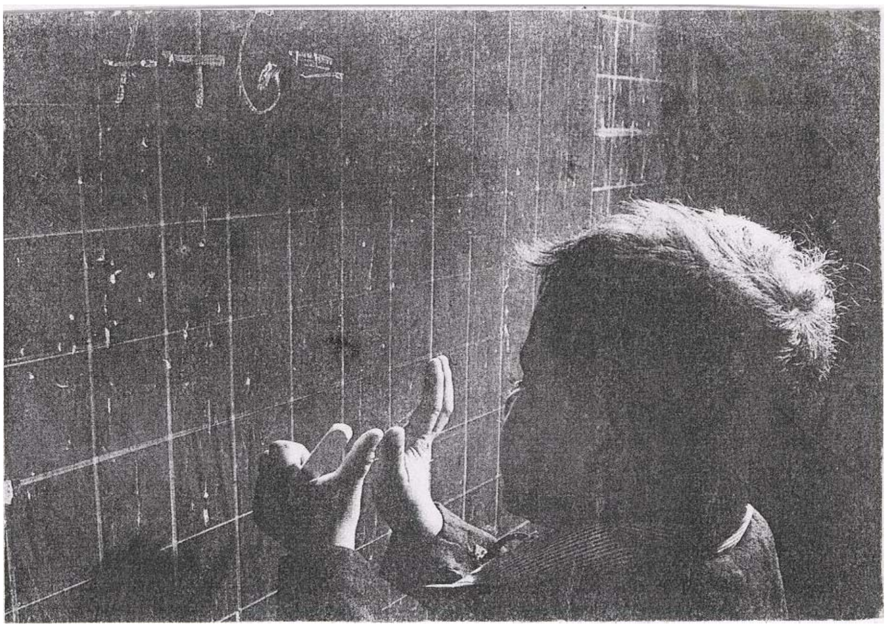
Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht

Bericht zum Forschungsprojekt
Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen

von

Hans-Dieter Gerster
und Rita Schultz



Pädagogische Hochschule Freiburg
Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken

Freiburg im Breisgau, Mai 1998
(Überarbeitet und erweitert im Mai 2000, Auflage Mai 2004)

Gewidmet den Kindern, die uns gezeigt haben, wie sie rechnen:

Ani Sara
Anja
Andreas
Anna Lena
Corinna
Florian
Gloria
Julika
Katharina (die Erste)
Katharina (die Zweite)
Lanya
Lina
Lisa
Lydia
Maren
Marie Anne
Marina
Markus
Mary
Matthias
Melanie (die Erste)
Melanie (die Zweite)
Michaela
Michael
Moritz
Nicole
Nina (die Erste)
Nina (die Zweite)
Pascal
Patrick
Sabrina
Sandra
Sebastian
Viviane

Vorwort

Das Forschungsprojekt „Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen“ wurde in den Jahren 1995 bis 1997 finanziert aus Mitteln des Ministeriums für Wissenschaft, Forschung und Kunst zur Förderung von Forschungsprojekten an den Pädagogischen Hochschulen des Landes Baden-Württemberg. Die Mittel wurden verwendet zur Finanzierung einer Teilzeitstelle (1/2) für die Wissenschaftliche Mitarbeiterin, Diplompsychologin Rita Schultz, für studentische Hilfskräfte und für die Beschaffung von Literatur und Material.

Allen Gremien, die das Projekt befürworteten, dem Institut für Mathematik und Informatik und deren Didaktiken, dem Fakultätsrat, dem Forschungsausschuss und dem damaligen Rektor der Pädagogischen Hochschule Freiburg, Herrn Prof. Dr. Denk, sowie den zuständigen Gremien des Ministeriums gebührt unser Dank.

Herrn Dr. von Aster vom kinderpsychiatrischen Dienst der Universitäts-Kinderklinik in Zürich danken wir für die Überlassung seiner Habilitationsschrift vor deren Veröffentlichung, Herrn Prof. Dr. Probst vom Institut für Heil- und Sonderpädagogik der Universität Marburg für die unveröffentlichten „Strukturbezogenen Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten“.

Ein herzlicher Dank gilt ferner den vielen Menschen, mit denen wir durch das Projekt in Berührung kamen:

- den Elterninitiativen zur Förderung rechenschwacher Kinder in Freiburg und in Stuttgart,
- den Ärztinnen und Ärzten, Lehrerinnen und Lehrern, den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern in Bildungs- und Erziehungsberatungsstellen sowie in therapeutischen Praxen, die Kinder an uns vermittelten und offene Gespräche mit uns führten,
- den Eltern, welche die Kinder zur Untersuchung und zur Förderung brachten,
- den Studierenden, welche die Kinder betreuten und im Begleitseminar an der Entwicklung unserer Ideen mitwirkten,
- den Lehrerinnen und Lehrern, die bei Fortbildungsveranstaltungen ihre Beobachtungen und Erfahrungen einbrachten und kritische Fragen stellten,
- den Mitgliedern des „Lehrerarbeitskreises Rechenschwäche“, die sich für Kinder mit Lernproblemen besonders einsetzten,
- den studentischen Hilfskräften, vor allem Renate Schrietter, die immer wieder Ordnung in unsere umfangreiche Sammlung von Zeitschriftenartikeln und Buchauszügen brachte, Literaturverzeichnisse aktualisierte und Manuskriptteile in den PC eingab, sowie Harald Borowski, der seine vielseitigen Hard- und Softwarekenntnisse bei der Erstellung der zahlreichen Grafiken und der abschließenden Formatierung des gesamten Dokumentes einbrachte, unverdrossen auf unsere Änderungswünsche einging und unsere Fehler ausmerzte.

Freiburg, im Mai 1998

Hans-Dieter Gerster und Rita Schultz

Inhaltsübersicht

1 Das Projekt „Rechenschwäche – Erkennung, Behebung, Vorbeugung“

Dieses Kapitel ist als Einführung in den Bericht gedacht. Nachdem wir die Organisation unserer Arbeit dargestellt haben, charakterisieren und begründen wir unseren Forschungsansatz in wesentlichen Zügen. Anschließend soll auf forschungsmethodische Probleme eingegangen werden. Zuletzt führen wir kurz in die Inhalte der folgenden Kapitel ein. Mit Ausnahme der forschungsmethodischen Reflexionen ist jeder genannte Punkt in einem der folgenden Kapitel ausführlich behandelt.

1.1 Allgemeine Zielsetzung

Ziel des Projektes war es herauszufinden, worin die Schwierigkeiten der so genannten rechenschwachen Kinder beim Erlernen des Rechnens bestehen und wie diese Schwierigkeiten möglichst frühzeitig erkannt und behoben werden können, damit die Kinder wieder Anschluss an den regulären Unterricht finden. Erkenntnisse sollten durch die Auswertung der Arbeit mit betroffenen Kindern und aus der Fachliteratur gewonnen werden. Die Ergebnisse sollten für die Lehrerausbildung und die Lehrerweiterbildung aufbereitet werden.

1.2 Organisation der Arbeit und Tätigkeiten

Wir haben auf zwei Ebenen gearbeitet: Anhand der Literatur erarbeiteten wir das vorliegende Wissen über Lernschwierigkeiten in Mathematik, wobei wir Perspektiven der Fachdidaktik, der Entwicklungspsychologie, Lernpsychologie, Neuropsychologie und Sonderpädagogik beachteten.
Parallel dazu arbeiteten wir mit Kindern, die von verschiedenen Fachleuten als „rechenschwach“ beurteilt und zu uns empfohlen worden waren. Seit März 1995 hat Frau Schultz 34 Kinder und Jugendliche untersucht (Eingangsdiagnostik); davon waren 25 weiblichen und 9 männlichen Geschlechts. 22 Mädchen und 8 Jungen besuchten zum Zeitpunkt der Vorstellung die Grundschule (5 Kinder die erste Klasse, 7 die zweite, 13 die dritte, 4 die vierte) oder die Grundstufe einer Sprachheilschule (3 Kinder) oder einer Körperbehindertenschule (1 Kind) oder eine LRS-Klasse (1 Kind). Ein Mädchen besuchte eine Sonderform einer Waldorf-Schule, die Kinder mit verschiedenen Lernbehinderungen aufnimmt.[1] Nur ausnahmsweise haben wir vier ältere Schüler/innen berücksichtigt. Die meisten der vorgestellten Kinder wurden nach der Untersuchung durch

[1] Dreizehn von diesen Kindern waren zurückgestellt worden, hatten eine Klasse wiederholt oder eine Vorklasse besucht. Vier Kinder wurden während oder nach der Untersuchung bei uns eine Klasse rückversetzt, ein Kind wechselte von der Sprachheilschule zur Förderschule, ein anderes von der Grundschule zu einer privaten Grundschule.

einen Studentin oder einen Studenten der Pädagogischen Hochschule in der Regel einmal pro Woche einzeln gefördert.[2] Nach Möglichkeit nahmen die Betreuer/innen im Förderzeitraum an Begleitseminaren teil, die während des Semesters wöchentlich stattfanden. Dort berichteten sie von Zeit zu Zeit über die Arbeit mit dem Kind. Das Seminar diskutierte dann das weitere Vorgehen bei der Förderung. In einigen Fällen wurde die Betreuungsarbeit in einer wissenschaftlichen Hausarbeit dokumentiert und aufgearbeitet.

Die Untersuchung durch die Diplompsychologin erstreckte sich in der Regel über 5 Termine zu je einer Stunde. Gegenstand der Untersuchung waren die mathematischen Kognitionen des Kindes. Die Ergebnisse wurden in einem Bericht dargestellt und (oft mehrmals) von uns diskutiert. Frau Schultz führte außerdem Elterngespräche, Gespräche mit Lehrern/ Lehrerinnen und stand den Betreuerinnen und Betreuern beratend zur Seite.
Wir haben mit Bildungs- und Erziehungsberatungsstellen, dem Förderkreis Sozialpädiatrie, Ärzt(inn)en, Ergotherapeut(inn)en, Elterninitiativen in Freiburg und Stuttgart, Lehrkräften verschiedener Schularten und mit der Arbeitsstelle für Kooperation beim Staatlichen Schulamt Freiburg zusammengearbeitet. Seit seiner Einrichtung gehörten wir dem Lehrerarbeitskreis Rechenschwäche (LARS) an. In Kooperation mit dem Oberschulamt Freiburg und dem Institut für Weiterbildung der Pädagogischen Hochschule wurden regelmäßig[3] Fortbildungsveranstaltungen für Lehrer und Lehrerinnen zum Thema „Lernschwierigkeiten in Mathematik“ angeboten.

1.3 Kurzcharakterisierung unseres Ansatzes

Lernschwierigkeiten in Mathematik haben unterschiedliche Erscheinungsbilder: Betroffene Kinder zeigen im Umgang mit mathematischen Aufgabenstellungen verschiedene Vorgehensweisen und unterschiedliche Stärken und Schwächen.
Schaubilder, die Faktoren darstellen, die bei der Entstehung der Lernschwierigkeiten potenziell mitwirken, sind reichhaltig und weisen zurecht auf die Komplexität hin. Die Kompetenzen der so genannten rechenschwachen Kinder sind Ergebnis des Zusammenwirkens von „inneren“ Faktoren (Voraussetzungen in der Person des Kindes) und „äußeren“ Einflüssen (außerhalb der Person des Kindes bestehende Bedingungen). Sowohl das Gefüge der äußeren Einflüsse und ihre Dynamik als auch das Gefüge der inneren Einflüsse und ihre Dynamik, wie auch die wechselseitigen Beziehungen zwischen inneren und äußeren Faktoren sind wissenschaftlich noch nicht zufriedenstellend erhellt worden. So sind auch folgende grundlegende Fragen noch nicht beantwortet: In welcher Weise sind sensomotorische Fähigkeiten und Erfahrungen notwendige Voraussetzungen für die höhere kognitive Fähigkeit des Rechnens? Wie wirken sich außerschulische und schulische Unterrichtung auf die Entwicklung des mathematischen Verständnisses aus?

---

[2] Die Studenten und Studentinnen hatten an einem Hauptseminar über Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht teilgenommen, das in jedem Semester angeboten wird.
[3] Pro Semester werden zwei Kompaktseminare von je 12 Stunden Umfang angeboten, von denen eines an der Pädagogischen Hochschule Freiburg und das andere in der Region stattfindet.

Gibt es verschiedene Entwicklungswege, die zu einem angemessenen Zahlverständnis und korrekten und flexiblen Rechenfertigkeiten führen?
Aufgrund dieser Komplexität kann das Phänomen der Lernschwierigkeiten in Mathematik aus verschiedenen wichtigen und begründbaren Blickwinkeln betrachtet werden. Jeder Blickwinkel bedeutet jedoch eine Vereinfachung, indem er andere wichtige Zusammenhänge ausblendet.
Unsere Annäherung an das Gebiet der Lernschwierigkeiten war bestimmt vom Ziel, Ansatzpunkte für individuelle Hilfestellungen für betroffene Kinder und für die Prävention von Lernschwierigkeiten durch verbesserte Unterrichtspraxis zu finden. Deshalb strebten wir vor allem danach, die Schwierigkeiten zu verstehen, denen diese Kinder in ihrer Auseinandersetzung mit Zahlen und mathematischen Problemstellungen begegnen.

Nach reiflicher Prüfung der bislang vorliegenden Ansätze haben wir entschieden, das Projekt in der neueren konstruktivistischen Lern- und Entwicklungspsychologie der mathematischen Kognitionen zu verankern, in der entscheidende Schritte der Konzeptbildung auf dem Weg des Kindes zu einem reifen Zahlverständnis analysiert werden. Auf dieser Grundlage sollte anschließend das Vorgehen der „rechenschwachen“ Kinder beurteilt werden (Diagnostik). Überlegungen zur Unterrichtung und Förderung (Methodik, „Therapie“) sollten sich anschließen.

Wir wollten also die Beziehungen zwischen den folgenden drei Bereichen vertiefen:

1. den entwicklungspsychologischen Erkenntnissen über den Erwerb mathematischer Konzepte und Prozeduren;
2. den Kompetenzen und Schwächen der so genannten rechenschwachen Kinder, eingeschlossen ihre Erfassung (Diagnostik);
3. der Organisation von Lernsituationen für diese Kinder in der Schule und in der Einzelförderung.

Aus der Sicht der konstruktivistischen Lern- und Entwicklungspsychologie kann man die Entwicklung der mathematischen Kognitionen vielleicht in folgendem Bild veranschaulichen: Die mathematischen Kognitionen sind ein Gebäude, das jedes Kind individuell konstruiert. Seine allgemeinen kognitiven Fähigkeiten sind die Werkzeuge, die es bei der Arbeit einsetzt – womit wir ausdrücken wollen, dass das Produkt nicht allein aus den Werkzeugen erklärt werden kann. Der Prozess ist eingebettet in die Behandlung von mathematischen Gegenständen in der Schule und im Elternhaus. Wie Angebote und Anregungen aus diesem Kontext vom Kind verarbeitet werden, hängt nicht nur von seinen „Werkzeugen“ ab, sondern auch vom aktuellen Zustand des mentalen Gebäudes. Da es auf die aktive Konstruktion, also auf die eigene Tätigkeit des Kindes, ankommt, geht von der motivationalen und emotionalen Situation des Kindes ein starker Einfluss aus.

Dieses Bild unterscheidet sich von anderen Bildern des Erwerbs- und Entwicklungsprozesses in folgender Weise:

- Es betont das aktiv konstruierende Kind und geht nicht davon aus, dass seine mathematischen Konzepte von Wahrnehmungs- und anderen grundlegenden kognitiven Funktionen gewissermaßen von selbst hervorgetrieben werden. Das aktiv konstruierende Kind ist mehr als die Summe der integrierten Sensomotorik und Gedächtnisfunktionen. Der mathematische Sinnzusammenhang wird nicht in einzelne allgemein-kognitive Leistungen aufgelöst, sondern es wird an eigentlich mathematischen Beziehungen festgehalten, die eine besondere psychologische Qualität haben. Das Zählprinzip der eineindeutigen Zuordnung von Zahlwörtern zu Elementen kann mit Visuomotorik nicht identifiziert werden, obwohl diese zur Ausführung gebraucht wird. Das Prinzip kann erkannt sein, auch wenn die Ausführung misslingt. Die Reflexion von Teilen in einem Ganzen setzt eine gewisse Figur-Grund-Unterscheidung und visuelle Analyse und Synthese voraus, ist aber keine Wahrnehmungsleistung. Die korrekte Verarbeitung mehrstelliger Zahlen setzt eine Beachtung der linearen Anordnung voraus, aber Stellenwertverständnis der Zahl ist etwas anderes als die Beachtung der Reihenfolge und richtige Zuordnung der Begriffe „Zehner“ und „Einer“.

- Den Kern der besonderen psychologischen Qualität des mathematischen Denkens aus konstruktivistischer Sicht bildet das Herausarbeiten von Beziehungen, die im weitesten Sinn mit Quantitäten zu tun haben. Man hält die mathematische Kompetenz[4] nicht für eine vorwiegend prozedurale Leistung (Regelwissen über den Umgang mit Zahlen), sondern denkt sie sich als Feld von Beziehungen zwischen Quantitäten und Zahlen. Zahlen und Zahlbeziehungen, die in speziellen mathematischen Zeichen dargestellt werden („Rechenaufgaben“), sollen auf der Grundlage einer quantitativen Interpretation für das Kind „Bedeutung“ haben oder erhalten. Diese quantitative Interpretation wird das konzeptuelle mathematische Wissen des Kindes genannt. Rechenprozeduren sollen in enger Verbindung zu diesem Wissen stehen.
- Der Einfluss von Unterricht und sinnlich erfahrbarem Material, das für die Entwicklung der mathematischen Konzepte von besonderer Bedeutung ist, wird in Abhängigkeit von den mathematischen Kognitionen gesehen, die das Kind bisher entwickelt hat. Dies beinhaltet, dass das Kind Material, Erläuterungen und das eigene und fremde Handeln auf besondere Weise sieht, die von seinen mathematischen Kognitionen abhängt. Kinder sehen quantitative Darstellungen unter mathematischem Blickwinkel anders als wir, ohne dass schlechte Wahrnehmungsfunktionen dafür verantwortlich sind. Hinweise und Vorschläge von Erwachsenen werden oft nur vorübergehend aufgenommen, oberflächlich angewendet, wobei Fehler unbemerkt bleiben, ohne dass Gedächtnisfunktionen sonderlich beeinträchtigt sind.[5]

Der zuletzt genannte Punkt muss ergänzt werden: Der insbesondere von Lehrer/innen und Eltern geschaffene Kontext legt die *Bedeutung* der mathematischen Gegenstände in wesentlicher Weise fest und bestimmt auf diese Weise auch, welche Bedeutung vom Kind allmählich herausgearbeitet wird. Insofern die konstruktivistische Sichtweise die mathematischen Kognitionen des Kindes nur in Abhängigkeit von der physikalischen Umwelt, den mathematischen Gegenständen im engeren Sinn und den „Werkzeugen“ des Kindes versteht, vernachlässigt sie die von der sozialen Umwelt geschaffenen und vermittelten Bedeutungen.[6]

---

[4] Wir denken an die Arithmetik des Grundschulalters.
[5] Erläuterung mit Beispielen im übernächsten Abschnitt des Kapitel 1, Kapitel 2, v. a. Abschnitt 2.3.
[6] Auch diese Bedeutungen sind eine komplexe Angelegenheit: Um sie herauszuarbeiten, müssen Schulbücher, Unterrichtsgespräche und Hausaufgabengespräche analysiert werden.

Was aus dem Bild nicht direkt hervorgeht, aber sehr wichtig ist: es besteht ein Unterschied zwischen der Analyse einer Aufgabenstellung aus der Sicht der voll entwickelten (erwachsenen) mathematischen Kompetenz und aus der Sicht der sich entwickelnden Kompetenz. Es ist nicht leicht, den Unterschied zu erfassen, weil wir unsere eigene Entwicklung nicht rückblickend erfassen und reflektieren können. Auch kann die geistige Tätigkeit des Kindes nicht „einfach“ an seinem sichtbaren Handeln abgelesen werden oder durch Fragen an das Kind zur Darstellung kommen.

Wir versuchten also, die *Denkweise der Kinder* zu erfassen, und wir untersuchten *mathematische Konzepte* im Einzelnen, und zwar *unter dem Blickwinkel ihres Erwerbs (ihrer Entwicklung).* Die konstruktive, konzeptbildende Tätigkeit des Kindes prinzipiell und hinsichtlich spezifischer früher mathematischer Konzepte besser zu verstehen war unser besonderes Anliegen.

Um diesem Entstehungsprozess mathematischer Konzepte und Fertigkeiten auf individueller Ebene auf die Spur zu kommen, mussten Erfahrungen in Einzelfallstudien gesammelt werden. Interesse am Einzelfall ergibt sich auch aus dem Ziel, die interindividuellen Unterschiede in der Auseinandersetzung mit den Gegenständen des Fachs zu erarbeiten. Es war uns nicht möglich, die Wechselwirkung mit der „Instruktion“, die das Kind in der Schule und zu Hause erhielt, zu untersuchen (vgl. Abschnitt 1.7).

1.4 Mängel und Grenzen vorliegender Arbeiten zur „Rechenschwäche“[7]

Vorliegende Arbeiten zur „Rechenschwäche“ haben in der Regel zwei Grundlagen: die allgemeinen kognitiven Funktionen des Kindes werden in Beziehung gesetzt zum Lernen von Mathematik. Die kognitiven Funktionen, die Beachtung finden, sind auf unterschiedlichem Niveau angesiedelt: es werden so genannte basale sensomotorische Leistungen bis zu komplexen Funktionen (Gedächtnis) oder Kategorien neuropsychologischer Theoriebildung (einzelheitliches versus ganzheitliches Denken) herangezogen. Das eigentliche Lernen der Mathematik wird konzeptualisiert als Entwicklung vom konkreten Handeln mit konkret-manipulierbaren und sinnlich-erfahrbaren Gegenständen (I) über das Handeln in der Vorstellung an bildlich dargestellten oder an vorgestellten Dingen (II) hin zum Handeln mit Zahlen in symbolischer Darstellung (III). Aus der Perspektive des Kindes wird der Prozess als „Verinnerlichen“ und „Schlackenabstreifen“ charakterisiert.

Wir fanden in diesen Darstellungen folgende Lücken und Mängel:

(1) Worin die Komplexität und die Eigenart grundlegender mathematischer Konzepte besteht, wurde nicht angemessen herausgearbeitet. Vorherrschend findet man ein prozedurales Verständnis von Mathematik als ein regelgeleitetes Vorgehen, d. h. vom Mathematiklernen als Erlernen der Regeln, wie mit Zahlen und Aufgaben umzugehen ist.

[7] Ausführlich dazu: Kapitel 3, Abschnitt 3.2.

(2) Das Wissen über den Prozess des Erwerbs der mathematischen Konzepte durch ein Kind ist dürftig: Das Entwicklungsschema „konkrete Handlung – konkrete Handlung in der Vorstellung – Handlung mit Symbolen“ lässt Fragen offen, die nicht gestellt und nicht behandelt werden: Was bedeutet Handlung mehr als Manipulation? Was bedeutet Verinnerlichung mehr als Vorstellung? Das Zahlverständnis ist vernachlässigt.

(3) Die Verknüpfung der Lernschwierigkeiten der Kinder unmittelbar mit allgemeinen kognitiven Funktionen ist aufgrund der Unklarheiten in den zuvor genannten Punkten oft geradezu beliebig. Insbesondere findet man eine Reduktion der mathematischen Kognitionen auf sensomotorische Erfahrungen in dem Sinne, dass bei richtigem sensomotorischem Input und seiner korrekten Aufnahme auf primärer (basaler) Ebene die mathematischen Konzepte ohne weiteres geformt werden.

Die genannten Punkte überschneiden sich in der konkreten Problemstellung. Ein gutes Beispiel bietet die Frage, wie es zur Abrufbarkeit von Basisfakten der Addition und Subtraktion kommt. Kinder zählen, rechnen zählend, wenden irgendwann Strategien an und rufen Fakten aus dem Gedächtnis ab. Bei oberflächlicher Betrachtung bietet sich als Erklärung für das Versagen einiger Kinder eine „Zählschwäche“[8] oder ein „schlechtes Gedächtnis“ an. Aber dass für uns viele Fakten aus dem Gedächtnis abrufbar sind, bedeutet nicht, dass wir sie aufgrund von rein assoziativen Verknüpfungen unserem Gedächtnis einverleibt haben, weil wir beispielsweise wiederholt drei Dinge und vier Dinge zusammenlegten und beim Durchzählen jedes Mal bis „sieben“ kamen. Ein Kind, das „ein schlechtes Gedächtnis“ hat, aber die Zahlen gut versteht, wird mit Hilfe von Strategien aus wenigen Fakten alle anderen rasch herleiten können.[9]
Für Erwachsene ist der eigene Lernprozess, der zur Abrufbarkeit der Basisfakten führte, zum größten Teil „verschwunden“ und einer nachträglichen Reflexion nicht mehr zugänglich. Das kommt vor allem daher, dass das Kind sein Denken und Wissen nicht reflektieren kann; darüber hinaus wird es selten aufgefordert, sein Vorgehen oder Denken darzulegen.

Ein zweites Beispiel bietet die Frage, worauf richtiges Kopfrechnen mit zweistelligen Zahlen beruht. Ein Computerprogramm zur Addition von zweistelligen Zahlen zu schreiben ist nicht schwierig. Der Computer muss auf die Reihenfolge der Ziffern achten und davon abhängige Regeln befolgen. Aber Kinder lernen das Addieren zweistelliger Zahlen nicht wie der Computer durch Regeln. Auch wenn Vorgehensweisen in der Form von Regeln im Unterricht oder zu Hause gelehrt werden, müssen sie die Regeln selbst „begründen“, d. h. in ihrem Zahlverständnis verankern, um sichere, flexible Rechner zu werden. Um dies zu leisten, müssen sie einen Zehner konstruieren, der in reversibler Weise mit zehn Einern verbunden ist. Diese Beziehung muss für jede zweistellige Zahl hergestellt werden können und im Kontext des Rechnens mit zweistelligen Zahlen einsetzbar sein. „Vertauschungsfehler“ beim Kopfrechnen sind u. U. nur sekundär, wenn das Kind keine angemessene quantitative Assoziation zur Zahl hat und diese nicht auf geeignete Weise zerlegen kann.

[8] was auch immer das ist; Begriff aus MILZ, 1993.
[9] Wir gehen auf die Komplexität des guten und schlechten Gedächtnisses nicht ein. Die Gedächtnisforschung zeigt jedenfalls, dass – vereinfacht gesagt – das Merken und Abrufen davon abhängt, wie das zu Merkende oder Abzurufende in vorhandenes Wissen eingebettet ist und wie es beim Erwerb bearbeitet wurde. Vgl. dazu Abschnitt 8.6.1.

Speziell dem Zahlverständnis ist wenig Aufmerksamkeit geschenkt worden. Aus unserer Sicht ist es mit dem Operationsverständnis eng verbunden und Voraussetzung des verständigen flexiblen Rechnens. Aus der Zerlegbarkeit der Zahlen können die Operationen und ihre Eigenschaften erklärt werden. Ohne das Konzept der Zerlegbarkeit in Verbindung mit geeigneten Zahlvorstellungen bleiben viele arithmetische Beziehungen, die rasche Ableitungen ermöglichen, uneinsehbar.

Verinnerlichte Handlungen

Die Konzeption vom Erwerb mathematischer Kognitionen als Entwicklung von Handlungen mit konkreten Gegenständen über die vorgestellte Handlung an einem Bild zur Handlung mit den Zahlen hat uns lange Zeit Rätsel aufgegeben. Zuletzt haben wir festgestellt, dass sie oft nicht im Sinne des Urhebers Aebli verwendet, sondern mit einem reduzierten Inhalt gefüllt wird. Handlung wird nicht klar von Manipulation unterschieden, die Verinnerlichung der konkreten Handlung auf die mentale Aufzeichnung der Manipulationen reduziert. Wie aus dem Legen und Durchzählen von Gegenständen ein mathematisches Konzept (und nicht nur eine irgendwie geartete Vorstellung vom Legen und Durchzählen) wird, darüber ist kaum etwas zu erfahren. Die wissbegierige Leserin muss sich mit der metaphorischen Charakterisierung vom „Schlacken abstreifen“ begnügen. Das klingt mechanisch und einfach genug, aber ist es das auch?

Unter dem Begriff „Verinnerlichung von konkreten Handlungen“ wird die geistige Tätigkeit des Kindes unzureichend charakterisiert. Es wird oft der Eindruck erweckt, es handele sich schlicht um ein durch Wiederholungen sich einprägendes Vorstellungs- und Erinnerungsbild von Manipulationen mit konkretem Material. Der Leitsatz „Denken ist verinnerlichtes Handeln“ kann missverstanden werden. Nicht das, was das Kind äußerlich/sichtbar tut, ist die *Handlung*, die es bei der Lösung einer Aufgabenstellung vollzieht. Vor der Aktivität, die es zur Lösung eines Problems ergreift, „versteht“ das Kind die Aufgabenstellung auf bestimmte Art und Weise. Dazu gehört, dass es seine Vorstellung einer (oder mehrerer) Zahlen aktiviert und bearbeitet, z. B. einen Teil herauslöst, auf den es seine Aufmerksamkeit und die nachfolgende Tätigkeit (simultanes Erfassen, Kombinieren, Zählen u. a.) richtet. Ist seine Vorstellung zu einer Zahl nicht quantitativ, sondern beispielsweise ein Punkt der Zahlenreihe, wird es keinen Teil herauslösen können. Es wird dann Aufgaben zählend lösen, aber niemals die Zahlen als Teile in einem Ganzen reflektieren.
Im Anschluss an die Aktivitäten zur Herbeiführung einer Lösung kann das Getane reflektiert werden – oder auch nicht. Viele Tätigkeiten des Kindes sind nicht beobachtbar. Seine motorischen Aktivitäten sind eingebettet in und begleitet von geistiger Tätigkeit, die sich allmählich verändert und der Aktivität ihre Bedeutung gibt. Auch die Entwicklung einer Vorstellung von motorischen Aktivitäten und von konkreten Zahldarstellungen ist nur ein Teil der geistigen Arbeit des Kindes. Die sichtbare und erfragbare Tätigkeit des Kindes ist Resultat der geistigen Tätigkeit und zugleich wieder Arbeitsmaterial für die Veränderung der geistigen Tätigkeit.

Beiträge der Neuropsychologie und ihre Grenzen

Aus unserer Sicht misslingen viele Versuche, „basale" oder allgemeine kognitive Fähigkeiten mit Mängeln im mathematischen Wissen und Verstehen zu verknüpfen, aus den folgenden Gründen:

- *Mathematische Kognitionen haben eine eigene psychologische Natur und werden durch besondere mentale Bearbeitung sensomotorischer Erfahrungen hervorgebracht. Das neuropsychologische Wissen kann nur mit Bezug auf diese Besonderheiten für das Verständnis der Lernschwierigkeiten und für ihre Vermeidung und Behebung fruchtbar gemacht werden.*

Manche Autoren und Autorinnen unterscheiden mathematische Konzepte kaum von sensomotorischen Erfahrungen. Sie übergehen die Bearbeitung der sensomotorischen Erfahrungen, die das Kind leisten muss, um mathematische Konzepte hervorzubringen. Die Anforderungen, die die eigentlich mathematische Konzeptbildung an das kindliche Denken richtet, werden nicht angemessen bewertet und ihre Vorstufen im Laufe der Entwicklung nicht hinreichend analysiert.
Es wird nicht herausgearbeitet, wie die Kinder, die beim Lernen von Mathematik stecken bleiben, die mathematischen Aufgaben eigentlich verstehen. Statt dessen verlässt man schnell das Terrain der mathematischen Kognitionen und versucht diese in basale Bestandteile aufzulösen, als ergäbe sich die mathematische Bedeutung aus den Werkzeugen zur Erfassung der physikalischen Welt.
Autoren und Autorinnen, die einzelne mangelhafte Basisfunktionen für die Ursache der Rechenschwäche halten (z. B. Probleme der Figur-Grund-Unterscheidung), stellen dürftige Beziehungen zur Entwicklung des mathematischen Verständnisses her, z. B. diese Kinder könnten nicht sehen, was sie schon abgezählt haben und was noch nicht. Wenn die „Rechenschwäche" darin gründen würde, müsste sie durch praktische Verhaltensregeln behebbar sein (man zeigt den Kindern, wie man beim Abzählen das schon Gezählte ordentlich vom Rest wegschiebt). Das überzeugt wenig.

- *Will man Lernschwierigkeiten in Mathematik abhelfen, muss man vor allem Experte/Expertin für Lernprozesse in Mathematik und für die Erforschung des individuellen Gebäudes der Mathematik werden, das ein Kind bisher entwickelt hat. Dafür benötigt man zuerst mathematisch-psychologische Konzepte, nicht neuropsychologische.*

Den uns vorgestellten Kindern, denen Fachleute eine „Rechenschwäche" bescheinigt hatten, wurden in der testpsychologischen Untersuchung sehr unterschiedliche Profile aus Stärken und Schwächen attestiert. Das ist nicht erstaunlich, weil die Anforderungen in Mathematik sowohl nonverbaler wie verbaler, sowohl serialer wie simultaner Natur sind. Aber der Zusammenhang zwischen den Stärken und Schwächen der allgemeinen kognitiven Funktionen und den mathematischen Verständnislücken des Kindes ist solange unklar, wie wir den Konstruktionsprozess der Kinder nicht in feinen Schritten rekonstruieren können und auch nicht wissen, welche Wechselwirkung zwischen dem Unterrichtsangebot und der Konstruktionstätigkeit der Kindes besteht bzw. bestand. Welchen Aspekt der Zahl hat das Kind noch nicht konstruiert? Welche Beziehung kann zu seiner Schwäche im Untertest X hergestellt werden? Welches Unterrichtsangebot hat es erhalten? Welche Alternativen sind denkbar? Welche sind im Hinblick auf die bisherige Konzeptbildung des Kindes und im Hinblick auf seine allgemeinen kognitiven Stärken und Schwächen viel versprechend? Testergebnisse allein erlauben nur in geringem Maße Folgerungen für die nächsten Ziele und Vorgehensweisen bei der Förderung des Kindes.[10]

- *Die Fixierung auf die Neuropsychologie als Schlüssel zum abweichenden Denken und behinderten Lernprozessen verhindert, dass der Einfluss des Kontextes „Unterricht und Instruktion in und außerhalb der Schule“ auf die Konstruktionstätigkeit und die Inhalte, die das Kind herausarbeitet, untersucht wird. Es besteht die Gefahr, dass die Beachtung des Unterrichts auf die Bewertung von Anschauungsmaterial unter dem Blickwinkel beeinträchtigter Wahrnehmungsfunktionen reduziert wird.*
- *Die Komplexität des neuropsychologischen Gesamtsystems wird nicht gewürdigt.*[11]

Entgegen verbreiteten Aussagen ist wissenschaftlich noch nicht beantwortet, in welcher Weise „basale“ sensomotorische Fähigkeiten notwendige Voraussetzungen für höhere kognitive Funktionen sind. DIETEL (1992) weist im Handbuch eines neuropsychologischen Tests für Kinder darauf hin, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, wie basale Funktionen in höhere kognitive Funktionen integriert werden können; dass gute sensomotorische Funktionen nicht notwendig von guten Konzeptbildungsfähigkeiten (Problemlösen, Hypothesentesten) begleitet sind, und dass beeinträchtigte sensomotorische Funktionen nicht in jedem Fall eine beeinträchtigte Konzeptbildung nach sich ziehen. Selbst bei Kindern mit durchschnittlichen oder guten Leistungen in Wahrnehmung, Motorik und Sprache seien bei der Konzeptbildung gelegentlich ausgesprochene Einbrüche zu beobachten. Umgekehrt können Stärken im Bereich der Konzeptbildung und des Problemlösens auf Schwächen in den basalen Funktionen Einfluss nehmen. Das Kind kann Einsicht in die eigene Schwäche gewinnen und selbständig oder unter Anleitung geeignete Hilfs- und Kompensationsstrategien entwickeln. Dietel spricht sich daher für eine vollständige neuropsychologische Untersuchung aus, wenn die neuropsychologische Ebene mitberücksichtigt werden soll.

ROURKE (1993) stellt aufgrund seiner langjährigen Erforschung von Lernschwierigkeiten die Hypothese auf, dass neuropsychologische Schwächen in der taktilen Wahrnehmung, Psychomotorik und in der Organisation der Wahrnehmung die kognitiven Funktionen auf späteren komplexeren Entwicklungsstufen negativ beeinflussen, insbesondere diejenigen Funktionen, die nicht durch mechanische Sprachfunktionen leicht reguliert werden können, wie z. B. nonverbale Analysen, Organisation, Synthese höherer Ordnung, auch die nonverbale Konzeptbildung. Im Unterschied zu DIETEL sieht er also den Bereich der Konzeptbildung und des Problemlösens in größerer Abhängigkeit von den sensomotorischen Funktionen.

Wie kann man Ergebnisse und Modellbildungen aus der neuropsychologischen Erforschung der kindlichen Entwicklung und der „Rechenstörungen“ sinnvoll benutzen? Wir

---

[10] Dazu auch VON ASTER, 1996, 178 und 63f. Er sieht auch aus klinisch-neuropsychologischer Sicht die Notwendigkeit, von den allgemeinen kognitiven Funktionen zu den spezifisch mathematischen Leistungen überzugehen und diese neuropsychologisch und entwicklungspsychologisch zu analysieren. Wir äußern uns zu seinem Herangehen in Abschnitt 5.3.

[11] Ausführlich in Kapitel 5 (Abschnitte 5.2 bis 5.4).

haben sie berücksichtigt, um Beobachtungen zu ordnen, Unterscheidungen zu treffen und die Beobachtungen unter verschiedenen Gesichtspunkten zu befragen.
Die Unterscheidung von sprachlichen und nichtsprachlichen Beiträgen zu den mathematischen Leistungen[12] regt an zu prüfen, ob die Schwächen eines Kindes in Mathematik eher auf Beeinträchtigungen auf sprachlicher Grundlage zurückgeführt werden können als auf nichtsprachliche: Treten Fehler in der Übersetzung von in Ziffern geschriebenen Zahlen in Zahlwörter auf, obwohl das quantitative Zahlverständnis gut ist? Fällt es schwer, schwierige sprachliche Formulierungen für quantitative Beziehungen[13] zu verstehen? Können Fakten nicht abgerufen, aber mit Strategien ermittelt werden, die ein gutes Zahlverständnis zeigen? Dies wären Beeinträchtigungen auf sprachlicher Grundlage, die ihrerseits schon verschiedenster Natur und von unterschiedlicher Tragweite sind.
Notwendig ist es auch zu prüfen, welchen Beitrag nonverbale Leistungen bei der Bildung von Zahlkonzepten leisten: Welche quantitativen Vorstellungen zieht das Kind im Umgang mit Zahlen und Aufgaben heran? Wie begründet es seine Rechenstrategien anhand von quantitativen Zahldarstellungen? Lücken im quantitativen Zahlverständnis sollten nicht ohne weiteres auf eine Schwäche der nonverbalen Konzeptbildung zurückgeführt werden, da die Unterrichtung des Kindes u. U. wesentlichen Einfluss auf diese Leistung nimmt.
Die Prüfung kann auch ergeben, dass die Sprachverwendung die wesentliche Stütze und Grundlage der Bearbeitung mathematischer Aufgaben ist und dass das quantitative Denken[14] größere Schwierigkeiten bereitet.
Wenn das Kind auch bei einfachen Problemstellungen, wie z. B. dem Zählen von vielen Häschen auf einem Blatt oder dem Berechnen der Summe einer Menge verschiedener Geldscheine, die Schwierigkeiten der Aufgabe nicht benennen oder keine Abhilfe finden kann, können wir prüfen, ob sich diese Schwierigkeiten bei der Problemanalyse und beim Entwerfen eines Lösungswegs auch bei anderen Aufgaben zeigen, ob sie eher motivational oder kognitiv oder aus der Lerngeschichte des Kindes begründet werden müssen.
Ausgehend von der Feststellung, dass Beobachtungen in verschiedenen Situationen uns ähnlich oder zusammenhängend erschienen, nicht hinsichtlich eines spezifischen mathematischen Konzeptes, sondern im Hinblick auf die allgemeinen intellektuellen Möglichkeiten und Haltungen des Kindes, haben wir überlegt, dass eine Kategorie „Übergreifende Beobachtungen bei der Arbeit an mathematischen Problemen“ sinnvoll sein könnte. Es stellt sich die Frage, auf welcher theoretischen Grundlage solche „übergreifende Beobachtungen“ bei der Untersuchung eingeordnet und in die Interpretation einbezogen werden können, so dass es nicht (ganz) der Intuition des Beobachters überlassen bleibt, sie zu machen und mit dem mathematischen Denken des betreffenden Kindes in Beziehung zu setzen? Wir haben die Idee, dass dies in Anlehnung an neuropsychologisch-begründete Kategorien erfolgen könnte.[15]

---

[12] Nach ROURKE (1993) u. a. können die „schwachen“ Werkzeuge des „rechenschwachen“ Kindes eher sprachlicher oder eher nichtsprachlicher Natur sein (natürlich auch beides).
[13] Beispiel: „A hat x-viele. Das sind um y mehr als B hat. Wie viele hat B?“
[14] Nachdenken über Beziehungen zwischen Teilen und Ganzem (Beispiele in 1.5) oder über Sequenzen von Veränderungen (Beispiel: zwei kamen weg, zwei wieder dazu: Anzahl bleibt gleich).
[15] Wir denken an: I. Aspekte des Aufmerksamkeitsverhaltens; II. Problemanalyse, Planung, Steuerung und Kontrolle von Lösungsverfahren; III. Beziehungen zwischen zwei Sachverhalten herstellen, Hypothesen aufstellen und testen; Schlußfolgerungen ziehen, zeitliche und zeitlich-räumliche Veränderungen

Diese Idee kann nur durch die Zusammenarbeit mit Neuropsychologen geprüft und verwirklicht werden. Die Vertiefung der Beziehungen zum neuropsychologischen Wissen, bei der die mathematikspezifischen Konstruktionsprozesse und Entwicklungswege berücksichtigt werden, ist eine Forschungsaufgabe der Zukunft (vgl. Abschnitt 1.7).

1.5 Veranschaulichung unseres Ansatzes und unserer Ergebnisse

Es hat uns recht viel Mühe bereitet, theoretisch und praktisch zu erarbeiten, was *konstruktivistisches* Verständnis vom Lernen für die Betrachtung des Erwerbs von mathematischem Verständnis bedeutet. Wir möchten es an einigen Beispielen erläutern.

Irgendwann wurden wir darauf aufmerksam, dass ein Junge[16] die Aufgabe 8 – 5 so löste: Er zeigte acht Finger, eine volle linke Hand und drei Finger an der rechten. Jetzt bewegte er nacheinander den achten, siebten, sechsten, fünften und vierten Finger, während er von 1 bis 5 zählte. Dann nannte er das Ergebnis „drei“. An einem anderen Tag baten wir ihn, acht kleine Holzzylinder so hinzulegen, dass man leicht sehen könne, dass es acht sind. Er bildete eine Würfelfünf und eine Würfeldrei. Wieder stellten wir die Aufgabe „8 – 5“. Florian zählte die drei Würfel der Würfeldrei und fügte weiterzählend noch zwei Zylinder der Würfelfünf hinzu.
Wir überlegten uns, dass dieser Junge sein Fingerbild der 8 (ebenso wie die Darstellung durch Würfelbilder) auf ganz bestimmte Weise wahrnehmen muss, so als sähe er eigentlich die Zahlreihe von 1 bis 8. Jedenfalls hat er „seine“ 5 nicht als Teil „seiner“ 8 begriffen, obwohl er sicher die Würfelfünf (bzw. die fünf Finger einer Hand) als „5“ und die Würfeldrei als „3“ erkannte. Das innere Zahlmodell, das er zum Rechnen heranzog, beinhaltete nicht diese Beziehung, bei der Zahlen *Teile* von anderen Zahlen sind. Mehr noch: Auch am *Fingerzahlbild,* einer Veranschaulichung der Zahlbedeutung, wendet das Kind diese Denkweise nicht an. Das ist kein Wahrnehmungsproblem. Es ist Ausdruck des Sinnzusammenhangs, in den *das Kind* Zahlen und Aufgaben stellt. Dieser ist bestimmt vom Zahlverständnis[17] und von der Bedeutung der Aufgabenstellung für das Kind: Auf die Aufgabenstellung „Zeige acht Finger, nimm fünf davon weg“ reagierte ein Mädchen anders als auf die Aufgabenform „8 – 5“.[18]

Bei mehreren Kindern haben wir ähnliche Beobachtungen gemacht. Sie legten 13 kleine Zylinder zu dem für sie leicht erfassbaren Bild aus zwei Würfelfünfen und einer Würfeldrei. Wenn wir ihnen die Aufgabe „13 – 5“ vorlegten, mit der ausdrücklichen Aufforderung, das Bild zu Hilfe zu nehmen, beachteten sie das Bild nicht und rechneten rückwärtszählend, oder sie trennten die Würfeldrei und zwei Würfel der benachbart liegenden Fünf ab und gewannen das Ergebnis auf diese Weise.

rekonstruieren; IV. Analyse von visueller und akustischer Information; V. Sprachgebundene Fähigkeiten und Fertigkeiten; VI. Motivation.

[16] Beispiel „Florian 1“ in Kapitel 4.

[17] Ist die 8 (bzw. das Fingerbild der 8) ein Symbol für eine Zusammensetzung aus acht Dingen oder für die Zahlreihe von 1 bis 8 oder für einen Zählvorgang von 1 bis 8?

[18] Bei „Zeige acht Finger. Nimm fünf davon weg.“ zeigte sie das Fingerbild der 8 – eine geöffnete linke Hand und drei Finger der rechten – und schloss dann die linke Hand (nach kurzem Zögern). Die schriftlich vorgelegte Aufgabe „8-5“ löste sie dagegen wie Florian.

Das Beispiel zeigt Wesentliches: Das innere Zahlmodell des Kindes bzw. *seine* Interpretation eines Zahlenproblems ist bestimmend. Die *Beziehung* „5 ist Teil der 8“, die uns Erwachsenen schon am Fingermuster der 8 unübersehbar erscheint, „sieht“ es nicht, weil es die Zahlen und Aufgaben anders versteht. Was wir Erwachsenen vielleicht als Wahrnehmungs- oder Aufmerksamkeitsproblem interpretieren, bekommt eine andere Bedeutung, wenn wir erstens anerkennen, dass das Kind in mancher Hinsicht nur sieht, was es schon denken kann, und zweitens uns mit der Entwicklung dieser kindlichen Denkweise befassen.

Ein Mädchen[19] zählte vierzehn kleine Holzzylinder. Wir fragten, wie viele davon zurückblieben, wenn vier weggenommen würden. Sie erklärte, sie lasse vier in Ruhe und zähle den Rest. Sie erhielt die Antwort „zehn“. Als ihr anschließend die Aufgabe 14 – 10 *schriftlich* vorgelegt wurde, gab sie nach längerem Schweigen das Ergebnis „fünf“ an. Sie hatte auf irgendeine Weise zurückgezählt. Jetzt zeigten wir auf die Holzzylinder, die noch so da lagen, wie sie sie gelegt hatte: „Wenn du zehn davon wegnimmst, wie viele bleiben zurück?“ Ola antwortete auf diese Frage sofort mit „vier“.

Ola bezieht die Aufgabe „14 – 10“ nicht auf die Situation, in der 4 Dinge von 14 Dingen abgetrennt werden und 10 Dinge zurückbleiben, obwohl sie dies unmittelbar zuvor ausgeführt hat. Ihre Antwort auf die dritte Frage zeigt, dass sie sehr wohl erinnert, dass die beiden Teilmengen, die sie hergestellt hat, aus 10 und 4 Elementen bestehen. Warum sind die beiden Welten (konkrete Menge und deren Zerlegung einerseits und die Aufgabe „14 – 10“ andererseits) getrennt? Wir möchten auf die folgenden Erklärungsmöglichkeiten hinweisen.

Es ist denkbar, dass das Mädchen „Aufgaben“ wie „14 – 10“ grundsätzlich so versteht, dass man, von 14 ausgehend, 10 Schritte rückwärts (weil „Minus“-Aufgabe) auf der Zahlreihe gehen muss und auf diese Weise zu „dem Ergebnis“ gelangt. Bei diesem Aufgabenverständnis ist das Ergebnis ein angepeiltes unbekanntes Zahlwort in der Zahlwortreihe. Das Kind, das die Aufgaben in dieser Weise versteht, hat keinen Anlass, die drei Zahlen gemeinsam zu reflektieren, etwa im Sinne einer Beziehung zwischen einem Ganzen (14), einem Teil davon (10) und dem anderen Teil (?). Die Prozedur, die es durchführt (Startpunkt, einige Schritte gehen, Endpunkt), hat eine sequentielle Struktur und fordert nicht zur Teil-Teil-Ganzes-Reflexion auf.

Dieses begrenzte Verständnis spiegelt in einigen Fällen die Instruktion wider, die das Kind in der Schule oder im Elternhaus erhalten hat, wie diese Aufgaben zu bearbeiten sind. Aber meistens liegen Lücken im Zahlverständnis vor, die auf die Schwierigkeit gewisser Konzeptbildungen über Zahlen hinweisen, beispielsweise auf die Leistung, die Zahl 14 aus den Zahlen 10 und 4 zusammengesetzt zu denken. Diese Vorstellung der Zusammensetzung der 14 kann als *Schlüsselkonzept* bezeichnet werden, da sich auf dieser Grundlage Subtraktions- und Additionsaufgaben aus dem Tripel (14, 10, 4) in jeder Form ohne Anstrengung ableiten lassen. Instruktion, die nur hilft, „Ergebnisse zu finden“, und die Schwierigkeit der Konstruktion können also hinderliche Verbindungen eingehen.

Die neunjährige Ola kann „14 Dinge“ richtig geben und ordnet die Eigenschaft „14“ der ganzen Menge zu (kardinales Urteil). Ihre persönliche *Zahl*bedeutung, also die Bedeutung des *Symbols* „14“, ist unter Umständen aber nicht „quantitativ“, sie denkt sich zur Zahl 14 nicht eine Zusammensetzung aus vierzehn Einheiten. 14 Dinge sind für sie etwas

[19] Beispiel „Ola 1“ in Kapitel 4.

anderes als eine in Ziffern geschriebene „14“ in Rechenaufgaben. Charakterisiert man eine Menge durch „14“ könnte damit nämlich nur soviel gemeint sein: Man hat beim Abzählen die Zahlen von 1 bis 14 benutzt. 14 verweist bei diesem Verständnis auf den Abzählvorgang. Das ist eine kardinale Zahlbedeutung, die sich jedoch vom Verständnis der 14 als Zusammensetzung aus vierzehn Elementen unterscheidet. Gehen wir davon aus, dass die Zahl 14 für das Kind etwas ist, das aus vierzehn Elementen zusammengesetzt ist, besteht die nächste Anforderung an das Kind darin, dass die Zahlen 10 und 4 als Bausteine der Zahl gesehen werden sollen. Das verlangt nicht nur eine Repräsentation[20] der Zahl als Zusammensetzung aus vielen Elementen, sondern auch die Möglichkeit, diese Repräsentation zu zerlegen, die Teile wieder als Repräsentation von Zahlen zu verstehen, und *Teile und Ganzes zueinander in Beziehung zu setzen.*
Hat das Kind die Zahl 14 beispielsweise als *Zahlreihe von 1 bis 14* repräsentiert, muss es zur Konstruktion der Beziehung zu 10 und 4 nicht nur die Zahlreihe nach „der 10“ oder nach „der 4“ durchtrennen, sondern die so erhaltenen Abschnitte wieder als Zahlen begreifen, d. h. zu einem Ganzen integrieren („1 bis 10“ als „10“ und „11 bis 14“ als „4“ oder „1 bis 4“ als „4“ und „5 bis 14“ als „10“). Das ist nicht leicht, wie der Leser/die Leserin, die unserer Darstellung vermutlich mit Mühe folgt, nachvollziehen kann.

Auf der Grundlage der Zahlreihe ist die grundlegend wichtige Teile-Ganzes-Beziehung von Zahlen vielleicht besonders schwierig zu konstruieren. Durch das mechanisch zählende Lösen von Aufgaben kommt man kaum an sie heran. Gleichwohl zeigen die Untersuchungen von STEFFE UND COBB (1998), dass manche Kinder auch die Zahlreihe reflektieren und daran Teile-Ganzes-Beziehungen zwischen Zahlen entwickeln können. Unter welchen Bedingungen und auf welche Weise leisten sie dies? Wieso gelingt es einigen zählend rechnenden Kindern nicht? Kann man Kindern durch Verwendung von strukturierten Mustern weitere Repräsentationen von Zahlen nahelegen, an denen Teile-Ganzes-Beziehungen *leichter* reflektiert werden können? Wie können diese Repräsentationen mit der Zahlreihe so verknüpft werden, dass am Muster gewonnene Einsichten die Zahlreihe neu strukturieren, d. h. die Bedeutungen und Beziehungen der Zahlen für das Kind verändern? Welche Aufgabenstellungen und Unterrichtsformen regen die konstruktive Tätigkeit dieser Kinder in Richtung auf die Verknüpfung von Zahlreihe und Mustern an, oder aber führen hin zur Reflexion der Zahlreihe?
Denkt sich das Kind die 14 als eine *Gesamtheit* von Dingen, deren Abzählen bis zu „vierzehn“ führte, ohne schon ein *strukturiertes* Bild davon zu besitzen, wird es sich in Olas Situation vermutlich der zuvor hergestellten Zerlegung der konkreten Menge bedienen. Es muss allerdings zu einer Reflexion der Teile im Ganzen fähig sein, die wiederum eine eigene Anforderung stellt: die Perspektiven aufs Ganze *und* auf die Teile müssen integriert werden. Um die Aufgabe „14 – 10“ mit der hergestellten Zerlegung in 10 Dinge und 4 Dinge in Beziehung zu bringen, muss trotz der Zerlegung, die aus 14 Dingen 10 und 4 Dinge machte, das Ganze von 14 Dingen noch im Geiste erhalten sein bzw. wiederhergestellt werden. Die sichtbaren Gruppen von 10 und 4 Dingen müssen nicht nur die Zahlen 10 und 4, sondern auch die Zahl 14 repräsentieren. Um die Minusaufgabe auf dieser Ebene zu deuten, muss aus der Kenntnis des Ganzen und eines Teils der zweite Teil ableitbar sein. Insbesondere die Verbindung von Zahlen (Symbolen) mit

[20] Repräsentation einer Zahl ist eine Vorstellung im weitesten Sinne des Wortes, die mit dieser Zahl verknüpft ist.

der Teil-Teil-Ganzes-Reflexion darf in ihrem Anforderungscharakter nicht unterschätzt werden[21].

Hat das Kind die 14 in einer strukturierten quantitativen Vorstellung repräsentiert (beispielsweise: 14 sind zehn-und-vier oder fünf-und-fünf-und-vier), wird zwar die Aufgabe „14 – 10“ dadurch erleichtert, aber die Teil-Teil-Ganzes-Beziehung ist auch daran nicht „sichtbar“, sondern wird in einer *Reflexionshandlung* hergestellt.

Das mag dem Leser/der Leserin nicht nur kompliziert, sondern auch komplizierend erscheinen. Er oder sie fragt sich vielleicht, wie um alles in der Welt das Kind auf Strukturen des Anschauungsmaterials hingewiesen werden soll, wenn doch die mathematischen Beziehungen „unsichtbar“ sind. Das ist eine wichtige Frage der Mathematikdidaktik, die weiterer Forschung bedarf. Wir denken darüber grundsätzlich so, dass es auf die Art der Aufgabenstellung ankommt (nicht nur auf das Anschauungsmaterial) und auf deren Abstimmung auf den jeweiligen Entwicklungsstand des Kindes hinsichtlich der mathematischen Kognitionen. Wir hoffen aber auch, mit unserer Darstellung die Schwierigkeit der Arbeit des Kindes verständlicher zu machen und von der Eselsgeduld, die die Prozesse im Kind nicht verstehen kann, zu einer *einsichtigen* Geduld zu führen, die sich auf die Prozesse einen Reim machen und auch feine Fortschritte erkennen kann. Anders gesagt: Es macht einen Unterschied, ob wir einerseits eine bestimmte Sichtweise dem Kind anbieten im Wissen, dass das Angebot nur dann unmittelbar angenommen wird, wenn es zu den schon erworbenen Einsichten des Kindes passt oder wir vor der Aufgabe stehen, zu verstehen,, was das Kind in unserem Angebot sieht, um unsere folgenden Anregungen darauf abzustimmen oder ob wir andererseits uns vorstellen, dass mathematische Beziehungen, die *wir* in ein Bild hineinsehen, sichtbar seien.

Ein weiteres Beispiel aus dem Bereich der mehrstelligen Zahlen: Viele Kinder konnten ohne Probleme die 46 als Kombination aus 4 Zehnerstangen und 6 Einerwürfeln darstellen. Wurden sie gefragt, wie viele Schachteln, die Platz für je zehn Steine bieten, für 43 Halbedelsteine benötigt werden, konnten sie darauf nicht antworten oder gaben merkwürdige Antworten: 43 oder 8 oder ähnliches. Mitnichten konnten sie sofort Auskunft geben, welche Zahl um 10 größer oder mehr als 54 ist. Warum stellen die Kinder keine Beziehung zwischen Zehnerstange und zehn Steinen her, warum nicht zwischen Zehnerstange und „zehn mehr“?
Wir haben oft beobachtet, dass Kinder zwar eine Zahl in Zehner und Einer zerlegen können, aber in große Schwierigkeiten geraten, sobald die beiden Kategorien Zehner und Einer in Beziehung gebracht („gewechselt“) werden müssen. Wenn 46 Einzelne gedanklich in Zehnheiten verwandelt werden müssen, ist dies nicht das Gleiche wie die „Zehner“ und die „Einer“ der geschriebenen Zahl „46“ zu identifizieren. Bei der letzten Aufgabenstellung können Zehner und Einer als getrennte Kategorien behandelt werden, es ist ohne Bedeutung, dass 1 Zehner gleich 10 Einern ist. Um „die Zahl, die um zehn größer ist als 46“ auf die Zehner-Einer-Darstellung von 46 zu beziehen, muss „um zehn größer“ in „einen Zehner mehr“ übersetzt werden. Die Herstellung dieser Beziehung

[21] Die letzte Frage, die an Ola gestellt wurde („Wie viele bleiben, wenn du 10 davon wegnimmst?“) kann beantwortet werden, ohne dass die 10 als Teil der 14 gedacht werden muss. Es muss keine Teile-Ganzes-Reflexion durchgeführt werden.

zwischen 1 Zehner und 10 Einern stellen sich Erwachsene in der Regel zu leicht vor. Die mathematische Analyse der Stellenwerte, die Erwachsene in wenigen Sätzen festhalten können, ist für die Analyse der *vom Kind* zu leistenden Neustrukturierung *seines* Zahlverständnisses nur wenig hilfreich. Wir müssen die Perspektive wechseln: Was versteht das Kind unter einer Zahl, wenn diese (für das Kind) noch keine Stellenwerte hat, sondern nur einen Gesamtwert darstellt? Wie kann man sich diesen Gesamtwert vorstellen? Wie bekommt er allmählich weitere Bedeutungen, in denen Zehner und Einer die Bausteine der Zahl sind? Welches Verständnis der Zehner und Einer in der Zahl befähigt zu flexiblem und verständigem Rechnen rein auf der Zahlenebene? Auf diese Fragen gehen wir in mehreren Kapiteln (3, 4, 7 und 8) ein.

Einfluss der Instruktion

Die Bearbeitung solcher Hürden kann auch durch Instruktion und ungeeignete Aufgabenstellungen beeinträchtigt worden sein. Man will es dem Kind leicht machen und zeigt ihm, wo die Zehner und die Einer stehen, wie Zahlen durch Zehner und Einer dargestellt werden, wie man getrennt mit Zehnern und Einern rechnet. Wenn es sich das Vorgehen bei einer Zehnerüber- oder -unterschreitung nicht merken kann, klagen die Helfer: „gestern hat es geklappt, heute schon wieder alles vergessen.“ Solange das Kind nicht gezeigt hat, dass es einen Zehner und zehn Einer reversibel verknüpfen kann, halten wir dieses Vergessen nicht für ein Gedächtnisproblem.

Zahlen, Aufgaben und andere mathematische Gegenstände werden im Kontext Schule in einen Zusammenhang gestellt, der ihnen Bedeutung gibt. Durch ausdrückliche Instruktion, durch die Art der Aufgabenstellung, durch den Einsatz von Material oder die Beendigung der Verwendung von Anschauungsmaterial, durch Unterrichtsgespräche über Lösungswege u. a. m. beeinflusst die von der Lehrperson geformte Bedeutung der mathematischen Gegenstände die Bedeutung, die das Kind für sich herausarbeitet. Was Lehrer und Lehrerin über die Entwicklung des Verständnisses wissen, wird die Wahl der Angebote und Anregungen mitbestimmen.

Viele Kinder verstehen Rechenaufgaben in der schon charakterisierten Weise als Aufforderung, so viele Schritte vor- oder rückwärts zu zählen. Sie bringen „das Ergebnis“ in keine quantitative Beziehung mit den beiden anderen Zahlen. Überhaupt kommt es aus ihrer Sicht beim Rechnen auf das Ergebnis an, nicht auf den Weg, auf dem man es erhält. Sie sind erstaunt, wenn man sie nach ihrem Lösungsweg fragt. Sie vergewissern sich bei der Untersucherin, ob man bei „30 – 4“ bei 30 oder bei 29 „anfangen“ muss. Kinder trainieren die Strategie des Zehnerübergangs, ohne dass sie die Zerlegbarkeit von Zahlen konstruiert haben, während sie die Aufgaben schneller lösen, wenn sie zählen.

Wie verstehen ihre Lehrer, Lehrerinnen und Eltern das Rechnen und den Prozess, in dem man es lernt? Welche Bedeutungen wurden den Kindern implizit und explizit vermittelt? Im Verlauf des Projektes erfassten wir die Bedeutung dieser Fragen. Erforschen konnten wir sie nicht, dies bedarf der Erforschung des Unterrichts und der Entwicklung der kindlichen Konzepte im Kontext des Unterrichts (vgl. Abschnitt 1.7).

Emotionale Einflüsse

Indem die konstruktivistische Lernpsychologie eine *aktive* Auseinandersetzung des Kindes betont, weist sie der motivationalen und emotionalen Situation des Kindes große Bedeutung zu. Der Sinnzusammenhang, in den das Kind eine bestimmte Aufgabe stellt, ist vor der eigentlich mathematischen Bearbeitung schon grundsätzlich bestimmt vom Sinn der Mathematik, der Schule und des Lernens in seinem Leben. Durch ganz verschiedene Umstände kann die Lernfähigkeit des Kindes beeinträchtigt sein, obwohl es über gute oder durchschnittliche intellektuelle Voraussetzungen verfügt. Bei einem der uns vorgestellten Mädchen waren die Schulleistungen trotz nahezu überdurchschnittlicher intellektueller Voraussetzungen so schlecht, dass die Lehrer/innen Förderschulbedürftigkeit vermuteten. Familiäre Bedingungen hatten diese Lernbehinderung vom Beginn der Schulzeit an hervorgebracht und aufrechterhalten.

Ein anderes Mädchen war durch den unerwarteten Verlust eines Elternteils, der die Familie überraschend verlassen hatte, tief schockiert worden. Zum Zeitpunkt der testpsychologischen Untersuchung an einer Beratungsstelle lagen ihre Leistungen in einem Untertest zum Rechnen fast drei Standardabweichungen unter dem Mittelwert und ließen das durchschnittlich begabte Mädchen völlig unfähig erscheinen.
Aber auch in weniger spektakulären Fällen ergaben sich Hinweise auf Verstimmungen und Selbstwertprobleme, für deren Erklärung nicht nur schlechte Schulleistungen zur Verfügung standen, sondern auch Hinweise auf andere emotional stark beanspruchende Entwicklungsschwierigkeiten. Solche Bedingungen verbinden sich mit gewissen intellektuellen Schwächen oder geschlechtsspezifischen Markierungen von Gegenständen wie z. B. der Mathematik als Fach, das Mädchen schwerer fällt als Jungen, und treiben die Leistungen nach unten oder verhindern, dass geeignete Kompensationsbemühungen gemacht werden. Umgekehrt zeigen Einzelfälle, dass auch bei testpsychologisch nachgewiesenen kognitiven Schwächen schulische Erfolge möglich sind, wenn die Rahmenbedingungen des Lernens gut sind.

Im Rahmen des Forschungsprojektes und auch dieses Berichtes rück(t)en wir diese Faktoren nicht ins Zentrum unserer Aufmerksamkeit. Im individuellen Fall ist es natürlich wichtig, diese Faktoren zu erfassen, um Eltern und Lehrkräfte angemessen beraten zu können, oder um sie in der Gestaltung der Beziehung in der Förderung zu berücksichtigen.
Eine differenzierte Erfassung des mathematischen Verständnisses ist in jedem Fall notwendig: Wir haben stets Wert darauf gelegt, nicht nur den Eltern, sondern auch dem Kind mitzuteilen, dass es dies schon kann und mit jenem noch Schwierigkeiten hat. Es ist wichtig, zu einer differenzierten und entwicklungsorientierten Einschätzung des eigenen Könnens zu gelangen. Auch wenn emotionale Faktoren das Lernen behindern, muss geklärt werden, wo eine fachliche Hilfestellung ansetzen kann.

1.6 Zur Erfassung von Lernschwierigkeiten in Mathematik

Um die mathematische Kompetenz eines Kindes zu erfassen, beobachtet man, *wie* das Kind mit verschiedenen Aufgabenstellungen umgeht. Die Unterscheidung von richtigen und falschen Lösungen führt nicht weit, da dieselbe richtige oder falsche Lösung aufgrund ganz verschiedener Denkprozesse zustande kommen kann. Diese müssen berücksichtigt werden, weil davon abhängt, welche Hilfe für ein Kind geeignet ist. Ein kleines Beispiel dazu: Als wir Britta fragten, wie sie herausgefunden hat, dass 304 – 10 = 294 ist, konnte sie dazu nur sagen, dass 204 falsch wäre. Bei einer anderen Aufgabenstellung zeigte sich, dass sie eigentlich der Auffassung war, dass 107 + 10 = 207 ist.
Um über die Sammlung von richtigen und falschen Lösungen und verschiedenartigen Vorgehensweisen hinauszugelangen, müssen die einzelnen Daten geordnet und interpretiert werden. Die Wahl der Interpretationsgrundlage ist entscheidend, nicht die Wahl der Aufgabenstellungen, die vielmehr auf derselben Grundlage entwickelt werden müssen.
Unsere Grundlage haben wir in den Abschnitten 1.3 und 1.5 dargelegt. Kurz gefasst: Wir wollten die Schwierigkeiten der Mathematik *aus der Perspektive des Kindes, das mathematische Konzepte aus dem Umgang mit Quantitäten konstruiert,* verstehen. Was es bedeutet, die Schwierigkeit der Mathematik aus Perspektive des konzeptbildenden Kindes zu erfassen, fanden wir bei COBB UND WHEATLEY (1988) beschrieben, die dies eine *konzeptuelle Analyse* nennen.[22] Sie geht davon aus, dass das Verhalten des Kindes – gemessen an seinem Verständnis – stets vernünftig und begründet ist. Dem entwickelten mathematischen Verständnis eines Erwachsenen ist es aber oft unverständlich. Um das kindliche Vorgehen zu verstehen, muss der Erwachsene sein eigenes mathematisches Verständnis beiseite stellen und sich darum bemühen, wie die Dinge aus der Sicht des Kindes wohl aussehen, wenn es so vorgeht, wie es vorgeht. Die konzeptuelle Analyse will die Bedeutung konstruieren, die das Kind einer Aufgabe gibt. Sie ist verschieden von einer logischen Aufgabenanalyse, die das Verständnis des Erwachsenen voraussetzt. Berücksichtigt wird außerdem, dass das in der Entwicklung befindliche Kind sein Wissen überwiegend nicht zum Gegenstand seiner Betrachtung machen kann.

Merkmale eines solchen Vorgehens, das der Forschung und der Diagnostik zugrunde gelegt werden kann, sind also:

- Ziel ist, Vorgehensweisen und Fehlern des Kindes *Sinn* zu geben, nicht nur, sie zu bewerten (richtig/falsch, angemessen/unangemessen u. ä.). Sie sollen aus einem *Modell der Mathematik des Kindes* erklärt werden, das wir anhand unserer Beobachtungen und Gespräche mit dem Kind konstruieren.
- Man geht davon aus, dass vom Standpunkt des erwachsenen mathematischen Denkens das kindliche mathematische Denken nicht leicht verstanden werden kann. Bei der Beobachtung des Kindes befinden wir uns also gewissermaßen in einer ähnlichen Lage wie das lernende Kind, das dem Handeln anderer Personen und dem eigenen Handeln Bedeutung geben will. Wir beobachten und versuchen, daraus zu *konstruieren*, worauf das Kind seine Aufmerksamkeit richtet und welcher Vorstellungen es sich bedient, welche mentale Arbeit es daran vornimmt. Eine wesentliche Quelle der Einsicht in das Denken des Kindes bietet das Gespräch

[22] Abschnitte 3.4 und folgende.

mit ihm über *sein* Vorgehen und *seine* Begründung. Für seine Erläuterungen benötigt das Kind vielleicht Hilfsmittel (Papier und Bleistift, Materialien zur Zahldarstellung o. ä.). Aber auch die Äußerungen des Kindes sind interpretationsbedürftig.

- Das Ergebnis unserer Analyse des kindlichen Denkens ist nicht das, was das Kind denkt, uns aber nicht sagen kann, sondern es ist ein *Modell*, das uns Erwachsenen helfen soll, das Vorgehen des Kindes zu verstehen.
- Zwischen einer mathematisch-logischen Aufgabenanalyse und der *entwicklungspsychologisch-konzeptuellen Analyse* besteht ein Unterschied. Aufgabenstellungen zur Untersuchung von mathematischen Konzepten sind aus entwicklungspsychologischer Sicht oft schlecht begründet. Hierzu zwei Beispiele: Aufgaben zur Überprüfung des Stellenwertverständnisses sind oft mit geringem Verständnis und oberflächlichem Wissen lösbar. Der Konzeption dieser Aufgaben liegt kein entwicklungspsychologisch begründetes Verständnis der Stellenwerte zugrunde, sondern eine Idee von Erwachsenen über Stellenwerte, die ungefähr so zusammengefasst werden kann: „Links stehen die Zehner, rechts die Einer. Zehner sind so was wie Zehnerstangen, die man aus 10 Einerwürfeln zusammensetzen kann." Ganz einfach für uns, bloß dass Kinder, die dieses Wissen angelernt haben, es keineswegs beim Nachdenken über mathematische Probleme anwenden können. Zweites Beispiel: Wird in der Überprüfung der kindlichen Kenntnisse zwischen Aufgaben unterschieden, die eine Zehnerüberschreitung beinhalten, und solchen, die keine beinhalten, ist diese Unterscheidung im Hinblick auf das zählend rechnende Kind bedeutungslos. Über sein Zahl- oder Aufgabenverständnis kann mit dieser Unterscheidung nichts herausgefunden werden.[23]
- Eine konzeptuelle Analyse des *mathematischen* Denkens muss sich auf *mathematikspezifische und entwicklungsbezogene* Konzepte stützen. Übergreifende kognitive Merkmale (Verbalisierungsfähigkeit, visuelle Analyse und Synthese, Problemanalyse, Planung, Steuerung und Kontrolle von Lösungsprozeduren u. a.) können zusätzlich berücksichtigt sein.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich das Ziel, aufgrund der einzelnen Beobachtungen die *individuelle Struktur* des mathematischen Denkens zu konstruieren, die zwischen den kindlichen Verhaltensäußerungen bei der Bearbeitung verschiedener Aufgabenstellungen Zusammenhänge herstellt und bedeutungsvolle Unterschiede festhält. Die Stimmigkeit unseres Modells wird daran gemessen, ob es dem Verhalten des Kindes einen Sinn gibt, der die Hilflosigkeit der Lehrer/innen und anderer zuständiger Personen gegenüber dem Versagen oder Stagnieren des Kindes aufhebt. Die Interpretation (Modellbildung) soll eine wissenschaftliche Grundlage haben. Nahe liegend ist die psychologische Forschung, die versucht, die Entwicklungslogik nachzuvollziehen und die Kompetenz des Kindes aus der Sicht des Kindes zu explizieren.

[23] Welches Verhältnis besteht zwischen einer konzeptuellen Analyse und einer Fehleranalyse? Eine Fehleranalyse will zunächst systematische Fehler in Rechenprozeduren aufdecken. Anschließend können diese Fehler auf unterschiedliche Art interpretiert und didaktisch beantwortet werden. In der Regel wird das kindliche Vorgehen aus der Sicht des Vorgehens von Erwachsenen beurteilt und nicht im Hinblick auf die besonderen Konzepte, die das Kind zu diesem Zeitpunkt gebildet hat. Beim Herangehen aus der Sicht *des Kindes* wird erkundet, in welchem Zahl- und Aufgabenverständnis das Rechenverfahren verankert ist und wie die Schwierigkeit der Aufgabe auf dieser Grundlage beschrieben werden kann.

1.7 Forschungsfragen und -probleme

Der Leser/die Leserin hat sicher bemerkt, dass das Thema „Rechenschwäche“ uns zu grundlegenden Fragen über das Wesen und den Erwerbsprozess des mathematischen Könnens veranlasste. Die Fragen waren spannend, aber überaus umfassend und schwierig.
Die konstruktive Arbeit des Kindes bei der Bildung mathematischer Konzepte und Fertigkeiten ist bestimmt durch seine spezifisch mathematischen Vorkenntnisse, durch seine allgemeinen intellektuellen „Werkzeuge“, durch die Instruktionen, die es erhält, und durch seine Gesamtsituation, soweit sie seine Lernmotivation (für Mathematik) beeinflusst.
Wir haben uns vorwiegend mit den mathematischen Kognitionen des Kindes in seiner frühen schulischen Entwicklung befasst: Wir wollten den erreichten Entwicklungsstand des mathematischen Verständnisses erfassen und in einen Prozess der Entwicklung einordnen. Die Arbeit an dem dafür benötigten Wissen über die Entwicklungsschritte und -wege der eigentlich mathematischen Kognitionen und Fertigkeiten hat uns intensiv beschäftigt und stellt unseren Beitrag zum Thema „Rechenschwäche“ im Rahmen dieses Projektes dar.

Wir möchten einige grundsätzliche Fragen und Probleme der Erforschung von Lernschwierigkeiten in Mathematik zusammentragen und unseren Umgang damit reflektieren.

Das kindliche Wissen und seine Entwicklung

Das anfängliche mathematische Wissen des Kindes ist *implizit*. Das Kind kann seine Konstruktionen (Vorstellungen und ihre mentale Bearbeitung) überwiegend nicht erläuternd darlegen. Erwachsene wissen nicht, wie sie bestimmte Kompetenzen erworben haben. Sie haben ihren eigenen Lernprozess nicht reflektierend begleitet und das erwachsene Wissen und Vorgehen weicht von dem des Kindes ab.

Das anfängliche Wissen des Kindes ist *bereichs- oder aufgabenspezifisch*. Die Verallgemeinerung und Verknüpfung von Kompetenzen untereinander erfolgt erst allmählich. Daraus ergibt sich, dass aus dem Vorgehen des Kindes bei einer spezifischen Aufgabenstellung nicht ohne weiteres allgemeine Schlüsse gezogen werden können. Um beispielsweise das Wissen des Kindes über zweistellige Zahlen zu beurteilen, müssen seine Leistungen bei verschiedenartigen Aufgabenstellungen berücksichtigt werden. Dabei müssen Konvergenzen und Divergenzen Beachtung finden.

Das anfängliche Wissen des Kindes ist *interaktiv kontextgebunden*. Was das Kind unter einer Aufgabe versteht, ergibt sich mehr oder weniger auch daraus, was mit dieser Aufgabe gewöhnlich in der Schule passiert oder wie die Eltern anweisen, mit dieser Aufgabe zu verfahren. Kinder erwerben ihre Kompetenzen in einem interaktiven Zusammenhang, der ihr Handeln anfangs in hohem Maße trägt und im Ablauf bestimmt. Erst allmählich „rekonstruiert“ das Kind sein Handeln und kann es dann selbständig anleiten und gezielt (in Anpassung an Aufgabenstellungen) abwandeln. Was das Kind also mit einer Aufgabe macht, die wir ihm vorlegen, ist nicht allein von seinen Konzepten abhängig, sondern auch von seinen Erfahrungen. Dies setzt hinter jede Interpretation, die nur auf seine Konzepte abhebt, ein Fragezeichen.[24]

Während nachgewiesen ist, dass konzeptuell gestützte Prozeduren sicherer und weniger fehleranfällig sind als Prozeduren ohne konzeptuelle Grundlage, ist die *Beziehung zwischen einem prozeduralen Verständnis einer Aufgabe (auf eine Reihe von Regeln gegründete Vorgehensweisen bei der Lösung von Aufgaben) und dem konzeptuellen Verständnis (Verankerung der Lösungsschritte in einem guten Zahl- und Operationsverständnis) hinsichtlich des Entwicklungsprozesses* noch nicht befriedigend erhellt. Ein Beispiel: Wir beherrschen die schriftliche Division, ohne den Algorithmus spontan begründen zu können. Über die nachträgliche Verknüpfung von eingeübten Fertigkeiten mit konzeptuellem Verständnis ist noch wenig bekannt.[25]

Das mathematische Denken ist anfangs an sinnlich erfahrbare Konfigurationen und konkrete Veränderungen an denselben gebunden, von denen es sich allmählich löst. In bestimmten Stadien der Konzeptbildung können bestimmte Reflexionen über Zahlen nur auf Grundlage von sinnlich erfahrbaren Konfigurationen und Veränderungen (bzw. ihrer Vorstellung) geleistet werden. So kann man beobachten, dass ein Kind die zusammengesetzte Einheit („quantitativen Inhalt“) der Zahl oder ihre Zerlegbarkeit nur dann berücksichtigen kann, wenn die Zahl durch eine Quantität repräsentiert vorliegt. Die Zahl[26] selbst stellt für dieses Kind (noch) nicht eine Zusammenfassung von Einheiten dar. Es muss also unterschieden werden, auf welcher Grundlage (Zahlzeichen, quantitative Zahlrepräsentanten oder Vorstellungen solcher Darstellungen) das Kind Beziehungen zwischen Zahlen herstellen und Schlussfolgerungen vornehmen kann.

Die Aussagekraft des kindlichen Verhaltens bei der Lösung erschöpft sich jedoch nicht in der Feststellung „kann Aufgabe mit Material (nicht) lösen“ oder „kann Aufgabe auf Symbolebene (nicht) lösen“. Erstens ist nicht jede Herbeiführung einer Lösung mit einem Material von gleicher Qualität: Der Umgang mit dem Material kann schon vorhandene Vorstellungen und Strukturen aufzeigen oder auch nicht. Wir können bemerken, ob das Kind im voraus reflektiert und plant. Es macht einen wichtigen Unterschied, ob es im Anschluss an ein Lösungsverfahren das Vorgehen insgesamt reflektiert, d. h. begründet, erklärt, schlussfolgert, oder nicht. Zweitens trifft nicht zu, dass die Lösung mit Material grundsätzlich „leichter“ ist, als die Lösung im Umgang mit den Zahlsymbolen: Die Bitte um die Erklärung einer Rechenprozedur am Material kann mehr Probleme bereiten als das Ausrechnen selbst, z. B. wenn ein Kind sich Vorgehensweisen gut merken kann und Lücken im Zahlverständnis dadurch nicht aufgefallen sind und unbearbeitet blieben.

Es gibt wahrscheinlich *verschiedene Wege*, auf denen ein Kind zu einem guten Zahlkonzept gelangen kann. Individuelle kognitive Stärken und Schwächen, Erfahrungen und Vorlieben spielen dabei eine Rolle. Aber auch die Gestaltung des Unterrichts. Es gibt wenig Wissen über verschiedene Wege zu einem guten Zahlverständnis.

[24] siehe „Beziehung zwischen Instruktion und Konstruktion“.
[25] Vgl. Kapitel 2
[26] gemeint ist hier das geschriebene Zahlzeichen, aber auch das gesprochene Zahlwort.

Gewisse mathematische Begabungen kommen u. U. erst zum Tragen, wenn ein gutes Zahlverständnis entwickelt worden ist. Für ein gutes Zahlverständnis sind vielleicht Werkzeuge nötig, die im späteren Mathematikunterricht nicht mehr so stark gebraucht werden. Über all diese Dinge ist wenig bekannt.

Konzeptuelle Analyse

Wie soll man sich dem impliziten kindlichen Wissen nähern? Wir können das Kind beobachten und befragen. Die so erhaltenen Daten bilden unser „Material“. Dieses Material kann auf verschiedene Weise ausgewertet werden, indem es beispielsweise mit dem Vorgehen eines kompetenten Rechners[27] verglichen oder aber entwicklungspsychologisch eingeordnet wird. Die entwicklungspsychologische Einordnung kann auf verschiedene Weise erfolgen, abhängig davon, wie man sich die Grundlage mathematischen Könnens und seinen Erwerb vorstellt: als allmählich selbstgesteuertes Nachvollziehen von vorgegebenen Prozeduren oder als individuelle Konstruktion von Verbindungen zwischen mathematischen Zeichen[28] und Quantitäten[29] durch Reflexion und Abstraktion. Will man diese individuellen Konstruktionen erfassen, ist man *selbst gezwungen zu konstruieren*, wie das Kind die Aufgabenstellungen sieht, worauf es seine Aufmerksamkeit richtet, welcher Vorstellungen es sich bedient und welche mentale Arbeit es daran vornimmt, welche Verbindungen und Schlussfolgerungen es herstellt.

Man benötigt *Begriffe* für die weitgehend nonverbalen Konzepte, die im Laufe der Entwicklung vom Kind gebildet und verändert werden. Zu Beginn des Projektes verfügten wir nicht über die notwendigen mathematikspezifischen Konzepte, mit denen die Entwicklung des mathematischen Denkens charakterisiert werden kann. Wir setzten uns zur Aufgabe, entsprechende Konzepte zu erarbeiten.

Welche mathematikspezifischen Konzepte geeignet sind, das kindliche mathematische Verständnis im Prozess der Entwicklung zu charakterisieren (Entwicklungsbegriffe), bedarf der Diskussion unter Fachleuten. Voraussetzung für diese Diskussion ist, dass die Konzepte durch Verbindung mit konkreten Verhaltensweisen von Kindern erläutert und definiert werden. Dies gilt umso mehr, als die mathematischen Konzepte im wesentlichen nonverbaler Natur sind.
Dass es dabei zu verschiedenen Vorschlägen kommt, ist unvermeidlich. Sie müssen von den Fachleuten mit zwei Zielen diskutiert werden: (1) Die theoretischen Begriffe und Differenzierungen (zusammen mit den Verhaltensbeobachtungen, die sie illustrieren) sollen die Fein-Schritte der Entwicklung abbilden, die gerade bei schwachen Kindern nicht übersehen werden dürfen. (2) Verschiedenartige Entwicklungswege aufgrund individueller kognitiver Stärken und Schwächen (oder verschiedenartiger Instruktionen) sollten damit beschrieben werden können.
Es ist notwendig, die Diskussion über einen längeren Zeitraum zu führen, da es eine qualitativ-interpretierende Arbeit ist und da die mathematische Leistung des Kindes in einem komplexen Zusammenhang entsteht.

---

[27] oder dem Vorgehen, das im Schulbuch vorgeschlagen wird und eingeübt wurde.
[28] Zahlen, Aufgaben u. a.
[29] eingeschlossen verschiedene Sichtweisen, Anordnungen oder Veränderungen, die an Quantitäten vorgenommen werden.

Die Interpretation der Leistungen eines einzelnen Kindes kann und soll kein Abbild des Denkvorganges sein, sondern ein *Modell, das sich als nützlich erweisen soll*: (1) bei der Erklärung von Übereinstimmungen und Unterschieden in den kindlichen Verhaltensäußerungen bei der Bearbeitung verschiedener Aufgaben und (2) bei der Entwicklung von förderlichen Maßnahmen für das betreffende Kind.

Die *Gültigkeit* der Interpretation wird zum einen daran gemessen, ob diese Ziele erreicht werden. Zum anderen soll sich die Interpretation an der psychologischen Forschung orientieren, die versucht, die Logik der Entwicklung des mathematischen Verständnisses nachzuvollziehen. Die erwähnte Diskussion der Fachleute spielt hier eine wesentliche Rolle.

Die Beziehung zwischen Instruktion und Konstruktion

Die *Wechselwirkung zwischen Instruktion*[30] *und aktiver Konstruktion* des Kindes ist noch nicht gut erforscht. Dies gilt insbesondere auch für besondere Entwicklungswege von Kindern mit besonderen kognitiven Voraussetzungen. Die Instruktion beeinflusst sowohl die Art als auch den Umfang der eigenen konstruktiven Tätigkeit des Kindes. So kann man Phänomene wie das folgende erklären: Kinder, die in die Schule kommen, haben protoquantitatives Teile-Ganzes-Wissen, doch dort entwickeln sie ein Zahl- und Aufgabenverständnis, das sich dieses vorzahligen Konzeptes nicht bedient (IRWIN, 1996a).[31]
Die Entwicklung des Kindes muss in Beziehung zur Instruktion gesetzt und erforscht werden. Das kann nur in einem Vorgehen geschehen, das den Unterricht in Verbindung mit der individuellen Entwicklung der Schüler längerfristig untersucht.

Es ist weder möglich noch erstrebenswert, das Kind in seiner konstruktiven Tätigkeit nicht zu beeinflussen. Es geht darum, Wissen darüber zu erwerben, welche Art der Einflussnahme abhängig vom Entwicklungsstand und von den allgemeinen kognitiven Möglichkeiten des Kindes förderlich ist.

Eine konzeptuelle Analyse, die nicht in Beziehung gesetzt wird oder werden kann zu der Art der Instruktion, die das Kind erhält, blendet eine wichtige Einflussgröße aus.

Mathematische Konstruktionen und intellektuelle Werkzeuge des Kindes

Testpsychologische Untersuchungen geben allgemeine Auskünfte, die bei der Planung von Hilfen für ein Kind u. U. berücksichtigt werden können:
- die Gesamtleistung im Begabungstest;
- Homogenität oder Heterogenität des Profils;
- Hinweise auf Schwächen/Stärken in komplexen Formen der Wahrnehmungsorganisation (insbesondere die visuelle Analyse und Synthese);
- Hinweise auf sprachgebundene Schwächen und Stärken;

[30] Instruktion soll den Unterrichtskontext in und außerhalb der Schule bezeichnen.
[31] Vgl Abschnitt 7.2.4

- Hinweise auf Konzeptbildungsfähigkeiten;[32]
- Hinweise auf Aufmerksamkeitskapazitäten hinsichtlich der verschiedenen Sinne und anderes.

Wir haben im Einzelfall, in Verbindung mit einer guten differenzierten Erfassung des Vorgehens bei mathematischen Problemstellungen, gewagt, Zusammenhänge mit Test-Ergebnissen zu vermuten: Nonverbale Konzepte auf Grundlage visueller Analyse und Synthese bildet A. nur langsam, also wird er längere Zeit auf Grundlage von Zahldarstellungen über Zahlbeziehungen nachdenken müssen, sich nicht so schnell davon lösen können wie andere Kinder. Bei B. bestätigt das Testergebnis die aufgrund der Beobachtungen beim Rechnen gewonnene Vermutung, dass Schwächen überwiegend im sprachlichen Bereich liegen und Fehler beim Rechnen auf Fehler bei der Übersetzung zwischen Zahlwort und geschriebener Zahl zurückgehen.

Die Neuropsychologie gibt jedoch keine Auskunft über Konstruktionsprozesse mathematischer Kognitionen, d. h. konkret: sie sagt nichts über „Voraussetzungsverhältnisse“, mögliche Entwicklungswege, auch nichts darüber, wann welche Aufgabenstellungen für ein bestimmtes Kind förderlich ist.

Wenn die neuropsychologische Ebene für die Analyse der Lernschwierigkeiten (in der Forschung oder im Einzelfall) herangezogen werden soll, sollte eine „vollständige“ neuropsychologische Untersuchung von einer dafür ausgebildeten Person durchgeführt werden, damit Stärken und Schwächen bekannt sind und berücksichtigt werden können.

Die Verbindung zwischen neuropsychologischen Modellen und den psychologischen Modellen der Entwicklung der mathematischen Kognitionen sollte in Zusammenarbeit von Experten/Expertinnen für beide Bereiche diskutiert und erarbeitet werden. Fragen an die Neuropsychologinnen und -psychologen könnten lauten: Welche Plausibilität haben Entwürfe von verschiedenen Entwicklungswegen zu einem tragfähigen Zahlkonzept aus neuropsychologischer Sicht? Wie können Schwächen in den protoquantitativen Urteilen beurteilt werden? Wie beurteilen sie den Zusammenhang zwischen visueller Analyse und Synthese[33] und der Konzeptbildung der Zahl als zusammengesetztes Ganzes und weiteren darauf aufbauenden Zahlkonzepten? Wie kann man sich neuropsychologisch den Zusammenhang zwischen Zahlverarbeitung (Übersetzung zwischen Zahlwörtern und geschriebenen Zahlen) und der Zahlkonzeptbildung denken, insbesondere hinsichtlich der mehrstelligen Zahlen?

---

[32] vgl. Differenzierung von DIETEL (1992, 4)

[33] wie sie beispielsweise im Mosaiktest des HAWIK-R und im Untertest „Dreiecke“ des K-ABC verlangt ist.

1.8 Die folgenden Kapitel

In ***Kapitel 2*** stellen wir dar, was wir unter „mathematischem Verständnis“ verstehen. Dafür ist es zweckmäßig, verschiedene Kategorien des Wissens zu unterscheiden (Abschnitt 2.1): physikalisches, konventionelles und logisch-mathematisches Wissen; konzeptuelles und prozedurales Wissen; verstandenes und bloß assoziativ auswendiggelerntes Wissen; informelles und formelles Wissen. Im anschließenden Abschnitt 2.2 fragen wir, wie Lernen von Mathematik geschieht und antworten im Sinne der konstruktivistischen und interaktionistischen Lerntheorie mit der Forderung nach einem Paradigmenwechsel vom rezeptiven zum aktiv-konstruierenden Lernen, das entgegen manchen traditionellen Vorstellungen gerade für lernschwache Kinder besonders wichtig ist, die eher „belehrungsschwach“ als „lernschwach“ sind.
Im Abschnitt 2.3 fassen wir Konsequenzen für die Gestaltung von Mathematikunterricht zusammen und fordern, das Lernen zu verstehen als aktive Sinnkonstruktion des Individuums, das informelle Wissen der Kinder einzubeziehen, Verständnis vor Fertigkeiten zu entwickeln und prozedurales Wissen an konzeptuelles Wissen zu koppeln.

Kapitel 3 hat drei Schwerpunkte: Zuerst führen wir zur Idee der konzeptuellen Analyse des kindlichen Mathematikverständnisses hin. Unserer Meinung nach wird dadurch eine notwendige Ebene zwischen neuropsychologischen Funktionen einerseits und dem beobachtbaren Vorgehen des Kindes bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgabenstellungen andererseits entfaltet (Abschnitt 3.3). Diese Ebene wurde bisher für die Betrachtung der „Rechenschwäche“ noch kaum ausgearbeitet. In diesem Zusammenhang setzen wir uns damit auseinander, wie die Entwicklungspsychologie der mathematischen Kognitionen in der Literatur über „Rechenschwäche“ behandelt wird (Abschnitt 3.2).
Den zweiten Schwerpunkt bilden Arbeiten zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen, die in der deutschsprachigen Literatur über Rechenschwäche noch wenig Beachtung gefunden haben. Der Schwerpunkt liegt auf der Entwicklung des Zahlverständnisses, das aus unserer Sicht allerdings weitreichend ist. In den ersten Abschnitten (3.4 bis 3.6) geht es um die Entwicklung des ersten Zahlverständnisses: Wir stellen die Arbeit von STEFFE UND COBB zur Entwicklung des Zahlverständnisses aus dem Zählschema vor (Abschnitt 3.4). BRISSIAUD verfolgt einen anderen spontanen Entwicklungsweg eines Kindes, das Anzahlen zuerst durch ein Fingerbild gestisch abbildet und „bezeichnet“ und die zugehörigen Zahlwörter erst später lernt. Davon ausgehend denkt Brissiaud darüber nach, wie das gestische und das verbale System der Repräsentation von Anzahlen in der Entwicklung des Zahlverständnisses miteinander verknüpft sein können und diskutiert die Vor- und Nachteile zweier verschiedener Entwicklungswege (Abschnitt 3.5). Ein weiterer Ansatz, der uns interessant erscheint, behandelt so genannte protoquantitative Schemata als eine Grundlage des mathematischen Verständnisses. Aus der Sicht von RESNICK (u. a.) kann die wichtigste konzeptuelle Leistung der ersten Schuljahre als die Quantifizierung dieser Schemata, d. h. ihre Verbindung mit den Zahlen des mentalen Zahlenstrahls, beschrieben werden (Abschnitt 3.6).
Im dritten Schwerpunkt geht es um das Verständnis der mehrstelligen Zahlen als Kombination aus zwei Arten von Einheiten: der des Zehners und der des Einers, d. h. um das Zahlverständnis, das ein Stellenwertverständnis beinhaltet. Darin wird zunächst verdeutlicht, dass die verbreitete Auffassung davon, was Stellenwertverständnis ausmacht,

oberflächlich ist. Eine umfassendere Analyse der Konzeptbildung hinsichtlich der Stellenwerte schließt sich an (Abschnitte 3.7 bis 3.9).

In ***Kapitel 4*** sind Einzelbeobachtungen von Leistungen der uns vorgestellten Kinder dargestellt und Interpretationsvorschläge angefügt. Die Beispiele stammen aus der Untersuchung von immerhin 24 der im Projekt vorgestellten 34 Kinder. Das Vorgehen des Kindes wird vor allem auf Grundlage der Ausführungen in Kapitel 3 analysiert, es kommen jedoch weitere Gesichtspunkte hinzu, wenn „Zahlverarbeitung" und „Rechnen" betrachtet werden. Die Beobachtungen sind unter folgenden Gesichtspunkten geordnet: Zahlbedeutungen (4.2), Zahlbeziehungen (4.3), Zahlverarbeitung und Zahlwortreihe (4.4) und Rechnen (4.5). Was wir darunter verstehen, ist in Abschnitt 4.1 kurz und in der Einführung zu jedem der folgenden Abschnitte ausführlicher erklärt.
Absicht und Ziel der Darstellungen ist es, auf Besonderheiten des kindlichen Verständnisses von Zahlen und Aufgabenstellungen hinzuweisen. Natürlich berechtigt jedes Einzelbeispiel zu verschiedenen Deutungen. Wir benutzen die Beispiele, um bestimmte Betrachtungsweisen vorzustellen, die uns besonders wichtig erscheinen. Die Bedeutung dieses Kapitels liegt vor allem darin, dass es unsere Betrachtungsweise zusammen mit dem Beobachtungsmaterial konkret abbildet und dem Leser/der Leserin eine kritische Prüfung ermöglicht.

