

Chapitre I

Notion de modèles mathématiques

1.- Introduction

Avant d'entrer dans le détail des modèles mathématiques existant dans la littérature scientifique, qui font un appel constant aux méthodes numériques de résolution et aux ordinateurs, il nous semble intéressant de décrire et d'analyser l'évolution de la notion de modèle.

Un modèle peut être très différent suivant le but que l'on se fixe. On peut avoir un modèle mécanique ou un modèle réduit qui reproduit certains phénomènes : l'articulation d'un bras ou d'une jambe par exemple. Un modèle peut aussi être physique, c'est-à-dire reproduire la nature à échelle réduite en se basant sur des relations de similitude. Un modèle peut également être mathématique : le phénomène est décrit par une ou plusieurs équations mathématiques qui représentent parfois d'autres processus selon le choix de la variable d'état. Une même équation, soumise aux mêmes conditions initiales et aux limites, conduit à la même solution quelle que soit la signification de la variable (fonction de courant, température ou potentiel électrique).

Notre propos est d'étudier les circulations hydrodynamiques transitoires (marée et tempête) et résiduelles, ainsi que leurs interactions au moyen de modèles mathématiques.

2.- Les circulations hydrodynamiques dues aux marées et aux tempêtes

L'étude des mouvements fluides dans l'océan s'est développée de manière quasi-indépendante suivant l'intérêt particulier des chercheurs.

Les astronomes et les mathématiciens se sont penchés sur le problème des marées en relation avec le mouvement des astres; les ingénieurs hydrographes ont étudié les marées et les tempêtes pour calculer la variation spatio-temporelle de la surface de la mer.

2.1.- Etude des mouvements fluides avant l'avènement des ordinateurs

2.1.1.- Des marées

Le mouvement périodique de la surface des océans a fortement intrigué les Anciens. C'est ainsi qu'Hérodote (425 av. J.C.) et Aristote (324 av. J.C.) mentionnèrent les marées du golfe de Suez, Posidonius (50 av. J.C.) celles des côtes espagnoles. Dans la guerre des Gaules, César (51 av. J.C.) signala que ses troupes furent effrayées de voir les plages de la Manche tantôt à sec, tantôt sous eaux.

Strabon et Pline (1er siècle après J.C.) pressentirent que le mouvement périodique du niveau de la mer était intimement lié à celui de la lune et du soleil. Il fallut attendre la fin du XVIème siècle pour assister aux premières explications du phénomène. Kepler et Galilée ne purent donner que des explications qualitatives des mouvements fluides car ils ne connaissaient pas les lois de l'attraction universelle.

Dans le remarquable livre intitulé *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* paru en 1687 et modifié en 1714, Newton établit mathématiquement la relation existant entre les marées, la lune et le soleil. En 1738, l'Académie des Sciences de Paris proposa la cause du flux et du reflux de la mer pour le sujet du prix de mathématique qu'elle décerna en 1740. Parmi les quatre oeuvres couronnées, les trois premières étaient basées sur le principe de la pesanteur universelle; elles avaient pour auteurs Bernoulli, Euler et MacLaurin. Leurs travaux s'appuyaient non seulement sur la loi de Newton mais aussi sur son hypothèse, à savoir que la mer prend à chaque instant la forme où elle est en équilibre sous l'astre qui l'attire. Ils traitèrent donc ce qu'on appelle aujourd'hui la marée statique; ils n'ont pas tenu compte des forces d'inertie qui sont loin d'être négligeables dans la dynamique des marées semi-diurnes et diurnes.

Dans son mémoire *Recherches sur quelques points du système du monde*, Laplace (1775) montra que le niveau de la mer n'obéit aux forces qui le sollicitent, qu'avec un certain coefficient de réduction ou d'amplification et un certain déphasage en raison des termes d'inertie.

Airy (1842) développa la théorie des oscillations dans des bassins non-tournants : c'est le problème classique des seiches et, en particulier, des seiches portuaires. Lorsque l'élévation de la surface libre n'est plus infinitésimale, Airy améliora la formule de Merian (1828) donnant la période des oscillations propres pour un bassin de profondeur constante pour lequel le rapport longueur-largeur est grand. Les oscillations libres dans des bassins non-tournants, de formes variant selon des lois simples, ont fait l'objet de nombreuses recherches [*e.g.* Rayleigh (1876), Goldsbrough (1931)].

