{u} \exp(ift) \sim |\bar{u}|$ ,

on remarque qu'en réalité c'est la racine  $|\tau_b|^{\frac{1}{2}}$  qui est liée linéairement à  $\bar{u}$ . Ce fait espéré en paramétrisant la viscosité turbulente verticale de manière appropriée est donc ici concrétisé. Cette première concrétisation est due à Nihoul [Nihoul (1977a)]; les résultats importants qui en découlent seront donc discutés ultérieurement (chapitre IV, paragraphe 1).

## Chapitre III

### Modèle de Nihoul (1977)

L'objet de ce chapitre est l'étude du modèle de Nihoul (1977a), premier modèle hydrodynamique local basé sur une paramétrisation réaliste de la viscosité turbulente verticale :

$$(3.1) \quad \tilde{\nu} = \sigma H^2 \lambda(\xi) .$$

Ce modèle sera ensuite comparé au modèle de Welander, Jelesnianski et Forristall et au modèle modifié présenté au chapitre précédent.

Le modèle de Nihoul conduit à la dépendance quadratique de la tension au fond vis-à-vis de la vitesse moyenne, moyennant certaines approximations (faible effet de la tension due au vent, faible contribution des termes d'accélération) :

$$(3.2) \quad \tau_b = D |\bar{u}| \bar{u} - m \tau_s .$$

Cette relation se confond avec la loi empirique de Heaps (1967), utilisée par Roday (1976).

Nous montrerons qu'il est possible d'exprimer les coefficients  $D$  et  $m$  sous forme de fonctionnelles simples de la fonction  $\lambda(\xi)$  et nous étudierons l'influence de la fonction  $\lambda(\xi)$  sur les valeurs de ces coefficients.

Ensuite, nous analyserons la contribution due aux termes d'accélération, définirons le domaine de validité de l'expression (3.2) et les modifications à apporter à cette solution en dehors de ce domaine.

### 1.- Présentation du modèle

Le modèle est capable de prédire les profils des courants de marée et de tempête en chaque point, en fonction du temps. Il repose sur les équations classiques d'Ekman où seules les dérivées par rapport au temps et à la coordonnée verticale apparaissent.

Utilisant le changement de variable (2.11) :

$$\xi = \frac{x_3 + h}{H}$$

et le formalisme des nombres complexes, l'équation est unique et s'écrit [cf. (2.23)] :

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -ifu + \Phi(t) + \sigma(t) \frac{\partial}{\partial \xi} [\lambda(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi}] .$$

Comme tous les modèles locaux précédemment décrits [excepté ceux de Freeman (1972) et de Cheng (1976)], celui-ci néglige la dispersion horizontale de la quantité de mouvement vis-à-vis de la dispersion verticale et est donc applicable aux mers et océans bien agités où aucune stratification importante ne réduit cette dispersion verticale.

Le modèle, puisque local, ne peut être isolé; il doit être juxtaposé à un modèle bidimensionnel auquel il fournit les équations remplaçant les paramétrisations usuelles. Comme écrit précédemment, un modèle bidimensionnel des courants marins n'est pas fermé si l'on ne lui adjoint pas une paramétrisation de la tension de cisaillement au fond, par exemple (3.1).

Cette paramétrisation est fondamentale car elle conditionne la résolution du modèle bidimensionnel. Une erreur à ce stade compromet la précision sinon la validité des résultats. Le modèle tridimensionnel adjoint au modèle bidimensionnel permet d'éliminer ce risque, de remplacer cette paramétrisation par une formule analogue, résultat du profil vertical des courants; la connaissance de la tension de fond est donc ainsi précisée et, en tout cas, davantage justifiée. Les nouveaux coefficients  $D$  et  $m$  ne sont plus empiriques mais peuvent être calculés à partir des données du problème, plus précisément de la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$ .



Cette fonction  $\tilde{\nu}$  doit être paramétrisée à son tour. L'échéance a donc été ainsi reculée : la paramétrisation de la tension de fond n'est plus nécessaire mais est remplacée par une paramétrisation en amont. La question se pose de savoir si cette manière de procéder conduira ou non à des résultats meilleurs justifiant les quelques complications induites. La réponse à cette question est une contribution personnelle et sera exposée ultérieurement (chapitre IV, paragraphe 1). Avant cela, il est nécessaire de rappeler comment le modèle de Nihoul (1977a) permet de connaître le profil vertical des courants horizontaux. Le schéma des calculs repose sur trois points principaux.

a) La paramétrisation de la viscosité turbulente verticale

Comme écrit plus haut et justifié à cette occasion (chapitre II, paragraphe 3),  $\tilde{\nu}$  est pris égal à :

$$(3.1) \quad \tilde{\nu} = \sigma H^2 \lambda$$

avec 
$$\sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda = \lambda(\xi) \quad ; \text{ près du fond, } \sim \xi .$$

C'est l'introduction du facteur non-linéaire  $|\tau_b|^{\frac{1}{2}}$  qui permettra de retrouver ultérieurement la dépendance quadratique de la relation (3.2).

b) L'élimination immédiate du terme  $\phi$  et le choix des conditions aux limites

Le modèle a pour but la connaissance non seulement du profil vertical des courants mais aussi de la relation liant  $\tau_b$ ,  $\tau_s$  et  $\bar{u}$  ; l'élimination de la fonction  $\phi(x_1, x_2, t)$  s'impose donc et est réalisée dès le début des calculs : l'équation d'Ekman (3.3) est intégrée sur la profondeur et soustraite à elle-même, conduisant à l'équation :

$$(3.4) \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + i f \hat{u} = \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) - \frac{\tau_s - \tau_b}{\sigma H} \right]$$

où, dans la notation des fonctions complexes,

$$(3.5) \quad \hat{u}(\xi, t) = u(\xi, t) - \bar{u}(t)$$

représente la déviation du profil par rapport à sa valeur moyenne.

Outre l'avantage de la disparition de  $\phi$  au profit de  $\tau_s$  et  $\tau_b$ , cette équation (3.4) est entachée d'une erreur moindre que l'erreur affectant l'équation d'Ekman (3.3). En effet, aux erreurs de l'équation en  $u$  sont soustraites les moyennes de ces erreurs de l'équation en  $\bar{u}$ .

Puisque la tension au fond  $\tau_b$  intervient déjà dans l'équation du modèle, il n'y a aucune gêne à la faire intervenir une fois de plus dans les conditions aux limites en rendant celles-ci plus symétriques. Le modèle adopte donc les conditions aux limites modifiées :

$$(3.6) \quad \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x_3} = \sigma H \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = \begin{cases} \tau_s & \text{en } \xi = 1 \text{ (en surface)} \\ \tau_b & \text{en } \xi = 0 \text{ (au fond).} \end{cases}$$

La condition de l'annulation de la vitesse à la hauteur de rugosité ( $\xi = \xi_0$ ) sera utilisée par la suite et conduira à la relation :

$$(3.7) \quad \hat{u}(\xi_0) + \bar{u} = 0$$

où  $\hat{u}(\xi_0)$  sera, tous calculs effectués, une fonctionnelle connue de  $\lambda$ ,  $\sigma$ ,  $\tau_s$ ,  $\tau_b$ ,  $\xi_0$  et  $t$ .

La relation (3.7) est donc la relation liant  $\tau_b$ ,  $\tau_s$  et  $\bar{u}$ , permettant de fermer le modèle bidimensionnel.

### c) La résolution du problème aux valeurs propres

La résolution du modèle conduit aux problèmes aux valeurs propres adapté au modèle

$$(3.8) \quad \frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{df_n}{d\xi} \right) + \alpha_n f_n(\xi) = 0$$

avec  $\lambda \frac{df_n}{d\xi} = 0$  en  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$   
et  $f_n(\xi)$  fonctions normées.

Ce problème dépend étroitement de la fonction  $\lambda(\xi)$ . Contrairement au problème aux valeurs propres surgissant du modèle de Welander utilisant

d'autres conditions aux limites (chapitre II, paragraphe 4.1), ce problème-ci n'admet aucune singularité due à l'annulation de  $\lambda(\xi)$  en  $\xi = 0$ .

Pour la fonction parabolique atteignant le maximum de sa valeur en surface :

$$(3.9) \quad \lambda(\xi) = \xi \left(1 - \frac{1}{2} \xi\right),$$

le problème aux valeurs propres se résout analytiquement de manière simple [Nihoul (1977a)]. Une résolution numérique dans le cas

$$(3.10) \quad \lambda(\xi) = \xi(1 - a\xi), \quad 0 \leq a \leq 1$$

est proposée plus loin.

Dans le cas d'une fonction  $\lambda(\xi)$  laissée arbitraire, les calculs peuvent être conduits laissant  $\lambda(\xi)$ ,  $f_n(\xi)$ ,  $\alpha_n$ . La résolution ainsi généralisée peut être résumée par la relation suivante [Nihoul (1977a)] :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) = & \frac{\tau_s}{\sigma H} [s(\xi) - \bar{s}] + \frac{\tau_b}{\sigma H} [b(\xi) - \bar{b}] \\ & - e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) s_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_s}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \\ & - e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) b_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_b}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \end{aligned}$$

et, utilisant (3.7),

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \bar{u}(t) = & \frac{\tau_s}{\sigma H} \bar{s} + \frac{\tau_b}{\sigma H} \bar{b} + e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi_0) \left[ s_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \times \right. \\ & \left. \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_s}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \right. \\ & \left. + b_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \times \right. \\ & \left. \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_b}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \right] \end{aligned}$$

$$\text{où (3.13) } \quad s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi',$$

$\bar{s}$  est la valeur moyenne de  $s(\xi)$  sur la profondeur et

$$s_n = \int_0^1 s(\xi) f_n(\xi) d\xi = \frac{f_n(1)}{\alpha_n} .$$

et

$$(3.14) \quad b(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' ,$$

$\bar{b}$  est la valeur moyenne de  $b(\xi)$  sur la profondeur et

$$b_n = \int_0^1 b(\xi) f_n(\xi) d\xi = - \frac{f_n(0)}{\alpha_n}$$

enfin 
$$y(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau .$$

Les résultats (3.11) et (3.12) analytiquement exacts mais difficiles à utiliser sont susceptibles de certaines simplifications. Tout d'abord, on peut ne retenir des intégrales de convolution temporelle que les premiers termes de leurs développements asymptotiques, résultant d'intégrations par parties successives :

$$(3.15) \quad \hat{u}(\xi, t) \approx \frac{\tau_s}{\sigma H} (s - \bar{s}) + \frac{\tau_b}{\sigma H} (b - \bar{b}) - e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) \left[ s_n \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_s e^{ift}}{\sigma H} \right) + b_n \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_b e^{ift}}{\sigma H} \right) \right]$$

$$(3.16) \quad \bar{u}(t) \approx \frac{\tau_s}{\sigma H} \bar{s} + \frac{\tau_b}{\sigma H} \bar{b} + e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi_0) \left[ s_n \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_s e^{ift}}{\sigma H} \right) + b_n \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dt} \left( \frac{\tau_b e^{ift}}{\sigma H} \right) \right]$$

On peut ensuite ne retenir que le premier terme de chaque série. Cette simplification opérée par Nihoul dans son modèle original ne sera pas faite ici car la suite montrera que les séries infinies se prêtent mieux aux calculs que les séries tronquées.

Les résultats (3.11) et (3.12) d'une part et (3.15) et (3.16) d'autre part se présentent comme la superposition de deux termes :

- le premier terme, le plus important, liant  $\hat{u}$  et  $\bar{u}$  aux valeurs instantanées de  $\tau_s$  et  $\tau_b$  ;

- le second terme, en général plus petit, où interviennent l'histoire temporelle de  $\tau_s$  et  $\tau_b$  et le paramètre de Coriolis  $f$ .

Le premier terme est donc la solution exacte de l'équation (3.4) où l'on a omis la dérivée temporelle et l'accélération de Coriolis, soit :

$$(3.17) \quad 0 = \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) - \frac{\tau_s - \tau_b}{\sigma H} \right]$$

et le second terme peut être considéré comme la correction due au premier membre de l'équation (3.4) :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + i f \hat{u} .$$

Cette distinction conduit à l'analyse des résultats en deux temps : analyse des premiers termes de la solution (3.15), (3.16) [cf. IV, § 1] et, ensuite, analyse des termes de convolution temporelle [cf. IV, § 2].

Avant d'entreprendre ces analyses et la comparaison d'une part avec le modèle de Welander-Jelesnianski-Forrstall et d'autre part avec notre modèle modifié, il est intéressant d'étudier la relation (3.12). Malgré son aspect linéaire, celle-ci cache la dépendance quadratique de  $\tau_b$  en  $\bar{u}$ . Si l'on se souvient de

$$\sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} ,$$

et négligeant les termes de convolution dans une première approche; on peut écrire :

$$(3.18) \quad \bar{u} \approx \frac{\tau_s}{\kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}} \bar{s} + \frac{\tau_b}{\kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}} \bar{b} .$$

D'autre part, l'intégrale (3.13) fournissant  $s(\xi)$  n'admet aucune singularité en  $\xi = 0$ , tandis que l'intégrale (3.14) donnant  $b(\xi)$  est singulière en  $\xi = 0$ . Il y a tout lieu de s'attendre à

$$\bar{s} \text{ petit devant } \bar{b} .$$

Ainsi donc, si l'on admet  $|\tau_s \bar{s}| \ll |\tau_b \bar{b}|$ , (3.18) conduit à

$$|\bar{u}| \approx \frac{\bar{b}}{\kappa} |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$$



$$|\tau_b|^{\frac{1}{2}} = \frac{\kappa}{b} |\bar{u}| .$$

Ce résultat permet d'éliminer  $|\tau_b|^{\frac{1}{2}}$  dans (3.18) au profit de  $|\bar{u}|$  :

$$(3.19) \quad \tau_b \approx -\frac{\bar{s}}{b} \tau_s + \frac{\kappa^2}{b^2} |\bar{u}| \bar{u} .$$

Cette relation est quadratique en  $\bar{u}$  et linéaire en  $\tau_s$  ; elle est donc du type de l'équation (3.2), avec :

$$(3.20) \quad m = \frac{\bar{s}}{b}$$

et

$$(3.21) \quad D = \frac{\kappa^2}{b^2} .$$

En adoptant

$$\lambda(\xi) = \xi(1 - \frac{1}{2} \xi) ,$$

Nihoul obtient des valeurs numériques de  $D$  et  $m$  en très bon accord avec les observations :

Modèle de Nihoul (1977a)

$$D = 2,11 \times 10^{-3}$$

$$m = 0,07$$

Valeurs empiriques

$$D = (2,16 \pm 0,20) \times 10^{-3} \quad [\text{Bowden \& Fairbairn (1956)}]$$

$$m = 0,1 \quad [\text{Heaps (1967)}]$$

## 2.- Comparaison avec le modèle de Welander-Jelesnianski-Forristall et le modèle modifié

Avant d'entreprendre la discussion et le prolongement des résultats précédents, il convient de comparer attentivement les deux modèles précédemment décrits.

Dans ce paragraphe, on convient de noter modèle  $W$  le modèle tridimensionnel de Welander (1957), prolongé et appliqué par Jelesnianski et Forristall, modèle  $W^*$  le modèle modifié par nous et modèle  $N$  le modèle tridimensionnel de Nihoul (1977a) décrit au paragraphe précédent.

Les modèles  $W$ ,  $W^*$  et  $N$  partent tous de la même équation qui s'écrit dans les notations complexes :

$$(3.22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -ifu + \Phi + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\nu} \frac{\partial u}{\partial \xi})$$

à laquelle s'adjoignent la condition initiale  $u = 0$  pour  $t \leq 0$  et les quatre relations

$$(3.23) \quad \frac{\tilde{\nu}}{H} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \tau_s \quad \text{en } \xi = 1$$

$$(3.24) \quad \frac{\tilde{\nu}}{H} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \tau_b \quad \text{en } \xi = 0$$

$$(3.25) \quad u = 0 \quad \text{en } \xi = \xi_0$$

$$(3.26) \quad \bar{u} = \int_0^1 u \, d\xi .$$

La résolution de cette équation réclame une paramétrisation de la viscosité turbulente verticale  $\tilde{\nu}$  et un choix de deux conditions aux limites.

Les deux modèles  $W$  et  $N$  diffèrent essentiellement par le choix de la paramétrisation de  $\tilde{\nu}$  :

- modèle  $W$  :  $\tilde{\nu}$  est prise égale à une constante notée  $\nu$  ;
- modèle  $N$  :  $\tilde{\nu} = \sigma(t) H^2 \lambda(\xi)$  .

Les deux modèles diffèrent aussi, mais dans une moindre mesure, par le choix des conditions aux limites :

- modèle  $W$  : on choisit (3.23) et (3.25) ;
- modèle  $N$  : on choisit (3.23) et (3.24).

Le modèle  $W^*$  se situe entre ces deux modèles : il adopte la paramétrisation de  $\tilde{\nu}$  du modèle  $N$  mais les conditions aux limites du modèle  $W$  .

Parmi les quatre relations (3.23) à (3.26), deux sont encore inutilisées et serviront, avant ou après résolution, à introduire deux relations entre les quatre fonctions temporelles, indépendantes de la coordonnée verticale  $\xi$  :

$\Phi$ ,  $\tau_s$ ,  $\tau_b$  et  $\bar{u}$ .

### 2.1.- Schéma du modèle W

Puisque  $\tilde{v}$  est une constante, aucun profil logarithmique n'est attendu près du fond et donc aucune singularité du profil des vitesses ne surgira. Pour cette raison,  $\xi_0$  est pris égal à zéro dans ce modèle.

La résolution de l'équation munie des conditions aux limites choisies ne fait aucunement intervenir  $\tau_b$  et  $\bar{u}$ ; la solution est donc du type [Welander (1957), Jelesnianski (1970)]

$$(3.27) \quad u = u(\Phi, \tau_s; \xi, t).$$

Utilisant les deux relations restantes, Jelesnianski détermine, après résolution,  $\tau_b$  et  $\bar{u}$  par dérivation et intégration de (3.27) et il obtient deux relations fonctionnelles du type :

$$(3.28) \quad \tau_b = \tau_b(\Phi, \tau_s; t)$$

$$(3.29) \quad \bar{u} = \bar{u}(\Phi, \tau_s; t).$$

Ces relations ont été discutées au chapitre précédent (chapitre II, § 2) et on se souviendra ici qu'après simplification, l'élimination de  $\Phi$  devient possible et que celle-ci conduit à la relation (2.8) donnant  $\tau_b$  *explicitement* en fonction de  $\bar{u}$  et  $\tau_s$  :

$$(3.30) \quad \tau_b = 3 \frac{v}{H} \bar{u} - 1,5708 \frac{v}{H^2} \int_0^t \tau_s(t-\tau) \exp(-i\tau) \times \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2 v \tau}{4H^2}\right) - \exp\left(-\frac{11,5 v \tau}{H^2}\right) \right] d\tau$$

### 2.2.- Schéma du modèle N

Comme écrit antérieurement, l'élimination immédiate de  $\Phi$  grâce à (3.26) conduit à une solution du type :

$$u = \bar{u} + \hat{u}(\tau_b, \tau_s, \lambda; \xi, t).$$

La seule relation non encore utilisée (3.25), permet d'écrire l'annulation de la vitesse à la hauteur de rugosité soit :

$$\bar{u} = - \hat{u}(\tau_b, \tau_s, \lambda; \xi_0, t) .$$

Cette relation est implicite en  $\tau_b$  ; on ne pourra la résoudre par rapport à  $\tau_b$  que moyennant certaines approximations : on obtient alors la dépendance quadratique de  $\tau_b$  en  $\bar{u}$  traduite par la relation (3.19).

### 2.3.- Comparaison des résultats

i) La différence de paramétrisation de  $\tilde{v}$  introduit des différences essentielles dans le contenu des résultats :

- modèle W : le profil de vitesse n'est pas logarithmique près du fond,
- modèle N : le profil de vitesse est logarithmique près du fond;
- modèle W :  $\tau_b$  est lié linéairement à  $\bar{u}$  [cf. (3.30)],
- modèle N :  $\tau_b$  est lié quadratiquement à  $\bar{u}$  [cf. (3.19)].

ii) La différence dans le choix des conditions aux limites ne conduit qu'à une différence de présentation des résultats.