Kapitel 5 befasst sich mit der Erfassung von Lernschwierigkeiten in Mathematik. Wir diskutieren den Nutzen der Definition der „Rechenstörung" nach der ICD-10 (Internationale Klassifikation psychischer Störungen) für unsere Ziele (Abschnitt 5.2). Wir fragen, welche Hilfen die Untersuchung mit einem Intelligenztest für die qualitative Beurteilung der Lernschwierigkeiten in Mathematik und für die Entwicklung von Fördermaßnahmen bietet. Ähnlich befragen wir die Erkenntnismöglichkeiten, die sich aus der neuropsychologischen Diagnostik ergeben.
Drei Ansatzpunkte für die Erfassung besonderer Lernschwierigkeiten in Mathematik werden unterschieden und drei Verfahren werden vorgestellt: 1. „Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen für Kinder" (VON ASTER, 1996) auf Grundlage eines neuropsychologisch und entwicklungspsychologisch begründeten Modells der Zahlenverarbeitung und des Rechnens; 2. „Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten" (KUTZER & PROBST, o. J.) auf Grundlage von entwicklungslogischer Analyse der notwendigen Abfolge mathematischer Einsichten für Schüler/innen; 3. „Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule" (AMT FÜR SCHULE, Hamburg, 1991) auf der Grundlage von Mindestanforderungen hinsichtlich curricularer Inhalte der Arithmetik.
Nach einigen theoretischen Überlegungen hinsichtlich der Diagnostik der mathematischen Kognitionen im frühen Grundschulalter machen wir konkrete Vorschläge für Aufgabenstellungen zur Untersuchung des mathematischen Denkens und Könnens bei Kindern in den Grundschuljahren. Aufgrund unserer Erfahrungen beschränken wir uns inhaltlich auf Konzepte und Prozeduren, die bis zum Ende der zweiten Klasse erworben werden sollten. In der Grobgliederung der Aufgaben orientieren wir uns an den Zahlenräumen: Zahlenraum bis 20 (Abschnitt 5.6) und bis 100 (Abschnitt 5.7).

In ***Kapitel 6*** stellen wir zwei vollständige Untersuchungsberichte vor. Es sollten mindestens fünf Berichte werden, aber aus „räumlichen und zeitlichen“ Gründen konnten wir unseren Erwartungen an uns selbst noch nicht entsprechen.

In ***Kapitel 7 und 8*** folgen methodische Vorschläge zur Erarbeitung des Zahlenraums bis 100 sowie das Addieren und Subtrahieren in diesem Zahlenraum. Sie ergaben sich aus der intensiven Reflexion der Schwierigkeiten, die wir in der Arbeit mit „rechenschwachen“ Kinder seit 1991 beobachteten und die in den Kapiteln 4 und 6 ausführlich dargestellt sind. Die Beobachtungen wurden von uns vielfach diskutiert. Die methodischen Vorschläge wurden von Studierenden, die „Projektkinder“ in Einzelbetreuung meist etwa ein Jahr lang förderten, teilweise erprobt und im Begleitseminar oder in Gruppengesprächen reflektiert.

Unsere Beobachtungen, Analysen und methodischen Konsequenzen für das Erlernen von Verständnis und Fertigkeiten bei der Multiplikation und Division haben wir als **Kapitel 9** im Jahre 2000 dem Bericht angefügt.

2 Was heißt Mathematik verstehen?

> Helping the child to learn these (formal mathematical) procedures means recognizing the methods that children actually use, and helping them both to understand the relationship between what they are doing and what the teacher is presenting, and to appreciate the *value* of making this connection, by helping them to recognize the limitations of their own approaches.
> The expression „helping the children to recognize“ is in obvious contrast with the notion that children can simply be *told.* They can, indeed, be told to do something, but they cannot be told to *understand.* (STEFFE, 1994, 4)

Was meinen wir mit "das Kind kann rechnen" oder "es versteht Mathematik"? Und was meinen wir, wenn wir sagen: Es "kann nicht rechnen", es "versteht Mathematik nicht", es "hat Lernschwierigkeiten in Mathematik" oder gar "es leidet an Rechenschwäche"?
Wenn wir uns mit Lernschwierigkeiten und Lernschwächen befassen wollen, sollten wir das tun auf der Grundlage von Theorien beziehungsweise Modellvorstellungen vom Lernen und Verstehen, die unsere Aktivitäten lenken und uns helfen, unsere Bemühungen mit denen Anderer zu koordinieren. In diesem Kapitel legen wir unsere Auffassungen dazu dar. Wir stützen uns dabei auf Forscher wie Piaget, Bruner, Vygotsky und Weiterentwicklungen ihrer Theorien durch amerikanische Autoren wie Carpenter, Cobb, Fuson, von Glasersfeld, Hiebert, Kamii, Resnick, Steffe und andere, aber auch deutschsprachige wie Bauersfeld, Krauthausen, Krummheuer, Müller, Wittmann, Selter, Voigt und andere. Mit diesen Autoren ist sowohl die konstruktivistische als auch die soziokulturelle Perspektive des Wissenserwerbs berücksichtigt.

2.1 Was ist mathematisches Wissen?

2.1.1 Logisch-mathematisches Wissen

Abhängig vom Ursprung des Wissens unterschied Piaget drei Arten des Wissens: physikalisches, konventionelles und logisch-mathematisches Wissen.

Physikalisches Wissen

Diese Art von Wissen gewinnen wir durch Verarbeitung von Sinneswahrnehmungen an und mit Objekten der körperlichen Umwelt. So erwerben wir Farbkategorien wie "rot" oder "blau" und gewinnen durch empirische Abstraktion Denkschablonen wie "Schuh" oder "Tisch". Solche abstrakten Schablonen dienen dazu, spätere sensorische oder motorische Erfahrungen als ähnlich oder gleichwertig zu früheren zu erkennen. Diese Schablonen können zu *Konzepten* (Begriffen) werden und als internalisierte Dinge oder internalisierte Handlungen mental repräsentiert (vorgestellt) werden, auch ohne Anwesenheit des entsprechenden sensorischen Materials. Dies führt zu "Visualisierung" in allen sensorischen Modalitäten (STEFFE & COBB, 1988, 333, 337). Um es einfacher zu sagen: Wir alle haben in unserem Geist irgendwie das Konzept "Schuh" repräsentiert. Dieses Konzept haben wir im Laufe der Zeit aus unseren Erfahrungen mit Hunderten oder Tausenden konkreter Schuhe konstruiert durch Abstrahieren der wesentlichen Wesenszüge aller dieser konkreten Schuhe. Konzepte von Gegenständen, Farbe, Tönen, Gerüchen sind Beispiele für physikalisches Wissen.

Konventionelles Wissen

Diese Art von Wissen hat ihren Ursprung in sozialen Vereinbarungen, die von Menschen festgelegt und weitergegeben werden. Beispiele dafür sind *Bezeichnungen* für Farben wie "rot" oder "blau", dass ein Schuh als "Schuh" bezeichnet wird und dass die Zahlen 1, 2, 3 eben "eins", "zwei", "drei" genannt werden. Die Bezeichnung "2 + 3" für die Summe der Zahlen 2 und 3 und das Wissen, dass am 25. Dezember Weihnachten ist, sind weitere Beispiele für konventionelles Wissen. Auch die Schreibweise "25" für die Zahl fünfundzwanzig ist konventionelles Wissen. Man hätte auch vereinbaren können, dass "25" statt dessen "$2 \cdot 5$", also 10 bedeutet. Dies würde gut passen zu Vereinbarungen wie $2a = a + a$ oder $3\,½ = 3 + ½$, die bei Schülern häufig zu Fehlern führen.

Logisch-mathematisches Wissen

Diese dritte Art des Wissens resultiert nicht aus empirischer Abstraktion von wahrgenommenen Objekten und auch nicht aus sozialer Vereinbarung, sondern wurzelt in *geistiger Aktivität*, welche *Beziehungen herstellt* zwischen Objekten oder Tätigkeiten. Beispielsweise können wir sehen, dass vor uns rote und blaue Zählchips liegen. Wenn wir *denken*, der rote und der blaue Chip sind *verschieden*, dann haben wir in unserem Geist eine Beziehung hergestellt zwischen den roten und den blauen Chips, die weder in den roten noch in den blauen Chips vorhanden ist. Würden wir die Oberflächeninhalte, die Rauminhalte oder das Gewicht der Chips vergleichen, so wären sie unter diesen Aspekten *gleich*. Wir sehen daran: *Beziehungen* existieren nicht im konkreten Material, wir können sie nicht sehen, anfassen oder riechen, also nicht mit den Sinnen wahrnehmen.

Obige Unterscheidung der drei Arten von Wissen ist wichtig, wenn wir uns klar darüber werden wollen, was ein Schüler über eine Sache weiß oder wissen sollte. Betrachten wir als Beispiel die bekannten Zehnersystem-Blöcke (ein Würfel mit Kantenlänge 1 cm für "Eins", eine Stange für "Zehn", eine Platte für "Hundert", Abb. 2.1).
Ein Kind kann *physikalisches Wissen* über diese Objekte besitzen: Sie sind aus Holz, naturfarben, gekerbt, usw. Solches Wissen kann das Kind erwerben durch Beobachten der Objekte. Das Kind kann über dieselben Objekte auch *konventionelles Wissen* erwerben: dies ist ein "Einerwürfel", dies heißt "Zehnerstange" und dies "Hunderterplatte". Solches Wissen wird ihm von anderen Menschen mitgeteilt.

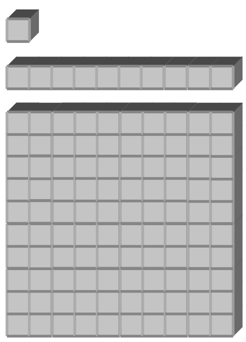


Abb. 2.1: Zehnersystem-Blöcke

Wir als Erwachsene mit bereits entwickeltem *logisch-mathematischen Wissen* verfallen leicht der Annahme, dass ein Kind mathematische Beziehungen aus geeignet strukturiertem Material und dem Umgang damit abstrahieren *müsse* – wenn seine Wahrnehmung nicht gestört ist, seine Aufmerksamkeit darauf gerichtet ist und es auf die wichtigen Merkmale hingewiesen wird. Mathematische *Beziehungen* sind aber nicht wahrnehmbar. Sie bleiben unsichtbar, sie existieren auch gar nicht im sensorischen Material. Wir Erwachsene sehen die Beziehungen im Material, weil wir sie bereits vorher mental konstruiert haben. Auf das strukturierte Material, den Umgang damit, die Aufmerksamkeit, die Wahrnehmung, das Sprechen über usw. kommt es durchaus an. Aber wir müssen davon ausgehen, dass das Kind erst ganz allmählich "sehen" lernt, was uns unübersehbar erscheint. Vereinfacht ausgedrückt heißt das: Man sieht nur, was man weiß.
Dass zehn aneinandergelegte Einerwürfel gleichlang sind wie eine Zehnerstange, kann nur das Kind "sehen", welches das Konzept "*gleichlang*" schon zuvor konstruiert hat. Dies zu "sehen", ist aber noch nicht dasselbe wie das Konzept "eine Zehnerstange ist *zehnmal so lang wie* ein Einerwürfel" oder "eine Zehnerstange *ist das Gleiche wie* 10 Einerwürfel". Die Aussage "ein Zehner *ist das Gleiche wie* 10 Einer" ist demgegenüber noch weit abstrakter. Beziehungen wie "*das Zehnfache*" oder "*zehnmal so lang*" sind logische Konstrukte, Ideen, Begriffe, mathematische Konzepte. Ihr Ursprung liegt in der eigenen Verstandestätigkeit, beeinflusst durch Unterricht und Klassensituation. Konkretes Material kann dem Kind helfen, Beziehungen herzustellen, zu konstruieren, weil es etwas wahrnehmen kann, worüber es reflektieren und sprechen kann und wobei das konkrete Material die Verständigung erleichtert.

Für Lehrkräfte ist es wichtig, sich darüber im Klaren zu sein, dass die Objekte der Abbildung 2.1 zu sehen nicht bedeutet, die *Beziehungen* zu sehen. Das Kind kann auf die Materialien, die Würfel, die Stangen, die Platten blicken und damit hantieren, ohne die Beziehung "die Zehnerstange *ist das Zehnfache* des Einerwürfels" oder "eine Zehnerstange *ist gleichviel wie* zehn Einerwürfel" oder noch abstrakter " ein Zehner *ist dasselbe wie* 10 Einer" zu konstruieren. Konkretes Material und konventionelle Namen für Objekte können von außen an das Kind herangetragen werden. Letztlich aber muss es selber die Beziehung zwischen den Objekten durch eigene Verstandesaktivität herstellen. Dies kann durch Gespräche mit Mitschülern oder Lehrkräften zwar angeregt und erleichtert werden, ein passives Kind wird aber nur Gegenstände sehen, jedoch keine Beziehungen erfassen.

2.1.2 Konzeptuelles und prozedurales Wissen

Die Beziehung zwischen konzeptuellem und prozeduralem Wissen ist der Schlüssel zum Verständnis vieler Lernprozesse und Lernschwierigkeiten von Kindern (HIEBERT, 1986, 2, 22).

Konzeptuelles Wissen

Konzeptuelles Wissen ist Wissen, das reich an Beziehungen ist. Es kann gedacht werden als ein zusammenhängendes Netz von Wissensbestandteilen, in welchem *Beziehungen zwischen* den Einzelfakten ebenso wichtig sind wie die Einzelfakten selbst. Ein Kind erwirbt konzeptuelles Wissen, indem es eine neue Information (z. B. 6 + 7 = 13) mit bereits bekannter Information (z. B. 6 + 6 = 12) in Verbindung bringt oder wenn es eine Verbindung herstellt zwischen zwei verschiedenen Informationen, die zuvor als getrennte Einzelfakten gelernt worden waren (z. B. 7 + 7 = 14 ist um 2 größer als 6 + 6=12). Wenn ursprünglich voneinander unabhängige Netzwerke von Wissen (z. B. der Algorithmus zur schriftlichen Subtraktion und das Wissen über den Stellenwert von Ziffern) miteinander in Verbindung gebracht werden, kann dies eine dramatische kognitive Neuorganisation bewirken. Es entsteht plötzlich Einsicht, Verständnis. Wenn ein Kind nur die Bezeichnungen der Stellenwerte des Zehnersystems (Einer, Zehner, Hunderter) als isolierte Einzelfakten lernt, ist das noch kein konzeptuelles Wissen. Wird dieses Wissen aber an bereits bekanntes Wissen angekoppelt, beispielsweise das Zählen in Zehnerschritten und an Zehnerbündelungen mit konkretem Material, dann wird dieses Wissen konzeptuell. Das Netzwerk des Stellenwertkonzeptes wächst weiter, wenn Beziehungen hergestellt werden zum Bündeln und Entbündeln beim Addieren und Subtrahieren mehrstelliger Zahlen.

Ein entwickeltes *Konzept der Zahl Sieben* umfasst vielfältige Beziehungen, z. B.:

- Sieben ist das letzte Zählwort in der Zählreihe von 1 bis 7 und zugleich die Anzahl der Zählwörter von eins bis sieben
- Sieben ist die Anzahl der gestreckten Finger in Abb. 2.2
- Sieben ist die Anzahl der Zählplättchen in Abb. 2.3
- Sieben ist die Anzahl der Wochentage in Abb. 2.4
- Sieben ist die Anzahl der Punkte auf dem Zehnerfeld (Abb. 2.5).

Abb. 2.2: 7 Finger, 7 Blätter

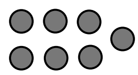


Abb. 2.3: Punktebild der 7

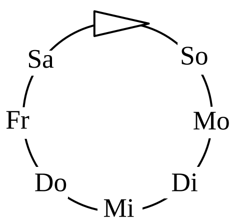


Abb. 2.4: Zyklus der Wochentage

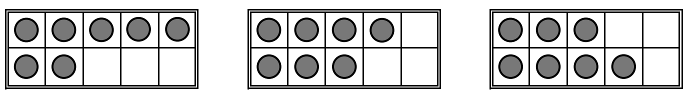


Abb. 2.5: Punktebilder der 7 auf dem Zehnerfeld

Vor allem Abb. 2.5 macht deutlich, dass das Konzept der Zahl Sieben vielfältige *Beziehungen* enthält:

- 7 ist *eins mehr* als 6, 7 ist *eins weniger* als 8
- 7 ist *zwei mehr* als 5, 7 ist *drei weniger* als 10
- 7 *ist das Gleiche wie* vier plus drei,
- 7 *ist eins mehr als das Doppelte von* 3.

Diese Beziehungen lassen sich in knappen Symbolen schreiben:
7 = 6 + 1; 7= 5 + 2; 7 = 10 – 3; 7 + 3 = 10; 7 = 4 + 3; 7 = 3 + 3 + 1.

Verständnis des Zahlbegriffs (des Konzepts) der *Sieben* entwickelt sich dadurch, dass nach und nach die Vielfalt der obigen Beziehungen hergestellt wird, und zwar

- zu konkreten Handlungen (zu 6 Plättchen noch eines dazulegen),
- zu Situationen der realen Welt (7 Finger, 7 Blätter, 7 Wochentage),
- zu didaktischen Modellen (7 Plättchen auf dem Zehnerfeld),
- zu bildlichen Vorstellungen (7 Punkte auf dem Zehnerfeld),
- zur Zahlwortreihe (das siebte Zahlwort, die Menge der Zahlwörter von 1 bis 7),
- zu geschriebenen Symbolen wie Ziffern, Summen und Differenzen.

Man mache sich bewusst: Das geschriebene Symbol "7" sollte *alle* diese *Bedeutungen* re-präsentieren. Auch für das Kind sollte das Symbol "7" transparent sein für die obigen (und andere) Darstellungen der *Quantität sieben*, sowie weitere Bedeutungen (Zahl-Aspekte).

Prozedurales Wissen

Prozedurales Wissen besteht aus der Kenntnis von geschriebenen Symbolen wie „7", „¾", „7,3", „ + ", „ – ", „ · " und „ : " sowie der Regeln, wie diese Symbole (Zeichen) zu handhaben sind. Es ist also beschränkt auf das Wissen, *wie* sich geschriebene Symbole als Teil eines syntaktischen Systems verhalten. Das Wissen, *was* die Symbole bedeuten (re-präsentieren), gehört nach dieser Definition nicht zum prozeduralen Wissen. Prozedurales Wissen ist die *Syntax* (Grammatik) der Mathematik, konzeptuelles Wissen ist die *Semantik* (Sinngehalt) der Mathematik (HIEBERT, 1986, 201). Wichtiger Bestandteil prozeduralen Wissens sind Schritt-für-Schritt-Vorschriften (*Prozeduren*), die von einer Aufgabe zur Lösung führen. Typische Beispiele für Prozeduren sind die vier schriftlichen Rechenverfahren, das formale Rechnen mit Brüchen und Dezimalbrüchen, Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche, Lösen von algebraischen Gleichungen.

Eine zweite Sorte von prozeduralem Wissen operiert mit konkretem Material, bildhaften Darstellungen, Vorstellungsbildern, also mit Dingen, die nicht Standardsymbole der Mathematik sind. Beispiele dafür sind das mündliche Zählen von Vorschulkindern, Zählstrategien bei mündlich gestellten Additions- und Subtraktionsaufgaben, aber auch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal bei älteren Schulkindern. Beispielsweise kann ein Kind die Summe 7 + 6 rein mechanisch ermitteln, indem es mittels einer Abzähl-Prozedur 7 Zählplättchen auf den Tisch legt, dann ebenso 6 Plättchen dazulegt und schließlich alle Plättchen abzählt und so die Zahl 13 bestimmt. Hierbei liegt das Konzept des „Alles-Zählens" zugrunde, doch das Vorgehen ist weitgehend prozedural.

Im traditionellen Mathematikunterricht überwiegt häufig prozedurales Wissen, also das Wissen, wie man geschriebene Symbole sinnvoll zusammensetzen kann und nach welchen Regeln man die Symbole manipulieren muss, um von der Aufgabe zur Lösung zu gelangen. So kann bei Schülern der Eindruck entstehen, Mathematik bestünde nur aus den Symbolen und Prozeduren, die im Mathematikunterricht explizit gelehrt werden (RESNICK et al., 1991, 56). Näheres dazu folgt im Abschnitt 2.2.3 und 2.3.4.

2.1.3 Verstandenes und assoziativ auswendiggelerntes Wissen

> Unfortunately, as children become socialized by school and society, they begin to view mathematics as a rigid system of externally dictated rules governed by standards of accuracy, speed, and memory. Their view of mathematics shifts gradually from enthusiasm to apprehension, from confidence to fear. (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, 1989, 44)

Viele Kinder scheinen das Rechnen zu lernen als eine Welt für sich, in der es schwer fällt, den Sinn neuer Prozeduren zu erkennen. So nehmen sie Zuflucht zum Auswendiglernen von Fakten, Regeln und Tricks für das Lösen von Aufgaben – ohne Basis in der eigenen Alltagserfahrung und ohne Nutzen für reale Probleme. Es scheint als hätte sich bei ihnen die Vorstellung eingenistet, eine feste Methode oder Formel könnte als Ersatz für Denken benutzt werden (vgl. BENEZET, 1988, 363). Instrumentelle Rechenfertigkeiten sind Fertigkeiten, Regeln auch ohne Einsicht anzuwenden (SKEMP, 1978).
Ein Individuum hat ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur "verstanden", wenn es einige Verbindungen hergestellt hat zu bereits in *seinem* Geist existierenden Ideen (HIEBERT & CARPENTER, 1992, 67; VAN DE WALLE, 1994, 23). "Verstehen" bedeutet also das Herstellen von *Beziehungen*. Der Grad des Verständnisses wird bestimmt durch die Anzahl und die Stärke der Verbindungen in einem Netzwerk von Informationsbestandteilen. Ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur ist um so besser *verstanden*, je zahlreicher und stärker die Verbindungen sind zu bereits *im Individuum* etablierten Netzwerken. Verständnis ist demnach kein Alles-oder-Nichts-Phänomen.

Prozedurales Wissen kann mit einem Minimum an Verbindungen "*auswendiggelernt*" werden. Zur Durchführung einer Prozedur genügt es zu wissen, welche Schritte nacheinander auszuführen sind. Dies ist möglich auch ohne Begründung dafür, welchen Sinn die einzelnen, aufeinanderfolgenden Schritte haben und ohne sie zu verstehen, d. h. ohne Beziehungen herzustellen zu den zugrundeliegenden Konzepten. Beispielsweise kann ein Schüler auswendiglernen, dass durch einen Bruch dividiert wird, indem man mit dem Kehrwert dieses Bruches multipliziert. Dabei muss er nicht unbedingt wissen, was beispielsweise ¾ : ½ bedeutet. Er stellt dann keine Verbindung her zwischen diesen geschriebenen Symbolen und der konkreten Frage, wie oft ½ in ¾ enthalten ist oder noch konkreter, wie viele ½ l-Gefäße man mit ¾ l Milch füllen könnte oder wie viele halbe Pizzen man aus einer dreiviertel Pizza herstellen könnte. Wenn man jedoch die Verbindung herstellt zwischen der Division ¾ l : ½ l und der Subtraktion (wie oft kann man ½ l von ¾ l wegnehmen?), so erkennt man sofort das Ergebnis 1 ½. Verdoppelt man im Quotienten beide Zahlen, erhält man 6/4 : 2/2, also 6/4, also wiederum 1 ½.
Erfahrungen wie das Abfüllen von ¾ l Flüssigkeit in ½ l-Flaschen haben Schüler des 6. Schuljahres häufig bereits gemacht, bevor die Bruchrechnung im Unterricht behandelt wird. Die formale Behandlung der Division von Brüchen sollte unbedingt an solchen außerschulischen Erfahrungen anknüpfen, damit die formalen Prozeduren mit Symbolen "*verstanden*" werden können. Verständnis wächst mit den Verbindungen

- zwischen bereits vertrauten Ideen und neuen,
- zwischen verschiedenen Arten der Darstellung der Idee (mit konkretem Material, bildhaft, mit Sprache oder Symbolen),
- zwischen Prozeduren und zugrundeliegenden Konzepten (WEARNE & HIEBERT, 1992b).

Ein mathematisches Konzept wie eine Zahl (z. B. 7 oder ¾) oder eine Funktion (beispielsweise y = x + 1) *verstehen lernen* heißt, ein reichhaltiges Geflecht von Beziehungen herzustellen zwischen verschiedenen Darstellungen, Vorstellungen und Anwendungssituationen, wie es im vorigen Abschnitt für die Zahl 7 gezeigt wurde.
Ein mathematisches Konzept *verstanden* zu haben heißt, im Langzeitgedächtnis ein reichhaltiges Netz von Fakten und Beziehungen gespeichert zu haben, die bei Bedarf abgerufen und in einem geeigneten Medium (enaktiv, ikonisch oder symbolisch) dargestellt werden können. Eine mathematische Idee ist "*abstrakt verstanden*", wenn eine genügend reichhaltige mentale Struktur konstruiert worden ist, die dazu befähigt, auf der Grundlage von relativ wenigen herausragenden Wesenszügen (salient features) mit der Idee umzugehen (KAPUT, 1991).

2.1.4 Informelles und formelles Wissen

> Think of informal mathematics as analogous to the child's spontaneous speech. Just as everyone learns to talk, and spoken language is the foundation for reading, so everyone develops an informal mathematics that should be the foundation for the written mathematics learned in school. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 3)

In zahlreichen empirischen Studien (z. B. HIEBERT, 1986; MACK, 1990; RESNICK, 1992) wurde der Zusammenhang untersucht zwischen *informellem Wissen* von Schülern (Wissen, das Schüler vor oder außerhalb der Schule in Alltagssituationen selbständig erworben haben) und *formellem Wissen* (in der Schule erworben, zumeist Wissen über geschriebene Symbole und Prozeduren). In der englischsprachigen Literatur wird in diesem Zusammenhang auch von "street mathematics" und "school mathematics" gesprochen (HIEBERT & CARPENTER, 1992, 79; NUNES et al., 1993; SPIEGEL, 1993; BRÜGELMANN, 1994). Dabei zeigte sich, dass Schüler häufig reiches informelles Wissen besitzen, dieses aber nicht in geschriebenen Symbolen ausdrücken können und auch nicht mit dem in der Schule gelehrten prozeduralen Wissen in Verbindung bringen. Beide Arten des Wissens bleiben kontextgebunden und voneinander isoliert.

Auch dafür ein Beispiel (MACK, 1990, 21). Schüler wurden in Einzelsitzungen gefragt: "Angenommen, du hast zwei Pizzen von derselben Größe und du zerschneidest eine davon in 6 gleich große Stücke und die andere in 8 gleich große Stücke. Wenn du jetzt von jeder Pizza ein Stück erhältst, von welcher bekommst du mehr?" Alle Schüler antworteten: "Von der Pizza, die in 6 Stücke zerschnitten wurde". Alle Schüler wurden außerdem gefragt: "Welcher Bruch ist größer: 1/6 oder 1/8?" Alle Schüler, denen letztere Frage zuerst gestellt wurde, antworteten: "1/8 ist größer. 8 ist größer als 6". Aber auch 4 von 5 Schülern, denen die letzte Frage erst nach der alltagsbezogenen Frage gestellt wurde, antworteten auf die Frage nach formellem Wissen falsch. Man sieht daraus, dass formelles Wissen, das nicht an praktisches Wissen der Schüler gekoppelt ist, sehr fehleranfällig ist.

Häufig beobachten Lehrer Schülerlösungen der Art 3/4 + 1/4 = 4/8 = 1/2. Schüler verwenden dabei die Prozedur "Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner", eine Regel, die beim Multiplizieren von Brüchen passt. Würden sie eine Verbindung herstellen beispielsweise zu der bildhaften Vorstellung von einer dreiviertel Pizza und einer viertel Pizza, dann würden sie unmittelbar erkennen, dass obiges Ergebnis nicht stimmen kann. Wichtig in diesem Zusammenhang ist die typische Beobachtung, dass Schüler den fehlerhaften Symbolmanipulationen meist mehr trauen als ihrem eigenen, auf Erfahrung beruhenden, informellen Wissen! Dies zeigt, welchen Eindruck von "Mathematik" die Schüler erworben haben.

Mehrere Forscher (WEARNE, 1988; MACK, 1990, 30; RESNICK et al., 1989) stellten fest, dass die Kenntnis auswendiggelernter Prozeduren verhindern kann, dass die Schüler erfolgreich an bereits etabliertes Wissen anknüpfen. Die Kenntnis von Symbolmanipulationen (Prozeduren) hält Schüler davon ab, ihr informelles Wissen heranzuziehen selbst dann, wenn Aufgaben im Alltagskontext gestellt werden.

Der Unterschied zwischen informellem und formellem Wissen zeigt sich deutlich an folgendem Beispiel. Ein Kunde kauft einen Anzug für 694 DM und bezahlt mit einem 1000 DM-Schein. Der Verkäufer hat kein Problem mit dem Rausgeld. Ganz selbstverständlich legt er zum Anzug noch 6 DM (und sagt "siebenhundert") und noch 3 Hundertmarkscheine und sagt "tausend". Ganz anders ist das schriftlich gestellte Problem

$$\begin{array}{r} 1000 \\ -\ \underline{694} \end{array}$$

Hier beträgt die Fehlerquote (gemessen vom 4. bis zum 8. Schuljahr) über 50 % (GERSTER, 1982). Es sieht so aus, als würden die Schwierigkeiten häufig erst dann beginnen, wenn wir "Mathematik" denken als "auf Papier geschriebene Symbole" (Baroody & Ginsburg, Carpenter und Davis, alle in HIEBERT, 1986).

2.2 Wie geschieht das Lernen von Mathematik?

2.2.1 Zur Sichtweise des Konstruktivismus und des Interaktionismus

> Mathematics cannot simply be written on the child's blank slate of mind. Mathematics is not liquid to be poured into an empty vessel: for one thing, the vessel is not empty, and for another, the liquid in it changes the composition of what is poured in. Instead, the teacher needs to foster understanding – to help the child make meaningful connections between existing informal knowledge and the socially structured system of formal mathematics. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 4)

Die *konstruktivistische Sichtweise* (vertreten beispielsweise von Piaget, von Glasersfeld, Steffe, Cobb) betont die individuell-psychologische Perspektive des Lernprozesses. In dieser Sicht ist Lernen stets ein individueller Prozess der Selbstorganisation, in welchem der Lernende seine Aktivitäten organisiert, um *seine* individuellen Konzepte und die erfahrbare "Wirklichkeit" zu einem Gleichgewicht zu bringen (Äquilibration). Dies geschieht entweder dadurch, dass er die erfahrbare Wirklichkeit so interpretiert, dass sie zu *seiner* kognitiven Struktur *passt* (Assimilation) oder umgekehrt *seine* kognitive Struktur so verändert, dass sie besser zur erfahrbaren Wirklichkeit *passt* (Akkommodation).

Die *soziokulturelle Sichtweise* (vertreten beispielsweise durch Vygotski, Bauersfeld, Krummheuer, Voigt) betont dagegen soziokulturelle Aspekte des Lernens, wobei besonders die Interaktion zwischen Schülern und Lehrerin, mit kulturellen Medien wie Lernmaterialien, Lehrbüchern, Sprache usw. beachtet wird. In dieser Sichtweise werden die mathematischen Objekte des Unterrichtsgespräches als mehrdeutig angenommen, offen für verschiedene Interpretationen der Beteiligten. Lehrerin und Schüler gewinnen durch *Aushandlung* (negotiation) der mathematischen Bedeutung mathematischer Gegenstände ein "als geteilt geltendes" (taken-as-shared) Verständnis des Gegenstandes (VOIGT, 1994, 78, 83). Das Lernen von Mathematik wird dabei auch als ein Sozialisationsprozeß gesehen.

Man könnte die konstruktivistische und die soziokulturelle Sichtweise des Erkenntnisgewinns als Gegensätze ansehen. Die Vertreter beider Richtungen befürworten jedoch die Koppelung beider Sichtweisen und fordern, dass einerseits die individuellen Interpretationen mathematischer Inhalte durch einzelne Schüler ernstgenommen werden, andererseits aber auch gesehen wird, dass die Aktivitäten der Schüler notwendig sozial eingebettet sind (CONFREY, 1994, 1995). Der Prozess des Aushandelns von Bedeutungen (Sinn) vermittelt dabei zwischen (subjektivem) Erkennen und der kulturellen Umgebung. Weder die individuell-geistige Aktivität des einzelnen Schülers noch die Mikrokultur im Klassenzimmer kann angemessen betrachtet werden ohne das jeweils andere, beides ist miteinander verwoben. Die individuelle Konzeptbildung eines Schülers ist verflochten mit den sozial organisierten Aktivitäten, an denen er teilnimmt (COBB & BAUERSFELD, 1995, 8).
So ist beispielsweise bei der Zahlbegriffsentwicklung die soziale Interaktion von der individuell-kognitiven Zahlbegriffsentwicklung einzelner Schüler abhängig und umgekehrt. Die *Interaktionsanalyse* versteht den Zahlbegriff als einen intersubjektiven Begriff, der sich zwischen Personen entwickelt (VOIGT, 1994, 95). Selbst einer der maßgeblichen Begründer des radikalen Konstruktivismus, Ernst von Glasersfeld, verweist auf die zentrale Rolle der sozialen Interaktion, indem er feststellt: er kenne keine einfachere und einleuchtendere Formulierung der konstruktivistischen Sichtweise als das folgende Zitat von Bauersfeld, in der dieser die Rolle des Aushandelns beim Wissenserwerb erklärt (VON GLASERSFELD, 1995, 191):

> Altogether, the subjective structures of knowledge, therefore, are subjective constructions functioning as viable models, which have been formed through adaptations to the resistance of "the world" and through negotiations in social interactions. (BAUERSFELD, 1988, 39)

Die subjektiven Wissensstrukturen sind demnach subjektive Konstruktionen, die als brauchbare Modelle für mathematische Konzepte und Prozeduren dienen, geformt durch Anpassung an die Widerstände der äußeren Welt *und* durch Bedeutungsaushandlungen in sozialen Interaktionen.

2.2.2 Paradigmenwechsel vom rezeptiven zum aktiven Lernen

> We have seen that mathematical cognition begins with the informal and the intuitive and that formal mathematics must be constructed, not taught. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 17)

Die im vorigen Abschnitt zitierte Sichtweise des Konstruktivismus und des Interaktionismus betrifft nicht nur den Mathematikunterricht, sondern ist vielmehr ein interdisziplinäres Paradigma, das den Wechsel von der belehrten zur lernenden Gesellschaft fordert. Lernen wird dabei nicht als passive Rezeption, sondern als aktive Sinnkonstruktion des Individuums verstanden.

> "Wir Lehrer – wahrscheinlich alle Menschen – werden von einer erstaunlichen Täuschung genarrt. Wir glauben, wir könnten ein Bild, eine Struktur oder ein funktionstüchtiges Modell einer Sache, die wir in unserem Geiste aufgrund langer Erfahrung und Vertrautheit zusammengesetzt haben, in den Geist einer anderen Person übertragen, indem wir es in ein langes Band aneinandergereihter Worte verwandeln. [...]. In den meisten Fällen erhöhen Erklärungen das Verständnis nicht und vermögen es eher herabzusetzen". (HOLT, 1979, 167)

Erwerb von Wissen ist in konstruktivistischer Sicht eine aktive Aufbauleistung, die der Lernende in der Interaktion mit der physischen und soziokulturellen Umwelt selbst zu erbringen hat. Lernen ist somit nicht die Ansammlung isolierter Einzelfakten, sondern das aktive Herstellen von Verbindungen zwischen neuen Wissenselementen und bereits Gelerntem. Lernen ist immer nur ein Weiterlernen, ein Fortweben von schon Bestehendem, das Einfügen neuer Maschen in das Netz des Langzeitgedächtnisses (WINTER, 1984, 6).

In konstruktivistisch-interaktionistischer Sicht geschieht Lernen am besten in komplexen Problemsituationen, die für das Kind bedeutsam sind, etwa so, wie das Kind das Gehen oder Radfahren oder Sprechen lernt. In diesen natürlichen Lernsituationen wird das Lernen einer komplexen Fähigkeit nicht in Einzelkomponenten zerlegt, die nacheinander gelernt werden. Es wird allerdings auch nicht erwartet, dass das Kind dabei keine Fehler macht und gleich alle Finessen beherrscht. Entscheidend für den Lernprozess ist die Bedeutung, die das Kind *selbst* der Situation zuordnen kann, seine aktive Sinnkonstruktion.

> Students need to experience genuine problems regularly. A genuine problem is a situation in which, for the individual or group concerned, one or more appropriate solutions have yet to be developed. The situation should be complex enough to offer challenge but not so complex as to be insoluble. (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, 1989, 10)

Wir sollten die Tendenz des Kindes zum aktiven Erforschen und Erkunden auch im Unterricht nutzen und Unterrichtsmethoden entwickeln, die Kindern Möglichkeiten zu eigenen Erfahrungen und Erfindungen bieten. Wir sollten dabei frühe, entwicklungsbedingte und unvollständige Konstruktionen der Kinder begreifen als ausbaufähige, das Lernen erleichternde Vorformen (Brügelmann, 1994). Schwierige Sachverhalte können auch in unteren Klassenstufen entwicklungsfördernd bearbeitet werden, wenn erst nach und nach qualitative durch quantitative, konkrete durch abstraktere, spezielle durch allgemeinere Überlegungen ersetzt werden – immer dem aktiven Leistungsvermögen der Kinder entsprechend.
Jeder Mensch, der sich in einem neuen Gebiet um Erkenntnis bemüht, macht Fehler und nutzt diese im Lernprozess. Fehler sind notwendige Begleiterscheinungen im Lernprozess. Der Irrweg muss beschritten werden, um sich als Irrweg zu erweisen (WATZLAWICK, 1997, 314). Wir sollten Fehlermachen auch den Schülern zugestehen

und dies nicht mit schlechten Noten bestrafen. Ute Andresen warnt geradezu vor Methoden, die allen Fehlern vorbeugen und plädiert für Lehrmethoden, die ausschließen, dass das Kind etwas richtig macht, was es gar nicht verstanden hat (ANDRESEN, 1985, 215).
Der Paradigmenwechsel vom rezeptiven zum aktiv-konstruierenden Lernen bedeutet für den Schüler die Verlagerung vom Empfangen auf das Erarbeiten. Für den Lehrer bedeutet er Verlagerung vom Darbieten und Entwickeln des Stoffs zur Veranlassung der Gelegenheit und Anregung der Schüler zu eigener Aktivität (Wittmann in MÜLLER & WITTMANN, 1995, 11).

2.2.3 Wie lernen leistungsschwache Kinder Mathematik?

> Debunking some myths:
> *Some children cannot learn math.* No doubt some individuals do not have the talent to pursue higher mathematics. But there is no reason why all normal children cannot learn elementary arithmetic. There is nothing very complicated about the arithmetic and geometry taught in the primary and elementary years. In fact, as Piaget pointed out, much of elementary school arithmetic is simply an elaboration of what children already know on an intuitive level. If mathematics were taught properly, all children should achieve a reasonable proficiency in it.
>
> *Mathematics learning disabilities are common.* They are not common. Many cases of "learning disabilities" are incorrect diagnoses. Virtually all children have the ability to learn elementary mathematics if it is presented properly. Most cases of "learning disabilities" involve children who have a poor understanding of mathematics but not an inability to learn it under stimulating conditions. In most cases the reason for the difficulty is not intellectual inadequacy but inappropriate teaching. Were mathematics education improved, many apparent "learning disabilities" would disappear. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 18)

Nach allem, was in neuerer einschlägiger Literatur zu finden ist, erwerben leistungsschwache Schüler (lernschwache oder lernbehinderte Schüler, learning-disabled, at-risk-students) mathematisches Wissen nicht anders als die "normal begabten" Kinder. VAN DE WALLE (1994, 460) sagt dazu:

> Both regular and special education teachers should understand that the basic principles, strategies, and materials appropriate for any sound developmental instruction are also the principles, strategies, and materials appropriate for exceptional children.
> Callahan and MacMillan (1981) contend that mildly mentally handicapped children "seem to learn in the very same fashion as their nonretarded peers do, albeit a little less efficiently" (p. 156). The most significant difference in their learning is in the time that is required. The implication of this conclusion, they explain, is that there is no need for some special set of materials or techniques for these children. (VAN DE WALLE, 1994, 464)

Es ist selbstverständlich, dass die Form des Unterrichts eventuell vorhandene körperliche Behinderungen (feinmotorische Schwächen, Seh- oder Hörbehinderungen, usw.) berücksichtigen muss. Es ist sicher wichtig, sich um psychisch belastete Kinder besonders zu kümmern und bei Kindern mit möglicherweise organisch bedingten Aufmerksamkeitsstörungen darauf zu achten, dass sie das Wichtigste mitbekommen. Gewiss sind das Arbeitstempo von Kindern, die Interessen usw. unterschiedlich. Problematisch wird es aber, wenn Kinder eher geschont als gefordert werden, das Unterrichtsangebot restriktiv wird. Seit dem Aufsehen erregenden Buch von Rosenthal und Jacobson (1975) ist die Wirksamkeit von selbsterfüllenden Prophezeiungen bekannt und auch vielfach bestätigt worden (WATZLAWICK, 1997, 91-110). Wenn Lehrer Kindern signalisieren, dass

komplexe Aufgaben für sie zu schwierig sind, dann wird das auch eintreten, mit Sicherheit dann, wenn den Kindern die entsprechenden komplexeren Lernsituationen vorenthalten werden.
Aus konstruktivistischer Sicht sind einige Grundsätze traditioneller Sonderpädagogik fragwürdig geworden. Dies gilt insbesondere für

- das Prinzip der stofflichen Reduktion, wenn damit die Vermeidung komplexer Lernsituationen und die Vorgabe fester Lösungswege für bestimmte Aufgabentypen gemeint ist,
- das Prinzip der Isolierung der Schwierigkeiten und die Methode der kleinsten Schritte, wenn damit Fehler vermieden und die Anforderungen an das Denken verringert werden sollen,
- das Prinzip der "multisensorischen Anschauung", wenn dabei die konzeptuelle Strukturierung vernachlässigt wird und die Kinder damit beschäftigt werden, immer wieder neuen Umgang mit immer wieder neuen Anschauungsmaterialien zu erlernen.

In konstruktivistischer Sicht ist Lernen eine aktive Aufbauleistung, die der Lernende in der Interaktion mit der physischen und sozialen Umwelt selbst zu erbringen hat und auch erbringt, wie die Sprachentwicklung und die außerschulische Zahlbegriffsentwicklung zeigen. Wenn wir nämlich anfangen, detailliert zu analysieren, was es bedeutet, Zahlen zu verstehen, grammatikalisch einigermaßen richtig zu sprechen, Dinge der Umwelt zu kategorisieren und umzukategorisieren, dann beginnen wir über die kognitiven Fähigkeiten der Grundschulkinder zu staunen (MEANS, 1991, 9).

Wenn wir überzeugt sind, schulisches Wissen sei von Natur aus hierarchisch geordnet, einige Fertigkeiten seien basal und sie müssten beherrscht werden *bevor* komplexere, fortgeschrittenere Fähigkeiten erreicht worden sind, dann hindert Schule Kinder daran, ihr informelles Wissen mit schulischem Wissen zu vernetzen, sich an interessanten Problemen zu erproben, Fehler als Lernanreize zu erleben, kurz: Freude am eigenen Denken zu erleben, am geistigen Wachstum.

Wittmann in MÜLLER & WITTMANN (1995, 17) sagt zur Problematik der lernschwachen Schüler: "Was die von Skeptikern häufig angesprochene Problematik der lernschwachen Schüler anbelangt, mehren sich die Befunde dafür, dass die sogenannten "lernschwachen" Schüler weniger Mühe mit dem Lernen als mit dem Belehrtwerden haben, d. h. nicht "lernschwach", sondern "belehrungsschwach" sind, und dass das auf Verständnis angelegte Konzept des aktiv-entdeckenden Lernens, entgegen manchen Vorurteilen, gerade dieser Schülergruppe besonders entgegenkommt."

Für alle Grundschulkinder sollten von Beginn an komplexe Problemsituationen ("Kontextaufgaben") stehen, die für jedes Kind bedeutsam sind. Mit dem Verständnis von Mathematiklernen als einem Prozess der Annäherung ist das Sachrechnen von der Zwangsjacke kleinschrittiger Unterweisung befreit und kann ein Stück Sachunterricht werden (ERICHSON, 1994, 46).

Die Konzepte des konstruktiven und interaktiven Lernens gelten für alle Lernenden, ob hochbegabt oder lernschwach, ob jung oder alt. Einige grundlegende Konsequenzen aus diesem Konzept werden im folgenden Abschnitt zusammengestellt.

2.3 Konsequenzen für die Gestaltung von Mathematikunterricht

> Many children are not using the “proper” mathematical methods taught them at school, but are rather relying upon naive, intuitive strategies. ...Child methods are not teacher taught ... and to a large extend involve counting ... rather than the *four* operations. The existence of these informal methods in mathematics must have profound consequences for teaching, curriculum development, and research. (Zitiert nach STEFFE, 1994, 3)

2.3.1 Lernen verstehen als aktive Sinnkonstruktion des Individuums

Als Lehrer sollten wir versuchen zu verstehen, wie unsere *Schüler* die mathematischen Inhalte verstehen. Dieses Verstehen können wir erreichen, indem wir die Kinder beobachten, wenn sie miteinander an mathematischen Inhalten arbeiten und wenn wir selber sie in Situationen einbeziehen, in welchen wir *ihr* Handeln beobachten und interpretieren können.
Wir sollten das aktive mathematische Lernen von Kindern dadurch fördern, dass wir ihnen Aufgaben stellen, zu deren Lösung ihre bisherigen Operationen nicht mehr adäquat sind und sie dadurch angeregt werden, *ihre* bisherigen Operationen zu modifizieren. Wir sollten nicht versuchen, Kindern mathematische Konzepte und Operationen zu lehren, die sie nicht verstehen können. Es kann kontraproduktiv sein, ihnen Rechenfertigkeiten beizubringen und dadurch *ihr wachsendes Verständnis* überflüssig zu machen. Was wir aus Perspektive der Erwachsenen als Fehler ansehen, sollten wir als wertvolle Indikatoren für die Art des *Verständnisses des Kindes* nutzen. Aus Sicht des Kindes macht sein Verhalten meist Sinn.

Wir sollten die Idee aufgeben, ein Einheitscurriculum für alle Schüler zu entwickeln. Denn Kinder organisieren *ihre* mathematischen Erfahrungen auf fundamental verschiedene Weisen. Wir sollten statt dessen Lernumgebungen gestalten, welche auf die Arbeitsweisen der Kinder und auf die Bedeutungen abgestimmt sind, die *diese ihren* Handlungen geben (KILLION & STEFFE, 1989, 35-36).

2.3.2 Informelles Wissen der Kinder einbeziehen

> Children construct mathematics by assimilating what is taught into what they already know. Teachers should help the child to elaborate these constructions in meaningful directions. There is no reason why virtually all children should not achieve a reasonable level of proficiency in elementary mathematics. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 19)
> Teaching in this way requires insight into the child's interpretation. Teachers must know what each child knows and doesn't know about each topic presented so that subsequent teaching can move the child from his present constructions to the next level of knowing. This is true not only for equivalence but for all math skills. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 13)

Die überaus wichtige Koppelung von prozeduralem Wissen an das informelle Wissen der Schüler erfordert im Unterricht Hin- und Herbewegen zwischen den beiden Bereichen (MACK, 1990, 23). Es erfordert die ständige Ermutigung der Schüler, Verbindungen herzustellen zwischen ihrem eigenen informellen Wissen und den geschriebenen Symbolen und Prozeduren. Eine Folge davon ist allerdings, dass die Schüler eigene Rechenwege, eigene Algorithmen erfinden (MACK, 1990, 25). Die Öffnung von Rechenwegen bei sogenannten halbschriftlichen "Verfahren" hin zu offenen Formen und die stärkere Beachtung individueller Lösungswege und individuellen Vorwissens findet mittlerweile auch in der deutschsprachigen Fachliteratur Eingang (BRÜGELMANN, 1994; KRAUTHAUSEN, 1993; SCHERER, 1995a, b, 1997a, b; SCHÜTTE, 1994; SELTER, 1993; SELTER & SPIEGEL, 1997; WITTMANN & MÜLLER, 1990, 1992).

2.3.3 Verständnis vor Fertigkeiten entwickeln

Im traditionellen Mathematikunterricht wird nicht selten mit Kindern prozedurales Wissen eingeübt in der Meinung, Verständnis sei nicht unbedingt nötig, ohnehin nicht von allen erreichbar, das Einüben der Lösungsverfahren erfordere bereits so viel Übungszeit, dass für die mühsame Entwicklung von Einsicht einfach keine Zeit bleibe. Außerdem könne man ja hoffen, Verständnis werde sich bei dem ein oder anderen Schüler ja später noch einstellen. Typische Beispiele für derartige Behandlung von Prozeduren ohne vorherige Erarbeitung von Einsicht sind die Behandlung der schriftlichen Subtraktion und Division, das formale Rechnen mit Brüchen und mit Dezimalzahlen.

Zahlreiche Untersuchungen sprechen jedoch dafür, zuerst Verständnis für die geschriebenen Symbole und die Prozeduren damit zu entwickeln und erst anschließend diese Regeln einzuüben (Goldin in JANVIER, 1987; HIEBERT, 1986; MACK, 1990; WEARNE & HIEBERT, 1988). Schüler, welche bereits Routinen und Prozeduren beherrschten, zeigten keine Bereitschaft mehr, mit Hilfe konkreter Materialien Verständnis für die gelernten Regeln zu entwickeln (WEARNE & HIEBERT, 1988). Schüler zögern, vertraute Strategien aufzugeben, besonders dann, wenn sie die Strategie nicht verstehen und also auch ihre Unangemessenheit nicht erkennen können (HIEBERT & CARPENTER, 1992, 79). Wenn Kinder einmal angefangen haben, zu lernen, ohne zu verstehen, ist der Prozess schwer umzukehren, weil neuer Stoff noch schwerer zu verstehen ist, wenn schon der vorausgegangene nicht verstanden ist (Sophian in BIDEAUD & MELJAC, 1992, 34; Szeminska in MÜLLER & WITTMANN, 1995, 19).

Wenn Schüler ermutigt werden, Strategien selbst zu erfinden und zu analysieren, dann ist es sehr wahrscheinlich, dass ihr Verständnis und ihre Prozeduren sich eng miteinander verbinden, und dass sie ihre Prozeduren dem jeweiligen Problem anpassen können (HIEBERT & WEARNE, 1992a, 279). Dieselben Autoren berichten, dass Routine-Prozeduren in Versuchsklassen mit konzeptuellem Zugang gleich gut oder besser gelernt wurden wie in Kontrollklassen, obwohl weniger Zeit auf "drill and practice" verwendet wurde.

2.3.4 Konzeptuelles und prozedurales Wissen koppeln

> Mind always develops in an environment, both physical and social. The quantitative environment is so pervasive and so fundamental that we are often oblivious to it. All children develop in an environment containing a multitude of quantitative phenomena and events. From infancy, children encounter small, discrete objects that can be manipulated, touched, and counted. All children view some sets that are more numerous than others. All children experience hunger, want something to eat, and then want more to eat.
> Moreover, the physical environment of quantity appears to offer rich stimulation across widely diverse cultures. In what culture, however impoverished, does the child lack things to count? In what culture cannot one add to what one had before? Mathematical events and phenomena appear to be universal in the physical world. (Ginsburg & Baron in JENSEN, 1993, 4-5)

Die Tendenz, quantitative Vorstellungen und geschriebene Symbole nicht genügend zu vernetzen, scheint ein Haupthindernis, ein Stolperstein in der Schulmathematik, zu sein (RESNICK, 1992, 393). HIEBERT (1988) hält einen Schlüssel bereit zur Lösung vieler Verständnis- und Lernprobleme von Schülern. Die Schüler müssen von Anfang an erleben, dass *die Mathematik in den Quantitäten und in den Handlungen mit den Quantitäten* steckt *und (zumindest anfangs) nicht in den Zeichen auf dem Papier und den Manipulationen mit den geschriebenen Symbolen* (dazu auch Mason in JANVIER, 1987, Kapitel 16). Erst in späteren Jahren des Mathematiklernens werden die Symbole (für den Mathematiker) so lebendig und bedeutungsvoll wie für Anfänger die Handlungen mit konkreten Repräsentanten. HIEBERT (1988) nennt für das Lösen von Aufgaben und Problemen im Mathematikunterricht drei Phasen, an denen Verbindungen zwischen geschriebenen Symbolen und quantitativen Vorstellungen hergestellt werden sollten.

Koppelung von Symbolen an quantitative Vorstellungen

Schriftliche *Symbole* für Zahlen sollen eingeführt werden als Aufzeichnungen, Protokolle, Berichte über *quantitative* Vorstellungen, die das Kind zuvor bereits entwickelt hat (HIEBERT, 1988, 350; SAWADA, 1985) oder alternativ dazu: Für neu eingeführte Symbole sollten anschließend die Quantitäten an geeigneten konkreten Materialien illustriert werden (Hiebert & Lefevre in HIEBERT, 1986).

Koppelung von Prozeduren mit den Symbolen an entsprechende Handlungen mit Repräsentanten der Quantitäten

Es ist wichtig, diesen Zusammenhang aufrecht zu erhalten und auszudehnen. Die Prozeduren mit den Symbolen sollen für die Schüler Handlungen mit konkreten Repräsentanten widerspiegeln (BATTISTA, 1980, ROBOLD, 1983).

Formalisierung und Routinebildung

Erst in dieser letzten Phase der Problemlöseprozesse sollen Symbole und Prozeduren (Regeln für den Umgang mit Symbolen) allmählich formalisiert werden, d. h. vom konkreten Kontext abgelöst werden. Jetzt werden Prozeduren ausgeführt und schriftliche Antworten formuliert. Doch auch in dieser letzten Phase soll Unterricht Schüler dazu ermutigen, nochmals Verbindungen herzustellen zwischen prozedural gefundenen Ergebnissen und den zugrundeliegenden konkreten Quantitäten und Handlungen. Nur so kann – unabhängig von den eventuell fehlerhaften formalen Prozeduren – kontrolliert werden, ob die erhaltenen Ergebnisse Sinn machen und plausibel sind.
Die bereits für den Beginn des Lernprozesses vorgeschlagene enge Koppelung von prozeduralem an konzeptuelles Wissen hat für den Anfänger den Vorteil, dass alle Bereiche des mathematischen Denkens mit Sinn durchdrungen werden, für den Fortgeschrittenen, dass er jederzeit die Treppe hinuntersteigen kann von kontextfreien Prozeduren zu konkreten Repräsentanten (Mason in JANVIER, 1987, Kap. 8). Die Koppelung von Prozeduren an Verständnis vermeidet, dass Schüler zu rasch zur Formalisierung und Routinebildung gedrängt werden und für sie so der Eindruck entsteht, Mathematik bestehe nur aus auf Papier geschriebenen Symbolen, bestehe im Anwenden von Regeln und habe wenig zu tun mit Intuition und konkreten Problemen. Schüler könnten so lernen, Symbole zu sehen als Wiedergabe von Dingen, die sie bereits kennen und Regeln als wirksame Werkzeuge, mit diesen Dingen zu hantieren (HIEBERT, 1988, 352).

3 Wege der Entwicklung des mathematischen Verständnisses

3.1 Übersicht über das Kapitel

Verständnis für Mathematik muss vom Kind in einer aktiven Auseinandersetzung mit Quantitäten und Zahlen (und anderen mathematischen Zeichen) erworben werden, in deren Verlauf *das Kind* mathematische Bedeutungen und Zusammenhänge schafft und verändert. Wissen über wesentliche Schritte im Prozess dieser Auseinandersetzung ist für das Verständnis von Lernschwierigkeiten in Mathematik unerlässlich. Es ist jedoch nicht leicht, ein solches Wissen zu gewinnen.

Ein Grund dafür ist, dass das Zahlverständnis des Erwachsenen von dem des Kindes erheblich abweicht und wir Erwachsene keinen unmittelbaren Zugang zu der Sichtweise des Kindes haben: Wir haben unser Zahlverständnis allmählich in einem Prozess gewonnen, den wir nicht reflektierend begleitet haben. Gerade die ersten Schritte haben wir „unbewusst“ vollzogen. Unser „erwachsenes“ Wissen und Verstehen kann zu einer falschen Konzeption des Erwerbsprozesses führen. Ein Beispiel dafür ist unsere Verfügung über die Basisfakten: Wir wissen sie einfach auswendig, und daher denkt sich manche/r, dass ihr Erwerb eine rein assoziative Gedächtnisleistung sei. Ein anderes Beispiel ist das kardinale Verständnis eines Zahlwortes oder einer Ziffer: wir können uns nur schwer vor Augen führen, was ein Zahlwort oder das Abzählen einer Menge einem Kind bedeuten kann, bevor es die kardinale Bedeutung konstruiert hat. Wenn das Kind auf die Frage, wie viele Dinge in einer vorliegenden Menge sind, abzählt und nach dem Abzählen das letztgenannte Zahlwort wiederholt, denken wir gerne, dass es damit beweist, dass das Wort „acht“ für das Kind ebenso wie für uns eine Eigenschaft der ganzen Menge beschreibt, die es gerade abgezählt hat. Es kann aber meinen, dass man beim Abzählen bis 8 kommt, ohne dass *für das Kind* das Wort „acht“ oder die Ziffer „8“ den ganzen Zählvorgang zusammenfasst.

Ein weiterer Grund für die Schwierigkeit, die mathematische Denkentwicklung zu erfassen, liegt darin, dass es eine qualitativ-interpretierende Arbeit bedeutet. Aus der quantitativen Betrachtung – zum Beispiel: die richtig und falsch gelösten Aufgaben zählen oder die Schnelligkeit der Lösungen messen – und anderen beobachtbaren Merkmalen des kindlichen Vorgehens ergibt sich keine Antwort auf die Frage, *warum* ein Kind an bestimmten Verfahren (z. B. am zählenden Rechnen) festhält. Unsere Tipps an das Kind, wie es leichter oder schneller geht, werden in der Regel nur vorübergehend aufgegriffen, oder das Kind sagt: „So kann man es auch machen. Aber wie ich es mache, ist es leichter.“ Gerade im Hinblick auf besondere Lernschwierigkeiten ist eine „tiefer gehende“, auf die konzeptuelle Grundlage der kindlichen Leistungen und auf ihre Entwicklung abhebende, Interpretation und Begründung unabdingbar.

Auf welcher Grundlage sollte diese Begründung gesucht werden: Kann man unmittelbare Verbindungen zu Schwächen der allgemeinen kognitiven oder neuropsychologischen Funktionen herstellen? Welches theoretische Modell von der Entwicklung des mathe-

matischen Verständnisses soll herangezogen werden? Die Frage nach der angemessenen Annäherung an Lernschwierigkeiten in Mathematik hat uns intensiv beschäftigt.
Die in der Literatur über „Rechenschwäche“ explizit und implizit gegebenen Antworten gaben uns Anlass zu einigen Fragen, die wir am Beispiel der Arbeit von MILZ (1993) und LORENZ UND RADATZ (1993) stellen wollen. Sie betreffen die kindliche Tätigkeit beim Erwerb von mathematischem Verständnis, die Beziehungen zwischen allgemeinen kognitiven Funktionen und mathematischen (Er)Kenntnissen und die Beziehungen zwischen sensorischen Wahrnehmungen und mathematischen Konzepten. Die Fragen werden gestellt aus Sicht der konstruktivistischen Lerntheorie, der kognitiven Entwicklungspsychologie und der Neuropsychologie (Abschnitt 3.2).

Im Anschluss daran wollen wir die Idee der *konzeptuellen Analyse* charakterisieren, die eine konstruktivistische Auffassung der kognitiven Entwicklung des Kindes zur Grundlage hat und unserer Meinung nach eine notwendige Ebene zwischen neuropsychologischen Funktionen einerseits und den konkreten kindlichen Vorgehensweisen bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgabenstellungen andererseits entfaltet. Diese Ebene wurde bisher die für die Betrachtung der „Rechenschwäche“ noch kaum ausgearbeitet (Abschnitt 3.3).
Anschließend stellen wir einige Beiträge zu diesem Verständnis der kindlichen Konstruktionen und ihrer Entwicklung dar, die uns besonders interessant und hilfreich erschienen. Innerhalb dieser Beiträge gibt es eine inhaltliche Zäsur: in den Abschnitten 3.4 bis 3.6 geht es um die Entwicklung des frühen Zahlverständnisses, in den dann folgenden Abschnitten 3.7 bis 3.9 um das Verständnis der dezimalen Struktur der Zahlen.

3.2 Entwicklungspsychologie der mathematischen Kognitionen in der Literatur über „Rechenschwäche“

In diesem Abschnitt gehen wir zunächst darauf ein, dass die Rezeption von Aeblis „operativer Didaktik“ in der Literatur über Rechenschwäche gewisse Teile seiner Ausführungen vernachlässigt. Wir haben den Eindruck, dass die vernachlässigten Aspekte gerade die Konzeptbildung bzw. die konstruktive Tätigkeit des Kindes betreffen. Man versucht, die Konzepte des Kindes auf die Erinnerung bzw. Antizipation von Manipulationen an konkretem Material zurückzuführen. Es besteht eine Tendenz, „Handlung“ als eine Serie von Handgriffen an konkretem Material und „Verinnerlichung einer Handlung“ als Vorstellung von dieser Prozedur zu verstehen. – Wir betonen jedoch, dass wir keine gute Kenntnis von Aeblis Schriften haben, wir können und wollen nicht die Rezeption Aeblis verbessern, sondern an diesem Beispiel auf ein Problem der Theoriebildung in Sachen Rechenschwäche hinweisen.

In der Literatur über Rechenschwäche findet man außerdem eine Tendenz, den mathematischen Sinnzusammenhang auf Sinnes-Erfahrungen zurückzuführen, als ergäben sich die Zahlkonzepte unmittelbar aus sensomotorischen Schemata. Diese Neigung ergibt sich – zumindest teilweise – aus einer modernen Annäherung an Lernschwierigkeiten, die sich auf „Voraussetzungen“ in Gestalt von neuropsychologisch unterscheidbaren Funktionen konzentriert, also auf die einzelnen kognitiven Funktionen, derer sich das mathematische Erkennen und Denken bedienen muss. Dabei kommt es jedoch zu Verknüpfungen, die fragwürdig sind, da mathematische Konzepte letztlich als „natürliche" Destillate der Sinneswahrnehmung konzeptualisiert werden. Die aktive geistige Arbeit des Kindes, das Sinn und Zusammenhänge herstellt und sie (durch empirische und reflexive Abstraktion[1]) allmählich mathematisch deutet, bleibt unberücksichtigt. Die Begründung von Schwierigkeiten beim Erwerb von mathematischem Verständnis unmittelbar aus „basalen" Schwächen ist auch aus neuropsychologischer Sicht fragwürdig.

3.2.1 „Rückblickende Klärung" einer Handlung

Wir nehmen die Beobachtung, dass die Rezeption Aeblis gewisse Teile seiner Ausführungen vernachlässigt, als Ansatzpunkt, um auf vernachlässigte Aspekte hinzuweisen, die die konstruktive, Beziehung und Sinn stiftende Tätigkeit *des Kindes* betreffen, die in unseren Augen entscheidend für das Verständnis der Lernschwierigkeiten in Mathematik ist.

Aebli betont beispielsweise, dass der konkreten Handlung (durch die eine Operation aufgebaut werden soll) eine Reflexion folgen muss, die er „rückblickende Klärung" der konkreten Handlung nennt. Sie erst führt, wenn sie gelingt, zur Einsicht in die „allgemeinen Züge". Aebli betont, dass diese Einsicht ganz *Leistung des Schülers* sei. Gelinge die Einsicht nicht, blieben dem Schüler die ausgeführten Tätigkeiten „bloße Handgriffe" (Aebli, zitiert in LOBECK, 1992, 188). Wir interpretieren dies so: *Das Kind* muss in der rückblickenden Klärung der konkreten Darstellung und Handlung die eigentlich mathematische Struktur verleihen. Diese *vom Kind geschaffene mathematische Bedeutung* der konkreten Tätigkeiten soll dann die symbolische Darstellung (Kodierung) in sich aufnehmen.
Vergleicht man damit die Darstellung des Prozesses von konkreter Handlung zum Umgang mit Symbolen bei LORENZ UND RADATZ (1993), muss man feststellen, dass Reflexion, Einsicht und Bedeutungszuweisung vernachlässigt sind. Statt dessen wird die geistige Tätigkeit des Kindes charakterisiert als Erinnern oder Antizipieren von Manipulationen und durch die Entwicklung von Erinnerungsbildern von raum-zeitlichen Prozessen. Die Tätigkeit des Kindes wird beschrieben, als handle es sich um das Erlernen einer Serie von Handgriffen - praktisch und in der Vorstellung – und ihre Assoziation mit Symbolen.

> „Die Phase der Handlungen an konkretem Material (...)
> Plättchen werden zusammengelegt (Addition), oder entfernt (Subtraktion), ...Würfel werden in Stangen umgetauscht und umgekehrt (Zehnerübergang). Die Handlungen werden durch die symbolische Schreibweise (...) begleitet. In dieser Phase wird erwartet, dass der Schüler die Teilschritte visuell antizipieren kann, um das geforderte Endprodukt zu erstellen. (...) Schwierigkeiten treten in dieser Phase durch eine Störung der Rechts-Links-Unterscheidung und eine dadurch bedingte Beeinträchtigung der Erinnerungsbilder von raum-zeitlichen Prozessen auf. (...) Die fehlerhafte Wahrnehmung räumlicher Beziehungen erschwert den Vergleich von Längen und Größen und damit den Aufbau der Ordnungsrelation (ordinaler Zahlaspekt) ebenso wie die Eins-zu-Eins-Zuordnung (kardinaler Zahlaspekt)." (LORENZ & RADATZ, 1993, 30f.)

[1]Zu diesen Begriffen siehe Kapitel 2, Abschnitt 3.6 oder von GLASERSFELD, 1987, STEFFE & COBB, 1988.

> „Die Phase der bildhaften Darstellungen (...)
> Die den arithmetischen Operationen zugrunde liegenden Handlungen werden in der nächsten Phase nicht mehr durchgeführt, sondern durch Abbildungen ... ersetzt. Die Verkürzung ... auf zweidimensionale, bildhafte Darstellungen soll einen Schritt auf die notwendige Verinnerlichung bewirken. (...) Die jetzt neu auftretende kognitive Anforderung an den Schüler besteht darin, sich aufgrund der bildlichen, statischen Darstellung den zugehörigen Operationsablauf, den er vorher selbst durchgeführt hat, vorzustellen. (...) Neben den kognitiven Fähigkeiten, die bereits für den Aufbau innerer Bilder von Handlungen notwendig waren, kommt in dieser Phase als Anforderung noch das zwei-dimensionale Sehen hinzu.“ (LORENZ & RADATZ, 31)

In der Buchveröffentlichung seiner Habilitationsschrift (Kap. 4) setzt sich Lorenz in anderer Weise mit dem Verhältnis von Wahrnehmungsgegenstand/Anschauungsbild und mathematischer Beziehung auseinander: „Die arithmetische Relation ... ist nicht wahrnehmbar, sondern sie muss erschlossen werden.“ (LORENZ, 1992, 78); „das Anschauungsbild umfasst nicht ... die Beziehungen“ (77). Von den wahrgenommenen oder vorgestellten Gegenständen zum mathematischen Begriff komme das Kind durch einen konstruktiven Akt, der Innehalten, Konzentrieren, Fokussieren, die Handlung Überblicken und Handlungsmomente zueinander in Beziehung Setzen umfasst, also kein einfaches Ablesen von Wahrnehmungsgegebenheiten ist (LORENZ, 1992, 82). Diese Überlegungen sind in LORENZ UND RADATZ (1993) unserer Meinung nach nicht aufgenommen.[2] In diesem Buch bleiben die mathematischen Sinnzusammenhänge, die jeweils vom Kind hergestellt werden, ausgeklammert, als seien sie unmittelbare Folge von Gedächtnis und Vorstellungsfähigkeiten und -tätigkeiten oder gar dazu äquivalent.

3.2.2 Verinnerlichte Handlungen

Mit Begriffen wie „Verinnerlichung von Handlungen“ wird die geistige Tätigkeit des Kindes unzureichend und missverständlich charakterisiert, so als handle es sich um ein durch Wiederholungen sich einprägendes inneres Vorstellungs- und Erinnerungsbild von Manipulationen mit konkretem Material. Dieses Missverständnis entsteht deshalb leicht, weil oft das äußerlich beobachtbare Tun des Kindes beschrieben wird, wenn von der konkreten Handlung die Rede ist. Auf dieser Grundlage erhält dann der Begriff der „Verinnerlichung“ leicht die Bedeutung von „Vorstellung der konkreten Tätigkeit“. So findet die geistige Steuerung und Bearbeitung konkreter Tätigkeiten nicht zu einer angemessenen Darstellung.

> „Der vorangehende Abschnitt hat uns vor allem gezeigt, was Operationen nicht sind: bloße verinnerlichte Handlungen. Verinnerlichte Handlungen sind vorgestellte Handlungen, keine Operationen.“ (AEBLI, 1980, Bd. I, 213)

> „Eine Operation unterscheidet sich von einer Handlung vor allem ... in dem, worauf der Handelnde bei ihrer Ausführung achtet.“ (214)

> Der Handelnde sieht ab von vielen Aspekten der Handlung „um einen einzigen zu zentrieren, diesen aber in Klarheit und in bestmöglicher Strukturierung zu sehen.“ (216)

[2]Diese Kritik bezweifelt nicht Lorenz’ zentrale These, dass Vorstellungsbilder in der Entwicklung von mathematischem Verständnis eine große Bedeutung haben. Es geht uns um die *Beziehung* zwischen mathematischen Konzepten und den Vorstellungsbildern eines Kindes, insbesondere im Hinblick auf die Entwicklung.

Aebli führt in diesem Abschnitt seines Buches auch aus, was er unter einer Handlung versteht bzw. worin sich die Handlung nicht von der Operation unterscheidet. Diese Hinweise sollten gegeben werden, wenn von *Handlung* im Sinne Aeblis die Rede ist, weil dann keine Verwechslung mit Hantieren, Manipulieren oder einer anderen oberflächlichen Betrachtung im Sinne einer Serie von Handgriffen möglich ist: Handlungen haben ein *innerliches* Moment, sie sind *strukturiert* und *gesteuert*; sie *stellen Beziehungen her*, weil und sofern diese in der Intention des Handlungsschemas implizit enthalten sind. Im Ergebnis werde bloß manifest, was implizit in der *Absicht* des Handelnden enthalten war. Das Wesentliche ist das innere Element, die *Intention* des Handelnden, die die Beziehung herstellt.

> „Das Ergebnis enthält nicht mehr als das, was schon in der Handlung steckt. (...) Das Ergebnis ist das In-einer-bestimmten-Beziehung-Stehen der Handlungselemente. Diese Beziehung ist schon in der Handlung intendiert." (AEBLI, 1980, Bd. I, 227)

Eine Handlung oder eine Operation könne zu einem Ergebnis führen, das über seine Intention hinausreicht, wenn am Objekt oder an der Situation, die durch die Handlung erzeugt worden ist, eine neue Handlung vollzogen werde. Die neue Handlung könne „eingreifend" oder „darstellend" sein; das letzte bedeutet ein Vorstellungsbild des Gegenstandes oder der geschaffenen Situation oder aber „eine tiefere Züge erfassende Nachkonstruktion des Gegenstandes" (AEBLI, 1980, 230). Die neue Beobachtung an der erzeugten Struktur sei zwar häufig quasi empirisch, es könne aber auch sein, dass man die Notwendigkeit dieser Feststellung erkenne. „Dies ist dann der Fall, wenn es mir gelingt, sie aus der erzeugten Struktur abzuleiten." (AEBLI, 1980, 232)

Wir möchten es noch einmal in unseren Worten sagen: „Denken ist verinnerlichtes Handeln" als Leitsatz der Entwicklung des mathematischen Verständnisses kann missverstanden werden, wenn nicht geklärt wird, was mit Handlung und Verinnerlichung gemeint ist. Nicht das, was das Kind sichtbar tut, ist die Handlung, die es bei der Lösung einer Aufgabe vollzieht. Vor der Aktivität, die es zur Lösung eines Problems ergreift, „versteht" es die Aufgabenstellung auf bestimmte Weise: dazu gehört, dass es *seine* Vorstellung einer (oder mehrerer) Zahl(en) aktiviert und bearbeitet, z. B. einen Teil herauslöst, auf den es seine Aufmerksamkeit und die nachfolgende Tätigkeit richtet. Es stellt Vorstellungsbilder zur Steuerung der folgenden Aktivität bereit – oder nicht. Es reflektiert seine Aktivität nachher – oder nicht. Es reflektiert mehrere Teile seines Vorstellungsbildes simultan mit dem Ganzen – oder nicht. Viele Tätigkeiten des Kindes sind nicht beobachtbar (motorisch). Die motorischen Aktivitäten sind eingebettet in und begleitet von *geistiger Tätigkeit*, die sich allmählich verändert und der Aktivität ihre *Bedeutung* gibt. Nicht die motorischen Aktivitäten als solche verändern die geistige Strukturierung einer mathematischen Problemstellung oder einer Zahl, ausschlaggebend ist die geistige Bearbeitung. Auch die Entwicklung einer Vorstellung der motorischen Aktivitäten und vom konkreten Material ist nur ein Teil der geistigen Arbeit des Kindes. Die sichtbare und erfragbare Tätigkeit des Kindes ist Resultat der geistigen Tätigkeit und zugleich das Arbeitsmaterial für die Veränderung der geistigen Tätigkeit.

3.2.3 Kognitive Funktionen und mathematisches Erkennen

Nun muss sich das mathematische Erkennen und Denken unbestreitbar vieler einzelner kognitiver Funktionen bedienen. Jedoch bezweifeln wir, dass mathematische Kognitionen auf die visuell-räumliche und zeitliche Wahrnehmung und Gedächtnisleistungen reduziert werden können oder dass eine solche Vereinfachung von Nutzen ist. Der Versuch, zwischen allgemeinen kognitiven Fähigkeiten und Fehlern eine Beziehung herzustellen, ist willkürlich und von fragwürdiger Tragfähigkeit, wenn die mathematischen Bedeutungen *des Kindes*, das die Fehler macht, nicht berücksichtigt werden. Wir meinen, dass dies an den folgenden Beispielen deutlich wird:

> „Die Reihenfolgen der Ziffern-Symbole bestimmt den Wert der Zahl (...). Kinder mit Störungen in diesem Bereich, der Serialität, fallen durch ihre Zahlenschreibweise auf (statt 24 schreiben sie z. B. 420), häufiger allerdings durch den Positionswechsel bei Ziffern (25/ 52).“ (LORENZ & RADATZ, 1993, 32)

> „Kinder mit Gedächtnisschwierigkeiten zeigen in dieser Phase Fehler in der arithmetischen Syntax, d. h. in der falschen Zusammenfügung der Symbole.“ (LORENZ & RADATZ, 1993, 32)

> „Andrea, 8;3, 2. Klasse, löste $30 + 7 = 10$, $40 + 6 = 100$, $2 \cdot 25 = 410$ oder 104 und $5 \cdot 20 = 52$. Die einzelnen Schritte des Lösungsweges kann sie nicht oder nur unvollkommen speichern, so dass sie auch im Alter von 10 Jahren und in der 4. Klasse die Zehnerzerlegungen nicht auswendig wusste und jeweils neu an den Fingern ableiten musste.“ (LORENZ & RADATZ, 1993, 32)

Wir wenden ein: Stellenwertverständnis beinhaltet mehr als Richtungssicherheit. Richtiges Rechnen mit zweistelligen Zahlen verlangt mehr als Gedächtnisleistungen bezüglich der Zusammenfügung der Symbole. Es ist nicht berücksichtigt, dass Kinder einen Zehner konstruieren müssen, der in reversibler Weise mit zehn Einern verbunden sein muss. Dies muss zum Beispiel beim Rechnen für jede zweistellige Zahl geleistet und eingesetzt werden können. Bei den zitierten Beispielen und ihrer Interpretation sind unserer Meinung nach mathematische Konzepte und Prozeduren und ihre Entwicklung nicht befriedigend durchdrungen. Die Schwierigkeit der mathematischen Gegenstände aus der Sicht des Kindes ist nicht angemessen erfasst.

Dass wir beobachten können, dass Kinder zählen, zählend rechnen und irgendwann Strategien anwenden und Fakten aus dem Gedächtnis abrufen, legt nahe, dass das Versagen mancher Kinder auf ein schlechtes Gedächtnis zurückzuführen ist. Aber dass für uns viele Fakten aus dem Gedächtnis abrufbar sind, bedeutet nicht, dass wir sie einstmals rein aufgrund einer assoziativen Verknüpfung unserem Gedächtnis einverleibt haben. Die Gedächtnisforschung zeigt außerdem, dass das Merken und Abrufen auch davon abhängt, wie das zu Merkende und Abzurufende in vorhandenes Wissen eingebettet ist und wie es bearbeitet wurde.

3.2.4 Mathematische Konzeptbildung aus Körperwahrnehmung

MILZ (1993) erweckt teilweise den Eindruck, als vertrete sie, dass mathematische Ideen aus taktil-kinästhetischer oder visueller Erfahrung gemacht sind. Im folgenden Zitat ist es die Idee der Fünf als Einheit aus fünf Elementen (Fünfheit).

> „Aber ... das Kind sollte beim Rechnen mit den Fingern die abgezählten Elemente als Ganzheiten betrachten, zumindest die des ersten Summanden. In unserem Beispiel ist es die 4. Die sollte mit allen vier Fingern gleichzeitig gezeigt werden. Wenn dann der zweite Summand noch zählend hinzugefügt wird, ist es für die erste Zeit nicht schlimm. Aber auch das sollte bald ganzheitlich geschehen.
>
> So kann man auf dieser elementaren Stufe wesentliche *Zahlbegriffsübungen* in seinen Unterricht einbauen, indem man mit den Fingern zählen und sofort die Ganzheiten als Eigenschaft der Menge erfassen lässt. Dass 5 Finger eine ganze Hand ausmachen, weiß jedes Kind eines ersten Schuljahres. *Da wird die Ganzheit körperlich empfunden*. Aber lassen wir einmal Kinder mit Rechenschwächen auf Anhieb 7, 4 oder 9 Finger zeigen, da wird es schon Verzögerungen und Irrtümer geben.“ (MILZ, 1993, 55, Hervorhebungen durch R. S.)

Das ist eine ganz schwierige Aussage: Sinnliche Erfahrungen an den eigenen Fingern spielen vermutlich bei der Entwicklung des Zahlverständnisses – auch bei der Integration des serialen und kardinalen Aspektes – eine wichtige Rolle. Aber ohne verschiedene *reflexive* Bemühungen des Kindes entsteht die Idee von der Zahl 5 als Zusammensetzung aus fünf Einheiten nicht. Sie ist keine Vergeistigung der körperlichen Tatsache, dass Menschen fünf Finger an einer Hand haben. Die Idee der Zahl als Zusammensetzung aus Einheiten ergibt sich nicht aus dem Training, sieben Finger spontan zu zeigen. Wenn kleine Kinder ihr Alter mit den Fingern simultan zeigen, ist dieses Fingerbild u. U. einfach ein Muster, das „vier“ heißt. Ein Zahlbegriff ist das noch nicht.[3]
Aussagen wie die zitierte unterstützen die falsche Annahme vieler Erwachsener, dass Zahleigenschaften wahrnehmbar sind, und tragen zur Verwirrung über das Verhältnis von sinnlichen Erfahrungen und mathematischem Verständnis bei.

> „Kinder, denen es an der Einsicht in das Stellenwertsystem mangelt, haben vermutlich nicht lange genug mit geeignetem Material hantieren dürfen.“ (MILZ, 1993, 59)

Wir fragen: Entsteht Stellenwertverständnis aus dem Hantieren mit Zehnerstangen und Einerwürfeln? Werden Zahlbegriffe und -verständnis von Wahrnehmungsleistungen und Materialmanipulationen hervorgebracht? Beziehungen und Sinnzusammenhänge drängen sich dem Kind einfach auf, wenn die visuellen Wahrnehmungsleistungen ausreichend gut sind und es lange genug mit Material hantiert hat? Wir widersprechen: Mathematische Konzepte sind nicht unmittelbare Destillate von sensomotorischen Leistungen und Erfahrungen und nicht darauf reduzierbar.

Anders gesagt: Interessant und wichtig ist, wie ein Kind vom Fingermuster zum Konzept der Zahl als Zusammensetzung aus Einheiten kommt, oder wie es vom Zusammenlegen und Abzählen von Dingen zur Erkenntnis additiver Zahlbeziehungen kommt. „Verinnerlichen“ und „Schlacken abstreifen“ sind metaphorische Kennzeichnungen eines Prozesses, den es zu rekonstruieren gilt, wenn wir den Lernbehinderungen in Bezug auf Mathematik auf die Spur kommen wollen.

---

[3]Dazu VON GLASERSFELD, 1987 und Abschnitt 3.5.

3.2.5 „Basale“ Fähigkeiten und mathematische Kognitionen

Die Versuche, „basale“ oder allgemeine kognitive Fähigkeiten mit Mängeln im mathematischen Wissen und Verstehen kausal zu verknüpfen, haben in der Regel zwei Schwachpunkte: Sie sind auf der neuropsychologischen Ebene oberflächlich und auf der Ebene der Mathematik sind die Anforderungen an das kindliche Denken unzureichend analysiert.

Zur Kritik aus neuropsychologischer Sicht[4] weisen wir auf folgendes hin: Es ist wissenschaftlich noch nicht beantwortet, in welcher Weise „basale“ sensomotorische Fähigkeiten notwendige Voraussetzungen für höhere kognitive Funktionen sind. DIETEL (1992) weist im Handbuch eines neuropsychologischen Tests für Kinder darauf hin, dass es verschiedene Möglichkeiten gibt, wie basale Funktionen in höhere kognitive Funktionen integriert werden können (DIETEL, 1992, 4); dass gute sensomotorische Funktionen nicht notwendig von guten Konzeptbildungsfähigkeiten (Problemlösen, Hypothesentesten) begleitet sind, und dass beeinträchtigte sensomotorische Funktionen nicht in jedem Fall eine beeinträchtigte Konzeptbildung nach sich ziehen. Selbst bei Kindern mit durchschnittlichen oder guten Leistungen in Wahrnehmung, Motorik und Sprache seien bei der Konzeptbildung gelegentlich ausgesprochene Einbrüche zu beobachten (DIETEL, 1992, 4). Umgekehrt können Stärken im Bereich der Konzeptbildung und des Problemlösens auf Schwächen in den basalen Funktionen Einfluss nehmen. Das Kind kann Einsicht in die eigene Schwäche gewinnen und selbständig oder unter Anleitung geeignete Hilfs- und Kompensationsstrategien entwickeln (DIETEL, 1992, 6). Für einen Trugschluss hält Dietel, dass für das Erlernen des Lesens, Schreibens und Rechnens alle Phasen einer vollständigen sensomotorischen Integration durchlaufen sein müssen (DIETEL, 1992, 11).

VON ASTER (klinisch-neuropsychologischer Ansatz) macht in seiner Habilitationsschrift (1996) auf eine weitere Problematik aufmerksam:

> „Die bislang vorliegenden Arbeiten zum Thema Rechenstörungen nehmen großenteils kaum Bezug auf die Funktionen des Rechnens und der Zahlenverarbeitung selbst. Sie stellen vielmehr grundlegende Bereiche der Hirntätigkeit ins Zentrum der Betrachtung, von denen mit Recht angenommen wird, das sie an den Funktionen der Zahlenverarbeitung bzw. an ihrer Reifung und Entwicklung beteiligt sind (z. B. auditive, visuell-räumliche, taktil-kinästhe-tische und motorische Funktionen).“ (VON ASTER, 1996, 178)

Er stellt fest, dass der Erklärungswert und der klinische Nutzen solcher Ergebnisse aus verschiedenen Gründen begrenzt ist, z. B. weil unklar ist, wie „einseitige“ Hirnfunktionsstörungen die Entwicklung der Zahlverarbeitung im einzelnen beeinträchtigen können, und weil therapeutische Konzepte, die sich in ihrer theoretischen Begründung auf neuropsychologische Basisstörungen beziehen, den Beweis für ihre Effektivität bis heute schuldig geblieben seien (VON ASTER, 1996, 63f.). Eines der Ergebnisse seiner Untersuchung ist, dass es eine große Gruppe von Schülern und Schülerinnen gibt, die – nach dem Lehrerurteil – im Fach Mathematik Probleme haben, ohne neuropsychologisch auffällig zu sein.

---

[4] vgl. Abschnitt 5.3

Autoren, die Behauptungen darüber aufstellen, welche mangelhaften neuropsychologischen Funktionen die Rechenschwäche verursachen (z. B. Probleme der Figur-Grund-Unterscheidung), kennen zwar eine Reihe von Testaufgaben zur Untersuchung dieser Funktionen, aber die konkreten Beziehungen, die zur Entwicklung des mathematischen Verständnisses hergestellt werden, sind dürftig: Kinder könnten nicht sehen, was sie schon abgezählt haben (VON ASTER, 1996, 19). Warum kann man diesen Kindern nicht einfach zeigen, wie man beim Abzählen das schon Gezählte vom Rest wegschiebt? Wenn man vermutet, dass sich zählbare Gegenstände in den Augen eines Kindes nicht gut vom Hintergrund abheben (MILZ, 1993, 53), könnte man doch geeignete Farbkontraste wählen: ist dann das Rechenproblem des Kindes rasch behoben? Kann man so verstehen, wieso ein Kind beim zählenden Rechnen bleibt?

Welche Bedeutung einer allgemeinen kognitiven Fähigkeit, z. B. der visuellen Analyse und Synthese für die Entwicklung des Zahlverständnisses zugemessen wird, hängt nicht zuletzt davon ab, wie man sich die Entwicklung(swege) des Zahlverständnisses vorstellt. *Nur mit Bezug auf die Entwicklung des Zahlverständnisses kann die Bedeutung einer allgemeinen kognitiven Fähigkeit im Lernprozess charakterisiert werden.*

3.3 Eine konzeptuelle Analyse des kindlichen Verhaltens beim Lösen mathematischer Aufgaben

Die Untersuchung von Lernschwierigkeiten in Mathematik benötigt als Grundlage detailliertes und gründliches Wissen über kognitive Prozesse beim Erwerb von mathematischem Verständnis. Das Wissen sollte die wichtigsten Konzepte und Fertigkeiten der mathematischen Inhaltsbereiche – insbesondere das Zahlverständnis und die Rechenstrategien – behandeln und etwas über die Prozesse sagen, durch die das Verständnis in diesem Bereich wächst.
Das Verhalten des Kindes im Umgang mit mathematischen Problemstellungen muss *als mathematischer Sinnzusammenhang* reflektiert und rekonstruiert werden. Angemessene Fragestellungen zielen darauf, welche Bedeutung Zahlen für das Kind haben, wie es eine Aufgabe versteht, welchen Sinnzusammenhang es herstellt.

COBB UND WHEATLEY (1988) sprechen von einer *konzeptuellen Analyse*. Sie geht davon aus, dass das Verhalten des Kindes – gemessen an seinem Verständnis – stets vernünftig und begründet ist. Dem reifen mathematischen Verständnis eines Erwachsenen ist es aber oft unverständlich. Um das kindliche Vorgehen zu verstehen, muss der Erwachsene sein/ihr eigenes mathematisches Verständnis beiseite stellen und sich darum bemühen, wie die Dinge aus der Sicht des Kindes wohl aussehen, wenn es so vorgeht, wie es vorgeht. Der Trick sei, ein Verständnis für die Mathematik des Kindes zu entwickeln, aus dem heraus das Vorgehen des Kindes begründet werden kann. Die konzeptuelle Analyse, die *die Bedeutung konstruieren* will, *die das Kind einer Aufgabe gibt*, unterscheiden die Autoren von einer logischen Aufgabenanalyse, die das Verständnis des Erwachsenen voraussetzt und nicht berücksichtigt, dass das in der Entwicklung befindliche Kind viel von seinem Wissen nicht zum Gegenstand seiner Betrachtung machen kann.

> „A fundamental assumption of conceptual analyses is that children's actions are always rational given their understandings. We all have seen children who, from our adult perspective, do some strange things as they attempt to solve mathematics tasks. One reaction is to wonder how the children could be so stupid or to ask what is wrong with them. This reaction ... reflects the inability of the adult to put aside his or her relatively sophisticated understandings of mathematics and imagine what things might be like from the child's perspective. An alternative approach is to readily admit the inadequacy of adult mathematics for understanding children and for planning instruction. From this perspective, children's apparently strange actions are viewed as problems for the observer to solve. The trick is to develop an understanding of children's mathematics so that their actions can be seen as rational and sensible. The focus of a conceptual analysis is therefore on children's meanings – on how they interpret and attempt to solve mathematical tasks. This type of analysis differs from a logical task analysis in that it acknowledges that much of children's knowledge is not, for them, an object of reflection and consequently does not correspond to anything the adult can see „out there"." (COBB & WHEATLEY, 1988, 2)

COBB UND WHEATLEY geben ein Beispiel: Einem Kind, das sechs Quadrate sehen kann, während andere verdeckt sind, wird gesagt, dass es insgesamt acht Quadrate seien. Es soll feststellen, wie viele Quadrate unter der Decke sind. Beim Versuch, die Aufgabe zu lösen, zählt das Kind mehrmals die sechs sichtbaren Quadrate ab, von „eins" beginnend. Während man aus der Sicht eines Erwachsenen vielleicht zuerst fragt, ob das Kind ein schlechtes Gedächtnis hat, ergeben sich andere Interpretationsmöglichkeiten, wenn man es für möglich hält, dass eine Zahl für ein Kind vielleicht ein anderes Wesen hat:

> „One plausibel answer is that the child cannot create numbers such as „six" in a purely conceptual manner. The child actually has to count in order to make the number six and it ceases to exist for the child once the counting episode is completed."
> Für dieses Kind gilt: „numbers are transitory entities that have to be made and remade by actually counting and do not exist independent to the activity to counting." (COBB & WHEATLEY, 1988, 3 – beide Zitate)

Anzahlen können für das Kind also vergängliche Dinge sein, die jeweils neu durch das Zählen hergestellt werden müssen und nicht unabhängig von der Aktivität des Zählens existieren.

Dieser Ansatz verknüpft eine entwicklungspsychologische Orientierung mit einer konstruktivistischen Konzeption des Lernens. Um zu verdeutlichen, was konstruktivistisches Verständnis vom Lernen für die Betrachtung des Erwerbs von mathematischem Verständnis bedeutet, geben wir ein weiteres Beispiel aus unseren Beobachtungen und Überlegungen:

Irgendwann wurden wir darauf aufmerksam, dass ein Junge[5] die Aufgabe 8 – 5 so löste: Er zeigte acht Finger, eine volle linke Hand und drei Finger der rechten. Jetzt bewegte er nacheinander den achten, siebten, sechsten, fünften und vierten Finger, während er von 1 bis 5 zählte. Dann nannte er das Ergebnis „drei".

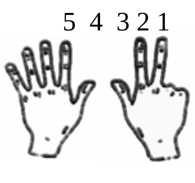


Abb. 3.1: Florian rechnet 8 – 5 mit Hilfe seiner Finger

[5]Ausführlich dazu: Beispiel Florian 1, Kap. 4, Abschnitt 4.2.

An einem anderen Tag baten wir ihn, acht kleine Holzzylinder so anzuordnen („hinzulegen“), dass man leicht sehen könne, dass es acht sind. Er bildete eine Würfelfünf und eine Würfeldrei. Jetzt stellten wir wieder die Aufgabe 8 – 5. Er zählte die drei Würfel der Würfeldrei und fügte weiterzählend („vier, fünf“) noch zwei Zylinder der Würfelfünf hinzu.

Abb. 3.2: Florian rechnet 8 – 5 mit dieser Würfelbilddarstellung der 8

Wir überlegten uns, dass dieser Junge sein Fingerbild der 8 (ebenso wie die andere Darstellung der Zahl durch Würfelbilder) auf ganz bestimmte Weise wahrnehmen muss, so als sähe er eigentlich die Zahlreihe von 1 bis 8. Jedenfalls hat er „seine“ 5 nicht als Teil „seiner“ 8 begriffen, obwohl er sicher die Würfelfünf (bzw. die fünf Finger einer Hand) als 5 und die Würfeldrei als 3 erkannte. Das innere Zahlmodell, das er zum Rechnen heranzog, beinhaltete diese Beziehung nicht, bei der Zahlen Teile von anderen Zahlen sind. Das ist *kein* Wahrnehmungsproblem, es ist eine Frage des Sinnzusammenhangs, in den das Kind Zahlen und Aufgaben stellt.
Mit mehreren nachfolgenden Kindern haben wir ähnliche Beobachtungen gemacht. Sie legten 13 kleine Zylinder zu dem für sie leicht erfassbaren Bild aus zwei Würfelfünfen und einer Würfeldrei. Wenn wir ihnen die Aufgabe 13 – 5 stellten, mit der ausdrücklichen Aufforderung das Bild zu Hilfe zu nehmen, beachteten sie das Bild nicht und rechneten rückwärtszählend oder sie trennten die Würfeldrei und zwei Würfel der angrenzenden Fünf ab und gewannen das Ergebnis auf diese Weise.
Das Beispiel zeigt: Das *innere Zahlmodell des Kindes* bzw. seine Interpretation eines Zahlenproblems ist bestimmend. Die Beziehung „5 ist ein Teil der 8“, die uns Erwachsenen schon am Fingermuster der 8 unübersehbar erscheint, „sieht“ es nicht, weil es Zahlen und Aufgaben anders versteht. Was wir Erwachsene vielleicht als Wahrnehmungs- oder Aufmerksamkeitsproblem interpretieren, bekommt eine andere Bedeutung, wenn wir erstens anerkennen, dass das Kind in mancher Hinsicht nur sieht, was es schon denken kann, und zweitens uns mit der Entwicklung dieser kindlichen Denkweise befassen.

Übersicht über die Beiträge, die wir im folgenden darstellen

Aus unserer Sicht gibt es keine abgeschlossene und umfassende Theorie der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen. Es ist uns auch nicht möglich, alle uns vorliegenden Ansätze und Ergebnisse zur Entwicklung mathematischer Kompetenzen kritisch zu würdigen. Wir haben eine Auswahl unter den Arbeiten getroffen, die in der deutschsprachigen Literatur über Rechenschwäche bisher noch wenig Beachtung gefunden haben.
Wir stellen einige Arbeiten von STEFFE UND COBB und Mitarbeitern zur Entwicklung des Zahlverständnisses aus dem Zählschema bis hin zum Verständnis von Zehnern und Einern vor. Diese Arbeiten waren für uns die komplexesten und schwierigsten, doch wir konnten die Bemühungen, sie zu verstehen, nicht einstellen, weil die darin praktizierte

Herangehensweise an das kindliche Verständnis und seine Veränderungen uns in mancher Hinsicht beispielhaft erscheinen (Abschnitt 3.4).

BRISSIAUD (1992) verfolgt einen anderen spontanen Entwicklungsweg eines Kindes, das zuerst die Anzahl von Gegenständen mittels einer Eins-zu-Eins-Zuordnung zu seinen Fingern durch ein Fingerbild gestisch „bezeichnet“ und die zugehörigen Zahlwörter erst später lernt. Davon ausgehend denkt Brissiaud darüber nach, wie das gestische und das verbale System der Repräsentation von Anzahlen in der Entwicklung des Zahlverständnisses miteinander verknüpft sein können, und diskutiert Vor- und Nachteile zweier verschiedener Entwicklungswege (Abschnitt 3.5).