La rotation de la terre complique fortement l'étude des marées dans les océans et dans les mers continentales. Thomson (1879) (Lord Kelvin) étudia les oscillations libres dans des bassins tournant à vitesse constante. Dans le cas simple d'un canal infiniment long, il démontra que la distribution transversale de la surface libre est influencée par la rotation du bassin. Sa théorie permit d'expliquer la différence de comportement de la marée le long des côtes anglaises et françaises.

Poincaré (1896, 1903 et 1910) reprit la théorie de Laplace, introduisit la force de Coriolis et établit les équations de base de l'hydrodynamique classique.

Des modèles mathématiques simples, pour l'étude des marées, furent utilisés avec plus ou moins de succès dans des golfes et dans des mers continentales [*e.g.* Taylor (1921) et Proudman (1953)].

Proudman (1936) et Doodson (1936, 1938) ont étudié mathématiquement les marées océaniques en supposant la force de friction négligeable vis-à-vis des termes de pression, d'inertie et de Coriolis. Comme ils ne disposaient pas encore d'ordinateurs électroniques, il ont dû étudier les marées dans des bassins limités par des parallèles et des

méridiens. Ils n'ont obtenu de solution analytique que dans le cas d'océans caractérisés par des profondeurs variant selon des lois simples.

L'étude des marées océaniques fut quasi abandonnée jusqu'à l'apparition des ordinateurs électroniques, capables de résoudre enfin les équations régissant le mouvement fluide dans des bassins de formes quelconques.

2.1.2.- Des tempêtes

Les élévations de la surface libre des océans, induites par les vents et par les dépressions barométriques, étaient considérées jusqu'au début du XXème siècle comme résultant de phénomènes aléatoires, et donc ne suivant pas des lois bien déterminées.

Les premiers travaux traitant de la détermination des niveaux d'eau lors d'une tempête se basaient sur une approche purement empirique. Corkan (1948) étudia la propagation des ondes de tempêtes le long des côtes est de la Grande Bretagne et la dénivellation à Dunbar et à Southend. Il examina les conditions météorologiques et conclut que l'onde de tempête à Southend est créée en partie à l'intérieur de la mer du Nord et en partie dehors. Corkan montra que l'onde de tempête, qui a son origine à l'extérieur de la mer du Nord, descend le long des côtes écossaises et anglaises comme une onde progressive qui met 9 heures pour parcourir la distance Dunbar-Southend. Il observa également que l'amplitude de la dénivellation était pratiquement la même à Southend et à Dunbar. A partir de ces résultats, il établit une relation donnant l'élévation de la surface libre en fonction des gradients de pression atmosphérique et des élévations statiques aux points considérés. Sa formule ne donne de résultats satisfaisants que pour certaines conditions de vent. La principale faiblesse d'une approche empirique réside dans une analyse d'une série trop courte d'observations.

Hellström (1941) et l'Ecole néerlandaise [Schalkwijk (1947), Weenink (1951), Weenink et Groen (1958)] ont développé une méthode mi-théorique, mi-empirique. Leur approche consiste en une méthode théorique pour la résolution du problème statique et en une partie empirique pour le calcul

des effets dynamiques. Ils supposent la linéarité des équations afin de pouvoir résoudre les équations aux dérivées partielles et appliquer le principe de la superposition des solutions. Cette méthode donne de bons résultats pour une mer de petites dimensions comme la mer du Nord. La principale difficulté, avec cette méthode, réside dans le choix des paramètres de friction et de retard. Comme l'observation montre que les termes non-linéaires sont loin d'être négligeables le long des côtes, l'hypothèse de la linéarité des équations du modèle n'est donc plus vérifiée.