En effet, si l'on modifie le modèle W en y introduisant  $\tilde{v} = \sigma H^2 \lambda$  (Modèle W<sup>\*</sup>), on obtient :

$$(3.32) \quad \bar{u} = \bar{u}(\phi, \tau_s, \lambda; \xi_0, t)$$

$$(3.33) \quad \tau_b = \tau_b(\phi, \tau_s, \lambda; \xi_0, t) .$$

Tandis que le modèle N conduit à :

$$(3.31) \quad \begin{cases} \bar{u} = \bar{u}(\tau_b, \tau_s, \lambda; \xi_0, t) \\ \phi = \frac{d\bar{u}}{dt} + i f \bar{u} - \frac{\tau_s - \tau_b}{H} = \phi(\tau_b, \tau_s, \lambda; \xi_0, t) . \end{cases}$$

Ainsi donc chaque modèle conduit grâce à l'utilisation des deux des quatre relations (3.23) à (3.26) non-utilisées comme conditions aux limites à deux relations fonctionnelles entre les quatre quantités indépendantes de la coordonnée  $\xi$  :

$$\phi, \tau_s, \tau_b \text{ et } \bar{u} ;$$

seule la présentation diffère entre les modèles W<sup>\*</sup> et N .

## Chapitre IV

### Discussion de la solution de Nihoul

#### 1.- Recherche de relations fonctionnelles générales $D(\lambda)$ et $m(\lambda)$ Influence de la fonction $\lambda(\xi)$

Dans ce paragraphe, on étudiera plus en détail la solution de l'équation (3.17) :

$$(3.17) \quad 0 = \sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \right) - \frac{\tau_s - \tau_b}{\sigma H} \right]$$

ou, plus généralement, si l'on ne précise pas la paramétrisation de  $\tilde{v}$  :

$$(4.1) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\tilde{v}}{H^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{\tau_s - \tau_b}{H} .$$

On a remarqué au chapitre II, § 3 qu'il était possible de paramétriser  $\tilde{v}$  de diverses manières, on appliquera à l'équation (4.1) ces diverses paramétrisations :

a)  $\tilde{v} = \sigma H^2 \lambda(\xi)$  avec  $\sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}$

Cette paramétrisation est celle utilisée par Nihoul (1977a) et conduit aux relations (3.20) et (3.21)

$$(3.20) \quad m = \frac{\bar{s}}{\bar{b}}$$

et

$$(3.21) \quad D = \frac{\kappa^2}{\bar{b}^2} .$$

Grâce à (3.13) et (3.14), on peut calculer  $\bar{s}$  et  $\bar{b}$  pour une fonction  $\lambda(\xi)$  non précisée entièrement :



et donc

$$s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi'$$

(4.2)  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{s} = \int_0^1 s d\xi = - \int_0^{\xi_0} \frac{\xi}{\lambda(\xi)} d\xi + \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi = \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi \\ b(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' \end{array} \right.$

et donc

$$\bar{b} = \int_0^1 b d\xi = - \int_0^{\xi_0} \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi + \int_{\xi_0}^1 \frac{(1-\xi)^2}{\lambda(\xi)} d\xi = \int_{\xi_0}^1 \frac{(1-\xi)^2}{\lambda(\xi)} d\xi$$

(4.3)

Puisque  $\xi_0$  est une quantité petite ( $10^{-5}$  à  $10^{-4}$ ) et puisque  $\lambda(\xi) \sim \xi$  pour les petites valeurs de  $\xi$ , les premiers termes qui composent  $\bar{s}$  et  $\bar{b}$  peuvent être négligés. De plus, on remarque que  $\bar{b}$  contiendra un terme en  $\ln \xi_0$  important puisque  $\xi_0$  est petit;  $\bar{b}$  sera donc sensible à la valeur de  $\xi_0$  adoptée et il convient donc de choisir celle-ci avec quelque circonspection.

En vue d'une comparaison ultérieure avec les valeurs du coefficient de *drag*  $D$  obtenues empiriquement par Bowden et Fairbain (1956), on adoptera la même profondeur d'eau (soit 10 mètres) et la hauteur de rugosité sur un fond sablonneux :

$$\left. \begin{array}{l} H = h + \zeta = 10 \text{ m} \\ z_0 = 6 \times 10^{-4} \text{ m} \end{array} \right\} \text{ soit } \xi_0 = \frac{z_0}{H} = 6 \times 10^{-5}$$

$$\ln \xi_0 = -9,72.$$

Pour les calculs qui suivent, on adoptera la valeur arrondie :

(4.4)  $\ln \xi_0 = -10.$

A titre de premier exemple, on calcule  $D$  et  $m$  pour le profil parabolique de Nihoul (1977a) que l'on généralise ici :

(4.5)  $\lambda(\xi) = \xi(1 - b\xi) \quad 0 \leq b \leq 1.$

Cette loi vérifie évidemment la condition (2.19) qu'on s'est imposée :

(4.6)  $\lambda(\xi) \sim \xi \quad \text{pour } \xi \sim 0.$

Si  $b = 0$ , on retrouve le profil linéaire de Thomas (1975). Si  $b = \frac{1}{2}$ , on retrouve le profil parabolique de Nihoul (1977a). Si  $b = 1$ ,  $\lambda(\xi)$  s'annule en  $\xi = 1$ ; ce cas correspond à la situation d'une mer recouverte de glace (surface rigide comme le fond).

Les calculs, basés sur les formules (3.20), (3.21), (4.2) et (4.3), conduisent aux valeurs consignées dans le tableau suivant :

b	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$D \cdot 10^3$	$\kappa = 0,35$	1,70	1,68	1,67	1,65	1,64	1,62	1,60	1,58	1,56	1,54	1,51
	$\kappa = 0,38$	2,00	1,98	1,97	1,95	1,93	1,91	1,89	1,87	1,84	1,82	1,78
	$\kappa = 0,40$	2,21	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,09	2,07	2,04	2,01	1,98
	$\kappa = 0,42$	2,44	2,42	2,40	2,38	2,36	2,33	2,31	2,28	2,25	2,22	2,18
m	0,059	0,061	0,063	0,065	0,068	0,071	0,074	0,079	0,084	0,093	0,111	

Comparant ces résultats à la valeur de Bowden et Fairbain (1956)

$$D = (2,16 \pm 0,20) 10^{-3}$$

et à la valeur de Heaps (1967)

$$m \sim 0,1,$$

on conclut que l'accord est très satisfaisant et qu'il est optimal pour

$$\kappa = 0,40.$$

Ainsi donc, près du fond :

$$\tilde{v} = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \xi H \sim \kappa u_* z$$

où la constante de von Karman est identique à celle des écoulements turbulents en conduite et dans l'atmosphère.

D'autre part, les variations du coefficient de drag  $D$  sont beaucoup moins sensibles aux variations du coefficient  $b$  qu'à celles de la constante  $\kappa$ . Une variation de 0,1 à  $b$  induit une variation relative de  $D$  de 1 à 2 % tandis qu'une variation de 0,02 à  $\kappa$  induit une variation relative de  $D$  de 11 % environ.

Le coefficient de *drag* dépend donc peu du profil vertical de la viscosité turbulente  $\lambda(\xi)$  pourvu que cette dernière fonction respecte la croissance proportionnelle près du fond :

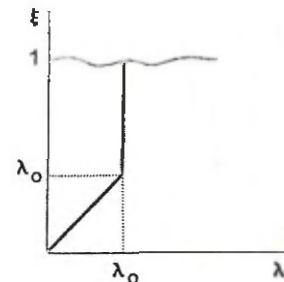
$$(4.6) \quad \lambda(\xi) \sim \xi \quad \text{pour} \quad \xi \sim 0 .$$

Cette quasi-insensibilité est un argument en faveur des modèles tridimensionnels. En effet, nous avons remarqué précédemment (chapitre III, § 1) qu'un tel modèle remplaçait la nécessité de paramétrer  $\tau_b$  par celle de paramétrer  $\tilde{v}$  et que le bénéfice de cette opération restait à démontrer. La réponse est maintenant claire : une erreur dans le choix de la paramétrisation de  $\tau_b$  risque de compromettre la précision voire la validité des résultats d'un modèle intégré sur la profondeur tandis qu'une erreur dans la loi  $\lambda(\xi)$  d'un modèle tridimensionnel n'influera que très légèrement les résultats. Ajoutons à cette avantage celui de la connaissance du profil des courants et nous concluons que le bénéfice réalisé est considérable.

A titre de comparaison, on comparera les résultats donnés par divers profils  $\lambda(\xi)$  :

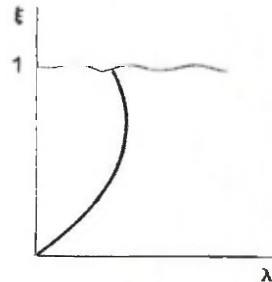
1) profil linéaire par morceaux de Davies (1977)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \xi \quad \text{pour} \quad 0 \leq \xi \leq \lambda_0 \\ \lambda = \lambda_0 \quad \text{pour} \quad \lambda_0 \leq \xi \leq 1 \end{array} \right.$$
$$0 < \lambda_0 \leq 1 .$$



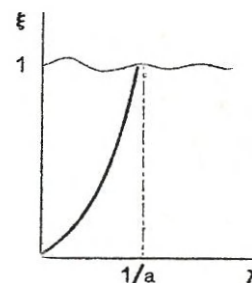
2) profil parabolique de Nihoul (1977a)

$$\lambda = \xi(1 - b\xi)$$
$$0 \leq b \leq 1 .$$



3) profil hyperbolique (loi de Michaelis-Menten- Monod ou loi de Mellor-Yamada)

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + a\xi} , \quad a \geq 0$$



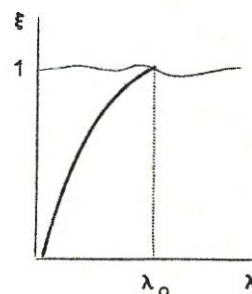
4) profil exponentiel de Witten (1976)

$$\lambda = \lambda_0 \exp[- 2,7(1 - \xi)]$$

pour  $\lambda_0 > 0$ .

Witten choisit

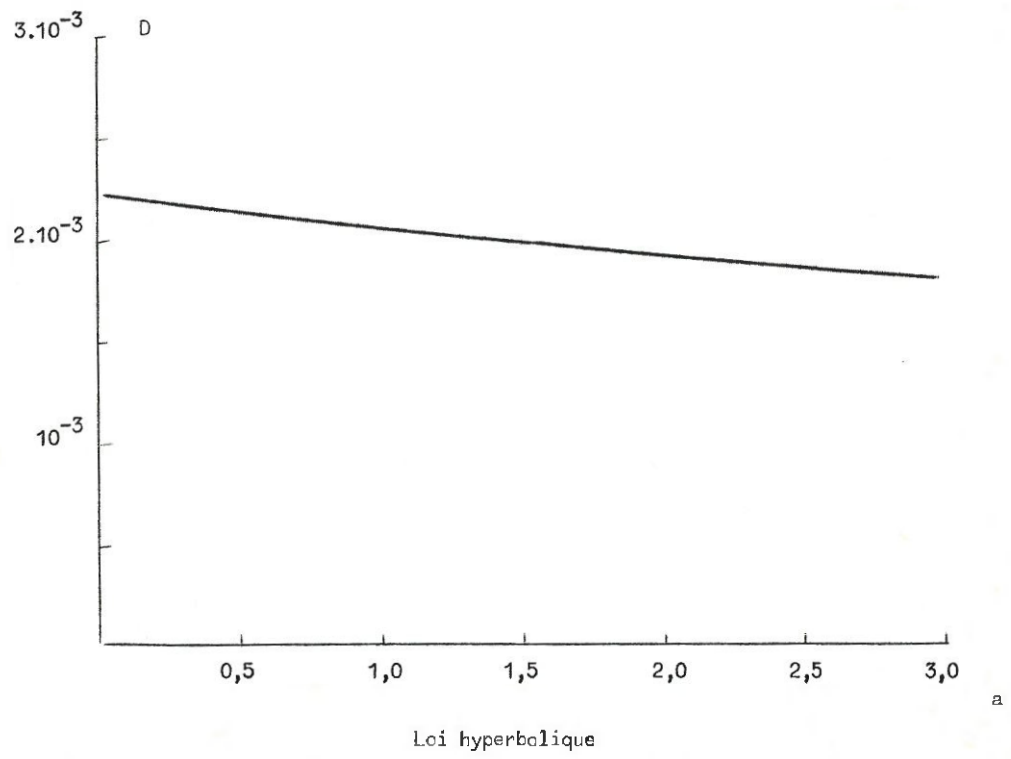
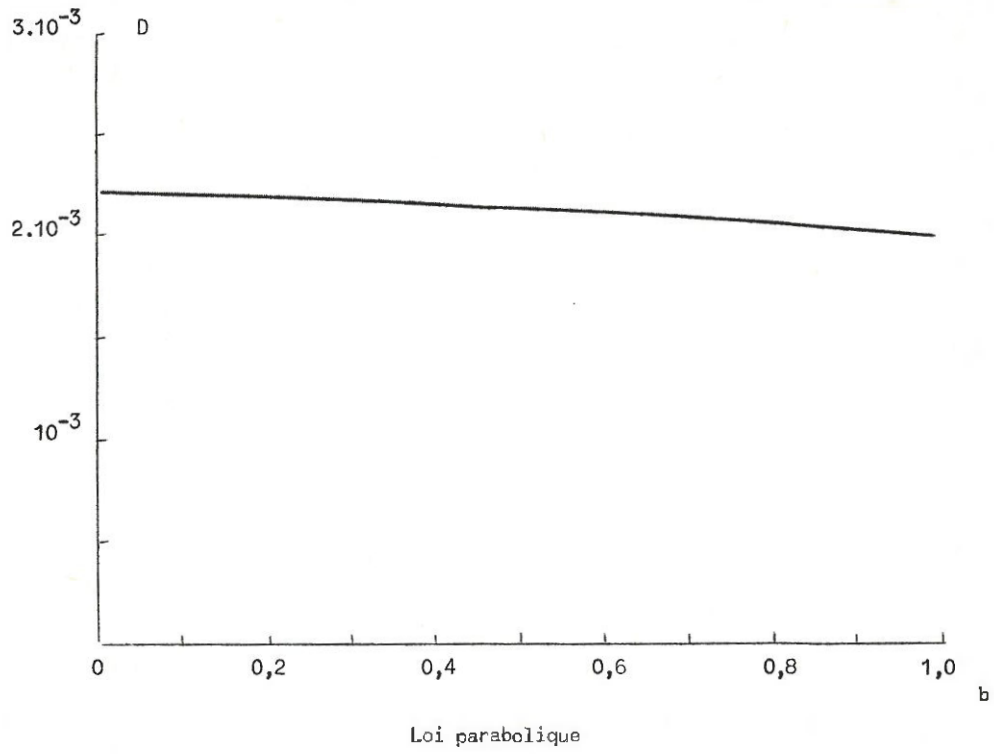
$$\lambda_0 \sim 1,4 .$$



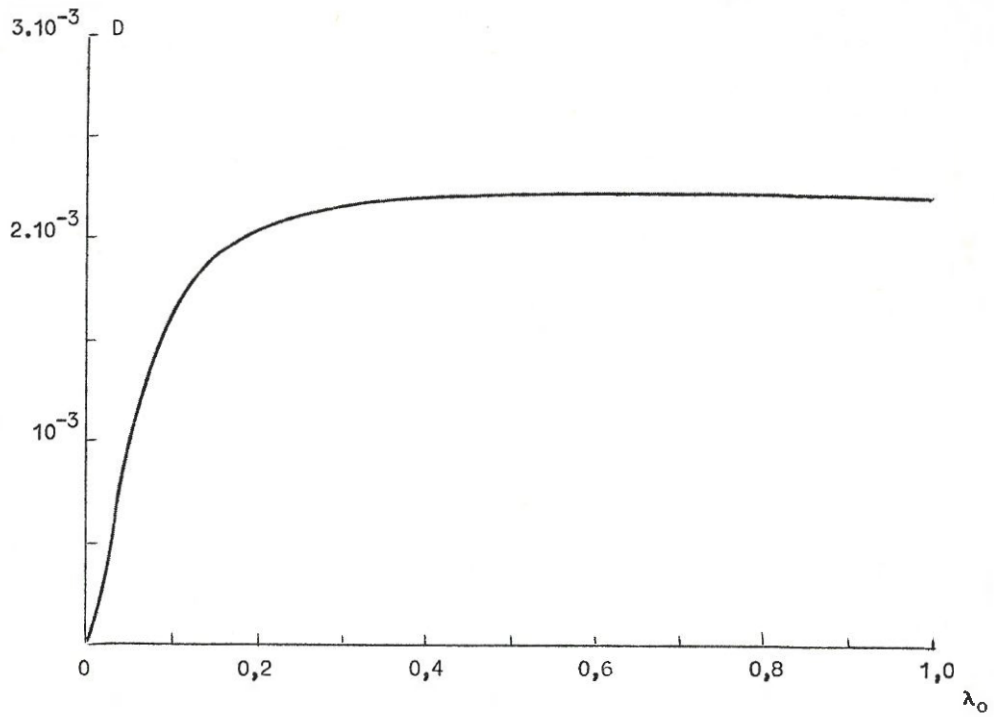
Les résultats sont consignés sur les figures des pages suivantes.

Le profil de Witten ne donne pas de bons résultats; la raison évidente en est le non-respect de la condition (4.6). D'autre part, comme remarqué précédemment (chapitre I, § 5), ce profil ne respecte pas les observations; il doit donc être rejeté.

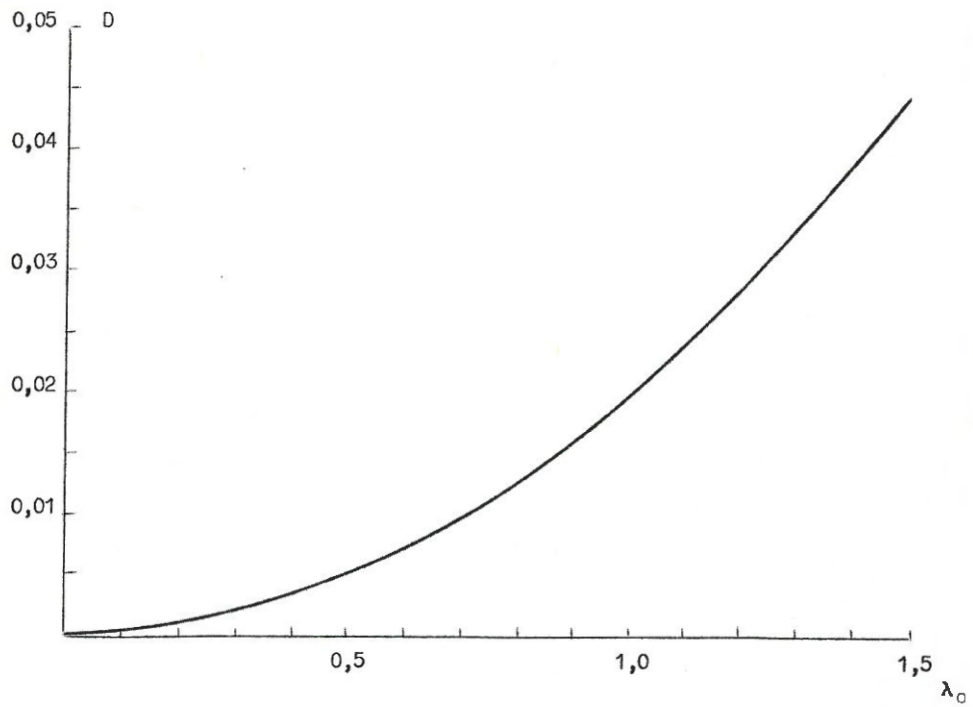
Mis à part les résultats de ce profil, on remarque la quasi-constance des coefficients  $D$  et  $m$  avec la forme du profil  $\lambda(\xi)$ .