Ein weiterer Ansatz, der uns interessant erscheint, behandelt sogenannte *protoquantitative Schemata* als eine Grundlage eines mathematischen Verständnisses, die sich zunächst von den Zählkompetenzen getrennt entwickeln. Aus dieser Sicht besteht eine wichtige Entwicklungsaufgabe in der Quantifizierung dieser Schemata oder in der Verbindung der protoquantitativen Schemata mit den Zahlen, die zunächst durch die Zählreihe gegeben und darin gebunden in ihrer „Bedeutung“ eingeschränkt sind (Abschnitt 3.6).

3.4 Entwicklung des Zahlverständnisses aus dem Zählschema

Legt man sogenannten rechenschwachen Kindern verschiedene Aufgaben vor, findet man in ihrem Vorgehen bei der Lösung und in ihrer Erklärung und Begründung der Lösung viele Unterschiede. Fast alle Kindern halten jedoch am zählenden Rechnen mit Hilfe der Finger bis in die dritte und vierte Grundschulklasse fest.[6] Warum? Welchen Stellenwert hat dieses Rechnen in der Entwicklung des mathematischen Verständnisses? Welches Zahlverständnis und welches Verständnis vom Rechnen liegen dem Vorgehen des Kindes zugrunde? Welche Schritte oder Wege führen zur Ablösung vom zählenden Rechnen? Diese Fragen zielen wahrscheinlich auf den Kern des Problems vieler „rechenschwacher“ Kinder.

Die Forscher/innen waren und sind sich auch heute in der Bewertung der Zählkompetenzen des Kindes nicht einig.[7] Nachdem Piaget die Zählfertigkeiten und das zählende Rechnen als rein mechanisches Vorgehen von der Entwicklung des eigentlichen Zahlverständnisses stark unterschied und mit einer gewissen Geringschätzung bedachte, meldeten sich andere zu Wort, die darin eine Mißachtung der wichtigsten kindlichen Kompetenz und des natürlichen Zugangs zur Zahl und zu den Operationen sahen.
Sie versuchen Entwicklungsschritte ausgehend vom Zählen und dem zählenden Rechnen zu beschreiben und zu identifizieren (Erwerb von Zählprinzipien und von zählenden Rechenstrategien). Die Logik oder Triebkraft der Entwicklung wird jedoch unterschiedlich konzeptualisiert. Fortschritte, wie z. B. der Übergang von einer *Count-all-* zu einer *Count-on-Strategie*, werden von einigen Autoren so gedeutet, als entdecke das

[6] Diese Feststellung wird oft getroffen: z. B. auch RUSSELL & GINSBURG, 1984.
[7] Wir geben keine Literaturübersicht zu dieser Frage.

Kind die Möglichkeit, den Zählvorgang abzukürzen, also im Sinne der Entdeckung einer „effizienteren" Strategie. Oder die Anwendung der Rechenstrategie der Zehnerergänzung (7 + 7 = 7 + 3 + 4) wird abgeleitet daraus, dass das Kind weiß, dass 3 + 4 = 7 ist. Die Beherrschung der Basisfakten, wie z. B. 3 + 4 = 7, ergibt sich für diese Autoren auf Grundlage assoziativer Gedächtnisleistungen aus der wiederholten Durchführung einer Zählprozedur mit diesem Ergebnis.
Die Schwierigkeit, die manche Kinder damit haben, sich vom zählenden Rechnen zu lösen, können jedoch auch als Hinweis gewertet werden, dass die Kinder, die vom zählenden Rechnen zu den Basisfakten und flexiblen Rechenstrategien gelangen, Konzepte entwickeln, die diesen Übergang ermöglichen. Die sich verändernde Sicht- und Denkweise von Kindern beim zählenden Rechnen wurde von STEFFE UND COBB äußerst differenziert untersucht. Wir können nur einige Aspekte des komplexen Werkes aufgreifen.

3.4.1 Das Zählschema

Ausgangspunkt der Analyse von STEFFE UND COBB ist die Beobachtung, dass das Zählschema eines der fundamentalen numerischen Schemata der sechs- bis siebenjährigen Kinder ist und dass die beobachtbaren Manifestationen (Formen seiner Anwendung) variieren, aber auch eine Regularität aufweisen. Sie gehen davon aus, dass die Art und Weise, in der das Kind zählt, Ausdruck ist davon, wie das Kind eine Aufgabenstellung versteht und welches Verständnis von Zahlen es hat (STEFFE & COBB, 1988, 1).

Die regelmäßig zu beobachtenden Veränderungen wurden in einem Modell erfaßt, das fünf Stufen auf dem Weg der Konstruktion der „number sequence" beschreibt. Die Stufen unterscheiden sich durch die assimilatorischen Operationen, die dem Kind vor dem Zählen (vor der Durchführung des Zählens) zur Verfügung stehen.

> „I isolated five learning stages in the construction of the number sequence: the perceptual counting scheme, the figurative counting scheme, the initial number sequence, the tacitly nested number sequence, and the explicitly nested number sequence. These learning stages are distinguished by the assimilatory operations that are available to the child prior to counting ..." (STEFFE, 1992, 84)

„Number sequence" ist ein Oberbegriff für die „numerical counting schemes"; als solche werden nur die Schemata verstanden, die den letzten drei Stufen zugrunde liegen. Eigentlich „numerisch" nennen die Autoren ein Zahlverständnis oder ein Konzept erst dann, wenn das Zahlwort für das Kind auf eine *zusammengesetzte Einheit* – etwa im Sinne von „Siebenheit" – verweist, deren Elemente Zählakte oder Zählschritte bedeuten: „any composite unit whose elements symbolize counting acts" (STEFFE & COBB, 1988, S. 338). Dies wird erst in den folgenden Abschnitten inhaltlich behandelt.

Schemata bezeichnen die Fähigkeit eines Kindes, eine Situation einzuordnen und zu beantworten. Es handelt sich um ein *Wiedererkennen* von Elementen und Konstellationen, die konkreter oder vorgestellt-konkreter oder abstrakter Art sein können, verknüpft mit einer bestimmten *Aktivität,* die tatsächlich durchgeführt oder in der Vorstellung durchgeführt wird oder durch ein Wort oder eine Geste symbolisch durchgeführt (ersetzt) wird, und eine *Erwartung*, was das Ergebnis der Aktivität sein wird. Die Erwartung regt zur Durchführung der Aktivität an. Der Begriff „Erwartung“ darf nicht mißverstanden werden: das Wiedererkennen einer Situation muss beim Kind/Menschen keine (antizipierende) Vorstellung von dem auslösen, was es tun wird und was es erhalten wird.

Die Autoren beachten also das Zählen der Kinder, das sie jedoch nicht als visuomotorische Koordination begreifen, sondern – durch das Schema-Konzept – als Zusammenhang zwischen einer bestimmten Art der Beurteilung einer Situation, in der es um Zahlen geht, der Aktivität des Zählens und der Auffassung darüber, was das Ergebnis des Zählens ist. Durch diesen Zusammenhang soll die Bedeutung des Zählens für das Kind erfaßt werden. Die Autoren berücksichtigen außerdem Grundlagen des Zahlverständnisses, die kein Zählen beinhalten, sondern sich auf visuell-räumliche Fähigkeiten stützen (siehe Abschnitt 3.5).

3.4.2 Zählitems

Die Autoren haben zunächst Beobachtungen an Kindern dahingehend analysiert, welche Items das Kind konstruiert, man kann auch sagen: *was* das Kind zählt. Sie unterscheiden: „perceptual unit items“, „figural unit items“, „motor unit items“, „verbal unit items“, „abstract unit items“. Ihre Definition soll wiedergegeben werden, bevor die Stufen der Entwicklung des Zählschemas charakterisiert werden.[8]

„perceptual unit items“

Hier wird eine sehr frühe Stufe der kindlichen Entwicklung behandelt: die Herausbildung von Objekten, der „Vielheit“ (wie wir „plurality“ versuchsweise übersetzen) und einer begrenzten Vielheit oder Menge („bounded plurality“ oder „collection“), auf die wir in unserer Darstellung nicht eingehen. Erst dann, wenn das Kind eine Ansammlung von Dingen als begrenzt begreift, kann es die Idee haben diese abzuzählen. Viele Tassen sind zunächst nur „mehr als eine“ und sie werden erst zu einer Menge, die einen Anfang und ein Ende hat , wenn *das Kind* den Tisch, auf dem die Tassen angeordnet sind, als einheitlichen Hintergrund wahrnimmt, der die Tassen vom Rest des visuellen Feldes trennt. Dann sind „die Tassen auf dem Tisch“ eine Menge („collection“) geworden. Weil sie eine Menge geworden sind, können sie gezählt werden.

> „The plural indicates more than one, but not a collection, because its conceptual construction does not involve a definite beginning or end. The plurality of cups would be bounded (and thus become a collection) if and when the child perceives the table on which the cups are arrayed as a uniform background that separates them from the rest of the visual field. At that point, „the cups on the table“ constitute a bounded plurality or a collection. (...) because it is bounded, the collection can be counted.“ (STEFFE & COBB, 1988, 3f.)

„Perceptual unit items“ bezeichnet eine Situation in der unmittelbar wahrnehmbare Elemente vom Kind in dieser Weise wahrgenommen werden.

[8] Die Items sind ein Beispiel dafür, wie die Autoren herausarbeiten, was das Kind „sieht“, wenn es zählt.

„figural unit items“

Wenn das Kind die Zählhandlung ausführt, obwohl die Dinge, die es zählt, nicht sichtbar oder sonst wahrnehmbar sind, hat es „figural unit items“ konstruiert. Es ist nicht verlangt, dass es dabei zeigt, dass es eine (numerisch) angemessene Vorstellung hervorgebracht hat, indem es z. B. nach der Mitteilung, es seien fünf Elemente verdeckt, auch fünf Schritte zählt. Auch wenn es nur vier oder sechs Schritte zählt, zeigt das Kind, dass es beginnt, Vorstellungen zu entwickeln und vorgestellte Dinge zählen kann.

„motor unit items“

Diese Items erzeugt das Kind und stellt für seinen Zählvorgang bereit, indem es die motorische Komponente des Zählvorgangs (Zeigebewegungen oder das Strecken von einzelnen Fingern) abstrahiert/ablöst von figuralen oder perzeptuellen Items. Das heißt z. B. konkret, dass das Kind drei Dinge zählt, indem es dreimal auf eine Stelle tippt – einmal Tippen steht für ein Ding.

> „Motor acts or movements become countable items when the counter abstracts both the unitary character of the individual motor acts and their coordination with either figural or perceptual unit items. The essential feature of counting motor unit items is that the child uses the motor act as a substitute for either the perceptual item or its figural representative.“ (STEFFE & COBB, 1988, 4 f.)

„verbal unit items“

Damit sind alle Situationen bezeichnet, in denen das Kind zählt, indem es nur die Zahlwörter sagt. Wenn es sechs Elemente, die nicht sichtbar sind, und fünf Elemente, die nicht sichtbar sind, zusammenrechnen soll, so sagt es etwa „eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs“, ohne dabei irgendeine Bewegung zu machen.

„abstract unit items“

Das Kind, das Zähl-Einheiten im abstrakten Sinn geschaffen hat, kann jedes der beschriebenen sensomotorischen Zählitems zum Zählen heranziehen. Insbesondere kann das Kind jede Folge von Zählakten zählen, d. h. es kann eine Folge von Zählakten selbst zu Gegenständen des Zählens machen. Ein Beispiel: Einem Kind liegen acht Dinge vor, einige andere sind durch ein Tuch verdeckt, zusammen seien es zwölf. Das Kind zählt von 1 bis 8 und fährt dann fort: „9, 10, 11, 12 – vier sind verdeckt.“ Das Kind zählt also Zahlwörter, die in diesem Vorgang weitgehend ihrer sensorischen Qualität beraubt und zu abstrakten Einheiten werden.

3.4.3 Die Zahl als „composite unit“ (zusammengesetzte Einheit)

Eine weitere Vorbemerkung: STEFFE UND COBB sprechen erst dann von einem *Zahlkonzept*, wenn eine Zahl als „composite unit“ verstanden wird, als eine zusammengesetzte Einheit.[9] Wenn das Kind zählt „1, 2, 3, 4, 5“ und daraufhin „5“ wiederholt, bedeutet dies nicht notwendig oder zwangsläufig, dass „fünf“ für fünf Zählschritte steht und das Zahlwort die fünf Zählschritte zu einer Einheit zusammenfaßt. Die Zahl im eigentlichen Sinn entsteht erst, wenn diese *gedankliche (geistige, konzeptuelle) Integration* der Zählschritte durchgeführt wird. Eine solche Integration von Zählschritten zu einem Ganzen, symbolisiert durch ein Zahlwort, wird nicht automatisch geleistet, sondern in einem Akt *reflexiver Abstraktion* der Zählhandlung.
Die Autoren weisen darauf hin, dass sie Hinweise auf diese Leistung („integration operation“) bei Kindern zuerst in Zusammenhang mit räumlichen Mustern gefunden haben[10]. Sie unterscheiden aber zwischen einer globalen Bezeichnung von Mustern als „drei“ oder „vier“ oder „fünf“ und einer Bezeichnung in numerischem Sinn, bei der ein Bewußtsein oder Wissen von der Zusammensetzung des Musters aus 3, 4 oder 5 Elementen vorliegt[11].
Die Operation der Integration setzt voraus, dass das Kind zur Repräsentation („representation“) der Zählhandlung (einer Folge von Zählakten) in der Lage ist. Das Wort „Repräsentation“ bezeichnet eine mentale Vorstellung im weitesten Sinn, die wesentliche sensorische Elemente beinhaltet. Die Repräsentation ist eine notwendige, aber keine hinreichende Voraussetzung, sie ersetzt die Reflexion nicht[12].

3.4.4 Die Entwicklung des Zählschemas

„Perceptual Counting Scheme“

Auf dieser Stufe kann das Kind unmittelbar wahrnehmbare Elemente als endliche Menge sehen, deren Endlichkeit durch das Zählen bestimmt werden kann. Es braucht konkret wahrnehmbare Dinge, um das Zählen durchzuführen. Beim Zählen wird bestimmt, „wie viele“ es sind; aber „wie viele“ ist keine bleibende Eigenschaft der Menge. Die Prozedur wird nicht „aufgezeichnet“ und das letztgenannte Zahlwort verweist nicht auf den ganzen Vorgang. Es sind mehrere, ich gehe beim Zählen zu jedem Ding einmal und lasse keines weg, dann habe ich gezeigt, „wie viele“ es sind.

> „Perceptual counting scheme: a counting scheme whose first part consists of perceptual collections or patterns, whose second part consists of counting perceptual unit items, and whose third part usually consists of a specified collection and the arrival at the last item of the collection.“ (STEFFE & COBB, 1988, 337)

---

[9]Numerical concept: a result (possibly symbolized) of applying the integration operation. (STEFFE & COBB, 1988, 336)
[10]Siehe Abschnitt 3.4.5.
[11]Dazu auch VON GLASERSFELD, 1987.
[12]Die Operation der Integration, die die Zahl als solche schafft, findet nicht erst dann statt, wenn das Kind abstrakte Zählitems geschaffen hat.

> „An awareness of plurality drives counting activity: The goal is to make what is indefinite definite. It is this definite awareness of a bounded plurality of counted unit items that constitutes the results of counting perceptual unit items.“ (STEFFE, 1992, 87)

> „the counting activity would be introduced into the collection temporarily, and they would not be aware of the proto-numerosity beyond the immediate present.“ (STEFFE & COBB, 1988, 13)

Es kann sich vom Ergebnis des Zählvorgangs (Folge von Zeigehandlungen und daran gekoppelten Zahlwörtern) nicht distanzieren, es verbindet vielmehr den Vorgang in keiner Weise nachhaltig oder bleibend mit der Menge, auf die es seine Aufmerksamkeit gerichtet hat. Deshalb wiederholt es das Zählen, wenn die Frage „Wie viele sind es?“ wiederholt wird.

Wenn ein Kind auf dieser Stufe seine Finger verwendet, so in dem Sinne, dass einzelne Finger zählbare Dinge ersetzen, gewissermaßen zum Zählen bereitgestellt werden.

„Figurative Counting Scheme“

> „Figurative counting scheme: a counting scheme whose first part consists of figural collections or patterns, whose second part consists of counting motor or verbal unit items, and whose third part consists of the records of counting. Repetition of the last number word can be an index of the records.“ (STEFFE & COBB, 1988, 336)

Das figurative Zählschema beruht auf Vorstellungen und Erinnerungen, die das Kind durch seine Zählerfahrungen gewonnen hat. Man kann vielleicht sagen, dass durch dieses Konstrukt (figuratives Zählschema) die Verinnerlichung des Zählens konkreter Dinge charakterisiert wird.

Das Kind hat Zahlwörter mit der Vorstellung einer Menge von Dingen verbunden, die man zählen kann. Die Vorstellung selbst kann dabei (noch) unbestimmt sein (mehrere Dinge) oder sie hat schon die Qualität eines gegenständlichen Konzepts („object concept“) einer Zahl. Unter diesen gegenständlichen Konzepten spielen die Fingerzahlbilder eine wichtige Rolle. Oft sind sie die ersten gegenständlichen Konzepte von Zahlen, die das Kind erwirbt und die es zur Steuerung seiner Zählakte verwendet.
Erworben werden diese vorstellbaren Fingerzahlbilder z. B. dadurch, dass das Kind Gegenstände, die es nicht sehen kann, durch entsprechend viele gestreckte Finger ersetzt.

> „In my experience, this can lead to the finger patterns being internalized and becoming object concepts associated with number words.“ (STEFFE, 1992, 88 f.)

Im folgenden Beispiel zeigt ein Kind, dass es über ein solches gegenständliches Konzept der 6 (in Gestalt von sechs Fingern) verfügt: Es soll herausfinden, wie viele Dinge 5 sichtbare und 6 verdeckte Dinge zusammen sind. Es zählt die sichtbaren („1, 2, 3, 4, 5“) und fährt dann mit der Zahlwortreihe fort, während es jeweils einen weiteren Finger streckt. Wenn sechs Finger gestreckt sind, stoppt es und sagt, dass es zusammen 11 sind. Bei diesem Vorgehen stellt das Kind die Finger nicht als zählbare Dinge bereit (konkret: zeigt sechs Finger) und zählt dann, sondern es erzeugt beim Zählen sensorisch wahrnehmbare Zählgegenstände. Die liegen in seiner Vorstellung schon vor, wie es dadurch beweist, dass es an der richtigen Stelle stoppt.

Steffe meint, dass es für Kinder schwierig sei, Vorstellungsbilder von Mengen bestimmter Größe zu entwickeln. Die Fingerzahlbilder können eine Brücke zur Produktion anderer Bilder (die nicht aus Fingern bestehen) darstellen.

> „Creating finger patterns as object concepts for number words opens up a path for these children eventually to transform their counting schemes into a figurative scheme, but this is not an immediate achievement, because for a counting scheme to be truly figurative, both the activity of the scheme and the items that are to be counted must be internalized. The path that is opened up includes the child creating a figurative plurality of fingers and an awareness of such a plurality concomitant with creating finger movements as countable items in the activity of counting. These two achievements ... encourage the production of figurative pluralities other than fingers and the establishment of finger movements as substitutes for the elements of these more general figurative pluralities.“ (STEFFE, 1992, 89)

Ein weiteres Charakteristikum des figurativen Zählschemas ist die Verinnerlichung der Aktivität des Zählens selbst, d. h. sie muss nicht mehr unbedingt praktisch durchgeführt werden. Die Verinnerlichung der Aktivität des Zählens zeigt das Kind, wenn es Teile des Zählvorgangs ersetzen kann, z. B. durch ein Fingerzahlbild – es zeigt drei Finger und fährt dann fort, sichtbare Elemente zu zählen („4, 5, 6, 7“), (STEFFE, 1992, 90). Andere Kinder sagen einfach die Zahlwortreihe von 1 bis 3 auf, wenn sie drei unsichtbare Dinge zählen möchten, ohne dabei auf die drei verdeckten Dinge zu zeigen. Das Aufsagen der Zahlwortreihe von 1 bis x geschieht stellvertretend für das Zählen von x-vielen Dingen, offensichtlich abgekoppelt vom Sehen der Dinge und von der Koordination von Zeigehandlung und Zahlwort, die auch zum Zählen gehört.[13] Voraussetzung hierfür ist ein „Bild“, eine Erinnerung der kinästhetischen oder auditiven Erfahrung des Aufsagens der Zahlwortreihe beim Zählen von Dingen. Wenn die Zahlwortreihe in dieser Weise verwendet wird, ohne dass Zahlwörter mit sichtbaren oder unsichtbaren Dingen gestisch koordiniert werden, sagt Steffe, sie sei „internalisiert“. Das Aufsagen von 1 bis x geschieht stellvertretend für das Zählen von x-vielen Dingen.

Das Aufsagen eines Abschnitts der Zahlwortreihe (z. B. 1 bis 6) muss beim Kind nicht mit einem Vorstellungsbild der betreffenden Zahl (Bild mit 6 Elementen) verknüpft sein. Das Vorstellungsbild kann noch unbestimmt sein oder sich auf das Fingerzahlbild beschränken.

Für die weitere Entwicklung wichtig sind wechselseitige Einflüsse zwischen dem Zählen von Dingen, die in der Vorstellung erzeugt werden, einerseits, und dem Aufsagen von Zahlwörtern anstelle des Zählens, andererseits. Auf diese Weise wird nämlich die Zahlwortreihe von 1 bis x mit dem Vorstellungsbild von x-vielen Elementen (im Sinne eines gegenständlichen Konzeptes der Zahl X) verknüpft (S. 91).

Die beschriebene Entwicklung zeigt, dass einerseits Komponenten des Zählvorgangs voneinander gelöst werden, um dann aber auf einer neuen Stufe wieder integriert zu werden: Die Zahlwortreihe von 1 bis 7 wird gelöst von der Koordination mit sichtbaren Dingen beim konkreten Zählen, ersetzt das Zählen als Koordination von Zahlwörtern und dem Deuten auf Objekte und wird wieder verknüpft mit der Vorstellung einer Siebenheit von Dingen, einem gegenständlichen Konzept der Zahl 7. *Die Verknüpfung*

[13]Das sollte vom Aufsagen der Zahlwortreihe durch das sehr kleine Kind, das noch nicht Zählen als Koordination von Zahlwortreihe und dem Zeigen auf Elemente gelernt hat, unterschieden werden.

zwischen Zahl(wort)reihe, die das Zählen selbst vertritt, und solchen vorstellbaren Mustern aus einer bestimmten Zahl von Elementen, die konkrete Zählgegenstände vertreten, bringt dann das erste eigentliche Zahlkonzept hervor.

Dieses kann man auch so charakterisieren: Ein Zahlwort X steht für einen Zählvorgang, bei dem die Zahlwörter von 1 bis x verbraucht werden und für eine Menge von x-vielen Dingen. Das Zahlwort „steht für" bedeutet, dass Vorgang (Aktivität des Zählens) und das Bild aus so vielen Elementen darin zusammengefaßt sind, im Sinne eines Symbols.

„Numerical counting schemes: initial number sequence"

> „an interiorized number word sequence that can be re-presented when assimilating situations involving collections. The actual counting activity that follows is an instantiation of the counting activity symbolized by the re-presented number sequence and is referred to as counting abstract unit items. The number words of an initial number sequence can symbolize numerical composites as well as the initial number sequence from one up to an including a given number." (STEFFE & COBB, 1988, 338)

Das erste der eigentlich numerischen Zählschemata – „initial number sequence" – erkennt Steffe dann, wenn das Kind nicht nur die Operationen der Repräsentation (wie im figurativen Schema beschrieben), sondern auch die des *„unitizing*" entwickelt, d. h. abstrakte Zähleinheiten werden geschaffen hat.

Den Unterschied versucht STEFFE an einem Beispiel deutlich zu machen, in dem ein Kind seine Zählhandlung reflektiert und bewußt steuert. Es will, nachdem es schon 7 Dinge gezählt hat, noch 5 nicht sichtbare Dinge dazuzählen. Es beginnt mehrmals von neuem, weil es offenbar unsicher ist, ob es genau um 5 Schritte weitergezählt hat, bis es sich dessen sicher ist. Es muss dabei das Muster, das es beim Zählen erzeugt (das sind sowohl die Zeigehandlungen auf das Tuch, das die fünf Dinge verdeckt als auch die Zählwörter ab 8) seiner sensomotorischen Eigenschaften entkleiden und daraus abstrakte Zähleinheiten oder -elemente machen. Damit erreichen die Zählakte in den Augen des Kindes die allgemeinste Form der Abstraktion, die mit „Interiorisierung" bezeichnet wird. Gleichzeitig ist zu beobachten, dass 5 für das Kind aus fünf Elementen besteht. „Fünf" bedeutet 5 Elemente und 5 Zählschritte in ganz abstrakter Weise.

> „To monitor counting activity in the way described, there has to be a re-presentation of the results of counting. That is, after saying, „8, 9", and making two pointing acts, the child must have re-presented these counted items and „held them at a distance" while reflecting on them, but distancing oneself from the figurative pattern requires an operation not provided by re-presentation. The child must „run through" or reprocess the items of the figurative pattern using the unitizing operation. This operation strips the figurative unit items of their sensorimotor quality and creates a pair of abstract unit items that contain the record of the counting acts. It begins the process of interiorization of the internalized counting acts. The concept the child finally created for „five" was a numerical pattern that contained the records of counting: „8, 9, 10, 11, 12."" (STEFFE, 1992, 93)

Wenn das Kind die Zählakte oder -schritte in dieser abstrakten Weise begreift, symbolisiert ein Zahlwort einen Anfangsabschnitt der Zahlwortreihe von 1 bis zu diesem Zahlwort einschließlich. Aber dieser Abschnitt symbolisiert wiederum eine Folge von abstrakten Einheiten und er symbolisiert die Aktivität und die Ergebnisse des Zählens von so vielen Einheiten. Damit symbolisiert das Zahlwort eine Anzahl oder Zahl im abstrakten Sinne („numerosities“).

> „A lexical item of a verbal number sequence symbolizes an initial segment from one up to and including the lexical item. These symbolized segments, in turn, symbolize sequences of abstract unit items as well as the activity and results of counting: numerosities.“ (STEFFE, 1992, 94)

Wenn das Kind jetzt ein Zahlwort benutzt, z. B. „6“, so bedeutet dieses Zahlwort soviel, als würde es von 1 bis 6 zählen. Während es zählt und auch im Anschluß an das Zählen beachtet das Kind die einzelnen Zählakte vom Anfang bis zum Schluß und ist sich ihrer bewußt. „Sechs“ sind sechs-viele abstrakte Einheiten. Aber das Kind bildet im Anschluß nicht notwendig eine neue *Einheit aus den gezählten Einheiten*.

Eine Demonstration der „initial number sequence“ erkennt Steffe im Vorgehen des folgenden Kindes: Vor das Kind werden zwei Becher gestellt, die sieben bzw. vier Murmeln enthalten. Das Kind soll herausfinden, wie viele Murmeln es insgesamt sind.

> „If the child says there are 7 in the cup, and proceeds to count on “8, 9, 10, 11; – 11!“ this suggests that in uttering seven the child knows that the number word stands for a collection of perceptual unit items ... and that if counted, they would be coordinated with the number words from one to seven. The child knows this and therefore does not have to run through the counting activity that is implied.“ (STEFFE, 1992, 95)

Wenn das Kind jetzt Fingerbilder oder andere wahrnehmbare Mengen verwendet, sieht es sie auf andere Weise als früher, sie symbolisieren jetzt abstrakte Einheiten.

> „The child still establishes perceptual and figurative collections, but these collections can now symbolize the abstract unit items that the child is capable of creating.“ (STEFFE, 1992, 95)

„Numerical counting schemes: Tacitly nested number sequence“

In einem weiteren Schritt der Entwicklung, den Steffe „tacitly nested number sequence“ nennt – vielleicht durch „implizit eingebettete oder ineinander geschachtelte Zahlreihe“ zu übersetzen – werden Zahlwörter als Einheiten aus anderen Einheiten verstanden, als zusammengesetzte Einheiten.[14] Die Fähigkeit, aus Einheiten neue Einheiten zu bilden, ist ein wesentlicher Schritt hin zur Konstruktion der ganzen Zahlen, insbesondere hin zur Konstruktion der Inklusionsbeziehung zwischen Zahlen, bei der man 7 als Teil der 9 verstehen kann, ohne dass die 9 dadurch verschwindet.

> „The principal advancement in the tacitly nested number sequence is that a number word now symbolizes the operations used to take an initial segment of its verbal number sequence as a unit. Seven, for example, refers to the verbal number sequence from one up to and including seven as constituent unit items of a composite unit. The ability to create units of units is a crucial step in the construction of whole numbers and is a step toward the construction of an inclusion relation for numbers. As a unit of units, seven can be distinguished in, say, nine but the child is yet to disembed seven from nine and treat it as a number separate from nine while leaving it in nine.“ (STEFFE, 1992, 95f.)

[14] „nest“ bezeichnet im Englischen eine Serie ineinander gestellter oder ineinander stellbarer Dinge.

„Numerical counting schemes: explicitly nested number sequence"

Wenn das Kind die Teil-Ganzes Beziehungen von Zahlen erfassen kann, – ein Schritt der im letzten Zitat schon angedeutet ist – , nennt Steffe sein Zahlverständnis „explizit eingebettete Zahlreihe". Zur Teil-Ganzes-Beziehung gelangt das Kind durch das Herauslösen von Teilen aus einem Abschnitt der Zahlwortreihe (einer Zahl) und die Reflexion des Teils im ganzen Abschnitt.

> „The construction of an inclusion relation for numbers involves another use of the disembedding operation and a reorganization of the tacitly nested number sequence. When a child becomes aware of part-whole numerical relationships, I call the child's number sequence explicitly nested because now a lexical item of the sequence, say seven, refers to a unit that can be iterated seven times as well as to a unit containing the verbal number sequence up to and including seven." (STEFFE, 1992, 96)

3.4.5 Bedeutung von Mustern in der Entwicklung des Zählschemas

Wir ergänzen die Ausführungen von Steffe und Cobb durch Überlegungen von Glaserfelds zur Rolle des „subitizing"[15] in der Entwicklung des Zahlverständnisses. Seine Überlegung ist geeignet, die frühe Verwendung von Zahlwörtern für Muster oder kleine Mengen von einem Konzept zu unterscheiden, in dem eine Zahl eine aus Einheiten zusammengesetzte Ganzheit symbolisiert.

Das Kind lernt früh, einige räumlich-simultane oder zeitlich-sequentielle Konfigurationen aus diskreten Elementen mit entsprechenden Zahlwörtern zu assoziieren. Eine solche Zuordnung bedeutet jedoch nicht, dass das Muster im Sinne eines gegenständlichen Zahlkonzeptes gesehen wird.

> „Figurale Muster können in zwei Gruppen aufgeteilt werden: die einen werden als eine räumliche Konfiguration gebildet (der ein bestimmter Abtastweg ... entspricht), die anderen entstehen als zeitliche Abfolge (der ein Rhythmus entspricht).
>
> In beiden Gruppen ergibt die empirische Abstraktion von dem konkret gegebenen sensorischen Material ... figurale Muster, die von allgemeiner Anwendbarkeit sind und semantisch mit bestimmten Namen verknüpft werden können." (VON GLASERSFELD, 1987, 259)
>
> „Ich meine also, dass das Kind durch „subitizing" figurale Muster mit Zahlwörtern über eine *semantische* Verbindung assoziiert und nicht aufgrund der Anzahl der perzeptuellen Einheiten, aus denen die Muster gebildet sind. In den Akten des „subitizing" werden die figuralen Muster, die sie jeweils auslösen, als figurale Ganzheiten aufgefaßt, nicht als aus Elementen zusammengesetzte Gebilde. Sie werden also als globale Konfigurationen, nicht als Anhäufung zählbarer Elemente erkannt." (VON GLASERSFELD, 1987, 261)

„Subitizing" gründet in der visuellen Mustererkennung, insbesondere der Fähigkeit, iterative Konfigurationen zu unterscheiden, wiederzuerkennen und abzubilden.[16] Die Ver-

[15] "Subitizing" – das spontane Benennen von kleinen Mengen bis 4 oder 5 oder 6 durch ein Zahlwort. Siehe VON GLASERFELD, 1987, 257-273.
[16] Eine weitere Unterscheidung, die von Bedeutung sein kann: Wenn das Kind bei unmittelbarer Wahrnehmung eines Musters das Zahlwort nennt, so ist es nicht zwangsläufig schon in der Lage, das Zahlwort mit einer Vorstellung des Musters zu verknüpfen: Wiedererkennen bedeutet nicht schon Repräsentation.

bindung eines Vierermusters mit dem Zahlwort „vier“ geschieht ähnlich wie die Verknüpfung von einer Klasse von Objekten mit dem Wort „Löffel“.

> „Die Verknüpfung mit einem Zahlwort macht sie jedoch nicht zu *numerischen* Begriffen. Begrifflich sind sie immer noch *figurale* Muster. Erst die „reflexive“ Abstraktion – die Konzentration des Bewußtseins auf ihre iterative Struktur ... kann sie auf die Ebene „reiner“ Abstraktion heben, wie sie für die Vorstellung von Zahlen charakteristisch ist.“ (VON GLASERSFELD, 1987, 265)

Eine solche Reflexion kann sich an die Erfahrung anschließen, dass das Abzählen der Einheiten, aus denen das Muster zusammengesetzt ist, mit demselben Zahlwort endet, das schon mit dem ganzen Muster assoziiert wurde.

> „Diese Entdeckung bildet die erste Wurzel der Erfahrung des Begriffs der Mächtigkeit oder in der Tat der Kardinalität. Der Grund dafür ist, dass das Zusammenfallen des Zahlworts als des Endpunkts einer iterativen Prozedur (d. h. des Aufsagens und Koordinierens einer festgelegten Abfolge von Wörtern) mit dem gleichen Zahlwort als dem Ergebnis eines als Ganzheit wahrgenommenen Figuralmusters die Erfahrungsgrundlage liefert für die Vorstellung der Zahl als einer Einheit, die aus Einheiten aufgebaut ist.“ (VON GLASERSFELD, 1987, 268)

Im Rahmen des figurativen Zählschemas führen Steffe und Cobb aus, wie gegenständliche Konzepte („object concepts“[17]) der Zahlen sich entwickeln und wie man sie erkennen kann. Gegenständliche Zahlkonzepte entwickeln sich aus der Verknüpfung von Mustern (dazu zählen auch Fingerbilder) mit der Zahlwortreihe bzw. mit dem Zählen. Das Kind prägt sich das Fingerbild, das beim Zählen bis 7 entsteht, ein und verknüpft das Gesamtbild mit dem Zählen bis 7. Ähnliches geschieht bei anderen Mustern.

Ein Muster ist eine Ganzheit, die aus Elementen zusammengesetzt ist, und ist insofern eine gute Repräsentation der entsprechenden Zahleigenschaft. Das gezählte Muster („counted pattern“) *kann* das Kind anregen, auf anschaulicher Ebene eine Zahl als Einheit aus anderen Einheiten zu verstehen. Anders formuliert: es kann anregen, das Muster als Ganzes mit den Elementen und dem Zählen der Elemente, aus denen es besteht, in Beziehung zu bringen. Das Muster kann Objekt für Reflexion und Abstraktion sein, durch die das Kind ein Zahlwort als Zusammenfassung von Zählakten versteht und es als „Abkürzung“ für den ganzen Zählvorgang verwendet.

> „The counted pattern provides an opportunity for the child to isolate a proto-numerosity because the elements of the pattern seem to co-occur as a unitary but composite entity. The pattern provides an „object“ for reflection and abstraction without which counting would not be curtailed.“ (STEFFE, 1992, 87f.)

Um ein Muster in ein gegenständliches Zahlkonzept zu verwandeln, ist es also notwendig, Aufmerksamkeit für das Ganze und die konstituierenden Teile aufzubringen (bei der empirischen Abstraktion) und dies einerseits mit dem Abzählvorgang, andererseits mit dem zuletzt genannten Zahlwort zu integrieren.

Die Verwendung von in der Vorstellung vorliegenden Mustern beim Nachdenken über Zahlen und Zahlbeziehungen kann Ausdruck dafür sein, dass ein Kind ein entsprechen-

[17]“Objekt-Konzepte, die wir durch „gegenständliche Konzepte“ übersetzen, sind Schablonen (englisch: „templates“), die durch empirische Abstraktion gewonnen wurden und spontan repräsentierbar sind.

des Zahlkonzept entwickelt hat. Die konkrete Verwendung von Mustern kann Hilfe zur Reflexion bieten, durch die diese Leistung erst möglich wird.

Darüber hinaus kann man entsprechend überlegen, dass Muster auch die Entwicklung der mentalen Operation fördern können, die Steffe und Cobb „disembedding operation" nennen, durch die eine Zahl als Teil einer anderen Zahl verstanden wird. Dabei würden Muster und Teile von Mustern in Verbindung gebracht mit Beziehungen zwischen Zahlen.
Steffe und Cobbs Erkenntnisse müssen jedoch als Warnung verstanden werden, davon auszugehen, dass das Kind z. B. dem Fingermuster der Sieben unmittelbar entnimmt, dass Fünf und Zwei ein anderer Name für Sieben ist. Das Verständnis für Zahlbeziehungen wird *nicht* durch *empirische* Abstraktion aus noch so wohlstrukturiertem Material gewonnen.

3.4.6 Einige Überlegungen zur Bedeutung der Beiträge von STEFFE UND COBB

STEFFE UND COBB erforschen die geistige Tätigkeit des sich entwickelnden und lernenden Kindes durch qualitative Interpretation. Zur Strukturierung der Tätigkeit verwenden sie das Schema- Konzept (Wiedererkennen und Intention, Aktivität, Erwartung und Ergebnis). Sie erhellen die Prozesse der „Verinnerlichung" und der „Abstraktion", sowie die Entwicklung von Denkoperationen, die für das Zahlverständnis grundlegend sind („integration operation, sequential/progressive integration operation, disembedding operation, part-whole operation").

Steffe und Cobb betten die beobachtbare Aktivität des Kindes in eine geistige Tätigkeit ein und rekonstruieren diese. Nicht das, was das Kind äußerlich tut, ist „die Handlung", die es bei der Lösung eines Problems durchführt. Die motorischen Aktivitäten des Kindes sind eingebettet in und begleitet von geistiger Tätigkeit, die sich verändert und der Aktivität ihre sich ebenfalls verändernde Bedeutung gibt.

Im Hinblick auf die Rolle von Wahrnehmungen und der mentalen Aufzeichnung von sinnlichen Erfahrungen kann man den Arbeiten folgendes entnehmen:
„*Repräsentation*" (Vorstellung von Erfahrungen) im konstruktivistischen Sinn ist nicht das (Ab)Bild einer vom erfahrenden Subjekt unabhängigen äußeren Welt, sondern die Rekonstruktion von Etwas, das in einer vorausgegangenen Erfahrungssituation konstruiert worden war (VON GLASERSFELD, 1987, 257).
Diese Rekonstruktion einer Erfahrungssituation ist nur ein Teil der geistigen Arbeit des Kindes, die den Erfahrungen mathematische Bedeutungen verleiht. Weitere mentale Bearbeitungen müssen beachtet werden, die die Autoren durch die genannten *Operationen* (s. o.) konzeptualisieren und beschreibend abbilden: Das Kind begreift eine Aktivität als ein Ganzes und wählt ein Symbol dafür; es greift Teile der Aktivität oder eines inneren Bildes heraus und bearbeitet es oder setzt es zum Ganzen in Beziehung usw. Die Autoren geben damit Hinweise, wie man die eigentlich mathematischen Konstruktionen des Kindes konzeptualisieren kann, die sonst nur metaphorisch durch „Verinnerlichung" oder „Abstreifen von Schlacken" behandelt werden.

Sinnvoll ist außerdem die Unterscheidung von „empirischer“ und reflexiver“ Abstraktion und der Versuch, diese Tätigkeiten zu beschreiben. Von Glasersfeld definiert „empirische Abstraktion“ als das Abstrahieren figuraler Muster aus sensomotorischer Erfahrung; „reflexive Abstraktion“ als die höhere Ebene der Abstraktion, die die Ergebnisse der empirischen Abstraktion sowie anderer Operationen als Rohmaterial verwendet.

> „Ich werde daher so verfahren, dass es sich um *empirische Abstraktion* handelt, wenn das erfahrende Subjekt sich nicht dem spezifischen sensorischen Inhalt der Erfahrung zuwendet, sondern den Operationen, die perzeptuelle und propriozeptive *Elemente zu* mehr oder minder stabilen *Mustern kombinieren*. Diese Muster bestehen *aus Bewegungen*, seien es physische, seien es solche des Bewußtseins, und bilden „Abtastpfade“, die Partikel sensorischer Erfahrung miteinander verknüpfen. Um in einem Wahrnehmungs- und Repräsentationsprozeß verwirklicht zu werden, bedürfen diese Muster sensorischen Materials irgendwelcher Art, es ist jedoch die Bewegung und nicht das spezifische sensorische Material, das im Einzelfall die Eigenart der Muster festlegt. Aufgrund dieser Abhängigkeit von gewissem (nicht weiter festgelegtem) sensorischem Material sowie von Bewegung werden sie *figurale Muster* genannt.
>
> Die *reflexive Abstraktion* andererseits findet dann statt, wenn das erfahrende Subjekt sich nur den *mentalen Operationen* zuwendet und diese *von dem sensomotorischen Zusammenhang abstrahiert*, aus dem sie entstanden sind.“ (VON GLASERSFELD, 1987, 258) – Hervorhebungen v. R. S.

Neben diesen Aspekten, die darlegen, wie die geistigen Prozesse beim Lernen von Mathematik aufgefaßt werden, wollen wir einige Hinweise zur Entwicklung des Zahlkonzeptes selbst hervorheben. Die Bedeutung der Differenzierungen können wir an den Beispielen des Kapitel 4 teilweise deutlich machen.

Der erste entscheidende Entwicklungsschritt ist durch die *Operation der Integration* („integration operation“) bezeichnet. Damit ist die Verknüpfung der Zahl 5 mit einer Zusammenfassung des Vorgangs, in dem fünf Dinge gezählt oder bereitgestellt werden, gemeint. Dann trägt das Zahlwort „fünf“ oder die Ziffer „5“ aus der Sicht des Kindes schon das Zählen von 1 bis 5 *und* eine Fünfheit von Elementen in sich.
Ein Kind, das uns „fünf Dinge“ geben kann, und das nach dem Abzählen einer Menge sagt, dass es fünf Dinge sind, versteht nicht zwangsläufig das Wort „fünf“ oder die Ziffer „5“ als etwas Fünffaches. Fünffachheit ist eine Eigenschaft einer konkreten Menge, die abgezählt wurde, nicht des Zahlwortes oder der Ziffer. In einem anderen Kontext versteht das Kind u. U. die „5“ als ein singuläres Ding (keine Vielheit).[18]

Es ist sodann sinnvoll, zwischen dem Zahlkonzept, das an ein gegenständliches Konzept gebunden ist, und einem Zahlkonzept in einem ganz abstrakten Sinn zu unterscheiden: In einer Phase seiner Entwicklung muss das Kind, um über Zahlen nachzudenken, eine gegenständliche Vorstellung heranziehen, am besten sich sichtbar vor Augen führen, z. B. um eine Inklusionsbeziehung oder Teil-Ganzes-Beziehung zu realisieren.[19]

Weder ein vorliegendes noch ein vorgestelltes Zahlbild oder Zahlobjekt führt das Kind unmittelbar zur Erfassung von Teil-Ganzes-Beziehungen zwischen Zahlen. Das Fingerbild der 7 ist nicht „leicht“ so zu interpretieren, dass die Zahl 7 aus 5 und 2 zusammengesetzt ist, oder dass 5 und 2 Teile der 7 sind. Diese Schwierigkeit ergibt

[18] Beispiele von Greta in Kapitel 4.
[19] Wir verweisen hier nicht auf die Original-Ausdrücke der Autoren, da wir „object concept“, „preconcept“ und „figurative concept“ nicht sicher unterscheiden können.

sich einerseits aus der u. U. noch fehlenden Operation der Integration, andererseits aus den Anforderungen der Teile-Ganzes Reflexion in Verbindung mit Zahlen.

Das Training der Abrufbarkeit von Basisfakten bevor das Kind a) die Zahl x als Zusammensetzung aus x-Vielen versteht und b) die Zahl noch nicht als Zusammensetzung aus anderen Zahlen konstruiert hat und c) für beide Leistungen gute Repräsentationen, insbesondere für die Beziehungen zur 5 und zur 10, sowie die Verdopplungen, entwickelt hat, ist erfolglos (abgesehen von Erfolgen des Auswendiglernens) und führt zur Verfestigung des zählenden Rechnens auf Kosten einer konzeptuellen Weiterentwicklung. Wenn hingegen die Voraussetzungen gegeben sind, wird, vermittelt durch Ableitungsstrategien, die Abrufbarkeit der Fakten nicht ausbleiben.

Auch wenn es nicht leicht ist, die Analysen der Autoren nachzuvollziehen und auf Beobachtungen an Kindern anzuwenden, ist man – nach einiger Erfahrung mit „rechenschwachen“ Kindern – doch dankbar für die Anregungen zum Einblick in die Schwierigkeiten der Konstruktionen, die das Kind leisten muss. Man ist ermutigt, sich stärker in die Sichtweise des Kindes hineinzudenken, statt das Kind wiederholt erfolglos auf das „Offensichtliche“ hinzuweisen oder Prozeduren stur zu wiederholen, damit sie sich endlich einprägen. Es ist uns aber bewusst, dass die Verknüpfung mit den Problemen der rechenschwachen Kinder mit diesem Forschungsprojekt noch nicht zum Abschluss gebracht ist. Auch wird es sicher noch einige Zeit in Anspruch nehmen, die referierten Arbeiten in Curricula der Lehreraus- und -fortbildung umzusetzen.

3.5 Finger-Symbolmengen als Werkzeug bei der Konstruktion der Zahl

STEFFE UND COBB verfolgen den Entwicklungsweg eines Kindes, das sein Anzahlverständnis ausgehend vom Zählen (als Koordination von Zahlwortreihe und Zählgegenständen) konstruiert. Die Repräsentation einer Zahl durch eine Fingerkonstellation spielt dabei eine Rolle: sie wird zählend geschaffen, d. h. die Zahlwortreihe vermittelt zwischen den Zählgegenständen (Zählitems) und einer entsprechenden Fingerkonstellation, oder Fingerkonstellationen werden als Muster mit einem Zahlwort verknüpft. Die Fingerkonstellationen werden zur Steuerung des Zählens benutzt. Gleichzeitig weisen STEFFE UND COBB ihnen auch einen Einfluss auf die Konstruktion der Anzahl als Vereinigung von Einheiten zu: Es sind Muster, die zur Reflexion der Einheiten – der einzelnen Finger – im Ganzen der Konstellation anregen können.

BRISSIAUD (1992) verfolgt einen anderen Entwicklungsweg eines Kindes, der damit beginnt, dass es die Anzahl von Gegenständen mittels Eins-zu-Eins-Zuordnungen zu seinen Fingern durch ein Fingerbild gestisch „bezeichnet“ und die zugehörigen Zahlwörter erst später lernt. Davon ausgehend denkt Brissiaud darüber nach, wie das gestische und das verbale System der Repräsentation von Anzahlen in der Entwicklung des Zahlverständnisses miteinander verknüpft sein können und diskutiert Vor- und Nachteile zweier verschiedener Entwicklungswege.

3.5.1 Anzahl als analoge Geste: „Das ist mehr als zwei. Das ist so viel:  .“

Wie ein Kind die Anzahl einer Reihe von Gegenständen durch die Eins-zu-Eins-Abbildung auf eine Menge von Fingern darstellt, man könnte dazu vielleicht auch sagen „nonverbal bezeichnet“, wird in folgendem Zitat beschrieben. Der kleine Junge kennt nur die Zahlwörter eins und zwei. Eines Tages legt er spontan drei Gegenstände hin und sagt, während er drei Finger hebt: „Das ist mehr als zwei. Das ist so viel.“ Er führt dies weiter zu vier, fünf, sechs und sieben.

> „One day, I was giving arithmetic tests to a smart little four-year-old boy. The next day he came to see me to finish, and while waiting began to play with his tokens so he wouldn’t be bored. Spontaneously he began to use the finger procedure to say the number of tokens; in terms of vocabulary he only knew the names of the first two numbers. G. has three tokens in front of him and says, while lifting three fingers, „That’s more than two, it’s like that“; he adds a token and raises four fingers, „one more token“, and then lifts his whole left hand. He then adds a sixth token and raises the thumb of his right hand, the seventh token and raises the thumb and the index finger. I said to him „Really? All those tokens and you’re only showing me that many fingers!“ He takes his left hand out from under the table as though to say „Obviously, don’t you see?“ (DESCOEUDRES 1921, zitiert von BRISSIAUD, 1992, S. 44)

Das Beispiel zeigt, dass die Verwendung von Fingern nicht ein Nebenprodukt des Zählens ist (sein muss): Die Bezeichnung der Anzahl erfolgt durch unmittelbare Eins-zu-Eins-Zuordnung von Fingern und Objekten.
Wenn die Verwendung von Fingern durch unmittelbare Eins-zu-Eins-Zuordnung von Fingern und Objekten erfolgt, nennt BRISSIAUD die Fingerbilder „symbol sets“ oder *„finger symbol sets“*. Die Finger werden dabei zu Symbolen, weil sie für beliebige Gegenstände verwendet werden. Das Fingerbild repräsentiert eine Anzahl einer Menge von Gegenständen, deshalb ist vielleicht seine Bezeichnung als Menge (set) angemessen. Wir übertragen den Ausdruck wörtlich ins Deutsche: Symbolmenge aus Fingern oder Finger-Symbolmenge.

> „I will reserve the term symbol sets for instances when it is clear that the basis for finger use is one-to-one correspondence.“ (45)

Juliens Entwicklungsweg

Sohn Julien zeigt nun folgende Entwicklung: Zuerst konnte der Kleine einer Ansammlung von drei Objekten ein Fingerbild für drei zuordnen und umgekehrt (im Alter von 2;11 Jahren). Wenig später konnte er das Zahlwort „drei“ in das Fingerbild der Drei übersetzen (im Alter von 3 Jahren). Zuletzt konnte er dem Fingerbild das Zahlwort zuordnen (mit 3;2 Jahren). Dies ist in folgender Darstellung festgehalten (52):

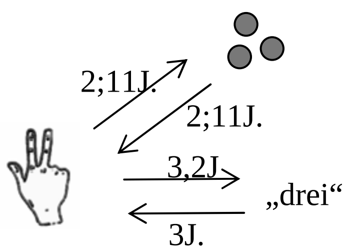


Abb. 3.3: Julien und die Drei

Erst als Julien 3;8 Jahre alt ist, beginnt der Vater, ihn im Zählen zu unterrichten. Er tut das deshalb, weil das Kind sich Zahlwörter nicht gut merken kann. Dabei geht er so vor:

> „I put the four tokens together, then move one toward Julien while saying „one“. I then move another token in Julien’s direction and say „two“. I then move yet another so that there are three tokens together before he says „three“, and again, in the same fashion, for „four“. When I have finished I address Julien.
> Father: „How many tokens are there?“
> Julien: „Four“ (raising four fingers).
> Father: „Your turn: Start and I’ll help you.“ (I take six tokens out of the pile.)
> „You count to know how many tokens there are.“ (I guided Juliens’s index finger to get the first token out.
> Julien: „One“ (he goes on moving tokens by himself), „two, three, (takes another token out but glances at me ...)
> Father (as Julien takes out new tokens): „Four, five, six.“
> Julien: „That’s how many, six?“
> Father (counting on his fingers one by one): „One two, three, four, five, six. Six; it’s like this (holding up one hand and the thumb of the other hand).“ (50 f.)

Wenn Julien am Ende fragt „Wie viele sind das, sechs?“ weiß er offenbar, dass „sechs“ eine Anzahl bedeutet und er behandelt das Zahlwort in einem kardinalen Sinn. Außerdem wünscht das Kind, dass Zahlwörter in Fingerbilder übersetzt werden. Dieses Bild erst scheint ihm zu sagen oder zu bedeuten, was „sechs“ ist.

Nachdem er zählen gelernt hatte, stellte Julien die Anzahl von Mengen bis zu vier Elemente erst gestisch (mit Fingern) dar, bevor er das entsprechende Zahlwort nannte. Größere Anzahlen jedoch bestimmte er zählend, um anschließend das Ergebnis in analoger Form zu interpretieren, indem er selbst spontan oder durch Abzählen der Finger ein Fingerbild herstellte, oder indem er einen Erwachsenen bat, die zugehörige Symbolmenge aus Fingern zu zeigen. Der Endzustand der Zählprozedur war daher die Geste, die Symbolmenge aus Fingern.

Brissiaud schließt daraus, dass Julien ein kardinales Konzept der Zahl konstruiert hatte, bevor er zählen lernte. Er übertrug es auf Zahlen größer als vier, d. h. er generalisierte es. Sein Konzept der Zahl als Anzahl gründete auf dem Gebrauch eines gestischen Systems analoger Zeichen und nicht auf der Zahlwortreihe. Das Konzept ging dem Zählen voran.
Für eine Generalisierung des Konzepts der Anzahl über Vier hinaus habe offenbar ausgereicht, dass Julien ermutigt wurde, Anzahlen bis 4 durch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung von Fingern darzustellen und dass diese Fingerbildern in Gesprächen mit ihm gebraucht wurden.
Als Julien zählen lernte, verhielt er sich in einer Weise, die nahelegt, dass er versuchte, das System der verbalen Zeichen für Anzahlen mit einem ursprünglichen und besser ausgearbeiteten System – dem analogen System der Symbolmengen aus Fingern, die aus einer Eins-zu-Eins-Zuordnung entstanden sind – zu koordinieren. Dies erklärt, warum sein Zählen von Anfang an kardinale Bedeutung hatte. (54)

Diese Grundlage gibt den Zahlwörtern nicht nur von Anfang an kardinale Bedeutung, sondern erleichtert auch ihre Konstruktion als eingebettete Folge (sieben als Teil der acht).

Im Alter von 4;6 Jahren gibt Julien folgendes Beispiel seines Zahlverständnisses:
Er sucht Fehler auf einem Suchbild. Er hat schon vier gefunden. Sein Vater fragt ihn, ob er noch weiß, wie viele Fehler es gibt. Julien sagt „Sechs“ und zeigt sechs Finger. Der Vater fragt ihn, wie viele er gefunden hat. Julien zählt auf dem Bild: „Vier“. Wie viele er noch finden müsse? Julien hält sofort seine beiden Daumen hoch: „Zwei“.

Abb. 3.4: So viele fehlen von 4 bis 6.

BRISSIAUD nimmt an, dass Julien beim Lösen solcher und anderer arithmetischer Aufgaben propriozeptive Wahrnehmung (Körperwahrnehmung) oder visuelle Vorstellungsbilder seiner Finger-Symbolmengen benutzt. Dabei zeigt er, dass er die Vier eingebettet in Sechs begreift und dass er auch Fingermuster quantifizieren kann, die von den Standard-Bildern abweichen. So, wenn er die Differenz durch zwei Daumen quantifiziert.

3.5.2 Zwei Arten, Anzahlen zu repräsentieren

Jeder Mensch entwickelt zwei Systeme der Repräsentation von Anzahlen: gestische Repräsentation durch eine Eins-zu-Eins entsprechende Menge von Fingern, bei der auf analoge Weise eine Vielheit durch eine andere äquivalente Vielheit ausgedrückt wird. Und die verbale Repräsentation durch ein Zahlwort, die sich aus der Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwörtern in ihrer konventionellen Reihenfolge entwickelt.

Juliens Beispiel zeigt, dass man auf verschiedenen Wegen zu den beiden Repräsentationssystemen gelangen kann und, wichtiger noch, dass die beiden Wege erhebliche Unterschiede in der konzeptuellen Entwicklung beinhalten (können). Damit befasst sich Brissiaud im Anschluss an die Fallschilderung.

3.5.3 Vergleich der beiden Entwicklungswege

Die beiden Entwicklungswege unterscheiden sich nicht nur, weil Kinder verschiedene Repräsentationen konstruieren, sondern auch weil die verschiedenen Repräsentationen mit verschiedenen Vorgehensweisen beim Problemlösen verknüpft sind. (Der Zusammenhang zwischen der Struktur des Wissens und seiner Anwendung ist im Schema-Begriff berücksichtigt und zum Ausdruck gebracht.)

Explizite Repräsentation der Anzahl

Beim Kind, das auf die Frage, wie viele sind es, die Gegenstände abzählt, steckt zunächst die quantitative Bedeutung der Sechs im Zählvorgang drin, ist darin eingekapselt („encapsulated“).

> „the words have no meaning outside of the action“ (BRISSIAUD, 1992, 60)

Bei der Repräsentation der Anzahl durch eine Finger-Symbolmenge hingegen hat diese von Anfang an explizit quantitative Bedeutung.

Dieser Unterschied hat Konsequenzen für die Entwicklung des Verständnisses der Zahl als Einheit, die aus Einheiten zusammengesetzt ist („unitization“[16]). Das Kind, das Anzahlen zählend bestimmt, wird an dieser Konstruktion vielleicht gehindert, weil das Zahlwort, das die Anzahl bezeichnet, zugleich in mehrdeutiger Weise einem einzigen Gegenstand zugeordnet ist, auf den man beim Zählen zeigt. Die Verwendung von Finger-Symbolmengen begünstigt dieses Konzept der Zahl, weil das Kind dabei eine Quantität durch eine Geste und ein Wort bezeichnet:

> „Initial use of symbol sets favors this „unitization“ because the child is prompted to produce one gesture and one word to designate a quantity. In contrast, initial use of counting is likely to create an obstacle because the word that designates the numerosity also refers in a ambiguous way to one of the objects pointed to.“ (S. 63)

Zweifache sensorische Kodierung und Gruppierung durch die Hand

Fingerbilder als symbolische Mengen haben weitere Besonderheiten, die sie von anderen Symbolmengen (etwa unstrukturierten Mengen) unterscheiden: Sie ermöglichen eine zweifache sensorische Kodierung (visuell und kinästhetisch). Außerdem wird durch die Hand eine spezielle Gruppierung gebildet. Daraus entwickelte Vorstellungen geben der Fünf eine besondere Bedeutung und erleichtern das Erkennen und Benennen von Anzahlen größer als Fünf. Die Fingerbilder, die Kinder benutzen, bilden eine eingebettete Sequenz, – erst wird eine Hand vollgemacht, dann wiederholen sich Konstellationen an der zweiten Hand. So ist das Verständnis der 6 als 5 und 1 oder der 7 als 5 und 2 usw. erleichtert.

> „Simply saying that these symbol sets are analog representations of numerosities does not do justice to them. The key issues are (a) that the natural grouping of 5 favors rapid labeling of finger symbol sets, and (b) that children tend to organize these finger symbol sets into a sequence of nested, seriated sets with differences they can quantify. (...)This is why a child may opt for finger sets as a preferential means for the representation of quantities.“ (S. 61 f.)

Brissiaud geht außerdem davon aus, dass die erwähnte Quantifizierung von Differenzen durch kinästhetische Kodierung und die Fünferbündelung erleichtert wird (S. 61).

Diese Angebote oder Hilfen der Finger-Symbolmengen sind wichtig für die Konstruktion der Zahl nicht nur als Anzahl, sondern als arithmetische Einheit, die charakterisiert ist durch Beziehungen zu anderen Zahlen: 9 ist eins mehr als 8; es ist 5 + 4, aber auch 6 + 3 (S. 64).

[16] Der Begriff „unitization“ bezeichnet hier das, was STEFFE UND COBB durch „integration operation“ bezeichnen. STEFFE UND COBB verwenden „unitization“ teilweise auch in diesem Sinn – nicht nur zur Bezeichnung des Aktes, der abstrakte Zähleinheiten (Einer) hervorbringt.

BRISSIAUD nennt diesen Schritt eine zweite Art der „unitization". Der Unterschied zwischen dieser Konstruktion und der notwendig vorausgehenden Konstruktion der Anzahl (eine Einheit, die aus Einzelnen zusammengesetzt ist) wird deutlich, wenn man versucht Anzahlen mit einem anderen verbalen System zu bezeichnen, z. B. mit dem Alphabet. Man kann eine Menge von H Elementen formen, indem man A, B, C usw. bis H zählt. Man kann die Anzahl dieser Menge durch H bezeichnen. Aber dieses H hat dann noch wenige Eigenschaften einer Zahl, es ist noch keine arithmetische Einheit, wie Brissiaud sagt. Es fehlt eine Beziehung zwischen H und E oder H und C. Um diese Beziehung herzustellen, müssen E in H eingebettet und Differenzen quantifiziert werden können.
Während Nachbarschaftsbeziehungen (9 ist 8 + 1 oder 9 ist 7 + 2) aufgrund einer Zahlwortreihe vielleicht noch leicht konstruiert/abgeleitet werden können, können Beziehungen wie 9 ist 5 + 4 oder 9 ist 6 + 3 wahrscheinlich sehr schlecht erinnert werden, wenn nicht ein Repräsentationssystem wie das der Fingerbilder vorliegt und zu Hilfe genommen werden kann.

Gleichgültig mit welcher Methode wir unterrichtet werden, konstruieren wir zwei Systeme zur Repräsentation von Anzahlen: ein gestisches und ein verbales. Brissiauds grundlegende Hypothese lautet, dass das gestische System fast nie ein Nebenprodukt des verbalen Systems ist. Wahrscheinlich habe die Fünfergruppe immer eine wichtige Rolle in der Konstruktion von Zahlbeziehungen gespielt, die keine Nachbarschaftsbeziehungen sind. Daher sei es naheliegend, dass ein analoges System, wie es z. B. von Julien entwickelt wurde, eine notwendige Grundlage für die Konstruktion eines logisch-mathematischen Systems, wie das der Zahl, ist – gleichgültig, welchen Entwicklungsweg wir wählen (oder auf welchen wir geführt werden).

> „whatever the teaching method chosen by parents and teachers, we all construct two systems of representations of numerosity: a gesticular system and a verbal system. My basic hypothesis is that the gesticular system, which we all construct, is almost never a byproduct of the verbal system of number designation. The grouping of 5 has probably always played a major role in the construction of numerical relationships that are not relations of proximity. It is, thus, likely that an analog system, such as the gesticular one developed by Julien, is, regardless of pathway, a necessary underpinning for the construction of a logico-mathematical system, such as number." (S. 65)

Die Fallstudie zeige, dass frühe Unterrichtung im Zählen nachteilig sein könne: Das Zählen sei dann fast immer „counting word tagging" (ein Anheften von Zahlwort-Etiketten) und die Zahlworte werden in einer Weise benutzt, die keine Grundlage für die erste oder zweite Form der „unitization" bietet („3 und 2 sind 5" ist bedeutungslos, wenn 3, 2 und 5 Etiketten sind). Wenn Zahlwörter hingegen anders gebraucht werden, können sie die Konstruktion eines gestischen Systems unterstützen, das die beiden Formen der „unitization" untermauert (freie Übersetzung des folgenden Zitates).

> „What emerges from the present case study is that very early teaching of counting can be fairly costly: Counting in this case is almost always counting word tagging and the number words are used in a way that does not lay the groundwork for either the first or the second form of unitization („3 and 2 makes 5" is meaningless when 3, 2, and 5 are tags). When they are used differently, number words can help to construct a gesticular system that can successfully buttress these two forms of unitization and that probably needs to be constructed anyway." (S. 65)

Ein gemeinsames Merkmal schwacher Schüler in den USA ist ihre Schwierigkeit, sich Basisfakten zu merken. Ihre Zählfertigkeiten hingegen sind nicht beeinträchtigt. Was wäre geschehen, fragt Brissiaud im folgenden Abschnitt, wenn diese Kinder einen anderen Weg genommen hätten. In manchen Fällen zögen frühe Entscheidungen vielleicht langfristige Schäden nach sich.

> „In some cases initial teaching of number tags may be detrimental in the long term. One of the common characteristics of learning-disabled children in the United States is their difficulty in memorizing number facts, and hence, in constructing arithmetic units. In contrast, their counting performances are unaffected. What would have happened if these children had taken another pathway? In general, children construct numbers regardless of path, but in some cases, the long term consequences of initial choices may weigh heavily in the balance.“ (65)

3.5.4 Gedanken zur Bedeutung der Analyse von Brissiaud

Die Kenntnis verschiedener Wege ist bedeutsam, wenn für ein besonderes Kind angemessene Hilfen gefunden werden sollen. Auch wir haben Kinder kennengelernt, die sich mit der Zahlwortreihe schwer taten und gerne Muster (v. a. Fingermuster) zu Hilfe nahmen. In diesen „nonverbalen Bezeichnungen“ von Anzahlen liegen viele Erkenntnismöglichkeiten.

BRISSIAUD macht deutlich, dass es sehr verwirrend sein kann, wenn sich der Zugang zu Zahlbedeutungen vorwiegend auf den Gebrauch der Zahlwortreihe beim Zählen stützt. Zahlwörter bezeichnen ein einzelnes Element im Zählvorgang und andererseits den ganzen Vorgang. Die Erinnerungsspur der Zahlwortreihe im Hinblick auf Teil-Ganzes-Beziehungen zu reflektieren, scheint schwieriger, weil vom Material des Aufgezeichneten stärker abstrahiert werden muss (um „vier – fünf – sechs – sieben“ als „vier“ zu verstehen), während beide Male dieselben Wörter im Spiel sind. Überraschend eindrucksvoll wird dem Erwachsenen die Schwierigkeit der Zahlzerlegung auf der Grundlage einer Wortreihe durch das Gedankenexperiment verdeutlicht, die Zahlen durch den Anfang des Alphabetes zu ersetzen.[17]

Auch Brissiauds Überlegungen regen zur Vermutung an, dass die Reflexion von Mustern, bei der simultan fassbare Teile herausgelöst werden, das Verständnis der Zerlegbarkeit von Zahlen unterstützen kann [18].

Im Unterschied zu MILZ (Abschnitt 3.2) macht BRISSIAUD einen Unterschied zwischen körperlichen Tatsachen oder Erfahrungen und der Verknüpfung von Zahl*bedeutungen* mit diesen Sachverhalten. Die Verwendung der Finger als „symbol sets“ ist nicht dasselbe wie die Verwendung der Finger überhaupt. Wenn die Finger als „symbol sets“ gesehen und verwendet werden, können visuelle und kinästhetische Eindrücke weitere Reflexionen über Zahlen und ihre Beziehungen unterstützen. Solange die Finger die Zahlreihe repräsentieren, d. h. gleichsam mit den Zahlen von 1 bis 10 beschriftet sind, ist das Nach-

[17] Denkbar ist außerdem, dass die Reflexion des Zählvorgangs auf Grundlage einer akustischen Aufzeichnung für manche Kinder schwieriger ist, als die einer visuellen und taktil-kinästhetischen Aufzeichnung.

[18] Dazu auch Kapitel 7 und BOBIS (1993) und FISCHER (1990).

denken über Zahlen und ihre Beziehungen beim Anblick der Fingerbilder anders beschaffen[19].

3.6 Protoquantitative Schemata und mentaler Zahlenstrahl

RESNICK (1983, 1989, 1991) charakterisiert die Entwicklung des mathematischen Verständnisses durch die in der Überschrift genannten Komponenten, die sich zunächst getrennt voneinander entwickeln, aber dann eine Verbindung (Integration) erfahren müssen, damit ein mathematisches Konzept der Zahl konstruiert ist.

Kinder kommen zur Schule mit zwei Arten von intuitiv entwickeltem Wissen, das für das Erlernen von Mathematik von Bedeutung ist: den protoquantitativen Schemata und dem mentalen Zahlenstrahl.

3.6.1 Protoquantitative Schemata

Einerseits wissen Kinder manches über den Vergleich von Mengen und Größen, über die Konsequenzen von Veränderungen an einer Menge, auch über die Konsequenzen von Veränderungen an einem Teil einer Menge für das Ganze – ihre Urteile erfolgen allerdings ohne (exakte) numerische Quantifikation, d. h. sie können die Beziehungen nicht durch Zahlen exakt beschreiben. Dieses Wissen, das im folgenden genauer charakterisiert wird, nennt Resnick daher „protoquantitatives Denken“. Die zugrunde liegende mentale Struktur wird „Protoquantitative Schemata“ genannt. Es sind ein Schema des Vergleichs („compare“), eins betreffend Vergrößern und Verkleinern („increase/decrease“) und eins betreffend das Verhältnis von Teilen zum Ganzen („part-whole“).

„compare schema“

Schon Kinder unter zwei Jahren können die Begriffe „groß“, „klein“, „viel“ und „wenig“ gebrauchen, um Urteile über Quantitäten abzugeben. Wenig später können sie sprachlich korrekt Vergleiche durchführen („größer“, „höher“ usw.) Grundlage bildet unmittelbare Wahrnehmung, es findet keine Art von Messung statt.

> „...they form a basis for eventual numerical comparison of quantity“ (RESNICK, 1991, 30)

[19] Siehe Abschnitt 4.2

„increase/decrease schema"

Drei- und vierjährige Kinder können etwas darüber sagen, was passiert, wenn man einer Menge etwas zufügt oder was wegnimmt: dann hat man mehr bzw. weniger als vorher. Sie wissen auch, dass man noch gleichviel hat, wenn nichts dazukam und nichts weggenommen wurde.

> „...children have the underpinnings of number conservation well before they can pass the standard Piagetian tests. They can be fooled by perceptual cues or language that distracts them from quantity, but they possess a basic understanding of addition, subtraction, and conservation. The protoquantitative increase/decrease schema is also the foundation for eventual understanding of unary addition and subtraction." (RESNICK, 1991, 32)

„part-whole schema"

Hier geht es um die Beziehungen zwischen einem Ganzen und Teilen: Ein Ganzes, das in zwei Teile zerlegt wurde, ist nicht mehr oder weniger geworden. Wenn ein Teil vergrößert wird, vergrößert sich das Ganze.

> „The protoquantitative part-whole schema is the foundation for later understanding of binary addition and subtraction and for several fundamental mathematical principles, such as the commutativity and associativity of addition and the complementarity of addition and subtraction. It also provides the framework for a concept of additive composition of number that underlies the place value system." (RESNICK, 1991, 32)

3.6.2 Mentaler Zahlenstrahl („mental number line")

Das Kind, das in die Schule kommt, hat in vielen Fällen eine Vorstellung von Zahlen konstruiert, die RESNICK als „mental number line" (mentaler Zahlenstrahl) bezeichnet und so charakterisiert: Zahlen korrespondieren zu Positionen in einer Kette. Eine Zahl ist mit der nachfolgenden verknüpft („nächste Zahl" oder „Nachfolger"). Die Zahlen, die später kommen, sind „größer".

Dieser mentale Zahlenstrahl befähigt das Kind zur Bestimmung von Quantitäten durch das Zählen. Er erlaubt ihm außerdem, Quantitäten zu vergleichen. Durch die Verbindung von Zählen und Vergleichen kann das Kind eine ganze Reihe arithmetischer Probleme lösen (RESNICK, 1983, 111).
Resnick nimmt an, dass die Zahlwörter allmählich aus einer Kette von Wörtern zu einer „Repräsentation von Quantitäten" werden, in der jeder Platz (Zahlname) für eine Anzahl steht. Die Umwandlung geschieht durch häufiges Durchführen des Zählens in der Absicht, eine Quantität (Anzahl) zu bestimmen.

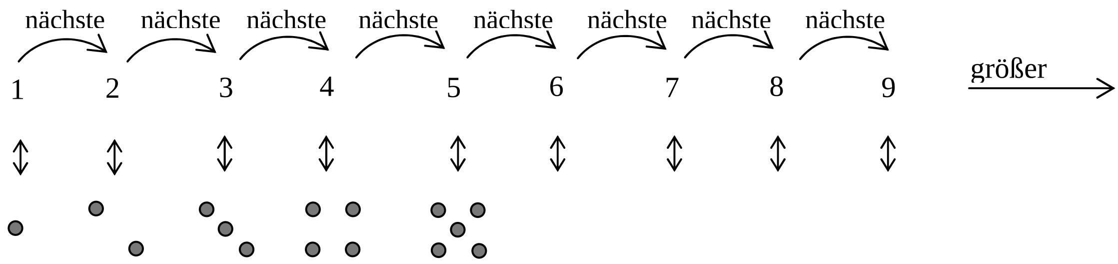


Abb. 3.5: Mentaler Zahlenstrahl (nach RESNICK, 1983, 110)

Wenn Kinder zwei Zahlen spontan vergleichen können, haben sie ein solches inneres Bild der Zahlwortreihe, auf dem sie die Positionen der genannten Zahlen unmittelbar anpeilen können (RESNICK, 1983, 113).
Wenn Kinder Textaufgaben („story problems“) mit Zählprozeduren (vorwärts zählend und rückwärts zählend) lösen, muss das zugrunde liegende Zahlverständnis nicht mehr umfassen als den beschriebenen Zahlenstrahl, u. U. ergänzt durch eine „Rückwärts-Richtung“, die „um eins kleiner oder weniger“ bedeutet.
Auf dieser Grundlage kann zwischen zwei Anzahlen nur die Beziehung „größer“ oder „kleiner“ hergestellt werden, im Sinne von: „kommt in der Reihe früher oder später“.

> „As long as the number line alone is used, there is no way to relate quantities to one another except as larger or smaller, further along or further back in the line.“ (RESNICK, 1983, 114)

Dies ändere sich dann, wenn Zahlen als Teil-Ganzes-Beziehungen interpretiert werden, eine Leistung, die Resnick als die größte konzeptuelle Errungenschaft der ersten Schuljahre bezeichnet.

> „Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships. With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children.“ (RESNICK, 1983, 114)

3.6.3 Getrennte Entwicklung

Untersuchungen und Beobachtungen geben Einblick, in welcher Weise das Wissen über das Zählen und das protoquantitative Wissen zunächst getrennte und voneinander isolierte Wissensbereiche sind. Beispielhaft soll die Untersuchung von IRWIN (1996) vorgestellt werden. Sie untersuchte die Teile-Ganzes-Schemata von 100 neuseeländischen Kindern zwischen 4 und 8 Jahren. Ziel war es, herauszufinden, ob die Kinder verstanden, dass die Vergrößerung oder Verkleinerung eines Teils einer Menge zur kovarianten Veränderung des Ganzen führt, und eine Veränderung in einem Teil, die durch eine Veränderung im anderen Teil kompensiert wird, zu keiner Veränderung des Ganzen. Bei einigen Aufgabenstellungen wurden nicht abgezählte Mengen verwendet: Damit sollten protoquantitave Schemata herausgefordert werden. In anderen Kontexten waren die verwendeten Mengen vom Kind gezählt worden: Hier verlangte die Lösung sowohl die Anwendung des Zählwissens als auch der protoquantitativen Schemata.

Protoquantitative Konzepte der Kinder

Die Aufgabenstellung erfolgte auf folgende Weise: Zwei Puppen (die rote und die gelbe, wegen ihrer Haarfarben) wurden verwendet. Das Kind wurde gebeten, eine Menge von Karamellbonbons gerecht zwischen den beiden zu verteilen. Dann erhielt jede Puppe zwei Schachteln, auf die ihr Anteil an den Bonbons beliebig verteilt wurde. Nachdem das Kind festgestellt hatte, dass die Aufteilung der Bonbons zwischen den Puppen noch immer gerecht sei, nahm die Untersucherin verschiedene Veränderungen vor: sie fügte bei einer Puppe ein Bonbon hinzu oder nahm eines weg oder nahm eines aus einer Schachtel der Puppe „Rot“ und steckte es in die zweite Schachtel derselben Puppe. Sie fragte das Kind jeweils nach der Auswirkung auf das Ganze („Is it still fair between Red and Yellow?“) Alle Veränderungen wurden im Kontext einer Geschichte vorgenommen. Die Kinder wurden außerdem nach einer Begründung ihres Urteils gefragt. Anschließend wurden sie mit der Meinung einer dritten Puppe konfrontiert, die jeweils die entgegengesetzte Meinung vertrat.

72 % der Vierjährigen, 81 % der Fünfjährigen und 92 % der Sechsjährigen zeigten ein unerschütterliches Verständnis der protoquantitativen Veränderungen der Teil-Ganzes- Beziehungen. Fehler entstanden oft daraus, dass sie sich auf die Veränderungen an einem Teil konzentrierten, wenn sie nach Veränderungen im Ganzen gefragt wurden. Insgesamt vermittelte die Untersuchung, dass Kinder von sechs Jahren die protoquantitativen Teil-Ganzes-Beziehungen verstehen.

Anzahl-Konzepte: Integration von Zähl- und Teil-Ganzes- Schemata

Bei einer anderen Aufgabenstellung zählte das Kind eine Reihe von Knöpfen. Die Untersucherin verschloss diese in einer Faust. Dann tat sie einen Teil der Knöpfe in die andere Hand und verschloss auch diese zu einer Faust. So wurden die Knöpfe in jeder Faust zu Teilen des vom Kind abgezählten Ganzen. Das Kind wurde jetzt aufgefordert, bestimmte Veränderungen vorzunehmen: einen Knopf aus einer Faust herauszunehmen oder zuzufügen oder einen von einer Hand in die nächste zu tun. Dann sollte es sagen, wie viele Knöpfe jetzt in beiden Händen zusammen sind.

Diese Aufgabe erwies sich als viel schwieriger: 58 % der Vierjährigen, 66 % der Fünfjährigen, 88 % der Sechsjährigen und 95 % der Siebenjährigen urteilten bei jeder Aufgabe richtig. Ihre Antworten und ihre Begründungen geben Einblick in die Entwicklung der Integration des Zählens und des protoquantitativen Verständnisses. Unter den Kinder, die zuvor protoquantitaves Verständnis gezeigt hatten, konnte man folgende Unterschiede beobachten:

- Sie hatten keine Idee, wie gezählte Mengen sich unter Veränderungen verhalten;
- Sie wissen, wie Zahlen um eins größer werden, nicht aber, wie sie um eins kleiner werden.

- Sie versuchen, sich zu erinnern, wie viele Knöpfe in jeder Hand waren, und auszurechnen, wie viele es zusammen sind.
- Sie beziehen sich auf das Ganze und urteilen richtig.

Kinder schätzen die Anzahlen der Teile

IRWIN bat außerdem die 5- und 6-Jährigen um eine Schätzung, wie viele Knöpfe in einer Hand sind, wenn 6 bzw. 8 Knöpfe in beiden Händen zusammen sind. Dabei zeigte sich, dass nur ein sehr kleiner Prozentsatz der Kinder eine angemessene Schätzung der Teile vornahm: viele Fünfjährige schätzten, dass in beiden Händen 6 (bzw. 8) sind, und dass sich, nachdem ein Knopf die Hände gewechselt hat, die 6 in 5 und 7 (bzw. die 8 in 7 und 9) aufteilen (75% der Antworten). Sechsjährige halfen sich durch die Schätzung „8 hier und keines dort" (55% der Antworten). 36% der Antworten der Sechsjährigen waren numerisch vernünftig, wie z. B. 6 aufgeteilt in 3 und 2.

3.6.4 Schritte der Integration von Zahlenstrahl und protoquantitativem Wissen

Irwin vermutet, dass die erste Verknüpfung zwischen den protoquantitativen Schemata und dem Zählschema das „increase/decrease" Schema und die Nachbarzahlen betrifft. Die mögliche additive Zusammensetzung der Zahlen verstehen Kinder erst später, lange nachdem das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema demonstriert wird, wenn keine Zahlen im Spiel sind.

Resnicks Hypothese ist, dass das Teile-Ganzes-Verständnis von Zahlen zuerst an kleinen Zahlen im Keim entwickelt wird oder werden sollte. Das bei Schuleintritt noch nicht ganz entwickelte Teile-Ganzes- Schema könne durch einfache Textaufgaben gefördert werden und dann wiederum das Zahlverständnis beeinflussen. Bei Problemstellungen, in denen es um die Addition und Subtraktion *kleiner* Zahlen geht, besteht die Chance, dass das Kind erkennt, dass das protoquantitative Teile-Ganzes-Schema auf Anzahlen angewendet werden kann.

Textaufgaben fördern die Integration des protoquantitativen Wissens mit Zahlen, da es in Textaufgaben um dieselben grundlegenden Beziehungen zwischen Mengen geht. Ihre Bearbeitung entwickelt nicht nur die mathematischen Problemlösefähigkeiten, sondern auch die Interpretation von Zahlen mittels der protoquantitativen Beziehungen, insbesondere der Beziehung der Teile zum Ganzen.[20]

> Thus, it seems plausible that children may possess at least a simple version of the Part-Whole schema at a quite young age but may not yet have learned all of the situations where it is appropriate to apply it. Addition and subtraction of small numbers, ..., may be one of the easy-to-recognize situations. Indeed, application of a primitive Part-Whole schema to simple number problems may be an important step in developing a more elaborate version, including many procedural connections, that will play a role in subsequent development of number knowledge." (RESNICK, 1983, 125)

[20] Daher kann man mit Textaufgaben auch Einblick in die Interpretation von Zahlen und ihrer Beziehungen durch das Kind erhalten.

„... a principal resource for promoting quantification of the schemas in school is the story problem. (...)
Because the stories involve the same basic relationships among quantities as the protoquantitative schemas, extensive practice in solving problems via counting should help children quantify their original schemas. Such practice should not only develop children's ability to solve problems using exact numerical measures but also lead them to interpret numbers themselves in terms of the relations specified by the protoquantitative schemas. Eventually, children should be able to construct an enriched meaning for numbers – treating numbers (rather than measured quantities of material) as the entities that are mentally compared, increased and decreased, or organized into parts and wholes.“ (RESNICK, 1991, 34)

Die Zerlegung von Zahlen deutet Resnick als Anwendung des Teile-Ganzes-Schemas auf Zahlen.

„The Part-Whole schema specifies relationships among triples of numbers. In the triple 2-5-7, for example, 7 is always the whole; 5 and 2 are always the parts. Together, 5 and 2 satisfy the equivalence constraint for the whole: 7. The relationship among 2, 5, and 7 holds whether the problem is given as 5 + 2 = ?, 7 – 5 = ?, 7 – 2 = ?, 2 + _ = 7, or _ + 5 = 7.“ (RESNICK, 1983, 115)

Wenn das Kind Zahlen mittels eines Teile-Ganzes-Schemas interpretieren kann, so sind in seinen Augen alle diese Aufgaben im Prinzip dieselbe.

3.6.5 Überlegungen zur Bedeutung der Beiträge von Resnick und Irwin

Das Bild der mentalen Zahl(wort)reihe hat uns in vielen Fällen geholfen, dem Vorgehen von Kindern Sinn zu geben und die Einschränkungen ihrer Leistungen zu erklären, indem wir uns vorstellten, dass das Kind allein auf der Grundlage einer solchen Vorstellung über Zahlen nachdenkt und mit ihnen rechnet.

Wenn Resnick sagt, dass Zahlwörter durch wiederholte Zähl-Erfahrungen zu Symbolen für die Gesamtheit einer gezählten Menge werden, sind damit verbundene Schwierigkeiten und Leistungen nicht (genügend) beachtet.

Wichtig ist es zu wissen, dass viele kleine Kinder Teil-Ganzes-Beziehungen angemessen behandeln, wenn es nur um ein mehr/weniger Urteil geht und keine Zahlen im Spiel sind. Eine wichtige Frage ist, wie dieses Wissen im Anfangsunterricht aktiviert und genutzt werden kann.

Recht bestechend ist die Sichtweise, dass und wie man sowohl Textaufgaben als auch Rechenaufgaben durch das Teile-Ganzes-Schema interpretieren kann – eine Sichtweise, die denjenigen, der sie beherrscht, ungemein flexibel und kompetent im Rechnen und Problemlösen macht. Additions-, Subtraktions- und Ergänzungsaufgaben bekommen bei einer Interpretation im Rahmen der Beziehung zweier Teil zum Ganzen eine Bedeutung, die von der Sichtweise der Addition als Zusammenlegen oder Hinzufügen (und der Subtraktion als Wegnehmen) verschieden ist. In welchem Prozess Kinder dieses Teile-Ganzes-Verständnis der Mathematik entfalten können, ist noch nicht ganz geklärt. Resnicks Überlegungen dazu (3.6.4) scheinen auch entwicklungspsychologisch vernünftig.

3.7 Zehner und Einer verstehen

> „We were surprised at how difficult it was for them to understand that each decade comprises a number sequence of numerosity ten and also that a counting by ten act could increment by ten more ones.“ (STEFFE & COBB, 1988, 233 f.)
>
> „Wir waren überrascht, wie schwierig es für sie war zu verstehen, dass jede Dekade aus einer Folge von zehn Zahlen besteht und dass das Zählen in Zehnerschritten um zehn Einzelne vermehrt.“ (Übersetzung des Zitates)

Dieses Zitat ist überraschend für jede/n, der das Stellenwertverständnis im Einklang mit in Baden-Württemberg weit verbreiteten Schulbüchern versteht. In einem davon wird vorgeschlagen, das Stellenwertverständnis in Klasse 2 und 3 mit folgenden Aufgabenstellungen zu überprüfen:

281 = ___ H ___ Z ___ E

□ □ |||| ⁙ = ______

347 = ______

zweiunddreißig = ||| ·· = 32

sechsundvierzig = ______ = ______

Abb. 3.6: Aufgaben zur Prüfung des Stellenwertverständnisses

So gesehen besteht das Stellenwertverständnis einfach darin, dass man sich merkt, welche Ziffer in welcher Position „Hunderter“ oder „Zehner“ oder „Einer“ genannt wird, wobei man die Richtung beachten muss. Außerdem sollte man Hunderter-, Zehner- und Einer-Symbole geläufig beherrschen und geschriebene wie gesprochene Zahlen in Darstellungen mit diesen Symbolen übersetzen können. Das war’s dann?

Als wir 24 Steine, die ein neunjähriger Junge gezählt hatte, in zwei Gruppen zu je zehn Steinen und vier weitere Steine zerlegt und ihn darauf hingewiesen hatten, dass 24 also 10 und 10 und 4 seien, kommentierte er: Man könne das so sehen, aber 24 seien es erst, wenn alle *zusammen* sind. Dabei schob er die Gruppen zusammen (Beispiel Peter 4 in 4.2). Warum missfällt Peter die gebündelte Darstellung? Warum sollen die Steine möglichst aneinanderstoßen?
Diese und andere Beobachtungen[1] an den im Projekt vorgestellten Kindern, die z. B. „40 + 8“ nicht auf Anhieb lösten, sondern durch Weiterzählen, und „14 – 10“, aber auch „14 + 10“ überhaupt nicht leicht fanden, regten uns zur Beschäftigung mit dem Stellenwertverständnis an (KAMII, 1986; STEFFE & COBB, 1988; COBB & WHEATLEY, 1988; ROSS, 1989; VAN DE WALLE, 1994). Unser Verständnis davon wandelte sich erheblich.

---
[1] Kapitel 4 bietet eine reiche Auswahl.

3.7.1 Die mehrstellige Zahl ohne Stellenwerte

VAN DE WALLE (1994) versucht (auf Seite 155) das Zahlverständnis eines Kindes *vor* der Entwicklung des Stellenwertverständnisses zu beschreiben: Ein Kind der ersten Klasse wird eine Menge von Bauklötzen einerweise abzählen, feststellen, dass es z. B. „dreiundfünfzig“ sind, und die Zahl auch aufschreiben können (vielleicht schreibt es auch 35 statt 53).

Legt man dem Kind eine Reihe von Karten vor, auf denen ein Zehnerrahmen abgebildet ist, und bespricht mit ihm, dass auf jeder Karte zehn Plätze sind, belegt die Plätze einer Karte mit Bauklötzen und fragt dann, wie viele Karten wie diese man braucht, um alle Bauklötze auf den Plätzen zu verteilen, wird das Kind oft antworten, dass man 53 Karten brauche oder dass es das nicht wisse und die Klötze darauf verteilen müsse, um es festzustellen.

Ebensowenig besteht 53 spontan aus 50 und 3 (oder gar 40 und 13), sondern zunächst ist es eine Sache aus sehr vielen (dreiundfünfzig) Zählschritten.

Viele dieser Kinder können nun leicht („with minimal instruction“, 155) lernen, dass die 5 in 53 an der *Zehner*stelle steht und dass es drei *Einer* gibt. Wenn sie Zehnerstangen und Einerwürfel kennengelernt haben, lernen Kinder auch leicht, eine Stange als „Zehner“ und einen Würfel als „Einer“ zu bezeichnen. Es ist aber möglich, dass dasselbe Kind nicht weiß, wie viele Einer man braucht, um einen Zehner zu machen![2]

Sie können lernen, 53 durch Zehnerstangen und Einerwürfel darzustellen, ohne zu wissen, dass die 5 fünf Gruppen von je Zehn repräsentiert.
Obwohl sie auch 63 in dieser Weise darstellen können, wissen sie nicht auf Anhieb, wie die Zahl heißt, die um 10 größer oder 10 mehr ist als 53.

> „This is where children are before they have constructed place-value ideas. It is on this knowledge that place-value concepts must be built. It is important to realize that children do many things that may suggest they understand these numbers, but that understanding may be rather superficial.“ (VAN DE WALLE, 1994, 155)

ROSS (1989) legte 60 Kindern aus der zweiten bis fünften Klasse eine Menge von Stäbchen vor und fragte, wie viele es seien. Die Kinder zählten ab und schrieben die Zahl auf, z. B. 25. Jetzt lenkte Ross die Aufmerksamkeit des Kindes nacheinander auf die beiden Ziffern der geschriebenen Zahl und fragte jeweils: „Hat dieser Teil deiner 25 etwas damit zu tun, wie viele Stäbchen du hast?“ („Does this part of your twenty-five have anything to do with how many sticks you have?“(48)). Einige Kinder konnten keinerlei Zusammenhang finden (die Zahl bedeutete einfach die ganze Menge), andere fanden eine Beziehung nur für die 5 (fünf Stäbchen), andere ordneten der Ziffer 5 fünf Stäbchen und der Ziffer 2 zwei Stäbchen zu, manche stellten eine Beziehung her zwischen 5 und fünf Stäbchen und 2 und den restlichen zwanzig Stäbchen (26 von 60 Schülern). Auch Ross beobachtete, dass Kinder Einer und Zehner zeigen und benennen konnten, *ohne* den jeweiligen Ziffern die entsprechenden Teile der Menge zuordnen zu können.

[2] Beispiel Sabine 4 in Abschnitt 4.3

Als die Zahl 52 durch fünf Zehnerstangen und zwei Einerwürfel gegeben war, waren natürlich viel mehr Kinder in der Lage eine Beziehung zwischen Ziffern und Darstellung herzustellen (44 von 60 Kindern). Wenn die 52 aber durch vier Zehnerstangen und 12 Einerwürfel gegeben war, waren nur 20 von 60 Kindern erfolgreich.

> „When, for example, I asked if the 2 and 5 in the numeral 52 had anything to do with how many base-ten blocks were on the table, the student was looking at five long purple ten-blocks and two tan unit-blocks. It is easy to see how the student might have proposed that the 5 represented the five purple blocks and yet have had no thought of tens or fifty in mind -- just five purple blocks.“ (ROSS, 1989, 48)

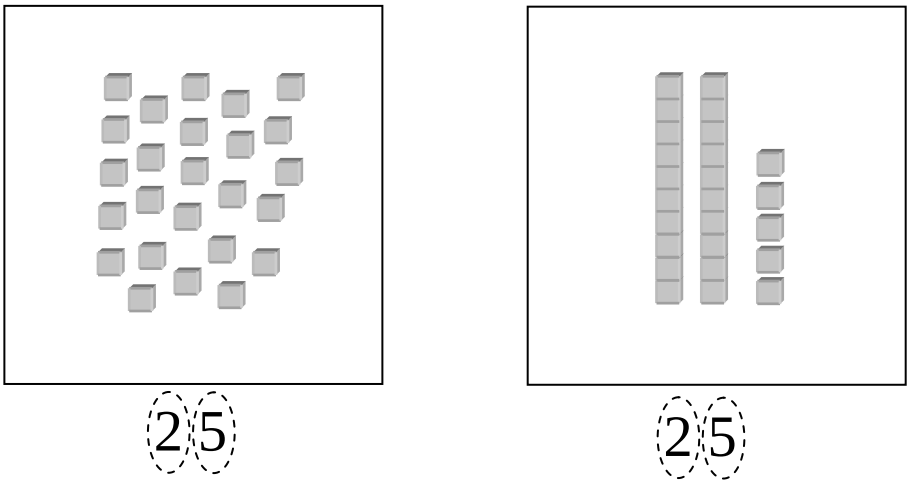


Abb. 3.7: „Does this part of your twenty-five have anything to do with how many blocks you have?“ (nach ROSS, 1989, 48)

3.7.2 Stellenwertverständnis als Integration von Konzepten und Prozeduren

Van de Walle stellt das Stellenwertverständnis als Integration dreier Komponenten (konzeptuelles Wissen über Zehner und Einer einerseits, und prozedurales Wissen darüber, wie Zahlwörter gebildet und Zahlen geschrieben werden, andererseits) dar (Abb. 3.8).

Bevor Kinder ein Stellenwertkonzept erwerben, gründet ihr Zahlverständnis auf einerweisem Abzählen einer ansonsten ungegliederten Menge diskreter, gleicher Elemente. Die schwierigste Erkenntnis beim Erwerb von *Stellenwertverständnis* ist, dass die Zahl auch eine durch Zehnergruppen und Einzelne strukturierte Menge symbolisiert. Zehnergruppen müssen mit einerweise abgezählten Mengen verknüpft werden. Van de Walle betont, dass das Herstellen einer Beziehung zwischen Zehnergruppen und Einzelnen nicht mit einer prozeduralen Leistung, wie z. B. dem Eintragen von Zehnergruppen in eine Stellenwerttabelle, gleichgesetzt werden darf.[21]

[21] Das scheint uns Erwachsenen aber naheliegend: Ich mache aus 53 Einzelnen 5 Gruppen zu zehn und 3 Übrige, trage dies in eine Stellenwerttabelle (Zehner/Einer) ein. Jetzt bemerke ich, aha, genau so sieht die geschriebene Zahl aus. Wenn ich das ein paarmal gemacht habe, denke ich mir zu der Zahl, die ich längst schreiben und lesen kann, sofort, welche Ziffer für Zehner und welche für Einer steht. Eigentlich nicht mehr als das Nachvollziehen einer Prozedur, oder? – Siehe dazu Abschnitt 3.8.