La résolution des équations de l'hydrodynamique est difficile en raison du terme de Coriolis et des termes non-linéaires. Lauwerier (1960) calcula analytiquement l'élévation de la surface libre le long de la côte néerlandaise, en supposant la mer du Nord rectangulaire, la profondeur constante, le champ de vent uniforme, et en négligeant les termes non-linéaires. Dans un estuaire peu profond et de faible largeur, Rossiter (1961) a démontré que les interactions entre la marée et la tempête sont importantes : l'élévation due à la tempête est plus élevée à marée montante qu'à marée descendante. La présence du terme de Coriolis et des termes non-linéaires empêche toute résolution analytique des équations de l'hydrodynamique dans le cas de bassins de formes quelconques.

2.2.- Les modèles hydrodynamiques classiques

L'apparition des grands ordinateurs numériques a révolutionné la mécanique des fluides : en 1950, les équations de Navier-Stokes ne pouvaient se résoudre qu'en faisant de très nombreuses simplifications. Les progrès constants en électronique ont permis d'aborder des problèmes hydrodynamiques de plus en plus complexes.

2.2.1.- Des marées

Defant (1932) fut le premier à renoncer aux solutions analytiques et à remplacer les équations aux dérivées partielles par des équations aux différences finies. La méthode de Defant, reprise ensuite par Hansen (1952) et Holsters (1959), suppose la linéarité des équations de

mouvement; les termes non-linéaires d'advection sont négligés et le terme de friction linéarisé. Dans ces conditions, une transformée de Laplace ramène les trois équations aux dérivées partielles de mouvement à une seule équation également aux dérivées partielles, qui ne fait intervenir que l'élévation de la surface libre. Dans les régions peu profondes, les courbes marégraphiques observées indiquent des harmoniques et des interactions non négligeables entre les marées partielles les plus importantes. La méthode de Defant qui suppose la linéarité des équations de mouvement ne peut donner que des résultats approchés le long des côtes caractérisées par une faible profondeur.

Les équations hydrodynamiques pour les ondes longues possèdent des caractéristiques réelles. Plusieurs auteurs [*e.g.* Lamoen (1949), Thijse (1964), Daubert et Graffe (1967), Townson (1974)] ont résolu le problème de la propagation de la marée avec la méthode des caractéristiques. Cette méthode conduit à de bons résultats, mais elle est quasi-inapplicable, en raison de sa lourdeur dans le cas bi-dimensionnel, lorsque la géométrie du bassin est très irrégulière.

Hansen (1956), Fischer (1959), Brettschneider (1967) et Runday (1972) ont étudié les marées dans la mer du Nord en utilisant des méthodes d'intégration "pas à pas". Malheureusement, ces auteurs ont, soit supposé les termes d'advection négligeables, soit estimé de manière erronée ces termes dans leur algorithme de résolution.

2.2.2.- Des tempêtes

Les méthodes empiriques et semi-empiriques exposées au paragraphe précédent n'avaient pour but que la détermination du dénivèlement provoqué par le vent.

Lorsqu'on désire étudier le transport des sédiments, des polluants, des matières chimiques et du phytoplancton, on doit connaître les courants et la hauteur instantanée de la colonne d'eau. Proudman (1954) a formulé mathématiquement le problème et a donc "construit" un modèle mathématique. Welander (1961) et Groen et Groves (1966) ont légèrement modifié les équations du modèle de Proudman.

A l'aide d'ordinateurs, Hansen (1956, 1966), Fischer (1959), Lauwerier et van Dantzig (1961), Heaps (1969) et Banks (1974) ont étudié les tempêtes de 1953 et de 1962 dans la mer du Nord; Svansson (1959), dans la mer Baltique et Platzman (1958, 1963), dans les lacs Erié et Michigan.

Les pays riverains du golfe du Mexique et ceux de l'archipel japonais doivent subir, chaque été, les conséquences meurtrières des typhons (les typhons diffèrent des tempêtes par la grande vitesse de déplacement de la dépression atmosphérique). Jelesnianski (1965) pour la côte américaine, Ueno (1964) pour l'archipel japonais ont étudié intensivement les typhons au moyen de modèles mathématiques et ont montré que les modèles empiriques conduisaient très souvent à des résultats par défaut car ils ne tenaient pas compte des effets dynamiques très importants lors d'un typhon.