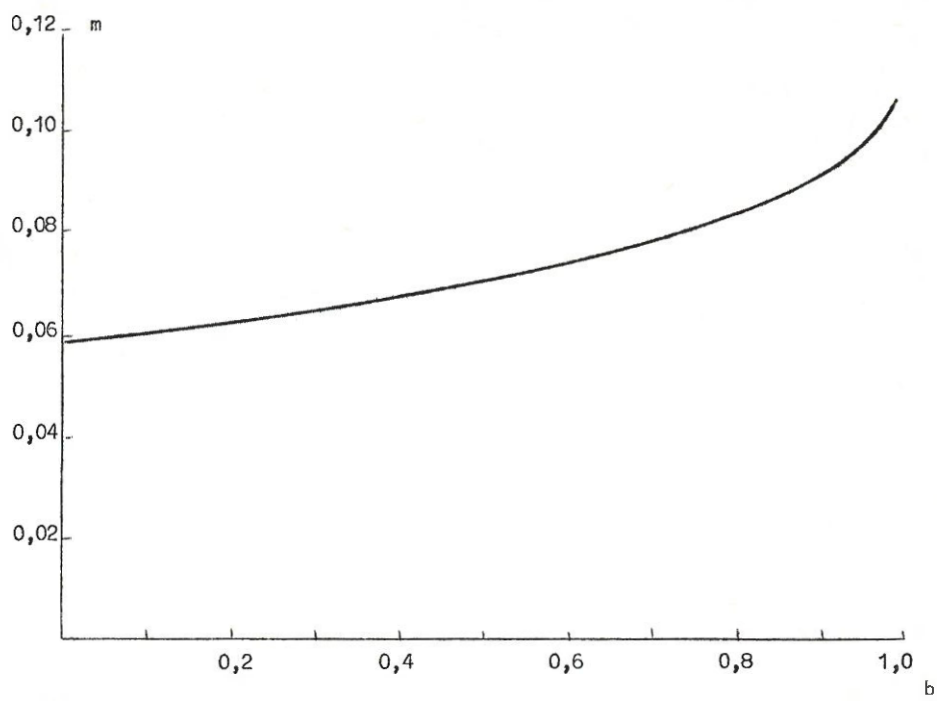




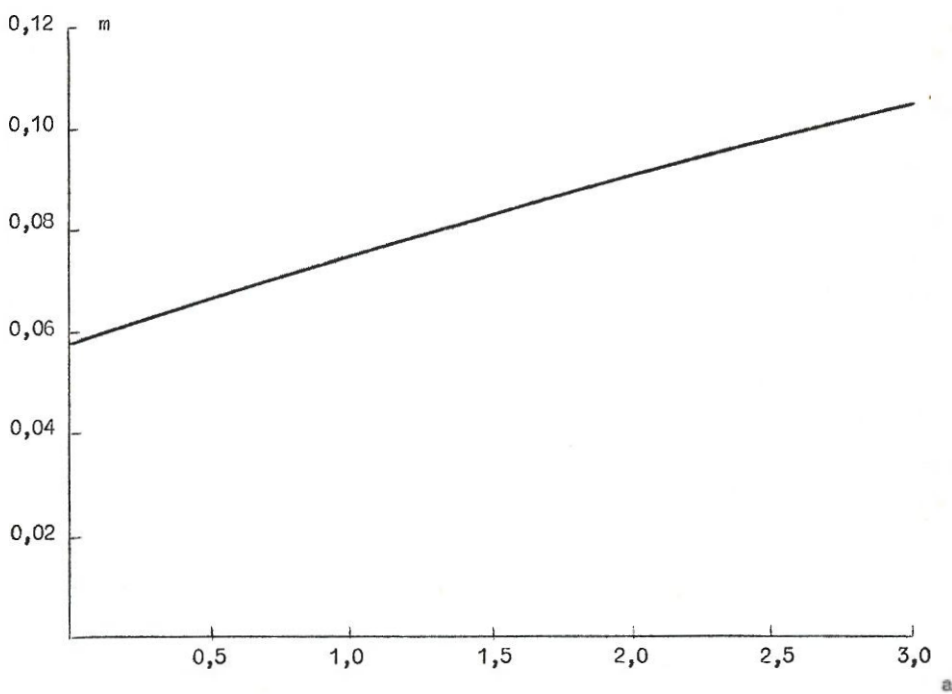
Loi linéaire par morceaux



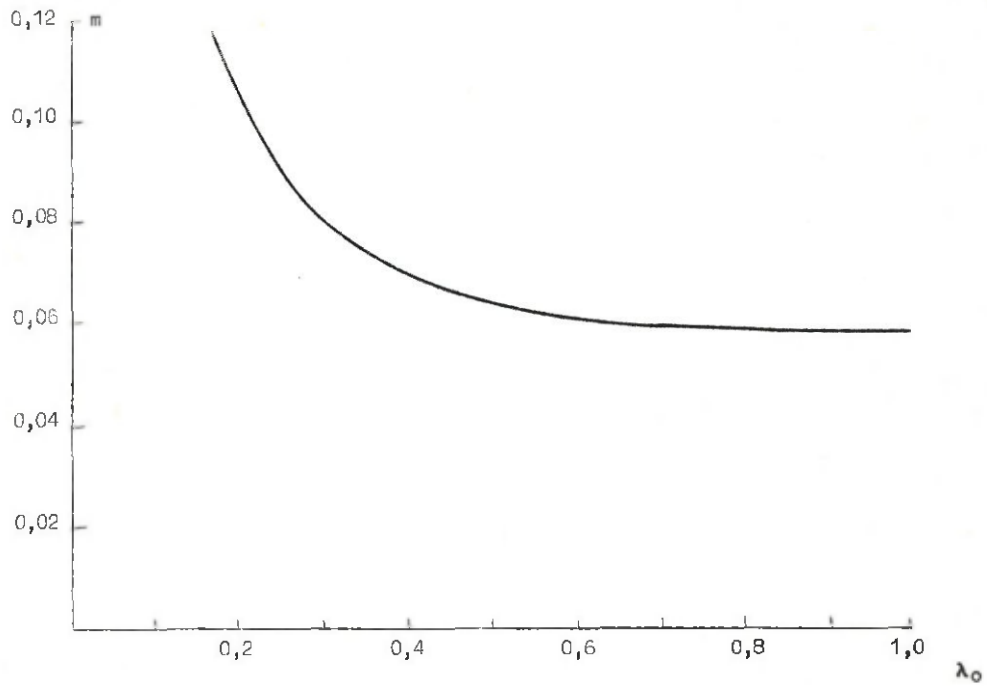
Loi exponentielle



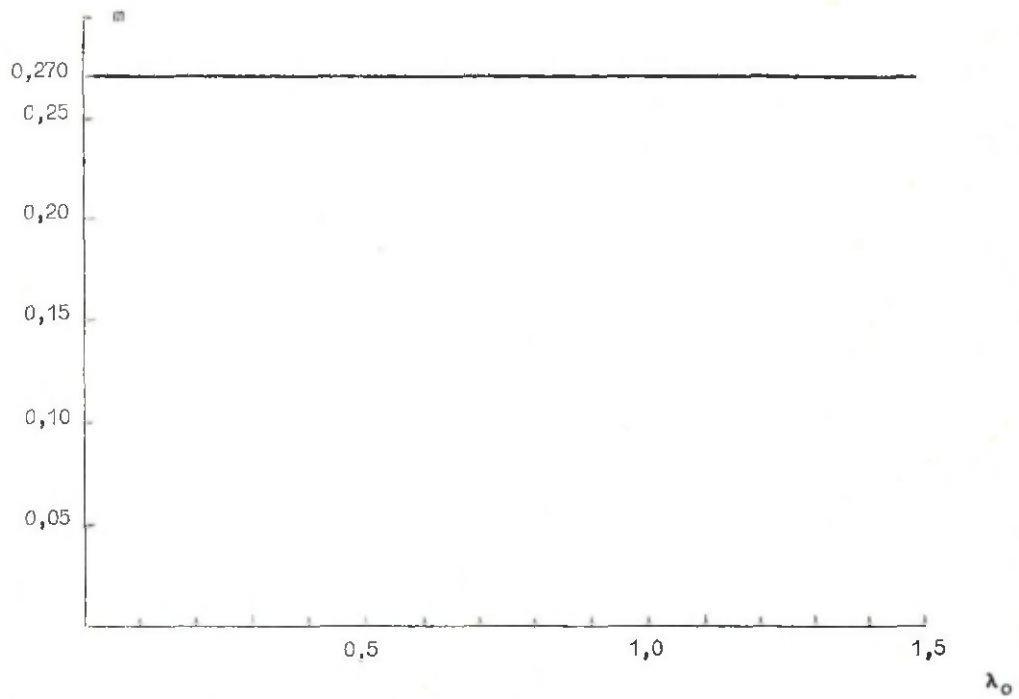
Loi parabolique



Loi hyperbolique



Loi linéaire par morceaux



Loi exponentielle

$$b) \quad \tilde{v} = \kappa^2 H \ell^2(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|$$

Cette paramétrisation résulte directement de la relation (2.16) et conduit au concept de longueur de mélange au sens de Prandtl :

$$\ell_m = \kappa H \ell(\xi) .$$

L'équation (4.1) devient :

$$(4.7) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \kappa^2 \ell^2(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] = \tau_s - \tau_b .$$

On intègre de 0 à  $\xi$  par rapport à  $\xi$  en se souvenant de la condition au fond :

$$\kappa^2 \ell^2(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial \xi} = \tau_b$$

pour obtenir

$$(4.8) \quad \tau = \kappa^2 \ell^2(\xi) \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| \frac{\partial u}{\partial \xi} = \tau_b (1 - \xi) + \tau_s \xi .$$

Cette loi traduit la variation linéaire de la tension cisailante avec la profondeur.

Prenant les modules des deux membres de la relation (4.8), on peut calculer  $\left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|$  :

$$(4.9) \quad \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| = \frac{1}{\kappa \ell(\xi)} \left| \tau_b (1 - \xi) + \tau_s \xi \right|^{\frac{1}{2}}$$

et éliminer ce facteur de (4.8)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\kappa \ell(\xi)} \frac{\tau_b (1 - \xi) + \tau_s \xi}{\left| \tau_b (1 - \xi) + \tau_s \xi \right|^{\frac{1}{2}}} .$$

On intègre de  $\xi_0$  à  $\xi$  par rapport à  $\xi$  en se souvenant de l'annulation de la vitesse en  $\xi = \xi_0$  :

$$(4.10) \quad u = \frac{1}{\kappa} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\tau_b (1 - \xi') + \tau_s \xi'}{\left| \tau_b (1 - \xi') + \tau_s \xi' \right|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\ell(\xi')} d\xi' .$$

En négligeant tout effet d'inertie (accélération propre et accélération de Coriolis) et utilisant le concept de longueur de mélange, le profil des vitesses est donné par l'expression (4.10). Ce profil est évidemment logarithmique près du fond puisque

$$\tau_b \neq 0$$

et  $\lambda(\xi) \sim \xi$  pour  $\xi \sim 0$

[cf. (2.14)].

i) Influence du profil de  $\lambda(\xi)$

Puisque  $\lambda(\xi)$  est petit pour  $\xi$  petit, la contribution principale de l'intégrale est obtenue pour  $\xi'$  petit. Et pour  $\xi'$  petit, on peut linéariser la première partie de l'intégrand :

$$\frac{\tau_b(1 - \xi') + \tau_s \xi'}{|\tau_b(1 - \xi') + \tau_s \xi'|^{1/2}} \approx \frac{\tau_b}{|\tau_b|^{1/2}} \left(1 - \frac{\xi'}{2}\right) + \frac{\tau_s}{|\tau_b|^{1/2}} n \xi'$$

où  $n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \exp(-2i\varphi)$ ,  $\varphi = \varphi_s - \varphi_b$  est l'angle entre  $\tau_s$  et  $\tau_b$ .

Si l'on note

$$(4.11) \quad b_0(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \frac{\xi'}{2}}{\lambda(\xi')} d\xi'$$

$$s_0(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi'$$

le profil, ainsi approché, s'écrit :

$$(4.12) \quad u = \frac{\tau_b}{\kappa |\tau_b|^{1/2}} b_0(\xi) + \frac{\tau_s}{\kappa |\tau_b|^{1/2}} n s_0(\xi).$$

La valeur moyenne de la vitesse s'en déduit par intégration :

$$(4.13) \quad \bar{u} = \frac{\tau_b}{\kappa |\tau_b|^{1/2}} \bar{b}_0 + \frac{\tau_s}{\kappa |\tau_b|^{1/2}} n \bar{s}_0$$

où

$$(4.14) \quad \bar{b}_0 = \int_0^1 b_0 d\xi \approx \int_{\xi_0}^1 \frac{(1 - \xi)(1 - \frac{\xi}{2})}{\lambda(\xi)} d\xi$$

$$\bar{s}_0 = \int_0^1 s_0 d\xi \approx \int_0^1 \frac{\xi(1 - \xi)}{\lambda(\xi)} d\xi$$



Comme précédemment, on peut déduire de (4.13) les expressions des coefficients  $D$  et  $m$  :

$$(4.15) \quad D = \frac{\kappa^2}{b_0}$$

et

$$(4.16) \quad m = n \frac{\xi_0}{b_0} .$$

Etudiant la variation de ces coefficients pour plusieurs profils  $l(\xi)$  de la longueur de mélange, on déduit que les meilleurs accords avec les observations sont obtenus en choisissant :

- le profil parabolique

$$l(\xi) = \xi(1 - b\xi) \quad \text{avec} \quad b \sim 0,4 \quad [D = 2,13 \times 10^{-3}; m = 0,101]$$

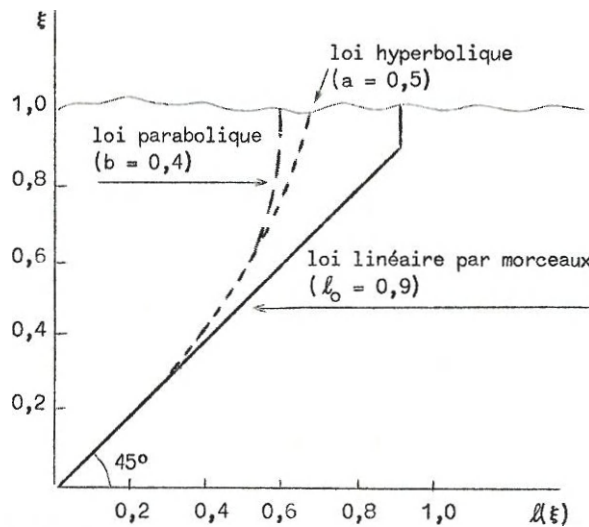
- la fonction linéaire par morceaux

$$\left\{ \begin{array}{l} l(\xi) = \xi \quad \text{pour} \quad 0 \leq \xi \leq l_0 \\ l(\xi) = l_0 \quad \text{pour} \quad l_0 \leq \xi \leq 1 \end{array} \right.$$

avec  $l_0 \sim 0,9 \quad [D = 2,18 \times 10^{-3}; m = 0,088]$

- la fonction hyperbolique

$$l(\xi) = \frac{\xi}{1 + a\xi} \quad \text{avec} \quad a \sim 0,5 \quad [D = 2,12 \times 10^{-3}; m = 0,101]$$



En conclusion, la longueur de mélange  $\lambda_m = \kappa H \lambda(\xi)$  varie presque linéairement sur toute la colonne d'eau alors que la viscosité turbulente suit la loi :

$$\tilde{\nu} = \lambda_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right| = \kappa^2 \lambda^2(\xi) H \left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right| = \kappa \lambda(\xi) H \left| \tau_b(1-\xi) + \tau_s \xi \right|^{\frac{1}{2}}$$

représentée par une courbe davantage incurvée.

ii) Influence du rapport de  $\tau_s$  à  $\tau_b$

Soit  $n = \frac{\tau_s}{\tau_b}$ .

Par le même raisonnement que précédemment, le profil de vitesse conduit aux relations :

$$\bar{u} = \frac{\tau_b}{\kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}} \bar{b}_* + \frac{\tau_s}{\kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}}} \bar{s}_*$$

où 
$$\bar{s}_* = \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi) |1+(n-1)\xi|^{\frac{1}{2}}} d\xi$$

$$\bar{b}_* = \int_{\xi_0}^1 \frac{(1-\xi)^2}{\lambda(\xi) |1+(n-1)\xi|^{\frac{1}{2}}} d\xi.$$

Supposant à nouveau

$$|\tau_s \bar{s}_*| \ll |\tau_b \bar{b}_*|,$$

on déduit les coefficients D et m ainsi modifiés :

(4.17) 
$$D = \frac{\kappa^2}{b_*^2}$$

et

(4.18) 
$$m = \frac{\bar{s}_*}{b_*}.$$

Ces coefficients sont identiques à (3.20) et (3.21) si l'on pose

$$\lambda(\xi) = \lambda(\xi) |1+(n-1)\xi|^{\frac{1}{2}}$$

et identiques à (4.15) et (4.16) pour n petit. Mais, ils ont la propriété

de dépendre des conditions de l'écoulement : si  $\tau_s$  et  $\tau_b$  varient, D et m varient.

Afin de mieux cerner cette dépendance, on se placera dans quelques situations particulières :

$$|\tau_s| = 0 \quad |\tau_s| = \frac{1}{2} |\tau_b| \quad |\tau_s| = |\tau_b|$$

et pour chacun de ces cas, on choisira l'angle entre  $\tau_s$  et  $\tau_b$  valant  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  et  $180^\circ$ .

Les valeurs correspondantes de n sont consignées dans le tableau ci-dessous :

Valeurs de n	Angle entre $\tau_s$ et $\tau_b$				
	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
$ \tau_s  = 0$	0	0	0	0	0
$ \tau_s  = \frac{1}{2}  \tau_b $	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \exp \frac{i\pi}{4}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{2} \exp \frac{3i\pi}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$ \tau_s  =  \tau_b $	1	$\exp \frac{i\pi}{4}$	i	$\exp \frac{3i\pi}{4}$	-1

Adoptant les valeurs  $\kappa = 0,40$  et  $\ln \xi_0 = -10$  et la fonction

$$l(\xi) = \frac{1}{1 + 0,5 \xi},$$

on trouve les valeurs de D et m suivantes :

Valeurs de D	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
$ \tau_s  = 0$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$	$2,01 \cdot 10^{-3}$
$ \tau_s  = \frac{1}{2}  \tau_b $	$2,08 \cdot 10^{-3}$	$2,07 \cdot 10^{-3}$	$2,03 \cdot 10^{-3}$	$1,97 \cdot 10^{-3}$	$1,90 \cdot 10^{-3}$
$ \tau_s  =  \tau_b $	$2,13 \cdot 10^{-3}$	$2,11 \cdot 10^{-3}$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-3}$

On remarque de suite que m diminue lorsque D augmente et vice-versa; dans le second membre de l'expression

$$\tau_b = D |\bar{u}| \bar{u} - m \tau_s,$$

Valeurs de m	0°	45°	90°	135°	180°
$ \tau_s  = 0$	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
$ \tau_s  = \frac{1}{2}  \tau_b $	0,074	0,076	0,080	0,091	0,113
$ \tau_s  =  \tau_b $	0,067	0,069	0,074	0,085	0,125

lorsqu'un terme augmente l'autre diminue donc. Lorsque le vent agit dans le sens de la vitesse (angle inférieur à 90°), le premier terme a une importance maximale; lorsque le vent agit de manière résistive (angle supérieur à 90°), le premier terme bien que prédominant voit son importance réduite au prorata du second terme.

D'autre part, pour un vent agissant dans le sens de la vitesse (angle de 0°) et croissant, la tension de cisaillement au fond  $\tau_b$  décroît moins que proportionnellement ( $m \tau_s$  se retranche et  $m$  diminue moins que  $\tau_s$  n'augmente) mais pour un vent agissant de manière résistive (angle de 180°),  $\tau_b$  croît plus que proportionnellement à la croissance de  $\tau_s$  ( $m \tau_s$  s'additionne,  $m$  et  $\tau_s$  augmentant tous deux).

## 2.- Etudes des termes de convolution temporelle

Dans ce paragraphe, on étudiera les corrections apportées par les intégrales de convolution de l'expression (3.12)

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(t) = & \frac{\tau_s}{\sigma H} \bar{s} + \frac{\tau_b}{\sigma H} \bar{b} + e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi_0) \left[ s_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \times \right. \\
 & \left. \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_s}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \right. \\
 (3.12) & \left. + b_n \int_0^{y(t)} \exp[-\alpha_n(y-y')] \times \right. \\
 & \left. \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_b}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \right]
 \end{aligned}$$

basée sur la paramétrisation suivante de  $\tilde{v}$  :

$$\tilde{v} = \sigma H^2 \lambda(\xi) \quad ; \quad \sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \quad . \quad [\text{Nihoul (1977a)}]$$

Le but de cette étude est de calculer l'ordre de grandeur de ces deux termes où interviennent les histoires temporelles de  $\tau_s$  et  $\tau_b$  et de trouver les situations pour lesquelles ils sont ou ne sont pas négligeables. Ces termes sont dus à l'inertie de la colonne d'eau puisqu'ils résultent des termes d'accélération propre et d'accélération de Coriolis, après suppression des termes non-linéaires d'advection :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + i f \bar{u} ,$$

ils seront donc appelés termes linéaires d'inertie.