„The base ten or grouping ideas are the conceptual knowledge of place value, while counting, oral names and written names fall under the category of procedural knowledge. A relational understanding of place value integrates all of these ideas.“ (VAN DE WALLE, 157)

„we want to help them see that making groupings of ten and leftovers is a way of counting or showing that same quantity“. (VAN DE WALLE, 155)

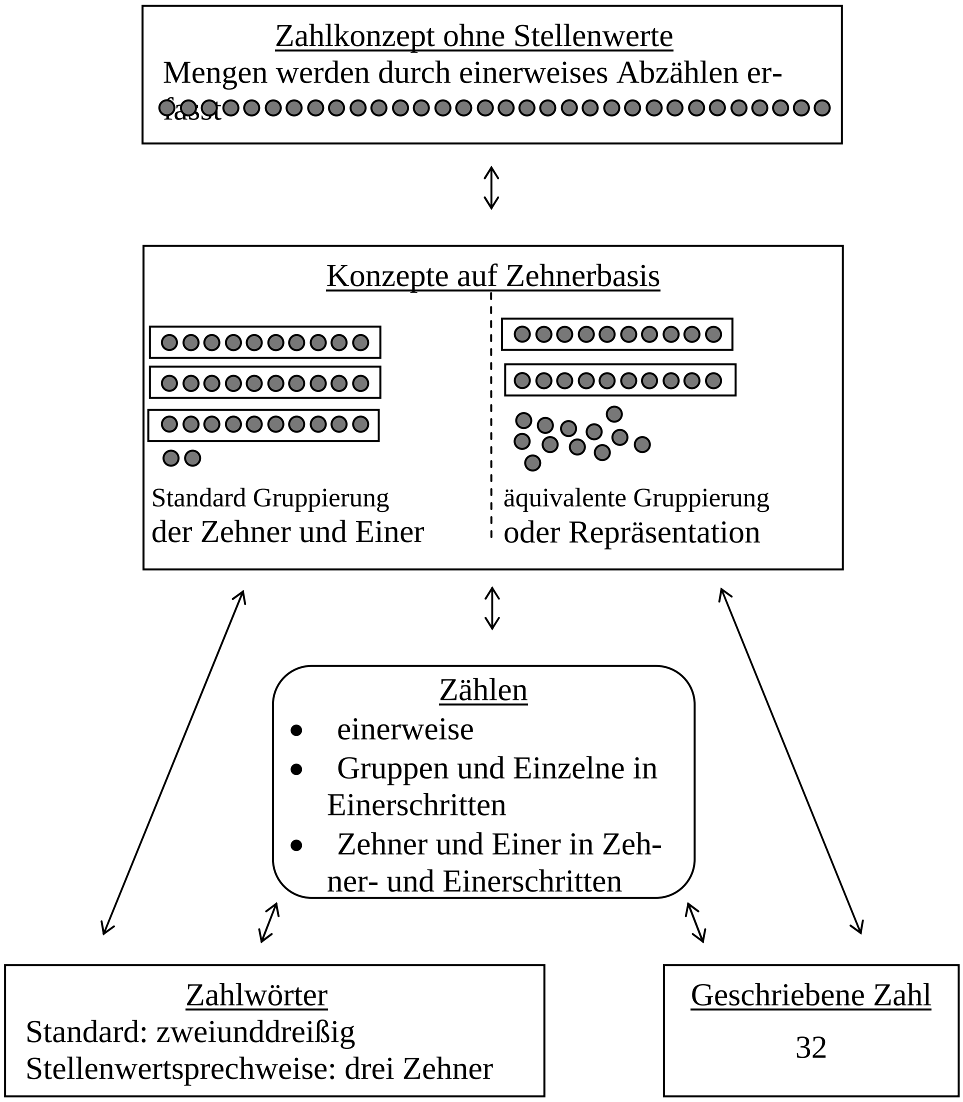


Abb. 3.8: Stellenwertverständnis als Integration von Konzepten auf Zehnerbasis mit Sprechweise und Schreibweise von Zahlen, vermittelt durch verschiedenartige Darstellungen derselben Zahl (auf Grundlage von Zehnergruppen und Einzelnen) und verschiedenartige Zählweisen (nach VAN DE WALLE, 1994, 158)

Das Ziel ist, dass Kinder die Idee konstruieren, dass man 53 auf verschiedene Weise sich vorstellen und begreifen kann, wie es in folgender Abb. 3.9 veranschaulicht ist. Die Gleichheit der drei verschiedenen Darstellungen soll aufgrund der Zehnergruppierung e-vident werden.

> „We want children to construct the idea that all of these are the same and that the sameness is clearly evident by virtue of the groupings of tens." (VAN DE WALLE, 155)

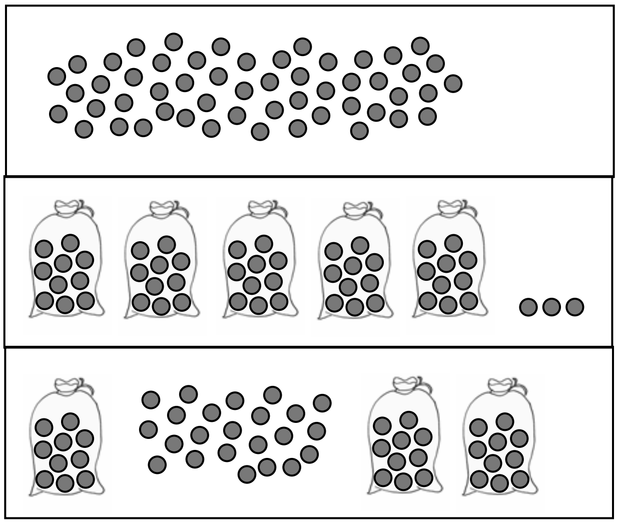


Abb. 3.9: „Dreiundfünfzig": immer dasselbe? (nach Abb. 9.1 VAN DE WALLE)

Die Gedanken über die Zehnerbündel müssen außerdem mit dem Sprechen von Zahlen und dem Schreiben von Zahlen verknüpft werden.

Van de Walle mißt der Verwendung der Sprache – insbesondere den verschiedenen Formen des Zählens – bei der Entwicklung dieser Idee und bei der Integration mit den prozeduralen Fähigkeiten eine wichtige – beziehungsstiftende – Rolle zu: Die Erfahrung, dass verschiedene Arten des Zählens (einerweise bzw. in Zehner- und Einerschritten) zum selben Ergebnis führen, kann das Kind, das über diese Erfahrung nachdenkt, zur Erkenntnis führen, dass 53 Einzelne „dasselbe" sind wie 5 Zehner und 3 Einzelne.

> „Just as counting is the vehicle with which children construct various relations on small numbers up to 10, counting plays a key role in constructing base-ten ideas about quantity and connecting these concepts to symbols and oral names for numbers.
> Children can count sets such as those in Figure 9.1 (Abb. 3.9) in three different ways. Each way helps children think about the quantities in a different way." (VAN DE WALLE, 156)

Die Verknüpfung von Zahlwort (dreiundfünfzig) und einer Stellenwert-Sprechweise der Zahl (fünf Zehner und drei Einer) fördert seiner Meinung nach die Integration von Bündelungen und Zahlwörtern.

3.8 Was Kinder anfangs unter „Zehn“ verstehen

So betiteln COBB UND WHEATLEY ihren Artikel von 1988, in dem sie das Verständnis von Kindern untersuchen, die am Anfang der zweiten Klasse stehen. Sie vergleichen das Vorgehen dieser Kinder mit dem anderer Kinder, die an einem Unterrichtsexperiment teilgenommen haben, in dem sie auf der Grundlage eines konstruktivistischen Ansatzes unterrichtet wurden. Das Unterrichtsexperiment ist dargestellt und ausgewertet in STEFFE UND COBB (1988). Wir verwenden bei der folgenden Darstellung beide Arbeiten.

> „The analysis is subtle in that it requires the reader to suspend his or her own knowledge of place value numeration. In effect, the reader is asked to make problematic his or her own ability to operate the units of ten and of one and thus reconstruct an arithmetical reality left long ago. (...) the effort is worthwhile in that much of what we take for granted is precisely what children have to construct if they are to develop an adequate understanding of the positional numeration system.“ (COBB & WHEATLEY, 4)

Im Unterrichtsexperiment wurde die Entwicklung der Kinder in ganz bestimmter Weise beeinflußt („activities that encourage the reorganization of counting activity“, COBB & WHEATLEY, 26), da die Forscher die Entwicklung in enger Verbindung mit Veränderungen des Zählschemas vermutet haben. Im Zählschema sehen sie ein fundamentales *numerisches Schema* von Kindern (STEFFE, 1992, 83)[22].

Auch wenn sie figuralen Mustern (strukturierte Zahlbilder in der Vorstellung des Kindes) für die Entwicklung des Verständnisses eine wichtige Rolle zuschreiben, bleibt in ihrem Konzept der Entwicklung die „Bearbeitung“ der Zahlreihe für die Entwicklung des Zahlverständnisses zentral. COBB UND WHEATLEY gehen jedoch auch auf einen anderen Entwicklungsweg ein, der zu einem anderen, aber gleichwertigen, entwickelten Konzept der Zehn führt (Abschnitt 3.8.4).

STEFFE UND COBB stellen den Kindern Aufgaben, bei denen mehrere Zahlen zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Sie weisen die Kinder nicht an, irgendwelche Gruppen herzustellen oder auf verschiedene Weise abzuzählen. Ihre Impulse beschränken sich auf die Auswahl von Aufgabenstellungen, deren Bearbeitung ihrer Ansicht nach die Entwicklung des Kindes fördern könnte. Die Aufgabenstellung ist entweder von der Darbietung sichtbarer und verdeckter „Squares“ und „Strips“, die aus zehn in einer Reihe aufgeklebten Squares hergestellt sind, begleitet oder erfolgt mit geschriebenen Zahlen (oder auch mit beidem).
Bei der Interpretation der Beobachtungen (Video aufgezeichnet und transkribiert) versuchen die Autoren, die Bedeutung der Aufgabe für das Kind zu erschließen und zwar in Bezug auf die Intention, die die Aufgabenstellung im Kind hervorruft, in bezug auf die Aktivitäten, die das Kind zur Lösung durchführt, und in bezug auf das, was das Kind als Ergebnis versteht. Das bedeutet, man versucht zu beurteilen, wie das Kind vorab beabsichtigt, die gestellte Aufgabe zu lösen, wie es das Problem für sich strukturiert und welches Vorgehen es auswählt. Es wird auch beachtet, ob es die Durchführung steuert und

[22] Numerisches Schema: geistige Struktur, aufgrund der sich ein Kind Anzahlen und Zahlen aneignet, bestehend aus assimilatorischen Operationen, die das Kind vor der Durchführung des Zählens anwenden kann.

überwacht und wie es dies leistet. Von Bedeutung sind Hinweise darauf, dass das Kind sein Vorgehen nachher reflektiert und/oder neu organisiert, und welche Bedeutung es seinem Ergebnis gibt.

Im folgenden ist vorausgesetzt, dass Kinder ein Zahlverständnis entwickelt haben, in dem die Zahl schon eine recht abstrakte Angelegenheit ist: Das Zahlwort „Sieben“ oder die Ziffer „7“ stehen für bzw. symbolisieren sieben Zählakte (gleichgültig ob von 1 bis 7 oder von 9 bis 15) und jedes Muster aus sieben Einheiten, welches das Kind sich vorstellen oder allgemein „repräsentieren“ kann. Sieben wird als eine zusammengesetzte Einheit („composite unit“) verstanden, „Einheit“ im Sinne einer Siebenheit. Bevor dieses Zahlverständnis erworben wurde, ist die Entwicklung einer Zehnervorstellung, geschweige denn eines Zehnerkonzeptes ausgeschlossen (vgl. Abschnitt 3.4).

3.8.1 „Ten as a composite unit“

Entsprechend verstehen diese Kinder „zehn“ zunächst als ein „composite unit“: Die Zahlen von 1 bis 10, zehn andere aufeinanderfolgende Zahlen, zehnmal weiterzählen, das Bild der zehn Finger und andere Bilder aus zehn Elementen. „10“ oder „zehn“ verweist im Sinne eines *Symbols* auf eine oder mehrere dieser Erfahrungen, die das Kind sich vorstellen oder antizipieren (beispielsweise in der Vorstellung zählen) kann, wenn es das Wort „zehn“ hört oder „10“ liest.

Liegen dem Kind 14 Elemente vor und sagt man ihm, dass zehn weitere versteckt sind, wird es die Anzahl der Elemente insgesamt durch Weiterzählen um zehn finden, wobei es sich an einem Zehnermuster (aus der Vorstellung oder mit Hilfe der Finger realisiert) orientiert, um das Zählen zu steuern.

Ist die Aufgabe so gestellt, dass 14 Elemente sichtbar sind, eine unbekannte Zahl versteckt und die Anzahl aller Elemente durch 24 angegeben ist, wird das Kind vielleicht die Zahlen von 15 bis 24 zählen und 10 als Ergebnis nennen. In beiden Fällen wird es 24 nicht als „ein Zehner mehr als 14“ verstehen. Unter Umständen auch dann nicht, wenn es schon mit Zehnerstangen oder -bündeln Bekanntschaft gemacht hat.[24]

Es ist lohnend, sich klarzumachen, dass das Kind in einer bestimmten Phase seiner Entwicklung nach dem Lösen der oben beschriebenen Aufgaben auch nicht 24 als „zehn mehr als 14“ verstehen wird. Dass es u. U. formuliert „14 und 10 gleich 24“, zieht diese Sichtweise nicht zwingend nach sich. Das Kind, das die Reihe 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 als eine Reihe von *zehn* Zahlen versteht, begreift sie nicht notwendig als eine „Zehn“ als Teil der 24. Aus kindlicher Sicht kann das Ergebnis „10“ einfach bedeuten oder festhalten, dass dies zehn Zahlen sind, während „24 ist um 10 größer als 14“ verlangt, dass eine bestimmte Beziehung zwischen 14, 10 und 24 hergestellt wird, die Be-

[24] Wenn wir 14 als eine Zehnerstange und vier einzelne Würfel präsentiert haben und dann eine weitere Zehnerstange hinzulegen, kann dasselbe Kind – mit einer gewissen Übung im Darstellen der Zahlen durch Zehner und Einer – sofort bemerken, dass es jetzt 24 seien. Aber anschließend kann es die Frage nach der Zahl, welche Zahl um 10 größer ist als 14 nicht spontan beantworten. – Vergleiche auch Beispiel Ola 1 in 4.2.

ziehung von Teilen zu einem Ganzen. Um die Reihe als Zehn in der 24 zu verstehen, muss es sie aus der 24 herauslösen, als eigene Zahl („composite unit“) betrachten (10) und sie zugleich in der 24 eingebettet lassen, neben dem anderen Teil (14).

Um „Zehn“ als Zehner in einer Zahl zu begreifen, muss das Kind diese Art von Teilen in einer Zahl konstruieren können. Die Bildung von Zehnergruppen zur neuartigen Darstellung einer Zahl muss also konzeptuell mit dem Verständnis der Zahl als Zusammensetzung aus anderen Zahlen in Beziehung gebracht werden. Und der Zehner muss mit Abschnitten der Zahlreihe verknüpft werden – insbesondere dann, wenn die Repräsentation der Zahl mittels der Zahlreihe individuell bevorzugt wird.

Wenn das Kind Zehnerstreifen in Zehnerschritten zählt, ist ein Streifen „a one rather than a ten even though the children may call it „ten““ (COBB & WHEATLEY, 1988, 5)

> „In summary, children for whom ten is a numerical composite are yet to construct ten as a unit of any kind. There are either ten ones or a single entitiy sometimes called „ten“ but not both simultaneously.
> We note in passing that textbook authors assume that children can „see“ both ten ones and one ten simultaneously when they look at colorfully depicted bundles of ten sticks (or whatever). A significant proportion of second graders, ..., are unable to do this even though it seems self-evident to the adult.“ (COBB & WHEATLEY, 1988, 5)

COBB UND WHEATLEY weisen hier darauf hin, dass es für das Kind nicht trivial und keine Angelegenheit der Wahrnehmung ist, Zehnerbündel zugleich als Eins und als Zehn zu sehen oder durch raschen Wechsel der Perspektive dieser Äquivalenz nahe zu kommen. (Dies illustriert auch eine Untersuchung von KAMII, 1986, 81f.).

3.8.2 „Ten as an abstract singleton“

Wichtig scheint nun, dass Kinder den Zehner als neue Einheit aus diesen Zehn entwickeln, dass der Zehner als Einheit konstruiert wird, die zehn andere Einheiten („Einer“) enthält (bezeichnet als „abstract composite unit“). Der Zehner kann jedoch auch als unabhängige Einheit geschaffen werden („abstract singleton“ statt „abstract composite unit“). Dies beobachten die Autoren in der Schulklasse, die nicht an dem Unterrichtsexperiment teilgenommen hat:

> „In many respects, they did not construct ten as a structure composed of ones when they operated in the school context – ten was, for them, one thing which was not itself composed of units. Consequently, the meanings the children gave to „ten“ and to „one“ were unrelated to each other – the tens were not made up of ones and the ones could not be constructed by unpacking a ten for the simple reason that there was no structure to unpack.“ (COBB & WHEATLEY, 1)

Zehner und Einer waren Kategorien, die nicht in Beziehung zueinander standen; die Zehner waren nicht aus Einern zusammengesetzt und aus einem Zehner konnten keine Einer ausgepackt werden, weil einfach nichts drin war.

Kinder, die Zehner als „abstract singletons“ auffassen, können lernen, sichtbares oder verdecktes (vorgestelltes) Zehnermaterial und Einermaterial koordiniert mit Zehnerreihe

(10, 20, 30, ...) und Einerschritten zu zählen. Sie können auch lernen, die Zahlwortreihe „4, 14, 24, 34 usw.“ zu bilden.
Additionsaufgaben oder additive Ergänzungsaufgaben können sie (nur) lösen, wenn sie erst Zehner und dann Einer zählen können, wobei entsprechend strukturiertes Material entweder (teilweise) vorliegt oder vorgestellt wird. Es kommt jedoch vor, dass diese Kinder plötzlich Zehnermaterial und Einermaterial nicht mehr unterscheiden (und z. B. drei Zehner und sechs Einer zu neun addieren).[25]

Ein Beispiel: Einem Kind werden vier Zehnerstreifen und vier Einerwürfel vorgelegt. Drei Zehnerstreifen („three strips“), so wird ihm gesagt, sind verdeckt. Es soll feststellen, wie viele es zusammen sind. Das Kind zählt die sichtbaren Zehnerstreifen und Würfel in Zehner- und Einerschritten und versucht von 44 einerweise weiterzuzählen, aber es kann nicht kontrollieren, um wie viel es weiterzählt, und gibt auf. -- Dieses Kind war vorher in der Lage, die Reihe „4, 14, 24, 34, 44“ usw. zu bilden.

> „He did not organize counting by ones into modules of ten (i.e., did not construct ten as an abstract composite unit) or attempt to count the squares of three hidden strips (i.e., did not take a re-presented strip as a numerical composite of ten).“ (COBB & WHEATLEY, 15)

Das Kind beginnt dann die sichtbaren Streifen und Würfel einerweise zu zählen und wird vom Interviewer dabei unterbrochen. Dieser fragt: „Vier und zehn dazu?“, worauf das Kind antwortet: „Ich muss zählen um es zusammenzurechnen – es ist schwierig.“ Ihm wird nun vorgeschlagen, einen anderen Weg zu suchen. Nach einigen Sekunden zählt das Kind die sichtbaren Streifen „10, 20, 30, 40“, dann die verdeckten Streifen „50, 60, 70“ und jetzt die sichtbaren Würfel „71, 72, 73, 74“.

> „The child’s inability to construct ten as either a numerical composite or an abstract composite unit strongly indicates that the count „10, 20, 30,...“ was not a curtailment of counting by ones. Instead each number word uttered referred to a visible or re-presented strip taken as a single object rather than to be ten squares on each strip. (...)
> The child’s solution involved coordinating counting tens as abstract singletons and counting ones as abstract units. This coordination was based solely on figural imagery. The child only had to be aware of what type of items he was counting – he re-presented either a strip as a single item or a square. Consequently, it is inferred that the child’s answer, „74“, did not signify a collection of 74 items but seven strips and four squares.“ (COBB & WHEATLEY, 16)

Es ist also möglich, dass ein Kind das Zählen von Zehnern und Einern (Zehner- und Einerschritte) koordinieren kann, gestützt auf die sichtbaren Unterschiede von gegenständlichen Zehnern und Einern (auf „figural imagery“ gestützt), ohne dass das Kind ein geeignetes inneres Bild von „Zehn“ aus zehn einzelnen Elementen hat, und ohne dass es im Geiste zehn Dinge zu einem Zehner verbinden kann.

Mit dem „singleton“ Verständnis der Zehn kann das Kind natürlich auch lernen, 46 in vier Zehner und sechs Einer zu „zerlegen“. Es wird aber nicht wissen, dass aus 46 Würfeln vier Reihen mit zehn Würfel gebildet werden können, weil es vier Zehner nicht mit vier mal zehn Würfel in Verbindung bringt.[3] Es versagt immer dann, wenn zehn Schritte

---

[25] Man kann wahrscheinlich noch andere Vorgehensweisen dazu zählen, wie einige Formen des Rechnens mit Zehnern und Einern getrennt, bei denen deutlich wird, dass mit Zehnern und Einern getrennt operiert wird, die ohne Verbindung zueinander sind.
[3] Diskrepanz, die wir oft beobachtet haben: Abschnitte 4.2 und 4.3.

als ein Zehner begriffen oder ein Zehner in zehn Einer „ausgepackt“ oder „aufgelöst“ werden muss.

3.8.3 „Ten as abstract composite unit“

Was charakterisiert das Kind, das den Zehner als „abstract composite unit“ konstruiert hat?
Das Kind kennt Zehner, die es als ein Ding behandeln kann – wenn es in Zehnerschritten zählt und Zahlen durch gegenständliche Zehner und Einer darstellt – , und dieser Zehner besitzt eine „Zehnheit“ („tenness“) – unter gewissen Voraussetzungen.

Das Kind kann koordiniert in Zehner- und Einerschritten zählen, auch in der Mitte einer Dekade beginnend. Es braucht allerdings zumindest die Vorstellung, dass die Zehner und Einer, die es zählt, als Zehnerbündel und Einer vorliegen. Es ist „dependent on representations of some kind“ (COBB & WHEATLEY, 7). So kann es von 34, die als 3 Zehnerstangen und vier Einerwürfel vorliegt, auf 67 durch drei Zehnerschritte und drei Einerschritte ergänzen, wenn es sich die 67 als 6 Zehnerstangen und 7 Einerwürfel vorstellt. Es gerät jedoch in Schwierigkeiten, wenn es nicht durch irgendeinen Hinweis dazu veranlaßt ist, sich die Zahlen als Zehner-Einer- Kombinationen zu denken. Dann wird es versuchen, in Einerschritten zu zählen, erfolgreich, wenn es anhand der Finger (drei mal alle Finger und nochmal drei) durch begleitende und anschließende Reflexion die Zahl der Schritte erfassen kann – ähnlich wie Tyrone im folgenden Beispiel.

Die Beziehung zwischen Zehner und zehn Einer wird nur realisiert, wenn anschauliche Stütze gegeben ist.
Tyrone ergänzt von 30 bis 52 in Einerschritten und reorganisiert seine Erfahrung dann zu „zwei Zehner und zwei Einer“. Er stützt sich dabei auf das Fingermuster für zehn, das von zwei offenen Händen gebildet wird. Dieses Muster ergab sich zweimal, als er zählte (COBB & WHEATLEY, 6).

Ähnlich kann ein Kind die Zählschritte 53 bis 62 anhand eines Musters (in der Regel das aus den beiden Händen) als „zehn mehr“ erfassen. In Verbindung mit vorliegendem Material, das Zehner und Einer symbolisiert, kann es das Zählen in Zehnerschritten „52, 62, 72“ als Abkürzung für zehn kurze Einerschritte verstehen.

Aber in gewisser Weise (genau genommen) vergrößert das Zählen in Zehnerschritten nicht um zehn. Die gezählten Zehner bleiben „nebeneinander“ stehen: ein Zehner, noch ein Zehner, also zwei Zehner. Oft kann das Kind dies in einem weiteren Schritt in „zwanzig“ übersetzen, doch nur aufgrund einer sprachlichen Regel. Die Zahl, die dabei entsteht, ist nicht einheitlich aus Einern zusammengesetzt. An manchen, für Erwachsene unerklärlichen Verhaltensweisen kann man sehen, dass die Zehner nicht in eine Zahl integriert werden, die gleichmäßig aus Einern zusammengesetzt ist.

Ein Beispiel: Vor Jason werden 58 Würfel hingelegt. Der Lehrer legt noch eine Handvoll dazu und sagt, dass er jetzt 78 habe. „Wie viele habe ich dir noch gegeben?“ Jason sagt, es seien zwei Zehner. Der Lehrer bestätigt dies und fragt, wie viele einzelne Würfel er ihm gegeben habe. Jason beginnt daraufhin zu zählen, von 58 bis 78.

> „This indicates that Jason counted by one or counted by ten, depending on his intentions of finding how many more ones or how many more tens there were. (...) the results of counting-on by ten and counting on by one were not related. (...) We know from some of Jason’s other solutions that „ten ones“ and „one ten“ were related expressions in situations where there was a pile of ten blocks he could use.“ (STEFFE & COBB, 214)

Ein anderes Beispiel: Ein Junge ergänzt von 42 auf 76 durch 52, 62, 72 (zeigt drei Finger der rechten Hand) und dann streckt er nacheinander vier Finger der linken Hand, während er zählt 73, 74, 75, 76. Er schließt daraus, dass 34 Würfel dazugekommen sind. Die Autoren fragen sich nun, ob „drei Zehner und vier Einer sind 34“ für den Jungen bedeutet, dass er eine Zahl bildet, die gleichmäßig aus Einern zusammengesetzt ist („resulted in a composite unit of 34 ones“). Sie haben Zweifel daran, denn bei einer anderen Aufgabe geschieht folgendes:

L: Dieses Mal haben wir 27 verdeckt und wir gehen bis zu 62
J: Siebenundzwanzig – 37, 47, 57, 67 (streckt Finger der rechten Hand)
L: Ist 67 schon zu weit?
J: Nee
L: Wir wollen bis zweiundsechzig gehen.
J: Oh, minus fünf!
L: OK. Minus fünf. Das sind die Fünf, die du wegnehmen willst. (Jason hat seine linke Hand geöffnet.) Wie viele hast du hier? (er zeigt auf Jasons rechte Hand).
J: Vier Zehner
L: Wie viele Einer?
J: Vierzig.
L: Und du nimmst fünf weg. Wie viele bleiben übrig?
J: (schließt seine linke Hand) Vier Zehner!
L: Du hast vierzig. Nimm fünf von den vier Zehnern weg.
J. (krümmt einen Finger der rechten Hand und streckt ihn wieder) Hm. (schaut verblüfft)
L: Weißt du’s?
J: (schüttelt den Kopf „Nein“)

Bei einer ähnlichen Aufgabe hatte Jason selbst bemerkt, dass er beim Zählen in Zehnerschritten zu einer Zahl gelangte, die zu groß, aber in derselben Dekade war, wie die Zahl, die er zu erreichen suchte. Er zählte sogar in fünf Einerschritten rückwärts, um die gesuchte Zahl zu erreichen, aber er wußte nicht, was er mit den fünf Einern machen sollte. Er dachte sie sich nicht in den letzten Zehner, den er zählend hergestellt hatte, eingeschlossen. In ähnlicher Weise schloß er in der oben zitierten Situation die fünf Einer nicht in einen der vier Zehner ein. (Wir haben aus STEFFE & COBB, 1988, S. 215 f. übersetzt.)

Die Autoren interpretieren, dass – obschon das getrennte Zählen an der rechten und linken Hand zu Jasons Verwirrung beigetragen haben mag – die wesentliche Ursache seiner Schwierigkeiten darin zu vermuten ist, dass die von ihm gezählten Zehner keine Einer in sich trugen, auch nicht der letzte Zehner. Deshalb konnte er seinen Zehner nicht auspacken, einen Teil davon wegnehmen und den Rest den anderen Zehnern zufügen. Er hat die Einheiten von Zehnern und Einern nicht reversibel koordiniert.

> „He did not „unpack“ this units of ten into its constituent unit items, take some of them away, and then apply the integration operation to those that remained. In short, he did not reversibly coordinate the units of ten and one.“ (STEFFE & COBB, 216)

Im folgenden Zitat charakterisieren die Autoren die Bedingungen und Lücken des kindlichen Verständnisses auf dieser Stufe zusammenfassend: Um ein Zahlenproblem mit Hilfe von Zehnern und Einern zu lösen, ist das Kind noch abhängig von der Vorstellung eines gegenständlichen Zehners. Außerdem vergrößert das Zählen in Zehnerschritten nicht um zehn. Das Kind schüttet gewissermaßen nicht einen *Zehner*schritt (einen Zehner) als *zehn* Einer(schritte) in ein Gefäß, das nachher die gesamte Zahl aus Einern enthält.
Es fällt dem Kind schwer, bei der Durchführung eines schriftlichen Rechenverfahrens (rein auf Zahlenebene) die Zahlen als Kombinationen von „echten“ Zehnern (zehn Einern entsprechend) und Einern zu denken.

> „Because children at this level are dependent on re-presentation of some kind to construct units of ten and because counting by ten does not increment by ten, the children have extreme difficulty in structuring a number such as thirty-nine as three composite units of ten and nine units of one in purely symbolic settings such as using a paper-and-pencil algorithm to add two-digit numbers.
>
> Further, even when suitable materials are available to support their construction of abstract composite units of ten, a number such as thirty-nine loses ist thirty-nineness. The children can construct either three abstract composite units of ten and nine units of one or thirty-nine as a single entity composed of one but not both simultaneously.
>
> But the ability to simultaneously construct a numerical whole and the units of ten and one that compose it is precisely what is required to understand the conventional paper-and-pencil algorithms in a meaningful way.“ (COBB & WHEATLEY, 7).

Die Zahl als Kombination aus Zehner und Einern und die Zahl, die einheitlich aus Einern zusammengesetzt gedacht wird, stehen offenbar eine Zeitlang nebeneinander, sind nur durch Anschauungsmaterial und eine sprachliche Regel aufeinander bezogen, aber noch nicht durch eine reversible Beziehung zwischen Zehnern und Einern auf mentaler Ebene.
Zahlen als Zehner-Einer-Kombinationen scheinen anfangs unvermeidlich getrennt vom „alten“ Zahlverständnis konstruiert zu werden, auch dann, wenn das Kind einen Zehner allein als zehn Einer versteht. Das zeigen Kinder auch dadurch, dass sie sich beim Rechnen entweder nur auf der Zehner-Einer Ebene bewegen, ohne reversible Koordination von Zehnern und Einern, was sie durch Fehler bei Zehnerüber- oder -unterschreitungen belegen, oder ganz auf der Einer-Ebene vorwärts- und rückwärts zählend vorgehen (Beispiele von Britta, Nina u. a. in 4.6).

3.8.4 „Ten as an iterable unit or abstract collectible unit“

Wenn Kinder diese beiden Einschränkungen überwinden, haben sie Zehn als „iterable unit“ konstruiert, oder in äquivalenter Bedeutung: Zehn als „abstract collectible unit“. Die Kinder können dann, ohne dass irgendein Hinweis auf Zehner- und Einermaterial vorliegt, in Zehnern und Einern (bzw. in Zehner- und Einerschritten) denken und diese – nunmehr abstrakten mentalen – Einheiten beim Problemlösen einsetzen. Eine unbekannte Größe wird von ihnen schon im voraus – antizipierend – durch Zehner und Einer strukturiert, ohne dass irgendein Material dies nahelegt oder die Struktur vorgibt.
Außerdem stehen die Zehner, die die Kinder verwenden, in neuer Beziehung zu dem anderen Verständnis der Zahl, bei dem sie ein aus Einern zusammengesetztes Ganzes ist. Ein Zehner steht für zehn aus einem Ganzen, das aus Einern besteht, zwei Zehner stehen für zwanzig aus einem Ganzen, das aus Einern besteht.

Das Kind mißt Größen jetzt mit Zehnern und Einern aus, wobei der Zehner wirklich 10 Einern entspricht und jeweils um 10 vergrößert oder verkleinert. Zehner- und Einermaß stehen dem Kind mental zur Verfügung und strukturieren sein Verständnis des Problems und seine Lösung vor der Durchführung. Das Ergebnis ist für das Kind eine Zahl mit dem Charakter eines „composite unit“, in dem Zehner und Einer integriert sind, nicht nebeneinander gestellt.

Beispiel für „ten as an iterable unit“:

Tyrone löst die Aufgabe 71 – □ = 39, indem er zählt „61, 51, 41“ – er zeigt jetzt drei Finger –, fährt fort: „41, 40, 39“ und schlußfolgert: „32“.
Die Autoren interpretieren, dass Tyrone den unbekannten Subtrahenden als ein Ganzes verstanden hat, das er durch das Zählen in Zehnergruppen und Einer zerlegen und erfassen wollte. Er löste wiederholt zehn aus einem unbekannten Ganzen heraus, bis er es – durch drei Zehner und zwei Einer – ausgeschöpft hat. Früher habe das Kind nur das in Zehnerschritten zählen können, was schon gruppiert vorlag oder was es zumindest in seiner Vorstellung sich als Zehner und Einer zurecht gelegt hatte. Sie verwenden den Begriff „iterable“ für dieses Verständnis des Zehners, um auszudrücken, dass das Kind – Schritt um Schritt – das gesuchte Ganze in Zehner (entsprechend dem Herstellen von Gruppen) und verbleibende Einer zerlegt.

> „Tyrone anticipated that he could construct the unknown subtrahend by iterating a composite unit of ten and then a unit of one until he reached „39“. The unknown subtrahend was, for him, a single entity that could simultaneously be structured in terms of composite units of ten and units of one before he counted.“ (COBB & WHEATLEY, 7)

> „The term „iterating“ is used to emphasize that Tyrone constructed composite units of ten as he counted – they were not waiting to be counted. This contrasts with the child,who creates and then counts abstract composite units of ten because he or she believes that strips of ten are hidden beneath a cloth.“ (COBB & WHEATLEY, 7)

> „Ten was an iterable unit in the backward direction that he coordinated with counting backward by one to specify the numerosity of the remainder of 39 in 71. Solutions that involve iterating by ten seemed to require the ability to disembed ten from a numerical whole of unspecified numerosity.“ (STEFFE & COBB, 168)

Beispiel für „ten as an abstract collectible unit“:

Carrie löst die Aufgabe 37 + 24 korrekt und begründet ihr Ergebnis folgendermaßen: „I knew there were 50 you make 60 and you have one left over.“

Übereinstimmende Qualitäten des Zehners als „iterable unit“ und des Zehners als „abstract collectible unit“ sind, dass beide Einheiten und Zehnheiten zugleich sind, und dass das Kind sie anwendet, ohne dass irgendein Hinweis auf gegenständliche Repräsentanten gegeben ist. Aus Carries Lösung kann man auch schließen, dass Zehner und Einer reversibel koordiniert werden. Als „iterable unit“ ist der Zehner eher aus dem Zählen und der Zahl als Folge von Zählakten entwickelt. Beim „abstract collectible unit“ haben vermutlich Mengen und Bündelungen zur Herausbildung des Zehnerverständnisses beigetragen.

> „Clearly, the tens she constructed were simultaneously both single entities and composites of ten ones. (...) „she did not attempt to increase 37 by 24 but instead constructed units of ten and of one when she gave meaning to each numeral and then added units of the same rank. Her concept of ten will be called ten as an abstract collectible unit. This unit is, like ten as an abstract composite unit, a single entitiy that is itself composed of ten ones. (...) As with ten as an iterable unit, the child who as constructed ten as an abstract collectible unit can take abstract composite units as given in the absence of suitable materials. This unit of ten differs from the iterable unit in the history of its construction and in the way it might be filled out in problematic situations (i.e., re-presenting collections rather than counting activity).“ (COBB & WHEATLEY, 12)

Während die Autoren die Konstruktion der Zehn als „abstract collectible unit“ der Konstruktion als „iterable unit“ gleichstellen und günstig beurteilen, sehen sie in der Konstruktion als „abstract singleton“ eine hinderliche Leistung. Diese Konstruktion ist ungünstig, nicht nur weil sie ein Verständnis des Übertrags verhindert, sondern mehr noch, weil die Konstruktion der Zehn als „iterable unit“ einhergeht mit dem Erwerb allgemeiner Denkoperationen, die zur Konstruktion und Koordination von Einheiten verschiedener Art (verschiedenen Ranges) in verschiedenen Situationen befähigten.

> „the two subjects of a longitudinal teaching experiment who were able to construct ten as an iterable unit were immediately able to generalize their activity to situations involving multiplication and division. These two children had not just constructed relatively sophisticated units of ten. They had constructed powerful conceptual operations that enabled them to construct and coordinate two units of different ranks in a wide variety of situations.
> In short, when efficient instruction is construed to mean the development of flexible, generalizable, conceptually based methods and the encouragement of intellectual autonomy, we feel that an approach that acknowledges that substantive mathematical learning is a problem solving process and encourages the construction of self-generated algorithms is more appropriate than one that stresses empirical abstraction from grouped collections.“ (COBB & WHEATLEY, 25)

Die Herausarbeitung der möglichen und zur Erreichung bestimmter Ziele notwendigen „powerful conceptual operations“ und ihre Würdigung macht vermutlich die ganz besondere Qualität der Arbeit dieser Forscher aus, auf die wir an anderer Stelle schon eingegangen sind (3.6).
Die Autoren vermuten, dass es verschiedene Wege zu einer guten konzeptuellen Grundlage der Zehn gibt. Sie selbst haben sich auf die Reorganisierung des Zählens konzentriert, halten es aber für möglich, dass die Entwicklung mancher Kinder von Tätigkeiten

ausgeht, die räumliche Visualisierungen beinhalten, z. B. Vorstellungen von der Zehn als zwei geöffnete Hände oder einer Konfiguration von 10 Punkten, die aufgrund ihrer Zehnheit in der Einheit eine angemessene Abstraktion des Zehners nicht behindern.

> „Thus far we have focused on activities that encourage the reorganization of counting activity. It is also possible that some children might abstract from activities that involve spatial visualization. For example, a child could initially re-present two open hands or a specific spatial configuration of ten dots to construct numerical composites or abstract composite units of ten. In contrast to ten as an abstract singleton, these re-presentations both involve ten individual, potentially countable units. Ten frame activities are appropriate in this regard.“ (Cobb & Wheatley, 26)

Kritisch sehen sie jedoch den Ansatz, bei dem das Kind in erster Linie instruiert wird, den Ziffern einer Zahl je nach Position Werte zuzuordnen, auch wenn dabei Zehnerbündel oder Zehnerstangen oder ähnliches eingesetzt werden. Dabei kann der Stellenwert zu einer Sache werden, bei der es um die Koordination konzeptuell unverbundener Zehner und Einer auf der Ebene „figuraler Repräsentationen“ geht, anstatt um konzeptuelle Abstraktion (COBB & WHEATLEY, 26). Dann weiß das Kind, dass die Zahl 53 aus fünf Zehnern und drei Einern besteht und kann sie in dieser Weise darstellen, aber diese Bedeutung steht fast unverbunden neben der Bedeutung der 53 als Zahlwortreihe von 1 bis 53 oder als dreiundfünfzig einzelne Dinge (STEFFE & COBB, 224). Das heißt auch, dass die Verwendung gegenständlicher Zehner (gebündelt oder am Stück) im Unterricht nicht per se und nicht immer von Vorteil ist. Sie kann die konzeptuelle Arbeit auch behindern, wenn die Kinder durch Instruktion lernen, Zahlen mechanisch in Zehner und Einer zu übersetzen, ohne dass sie diese beiden Einheiten durch das Lösen geeigneter Probleme selbständig konstruiert haben. Zehner haben dann für das Kind überwiegend den Charakter von „singletons“. Vermutlich kommt den Aufgabenstellungen, die ein Kind erhält, und der Förderung eigener Begründungen und Überprüfungen/Kontrollen eine wichtige Rolle zu.

3.9 Bemerkungen und Schlußfolgerungen zu den Beiträgen zum Stellenwertverständnis

Zahl und Stellenwerte aus kindlicher Sicht rekonstruieren

Das Stellenwertverständnis entwickelt sich allmählich in Stufen, die nicht leicht zu beschreiben sind. Das liegt u. a. daran, dass die mathematische Analyse der Stellenwerte, die man in wenigen Sätzen festhalten kann (ROSS, 1986, 47), für die Analyse der vom Kind zu leistenden Neustrukturierung seines Zahlverständnisses nur wenig hilfreich ist. Wir müssen die Perspektive wechseln: Was versteht das Kind unter einer Zahl, wenn diese für das Kind noch keine Stellenwerte, sondern nur *einen* Gesamtwert hat? Wie bekommt dieser Wert allmählich weitere Bedeutungen, in denen Zehner und Einer die Bausteine der Zahl sind? Welches Verständnis der Zehner und Einer befähigt zu flexiblem und verständigem Rechnen rein auf Zahlenebene?

Von der Zahl ohne Stellenwerte zur Zahl mit Stellenwerten

Die Zahl ohne Stellenwerte, die man sich als Zahlwortreihe von 1 bis x oder als Menge von x vielen Elementen veranschaulichen kann, ist der Ausgangspunkt des Kindes. Wird das neue Zahlverständnis durch anschauliche Zehner-Einer Kombinationen von außen – durch ein Übergewicht an Erklärungen und Instruktionen – herangeführt, kann es dazu führen, dass diese neue Art, die Zahl zu verstehen, getrennt neben der alten Sichtweise entwickelt wird. Das Ziel ist aber, die „alte“ Zahl durch Zehner und Einer neu zu strukturieren oder Zehner und Einer in der alten, einheitlich durch Einer oder durch Einerschritte strukturierten Zahl zu verstehen. Die Verbindung zwischen der Zahl aus Einern und der Zahl aus Zehnern und Einern ist für einen beweglichen, reversiblen Umgang mit Stellenwerten, notwendig.

Gegenständliche Zehner, Zehner in der Zahl und Zahlen in der Zahl

Welchen Schwierigkeiten das Kind begegnet, hängt zuerst einmal davon ab, von wo es startet, wie es die Zahl bisher konstruiert hat. Die Stufen des frühen Zahlverständnisses wurden in den Abschnitten 3.4 bis 3.6 charakterisiert. Die Konstruktion von Zehnern und Einern ist nicht möglich, bevor das Kind eine angemessene mentale Repräsentation der Zahl auf der konzeptuellen Grundlage eines zusammengesetzten Ganzen hat. Die Zahl 24 muss – im Sinne eines Symbols – auf ein Muster aus 24 Dingen verweisen und/oder auf die Zahl(wort)reihe von 1 bis 24. Im Sinne eines Symbols bedeutet, dass die Zahl (das Zahlwort) auf das Muster oder die Tätigkeit verweist und das Herstellen des Musters oder die Durchführung des Zählens ersetzt und unnötig macht. Die Menge, die das Kind in seiner Vorstellung assoziiert, kann eine unstrukturierte Vielheit sein oder aber als strukturiertes Muster vom Kind innerlich aufgerufen werden. Die strukturgebende Grundlage können z. B. die Finger (Fingermuster) sein. Für viele Kinder ist die Zahl x durch die Zahlreihe von 1 bis x repräsentiert. Die verschiedenartigen mentalen Repräsentationen der Zahl, die Kinder haben und bevorzugen, bestimmen die folgende Entwicklung mit.

Was kann das Kind mit seiner mentalen Repräsentation der Zahl tun? Interessant ist, ob es sie zerlegen kann. Das Zerlegen einer Zahl kann unterschiedliche Qualität haben. Gehen wir von der Aufgabenstellung aus, bei der dem Kind erläutert wird, dass 24 Dinge da sind, von denen einige weggenommen werden, so dass nur 20 zurückbleiben. Wenn das Kind nun abzählt, „24, 23, 22, 21, ... vier wurden weggenommen“, so hat es 24 auf bestimmte Art zerlegt. Es hat das Anfangsstück der Zahlreihe 1 bis 20 abgetrennt – der Abschnitt repräsentiert 20 – und sich auf den verbleibenden Teil konzentriert und abgezählt. Seine Antwort „vier“ bedeutet möglicherweise nur, dass 24, 23, 22, 21 vier Zahlwörter sind, und nicht, dass 4 ein Teil der 24 ist. Um die Aufgabe zu lösen, muss es die Elemente der abgetrennten Teile seiner Zahl nicht notwendig zu Zahlen (20 und 4) zusammenfassen und als Teile in der Zahl 24 verstehen.
Unter Umständen kann das Kind im Anschluß an diese Aufgabe nicht sofort das Ergebnis von „24 – 20“ nennen. Es wird vielleicht von 24 zwanzig Schritte zurückzählen oder es zumindest versuchen. In einem Abschnitt seiner Entwicklung kann es Teilzahlen nur nacheinander aus dem Ganzen einer Zahl lösen. Es kann 20 als Teil der 24 sehen oder 4

als Teil der 24, nicht beide Teilzahlen gleichzeitig in der Zahl 24. Wenn es beide Teile betrachtet, ist die 24 gewissermaßen verschwunden.

Was wir Erwachsene vielleicht als „Mangel an logischem Denken“ deuten, kann also aufgrund einer Analyse des kindlichen Zahlverständnisses als Entwicklungsstufe verstanden werden. Es ist für uns schon recht irritierend, dass das Kind, das 20 + 4 = 24 u. ä. lösen kann, noch nicht 20 und 4 als Teile der 24 erwägen kann.

Dies ist ein Grund dafür, dass das Kind, auch dann wenn es Zehner als Zusammenschluß von 10 Einern versteht, für einige Zeit auf das Bild der Zahl aus gegenständlichen Zehnern und Einern angewiesen bleibt und auf Zahlenebene nicht ganz versteht, dass ein Zehnerschritt um 10 vergrößert. Zehner sind Teile der Zahl, die das Kind erst allmählich reversibel gedanklich herauslöst, integriert und kombiniert. Man sollte Kindern nicht Verfahren zum Rechnen mit Zahlen vermitteln, die sie mechanisch befolgen. An dieser Stelle müssen sie nämlich selbst konzeptuell arbeiten.[4]

Ein weiteres Beispiel: Zwei Kinder lösen die Aufgabe „24 – 10“ durch Rückwärtszählen, das sie mit Hilfe ihrer Finger steuern. Das eine Kind führt ein eingeübtes Verfahren durch, das zusammengesetzt ist aus: „Minus bedeutet Rückwärtszählen. Ich sage die Zahlen ab 24 rückwärts auf und zähle mit den Fingern mit. Wenn ich schon zehn gesagt habe, dann muss ich die nächste Zahl sagen, sonst ist’s falsch.“ Es ist nicht schwierig, sich klarzumachen, dass keinerlei Verständnis der Zahlen als Teile und Ganzes damit verbunden sein muss.
Das andere Kind stellt sich vielleicht vor, von der Zahlenreihe bis 24 die letzten zehn Zahlen wegzustreichen und begreift 14 als das verbleibende Anfangsstück. Auf dieser Basis ist es möglich, die 14 als Teil der 24 zu verstehen. Um die weggestrichenen Zahlen als Teil der 24 zu sehen, muss sie das Kind gewissermaßen nach der Lösung wieder herstellen und in der 24 als eine 10/Zehn konstruieren.
An diesem Beispiel wird deutlich, dass die beobachtbare Tätigkeit eines Kindes keine sichere Schlußfolgerung darüber erlaubt, wie es eine Aufgabe versteht.

Verschiedene Wege durch Betonung des Zählens oder von Mustern

COBB UND WHEATLEY sprechen an, dass verschiedene Wege denkbar sind, die sich in einem etwas unterschiedlichen Verständnis des Zehners und der Zahlen ausdrücken.
Übereinstimmende Qualitäten des Zehners als „iterable unit“ und des Zehners als „abstract collectible unit“ sind, dass beide Einheiten und Zehnheiten zugleich sind und dass das Kind sie anwenden kann, ohne dass irgendein Hinweis auf gegenständliche Repräsentanten gegeben ist.
Als „iterable unit“ ist der Zehner eher aus dem Zählen und der Zahl als einer Folge von Zählakten entwickelt. Als bevorzugte grundlegende Repräsentation der Zahl 24 kann man sich dabei die Zahlreihe von 1 bis 24 denken.
Beim „abstract collectible unit“ haben räumliche Muster der Anzahlen bis 10 und ihre Wiederholung bei größeren Zahlen das Zahlverständnis anders beeinflußt. Hier passt das

[4] Beispiele Lissi 1 (Abschnitt 4.2) und Lissi 3 (Abschnitt 4.5), und andere.

Bild der Bündelungen besser. 24 verweist dann eher auf „zwei mal alle Finger und noch vier“. – Man denkt spontan, dass Zehner in dieser Zahlrepräsentation leichter reflektiert werden können, aber es ist Vorsicht geboten: Kinder sehen Muster nicht wie wir. Es ist möglich, dass das Kind dieses Muster der 24 kennt, aber immer dann, wenn es mit 24 rechnen muss, hängt es den Fingern gewissermaßen Zahlnamen an und verwandelt sie in die Sequenz 1 bis 24.[5]

Wie STEFFE UND COBB beobachtet haben, zeigen Kinder, dass sie eine Zahl X als Vereinigung von x Elementen verstehen („integration operation“), zuerst durch die Verwendung von (vorgestellten) Mustern. Auch daraus schließen wir mit einer gewissen Vorsicht (betreffend die Verwendung der Muster) umgekehrt, dass das Zahlverständnis durch die Verwendung von Mustern günstig beeinflußt werden kann:

- hinsichtlich vorstellbarer quantitativer Repräsentanten von Zahlen;
- hinsichtlich der Leistung der Operation der Integration, durch die die Zahl als zusammengesetzte Einheit konstruiert wird;
- hinsichtlich weiterer Operationen (des Einbettens und Herauslösens von Zahlen in und aus anderen Zahlen, bis hin zu den Teile-Ganzes-Operationen).

Bei der Verwendung solcher Muster sollte aber darauf geachtet werden, ob Kinder die Muster nicht nur als Ganzes mit dem Zahlwort verknüpfen, sondern die Elemente, aus denen das Muster zusammengesetzt ist, als bestimmend begreifen.

Sprachliche Beiträge

Von Bedeutung bei der Entwicklung des Stellenwertverständnisses sind auch sprachliche Fähigkeiten des Kindes, insbesondere die zum Erfassen, zur Reproduktion, zur Analyse und Reflexion sprachlicher Muster befähigen, mit denen man es bei den Zahlwörtern und bei den verschiedenen Zahlwortreihen (Einerschritte, Zehnerschritte) zu tun hat.
Zwischen quantitativem Zahlverständnis und Reflexion der Zahlwörter und -reihen dürfte ein wechselseitiger Einfluß bestehen (vgl. 4.4.1). Falsch ist es aber anzunehmen, das Zahlwort “dreiundfünfzig“ müßte dem Kind doch das Verständnis der Zahl als „50 und 3“ vermitteln. Wenn ein Kind die Zahlwortreihe 4, 14, 24 usw. bilden kann, weiß es deswegen noch nicht, dass diese Art zu zählen zehn Einerschritte ersetzt und abkürzt. Aber wenn es dem Kind schwer fällt, „neunundfünfzig“ in „fünfzig und neun“ zu verwandeln, fehlt ihm oder ihr eine mögliche Unterstützung bei der Herausarbeitung der Zusammensetzbarkeit der Zahlen (als Quantitäten).

Material, Wahrnehmung und Vorstellung

Wir wurden oft nach geeignetem Material gefragt, genauer gesagt, wurde die Frage nach Hilfen für Unterricht und Förderung oft präzisiert durch die Frage, welches Material wir denn empfehlen. Darin drückt sich aus, dass die Fragenden wissen, dass Zahlverständnis und Rechnen nicht nur durch Umgang mit Zahlen entwickelt werden. Aber vielleicht ist

---

[5] Beispiele von Peter in Kapitel 4.

manchmal auch gemeint, dass gutes Material die Fähigkeit hat, dem Kind (bei hinreichend langem Gebrauch) ein gutes Verständnis zu vermitteln.

Wir knüpfen an das an, was wir schon in den Abschnitten 3.2 und 3.6 grundsätzlich ausgeführt haben, und legen Wert darauf, dass die Beziehung zwischen der Qualitität des Materials und der Dauer seiner Benutzung einerseits und der konzeptuellen Entwicklung des Kindes andererseits nicht so einfach gesehen wird, wie es oft geschieht.

Das Bereitstellen von Material für ausreichend lange Zeit und die Eigenschaften des Materials sind von großer Bedeutung: Um Zahlen Bedeutung zu geben, müssen sie mit Quantitäten verknüpft werden. Die Verbindungen müssen in der Erfahrungssituation konstruiert werden. Auch das weitere Nachdenken über Zahlen und Zahlbeziehungen stützt sich zunächst auf sichtbares Material und auf daraus gewonnene Vorstellungen. Abstrakte Begriffe und Beziehungen ergeben sich aus diesem Nachdenken, Reorganisieren oder wie man es nennen mag. Kurzum, das Kind braucht Material und angemessene Vorstellungen davon, die u. a. von seinen Wahrnehmungsfunktionen und der Beschaffenheit seines bildhaften Gedächtnisses abhängen.
Aber das Material bestimmt nicht, was das Kind darin sieht. Es bestimmt auch nicht, worauf das Kind seine Aufmerksamkeit richtet. Das Material verändert das Denken nicht, aber es ist mehr oder weniger geeignet, die Reflexion des Kindes zu unterstützen. Wie die Reflexion jedoch gestaltet ist und ob das Material zu dieser Zeit für das Kind geeignet ist, bestimmt der aktuelle konzeptuelle Entwicklungsstand des Kindes.[27]
Die neuropsychologische Basisfunktionen können vielleicht mit Werkzeugen der geistigen Arbeit verglichen werden. Die Arbeit selbst ist bestimmt von einem Sinnzusammenhang, der Bedeutung, die das Kind der Problemstellung gibt. Wie mangelhafte Werkzeuge das Fortschreiten des Kindes behindern, kann man erst beurteilen, wenn man die Bedeutung, die das Kind herstellt, kennt und eine Ahnung hat, wie die Sichtweise des Kindes sich weiterentwickeln muss oder kann.

COBB (1995) illustriert die komplexe Beziehung zwischen Material und konzeptueller Entwicklung am Beispiel von vier Kindern der zweiten Klasse, die in den Gebrauch einer Hundertertafel eingeführt wurden. Es wird deutlich, dass diese Kinder die Tafel ganz *unterschiedlich* sehen und zwar abhängig davon, welches Verständnis des Zehners sie schon gewonnen haben. Obwohl aus unserer erwachsenen Perspektive die Hundertertafel das Zählen in Zehnerschritten (4, 14, 24 usw.) und die Einsicht, dass es sich dabei um eine Abkürzung über zehn Einerschritte hinweg handelt, zu erleichtern scheint, konnten Kinder, die noch keinen Zehner konstruiert hatten, anhand der Tafel keinen Fortschritt in dieser Richtung machen. Sie erkannten zwar eine Regularität (4, 14, 24, 34 usw.), konnten sie aber nicht mit der Bedeutung füllen, dass sich die Zahlen um 10 vergrößern. Ein Mädchen, das dieses Verständnis schon hatte, konnte anhand der Tafel ihre Rechenstrategien weiterentwickeln, weil die Tafel ihre Reflexion unterstützte. Das Material und seine Ei-

[27] Emotionale Einflüsse auf die kognitive Arbeit des Kindes sind an dieser Stelle ausgeblendet, weil hervorgehoben werden soll, dass die Beziehung zwischen materiellen Lernhilfen und der Entwicklung mathematischer Konzepte komplex ist und weiterer Untersuchung bedarf. Ansonsten weist die konstruktivistische Lernpsychologie, die eine aktive Auseinandersetzung des Kindes betont, der motivationalen und emotionalen Situation des Kindes großen Einfluß zu. Der Sinnzusammenhang, in den das Kind eine bestimmte Aufgabe stellt, ist zuvor schon grundsätzlich bestimmt vom Sinn der Mathematik und der Schule in seinem Leben.

genschaften stehen also in einem komplexen und wechselseitigen Verhältnis mit den Konzepten, die das Kind schon entwickelt hat. Dies gilt für die Schreibweise und Sprechweise von Zahlen, die auch Material für das Kind sind, ebenso wie für das, was üblicherweise Anschauungsmaterial genannt wird.

Entscheidend ist die angemessene Beurteilung der Ausgangslage (die „alte“ Zahl des Kindes) und das Bieten angemessener Herausforderungen zur Festigung und Veränderung seiner oder ihrer Zahlbedeutungen. So hängt der Erfolg des Kindes auch davon ab, ob es Aufgabenstellungen erhält, die zur Reflexion und Umstrukturierung anregen (und für das betreffende Kind nicht zu leicht und nicht zu schwer sind). Weitere Untersuchungen zu diesem wichtigen Zusammenhang müssen auch berücksichtigen, dass es vermutlich verschiedene Wege gibt, die von verschiedenen Kindern beschritten werden müssen.

Verständnislücken durch Instruktion

Die meisten Kinder verwenden irgendwann in der zweiten Klasse die Bezeichnungen Zehner und Einer (oder Zehnerstelle und Einerstelle). Die meisten der im Projekt vorgestellten Kinder waren in der Lage, Zahlen als Zehner/Einer-Kombinationen aus Zehnerstangen und Einerwürfeln darzustellen und umgekehrt. Aber sie versagten bei anderen Aufgaben, z. B. immer dann, wenn zehn Einer als ein Zehner gedacht werden mussten und umgekehrt. Auch wenn sie 14 und 24 sofort mit Zehnerstangen und Einerwürfeln herstellen konnten, wußten sie nicht sofort, wie viele noch benötigt werden, um von 14 zu 24 zu ergänzen.

Diese und andere Diskrepanzen können auch auf die Instruktion zurückzuführen sein. Die Instruktion zur Zahldarstellung in Zehnerstangen und Einerwürfeln kann die Konstruktion des Zehners durch das Kind u. U. behindern, indem das Kind dann die Antwort auf die Frage, wie viele Zehner in 46 sind, weiß, und bei vielen Aufgaben getrenntes Rechnen mit Zehnern und Einern zu richtigem Ergebnis führt. Aber das Kind hatte keinen Anlaß geistig auszuarbeiten, dass ein Zehner zu zehn Einzelnen ausgepackt werden kann, und es hat u. U. nicht reflektiert, wie die 4 Zehner in der 46 zu denken sind.
Je mehr nun ein Kind Verständnisschwierigkeiten zeigt, desto stärker sind wir Erwachsene versucht, das Verständnis durch Tips und Regeln zu ersetzen. Diese Anweisungen zu befolgen, wird für das Kind Ziel und Inhalt der Mathematik, und es beansprucht seine geistige Kapazität in hohem Maße. Die Entwicklung von Verständnis ist nun ausgeschlossen, von seiten der Erwachsenen und von seiten des Kindes.

4. Beobachtungen an den uns vorgestellten Kindern und ihre Interpretation

4.1 Einleitung und Übersicht

In diesem Kapitel stellen wir Einzelbeobachtungen von Leistungen der uns vorgestellten Kinder dar und fügen Interpretationsvorschläge an. Wir analysieren das kindliche Vorgehen im Hinblick auf entwicklungspsychologische Erkenntnisse über spezifische mathematische Konzepte und Fertigkeiten, vorwiegend auf Grundlage der Ausführungen in Kapitel 3. Der Schwerpunkt unserer Ausführungen liegt eindeutig auf der Entwicklung von Zahlkonzepten. Die Aufgabenstellungen gehören im weitesten Sinn zur Arithmetik im Zahlenraum bis 100 oder 1000. Eine Reflexion der Aufgabenstellungen selbst erfolgt erst in Kapitel 5.

Die Aufzeichnungen stützen sich auf Notizen der Untersucherin (R. Schultz) bei der Arbeit mit dem Kind und auf ein Gedächtnisprotokoll, das (wenn möglich) unmittelbar anschließend angefertigt wurde. Die Beobachtungen sind mehr oder weniger aus dem Zusammenhang sowohl der speziellen Stunde als auch der gesamten Untersuchung genommen[1]. Fragen und andere Reaktionen der Untersucherin (R. S.) sind natürlich nicht über Kritik erhaben.

Absicht und Ziel dieses Kapitels ist es, auf Besonderheiten und Lücken des kindlichen Verständnisses von Zahlen und Aufgabenstellungen hinzuweisen und Interpretationsvorschläge zu machen. Wir möchten davon überzeugen, dass die Leistungen der Kinder auf neue Weise beobachtet werden können und dass es sinnvoll und hilfreich ist, dies zu tun.

Die Beobachtungen in der Arbeit mit den Kindern haben wir unter folgenden Gesichtspunkten geordnet: Zahlbedeutungen (4.2), Zahlbeziehungen (4.3), Zahlverarbeitung und Zahl(wort)reihe (4.4), Rechnen (4.5), Operationsverständnis und Mathematisieren von Sachsituationen. Wir beenden die Darstellung mit dem Punkt „Rechnen“, da wir uns mit den bis dahin genannten Punkten am meisten befasst haben und außerdem aus zeitlichen Gründen nicht mehr Material bearbeiten konnten. Erleichtert wird diese Entscheidung dadurch, dass hinsichtlich der „Mathematisierung von Sachsituationen“ auf die Forschungsarbeiten von Stern u. a. hingewiesen werden kann. Zum Operationsverständnis äußern wir uns in den Abschnitten 8.1 und 5.6.

Die angegebene Einteilung bedeutet nicht, dass dadurch überwiegend getrennte Bereiche des mathematischen Verständnisses bezeichnet sind: Die Zahlbeziehungen haben wir u. a. mit kleinen Textaufgaben untersucht; Zahlbedeutungen sind Grundlage der Zahlbeziehungen; die Rechenstrategien der Kinder haben wir unter dem Aspekt ihrer Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen reflektiert. Viele Beispiele könnten in verschie-

[1] Zwei Berichte über die gesamte Untersuchung sind in Kapitel 6 wiedergegeben. Der Umfang des gesamten Forschungsberichtes hat uns veranlasst, uns auf zwei Gesamtberichte zu beschränken.

denen Kontexten erscheinen, wo sie aber unter verschiedenen Blickwinkeln reflektiert würden.
Was wir unter den genannte Begriffen verstehen, wird im Folgenden kurz charakterisiert; eine ausführlichere Charakterisierung erfolgt jeweils im ersten Teil der folgenden Abschnitte[2].

Zahlbedeutungen nennen wir Vorstellungen (im weitesten Sinn), die das Kind zu Zahlen (Ziffernschreibweise oder Zahlwörter) entwickelt hat und die es bei der Arbeit mit Zahlen heranzieht. Es sind Verbindungen zwischen Zahlwörtern und geschriebenen Zahlen mit der Vorstellung von Quantitäten, die strukturiert oder unstrukturiert sein können. Dazu gehören Fingerbilder von Zahlen, Abschnitte des mentalen Zahlenstrahles, Würfelbild-Darstellungen und andere gegenständlich-quantitative Darstellungen von Zahlen, wie auch die mit Zehnersystemmaterial. Aber auch die Idee einer motorischen Zählprozedur oder das Aufsagen eines Abschnitts der Zahlwortreihe nennen wir „Vorstellungen" zu Zahlwörtern und Ziffern.
Zur Zahlbedeutung rechnen wir auch, ob das Kind die Zahl als Vereinigung von Einheiten begreift („composite unit") oder ob die Zahl noch im Zählvorgang eingekapselt ist (vgl. Abschnitt 3.4.6).

Zahlbeziehungen sind Beziehungen zwischen zwei oder drei Zahlen. Sie gründen in den mentalen Operationen des Kindes, die es an seinen Zahlvorstellungen vornimmt. Sie sind daher mit den jeweiligen Zahlbedeutungen eng verbunden. Eingeschlossen sind: Nachbarschaftsbeziehungen; Inklusionsbeziehungen (eine Zahl als Teil einer anderen verstehen); und Teile-Ganzes-Beziehungen (Zahlzerlegungen – Beziehungen zwischen zwei Teilen und dem Ganzen); Beziehungen zur 5 und zur 10; die Beziehungen zwischen Zehnern und Einern in der zweistelligen Zahl; und die Größer/Kleiner-Beziehungen zwischen Zahlen.

Mit *Zahlwortreihe* bezeichnen wir linguistische Fähigkeiten (Erfassen und Anwenden sprachlicher Regelhaftigkeit), die benötigt werden, um die Reihe der Zahlwörter zu bilden und fortzusetzen.

Zahlverarbeitung bezeichnet die Übersetzungsleistungen von Zahlwörtern in geschriebene Zahlen und umgekehrt. Diese Übersetzungsleistungen können in der Regel erbracht werden, ohne dass Wissen über die quantitative Struktur einbezogen wird, geschweige denn vorausgesetzt ist. Das bedeutet: Um „dreiundfünfzig" in „53" zu übersetzen oder umgekehrt, muss man überhaupt keine quantitative Vorstellung ins Spiel bringen.
Zur Zahlverarbeitung gehört aber auch die Produktion (Aussprechen, Niederschreiben) von Zwischen- und Endergebnissen beim Kopfrechnen als Zahlwort und als geschriebene Zahl.

Rechnen: Hier lauten die Stichwörter „Faktenwissen", „Rechenstrategien" und „Erläuterung und Begründung von Rechenstrategien". Wir haben untersucht, welche Fakten das Kind abrufen konnte und mit welchen Strategien es Ergebnisse herleitete, die es nicht auswendig wusste: Hat es Zahlzerlegungen benutzt, welche? Hat es auf bekannte Fakten zurückgegriffen und Ableitungen daraus vorgenommen? Bei zählenden Rechnern haben wir das Vorgehen mit der Zeit immer differenzierter beobachtet und analysiert.

---
[2] Also in 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1 und 4.5.1.

Bei mehrstelligen Zahlen interessierte uns vor allem, wie das Kind „36 + 10“ und „36 – 10“ rechnet, wie es von 14 auf 24 ergänzt und wie es „40 + 8“ und „40 – 8“ herausbekommt. Natürlich haben wir auch komplexere Aufgaben angeboten. Auf schriftliche Rechenverfahren gehen wir in diesem Kapitel allerdings nicht ein (hierzu GERSTER, 1982).
Wir haben strukturierte quantitative Repräsentanten von Zahlen („Veranschaulichungen“) angeboten und beobachtet, ob und wie das Kind sie beim Rechnen nutzen konnte.
Gerne wären wir auf aufgabenübergreifende Besonderheiten der Denk- und Problemlösefähigkeiten der uns vorgestellten Kinder im Rahmen dieses Berichts eingegangen und hätten auch sie in diesem Kapitel dargestellt, aber wir konnten dies nicht mehr angemessen leisten. Wir verweisen auf unsere kurze Diskussion in Kapitel 5 (Abschnitt 5.5).

Noch einige Vorbemerkungen zu unseren Interpretationsvorschlägen:
Unsere Konzepte von den Schwierigkeiten rechenschwacher Kinder sind noch in Entwicklung begriffen. Das geht sicher zu Lasten der sprachlichen und bildlichen Klarheit und Prägnanz.
Wir konnten nicht widerstehen, auch einige (uns anziehende) Beispiele aufzunehmen, zu denen uns noch nicht so viel eingefallen ist, in der Hoffnung, dass uns oder anderen noch etwas dazu einfallen wird.
Grundsätzlich kann sich die „beste“ Deutung eines Beispiels erst im Kontext verschiedener Beispielen von ein und demselben Kind ergeben. *Jedes Einzelbeispiel berechtigt zu verschiedenen Deutungen. Wir benutzen die Beispiele hier, um bestimmte Betrachtungsweisen vorzustellen, die uns besonders wichtig erscheinen.*
Wir können nicht annehmen, dass unsere Gedanken stets den Kern des Problems treffen. Andere Interpretationen unserer Leser und Leserinnen begrüßen wir als Denkanstoß zur weiteren Klärung. Eine konzeptuelle Analyse ist ein interpretierendes Verfahren, die Gültigkeit der Ergebnisse kann an keinem objektiven Außenkriterium geprüft werden (jedenfalls nicht so leicht), sondern nimmt zu, je mehr Sachverständige an einer kontroversen Diskussion teilnehmen.

4.2 Zahlbedeutungen

4.2.1 Einführung

Will man untersuchen, welche Bedeutung eine Zahl für ein Kindes hat, kann man von zwei Merkmalen des frühen Zahlverständnisses ausgehen: Dass Zahlen mit mehreren Dingen (Vielheiten) zu tun haben, gehört sicher zum frühen Wissen eines Kindes. Man kann fragen, ob *ein* Zahlwort und *eine* geschriebene Zahl auf eine Zusammenfassung von entsprechend Vielen verweist, oder ob die quantitative oder kardinale Bedeutung noch im Vorgang des Zählens enthalten ist. Die Schwierigkeit dieser quantitativen oder kardinalen Bedeutung der Zahl wird oft unterschätzt, weil Kinder leicht lernen, nach dem Abzählen einer Menge die letzte Zahl zu wiederholen, und Erwachsene gerne annehmen, dass das Kind damit beweist, dass diese Zahl gewissermaßen den ganzen Zählvorgang zusammenfaßt und beinhaltet.

Zum frühen Zahlwissen des Kindes gehört ferner die Reihe der Zahlen, die das Kind in der Regel bald beherrscht. Zahlwort und geschriebene Zahl sind in einer Reihe eingegliedert und kommen insbesondere beim Abzählen immer in diesem Zusammenhang vor. Die Beherrschung dieser Reihe befähigt das Kind zur Lösung vieler Aufgaben, die es in der Schule erhält. Die Reflexion der Reihe in Richtung einer *kardinalen* Interpretation der Zahlwörter und geschriebenen Zahlen ist jedoch schwierig und wird vom zählenden Rechnen nicht angeregt.

Man kann das subjektive Verständnis der Zahl *beim Kind* sich als *Vorstellungen im weitesten Sinne* denken, die das Kind zu Zahlen entwickelt hat und die es bei der Arbeit mit Zahlen heranzieht.[1]
Zur „8“ kann das Kind sich beispielsweise die geschriebene Zahl denken, eine unbestimmte und unstrukturierte Gruppe von Dingen, eine wohlstrukturierte Anordnung aus acht Dingen oder Bewegungen, die Zahlreihe von 1 bis 8, das Abzählen von 1 bis 8, die Ziffer 8 in der Zahlreihe oder das achte Element in einer Reihe von zehn Elementen usw. Die Bedeutung, die das Kind der Zahl gibt, kann mit dem Kontext wechseln. Es kann uns seine Zahlbedeutungen nicht erläuternd darlegen. Sie müssen von uns durch eine interpretierende Bearbeitung seines Vorgehens erschlossen werden.
Einige Aspekte, die bei dieser Interpretation berücksichtigt werden sollten, werden im Folgenden erläutert.

Fingerbilder von Zahlen in der Entwicklung des Kindes

Kinder benutzen beim Rechnen ihre Finger. Sie benutzen sie jedoch auf vielfältige Weise. Es lohnt sich, genauer hinzuschauen, Unterschiede in der Verwendung der Finger zu bemerken und ihnen Bedeutung zu geben. Eine Form der Verwendung der Finger ist, die Zahlen mit Fingern darzustellen: Oft werden Fingerbilder von Zahlen zunächst *sukzessive* (ein Finger nach dem anderen wird gestreckt) hergestellt, koordiniert zum Aufsagen der Zahlwortreihe. Irgendwann verzichten die meisten Kinder auf die sukzessive Herstellung und zeigen das Fingerbild *simultan*. Es gibt aber auch andere Wege der Entstehung von Fingerzahlbildern, die zu kennen sich lohnt (vergleiche Abschnitt 3.5).

In diesem Abschnitt über Zahlbedeutungen wollen wir hinweisen auf:

- Kinder sehen ihre Fingerbilder u. U. anders als wir denken, abhängig von ihrem Zahl- und Aufgabenverständnis.
- Wenn ein Kind zum Zahlwort 7 ein Fingerbild assoziiert und simultan zeigt, muss das nicht bedeuten, dass es die Zahl als zusammengesetztes Ganzes versteht: Es sieht in den Fingern vielleicht nur den entfalteten Zählvorgang bzw. die Reihe der Ziffern 1 bis 7.
- Fingermuster können auch „global“ mit Zahlen verknüpft sein, wobei das Kind die Elemente (die einzelnen Finger) im Ganzen nicht beachtet.

[1] VON GLASERSFELD weist darauf hin, dass Repräsentation im konstruktivistischen Sinn „nie das Bild einer vom erfahrenden Subjekt unabhängigen „Außen“-Welt bedeutet, sondern ganz buchstäblich die Re-Konstruktion eines Etwas ..., das in einer vorausgegangenen Erfahrungssituation konstruiert worden war.“ (1987, 257)

- Wie andere wohlstrukturierte Muster können auch Fingerbilder Gegenstand einer Reflexion über Zahlen und Zahlbeziehungen werden. Es ist von großer Bedeutung, dass das Kind auf geeignete Weise dazu angeregt wird.[2]

Muster/Strukturierte Punktebilder aus der Sicht von Kindern

Für die Bedeutung der Muster in der Entwicklung des kindlichen Zahlverständnisses gilt ähnliches wie für die Fingerbilder von Zahlen. Dass ein Kind solche Muster herstellen und mit Zahlwörtern benennen kann, gehört zu seinen Zahlbedeutungen. Aber sein Umgang mit dem Muster, z. B. um ein Zahlenproblem zu lösen, macht oft deutlich, dass das Kind die Strukturen des Musters nicht in Zahlbeziehungen übersetzt, wie wir Erwachsene es tun und erwarten.

Simultan erfasste Muster, visuelle Analyse von Mustern und die Fähigkeit, sich Muster einzuprägen, beeinflussen den Umgang mit Mustern im mathematischen Kontext. Aber es sind nicht visuell-räumliche Fähigkeiten, die bestimmen, welche numerische Bedeutung die Muster für das Kind haben.

In diesem Zusammenhang halten wir VON GLASERSFELD´S Analyse der Rolle von figuralen Mustern in der Entwicklung von Zahlbegriffen für bedeutsam. VON GLASERSFELD (1987) weist darauf hin, dass „Subitizing“ (Simultanerfassung von visuell-räumlichen Konfigurationen und zeitlichen Abfolgen bis vier Elementen) keine *Anzahlerfassung* ist, sondern eine perzeptuelle *Wiedererkennung bestimmter rekurrenter Konfigurationen, die mit Zahlwörtern assoziiert sind*. Sie werden als Ganzheiten, nicht als aus Elementen zusammengesetzte Gebilde erfaßt. Das Zahlwort wird zum Muster auf dieselbe Weise assoziiert, wie wahrgenommene oder vorgestellte Gegenstände (alle Arten von Löffeln) mit dem Lautbild von Wörtern („löffl“) semantisch verknüpft werden.

> „Ich meine also, dass das Kind durch „subitizing“ figurale Muster mit Zahlwörtern über eine semantische Verbindung assoziiert und nicht aufgrund der Anzahl der perzeptuellen Einheiten, aus denen die Muster gebildet sind. In den Akten des „subitizing“ werden die figuralen Muster, die sie jeweils auslösen, als figurale Ganzheiten aufgefaßt, nicht als aus Elementen zusammengesetzte Gebilde. Sie werden also als globale Konfigurationen, nicht als Anhäufung zählbarer Elemente erkannt.“(VON GLASERSFELD, 1987, 261)

> „Die Verknüpfung mit einem Zahlwort macht sie jedoch nicht zu numerischen Begriffen. Begrifflich sind sie immer noch figurale Muster. Erst die „reflexive“ Abstraktion – die Konzentration des Bewußtseins auf ihre iterative Struktur, nicht nur auf das konkret gegebene oder repräsentierte sensorische Material, durch das diese Struktur gerade verwirklicht wird – kann sie auf die Ebene „reiner“ Abstraktion heben, wie sie für die Vorstellung von Zahlen charakteristisch ist.“ (VON GLASERSFELD, 1987, 265)

Eine numerische Bedeutung erhalten die figuralen Muster dadurch, dass sie außerdem als Ansammlung von Einheiten gesehen werden, die gezählt werden können. Beim Zählen stellt das Kind fest, dass die Zählfolge mit dem Zahlwort endet, das es bereits vorher zur Bezeichnung des ganzen Musters verwendet hat. „In diesen Fällen erweist sich das Ergebnis des Zählschemas des Kindes als das gleiche wie das Ergebnis des Benennungsschemas“ (272).

---

[2] Wir verweisen auf BRISSIAUDS Analyse der möglichen Bedeutung von Fingerzahlbildern in der Entwicklung des Zahlverständnisses, die wir hier nicht wiederholen (Abschnitt 3.5).

> „Das Prinzip, dass Fälle von zwei oder mehr Schemata, die zu ein und demselben Resultat führen, das Kind auf eine höhere und abstraktere Ebene des Operierens führen, ist zutiefst in Piagets Theorie der kognitiven Entwicklung eingebettet. (...) In dieser Perspektive ermöglicht die einheitliche figurale Abbildung eines Musters, das mit dem Ergebnis des Zählens der Elemente des Musters zusammenfällt, die Vorstellung einer Zahl, die aus zählbaren Bestandteilen aufgebaut ist.“ (VON GLASERSFELD, 1987, 272 f.)

STEFFE UND COBB bestätigen aufgrund ihrer langfristigen Beobachtungen die Bedeutung von Zahlvorstellungen in Gestalt von visuell-räumlichen, aber auch akustisch-zeitlichen Mustern für die Entwicklung der Idee der Zahl als zusammengesetztes Ganzes.

Das bedeutet u. a., dass Lehrer/innen „Material“ nicht nur im Sinne von „Zählgegenständen“ sehen und anbieten sollten, sondern auch im Hinblick auf die Frage, ob und wie seine Verwendung zur Reflexion der Zahl als zusammengesetztes Ganzes und ihrer Beziehungen anregen kann. Entsprechend sollten Aufgaben- und Problemstellungen geprüft werden, die Kindern vorgelegt werden.

Es gibt im Umgang mit Mustern individuelle Unterschiede: Einige Kinder, die uns vorgestellt wurden, fanden die Zahlwortreihe schwierig und dachten sich Zahlen gerne als Muster. Wenn sie mit Zahlen arbeiteten, bedienten sie sich der Struktur des Musters. Bei anderen Kindern dominierte die Zahlreihe in ihrem Zahlverständnis, sie behandelten die Muster wie eine Zahlreihe: Veränderungen an der Zahldarstellung durch ein Muster konnten nur am rechten „Ende“ ansetzen, sich nicht der vom Muster gegebenen „Teile“ bedienen.

Zahlen auf dem mentalen Zahlenstrahl

Eine wichtige Grundlage der Bedeutung der Zahl für ein Kind ist die Zahlreihe oder Zahlwortreihe. Schon aufgrund eines inneren „Bildes“ der Zahlenreihe und der Deutung einer Zahl oder eines Zahlenproblems mit Hilfe dieses Bildes kann das Kind Zahlen vergleichen und eine ganze Reihe arithmetischer Probleme (zählend) lösen.

Wenn vom inneren Bild der Zahlenreihe die Rede ist, ist nicht *ein* statisches visuelles Vorstellungsbild gemeint, sondern ein bestimmtes Wissen über die Folge der Zahlwörter: die Folge kann sicher aufgesagt werden, auch von einer beliebigen Anfangszahl ausgehend. Zahlen korrespondieren zu Positionen in einer Kette, die links einen Anfang hat. Jede Zahl ist mit einer nachfolgenden verknüpft („nächste Zahl“). Die Zahlen, die später kommen, sind „größer“ oder „mehr“. Der Strahl kann auch eine Rückwärtsrichtung bekommen, die „kleiner“ oder „weniger“ bedeutet. Man kann zu einer Zahl im Geiste hingehen und „sieht“ oder „hört“ dann auch ein wenig von der Umgebung (die Zahl vorher, die Zahl nachher).[3]

[3] Vgl. Abschnitt 3.6.1

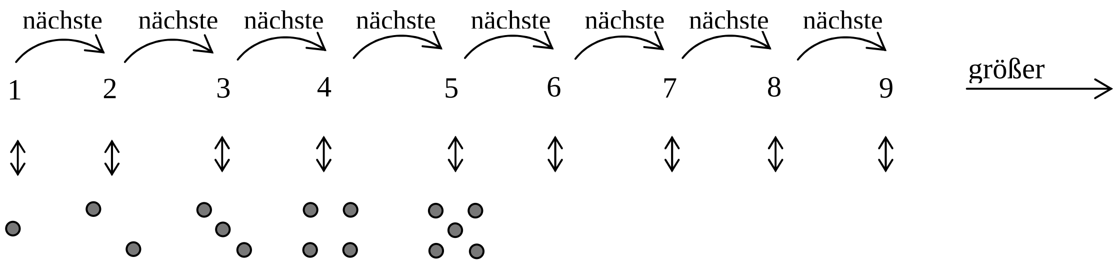


Abb. 4.1: Mentaler Zahlenstrahl (nach RESNICK, 1983, 110)

Dieses Modell der kindlichen Zahlbedeutung schien uns in vielen Fällen geeignet, die Grenzen der kindlichen mathematischen Kompetenzen zu erklären: Zahlvergleich ist auf Grundlage des mentalen Zahlenstrahls möglich, ohne quantitative Vorstellungen zu bemühen, sobald die Zahlreihe beim Kind in der Weise repräsentiert ist, dass es von je zwei Zahlen sofort weiß, welche später kommt. Die Addition kann man auf Grundlage des mentalen Zahlenstrahls so verstehen, dass an einen Abschnitt der Zahlreihe „Zahlen“ nach rechts zugefügt werden. Subtraktionsaufgaben bedeuten entsprechend, von einem Abschnitt der Reihe „Zahlen“ von rechts nach links wegzunehmen.

Führt man sich dieses Verständnis konkret vor Augen, bemerkt man die Beschränkungen, die möglicherweise damit verbunden sind: Ein Kind, das so rechnet, hat unter Umständen die Zahl noch nicht als Zusammensetzung von Vielen verstanden: Es kann eine Konfusion bestehen, was eine Zahl, z. B. 9, ist: das Element „9“ in der Zahlreihe, oder der Abschnitt 1 bis 9 der Zahlreihe?
Benachbarten Zahlen gibt das Kind vielleicht die Bedeutung „eins mehr“ bzw. „eins weniger“, ohne dass aber die kleinere Zahl als Teil der größeren verstanden wird, sondern „eins mehr“ bedeutet nur „einen Schritt weiter“.
Noch schwieriger ist es, Einsicht in Zahlzerlegungen zu gewinnen oder eine Zahl als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu begreifen, wenn die Verknüpfung von Zahlen durch Plus oder Minus ausschließlich in Schritte auf dem (mentalen) Zahlenstrahl übersetzt wird.
Die Annahme, dass die Wiederholung solcher Prozeduren ohne weiteres zum Erwerb von Basisfakten und Ableitungsstrategien führt, verliert ihre Plausibilität, wenn man berücksichtigt, dass die Aufgaben unter Umständen ohne jede Reflexion des Vorgehens gelöst werden.

Auf diese Probleme kommen wir im Abschnitt „Zahlbeziehungen“ wieder zurück. In diesem Abschnitt geht es vorerst nur darum, dass das Kind Zahlen vielleicht auf Grundlage eines solchen Zahlenstrahls repräsentiert[4] und dass es damit recht weit kommen kann, ohne dass grundlegende Zahleigenschaften schon erarbeitet sind.

[4] Wir erinnern: „repräsentiert“ im Sinne von „sich vorstellt“ im weitesten Sinn des Wortes.

Die Zahl als zusammengesetztes Ganzes

Zu den grundlegenden Zahlkonzepten gehört die Zahl als zusammengesetztes Ganzes: Ausgehend von der Beherrschung der Zahlwortreihe und ihrer Anwendung beim Abzählen von Dingen ergibt sich für die weitere Entwicklung die Aufgabe erstens „8“ mit dem Abschnitt von 1 bis 8 zu identifizieren und zweitens allmählich diese „Zahlwörter“ in acht abstrakte Einheiten zu verwandeln. Wir haben auf die Bedeutung von Mustern bei diesen Konstruktionen schon hingewiesen.

Durch den praktischen Gebrauch der Zahlwörter beim Abzählen und ihrem abstrakten Gebrauch als Zusammenfassung eines Zählvorgangs (und als Eigenschaft der gezählten Menge) sind die Zahlwörter in der deutschen Sprache zweideutig. Dies erschwert die Konstruktion der Zahl als Zusammensetzung aus Einheiten (BRISSIAUD, 1992, 63).

Man kann nun beobachten, dass ein Kind in einem Kontext die Zahl 5 durch fünf Dinge realisiert, im anderen Kontext aber als einzelnes Ding versteht: „Gib mir fünf“, führt das Kind dazu, fünf Dinge hinzulegen, während es „1, 2, 3, 4, 5“ zählt. Aber ein Fünfmarkstück wird durchaus als „eins“ verstanden, nicht als Symbol einer Fünfheit. Dass *ein* Ding eine *Viel*heit repräsentiert, kann von manchen Kindern noch nicht „gedacht“ werden. Das Problem kann beim Rechnen oder Problemlösen teilweise überbrückt werden, wenn die Zahlen in einem Zwischenschritt durch entsprechende Vielheiten ersetzt sind, z. B. in Form von Klötzchen. Die können dann beispielsweise zerlegt werden. Anders gesagt, über die Ziffer 5 oder das Zahlwort 5 kann nicht in derselben Weise nachgedacht werden wie über 5 Klötzchen.

Diese Schwierigkeit kann man auch so erläutern, dass das Kind das einzelne Zahlzeichen nicht als Symbol für eine Zusammensetzung aus mehreren Dingen oder Schritten versteht. Wenn das Kind die Zahl 5 in eine Menge aus fünf Dingen übersetzt, benutzt es die Bedeutung der 5 als 1, 2, 3, 4, 5 im Sinne des Zählens. Aber „5“ bezeichnet anschließend die ganze Menge nur insofern der Zählvorgang noch an ihr haftet. „5“ ist kein Symbol für diesen ganzen Vorgang.

Die Zahl als Ganzheit (Einheit) einerseits und als Zusammensetzung (Vielheit) andererseits zu verstehen und zwischen beiden Blickwinkeln flexibel zu wechseln (d. h. beide Blickwinkel integriert zu haben), ist offenbar auch eine Leistung, die unsere Beachtung finden sollte.

Bedeutungen zweistelliger Zahlen

Die meisten der uns vorgestellten Kinder kannten Einerwürfel, Zehnerstangen und Hunderterquadrate der Zehnersystemblöcke. Sie konnten sie benennen und ihre Namen begründen. Sie konnten außerdem Zahlen in Darstellungen durch dieses Material übersetzen und umgekehrt. Dabei konnten viele vorher sagen, wie viele Zehnerstangen und Einerwürfel sie nehmen würden. Manche fügten die Einerwürfel sukzessive hinzu, während sie vom vollen Zehner weiterzählten.

Kinder ab Klasse 2 baten wir, eine größere Menge loser Elemente abzuzählen. Nur eines der Kinder bildete beim Abzählen spontan Zehnergruppen. Sie konnten die erhaltene Zahl richtig aufschreiben.
Zu unserer Überraschung wußten aber viele nicht, wie viele Schachteln, die jeweils zehn Steinen Platz bieten, von 46 Steinen gefüllt würden. Auch bei der Frage, wie viele Steine es sind, wenn man auf einmal zehn dazutut, mussten sie passen.

Wir halten folgende Betrachtungen für hilfreich: Zweistellige Zahlen, z. B. die Zahl 24, sind für das Kind anfangs aus einzelnen Einerschritten oder aus einzelnen Elementen zusammengesetzt, oft entsprechend der Zahlreihe 1 bis 24, bestenfalls schon *ein* zusammengesetztes Ganzes aus 24 Einheiten. Die Sprech- und Schreibweise der Zahl analysiert das Kind dann nicht. Die Ziffern der „24“ haben keine quantitative Bedeutung, weder als 20 und 4, noch als zwei mal 10 Schritte/Elemente und noch vier o. ä.
Man kann ein Kind, das dieses Zahlverständnis hat, *belehren*, dass die 2 die Zehner angibt, die 4 die Einer und wie man die Zahl mit Zehnersystemblöcken darstellen kann. Was man dem Kind aber *nicht* durch Instruktion vermitteln kann, ist, diese neue Zahlbedeutung mit seiner alten zu integrieren.
Nachdem wir eine Menge von 24 Dingen in zwei Zehnerhäufchen und einen Rest zerlegt hatten, verstand Peter wohl, dass sich die Gesamtzahl nicht geändert hat. Dennoch waren 10, 10 und 4 für ihn nicht 24. Erst dann waren es 24, wenn man diese Teile zusammenfügte, insbesondere in linearer Anordnung.

Viele Kinder haben zwei getrennt voneinander existierende Zahlkonzepte: Einerseits bedeutet die Zahl einen Abschnitt der Zahlreihe, nur durch Einerschritte gegliedert, andererseits bedeutet sie eine Kombination aus Zehnerstangen und Einerwürfeln u. ä., wobei diese beiden Bausteine getrennte Kategorien sind. Die Unverbundenheit ist erkennbar am Versagen des Kindes in den Situationen, in denen Einer in Zehner oder Zehner in Einer verwandelt werden müssen.

4.2.2 Beispiele

Florian 1[5]
Florian, 7 Jahre alt, ist in der zweiten Klasse. Bei unseren Treffen wirkt er meistens frustriert und lustlos, verlangt in Kindersprache nach Schokolade und zeigt geringes Durchhaltevermögen.

Florian löst die Aufgabe „8 – 5“ so: Er zeigt 8 Finger, die der linken Hand und drei Finger an der rechten. Jetzt bewegt er von rechts nach links nacheinander den achten, siebten, sechsten, fünften und vierten Finger, während er von 1 bis 5 zählt. Dann nennt er das Ergebnis „drei“.

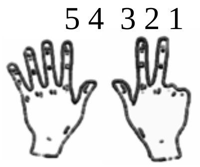


Abb. 4.2: Florian löst „8 – 5“ mit Hilfe seiner Finger.

[5] „Florian 1“ bedeutet „erstes Beispiel von Florian in Kapitel 4“. Die verschiedenen Beispiele eines Kindes sind also durch das ganze Kapitel 4 fortlaufend nummeriert. – Die Namen der Kinder sind geändert.

An einem anderen Tag bitten wir ihn, acht kleine Holzzylinder so hinzulegen, dass man leicht sehen könne, dass es acht sind. Er versucht zuerst eine Ziffer 8 aus den Zylindern zu gestalten. Später bildet er eine Würfelfünf und eine Würfeldrei. Wir stellen wieder die Aufgabe „8 – 5“. Er zählt die Zylinder der Würfeldrei und fügt weiterzählend („vier, fünf“) noch zwei Zylinder der Würfelfünf hinzu.

Abb. 4.3: Florian löst „8 – 5“ anhand einer Würfelbild-Darstellung

Interpretationsvorschlag:

Florian weiß, dass an einer Hand fünf Finger sind und er kann drei Finger sofort erkennen. Auch die Würfelfünf und die Würfeldrei erfaßt er spontan. Aber offenbar „sieht“ er weder „seine“ 5 noch „seine“ 3 in seinen Bildern der 8.

Florians Mutter berichtete, dass er Fingerbilder der Zahlen für lange Zeit sukzessive (einen Finger nach dem anderen) herstellte, während er dazu koordiniert die Zahlwortreihe aufsagte. In der Untersuchung schien er die Bilder simultan herzustellen – er zeigte 8 Finger gleichzeitig. Er hat also das Fingerbild mit dem Vorgang des Zählens und dem dazu koordinierten Fingerstrecken identifiziert und sich das Ergebnis eingeprägt: Die acht Finger stehen für das Zählen von 1 bis 8.

Florian hat vielleicht eine quantitative Vorstellung zu einer Zahl (Zahl als Vielheit, als Anzahl vieler Dinge), da er zur „8“ das Fingerbild simultan zeigt. Aber die Elemente der Zählreihe, die dem Fingerbild zugrunde liegt, wurden noch nicht in acht Einheiten verwandelt („unitizing“, Abstraktion). Der Zählvorgang, durch den das Fingerbild ursprünglich hergestellt wurde, bestimmt Florians Sicht vom Bild.

Florian kennt ein unverwechselbares, simultan erfasstes Muster der 8. Aber Florians Finger sind gewissermaßen noch mit 1 bis 8 beschriftet. Die Finger ersetzen die Zahlen von 1 bis 8 oder das Zählen von 1 bis 8, sie stellen noch nicht die „Achtheit aus acht Einheiten“ dar, auch nicht die Zusammensetzung aus einer Fünfheit und einer Dreiheit.
Wenn die Finger noch nicht „gleich“ sind, im Sinne von Einheiten, aus denen die Vielheit einer besonderen Zahl zusammengesetzt ist, hat er nicht die Freiheit 6, 7, 8 mit 3 zu identifizieren.
Unter dieser Voraussetzung werden es *mehr*, wenn man *nach rechts* „Zahlen“ hinzufügt, nach links (zurück) zu gehen, bedeutet „Zahlen“ wieder wegnehmen, (nur) auf diese Weise werden es weniger.

<u>Anni 1</u>

Anni, 7 Jahre, erste Klasse, hat einen besonderen familiären Hintergrund: Sie kam im Alter von drei Monaten nach Deutschland. Mit ihrer Mutter spricht sie teilweise in deren Muttersprache, – eine der Sprachen der Ureinwohner Lateinamerikas. Ihre Großel-

tern mütterlicherseits sind Analphabeten, ihre Mutter hat nur drei Jahre eine Schule besucht, da die Kinder bald wieder zur Mitarbeit in der Landwirtschaft gebraucht wurden. In der Schule wurde nicht in der Muttersprache der Kinder unterrichtet, ihr Gebrauch war vielmehr untersagt. Man muss also davon ausgehen, dass auch Anni vor Schuleintritt anders „enkulturiert" worden ist als andere Kinder.
Anni ist ein sehr zartes, jünger wirkendes Kind. In der Interaktion mit mir zeigt sie sich redlich bemüht. Sie fragt oft, ob sie es richtig macht: Es ist ihr wichtig, es richtig zu machen, und sie kann es selbst nicht beurteilen.

Anni zeigt spontan Fingerzahlbilder für die Zahlen bis 15. Zahlen größer als 10 stellt sie durch die Zahl der Einer dar:

R. S.: „Welche Zahl kommt vor 14?"
A.: „Fünfzehn."
R. S.: „Vor 14. Ich meine, welche Zahl kommt, wenn du rückwärts zählst?"
Anni zeigt vier Finger und klappt einen davon weg: „Dreizehn."

Vor Anni liegen zwei Kärtchen mit fünf Punkten in Würfelbildanordnung und ein Kärtchen mit drei Punkten. Sie soll sagen, wie viele Punkte es zusammen sind.
Sie zeigt zwei Hände mit gestreckten Fingern: „Fünf und fünf ist zehn."
R. S.: „Und drei dazu?"
Anni: „Elf?" Sie schaut auf ihre Finger: „Dreizehn."

Einmal stelle ich Anni eine sehr schwierige Frage: „Was bedeutet 3 + 4 = 7?"
Anni liest die Aufgabe richtig, weiß aber nicht, was ich damit meine. Ich zeige ihr an einer Hand erst drei Finger, dann vier Finger und frage, wieso das sieben sind. Anni vermutet, dass es falsch ist. Sie ersetzt die Gleichung durch: 3 + = 1 = 7.
Beim Lesen bemerkt sie, dass was nicht stimmt und schreibt neu: 3 + 1 = 7.
Erläuternd zeigt sie drei Finger an der linken und den Daumen an der rechten Hand:

Sie korrigiert sich erneut:

sind 7.

und schreibt nun: 3 + 1 = 1 + 7

Interpretationsvorschlag:

In diesem Zusammenhang soll die Aufmerksamkeit nicht Annis Unfähigkeit gelten, die symbolische Darstellungsweise zu deuten und Beziehungen symbolisch festzuhalten.
Anni kann Zahlen in Fingerkonstellationen übersetzen und umgekehrt. Für einige Zahlen größer als 10 verwendet sie eine Konstellation, bei der nur die Einer noch gezeigt

werden. Die „vorausgehenden" Zehn können vermutlich auf irgendeine Weise gedacht werden. Manchmal leistet sie die Übersetzungen von Zahl(wort) in Fingerbild und umgekehrt simultan, manchmal stellt sie die Bilder koordiniert zum Aufsagen der Zahlwortreihe sukzessiv her.
Das letzte Beispiel zeigt, dass Annis Wahrnehmung des Fingerbildes vom Gesamteindruck bestimmt ist und die einzelnen Elemente im Ganzen des Fingerbildes nicht gewürdigt werden. Wir werden daher ein weiteres Beispiel von Anni im Kontext von „die Zahl als zusammengesetztes Ganzes" bieten.
Nebenbei angemerkt: Ein Kind wie Anni sollte z. B. nicht darin geübt werden, sieben Finger spontan zu zeigen, da sie erst noch das Bild der sieben Finger mit dem Zählen bis sieben verknüpfen oder integrieren muss.