Les travaux de Heaps (1969) et Ueno (1964) ont mis en évidence l'importance des termes non linéaires au voisinage des côtes dans les régions peu profondes. Heaps (1969) suggérait que le couplage entre la marée et la tempête était une des causes des erreurs introduites dans son modèle. Banks (1974) développa un modèle de marée-tempête pour le sud de la mer du Nord où il réalisa le couplage marée-tempête par l'intermédiaire du terme de friction. On montre dans la suite de ce travail que les termes non-linéaires d'advection provoquent également un couplage important.

3.- Les circulations à long terme ou circulations résiduelles

Les marées et les tempêtes, malgré l'intensité des courants induits, ne réalisent des transports d'eau qu'à des distances relativement faibles (de l'ordre de quelques centaines de kilomètres). Les océans et les mers continentales sont aussi le siège de *mouvements quasi-permanents* pouvant entraîner les particules fluides sur de très grandes distances : ce sont des courants marins. En certains endroits de l'océan, ils peuvent atteindre des vitesses de 1 à 2 m/s ; mais,

en général, ils sont caractérisés par des vitesses beaucoup plus faibles (de 10^{-1} à 10^{-2} m/s), et sont appelés courants résiduels.

3.1.- L'étude de la circulation résiduelle et océanique avant l'apparition des ordinateurs

Les grands courants océaniques étaient déjà connus au XVIème siècle. Selon Kohl (1868), le Gulf Stream était bien connu en 1515 car les bateaux espagnols suivaient le courant équatorial pour se rendre aux Amériques, mais ils empruntaient une autre route pour le retour. Ils passaient à travers le détroit de Floride et suivaient le Gulf Stream jusqu'à la latitude correspondant au cap Hatteras et ensuite rejoignaient l'Espagne. De cette façon, ils avaient des vents favorables et évitaient ainsi les courants contraires durant leurs voyages.

Il fallut attendre Franklin (1786) pour avoir la première explication scientifique de ces courants. Franklin, en se basant sur le travail de Bernoulli (1738), *Hydrodynamia*, croyait que le Gulf Stream était créé par l'accumulation d'eau sur la côte est des Amériques entre les tropiques par les vents alizés. Les mesures de température de l'eau de surface ont permis à Strickland (1802) de découvrir une extension du Gulf Stream vers la Scandinavie et vers l'Angleterre. (Remarquons cependant que les mesures de température n'étaient pas faites pour déterminer le champ de pression et, par suite, les courants géostrophiques qui ne furent découverts que plus tard.) Arago (1836) attira l'attention en montrant que la différence de niveau, dans la région de la mer de Sargasses, était trop faible pour créer des courants aussi intenses. Arago avançait l'idée que les courants résultaient de l'échauffement différent des masses d'eau aux pôles et à l'équateur. On peut donc dire qu'Arago est le père de la théorie de la circulation thermohaline.

Il est bon de souligner que l'influence de la rotation de la terre sur les courants océaniques n'était que fort mal connue par les océanographes, bien que les équations hydrodynamiques pour un fluide de masse spécifique constante étaient déjà écrites en 1775 par Laplace. (Remarquons que le physicien Thomson, en 1879, a démontré que la force

fictive de Coriolis est équilibrée par le gradient horizontal de pression dans le cas des ondes longues de marée). Les océanographes peu à peu réalisent que la force de Coriolis est équilibrée, en première approximation, par les gradients horizontaux de pression associés à des masses d'eaux de densités différentes. A partir de cette époque, l'océanographie a un support théorique : on utilise des formes très simplifiées des équations de la mécanique des fluides pour relier le champ de vitesse au champ de pression.

Les études expérimentales se sont poursuivies tout au long du XXème siècle. L'océanographie théorique, quant à elle, a progressé surtout depuis les travaux d'Ekman (1905) qui développa la théorie des courants engendrés par le vent. Il fut le premier à montrer que les courants de vent étaient déviés vers la droite par la force fictive de Coriolis dans l'hémisphère nord. Ekman étudia ce phénomène pour un océan horizontalement infini.