Pour la simplicité des calculs, on se bornera aux courants de marée pour lesquels la tension due au vent  $\tau_s$  joue un rôle secondaire; on assimilera donc  $\tau_s$  à zéro.

Pour la discussion, il est préférable de rendre (3.12) explicite par rapport à  $\tau_b$  afin d'obtenir une relation fonctionnelle

$$\tau_b = \tau_b(\bar{u})$$

qui sera comparée à

$$(4.19) \quad \tau_b = D |\bar{u}| \bar{u} \quad (\tau_s = 0) .$$

On cherchera une solution de (3.12) sous la forme d'un développement en série des dérivées de  $\bar{u}$ .

$$\tau_b = c_0 \bar{u} + c_1 \frac{d\bar{u}}{dt} + c_2 \frac{d^2\bar{u}}{dt^2} + \dots$$

ou encore

$$(4.20) \quad T_b = C_0 \bar{U} + C_1 \frac{d\bar{U}}{dy} + C_2 \frac{d^2\bar{U}}{dy^2} + \dots = \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^p \bar{U}}{dy^p}$$

où l'on a posé

$$(4.21) \quad T_b = \frac{\tau_b e^{ift}}{\sigma H} , \quad \bar{U} = \bar{u} e^{ift} , \quad y = \int_0^t \sigma(\tau) d\tau .$$

On reprend (3.12) où l'on remplace  $\tau_s$  par zéro et  $\frac{\tau_b}{\sigma H} e^{ift}$  par son expression (4.20); la relation s'écrit alors :



$$\bar{U} = \bar{b} \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^p \bar{U}}{dy^p} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^{p+1} \bar{U}}{dy^{p+1}} dy'$$

On opère des intégrations par parties successives; les termes dus aux conditions initiales sont multipliés par l'exponentielle

$$\exp(-\alpha_n y) = \exp[-\alpha_n \int_0^t \sigma(\tau) d\tau] \quad \alpha_n, \sigma > 0$$

rapidement décroissante avec le temps. Puisque la solution dépend des histoires temporelles de  $\tau_s$  et  $\tau_b$ , le système marin a une certaine mémoire mais celle-ci est évanescence, le système marin oublie ce qui est arrivé dans un passé lointain, il est donc indépendant des conditions initiales après un temps suffisamment long.

Les intégrations par parties successives fournissent donc :

$$(4.22) \quad \bar{U} = \bar{b} \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^p \bar{U}}{dy^p} + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^{p+q+1} \bar{U}}{dy^{p+q+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+1}}$$

D'autre part, vu (3.14)

$$b_n = - \frac{f_n(0)}{\alpha_n} .$$

La somme sur  $n$  peut alors s'écrire :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+2}} = - A_{q+1}$$

où l'on a convenu d'écrire :

$$(4.23) \quad A_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+1}} .$$

Ces coefficients ont la propriété d'être calculables sans avoir recours à la solution explicite du problème aux valeurs propres; à titre d'exemple, on calculera  $A_0$  et on montrera que

$$\bar{b} = A_0$$

où

$$A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} .$$

Démonstration

$A_0$  peut être considéré comme la valeur d'une fonction  $g(\xi)$  prise en  $\xi = \xi_0$  et on recherchera cette fonction  $g(\xi)$  :

$$g(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0)}{\alpha_n} f_n(\xi) .$$

Cette série converge pour  $0 < \xi < 1$ , on peut donc l'intégrer terme à terme et écrire pour  $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m(0)}{\alpha_m} \int_0^1 f_n(\xi) f_m(\xi) d\xi = \int_0^1 g(\xi) f_n(\xi) d\xi$$

soit pour  $n = 0$  :

$$(4.24) \quad 0 = \int_0^1 g(\xi) d\xi$$

puisque la somme commence à  $m = 1$  et que  $f_0(\xi)$  est constante; et pour  $n \geq 1$  :

$$\frac{f_n(0)}{\alpha_n} = \int_0^1 g(\xi) f_n(\xi) d\xi$$

puisque les fonctions propres sont orthonormées.

Si l'on se rappelle l'équation du problème aux valeurs propres :

$$\alpha_n f_n = - (\lambda f_n')'$$

on peut écrire :

$$f_n(0) = - \int_0^1 g(\lambda f_n')' d\xi$$

soit encore, après deux intégrations par parties :

$$f_n(0) = - [g \lambda f_n']_0^1 + [\lambda g' f_n]_0^1 - \int_0^1 (\lambda g')' f_n d\xi , \quad n > 1 .$$

On essaie la fonction  $g(\xi)$  pour laquelle le dernier terme disparaît, soit

$$(\lambda g')' = C^{te} = A$$

et, en intégrant,

$$\lambda g' = A \xi + B .$$

L'égalité ci-dessus se simplifie donc et il reste :

$$f_n(0) = - [g \lambda f_n']_0^1 + [(A \xi + B) f_n]_0^1, \quad n > 1.$$

On choisit ensuite les constantes A et B de manière à égaler le dernier crochet à  $f_n(0)$  :

$$\begin{cases} A \xi + B = 0 & \text{en } \xi = 1 \\ A \xi + B = -1 & \text{en } \xi = 0 \end{cases}$$

et donc  $A = 1$ ,  $B = -1$ .

L'égalité se simplifie encore et la fonction  $g(\xi)$  se précise :

$$(4.25) \quad 0 = - [g \lambda f_n']_0^1, \quad n > 1$$

$$\text{et} \quad \lambda g' = - (1 - \xi)$$

$$g' = - \frac{1 - \xi}{\lambda(\xi)}$$

$$g = - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \xi}{\lambda(\xi)} + C^{\text{te}}$$

$$g(\xi) = - b(\xi) + C.$$

Grâce à cette expression de la fonction  $g(\xi)$ , on montre que l'égalité (4.25) est bien vérifiée :

en  $\xi = 1$  :  $g(1)$  a une valeur finie et  $\lambda f' = 0$  ;

en  $\xi = 0$  :  $g(\xi)$  est asymptotique à  $\ln \frac{\xi}{\xi_0}$  puisque  $\lambda(\xi)$  est asymptotique à  $\xi$ ,

$f_n(\xi)$  est asymptotique à un polynôme en  $\xi$  et il en est de même pour sa dérivée, d'où

$$g \lambda f_n' \sim \xi \ln \frac{\xi}{\xi_0} \times (\text{polynôme en } \xi)$$

et évidemment

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} g \lambda f_n' = 0.$$

La relation (4.25) est donc vérifiée. Il reste alors à déterminer la constante C en utilisant la relation (4.24)

$$0 = \int_0^1 g(\xi) d\xi = - \int_0^1 b(\xi) d\xi + C$$

et donc

$$C = \bar{b}$$

$$g(\xi) = - b(\xi) + \bar{b} .$$

Cette fonction  $g(\xi)$  vérifie donc toutes les conditions que lui impose son développement en série et celui-ci converge pour

$$\xi \in ]0,1[$$

la convergence n'est pas assurée en  $\xi = 0$  et en  $\xi = 1$ . Mais, il n'y a aucun empêchement à prendre la fonction et son développement en  $\xi = \xi_0$ ; en vue de déterminer  $A_0$

$$A_0 = g(\xi_0) = - b(\xi_0) + \bar{b} .$$

Ainsi donc,

$$(4.26) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} = A_0 = \bar{b} \quad (\text{c.q.f.d.}) .$$

Remarque

Procédant de la même manière, il est possible de démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} = \bar{s} .$$

Il est donc possible de mettre  $A_0$  sous la forme d'une fonctionnelle de la fonction  $\lambda(\xi)$  :

$$A_0 = \bar{b} = \int_0^1 d\xi \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' = \int_{\xi_0}^1 \frac{(1-\xi)^2}{\lambda(\xi)} d\xi - \int_0^{\xi_0} \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi$$

le second terme du dernier membre peut être négligé puisque  $\xi_0$  est très petit.

Il est évident que les autres séries notées  $A_q$  ( $q \geq 1$ ) peuvent également se mettre sous forme fonctionnelle de  $\lambda(\xi)$  et sont donc calculables sans avoir recours à la solution du problème aux valeurs propres.

A titre d'exemple, voici l'expression de A :

$$A_1 = \int_{\xi_0}^1 \frac{1-\xi}{\lambda(\xi)} d\xi \left[ \int_0^\xi \frac{\xi'(1-\xi')}{\lambda(\xi')} d\xi' + \xi \int_\xi^1 \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' \right] - \left[ \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi \right]^2.$$

Utilisant la notation condensée des séries (4.23), la relation  $A_0 = \bar{b}$  et changeant l'indice q en q - 1, l'expression (4.22) peut se réécrire :

$$\bar{U} = A_0 \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^p \bar{U}}{dy^p} + \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q A_q \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^{p+q} \bar{U}}{dy^{p+q}}$$

ou encore

$$\bar{U} = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q A_q \sum_{p=0}^{\infty} C_p \frac{d^{p+q} \bar{U}}{dy^{p+q}}.$$

On change l'indice p en l'indice r grâce à  $r = p + q$ , r variant de q à l'infini et donc,

$$\bar{U} = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q A_q \sum_{r=q}^{\infty} C_{r-q} \frac{d^r \bar{U}}{dy^r}$$

et on permute ensuite l'ordre de sommation pour obtenir :

$$\bar{U} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{d^r \bar{U}}{dy^r} \sum_{q=0}^r (-1)^q A_q C_{r-q}$$

$$(4.27) \quad \bar{U} = A_0 C_0 \bar{U} + (A_0 C_1 - A_1 C_0) \frac{d\bar{U}}{dy} + (A_0 C_2 - A_1 C_1 + A_2 C_0) \frac{d^2 \bar{U}}{dy^2} + \dots$$

Puisque cette dernière relation (4.27) doit être valable pour toute fonction  $\bar{U}(y)$ , on peut identifier les coefficients des deux membres et écrire :

$$A_0 C_0 = 1, \quad A_0 C_1 - A_1 C_0 = 0, \quad A_0 C_2 - A_1 C_1 + A_2 C_0 = 0, \dots$$

c'est-à-dire parvenir à la connaissance des coefficients  $C_p$  :

$$C_0 = \frac{1}{A_0}, \quad C_1 = \frac{A_1}{A_0^2}, \quad C_2 = \frac{A_1^2}{A_0^3} - \frac{A_2}{A_0^2}, \dots$$

Grâce à ces valeurs, on reconstitue l'expression (4.20) de  $T_b$  :



$$T_b = \frac{1}{A_0} \bar{U} + \frac{A_1}{A_0^2} \frac{d\bar{U}}{dy} + \left( \frac{A_1^2}{A_0^3} - \frac{A_2}{A_0^2} \right) \frac{d^2\bar{U}}{dy^2} + \dots$$

Revenant aux notations premières grâce aux relations (4.21), on obtient la relation désirée donnant  $\tau_b$  en fonction de  $\bar{u}$ , dans le cas où  $\tau_s = 0$  :

$$(4.28) \quad \tau_b = \left[ \frac{\sigma H}{A_0} + i f H \frac{A_1}{A_0^2} + \frac{i f H}{\sigma} \left( i f - \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) \left( \frac{A_1^2}{A_0^3} - \frac{A_2}{A_0^2} \right) + \dots \right] \bar{u} \\ + \left[ H \frac{A_1}{A_0^2} + \frac{H}{\sigma} \left( 2 i f - \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt} \right) \left( \frac{A_1^2}{A_0^3} - \frac{A_2}{A_0^2} \right) + \dots \right] \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dots \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \dots$$

Dans l'expression (4.28), le terme principal est :

$$\frac{\sigma H}{A_0} \bar{u} = \frac{\sigma H}{b} \bar{u} ;$$

les autres termes proviennent de l'intégrale de convolution temporelle. Estimer l'importance de celle-ci revient à estimer les termes suivants de l'expression (4.28). Lorsque l'expression de  $\tau_b$  pourra se réduire à

$$\tau_b \approx \frac{\sigma H}{A_0} \bar{u} ,$$

l'intégrale de convolution de (3.12) sera négligeable.

Afin d'estimer les ordres de grandeur des divers termes, on prendra :

$$f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\lambda(\xi) = \xi$$

$$\ln \xi_0 = -10 .$$

Avec cette forme de la fonction  $\lambda(\xi)$  et cette valeur de  $\xi_0$ , les calculs conduisent à

$$A_0 = 8,5000$$

$$A_1 = 0,5829 , \quad \frac{A_1}{A_0^2} = 8,068 \times 10^{-3} ,$$

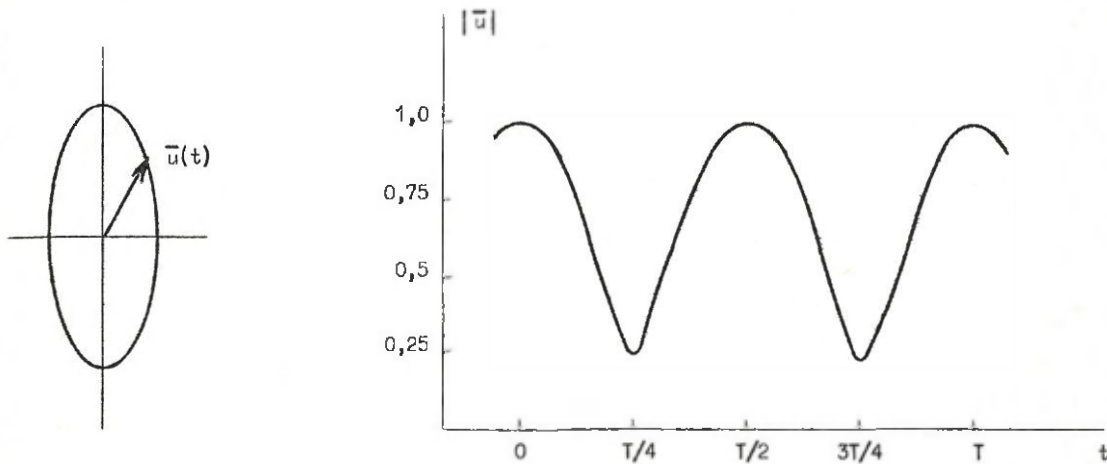
$$A_2 = 0,1319 \quad , \quad \frac{A_1^2}{A_0^3} - \frac{A_2}{A_0} = - 1,272 \times 10^{-3} .$$

Lors d'une marée, la vitesse moyenne  $\bar{u}$  varie périodiquement. Deux fois par période, la grandeur absolue de  $\bar{u}$ ,

$$|\bar{u}| = (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

passé par une valeur minimale; c'est alors le renversement de la marée.

Hodographe



Lors d'un renversement de la marée,  $|\bar{u}|$  est faible mais  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$  prend de l'importance d'autant plus que  $\bar{u}$  varie rapidement non seulement en grandeur mais aussi en direction.

1) En dehors d'une période de renversement du courant

On peut estimer

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \sim 0,6 \text{ m/s} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \sim 3 \times 10^{-5} \text{ m/s} \\ \sigma \sim 4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \sim 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1} . \end{array} \right.$$

Les calculs conduisent à :

$$\tau_b \sim [4,7 \times 10^{-5} + i 8,1 \times 10^{-7} + 3,2 \times 10^{-8} + i 3,2 \times 10^{-9}] H \bar{u} \\ + [8,1 \times 10^{-3} - i 6,4 \times 10^{-4} + 3,2 \times 10^{-5}] H \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} .$$

Les contributions des termes linéaires d'accélération ont une importance relative de 3 % et sont donc négligeables. Il reste donc

$$\tau_b = \frac{\sigma H}{A_0} \bar{u} \sim 8 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2 \quad \text{pour} \quad H = 30 \text{ m}$$

et donc dans ce cas

$$\sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \sim 1,1 \times 10^{-2} , \quad \sigma \sim 4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

ce qui vérifie *a posteriori* l'estimation de  $\sigma$ .

## 2) Durant une période de renversement du courant

On peut estimer cette fois

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \sim 0,1 \text{ m/s} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \sim 9 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2 \\ \sigma \sim 1 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \\ \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \sim 6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1} . \end{array} \right.$$

Les calculs conduisent à

$$\tau_b \sim [1,2 \times 10^{-5} + i 8,1 \times 10^{-7} + 1,3 \times 10^{-7} + i 7,6 \times 10^{-9}] H \bar{u} \\ + [8,1 \times 10^{-3} - i 2,5 \times 10^{-7} + 7,6 \times 10^{-5}] H \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} .$$

Les contributions des termes linéaires d'accélération ont une importance relative de 42 % soit approximativement 15 fois plus grande que durant le reste de la période de la marée.

Dans l'expression de  $\tau_b$ , on peut toutefois négliger les termes dont l'importance relative ne dépasse pas 3 %. Dans ce cas, il reste l'expression valable même lors d'un renversement de la marée :

$$(4.29) \quad \tau_b = \left( \frac{\sigma H}{b} + i f \frac{HA_1}{b^2} \right) \bar{u} + \frac{HA_1}{b^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} .$$

Ainsi, dans ce cas, pour  $H = 30$  m

$$\tau_b \sim 7 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\sigma H = \kappa |\tau_b|^{\frac{1}{2}} \sim 3 \times 10^{-3} \text{ m/s}$$

et  $\sigma \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  ,

ce qui vérifie *a posteriori* l'estimation de  $\sigma$  .

L'expression (4.29) est donc celle qui, en l'absence de vent et pour des conditions initiales nulles, tient compte au premier ordre des termes d'accélération :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad \text{et} \quad i f \bar{u} .$$

La méthode précédente pour obtenir une expression explicite de  $\tau_b$  en fonction de  $\bar{u}$  et  $\tau_s$  réclamait de ne garder que les premiers termes du développement asymptotique de l'intégrale de convolution mais permettait de garder tous les termes de la somme sur les valeurs propres (somme sur  $n$ ). Il est intéressant ici de rechercher une expression analogue basée sur le maintien de l'intégrale de convolution mais sur la troncature de la somme sur les valeurs propres.

Cette méthode de calcul permet de prendre en compte sans difficulté les termes dépendant de  $\tau_s$  et des conditions initiales; l'expression obtenue de  $\tau_b$  en sera donc ainsi généralisée.

Nous partons à nouveau de la solution du modèle tridimensionnel [Nihoul (1977a)], soit de l'expression (3.12) à laquelle on adjoint les termes dus aux conditions initiales :

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= \frac{\tau_s}{\sigma H} \bar{s} + \frac{\tau_b}{\sigma H} \bar{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \exp(-\alpha_n y) \\
 (4.30) \quad &+ e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_s}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy' \\
 &- e^{-ift} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{d}{dy'} \left( \frac{\tau_b}{\sigma H} e^{ift'} \right) dy'
 \end{aligned}$$

où les  $\omega_n$  dépendent des conditions initiales :  
 si en  $t = 0$  :

$$\hat{u}(\xi, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_n^0 f_n(\xi)$$

on a :

$$\omega_n = -\hat{u}_n^0 f_n(\xi_0) \quad \text{pour } n \geq 1 .$$

Pour la simplicité d'écriture, on note

$$\begin{aligned}
 (4.31) \quad T_b &= \frac{\tau_b \exp(ift)}{\sigma H} , & T_s &= \frac{\tau_s \exp(ift)}{\sigma H} , \\
 \bar{U} &= \bar{u} \exp(ift) , & \Omega_n &= \omega_n \exp(ift) .
 \end{aligned}$$

(4.30) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (4.32) \quad \bar{U} &= \bar{s} T_s + \bar{b} T_b + \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \exp(-\alpha_n y) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy'
 \end{aligned}$$

Et la même expression dérivée par rapport à  $y$  s'écrit :



$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{U}}{dy} = & \bar{s} \frac{dT_s}{dy} + \bar{b} \frac{dT_b}{dy} - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Omega_n \exp(-\alpha_n y) \\
 & + \frac{dT_s}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} - \frac{dT_b}{dy} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \\
 (4.33) \quad & - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) f_n(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) f_n(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy' .
 \end{aligned}$$

Se rappelant (4.23), on simplifie les notations en écrivant

$$(4.34) \quad A_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0) f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+1}}$$

et, de même,

$$(4.35) \quad B_q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n^{q+1}} .$$

Les calculs montrent que l'on a les identités :

$$(4.36) \quad A_0 = \bar{b} \quad [\text{cf. (4.26)}] \quad \text{et} \quad B_0 = -\bar{s} .$$

Ainsi donc, dans l'expression (4.33) disparaissent les termes  $\frac{dT_s}{dy}$  et  $\frac{dT_b}{dy}$  ; il reste :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{U}}{dy} = & - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Omega_n \exp(-\alpha_n y) \\
 (4.37) \quad & - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(1) f_n(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) f_n(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy' .
 \end{aligned}$$

Si l'on veut obtenir une relation explicite en

$$T_b = \frac{\tau_b}{\sigma H} \exp(i\tau t) ,$$

il faut éliminer les intégrales de convolution en  $\frac{dT_b}{dy}$  entre (4.32) et (4.37). Cette élimination directe n'est pas possible; il faut user d'approximations. Plusieurs possibilités sont offertes; tout d'abord, on peut ne retenir de chaque somme sur  $n$  que le premier terme ( $n = 1$ )

ou, mieux, ne garder que chaque premier terme dont on ajuste le coefficient de manière à sauvegarder une certaine valeur moyenne du moyen de convolution [méthode de Jelesnianski, utilisée dans son modèle [Jelesnianski (1970)] et par Forristall [Forristall (1974)]].