Andrea 1

Andrea (Gesamtbericht in Kapitel 6) ist in der dritten Klasse, sie hat, als sie bei uns vorgestellt wird, ungefähr 2 ½ Jahre die Schule besucht. Sie kann wenig Einblick in ihr Denken geben und wirkt passiv, die Untersucherin weiß nicht, ob verschlossen, blockiert oder resigniert.

8 – 5 rechnet Andrea mit den Fingern, ebenso wie Florian. Beim Zählen der Finger berührt sie teilweise den jeweils gezählten Finger, so dass das Fingerbild nicht mehr sichtbar ist.

6 + 7 rechnet sie so: Sie zeigt 6 Finger und fügt sukzessive sieben weitere Finger hinzu. Als 10 Finger verbraucht sind, benutzt sie die Finger der linken Hand ein zweites Mal und zeigt zuletzt drei Finger der linken Hand. Jetzt zählt sie noch einmal nach, ob sie 7 Finger hinzugefügt hat, indem sie das Anfangsbild wieder herstellt und den Vorgang nachvollzieht. Zuletzt sind fünf Finger der rechten und drei Finger der linken Hand gestreckt. Sie schaut auf die drei Finger der linken Hand und nennt das Ergebnis „13".

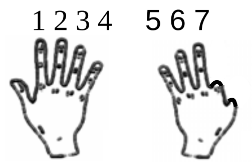


Abb. 4.4: 6 Finger und 7 Finger dazu sind so viele: „Dreizehn".

Interpretationsvorschlag:

Andrea übersetzt Zahlen in Fingermengen. Die Fingerkonstellationen sind einerseits spontan mit entsprechenden Zahlen verknüpft, aber beim Verknüpfen von Zahlen werden Finger einzeln zugefügt oder weggenommen. Ihr Vorgehen erinnert teilweise an das Zusammenlegen von Gegenständen mit anschließendem Durchzählen der gesamten Menge, aber dieser Prozeß hat schon einige Abkürzung erfahren, da sie Fingerbilder mit Zahlen assoziiert hat (z. B. für 6 und 13).
Man bemerkt, dass sie 7 nicht als 4 und 3 reflektiert, weder im voraus, noch anschließend (sie zählt auch bei der Kontrolle die Finger einzeln).

<u>*Maria 1*</u>

Maria (7 Jahre alt, ein Jahr zurückgestellt) ist am Ende der ersten Klasse, als sie bei uns vorgestellt wird. Sie zeigt sich in ihrem sprachlichen Ausdruck gehemmt, ergänzt aber spontan einen bedeutungslosen Polygonzug, der – die Untersucherin jedenfalls – an nichts Konkretes erinnert, zum Bild eines Hündchens.

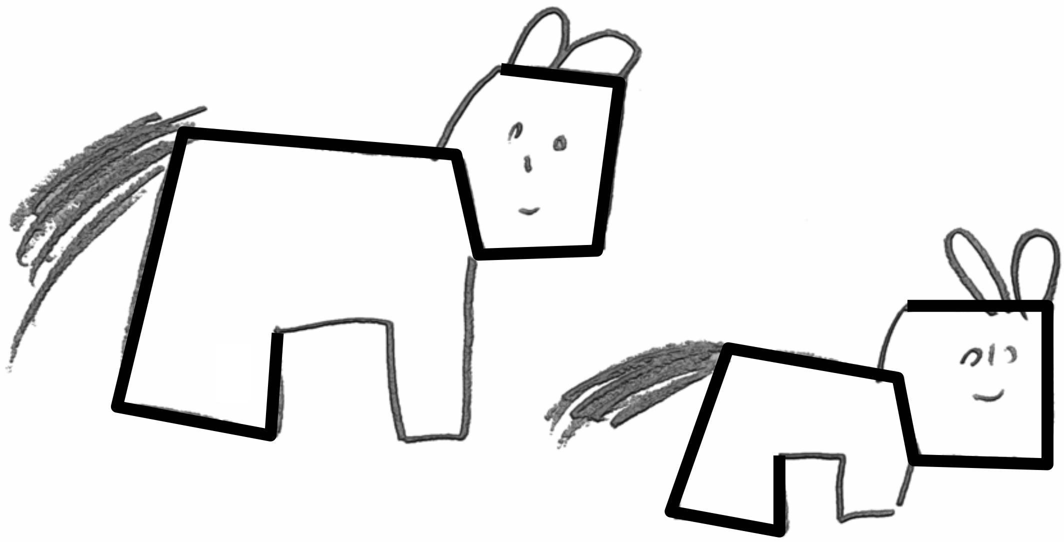


Abb. 4.5: Maria verwandelt einen Polygonzug nach dem Abzeichnen spontan in ein Hündchen.

Maria ordnet Würfelbildern die richtige Zahl zu. Sind Punkte nicht als Würfelbilder angeordnet, nennt sie nur bei drei Punkten spontan die Anzahl, schon bei vier Punkten zählt sie ab.
Fragt man sie, ob sie die Anzahl der Punktebilder auch ohne zu zählen bestimmen könnte, wandelt sie einige Bilder im Geiste in ein Würfelbild oder ein erweitertes Würfelbild um. Dabei spielt die 5 eine große Rolle, der sie auch eine emotionale Note verliehen hat: es sind 5 Kinder, das in der Mitte hat Geburtstag, die anderen stehen um das Geburtstagskind herum, erklärt sie einmal.

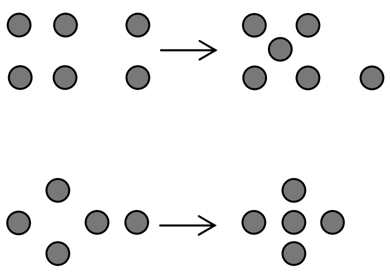


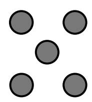
Abb. 4.6: Maria verwandelt Punktebilder im Geiste in Würfelbilder mit der Würfelfünf.

Als sie sich für ihre Nachhilfelehrerin Aufgaben überlegt, wählt sie eine bildliche Darstellung durch Zahlbilder, die aus Würfelbildern bis 5 zusammengesetzt sind: 7 stellt sie durch eine Würfelfünf und eine Würfelzwei dar, 8 durch Würfelfünf und Würfeldrei. Darunter schreibt sie eine Minusaufgabe. Bild und Aufgabe verknüpft sie auf sinnvolle

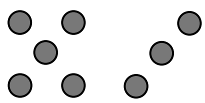
Weise mit einer Geschichte: Es sind acht Schneeflocken. Drei davon schmelzen. Wie viele sind noch da?

Abb. 4.7: Marias Aufgaben: „Da sind acht Schneeflocken. Drei davon schmelzen. Wie viele sind noch da?“
„Da sind sieben Handschuhe. Zwei gehen verloren. Wie viele sind noch da?“

Als sie zwei Plättchen zu fünf Plättchen ergänzen soll, antwortet sie sofort mit „drei“ und bildet zur Illustration eine Würfelfünf:



R. S.: „Nimm noch so viele, dass du 8 hast.“
Wieder antwortet Maria sofort mit „drei“ und fügt eine Würfeldrei dazu:



R. S.: „Wie viele fehlen bis 10?“
Nach kurzer Pause sagt Maria „zwei“ und begründet ihre Antwort damit, dass zwei weitere Plättchen aus der 3 eine 5 machen und dass 5 und 5 gleich 10 ist.

Ebenso geht sie vor und begründet, wenn sie 6 anhand eines Bildes aus einer Würfelfünf und einem Einer zu 10 ergänzen soll: Sie zählt im Geiste die zur zweiten Fünf fehlenden Punkte dazu.

Maria kann Zahlen bis 15 in Würfelbild-Darstellungen übersetzen und umgekehrt. Dabei geht sie rasch vor, ohne Punkte einzeln zu zählen.

Vorschlag zur Interpretation:

Maria verfügt einerseits über eine eingeschränkte Simultanerfassung, andererseits demonstriert sie eine gute Beziehung zu Mustern: gegebene Punktmuster zerlegt sie auf geeignete Weise in Teilmuster und bildet geeignete Additionsaufgaben (anstatt Punkte einzeln zu zählen). – Die entsprechenden Aufgabenstellungen aus dem Hamburger Beobachtungsbogen (AMT FÜR SCHULE, Hamburg, 1991) sind hier nicht dargestellt.

Sie verändert Konstellationen im Kopf zu Würfelbilder-Kombinationen, deren Anzahl sie sofort zuordnen kann. Würfelbilder spielen eine zentrale Rolle: Maria kann Zahlen bis 15 sofort aus Würfelbildern zusammensetzen und entsprechende Darstellungen in Zahlen übersetzen. Entsprechendes gilt für Fingerbilder. Würfelbilder (und gewisse Kombinationen aus ihnen) sind gewissermaßen eine andere Schreibweise der Zahlen, neben Ziffern. Diese Muster sind für Maria Ganzheiten, die aus Einzelnen zusammengesetzt sind. Das bekundet sie durch ihre Geschichte zur Fünf ebenso wie durch ihre Bearbeitung der Ergänzungsaufgaben.

Ergänzungsaufgaben löst sie teilweise auf Grundlage ihrer Vorstellung eines Würfelbilds oder einer Kombination von Würfelbildern. Beziehungen zur 5 im Zahlenraum bis 10 sind auf Grundlage dieser Vorstellung für sie erkennbar. Ohne diese Muster real oder in der Vorstellung zu aktivieren, kann sie sich allerdings über diese Beziehungen („zwei mehr als 5“) nicht äußern (das zeigt sich bei Aufgaben, die hier nicht dargestellt sind).

Maria zeigt, dass bestimmte feste Muster ihre Tür zu Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen sind. Diese vertrauten Muster kann sie mental zerlegen und zusammensetzen; sie kann diese Handlungen mit Zahlen und Symbolschreibweise verknüpfen. Da die Muster vertraut sind, bildet ihre begrenzte Simultanerfassung kein Hindernis.
Diese Aussage erhält noch mehr Gewicht, wenn man beachtet, dass die Zahlreihe für Maria schwierig ist.

Peter 1

Peter wurde im Zeitraum der Vorstellung 9 Jahre alt. Er besuchte die zweite Klasse einer Körperbehindertenschule (nach einer Vorklasse war dies sein drittes Schuljahr), weil er an einer Gehbehinderung (linkes Bein) und einer starken Einschränkung im Gebrauch der linken Hand leidet. Die Behinderung wurde durch eine vorgeburtliche (intrauterin aufgetretene) Hirnblutung verursacht. Peter, der sich spontan beobachtete, gab uns gerne und kompetent Auskunft über sein Denken.

Bei unserem ersten Treffen liegen 13 kleine Holzzylinder vor, die Peter vorher gezählt hat. Ich bitte ihn jetzt, die Klötzchen so hinzulegen, „dass man leicht sehen kann, dass es dreizehn sind. Du kannst ruhig ein wenig ausprobieren.“
Peter findet nun nacheinander folgende Darstellungen:

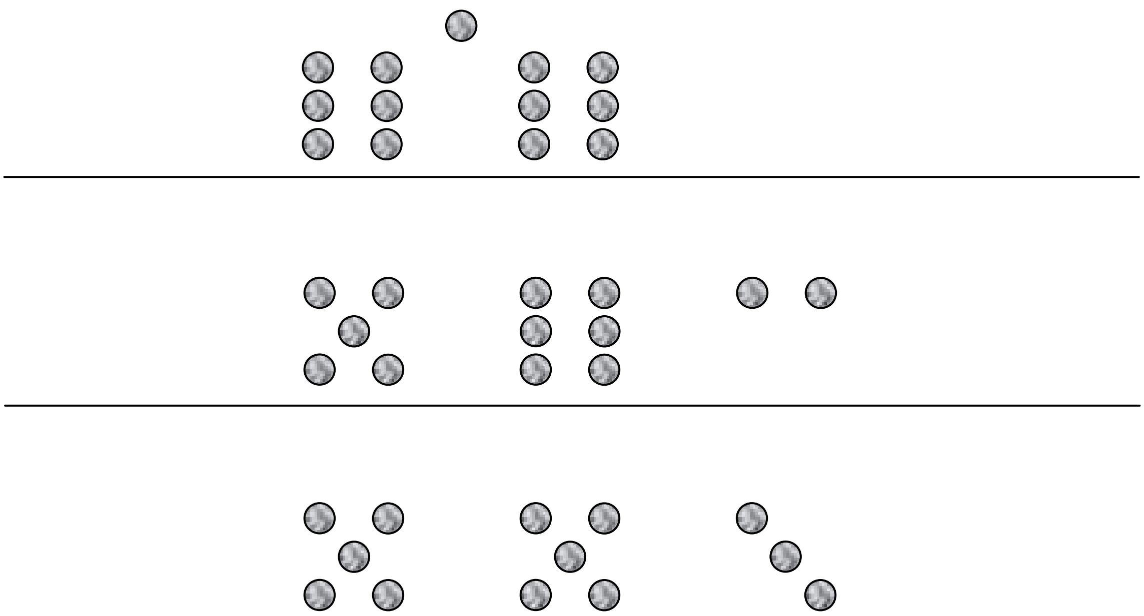


Abb. 4.8: Peter legt 13 Plättchen so, dass er leicht sehen kann, dass es 13 sind.

Beim letzten Bild muss Peter am wenigsten rechnen, weil er weiß, dass „5 und 5 sind 10 und 10 und 3 sind 13“. Beim zweiten Bild weiß er, dass „5 und 6 gleich 11“ und muss dann noch „12, 13“ zählen. Beim ersten Bild muss er viel nachdenken, da er nicht weiß, dass $6 + 6 = 12$ ist.

Jetzt probieren wir, ob man mit dem letzten Bild gut rechnen kann. Ich gebe Peter schriftlich die Aufgabe „13 – 5“ und frage, ob das Bild ihm das Ergebnis sagen kann. Peter findet das Ergebnis, aber nicht mit Hilfe des Bildes. Er erinnert sich daran, dass er einige Minuten vorher überlegt hat, dass, wenn von 13 drei weggenommen werden, noch 10 bleiben, und wenn vier weggenommen werden, noch 9. Daraus leitet er ab, dass $13 - 5 = 8$.

Interpretationsvorschlag:

Dieses Beispiel wird im Abschnitt „Zahlbeziehungen“ wieder aufgegriffen und ergänzt werden, im Kontext des „eins mehr“ und „eins weniger“. In diesem Zusammenhang soll nur beachtet werden, dass Peter das „leichte“ Zahlbild nicht in der für uns naheliegenden Weise verwendet, sondern es übergeht zugunsten einer Ableitung auf Grundlage der Zahlreihe

Peter 2

Im Kontext einer anderen Aufgabe gab uns Peter weiteren Einblick in sein Zahlmodell (seine Zahlbedeutung, seine spontane Zahlvorstellung). Es handelt sich um eine Sachsituation aus dem HAMBURGER BEOBACHTUNGSBOGEN[6]. Anhand eines Bildes, das einen Blumenladen zeigt, wird Peter gefragt, was er hier rechnen könne.

Abb. 4.9: „Was geschieht hier? Was kannst du hier rechnen?“

Peter findet das Ergebnis 9. Meine Frage nach der passenden Aufgabe beantwortet er mit „4 + 5 = 9“. Er will dann zur nächsten Aufgabe weitergehen, aber ich weise auf den 20 DM Schein hin. Er weiß nicht, was das soll. Die Blumen kosten doch nur 9 DM.
R. S.: Er hat es wohl nicht passend.
Peter wiederholt meine Aussage.
R. S.: Was muss der Verkäufer tun, wenn der Kunde das Geld nicht passend hat?
Peter: Er muss zurückgeben, was zu viel ist.

Peter versucht herauszufinden, was zu viel ist. Er schaut dazu auf seine Finger und stellt fest, dass er Papier zum Aufschreiben brauche.
Er schreibt: 9 +
Dann: 9 und 20
Dann: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
Peter: Weißt du, was das ist? Eine Zahlentabelle.

Jetzt kreist er die „9“ seiner „Tabelle“ mit mehreren Farben ein. Dabei scheint er ein wenig festzuhängen und nachzudenken. Ich frage ihn, wie es weitergehe. Peter versucht jetzt, die Zahlen ab 20 bis zur 9 zu zählen. Er geht bald dazu über, die gezählte Zahl anzukreuzen und für jede schon erfasste Zahl parallel 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 zu schreiben:

[6] So nennen wir eine Handreichung zur Feststellung von Schwierigkeiten beim Rechnen mit dem Titel „Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule“, herausgegeben vom AMT FÜR SCHULE JUGEND UND BERUFSBILDUNG, Hamburg, 1991. Mehr darüber in Abschnitt 5.4.3.

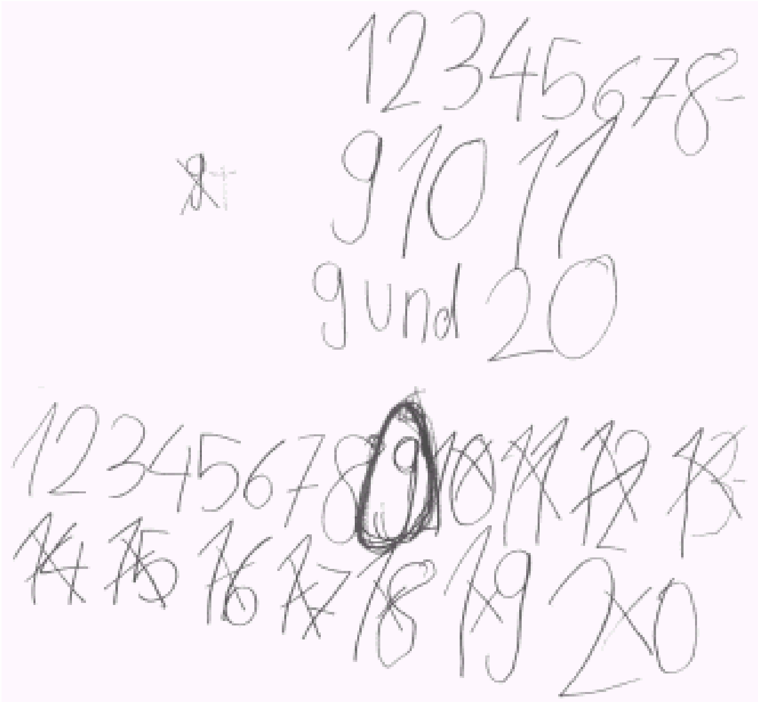


Abb. 4.10: Peter dokumentiert den Weg, auf dem er herausfindet, was der Verkäufer auf 20 DM rausgibt, wenn die Blumen 9 DM kosten.

Interpretationsvorschlag:

Peter legt uns dar, welche Vorstellung er von Zahlen hat: Er nennt es die „Zahlentabelle". Mit seinen Fingern kann er sie nicht ersetzen, vermutlich deshalb, weil 20 und 9 verschiedenen Dekaden angehören und in zehn Fingern nicht gleichzeitig „gesehen" werden können: An nur zwei Händen kann er nicht einen Finger finden, der für 20 steht, und einen anderen, der für 9 steht. Also schreibt er die Reihe der Zahlen auf.

Auffallend ist seine Behandlung der 9. Was er sich überlegt, als er sie ungefähr fünfmal einkreist, wissen wir nicht. Aber er weist uns auf ein Dilemma hin, in dem sich ein Kind in dieser Situation befinden kann: Was ist „9"? Diese „Zahl" da, oder der Abschnitt von 1 bis 9?
Durch sein Vorgehen zeigt Peter, dass die 9 für ihn beides ist: Beim Einkreisen sieht er die Ziffer (das einzelne Element der Zahlkette), beim Zählen der Zahlen von 20 bis 10 einschließlich (bis 9 ausschließlich) versteht er 9 als den Abschnitt 1 bis 9.

Trotz einer gewissen Unsicherheit hat er nun die 20 zerlegt, in 1 bis 9 und in 10 bis 20. Er könnte nun die Zahlen von 10 bis 20 zählen, aber er startet bei 20. Das ist die zweite „gegebene" Zahl, auf die sich dann sein Blick richtet, so wie er zuvor die 9 fixierte. Aber der wichtigste Grund für das Zählen der Zahlen ab 20 dürfte sein, dass die 20ste Mark die erste ist, die zurückgegeben wird, dann die 19te, dann die 18te usw.

Indem er die Zahlen von 20 bis 10 zählt, demonstriert Peter, dass er das, was zu viel ist und zurückgegeben werden muss, durch diesen Abschnitt repräsentiert sieht.

Interessant war, dass Peter folgende Fragen, die ich im Anschluß an seine Lösung an ihn richtete, nämlich „Wie viele fehlen von 9 bis 10? Wie viele fehlen von 10 bis 20?“ spontan richtig beantworten konnte. Dieser kurze Weg zum selben Ergebnis beeindruckte ihn keineswegs: Er hat das Problem anders verstanden.

Warum wechselt Peter vom bloßen Abzählen der Zahlen zur Abbildung der Zahlen von 20 bis 10 auf 1 bis 11? Gegenstände zu zählen, bereitete Peter keine Schwierigkeiten.

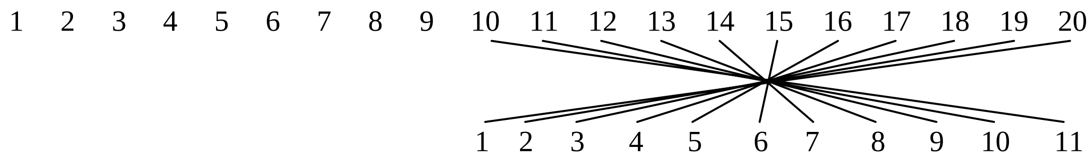


Abb. 4.11: Peters Abbildung zwischen den Zahlen von 20 bis 10 auf die Zahlen von 1 bis 11.

Eine einfache Erklärung bietet, dass es ihn verwirrt, eine Zahl anzugucken und zugleich eine andere Zahl zu sagen, wobei er in der Zahlwortreihe bleiben muss. Um sich davon nicht verwirren zu lassen, müßte er von dem, was er sieht, abstrahieren, wodurch die Zahlen 20 bis 10 zu abstrakten „Einheiten“ würden. Es ist denkbar, dass er dazu nicht in der Lage ist, weil die Zahlen von 1 bis 20 für ihn eben nicht die Bedeutung von zwanzig (gleichen) Einheiten haben, sondern jede ihren *individuellen* Charakter (entsprechend Rangplätzen in der Zahlreihe) hat. Die zwanzigste Mark wird zur ersten Mark, die neunzehnte zur zweiten, die achtzehnte zur dritten usw. 11 besteht nicht aus elf Einheiten, sondern aus der Reihe von 1 bis 11.

Peter deutet Zahlen auf dem Zahlenstrahl: 9 ist für ihn teilweise „die 9“ und teilweise die Zahlen von 1 bis 9. Dies wird erkennbar, wenn er die „Zahlentabelle“ in zwei Teile zerlegt und ihre Elemente als Zählelemente (abstrahiert also) behandelt, doch dieses Verständnis der Zahl x als Zahlreihe von 1 bis x und das Verständnis der Zahl 9 als Teil der 20 ist weitgehend noch implizit und von Peter noch nicht reflektiert.

Man kann Peters Vorgehen noch unter anderen Gesichtspunkten deuten. Im Hinblick auf Zahlbeziehungen demonstriert er uns, dass der Aufbau der Beziehungen zwischen 9, 11 und 20 aus dem Zahlenstrahl sehr schwierig ist: Es gelingt nur dann, wenn man die Aufmerksamkeit auf die Zählschritte lenkt oder die Zahlen der Zahlreihe als abstrakte Einheiten begreift. Stellt man sich vor, dass auch das „Ergebnis“ auf dem Zahlenstrahl gedeutet wird (die 11 als 1 bis 11), ist man doch recht verwirrt.

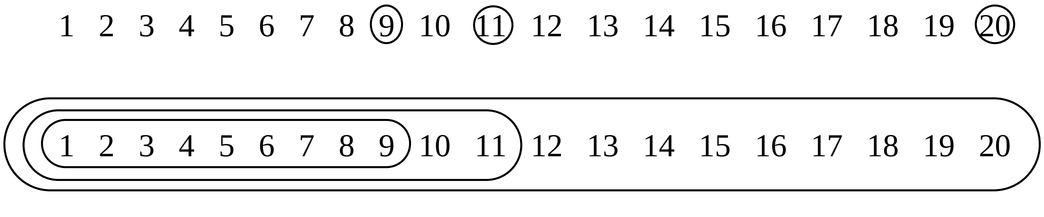


Abb. 4.12: Wie konstruiert ein Kind daraus die Teile-Ganzes-Beziehung zwischen 9, 11 und 20?

Ola 1

Ola ist 9 Jahre alt und steht (nach einer Zurückstellung vom Schulbesuch) am Beginn der zweiten Klasse, die sie wiederholt. Sie ist ein lebhaft-kommunikatives, aber auch Halt suchendes, psychisch instabiles Mädchen. Testdiagnostisch zeigt sie Stärke im ganzheitlichen und schwache Leistungen im einzelheitlichen Denken.

Ola zählt 14 Holzzylinder. Ich frage, wie viele davon zurückblieben, wenn vier weggenommen würden. Ola erklärt, sie lasse vier in Ruhe und zähle die anderen. Sie erhält „zehn".

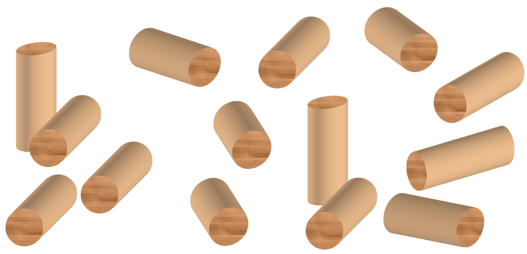


Abb. 4.13: Es sind 14. Wie viele bleiben, wenn vier weggenommen werden? Ola läßt vier in Ruhe und zählt die anderen.

Als ihr anschließend die Aufgabe 14 – 10 vorgelegt wird, sagt sie nach längerem Schweigen „fünf". Sie hat auf irgendeine Weise um zehn zurückgezählt. (Ola, die grundsätzlich bereitwillig erklärte, wie sie überlegt hat, war unwillig, dies zu tun, wenn sie zählend rechnete.)
Ich zeige jetzt auf die Holzzylinder, die noch so da liegen, wie sie sie gelegt hat: „Wenn du davon zehn wegnimmst, wie viele bleiben dann noch?" Ola antwortet sofort: „Vier."

Interpretationsvorschlag:

Im ersten Abschnitt zerlegt Ola die 14 Zylinder in einen Teil von 4 und einen anderen Teil, den sie zählend bestimmen muss. Im letzten Abschnitt zeigt sich, dass sie noch erinnert, dass die Teile die Anzahlen 4 und 10 hatten.
Die Aufgabe „14 – 10" bringt sie offenbar in keiner Weise mit der Menge der Zylinder und ihren Teilen in Verbindung. Sie zieht ein davon getrenntes Register und zwar wieder einmal die Zahlwortreihe: Sie bemüht sich, von 14 um 10 zurückzuzählen, beginnt vermutlich mit „14" und landet bei 5, nachdem sie zehn „Zahlen" genannt hat.

Wie kann man diese Trennung erklären? Olas Bedeutung der „14" ähnelt offenbar weniger den 14 Holzzylindern als der Reihe von 1 bis 14 (oder dem Zählen von 1 bis 14), jedenfalls im Kontext dieser Rechenaufgabe.
Eine denkbare Frage ist nun, warum die abgezählte Menge für Ola keine naheliegende, angenehme Repräsentantin der Zahl 14 und ihrer Beziehung zur Zahl 10 ist. Dazu kann man sich überlegen, dass die abgezählte Menge eine „abstrakte(re)" Repräsentantin der Zahl 14 ist, wenn man davon ausgeht, dass die Bedeutung der „14" dadurch konkretisiert oder hergestellt ist, dass von 1 bis 14 gezählt wird. Die Menge der Holzzylinder zeigt diese Folge der Zahlwörter nicht – sie werden nur beim Zählen flüchtig damit verknüpft.

Man kann im Gedächtnis festhalten, dass man bis 14 gelangt ist; man kann sicher sein, dass man bei einer Wiederholung wieder bei 14 ankäme. Um die gezählte Menge von 14 gleichartigen Elementen für das Kind zu einer angenehmen und hilfreichen Repräsentantin von „14“ zu machen, muss auf jeden Fall – im Verständnis des Kindes – „14“ ein Zusammenschluss von vierzehn Dingen sein („composite unit“ – ein aus Vielen zusammengesetztes Ganzes). Das ist vermutlich mehr als die Gewißheit, bei der Wiederholung des Abzählens wieder bei 14 anzugelangen.

Um bei der Aufgabe 14 – 10 auf diese Menge der Holzzylinder zurückzugreifen, muss außerdem eine Teile-Ganzes-Interpretation der Zahlen und der Aufgabenstellung vorgenommen werden: Der 10 Elemente umfassende Teil und der 4 Elemente umfassende Teil müssen noch zur Repräsentation der 14 taugen, das heißt, das Kind muss sie im Geiste wieder zusammensetzen. Zugleich muss es die Zahl 10 mit dem einen Häufchen in Verbindung bringen und das gesuchte Ergebnis als den anderen, verbleibenden Teil deuten.

Wenn das Kind den Zahlen in erster Linie durch den Zahlenstrahl Bedeutung verleiht, ist eben diese Interpretation nicht leicht: Es muss 14 als Abschnitt von 1 bis 14 interpretieren, obwohl die letzte „Zahl“ in diesem Abschnitt „14“ ist. Es muss 10 als Abschnitt von 1 bis 10 interpretieren, welcher in der 14 drin ist und zugleich herausgetrennt. Es muss die Zahlen von 11 bis 14 als Teil der 14 und als Äquivalent zur 4 interpretieren. Das ist möglich, aber das zählende Lösen von Aufgaben bietet zu diesen Reflexionen keinen Anstoß.

Das Kind verleiht den Zahlen insbesondere dann in erster Linie durch den Zahlenstrahl Bedeutung, wenn die Zahl *nicht* mit einer ebenso vertrauten quantitativen Vorstellung verknüpft worden ist, z. B. mit einem Muster. Die Gründe für das Fehlen einer solchen Bedeutung können im Kind liegen, aber auch in seiner Umwelt, die es zum zählenden Rechnen ermutigte und versäumte, ihm Aufgaben zu stellen, die zur Integration quantitativer Zahlvorstellungen mit der Zählreihe anregten.

Eine andere Interpretation geht verstärkt darauf ein, wie Ola die Teilgruppen von vier, von zehn und die gesamte Menge von 14 Elementen aufeinander bezieht: Ist die Gesamtmenge „14“ verschwunden, wenn sie in zwei Teilmengen aufgeteilt ist? Diese Überlegungen betreffen Zahlbeziehungen und werden in Abschnitt 4.3 wieder aufgegriffen.

Olas Vorgehen ist *nicht* Ausdruck eines schlechten Gedächtnisses oder einer basalen Wahrnehmungsstörung, sondern ihrer besonderen Interpretation der Zahlen.

Greta 1

Greta ist 12 Jahre alt und besucht die 5. Klasse einer Sonderschule. Durch eine Erkrankung ihrer Mutter in der Schwangerschaft hat sie eine Hirnschädigung erlitten, die zu einer besonderen Mischung von Stärken und Schwächen geführt hat.

Ich gebe Greta drei Zehnmarkscheine und fünf Einmarkstücke. Sie soll herausfinden, wieviel Geld das ist. Sie zählt zweimal hintereinander „10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80“. Als ich auf einen Zehnmarkschein und auf eine Münze zeige und frage, ob beides dasselbe ist, sagt sie „nein“ und zählt nun richtig: „10, 20, 30, *31, 32, 33, 34, 35*“.

R. S.: „Stell dir vor, du musst davon 5 DM bezahlen.“
Greta gibt mir die fünf Markstücke, die sie vorher abzählt. Spontan weist sie darauf hin, dass sie auch ein Fünfmarkstück hätte geben können.

R. S.: „Stell dir nun vor, du musst von den 35 DM jetzt 10 DM bezahlen.“
Greta nimmt die fünf Münzen und holt weitere aus der Geldkasse. Dann legt sie 9 Einmarkstücke und einen Zehnmarkschein vor mich hin. Als ich sie um eine Erklärung bitte, legt sie zählend erst die Münzen in einer Reihe vor mich hin („1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9“) und legt zuletzt den Zehnmarkschein, wobei sie „10“ sagt. Das macht sie mit dem Ausdruck von Selbstvertrauen, das sie eher selten zeigt. Sie empfand diese Lösung offenbar als besonders stimmig.

„eins zwei drei vier fünf sechs sieben acht neun zehn!“

Abb. 4.14: Greta gibt zehn DM.

Interpretation:

Mit ihrem spontanen Hinweis auf das äquivalente Fünfmarkstück hat mich Greta überrascht: Sie hatte bisher anhaltend demonstriert, dass sie nicht versteht, wie zwei Einmarkstücke einem Zweimarkstück entsprechen können und umgekehrt. Oft verwendete sie Münzen jeder Art als wären alles Einmarkstücke.

Ihre letzte Lösung macht jedoch deutlich, dass sie „10“ nicht als Zusammenfassung von zehn Einern versteht. Um zehn zu realisieren, legt sie einerseits zehn Dinge vor, zur Zahlwortreihe von 1 bis 10 koordiniert, andererseits steht die „10“ selbst nicht für zehn Dinge und faßt die Zählprozedur oder die gezählte Menge nicht zusammen, sondern ist das zehnte Ding oder die Korrespondenz zum Zahlwort „zehn“.[7]

Greta begreift die Zahl „5“ als „Zählen von 1 bis 5“, aber nicht als Symbol für den ganzen Zählvorgang. Daher ist andererseits die „5“ identisch mit der Ziffer 5 oder dem Zahlwort fünf. Sie kann die Zahl in fünf Elemente übersetzen, insofern sie 5 mit der Reihe „1, 2, 3, 4, 5“ gekoppelt hat, aber sie „sieht“ in der Zahl 5 nicht eine Fünfheit. Ist sie nur mit der Zahl konfrontiert, ist die Vielheit, für die sie steht, nicht mental repräsentiert.
Dies bedeutet – jedenfalls bis zum jetzigen Zeitpunkt – eine entscheidende Hürde, die ein Teile-Ganzes Verständnis von Zahlen für sie unerreichbar macht und das zählende

[7] Einmal, als sie 14 DM geben sollte, hat Greta 13-mal eine Mark und einmal Zehnmark gegeben, wobei sie den Zehner zum Zahlwort „vierzehn“ koordinierte. Ihrer Erklärung war zu entnehmen, dass sie damit auf den Wortteil „zehn“ reagierte.

Rechnen zum einzigen Verfahren, mit dem sie zu Ergebnissen von Rechenaufgaben kommen kann, die jedoch *keine Zahlbeziehungen* im mathematischen Sinn für sie darstellen.

<u>Greta 2</u>

Greta braucht 80 Pfennige. Im Geldbeutel sind zwei Fünfziger, drei Zehner, ein Fünfmarkstück, ein Zweimarkstück und ein paar Fünfpfennigstücke. Sie wählt 8 beliebige Münzen und zählt sie in Zehnerschritten. Sie ist davon nicht recht überzeugt, findet aber keine andere Lösung. Sie wird auf eine 50-Pfennig Münze hingewiesen. Aber sie zählt diese nur in einem Zehnerschritt zu den drei Zehnern dazu. Das ergibt nicht „achtzig“.

R. S.: „In der 50 sind mehrere Zehner drin. Finde heraus, wie viele Zehner in der Fünfzig drin sind.“
Greta: „Fünfzig?“
R. S.: „Oh! Das sind nicht die Zehner. Wie viele *Zehner* brauchst du für 50?“
Greta: (fragend) „Zehn, zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig?“
R. S.: „Ja, so kannst du es rausfinden. Wie viele Zehner sind das?“
Greta sagt die Zehnerreihe erneut, während sie bei jedem Schritt einen Finger streckt. Sie schaut dann ihre Hand an und – nach einem Stocken – sagt sie: „Fünf, fünf sind es.“

Als wir anschließend mit den 80 Pfennig zum Getränkeautomaten gehen, gerät Greta wieder in Unsicherheit, wieviel Geld sie in der Hand hat. Sie kann den Prozess (feststellen, wie viele Zehner in den 50 sind) nicht selbständig wiederholen.

Interpretationsvorschlag:

Es spielt sicher eine Rolle, dass es hier um *Zehner*schritte geht, nicht um Einerschritte, aber das Problem, eine Zahl als Zusammenfassung der Zahlreihe bis zu dieser Zahl oder eine Zahl als Zusammenfassung von Vielen zu verstehen, hat Greta grundsätzlich.

<u>Greta 3</u>

Greta erhält (schriftlich) folgende Aufgabe:

„Es kommen 9 Kinder. Jedes Kind will ein Stück Kuchen. Wie viele Stücke Kuchen musst du besorgen?“
Greta antwortet sofort mit „neun“.
„Vielleicht wollen die Kinder mehr Kuchen essen. Vielleicht will jedes Kind zwei Stück Kuchen essen. Wie viele Stücke brauchst du, wenn jedes der 9 Kinder zwei Stücke essen will?
Male dazu ein Bild. Das sind die 9 Kinder:

Gretas erste Vermutung ist „zwei Stücke – elf?“. Ich wiederhole, dass *jedes* Kind zwei Stücke will.
Jetzt schreibt sie in vertikaler Anordnung unter jedes Kind „ 1 2“.

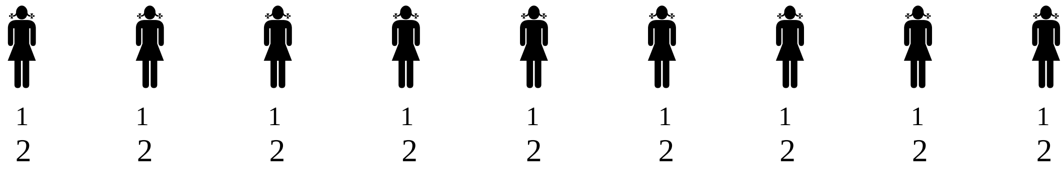


Abb. 4.15: Greta gibt jedem Kind zwei Kuchenstücke.

Dann zählt sie die Zweien ab und erhält „neun“. Sie runzelt die Stirn und denkt eine Weile nach. Dann bestätigt sie: 9 Stücke für 9 Kinder.

Ich frage, wie viele Stücke dann jedes Kind bekommt. Greta schwankt ein wenig zwischen zwei und eins, aber eigentlich weiß sie, dass die richtige Antwort „eins“ lautet. Dazu entschließt sie sich zuletzt.
Ich frage, wie viele Stücke man braucht, damit jedes Kind zwei Stücke bekommt.
Greta: „Nochmal so viel.“!

Interpretationsvorschlag:

Die Aufmerksamkeit soll nur dem Moment gelten, in dem Greta unter jede Strichfigur „1 2“ schreibt und anschließend die Zweier abzählt. Greta schreibt für zwei Stück Kuchen nicht „1 1“ oder „2“, sondern „1 2“. Sie versteht zwei als zwei Elemente und zwar als die beiden ersten Zahlen der Zahlreihe, vielleicht angelehnt an die Vorstellung von einem ersten und einem zweiten Stück.
Dann aber nimmt sie im nächsten Schritt die Ziffer „2“ als Repräsentant für zwei Stück Kuchen, ohne ihr *kardinale* Bedeutung zu geben.
Auch bei der kleinen Zahl 2 hat sie ein Problem, *eine* Ziffer als Symbol für *zwei* Dinge zu verstehen. Was ist „2“: Ist es „1 2“ oder „2“?
Hätte Greta die Aufgabe so angepackt, dass sie anstelle von „1 2“ beispielsweise zwei Kringel unter jedes Kind gemalt hätte, hätte sie die Aufgabe richtig gelöst.

Katzen kann man alles sagen

Auf der Treppe saß ein Mädchen,
ein graues Kätzchen auf dem Schoß.
„Dreimal drei ist zwölfundzwanzig“,
flüsterte es ihm ins Ohr.

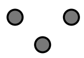
„Aber ja nicht weitersagen!“
Ernst sah es das Kätzchen an.
Keine Sorge! dacht ich, als ich’s
im Vorübergehn vernahm.

Katzen kann man alles sagen.
Was man auch zu ihnen spricht,
sie verraten kein Geheimnis.
Katzen machen so was nicht!

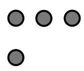
JOSEF GUGGENMOS

<u>*Anni 2*</u>

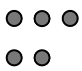
Anni (7 Jahre, erste Klasse) soll Punktekärtchen mit zwei bis sechs Punkten in verschiedener Anordnung sofort die Anzahl zuordnen.
Kärtchen mit drei Punkten benennt sie sofort: Es sind drei, „weil es wenig sind“. Bei vier Punkten erfolgt die Antwort oft verzögert und wird begründet durch: „vier, weil es noch ein bißchen wenig sind“. Anni scheint dabei nicht zu zählen, jedenfalls beruft sie sich nicht aufs Abzählen. Bei fünf oder sechs Punkten äußert sie, es seien „viele“ und daher fünf oder sechs.



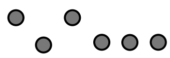
Anni: „drei, weil es wenig sind“



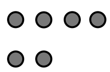
Anni: „vier, weil es noch ein bißchen wenige sind“



Anni:„ein bißchen schwer“



Anni: „fünf, nee, sechs, weil’s viele sind“



Anni: „auch sechs, ich hab’s mir gemerkt“

Abb. 4.16: Anni beurteilt die Anzahl von Punkten

An einem anderen Tag gebe ich Anni eine Reihe von Holzplättchen und fordere sie auf, sie so hinzulegen, dass sie rasch sehen kann, wie viele es sind. Anni legt:

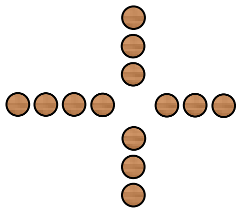


Abb. 4.17: Anni legt 13 Plättchen so, dass sie leicht sehen kann, wie viele es sind.

Sie findet, dass es dreizehn sind. Sie habe überlegt, ob es 10 sind. Aber es sind ein bißchen viele für zehn. 13 könnte gut passen.

Ich bitte Anni, das Muster abzumalen. Sie malt:

Abb. 4.18: Anni malt das Muster, das sie gelegt hat, ab (Abb. 4.17).

Eine erste Prüfung, ob’s genauso ist, wie das auf dem Tisch gelegte Muster, führt Anni zur Antwort „Ja“.
„Hast du genauso viele Kreise gemalt wie da Plättchen liegen?“
Anni prüft erneut: „Nein“. Sie streicht vier Kringel durch und fügt einen wieder hinzu.

Auf meine Bitte hin kopiert sie das Muster erneut und malt jetzt:

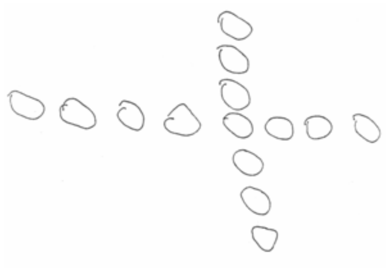


Abb. 4.19: Zweite Version

Beim Abmalen legt sie teilweise den Finger auf das nächste zu malende Plättchen.[8]

---

[8] Polygonzüge, wie LORENZ sie verwendet, zeichnet Anni korrekt ab.

Interpretation:

Im Vergleich zu anderen Kindern ist Annis Verhalten ungewöhnlich: Wenn diese die Anzahl der Punkte nicht sofort erfassen können, zählen sie die Punkte. Anni kann zählen, aber sie geht offenbar anders heran: „Drei“, das ist „wenig“; „vier“ ist „noch ein bißchen wenig“; „fünf“ ist „ein bißchen viele“ oder „viele“ und „sechs“ entsprechend. Sie versucht, die Zahlworte einem Gesamteindruck der Menge zuzuordnen.

Auch beim Abmalen ihres Musters orientiert sie sich am Gesamteindruck, nicht an den Elementen, aus denen das Muster zusammengesetzt ist. Ein Hinweis, auf die Elemente zu achten („Hast du genau so viele Kreise gemalt, wie da Plättchen liegen?“), führt zur Korrektur.

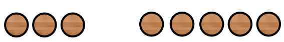
Wenn sie die Menge von 13 Plättchen richtig quantifiziert, hat sie vermutlich in irgendeiner Weise gezählt, aber sie scheint dennoch anders nachgedacht zu haben: Sie dachte an 10, aber es waren „ein bißchen viele“. (Vielleicht bedeutet „viele“ hier aber auch „mehr“?)

Anni hat die Gesamtheit im Blick, wenn es heißt „wie viele“. Im Unterschied zu anderen Kindern, für die „wie viele“ bedeutet, die Elemente durchzuzählen, und die sich in ihrem Urteil auf das Abzählen berufen.
Man möchte wissen, ob das Mädchen Fragestellungen, die auf das Invarianz-Urteil zielen, richtig beantwortet, darum wird das folgende Beispiel angeschlossen.

<u>Anni 3</u>

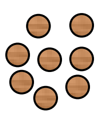
Anni (7 Jahre, erste Klasse) soll 8 Plättchen nehmen. Das macht sie richtig. Ich ordne die Plättchen in einer Reihe an und frage, ob es jetzt noch acht sind. Anni bejaht. Ob sie sicher sei? Ja.

Ich nehme jetzt aus dem Innern der Reihe zwei Plättchen heraus und füge an einem Ende der Reihe zwei andere Plättchen an.



R. S.: „Wie viele sind es jetzt?“
Anni denkt, es sind sieben, da sie beobachtet hat, dass ich zwei wegnahm und eins hinlegte, erklärt sie mir.

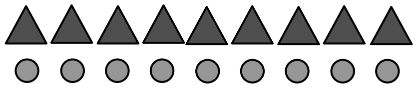
Nachdem wir festgestellt haben, dass es acht Plättchen sind, schiebe ich diese zu einem Haufen zusammen.



R. S.: „Wie viele sind es jetzt?“

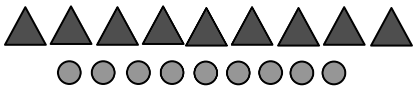
Anni antwortet sofort mit „acht“. Zuerst habe sie gedacht, es seien weniger, aber da habe sie falsch gedacht, sie seien nur zusammengelegt, erklärt sie mir in grammatikalisch fehlerhaftem Ausdruck. Sie legt die Plättchen in Zweiergruppen in der Anordnung eines Würfelvierers und übersetzt sie dann in ein Fingerbild (das genaue Vorgehen ist im Protokoll leider nicht verzeichnet).

Wir legen eine Reihe aus roten Dreiecken und gelben runden Plättchen, so dass jedes Dreieck mit einem Plättchen kombiniert ist.



„Was meinst du, sind es gleich viele Dreiecke und runde Plättchen?“
Anni bejaht. Um die Gleichheit zu demonstrieren, zählt sie, indem sie immer ein Dreieck und das darunterliegende runde Plättchen berührt und mit derselben Zahl bezeichnet: „eins - eins; zwei - zwei; drei - drei; vier - vier usw.“

Ich schiebe die runden Plättchen zusammen: „Sind es jetzt noch gleich viele Dreiecke und Runde?“



Anni: „Die Roten sind vieler.“
Sie schaut mich an. Ich frage, ob sie sich sicher ist. „Nein“. Anni zählt jetzt ab: „Es sind gleich viele.“

Interpretation

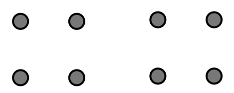
Während ihr erster Fehler auf einen Beobachtungsfehler zurückzugehen schien, zeigt Anni beim letzten Experiment mit zwei Mengen Unsicherheit im Invarianz-Urteil. Sie kann ihre Unsicherheit nicht durch Überlegung ausräumen (vorher waren es gleich viele, es ist nichts weggenommen worden, also müssen es noch gleich viele sein, o. ä.), sondern nur durch ein Abzählen beider Mengen.
Im mittleren Versuch mit nur einer Menge ist die Versuchung zum Fehlurteil nicht so groß, da die ausgedehnte Vergleichsmenge fehlt, und Anni urteilt richtig: „Du hast sie nur zusammengelegt“.

Anni zeigt also Ansätze einer operativen Begründung der Invarianz (die sich nicht auf einen Wahrnehmungseindruck stützt, sondern auf die Handlungen, die vorgenommen wurden). Veränderungen verknüpft sie tendenziell richtig mit Zahlen („es sind jetzt 7, weil du zwei weggenommen hast und eins dazu gemacht“). Dennoch ist sie unsicher, wenn ein täuschender Wahrnehmungseindruck vorliegt.
Blickt man von hier zum vorausgehenden Beispiel zurück, ist es denkbar, dass sie tatsächlich noch nicht sicher ist, dass jede Menge aus einer bestimmten Zahl von Elementen besteht, die unveränderlich ist, solange nichts weggenommen oder zugefügt wird.

Greta 4

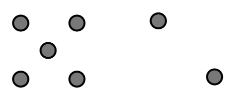
Greta erhält einen Stapel Kärtchen, auf denen Punktmuster sind. Sie soll zuerst die Kärtchen mit 3 Punkten auswählen. Anfangs zählt sie die Punkte auf jedem Kärtchen, auch wenn z. B. 6 Punkte darauf sind. Nur Karten mit einem oder zwei Punkten scheiden sofort aus. Dann plötzlich wählt sie die Dreier-Karten aus, ohne zu zählen. Dabei unterscheidet sie sicher zwischen drei und vier Punkten.

Als sie danach die Karten mit vier Punkten auswählen soll, geschieht dies ebenso rasch. Sie macht einen Fehler. Ein Kärtchen mit zwei Vierern in Würfelbildanordnung nebeneinander legt sie zu den Karten mit vier Punkten.

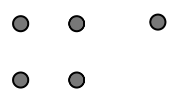


sind vier.

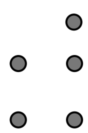
Beim Auswählen der Karten mit 5 Punkten drauf macht sie folgende Fehler:



sind fünf.



sind nicht fünf.



sind nicht fünf.

Abb. 4.20: Greta wählt Karten mit fünf Punkten aus.

Als ich sage, dass sie zwei Kärtchen übersehen hat, wählt sie die betreffenden Karten rasch aus. Das erste der beiden Muster kommentiert sie so: „eins, zwei, drei, vier – und eins dazu.“

Greta gestaltet an der Tür mit Magnetplättchen zwei Würfelfünfen. Ich frage, wie viele Plättchen es sind. Greta sagt: „fünf“. Ich präzisiere: „Wie viele sind es zusammen?“
Greta: „5 und 5 ist 10“.

Vorschlag zur Interpretation:

Wenn Greta ein Würfelbild spontan mit einem Zahlwort benennt, benennt sie ein Muster, ohne sich der Einzelelemente, aus denen es besteht, bewußt zu sein. Das Würfelbild ist so etwas wie eine andere Schreibweise für die Ziffer 5.
Beachtet sie die einzelnen Elemente, zählt sie *alle einzeln* ab.

Man fragt sich, wieso sie nicht „4 und 4“ zuordnet oder „5 und 2“ oder „4 und 1“? Vielleicht weil die vertrauten Muster „geschlossen“ (*eine* Vier oder *eine* Fünf) sind, es sind nicht *vier* Punkte oder *fünf* Punkte oder *ein* Punkt oder *zwei* Punkte, die auf der Karte vereint sind. Wenn Greta zu zwei Vierern „vier“ sagt, verwandelt sie nicht jeden Vierer in vier Elemente, um sie anschließend zusammenzufügen.
Erhält sie den Hinweis „zusammen sind es?“, sagt sie u. U. „4 und 4 sind 8“, aber die Grundlage dieser Äußerung ist nicht klar. „Vier und vier ist ...“ ist der Anfang eines Satzes, der mit der Aufgabe „4 + 4 = _“ verknüpft ist und den Greta auswendig ergänzen kann.

Bei der Beurteilung ihres Vorgehens muss man allerdings auch berücksichtigen, dass Greta die Planung und Steuerung einer Handlung, die mehrere Schritten verlangt, grundsätzlich schwer fällt. Um eine nicht vertraute, mehrschrittige Prozedur handelt es sich in diesem Fall: Analyse des Musters, Beachtung seiner Teile, anschließend Übersetzung in eine Additionsaufgabe (!) und deren Durchführung.

Kati 1

Kati ist acht Jahre alt und besucht die zweite Klasse. Sie rechnet „12 – 12 = 11“.
Sie wird jetzt aufgefordert, eine Rechengeschichte zur Aufgabe zu erzählen. Kati erzählt: „Eine Frau geht einkaufen. Sie kauft“ – eine Pause tritt ein – „sie kauft Teig. Er kostet 12 DM. Die Frau hat gerade 12 DM in ihrem Geldbeutel.“
Anschließend denkt Kati, die Lösung von „12 – 12“ sei 1 oder 0.

Vorschlag zur Interpretation:

Kati bedient sich der Zahlreihe von 1 bis 12 in der Weise, dass sie „die 12 “ verläßt und gewissermaßen auf den davor liegenden Platz zurückgeht, auf „die 11 “.
Es fällt ihr durchaus eine passende Rechengeschichte ein. Dabei fällt auf, dass sie den Kaufgegenstand „Teig“ wählt, der das Bild einer ungegliederten Masse hervorruft. Auf diesem Hintergrund versteht sie den Preis als „das Ganze, was im Geldbeutel ist“.
Die Unsicherheit bei der Wahl zwischen 1 und 0 kann man wieder verstehen, wenn man an den Zahlenstrahl denkt, der in der Regel mit 1 anfängt.

Beispiele zur Bedeutung zweistelliger Zahlen

Peter 3

Eine Aufgabe des Hamburger Beobachtungsbogen verlangt, dass das Kind eine große Zahl kleiner Hasen auf einer Seite zählt. Wir haben die Aufgabenstellung verändert: „Finde möglichst geschickt heraus, wie viele Häschen es sind.“

Peter (9 Jahre, 2. Klasse) verweilt an einer Ecke. Offenbar zählt er etwas, muss es aber immer wieder wiederholen, weil er nicht sicher ist. Dann äußert er, dass er Zehnerpacks machen will, dies aber schwierig ist. Aber er bleibt bei seiner Idee: Er zählt, fährt mit einem Stift einen Teil der Umrandung, zählt erneut, setzt die Umrandung fort, zählt

wieder und vollendet so allmählich Packen um Packen. Nur einmal bildet er einen Elfer statt einen Zehner.
Da das Herstellen der Packen sehr anstrengend für ihn war, gebe ich dann den Tip, beim Abzählen immer ein Kreuz in die schon gezählten Päckchen zu machen.
Peter kommentiert anschließend: „Da habe ich noch ganz schön Schwierigkeiten.“

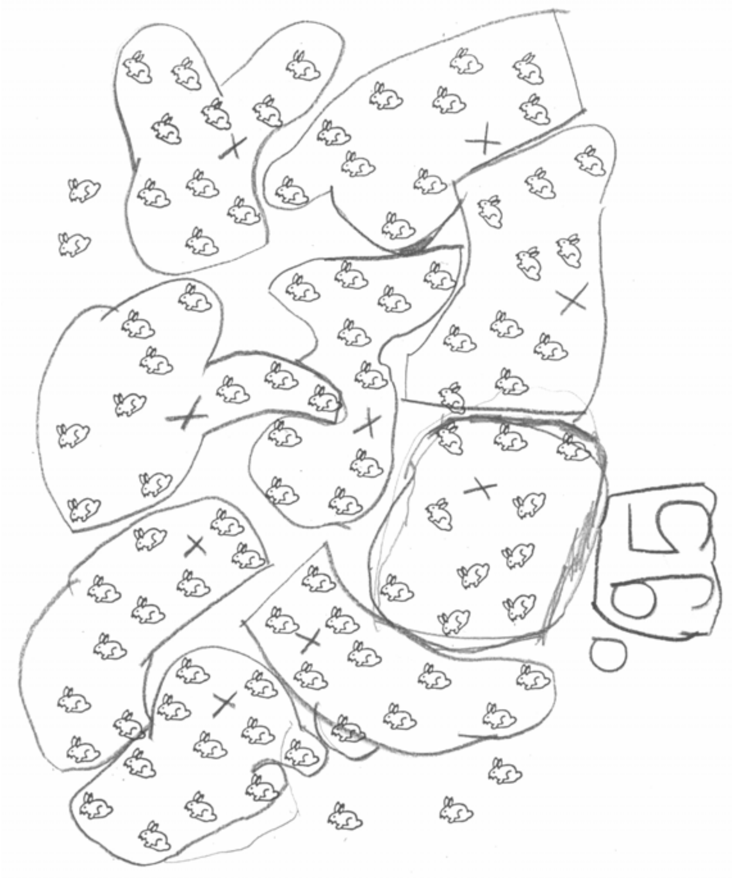


Abb. 4.21: Peter bestimmt die Zahl der Häschen auf dem Blatt mithilfe von Zehnerbündeln.

Wir wollen Peters Vorgehen im Vergleich zu Franziskas Vorgehen diskutieren.

<u>*Franziska 1*</u>

Franziska ist 9 Jahre und 7 Monate alt und besucht die dritte Klasse. Sie ist ein kommunikatives, lebhaftes Mädchen, das mit Offenheit und Sensibilität Kontakt herstellt. Sie ist Nesthäkchen der Familie und hat deutlich ältere Geschwister. Gesamtbericht in Kapitel 6.

Als Franziska möglichst geschickt herausfinden soll, wie viele Häschen auf dem Blatt abgebildet sind, erscheint ihr diese Aufgabe mühevoll und sie hat nicht viel Lust, sich daran zu machen. Sie versucht, auf der rechten Seite des Blattes in Reihen Hochzuzählen. Sie sieht dabei eine Schwierigkeit: man könne Zahlen doppelt zählen. Nach längerer Zeit, in der ihr nicht einfällt, wie sie dieser Schwierigkeit begegnen könne, weise ich sie auf die Stifte hin, die auf dem Tisch liegen. Sie will den Stift in der Weise zu Hilfe nehmen, dass sie an jedes Häschen fortlaufend eine Zahl schreibt – sie nummeriert sie also.

Dann aber fragt sie mich, wie viele es sind. Ich fordere sie zu einer Schätzung auf. „Hundert“, schätzt sie. Ich: „Ziemlich gut.“ Franziska: „Mehr oder weniger?“ Ich: „Weniger.“ Franziska: „90?“ Ich: „Mehr“. Franziska: „99?“. Ich: „Weniger“. Franziska: „95?“ usw.

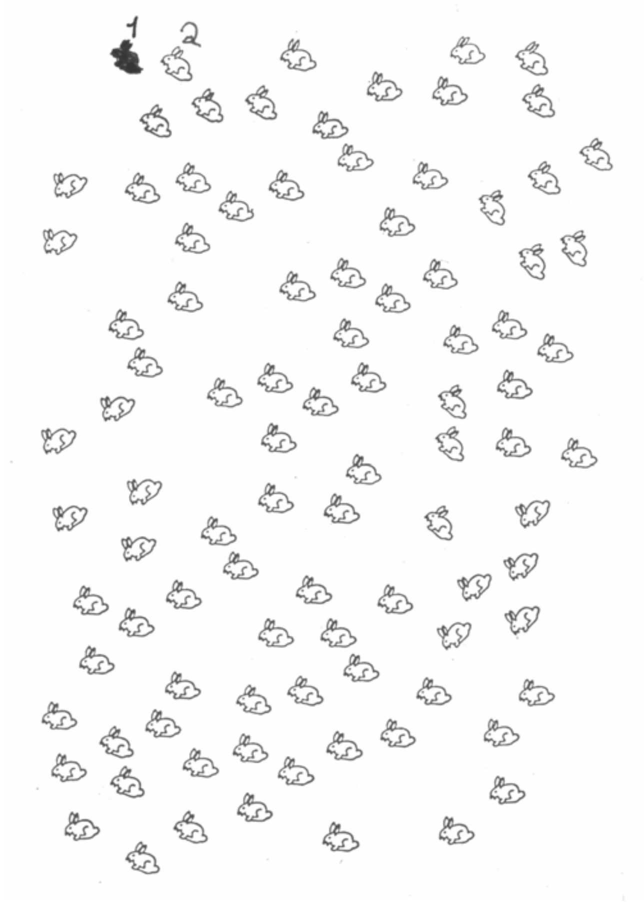


Abb. 4.22: Franziskas Idee: die Häschen nummerieren.

Vorschlag zur Interpretation von Peters und Franziskas Vorgehen:

Franziska bildet die Menge auf die Zahlreihe (1, 2, 3 usw.) ab und sieht sie nur unter dem Gesichtspunkt von Einzelnen bzw. von Einerschritten.
Peter schafft auf der großen Menge eine Zehnerstruktur, er macht Zehner aus Einern. Er zeigt damit, dass er die Zehnerzahlreihe mit Gruppen aus zehn Dingen verbunden hat.
Man kann vermuten: Für Franziska sind Zahlen aus Einern zusammengesetzt, Anzahlen sind repräsentiert durch einen Abschnitt der Zahlreihe, den sie vorzugsweise in Einerschritte abgeht. Peter ist im Begriff, Zehner als neue Einheiten zu konstruieren, aus denen Zahlen zusammengesetzt werden können.

Franziska zeigt uns einen weiteren Weg, zu einer Lösung eines mathematischen Problems zu gelangen: indem man kompetentere Personen in ein Gespräch darüber verwickelt und sich deren Wissen zunutze macht!

Besuch bei Schafen

Dicht beisammen grasten am Hang
Schafe, eine Menge.
Wir wollten sie zählen, wir kamen nicht weit -
zu groß war das Gedränge.

Wie viele waren's? Wie viele wohl?
Vielleicht, dachten wir, sind es hundert.
Wir fragten den Hund. Der verstand kein Deutsch
und schaute nur verwundert.

Hundertundsiebzehn waren's genau,
dieses erfuhren wir dann.
Der Schäfer hat's uns verraten.
Er war ein freundlicher Mann.

Wir begleiteten noch ein kleines Stück
ihn und die wollige Schar.
Er erzählte uns manches. Dann zogen wir weiter,
zufrieden ganz und gar.

JOSEF GUGGENMOS[9]

<u>*Britta 1*</u>

Britta ist gerade 9 Jahre alt und in der Mitte der dritten Klasse. Sie wirkt nachdenklich und kann ihre Überlegungen nicht schnell formulieren. Dass sie dennoch mathematisch denkt, kann sie ihrem Lehrer nicht vermitteln, obwohl ihre Klasse sehr klein ist.

Britta zählt eine Menge von Halbedelsteinen ab und schreibt die Anzahl auf: 37.

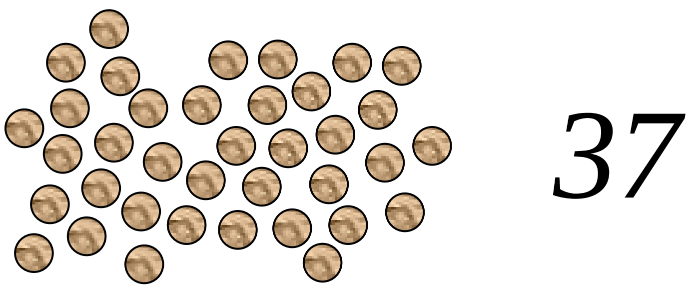


Abb. 4.23: 37 Steine und die Zahl „37"

Ich umfahre die Ziffer 7 und frage: „Hat dieser Teil der 37 etwas damit zu tun, wie viele Steine hier liegen?"
Britta weiß es nicht. Nach längerer Zeit sagt sie, es klingt etwas ratlos: „Sieben Einer und drei Zehner." Aber sie stellt keine Verbindung zwischen der Zahl und der Menge der Steine her.

[9] Aus dem Bändchen: „Katzen kann man alles sagen", Weinheim 1997.

Vorschlag zur Interpretation:

Britta kann die Zehnerstelle und Einerstelle einer zweistelligen Zahl richtig anzeigen und benennen, aber sie kann keine Beziehung zu den Teilmengen herstellen, die in den Ziffern der Zahl repräsentiert sind. Zehnerteil und Einerteil der Zahl haben für sie keine quantitative Bedeutung.

Evi 1

Evi steht am Ende der zweiten Klasse, als sie bei uns vorgestellt wird. Die erste Erinnerung ihrer Lehrerin an Evi: ein „unlustverzerrtes Gesicht“ am ersten Schultag, das sich erst nach drei Tagen entspannte. Ihr Unbehagen hat sich nie verloren: Sie findet keinen guten Kontakt zu ihren Mitschülerinnen, unter anderem deshalb, weil sie (Spiel)Regeln nicht rasch erfaßt, und kommt oft weinend nach Hause. Im Einzelkontakt bei uns ist sie schüchtern, zeigt aber durchaus Ansätze vertrauensvoller Offenheit.

Evi zählt eine Menge von Halbedelsteinen ab und schreibt die Anzahl richtig auf (27).
Ich zeige ihr einen leeren Zehnerrahmen und erkläre, dass das eine Schachtel darstellen soll, in der man die Steine aufbewahren kann. Auf jeden freien Platz soll genau ein Stein. Wir stellen fest, wie viele Plätze eine Schachtel hat: zehn.

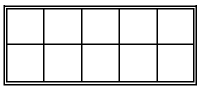


Abb. 4.24: Eine Schachtel für Edelsteine. Wie viele Schachteln braucht man für 27 Steine?

Dann frage ich Evi: „Wie viele solcher Schachteln braucht man, wenn man die 27 Steine so hineinlegen will, dass auf jeden Platz gerade ein Stein kommt?“
Evi: „Siebenundzwanzig.“

Wir verteilen die Steine auf den Karten. Ich frage Evi, so wie Britta, ob sie eine Beziehung zwischen den Teilen (Ziffern) der Zahl und der Menge der Steine sieht. Evi sieht keinen Zusammenhang.

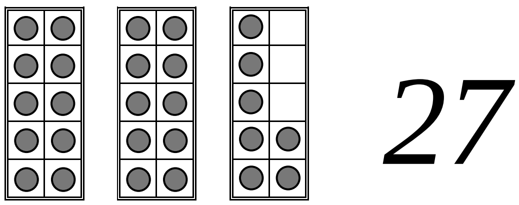


Abb. 4.25: Evi sieht keinen Zusammenhang zwischen den gruppierten Steinen und den Ziffern von „27“.

An einem anderen Tag haben wir Beutel mit je 10 Steinen gepackt. Es gibt außerdem noch einzelne Steine. Evi soll jemandem 46 Steine geben. Sie wählt vier Beutel und fügt weitere Steine einzeln hinzu, wobei sie zählt: „41, 42, 43, 44, 45, 46“.

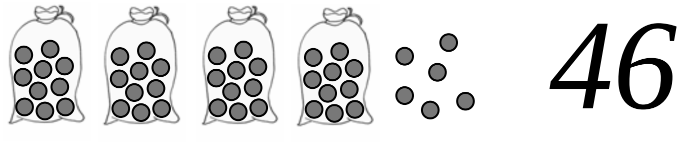


Abb. 4.26: Evi verknüpft die 6 der „46“ mit den sechs einzelnen Steinen, aber die 4 der „46“ kann sie in der quantitativen Darstellung nicht sehen.

Ich schreibe 46 auf und frage, ob die Teile (Ziffern) der Zahl etwas damit zu tun haben, wie viele Steine es sind. Evi verknüpft die 6 einzelnen Steine mit der Ziffer 6. Die 4 in der 46 „findet sie nicht“ bei den Steinen.

Als ich ihr mit den Seguin-Karten zeige, wie die 40 in der 46 „versteckt“ ist, äußert sie Besorgnis, es sich nicht merken zu können.

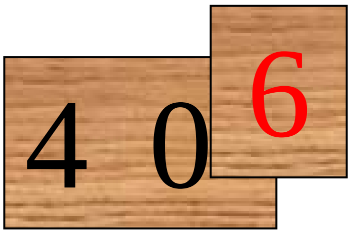


Abb. 4.27: Evi ist besorgt, dass sie sich nicht merken kann, wie die 40 in der „46“ versteckt ist.

Vorschlag zur Interpretation:

Im ersten Beispiel kann Evi die 27 Einzelnen nicht als zwei Zehnergruppen und sieben Einzelne denken. Die Anzahl ist noch eine Gesamtheit aus Einern für sie.
Die zweiteilige Struktur des Zahlworts (sieben und zwanzig) und die zwei Ziffern der geschriebenen Zahl haben für sie noch keine quantitative Bedeutung, z. B. in der Form, dass die „2“ für 20 Steine steht und die „7“ für die restlichen.

Im zweiten Beispiel scheint sie die Teile des Zahlwortes („sechs und vierzig“) mit unterschiedlichen Einheiten zu verknüpfen: „vierzig“ mit vier Zehnerbeuteln und die „sechs“ mit einzelnen Steinen. Dennoch verknüpft sie die vier Beutel nicht mit der Ziffer 4 der geschriebenen Zahl. Vier Beutel sind „40“ oder eher „10, 20, 30, 40“ (nicht 4 Zehner oder 4 mal 10).
Bei ähnlichen Aufgaben wählt sie in derselben Stunde manchmal einzelne Steine auch zur Darstellung der Zehner der Zahl (dabei wird 46 durch vier Einzelne und sechs Einzelne dargestellt).

Das heißt: Evi sieht Zehnerbeutel nicht als Einheiten und setzt sie deshalb nicht mit der Ziffer 4 in Beziehung; es sind vermutlich Gegenstände, die zum Zählen in Zehnerschritten passen. Die unterschiedliche Interpretation der Ziffern der zweistelligen Zahl erfolgt weder sicher noch kann eine bedeutungsvolle Grundlage dafür erkannt werden.

„9 + 1 = 10“

schrieb Robert mit lila Wolkenschrift an den Himmel.
Wieso? fragte der Zahlenteufel. Wieso eins null? Eins plus null ergibt doch nicht zehn.
Blödsinn, rief Robert. Da steht doch nicht eins plus null, da steht eine Eins mit einer Null, und das ist zehn.
Und warum, wenn ich fragen darf, ist das zehn?
Weil man es eben so schreibt.
Und warum schreibt man es so? Kannst du mir das sagen?
Warum, warum, warum ... Du nervst, stöhnte Robert.“

H. M. ENZENSBERGER[10]

<u>*Peter 4*</u>

Peter (9 Jahre, zweite Klasse) erhält die folgende Aufgabe schriftlich:

„Peter hat 14 Perlen. Für seine Mama will er ein Armband machen.
Er braucht dafür 24 Perlen.
Wie viele Perlen muss er noch besorgen?“

Peter: „Zwanzig braucht er noch.“
Er schreibt: „hat 14“.
Jetzt zählt er mit Benützung der Finger von 15 bis 24 und liest an den Fingern ab: „zehn“.
Er ergänzt das Geschriebene: „hat 14 + 10 = 24“.

R. S.: „Wie viele Zehnerpacken sind in 14?“
Peter: „Einer und vier übrig.“
Er weiß auch spontan, dass 24 zwei Zehnerpacken und vier übrig sind.
Ich zeichne:

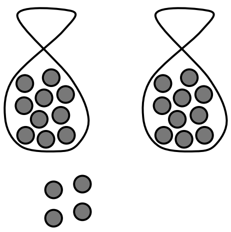


Abb. 4.28: Das ist nur eine Seite: 24 sind es erst, wenn alle zusammen sind.

Peter kommentiert das Bild: „Eigentlich gehören aber alle zusammen. Von der anderen Seite gesehen, gehören alle zusammen.“
Er verbindet die vier Einzelnen mit den beiden Säckchen und macht zuletzt einen Kreis um alles.

[10] Natürlich aus „Der Zahlenteufel“, München, Wien 1997

Abb. 4.29: Peter macht 24 aus 10 und 10 und 4

Als ich 24 Perlen hinlege und zwei Zehnerhäufchen daraus bilde, bringt Peter das Bedürfnis erneut zum Ausdruck: so sehe man 10 und 10 und 4, aber 24 sind es, wenn alle zusammen sind. Er schiebt die Steine näher zusammen.

Vorschlag zur Interpretation:

Peter kann sich die zweistelligen Zahlen durchaus als aus Zehnern und Einzelnen zusammengesetzte Gebilde denken. Aber er macht deutlich, dass diese Vorstellung konkurriert mit der Zahl, die aus Einzelnen besteht. 10 und 10 und 4 ist für ihn eine Ansicht von 24, die nicht ganz dasselbe ist wie 24.
Wieder beeindruckt Peter durch seine Fähigkeit, seine Gedanken zu formulieren. Die Zerlegung der 24 in 10, 10 und 4 ist für ihn korrekt, weil sie an der Quantität nichts ändert. Aber die Einheit der Menge ist aufgelöst. Das ist für Peter eine wesentliche Veränderung.
Wir vermuten, dass der Unterschied auch auf die Zahlenebene durchschlägt: die Ganzheit der 24 ist nicht gewahrt. Aufgrund von Beispiel „Peter 2“ kann vermutet werden, dass die Peter näher liegende Vorstellung von 24 die Zahlreihe von 1 bis 24 ist. Dabei werden wir darauf aufmerksam, dass Peter vor die Aufgabe gestellt ist, diese Zahlreihe mit „10 und 10 und 4“ so zu verknüpfen, dass man geläufig von der einen zur anderen Vorstellung wechseln kann.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24

10	10	4

24

Abb. 4.30: Dasselbe! Dasselbe?

Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden,
aber nicht einfacher. (Albert Einstein[11])

[11] Der Satz wird auf einer Postkarte Albert Einstein zugeschrieben. Wir haben’s nicht geprüft.

<u>*Lissi 1*</u>

Lissi ist 10 Jahre alt und geht in die vierte Klasse. Sie ist mit ihrer Familie vor fünf Jahren aus einer der ehemaligen Sowjetrepubliken in die Bundesrepublik gekommen. Seit ihrem dritten Lebensjahr litt sie an Asthma, dessen allergische Natur erst in der BRD diagnostiziert wurde. Mehrere Jahre war sie durch die Krankheit oft eingeschränkt. Einschränkung bedeutete auch der Aufenthalt im Übergangswohnheim, in dem die Familie außerdem schwierige Nachbarn hatte.
Testdiagnostisch besteht bei durchschnittlichem Gesamtergebnis eine auffallende Diskrepanz zwischen einzelheitlich serialer Verarbeitung (gut) und ganzheitlich simultaner Verarbeitung (schwach).
Lissi tritt recht gehemmt auf und versucht vor allem, Rechenregeln zu befolgen. Es ist ihr sehr wichtig, alles richtig zu machen.

Wir stellen drei Situationen vor, die anschließend gemeinsam interpretiert werden.

1. Situation:
Es liegen 46 Steine vor, Lissi hat sie gezählt. Ihr wird nun eine Karte mit 10 (2x5) Feldern gezeigt, die eine Schachtel darstellen soll, die 10 Steinen Platz bietet.
Lissi wird nun gefragt, wie viele solcher Schachteln man braucht, um jedem der 46 Steine einen Platz zu bieten. Sie vermutet, dass man 8 Schachteln braucht.

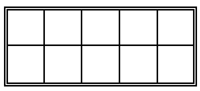


Abb. 4.31: Wie viele solcher Schachteln braucht man für 46 Steine? Lissi: „Acht“.

Als ich ihr jeweils eine Karte nach der anderen zeige und frage, ob diese noch gefüllt würde und wie viele Steine damit verteilt wären, antwortet sie bis zur vierten Karte mit „wird voll“ und bei der fünften Karte „wird nicht mehr voll“.

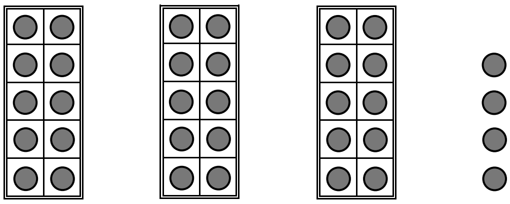
Bei der Wiederholung dieser Aufgabe in der folgenden Stunde mit der Zahl von 57 Steinen kann Lissi wieder nicht spontan antworten. Die sukzessive Prozedur kommentiert sie aber wieder richtig.

2. Situation:
Lissi kann nicht die Zahl nennen, die sich ergibt, wenn man zehn auf einmal zu 46 hinzufügt.
Wenn eine Zahl mit Zehnerstangen und Einerwürfeln dargestellt ist, zeigt sie Verständnis dafür, dass „zehn mehr“ eine Zehnerstange mehr ist und „zehn weniger“ eine Zehnerstange weniger.

Als sie dieselbe Aufgabe lösen soll wie Peter im vorausgehenden Beispiel (Lissi hat 14 Perlen. Für ein Armband braucht sie 24. Wie viele muss sie noch besorgen?) ergänzt sie zählend von 14 bis 24.

3. Situation:
Eine Studentin, die mit Lissi arbeitet, berichtet uns: Sie hat mit Lissi am Verständnis der zweistelligen Zahlen gearbeitet. Stellenwerte sollten eine quantitative Grundlage erhalten, daher kamen Eierschachteln zum Einsatz, die sie mit Lissi füllte. Den vollen Schachteln und Rest-Eiern wurden dann die entsprechenden Anzahlen zugeordnet.

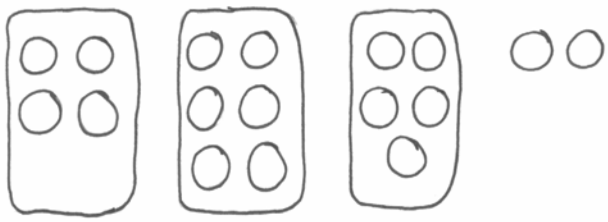
Danach lösten sie Aufgaben folgender Art, die Abbildungen sollten Eierschachteln mit je zehn Eiern und einzelne Eier darstellen:



Zehner	Einer	
3	4	34

Abb. 4.32: Aufgabe, die bildliche Darstellung einer Anzahl durch Zehner und Einzelne in die geschriebene Zahl zu übersetzen.

Die Studentin bat Lissi, eigene Aufgaben dieser Art zu erfinden. Lissi fand daraufhin folgende Aufgabe:



Zehner	Einer	
15	2	152

Abb. 4.33: Lissi erfindet eine Aufgabe.

Vorschlag zur Interpretation:

Die Beobachtung, dass Kinder zwar eine Zahl in Zehner und Einer zerlegen können, aber in große Schwierigkeiten geraten, sobald die beiden Kategorien Zehner und Einer „gewechselt“ werden müssen, haben wir oft gemacht: In der ersten Situation liegen 46 Einzelne vor, die gedanklich in Zehnheiten zu verwandeln sind. Diese Aufgabe bedeutet nicht dasselbe wie „Zehner“ und „Einer“ der Zahl 46 zu zeigen oder zu nennen. Die letztgenannte Aufgabenstellung kann gelöst werden, während Zehner und Einer als getrennte Kategorien behandelt werden, es ist ohne Bedeutung, dass 1 Zehner = 10 Einer ist.
Jetzt aber liegen „sichtbar“ 46 Einer vor, die in Zehner zu verwandeln sind. Das gelingt Lissi nicht auf Anhieb, sondern nur auf einem angeleiteten sukzessiven Weg: 10, 20, 30, 40, 46. Ihre Behandlung der Eierschachteln macht unübersehbar: „Zehner“ sind die Elemente in den Schachteln oder die Schachteln, „Einer“ sind die Dinge außerhalb der Schachteln. Zehner sind keine Einheiten aus zehn Einern, ein Zehner ist eine andere Kategorie (hat in diesem Kontext mit den Schachteln zu tun).
Lissis zweistellige Zahlen bestehen aus Einern oder aus Zehnern und Einern, die dann aber inhaltlich unverbundene Kategorien sind.

4.3 Zahlbeziehungen

4.3.1 Einführung

In diesem Abschnitt geht es darum, welche Beziehungen zwischen zwei und drei Zahlen das Kind herstellt und wie es diese Beziehungen herausarbeitet.

Unsere Beachtung finden folgende Beziehungen:
1. „eins mehr/eins weniger“ und benachbarte Zahlen des Zahlenstrahls;
2. die Zahl als Teil einer größeren Zahl, z. B.: 5 als Teil der 8;
3. Zahlzerlegungen: 8 als „3 und 5“ und „5 und 3“;
4. Beziehungen zur 5 und zur 10;
5. Beziehungen zu vollen Zehnern: 48 als „40 und 8“, 40 als „30 und 10“;
6. Zahlzerlegungen auf Zehner-Einer-Ebene: 24 als „10 und 10 und 4“ oder als „2 Zehner und 4 Einer“ oder als „1 Zehner und 14 Einer“;
7. „zehn mehr/zehn weniger“-Beziehung.
8. Größer/Kleiner-Beziehung zwischen zwei und mehr Zahlen.

In den Ausführungen, die wir den Beispielen vorwegschicken, fassen wir diese Beziehungen in vier Gruppen zusammen:
- „7 ist eins mehr als 6“ (1.)
- „8 sind 3 und 5“ (2., 3., 4.)
- Zahlzerlegungen bei zweistelligen Zahlen (5., 6., 7.)
- Größer/Kleiner-Beziehung (8.).

„7 ist eins mehr als 6“

Wir beginnen mit Beispielen zur Beziehung „eins mehr/eins weniger“: Viele drei- und vierjährige Kinder können beurteilen, was passiert, wenn man einer Menge etwas zufügt oder etwas wegnimmt: Dann hat man mehr beziehungsweise weniger als vorher. Sie wissen auch, dass man noch gleichviel hat, wenn nichts dazukam und nichts weggenommen wurde. Diese Kompetenz zeigen sie insbesondere dann, wenn die Mengen nicht gezählt worden sind und keine anderen Veränderungen vorgenommen werden, die einen stark veränderten Wahrnehmungseindruck hervorrufen[1]. RESNICK nennt diese (protoquantitative) Urteilsfähigkeit das „increase/decrease“ Schema, das Schema des Wissens über Mehr und Weniger (Abschnitt 3.6).

Man kann einen Entwicklungsschritt so beschreiben, dass das Kind die Zahl(wort)reihe mit diesem Schema verbindet, indem es „eins mehr“ oder „noch eins dazu“ mit dem nächstfolgenden Zahlwort verknüpft: „Es sind sechs. Ich gebe noch eins dazu, jetzt sind es sieben.“

Die in der Zahlwortreihe aufeinanderfolgenden Zahlen durch „eins mehr“ in Beziehung zu setzen hat bei einer logischen Analyse eine *quantitative Deutung* der Beziehung zwi-

[1] IRWIN 1996, auch Abschnitte 3.6 und 7.2.4.

schen zwei Zahlen zur Voraussetzung, weil 7 nicht als „eins weiter als 6“ gedacht wird, sondern als „eins mehr als 6“.[2] Geht man davon aus, dass eine quantitative Deutung zugrunde liegt, ist impliziert, dass „6“ als Sechsheit und „7“ als Siebenheit verstanden wird und dass diese beiden zusammengesetzten Ganzheiten sich genau durch ein Element unterscheiden. Auf dieser Grundlage kann auch abgeleitet werden, dass 6 (eine Sechsheit) Teil der 7 (einer Siebenheit) ist.

Aber die logische Analyse und Implikation ist keine entwicklungspsychologische. Aus entwicklungspsychologischer Sicht ist es zutreffender zu schreiben, dass die Aussage diese Bedeutung haben sollte oder bekommen muss: Sie kann für ein Kind durchaus andere Bedeutung haben.
„7 ist eins mehr als 6“ bedeutet für viele Kinder nur, dass man einen Schritt weitergeht, um von (der) 6 zu (der) 7 zu gelangen. Diese Aussage kann mit der Vorstellung verbunden sein, dass noch eins dazugelegt wird, um von „sechs“ zu „sieben“ Dingen zu kommen, ohne dass die bis dahin gelegten sechs Dinge zu einem Ganzen integriert sind, für das das Zahlwort „6“ steht. Kurzum: Das Wissen „7 ist eins mehr als 6“ setzt keine kardinale Interpretation der Zahlen 6 und 7 voraus.

Gewisse Nachbaraufgaben können auch auf Grundlage des Wissens, dass 7 „eins weiter“ als 6 ist, gelöst werden: „$6+6=12$, also muss ich bei $6+7$ eins weiter zählen: Also 13“. Um jedoch Nachbaraufgaben flexibel und sicher zur Ableitung unbekannter Ergebnisse anwenden zu können, müssen Zahlen eine sichere kardinale (quantitative) Interpretation erfahren haben. Auch müssen Aufgabenstellungen in symbolischer Form auf quantitativer Ebene gedeutet werden – eine komplexe Leistung: „Ich weiß, dass $13-4=9$, also muss $13-5=8$ sein, weil eins mehr weggenommen wird. Dann bleibt eins weniger zurück“ – ein kovarianter Zusammenhang.
Oder: „Ich weiß, dass $5+8=13$, also muss $5+9=14$ sein“ – auch eine Kovariation.
Oder: „Wenn $5+8=13$, muss auch $6+7$ dieses Ergebnis haben: Man hat zu 5 eins dazugetan und von 8 eins weggenommen“ – zwei Veränderungen, die sich kompensieren.

„8 sind 3 und 5“ – erste Zahlzerlegungen

Das in den Punkten 2. bis 4. der Übersicht angesprochene Wissen über Zahlen wird in der Regel als Faktenwissen oder unter dem Gesichtspunkt der Rechenfertigkeiten betrachtet. Wir meinen, dass auf diese Weise entscheidende Konstruktionsschritte unbeachtet bleiben.
Es muss kaum erwähnt werden, dass das Verständnis der Zahl 8 als Zusammensetzung der Zahlen 5 und 3 wünschenswert ist, weil damit z. B. die Aufgaben $5+3=\square$, $3+5=\square$, $8-5=\square$, $8-3=\square$, $3+\square=8$, $5+\square=8$, $8-\square=3$ usw. eine Klasse bilden und gleichermaßen spontan gelöst werden können. Allgemein gesagt bedarf ein flexibles, ableitendes Umgehen mit Zahlen beim Rechnen und beim Problemlösen der Einsicht in die Zerlegbarkeit von Zahlen.
In der Regel kann das Kind $3+5$ korrekt lösen, bevor es 8 als „3 und 5“ und als „5 und 3“ begreift. Wie gelangt es zu dieser späteren Sichtweise?

[2] COBB konnte zeigen, dass sich die Fähigkeit, $4+1$ unmittelbar zu lösen, nicht aus der Fertigkeit ergibt, die Zahlreihe von einer beliebigen Anfangszahl fortsetzen zu können (COBB, 1986).

Verbreitet ist die Auffassung, dass das Kind die Beziehungen zwischen 3, 5 und 8 so herstellt, dass es wiederholt „3 + 5“ ausrechnet, wobei es 3 in „1, 2, 3“ verwandelt[3] und 5 in „4, 5, 6, 7, 8“. Aus diesem Zählvorgang und dem „Ergebnis“, das zuletzt mit 3 und 5 zusammen auf dem Papier festgehalten wird (3 + 5 = 8), ergebe sich irgendwann, dass das Kind 8 als 3 und 5 versteht. Man stellt sich diesen Zusammenhang umso einprägsamer vor, als andere Aufgaben dieselbe Zahlenkombination ergeben.

Hinzu kommt, dass man die 5 und die 3 im Fingerbild der 8 unmittelbar sehen kann. Aufgrund dieser Überlegungen kommt man leicht zu dem Schluss, dass das Versagen eines Kindes in der Realisierung dieses Zusammenhanges seinem schlechten Gedächtnis oder seiner schlecht ausgebildeten Vorstellungskraft zugeschrieben werden müsse.

Wir meinen aber, dass die Verknüpfung der 8 mit „3 und 5“ und „5 und 3“ *nicht* als assoziative Verknüpfung aufgrund von wiederholt auftretenden Sätzen der Art „3 + 5 = 8“ gedacht werden sollte. Ein Verständnis der Zahlzerlegung tritt auch nicht unmittelbar ein, wenn das Kind auf die Teile im Ganzen – z. B. am Fingerbild der 8 – hingewiesen wird. Das zeigte uns nicht nur Florian.

Wir tun gut daran, uns einige Voraussetzungen dessen aufzuzeigen, was für uns erwachsene, kompetente Rechner/innen nur noch ein assoziativer Zusammenhang zwischen drei Zahlen ist und unmittelbar wahrnehmbar erscheint:

1. *Die Zahlen müssen für das Kind eine sichere kardinale Bedeutung haben: eine Zahl muss ein aus Einheiten zusammengesetztes Ganzes sein.*

2. *Das Kind muss fähig sein, aus dem zusammengesetzten Ganzen einer Menge Teile herauszulösen und wieder einzubetten, und zwar so flexibel, dass es Teile und Ganzes quasi-simultan beachten kann. Diese Fähigkeit beruht nicht nur auf visueller Vorstellungskraft, sondern auch auf der Reversibilität des geistigen Handelns.*

3. *Das Kind muss dieses Wissen und Denken über Teil-Ganzes-Beziehungen auf Anzahlen und Zahlen übertragen.*

4. *Eine ganze Reihe von Ableitungsstrategien, die die Brücke zur Beherrschung der Basisfakten bilden, gründen auf dem Verständnis der Zerlegbarkeit der Zahlen (speziell auf den Beziehungen zur 5 und zur 10), und auf der Beziehung „eins mehr/eins weniger“ integriert mit der Zahlreihe. Man kann daher annehmen, dass das Festhalten am zählenden Rechnen mit dieser Problematik (Verstehen der Zerlegbarkeit von Zahlen) in Zusammenhang steht.*

Wir erläutern diese Thesen im Folgenden:

1. Die Zahlen müssen für das Kind eine sichere kardinale Bedeutung haben: Eine Zahl muss ein aus Einheiten zusammengesetztes Ganzes sein.

---

[3] wenn es nicht schon darauf verzichten kann, weil es 3 mit (1, 2, 3) identifiziert hat oder weil es entsprechend zum Weiterzählen instruiert wurde.

Das bedeutet: Zur Zahl 8 muss sich das Kind mehr denken als die Ziffer 8 oder das Zahlwort „acht“, von dem aus man vor- oder rückwärts zählt. Es muss an ein Ganzes denken, das aus Einheiten zusammengesetzt ist, die es aus der Erfahrung des Abzählens abstrahiert hat. Ohne eine Repräsentation (Vorstellung im weitesten Sinn) dieser Art kann es die Zahl 8 nicht „zerlegen“, weil nichts drin ist.
Solange das Kind sich nur zählend die Zahlreihe rauf und runter bewegt, ohne an eine Gesamtheit dieser Art zu denken, wird es Zahlen nicht im Sinne von Teilen und Ganzem reflektieren.
Beim zählenden Rechnen wird vielleicht nur die „Zahl der Veränderungen“ mit den Fingern als Quantität festgehalten – soviel man eben vor- oder zurückzählen muss – , der Rest besteht aus zwei Zahlwörtern: das, mit dem man anfängt, und das, mit dem man aufhört. Eine der Zahlen in der Aufgabe wird vorübergehend in eine Reihe von Zahlwörtern übersetzt, aber eine Reflexion von (1, 2, 3) und (4, 5, 6, 7, 8) in der (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) (als 3 und 5 in 8) erfolgt nicht.

„3 + 5“ (1, 2, 3), 4, 5, 6, 7, 8, „also 8“

$$\underbrace{F \quad F \quad F \quad F \quad F}_{\text{fünf Finger}}$$

Abb. 4.34: Darstellung einer Art „3 + 5“ auszurechnen

Wir halten es also für wichtig, dass das Kind sich eine Zahl als eine aus Einzelnen zusammengesetzte Gesamtheit denkt, nicht nur als einen Anfang(spunkt) oder die Zahl der Schritte, die man vor- oder zurückgehen muss, oder als Endpunkt, der Ergebnis genannt wird.

Auch die Zahlreihe von 1 bis 8 kann eine solche (kardinale) Repräsentation sein, aber die „8“ muss wirklich mit dem ganzen Abschnitt identifiziert sein. Aus dem Verständnis, es sind „8“, wenn ich beim Abzählen genau bis „acht“ komme, wird erst allmählich eine Repräsentation der 8 als zusammengesetztes Ganzes erarbeitet.
Wird das zählende Rechnen gleich forciert und wird keine weitere Anregung geboten, ist das Kind u. U. ganz damit beschäftigt, das Zählen zu verbessern, anstatt seine Einsicht in Zahlbeziehungen zu entwickeln.

Wenn das Kind *kein* bestimmtes Bild der Achtheit (vorstellbares Muster aus genau acht Elementen) entwickelt hat, ist die Achtheit nur durch die Zahlreihe von 1 bis 8 gegeben und gewahrt. Es muss dann die *Abschnitte dieser Reihe* kardinal interpretieren und *in Beziehung setzen*: das bedeutet, die *Reflexion* von (1, 2, 3) und (4, 5, 6, 7, 8) in der (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) als 3 und 5 in der 8.

Hat das Kind ein *vorstellbares Muster* aus acht gleichen Elementen mit der Ziffer 8 und dem Wort „acht“ assoziiert, *können* Beziehungen zwischen Teilen und dem Ganzen auch an diesem Bild reflektiert und auf die Zahlebene übertragen werden, sobald es die Zahl 8 als *zusammengesetztes Ganzes* versteht und bestimmte Aufgabenstellungen erhält, die zu dieser Reflexion anregen.

Nach den Erfahrungen von STEFFE UND COBB spielen solche musterförmigen Zahlvorstellungen bei der Konstruktion der Zahl als zusammengesetztes Ganzes eine Rolle. Die Konstruktion des Kindes wird aber nicht von der Beschaffenheit des Musters und einer Wahrnehmungsleistung erzwungen oder hervorgerufen.

2. Das Kind muss fähig sein, aus dem zusammengesetzten Ganzen einer Menge Teile herauszulösen und wieder einzubetten, und zwar so flexibel, dass es Teile und Ganzes quasi-simultan beachten kann. Diese Fähigkeit beruht nicht nur auf visueller Vorstellungskraft, sondern auch auf der Reversibilität des geistigen Handelns.

Eine gute Darstellung der Schwierigkeit, die die Reflexion von Teilen und Ganzem dem Kind bietet, ohne dass Zahlen im Spiel sind, bieten PIAGET UND SZEMINSKA (1972)[4]. Es wird untersucht, warum es Kindern schwer fällt, richtig zu urteilen, dass die Kette aus Holzperlen (viele braune und wenige weiße) länger wird als die aus den braunen Perlen.

> „Zusammenfassend sei bemerkt, dass man sich von dem wirklichen und lebendigen logischen Denken ein sehr falsches Bild machen würde, wenn man sich darauf beschränkte, es in den statischen Schematismus der syllogistischen Inklusionen zu übertragen. Jede Überlegung ist reversible Konstruktion .... Selbst im Fall von Überlegungen, die sich, wie in diesem Beispiel ausdrücklich auf ein reines Spiel von Klassifikationen beziehen, stellt sich das Denken keineswegs dar als ein statisches Einschachteln von Elementen, sondern als ein System aktiver Gruppierungs- und Dissoziations-Operationen (...). *So bedeutet bei unserem Problem das gleichzeitige Denken an die braunen Perlen und an die Holzperlen für das Kind die Vereinigung der Dinge und dann deren Dissoziation zwecks Rekonstruktion einer anderen Vereinigung, da jedes Element zugleich an der einen wie an der anderen Konstruktion beteiligt ist.* (...)
>
> Es zeigt sich also deutlich, dass das klassifikatorische Denken auf solche Art aktiv und operatorisch ist. *Die Erklärung der Inklusions-Schwierigkeiten lediglich durch die Unfähigkeit, zwei oder mehr Gegebenheiten auf einmal zu bedenken, berührt also nur die Oberfläche der Dinge, d. h. sie beschränkt sich darauf, im Bereich des Bewusstseins das Hervortreten der darunterliegenden Operationen festzustellen. Die tiefere Wahrheit ist das Fehlen der Beweglichkeit, die erforderlich ist, die Operationen durchzuführen, sie zu kombinieren und zu dissoziieren, um simultane Konstruktionen und Rekonstruktionen wahrzunehmen.*“ (PIAGET & SZEMINSKA, 1972, 236, Hervorhebungen durch R. S.)