Pillsbury, en 1891, nota l'intensification préférentielle des courants le long de la côte est des continents dans l'hémisphère nord. Sverdrup (1947) et Stommel (1948) démontrèrent que cette intensification était due à la variation de la force de Coriolis avec la latitude. Munk (1950) calcula la circulation résiduelle dans l'océan Atlantique, en le supposant rectangulaire et en intégrant les équations hydrodynamiques depuis la surface jusqu'à une profondeur où les courants et les gradients horizontaux de pression sont nuls. En utilisant la distribution zonale des vents annuels, il parvint à mettre en évidence les grands "tourbillons" océaniques : le Gulf Stream, le courant équatorial, le contrecourant équatorial, etc. Pour le Gulf Stream, la théorie de Munk donne une largeur du courant principal 3 à 4 fois trop importante. Les travaux de Sverdrup, Stommel et Munk accordaient un rôle exagéré à la force de Coriolis et à la force de friction latérale. Charney (1955) développe une théorie inertielle où la friction n'a que peu d'importance; les termes non-linéaires d'advection, par contre, deviennent très prépondérants dans la région est des océans. Charney (1955) a montré à l'aide de son modèle inertial qu'il était également possible

de reproduire qualitativement cette intensification. Pour étudier la circulation océanique, il faut donc tenir compte des termes non-linéaires et du terme de Coriolis.

Les hydrographes, depuis de nombreuses années, se sont penchés sur le problème de la circulation résiduelle dans les mers continentales. Comme le sujet de notre travail est l'étude de la circulation résiduelle en mer du Nord, il convient de décrire brièvement les différentes méthodes utilisées pour la détermination des circulations résiduelles en mer du Nord. Böhnecke (1922) et Laevastu (1961) déduisent ces courants de la distribution de salinité obtenue par des séries de mesures faites entre 1902 et 1904. Tait (1930, 1931 et 1937) étudia les circulations à long terme dans la partie nord et la partie centrale de la mer du Nord à l'aide de bouteilles dérivantes. Dans la partie sud et en particulier au voisinage du Pas de Calais, de nombreuses mesures courantométriques [e.g. Carruthers (1935), Van Veen (1938), Cartwright (1961), Otto (1970)] ont mis en évidence un courant résiduel dirigé vers le nord-est.

Dans la littérature scientifique, nous n'avons trouvé aucune formulation théorique du problème de la circulation résiduelle dans des mers continentales comme la mer du Nord.

3.2.- Les modèles hydrodynamiques pour l'étude de la circulation à long terme

Les travaux théoriques de Stommel (1948), Sverdrup (1947) et de Munk (1950) ont permis d'expliquer qualitativement la plupart des grands courants de surface dans l'Atlantique sauf le courant circum-Antarctique. Gill montra, en 1968, que ces modèles pourraient reproduire également ce courant, si on prenait en considération la configuration des côtes.

Lorsqu'on désire reproduire la géométrie horizontale du bassin, il n'est plus possible de résoudre analytiquement même les formes linéarisées des équations hydrodynamiques; on doit donc utiliser des méthodes numériques, soit les éléments finis, soit les différences finies. Les modèles hydrodynamiques bidimensionnels, pour lesquels les équations

de Navier-Stokes sont intégrées sur la profondeur, donnent des résultats satisfaisants quand on tient compte des termes non-linéaires. Bryan (1963) et Veronis (1966) sont parvenus à expliquer plusieurs phénomènes océaniques mais certains détails importants, comme le contre-courant sous le Gulf Stream, n'ont pu être mis en évidence. Les modèles bidimensionnels, où les équations de mouvement sont intégrées sur la verticale, ne donnent aucune information sur la distribution verticale des courants : on a soit le courant moyen sur la verticale, soit le transport total d'eau dans la couche fluide considérée. Stommel, Sverdrup et Munk ont intégré les équations de la surface jusqu'à une profondeur où les courants et gradients horizontaux de pression sont nuls. L'épaisseur de cette couche étant d'environ 200 mètres, ils n'ont donc étudié et mis en évidence que les courants de surface. Si ces auteurs avaient intégré les équations hydrodynamiques du fond à la surface, ils auraient obtenu un courant moyen sur la profondeur beaucoup plus faible. Lorsqu'on veut déterminer la distribution verticale des courants dans un océan profond caractérisé par une distribution non homogène de la masse spécifique de l'eau, il faut utiliser un modèle tri-dimensionnel [*e.g.* Bryan et Cox (1967), Leenderste, Alexander et Liu (1973)]. Ces auteurs sont parvenus à mettre en évidence des *up-wellings*, des contre-courants et des profils verticaux de courant.