Première possibilité

De chaque série, on ne retient que le premier terme ( $n = 1$ ) ; les expressions deviennent alors :

$$(4.32') \quad \bar{U} = \bar{s} T_s + \bar{b} T_b + \Omega_1 \exp(-\alpha_1 y) + \frac{f_1(1) f_1(\xi_0)}{\alpha_1} \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' - \frac{f_1(0) f_1(\xi_0)}{\alpha_1} \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy'$$

$$(4.37') \quad \frac{d\bar{U}}{dy} = -\alpha_1 \Omega_1 \exp(-\alpha_1 y) - f_1(1) f_1(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' + f_1(0) f_1(\xi_0) \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy'$$

L'élimination désirée est maintenant immédiate en additionnant la première relation à la seconde préalablement divisée par  $\alpha_1$ . Cette opération engendre une grande simplification : non seulement l'intégrale de convolution en  $\frac{dT_b}{dy}$  disparaît comme on le désirait mais s'éliminent également les termes en les conditions initiales et en  $\frac{dT_s}{dy}$ . Le résultat est simple :

$$(4.38) \quad \bar{U} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{s} T_s + \bar{b} T_b .$$

Cette relation est aisément mise sous forme explicite en  $T_b$  :

$$(4.39) \quad T_b = \frac{1}{\bar{b}} \bar{U} + \frac{1}{\alpha_1 \bar{b}} \frac{d\bar{U}}{dy} - \frac{\bar{s}}{\bar{b}} T_s .$$

De retour aux notations conventionnelles, on transforme facilement (4.39) :

$$(4.40) \quad \tau_b = \left( \frac{\sigma H}{b} + i f \frac{H}{\alpha_1 \bar{b}} \right) \bar{u} + \frac{H}{\alpha_1 \bar{b}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\bar{s}}{b} \tau_s .$$

Seconde possibilité

De chaque série, on ne retient que le premier terme ( $n = 1$ ) mais on en modifie le coefficient de manière à sauvegarder une certaine valeur moyenne :

i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \exp(-\alpha_n y) = \Omega \exp(-\alpha_1 y)$$
  
avec  $\Omega$  tel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \Omega_n \exp(-\alpha_n y) dy = \Omega \int_0^{\infty} \exp(-\alpha_1 y) dy$$

et donc

$$\Omega = \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{\alpha_n} .$$

ii) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^y \exp[-\alpha_n(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy'$$

avec  $A$  tel que :

$$= A \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha_n y) dy = A \int_0^{\infty} \exp(-\alpha_1 y) dy$$

et donc

$$A = \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1) f_n(\xi_0)}{\alpha_n^2} = \alpha_1 B_1 .$$

On procède de même pour toutes les autres sommes pour finalement obtenir :

$$(4.41) \quad \begin{aligned} \bar{U} = \bar{s} T_s + \bar{b} T_b + \alpha_1 \exp(-\alpha_1 y) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{\alpha_n} \\ & + \alpha_1 B_1 \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' \\ & - \alpha_1 A_1 \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy' \end{aligned}$$

$$(4.42) \quad \begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dy} = -\alpha_1 \exp(-\alpha_1 y) & \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n + \alpha_1 \bar{s} \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' \\ & + \alpha_1 \bar{b} \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_b}{dy'} dy' . \end{aligned}$$

L'élimination de l'intégrale de convolution temporelle contenant  $\frac{dT_b}{dy'}$  conduit à la relation unique :

$$(4.43) \quad \bar{U} + \frac{A_1}{\bar{b}} \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{b} T_b + \bar{s} T_s + \alpha_1 \exp(-\alpha_1 y) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{\alpha_n} - \frac{A_1}{\bar{b}} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n \right] + [B_1 + \bar{s} \frac{A_1}{\bar{b}}] \alpha_1 \int_0^y \exp[-\alpha_1(y-y')] \frac{dT_s}{dy'} dy' .$$

Cette dernière relation est à rapprocher de (4.38) mais est plus précise puisque les sommes ont été approchées avec davantage de circonspection. Si dans (4.43), nous ne gardons que le premier terme de chaque somme, y compris les sommes formant  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $\bar{s}$  et  $\bar{b}$ , nous retrouvons identiquement (4.38).

Ainsi donc le coefficient  $\frac{A_1}{\bar{b}}$  est plus précis que  $\frac{1}{\alpha_1}$  et les termes correctifs en les conditions initiales et en l'histoire de  $\frac{dT_s}{dy}$  sont petits. Une expression simple et utile sera donc la suivante :

$$(4.44) \quad \bar{U} + \frac{A_1}{\bar{b}} \frac{d\bar{U}}{dy} = \bar{b} T_b + \bar{s} T_s ,$$

reprenant le premier membre plus précis de (4.43) et le second membre plus simple de (4.38).

Rendant (4.44) explicite par rapport à  $T_b$  puis en revenant aux notations conventionnelles, on obtient la relation donnant  $\tau_b$  à partir de  $\bar{u}$  et  $\tau_s$  :

$$(4.45) \quad \tau_b = \left( \frac{\sigma H}{\bar{b}} + i f \frac{H A_1}{\bar{b}^2} \right) \bar{u} + \frac{H A_1}{\bar{b}^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{\bar{s}}{\bar{b}} \tau_s$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{b} = \int_{\xi_0}^1 \frac{(1-\xi)^2}{\lambda(\xi)} d\xi \quad , \quad \bar{s} = \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi \\ A_1 = \int_{\xi_0}^1 \frac{1-\xi}{\lambda(\xi)} d\xi \left[ \int_0^{\xi} \frac{\xi'(1-\xi')}{\lambda(\xi')} d\xi' + \xi \int_{\xi}^1 \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' \right] - \bar{s}^2 . \end{array} \right.$$

L'expression (4.45) est identique à l'expression (4.29) obtenue pour  $\tau_s = 0$  après approximations complémentaires (tous les termes des sommes sur  $n$  mais le premier terme du développement asymptotique de l'intégrale de convolution).

Remarques

1. L'expression (4.45) est encore implicite en  $\tau_b$  si l'on se rappelle

$$\sigma_H = \kappa |\tau_b|^2 .$$

Le calcul de  $\tau_b$  n'est pas pour autant compromis; il peut être effectué soit par itérations successives (convergence assurée) soit en assimilant  $\sigma_H$  à  $\frac{\kappa \bar{a}}{b} |\bar{u}|$ , expression valable en dehors du renversement.

2. On peut réécrire (4.45) en groupant les termes d'accélération :

$$(4.46) \quad \tau_b = \frac{\sigma_H}{b} \bar{u} + \frac{H A_1}{b^2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{if } \bar{u} \right) - \frac{\bar{s}}{b} \tau_s .$$

Entre parenthèses intervient l'accélération totale  $\frac{d\bar{u}}{dt}$ . Si les termes non linéaires d'advection avaient pu être incorporés au formalisme, peut-être les aurait-on vu apparaître ici, rendant la correction proportionnelle à l'accélération totale :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{if } \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x_1} (\bar{u}_1 \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\bar{u}_2 \bar{u}) .$$

D'autre part, si on intègre l'équation (3.3) sur la colonne d'eau, on obtient une valeur de l'accélération totale moyenne sur la colonne d'eau :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \text{if } \bar{u} = \phi + \frac{\tau_s - \tau_b}{H}$$

qui permet d'éliminer cette accélération au profit du terme  $\phi$  dans (4.46) :

$$\left( 1 + \frac{A_1}{b^2} \right) \tau_b = \frac{\sigma_H}{b} \bar{u} + \frac{H A_1}{b^2} \phi + \left( \frac{A_1}{b^2} - \frac{\bar{s}}{b} \right) \tau_s$$

Cette relation a la propriété de lier de manière purement algébrique les quatre fonctions temporelles, indépendantes de la coordonnée  $\xi$  et caractérisant l'écoulement :  $\tau_b$ ,  $\bar{u}$ ,  $\phi$  et  $\tau_s$ .

3. La relation (4.46) est une paramétrisation de  $\tau_b$ , généralisant la paramétrisation devenue classique liant les valeurs instantanées des variables d'état :



$$\tau_b = D |\bar{u}| \bar{u} - m \tau_s = \frac{\sigma H}{b} \bar{u} - \frac{s}{b} \tau_s$$

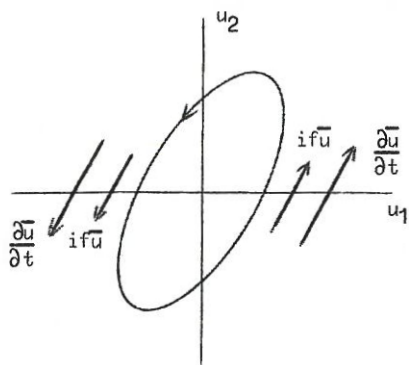
au cas où les termes d'accélération deviennent non négligeables. Les termes ajoutés

$$\text{if } \frac{H A_1}{b^2} \bar{u} \quad \text{et} \quad \frac{H A_1}{b^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

sont directement proportionnels à  $H$ , hauteur totale de la colonne d'eau, et ont donc davantage d'importance en mer profonde. Ceci est compréhensible : d'une part, si la hauteur  $H$  augmente, la masse d'eau devant se déplacer est plus importante et son inertie se fait davantage sentir et, d'autre part, si la hauteur  $H$  augmente, l'inflexion du profil de vitesse sous l'action de la rotation de la terre s'accroît; ce dernier phénomène est connu sous le nom de "spirale d'Ekman" ou *veering*.

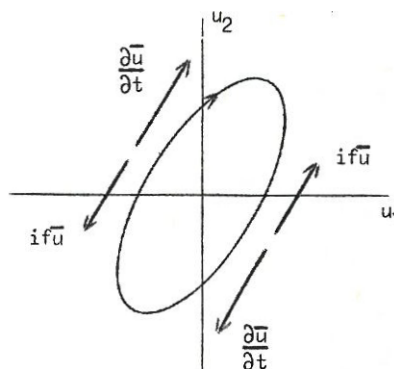
Au moment du renversement des courants de marée, le terme  $\frac{\sigma H}{b} \bar{u}$  perd de son importance au profit des autres termes de l'expression; la grandeur  $|\bar{u}|$  passe par une valeur minimale et est donc stationnaire; il en résulte que  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$  est en quadrature avec  $\bar{u}$  au moment ils prennent leur importance relative.

Il est facile de savoir dans quelles situations ces deux termes se renforcent ou se détruisent :



Ellipse de marée parcourue aire à gauche  
(cas fréquent dans la mer du Nord)

Les termes en quadrature s'additionnent et ainsi se renforcent à chaque renversement.



Ellipse de marée parcourue aire à droite  
(cas plus rare)

Les termes en quadrature se soustraient et se détruisent partiellement à chaque renversement.

La tension au fond  $\tau_b$  est donc davantage déphasée par rapport à  $\bar{u}$  au moment du renversement; dans le cas d'absence de vent,  $\tau_b$  s'aligne habituellement sur  $\bar{u}$  sauf lors du renversement où  $\tau_b$  s'en écarte d'un angle d'autant plus grand que la profondeur est importante et que le renversement est brutal.

### 3.- Temps caractéristiques liant les diverses variables temporelles

De la relation (4.45) peut être extrait un temps caractéristique de corrélation liant  $\bar{u}$  et  $\tau_b$  :

$$t_0 = \frac{\frac{H A_1}{\bar{b}^2}}{\frac{\sigma H}{b}} = \frac{A_1}{\sigma \bar{b}} .$$

Ce temps doit être considéré comme un délai d'interaction entre les variations de  $\bar{u}$  et de  $\tau_b$ , temps de transfert réciproque d'informations entre l'écoulement moyen et l'écoulement au fond.

Un tel temps de corrélation avait été déterminé au chapitre précédent (chapitre II, § 5) et on avait alors trouvé :

$$t_0 \sim 100 \text{ s} .$$

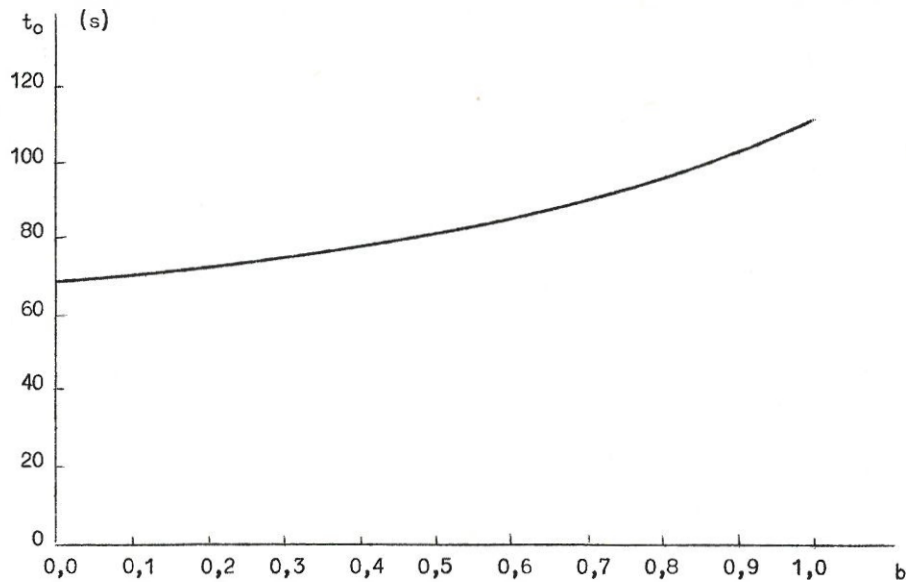
Le même résultat sera obtenu ici et une interprétation physique liée à la turbulence en sera dégagée.

Pour calculer l'ordre de grandeur de ce temps noté  $t_0$ , on choisit

$$\lambda(\xi) = \xi(1 - b \xi) , \quad 0 \leq b \leq 1$$

et  $\ln \xi_0 = -10$  .

$t_0$  apparaît ainsi comme une fonction du paramètre  $b$ , sa variation est consignée sur la figure ci-après. On remarque de suite que  $t_0$  varie entre une et deux minutes (70 à 110 s). Or, ce temps est précisément le temps caractéristique des tourbillons homogènes et isotropes dont la dimension caractéristique est le mètre.



En effet, dans le domaine des échelles des tourbillons homogènes et isotropes, on peut avoir recours à la théorie de Kolmogorov. Suivant cette théorie, l'énergie est distribuée suivant un spectre décroissant vers les longueurs décroissantes :

$$(4.47) \quad E(\ell) \sim \epsilon^{2/3} \ell^{5/3}$$

où  $\ell$  est la dimension caractéristique du tourbillon et  $\epsilon$  est l'énergie transmise par unités de masse et de temps à travers la cascade des tourbillons décroissants. Dans la mer, et en particulier la mer du Nord, ce taux de transfert d'énergie  $\epsilon$  n'est pas une constante depuis les mouvements à grande échelle ( $\ell \sim 10^6$  m) jusqu'aux tourbillons les plus petits ( $\ell \sim 10^{-1}$  m) ; à certaines échelles intermédiaires, on constate des apports énergétiques dus aux vents, aux marées, aux oscillations d'inertie et autres ondes. Il s'ensuit que  $\epsilon$  doit augmenter vers les longueurs décroissantes. Les observations d'Ozmidov (1965) ont montré que ces apports se font à des longueurs bien particulières (longueurs de résonance) où  $\epsilon$  accuse un saut et qu'entre deux de ces longueurs,  $\epsilon$  est pratiquement constant.

Vers les petites échelles de mouvement,  $\varepsilon$  a atteint une valeur constante maximale que l'on peut admettre être pour la mer du Nord [Nihoul (1975)] :

$$\varepsilon \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^3 .$$

En accord avec (4.47), on peut associer un temps caractéristique à chaque tourbillon de dimension  $l$  :

$$(4.48) \quad \tau \sim \varepsilon^{-1/3} l^{2/3}$$

Soit pour  $\tau \sim 100 \text{ s}$  et  $\varepsilon \sim 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}^3$ , on calcule

$$l \sim 1 \text{ m} .$$

Il n'est donc pas difficile de justifier physiquement la valeur de  $t_0$  : le courant moyen  $\bar{u}$  interagit avec le fond  $\tau_b$  essentiellement par des tourbillons dont les dimensions verticales sont de l'ordre d'une fraction de la hauteur de la colonne d'eau ( $H \sim$  dizaine de mètres); ces tourbillons ont donc une étendue verticale de l'ordre du mètre et sont en outre, de part leur faible taille, quasi isotropes. Lors d'une variation au sein de l'écoulement, l'information s'échangeant entre  $\bar{u}$  et  $\tau_b$  est transmise avec un délai égal au temps caractéristique de ces tourbillons, soit une à deux minutes, plus précisément  $t_0$ .

D'autre part, la stabilité des algorithmes numériques utilisés pour la résolution des modèles bidimensionnels requiert un pas temporel inférieur à un seuil de l'ordre de la centaine de secondes (environ deux minutes) [Ronday (1976)]. Ce fait n'est pas étranger à ce qui vient d'être remarqué : si un modèle même bidimensionnel veut reproduire les variations temporelles de la vitesse moyenne  $\bar{u}$  et de la tension de fond  $\tau_b$ , il ne peut rompre l'interaction entre ces deux variables en choisissant un pas temporel supérieur à ce temps d'interaction. Une fois de plus, la stabilité numérique a une raison physique; l'instabilité numérique est la conséquence inéluctable du non-respect d'un phénomène physique.

Le temps  $t_0$  est beaucoup plus petit que le temps de réponse de  $\bar{u}$  et  $\tau_b$  aux forces extérieures  $\Phi$  et  $\tau_s$  (deux à trois heures).

Cette remarque justifie la dépendance instantanée résultant du modèle de Welander non-modifié [chapitre II, § 2, équation (2.8)] et la quasi-égalité des temps caractéristiques liant  $\bar{u}$  et  $\tau_b$  à  $\phi$  et  $\tau_s$  (chapitre II, § 5).