3. Das Kind muss dieses Wissen und Denken über Teil-Ganzes-Beziehungen auf Anzahlen und Zahlen übertragen.

Erstens ist zu bedenken: Wenn ein Kind weiß, dass die Zerlegung einer Menge von Dingen in zwei Häufchen nichts daran ändert, wie viel man insgesamt hat, überträgt sich dieses Wissen bzw. diese Urteilsfähigkeit nicht „automatisch“ auf Anzahlen (Ergebnis des Abzählens).

---

[4] insbesondere im VII. Kapitel („Über die additive Komposition der Klassen und die Verhältnisse der Klasse zur Zahl“), aber auch in Kapitel VIII. (Über die additive Komposition der Zahlen und die arithmetischen Beziehungen des Teils zum Ganzen“). – Im Rahmen dieses Berichts ist es uns leider nicht möglich, die den Zitaten vorausgehende Untersuchung und die Argumentation darzustellen.

Zweitens muss auf folgenden Unterschied geachtet werden: Angesichts einer Menge aus acht Dingen, die in zwei Gruppen von fünf und von drei Elementen zerlegt ist, weiß das Kind, dass drei zurückbleiben, wenn es fünf wegnimmt. Aber dies verknüpft es nicht spontan mit 8 – 5 = 3. Den Unterschied kann man auf verschiedene Weise erklären:
Ist die Menge zerlegt, sieht es nur noch drei Dinge einerseits und fünf Dinge andererseits; es nimmt fünf Dinge weg, ohne an *das Ganze* denken zu müssen. Um die Aufgabe „8 – 5“ dazu *in Beziehung* zu setzen, muss es das Ganze ins Spiel bringen und die beiden Teilmengen im Geiste wieder zusammensetzen.
Wir erinnern an das Beispiel „Florian 1“: Um „8 – 5“ zu lösen, zeigt sich Florian ein Fingerbild der 8, spaziert dann aber vom achten bis zum vierten Finger zurück, während er von 1 bis 5 zählt – anstatt seine Fünferhand zur Faust zu ballen und in den drei Fingern seiner rechten Hand das Ergebnis abzulesen.

Gerade einige schwächere Schüler reagierten auf die Aufgabe „8 – 5“ bei Vorlage des Zahlbildes aus einer Würfelfünf und einer Würfeldrei anders als Florian. Sie nahmen den Fünfer weg. Aus diesem Verhalten darf man nicht ohne weiteres schließen, dass das so vorgehende Kind die Zerlegbarkeit von Zahlen schon konstruiert (verstanden) hat. Es ist nämlich möglich, dass – z. B. Matthias – in diesem Moment nur auf das sichtbare Fünferbild reagierte und es mit der Aufforderung „–5“ (in der Bedeutung von „fünf wegnehmen“) verknüpfte.
Bezeichnend ist, dass Matthias zu einem anderen Zeitpunkt zum Bild der Würfelfünf und der Würfeldrei nur die Minusaufgabe 5 – 3 findet: er setzt nicht das Ganze und einen Teil in Beziehung. So hat er wahrscheinlich auch bei der Lösung von „8 – 5“ mit Hilfe der Zahldarstellung nur die Teile gesehen, nicht das Ganze. Wir wären uns in dieser Annahme sicherer, wenn wir wüssten, wie er die Aufgabe „8 – 6“ bei Vorlage derselben Zahldarstellung gelöst hätte: Durch minus 5 minus 1? Oder hätte er jetzt abgezählt?

Abb. 4.35: Matthias findet zu diesem Bild nur eine Minusaufgabe: 5 – 3.

Es ist an dieser Stelle naheliegend, sich auch an Ola zu erinnern, die, nachdem sie durch Abzählen richtig bestimmt hat, wie viele Holzzylinder zurückbleiben, wenn man von 14 vier Zylinder wegnimmt (erste Aufgabe), die folgende (zweite) Aufgabenstellung „14 – 10“ rückwärtszählend anpackt (Ergebnis: 5). Als sie dann gefragt wird, wie viele von den Holzzylindern zurückbleiben, wenn man zehn davon wegnimmt (dritte Aufgabe), antwortet sie sofort mit „vier“.
Was versteht sie als Ergebnis der ersten Aufgabe? Vermutlich „zehn“. Wir hätten aber gerne, dass sie aus der Aufgabe auch entnimmt, dass 4 und 10 zusammen 14 ergeben und dass 14 aus 10 und 4 zusammengesetzt ist.
Die Bearbeitung der folgenden Aufgabe zeigt jedoch, dass Ola nicht 10 und 4 als Teile der 14 sieht. Sie hat bei oder im Anschluss an die Bearbeitung der ersten Aufgabe diese Beziehung nicht hergestellt.
Interessant wäre es zu wissen, wie sie den dritten Teil gelöst hätte, hätte man die Teilmengen (4 und 10) wieder zusammengeschoben zu *einer* Menge von Holzzylindern: Hätte sie auch dann noch spontan „4“ geantwortet?

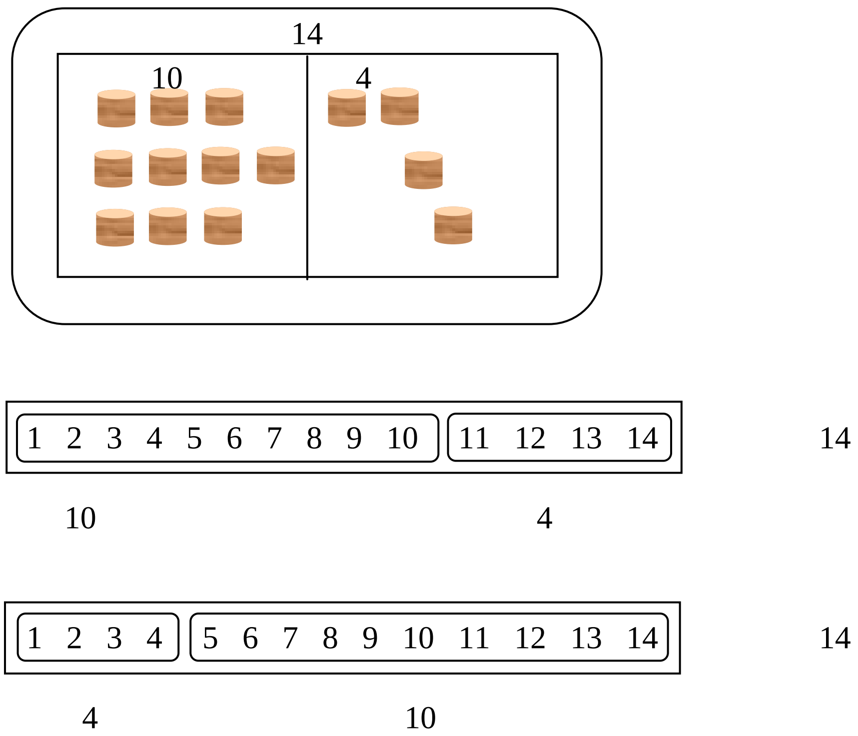


Abb. 4.36: Verschiedene Abbildungen zur Beziehung zwischen 4, 10 und 14, die den Leser/die Leserin verwirren sollen.

Drittens denken wir daran, dass dem Kind noch eine andere Bedeutung der 8 und der Aufgabe „8 – 5“ zur Verfügung steht, die auf der Zahlreihe und dem Vorwärts- und Rückwärts-Zählen beruht. Auf dieser Grundlage liegt überhaupt nicht nahe, die 5 als Teil der 8 zu verstehen: „8“ gibt an, von wo man ausgeht,„–5“ gibt an, wie viele Schritte man zurückzählen muss, „3“ ist die Zahl, bei der man dann ankommt.

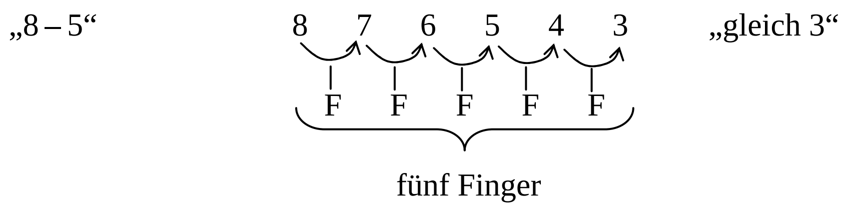


Abb. 4.37: Der Prozess des zählenden Rechnens

Wenn das Kind keinen Anlass hat, diesen Prozess zu reflektieren, wird es über *diese* „Vorstellung“ zur Aufgabe „8 – 5“ nicht hinausgelangen. „8 – 5“ bedeutet nichts anderes als: von 8 um 5 Schritte zurückzählen.
Daran ändert sich auch nicht viel, wenn der Zählprozess an Klötzchen durchgeführt wird: man legt 8 davon bereit, dabei wird bis 8 gezählt. Jetzt nimmt man *nacheinander* 5 Klötzchen weg, die ansonsten keines Blickes gewürdigt werden müssen. Dann schaut man, wie viele noch da sind, das sieht man in diesem Falle auf einen Blick, sonst muss man noch mal durchzählen. – Warum sollte ein Kind noch mal zurückblicken, die Abgetrennten zu den Restlichen wieder hinzudenken und nach Zusammenhängen suchen? Das Ergebnis ist genannt und aufgeschrieben.

Viertens. Eine ganze Reihe von Ableitungsstrategien, die die Brücke zur Beherrschung der Basisfakten bilden, gründen auf dem Verständnis der Zerlegbarkeit der Zahlen (speziell auf den Beziehungen zur 5 und zur 10), und auf der Beziehung „eins mehr/eins weniger" integriert mit der Zahlreihe. Man kann daher annehmen, dass das Festhalten am zählenden Rechnen mit dieser Problematik (Verstehen der Zerlegbarkeit von Zahlen) in Zusammenhang steht.

Da wir diese Problematik selbst noch durchdenken und analysieren und weit davon entfernt sind, eine abschließende Beurteilung abgeben zu können, müssen wir den Leser/die Leserin bitten, unseren Annäherungen weiterhin anhand von Beispielen zu folgen.

Man mag vermuten, dass das Vorgehen der Kinder auf ihre schulische und außerschulische Unterrichtung (im zählenden Rechnen) zurückzuführen ist, die gewisse Konstruktionsprozesse unterbunden hat. Es gibt gute Gründe für diese Vermutung: Viele Kinder erläutern ihre zählenden Verfahren durch Hinweise auf Empfehlungen der Eltern. Im Schulbericht eines Kindes lasen wir: „Den Rechenvorgang der Addition und Subtraktion hat U. verstanden; sie löste alle Aufgaben richtig. Sie brauchte hierzu kein zusätzliches Material, sie löste die Aufgaben durch Abzählen." Hier ist Addieren und Subtrahieren mit einem korrekt durchgeführten Vorwärts- und Rückwärts-Zählen gleichgesetzt. Material hat offenbar nur die Bedeutung von konkreten *Zähl*gegenständen. Vernachlässigt ist seine Bedeutung bei der Konstruktion der *quantitativen* Zahlbedeutung, der Zahl als Zusammensetzung aus Vielen, und bei der Konstruktion der Zahl als Zusammensetzung aus anderen Zahlen, für die Erfahrungen mit der Zerlegung einer Anzahl in Teil-Anzahlen eine wesentliche Rolle spielen dürften.

Aber man machte einen schwerwiegenden Fehler, sähe man die Quelle der Schwierigkeiten vieler Kinder nur in einer ungünstigen Beeinflussung durch Lehrer und Eltern und beschäftigte sich nicht mit den *Schwierigkeiten der Konstruktionen, die ein Kind* zu leisten hat. Peter erklärt uns explizit, dass ihm 24 Einzelne einerseits und 10, 10 und 4 andererseits durchaus nicht als dasselbe erscheinen, obwohl er weiß, dass auch im zweiten Fall noch insgesamt 24 auf dem Tisch liegen. Entsprechend sind wahrscheinlich auch „3 und 4" einerseits und 7 andererseits nicht „gleich", sondern werden erst gleich, wenn man sie zusammenfügt und auf einmal durchzählt. Dann wiederum sind 3 und 4 „nicht mehr da".

Zahlzerlegungen bei zweistelligen Zahlen

Wir knüpfen an die Ausführungen zu „Bedeutungen zweistelliger Zahlen" in Abschnitt 4.2.1 an.

Viele der uns vorgestellten Kinder wussten nicht über die Zusammensetzung von 48 aus 40 und 8 Bescheid. Wir deuten dies *nicht* als ein Symptom schlechter Merkfähigkeit oder einer Wahrnehmungsschwäche oder Analogieschwäche, sondern nehmen es als Hinweis auf ein besonderes Zahlverständnis der Kinder. Die Kinder haben vermutlich *bedeutungs*volle Gründe, die sprachlichen und visuellen Hinweise in $40 + 8 = 48$ und $48 - 8 = 40$ nicht wahrzunehmen bzw. nicht zu beachten.

Wir beobachteten: Dieselben Kinder wussten ebenso wenig, dass 18 aus 10 und 8 zusammengesetzt ist. Wir vermuten: Sie denken sich Zahlen überhaupt nicht als aus Zahlen zusammengesetzt, sondern Zahlbeziehungen werden durch Vor- und Zurückzählen auf der Zahlreihe verwirklicht. 40 + 8 bedeutet dann: Ab 40 um acht Schritte weiterzählen. Wenn Zahlen nicht die Eigenschaft der Zerlegbarkeit haben, können u. U. deshalb sprachliche und visuelle Analysen nicht vorgenommen werden.

...............40 41 42 43 44 45 46 47 48 ....

F F F F F F F F

8 Finger bzw. Zählschritte

Abb. 4.38: Beziehung zwischen 40, 8 und 48, zählend realisiert.

Natürlich sind manche Kinder trotzdem in der Lage, sich einzuprägen, dass 40 + 8 = 48 ist, weil sie eine sprachliche und/oder visuelle Analyse leisten können und auf dieser Ebene einen für sie leicht einzuprägenden Zusammenhang entdecken: „48 sind acht-und-vierzig, 8 und 40; 40 und 8 ist dasselbe wie 8 und 40“. Sie haben die Zahlwortreihe auf *sprachlicher* Ebene reflektiert und unterscheiden z. B. „Zwanzigerzahlen, Dreißigerzahlen, Vierzigerzahlen usw.“ Dies erleichtert die sprachliche Analyse von achtund-*vierzig*. Aber sprachliche Analysen dieser Art sind nicht notwendig mit einer Semantik verbunden, bei der 48 als Zusammensetzung aus 40 (Dingen oder Schritten) und 8 (Dingen oder Schritten) verstanden wird.

Nur wenige Kinder übersetzten die Aufgabenstellung „Schreibe die Zahl, die um zehn kleiner (oder größer) ist als 48“ in das Vermindern (oder Vergrößern) des *Zehners* um eins. Sie gingen 10 Zählschritte weiter oder zurück. Das heißt, sie blieben auf der Ebene der *Einerschritte* auf der Zahlreihe: „Um zehn kleiner“ bedeutet für sie „zehn Einzelne bzw. zehn Schritte weniger“. Vermutlich waren sie über Zehnerstelle und Einerstelle belehrt worden, aber sie hatten den Zehner, der aus zehn besteht, noch nicht selbst „erfunden“.

Gegebene Zahl:	47	59
Franziskas Lösung:	38	47

Abb. 4.39: Franziskas Lösungen zur Aufgabe „Schreibe darunter die Zahl, die um zehn kleiner ist.“

Manche Kinder behielten diese Sichtweise auch dann bei, wenn Zahlen durch Zehnersystemblöcke (ZSB) dargestellt waren. Die meisten gingen – sofort oder verzögert – unter diesen Umständen anders vor: Sie entfernten eine Stange oder fügten eine hinzu. Oft konnten sie dann die neue Zahl sofort nennen, ohne erneut abzuzählen.

Wann kann das Kind die geschriebene oder gesprochene Zahl dementsprechend behandeln? Wenn es *sein* Zahlverständnis entsprechend umgearbeitet hat. Bevor wir darauf eingehen, noch einige weitere Beispiele:

Ein Mädchen, das 2 spontan auf 10 ergänzen konnte, löste „40 – 8“ durch Rückwärtszählen. Wir überlegten, dass es sich beim Rechnen nicht die 40 als 30 und 10 denkt. Warum nicht? Was ist daran schwierig?

Als Peter „30 – 4“ lösen sollte, fügte er drei Zehnerstangen waagrecht aneinander (bei der vorhergehenden Aufgabe war er zur Zahldarstellung mit ZSB-Material aufgefordert worden). Dann legte er auf die Stangen 30 Einerwürfel und nahm am rechten Ende davon 4 Würfel weg. Jetzt fragte er, ob er bei 29 anfangen solle.

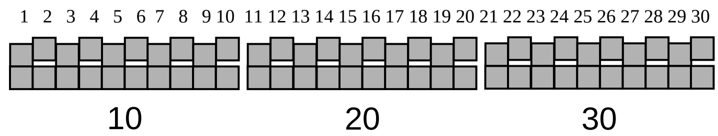


Abb. 4.40: Arrangement von Peter, als er „30 – 4“ mit Hilfe von Zehnersystem-Blöcken löst.[5]

Warum verwandelt er die drei Zehner in 30 Einer? Anscheinend hätte er die 30 lieber durch 30 Einzelne dargestellt, anstatt durch 3 Zehnerstangen. Eine Mischung aus Zehnern und Einern scheint ihm nicht sonderlich zu behagen. Obwohl Anschauungsmaterial vorliegt, wendet er sich zuletzt dem Zählen rückwärts zu (Soll ich bei 29 anfangen?), jetzt ein wenig verunsichert, weil er schließlich den dreißigsten Würfel zuerst weggenommen hat, aber beim Zählen bei 29 anfangen will.

Lissi rechnete 71 – 14 so: „1 – 4 geht nicht; 11 – 4 gleich 7. 7 minus 10 ist 60, also 67“. Ihr ist offenbar nicht klar, dass ihr Rechenverfahren auf der Zerlegung der 71 in 60 und 11 beruht. Solange dies nicht verstanden ist, werden sich in ihre Rechenverfahren immer wieder Fehler einschleichen, die sie selber nicht bemerken kann.

Diese Schwierigkeiten der Kinder nur so zu interpretieren, dass sie keine geeigneten Vorstellungen der Zahl als Zehner-Einer-Kombinationen (wie sie z. B. durch Zehnersystem-Blöcke darstellbar ist) besitzen oder als Folge davon, dass sie nicht lange genug damit „hantiert“ (Milz) hätten, greift zu kurz. Wieder gilt, dass die Zahldarstellungen als Zehner/Einer-Kombinationen vom Kind auf unterschiedliche Weise „gesehen“ werden, in Abhängigkeit von ihrem Zahlverständnis.

Ein Kind kann die Darstellung von 46 durch Zehnersystem-Blöcke so sehen: Bei den Stangen muss man in Zehnerschritten zählen, bei den Würfeln in Einerschritten.

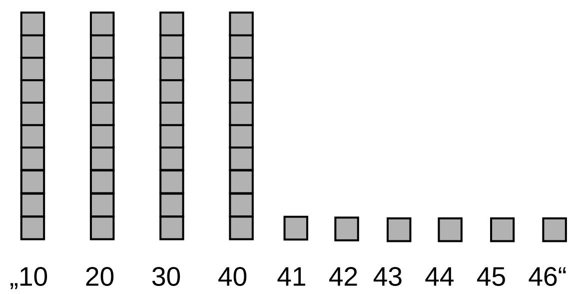


Abb. 4.41: Ein Kind denkt vielleicht nur: Bei Stangen muss ich in Zehnerschritten zählen, bei Würfeln in Einerschritten.

„Minus Zehn“ oder „zehn weniger“ wird jetzt vielleicht sogar als Entfernen einer Zehnerstange gedeutet, weil „Zehner“ daliegen: „Man nimmt eine Zehnerstange, wenn man gleichzeitig 10 will“. Jetzt wird wieder gezählt: „(30), 31, 32, 33, 34, 35, 36“.

---

[5] Peter hat die drei Zehnerstangen unmittelbar aneinandergefügt und die Einerwürfel darauf gelegt.

Der „Umgang“ mit diesem Material allein verändert das Zahlverständnis des Kindes nicht: oft bleibt die Vorstellung von der Zahl als Zehner-Einer-Kombination isoliert im Wissensgebäude des Kindes stehen.
Damit das Kind in der Zahl 46 so etwas sieht wie 4 Gruppen von 10 Dingen und 6 einzelne Dinge, „ minus 10“ oder „plus 10“ mit der Veränderung am Zehner identifiziert, 46 als 30 und 16 denken kann u. a. m., muss es auf Grundlage einer *quantitativen* Zahlbedeutung und unterstützt durch eine quantitative Zahldarstellung die Zahl neu konstruiert haben.

Eine wichtige Voraussetzung ist, dass die Zahl eine quantitative Bedeutung im Sinne *eines Ganzen* hat, *das aus Einheiten zusammengesetzt ist*. Beides – quantitative Bedeutung und Zusammensetzung aus Einheiten – ist bei zählenden Rechnern nicht sicher und eher fraglich.[6]
Das Kind muss dann in der Lage und dazu motiviert sein, die Quantität, die es mit dem Zahlwort assoziiert hat, geistig zu bearbeiten. Teile der Quantität müssen im Ganzen *reflektiert* werden. Wenn das Kind erfahren hat, dass zweimal zehn Schritte hintereinandergefügt genauso weit führen wie 20 Schritte, oder dass in zwei Häufchen aus 10 Dingen zusammen ebenso viele Dinge sind, wie in einem Häufchen mit 20, wird es *nicht unmittelbar* schließen, dass die *Zahl* 20 aus den *Zahlen* 10 und 10 zusammengesetzt gedacht werden kann.[7]

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

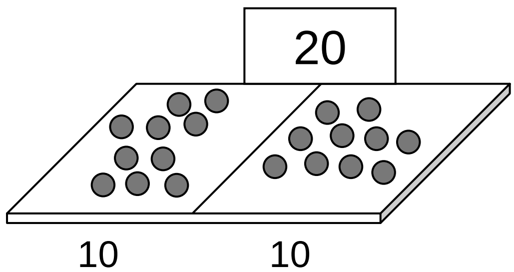


Abb. 4.42: „Zwanzig: zehnzehn“[8]

Wenn ein Kind herausfinden will, wie viele Perlen noch besorgt werden müssen, damit aus 14 Perlen 24 werden, wird es vielleicht die Zahlen von 15 bis 24 mit Hilfe seiner Finger zählen und „10“ als Ergebnis nennen. Es ist dann noch weit davon entfernt, 24 als „zehn mehr als 14“ zu verstehen. Die Reihe der Zahlen von 15 bis 24 wird nicht notwendig als 10 in der 24 verstanden. Das Ergebnis 10 kann einfach bedeuten, dass

[6] STEFFE UND COBB sagen, dass die Konstruktion der Zahl als Zusammensetzung aus Vielen schon erfolgen kann, bevor die Vielen, die den Inhalt der Zahl ausmachen, schon den abstrakten gleichen Charakter von Einheiten oder Einern haben. Der Weg der Konstruktion der „Einer“ ist uns noch nicht ganz klar geworden. Wenn dem Leser/der Leserin diesbezügliche Aussagen in unserem Text unklar erscheinen, liegt das wahrscheinlich an der noch nicht überzeugenden Darstellung infolge unserer noch nicht abgeschlossenen Konstruktion.
[7] Zur Differenzierung zwischen empirischer und abstrakter Reflexion siehe auch VON GLASERSFELD, 1987.
[8] aus GLANTSCHNIG, H.: Blume ist Kind von Wiese oder Deutsch ist meine neue Zunge, Hamburg, 1993.

dies zehn Zahlen sind, während „24 ist um 10 größer als 14“ verlangt, dass eine *Beziehung* zwischen Teilen und Ganzem hergestellt wird.

Teile-Ganzes-Beziehungen müssen an Anzahlen reflektiert und konstruiert werden. Als Anzahlen bezeichnen wir Zahlwörter in Verbindung mit quantitativen Repräsentanten (Mengen) oder Vorstellungen. Als quantitative Repräsentanten und Vorstellungen, die die Reflexion unterstützen sollen, sind strukturierte Anordnungen oder auch eine gut strukturierte Vorstellung der Zahlwortreihe geeignet. Allerdings – und das öffnet ein weites Feld von notwendiger weiterer Forschung – ist nicht jede Veranschaulichung an jedem Entwicklungszeitpunkt und bei jedem Kind gleichermaßen geeignet (COBB 1994). Und noch mehr als auf die Art der Veranschaulichung kommt es auf den Anreiz und die Offenheit der Aufgabenstellung an, die zu neuen Zahl-Konstruktionen verleitet, anstatt zum Einprägen eines (für das Kind) bedeutungslosen, vorgegebenen Vorgehens aufzufordern.

Durch solche Reflexionen der Teile-Ganzes-Beziehungen an Anzahlen werden zweistellige Zahlen umgearbeitet, so dass ihre Repräsentation durch die Zahlwortreihe von 1 bis 46 in den Hintergrund tritt und 46 als „4 Häufchen mit je 10 und 6 noch dazu“ oder als „40 und 6“ oder auch als „30 und 16“ „gesehen“ werden kann.

Dabei sind noch keine Zehner (als neue Einheiten) im Spiel. Zu den Schwierigkeiten und Phasen ihrer Konstruktion verweisen als Hintergrund auf den Abschnitt 3.14. Unter der Voraussetzung, dass ein Kind 10 als Zusammensetzung aus zehn Einheiten versteht, wurde dort auf folgende Entwicklungsstufen und -schwierigkeiten hingewiesen:

1. Man muss damit rechnen, dass ein Kind beim Anblick eines Zehnerbündels nicht gleichzeitig zehn Einer und einen Zehner „sieht“. Es sieht *entweder* zehn Einzelne *oder* ein Ding, das Zehner genannt wird und das in Zehnerschritten gezählt wird.

2. Der Zehner kann als abstrakte Kategorie konstruiert werden, die unverbunden neben den Einern steht, die also nicht aus 10 Einern zusammengesetzt ist. Unter dieser Voraussetzung kann das Kind durchaus mit Zehnern und Einern umgehen, z. B. Zehnerstangen in Zehnerschritten zählen und bei den Einerwürfeln korrekt zum Zählen in Einerschritten wechseln. Es versagt immer dann, wenn zehn Schritte als ein Zehner begriffen oder ein Zehner in zehn Einer „ausgepackt“ oder „aufgelöst“ werden müssen.

3. Außerdem muss man beachten, dass das Kind in einer bestimmten Phase die Verbindung zwischen Zehner und zehn Einern nur realisiert, wenn eine anschauliche Stütze durch real vorliegende oder vom Kind vorgestellte Zehner und Einer in irgendeiner Form gegeben ist.

4. Das Zählen in Zehnerschritten ist u. U. für das Kind keine Abkürzung für das Zählen von jeweils 10 Einerschritten. 2 Zehner werden dann nur aufgrund einer sprachlichen Regel in 20 übersetzt. Die Übersetzung ist nicht verbunden mit der Vorstellung, dass jeder Zehnerschritt zehn Einzelne hinzufügt.

Die Zahl als Kombination aus Zehnern und Einern einerseits und die Zahl, die einheitlich aus Einern zusammengesetzt gedacht wird, andererseits stehen offenbar eine Zeitlang nebeneinander, sind nur durch Anschauungsmaterial und eine sprachliche Regel aufeinander bezogen, jedoch noch nicht durch eine reversible Beziehung zwischen Zehnern und Einer auf mentaler Ebene.

Das Verständnis für die Zahl als Zusammensetzung aus Zehnern und Einern kann nicht gleichgesetzt werden mit der Fähigkeit, eine Zahl in der Vorstellung mit Zehnerstangen und Einerwürfeln darzustellen. Zahldarstellungen dieser Art oder ihre Vorstellung können die Konstruktionen und Reflexionen des Kindes unterstützen, aber nicht auslösen, nicht automatisch vorantreiben oder gar ersetzen. Wir vermuten, dass viele Kinder zu früh darin *unterrichtet* werden, solche Zahldarstellungen vorzunehmen. Mit dem Ergebnis, dass sie einen Zehner konstruieren, der eine neue Kategorie neben den Einern bildet und unverbunden neben den Einern steht.

Wir vermuten, dass die trivialisierende Auffassung vieler Erwachsener von zweistelligen Zahlen (links die Zehner, rechts die Einer; Zehner wie eine Stange, Einer wie ein Würfel; eine Stange kann man in 10 Würfel tauschen usw.) für manche Kinder eine Qual ist, weil sie erleben, dass sie irgendetwas nicht sehen, was in den Augen der Erwachsenen unmittelbar *wahrnehmbar* ist und weil sie aufgefordert werden, ihren Ansatz aufzugeben und einen aufzugreifen, der mit ihrer Sichtweise nicht vereinbar ist. Sie bemühen sich natürlich, die Tipps aufzugreifen und kommen dabei mit der Entwicklung ihres eigenen mathematischen Denkens nicht weiter. Sobald sie sich an die Tipps nicht erinnern können, fallen sie auf primitive Lösungswege zurück.

Größer/Kleiner-Beziehung

Die Entscheidung darüber, welche von zwei Zahlen die größere ist, ist für (fast) keines der uns vorgestellten Kinder schwierig gewesen. Ihre Begründungen des Urteils fielen allerdings unterschiedlich aus. Doch sie wiesen überwiegend darauf hin, dass die Grundlage des Urteils die Zahlreihe war: Die Zahl, die *später* genannt wird, ist die *größere*. Das ist vermutlich auch in den Fällen die eigentliche Grundlage des Urteils gewesen, in denen auf den Größenunterschied der Zehnerstellen hingewiesen wurde: Warum es auf die Größen dieser Stelle ankommt, konnte oft nicht formuliert werden.

Wir sind zur Auffassung gekommen, dass das richtige Ordnen von Zahlen nach der Größe nach von den meisten Kindern auf der Grundlage des mentalen Zahlenstrahls und ohne Bezugnahme auf eine quantitative Zahlbedeutung erfolgt. Die von den Kindern vorgetragenen Begründungen reflektieren einerseits den Stand ihrer Bearbeitung der Zahlreihe und andererseits den Stand ihrer Reflexion der Stellenwerte.

Wir haben aus diesem Grund geschwankt, ob wir die Beziehung „größer/kleiner“ im Abschnitt Zahlbeziehungen oder im Abschnitt Zahlwortreihe behandeln sollen. Wir gehen nun in beiden Abschnitten darauf ein: Im Abschnitt Zahlbeziehungen behandeln wir das Größer/Kleiner-Urteil bezüglich zweier Zahlen; im Abschnitt Zahlwortreihe das Ordnen mehrerer Zahlen.

4.3.2 Beispiele

Eins mehr/eins weniger

Julie 1

Julie ist sieben Jahre alt und besucht die erste Klasse. Sie tritt bei uns stets liebenswürdig und etwas schelmisch auf. Ihre Gedanken äußert sie auf unbefangene Art.

Einmal verteilt sie eine Menge von Münzen an zwei Personen. Nach jeder neuen Zuordnung einer Münze zu den beiden Häufchen rechnet sie die Summe jedes Häufchens neu aus. Als jedes Häufchen 8 Pfennige hat und sie einen weiteren Pfennig zugefügt hat, zählt sie das ganze Geld neu ab.
Als ich zu bedenken gebe: „Du weißt, dass hier acht Pfennige liegen. Jetzt gibst du einen weiteren dazu, also sind es....?“, gibt sie an zu verstehen: „So kann man es auch machen. Aber so wie ich es mache, ist es leichter.“

Vorschlag zur Interpretation:

Man kann zweierlei vermuten: Wenn Julie von 1 bis 8 zählt, steht die 8 nicht für den ganzen Vorgang. Wie viele es sind, ist noch in der Prozedur des Zählens enthalten. „8“ ist nicht ein Symbol für „acht viele“. Dies dürfte die grundlegende und primäre Interpretation sein.
Daraus folgt: „9“ ist für sie nicht „eins mehr als 8“, sondern nur die Zahl, die nach 8 kommt.

Mascha 1

Mascha ist sieben Jahre und besucht als stille Teilnehmerin eine gut gefüllte erste Klasse. Sie ist bei der Untersuchung nie fröhlich und zeigt einen trotzigen Zug. Mehrmals bringt sie aber auch rezeptive Wünsche zum Ausdruck (vorgelesen bekommen, essen). In ihrer Familie werden Leistung und Anstrengung betont, es herrscht ein Mangel an Anerkennung.

Frage an Mascha: Wie erklärst du deinem kleinen Bruder, was man über Sieben wissen muss?
Mascha schreibt eine Ziffer 7.
Anschließend die Aufgaben: $6 + 1 = 7$ und $5 + 2 = 7$.
Nach etwas Nachdenken fährt sie fort: $7 + 6 = 1$, $7 + 1 = 6$. Sie spricht dazu, dem entsprechend, was sie schreibt.

Ich frage, ob sie dem Bruder auch mit einem Bild helfen könnte.
Mascha entwirft jetzt ein Haus, in dem Aufgaben versteckt sind, die der Bruder finden kann. Darin stehen mehrfach die Zahlen 5, 2 und 7. Sie verbindet die Zahlen mündlich in folgender Weise: $5 + 2 = 7$, $7 + 2 = 5$, $5 + 7 = 2$.

Bei unserem folgenden Treffen lege ich eine Stange mit je fünf roten und blauen Stöpseln (in linearer Anordnung) vor und fordere sie auf: „Zeige mir Sieben.“
Mascha zeigt auf den siebten Stöpsel: „da ist Sieben.“

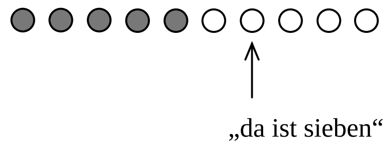


Abb. 4.43: „Da ist Sieben.“

Vorschlag zur Interpretation:

Mascha versteht „7“ als Ziffer und als Element in Rechenaufgaben, die sie auswendig weiß. Diese Aufgaben stützen sich auf die nahe Umgebung der 7 auf dem Zahlenstrahl oder in der Wortreihe.
Ein wesentlicher Baustein des Zahlverständnisses fehlt noch: das Verständnis der Sieben als Siebenheit.
Daher ist 7 nicht „eins mehr als 6“ und 6 nicht „eins weniger als 7“, sondern beides ist einen Schritt voneinander entfernt. Einen ähnlichen Zusammenhang schafft sie zwischen 7 und 5, die zwei (2) Schritte voneinander entfernt sind.

Mascha weiß, wo „die 6“ und „die 7“ in der Reihe von zehn Stöpseln sind, aber sie hat den Zahlen noch keine kardinale Bedeutung gegeben. Sie ist – jedenfalls in dieser Situation – auch nicht im Begriff, dies zu tun, sondern versucht, sich Rechenaufgaben anzueignen. Bald wird ihr die Mutter sagen, wie man bei Plus und bei Minus zählen muss.

Maria 2

Maria ist 7 Jahre alt und in der ersten Klasse.

„Welche Zahl ist eins mehr als sechzehn?“

Nach längerer Pause sagt Maria: „siebzehn“. Sie erklärt, sie habe an sechs gedacht. Eins mehr ist sieben. „Dann noch den Einser davor.“

„Welche Zahl ist eins weniger als sechzehn?“

Wieder dauert es ein Weilchen, bis die richtige Antwort kommt. Sie habe überlegt: „eins zwei drei vier *fünf sechs*. Fünf, und dann noch den Einser davor: fünfzehn.“

Vorschlag zur Interpretation:

Maria übersetzt das Zahlwort „sechzehn“ in Gedanken die geschriebene Zahl 16. Sie weiß nicht unmittelbar, welche Zahl eins mehr ist als 16. Sie zerlegt die Zahl in den

Einser (1) und Sechs (6) und greift auf ihr Wissen im Zahlenraum 10 zurück: „eins mehr als 6 ist 7“.

Beim Zahlenordnen (Maria 6) greift sie bei der Reflexion ihres zunächst falschen Urteils über 17 und 15 auf den Vergleich von 7 und 5 zurück.

Maria 3

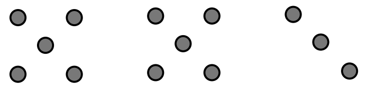
Wenn Maria beantworten soll, wie viel zwei mehr oder zwei weniger als 6 sind, bereitet ihr dies Mühe. Nimmt sie ein Fingerbild der Zahl zu Hilfe, kann sie richtig antworten. Auch bei einer Aufgabenstellung mit einem Bild, auf dem ein Mädchen 5 Äpfel im Korb hat, ein zweites Mädchen soll zwei mehr darin haben, gelingt die Lösung. Den sieben Äpfeln gibt sie die Form der Würfelfünf und der Würfelzwei – und eine vergiftete rote und essbare gelbe Hälfte!

Vorschlag zur Interpretation:

Maria versteht die Zahl als entsprechende Anzahl von Dingen und „zwei mehr“ als Hinzufügen von zwei weiteren Elementen. Ohne ihre Finger oder ein Bild aus Würfelkonstellationen findet sie aber nicht zur gesuchten Zahl. Sie greift nicht auf die verbale Zahlreihe zurück, sondern auf Muster zur Darstellung der Zahl.

Peter 5

Peter (9 Jahre, zweite Klasse) legte 13 Plättchen so, dass er leicht sehen kann dass es 13 sind:



Peter erhält dann schriftlich die Aufgabe 13 – 5 zusammen mit der Frage, ob das Bild ihm das Ergebnis sagen kann. Peter findet das Ergebnis aber nicht mit Hilfe des Bildes, sondern er erinnert sich daran, dass er vorher gefunden hatte, dass, wenn von 13 drei weggenommen werden, noch 10 bleiben; daraus hatte er abgeleitet, dass, wenn vier weggenommen werden, noch 9 bleiben. Daraus leitet er jetzt ab, dass 13 – 5 = 8.

Die Lösung von 13 – 8 findet er nach längerem Nachdenken und erläutert sie so:

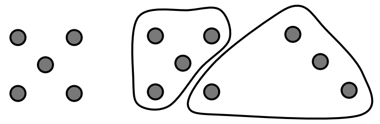


Abb. 4.44: „Vier und vier sind acht, bleiben noch 5.“

Im Anschluss daran erfindet er die Aufgabe 13 – 9 = 4, die er von 13 – 8 = 5 abgeschaut habe. Außerdem findet er noch 13 – 13 = 0 und antwortet richtig auf meine Aufgaben 13 – 12 = _ und 13 – 0 = _ . Er reagiert darauf mit den Aufgaben 13 – 11 = 2 und 0 + 13 = 13.
Er hat an seinen Erfindungen ausgesprochen viel Spaß.

Vorschlag zur Interpretation:

Peter wendet hier Ableitungen aus Nachbaraufgaben selbständig und sicher an. Seine Erläuterungen machen deutlich, dass er sich auf die Überlegung stützt, dass eins mehr weggenommen, eins weniger zurückbleibt. Die mathematisch-symbolische Schreibweise hat er mit dieser Reflexion sicher verknüpft und der Schreibweise dadurch Bedeutung gegeben. Er hat außerdem Nachbarzahlen mit „eins mehr“ und „eins weniger“ in Beziehung gebracht.

Der Vergleich mit Julies oder auch Maschas Vorgehen macht deutlich, welch komplexe Leistung schon das sichere Ableiten von Nachbaraufgaben darstellt.

Zahlzerlegungen

<u>*Sabine 1*</u>

Sabine ist 9 Jahre alt und besucht die dritte Klasse. Sie ist ein großes und hübsches Mädchen. Bei der testdiagnostischen Untersuchung erreicht sie im HAWIK-R einen gerade noch durchschnittlichen Intelligenzquotienten; unterdurchschnittliche Leistungen erbringt sie in den Untertests „Allgemeines Verständnis“, „Rechnerisches Denken“ und „Figurenlegen“ (Grenzwert im „Mosaiktest“). Bei unseren Treffen verhält sie sich kooperativ. Mehrfach fällt auf, dass es ihr schwer fällt, Zusammenhänge herzustellen, indem sie Vorgänge reflektiert.

Ihre Lehrerin gibt an, dass sie Sabine Material zur Verfügung gestellt habe, kleinschrittig vorgegangen sei und ihr stets viel Zeit gelassen habe.

Sabine soll dreizehn Plättchen so hinlegen, dass man (fast) ohne zu zählen sehen kann, dass es dreizehn sind. Sabine bildet folgende Anordnung

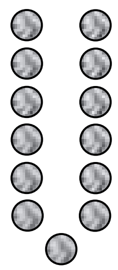


Abb. 4.45: Sabine legt 13 Plättchen so, „dass man fast ohne zu zählen sehen kann, dass es 13 sind.“

Sie gibt an, dass sie daran sofort sehe, dass es sich um 13 handelt.

Ich verdecke die Anordnung und nehme – für Sabine nicht sichtbar – ein Paar Plättchen weg. Ob Sabine jetzt sehe, ob ich etwas verändert habe? Sabine sieht keinen Unterschied zu vorher.

Sie will jetzt eine Anordnung finden, bei der diese Täuschung nicht passieren kann:

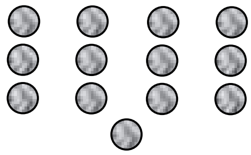


Abb. 4.46: Sabines bessere Alternative: 12 aus zwei Würfelsechsen und 1.

Sabine sagt, sie sehe 12 und 1, wobei sie die 12 aus zwei Würfelsechsen erschließt, die sie in der 3 mal 4 Anordnung erkennt.

Ich biete ihr nun die Aufgabe „13 – 6“ an und frage, ob sie sie mit Hilfe des Musters rasch lösen könne.
Sabine gewinnt das Ergebnis, indem sie mit Hilfe ihrer Finger rückwärts zählt – sie streckt sukzessive einen bis sechs Finger, während sie die Zahlreihe von „12“ bis „7“ aufsagt.
Aufgefordert, die Lösung am Bild herbeizuführen, zählt sie sechs Plättchen ab und schiebt sie zur Seite. Sie benutzt dabei das einzelne Plättchen in der letzten Reihe zuerst, nicht die Würfelsechs, die sie zuvor zur Bestimmung der Anzahl verwendet hat.

Vorschlag zur Interpretation:

Zunächst fällt auf, dass Sabine das erste Muster im Hinblick auf die gestellte Aufgabe („so dass du leicht sehen kannst, dass es 13 sind“) nicht richtig beurteilt. Wir wollen hier nicht auf die Frage eingehen, wie man ihre unzutreffende Überzeugung deuten kann.
Das zweite Muster, das im symmetrischen Aufbau dem ersten Muster ähnlich ist, erscheint uns geeigneter und Sabine beschreibt seine Eignung auf nachvollziehbare Weise. Sie benutzt die Symmetrie und das bekannte Würfelbild der Sechs.

Die im Anschluss daran gestellte Aufgabe „13 – 6“ geht auf das „Potenzial“ dieses Bildes und Sabines Sichtweise vom Bild ein. Überraschenderweise benutzt sie das Bild bzw. ihre Reflexion über das Bild nicht, sondern zieht das Register des Rückwärtszählens, kontrolliert durch das Fingerzahlbild der 6, das sie verinnerlicht hat.
Als sie anschließend aufgefordert wird, die Lösung am Bild zu zeigen, setzt sie auch nicht an der Gliederung an, die sie zuvor hergestellt („gesehen“) hatte, sondern nimmt 6 Plättchen weg, wobei sie mit dem vereinzelt liegenden beginnt, das vermutlich das „letzte“, also das dreizehnte, für sie ist. Sie reproduziert am Bild den Zählvorgang, bei dem „die 13“ zuerst weggenommen wird.

Als sie das Bild durch „6 und 6 sind 12 und 1 ist 13“ charakterisiert, scheint sie das Ganze der 13 aus den Teilen 6 und 6 und 1 zusammenzusetzen. Nutzt sie dies im Fol-

genden nicht, weil sie die Reihenfolge der Teile nicht zu 6 und 1 und 6 umstellen kann? Warum nicht?
Oder hat „6 und 6 ist 12“ nicht die Bedeutung, dass 12 eine Zusammensetzung aus zwei Sechsheiten ist? Es kann eine oberflächliche Assoziation mit einem Satz sein, den Sabine sich eingeprägt hat, der jedoch noch nicht mit einer Teil-Ganzes-Interpretation verbunden worden ist.

Ein anderer Ansatzpunkt ist, dass Sabine Addition und Subtraktion noch nicht miteinander verknüpft hat. Wenn man überlegt, wie die Einsicht in den Zusammenhang konstruiert werden kann, kommt man jedoch zum selben Ergebnis: Hat die einzelne Zahl eine Anzahl-Bedeutung für das Mädchen? Wird eine kleinere Zahl als Teil der Anzahl verstanden? Wird die Addition als Zusammensetzung von zwei Teil-Anzahlen zu einer neuen Anzahl verstanden? Beinhaltet die so entstandene Anzahl die Teile noch und ist diese Beziehung auf die Zahlenebene übertragen?

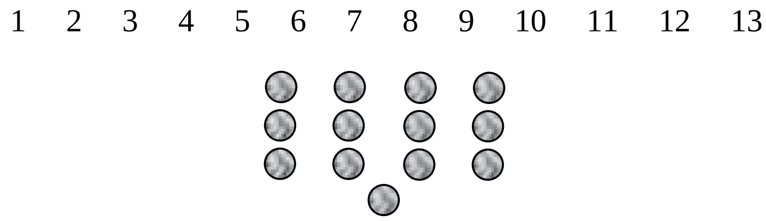


Abb. 4.47: Bild zur Illustration der Schwierigkeit, zwei Sechsheiten in der Zahlreihe zu konstruieren.

Es fällt uns schwer, diese (nonverbalen) Konstruktionsschritte in Worte zu fassen. Aber diese Schwierigkeit kann man teilweise als Hinweis auf die Anforderungen der Konstruktion verstehen, die das Kind leisten muss und die Erwachsenen leicht entgehen. Ein Nebeneffekt ist, dass wir bemerken, dass die Konstruktionen nicht auf verbaler Ebene (allein) geleistet werden können und uns mit Erklärungen an das Kind zurückhalten. Keinesfalls vertrauen wir darauf, dass häufiges zählendes Rechnen Zahlkonzepte ausbildet. Aber Sabine, die stets mit Material rechnen durfte und „kleinschrittig“ angeleitet wurde, hat auf dieser Grundlage auch keine angemessenen Zahlkonzepte entwickelt.

<u>Sabine 2</u>

Sabine (9 Jahre alt, 3. Klasse) wird die folgende Aufgabe schriftlich vorgelegt:

> Als der Bus losfährt, sind 5 Personen darin. An der nächsten Haltestelle steigen 17 Leute ein. An der folgenden Haltestelle steigen 5 Leute aus.
> Wie viele Menschen sind jetzt im Bus?

Beim Lesen übergeht Sabine die Punkte (Satzenden). Sie liest ein wenig stockend. Anschließend ruft sie „Gott!“
Nach längerer Pause sagt sie „Zweiundzwanzig“. Sie hat um 17 Schritte ab 5 weitergezählt, wobei sie nur eine Hand benutzte! Um mir zu erklären, woher sie wusste, dass sie 17 Schritte gegangen ist, weist sie auf die zwei Finger hin, die auch erscheinen, wenn man um 7 weiterzählt.
Als ich frage, ob man 5 + 17 auf leichtere Art rechnen könne, hat sie keine Idee dazu.
Nachdem sie die 22 errechnet hat, setzt sie die Aufgabenlösung nicht fort.

Ich male einen Bus und wir vollziehen den in der Aufgabe geschilderten Vorgang nach, Holzzylinder übernehmen die Rolle der Personen: 5 sind drin, 17 kommen hinzu.
Als ich frage, was die Aufgabe noch sagt, sagt Sabine: „Es steigen 5 wieder aus." Sie nimmt 5 Klötzchen heraus und bestimmt zählend, wie viele noch da sind. Sie wundert sich über das Ergebnis!

Zu einem späteren Zeitpunkt lege ich Sabine die folgenden Aufgaben vor:

„4 + 10"
„10 + 3 + 10"
„5 + 3 – 5"
„4 + 5 – 4"

Bei der ersten Aufgabe sagt sie, man könne auch andersherum rechnen (10 + 4). Bei der zweiten Aufgabe rechnet sie zunächst in der gegebenen Reihenfolge. Als ich frage, ob es auch leichter gehe, bestätigt sie dies in Form von 10 + 10 + 3. Die dritte Aufgabe rechnet sie wieder in der gegebenen Reihenfolge. Auf meine Frage antwortet sie wieder mit Ja und schlägt 5 – 5 + 3 vor. Die letzte Aufgabe rechnet sie erneut in der gegebenen Reihenfolge und findet auch auf meine Frage hin kein alternatives Vorgehen.

Vorschlag zur Interpretation:

Die Textaufgabe kann in zwei Rechenschritten oder durch eine Reflexion der gesamten Aufgabe, bei der der Anfangszustand und der letzte Vorgang miteinander verknüpft werden, gelöst werden. Als einen Anstoß für diese Reflexion kann man die Angabe der Zahlen in Ziffern ansehen (5, 17, 5), wodurch die 5 zweimal erscheint. Die Mathematisierung der Vorgänge „Zusteigen" (Plus) und „Aussteigen" (Minus) darf als einfach angesehen werden.

Sabines Vorgehen und ihr Staunen über das Endergebnis macht deutlich, dass die genannte Reflexion auch ein bestimmtes Zahlverständnis voraussetzt: Um unmittelbar einzusehen, dass „5 und 17 dazu und 5 davon weg" natürlich 17 zurücklässt, muss 5 noch im Ergebnis von 5 + 17 drin sein und es muss möglich sein, eben diese 5 anschließend wieder wegzunehmen.
Sabine jedoch übersetzt die Aufgabe in das Anfügen von 17 Zahlen an *die 5* und das Ergebnis ist vermutlich *die 22*.

(1 2 3 4 5) 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22

eine Hand — noch eine Hand — noch eine Hand — zwei Finger

Abb. 4.48: Sabine rechnet 5 + 17 durch Weiterzählen, das sie mit einer Hand steuert.

Wenn sie nach dieser Anstrengung nicht der Aufgabe schon überdrüssig gewesen wäre, hätte sie das Aussteigen von 5 Personen vermutlich so realisiert, dass sie von 22 um 5 Schritte zurückgegangen wäre.

Im Kontext der Aufgabe kann man vermuten, dass sie sich an den vorgegebenen Ablauf gebunden fühlt (5 zuerst, dann 17 dazu, dann 5 wieder weg) und nicht in der Lage ist, sich durch die Überlegung davon zu lösen, dass es egal ist, ob zuerst 17 und dann 5 oder umgekehrt. Aber ihre Unfähigkeit, das Endergebnis aus der Aufgabe zu begründen, gibt Anlass zur Hypothese, dass ihr Vorgehen auch in ihrem Zahlverständnis begründet ist, das dem mentalen Zahlenstrahl entspricht. Beim Addieren und Subtrahieren auf dieser Grundlage können durchaus die fünf Zahlen vorne und die fünf Zahlen hinten getrennt bleiben.

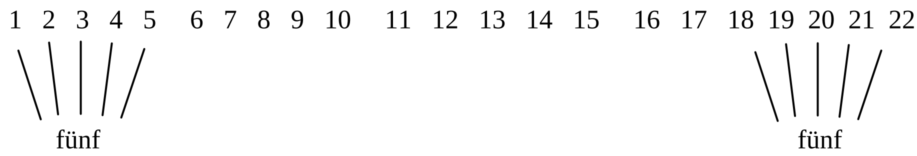


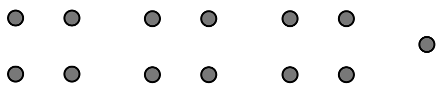
Abb. 4.49: Zwei Fünfen, die nichts miteinander zu tun haben.

Sabine versteht eine Zahl nicht als Teil anderer Zahlen, sie hat die Zahlreihe, die sie beim Addieren und Subtrahieren benutzt, noch nicht in dieser Weise reflektiert.
Diese fehlende Reflexion zeigt sie auch in folgendem Verhalten: sie kann 17 Schritte von „5“ weiterzählen, durch *eine* Hand gesteuert, ohne einen Fehler zu machen. Dabei benutzt sie implizit, dass 10 zweimal eine Hand ist und 7 eine Hand und zwei Finger. Sie benutzt dies, ohne es zu „wissen“. Vergleiche Beispiel „Sabine 1“ in Abschnitt 4.2. Warum weiß sie es nicht? Wie könnte sie es erkennen?

<u>*Sabine 3*</u>

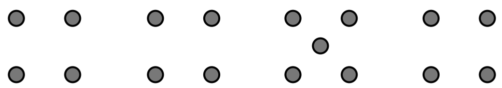
Sabine soll mit Würfelbildkärtchen von 1 bis 5 die Zahl 17 so legen, dass man leicht oder rasch sehen kann, dass es 17 sind.
Dabei ergeben sich folgende Varianten:

1. Variante:



Diese Anordnung erklärt sie durch „4 und 4 sind 12“. Zur Korrektur kommt es durch mein Eingreifen.

2. Variante:



Sie erklärt dazu, dass 4 und 4 und 5 gleich 13 sei und bestimmt die fehlenden Vier zählend mithilfe ihrer Finger: „14, 15, 16, 17“ – vier Finger.

3. Variante:

Ich frage, ob sie auch ein Bild kennt, bei dem sie die Finger noch weniger zu Hilfe nehmen muss. Nach längerem Nachdenken legt Sabine jetzt zwei Fünferkärtchen. Wieder nach einiger Zeit fügt sie zwei Einerkärtchen hinzu, dann noch zwei Einer und einen Zweier. Nachdem ich sie aufgefordert habe, nochmal zu prüfen, ob es stimmt, legt sie noch ein Einerkärtchen dazu.

4. Variante:

Zwei Vierer, ein Fünfer, ein Dreier und ein Zweier.

Jetzt bitte ich sie, mir zwei Karten zu zeigen, die zusammen 7 Punkte zeigen. Sie zeigt mir sowohl 5 und 2 als auch 4 und 3.

Die Aufgaben 19 – 9 = _, 14 – 4 = _, 16 – 10 = _, 10 + 8 = _ rechnet Sabine zählend.

Vorschlag zur Interpretation:

Besonders auffallend ist, dass Sabine nicht mit zwei Fünferkarten startet, aber das Rätsel löst sich, wenn sie angibt, dass sie zu diesem Zeitpunkt davon überzeugt ist, dass 4 und 4 schon 12 ergibt.
Ihr nächster Schritt knüpft an dem ersten an: Sie verbindet Viererkarte und Einerkarte zu einer Fünferkarte, berechnet zählend die Summe von 8 und 5 und bestimmt die fehlenden vier Punkte, indem sie die Zahlen von 14 bis 17 zählt.
Ihr dritter, jetzt neuer Ansatz, macht sichtbar, dass sie nicht weiß, dass 17 aus 10 und 7 zusammengesetzt ist. Die Zusatzfrage zeigt, dass sie nicht daran scheitert, eine Darstellung der 7 zu finden.

Obwohl Sabine bei ihren Zählprozeduren Zahlzerlegungen „modulo einer Hand“ vornimmt, wenn sie wie in Beispiel 1 siebzehn Zählschritte mit Hilfe von fünf Fingern steuert, verfügt sie in anderer Hinsicht über das Wissen, dass 17 dreimal 5 und 2 ist, nicht.
Vielleicht kann man das, was fehlt, so beschreiben: Sie reflektiert „1, 2, 3, 4, 5,“ und „6, 7, 8, 9, 10“ und „11, 12, 13, 14, 15“ nicht als drei Fünfen in der Zahl 17. Sie kann Zahlen zählen und festhalten, dass 11, 12, 13, 14, 15 fünf sind. Aber sie begreift sie nicht als eine von drei Fünfen in 17.
Sabine hat das Konzept der Zerlegbarkeit von Zahlen in andere Zahlen oder der Zusammensetzung von Zahlen aus anderen Zahlen noch nicht konstruiert. Ein Ansatzpunkt ihrer weiteren Entwicklung könnte die Reflexion bilden, wie viele „Hände“ sie beim Zählen um x Schritte braucht.

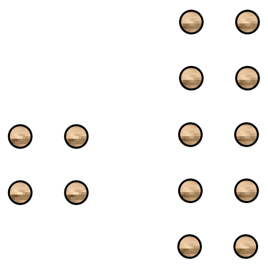
<u>*Andrea 2*</u>

Andrea (9 Jahre, dritte Klasse) kann Zahlen bis 20 mit ihren Händen darstellen. Dabei wird 13 durch 3 Finger der linken Hand dargestellt (vielleicht zusammen mit den fünf

Fingern der rechten Hand – die Untersucherin ist nicht sicher, ob sie darauf geachtet hat).

Aber sie löst 14 – 4 = 11 durch Rückwärtszählen;
16 – 10 = 0 bringt sie nach längerer Pause fragend vor;
10 + 8 = 18 errechnet sie nach längerer Zeit zählend.

Bevor die Aufgabe 16 – 10 = gestellt wurde, lagen 14 Plättchen so auf dem Tisch:



Um daraus 16 Plättchen zu machen, fügt Andrea die beiden Teile zusammen, so dass sieben Zweierreihen entstehen. Sie fügt ein weiteres Paar Plättchen an und zählt noch einmal alle Plättchen.

Jetzt zählt sie – um das Ergebnis von 16 – 10 herbeizuführen – zehn Plättchen: eine Hälfte der Paare und zwei von der anderen Reihe und schiebt sie zur Seite. Die verbleibenden Plättchen werden gezählt und ergeben das Ergebnis.

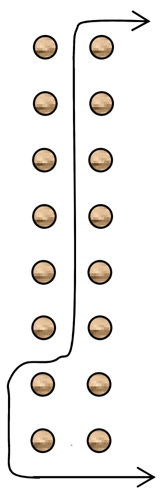


Abb. 4.50: Um 16 – 10 mit Hilfe von Material zu lösen, legt Andrea 16 Plättchen zurecht und trennt 10 davon ab. Sie zählt den Rest.

Vorschlag zur Interpretation:

Andreas Fingerbilder der Zahlen zeigen implizites Wissen von der Beziehung zur Zehn. Das hat sie aber noch nicht herausgearbeitet.
Auffallend ist, dass sie die von mir vorgenommene Strukturierung der Zahlen in 10 plus einen Rest nicht verwendet, sondern die Teilung (in der Anordnung der 14 Plättchen) wieder aufhebt und ein Ganzes daraus macht, das sie beim Zählen wie eine zusammengefaltete Reihe verwendet.

Man vermutet, dass sie die Aufgabe versteht als „10 Zahlen von 16 ab wegnehmen“. Sie beginnt mit der rechten Hälfte der Anordnung und setzt bei der linken Hälfte unten an, wie um den „Anfang“ übrig zu lassen.

Andrea äußert nicht – wie es Maria im Beispiel 2 tut – am Ende „16 sind 10 und 6“ oder „von 16 weg 10 sind 6“. Wenn die 10 Plättchen weggeschoben sind, haben sie mit der 16 nichts mehr zu tun. Sie versteht weder die 10 noch den verbleibenden Rest als Teile der 16. Sobald die 16 in die Teile 10 und 6 zerlegt sind, ist die 16 nicht mehr da.

Maria 4

Maria (7 Jahre, erste Klasse) wird ein Bild eines Jungen mit zwei Hosentaschen vorgelegt. Dazu werden mündlich folgende Aufgaben gestellt:

> „Tom hat in einer Tasche 10 Bonbons, in der anderen Tasche hat er noch ein paar.
> Zusammen hat er 17 Bonbons.“

Maria: „Wie viele sind in der Tasche?“ Sie zeigt auf die zweite Hosentasche.
R. S.: „Das genau sollst du rausfinden.“
Maria zeigt beide Hände mit ausgestreckten Fingern und sagt dazu: „Zehn.“ Dann zählt sie von 11 bis 17, wobei sie für jedes genannte Zahlwort einen Finger streckt. Schließlich liest sie ab: „Sieben.“ Und fügt hinzu: „Zehn und sieben sind siebzehn.“

> „Tom hat in einer Tasche zehn Bonbons, in der anderen hat er acht.
> Wie viele Bonbons hat er insgesamt?“

Maria löst diese Aufgabe, indem sie wieder „10“ vorgibt und dann so lange weiterzählt und dazu koordiniert Finger streckt, bis ihre Hände das Bild der 8 zeigen.

Anschließend löst sie zwei Aufgaben – „Tom hat 16 und gibt 6 davon weg“ (1) und „Tom hat 17 und gibt 10 davon weg“ – spontan richtig, ohne zu zählen. Ihre Überlegung verbalisiert sie so: „Wenn man zehn wegmacht, sind es sieben.“

Vorschlag zur Interpretation:

Maria erfasst die Struktur der Aufgabe(n) völlig richtig: 17 ist das Ganze, 10 ist ein Teil, gesucht ist der andere Teil.
Sie realisiert 10 in einem Fingerzahlbild simultan. Sie zeigt sich damit an, dass sie von so vielen Bonbons weiß. Jetzt zählt sie die Zahlen von 11 bis 17. Sie weiß also nicht, dass 17 aus 10 und 7 zusammengesetzt ist.
Es ist bemerkenswert, dass sie zuletzt den Satz „10 und 7 sind 17“ sagt. Für viele Kinder ist die Aufgabe mit dem Nennen der gesuchten Zahl beendet. Über die subjektive Bedeutung des Satzes für Maria kann können wir nichts Sicheres sagen, aber sie zeigt das Bedürfnis als Ergebnis der Aufgabe *eine Beziehung zwischen drei Zahlen* festzuhalten.

Ihre Bearbeitung der zweiten Aufgabe zeigt erneut, dass sie nicht weiß, dass 18 aus 10 und 8 zusammengesetzt ist.

Bei den beiden folgenden Aufgaben jedoch zerlegt sie offenbar spontan die 16 in 6 und 10 und die 17 in 10 und 7. Wieder findet sie eine Verbalisierung: „Wenn man zehn wegmacht, sind es sieben“. Man kann ein Interesse und Bestreben sehen, die Beziehung zwischen Teilen und dem Ganzen auf Zahlebene zu reflektieren. Oder umgekehrt formuliert: Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu konstruieren.

Beim Zahlenordnen und beim Rückwärtszählen tut sich Maria übrigens sehr schwer (siehe weitere Beispiele von ihr in den folgenden Abschnitten).

Sabine 4

Sabine (9 Jahre alt, 3. Klasse) kann die Teile der Zehnersystem-Blöcke „kleiner Würfel, kurze Stange (mit fünf Würfeln) und lange Stange (mit zehn Würfeln) und die quadratische Platte richtig benennen: Einer, Fünfer, Zehner und Hunderter.

R. S.: „Kannst du etwas über die Beziehung zwischen einem Würfel und einer Fünf sagen?“ (Entsprechende Fragen zu je zwei anderen Elementen: Fünfer und Zehner, Einer und Zehner, Zehner und Hunderter.)

Sabine: „Den Fünfer nimmt man, weil man damit 5, 10, 15, 20 usw. zählen kann.“
„Der Einer ist kleiner als der Zehner.“
„Den Zehner nimmt man, weil man dann 10, 20, 30 usw. zählen kann.“
„Zwischen Fünfer und Zehner gibt es keinen Zusammenhang.“
„Der Hunderter ist fast gleich wie der Zehner, nur ein bisschen größer.“

(Mit ZSB-Material stellt Sabine Zahlen aus dem Zahlenraum 100 und 1000 richtig dar und liest Zahldarstellungen mit diesem Material richtig ab.)

Vorschlag zur Interpretation:

Fünfer und Zehner qualifizieren sich durch bestimmte Zählreihen anderer Art. Aber diese Zählreihen sind für Sabine keine Abkürzungen der Einer-Zählreihe, durch die Einerschritte zu Fünfer- oder Zehnerschritten zusammengefasst wären. Denn Einer und Fünfer stehen in Sabines Augen in keinem Zusammenhang, es sind getrennte Kategorien, deren Bedeutung sich in den zugeordneten Zählreihen erschöpft.
Obwohl Sabines Lehrerin ihre Verwendung von Material unterstützte, hat sie in zweieinhalb Schuljahren diese Beziehungen nicht daraus erarbeitet.

Simone 1

Simone ist 13 Jahre alt und besucht die siebte Klasse einer Sonderschule. Nach Aussage ihrer Mutter und ihrer Lehrerin kann sie eigene und fremde Motive und Reaktionen verstehen und fällt durch ihre soziale Kompetenz auf. Bei uns arbeitet sie engagiert, sie hat den Willen und den Mut, die ihr unverständliche Mathematik wieder in Angriff zu nehmen.

Simone erhält schriftlich folgende Aufgabe:

> „Simone hat 27 DM. Sie braucht aber 37 DM. Wie viel Geld fehlt ihr noch?"

Simone: „Drei Mark fehlen noch." Sie begründet dies so: Um aus der 27 die 37 zu machen, müsse man zur 2 eins dazumachen.

Wir legen beide Geldbeträge:

27 durch 

37 durch 

Simone entnimmt der Darstellung, dass 10 DM fehlen.

Wir kehren zum Aufgabentext zurück. Simone liest ihn erneut und gibt nun als Ergebnis an, dass 1 DM fehlt.
Den Widerspruch zwischen der Lösung bei Darbietung der Beträge mit Geldscheinen und Münzen und der Lösung auf Grundlage des Textes kann sie nicht auflösen.

Vorschlag zur Interpretation:

Simone übersetzt 27 bzw. 37 in 20 DM und (5 + 2) DM (bzw. in (20 + 10) DM und (5 + 2) DM), aber anschließend ist sie nicht in der Lage, in den geschriebenen *Zahlen* diese Zusammensetzung zu sehen. Zur Erklärung ihrer Fähigkeit, die beiden Geldbeträge zu geben, kann man einerseits heranziehen, dass sie die gesprochenen bzw. gelesenen Zahlen übersetzt, in denen die Zehnerteile nicht „zwei" und „drei" heißen, sondern „zwanzig" und „dreißig". Andererseits kann man auf die häufig gemachte Beobachtung verweisen, dass Kinder manchmal kontextspezifisches Wissen über Zahlen und vom Rechnen erwerben.

Simone hat offenbar noch nie darüber nachgedacht, warum „siebenundzwanzig" als 2 und 7 geschrieben wird.
Ihre erste Antwort zu deuten ist schwierig: sie beginnt damit, dass sie in 3 eins mehr als 2 sieht. Sie kann diese Idee einer Ergänzung aber nicht richtig verwirklichen und macht eine Addition oder eine Ersetzung (der 2 durch 3) daraus. Die Idee entgleitet ihr vielleicht, weil die Assoziation „zwei und eins ist drei" stärker ist und mit der Idee, dass die 2 durch eine 3 ersetzt werden muss, zusammentrifft. Auch ein Einfluss fehlender Verankerung der Zahlen in einer quantitativen Vorstellung ist denkbar, obwohl sie das Vorliegen eines kardinalen Verständnisses andeutet (durch „man muss zur 2 eins dazu machen").

<u>*Elisabeth 1*</u>

Elisabeth ist 9 Jahre alt und besucht die dritte Klasse. Als sie im ersten Schuljahr war, hat ihr Vater die Familie überraschend verlassen und sich weit entfernt, was den Zurückbleibenden einige seelische Arbeit aufgebürdet hat. Ihre Mutter wirkt auf die Untersucherin der Tochter gegenüber sowohl mütterlich als auch respektvoll.

In der testpsychologischen Untersuchung mit dem K-ABC (vgl. Abb. 5.1) ist sie in bezug auf ihre intellektuelle Leistungsfähigkeit unauffällig, mit einem besseren Ergebnis bei Anforderungen an ganzheitliche Verarbeitung. Im Untertest „Rechnen“ ist sie unbegreiflich schlecht; eine gemäßigte Schwäche zeigt sie auch im „Lesen und Verstehen“ – vielleicht liegen im Bereich des sprachgebundenen Denkens Schwächen vor, die im K-ABC sonst unentdeckt bleiben.
Elisabeth äußert sich bei uns unbefangen und macht den Eindruck, als habe sie manches aufgearbeitet, was die Beraterin einer Erziehungsberatungsstelle vor einiger Zeit noch an Verunsicherung bei ihr bemerkte.

Elisabeth erhält folgende Aufgabe in schriftlicher Form:

> „Elisabeth hat 54 Perlen. Für eine Kette braucht sie 64 Perlen.
> Wie viele Perlen muss sie noch besorgen?“

Ihre spontane Antwort lautet: „Eine“.
Als ich zögere, beginnt sie ab 54 weiterzuzählen und erhält nun als Ergebnis: „neun“.
Ich bitte sie, die 54 und die 64 mit Zehnersystem-Blöcken darzustellen, sie soll sie untereinander platzieren.
R. S.: „Wie viel ist hier mehr?“
Elisabeth: „Ein Zehner – zehn.“ Sie lacht.
R. S.: „Warum hast du vorhin neun rausbekommen?“
Elisabeth kann es nicht erklären.

Zur Aufgabe findet sie als passende Rechnung: $54 + \square = 64$ und $54 + 10 = 64$.

Vorschlag zur Interpretation:

Elisabeths spontane Lösung zeigt ihr impulsives Herangehen, bei dem sie nur eine oberflächliche Interpretation der Aufgabenstellung und der Zahlen darin vornimmt. Dass sie Zehner- und Einerstelle im ersten Moment vertauscht hat, ist zwar nicht auszuschließen, aber im zweiten Ansatz zählt sie richtig (ab 54) weiter und erfasst die Zahlen daher auch richtig. Das falsche Zählergebnis irritiert sie nicht.

Sie kann die Zahlen mit ZSB richtig darstellen und beim Vergleich erkennen, dass „ein Zehner“ den Unterschied ausmacht, den sie sogleich in „zehn“ (Einer) übersetzt. Ihr Lachen enthält etwas wie „ja, klar!“ und Erleichterung über die Klarheit. Elisabeth kann Zehner und Einer noch nicht in die geschriebenen Zahl hineinsehen.

<u>Elisabeth 2</u>

Elisabeth soll unter eine Reihe von Zahlen jeweils die Zahl schreiben, die um 10 größer ist (schriftliche Instruktion). Die Zahlen sind:

302 57 461 593

Zur 302 findet Elisabeth sofort die 312, was sie begründet durch „2 und 10 mehr ist 12“.

Bei 57 ist die Aufgabe schwieriger, sie kann die Schwierigkeit aber nicht erklären. Sie sucht die Lösung durch Weiterzählen um zehn Schritte und erhält 69.
Ich fordere sie auf, die 57 durch ZSB darzustellen. Sie legt 5 Zehnerstangen und 7 Einerwürfel und sagt dann zu sich: „ich muss plus 10 rechnen“. Sie beginnt ab 57 weiterzuzählen.

Ich unterbreche sie und fordere sie auf, die Lösung mit der Zahldarstellung zu suchen.
Katharina: „Da mache ich erst die Sieben voll.“ Sie legt 3 Einer zu den 7 Einerwürfeln. Jetzt stockt sie und hat eine andere Idee: sie legt eine Zehnerstange dazu.

Bei der Zahl 461 findet sie die um 10 größere Zahl, indem sie überlegt: „bis 70 sind es 9 und 1 sind 10“.

Von 593 zu 603 gelangt sie durch Weiterzählen, das sie jetzt mit den Fingern steuert.

Interpretationsvorschlag:

Elisabeth geht in Einerschritten von Zahl zu Zahl, kann aber auch auf volle Zehner ergänzen. Eine interessante Frage ist, wieso sie das Ergänzen zunächst nicht anwendet. Unter Umständen war die Zahldarstellung durch ZSB ein Anstoß, an dieses Strukturmerkmal der Zahlen zu denken. Sie kennt es, aber es fällt ihr zur Zahl nicht unmittelbar ein.

Obwohl sie die Zahldarstellungen mit ZSB recht souverän herstellt, übersetzt sie „um 10 größer“ oder „plus 10“, wie sie die Aufgabe für sich interpretiert, erst verzögert oder gar nicht in „eine Zehnerstange dazu“. Sie ist noch damit beschäftigt, einen Zehner zu erfinden, der zehn Zählschritte ersetzt. Wenn sie Zehnerstangen und Einerwürfel vor Augen hat, realisiert sie den Zusammenhang zwischen „zehn mehr“ und „eine Zehnerstange mehr“ manchmal. Aber dass ein Zehner auch zehn Zählschritte abkürzt, scheint noch nicht erfasst zu sein. Zahlen in ZSB-Darstellungen und das Rechnen mit ihnen stehen noch unverbunden neben den geschriebenen Zahlen und dem zählenden Rechnen.

Elisabeth ist eines der Kinder, die sich über meine wiederholte Frage, wie sie ihr Ergebnis gefunden habe, wunderten. Man kann sich also vorstellen, dass sie in dieser Weise nie gefragt worden ist und sich selbst nie gefragt hat. Aber genau dieses Nachdenken über das eigene Vorgehen und eine Herausforderung, z. B. einen kürzeren Weg zu finden, fehlen ihr für eine Weiterentwicklung ihrer Zahlkonzepte.

<u>*Tommi 1*</u>

Tommi ist 9 Jahre alt und in der Mitte der dritten Klasse. Er kennt die Uhr noch nicht und ist daher auf ständiges Mitdenken der Mutter angewiesen, die seine Unselbständigkeit bemerkt, aber keine Abhilfe finden kann. Sie ist eine aktive, zufrieden wirkende Frau mit einer ganzen Reihe von Aufgaben auf einem Hof. Für eine Mutter von zwei erwachsenen Töchtern wirkt sie ausgesprochen jung.

Bei der testpsychologischen Untersuchung mit dem K-ABC erbringt er solide durchschnittliche Leistungen, die Differenz zwischen der Skala einzelheitlichen Denkens und der Skala ganzheitlichen Denkens verfehlt knapp die statistische Signifikanz: ganzheitliches Verarbeiten ist seine Stärke (überdurchschnittliches Ergebnis beim Gestaltschließen), schwieriger ist die Reproduktion von Reihenfolgen bei Handbewegungen (gerade noch durchschnittlich).
Auffallend ist eine Diskrepanz zwischen seinen Leistungen im Untertest „Lesen und Verstehen“ (Prozentrang über 70) und im Untertest „Lesen und Buchstabieren“ (Prozentrang 25), erklärbar vielleicht durch ein eher ganzheitliches Lesen, bei dem feine Unterschiede unbemerkt bleiben.
Ein sehr gutes Ergebnis erzielt (der damals achtjährige) Tommi im FEW (Prozentrang 90).

Ein Bild, das sich der Untersucherin eingeprägt hat: Tommi schleckt das Eis, das er – zusammen mit einem Comic-Heft – vor unserer Stunde bekommen hat, in Seelenruhe und mit Genuss zuende, den er mimisch und verbal zum Ausdruck bringt.
Er ist bei der Arbeit bemüht und wirkt selbstbewusst. Beim Rechnen wendet er vorzugsweise formale Vorgehensweisen an, vorherrschend ist das „schriftliche Rechnen im Kopf“. Die schriftlichen Rechenverfahren hat ihm der Vater beigebracht, noch vor ihrer Einführung in der Schule.

Tommi erhält eine Menge von Halbedelsteinen, deren Anzahl er feststellen soll. Er hat die Idee, in Zweierschritten zu zählen, gibt sie aber wieder auf, weil er befürchtet, es nicht zu können. Er schreibt die Zahl, die er beim Zählen erhält, richtig auf: 42

Ich zeige auf die Ziffer 2 in der 42 und frage: „Was hat dieser Teil der Zahl mit den Steinen hier zu tun?“
Tommi: „42 kommt in der Zweierreihe vor. Wenn ich 2 wegnehme, habe ich 40.“
R. S.: „Wo sind 40?“
Tommi trennt zwei Steine ab und zeigt den Rest.
R. S.: „Was hat dieser Teil der Zahl“ – ich zeige auf die Ziffer 4 – „mit den Steinen zu tun?“
Tommi: „Wenn ich zwei wegnehme, habe ich vierzig; wenn ich vierzig wegnehme, habe ich zwei.“
R. S.: „Die 4 bedeutet also 40?“ Tommi stimmt zu.

Tommi kann angeben, wie viele Schachteln mit jeweils zehn Aufbewahrungsplätzen man braucht, um die 42 Steine unterzubringen: 4 Schachteln und noch zwei Plätze einer weiteren Schachtel. Wenn er 87 Steine hätte, bräuchte er 8 Schachteln und 7 wären übrig.

Interpretation:

Im ersten Teil stützt sich Tommi auf das Wissen, dass 42 aus 40 und 2 zusammengesetzt ist.
Im zweiten Teil zeigt er, dass er sich eine Anzahl in Zehnergruppen zerlegt denken kann.

<u>*Tommi 2*</u>

Tommi ist 9 Jahre alt und besucht die dritte Klasse.

Die Zahl 342 ist aufgeschrieben. Tommi soll die Zahl schreiben, die um 10 kleiner ist als 342 (mündliche Instruktion). Er versucht nach eigener Aussage 342 – 10 schriftlich im Kopf zu rechnen. Dabei stellt er sich die Zahlen untereinander geschrieben vor.

Er soll dann die Zahl 195 mit Zehnersystemblöcken darstellen. Das gelingt ihm.
Nun soll er davon ausgehend die Zahl herstellen, die um 10 kleiner ist. Tommi nimmt 5 Einerwürfel weg, tauscht eine Zehnerstange in zehn Würfel und nimmt noch einmal 5 davon weg.

Interpretationsvorschlag:

Tommis Alternativen sind: „schriftliches Rechnen im Kopf“ und das Wegnehmen von 10 Einerwürfeln. Er übersetzt „zehn“ nicht in „einen Zehner“, obwohl für ihn ein Zehner zehn Einer enthält (Umtauschaktion). Er kann Zahlen als Quantitäten darstellen, aber hat die Darstellung offenbar noch nicht durchdacht und seine Sicht der Zahlen daran angepasst. Die Verwendung von Zehnerstangen entspricht nicht seiner Fähigkeit, in Zehnern zu denken. Sein schriftliches Verfahren hängt ziemlich in der Luft, was sich auch darin äußert, dass er immer wieder etwas davon vergisst.
Merkwürdigerweise gibt er bei der Untersuchung des Stellenwertverständnisses (Beispiel 1 von ihm) gar keine schlechten Antworten. Aber die Denkfähigkeit und das Verständnis, das er dabei zeigt, sind offenbar ganz getrennt vom Rechnen auf Zahlenebene. Darunter versteht er vielleicht Souveränität im Jonglieren mit Symbolen bei den schriftlichen Prozeduren.

Größer/Kleiner-Beziehung

<u>*Andrea 3*</u>

Andrea (9 Jahre, dritte Klasse) erhält eine Reihe von Zahlenkarten, die sie nach der Größe der Zahlen ordnen soll. Ihre Ordnung, die sie von links nach rechts entwickelt, sieht so aus:

51 52 61 62 64 65 67 74 84 60

Als sie die Ordnung herstellt, entsteht vor 61 eine lange Pause. Als sie die abgebildete Ordnung fertiggestellt hat, greife ich 84 und 60 aus der Reihe heraus, lege sie nebeneinander und frage, welche Zahl größer ist. Andrea nennt zunächst die 60, korrigiert sich aber. Sie bildet eine neue Ordnung, die so aussieht:

51 52 61 62 64 65 67 60 74 84

Als sie dann 60 und 67 vergleichen soll, bestätigt sie mehrfach, dass 60 größer sei als 67. Auch als sie an 60 Pfennige und 67 Pfennige denkt, hält sie an ihrem Urteil fest.

Ich schlage vor, dass sie 60 Pfennige und 67 Pfennige hinlegt. Als sie 5 Zehnpfennigstücke gelegt hat, bemerkt sie, dass sie noch eins dazulegen muss, um 60 Pfennige zu erhalten, und dann noch sieben Einpfennigstücke, um 67 Pfennige zu erhalten. Sie bringt zum Ausdruck, dass sie dachte, 67 Pfennige schon durch 5 Zehner und 7 Einer zu erhalten.

Interpretationsvorschlag:

Andreas Zögern, bevor sie die 61 platziert, bedeutet vielleicht, dass sie von 52 weiterzählte, um festzustellen, welche der vorliegenden Zahlen die nächste ist; vielleicht hat sie aber an dieser Stelle schon das Problem gewälzt, wo die 60 hingehört.
Sie kann sie den vollen Zehner noch nicht sicher platzieren. Erst als sie die Zahlen durch Münzen darstellt, wobei sie sukzessiv vorgeht und vermutlich zählt („10,20,30,40,50"), bemerkt sie, dass die 60 vor der 67 kommt.
Auch das Weiterzählen von einer bestimmten Zahl aus fällt ihr mitunter schwer, vergleiche Beispiele im Abschnitt 4.4.

Bei der testpsychologischen Untersuchung mit dem K-ABC zeigte Andrea in den Untertests, die das Erfassen und die Reproduktion einer verbalen Reihenfolge verlangen, eine auffallende Schwäche. Wir vermuten, dass eine Beeinträchtigung der Sprachverarbeitung und -produktion vorliegt, die auch das Erlernen der Zahlwortreihe erschwert hat.

<u>*Peter 6*</u>

Peter (9 Jahre, zweite Klasse) bringt dieselben Zahlenkärtchen in die richtige Reihenfolge.

51 52 60 61 62 64 65 67 68 74 84

Als er um eine Begründung gebeten wird, weshalb 68 kleiner ist als 74, sagt er: „hier ist die 7, die ist größer als die 6". Er demonstriert es mir durch die beiden Fingerbilder (der 6 und der 7).
Er fügt hinzu: „68 ist in der Sechziger-Reihe und dann kommt die Siebziger-Reihe, die kommt *nach* der Sechziger-Reihe."

Interpretation:

Bei der Begründung vergleicht Peter zunächst die Ziffern der Zehnerstelle, die er aber nicht durch ihren Stellenwert bezeichnet, sondern durch ihren Ziffernwert. Bei der vertiefenden Erläuterung wird die Ziffer 6 zum Repräsentant für die Zahlen mit „-sechzig" und die 7 repräsentiert entsprechend die Zahlen mit „-siebzig". Peter stützt sich auf die Reflexion der Zahlreihe, bei der diese in Zwanziger-, Dreißiger-, Vierziger-, Fünfziger-, Sechziger- usw. Zahlen gegliedert wird. Eine solche Gliederung wird auf Grundlage der sprachlichen Muster vorgenommen, ohne eine quantitative Vorstellung einzusetzen. Insbesondere werden die einzelnen Elemente der Sechziger-Reihe, z. B. die 68, nicht quantitativ oder kardinal interpretiert, sondern als ein individuelles Ding, das nach der 67 und vor der 74 kommt.

Peters Überlegung ist für die gestellte Aufgabe völlig ausreichend. Wir erwarten nicht, dass er sagt, dass 74 um 6 mehr ist als 68. Mit unseren Ausführungen wollen wir nachvollziehbar machen, dass zwischen dieser Sichtweise der Zahlreihe und der kardinalen Deutung der Zahl 68 eine Kluft besteht, die das Kind durch eine geistige Konstruktion schließen muss, um z. B. vom zählenden Rechnen wegzukommen.

Franziska 2

Franziska (9 Jahre, dritte Klasse) ordnet die Zahlenkärtchen wie folgt:
51 52 62 64 65 67 68 74 84 60 61
Ich bitte sie beiläufig, nochmal nachzuschauen, ob alles stimmt. Fast nahtlos korrigiert sie ihren Fehler.
Ich frage, wieso 74 größer ist als 68. Franziska: „nach 6 kommt 7“.
Ich wende ein, dass aber 8 größer ist als 4.
Franziska erwidert: „74 ist größer, weil es über den Sechziger-Zehner hinausgeht.“

Interpretation:

Franziskas erste Ordnung muss – angesichts ihrer raschen Korrektur nach einem ganz allgemeinen Hinweis – vorläufig ihr Geheimnis bleiben. Vielleicht kam es ihr nicht so auf vollständige Richtigkeit an, als sie bei 84 angelangt war und plötzlich noch zwei Karten übrig waren. Sie zeigt allerdings auch beim Ordnen dreistelliger Zahlen Schwierigkeiten und erarbeitet die richtige Ordnung nach vielem Hin und Her. Wir vermuten, dass ihre allgemein beobachtbare Schwierigkeit, ihr Vorgehen zu planen, sich mit gewissen Lücken im Zahlverständnis verbunden hat. Siehe Fallbericht in Kapitel 6.

Bei der Begründung verweist sie auf den Größenunterschied der Zehnerstelle, ohne jedoch von Zehnern zu sprechen. Als ich den anders gerichteten Größenunterschied der Einer ins Spiel bringe, wechselt sie die Argumentation und bewegt sich nun auf Zahlreihe und ihrem Wissen über sie. Ähnlich wie Peter gliedert sie sie in verschiedenartige „Zehner“: einer davon ist der „Sechziger-Zehner“, das sind die Zahlen, die mit „sechzig“ enden. Um zur „74“ zu gelangen, muss man über diese Zahlen „hinausgehen“.
Ob die Assoziation der Sechziger-Zahlen mit „Zehner“ bedeutet, dass Franziska sich erarbeitet hat, dass es – mit 60 angefangen – genau zehn solcher Zahlen gibt, können wir auf dieser Grundlage nicht entscheiden.

Sabine 5

Sabine ordnet die Zahlenkarten richtig: 51 52 60 61 62 64 65 67 68 74 84.

Die Frage, wieso 68 kleiner sei als 74, beantwortet sie so: „weil 6 kleiner ist als 7 und weil – jetzt komme ich durcheinander! – 8 ist größer als 4?“ Sie kann ihre Verwirrung nicht aufklären.

Interpretation:

Sabine weiß, dass es beim Vergleich und beim Ordnen zunächst auf den linken Stellenwert ankommt, sie weiß es aber nur in einem eingeschränkten Sinne, da sie sofort unsicher wird, sobald sie es erklären will. Sie hat ihr Zahlreihen-Wissen mit der Schreibweise der Zahlen in Verbindung gebracht, bei der sich „-sechzig" in eine 6 links verwandelt. Sobald sie sich auf der Ebene der geschriebenen Zahl bewegt, ist die unterschiedliche quantitative Bedeutung der „6" und „7" gegenüber den Ziffern „8" und „4" aber gewissermaßen verschwunden.

4.4 Zahlverarbeitung und Zahl(wort)reihe

4.4.1 Einführung

In diesem Abschnitt behandeln wir sowohl das „Bilden der Zahlwortreihe(n)" als auch das „Übersetzen zwischen Zahlwörtern und in Ziffern geschriebenen Zahlen (Zahlverarbeitung)", da wir beide Leistungen vorwiegend als sprachliche verstehen. Sie beruhen auf *sprachlichen Analysen und Regelbildungen*. Die Regeln betreffen die Bildung der Reihe der Zahlwörter, die Notation der Zahlwörter als Zahlen in Ziffernschreibweise und die Aussprache der geschriebenen Zahlen. Die Schreib- und Leseregeln für Zahlen weichen von den Regeln des Schreibens und Lesens von Wörtern ab, aber sie können erworben und ausgeführt werden, ohne dass eine Zahlbedeutung quantitativer Art einbezogen wird. Es müssen dazu nur Zahlwörter als Zahlwörter und geschriebene Zahlen als Zahlen erkannt und die Übersetzungsregeln beherrscht werden.[1]

VON ASTER (1996) unterscheidet[2] zwischen der „visuell-arabischen Repräsentation" der Zahl und ihrer „auditiv-sprachlichen Repräsentation". Er begründet die Differenzierung durch die Verschiedenheit der syntaktischen Regeln[3] für das arabische Notationssystem einerseits, und für die Wortform der Zahlen andererseits. Für die Unterscheidung spricht außerdem, dass bei erwachsenen, hirngeschädigten Personen Störungen beobachtet werden, „die sich ausschließlich auf die Verarbeitung von arabischen Zahlen (d. h. Zahlen in Stellenwertschreibweise mit arabischen Ziffern) beschränken, oder umgekehrt ausschließlich sprachliche und schriftsprachliche Funktionen betreffen". Dies legt nahe, dass es sich um separate Verarbeitungseinheiten handelt (VON ASTER, 1996, 12).

[1]Vergleiche von Aster 1996: „Deloche und Seron kommen auf der Basis ihrer Untersuchungen an hirngeschädigten Patienten zu der Überzeugung, dass Transkodierungsprozesse (Zahlenworte in arabische Zahlensymbole transformieren und umgekehrt) auch asematisch, d. h. ohne eigentliche Sinnentschlüsselung erfolgen können." (9)

[2] In Anlehnung an DEHAENE, 1992.

[3] Syntaktische Regeln: Sie bestimmen, was ein Zahlwort/eine geschriebene Zahl ist und was nicht; welches Zahlwort zu welcher geschriebenen Zahl gehört; Bezeichnungen „Einer-", „Zehner-", „Hunderter-Stelle".

Zahlverarbeitung (Übersetzen zwischen Zahlwörtern und geschriebenen Zahlen)

Auch wenn gilt, dass diese Fertigkeiten ohne semantisches[4] Zahlwissen erlernt und ausgeführt werden können, so spielen sie doch beim Erwerb und bei der Anwendung des semantischen Zahlwissens eine Rolle. Soweit wir die Literatur kennen, sind die wechselseitigen Einflüsse zwischen der Beherrschung der Aussprache- und Schreibregeln einerseits, und dem Zahlverständnis und dem verständigen Rechnen und Problemlösen andererseits, noch nicht entwicklungspsychologisch erforscht. Sie verdienten es aber, erforscht zu werden: Wir konnten bei mehreren der uns vorgestellten Kinder Schwierigkeiten in der Zahlverarbeitung feststellen. Wir haben zu diesem Bereich z. B. folgende Fragen: (Wie) kann man neuropsychologisch zwischen dem Lesen/Schreiben von Zahlen und Wörtern unterscheiden? Wie können Schwierigkeiten der Sprachverarbeitung und Sprachproduktion, die sich auf die Zahlverarbeitung und -produktion auswirken, psychologisch charakterisiert werden? Wie kann man Schwierigkeiten beim Rückwärtszählen erklären, wenn das Vorwärtszählen beherrscht wird? In welchem Alter können Kinder das Lesen und Schreiben zwei- und dreistelliger Zahlen lernen?

Im Folgenden tragen wir einige Gedanken über den Einfluss der Zahlverarbeitung auf die Anwendung des Zahlverständnisses und auf den Erwerb desselben vor.

Einfluss der Zahlverarbeitung auf die Anwendung des Zahlwissens

Abgesehen von quantitativ-analogen Zahldarstellungen sind es die Zahlwörter und die in Ziffern geschriebenen Zahlen[5], mit denen beim Rechnen „hantiert“ wird, wobei häufig Übersetzungen vorgenommen werden müssen. Der (und die) Erwachsene wird bei sich bemerken, dass beim Kopfrechnen eine enge Kopplung von Zahlwort und der Vorstellung der geschriebenen Zahl benutzt wird. Wenn die Kopplung unsicher ist, d. h. wenn das Kind, das „fünfunddreißig“ zu sich sagt, „53“ vor sich sieht, treten bei der Produktion von Zwischen- und Endergebnissen Fehler auf, auch wenn aus dem Blickwinkel der Zahlbedeutungen und der Rechenprozeduren richtig vorgegangen wurde. Oft zeigen sich die Transkodierungsfehler beim reinen Zahlenschreiben und Zahlenlesen nicht (mehr), da bei dieser Aufgabenstellung die Anforderung weniger komplex ist.

Manchmal ist das falsche Lesen einer Zahl nicht mit einer entsprechend falschen Zuweisung der Bedeutung verbunden – das Kind rechnet trotzdem mit den richtigen Zahlen. Aber es *kann* zu Fehlern beim Rechnen führen, gerade beim Kind, das sowohl die einzelnen Rechenschritte noch stärker steuern muss als auch mit diesen Übersetzungsleistungen zu kämpfen hat.
Martin verdoppelt 90 im Kopf: „Zwei mal neun ist achtzehn“, also ist zwei mal 90 „achthundert“. Man vermutet, dass er an das Ende des Zahl*wortes* „achtzehn“ eine Null angehängt hat, „zehn“ (10) und eine Null dran ist „hundert“ (100). Um die Aufgabe auf dem von Martin gewählten Rechenweg richtig fortzusetzen, muss „achtzehn“ in die

[4] semantisches Zahlwissen: quantitative Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen.
[5] Wir meinen hier auch das Sich-Vorstellen von geschriebenen Zahlen oder inneres Sprechen von Zahlwörtern.

geschriebene Zahl übersetzt werden: 18, die Null angehängt (180) und das Ergebnis wieder abgelesen werden.[6]

Da die Übersetzungsleistungen insbesondere beim Kopfrechnen unumgänglich sind, ist es denkbar, dass einige derjenigen Kinder, die sich aufs schriftliche Rechnen verlegen und Kopfrechenaufgaben „schriftlich im Kopf“ rechnen, auf diese Weise Schwierigkeiten der Zahlverarbeitung entgehen wollen. Diese Vermutung ist aber erst dann stichhaltig, wenn festgestellt wurde, dass das Zahlverständnis des Kindes gut ist.

Einfluss der Zahlverarbeitung auf den Erwerb der Zahlbedeutungen

Im positiven Fall wird das Kind bei der Konstruktion der Zahlbedeutungen und -beziehungen durch seine Fähigkeiten zur sprachlichen Analyse des Zahlwortes und des Zahlschreibens unterstützt: „Siebenundvierzig sind vierzig und sieben, das hört man.“ Oder: „Wenn ich 47 sehe, weiß ich, da steht 40 und die 7 liegt auf der 0. So merke ich mir, dass 47 aus 40 und 7 zusammengesetzt ist.“
Im negativen Fall ist die Kommunikation über Zahlen erschwert – „Was hast du gesagt: siebenundvierzig oder vierundsiebzig?“ – und das Schema der geschriebenen Zahl besteht aus den zwei Ziffern 4 und 7, nicht aus 40 in der 47.
An zwei Beispielen wollen wir jedoch erläutern, dass Fehler, die mit Vertauschungen von Stellenwerten einhergehen, oft als Ausdruck von Lücken im Zahlverständnis oder im Operationsverständnis interpretiert werden müssen.
Peter rechnet „53 – 10 = 25“. Er erklärt dazu: „Weil’s nur die Drei wegmacht; die Zehn sagt zur Drei, geh mal weg.“ Er wird gebeten, die Aufgabe vorzulesen; er liest: „fünfunddreißig minus zehn“.
Wir warnen davor, den „Vertauschungsfehler“ des Jungen durch eine missglückte Zahlverarbeitung zu erklären, bevor geprüft wurde, was die Aufgabe „fünfunddreißig minus zehn“ für Peter bedeutet: Denkt er sich die Zahl als drei Zehner und fünf dazu, oder ist sein Vorgehen ein „formales“ Rechenverfahren, das er nicht hinsichtlich der quantitativen Zahlbedeutung erläutern kann? Oft wird sich zeigen, dass das Kind dieses Rechenverfahren nicht erläutern kann; um das Ergebnis zu überprüfen, wird es vielmehr um zehn Schritte rückwärts zählen. Wenn die beiden Ziffern der zweistelligen Zahl nicht mit unterschiedlichen quantitativen Bedeutungen versehen sind, kommen Vertauschungen vermutlich häufiger vor.