Dans les mers côtières peu profondes et dans les lacs, les observations océanographiques montrent que toute la colonne d'eau est influencée directement par le vent soufflant sur la surface libre et que la direction du courant du fond est voisine de celle du courant en surface. Lorsque les marées sont intenses, le mélange turbulent est suffisant pour homogénéiser toute la colonne d'eau si la profondeur n'est pas trop grande (*e.g.* Manche, mer d'Irlande et mer du Nord). On observe cependant des thermoclines dans les régions de profondeurs moyennes (80 à 200 m) durant les mois d'été. Les modèles bidimensionnels barotropes (c'est-à-dire caractérisés par une distribution uniforme de la masse spécifique) peuvent donc s'appliquer dans la plupart des cas.

Rao et Murty (1970) et Murty (1970) ont étudié la circulation résiduelle due aux vents dans les Grands Lacs américano-canadiens durant les mois d'hiver, c'est-à-dire lorsque la stratification verticale est inexistante. Ils ont montré que le mouvement des masses d'eau est fortement influencé par la géométrie horizontale et par la bathymétrie du bassin. Rao et Murty sont parvenus à reproduire les principales caractéristiques observées de la circulation durant les mois d'hiver. Krauss (1974) appliqua avec moins de succès ce même type de modèle pour la circulation résiduelle en mer Baltique car l'hypothèse d'homogénéité du fluide était loin d'être vérifiée.

Lorsqu'il s'agit d'étudier la circulation à long terme dans une mer continentale, c'est-à-dire une mer en communication avec l'océan, il se pose le problème des flux d'eau à travers les différentes frontières ouvertes. Weenink (1958) posa le problème linéaire d'un point de vue théorique et traita le problème de la circulation due à un vent stationnaire dans une mer continentale, en supposant la profondeur constante et en assimilant la géométrie du bassin à un rectangle. En 1972, nous avons développé le premier modèle hydrodynamique (du type Rao et Murty) pour l'étude de la circulation résiduelle dans la mer du Nord. Les flux aux diverses frontières ouvertes étaient déduits de mesures expérimentales. Ce modèle explique les grandes tendances de la circulation résiduelle observée [e.g. Böhnecke (1922), Tait (1930, 1931, 1937), Ramster (1965)]. Nous avons montré l'importance de la force de friction et de la topographie du fond dans la distribution des courants. Certains phénomènes plus locaux, comme les tourbillons ou gyres observés dans certaines régions de la mer du Nord, n'ont pu être mis en évidence avec un tel modèle.

Tous les modèles hydrodynamiques classiques reposent sur l'hypothèse suivant laquelle les circulations transitoires, dont le temps caractéristique peut varier de la minute à plusieurs jours, induisent un mélange turbulent. Les auteurs de tels modèles admettent qu'il existe un couplage entre les deux types de circulation par l'intermédiaire du terme non linéaire d'advection. Afin de simplifier la résolution des équations du modèle, ils remplacent ce terme par un terme de

viscosité purement dissipatif. Dans leur conception, les circulations transitoires de marée et de tempête ne peuvent induire aucune composante à long terme. Du point de vue de la circulation résiduelle, les marées n'ont d'autre rôle que de dissiper et de redistribuer la quantité de mouvement.

Dans ce travail, nous montrons tout d'abord que les circulations transitoires de marée et de tempête induisent un courant permanent du même ordre de grandeur que celui engendré par le vent moyen. Nous établissons un modèle mathématique hydrodynamique pour l'étude de la circulation non stationnaire dans une mer continentale peu profonde. Ce modèle permet de calculer explicitement le terme de couplage. Nous développons ensuite un modèle décrivant la circulation à long terme : il contient non seulement les termes classiques de Coriolis, de pression et de friction, mais également ceux qui font intervenir les variations de profondeur et les interactions entre les phénomènes stationnaires et transitoires.