#### 4.- Résolution du problème aux valeurs propres

On donnera ici à titre d'exemple la résolution du problème aux valeurs propres pour la fonction parabolique :

$$(4.49) \quad \lambda = \xi(1 - b \xi) \quad \text{avec } b = 0,80 .$$

Le problème posé est de résoudre l'équation différentielle du second ordre, homogène

$$(4.50) \quad \frac{d}{d\xi} \left( \lambda \frac{dy}{d\xi} \right) + Ay = 0 ,$$

accompagné des conditions aux limites homogènes

$$(4.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{en } \xi = 0 \end{array} \right.$$

$$(4.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{en } \xi = 1 . \end{array} \right.$$

Utilisant (4.49), (4.50) s'écrit :

$$(4.53) \quad (\xi - b \xi^2) y'' + (1 - 2b \xi) y' + Ay = 0$$

admettant la singularité régulière  $\xi = 0$  . On pose donc

$$(4.54) \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^{n+p} \quad \text{avec } a_0 \neq 0 .$$

(4.53) permet d'écrire :

$$a_{n+1} (n + \rho + 1)^2 = a_n [b(n + \rho)(n + \rho + 1) - A]$$

$$n = -1 \Rightarrow a_0 \rho^2 = 0 \text{ soit } \rho = 0 \text{ racine double,}$$

$$n > -1, \rho = 0 \Rightarrow a_{n+1} (n + 1)^2 = a_n [bn(n + 1) - A]$$



$$a_n = a_{n-1} \left[ b \frac{n-1}{n} - \frac{A}{n^2} \right] ;$$

on obtient de cette manière la première solution :

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n .$$

Recherche de la seconde solution

La méthode du wronskien permet d'écrire

$$y_2 = C \int^{\xi} \frac{d\xi}{\lambda y_1^2} y_1 .$$

On recherche les premiers termes de  $y_2$  et l'on montrera qu'il est impossible d'annuler

$$\lambda \frac{dy_2}{d\xi}$$

en  $\xi = 0$  et donc que la seule solution physiquement acceptable est  $y_1$  .

$$y_1 \sim a_0 + a_1 \xi = a_0(1 - A \xi)$$

$$\lambda y_1^2 \sim a_0^2 \xi [1 - (b + 2A)\xi]$$

$$\frac{1}{\lambda y_1^2} \sim \frac{1}{a_0^2} \left[ \frac{1}{\xi} + (b + 2A) \right]$$

$$\int^{\xi} \frac{d\xi}{\lambda y_1^2} \sim \frac{1}{a_0^2} [\ln \xi + (b + 2A)\xi]$$

$$y_2 \sim a_0(1 - A \xi) \left[ \frac{C}{a_0^2} \ln \xi + \frac{C(b + 2A)}{a_0^2} \xi \right]$$

$$y_2 \sim \frac{C}{a_0} (1 - A \xi) \ln \xi + \frac{C(b + 2A)}{a_0} \xi$$

$$\frac{dy_2}{d\xi} \sim \frac{C}{a_0} (1 - A \xi) \frac{1}{\xi} + \frac{C(b + 2A)}{a_0} - \frac{AC}{a_0} \ln \xi$$

$$\lambda \frac{dy_2}{d\xi} \sim \xi(1 - b \xi) \left[ \frac{C}{a_0} (1 - A \xi) \frac{1}{\xi} + \frac{C(b + 2A)}{a_0} - \frac{AC}{a_0} \ln \xi \right]$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \lambda \frac{dy_2}{d\xi} = \frac{F}{a_0} \neq 0 \quad \text{si} \quad y_2 \neq 0 .$$

Il ne faut retenir que la solution  $y_1(\xi)$  et l'on écrira :

$$y = C y_1(\xi)$$

a) on impose

$$\lambda \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 0$$

ceci est toujours vérifié quel que soit  $A$  ;

b) on impose

$$\lambda \frac{dy}{d\xi} = 0 \quad \text{en} \quad \xi = 1$$

cette relation fournira la quantification de  $A$  et donc les valeurs propres du problème, soit, après calculs,

$$0 = A \left[ 1 + \left(b - \frac{A}{2}\right) + \left(b - \frac{A}{2}\right)\left(b - \frac{A}{6}\right) + \left(b - \frac{A}{2}\right)\left(b - \frac{A}{6}\right)\left(b - \frac{A}{12}\right) + \dots \right]$$

Les racines de cette équation en  $A$  forment l'ensemble des valeurs propres; la première valeur propre est évidemment  $A = 0$  soit  $\alpha_0 = 0$ . Les autres racines doivent être calculées numériquement. Pour  $b = 0,8$ , on obtient

$$\alpha_1 = 2,4947$$

$$\alpha_2 = 8,1455$$

$$\alpha_3 = 17,0072$$

$$\alpha_4 = 29,0868$$

$$\alpha_5 = 44,3861$$

...

Choisissant  $a_0 = 1$ , les premières fonctions propres non-normalisées sont :

$$f_0(\xi) = 1$$

$$f_1(\xi) = 1 - 2,4947 \xi + 0,5580 \xi^2 + 0,1429 \xi^3 + 0,0635 \xi^4 + \dots$$

$$f_2(\xi) = 1 - 8,1453 \xi + 13,3291 \xi^2 - 4,9547 \xi^3 - 0,4504 \xi^4 + \dots$$

$$f_3(\xi) = 1 - 17,0072 \xi + 65,5083 \xi^2 - 88,8526 \xi^3 + 41,1343 \xi^4 + \dots$$

$$f_4(\xi) = 1 - 29,0868 \xi + 199,8758 \xi^2 - 539,37 \xi^3 + 656,91 \xi^4 + \dots$$

$$f_5(\xi) = 1 - 44,3861 \xi + 474,78 \xi^2 - 2278,2 \xi^3 + 4953,1 \xi^4 + \dots$$

## Chapitre V

### Application à la dispersion

#### 1.- Introduction

L'objet de ce chapitre est l'application de la connaissance du profil de vitesse à la dispersion par l'effet cisailant.

L'effet cisailant est associé au gradient *vertical* de la vitesse horizontale et conduit à une dispersion *horizontale* analogue à la dispersion turbulente mais considérablement plus efficace. Grâce à la connaissance du profil de vitesse, cet effet pourra être paramétrisé par voie théorique.

Pour débiter les calculs, souvenons-nous de l'équation de dispersion (1.17)

$$(5.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 c)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 c)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 c)}{\partial x_3} = Q - k c + m \frac{\partial c}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{\kappa} \frac{\partial c}{\partial x_3} \right) .$$

Dans cette équation,

$\square \frac{\partial(u_1 c)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 c)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 c)}{\partial x_3}$  représente l'advection par le courant moyen et peut se décomposer en deux parties correspondant respectivement à l'advection horizontale et à l'advection verticale; cette dernière partie est généralement beaucoup plus petite que la première. En effet, si l'on note par  $L_h$ ,  $L_v$ ,  $L'_h$  respectivement les longueurs de variations horizontale des courants, verticale des courants et horizontale de la concentration du constituant, on peut écrire :

$$L_h \sim \text{longueur d'onde d'une marée} \sim 10^5 \text{ m ;}$$

$$L_v \sim \text{profondeur} \sim 10 \text{ m ;}$$

$L'_h \sim$  dimension horizontale de la tache  $\sim 10^3$  m ,

on s'aperçoit immédiatement que la longueur  $L'_h$  est considérablement plus petite que la longueur  $L_h$  :

$$L'_h \ll L_h .$$

D'autre part, l'équation de continuité fournit l'ordre de grandeur de la vitesse verticale  $u_3$  à partir de la vitesse horizontale  $u_h$  :

$$u_3 \sim \frac{L_v}{L_h} u_h .$$

L'advection horizontale a pour ordre de grandeur :

$$\frac{u_h c}{L'_h} .$$

L'advection verticale a pour ordre de grandeur :

$$\frac{u_3 c}{L_v} \sim \frac{u_h c}{L_h} \ll \frac{u_h c}{L'_h} .$$

L'advection verticale est donc généralement négligeable vis-à-vis de l'advection horizontale.

▣  $Q$  représente le taux de production et de destruction par les agents extérieurs au système et par les interactions avec les autres constituants au sein du système. On négligera ici ces dernières en se limitant à l'étude d'un constituant non-interagissant, dit semi-passif. De plus, les apports sont généralement soit des déversements quasi-instantanés soit des apports continus le long des frontières (estuariers, côtes, ...). Le contenu du terme  $Q$ , la quantité de constituant entrant dans le système, est alors rejeté soit dans les conditions initiales soit dans les conditions limites. Dans ce cas,  $Q$  peut être ôté de l'équation sans que celle-ci s'écarte de la réalité.

▣  $-kc$  est le taux d'auto-destruction du constituant, analogue à la désintégration radio-active; ce terme peut être fondu avec  $\frac{\partial c}{\partial t}$  à condition de changer de fonction en posant :

$$c' = c \exp(kt)$$



et tout revient alors à prendre  $k = 0$  ; pour simplifier, on prendra  $k = 0$  dès le début des calculs.

▣  $m \frac{\partial c}{\partial x_3}$  représente la migration verticale, c'est-à-dire la sédimentation ou l'ascension. La vitesse de migration  $m$  est généralement de l'ordre de grandeur de la vitesse verticale  $u_3$  ; si l'on néglige l'advection verticale, il est logique de négliger également la migration verticale.

▣  $\tilde{\kappa}_H$  représente la diffusivité turbulente horizontale.

▣  $\tilde{\kappa}$  représente la diffusivité turbulente verticale.

Les flux de dispersion sont obtenus par paramétrisation des termes d'advection pris en moyenne durant un temps de l'ordre de quelques minutes, temps caractéristique des tourbillons de la turbulence homogène et isotrope de petite échelle. Or, la dispersion horizontale est principalement assurée par des courants erratiques dont le temps caractéristique est supérieur à celui-là. Ainsi, en opérant la moyenne des termes d'advection horizontale, les courants irréguliers subsistent dans l'équation et la dispersion horizontale due à cette turbulence à grande échelle ou pseudo-turbulence reste comprise dans les termes d'advection et n'est pas rejetée après paramétrisation dans les termes

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_1}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} (\tilde{\kappa}_H \frac{\partial c}{\partial x_2}) ;$$

c'est pourquoi ces deux termes sont petits et négligeables.

Prenant en compte toutes ces considérations, l'équation (5.1) peut se résumer à :

$$(5.2) \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 c)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 c)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 c)}{\partial x_3} = m \frac{\partial c}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\tilde{\kappa} \frac{\partial c}{\partial x_3}) .$$

Les composantes de la vitesse doivent en outre satisfaire à l'équation de continuité :

$$(5.3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 .$$

Afin de pouvoir utiliser les résultats des chapitres précédents, il est utile d'introduire la variable verticale normalisée  $\xi$  variant de

zéro, au fond, à un, en surface :

$$(5.4) \quad \xi = \frac{x_3 + h}{\zeta + h} = \frac{x_3 + h}{H}$$

et l'on note par  $u_\xi$  la vitesse correspondante à cette variable, en remplacement de  $u_3$  :

$$(5.5) \quad u_\xi = \frac{d\xi}{dt} = \frac{u_3}{H} + \frac{(1-\xi)}{H} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) - \frac{\xi}{H} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} \right) .$$

Evidemment  $u_\xi$  s'annule en  $\xi = 0$  et  $\xi = 1$  .

Les calculs conduisent au remplacement de (5.2) et (5.3) par les nouvelles équations :

$$(5.6) \quad \frac{\partial(Hc)}{\partial t} + \nabla \cdot (Hcu) + \frac{\partial}{\partial \xi} (Hcu_\xi) = m \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \kappa \frac{\partial c}{\partial \xi} \right)$$

$$(5.7) \quad \nabla \cdot (Hu) + H \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

où  $u$  représente la vitesse horizontale :

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

et  $\nabla$  est l'opérateur gradient horizontal :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} e_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} e_2 .$$

On dissocie  $u$  et  $c$  en somme d'une composante moyenne sur la profondeur et d'une déviation autour de cette moyenne :

$$(5.8) \quad u = \bar{u} + \hat{u} , \quad \bar{u} = \int_0^1 u \, d\xi$$

$$(5.9) \quad c = \bar{c} + \hat{c} , \quad \bar{c} = \int_0^1 c \, d\xi .$$

Etant donné le mélange vertical intense, on peut raisonnablement supposer que la déviation  $\hat{c}$  est beaucoup plus petite que la moyenne  $\bar{c}$  . Par contre, la déviation de la vitesse  $\hat{u}$  est comparable à la vitesse moyenne  $\bar{u}$  sur la presque totalité de la colonne d'eau en raison de la condition d'annulation de la vitesse à la hauteur de rugosité :

$$\hat{u} = -\bar{u} \quad \text{en} \quad \xi = \xi_0 .$$

Prenant les moyennes des équations (5.6) et (5.7), celles-ci deviennent :

$$(5.10) \quad \frac{\partial(\overline{H\bar{c}})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{Hc\bar{u}}) + \nabla \cdot (H \int_0^1 \hat{c}\hat{u} \, d\xi) = [mc + \frac{\kappa}{H} \frac{\partial c}{\partial \xi}]_{\xi=1} - [mc + \frac{\kappa}{H} \frac{\partial c}{\partial \xi}]_{\xi=0} \\ = - \varphi_b$$

$$(5.11) \quad \nabla \cdot (H\bar{u}) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

où l'apport de concentration de constituant a été supposé nul en surface et valant  $\varphi_b$  par unités de surface et de temps sur le fond marin.

L'équation (5.10) est l'équation qui régit l'évolution de la variable  $\bar{c}$  mais la déviation  $\hat{c}$  intervient implicitement dans le troisième terme. Ce terme rend compte de l'effet cisailant : les déviations de  $u$  et  $c$  autour de leurs moyennes conduisent donc à un mode supplémentaire de dispersion. Il convient de paramétriser ce terme en fonction des valeurs moyennes des variables  $\bar{u}$  et  $\bar{c}$ .

## 2.- Paramétrisation de l'effet cisailant

Le but des calculs qui suivent est l'obtention de cette paramétrisation; écrivons pour cela la loi d'évolution de la déviation  $\hat{c}$  :

$$\frac{\partial(H\hat{c})}{\partial t} + \nabla \cdot (H\hat{c}\bar{u}) + \nabla \cdot (H\hat{c}\hat{u}) - \nabla \cdot (H \int_0^1 \hat{c}\hat{u} \, d\xi) + \nabla \cdot (H\bar{c}\hat{u}) + \frac{\partial}{\partial \xi} [Hu_{\xi}(\bar{c} + \hat{c})] \\ = m \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \varphi_b + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \xi} (\kappa \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi}) .$$

Utilisons (5.7) et (5.11) de manière à simplifier cette expression :

$$(5.12) \quad \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla \hat{c} + \frac{1}{H} \nabla \cdot (H\hat{c}\hat{u}) - \frac{1}{H} \nabla \cdot (H \int_0^1 \hat{c}\hat{u} \, d\xi) + \hat{u} \cdot \nabla \bar{c} + \frac{\partial}{\partial \xi} (u_{\xi} \hat{c}) \\ = \frac{m}{H} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{\varphi_b}{H} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\kappa} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi})$$

Dans une première approche, nous négligeons l'advection verticale et la migration verticale. Dans ce cas, aucun échange de constituant n'a lieu entre le fond et la colonne d'eau; il est logique d'ôter le terme

contenant le flux de concentration au fond en prenant :

$$\varphi_b = 0 .$$

D'autre part, se souvenant de ce que la déviation  $\hat{c}$  est beaucoup plus petite que la moyenne  $\bar{c}$ , nous pouvons négliger les quatre premiers termes du membre de gauche de l'équation. On ne peut négliger le dernier terme du membre de droite car c'est la dispersion turbulente verticale qui est responsable de la dispersion dans la colonne d'eau et donc de l'homogénéité presque totale de celle-ci.

Il reste donc :

$$(5.13) \quad \hat{u} \cdot \nabla \bar{c} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \kappa \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \right) .$$

Cette équation montre la manière dont évolue le profil de concentration  $\hat{c}$  ; cette évolution est le résultat de la compétition de deux effets : l'advection horizontale différentielle, variant d'une couche à l'autre, induit une progression *horizontale* de la tache de manière hétérogène sur la profondeur; il en résulte un gradient *vertical* de concentration; la dispersion turbulente verticale tend à combattre cette hétérogénéité verticale et à rétablir l'homogénéité bien vérifiée en pratique ( $\hat{c} \ll \bar{c}$ ). Ce second effet s'oppose donc au premier.

De l'examen de ces deux processus compétitifs, on pourrait s'attendre à une équation d'évolution de  $\hat{c}$  où la différence entre les deux quantités représentant les deux effets décrits soit égale à la dérivée temporelle de la déviation  $\hat{c}$ . L'omission de celle-ci dans l'équation (5.13) est donc équivalente à l'hypothèse d'une réponse quasi-statique du système par le processus décrit ci-dessus.

Intégrant de zéro à  $\xi$  et notant

$$(5.14) \quad \hat{r} = \int_0^\xi \hat{u} \, d\xi'$$

on écrit :

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} = H^2 \bar{v}_c \cdot \frac{\hat{r}}{\kappa}$$

et

$$(5.15) \quad \int_0^1 \hat{c} \hat{u} \, d\xi = - \int_0^1 \hat{r} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \, d\xi = - H^2 \nabla \bar{c} \cdot \int_0^1 \frac{\hat{r}\hat{r}}{\bar{\kappa}} \, d\xi .$$

Le tenseur

$$D = H^2 \int_0^1 \frac{\hat{r}\hat{r}}{\bar{\kappa}} \, d\xi$$

est appelé tenseur de diffusivité par effet cisailant.

On peut admettre généralement que la diffusivité turbulente  $\bar{\kappa}$  est proportionnelle à la viscosité cinématique turbulente verticale  $\bar{\nu}$  [Ellison (1957)].

$$\bar{\kappa}(t, x_1, x_2, \xi) = \beta \cdot \bar{\nu}(t, x_1, x_2, \xi)$$

$\beta$  est une fonction de nombre de Richardson et s'approche de l'unité pour une colonne d'eau bien mélangée ( $Ri \sim 0$ ), ou encore

$$\bar{\kappa}(t, x_1, x_2, \xi) = \beta \sigma H^2 \lambda(\xi)$$

avec

$$\sigma H = \kappa \|\tau_b\|^{\frac{1}{2}} \quad \text{[Nihoul (1977a)].}$$

Le tenseur de diffusivité par effet cisailant s'écrit alors :

$$(5.16) \quad D = \frac{1}{\beta \sigma} \int_0^1 \frac{\hat{r}\hat{r}}{\lambda(\xi)} \, d\xi .$$

D'autre part, reprenant les équations (3.15) et (3.18) valables en dehors d'une période de renversement de la marée :

$$(5.17) \quad \hat{u} = \tau_b \frac{b - \bar{b}}{\sigma H} + \tau_s \frac{s - \bar{s}}{\sigma H}$$

$$\bar{u} = \tau_b \frac{\bar{b}}{\sigma H} + \tau_s \frac{\bar{s}}{\sigma H} \Rightarrow \sigma H \approx \frac{\kappa^2}{\bar{b}} \|\bar{u}\| ,$$

l'intégrale de (5.16) peut être calculée en fonction de  $\tau_s$  et  $\tau_b$ .