Andi rechnet „68 – 40 = 32“, da „80 – 40 gleich 40 und 40 – 8 gleich 32“.
Resultiert sein falsches Ergebnis aus einer „Schwierigkeit bei der Beachtung der Ziffernfolge und – daraus resultierend – der Stellenwerte“ oder aus „Schwierigkeiten beim Erwerb syntaktischer Regeln im Umgang mit Zahlen in visuell-arabischer Form“? Beide Aussagen behandeln das Rechnen als prozedurale Angelegenheit, in der mit Ziffern verfahren wird.
Schaut man genauer hin, bemerkt man folgendes: Er denkt sich 68 als 86, er will also 86 – 40 rechnen. Aber was tut er, um das auszurechnen? Denkt er sich 86 als 80 und 6? In welche Beziehung setzt er 40 und 80 und 6? Denkt er „ich trenne 40 von den 80 ab

[6] Ob Martin ein schlechtes Zahlwissen hat, dass er nicht bemerkt, dass 2 mal 90 nicht achthundert sein kann, kann man nicht ohne weiteres schließen: Wir wissen nicht, ob er „achthundert“ in 800 übersetzt hat, und wir wissen nicht, ob er die Aufgabe rückblickend geprüft hat.

und lasse die 6 in Ruhe. Dann sind noch 40 da und die 6“? Offenbar nicht. Man bemerkt, dass bei diesem Jungen mindestens zwei Schwierigkeiten zusammenspielen: die falsche Lesart der 68 als 86 *und* eine falsche Interpretation der Minusaufgabe, speziell der Beziehung der Zahlen (einschließlich der fehlenden) zueinander: 68 als das Ganze, 40 als Teil der 68, gesucht ist der verbleibende Teil. „40 – 8“ als Schritt in der Lösung dieser Aufgabe ist als „Vertauschung“ oberflächlich beschrieben: Dass die 8 nicht beim Minuenden (dem Ganzen) bleibt, bedeutet, dass das Kind die symbolische Aufgabe *nicht* in die richtige *Beziehung zwischen Quantitäten* übersetzt.

Leichtigkeit in der Verarbeitung von Zahlwörtern und in der Gewinnung von Sprech- und Schreibregeln für Zahlen beeinflusst die Erarbeitung der semantischen Bausteine des Zahlverständnisses positiv, von Schwierigkeiten der Zahlverarbeitung geht ein negativer Einfluss aus. Wie wir schon sagten, sind die wechselseitigen Einflüsse zwischen der Kompetenz in den syntaktischen Sprech- und Schreibregeln einerseits, und dem Zahlverständnis und auf Verständnis gegründetem Rechnen und Problemlösen andererseits, noch nicht entwicklungspsychologisch erforscht.

Zahl(wort)reihe

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 haben wir uns darauf konzentriert, wie eine kardinale Zahlbedeutung entsteht und allmählich eine Strukturierung durch Zehner und Einer erhält. Diese Entwicklung geschieht im wesentlichen durch nonverbale Konzeptbildung, auch wenn sprachliches Material (Zahlwörter, Zahlwortreihen) und eine spezielle Schrift (Ziffernschreibweise) verwendet werden. Die Beherrschung der Zahlreihe wurde in diesen Ausführungen vorausgesetzt.

Im Hof beobachteten wir einen kleinen Jungen (vier Jahre alt), der die Platten zählte, über die er lief. Er war bis 34 gelangt, als wir auf ihn aufmerksam wurden. Uns zuliebe setzte er die Reihe fort bis 39. Hier stockte er, und es wollte ihm lange nicht einfallen, was jetzt kommt. Er entwarf „zehnunddreißig“, lachte aber in einer Weise, die ausdrückte, dass er wusste, das stimmt nicht.
Es gibt Schulkinder, denen es schwerer fällt, die Zahlwortreihe zu lernen, als diesem Jungen.[7] Die uns vorgestellten Erstklässler konnten alle die Reihe bis 20 aufsagen und auch bei einer beliebigen Zahl mit dem Zählen anfangen. Einige von ihnen fanden jedoch das Rückwärtszählen sehr schwierig. Bei Maria konnten wir beobachten, welche Schwierigkeiten beim Erlernen der Zahlwortreihe bis 100 auftreten können.

Es scheint uns wichtig, dass diese Schwierigkeiten als *sprachliche Probleme* behandelt werden und dass daraus nicht abgeleitet wird, es handle sich um ein Kind, das mathematisch besonders unbegabt ist, weil es sogar diese Leistung der Zahlwortreihe nicht erbringt, die den meisten Kindern sehr leicht fällt. Brissiaud (Abschnitt 3.5) gibt einen Hinweis darauf, dass das nicht beiläufige Lernen der Reihe vielleicht die Möglichkeit bietet, die Zahlwörter an strukturierte Mengendarstellungen von Zahlen zu koppeln und dem Kind über die Quantitäten eine Brücke zur Bildung des Zahlwortes zu bauen (im Sinne von: 20 und 5 sind 25; 20 und 6 sind 26).

[7] Dazu auch Abschnitt 3.5

Die gute Beherrschung der Reihe erlaubt bei einigen mathematischen Problemstellungen, wie z. B. beim Zahlenordnen, Lösungen, *ohne die kardinale Bedeutung der Zahlen heranzuziehen*.[8] Eine Integration der sprachlichen Lese- und Schreibregeln mit den nonverbalen Konzepten des Einers, Zehners und Hunderters muss nicht weit fortgeschritten sein, wie die Begründungen zeigen, die die Kinder für ihre richtigen Ordnungen anführen.

Die *gute* Beherrschung der Zahlwortreihe ist mehr als das sichere Aufsagen der Reihe von jedem beliebigen Anfangspunkt aus. Wir konnten beobachten, dass Kinder, die diese Voraussetzung erfüllten, dennoch Probleme beim Ordnen mehrerer Zahlen hatten. Eine gewisse Reflexion der Zahlreihe muss außerdem vorgenommen worden sein: Die Folge der Zahlen von drei (3) bis neun (9) muss in den Zahlen von dreizehn (13) bis neunzehn (19) „entdeckt" worden sein. Die Folge der Zahlen bis 100 muss in Zwanzigerzahlen, Dreißigerzahlen usw. gegliedert worden sein.

Wenn ein Kind wie Kati (zweite Klasse) richtig urteilt, dass 8 kleiner als 12 ist und 12 größer als 11 und dennoch diese drei Zahlkarten nicht in die richtige Reihenfolge bringen kann, so vermutet man, dass eine weitere, in den allgemeinen kognitiven Fähigkeiten des Kindes begründete Schwäche vorliegt. Weil es um Reihenfolgen geht, denkt man an eine Schwäche im serialen Denken auf sprachlich-symbolischer Ebene. Solche Deutungen müssen jedoch mit großer Vorsicht vorgebracht und behandelt werden. Lissi (vierte Klasse) hatte beim Ordnen dreistelliger Zahlen Probleme und erhielt auch nach längeren Bemühungen nicht die richtige Reihenfolge, obwohl sie *Paare* jeweils richtig beurteilen konnte. Aber Lissi hatte bei der testdiagnostischen Untersuchung mit dem K-ABC überhaupt keine Schwäche im serialen Denken (Standardwert 111). Bei dreistelligen Zahlen dürfte *das Wissen über Zahlen* für die Leistung ausschlaggebend sein. Das Handlungsprogramm, das zuerst nach Hundertern ordnet und dann – innerhalb jedes Hunderters – nach Zehnern usw., kann dann entworfen werden, wenn „Hunderter-", „Zehner-" und „Einer"-Stellen eine *Bedeutung* haben, d. h. in den Augen des Kindes einen Unterschied in sich tragen.
Testdiagnostisch zeigt Lissi ausgesprochene Schwächen im ganzheitlichen Denken, was den Schluss erlaubt, dass sie nonverbale Konzepte nicht mühelos bildet. Dazu sind auch die Konzepte von Hundertern, Zehnern und Einern zu rechnen. Das Problem an dieser Stelle zu lokalisieren, oder es in der Schwierigkeit bei der Beachtung von Reihenfolgen zu vermuten, macht einen Unterschied, der sich darauf auswirkt, welche Maßnahmen man für angezeigt hält.

4.4.2 Beispiele zur Zahlverarbeitung

<u>Martin 1</u>

Martin ist 11 Jahre und 9 Monate alt, als er bei uns vorgestellt wird. Er besucht die dritte Klasse einer Sprachheilschule. Da er nicht die Schule vor Ort besucht, ist Martin ein wenig isoliert. Es mag aber auch an seinem ruhigen Wesen liegen. In der gemeinsamen Arbeit ist er kooperativ.
Bei der testdiagnostischen Untersuchung mit dem K-ABC hat er Mühe, eine ihm vorgesprochene Folge von Zahlen verbal zu reproduzieren (Prozentrang 9), eine Reihe von

[8] Auch eine gewisse Kompetenz im Lesen und Schreiben von Zahlen ist vorausgesetzt.

akustisch dargebotenen Namen von Gegenständen kann er sich deutlich besser merken und die Reihe zeigend reproduzieren (Prozentrang 50). In den Untertests zum ganzheitlichen Denken zeigt er durchschnittliche Leistungen. Das Verstehen und Umsetzen von Instruktionen leistet er , im Vergleich mit seiner Altersgruppe, nur unterdurchschnittlich. Im Psycholinguistischen Entwicklungstest stellt sich heraus, dass die automatische Benutzung grammatischer und syntaktischer Regeln nicht altersgerecht ist, ebenso das Erfassen von akustisch signalisierten logischen Zusammenhängen. – Es fällt auf, dass Martins Schwächen alle im sprachlichen Bereich liegen.

Martin zeigt ein gutes Verständnis des Stellenwertsystems, das er auch beim Kopfrechnen im Zahlenraum bis 1000 beweist. Im Zahlenraum bis 100 wendet er eine korrekte Strategie der Addition und Subtraktion an, bei der er beide Zahlen in Zehner und Einer zerlegt. Den Hinweis auf eine vereinfachende Strategie (nur eine Zahl zerlegen) greift er auf und setzt ihn richtig um.

Fehler entstehen auf folgende Weise:

Sie treten auf, wenn das Ergebnis 11 oder 12 lautet oder wenn mit diesen beiden Zahlen gerechnet werden muss. Als Martin eine Reihe von Stockwerken mit je vier Fenstern abzählt, erhält er „zwölf". Anschließend rechnet er „zwölf mal 4 ist zehn mal 4 und ein mal 4". Die Verwunderung der Untersucherin versteht er nicht. Er muss gewissermaßen eine 11 vor sich gesehen haben, als er „zwölf" sagte.

Fehler treten auch beim Zahlenlesen mehrfach auf. Beispiele: Er liest „drei" statt 30; „vier" statt 8; „vierundzwanzig" statt 34. Im Zusammenhang einer Rechenaufgabe bemerkt Martin seine Lesefehler oft nicht. Er scheint sie nur zu bemerken, wenn er sich ganz aufs Lesen konzentriert. Auffallend ist, dass er dennoch mit den richtigen Zahlen rechnet, nicht mit denen, die er vorgelesen hat.

Fehler entstehen auch beim Nennen von Ergebnissen: Nachdem Martin eine Reihe von Geldwerten anhand abgebildeter Scheine und Münzen zusammengerechnet hat, sagt er statt „vierhundertundeine Mark" „einhundertundvier Mark". – Das Ergebnis von 34 + 30 ist „sechsundvierzig". – Martin verdoppelt 90 und erhält „achthundert". Vermutlich verdoppelt er 9 und erhält „achtzehn", das er durch das Anhängen einer Null an „Zehn" in „achthundert" verwandelt.
Diese Fehler korrigiert er nicht spontan, er muss einen Hinweis erhalten, dass etwas nicht stimmt. Martin hat vermutlich weitgehend richtig gerechnet, aber bei der *Produktion des Zahlwortes* ist etwas schief gegangen, was er selbst bei oder nach dem Aussprechen nicht feststellen kann.
Die Aufgabe, ähnlich klingende Zahlwörter anhand von geschriebenen Zahlen zu unterscheiden, gelingt ihm ohne einen Fehler. Wenn er jedoch mit dem Rechnen beschäftigt ist, kann es passieren, dass er z. B. „vier*zig*" und „vier*zehn*" verwechselt (vier*zig* bedeutet ja schließlich vier *Zehner*).

Interpretation:

Da die Übersetzungen zwischen Zahlwörtern und geschriebenen Zahlen bei Martin fehleranfällig sind, schleichen sich beim Rechnen immer wieder Fehler ein, da insbesondere das Kopfrechnen mehrfache Übersetzungen hin und her erfordert.

Simone 2

Simone (13 Jahre, 7. Klasse einer Sonderschule) kann zwei- und dreistellige Zahlen in arabischer Notation richtig lesen, jedoch keine vierstelligen. Sie kann eine vierstellige Zahl auch dann nicht lesen, wenn man ihr eine Hilfestellung bietet: „5784 – die Zahl liegt schriftlich vor – sind „Fünftausend“ und dann diese Zahl 784 – die Ziffer 5 wird zugedeckt – , die du lesen kannst.“ Jetzt kann sie 784 nicht mehr lesen.

Simone kann zweistellige Zahlen nach dem Diktat des Zahlwortes richtig schreiben, jedoch in invertierter Schreibrichtung. Sie fühlt sich dabei nicht sicher.

Gesprochene dreistellige Zahlen kann sie nicht richtig in Ziffernschreibweise übertragen, obwohl sie sie richtig lesen kann und sie unter mehreren geschriebenen Zahlen richtig identifiziert! In der Regel wählt sie die richtigen Ziffern, aber die falsche Zahl der Stellen und die falsche Reihenfolge. Eine systematische Verzerrung ist die, dass der Wortteil „hundert“ durch zwei Nullen ausgedrückt wird:
„zweihunderteinundzwanzig“: Simone schreibt 20012.
„einhundertzwanzig“: Simone schreibt 2100.
„sechshunderteinundvierzig“: Simone schreibt 60051.

Soll Simone aufgrund verschiedener Geldscheine und Münzen Geldbeträge errechnen, berechnet sie die Summen aus Hundertern, Zehnern und Einern getrennt und erhält z. B. 300, 70 und 2. Sie addiert 70 und 2 durch „einundsiebzig, zweiundsiebzig“. Sie versagt, als sie jetzt 300 und 72 rechnen soll.
R. S.:„Wie viel sind 300 und 10?“
Simone: „Dreizehnhundert.“ Sie schreibt 1300.

Interpretationsvorschlag:

Im Laufe ihrer Schulzeit war Simone schon oft mit dreistelligen Zahlen konfrontiert. Unbekannt ist jedoch, ob man auf ihre Schwierigkeiten im Übersetzen gesprochener Zahlwörter eingegangen ist. Die Schule, die Simone besucht, ist dafür bekannt, dass erwartet wird, dass schwache Kinder Einsichten und Fertigkeiten allmählich von selbst entwickeln, wenn sie am normalen Unterricht teilnehmen.

Die Regel, nach der „vierundachtzig“ in eine Kombination aus 4 und 8 ersetzt wird, befolgt Simone mit unsicherem Gefühl, aber oft mit richtigem Ergebnis. Sie kann 384 richtig lesen, in „dreihundertvierundachtzig“ übersetzen, nicht aber umgekehrt. Sie würde vermutlich 30048 oder 30084 schreiben. Sie demonstriert, dass das Zahlenschreiben schwieriger ist als das Zahlenlesen (ähnlich VON ASTER, 1996) und beide Leistungen unverbunden nebeneinander stehen können.

Andrea 4

Andrea ist 9 Jahre alt und geht in die dritte Klasse. Wir stellen eine Reihe von Beobachtungen zusammen, die unserer Meinung nach Andreas Schwierigkeiten in der Zahlverarbeitung belegen.

Beim Zahlendiktat schreibt Andrea achtzehn zwei- und dreistellige Zahlen richtig auf. Sie schreibt zweistellige Zahlen in invertierter Schreibrichtung.
Andrea kann eine gesprochene Zahl unter zwei oder drei geschriebenen Zahlen identifizieren (z. B. „sechsundfünfzig“ unter 65, 650, 56).

Andrea soll von einer mündlich gegebenen, zweistelligen Zahl weiterzählen:
Vorgabe „neunundsechzig“: Andrea fährt fort: „siebenundsechzig, achtundsechzig, neunundsechzig, siebzig, einundsiebzig usw.“
Vorgabe: „achtundsiebzig“. Andrea reagiert mit „siebenundsechzig“ Nach einer langen Pause, in der ich die Zahl „78“ wiederhole, fährt sie richtig fort.
Bei Vorgabe von „neunundvierzig“ fährt Andrea richtig fort.
Bei Vorgabe von „291“ (mündlich) fährt sie fort mit „92, 39“ – ich unterbreche und korrigiere zu 93 – „94, 95, 96“. Ich unterbreche die langsam sprechende Andrea erneut und bitte sie das ganze Zahlwort zu sagen, also „zweihundertsechsundneunzig“. Da verzieht sie das Gesicht, als ob sie weinen wollte. Meine diesbezügliche Frage beantwortet sie jedoch mit „Nein“. Sie bestätigt jedoch, dass sie das Zählen sehr anstrengend finde. Wir hören an dieser Stelle damit auf.

Ist die zweistellige Anfangszahl schriftlich gegeben und soll Andrea die Reihe schriftlich fortsetzen, bereitet ihr dies keine Mühe.

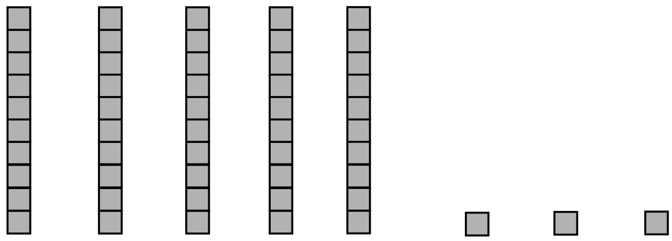
Die Aufgabenstellung „ich sage eine Zahl, z. B. siebenundsechzig. Du sagst die Zehnerzahl zuerst, dann die Einerzahl, also sechzig und sieben“ benötigt eine Vorübung, bei der Andrea nur die Zehnerzahl wiederholt. Andrea sagt, sie wiederhole die Zahl, die ich gesagt habe, bevor sie die Teile vertauscht.

Als Andrea zweistellige Zahlen durch Seguin-Karten darstellen soll, bildet sie zuerst die richtige Kombination aus zwei Einerkarten. Als ich ihr erklärt habe, dass sie aus einer Zehnerkarte und einer Einerkarte gebildet werden sollen, greift sie den Einerwert als Zehnerkarte und den Zehnerwert als Einer, bei der Zahl „47“ also 70 und 4. Sie korrigiert sich selbst. Bei den nächsten Aufgaben greift sie zuerst die Einerkarte und dann die Zehnerkarte. (Sie passt ihre Handlung der Bildung des Zahlwortes an.)

„siebenundvierzig“	$\boxed{7}\ \boxed{4}$	$\boxed{4}\boxed{7}$
„siebenundvierzig“	$\boxed{70}\ \boxed{4}$	Korrektur
„siebenundvierzig“	$\boxed{7}\ \boxed{40}$	$\boxed{40}\boxed{7}$

Abb. 4.51: Andrea legt Zahlen mit Seguin-Kärtchen, Entwicklung ihres Vorgehens.

Beim Übersetzen einer Zahldarstellung durch Zehnerstangen und Einerwürfel in ein Zahlwort zählt sie die Zehnerstangen und Einerwürfel getrennt voneinander in Einerschritten ab und kombiniert die beiden Zahlen dann zu einer zweistelligen Zahl. Dabei spielt die Reihenfolge, in der sie die Zehner und Einer zählt, eine wichtige Rolle: Zählt sie erst die Zehner und dann die Einer, sind im Ergebnis Zehner und Einer vertauscht. Zählt sie zuerst die Einer, dann die Zehner, bringt sie das richtige Zahlwort hervor.



„eins → zwei → drei → vier → fünf → eins → zwei → drei“ ... „fünfunddreißig“

„fünf ← vier ← drei ← zwei ← eins ← drei ← zwei ← eins“ ... „dreiundfünfzig“

Abb. 4.52: Andrea übersetzt Zahldarstellungen in Zahlwörter, das Ergebnis hängt von ihrer Zählrichtung ab.

Vorschlag zur Interpretation:

Andrea kann die gesprochene Zahl sicher in ihre Ziffernschreibweise übertragen. Andere Verarbeitungsweisen fallen ihr schwerer: wenn z. B. bei der Analyse des Zahlwortes zwischen Zehnerzahl und Einerzahl unterschieden werden muss, wie es beim Umstellen von Zehnerzahl und Einerzahl verlangt ist.
Aber auch das Weiterzählen auf verbaler Ebene leistet sie nicht geläufig, es bedeutet Arbeit für sie, die Zahlwortfolge hervorzubringen.

Besonders auffallend ist ihre Bindung an eine gegebene akustische Reihenfolge: Die Reihenfolge zu ändern, bedeutet eine Anstrengung für sie.

Das Zahlwort einer zweistelligen Zahl (siebenundvierzig) ist in ihrer Verarbeitung vermutlich vor allem aus „sieben“ und „vier“ zusammengesetzt. Um die Zahl zu schreiben, muss man nach dieser Analyse nur noch eine Richtung beachten. Diese Regel ist für Andrea deutlich leichter, als die Regel, die zum richtigen mündlichen Weiterzählen befähigt. Das schriftliche Weiterzählen scheint ihr auch leichter zu fallen.

Anni 3

Anni ist 7 Jahre alt und besucht die erste Klasse.
Sie kann Zahlen im Zahlenraum bis 20 richtig lesen, aber sie schreibt die Zahlen zwischen 13 und 19 „lautgetreu“: „Fünfzehn“ wird bei ihr zu 510.

Interpretation:

Wieder finden wir das Phänomen, dass das Übersetzen von Zifferschreibweise in Zahlwort gelingt, das Umgekehrte jedoch nicht. Wir vermuten, dass Annis Zahlenlesen auf einer Verknüpfung von Zeichenkombination (15) und Wort beruht, ohne dass eine Analyse des Wortes mit einer Analyse der Zeichenfolge verbunden würde. Sie nimmt eine globale oder ganzheitliche Zuordnung vor.

Das Wort „fünfzehn“ hört Anni als zwei Wörter, die Bedeutung haben: fünf und zehn. Beide kann sie in Ziffern übersetzen. Aber die Übersetzung der Kombination aus beiden ist nicht der Wortkombination entsprechend gebildet, so aber übersetzt Anni.

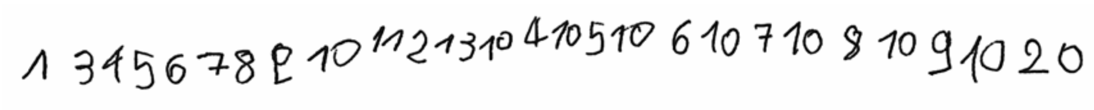


Abb. 4.53: Anni schreibt die Zahlen bis 20.

<u>*Andi 1*</u>

Andi ist fast 9 Jahre alt und geht in die zweite Klasse. Er ist recht klein und zart für sein Alter. Auch am Nachmittag nimmt er das von einer Kinderärztin wegen seiner Unruhe verordnete Ritalin ein; dennoch ist er ein Wasserfall von Einfällen und Fragen und langweilt sich rasch. Meine Aufgaben versieht er rasch mit einer Lösung und möchte dann von mir wissen, ob sie richtig ist. Wie er das Ergebnis gefunden hat, kann oder will er mir nicht darlegen.
Er hat vor wenigen Monaten eine kleine Schwester bekommen, interessiert sich für Störche und dafür, ob ich Kinder habe oder möchte.

Das Lesen von Zahlen bereitet ihm keine Probleme. Wenn Andi Zahlen aufschreibt, die ich ihm diktiere, findet dies stets mit einer kleiner Verzögerung statt.
Die Aufgabe, ein Zahlwort in Zehnerzahl und Einerzahl zu zerlegen, z. B. „zweiundneunzig“ in „neunzig“ und „zwei“ zu verwandeln, fällt ihm schwer. Er macht mehrfach den Einer zum Zehner. Manchmal korrigiert er sich später:
Es gelingt sofort bei „23“ und „19“.
„92“: Andi:„neun und zwei“;
„37“: Andi:„was – siebenunddreißig? – siebzig und drei, – du hast doch 73 gesagt!?“
„85“: Andi: „fünfzig und acht“. Bei Wiederholung richtig.

Oft muss man eine Zahl wiederholen. „Gib mir 35.“ Andi: „Was? 53?“

Lege ich zwei spiegelbildliche Zahlen (47 -- 74) geschrieben vor und sage eine der beiden Zahlen („siebenundvierzig“), kann Andi diese sofort richtig auswählen.

Beim Rechnen mit zweistelligen Zahlen[9] zerlegt er beide Zahlen in Zehner und Einer. Dabei wird mehrfach der Einer der ersten Zahl zum Zehner:

68 – 40 = 32	Andi begründet durch 80 – 40 – 8. Bei Korrektur: 60 – 40 – 8.
24 + 32 =	Andi rechnet 40 + 30.
46 + 10 =	Dies kann Andi nicht sofort ausrechnen.

[9] Aufgabenstellung jeweils schriftlich, aber die Antwort erfolgt mündlich.

Vorschlag zur Interpretation:

Andi muss sich konzentrieren, um ein Zahlwort richtig zu erfassen und zu analysieren. Es scheint, dass schon der „Nachklang“ des Zahlwortes einer zweistelligen Zahl nicht so gut ist, dass er immer daraus rekonstruieren kann, was gesagt wurde. Akustische Aufmerksamkeit stellt subjektiv eine hohe Anforderung an ihn.
Wie wir im einleitenden Beitrag zur Zahlverarbeitung schon erläutert haben, gehen seine Rechenfehler nicht nur auf Lesefehler (Vertauschung von Stellenwerten beim Lesen von Zahlen) zurück, sondern auch auf eine falsche Interpretation von Minusaufgaben. Seine Unfähigkeit, „46 + 10“ spontan auszurechnen, weist außerdem auf Lücken im Stellenwertverständnis hin.

<u>*Elisabeth 3*</u>

Elisabeth steht am Ende der dritten Klasse und ist fast 10 Jahre alt.

Elisabeth liest Zahlen falsch, rechnet aber richtig:

5 + 3 = 8	entsprechend gelesen
50 + 30 = 80	entsprechend gelesen
50 + 3 =	Elisabeth: „50 + 30 = 53“
8 + 50 =	Elisabeth: „8 + 5 = 58“
7 + 4 =	Elisabeth: „7 + 14“
15 + 3 =	Elisabeth: „5 + 13“
6 + 5 =	Elisabeth: „7 + 5“

Einige Male liest sie richtig, aber rechnet als läge ein anderes Operationszeichen vor:
2 + 8 = 16
7 + 3 = 21

Sie errechnet ein Ergebnis, z. B. „74“, um kurz danach zu sagen, das Ergebnis sei „47“. Etwas später stutzt sie und korrigiert sich mit verunsichertem Gesichtsausdruck.
Beim Zahlenlesen und Zahlenschreiben nach Diktat macht sie keine Fehler.

Interpretationsvorschlag:

Wir fragen, ob Elisabeth „74“ und „47“ nicht sicherer unterscheiden könnte, wenn „vierundsiebzig“ eine andere Quantität besäße als „siebenundvierzig“. Eine solche quantitative Assoziation bekommt eine Zahl durch ihre Verbindung mit einer Mengendarstellung.

4.4.3 Beispiele zur Zahlwortreihe

<u>*Maria 5*</u>

Maria (7 Jahre, zweite Klasse) findet es schwierig, die Zahlreihe bis 100 zu lernen. Nicht nur beim Zehnerübergang (von „39“ zu „40“ und von „40“ zu „41“) stockt sie und macht Fehler, sondern auch zwischen den vollen Zehnern ist sie manchmal auf Hilfe angewiesen: Sie zählt bis „35“ und stockt nun. Sie bekommt die Hilfestellung: „Nach fünf kommt ?“ Maria: „Sechs“. R. S.: „Also – sechsund---?“ Maria: „Sechsunddreißig.“

Beim Übergang von 39 zu 40 sagt sie einmal „zehnunddreißig“. Sie lacht darüber, kann sich aber nicht korrigieren.
Die Fortsetzung der Reihe nach 40 kann sie zu „50, 60“ führen.
Wenn sie Zahldarstellungen an der russischen Rechenmaschine ablesen soll, kann es passieren, dass sie „21, 22, 23, 24, 50“ zählt, wenn die fünfte Kugel der dritten Reihe die letzte war.

Interpretation:

Zu dem Phänomen selbst ist nicht viel zu sagen. Von Interesse ist aber, wie es sich auf die Entwicklung des Zahlverständnisses auswirken kann und welche Unterrichtsangebote für ein Kind mit dieser Schwierigkeit gemacht werden sollten. Letztlich käme es darauf an, die Wechselwirkungen zu untersuchen.

<u>*Maria 6*</u>

Maria (7 Jahre, erste Klasse) kann verschieden lange Stäbe der Größe nach ordnen. Sie beginnt beim größten Stab und wählt dann sicher den nächstkleineren. Sie kann den „viertgrößten“ und den „mittleren“ Stab zeigen.

Sie soll dann zwei Stäbe wählen, die zusammen ebenso lang sind, wie ein dritter Stab. Zweimal wählt sie Paare, die – aus Sicht der Untersucherin – in der Summe eindeutig zu lang sind. Dann gelingt die Lösung. Eine zweite Aufgabe dieser Art gelingt zielsicher.

Die Zahlen ab 10 rückwärts aufzusagen, fällt Maria schwer, aber es gelingt ihr mit langen Pausen, in denen sie teilweise die Reihe von vorne aufsagt, um das Zahlwort „vorher“ zu finden.

Zahlenkärtchen ordnet sie der Größe nach wie folgt:

3 5 8 11 12 17 15 14 19

Die Karten 15 und 17 werden herausgegriffen und vorgelegt. Ihr Urteil, dass 15 größer sei als 17 begründet sie so: „Fünf und Eins ist Fünfzehn. Sieben ist nicht mehr als Fünf.“ Hier stutzt sie und korrigiert sich nach kurzem Zögern. Sie nimmt jedoch keine weiteren Korrekturen an der von ihr geschaffenen Folge vor.

Ordnet sie die Karten, während sie die Zahlreihe bis 20 aufsagt, schafft sie die richtige Ordnung.

Interpretation:

Maria kann die Zahlwörter in ihrem Verhältnis zueinander nur dann richtig platzieren, wenn sie hilfsweise die ganze Reihe produziert. Oder sie zerlegt die Zahlen in „1 und 5“ oder „1 und 7“ und führt den Vergleich auf Grundlage der Reihe bis 10. Auch auf dieser Ebene besteht keine unmittelbare Sicherheit.

Man erkennt daran, dass es Repräsentationen der Zahlreihe bzw. des Zahlenstrahls von unterschiedlicher Qualität gibt: Maria kann die Reihe im Ganzen aufsagen, aber zwei herausgelöste, gesprochene oder geschriebene Zahlen nicht spontan ordnen.

Kati 2

Kati (8 Jahre alt, am Ende der zweiten Klasse) ordnet die Zahlen der Größe nach:

19 17 15 14 11 12 8 5 3

Als sie fertig ist, bitte ich sie, nochmals zu schauen, ob alles richtig ist. Kati erwidert, das könne sie nicht. Das müsse die Lehrerin tun.

Wir machen es jetzt gemeinsam, fangen bei der kleinsten Zahl an und schauen, ob die nächste jeweils größer ist. Dabei stellt Kati richtig fest, dass 12 größer als 8, 11 kleiner als 12, 14 größer als 11 ist, aber sie nimmt keine Korrektur ihrer Reihenfolge vor.

Interpretation:

Als wir die Größer/Kleiner-Beziehungen gemeinsam realisierten, bemerkte ich eine gewisse Verwirrung bei mir selbst. Die Ordnung aufgrund von logischen Schlussfolgerungen aus den oben angeführten Urteilen (12 größer 8, 11 kleiner 12, 11 kleiner 14) herzuleiten, ist nämlich nicht leicht. Als Erwachsener hilft man sich bei solchen Urteilen – man ersetze die Zahlen durch Namen – in der Regel so, dass man die Urteile in ein Vorstellungsbild mit linearer Ordnung umsetzt und daraus ableitet, welche Beziehung noch geprüft werden muss. Ein solches Vorgehen überfordert eine Achtjährige. Sie ist darauf angewiesen, die Ordnung auf Grundlage ihrer Beherrschung der Zahlreihe herzustellen. Wenn ihr dann bei der Prüfung „werden die Zahlen immer größer, wenn ich bei 3 anfange und nach links gehe“ nicht ins Auge sticht, dass 12 und 11 vertauscht sind, hat sie keine Chance. Mit Formulierungen wie „Oh, hier geht’s einmal runter statt rauf“ oder „Hier wird’s kleiner statt größer“ oder „Aber die 11 kommt vor 12“ könnte ein Kind ausdrücken, dass etwas nicht stimmt.

Warum kann Kati den Fehler nicht finden? Vielleicht fällt es ihr schwer, die Denkrichtung aufrechtzuerhalten, die sich aus der Aufgabenstellung ergibt, dass die Zahlen sollen immer größer werden sollen.

<u>*Lissi 2*</u>

Lissi (10 Jahre, vierte Klasse) konnte von zwei schriftlich gegebenen, dreistelligen Zahlen immer die größere richtig anzeigen. In ihrer Begründung wies sie auf die maßgeblichen Stellen hin: Bei 657 und 672 sagt sie etwa „hier 5, da 7", um zu begründen, dass 672 größer ist. Sie kann jedoch nicht weiter erläutern, weshalb die Werte an dieser Stelle ausschlaggebend sind.

Das Ordnen mehrerer Zahlen ihrer Größe nach, macht ihr große Schwierigkeiten. Zuerst
entstand: 374 437 674 743 734 74
Dann: 374 437 347 473 674 743 734 74

Beim Vergleich von 437 und 473 erscheinen ihr beide Zahlen auf den ersten Blick gleich, aber sie kann dann das richtige Urteil fällen. Sie ist aber nicht imstande, die ganze Serie zu korrigieren.

Interpretation:

Wir haben schon in der Einführung erwähnt, dass Lissi testdiagnostisch keinerlei Schwäche in der serialen Verarbeitung zeigt (nach dem K-ABC jedenfalls). Sie erreicht darin einen gut durchschnittlichen Standardwert von 111 (Mittelwert 100, Standardabweichung 15). Schwach ist hingegen ihr Ergebnis im ganzheitlichen Denken (Standardwert 76) und darin insbesondere im Räumlichen Gedächtnis (Prozentrang 1!) und in der Fotoserie (Prozentrang 11).

Da Lissi zwei Zahlen jeweils richtig beurteilen kann – auf welcher Grundlage auch immer – , kann man überlegen, dass ihr zur Bewältigung dieser Aufgabe einfach fehlt, dass sie zuerst nach den Hundertern und dann innerhalb der Zahlen mit gleichen Hundertern nach Zehnern ordnet. Eine einzige hierarchische Stufung würde ihr erlauben, alle Zahlen (außer der 74 vielleicht) zu ordnen. Wir vermuten: Um den Größenvergleich vorzunehmen, stützt sie sich allein auf die Reihenfolge der Ziffern, und nicht zusätzlich noch auf das Wissen, dass die Ziffer links die Zahl der Hunderter (zehn mal zehn), die in der Mitte die Zahl der Zehner und die ganz rechts Einer angibt. Es fehlt ein sicheres Stellenwertverständnis, das den verschiedenen Plätzen unterschiedliches Gewicht (Quantität) gibt.
Besteht ein Zusammenhang mit ihrer unterdurchschnittlichen Leistung im Untertest „Fotoserie" des K-ABC, in dem auch eine Serie rekonstruiert werden muss? Ohne ihre Fehler in diesem Untertest zu analysieren, kann keine Antwort gegeben werden. Untersucht werden müsste, ob sie auch in diesen Aufgaben je zwei der Bilder hinsichtlich ihrer Reihenfolge richtig bewerten kann, ob sie an jeder Aufgabe eine Weile arbeitete (wie beim Zahlenordnen) oder ob sie schnell eine Lösung herbeiführte und sie nicht kontrollierte.

4.5 Rechnen

4.5.1 Einführung

> „Die Rechenvorgänge der Addition und Subtraktion hat U. verstanden, sie löste alle Aufgaben richtig. Sie brauchte hierzu kein zusätzliches Material, sie löste die Aufgaben durch Abzählen.“ (aus dem Schulbericht eines Erstklasskindes)

In den vorausgehenden Abschnitten haben wir betont und hoffentlich überzeugend dargestellt, dass die Rechenverfahren der Kinder in engem Zusammenhang mit ihrem Zahlverständnis stehen, das wir in den Abschnitten 4.2 und 4.3 als Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen charakterisiert haben. Wir haben in diesen Abschnitten auch Rechenwege der Kinder dargestellt und unter dem Blickwinkel des Zahlverständnisses beleuchtet. An diese Darstellungen knüpfen wir hier an und ergänzen die Beobachtungs- und Interpretationshinweise um folgende Punkte: „Varianten des Fingerrechnens“ und „Formales versus verständiges Rechnen“.

Varianten des Fingerrechnens

Fingerrechnen und zählendes Rechnen werden konkret unterschiedlich durchgeführt. Die unterschiedlichen Vorgehensweisen sind bedeutungsvoll; sie verweisen auf zugrundeliegende Konzepte (Zahlen und Aufgabenverständnis betreffend) und auf Möglichkeiten der weiteren Entwicklung.

Das Kind kann 9 + 5 rechnen, indem es sagt: „9 -- 10, 11, 12, 13, 14“, wobei es zu den letzten fünf Zahlwörtern jeweils einen Finger streckt. Es steuert und kontrolliert die Zählschritte mit den Fingern, genauer gesagt, mit einem Fingerbild der 5.

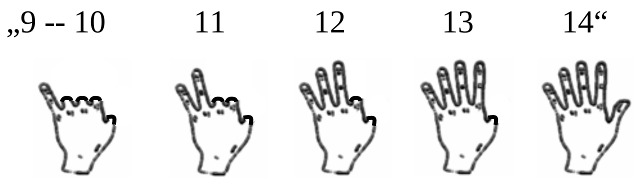


Abb. 4.54: Erste Variante des Fingerrechnens am Beispiel 9 + 5.

Es kann aber auch 5 Finger zeigen und diese dann – bei 10 beginnend – abzählen. Es hat die 5 in fünf Objekte übersetzt und diese dazugezählt. – Nach dieser zweiten Variante ging z. B. Greta vor. Ein anderes Mädchen (Mascha), das nach der ersten oder zweiten Variante vorging, sagte erläuternd: „Ich habe 9 weggelassen und dann 10, 11, 12, 13, 14 gezählt.“ Was bedeutet „ich habe neun weggelassen“? Hat sie 1 bis 9 weggelassen oder „die 9“? Hat sie sich erarbeitet, dass sie auf das Zählen von 1 bis 9 verzichten kann oder gibt sie die Empfehlung fürs zählende Rechnen wieder, die sie erhalten hat?

Nelli zeigte den kleinen Finger der rechten Hand und sagte „1“ dazu. Dann streckte sie nacheinander den kleinen, Ring-, Mittel- und Zeigefinger der linken Hand, wobei sie

„2, 3, 4, 5“ zählte. Anschließend sah sie auf die vier Finger der linken Hand und nannte das Ergebnis „14“.

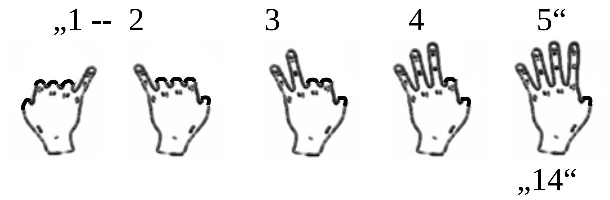


Abb. 4.55: Dritte Variante des Fingerrechnens am Beispiel $9 + 5$.

Diese Varianten[10] setzen unterschiedliche Zahlvorstellungen voraus, belegen ein unterschiedliches Verständnis der Additionsaufgaben und bieten unterschiedliche Reflexionsmöglichkeiten im Hinblick auf die Entwicklung von mentalen Rechenstrategien und im Hinblick auf Zahlbeziehungen. Die dritte Variante erlaubt am ehesten eine Reflexion hinsichtlich des Teile-Ganzes-Verhältnisses von 9, 5 und 14. Auch ist die Strategie der Zehnerergänzung aus dem Bild, das das Kind bei der Lösung herstellt, ableitbar.

Formales versus verständiges Rechnen

Viele Kinder erwerben „formale“ Rechenstrategien ohne zureichende Grundlage im Zahlverständnis, die fehleranfällig sind oder systematische Fehler aufweisen. Es ist bei fehlerhaften Rechenwegen wichtig festzustellen, ob Zahlverständnis vorhanden ist, das auf Zahlebene noch nicht ganz realisiert werden kann, an das aber angeknüpft werden kann. In diesem Fall zeigt das Kind z. B. anhand von Zahldarstellungen durch Zehnersystemblöcke entwickeltere Strategien (Paul und Nelli); oder es stellt Fragen nach Erscheinungen auf der Zahlenebene: Wieso bei $53 - 25$ etwas mit 20 herauskommt, obwohl $50 - 20$ doch 30 ist; warum $29 + 11$ einen glatten Zehner ergibt u. ä.
In vielen Fällen muss man bei fehlerhaften Rechenstrategien jedoch feststellen, dass grundlegende Zahlkonzepte noch kaum entwickelt sind.
Es ist wichtig zu untersuchen, ob das Rechnen als formale Routine (Regeln über die Behandlung von Symbolen) behandelt wird, ob es eine davon getrennte Welt des quantitativen Wissens über Zahlen gibt (Zahlbedeutungen) und wie diese entwickelt ist, ob das Kind im Begriff ist, Verbindungen zwischen der Welt der Symbole und den Zahlbedeutungen herzustellen, d. h. am Übergang zu bedeutungsvollen mentalen Strategien arbeitet.

4.5.2 Beispiele

<u>Anni 5</u>

Anni (7 Jahre, erste Klasse) kann zu jeder Zahl bis 10 spontan (nicht sukzessive) ein Fingerbild zeigen.
Als sie aufgefordert wird, 7 Finger zu zeigen und dann 5 davon wegzunehmen, nimmt sie nach einem kurzen Zögern die linke Hand ihres Fingerbildes weg und liest an den verbleibenden Fingern ab: „noch 2“.

[10] Es gibt noch weitere.

Bei Vorgabe der schriftlichen Aufgabe „7 – 5“ zeigt sie wieder 7 Finger. Dann möchte sie fünf der Finger abzählen, sie benutzt dabei ihre rechte Hand, die am Fingerbild der 7 mit zwei Fingern beteiligt ist. Beim Zählen benutzt sie aber auch die gekrümmten Finger, die nicht zum Fingerbild gehören. Am Ende bleiben 5 Finger gestreckt, Anni entnimmt als Ergebnis „fünf“. Bei der Wiederholung benutzt sie keine nicht zum Fingerbild gehörende Finger und erhält das Ergebnis „3“.

„5 + 2“ Anni zeigt 5 Finger einer Hand, an der anderen Hand 2 Finger. Dann zählt sie alle gestreckten Finger, um das Ergebnis zu erhalten. So geht sie bei allen Aufgabenstellungen im Zahlenraum bis 10 vor.

„10 + 4“ Anni zählt an den Fingern von 1 bis 10 und setzt dann das Fingerzeigen und Zählen fort bis 14. Sie kann nicht sagen, warum sie gerade bis 14 gezählt hat.

Als Anni gerade 4 Finger zeigt, wird sie gefragt: „Wie viele fehlen von 4 bis 10?“ Sie muss sehr lange nachdenken und findet es nicht heraus.
Als ich die Frage abwandle zu „wie viele Finger musst du noch strecken, damit 10 Finger gestreckt sind?“, gibt sie – auch bei anderen entsprechenden Aufgabenstellungen – spontan die richtige Antwort.

Vorschlag zur Interpretation:

Die erste Diskrepanz: Anni kann Fingerbilder zu Zahlwörtern spontan assoziieren. Aber beim Rechnen einer schriftlich vorgelegten Aufgabe, ordnet sie dem Bild der 7 nicht spontan das Zahlwort zu, sondern stellt die Zahl der Finger zählend fest. Die abgezählte Fingermenge und das ganzheitlich einem Zahlwort zugeordnete Fingerbild sind in ihrer Konzeptbildung noch getrennt.

Zweite Diskrepanz: zwischen der Aufgabe „Nimm 5 von 7 Fingern weg“ und „7 – 5“. Wir ordnen diese Schwierigkeit einerseits dem Operationsverständnis zu, andererseits scheint eine Diskrepanz zwischen dem Verständnis von 7 Fingern und der Ziffer 7 zu bestehen. Wenn von Fingern die Rede ist, scheint es auf die Reihenfolge nicht anzukommen, sie sind eine Menge von Gleichen. Sobald Ziffern ins Spiel kommen, beachtet Anni „vorn“ und „hinten“, vermutlich eine Reaktion auf den Zahlenstrahl oder die Zahlreihe.

Ähnlich auch die Diskrepanz bei der letzten Aufgabe: Sie kann 4 Finger auf 10 Finger ergänzen, wenn sie ihre Hände anschaut. Wenn sie sich die Sache für „reine“ Zahlen überlegt, ist das sehr schwer.

Anni zeigt „10“ durch die Finger ihrer beiden Hände. Aber beim Rechnen von „10 + 4“ zeigt sie nicht simultan beide Hände, sondern sie zählt die Finger von 1 bis 10. Die Assoziation des Fingerbildes zum *Zahlwort* zehn hat offenbar andere Qualität als die Realisation der 10 im Rahmen einer *Rechen*aufgabe.

Es ist nicht leicht, sich auf die Unterschiede, die Anni macht, einen Reim zu machen. Aber es wird deutlich, dass sie am Zahlbegriff arbeitet. Sie hat zu Zahlwörtern und Zahlen (als Ziffern) verschiedene Ideen, die nebeneinander existieren. Sie muss Zahlen in Anschauliches übersetzen, um damit umgehen zu können. Ihre Anschauung der Fingerbilder schwankt zwischen der Wahrnehmung als Menge und als Zahlreihe. Wie soll in dieser Situation eingegriffen werden?

Andrea 5

Andrea (9 Jahre, 3. Klasse) rechnet „6 + 7“ so: Sie zeigt ein Fingerbild der 6 und fügt dann sukzessive 7 weitere Finger hinzu. Sie zählt dabei von 1 bis 7. Als beide Hände „voll“ sind, benutzt sie die linke Hand ein zweites Mal. Als sie 7 zugefügt hat, prüft sie noch einmal nach, indem sie wieder jeden Finger (ab dem siebten) einzeln berührt.
An den drei Fingern, die zuletzt an der linken Hand gestreckt sind, liest sie das Ergebnis spontan ab.

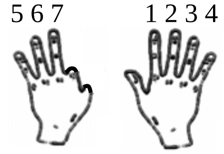


Abb. 4.56: Andrea rechnet 6 + 7.

Interpretationsvorschlag:

Andrea arbeitet mit ihren Fingern, als lege sie sich erst 6 und dann noch 7 Dinge bereit. Gewisse Assoziationen zwischen Fingerbild und Zahl sind sicher: 6 Finger kann sie spontan zeigen und 3 Finger sind mit 13 verknüpft. Aber die 7 werden einzeln zugefügt, eine Zerlegung der 7 in 4 und 3 findet weder auf der Ebene des Fingerzahlbildes statt, noch wird sie anschließend reflektiert, was sich u. a. in der Art ihrer Kontrolle zeigt.

Man möchte wissen, welches bleibende Bild sich für Andrea ergeben haben mag, aus dem sie bei der nächsten Konfrontation mit derselben Aufgabe die Lösung rascher gewinnen könnte? Gibt es einen Hinweis auf eine Reflexion des gesamten Zusammenhangs, in dem die Zerlegung von 7 Fingern in 4 und 3 Finger konstruiert wurde? Was müsste geschehen, damit Andreas Bemühung um die Lösung dieser Aufgabe einen bleibenden Effekt hätte?

Franziska 3

Franziska (9 Jahre, dritte Klasse) verwendet beim Rechnen im Zahlenraum 20 ihre Finger. Sie verwendet dabei die Zahlzerlegungen im Zahlenraum bis 10, die sie weitgehend spontan herstellen kann, und das Wissen über die Zehn in den Zahlen zwischen 10 und 20. Dazu einige Beispiele.

Franziska weiß sofort die Antwort auf die Aufgabe: „Franziska hat in einer Tasche 10 Bonbons. In einer anderen Tasche hat sie noch ein paar. Insgesamt sind es 17 Bonbons. Wie viele sind in der zweiten Tasche?“

„13 + 4“	Franziska zeigt drei Finger und fügt vier hinzu. Sieben Finger bedeuten in diesem Kontext 17.
„7 + 6“	Franziska zeigt 7 Finger. Bei 7 Fingern sind noch 3 übrig, überlegt sie. Und 3 sind 6. Jetzt sind (an der linken Hand, die ein zweites Mal verwendet wird) 3 Finger zu sehen, das bedeutet jetzt 13.
„8 + 9“	Obwohl die vorausgehende Aufgabe 8 + 8 hieß, rechnet Franziska auch diese Aufgabe mit Verwendung der Finger durch Ergänzung auf 10, dann auf 15: „2 und 5 dazu sind 7, und 2 dazu“ – zwei weitere Finger werden gestreckt – „sind – ich sehe 7 Finger, also ist das Ergebnis 17“.
„ 1 + 5“	löst Franziska unmittelbar.
„11 + 5“	löst sie mit Hilfe der Finger.
„15 – 5“	löst Franziska unmittelbar.
„16 – 5“	löst sie mit Hilfe der Finger.
„12 – 4“	Franziska zeigt zwei Finger an einer Hand, um 12 anzuzeigen. Sie klappt diese Finger weg. Dann klappt sie an der anderen (rechten) Hand noch zwei Finger (kleiner Finger und Ringfinger) weg. Aus dem Resultat schließt sie das Ergebnis.
„20 – 9“	Franziska zeigt 10 Finger. Von rechts her zählt sie neun Finger ab. Bleibt noch einer. Also ist die Antwort 11.

Vorschlag zur Interpretation:

Franziska hat für jede Zahl bis 20 ein Fingerbild verinnerlicht. Das Bild für Zahlen zwischen 10 und 20 weist eine Zerlegung der Zahl in 10 plus den Rest auf: 13 wird dargestellt durch 3 Finger (wie das Bild der 3). Franziska behält aber im Sinn, dass noch 10 dazugehören. Sie weiß 17 = 10 + 7 auch in anderen Kontexten.

Sie *rechnet* mit den Fingern. Dabei kommen die Fingerbilder zur Anwendung: Sie zeigt die erste Zahl als Fingerbild und fügt die zweite hinzu oder nimmt sie weg, wobei sie eine Richtung einhält, die ihren Fingerzahlbildern entspricht. Beim Hinzufügen und Wegnehmen zerlegt sie die zweite Zahl entsprechend der Strategie der Zehnerergänzung.

Bemerkenswert ist, dass sie 1 + 5 und 15 – 5 unmittelbar löst, aber 11 + 5 und 16 – 5 mit Hilfe der Finger. Obwohl also die Struktur ihrer Fingerbilder die Analogien in den beiden Dekaden scheinbar offensichtlich macht, nimmt sie keinen solchen Schluss vor. Wie kann man dies begründen? Franziska ist ein impulsives Mädchen mit vielen Einfällen und entsprechend kurzer Konzentration für mathematische Zusammenhänge. Es ist denkbar, dass sie einfach noch nie „aufmerksam“ wurde, dass 11 + 5 an ihren Fingern genauso behandelt wird wie 1 + 5.

Überlegt man sich, wie es zum unterschiedlichen Vorgehen bei „15 – 5“ und „16 – 5“ kommt, bietet sich eine weitere Erklärung an: 16, das sind für Franziska nicht 10 unsichtbare und 6 sichtbare Finger, sondern die sichtbaren Finger stehen für die Zahlen von 11 bis 16. Bei Minus müssen Zahlen von „hinten“ weggenommen werden. Man kann nicht irgendwelche 5 Finger wegnehmen. Anders formuliert: Es müssen der 16., 15., 14., 13. und 12. Finger weggenommen werden. Diese Bindung an eine verborgene Reihenfolge bringt die *Bindung an den Zahlenstrahl* zum Ausdruck. Diese Bindung verhindert auch, dass Franziska eine andere Strategie als die des Zehnerübergangs durch Zerlegen des Rechenschrittes anwendet.

Franziska zeigt Ansätze einer Behandlung von Zahlen als Teile anderer Zahlen, ist aber in mancher Hinsicht noch im mentalen Zahlenstrahl verhaftet. Ein Grund dafür, dass der Schritt noch nicht ganz vollzogen ist, kann das Nicht-Nachdenken über ihre Vorgehensweisen sein, vielleicht aber auch eine ausbleibende geeignete Anregung.

<u>*Nelli 1*</u>

Nelli ist 11 Jahre alt und besucht die vierte Klasse. Sie ist die älteste von drei Geschwistern. Ihre Kindheit war belastet von einer Krankheit der Mutter. Sie hat außerdem zwei Schul- und Klassenwechsel erlebt und findet in ihrer Klasse wenig Anerkennung und Freundschaft unter den Mädchen.
Nellis Mathelehrerin ist davon überzeugt, dass Nelli eine Förderschule besuchen sollte.
Nellis Mutter ist vorwiegend besorgt um Nelli. Dennoch fällt es ihr schwer, die Tochter regelmäßig zu den Förderstunden zu bringen.
Nelli zeigt eine zugewandte und offene Haltung. Sie wirkt vertrauensvoll, ohne jede Distanzlosigkeit. Während der Stunden ist sie ausnahmslos aufmerksam, kooperativ und anstrengungsbereit. Wenn sie ihre Denkvorgänge schildert, zeigt sie stets ein gewisses Selbstvertrauen. Sie bittet um Rückmeldungen und toleriert eigene Fehler mit Lächeln, bleibt offen für Hilfestellungen.

Nelli kann viele Basisfakten (der Addition und Subtraktion) sofort oder mit geringer Verzögerung nennen. Manchmal aber nicht: „Von 9 bis 14 fehlen?“
Nelli streckt den kleinen Finger der rechten Hand und sagt „eins“. Dann streckt sie nacheinander Finger der linken Hand, während sie zählt: „zwei, drei, vier, fünf“.

61 – 4 =	Nelli zeigt den Einer mit der linken Hand und klappt ihn weg. Dazu sagt sie „eins“. An der rechten Hand streckt sie die Finger und klappt drei weitere Finger weg, indem sie „zwei, drei, vier“ zählt. Dann sind noch 2 Finger gestreckt, die Nelli mit „7“ verbindet und zum Ergebnis „57“ ergänzt. Nelli kann die Überlegung auch ohne Finger durchführen.

Interpretationsvorschlag:

Um von 9 bis 14 zu ergänzen, zählen viele Kinder „10, 11, 12, 13, 14“, während sie dazu jeweils einen Finger mehr strecken, um dann an den fünf Fingern das Ergebnis abzulesen.
Nelli hingegen benutzt ihre Fingerzahlbilder von 9 und 14, sie ergänzt das Bild der 9 zum Bild der 14 und zählt die dafür benötigten Schritte. Wenn sie die Lösung ohne Finger nachvollzieht, wird deutlich, dass sie in den Schritten „1 plus 4“ denken kann, nicht einzeln zählen muss.
Nellis Vorgehen ist vermutlich ein besserer Ausgangspunkt für die Reflexion der Zahlbeziehungen zwischen 9 und 14 als das alternative Vorgehen, das wir anfangs geschildert haben.

Ihr Vorgehen bei 61 – 4 ist entsprechend. Es ist Ausdruck einer Repräsentation der Hundertertafel.

<u>*Kati 3*</u>

Kati (8 Jahre, zweite Klasse) rechnet die Aufgabe 16 + 6 auf folgende Arten:

16 + 6 = 22	durch Weiterzählen von 16 um sechs Schritte.
16 + 6 = 11,	da „6 + 6 = 12, plus 1 gleich 11“ (später zu 13 korrigiert).
16 + 6 = 22,	da „6 + 6 = 12, das stimmt aber nicht, ich streiche die 1 durch und ersetze sie durch 2“.

Kati kann nicht entscheiden, ob das zweite oder das dritte Vorgehen richtig ist. Wenn sie zählt, ist sie sicher.

Interpretation:

Kati gibt ein Beispiel für „formales“ Rechnen. Es ist deutlich, dass sie versucht ein Prozedere nachzuvollziehen, dessen Grundlage sie nicht konstruiert hat. Sie kann in der 1 der 16 keine 10 sehen.
Ihre nicht-zählenden Lösungsansätze sind offensichtlich nicht aus der zählenden Lösung entwickelt. Sie gehen vermutlich auf Instruktion zurück. Kati zeigt, wie ein Entwicklungsweg – zählendes Rechnen – stecken bleibt und getrennt davon ein anderer – das formale Rechnen – gestartet wird. Wird niemand auf ihr Dilemma aufmerksam, ist sie zum Scheitern verurteilt.

<u>*Tommi 3*</u>

Tommi (9 Jahre, dritte Klasse) rechnet 17 – 9 = 12.
Er erklärt dazu, er habe sich die 1 „weggedacht“; „6 minus 9 ist 3, 7 ist eins mehr als 6, deshalb von 3 eins weg, gibt 2, die 10 wieder dazu gibt 12.“

Interpretation:

Kann man die Quelle von Tommis Fehlers darin sehen, dass er 7 und 9 vertauscht, also eigentlich 19 – 7 rechnet? Es fällt aber auf, dass er jeweils in der gegebenen Reihenfolge liest: „ 6 minus 9“ ersetzt „7 minus 9“. Warum bemerkt er dies nicht?
Eine andere Annäherung ergibt sich daraus, „dass er die 1 weglässt“, also die erste Zahl nicht als Ganzes interpretiert: „10 und 7 hier, davon 9 weg – das muss weniger als 10 werden!“ Bei dieser Überlegung könnte der Fehler, den Tommi auch bei einer Prüfung und Erläuterung seines Vorgehens nicht korrigiert, eigentlich nicht passieren.

<u>*Britta 2*</u>

Der Lehrer von Britta (9 Jahre, dritte Klasse) hat ihrer Mutter gesagt, dass Britta für Mathematik keine Begabung habe. Beim Abfragen der Basisfakten machen wir folgende Beobachtungen:

5 + 7 = 14 weil 6 + 7 = 15, abgeleitet aus 6 + 6 = 16. Auf die Frage nach alternativen Lösungswegen nennt Britta: „7 + 3 + 2“ und (nach längerem Überlegen): „5 + 5 + 2“.

6 + 9 = 15 Britta begründet die lange Lösungszeit damit, dass sie versuchte, die Lösung aus 9 + 9 = 18 abzuleiten. Dann aber wählte sie den Weg: 9 + 1 = 10; 10 + 5 = 15.

9 – 5 = 6 Britta nennt das Ergebnis und stutzt sofort: „Wie? 6 + 5 gibt nicht 9!“ Sie korrigiert sich.

5 + 9 = 15, nee 14,... weil 9 + 1 = 10 und 10 + 5 = 15, nee: 10 + 4 = 14.

9 – 6 = 4 Britta korrigiert sich nach kurzem Zögern: Sie habe überlegt, wie viele von 6 bis 9 fehlen, dachte an 6 + 4 = 10 und habe deshalb zuerst 4 gesagt.

Vorschlag zur Interpretation:

Britta ist schwach beim Abrufen der Basisfakten. Das ist in der Mitte des dritten Schuljahres nicht „gut“. Dennoch finden wir ihre Leistung vielversprechend, weil sie sich um Rechen- und Ableitungsstrategien bemüht. Sie kann zu einer Aufgabe verschiedene Lösungswege angeben, wobei sie verständige Kenntnis der Zahlzerlegungen zeigt. Sie prüft ein Ergebnis, indem sie eine Umkehraufgabe bildet. Diese Hinweise sollte ein Lehrer nicht übersehen und schon gar nicht gering schätzen: Sie bedeuten mehr als rein auswendig gelernte Basisfakten.

Peter 7

Peter (9 Jahre, zweite Klasse) rechnet mit zweistelligen Zahlen:

„53 – 10“ Peter: „ 43. Nur die 5 wird weggemacht. Die 10 sagt zur 5, sie soll mal weggehen.“

„36 – 10“ Peter will die Finger nehmen. Es wird ihm vorgeschlagen, die 36 durch Zehnersystemblöcke darzustellen. Peter legt die Zahl, wobei er die Stangen und Würfel horizontal anordnet (Abb. 4.57). Dann nimmt er eine Zehnerstange weg und liest das Ergebnis ab.

Abb. 4.57: Peter stellt „34“ mit Zehnersystemmaterial dar (horizontale Anordnung)

Nach der Lösung von 84 – 30 auf Grundlage einer Zahldarstellung durch Zehnersystem-Blöcke löst Peter die Aufgabe 84 + 10 mit folgender Begründung: „Oh ja, das weiß ich gleich: weil 80 und 10 ist einer mehr, ist 90, und die 4 bleiben natürlich.“ Auf die Frage, wie er es einem jüngeren Kind erklären würde, antwortet Peter: „Man nimmt einen Stab, wenn man gleichzeitig 10 will.“

„34 – 8“ Peter weiß nicht, wie er nach der Zahldarstellung durch ZSB weiter verfahren soll. Ich spreche von der Möglichkeit des Umtauschens und nehme einer Zehnerstange in die Hand. Peter sagt darauf sinngemäß, es ginge, wenn man die Stange gegen 10 Einer tauschen würde. So findet er die Lösung.

„30 – 4“ Peter legt drei Zehnerstangen, wieder zu einer horizontalen Linie. Er bedeckt die Stangen ganz mit Einerwürfeln. Davon nimmt er die letzten 4 weg (von rechts her).

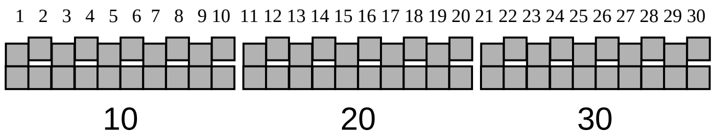


Abb. 4.58: Peters Arrangement, als er „30 – 4“ mit Zehnersystem-Blöcken löst.

Jetzt fragt er: „Soll ich ab 29 rechnen?“ Ihm wird vorgeschlagen: „Du kannst auch schauen, wie viele noch da sind.“ Daraufhin zählt er in Zehner- und Einerschritten und erhält das richtige Ergebnis.

Peter weiß nicht, wie viel 57 mehr ist als 40. Nachdem er 57 durch Geld dargestellt hat, empfehle ich ihm, 40 zur Seite zu legen und den Rest zu bestimmen. Das gelingt.

Peter soll jetzt feststellen, wie viel 35 mehr ist als 20. Er legt 35 als Geldbetrag aus drei Zehnern und einem Fünfmarkstück. Er legt zwei Zehner zur Seite. Dann nimmt er den dritten Zehner und zählt von 21 bis 30. Anschließend greift er nach dem Fünfmarkstück und zählt von 31 bis 35. Als Ergebnis erhält er „35“.

„21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35“

Abb. 4.59: Peter versucht zu bestimmen, wie viel 35 mehr ist als 20.

Vorschlag zur Interpretation:

Die Begründung der Lösung für 53 – 10 könnte eine Umschreibung des Wissens sein, dass 5 in „53“ für 5 Zehner steht. Wenn Peter aber die entsprechende Aufgabe 36 – 10 nicht lösen kann, werden wir darin unsicher. Auf Grundlage von Zahldarstellungen durch ZSB kann er nicht nur richtige Lösungen herbeiführen, sondern auch Reflexionen darüber anstellen, in denen er Zahlbeziehungen mit dem ZSB-Material verknüpft: „80 und 10 ist einer mehr, ist 90“ und „man nimmt einen Stab, wenn man gleichzeitig 10 will.“

Bei der Aufgabe 34 – 8 zeigt Peters anfängliche Ratlosigkeit nach der Zahldarstellung durch ZSB, dass er die Darstellung der 34 durch 3 Stangen und 4 kleine Würfel nicht verändern kann. Das Stichwort „Umtauschen“ löst aber gleich den Gedanken aus, dass man die Zehnerstange gegen 10 Einer tauschen könnte. Er weiß, dass eine Zehnerstange zehn einzelnen Würfeln entspricht.

Bei der Aufgabe 30 – 4 tauscht Peter selbständig um, aber er tauscht jeden der drei Zehner um. Wir verstehen dies so, dass er die Reihe „10, 20, 30“ durch die Reihe von 1 bis 30 ersetzt. Nachdem er vier Würfel weggenommen hat, fragt er, ob er bei 29 anfangen solle. Er denkt offenbar daran, das Ergebnis zu bestimmen, indem er rückwärts zählt und weiß nicht, ob er mit „30“ oder mit „29“ starten muss. Vielleicht ist er verwirrt durch die Tatsache, dass er den dreißigsten Würfel zuerst weggenommen hat, aber beim Rückwärtszählen mit der nächstkleineren Zahl anzufangen pflegt.
Wir meinen, dass er wieder einen Hinweis darauf gibt, dass er die Zahldarstellung als Zahlreihe von 1 bis 30 sieht. Er hat nicht einfach vier weggenommen, sondern 30, 29, 28 und 27.

Seine Sichtweise demonstriert er erneut, als er bestimmt, wie viel 35 mehr ist als 20. Es gelingt ihm diesmal nicht, was er bei der Blumenladenaufgabe (Beispiel Peter 2) hinbekommen hat: die Zahlreihe von 1 bis 35 zu zerlegen in die Abschnitte 1 bis 20 und 21 bis 35 und dann die Zahlen im letzten Abschnitt zu zählen. Er bemerkt nicht, dass er sie nur aufzählt, nicht abzählt.

Interessant ist, dass er den (dritten) Zehnmarkschein nicht in „10 viele“ verwandelt, sondern in die Zahlreihe von 21 bis 30.
Es ist vielleicht wichtig, auf folgendes hinzuweisen: Peter kann Zahlen als Zehner-Einer-Kombinationen darstellen, er weiß, wie viele Zehnersymbole er nehmen muss und wie viele Einersymbole. Aber er sieht in diese Darstellungen die Zahlreihe hinein, die die hervorragende Zahlbedeutung ist, die er bisher konstruiert hat.
Peter kann 10 + 5 unmittelbar lösen. Seine umständliche Lösung ist nicht auf ein fehlendes Basiswissen zurückzuführen. Aber er kann die Zahl 35 noch nicht spontan in 20 und 15 zerlegen, da seine Zahlrepräsentation die Zahlreihe von 1 bis 35 ist.

Peter macht den Eindruck eines aufgeweckten und nachdenkenden Kindes; man ist zuversichtlich, dass er sich die Mathematik erobern wird. Aber es ist wichtig für ihn, dass seine Lehrer ungefähr einschätzen können, an welchem Punkt seiner Entwicklung er sich befindet. Seine erfreuliche Eigenständigkeit im Denken sollte anerkannt und unterstützt werden und nicht durch die Einübung von Rechenprozeduren abgewertet und entmutigt werden.
Wie kann man ihn in dieser Situation unterstützen?

<u>*Lissi 3*</u>

Lissi (10 Jahre, 4. Klasse) löst Aufgaben mit zweistelligen Zahlen:

68 – 40 = 28	weil: „8 – 0 = 8 6 – 4 = 2“
28 + 16 = 44	weil: „8 + 6 = 14, 2 + 1 = 3, von den 14 zehn bei drei dazu. “
39 + 15 = 44	weil: „9 + 5 = 14, 30 + 10 = 40“
71 – 14 = 67	weil: „1 – 4 geht nicht, 11 – 4 gleich 7, sieben minus zehn ist sechzig“.
53 – 25 = 38	weil: „3 – 5 geht nicht, 13 – 5 gleich 8, 5 minus 2 gleich 3“.

Interpretation:

Lissi rechnet mit den Zehner-Ziffern und Einer-Ziffern getrennt. Oft verbalisiert sie die Zehner-Ziffer nicht durch eine Zehnerzahl. Manchmal entstehen eigenartige Mischungen, die zeigen, dass sie die Zehnerziffer durchaus als Zehnerzahl begreift.
Bei guter Konzentration weist die Bearbeitung von Additionsaufgaben einen Schritt auf, in dem 10 Einer in einen Zehner verwandelt werden (von 14 zehn bei drei dazu). Bei Ermüdung, am Ende einer Stunde, entfällt dieser Schritt (39 + 15 = 44).

Systematisch falsch rechnet sie bei Subtraktionsaufgaben: Sie beachtet die Reihenfolge der Stellenwerte und bemerkt richtig, dass 1 – 4 nicht geht, also 11 – 4 gerechnet werden muss. Ihr weiteres Vorgehen zeigt, dass dies für sie nicht bedeutet, dass ein Zehner von den 7 Zehnern genommen und in 10 Einer aufgelöst wurde (71 als 6 Zehner und 11 Einer oder als 60 und 11).

Wir vermuten: Lissi rechnet vorwiegend „formal“. Ihre Rechenschritte sind nicht mit angemessenen Zahlvorstellungen und Zahlzerlegungen verbunden. Zehner und Einer sind nicht reversibel aufeinander bezogen. So schleichen sich immer wieder Fehler ein, die sie nicht bemerken kann.

<u>Britta 3</u>

Bei der Subtraktion von Einern von einem vollen Zehner bestimmt Britta (gerade 9 Jahre alt, dritte Klasse) den Einer rasch und richtig. Für den Zehner braucht sie länger und macht gelegentlich einen Fehler.

40 – 8 = „zweiund .... dreißig“
Sie erklärt ihre Lösung so: „8 und 2 ist 10. “
R. S.: „Ja, aber wie bist du auf zweiund*dreißig* gekommen?“
Britta: „Unter der 10 sind keine Zehner mehr, aber unter der 40.“
R. S.: „Wie viele Zehner sind unter der 40?“
Britta (etwas verunsichert): „Zwanzig?“

Interpretationsvorschlag:

Wir vermuten, Britta meint die Zehnerzahlen (10, 20, 30, 40), wenn sie von „Zehnern“ spricht. Wir überlegen weiter: Wenn ihre Überlegung 8 + 2=10 eingebettet wäre in die Idee, dass sie 40 in 30 (Einer) und 10 (Einer) zerlegt, wäre sie nicht unsicher. Sie zieht die Aufgabe „10 – 8“ heran, ohne die Analogie auf diese Grundlage zu stellen.

<u>Elisabeth 4</u>

Elisabeth (fast 10 Jahre, Ende der dritten Klasse) rechnet so:

40 – 8 = 36 Elisabeth rechnet rückwärtszählend. Als sie es mir vorführt, bemerkt sie ihren Fehler. Die Wiederholung führt zum Ergebnis „33“.

70 – 6 = 66 Auch hier hat Elisabeth rückwärts gezählt, die Wiederholung führt zu einer Korrektur (64). Als ich nach einer anderen Erklärung für das Ergebnis frage, sagt Elisabeth nach einer Pause: „4 + 6 = 10“.

Aufgaben wie 8 + □ = 10, 2 + □ = 10 und 10 – 6 = □ löst Elisabeth unmittelbar.

Interpretationsvorschlag:

Man nennt dieses Phänomen gerne „Versagen in der Analogiebildung“. Aber man fragt selten, was eigentlich die Voraussetzungen dieser Analogiebildung im Besonderen sind, bei der man 8 + 2 = 10 mit 40 – 8 in Verbindung bringt. Man muss 40 als 30 und 10 verstehen, 34 als 30 und 4. Aber für Elisabeth ist die Beziehung zwischen 30 und 40 durch 31, 32, 33, 34, ... , 39, 40 hergestellt. Vielleicht könnte sie auf die Frage, wie viel man zu 30 zufügen muss, um 40 zu erhalten, richtig antworten. Vielleicht würde sie aber nur auf Grundlage des Wissens handeln, dass 30 und 40 Zehnerzahlen sind. Vielleicht wüsste sie wirklich, dass 10 Dinge hinzugefügt werden müssen. Aber diese sind in der 40 dann in 31, 32, 33, 34, ... , 39, 40 verwandelt. Es ist nicht leicht, 40 tatsächlich als 30 und 10 zu denken.

<u>Britta 4</u>

Britta rechnet 400 – 8 = 392.
Sie wird gefragt, wie sie es herausgefunden hat. Sie erwidert: „302 wäre falsch. “

Sie kann ab 47 in Zehnerschritten zählen und gelangt ohne Fehler bis 107. Dann fährt sie fort mit 207, 307. Sie begründet es damit, dass 107 + 3 = 200 ist.

Interpretation:

Britta hat eine korrekte Unterschreitung des Hunderters gelernt, ohne zu realisieren, dass ein Hunderter in zehn Zehnerschritten durchschritten werden muss. Sie war dankbar dafür, als sie – nach der Untersuchung bei uns – sich die Zahlen durch Zehnersystemblöcke darstellen durfte. Nach Aussage ihrer Mutter gewann sie dadurch rasch an Sicherheit im Umgang mit Zahlen.

<u>Nelli 2</u>

Nelli (11 Jahre, 4. Klasse) löst 600 – 8 = 592. Sie löst alle Aufgaben dieser Art richtig.
Sie wird gefragt, wie sie es herausgefunden hat: Nelli denkt ein wenig nach und sagt dann: „Ich habe 60 – 8 gerechnet, 60 – 8 = 92. “
Ich weise sie darauf hin, dass sie kurz zuvor gerechnet hat, dass 60 – 9 = 51 ist.
Nelli denkt wieder lange nach: „60 – 8 = 52, aber bei dieser Aufgabe muss 9 an die Stelle der 5. “ Dann müsse man noch 6 – 1 rechnen.

Nelli soll jetzt 600 mit Zehnersystemblöcken darstellen. Sie wählt 6 Hunderterplatten. Sie soll jetzt „minus 8“ rechnen. Nelli schlägt spontan vor, einen Hunderter umzutauschen: Sie wählt 9 Zehner und 10 Einer. Anschließend nimmt sie 8 Einer weg.
Als sie das Ergebnis nennen will, sagt sie „52“.

Interpretationsvorschlag:

Dieses Beispiel von Nelli zeigt, dass sie mit Zehnersystem-Blöcken den komplexen Aufbau der Zahl 600 handelnd realisiert: 5 Hunderter, 9 Zehner und 10 Einer. Sie kann dieses Wissen jedoch nicht verbalisieren. Während wir nicht wissen, ob sie jemals danach gefragt wurde, *wie* sie ein Ergebnis herausgefunden hat, und eine Verbalisierung überhaupt erwerben konnte, kann diese Diskrepanz auch darauf hinweisen, sie die Zahl 600 in Symboldarstellung nicht in dieser Weise *denken* kann.

<u>*Paul 1*</u>

Paul ist ein wortkarger Junge von 9 Jahren (3. Klasse). Er soll von Anfang an nicht gerne in die Schule gegangen sein und immer versuchen, Anstrengungen zu vermeiden. So erfährt die Untersucherin von seiner Mutter, ihrem Lebenspartner (der nicht Pauls Vater ist) und von der Großmutter. Man müsse immer hinterher sein. Die Untersucherin kann nachvollziehen, dass Paul durch dieses Drängen immer wieder veranlasst wird, sich zurückzuziehen und sich zu verweigern. Sie fragt sich, ob Pauls Schwierigkeit, seine Gedanken auszudrücken, ein sprachliches Problem darstellen oder im Beziehungsproblem begründet sind.
Die testpsychologische Untersuchung mit dem K-ABC hat ein homogenes, gut durchschnittliches Ergebnis, ausgenommen die Leistung im Untertest „Rechnen“ , die mehr als zwei Standardabweichungen unter den Ergebnissen des restlichen Tests liegt.

Paul ist der einzige uns vorgestellte Schüler, der beim Zählen einer Menge von Steinen diese spontan zu Zehnergruppen ordnet. Er kann danach die Ziffern der Zahl mit den Teilmengen korrekt verknüpfen: „2 das sind die Einer, 5 das sind die Zehnerreihen“ (die er hergestellt hat).
Er weiß, dass 47 Steine vier Zehnerrahmen füllen und auf dem fünften Rahmen noch 7 Plätze belegen und 3 Plätze frei bleiben.

Paul rechnet im Kopf:

75 – 28 = 53 denn „7 – 2 = 5 und 5 – 8 = 3“

83 – 36 = 53 denn „8 – 3 = 5 und 3 – 6 = 3“

Die Bitte um Überprüfung der Ergebnisse veranlasst ihn in keiner Weise zur Korrektur.

Unter Verwendung von Zahldarstellungen durch Zehnersystemblöcke rechnet Paul so:

43 – 16 = 27: Paul hat 43 durch vier Zehnerstangen und drei Einerwürfel dargestellt. Er legt einen Zehner zur Seite, zerlegt einen weiteren Zehner in 10 Einer und legt noch 6 Einer zur Seite.

86 – 29 = 57: Paul stellt 86 durch Zehnersystem-Blöcke dar. Er legt dann zunächst 2 Zehnerstangen weg, nach kurzem Zögern aber noch einen weiteren und fügt einen Einer hinzu.

54 – 28 = 26: Paul verwendet hier dieselbe Strategie: Er legt 3 Zehner zur Seite und fügt 2 Einerwürfel hinzu.

Interpretationsvorschlag:

Wenn Paul abstrakt (im Kopf) rechnet, ist das Rechnen ganz losgelöst von der Zahlbedeutung. Rechnet er mit Material, so findet er elegante Lösungswege (z. B. das Konzept der vorteilhaften Nachbaraufgaben).

Nina 1

Nina ist 9 Jahre alt und besucht die dritte Klasse. Sie ist die älteste von drei Geschwistern. Manchmal imitiert sie die Sprache der kleinen Schwester auf liebevolle Art. Ihr sprachlicher Ausdruck ist auffallend gut. Sie bringt ihre Anliegen sicher vor, bleibt der Untersucherin lächelnd und liebenswürdig in Erinnerung. Wenn sie in die Schule geht, nimmt sie jedoch einige Halbedelsteine in einem Säckchen mit: Einer davon schaffe einen klaren Kopf, ein anderer wirke gegen Ängste. Davon sage sie ihren Mitschülern aber nichts.
Sie weiß von sich selbst, dass sie lieber nichts hinschreibt als etwas Falsches, und dass sie aufhöre nachzudenken, wenn andere die Lösung schon raus haben.

Die Ergotherapeutin hat eine „Störung im Bereich der visuell-räumlichen Vorstellung und der Lateralität“ festgestellt, die Lateralität sei nicht eindeutig. Deshalb habe das Mädchen „Mühe mit den praktischen Aufgaben, die eine gut „verinnerlichte“ Rechts-Links-Orientierung voraussetzen“ (Zitate aus dem Bericht der Ergotherapeutin).

Nina bearbeitet komplexe Textaufgaben zu allen Operationen ausgesprochen souverän.
Sie kann „429 : 3“ mittels einer Darstellung der 429 durch Zehnersystemblöcke selbständig lösen, ohne dass sie von der Untersucherin einen Hinweis erhält. Dennoch hat sie in der Schule eine 4 in Mathematik.

Als wir Subtraktionsaufgaben mit zweistelligen Zahlen bearbeiten, entsteht folgende Situation: Bei der Lösung von 71 – 14 erhält sie 63 als Ergebnis. Als sie ihr Vorgehen schildern will, gerät sie in Verwirrung: „1 – 4 geht nicht, da mache ich minus eins -- was habe ich gemacht? Ich weiß es nicht mehr.“ Die Untersucherin fordert sie auf, neu zu überlegen, wie sie die Aufgabe rauskriegen könnte. Nina: „Ich könnte überlegen, wie viele von 14 bis 71 fehlen. Aber das kann ich nicht gut. Oder ich rechne stattdessen 70 – 15. “
Es stellt sich dann heraus, dass sie sowohl 71 – 4 im Kopf rechnen kann (minus 1, minus 3) als auch 71 – 10.

Die Aufgabe 53 – 25 soll Nina anhand einer Zahldarstellung von 53 durch Zehnersystem-Blöcke lösen. Sie entfernt 2 Zehner, dann 3 Einer. Dann denkt sie nach und hält 38 für das Ergebnis.
Sie soll die Aufgabe mit Zehnersystem-Blöcken ganz zu Ende führen: Sie tut es, indem sie eine Zehnerstange in 10 Einerwürfel umtauscht. Sie erhält nun das richtige Ergebnis.

Dann fragt sie plötzlich: „Wieso kommt nicht eine Zahl mit *-dreißig* heraus, obwohl doch 50 – 20 = 30 ist?“
Wir rechnen eine weitere Aufgabe, bei der eine Zehnerunterschreitung nötig ist, mit Zehnersystem-Blöcken. Sie stellt keine Beziehung her zwischen der kleiner werdenden Zehnerzahl und dem Umtauschen einer Zehnerstange.
Anschließend soll sie Aufgaben erfinden, bei denen dieses „Phänomen“ auftritt. Wir überprüfen jede Aufgabe durch eine Lösung mit Zehnersystem-Blöcken. Sie wählt 55 – 26, 86 – 44, verbessert zu 86 – 46 und schließt aus dem Ergebnis, dass man noch eins mehr wegnehmen müsse, um den Effekt zu erzielen. Ihre nächste Kreation (56 – 33) erfüllt das Kriterium jedoch wieder nicht. Bei einem späteren Treffen kann sie von gegebenen Aufgaben nicht sagen, ob das Phänomen auftritt oder nicht: Sie vermutet es auch von 75 – 13 und 57 – 14.

Interpretationsvorschlag:

Das Beispiel von Nina hat uns beeindruckt, weil sie die betreffende Frage stellt und weil sie demonstriert, dass die Behandlungen der Zahlen, die durch Zehnersystem-Blöcke dargestellt sind, nicht unmittelbar mit Phänomenen auf der Ebene der Zahlen in Ziffernschreibweise verknüpft werden können. Da sie das Material souverän handhabte – Nina hätte uns sicher beschreiben können, wie sie eine solche Aufgabe mit Material lösen würde – haben wir eine rasche Erkenntnis erwartet, die aber nicht eintrat. Warum ist Nina nicht aufgefallen, dass sie bei 53 – 25 zuerst zwei Zehner weglegt (für 50 – 20), dann aber noch einen weiteren Zehner durch das Umtauschen verschwinden lässt, um genügend viele Einer zu haben (von 3 Zehnern bleiben nur 2, also 20)? Was für eine Arbeit muss sie leisten, um dies „wahrnehmen“ zu können?

Elisabeth 5

Im Kontext einer Textaufgabe sind 29 und 11 zu addieren. Elisabeth (am Ende der dritten Klasse) rechnet schriftlich. Sie ist verwundert, dass sich ein glatter Zehner ergibt. Das kann sie sich nicht erklären.
Ich lasse sie eine zweistellige Zahl aufschreiben und finde immer eine Zahl dazu, so dass beim Plusrechnen ein glatter Zehner rauskommt.
Dann soll Elisabeth selbst versuchen, solche Zahlenpaare zu finden. Manchmal gelingt es ihr, aber sie kann nicht herausarbeiten, worauf es ankommt. So will sie z. B. 34 mit 24 kombinieren.
Als sie die Beispiele anschaut, bei denen es klappte, hat sie die Idee, dass „immer 10 herauskommen muss“, und zwar bei der Addition der Zehner ebenso wie bei der Addition der Einer. Sie schlägt 34 + 76 vor.

Interpretation:

Auch Elisabeths Frage hat uns gut gefallen. Das hat offenbar einen Reiz, wie aus zwei so ungeraden Lümmeln wie 29 und 11 eine runde Zahl wie 40 wird.

Dass Elisabeth dies nicht erklären kann, wirft ein Licht auf ihre Lücken im Zahlverständnis, die sie u. a. durch die Aneignung des schriftlichen Additionsverfahrens zu überbrücken versucht.

Miriam 1

Miriam ist 9 Jahre alt und besucht die dritte Klasse. Sie wurde von der Kinderärztin auf das Projekt hingewiesen, nachdem morgens physische Angstsymptome (Bauchweh und Durchfall am Morgen) auftraten. Wenn sie aus der Schule zurückkomme, sei sie ruhig, sagen die Eltern. Sie finden Miriam schwierig, sie rebelliere gegen sie. Sie meinen damit auch ihre ablehnende Haltung gegenüber Schularbeiten. Sie vermuten, dass das Gefühl der Unterlegenheit gegenüber dem jüngeren Bruder, dem alles zufliege, dazu beitrage, wissen aber nicht, wie sie Miriam heraushelfen können. Der Vater denkt an materielle Folgen, wenn sie ohne höheren Schulabschluss bleibt. Die Mutter bedrückt Miriams tägliche Freudlosigkeit und Verweigerung.
Miriam ist bei uns ausgesprochen anstrengungsbereit. Fehler verunsichern sie sehr, sie wechselt die Strategie, anstatt zu prüfen, wo der Fehler aufgetreten ist. Selbst beim freien Malen zeigt sie sich sehr kritisch ihren Produkten gegenüber und beginnt mehrmals neu. Die Eltern berichten, sie zeige manchmal in nebensächlichen Dingen eine kaum zu unterdrückende Neigung zur Perfektion, indem sie z. B. Zahlen *male,* anstatt sich aufs Rechnen zu konzentrieren, oder eine manierierte Schrift entwickle.

Miriam rechnet Subtraktionsaufgaben auf zwei verschiedene Arten:
35 – 3 berechnet sie durch Ergänzen von 3 auf 35 mit den Zwischenschritten: bis 10, von 10 bis 30, von 30 bis 35.
35 – 6 berechnet sie durch Subtraktion mit einem Zwischenschritt beim vollen Zehner: 35 – 5 – 1.
Als sie Minusaufgaben unter der Fragestellung „welche Aufgaben sind ähnlich?“ einander zuordnen soll, unterscheidet sie zwischen solchen mit Zehnerunterschreitung und solchen ohne (35 – 3 und 35 – 7). Sie kann aber keine Begründung für ihre Unterscheidung angeben.
Die Aufgabe 48 – 9 ordnet sie der Aufgabe 35 – 6 zu.
Die Aufgabe 48 – 23 ordnet sie der Aufgabe 35 – 20 zu, weil 23 in der Nähe von 20 ist.
Die Aufgabe 48 – 42 ähnelt in ihren Augen 35 – 12, weil beide Subtrahenden eine 2 hinten haben.
Zur Verfügung standen folgende Aufgaben: 35 – 3, 35 – 31, 35 – 20, 35 – 6 und 35 – 12 einerseits, und 48 – 23, 48 – 9, 48 – 42 und 48 – 10 andererseits.

Interpretation:

Die Frage nach der „Ähnlichkeit“ der Aufgaben ist völlig offen und daher gibt es keine richtige oder falsche Antwort darauf. Wir Erwachsene hätten eine andere Zuordnung vorgenommen und andere Kriterien zugrunde gelegt: etwa 48 – 42 zu 35 – 31, weil man dabei nur 8 – 2 und 5 – 1 rechnen muss. Oder: 35 – 20 und 48 – 10, weil hier nur die Zehner subtrahiert werden müssen. Wir hätten die Beziehungen zwischen Subtrahend und Minuend unserem Urteil zugrundegelegt, weil diese über die Rechenstrategie, die wir auswählen, entscheidet.

Miriam hingegen ist sich nicht im Klaren darüber, wann ihre erste oder zweite Rechenstrategie am günstigsten ist. Das ist besonders auffällig, wenn sie 35 – 3 durch Ergänzen löst.

Wie in vielen anderen Beispielen haben wir auch in Miriams Fall ein wenig geschildert, in welcher Gesamtsituation sie sich befindet. Wir gehen nicht tiefer darauf ein, wollen aber doch auf die Komplexität der Lebenssituation hinweisen, in die die kognitive Entwicklung des Kindes eingebettet ist. Gewiss sollte Miriam metakognitive Strategien für das Rechnen erwerben. Ihr Ringen mit zermürbenden Zweifeln über ihren Wert wird davon nicht beendet. In ihrem Fall (wie in anderen Fällen) scheint es notwendig, auch der Quelle dieser Zweifel nachzuspüren und mit ihr einen Weg zu ihrer Bewältigung zu finden.

5 Qualitative Erfassung von Lernschwierigkeiten in der Mathematik

5.1 Übersicht

Die Frage nach einer diagnostischen Untersuchung eines Kindes mit Lernschwierigkeiten in Mathematik kann verschiedene Ziele haben. Eine mögliche Fragestellung lautet: „Hat er (sie) eine Rechenschwäche?“. Wir stellen die Definition der „Rechenstörung“ als Entwicklungsstörung gemäß der Internationalen Klassifikation psychischer Erkrankungen (ICD-10) vor und nehmen dazu Stellung (Abschnitt 5.2).

Der Wunsch nach einem „tieferen“ Verständnis des Versagens mancher Kinder führt oft zu einer testdiagnostischen Untersuchung der Intelligenz oder einiger neuropsychologischer Funktionen. Welche Hilfen bieten solche Untersuchungen für die Beurteilung der Lernschwierigkeiten und für die gezielte und begründete Festlegung von Fördermaßnahmen (Abschnitt 5.3)?

Im Abschnitt 5.4 soll am Beispiel dreier Untersuchungsinstrumente[1] verdeutlicht werden, welche grundsätzlichen Unterschiede sich aus unterschiedlichen Konzeptionen von der Entwicklung des mathematischen Verständnisses ergeben.

Wir können kein fertiges diagnostisches Instrument vorlegen, sondern nur einige Aufgabenstellungen (mit Beobachtungs- und Interpretationshinweisen), die wir sinnvoll und hilfreich fanden (Abschnitte 5.6 und 5.7). Zuvor geben wir eine Darstellung unseres eigenen diagnostischen Konzeptes (Abschnitt 5.5).

5.2 „Hat er/sie eine Rechenschwäche?“

In der Internationalen Klassifikation psychischer Störungen (ICD-10) der Weltgesundheitsorganisation (WHO) ist unter Punkt F81.2 die Entwicklungsstörung „Rechenstörung“ definiert:

[1] 1. AMT FÜR SCHULE, Hamburg (Hrsg.).(1991). *Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule. Handreichung zur Feststellung von Schwierigkeiten beim Rechnen.*
2. KUTZER, R. & PROBST, H. (o. J.): *Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten, 1. und 2. Teil,* Marburg.
3. VON ASTER, M. (1996): *Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen (ZAREKI),* Zürich.

F8 Entwicklungsstörungen

F81 Entwicklungsstörungen (schulische Fertigkeiten)

F81.2 Rechenstörung

Diese Störung beinhaltet eine umschriebene Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine eindeutig unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie und Differential- sowie Integralrechnung benötigt werden.

Diagnostische Leitlinien:

Die Rechenleistung des Kindes muss eindeutig unterhalb des Niveaus liegen, welches aufgrund des Alters, der allgemeinen Intelligenz und der Schulklasse zu erwarten ist. Dies wird am besten auf Grundlage eines standardisierten Einzeltests für Rechenfähigkeit beurteilt. Die Lese- und Rechtschreibfähigkeiten des Kindes müssen im Normbereich liegen, nach Möglichkeit beurteilt auf der Grundlage einzeln angewendeter, angemessener standardisierter Testverfahren. Die Rechenschwierigkeiten dürfen nicht wesentlich auf unangemessene Unterrichtung oder direkt auf Defizite im Sehen, Hören oder auf neurologische Störungen zurückzuführen sein. Ebenso dürfen sie nicht als Folge irgendeiner neurologischen, psychiatrischen oder anderen Erkrankung erworben worden sein.

Rechenstörungen wurden weniger untersucht als Lesestörungen, und die Kenntnis über Vorläufer, Verlauf, Korrelate und Prognose ist relativ begrenzt. Dennoch scheint es, dass anders als bei vielen Kindern mit Lesestörungen die akustische Wahrnehmung und die verbalen Fähigkeiten eher im Normbereich liegen, während visuell-räumliche und Fähigkeiten der optischen Wahrnehmung eher beeinträchtigt sind. Einige Kinder haben zusätzlich soziale und emotionale Verhaltensprobleme, jedoch ist über deren Charakteristika oder Häufigkeit wenig bekannt. Man glaubt, dass Schwierigkeiten in der sozialen Interaktion besonders häufig auftreten.

Die Rechenschwierigkeiten, die auftreten, sind verschiedenartig. Es kommen vor: Ein Unvermögen, die bestimmten Rechenoperationen zugrunde liegenden Konzepte zu verstehen; ein Mangel im Verständnis mathematischer Ausdrücke oder Zeichen; ein Nicht-Wiedererkennen numerischer Symbole; eine Schwierigkeit, unsere Standard-Rechenschritte auszuführen; eine Schwierigkeit im Verständnis, welche Zahlen für das in Betracht kommende arithmetische Problem relevant sind; Schwierigkeiten, Zahlen in die richtige Reihenfolge zu bringen oder Dezimalstellen oder Symbole während des Rechenvorgangs einzusetzen; mangelnder räumlicher Aufbau von Berechnungen; und eine Unfähigkeit, das Einmaleins befriedigend zu lernen.

Dazugehörige Begriffe:

- umschriebene Entwicklungsstörung des Rechnens
- entwicklungsbedingtes Gerstmann Syndrom
- Dyskalkulie
- Entwicklungs-Akalkulie

Ausschluss:

- Rechenstörung bei Lese- oder Rechtschreibstörung (F81.3)
- Rechenschwierigkeiten, hauptsächlich infolge einer unangemessenen Unterrichtung (Z55.x)
- erworbene Rechenstörung (R48.8)

F81.3 Kombinierte Störungen schulischer Fertigkeiten

> Dies ist eine schlecht definierte, unzureichend konzeptualisierte (jedoch notwendige) Restkategorie für Störungen, bei denen sowohl Rechen- als auch Lese- und Rechtschreibfähigkeiten eindeutig beeinträchtigt sind, die Schwäche jedoch nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine deutlich unangemessene Beschulung erklärbar ist. Sie sollte für Störungen verwendet werden, welche durch die Kriterien für F81.2 und entweder F81.0 oder F81.1 erfüllen, ohne Beachtung der Spezifikation, dass es keine Überschneidung geben sollte. (...) (DILLING u. a., 1991)

Aufgrund dieser Definition verwies eine Kinder- und Jugendpsychiaterin ein zehnjähriges Mädchen mit der Diagnose „Rechenschwäche“ an das Projekt: Conni erreichte im K-ABC in der Skala intellektueller Fähigkeiten einen Standardwert von 116 – der Mittelwert beträgt bei diesem Test 100 und eine Standardabweichung 15 (entsprechend der IQ-Skala[2]). Dabei erreichte sie in keinem Untertest weniger als 10 Wertpunkte (Mittelwert der Skala der Untertests).
Im Untertest „Rechnen“ aus dem zweiten Teil des K-ABC (der die erworbenen Fertigkeiten der Kinder erfassen will), erreichte sie einen Standardwert von 78. Die Leistungen in der Skala der Fertigkeiten führten zu einem Gesamt-Standardwert der Fertigkeiten von 97.
Aufgrund dieser Konstellation – überdurchschnittliche intellektuelle Begabung und Leistungen im Rechnen, die mehr als zwei Standardabweichungen unter dem Index für die intellektuellen Fähigkeiten liegen – war die Ärztin zu ihrer Diagnose völlig berechtigt. Andererseits drängte sich im Falle von Conni die Frage auf, warum um alles in der Welt ein so gut begabtes Kind im Rechnen versagte und auch sonst auf die Lehrerinnen den Eindruck eines förderschulbedürftigen Kindes machte. Kann die Diagnose „Rechenstörung“ in diesem Fall den Kern treffen, die eigentliche Störung benennen? Muss sich nicht vielmehr an die Diskrepanz der Werte die Frage anschließen, was denn dieses Mädchen daran gehindert hat, ihr gutes intellektuelles Potential beim schulischen Lernen zu verwerten? Wir meinen, dass diese Frage in Connis Fall unbedingt gestellt werden musste. Sie war in eine äußerst vertrackte familiäre Konstellation hineingewachsen, in der das Symptom ihrer „Dummheit“ verschiedene Funktionen erfüllte.
Conni stellt einen extremen (seltenen) Fall dar, aber an ihrem Beispiel kann man eine grundsätzliche Problematik der Definition der ICD-10 aufzeigen, die sich immer dann ergibt, wenn eine durchschnittliche Intelligenz in einem weitgehend homogenen Profil (keine so genannten Ausfälle in einzelnen Leistungen) mit dem Versagen im Rechnen einhergeht.