A titre d'exemple, on utilisera pour la fonction  $\lambda(\xi)$  la loi de Michaelis-Menten-Monod

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi}{1 + a\xi}$$

qui conduit à



$$\bar{b} = -\ln \xi_0 - \frac{3}{2} + \frac{a}{3}, \quad \bar{s} = \frac{1}{2} + \frac{a}{6}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\overline{\tau\tau}}{\lambda(\xi)} d\xi &= \frac{\tau_b \tau_b}{\sigma^2 H^2} \left[ \frac{19}{144} + \frac{19 a}{216} + \frac{61 a^2}{2700} + \frac{2 a^3}{945} \right] \\ &+ \frac{\tau_b \tau_s + \tau_s \tau_b}{\sigma^2 H^2} \left[ \frac{7}{144} + \frac{7 a}{144} + \frac{61 a^2}{3600} + \frac{31 a^3}{15120} \right] \\ &+ \frac{\tau_s \tau_s}{\sigma^2 H^2} \left[ \frac{1}{48} + \frac{a}{36} + \frac{7 a^2}{540} + \frac{2 a^3}{945} \right]. \end{aligned}$$

Pour  $a = 2,4$  valeur du chapitre II pour la paramétrisation de Nihoul et  $\ln \xi_0 = -9,7$ , on obtient :

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (H \int_0^1 \widehat{c\bar{u}} d\xi) \\ &= -\nabla \cdot \left\{ \frac{H^2 \nabla \bar{c}}{\beta \|\bar{u}\|^3} \cdot [90048,75 \tau_b \tau_b + 52193,86 (\tau_b \tau_s + \tau_s \tau_b) + 34306,0 \tau_s \tau_s] \right\}. \end{aligned}$$

Et éliminant  $\tau_b$  grâce à (5.18), il reste :

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (H \int_0^1 \widehat{c\bar{u}} d\xi) \\ (5.18) \quad &= -\nabla \cdot \left[ \frac{H^2 \nabla \bar{c}}{\beta \|\bar{u}\|^3} \cdot 0,3481 \bar{u}\bar{u} + \frac{H^2 \nabla \bar{c}}{\|\bar{u}\|^2} \cdot 84,953 (\bar{u}\tau_s + \tau_s \bar{u}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{H^2 \nabla \bar{c}}{\|\bar{u}\|^3} \cdot 24787,97 \tau_s \tau_s \right] \end{aligned}$$

Par vent moyen ou faible, on peut écrire :

$$\tau_s \lesssim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$\bar{u} \sim \hat{u} \sim u \sim 1 \text{ m/s}$$

et donc

$$\frac{\tau_s}{\|\bar{u}\|} \lesssim 10^{-3} \text{ m/s} \ll 1 \text{ m/s}.$$

Malgré la petitesse du terme  $\frac{\tau_s}{\|\bar{u}\|}$  par rapport au terme  $\bar{u}$ , l'influence de la tension  $\tau_s$  due au vent est non-négligeable car les coefficients qui précèdent les termes en  $\tau_s$  sont importants. Assimilant

24787,97  $\tau_s \tau_s$  à 20732,98  $\tau_s \tau_s$  et posant

$$(5.19) \quad \bar{u}_* = \bar{u} + \frac{244,05}{\|\bar{u}\|} \tau_s ;$$

on peut dégager un carré parfait dans le second membre de (5.18) :

$$(5.20) \quad \nabla \cdot (H \int_0^1 \hat{c} \bar{u} \, d\xi) = - \frac{0,3481}{\beta} \nabla \cdot \left( \frac{H^2}{\|\bar{u}\|} \nabla \bar{c} \cdot \bar{u}_* \bar{u}_* \right)$$

La paramétrisation de l'effet cisailant ainsi obtenue peut être comparée à celle de Bowden [Bowden (1965)] :

$$(5.21) \quad \nabla \cdot (H \int_0^1 \hat{c} \bar{u} \, d\xi) = - \frac{0,625}{\beta} \nabla \cdot \left( \frac{H^2}{\|\bar{u}\|} \nabla \bar{c} \cdot \bar{u} \bar{u} \right)$$

Par ces deux paramétrisations, on voit que l'effet cisailant produit une diffusion dans la direction de la vitesse instantanée avec une diffusivité apparente de l'ordre de  $\bar{u}H$ . La dispersion résultante est évidemment beaucoup plus importante dans la direction du courant dominant et ceci explique l'anisotropie marquée des taches qui présentent très souvent une forme allongée avec une dispersion maximale dans une direction voisine du courant maximum (grand axe de l'ellipse de marée).

La différence essentielle est le remplacement de  $\bar{u}$  par  $\bar{u}_*$  tenant compte de l'influence dispersive du vent; cette différence est compensée par une diminution du coefficient de tête. La paramétrisation de Bowden ignore l'effet de dispersion dû au vent mais exagère l'effet de dispersion dû au courant moyen de manière à ne pas trop s'écarter des observations. La paramétrisation (5.20) tient compte des effets réels respectifs du vent et du courant.

On peut rechercher pour quelle tension de cisaillement due au vent la correspondance entre (5.20) et (5.21) est totale; cette condition est évidemment réalisée si :

$$0,3481 \bar{u}_* \bar{u}_* = 0,625 \bar{u} \bar{u}$$

$$\text{soit} \quad \tau_s = 1,39 \times 10^{-3} \|\bar{u}\| \bar{u}$$

ce qui correspond à un vent moyen

$$\tau_s \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

vitesse du vent  $\sim 1 \text{ m/s}$  .

Grâce à la paramétrisation (5.20), l'équation de dispersion peut ne plus contenir que la seule inconnue  $\bar{c}$  ; en effet, remplaçant dans (5.10) le terme de dispersion par effet cisailant, on obtient pour

$\varphi_b = 0$  :

$$(5.22) \quad \frac{\partial(\overline{Hc})}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{Hc\bar{u}}) = \nabla \cdot \left[ \frac{0,3481 H^2}{\beta \|\bar{u}\|} \nabla \bar{c} \cdot \bar{u}_* \bar{u}_* \right]$$

Vu sa complexité, cette dernière équation munie de ses conditions initiales et limites doit être résolue numériquement sur ordinateur.

Néanmoins, comme le suggère Nihoul [Nihoul (1972)], on peut tenter une approche analytique en simplifiant fortement le problème. Nous nous limiterons au cas schématique suivant :

1. La hauteur totale  $H = h + \zeta$  est supposée constante dans le temps et l'espace; nous négligeons donc l'élévation de surface  $\zeta$  et l'influence de la bathymétrie dans la zone considérée.

2. Le champ de vitesse horizontale moyenne  $\bar{u}$  est uniforme et décrit dans le temps une ellipse centrée (nous négligeons les courants résiduels) :

$$\bar{u} = a \cos \omega t \mathbf{e}_1 + b \sin \omega t \mathbf{e}_2$$

L'excentricité de cette ellipse vaut :

$$(5.23) \quad k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 .$$

Dans le Southern Bight  $k$  est généralement voisin de l'unité.

3. La tension de cisaillement du vent est constante dans le temps et l'espace :

$$\tau_s = \tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_2 \mathbf{e}_2 .$$

Généralement, dans le Southern Bight  $\tau_s$  est aligné suivant la direction de la vitesse maximale et donc  $\tau_2$  est petit devant  $\tau_1$  sinon nul.

4. Nous dissocions la concentration  $\bar{c}$  (moyenne sur la profondeur) en une composante moyenne sur la période d'une marée et une composante fluctuante dans le temps

$$\bar{c} = \bar{c}_m + \bar{c}_f$$

et nous supposons que la variation de  $\bar{c}_m$  sur quelques marées est faible tandis que la fluctuation  $\bar{c}_f$  s'annule en moyenne sur une marée.

Prenant en compte cette dernière hypothèse, nous intégrons sur une période de marée :  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et nous obtenons :

$$\frac{\bar{c}_m(t+T) - \bar{c}_m(t)}{T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \nabla \cdot \left[ -\bar{c}\bar{u} + \frac{\alpha H}{\|\bar{u}\|} (\nabla \bar{c} \cdot \bar{u}_*) \bar{u}_* \right] dt$$

où

$$(5.24) \quad \alpha = \frac{0,3481}{\beta} .$$

Dans l'intégrale du membre de droite,  $\bar{c}_m$  est considéré comme fixé à une valeur constante et les termes en  $\bar{c}_f$  ne donnent aucune contribution tandis que le membre de gauche peut être assimilé à la dérivée temporelle de  $\bar{c}_m$  (Méthode de la moyenne de Krylov-Bogolioubov-Mitropolsky).

Il reste alors :

$$(5.25) \quad \frac{\partial \bar{c}_m}{\partial t} = \alpha H \nabla \cdot \left( \nabla \bar{c}_m \cdot \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{\bar{u}_* \bar{u}_*}{\|\bar{u}\|} dt \right) .$$

Par cette équation, nous remarquons que le seul mode de dispersion possible est dû à l'effet cisailant; en effet, l'advection provoque un entraînement de la tache du constituant mais cet entraînement est nul en moyenne sur une marée (ellipse de marée centrée) et la dispersion turbulente horizontale a été négligée dès le début des calculs.

Après avoir calculé l'intégrale du second membre de (5.25), nous obtenons l'équation d'évolution de  $\bar{c}_m$  :

$$(5.26) \quad \frac{\partial \bar{c}_m}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 \bar{c}_m}{\partial x_1^2} + v_{12} \frac{\partial^2 \bar{c}_m}{\partial x_1 \partial x_2} + v_2 \frac{\partial^2 \bar{c}_m}{\partial x_2^2}$$

où

$$v_1 = \frac{2a \alpha H}{\pi} B(k) + \frac{2(244,05 \tau_1)^2 \alpha H}{\pi a^3} C(k)$$

$$v_{12} = \frac{4(244,05)^2 \tau_1 \tau_2 \alpha H}{\pi a^3} C(k)$$

$$v_2 = \frac{2b^2 \alpha H}{\pi a} D(k) + \frac{2(244,05 \tau_2)^2 \alpha H}{\pi a^3} C(k)$$

où  $k$  est l'excentricité de l'ellipse de marée, donnée par (5.23),  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des intégrales elliptiques complètes se ramenant aisément aux intégrales complètes de première et deuxième espèces  $F(k)$  et  $E(k)$ , que l'on trouve dans les tables.

$$B(k) = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta = \frac{E(k)}{k^2} - \frac{(1 - k^2) F(k)}{k^2}$$

$$= 0,958 \quad (\text{valeur pour } k = 0,97)$$

$$D(k) = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta = -\frac{E(k)}{k^2} + \frac{F(k)}{k^2}$$

$$= 1,875 \quad (\text{valeur pour } k = 0,97)$$

$$C(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-3/2} d\theta = \frac{d}{dk} [k F(k)]$$

$$= 18,34 \quad (\text{valeur pour } k = 0,97) .$$

L'effet dispersif du vent est mis en évidence par les trois termes en  $C(k)$ , pour un vent moyen ( $\tau_s \sim 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$ ) et des courants de marée habituels ( $a \sim 1 \text{ m/s}$ ;  $k = 0,97$ ), le second terme qui compose  $v_1$  a une importance relative de 50 % environ.

Avant d'entreprendre la recherche de la solution de (5.26), il est avantageux d'éliminer la dérivée croisée par une rotation d'axes d'un angle  $\delta$  compté positivement de  $e_1$  vers  $e_2$  et défini par :

$$(5.27) \quad \text{tg } 2\delta = \frac{v_{12}}{v_1 - v_2} .$$

En effet, nous obtenons alors :



$$(5.28) \quad \frac{\partial \bar{c}_m}{\partial t} = \mu_1 \frac{\partial^2 \bar{c}_m}{\partial y_1^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 \bar{c}_m}{\partial y_2^2}$$

où  $y_1$  et  $y_2$  sont les nouvelles coordonnées et

$$(5.29) \quad \left. \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} \right\} = \frac{v_1 + v_2}{2} \pm \frac{1}{2} [v_{12}^2 + (v_1 - v_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

La solution de l'équation (5.28) s'annulant à l'infini est :

$$(5.30) \quad \bar{c}_m = \frac{Q}{4\pi H \sqrt{\mu_1 \mu_2}} \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{y_1^2}{4\mu_1 t} - \frac{y_2^2}{4\mu_2 t}\right]$$

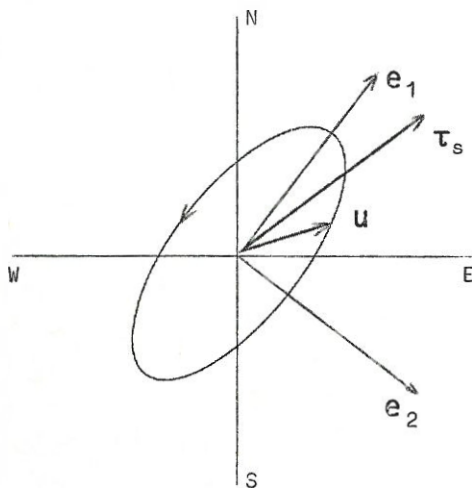
où  $Q$  est la quantité déversée en  $t = 0$  en  $x_1 = x_2 = 0$ .

Les courbes d'égale concentration à chaque instant  $t$  sont donc des ellipses d'équation :

$$\frac{y_1^2}{4\mu_1 t} + \frac{y_2^2}{4\mu_2 t} = \ln \frac{\bar{c}_c}{c_m}$$

où  $\bar{c}_c$  représente la concentration au centre de la tache. Ces ellipses d'isoconcentration ont entre elles des axes parallèles mais ces axes forment avec l'ellipse de marée un angle  $\delta$ , défini par (5.27).

A titre d'exemple, nous calculerons cet angle  $\delta$  et l'excentricité  $k'$  des ellipses d'isoconcentration pour un cas typique du Southern Bight.



$$\tau_s = (10^{-3} e_1 + 10^{-4} e_2) \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$a = 1 \text{ m/s} \quad , \quad k = 0,97 \quad .$$

Après calculs, nous obtenons

$$\delta = 3^\circ$$

$$k' = 0,94 \quad .$$

Il est éclairant de comparer ces derniers résultats à l'expérience de janvier 1969 rapportée par Talbot [Talbot (1970)] avec le colorant Rhodamine B.

Après 68 h de dispersion, Talbot releva la forme de la tache de Rhodamine; celle-ci était en gros elliptique, d'excentricité  $k' = 0,94$  et orientée à  $30^\circ$  nord-est. Quelques heures après, le relevé de l'ellipse de marée au centre de la tache conduisit à une ellipse de marée d'excentricité  $k = 0,97$  et orientée à  $27^\circ$  nord-est. Ainsi donc, malgré les hypothèses très restrictives admises ici, les résultats théoriques peuvent être jugés très satisfaisants.

### 3.- Recherche du profil de concentration suivant la profondeur

Dans ce paragraphe, nous nous supposerons connus, indépendamment de la manière dont ils ont été obtenus, la concentration moyenne sur la profondeur  $\bar{c}$  et son gradient  $\nabla\bar{c}$ , grandeurs obtenues après résolution de l'équation (5.22). Il reste alors à connaître la déviation de la concentration par rapport à sa moyenne

$$\hat{c} = c - \bar{c} .$$

L'équation régissant le comportement de  $\hat{c}$  est, après simplification, donnée par l'égalité (5.13)

$$\hat{u} \cdot \nabla\bar{c} = \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{\kappa} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \right)$$

ou, encore, en explicitant la paramétrisation choisie de  $\tilde{\kappa}$

$$(5.31) \quad \beta\sigma \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \right) = \hat{u} \cdot \nabla\bar{c} .$$

La déviation de la vitesse horizontale  $\hat{u}$  est connue. Plaçons-nous à nouveau en dehors d'une période de renversement de marée et utilisons (5.17) :

$$(5.17) \quad \hat{u} = \frac{\tau_b}{\sigma H} [b(\xi) - \bar{b}] + \frac{\tau_s}{\sigma H} [s(\xi) - \bar{s}] .$$

Nous rechercherons une solution sous forme d'un développement en série de fonctions propres. Puisque la quantité  $\hat{c}$  est nulle en moyenne sur la profondeur et puisqu'il n'y a pas de flux de constituant au fond

et en surface, la forme suivante de la solution convient :

$$(5.32) \quad \hat{c} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(\xi) .$$

Remplaçant dans l'équation (5.31) les grandeurs  $\hat{u}$  et  $\hat{c}$  respectivement par (5.17) et (5.32) et appliquant aux deux membres l'opérateur

$$\int_0^1 \dots f_n(\xi) d\xi ,$$

nous obtenons pour les coefficients  $c_n$  :

$$- \beta \sigma c_n \alpha_n = \sqrt{c} \cdot \left[ - \frac{f_n(0)}{\alpha_n} \frac{\tau_b}{\sigma H} + \frac{f_n(1)}{\alpha_n} \frac{\tau_s}{\sigma H} \right]$$

soit encore

$$(5.33) \quad \hat{c} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(\xi) = \frac{1}{\beta \sigma} \sqrt{c} \cdot \left[ \frac{\tau_b}{\sigma H} g(\xi) - \frac{\tau_s}{\sigma H} h(\xi) \right]$$

où

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(0)}{\alpha_n^2} f_n(\xi) \\ &= - \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{\lambda(\xi')} \int_{\xi'}^1 d\xi'' \int_{\xi''}^1 \frac{1-\xi'''}{\lambda(\xi''')} d\xi''' + \alpha \cdot \int_{\xi}^1 \frac{1-\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' - \alpha^2 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{\xi d\xi}{\lambda(\xi)} \int_{\xi}^1 d\xi' \int_{\xi'}^1 \frac{1-\xi''}{\lambda(\xi'')} d\xi'' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(1)}{\alpha_n^2} f_n(\xi) \\ &= - \int_0^{\xi} \frac{d\xi'}{\lambda(\xi')} \int_0^{\xi'} d\xi'' \int_0^{\xi''} \frac{\xi'''}{\lambda(\xi''')} d\xi''' + \alpha \cdot \int_0^{\xi} \frac{\xi'}{\lambda(\xi')} d\xi' - \alpha^2 \\ &\quad + \int_0^1 \frac{1-\xi}{\lambda(\xi)} d\xi \int_0^{\xi} d\xi' \int_0^{\xi'} \frac{\xi''}{\lambda(\xi'')} d\xi'' \end{aligned}$$

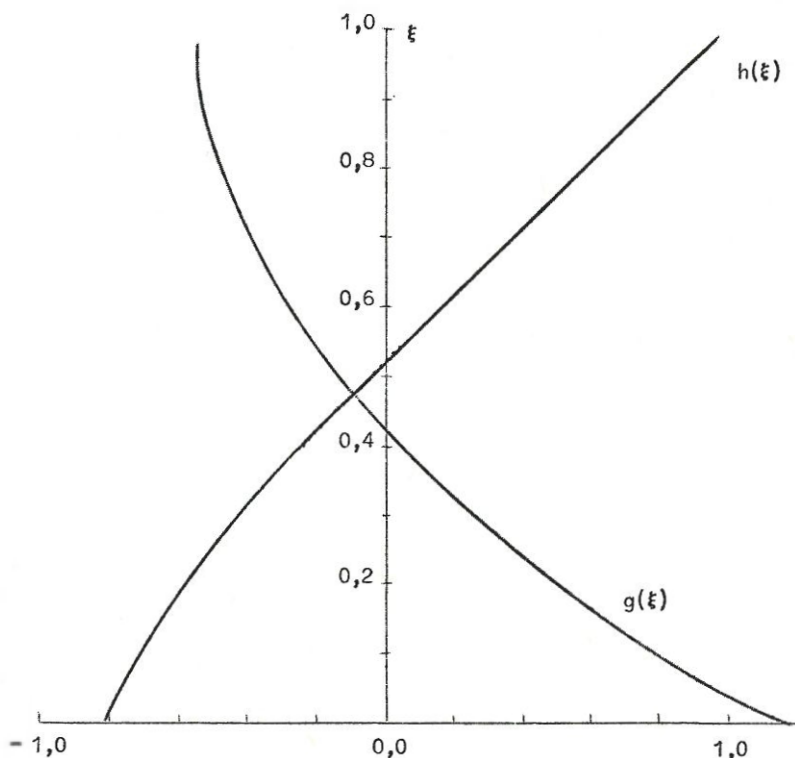
avec

$$\alpha = \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{\lambda(\xi)} d\xi .$$

A titre d'exemple pour la fonction  $\lambda(\xi)$  déjà utilisée :

$$\lambda(\xi) = \frac{\xi}{1+a\xi} , \quad a = 2,4 ,$$

les fonctions  $g(\xi)$  et  $h(\xi)$  peuvent être calculées; leurs graphes sont donnés à la figure suivante



Les profils de concentration suivant la profondeur peuvent alors être tracés facilement.

A partir des graphes de  $g(\xi)$  et  $h(\xi)$  et avec un peu d'attention, on remarque que le profil de  $\hat{c}$  est positif en surface et négatif au fond si la vitesse  $\bar{u}$  et la tension de vent  $\tau_s$  agissent dans le sens opposé au gradient de concentration. Ce résultat est conforme à ce qu'une intuition physique aurait pu suggérer : quand la vitesse (plus grande en surface qu'au fond) et le vent (agissant essentiellement près de la surface) sont en opposition avec le gradient de concentration, ils ont tous deux pour effet d'amener au point considéré un apport de constituant et cela davantage en surface; dans ce cas donc,  $\hat{c}$  est positif près de la surface et négatif près du fond.

#### 4.- Recherche du profil de concentration d'un corps sédimentable

Nous étudierons ici le comportement d'un constituant dont la masse spécifique est plus grande que celle de l'eau qui l'entoure; ce constituant migre donc vers le fond où finalement il se dépose. Il est souhaitable de pouvoir connaître les modifications apportées au profil de concentration par la sédimentation.

Dans cette étude, nous continuerons à poser

$$\hat{c} \ll \bar{c}$$

(quasi-homogénéité verticale) bien que cette relation ne soit plus justifiée près du fond où la concentration de constituant, on le pressent déjà, subit une forte augmentation; néanmoins, comme nous le verrons, la zone de fond où l'inégalité ci-dessus est isolée est très étroite et représente moins d'un centième de la profondeur.

De plus, nous négligerons à nouveau l'advection verticale pour des raisons de commodité; les résultats qui suivent ne seront donc strictement valables que dans une région où le fond est suffisamment horizontal et où l'élévation de surface est faible.

Fidèle au cadre que nous nous sommes fixé dès le début de ce travail, toute stratification sera exclue de cette étude et la vitesse de migration peut être prise égale à une constante sur la profondeur.

Puisque migration verticale vers le bas il y a, il est nécessaire de prendre en compte le flux de constituant déposé au fond :

$$(5.34) \quad \varphi_b = \left[ mc + \frac{\tilde{\kappa}}{H} \frac{\partial c}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = m\bar{c} + \left[ m\hat{c} + \frac{\tilde{\kappa}}{H} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} .$$

L'équation régissant le comportement de  $\hat{c}$  est donnée par (5.12), soit après les simplifications annoncées :

$$\hat{u} \cdot \nabla \hat{c} = \frac{m}{H} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{\varphi_b}{H} + \frac{1}{H^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \tilde{\kappa} \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \right) .$$

Posons  $\tilde{\kappa} = \beta \sigma H^2 u(\xi)$

et intégrons de zéro à  $\xi$  en utilisant la condition limite (5.34) :



$$\beta\sigma \mu \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{m}{H} \hat{c} = \hat{r} \cdot \nabla \bar{c} - \frac{m}{H} \bar{c} + \frac{\varphi_b}{H} (1 - \xi) .$$

La solution générale de cette équation peut être aisément obtenue par application de la méthode dite de variation des constantes :

$$(5.35) \quad \hat{c} = \frac{H}{m} \nabla \bar{c} \cdot \hat{r} - \bar{c} + \frac{\varphi_b}{m} (1 - \xi) + c_0 M(\xi) - \frac{H}{m} \nabla \bar{c} \cdot M(\xi) \int_0^\xi \frac{1}{M(\xi)} \hat{u} \, d\xi + \frac{\varphi_b}{m} M(\xi) \int_0^\xi \frac{d\xi}{M(\xi)}$$

où

$$M(\xi) = \exp\left[-\gamma \int_1^\xi \frac{d\xi}{\mu(\xi)}\right]$$

avec

$$(5.36) \quad \gamma = \frac{m}{\beta\sigma H} .$$

Pour les valeurs caractéristiques d'une mer peu profonde et bien mélangée

$$\beta \sim 1 \quad \sigma \sim 10^{-3} \text{ s}^{-1} \quad H \sim 10 \text{ m}$$

et d'un constituant telle qu'une boue

$$m \sim 10^{-4} \text{ m.s}^{-1} ,$$

nous pouvons estimer l'ordre de grandeur de la quantité adimensionnelle  $\gamma$

$$\gamma \sim 10^{-2}$$

et  $\gamma$  pourra donc être négligé ultérieurement devant l'unité.

Afin de rendre la solution (5.35) suffisamment explicite, nous choisissons :

$$\begin{aligned} \mu(\xi) &= \xi \\ \lambda(\xi) &= \frac{\xi}{1 + a\xi} . \end{aligned}$$

La fonction  $\mu(\xi)$  a été prise ici plus simple que la fonction  $\lambda(\xi)$  et non égale à celle-ci dans un seul but de simplification des calculs; de cette manière, la solution peut être écrite de manière analytique alors que le choix d'une fonction  $\mu(\xi)$  moins simple aurait réclamé un traitement numérique des intégrales. Après calculs, la solution

(5.35) s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{c} = & \frac{1}{\beta\sigma^2 H} \sqrt{c} \cdot \tau_b \left\{ \frac{\xi \ln \xi}{\gamma+1} + \left[ \frac{\gamma-1}{2(\gamma+1)^2} - \frac{a}{3(\gamma+1)} \right] \xi + \frac{a-1}{2(\gamma+2)} \xi^2 \right. \\ & \left. - \frac{a}{6(\gamma+3)} \xi^3 \right\} \\ & + \frac{1}{\beta\sigma^2 H} \sqrt{c} \cdot \tau_s \left[ - \frac{a+3}{6(\gamma+1)} \xi + \frac{1}{2(\gamma+2)} \xi^2 + \frac{a}{6(\gamma+3)} \xi^3 \right] \\ & - \bar{c} + \frac{\varphi_b}{m} \left[ 1 - \frac{\gamma\xi}{1-\gamma} \right] + c_0 \xi^{-\gamma} \end{aligned}$$

La constante  $c_0$  jusqu'ici arbitraire doit être déterminée de manière à vérifier la condition d'annulation de la moyenne de  $\hat{c}$  sur la profondeur :

$$\int_0^1 \hat{c} d\xi = 0 .$$

Déterminant ainsi la constante, négligeant  $\gamma$  devant l'unité et posant  $a = 2,4$  ; nous obtenons :

$$(5.37) \quad \hat{c} = \frac{G(\xi)}{\beta\sigma^2 H} \sqrt{c} \cdot \tau_b + \frac{H(\xi)}{\beta\sigma^2 H} \sqrt{c} \cdot \tau_s + \left( \bar{c} - \frac{\varphi_b}{m} \right) (\xi^{-\gamma} - 1) + \frac{\varphi_b}{\beta\sigma H} \left( \frac{1}{2} \xi^{-\gamma} - \xi \right)$$

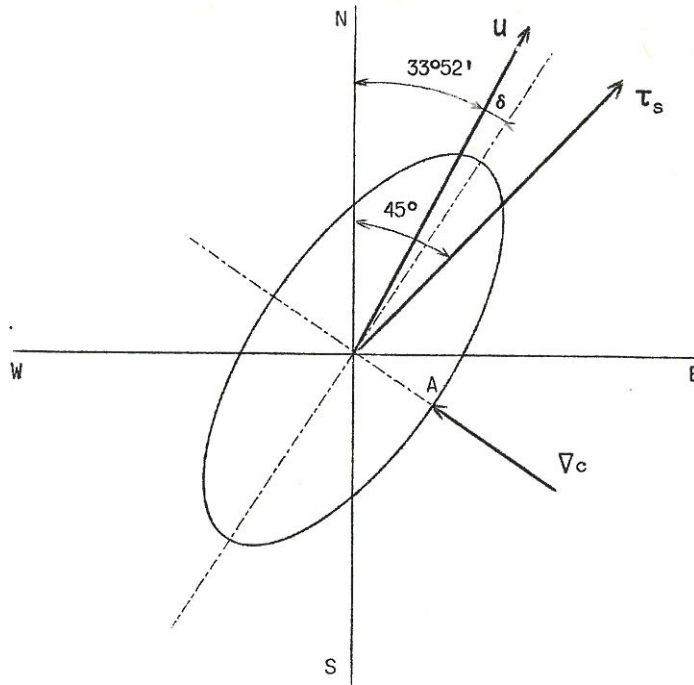
Les fonctions  $G(\xi)$  et  $H(\xi)$  de moyennes nulles sont calculables aisément; elles tendent toutes deux vers l'infini en  $\xi = 0$  comme la fonction  $\xi^{-\gamma}$ . Il apparaît donc clairement au vu de cette équation qu'il existe une couche limite au fond où la concentration de constituant prend une valeur très grande. Nous pouvons estimer que cette couche est comprise dans l'intervalle

$$0 \leq \xi \lesssim \gamma$$

et donc que l'épaisseur de cette couche limite de fond vaut approximativement

$$\gamma H \sim \frac{H}{100} \sim 10^{-1} \text{ m} .$$

Pour illustrer la formule (5.37), nous tracerons le profil de concentration au point A (cf. figure) d'une tache fictive d'un constituant



sédimentable; le point A est situé sur le petit axe de la tache, à 500 m du centre et est supposé être le point  $52^{\circ}30' N$ ,  $3^{\circ}50' E$  de la mer du Nord. La situation est envisagée 60 heures après le déversement et au moment du courant de marée maximum.

Conditions marines

- $\bar{u}$  à  $33^{\circ}52'$  N-E et valant 0,66 m/s ;
- ellipse de marée d'excentricité  $k = 0,97$  ; et donc  $a = 0,66$  m/s ,  $b = 0,16$  m/s ;
- hauteur de la colonne d'eau :  $H = 21$  m ;
- $\|\tau_b\| = 8,9 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$  ,  $\sigma = 5,6 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  ;
- mélange intense de la colonne d'eau :  $\beta = 1$  .

Conditions atmosphériques

vent soufflant du sud-ouest à  $45^{\circ}$  et caractérisé par

$$\|\tau_s\| = 2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2 .$$

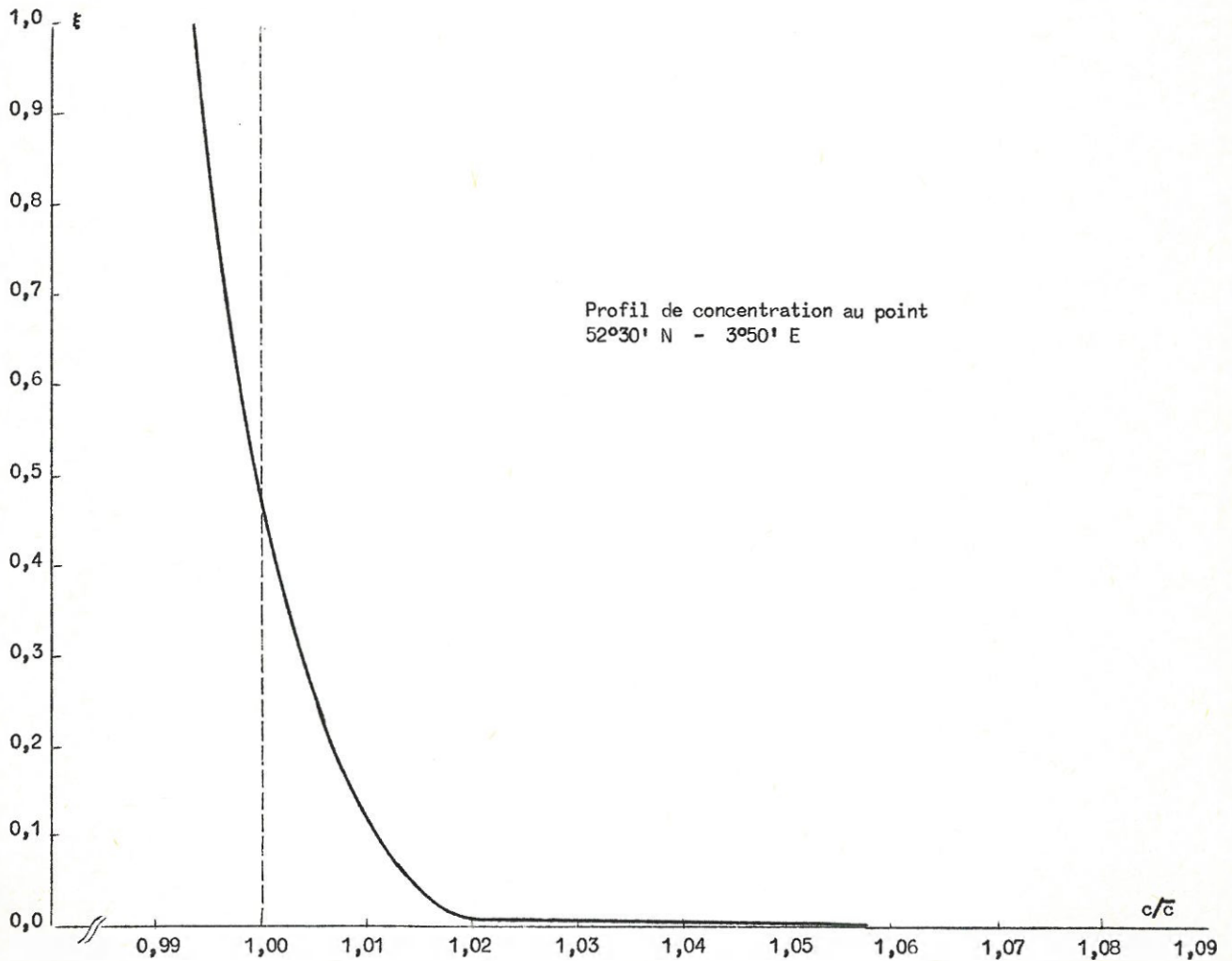
Conditions de dispersion

L'angle  $\delta$  est calculé à partir de la formule (5.27) et est trouvé égal à  $2^{\circ}22'$ ; au point A, le gradient de concentration est calculé à partir de la formule (5.30); l'élément sédimentable envisagé est supposé avoir une vitesse de migration telle que

$$\gamma = \frac{m}{\beta \sigma H} = 0,01 ,$$

soit  $m = 1,2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

Grâce à toutes ces grandeurs, le profil de concentration peut être tracé, ce qui est réalisé à la figure ci-dessous.



## Conclusions

Un premier objectif de ce travail était de comparer divers modèles tridimensionnels déjà existant. De cette comparaison, il s'est avéré que la paramétrisation de la viscosité turbulente verticale est un facteur primordial si le modèle veut représenter correctement la situation réelle près du fond (profil logarithmique de la vitesse et dépendance quadratique de la tension vis-à-vis de la vitesse moyenne).

Grâce à une paramétrisation judicieuse qui peut être déduite de considérations physiques simples, le modèle de Nihoul est le premier modèle qui reproduit l'écoulement réel près du fond. Un second modèle parallèle peut être obtenu par modification du modèle de Jeleznianski. Cependant, la comparaison montre que ce dernier modèle ne diffère du premier que par la présentation.

Nous avons montré que la solution du modèle de Nihoul pouvait être simplifiée en négligeant les termes d'accélération. Grâce à cette solution réduite, nous avons déduit des relations fonctionnelles simples de la viscosité turbulente verticale permettant de connaître par calcul direct les coefficients  $D$  et  $m$ . De la comparaison de divers profils de viscosité, il apparaît que ces deux coefficients sont presque insensibles à une modification de ce profil pourvu que celui-ci ait un comportement linéaire près du fond.

Ensuite, nous avons recherché dans quelles conditions est valable la solution simplifiée. Il s'est avéré que cette simplification était acceptable en dehors de la période de renversement de la marée. Afin de généraliser les résultats à cette période, une formule donnant la tension de cisaillement au fond a été obtenue en prenant en compte les termes d'accélération. De cette relation peut être mis en évidence un



temps caractéristiques d'interaction entre l'écoulement moyen et la tension au fond. Ce temps, de l'ordre de la minute, a été rapproché, d'une part, du temps caractéristique des tourbillons de la turbulence homogène et isotrope régnant au fond et, d'autre part, du pas temporel d'itération des modèles bidimensionnels numériques.

Enfin, la connaissance du profil de vitesse, a été appliquée au problème de la dispersion. Une nouvelle paramétrisation de l'effet cisailant étant obtenue, nous nous sommes attachés à résoudre de manière approchée l'équation bidimensionnelle de la dispersion, nous avons ainsi montré qu'on peut déduire l'excentricité et la direction des lignes d'isoconcentration à partir de l'excentricité et de la direction de l'ellipse de marée et, ensuite, nous avons recherché le profil de concentration suivant la profondeur, mettant en évidence la présence d'une couche limite de dépôt au fond lorsque le constituant est sédimentable.

## Bibliographie

- BOWDEN, K.F., (1965). Horizontal mixing in the sea due to shearing current, *J. Fluid Mech.*, 21, 83-95.
- BOWDEN, K.F. and FAIRBAIN, L.A. (1956). Measurements of turbulent fluctuations and Reynolds stresses in a tidal current, *Proc. Roy. Soc. London*, A 237, 422-438.
- CHENG, R.T., POWELL, T.M. and DILLON, T.M. (1976). Numerical models of wind-driven circulation in lakes, *Appl. Math. Modelling*, 1, 141-159.
- DAVIES, A.M. (1977). *Three-dimensional model with depth-varying eddy viscosity*, *Bottom Turbulence*, Elsevier Oceanography Series, 19, J. Nihoul editor.
- EKMANN, V.W. (1905). On the influence of the Earth's Rotation on Ocean Currents, *Archiv für Matematik, Astronomi, och Fysik*, 2, n° 11, K. Svenska Vetenskaps - akademien, Stockholm, 1-53.
- FISHER, G. (1959). Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren, *Tellus*, 11, 60-76.
- FORRISTALL, G.Z. (1974). Three-dimensional structure of storm-generated currents, *J. Geophys. Res.*, 79, n° 18, 2721-2729.
- FREEMAN, N.G., HALE, A.M. and DANARD, M.B. (1972). A modified sigma equations' approach to the numerical modelling of great lakes hydrodynamics, *J. Geophys. Res.*, 77, n° 6, 1050-1060.
- GEDNEY, R.T. and LICK, W. (1972). Wind-driven currents in lake Erie, *J. Geophys. Res.*, 77, n° 15, 2714-2723.
- HEAPS, N.S. (1967). *Storm surges*, in *Ocean. Mar. Biol. Ann. Rev.*, edited by H. Barnes, Allan and Unwin Publ., London, 11-47.
- HEAPS, N.S. (1972). On the numerical solution of the three-dimensional hydrodynamical equations for tides and storm surges, *Mém. Soc. Sc. Liège*, 6, 143-180.

- HIDAKA, K., (1933). Non-stationary ocean currents, Part I, *Mem. Imp. Mar. Obs. Kobe*, 5, No 3, 141-266.
- JELESNIANSKI, C.P. (1970). Bottom stress time-history in linearized equations of motion for storm surges, *Monthly Weather Review*, 98, No 6, 462-478.
- LIGETT, J.A. and HADJI THEODOROU, C. (1969). *Ann. Soc. Civil Eng. J. Hydr. Div.*, 95, (HY2), 609.
- NIHOU, J.C.J. (1972). Shear effect diffusion in shallow open seas, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 9-10, 521-526.
- NIHOU, J.C.J. (1973). Interactions at the sea boundaries as a handicap to modelling, *Mem. Soc. Roy. Sc. Liège*, 6e série, tome VI, 9-15.
- NIHOU, J.C.J. (1975). *Modelling of marine systems*, Elsevier Oceanography Series, 10, Amsterdam.
- NIHOU, J.C.J. (1977a). Three-dimensional model of tides and storm surges in a shallow well-mixed continental sea, *Dyn. Atm. Oceans*, 2, 29-47.
- NIHOU, J.C.J. (1977b). *Modèles mathématiques et dynamique de l'environnement*, Else, Liège.
- NIHOU, J.C.J. (1977c). Turbulent boundary layer bearing silt in suspension, *Phys. Fluids*, 20, No 10, 197-202.
- NIHOU, J.C.J. (1978). *Dispersion par effet cisailant en mer peu profonde soumise à de fortes marées et tempêtes*, Ministère de la politique et de la programmation scientifique, Centre interuniversitaire d'excellence en océanographie, Rapport ACN 2.
- NIHOU, J.C.J. and ADAM, Y. (1976). *Modèles de dispersion*, Projet Mer, Rapport final, vol. 5, Programmation de la politique scientifique.
- NIHOU, J.C.J. and RONDAY, F.C. (1976). Hydrodynamic models of the North Sea, A comparative assessment, *Mem. Soc. Roy. Sc. Liège*, 10, 61-96.
- NIHOU, J.C.J. and RUNFOLA, Y. (1978). *Non-linear three-dimensional model of tide and wind induced currents in the North-Sea*, Xth Int. Liège Colloquium on Ocean Hydrodynamics (to be published).
- ONMIDOV, R.V., (1965). Energy distribution between oceanic motions of different scales, *Bull. Acad. Sc. U.S.S.R., Atmos. Oceanic. Phys.* Sc., 1, 439-448.
- RONDAY, F.C. (1976). *Modèles hydrodynamiques*, Projet Mer, Rapport final, vol. 3, Programmation de la politique scientifique.

- TALBOT, J.W. (1970). FAO Techn. Conference on Marine Pollution, Rome, Dec. 9-18.
- THOMAS, J.H. (1975). A theory of steady wind-driven currents in shallow water with variable eddy viscosity, *J. Phys. Oceanogr.*, 5, 136-142.
- VAN VEEN, J. (1938). Water movements in the Straits of Dover, *J. du Conseil*, Copenhagen, 13, 7-38.
- WEATHERLY, G.L., (1977). *Bottom boundary layer observations in the Florida current*, *Bottom Turbulence*, Elsevier Oceanography Series, 19, J. Nihoul editor, Amsterdam.
- WELANDER, P. (1957). Wind action on a shallow sea : some generalizations of Ekman's theory, *Tellus*, 9, 45-52.
- WITTEN, A.J. and THOMAS, J.H. (1976). Steady wind-driven currents in a large lake with depth-dependent eddy viscosity, *J. Phys. Oceanography*, 6, N° 1, 85-92.