Auch Andrea wurde von einem Kinder- und Jugendpsychiater an uns verwiesen. Auch dieser diagnostizierte eine Rechenstörung, obwohl ihre intellektuellen Fähigkeiten im K-ABC mit Standardwert 83 bewertet wurden und sie im Untertest „Rechnen“ (wie auch in den Fertigkeiten insgesamt) einen Wert von 91 erzielte. Ihre intellektuellen Fähigkeiten bei einzelheitlich-serialen Anforderungen (Standardwert 73 im SED) waren signifikant schwächer als die Leistungen bei ganzheitlich-simultanen Anforderungen (Standardwert 90 im SGD); der Abfall im einzelheitlichen Denken wurde durch ihre Leistungen in den sprachgebundenen Untertests hervorgebracht, die Reproduktion einer Serie von Handbewegungen bereitete ihr keine Schwierigkeiten. Streng genommen hät-

[2] Bedeutung: bei der Normierung des Tests lagen die Ergebnisse von 68 % der untersuchten Kinder zwischen 85 und 115. Man nennt diesen Bereich „Durchschnittsbereich“.

te der Arzt die Diagnose „Rechenstörung“ nicht stellen dürfen: Die Diskrepanz zwischen intellektuellen Fähigkeiten und dem Rechnen war laut Test nicht vorhanden, sie zeigte bei den Testaufgaben sogar durchschnittliche Leistungen im Rechnen[3]. Aber selbst wenn sie einen schlechteren Wert erzielt hätte, etwa 78 wie Conni, hätte sich keine signifikante[4] Diskrepanz zwischen IQ und den Leistungen im Rechnen ergeben. Je geringer die allgemeine intellektuelle Begabung, desto geringer die Chance eine Diagnose „Rechenstörung“ nach der ICD-10 zu erhalten. Es stellt sich die Frage, welche *praktische* Bedeutung es eigentlich haben soll, für die Diagnose einer gravierenden Lernschwierigkeit eine signifikante Diskrepanz zwischen Intelligenzquotient und Schulleistung zu fordern?

Eine (gut) durchschnittliche intellektuelle Begabung bei schlechten Schulleistungen im Rechnen veranlasst zu anderen Erwartungshaltungen in der Förderarbeit oder in der Unterrichtung eines Kindes als schlechte Schulleistungen bei einem IQ an der unteren Grenze des Durchschnittsbereiches. Bei einer durchschnittlichen Begabung glaubt man eher an einen Erfolg als bei einem IQ an der unteren Grenze des Durchschnittsbereiches. Bei einer schwachen Begabung rechnet man damit, dass ein Kind für bestimmte Konzeptbildungen länger braucht und räumt mehr Zeit ein – eine vernünftige Erwartung. Ein gut begabtes Kind fordern wir mehr zum selbständigen Denken heraus; einem schwach begabten versuchen wir das Denken vielleicht zu ersparen und eher Routinen (wie man’s macht) zu vermitteln – ein fragwürdiger Ansatz[5]. Kurz: Ob die (vom Ergebnis des Intelligenztests) ausgelösten Erwartungen in ein förderliches Verhalten gegenüber dem Kind umgesetzt werden oder nicht, hängt von weiteren Faktoren ab.

Die Abgrenzung gegen eine „eindeutig unangemessene Beschulung“, die die Diagnose „Rechenstörung“ mitbestimmt, versucht das Versagen des Kindes losgelöst von seiner Unterrichtung ins Auge zu fassen. Das ist aus verschiedenen Gründen fragwürdig und nicht hilfreich: Mathematik ist ein kulturelles Gut, Mathematiklernen ist ein *Prozess*, in dem Kinder unter dem Einfluss von Erwachsenen versuchen, sich dieses Gut anzueignen. Die Lernvoraussetzungen des Kindes und der Einfluss des Unterrichts stehen in einer komplexen Beziehung der *Wechselwirkungen*. Das Urteil über die angemessene Beschulung hängt auch ab vom Wissen darüber, was guten Unterricht ausmacht und wie man den verschiedenen und besonderen Lernvoraussetzungen entgegenkommen kann. Auch ist die Frage berührt, ob man eher die Anpassungsfähigkeit des Kindes an den Unterricht verlangt oder eine bessere Anpassung des Unterrichts an die Fähigkeiten des Kindes für möglich hält und anstrebt. – Der Bildungsplan für die Grundschule will eindeutig das letztere:

---

[3] Der Frage nachzugehen, wie die (im Vergleich zu unseren Untersuchungen und den Schulleistungen) gute Leistung im Untertest „Rechnen“ des K-ABC zustande kam, könnte Ansatzpunkte für die Förderung von Andrea ergeben. Die Aufgabenstellungen in diesem Untertest erfolgen in einem gesprochenen Text, sind aber zusätzlich durch Bilder gestützt. Es sind allerdings mehrere Möglichkeiten denkbar, wie sich dies auf Andreas Lösungen ausgewirkt haben mag. Mehr über Andrea in Abschnitt 6.2.

[4] Der Begriff „signifikanter Unterschied“ stammt aus der Statistik, mit der man festlegen kann, wann ein Unterschied mit x-prozentiger Wahrscheinlichkeit nicht auf zufällige Schwankungen zurückzuführen ist. In der Regel verlangt man für Signifikanz eine Sicherheit von 95 % oder 99 %.

[5] Vgl. 2.2.3.

> „Die Grundschule hat die vorrangige Aufgabe, jedes Kind individuell zu fördern. Kinder mit Lernschwierigkeiten erhalten gezielte Förderung. Kinder mit Verhaltensauffälligkeiten pädagogische Hilfen. Ergänzende Lernangebote können alle Kinder zusätzlich herausfordern. Fördern heißt aber auch, durch unterschiedliche Inhalte und Verfahren besondere Interessen und Fähigkeiten zu berücksichtigen. (...) Besonders charakteristisch für den Unterricht der Grundschule sind Arbeitsformen und Maßnahmen der inneren Differenzierung. Sie setzen voraus, dass Lehrerinnen und Lehrer den Entwicklungsstand der einzelnen Kinder kennen und die individuellen Lernprozesse genau beobachten." (Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg. Bildungsplan für die Grundschule, 1994, 12)

> „Von einer unzureichenden oder fehlerhaften Beschulung kann dabei auch dann gesprochen werden, wenn diese für die individuellen Lernvoraussetzungen eines Schülers nicht hinreichend kompatibel ist bzw. sich nicht genügend flexibel auf abweichende Lernvoraussetzungen einstellen kann. Faktoren dieser Art werden bislang in den gängigen Klassifikationssystemen ausgeschlossen." (VON ASTER, 1996, 183 f.)

Die Kriterien der ICD-10 sind daher nicht ohne weiteres praktisch relevant und hilfreich. Wir konnten kein besonderes Interesse an der Frage entwickeln, welche Lernschwierigkeiten in Mathematik als „Rechenschwächen" bezeichnet werden sollten und welche nicht.
Hilfen braucht ein Kind, das in einen Rückstand gegenüber den Klassenkameraden geraten ist, in *jedem* Fall. Die Wahl der Hilfen muss sich an den vorhandenen mathematischen Kognitionen orientieren, die – nach ihrer entwicklungspsychologischen Einordnung – bestimmen, wie es weitergehen kann. Vorlieben und Stärken des Kindes sollten möglichst *in Bezug auf die mathematischen Gegenstände* festgestellt und bei der Förderung berücksichtigt werden. Bei einem guten psychologischen Wissen und gleichzeitiger guter Erfahrung mit Lernschwierigkeiten können auch Testergebnisse entsprechend ausgedeutet werden.
Wir schlagen vor, dass schwache Leistungen im Rechnen gegen Ende der ersten Klasse differenziert untersucht werden und zwar durch eine *Untersuchung der mathematischen Konzepte und Fertigkeiten des Kindes*. Grundlage der Untersuchung sollte Wissen über Entwicklungswege von mathematischem Denken bei schwach begabten Kinder und über das Lernen dieser Kinder sein. Eine ergänzende testpsychologische Untersuchung kann hilfreich sein; über Möglichkeiten und Grenzen äußern wir uns im folgenden Abschnitt 5.3.

5.3 Testdiagnostische Untersuchung von „rechenschwachen" Kindern

5.3.1 Intelligenzdiagnostik

Im Falle von Conni war das vorgelegte Testergebnis eine ausgesprochene Hilfe: Die Untersuchung ihres mathematischen Kenntnisstandes gestaltete sich besonders schwierig, da sie fast in jeder Stunde Kopfweh bekam. Ohne Testergebnis hätten wir keine Überzeugung gewinnen können, ob ihr schulisches Versagen in erster Linie auf eine intellektuelle Überforderung zurückzuführen war oder ob „starke" andere Faktoren im

Spiel sein mussten. Erfahrungen wie diese sind ein Argument für eine Untersuchung der allgemeinen intellektuellen Kapazität, wenn man Lernschwierigkeiten erhellen will.

Welche Hilfe bietet die Untersuchung mit einem Intelligenztest (z. B. HAWIK-R oder K-ABC) für die qualitative Beurteilung der Lernschwierigkeiten in Mathematik und für die Entwicklung von Fördermaßnahmen?
Verschiedene, in den Intelligenztests untersuchte Leistungen spielen bei der Aneignung von mathematischem Denken eine Rolle. Nahezu jeder Untertest eines Intelligenztests lässt sich mit Anforderungen, die in mathematischen Problemstellungen stecken, in eine Beziehung bringen. Zahlverstehen, Rechnen und mathematisches Problemlösen sind komplexe kognitive Tätigkeiten: Man muss Reihenfolgen erfassen und reproduzieren, aber auch simultane Gegebenheiten verarbeiten, man muss vor allem zwischen beiden Erfassungsmodi übersetzen und eine gewisse Integration herstellen. Mathematik hat mit nonverbaler Anschauung und Konzeptbildung zu tun, aber es ist auch eine sprachliche und verbal-logische Angelegenheit. Gerade diese Komplexität, die so vielfältige Beziehungen aufweist und Fehlerinterpretation nahe legen kann, kann einen (auch eine Psychologin mit guten testdiagnostischen Kenntnissen) recht ratlos machen. Wie kann man die Gültigkeit einer Interpretation begründen? Wie kann man Testergebnisse in einer begründeten Weise in Vorschläge zur Förderung umsetzen?

In der Literatur über Rechenschwäche gegebene Deutungen von konkreten Fehlern durch Schwächen allgemeiner kognitiver Funktionen[6] wirkten auf uns oft oberflächlich. Wir haben uns dazu in Abschnitt 3.2 geäußert und erinnern nur kurz daran: Die Verknüpfung wurde in der Regel auf einer prozeduralen Ebene hergestellt, so als fasste das Kind zweistellige Zahlen als Reihenfolgen von Ziffern auf und rechnete damit aufgrund von Regeln, die in der Art eines Computerprogramms des Rechnens gebildet sind. So gesehen kam es auf die Rechts-Links-Unterscheidung an. Wegen der Komplexität der geforderten Leistungen sind alternative Erklärungshypothesen denkbar. Am meisten störte uns jedoch, wenn der „mathematische Sinn“ von Zahlen und Aufgabenstellungen in Prozeduren aufgelöst werden sollte und die *Konstruktionen bei der Konzeptbildung* vernachlässigt wurden.

Die uns vorgestellten Kinder, die alle Probleme mit der Mathematik hatten, zeigten in ihren Testprofilen völlig unterschiedliche Verteilung von Stärken und Schwächen (folgende Abbildung). Eine Herleitung ihrer Vorgehensweisen bei mathematischen Aufgaben aus dem Testprofil war uns nicht möglich, auch deshalb, weil ihre konkreten Vorgehensweisen eine Mischung aus dem Entwicklungsstand ihrer mathematischen Konzepte, eigenen Kompensationsbemühungen und Tipps aus ihrer Umwelt sind.

[6] Vergleiche hierzu Abschnitt 3.2

Name des Kindes	Andrea	Elisabeth	Martin	Ola	Lissi	Paul	Conni	Klara
Alter des Kindes	8;10	9;7	10;3	8;10	10;6	9;	10;	10;3
Geschlecht	w	w	m	w	w	m	w	w
SED	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte	Skalenwerte
Handbewegungen	9	10	7*	5**	10	9	14	7*
Zahlennachsprechen	5**	7*	6**	6**	10	12	11	15
Wortreihe	3**	9	10	3**	15	12	12	15
SGD								
Gestaltschließen	10	9	7*	12	7*	12	11	5**
Dreiecke	9	9	8	10	6**	10	10	5**
Bildhaftes Ergänzen	7*	8	13	9	11	11	14	10
Räumliches Gedächtnis	7*	11	8	12	3**	10	15	4**
Fotoserie	10	14	12	10	6**	12	12	7*
FS	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte
Gesichter und Orte	106	100	95	91	88	105	103	109
Rechnen	91	54**	74**	77**	69**	77**	78**	97
Rätsel	85*	98	98	91	80**	104	89	112
Lesen/Verstehen	88(*)	79**	68**	85*	87(*)	98	109	109
Gesamtskalen	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte	Standardwerte
SED	73**	92	85*	67**	111	107	115	115
SGD	90	102	97	105	76**	107	118	73**
SIF	83*	98	93	89	90	107	116	90
FS	91	78**	80**	82	76	95	97	109

Abb. 5.1: Leistungsprofile einiger im Projekt vorgestellter Kinder in der K-ABC (Kaufmann Assessment Battery for Children, Dt. Fassung von P. Melchers und U. Preuß, Frankfurt 1991).

Legende: SED – Skala des einzelheitlichen Denkens und der serialen Informationsverarbeitung; SGD – Skala des ganzheitlichen Denkens und der simultanen Informationsverarbeitung; SIF – Skala intellektueller Fähigkeiten (Zusammenfassung von SED und SGD); FS – Fertigkeitenskala.

Durchschnittsbereich bei den Skalenwerten: 7 bis 13; Mittelwert 10;
Durchschnittsbereich bei den Standardwerten: 85 bis 115, Mittelwert 100.
Werte, die mit einem Stern versehen sind, sind Grenzwerte; zwei Sterne bedeuten, daß sie sehr auffällig sind.

Umrechnung auf Prozentbeträge:
Skalenwert 3 – Prozentrang 1;
Skalenwert 5 – Prozentrang 4;
Skalenwert 7 – Prozentrang 16;
Skalenwert 8 – Prozentrang 25;
Skalenwert 9 – Prozentrang 36;
Skalenwert 10 – Prozentrang 50;
Skalenwert 11 – Prozentrang 65;
Skalenwert 12 – Prozentrang 75;
Skalenwert 13 – Prozentrang 84.

Wir zitieren aus einem Untersuchungsbericht, den die Verfasserin (Schulpsychologin) erstellte, bevor sie im Projekt tätig wurde. Wir glauben, dass wir an diesem Beispiel deutlich machen können, worin wir die Grenzen und die Beiträge der testdiagnostischen Untersuchung sehen:

> „Guido (Alter: 9;11) hatte das dritte Schuljahr mit der Note 4 in Mathematik abgeschlossen. Die Lehrerin, so gaben seine Eltern an, sei der Ansicht, Guido habe keine Verständnisschwierigkeiten, verliere aber den Rechenweg. Beim Rechnen mit Guido konnte die Untersucherin beobachten, was die Lehrerin zu ihrer Aussage veranlasst haben mag:
> Als Guido $4 \cdot 12$ ausrechnen will, rechnet er $4 \cdot 10$ plus $4 \cdot 4$.
> Als die Aufgabe $65 : 5$ heißt, rechnet Guido $5 \cdot 10 = 50$ und $3 \cdot 10 = ...$ Guido ist verwirrt und kann seine Verwirrung nicht aufklären.
> Als er herausfinden soll, wie viel Geld übrig bleibt, wenn man mit 500 DM ein Fahrrad bezahlt, das 365 DM kostet, passiert folgendes: $365 – 5 = 370$ und $500 – 200 = 300$, also bleiben 235 DM übrig.
> (...)
> *Auswertung der Untersuchung mit dem K-ABC:*
> Vergleicht man die Anforderungen der verschiedenen Untertests, so erhält man folgende Hinweise:
> 1. Guido hat Probleme bei Aufgaben, die eine Koordination von visueller und motorischer Tätigkeit verlangen: in den Untertests „Handbewegungen“ (Prozentrang 9[7]) und „Dreiecke“ (Prozentrang 4,5). Problemstellungen, die eine visuelle Organisation ohne wesentliche motorische Aktivität erfordern, fallen ihm leichter: die Untertests „Bildhaftes Ergänzen“ (Prozentrang 50), „Räumliches Gedächtnis“ (Prozentrang 36) und „Fotoserie“ (Prozentrang 76).
>
> 2. Die Bewältigung der Aufgaben im Untertest „Dreiecke“ verlangt, dass man aus der Anschauung und dem praktischen Umgang ein Konzept über die Struktur der Dreiecke entwickelt, die aus kleineren Dreiecken (in den Farben Gelb und Blau) gebildet werden können. Laut Interpretationshandbuch des K-ABC ist daher in diesem Untertest die Fähigkeit zu nonverbaler Konzeptbildung erfasst. Dass Guido bei dieser Aufgabenstellung Schwierigkeiten hat, kann als Hinweis verstanden werden, dass er nur langsam Konzepte aus dem Umgang mit nicht sprachlichem Material entwickelt.
>
> 3. Die Gegenüberstellung der Untertests „Dreiecke“ einerseits und „Fotoserie“, „Räumliches Gedächtnis“ und „Wortreihe“ andererseits führt zur Vermutung, dass auch die Abstraktheit des Materials eine Erschwernis bringt. Fällt es Guido leichter, bedeutungshaltiges Material und praktische Zusammenhänge zu analysieren?
> Aber auch beim „Bildhaften Ergänzen“, dem abstraktes Material zugrunde liegt, erbringt Guido eine durchschnittliche Leistung. Im Unterschied zum Untertest „Dreiecke“ ist keine visuomotorische Anforderung gegeben und eine Orientierung an Details möglich. Verlangt ist hier eine aufmerksame Analyse der Merkmale und Veränderungen, die in Details fassbar sind.
>
> 4. Das analoge Denken anhand von nonverbalem abstraktem Material bereitet Guido keine Mühe. Auffallend ist, dass seine Fehler im Untertest „Bildhaftes Ergänzen“ (Prozentrang 50) in der Mehrzahl (4 von 5) Lagefehler sind, d. h. er berücksichtigt den Aspekt der Lage nicht, obwohl bei der Testdurchführung beim ersten Fehler dieser Art ausdrücklich zur Beachtung aufgefordert wird.
> 5. Auffallend gut gelingen Aufgaben zur auditiv-visuellen Integration und zum auditiv-motorischen Gedächtnis, dies trotz der Ablenkung durch eine Interferenz Aufgabe (Untertest „Wortreihe“, Prozentrang 84).
> 6. Die Reihenbildung bei bedeutungshaltigen Elementen, das Erfassen chronologischer Beziehungen und das Erkennen praktischer Ursache-Wirkungs-Zusammenhänge (Untertest „Fotoserie“, Prozentrang 76) fallen Guido leicht.“

---

[7] Prozentrang 9 bedeutet, dass die Auswertung von Guidos Leistungen in diesem Untertest erbracht hat, dass 91 von 100 Gleichaltrigen besser als Guido darin abgeschnitten haben.

Die Untersucherin hat daraus folgende Schlüsse gezogen:

> „Guidos Probleme in Mathematik sind (jedenfalls) teilweise kognitiv bedingt und nicht nur Ausdruck eines impulsiven Arbeitsstils. Rechnen verlangt visuelle Leistung (Wahrnehmung, Vorstellung und Strukturierung) in Verbindung mit Handlungen/Bewegungen. Ist die Koordination von Wahrnehmung und dem Gebrauch der Hände gestört, hat dies Auswirkungen auf die Handlungen im Mentalen. Die Beeinträchtigung in der (nonverbalen) Konzeptbildung geht möglicherweise darauf zurück.
> Die Förderung sollte darauf achten, dass Guido ein raum-zeitlich strukturiertes Bild einer mathematischen Aufgabenstellung erarbeiten muss, in dem er sich planvoll bewegen kann. Mathematische Operationen und andere mathematische Konzepte sollten in einem konkret-praktischen Umgang abgesichert werden. Dabei ist Guidos Aufmerksamkeit auf die Abfolge von Konstellationen und Handlungen zu lenken. Der Übergang zu Rechnungen ist allmählich vorzunehmen, zunächst parallel zu Anschauung und konkreter Handlung, differenziert sprachlich angeleitet. Dieses Vorgehen kann sich auf gute seriale Fähigkeiten bei bedeutungsvollem Material und im Erkennen von praktischen Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen stützen. Die sprachliche Selbst-Anleitung sollte stärker zum Einsatz kommen und eingeübt werden."

Die Untersucherin hat also Schwächen in der Visuomotorik und in der nonverbalen Konzeptbildung, die sie aufgrund des Handbuchs[8] aus dem Testergebnis herausgearbeitet hat, zur Erklärung der schlechten Leistungen im Rechnen herangezogen. Damit hat sie sicher nichts Falsches gesagt, wenn sie auch heute die Beziehung zwischen nonverbaler Konzeptbildung und visuomotorischen Fähigkeiten mit größerer Vorsicht behandelt; denn so recht weiß sie nicht, wann es erlaubt ist, der visuomotorischen Komponente einer kognitiven Leistung die Hauptbedeutung zu verleihen.
Aber sie hat noch andere Probleme: Es ist schwierig, die Ergebnisse des Tests über die dort konkret verlangten Leistungen hinaus zu interpretieren, ganz zu schweigen davon, eine Beziehung zu Schulleistungen herzustellen. Schon in den Testaufgaben, und mehr noch in den schulischen Aufgaben, sind *komplexe* Leistungen verlangt[9]. Trifft „Schwäche der Visuomotorik" den Kern der Schwierigkeiten von Guido? Macht die vom K-ABC-Handbuch vorgeschlagene Analyse des Testprofils wirklich Sinn? Kann man annehmen, dass *rein* eine gewisse Schwäche der Koordination von visueller Verarbeitung und motorischer Reaktion den Fortschritt eines Schulkindes im Rechnen entscheidend behindert? Zu den Problemen der Profilinterpretation des Tests gesellen sich Fragen darüber, welcher Schweregrad einer Beeinträchtigung z. B. der Visuomotorik für das Auftreten einer Lernschwierigkeit maßgeblich verantwortlich gemacht werden kann. Aussagen dieser Art müssen als Hypothesen behandelt werden. Selbst ROURKE, der aufgrund seiner Untersuchungsergebnisse solche Hypothesen aufstellt, schreibt:

> „The question of whether and to what extent the relative failures in conceptual reasoning and related abilities are a direct function of inadequate sensorimotor experience awaits the results of further research." (ROURKE, 1993, 217 f.)

Wir möchten mit diesen Bedenken nicht zur Vernachlässigung der testdiagnostischen Ergebnisse auffordern, sondern darauf hinweisen, dass es nicht angemessen ist, einen Hinweis auf eine schwache Funktion, die an einer höheren kognitiven Tätigkeit mit-

[8] Interpretationshandbuch zum K-ABC von P. MELCHERS und U. PREUß, Frankfurt 1991.
[9] Im Untertest Dreiecke: visuelle Analyse und Synthese, Koordination von visueller Verarbeitung und Motorik, Hypothesentesten, Planen und Prüfen, Aushalten von anfänglicher Unsicherheit, u. a. m..

wirkt, zu dem entscheidenden Wirkfaktor bei der Entstehung einer Lernschwierigkeit zu erklären.

Welche Hinweise für die Förderarbeit kann die Untersucherin nun aufgrund des Testergebnisses geben? Sie empfiehlt, dass nicht zu schnell auf die reine Zahlenebene gewechselt werden sollte. Da nonverbale Konzepte nicht rasch gebildet werden, sollte, was man mit den Zahlen macht, für ausreichend lange Zeit an konkreten quantitativen Repräsentanten vollzogen und reflektiert werden können. Die Hinweise gehen über allgemeine Aussagen kaum hinaus. Es fehlt ein differenziertes Wissen über das, was Guido in Mathematik kann und verstanden hat; es fehlen auch die Kategorien (Konzepte über die Entwicklung des mathematischen Verständnisses), die die Untersuchung der mathematischen Kognitionen des Kindes anleiten könnten. Diesen Mangel empfanden wir noch stärker bei den schwächeren Kindern.

Guidos Lehrerin hatte auf verlorengehende Rechenwege hingewiesen und ein gutes Verständnis angenommen. Für sie ist es nun nicht besonders hilfreich zu erfahren, dass Guido eine Schwäche in der visuomotorischen Koordination und in der nonverbalen Konzeptbildung mitbringt. Eher ist es wichtig zu wissen, wie sie das Phänomen verlorengehender Rechenwege genauer untersuchen kann: Wie schildert und erklärt Guido seine Rechenwege? Treten keine Fehler auf, wenn er nur sagt, was gerechnet werden soll, und eine andere Person das Rechnen übernimmt? Treten weniger Fehler auf, wenn er über Zwischenschritte spricht und sie auf dem Papier fixiert? Wie rechnet und erklärt Guido die Aufgabe mit Material?
Was die Lehrerin vielleicht nicht beachtet hat: Die Steuerung der Rechenwege hängt auch vom Zahlverständnis ab. Je besser die mehrstellige Zahl verstanden ist, desto leich-ter ist es, auf den Rechenweg zu achten und ihn zu steuern. Für die Lehrerin ist es daher auch interessant, wie sie ihren Eindruck, es liege nicht am Verständnis, präzisieren und überprüfen kann: Gibt es Hinweise auf Lücken im Zahlverständnis?
Diese Fragestellungen und Hypothesen beruhen nicht auf dem Testergebnis, sondern auf einer Idee, wie das Lernen von Mathematik geschieht.

Eine begründete Zuordnung der kognitiven Stärken und Schwächen zu den Lernschwierigkeiten in Mathematik ist erst möglich, wenn wir das Erlernen der Mathematik so gut wie möglich verstanden haben. Dabei muss es wirklich „zur Sache“ gehen: um die Entwicklung spezifischer mathematischer Konzepte und Prozeduren und die entwicklungs- und sachlogischen Zusammenhänge.

5.3.2 Neuropsychologische Diagnostik

Schulleistungen und Intelligenzprofile

ROURKE und Mitarbeiter[10] haben innerhalb der letzten 15 Jahre untersucht, ob man lernschwache Kinder verschiedenen Gruppen zuordnen kann, sowohl hinsichtlich ihrer schulischen Leistungsstärken und -schwächen (Schulleistungstest aus USA und Kanada) als auch hinsichtlich der Ergebnisse in einem Intelligenztest (der dem HAWIK-R

[10] Wir stützen uns vorwiegend auf ROURKE, 1993.

entspricht). Aufgrund des Schulleistungstests konnte man in der Gruppe der Kinder mit schlechten Leistungen im Rechnen zwei Subtypen mit unterschiedlichen Leistungsprofilen unterscheiden: Eine Gruppe von Kindern zeigte schwache Mathematikleistungen und gleichzeitig noch schwächere Leistungen im Lesen und Schreiben (*Subtyp R-S*). Die andere Gruppe von Kindern zeigte zwar entsprechend starke Schwächen in Mathematik[11], die Leistungen im Lesen und Schreiben entsprachen jedoch der Altersgruppe (*Subtyp A*).
Die beiden Gruppen unterschieden sich nicht hinsichtlich des Gesamt-IQs im Intelligenztest. Aber die Kinder mit dem Subtyp R-S hatten einen höheren Handlungs-IQ gegenüber einem niedrigeren Verbal-IQ, während die Kinder des Subtyps A die umgekehrte Beziehung zwischen den beiden Testteilen aufwiesen.

Neuropsychologische Profile

Die Autoren untersuchten die Kinder außerdem hinsichtlich verschiedener neuropsychologischer Funktionen und auch auf dieser Ebene wiesen die beiden Gruppen charakteristische Unterschiede auf: Kinder vom Subtyp A zeigten Schwächen im Bereich der visuell-räumlichen und taktil-kinästhetischen Wahrnehmung, in der Psychomotorik und in der nonverbalen Konzeptbildung. Die sprachlichen Funktionen und akustische Wahrnehmung und Merkfähigkeit waren hingegen altersentsprechend entwickelt.[12]
Stärken und Schwächen der Kinder vom Subtyp R-S waren gewissermaßen komplementär verteilt: gute Leistungen im Bereich der visuell-räumlichen und taktil-kinästhetischen Wahrnehmung und Schwächen insbesondere im Bereich der sprachlichen Funktionen, sowie der akustischen Wahrnehmung und Merkfähigkeit.

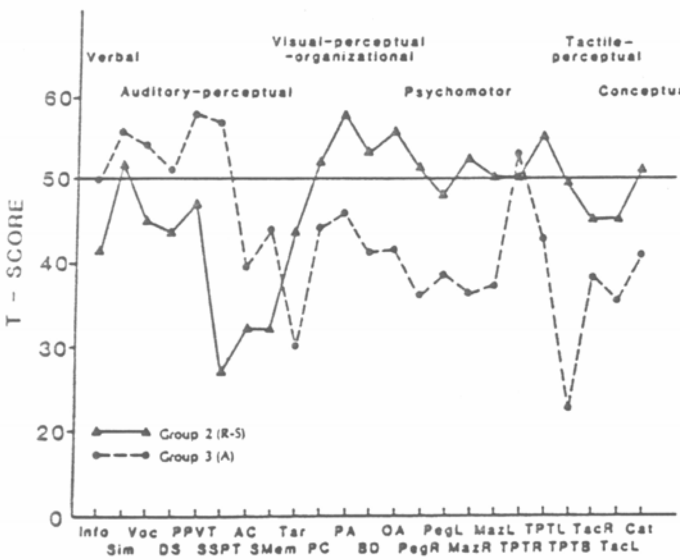


Abb. 5.2: Rourkes Ergebnisse, übernommen aus VON ASTER, 1996, 32, auch in ROURKE 1993, 218

[11] in der quantitativen Auswertung eines amerikanischen Schulleistungstests.
[12] Ein wenig irritierend ist, dass die Abbildung zeigt, dass einige Untertestwerte, die als „nicht altersentsprechend“ beurteilt werden, im Durchschnittsbereich (zwischen T-Wert 40 und 50) liegen.

Zur Abbildung: Die Untertests des WISC entsprechen denen des HAWIK: *Info* - Allgemeines Wissen; *Sim* - Gemeinsamkeiten finden; *Voc* - Wortschatztest; *PC* - Bilderergänzen; *PA* - Bilderordnen; *BD* - Mosaiktest; *OA* - Figurenlegen. – Der Durchschnittsbereich der T-Skala geht von 40 bis 60. Man kann entnehmen, dass die Durchschnittswerte der Leistungen des Intelligenztests (WISC) für beide Gruppen überwiegend im Durchschnittsbereich liegen.
Wir geben eine kurze Erläuterungen zu einigen genannten Tests, die wir nicht selbst kennen (Rourke, 1989, Appendix): *Grooved Pegboard Test*: Psychomotorik, Haken in Schlüsselform sollen – so schnell wie möglich – in Einkerbungen gesteckt werden, mit der rechten Hand von links nach rechts, mit der linken Hand von rechts nach links. *Maze-Test*: Visuomotorik, mit einem Stift durch ein aufgemaltes Labyrinth fahren, ohne die Wände des Labyrinths zu berühren. *Target Test*: Reproduktion von visuell-räumlichen Konfigurationen nach zeitlicher Verzögerung. *Category Test*: siehe Anmerkung 14. *Tactual Performance Test*: Verbindung von taktiler Wahrnehmung, Übertragung in visuelle Vorstellung und visuomotorischer Koordination: Mit verbundenen Augen sollen sechs Blöcke jeweils mit der dominanten und mit der nicht-dominanten Hand in die dafür passenden Vertiefungen auf einer Tafel gebracht werden. Anschließend soll die Tafel mit den Blöcken darin gezeichnet werden.

Fehleranalyse

ROURKE et al. analysierten auch die Rechenfehler der Kinder in beiden Gruppen und fanden Unterschiede: Die *Kinder der R-S Gruppe* machten weniger Fehler, sie bildeten also die bessere Gruppe unter den rechenschwachen Kindern. Die Fehler dieser Kinder seien auf die Schwierigkeit zurückzuführen, mathematische Fakten zu behalten, oder auf das Vergessen eines bestimmten Rechenschrittes in einer Rechenprozedur. Jüngere Kinder finden richtige Ergebnisse, rechnen aber mit den Fingern. Die Kinder erkennen, wenn eine Aufgabe zu schwierig für sie ist, und zeigen auch durch andere Verhaltensweisen, dass ihre Problemlösefähigkeiten, Hypothesentesten und Planungs- und Kontrollfähigkeiten nicht beeinträchtigt sind. Sie vermeiden Aufgaben, bei denen gelesen werden muss. Die Autoren vermuten, dass ihre Schwierigkeiten zurückzuführen sind auf Probleme im Lesen und Ungeübtheit in mathematischen Dingen, zu der vielleicht beitrage, dass sie besonders viel Unterricht im Lesen und Schreiben erhalten.
Die *Kinder der A-Gruppe* machen viele und verschiedenartige Fehler, die in 7 Kategorien eingeteilt werden:

1. Fehler, die die räumliche Organisation betreffen, z. B. Fehler bei der Anordnung der Zahlen bei zweistelligen Multiplikationsaufgaben oder Subtraktion des Minuenden vom Subtrahenden[13].
2. Fehler, die sich aus der falschen Wahrnehmung visueller Details ergeben: Mathematische Zeichen werden falsch gelesen, Kommata werden vergessen.
3. Fehler in Rechenverfahren, bei denen ein Schritt weggelassen oder zugefügt wird oder eine Regel im falschen Verfahren angewendet wird.
4. Unfähigkeit, das Rechenverfahren zu ändern, wenn in einer Reihe von Aufgaben z. B. Additionsaufgaben von Subtraktionsaufgaben abgelöst werden.
5. Anhaltende graphomotorische Schwierigkeiten beim Zahlenschreiben, die auch dann noch schlecht geschrieben werden, wenn das Schreiben sich verbessert hat.
6. Beeinträchtigte Abrufbarkeit der Basisfakten, obwohl diese bekannt sind.
7. Beeinträchtigungen im Urteilen und Denken: Die Kinder nehmen Probleme in Angriff, die ihre Möglichkeiten klar übersteigen; ihre Lösungen machen im Hinblick auf die Anforderungen der Aufgabe keinen Sinn; sie können Lösungswege, die sie beherrschen, nicht an eine leicht veränderte Aufgabenstellung anpassen.

[13] Es handelt sich um kanadische Kinder und daher geht es um schriftliche Rechenverfahren.

Zusammenfassend meinen die Autoren, dass man die Fehler dieser Kinder der Gruppe A auf ein mangelndes Verständnis mathematischer Algorithmen aufgrund von Störungen im Bereich der nonverbalen Konzeptbildung zurückführen kann.

Zwei Hypothesen über die Entwicklung schulischer Stärken und Schwächen

ROURKE entwirft auf Grundlage seiner Untersuchungen *zwei hypothetische Schemata der Entwicklung schulischer Stärken und Schwächen* bei den beiden Subtypen R-S und A. Darin wird davon ausgegangen, dass Defizite in taktiler und visueller Wahrnehmung Defizite bei Konzeptbildung und Problemlösefähigkeit nach sich ziehen. Grundlage für diese Hypothesen sind insbesondere die Ergebnisse der beiden Gruppen (R-S und A) im *Halstead Category Test*, der die nonverbale Konzeptbildung prüft. Darin schneidet die R-S-Gruppe, deren durchschnittliches Ergebnis in Höhe des Mittelwerts liegt, signifikant besser ab als die A-Gruppe, deren durchschnittliches Ergebnis sich an der unteren Grenze des Durchschnittsbereichs befindet, vor allem in den Untertests, die visuell-räumliche Analyse verlangen[14]. ROURKE hat dieses Ergebnis erwartet und begründet dies so: Die Mehrzahl der Kinder in der A-Gruppe habe von Geburt an unter den negativen Auswirkungen ihrer neuropsychologischen Schwächen (in der taktilen Wahrnehmung, Psychomotorik, Organisation der visuellen Wahrnehmung) gelitten. Auf dem Hintergrund von Piagets Theorie der Entwicklung der intellektuellen Funktionen erwartet man, dass diese Schwächen, über die Beeinträchtigung der sensomotorischen Aktivitäten vermittelt, die kognitiven Funktionen auf späteren, komplexeren Entwicklungsstufen negativ beeinflussen, insbesondere diejenigen kognitiven Funktionen, die nicht durch mechanische Sprachfunktionen leicht reguliert werden können (nonverbale Analysen, Organisation, Synthese höherer Ordnung).
Umgekehrt spreche die normale Leistung der R-S-Kinder für die Getrenntheit von Sprache und Denken.

> „The fact that there is absolutely no evidence of impairment in tactile-perceptual, visual-spatial-organizational, or psychomotor skills in Group 2[15] children would suggest that their course through the sensorimotor period of intellectual development described by Piaget was normal. Even though afflicted with fairly obvious difficulties in the development and elaboration of some important psycholinguistic skills, their higher order cognitive processes seem to have developed without complication. On the other hand, Group 3 children exhibit signs of significant impairment in tactile-perceptual, visual-spatial-organizational, and psychomotor skills. It may be that these constitute the conceptual underpinnings, or „building blocks“, for the development of skills involving reasoning (such as mathematics), and that deficiencies in them are responsible for the fact that these children have failed to develop higher order concept-formation and problem-solving abilities to a normal degree.“ (ROURKE, 1993, 217)

[14] Der *Category Test* wird beschrieben als Maß einer relativ komplexen Konzeptbildung, in dem nonverbales abstraktes Denken, Hypothesentesten und die Fähigkeit, aus Rückmeldung zu lernen, verlangt sind. – Das Kind erhält nach seiner Antwort einen Hinweis, ob sie richtig oder falsch war. Leider geht aus der Beschreibung nicht hervor, wie die Testaufgaben aussehen. Die erforderliche Abstraktion zur Bildung der Kategorien betrifft: „Principles of numerosity, oddity, spatial position, and relative extent“ (ROURKE, 1989, Appedix: Description of tests administered to children).

[15] Group 2 entspricht Gruppe R-S, Group 3 der Gruppe A.

Im Anschluss daran betont ROURKE, dass diese Aussagen noch *hypothetischen* Charakter haben und in weiteren Untersuchungen geprüft werden müssen. DIETEL, den wir im folgenden Unterabschnitt zitieren, widerspricht einigen dieser Aussagen, wenn er darauf hinweist, dass die Fähigkeiten zur Konzeptbildung, zum Problemlösen und zum Hypothesentesten eine gewisse Eigenständigkeit im neuropsychologischen Gefüge haben. Außerdem kann man einigen Aussagen Dietels entnehmen, dass die Sprachentwicklung den Einfluss der Sensomotorik in der weiteren Entwicklung verringert, da sprachliche Planungs- und Steuerungsprozesse an Bedeutung gewinnen.
Wir können über die Standpunkte dieser Fachleute für Neuropsychologie nicht urteilen. Die Bedeutung ihrer Aussagen liegt für uns darin, dass sie auf bedeutungsvolle Differenzierungen und Wechselwirkungen der kognitiven Funktionen hinweisen, die Werkzeuge des Kindes bei der Konstruktion mathematischer Konzepte sind.

Kommentare zu den Ergebnissen von ROURKE

Die Bestätigung der Gruppenbildung auf allen Ebenen ist faszinierend. Die Beurteilung der Fehler hängt natürlich von den Testaufgaben – wir kennen sie leider nicht – und von der Analyse der Anforderungen der Aufgaben (es scheint sich vorwiegend um schriftliche Rechenverfahren in den Grundrechenarten zu handeln) und den Voraussetzungen für ihre Bewältigung ab. Uns fällt auf, dass sie *nicht* hinsichtlich mathematischer Konzepte interpretiert werden, obwohl von Störungen der Konzeptbildung die Rede ist. Was aus den Untersuchungen jedenfalls hervorgeht, ist, dass mathematische Leistungen sowohl von sprachlichen als auch von nicht-sprachlichen Funktionen beeinflusst sind, und zwar auf unterschiedliche Weise. Es ist für die Förderung eines Kindes natürlich wichtig feststellen zu können, ob es gute Zahlkonzepte und Problemlösefähigkeiten hat, obwohl es Fehler beim Rechnen macht, weil Abrufbarkeit und sprachliche Steuerung, die beim Abrufen mitspielen, beeinträchtigt sind.

VON ASTER weist in seiner Habilitationsschrift (VON ASTER, 1996) aber darauf hin, dass die Ergebnisse von ROURKE in verschiedenen Untersuchungen nur zum Teil bestätigt werden konnten: In einer neuseeländischen Untersuchung mit über 1000 Kindern „zeigte sich, dass Mädchen mit umschriebenen Defiziten im Rechnen nicht das erwartete charakteristische Muster von Stärken und Schwächen des Subtyps A aufwiesen und sich in ihren neuropsychologischen Funktionen nicht von denen einer Kontrollgruppe unterschieden“ (37).
In einer eigenen Untersuchung an 41 Kindern einer kinderpsychiatrischen Inanspruchnahmepopulation (d. h. an Kindern, die aus irgendeinem Grund in die Kinderpsychiatrie kamen), fand auch von Aster, dass die beiden Arten von Lernstörungen (Probleme in Mathematik und im Lesen und Schreiben oder Probleme in Mathematik ohne Probleme im Lesen und Schreiben) „nur teilweise assoziiert waren mit charakteristischen neuropsychologischen Merkmalen gemäß den ROURKE’schen Subtypen A und R-S.“

Bei der Untersuchung von 279 Schweizer Kindern mit der neuropsychologischen Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen für Kinder (VON ASTER, ZAREKI, 1996)[16]

[16] Auf das Verfahren ZAREKI werden wir im Abschnitt 5.4 eingehen.

ergaben sich bei einer Clusteranalyse[17] vier Personencluster, die VON ASTER auf Grundlage seines theoretischen Modells der Zahlenverarbeitung als vier Subtypen rechenschwacher Kinder interpretieren konnte. Nur 13 von 279 Kindern wichen in den Testleistungen um mehr als eine Standardabweichung von der Normalgruppe ab. Nur bei diesen 4,7 % der Kinder spricht von Aster von einer „kognitiv-neuropsychologisch begründeten Rechenstörung". Viele Kinder in dieser Gruppe (85 %) haben sowohl Schwierigkeiten im Rechnen als auch Schwierigkeiten im Lesen und Schreiben (VON ASTER, 1996, 175).
46 Kinder, die von ihren Lehrern als Kinder mit Rechenschwierigkeiten beurteilt wurden, wichen im Testergebnis nicht von den Leistungen der Normalgruppe ab. Von Aster bezeichnet sie als „Risikogruppe rechenschwacher Kinder" (VON ASTER, 1996, 172). 59 % dieser Kinder haben zugleich Schwierigkeiten im Lesen und Schreiben.[18]

Es scheint also eine große „Risikogruppe" von Kindern zu geben, deren Mathematikleistungen auffallend schlecht sind, ohne dass neuropsychologische Abweichungen verantwortlich gemacht werden können.

5.3.3 Diagnostische und therapeutische Chancen durch neuropsychologisches Wissen

Recht verbreitet ist die Hoffnung, mittels so genannter basaler Funktionen, oft die Verarbeitung von Wahrnehmungen und die Motorik betreffend, die Tiefenstruktur der Phänomene der „Rechenschwäche" zu verstehen und durch entsprechende Übungsbehandlungen vom Grunde her beheben zu können, weil nämlich die höheren kognitiven Funktionen auf den basalen errichtet seien. Dabei werden komplexe und weitgehend ungeklärte Zusammenhänge vereinfacht und für falsche Argumentationen benutzt.

Unbestreitbar ist das Gehirn die Voraussetzung auch der höheren kognitiven Funktionen, die, wie andere Funktionen auch, eine Integration von Teilfunktionen verlangen. Es leuchtet fast unmittelbar ein, dass bestimmte Aspekte der Wahrnehmungsverarbeitung (vgl. Luria, Block II), wie auch der Planung, Steuerung und Kontrolle von Handlungen (Luria, Block III) bei der Aneignung von Mathematik eine Rolle spielen.[19]
Aber das (wissenschaftlich gestützte) Modell des Mathematiklernens auf neuropsychologischer Ebene existiert (noch) nicht. Das hat Gründe. Es ist weitgehend unklar, wie und in welchem Umfang die höheren kognitiven Funktionen auf den basalen errichtet sind. Wahrscheinlich gibt es in gewissem Umfang verschiedene Möglichkeiten. Das ergibt sich schon daraus, dass Kinder mit verschiedenen Behinderungen dennoch rechnen lernen können: Es gibt motorisch unbeholfene Kinder, die gut im Rechnen sind. Wir

[17] „Die Clusteranalyse ist ein heuristisches statistisches Verfahren zur systematischen Klassifizierung von Personen. Diese werden nach ihrer Ähnlichkeit in Gruppen eingeteilt. Wenn eine Gruppe von Personen so strukturiert ist, dass sie in mehrere Klasse zerfällt, so lassen sich diese mit Hilfe der Clusteranalyse aufdecken. Dabei sollen Personen, die zu einer Klasse gehören, einerseits untereinander möglichst ähnlich sein ..., und andererseits sollen Personen unterschiedlicher Klassen sich möglichst klar voneinander unterscheiden." (VON ASTER, 1996, 132)
[18] Die Feststellung, dass in der ersten Gruppe (kognitiv-neuropsychologisch begründete Rechenstörung) die Jungen überwiegen, in der zweiten (Risikogruppe) jedoch die Mädchen können wir anhand der Tabelle auf S.173 nicht nachvollziehen.
[19] Eine gute Einführung in das Thema bietet DIETEL im Handbuch des TÜKI (DIETEL, 1992).

kennen eine Mathematiklehrerin, die noch heute rechts und links nicht spontan unterscheiden kann.

Bei komplexen funktionellen Systemen existiert im Gehirn eine gewisse Austauschbarkeit: Ein- und dieselbe Aufgabe kann unter Beteiligung verschiedener neuronaler Knotenpunkte bzw. funktioneller Systeme gelöst bzw. geleistet werden.
Von Aster hält fest, dass neuropsychologische Basisstörungen nicht spezifisch für Störungen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens seien und dass unklar sei, „in welcher Weise „einseitige“ Hirnfunktionsstörungen die Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen im Einzelnen beeinträchtigen können.“ (VON ASTER, 1996, 63)

Im Handbuch zur neuropsychologischen Testbatterie TÜKI (DIETEL, 1992) macht Dietel einige aufschlussreiche Bemerkungen, die wir im folgenden wiedergeben. Dietel bestätigt die Auffassung von der Abhängigkeit der höheren kognitiven Funktionen von den elementaren sensomotorischen für den Bereich der Sprachentwicklung. Die Entwicklung der Sprache und der von der Sprache geleiteten Steuerung und Kontrolle von Wahrnehmung und Handeln bringt eine qualitative Veränderungen der anfänglich bestehenden Abhängigkeiten.

> „Störungen elementarer Bausteine der sensomotorischen Analyse und Synthese, wie sie für die Sprachentwicklung gerade in der frühen Kindheit von besonderer Bedeutung sind, führen zur Unterentwicklung all der funktionellen Systeme höherer psychischer Leistungen, die darauf aufbauen.“ (DIETEL, 1992, 20)

> „In den frühen Entwicklungsstadien ist der enge Zusammenhang zwischen psychischer Entwicklung und Sensomotorik besonders deutlich; mit dem Älterwerden und der damit einhergehenden Sprachentwicklung reduziert sich der Einfluss dieser Komponenten; andere Faktoren, insbesondere sprachliche Planungs- und Steuerungsprozesse gewinnen an Bedeutung. Das beinhaltet natürlich auch, dass die diesen psychischen Funktionen zugehörigen (bzw. sie auf Hirnebene repräsentierenden) funktionellen Systeme nicht einfach bei der Geburt vorhanden sind oder irgendwie von selbst heranreifen, sondern „ ... im Prozess der Kommunikation und der gegenständlichen Tätigkeit des Kindes formiert werden ...““ (DIETEL, 1992, 14 f., Zitat von Luria)[20]

Andererseits widerspricht er der Annahme, dass Konzeptbildungsfähigkeiten (Problemlösen, Hypothesentesten) sich aus den basalen Fähigkeiten herausentwickeln:

> „Von besonderer neuropsychologischer Relevanz ist die spezielle Untersuchung der Fähigkeiten zur Konzeptbildung, zum Problemlösen und Hypothesentesten. Selbst bei Kindern mit durchschnittlichen und guten Leistungen in den anderen drei Bereichen (sensorisch-perzeptiv; motorisch-psychomotorisch; psycho-linguistisch – Einfügung von R. S.) sind gerade hier gelegentlich ausgesprochene Einbrüche zu beobachten. Dieser Befund steht übrigens in eklatantem Widerspruch zu gewissen populären und simplifizierenden Entwicklungsmodellen, die von einem quasi linearen Fortschreiten von den basalen Fertigkeiten bis hin zu den höchsten menschlichen Leistungen wie Sprache, Kognition, Lesen und Schreiben ausgehen. Aufgrund solcher Modellvorstellungen gerät man leicht in die Gefahr, die Förderung basaler Fähigkeiten zu sehr in den Vordergrund zu stellen (weil man irgendwie annimmt, dass sich dann die sog. höheren Funktionen wie von selbst entwickeln werden) und den komplexeren Fähigkeiten keine entsprechende Beachtung bzw. Förderung zuteil werden zu lassen.“ (DIETEL, 1992, 4)

[20] Zwei Aspekte, die hier angesprochen sind, werden in vielen Schriften zur Rechenschwäche vernachlässigt: die Bedeutung der sprachlichen Planungs- und Steuerungsprozesse bei der Denkentwicklung und der Einfluß der „Kommunikation“, d. h. der „Anderen“, auch bei der Entwicklung der sogenannten basalen Fähigkeiten.

Umgekehrt gibt es den Einfluss von Stärken im Bereich des Problemlösens auf Schwächen in den basaleren Bereichen:

> „Stärken im Bereich des Problemlösens und der Konzeptbildung ermöglichen es dem Kind, Einsichten über die eigenen Schwächen zu bilden und dann selbständig oder unter Anleitung Hilfs- und Kompensationsstrategien zu entwickeln ...“ (DIETEL, 1992, 6)

Aus diesem Grund sollte eine neuropsychologische Untersuchung stets vollständig sein (DIETEL, 1992, 7).

Das Problem, in das bestimmte Ansätze zur Untersuchung der Rechenschwäche führen, wird deutlich an einem Beitrag von LASCHKOWSKI (1995). Er schreibt einen Beitrag zu einer Diagnostik, „die das Ausmaß und die Tiefe der Probleme zeigt, Stärken und Schwächen darstellt und die allgemeine Leistungsfähigkeit beschreibt“(23). Doch was erhält man, wenn man sich mit diesem Anliegen dem „basalen Bereich“ zuwendet?

> „Die folgenden Überlegungen sollen die Frage klären, welche Voraussetzungen nötig sind, um „Rechnen“ zu erlernen, oder umgekehrt, welche Voraussetzungen fehlen, die Rechenstörungen verursachen können.“ (LASCHKOWSKI, 1995, 39)
> „Dazu drei Vorbemerkungen:
> 1. Fehlende Voraussetzungen in den Grundlagen können Rechenstörungen verursachen, müssen aber nicht linear wirken. Das Beziehungsgeflecht von Ursachen, Auslösern, Begleiterscheinungen und Symptomen ist bei komplexen Leistungen wie der Mathematik so unübersichtlich, dass keine allgemeingültigen Aussagen gemacht werden können. (...)
> 2. Die folgenden Bereiche sollen als Anregung dienen, die basalen Grundlagen bei einem Kind mit Rechenschwäche bei vorhandenen Hinweisen genauer zu betrachten. (...)
> 3. Auf die Darstellung von neuropsychologisch orientierten Testverfahren wird verzichtet (...) Der Umgang mit diesen Verfahren erfordert eine spezielle Ausbildung, viel Zeit und besondere Erfahrung, da diese Verfahren keineswegs die von Intelligenztests erfüllten Kriterien wie Objektivität, Reliabilität und Validität besitzen.“ (LASCHKOWSKI, 1995, 39)

> „Insgesamt ist der Forschungsstand uneinheitlich. Die Aufgabe der Psychologie und Pädagogik besteht nun, aus diesen Erkenntnissen handhabbare Modelle zu erstellen, die praktische Bezüge zum Unterricht und zur Förderung herleiten lassen. Stellvertretend für viele Ansätze sollen hier zwei Modelle vorgestellt werden, die konkrete Übertragung in die Praxis ermöglichen.“ (LASCHKOWSKI, 39)[21].

Wir haben grundsätzliche Fragen zu diesen Ausführungen: Die semantische Unklarheit des ersten zitierten Satzes bringt schon zum Ausdruck, was sich im ganzen Zitat zeigt: Der Autor kämpft mit der Erkenntnis, dass weder über Verursachungen noch über Voraussetzungsverhältnisse eine klare Aussage gemacht werden kann. So muss auch nach der Betrachtung der basalen Grundlagen noch offen bleiben, welche Zusammenhänge mit den besonderen Schwierigkeiten des Kindes in Mathematik bestehen.
Während die neuropsychologische Untersuchung den Lehrerinnen und Lehrern, an die Laschkowski sich wendet, mit guten Gründen nicht angeraten wird, ist offenbar davon auszugehen, dass die nicht neuropsychologisch geschulte Lehrerin aus irgendwelchen

[21] Die beiden erwähnten Modelle sind das Entwicklungsmodell von Ayres und ein Modell von Luria, in dem die neuropsychologischen Funktionen in drei Blöcke eingeteilt werden. Lurias Modell ist kein „Entwicklungsmodell“, wie Laschkowski es bezeichnet. Es wurde aus der Arbeit mit erwachsenen hirnverletzten Personen entwickelt. Die Wissenschaftlichkeit der beiden Modelle ist sehr unterschiedlich zu bewerten, daher irritiert ihre unkommentierte Präsentation nebeneinander (zu Ayres, siehe DIETEL, 1987; zu Lurias Modell, DIETEL, 1992).

Beobachtungen zu der Beschaffenheit basaler Funktionen etwas Sinnvolles hinsichtlich der Lernschwierigkeiten machen kann. Das ist fraglich.
Aber drängt sich aus all den Unklarheiten, die der Autor nicht übergeht, nicht etwas anderes auf: dass die Lehrerinnen und Lehrer vielleicht eine Einführung in die Neuropsychologie im Sinne von Luria machen sollten, wenn sie etwas darüber lernen möchten, aber ansonsten ihre Fördermaßnahmen bei Lernschwierigkeiten in Mathematik lieber nicht „basal“ ausrichten sollten?

Ein Beispiel für die weitere Entwicklung der Ausführungen von LASCHKOWSKI, das folgende Zitat, ist aus dem Kontext der Betrachtung der Grobmotorik genommen:

> „Der enge Zusammenhang zwischen Motorik und allgemeiner Entwicklung wurde in der Wissenschaft überzeugend bewiesen. (...) Das bedeutet für unsere Fragestellung, dass rechenschwache Kinder häufiger durch motorische Defizite in der frühen Kindheit auffallen. Der Zusammenhang ist plausibel: Handlungen und Bewegungen werden beim Rechnen verinnerlicht. Auffälligkeiten, zum Beispiel im Sport oder in der Pause, sollte nachgegangen werden. (...)
>
> „Die generelle Schlussfolgerung, dass durch Förderung der Motorik eine Rechenschwäche behoben werden kann, ist jedoch nicht zulässig. Schulsonderturnen oder Ergotherapie können die Voraussetzungen für Fortschritte in Mathematik verbessern.“ (LASCHKOWSKI, 1995, 45f.)

Es gibt also Voraussetzungen der Fortschritte in Mathematik, deren Förderung die Voraussetzungen für Fortschritte in Mathematik verbessert: Wie kommt man auf diesem Weg zu Fortschritten in Mathematik?
Die Aussage über den Zusammenhang zwischen Rechnen und Motorik ist typisch für Aussagen dieser Art, in denen zwischen „basalen“ Fähigkeiten und höheren kognitiven Fähigkeiten Beziehungen hergestellt werden: Alles bleibt im Allgemeinen, weder zur Motorik eine fundierte Ausführung, noch dazu, was Handlungen von einfacher Grobmotorik unterscheidet und welcher Aspekt welcher Handlungen dann das mathematische Verständnis ausmacht.

Zur folgenden Tabelle von MILZ haben wir folgende Fragen: Welche Beziehung besteht zwischen den Aussagen in den verschiedenen Spalten, z. B. denen in Spalte 1 und denen in Spalte 2, oder der ersten und der dritten Spalte? Verstehen wir richtig, dass das Konzept der Zahl als zusammengesetztes Ganzes (Spalte 1) als Produkt von Wahrnehmungen (Spalten 2 und 5) gedacht wird? Oder ist eine bestimmte Stufe der Zahlkonzeptbildung gemeint? Uns erscheint diese Tabelle höchst unklar und in ihrer Aussage uneindeutig.

Symptome, die in der Klasse beobachtet werden können	**Mögliche zugrundliegende Beeinträchtigungen**	**Beobachtungs- u. Diagnosemöglichkeiten**	**Heilpädagogische Förderung**	**Unterrichtshilfen**
5. Kind verfügt noch nicht über eine simultane Mengenerfassung (von 5-7 Elementen); Kind kann eine Anzahl von Elementen nicht zu einer Einheit zusammenfassen; kann die Eigenschaft (Anzahl als Eigenschaft) dieser Einheit nicht im Gedächtnis behalten; kann eine Anzahl von Elementen nicht als Gesamtmenge erfassen, sondern muß sie abzählen; kann beim Addieren den ersten Summanden nicht als Ganzheit erkennen, muß bei Hinzufügen des zweiten Summanden von Anfang an beginnen abzuzählen, um zur Summe zu gelangen.	5. Beeinträchtigung der Figur-Grund-Differenzierung; der Raumbeziehungen; Gliederungsschwäche, es kann nicht gruppiert werden; Beeinträchtigung der Wahrnehmungsvorstellung u. damit der Mengenvorstellung.	5. **Tests**: Untertests aus PET, FEW, SCSIT,TEKO, Kutzer, Radatz; **Beobachtungen**: Wie geht das Kind mit dem Auftrag, die Elemente einer Menge zu zählen, um? Kann es planen, antizipieren, hat es Strategien, Welche?	5. Übungen zur visuellen Vorstellung mit Hilfe der taktilen u. taktil-kinästhetischen Wahrnehmung über das Ansehen und Anfassen zum nur noch Anfassen mit geschlossenen Augen und schließlich Vorstellen; Ertasten von unterschiedlichen Gegenständen mit geschlossenen Augen (MONTESSORI-Sinnesmaterial); Gruppieren von Gegenständen nach vorgegebenen Mustern; Arbeiten mit Steckbrettern Perlenmosaik.	5. MONTESSORImaterial: Blau-rote Stangen, Bunte Perlenstäbe, Streifenbretter; Cuisinair – Rechenstäbe; Kühnelsche Zehner- Zwanziger- Hundertertafeln (Blätter zum Ab- bzw. Aufdecken); Übungen zur simultanen Mengenerfassung; Üben des Visualisierens; Lösungsstrategien bewußt trainieren; Mengen strukturieren, um sie bildhaft einzuprägen; Benutzen von Dominosteinen, Würfeln u.ä..

Tab. 5.2: Tabelle aus MILZ, 1993, 89.

Wenn nach den basalen Ursachen der Rechenschwäche im Kind gefragt wird, ist damit oft die Hoffnung verbunden, eine Maßnahme zur Behebung der Ursache veranlassen zu können, in deren Gefolge die Rechenschwäche dann verschwindet (oder die Hoffnung, eine andere Zuständigkeit für die Behebung der Probleme dieses Kindes auszumachen). Wir haben das Problem am Beispiel der Ausführungen von LASCHKOWSKI nur in etwas ironischer Weise behandelt und möchten ergänzen:

1. Mathematik zu lernen, bedeutet aktive Arbeit des Kindes und zwar Arbeit mit mathematischen Gegenständen und mathematischem Nachdenken über sie. *Keine andere* Übung kann diese Arbeit ersetzen.
2. Ob bestimmte neuropsychologisch umschreibbare Beeinträchtigungen eines Kindes durch Übungsbehandlungen so gemildert werden können, dass sie die neuropsychologische Funktion grundsätzlich verbessern, d. h. auch ihren Gebrauch in neuen und komplexen Kontexten, muss in vielen Fällen bezweifelt werden (VON ASTER, 1996, 42, 63). Dabei scheint das Alter, in dem die Fördermaßnahmen ergriffen werden, eine Rolle zu spielen (DIETEL, 1992, 7).[22]

In der Regel besteht die Aufgabe eher darin, dem Kind einen Weg des Mathematiklernens zu ebnen oder zu ermöglichen, auf dem es mit seinen Mitteln und in seinem Tempo vorankommen kann. Kennt man „schwache und starke“ neuropsychologische Funktionen des Kindes, kann man versuchen, dieses Wissen in die methodischen Überlegungen einfließen zu lassen. So kann man z. B. überlegen, wie das Kind seine Stärken zur Kompensation seiner Schwächen einsetzen kann. DIETEL favorisiert ein solches Vorgehen in Therapieprogrammen für ältere Kinder (ab 9 Jahren), die eine lange Misserfolgsgeschichte hinter sich haben. Rourke findet diesen Ansatz vor allem bei den Kindern wichtig, die allgemeine und andauernde Probleme der Sprachfunktionen haben, während visuelle, taktil-kinästhetische und psychomotorische Funktionen und nonverbale Problemlösefähigkeiten vergleichsweise gut entwickelt sind (nach DIETEL, 1992, 7).

[22] Damit sprechen wir uns mitnichten gegen heilpädagogische oder ergotherapeutische Übungsbehandlungen aus, wenn entsprechende Funktionsschwächen, die dort behandelbar sind, beim Kind vorliegen. Aber diese Behandlungen ersetzen nicht schulische oder außerschulische Bemühungen, dem Kind zu Fortschritten in Mathematik zu verhelfen, wobei an mathematischen Inhalten gearbeitet werden muss.

DIETEL gibt weitere Beispiele, wie eine Berücksichtigung neuropsychologischer Stärken und Schwächen aussehen kann:

> „Kinder mit selektiven Schwächen der visuellen und auditiven Inputsysteme profitieren in der Regel von taktil-perzeptiven Hilfen."
> „Kinder mit Schwächen im auditiv-perzeptiven Bereich (meist einhergehend mit schlechten Gedächtnisleistungen) müssen z. B. notwendig bei einer Therapieform scheitern, die Informationen, Kontaktangebote usw. hauptsächlich über die auditive Modalität anbietet."
> „So kann es durchaus sein, dass ein Kind in strukturierten unterrichtlichen Situationen recht gut lernt, aber große Schwierigkeiten hat, von informellen, unstrukturierten Lernsituationen (z. B. Spiel) zu profitieren. In der Regel sind das Kinder mit motorischen, visuell-kombinatorischen und taktilen Schwächen sowie mit Problemen bei der nonverbalen Konzeptbildung." (alle Zitate von DIETEL, 1992, 6)

Diese Aussagen machen deutlich, wie stark u. U. differenziert werden muss. Aber sie zeigen auch, dass das neuropsychologische Wissen das methodische Vorgehen des Erwachsenen nur in einer grundsätzlichen Weise beeinflussen kann, im Sinne einer Berücksichtigung von Stärken und Schwächen bei Aufmerksamkeit, Wahrnehmungsverarbeitung und Planung und Steuerung von Problemlösewegen. Es ist daraus allein kein Programm des Förderunterrichts in Mathematik ableitbar. Um dieses zu entwickeln, ist Wissen über die Entwicklung des mathematischen Denkens notwendig.

Wir versuchten (manchmal), mit neuropsychologischen Kategorien übergreifende Beobachtungen oder Diskrepanzen in den kindlichen Leistungen zu verstehen. Lukas rechnete 9 + 5 = 16; die Bitte, das Ergebnis nochmal zu prüfen, führte nicht zur Korrektur. Er konnte sein Vorgehen bei der Lösung nicht schildern und nicht wiederholen. Wenn die Untersucherin ihn fragte: „Wie viel fehlt von 9 bis 10? Wie viel musst du dann noch dazurechnen? Was kommt raus?" antwortete er jedes Mal richtig. Er konnte die einzelnen Schritte also ausführen. Manchmal wendete er die Strategie der Zehner-Ergänzung selbständig an. Aber er konnte sie nicht gezielt wählen, steuern und kontrollieren. Dazu passte, dass er oft nicht schildern konnte, wie er ein Ergebnis erhalten hat. Diese und andere Beispiele seines Vorgehens haben wir auf Grundlage der neuropsychologischen Unterscheidung von drei funktionalen Einheiten des Gehirns dem dritten Block „Planungs- Entscheidungs- und Kontrollsysteme" zugeordnet und die Hypothese aufgestellt, dass Lukas übergreifende Schwierigkeiten im Problemlösen hat, die daraus entstehen, dass er eine Problemstellung nur unzureichend analysieren, sein Vorgehen kaum bewusst planen, die Durchführung nur unzureichend steuern und das Ergebnis daher kaum kontrollieren kann.[23] Wir haben solche Überlegungen zu den übergreifenden Beobachtungen, die wir bei den Kindern machten, immer wieder hypothetisch angestellt. Da wir keine erfahrenen Neuropsychologen sind, haben wir die uns auffallenden Beobachtungen möglichst genau beschrieben und nicht versucht, sie auf Kategorien der Neuropsychologie zu reduzieren. Um entsprechende Hypothesen zu überprüfen, müsste eine umfassende neuropsychologische Untersuchung durchgeführt werden. Wir vermuten, dass Beobachtungen, die wir „übergreifende" genannt haben, weil sie bei verschiedenen Problemstellungen gemacht wurden, einen Ausgangspunkt für die Verbindung zu neu-

---

[23] Vergleiche auch das Beispiel von Lukas in Abschnitt 5.5, Durchführung des diagnostischen Interviews. Darstellung der von Luria vorgeschlagenen „Blöcke" in DIETEL, 1992.

ropsychologischen Differenzierungen darstellen. Für die weitergehende Befassung mit dem, was wir übergreifende Beobachtungen genannt haben, bleibt im Rahmen dieses Berichts keine Zeit mehr.

Das folgende Zitat begründet einleuchtend, weshalb Lernschwierigkeiten zunächst auf der Ebene der mathematisch kognitiven Prozessen untersucht werden sollten. ALLARDICE und GINSBERG bezweifeln, dass man „long-range causes“ weit (zurückreichende oder zurückgreifende Ursachen) zuerst untersuchen müsse. *An erster Stelle* müssten vielmehr *die aktuellen kognitiven Prozesse* untersucht werden, da man wissen müsse, was die potentiellen Ursachen denn eigentlich verursachen (nämlich eine besondere Beschaffenheit der kognitiven Prozesse). Neurologische Faktoren, ebenso wie unangemessene Instruktion oder emotionale Probleme, übten ihren Einfluss im Rahmen der kognitiven Prozesse aus.

> „In the cognitive perspective, it is premature to begin research with a consideration of long-range causes, ...; instead, it is first necessary to achieve an understanding of the current cognitive processes, so that one can determine what the putative long-range causes are causes of. A focus on cognitive processes is necessary because they mediate the workings of the various causative factors described. Neurological factors exert their influence through cognitive processes; inadequate instruction may produce disordered knowledge systems; emotional conflict may result in bizarre modes of thought. Hence, cognitive analysis is central.“ (ALLARDICE & GINSBERG, 1983, 332)

5.4 Instrumente zur Erfassung von Lernschwierigkeiten in Mathematik: drei Ansatzpunkte und drei Beispiele

Man kann drei Ansatzpunkte für die Erfassung besonderer Lernschwierigkeiten in Mathematik unterscheiden:

- Ein Modell der mathematischen Kompetenz, dessen Komponenten (Teilleistungen) in neuropsychologischem Wissen begründet sind, wird operationalisiert;
- Mit Bezug auf Vorgaben der Lehrpläne und einer Mathematikdidaktik wird eine repräsentative Sammlung von Aufgaben erstellt, die Minimalanforderungen[24] bestimmter Klassenstufen abdecken;
- Ein Modell über die Entwicklung der mathematischen Kognitionen, in dem entscheidende Schritte der Entwicklung dieser Kognitionen – eventuell unter Berücksichtigung verschiedener Entwicklungswege – charakterisiert sind, wird operationalisiert.

Vorliegende Verfahren zur Erfassung von Lernschwierigkeiten sind selten nur einem der drei Ansatzpunkt zuzuordnen, in der Regel setzen sie jedoch einen Schwerpunkt in einer dieser Richtungen. Die konkrete Verwirklichung kann in Bezug auf jeden Ansatz inhaltlich verschieden sein, weil es verschiedene neuropsychologische, didaktische und entwicklungspsychologische Modelle der mathematischen Kognitionen gibt. Wir stellen drei Verfahren vor, die wir vorwiegend dem ersten bzw. zweiten oder dritten Ansatz zuordnen. Alle drei Verfahren leisten Beiträge, die uns wichtig erscheinen.

[24] Minimalanforderungen im Hinblick auf die Kenntnisse, die auf einer bestimmten Klassenstufe vorausgesetzt sind.

5.4.1 Neuropsychologische Testbatterie für Zahlenverarbeitung und Rechnen (VON ASTER, 1996)

Grundsätzliche Überlegungen bei VON ASTER

Aus der Vielfalt der Kontexte, in denen Zahlen gebraucht werden und vielfältige Bedeutungen erhalten und aus den verschiedenen Formaten, in denen Zahlen auftreten (arabische Ziffern, gesprochene Worte, geschriebene Worte)

> „resultiert, dass jegliche Untersuchung in Bezug auf rechnerische Fertigkeiten und Zahlenverarbeitung notgedrungen mehrere Tests enthalten muss, die jeweils einen besonderen Aspekt des numerischen und arithmetischen Bereichs taxieren sollten. Die Ergebnisse sollten vor dem Hintergrund neuropsychologischer und entwicklungspsychologischer Erkenntnisse sowie im Rahmen etablierter Modelle der kognitiven Informationsverarbeitung interpretierbar sein und gleichzeitig individuelle praktische Hinweise für differentielle unterrichts- und therapiebezogene Hilfestellungen aufzeigen können.“ (VON ASTER[25], 1996, 66)

Von Asters Arbeit interessierte uns vor allem deshalb, weil er sich nicht auf klinisch-neuropsychologische Merkmale der im Rechnen versagenden Kinder konzentrieren, sondern die Prozesse der Zahlenverarbeitung und des Rechnens selbst untersuchen wollte.

> „Die bislang vorliegenden Arbeiten zum Thema Rechenstörungen nehmen großenteils kaum Bezug auf die Funktionen des Rechnens und der Zahlenverarbeitung selbst. Sie stellen vielmehr grundlegende Bereiche der Hirntätigkeit ins Zentrum der Betrachtung, von denen mit Recht angenommen wird, das sie an den Funktionen der Zahlenverarbeitung bzw. an ihrer Reifung und Entwicklung beteiligt sind (z. B. auditive, sprachliche, visuell-räumliche, taktil-kinästhetische und motorische Funktionen).“ (VON ASTER, 1996, 178)

> „Der Erklärungswert und der klinische Nutzen solcher Ergebnisse ist jedoch aus folgenden Gründen begrenzt:

- Neuropsychologische Basisstörungen im Bereich sprachlicher oder nonverbaler ... Funktionen sind längst nicht spezifisch für Störungen der Zahlenverarbeitung und des Rechnens.
- Es ist unklar, in welcher Weise „einseitige“ Hirnfunktionsstörungen die Entwicklung zahlenverarbeitender Hirnfunktionen im einzelnen beeinträchtigen können. Welche Auswirkungen hätten z. B. rechts- oder linkshemisphärische Funktionsdefizite auf die Lateralitätsentwicklung für Zahlen in verschiedenen Kodierungen (alphabetisch, arabisch, analog) und mit welchen Folgen für die Entwicklung weiterer funktioneller Differenzierungen in der Zahlenverarbeitung und im Rechnen?
- Therapeutische Konzepte, die sich in ihrer theoretischen Begründung auf unspezifische neuropsychologische Basisstörungen beziehen (eine logische Folge der genannten klinischen Forschungsstrategien), wie zum Beispiel „Kinästhesiologie“, „Graphomotorische Therapie“, aber auch „Sensorisch-integrative Therapie“ und andere Ansätze, sind den Beweis für ihre Effektivität bei der Behandlung von Schulleistungsstörungen bis heute schuldig geblieben.“ (VON ASTER, 1996, 63f.)

Den theoretischen Hintergrund des Tests bilden ein einerseits kognitiv-neuropsychologisches Modell der Prozesse der Zahlenverarbeitung und des Rechnens („Triple-Code-Modell“ von DEHAENE, 1992), und andererseits einige Erkenntnisse der Entwicklungs-psychologie des Rechnens und der Zahlenverarbeitung. Beide Elemente werden im Folgenden charakterisiert.

---

[25] Die folgenden Zitaten sind alle derselben Arbeit von Asters entnommen – der Habilitationsschrift, die er uns freundlicherweise vor der eigentlichen Veröffentlichung überlassen hat.

Das kognitiv-neuropsychologische Triple-Code-Modell (DEHAENE, 1992)

Dehaene möchte mit seinem Modell die Prozesse der Zahlenverarbeitung und des Rechnens bei erwachsenen Personen abbilden. Von Aster bezieht sich darauf im Sinne des Ziels der Entwicklung, es beschreibt, was „die erworbene, „ausgereifte“ geistige Funktion des Rechnens und der Zahlenverarbeitung“[26] leisten soll. DEHAENE kam es darauf an, nicht nur die syntaktischen Prozesse zu berücksichtigen, sondern auch die semantischen Aspekte der Zahlenverarbeitung und des Rechnens. Das Modell

> „beschreibt drei unterschiedliche Repräsentationsmodule für Zahlen, die durch wechselseitige Übersetzungsverbindungen miteinander verschaltet sind. Jedes Modul verfügt über spezifische Input- und Output-Prozessoren, die die Aufnahme bzw. die Produktion zahlenbezogener Informationen in verschiedenen Formaten (Wortform, Ziffernform, analoge Mengenbedeutungen) ermöglichen. Das Modell erlaubt das Transkodieren von Zahlen sowohl auf einem „semantischen Weg“ wie auch auf einem „asemantischen Weg“.“ (VON ASTER, 1996, 10)[27]

Die Charakterisierung der drei spezifischen Verarbeitungseinheiten geben wir im folgenden in Stichworten wieder:

Zur „Auditiv-sprachlichen Repräsentation und Verarbeitungseinheit“:
- Bestandteil der allgemeinen sprachverarbeitenden Systeme;
- Zahlen werden in Wortform manipuliert;
- die Beherrschung der Zählsequenz (Folge der Zahlwörter) ist hier eingeordnet;
- Auch das Abrufen von Additions- und Multiplikationsfakten ist als „verbal gespeicherte Assoziation“ hier eingeordnet.

Zur „Visuell-arabischen Repräsentation und Verarbeitungseinheit“:
- Zahlen werden in Form arabischer Ziffern manipuliert;
- Die Verarbeitung ist zwar abhängig von sprachlichen Funktionen, bedarf aber wegen der besonderen Syntax – den spezifischen Regeln der Stellenwertschreibweise – der systematischen Unterrichtung;
- Kompetenz im Umgang mit mehrstelligen Zahlen wird hier eingeordnet;
- Auch die Beurteilung, ob eine Zahl durch zwei teilbar ist, wird hier zugeordnet.

> „Komplexe Rechenanforderungen erfordern ein ständiges Hin- und Zurückübersetzen zwischen den beiden genannten Repräsentationsmodulen, wobei dieses Modell explizit asemantische Transkodierungsprozesse zulässt.“ (VON ASTER, 1996, 12)

[26] VON ASTER, 1996, 6.

[27] Die verschiedenen *Formate* sind: die Zahl in arabischen Ziffern geschrieben, das gesprochene und das geschriebene Zahlwort und eine analoge Größenrepräsentation der Zahl, die man sich als ungefähren örtlichen Bereich auf einem inneren Zahlenstrahl denkt (VON ASTER, S. 12).
Jedem Format sind bestimmte Formen des Umgangs mit Zahlen und des Zahlwissens zugeordnet, die zusammen das ausmachen, was *Modul* genannt wird. Eine alternative Bezeichnung ist „spezifische Verarbeitungseinheit“.
Transkodieren heißt so viel wie Übersetzen.

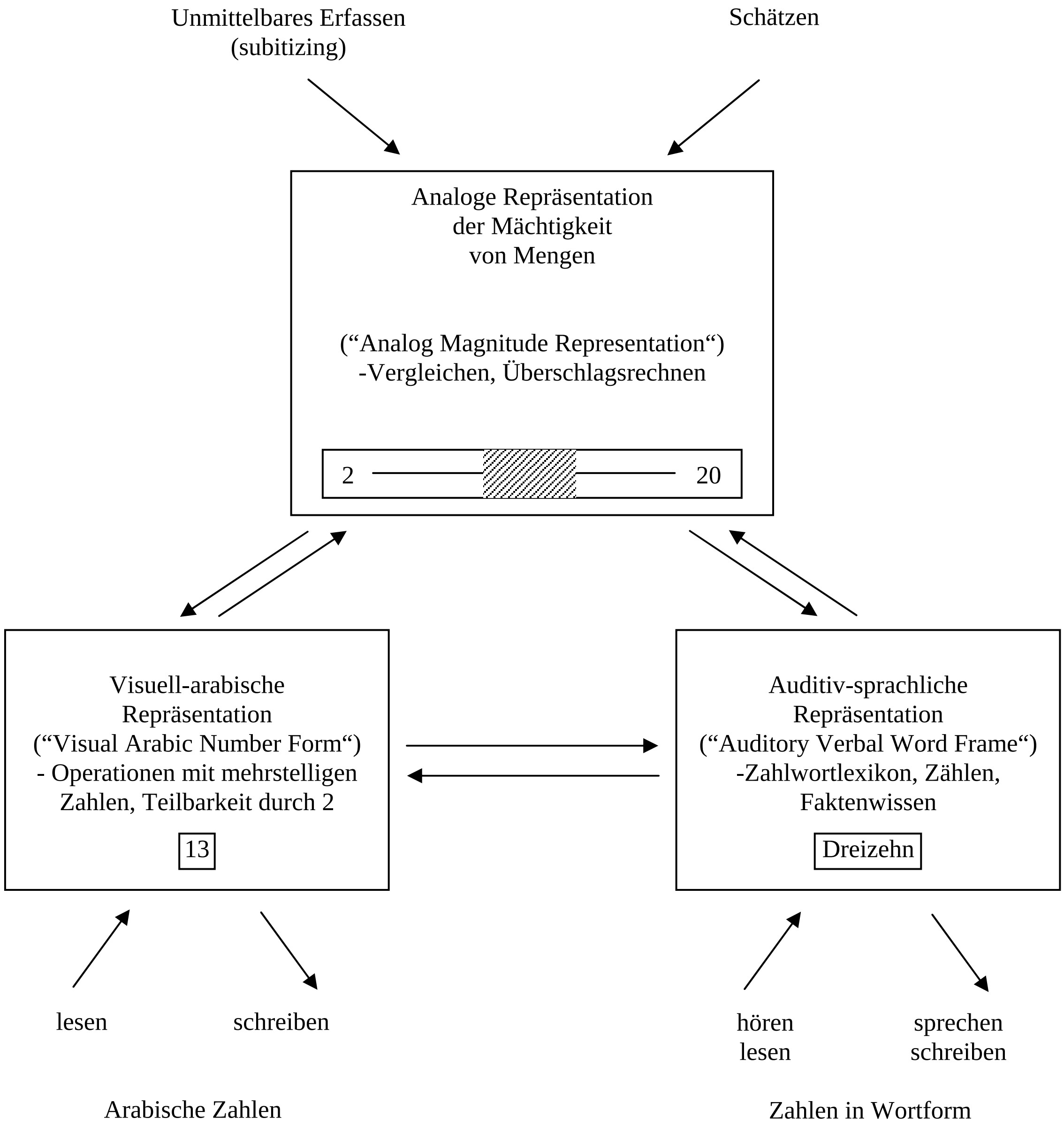


Abb. 5.4: Abbildung des Triple-Code Modells nach DEHAENE (1992) in der Arbeit VON ASTER, S. 11

Zur „Analogen Repräsentation der Mächtigkeit“:

- „Zahlen sind ... im Sinne eines ungefähren örtlichen Bereichs auf einem inneren Zahlenstrahl repräsentiert.“
- „Diese Zahlenstrahl- oder Zahlenraum-Vorstellungen sind äußerst vielgestaltig und weisen dennoch gewisse Gesetzmäßigkeiten auf, wie z. B. die Tendenz, dass die Distanz zwischen zwei Zahlen im Bereich 0 bis 20 ... subjektiv viel größer ist als die objektiv gleiche Distanz im Bereich größerer Zahlen.“
- „Das Input-Format für diese Verarbeitungseinheit bilden jene präverbalen, rein wahrnehmungsgestützten, numerischen Fähigkeiten, die bereits bei Säuglingen im Kern als so genannte protoquantitative Schemata vorhanden sind und als angeborene numerische Fertigkeiten gelten können: das unmittelbare Erfassen kleiner Mengen (ohne verbales Zählen) genannt „Subitizing“ und das Schätzen von Mengen.“ (VON ASTER, 1996, 12 f.)

Entwicklungspsychologie des Rechnens und der Zahlenverarbeitung

VON ASTER bezieht die folgenden entwicklungspsychologischen Erkenntnisse und Annahmen ein:

- Es gibt angeborene numerische Fertigkeiten, die als Grundlage der semantischen Verarbeitung von Zahlen und Zahlwörtern angesehen werden: Die Fähigkeit des Kleinkindes Mengen von bis zu vier Objekten zu *unterscheiden* und bei Veränderungen an solchen Mengen angemessene Erwartungen über die veränderte Menge auszubilden. Auch das „Subitizing" wird als angeborener Mechanismus verstanden. Damit kann aber nicht das *Benennen* der Muster gemeint sein.
- Eine zweite Entwicklungslinie bildet der Erwerb der Zählprinzipien, wie sie von Gelman und Gallistel beschrieben werden.[28]
- Zahlzerlegungen und Abrufbarkeit der Basisfakten werden so erklärt: Nach dem Erwerb des Kardinalitätsprinzips im Sinne von Gelman und Gallistel werde das zählende Lösen von Additions- und Subtraktionsaufgaben praktiziert. Von Versuch zu Versuch wachsen dabei die Assoziationsstärken an. Zu Zahlzerlegungen komme es, „weil Teilaspekte schon aus dem Gedächtnis verfügbar sind und nicht mehr gezählt werden müssen" (S. 19).
- Wenn die Basisfakten bekannt sind, können die Regeln des arabischen Notationssystems, eingeschlossen die Algorithmen für Rechenoperationen in größeren Zahlenräumen, gelernt werden. Das geschieht durch systematische Unterrichtung. In diesem Zusammenhang wird das „Part-Whole-Prinzip" erwähnt, welches besage, dass Zahlen aus anderen Zahlen zusammengesetzt sind. Es entwickle sich zwischen dem 5. und 6. Lebensjahr und spiele beim Erwerb der Algorithmen eine Rolle.

Die Operationalisierung

Sie erfolgt in 11 Untertests, die wir im Folgenden auflisten.

1. Abzählen von Punktmengen auf Papier, die teilweise strukturiert sind, und Aufschreiben des Ergebnisses.
2. Zählen mündlich rückwärts von 22 bis 1.
3. Zahlenschreiben nach mündlichem Diktat (zwei- bis vierstellige Zahlen für alle Kinder).
4. Kopfrechnen (sechs Additionsaufgaben, sechs Subtraktionsaufgaben bis Zahlenraum 40)
5. Zahlenlesen von Zahlen, die in Ziffern geschrieben sind.
6. Anordnen von Zahlen auf einem Zahlenstrahl, dessen Enden mit 0 bzw. 100 markiert sind. Er weist drei weitere Markierungen auf, die nicht beschriftet sind. Das Kind soll beurteilen, welche Markierung der Zahl entspricht, die neben des Zahlenstrahl geschrieben ist:

[28] Siehe Abschnitt 7.2.1

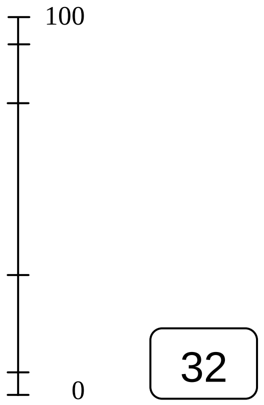


Abb. 5.3: Eine Aufgabe aus dem Untertest „Anordnen“ des ZAREKI.

7. Vergleich von zwei gesprochenen Zahlen. Zwei Zahlen werden gesprochen, die erste wird gestisch „auf“ der linken Hand präsentiert, die zweite auf der rechten. Das Kind soll die Hand berühren, wo die größere Zahl ist. Bis zu fünfstellige Zahlen (einmal) für alle Kinder.
8. Perzeptive Mengenbeurteilung. Zwei Mengen, die als Abbildungen dargeboten werden, mit 57 und 89 Gegenständen, sollen geschätzt werden. Angemessen ist eine Schätzung, wenn zwischen 20 und 100 bzw. zwischen 30 und 130 geschätzt wird.
9. Kognitive Mengenbeurteilung. Eine durch ein Zahlwort benannte Menge soll in Hinblick auf einen spezifischen situativen Kontext als viel/mittel/wenig beurteilt werden. Beispiel: 10 Blätter an einem Baum.
10. Textaufgaben. Bei den vier Aufgaben werden die Schwierigkeiten durch folgende Variationen variiert: Austausch-Aufgabe; Kombinations-Aufgabe; Vergleichsaufgabe; Erfordernis mehrerer Rechenschritte; sprachliche Oberflächenstruktur teils richtungsgleich teils richtungsverschieden zu den zu vollziehenden Operationen.
11. Zahlenvergleich in Ziffernform.

Einige Bemerkungen zu diesem Ansatz aus unserer Sicht

Zum Triple-Code-Modell:

Sinnvoll und nützlich erscheint uns die Unterscheidung der verschiedenen mentalen Repräsentationsformen von Zahlen. Sie ist neuropsychologisch und entwicklungspsychologisch gerechtfertigt und bietet eine Strukturierungshilfe für die Untersuchung von Rechenschwierigkeiten hinsichtlich der Zahlverarbeitung und des Zahlverständnisses. Förderliche und hinderliche Einflüsse der Sprach- und Symbolverarbeitung auf die Entwicklung des Zahlverständnisses können vor diesem Hintergrund antizipiert werden. Eine asemantische Deutung eines Fehlers als Übersetzungsproblem (bei der Rezeption oder bei der Produktion eines Zahlwortes oder einer Zahl in arabischen Ziffern) wird von einer semantischen unterscheidbar. Das Modell macht nicht zuletzt sichtbar, welch komplexe Integration erforderlich ist.
Zu eng gefaßt und in seiner Beziehung zu den beiden anderen Modulen nicht hinreichend erläutert scheint uns jedoch die Charakterisierung des dritten Formats, der analo-

gen Größenrepräsentation der Zahlen. Zu eng, weil nur die Form des Zahlenstrahls angenommen wird. Vermutlich gibt es verschiedene analoge Repräsentationsformen, die abhängig sind von Entwicklungsstand, Unterrichtserfahrung usw. Die Form des Zahlenstrahls entwickelt sich in Verbindung mit der Zählreihe oder Zahlreihe. Sehr bedeutungsvoll sind aber analoge Repräsentationen, die die Klassenbildung von Einern, Zehnern, Hundertern usw. und ihre Beziehungen zueinander widerspiegeln, die zumindest als übergeordnete Gliederung des Zahlenstrahls erwähnt und deren Erwerb (vermutlich semantisch) erklärt werden müssten. Die Integration dieser Repräsentationen mit der Syntax der arabischen Zahlen ist für das mathematische Verstehen und Können von größter Bedeutung. Kurz, die Aussagen zu diesem Modul werden dem Anspruch, hier sei das eigentliche Zahlenverständnis (VON ASTER, 1996, 12) enthalten, nicht gerecht.
Aus diesem grundlegenden Mangel ergeben sich zwei spezifische Lücken, die uns besonders aufgefallen sind: Es hat den Anschein, dass das Verständnis der Stellenwerte (der dezimalen Klassenbildung als Grundlage unserer Notations- und Sprechweise) mit der Kenntnis von Regeln des arabischen Notationssystems gleichgesetzt wird; eine Verbindung zur analogen Repräsentation wird nicht erwähnt. Das mag (oberflächlich betrachtet) für den erwachsenen kompetenten Rechner zutreffen, solange er Routineaufgaben löst. Zugrundeliegen muss jedoch eine analoge quantitative Repräsentation, die bei Bedarf herangezogen werden kann.
Der Erwerb der Additionsfakten ist nicht nur eine verbal-assoziative Leistung. Sogar bei Erwachsenen erfolgt der Abruf manchmal nicht nur auf dieser Grundlage. Die Verfasserin bemerkt noch heute die Strategie, mit der sie einige Fakten herleitet, wobei sie sich eines Bildes bedient, das eine Zehnerzäsur aufweist. In der Projektzeit erwarb sie weitere Strategien, die ihr Abrufverhalten jetzt beeinflussen. Wenn man den Erwerb der Basisfakten nur als verbale Assoziationen begreift, kann es bezüglich der Entwicklungshindernisse zu Fehleinschätzungen kommen.

Zur entwicklungspsychologischen Grundlage:

Aus Kapitel 3 geht hervor, dass wir die entwicklungspsychologische Seite anders konzipieren. Die Unterschiede ergeben sich u. a. aus der unterschiedlichen Auffassung vom Lernen: Was sich bei von Aster entwickelt, wird aus unserer Sicht *konstruiert*. Das Verständnis der Zerlegbarkeit der Zahlen ergibt sich für uns nicht aus dem verbalen Gedächtnis. Wir betonen außerdem die Verankerung der Beachtung von Prinzipien und Regeln (Modul 2) in den Bedeutungen, die das Kind den Zahlen gibt (Modul 3).

5.4.2 „Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten“ (KUTZER & PROBST)[29]

Die beiden Hefte stellen Einzeltests für Kinder von Vorschule/Kindergarten bis zur Grundschule 3. Klasse und für ältere Förderschüler dar. Der Lernstand soll damit „ohne

[29] Bestellung bei Prof. Dr. PROBST, Institut für Heil- und Sonderpädagogik, Schwanallee 50, 35037 Marburg.
Aus den Heften zitieren in der Form, dass wir in römischen Zahlen (I für Teil 1 und II für Teil 2) angeben, ob das Zitat aus dem ersten oder aus dem zweiten Heft ist, und anschließend die Seitenzahl angeben.

Bezug zu einer Alters- oder Klassennorm“ beurteilt werden, „sondern allein mit Bezug auf das relative Gefüge ... notwendiger Erkenntnisschritte.“ (II, 1) Das Ergebnis der Testuntersuchung soll eine „Bestandsaufnahme der aktuellen Einsichten und Kenntnisse des Schülers“ sein (II, 1).
Dabei ist für die Absicht und die Anwendung des Tests von größter Wichtigkeit, dass es sich nicht um „eine bloße Aufzählung der beherrschten Inhalte“ (II,1) handelt, sondern dass die Aufgabenstellungen der Entwicklungslogik folgend aufeinander aufbauen: Die Fähigkeit, eine Testaufgabe zu lösen, setzt notwendig voraus, dass die im Test vorausgehenden Aufgaben gelöst werden konnten. Das Ergebnis einer Testanwendung soll also aufzeigen, an welchem Punkt einer notwendigen Entwicklungslinie das Kind sich befindet und welches die Zone seiner nächsten Entwicklung ist.

Prinzipielle Identität der Entwicklungswege und Voraussetzungsstrukturen

Man bemerkt, dass die Autoren gewisse Vorannahmen machen, die sie auch explizit formulieren:

> „Das didaktische Konzept geht davon aus, dass die Abfolge der mathematischen Einsichten für alle Schüler dieselbe und damit obligatorisch ist, mögen sie auch zu unterschiedlichem Lebensalter, in unterschiedlicher Geschwindigkeit und unter einigen qualitativen Besonderheiten des Lernens und der Methodik durchlaufen werden.“ (I,15)

Die zweite Voraussetzung ist die, dass es eine „Voraussetzungsstruktur“ für Zahlbegriff und Zahloperation gibt. Sie wird – für das Heft I – in untenstehender Abbildung dargelegt, die von unten nach oben zu lesen ist.

> „Wer sich nicht scheut, von didaktischen und lernpsychologischen Gesetzmäßigkeiten zu sprechen, verrät die Überzeugung, dass die Klein-, Vorschul- und Schulkinder in ihren Lern- und Entwicklungsprozessen an bestimmten Knotenpunkten von Einsichten nicht vorbeikommen, und dass diese Knotenpunkte auch die didaktisch-diagnostischen Nadelöhre sind. Zum Beispiel die Mengenerhaltung bei unterschiedlicher Anordnung und Repräsentanz ist ein solches Nadelöhr auf dem Weg zum Zahlbegriff.“ (PROBST, 1983, 96f)

Diese beiden Annahmen (prinzipielle Identität der Entwicklungswege und notwendige sachlogische Struktur und Hierarchie der Entwicklungsschritte) werden begründet, zum einen durch Erfahrungen beim Unterrichten:

> „Viele Schüler werfen bei den Grundrechenarten im höheren Zahlbereich Einer, Zehner etc. durcheinander. Die materielle Erfahrung der Bündelung von Mengen zu Mengen höherer Ordnung ... führt diese Schüler zu einer zentralen und unabdingbaren Einsicht, die alle Rechenarten sprunghaft verbessert.“ (PROBST, 1983, 97)

Als weiteres Argument wird die Lerngeschichte der Menschheit angeführt, deren Weg zur Zahl aller Wahrscheinlichkeit nach über eine Stück-für-Stück-Zuordnung führte, indem beispielsweise für jedes Stück Vieh ein Steinchen zur Seite gelegt wurde.

Auch durch eine logische und fachwissenschaftliche Analyse der Anforderung einer Aufgabe könne man Knotenpunkte (notwendige Voraussetzungen für die Lösung dieser Aufgabe) herausarbeiten.

führt Rechenaufgaben aus
und kann sie erklären
(Zahloperation)

Zahlbegriff

ordnet Mengen ihre
Mächtigkeitsklasse zu

neue Zahleigenschaften ergeben sich bei
Hinzufügen oder Wegnehmen von Elemen-
ten.

vergleicht Mengen nach
der Mächtigkeit, ohne sich
von der Anordnung der
Elemente beirren zu lassen.

vergleicht Mengen nach
der Mächtigkeit, ohne
sich von der Art
und Größe der Elemen-
te beirren zu lassen.

zerlegt und
vereinigt
(Teil-) Mengen.

kann die Mächtigkeit
jeder Menge um eins
erhöhen oder um eins
vermindern.

Ordnet einer vorliegenden Reihe von Elementen eine gleichmächtige Reihe zu.	beurteilt zugeordnete Mengen nach mehr/weniger/ gleichviel hinsichtlich der Zahl der Elemente.

bestimmt nach den Eigenschaften, wel-
che Elemente zu einer Menge gehören

benennt die Eigenschaften (der Klotz ist rot)

versteht Eigenschaftswörter (zeigt einen roten Klotz)

sortiert nach Eigenschaften (bildet Kategorien und sortiert Elemente danach)

ordnet Elemente vorgegebenen Mustern zu

stellt taktil, durch Auflegen, gleiche oder ungleiche Elemente fest

legt Klötze in passende Aussparungen (Formbrett)

spielt mit Bällen, Kugeln, Bausteinen entsprechend ihren Eigenschaften (rollen, bauen, stapeln)

Abb. 5.4: Aufbau vorzahliger und numerischer Einsichten (nach KUTZER & PROBST, o. J., I, S. 76)

Kinder mit guten allgemeinen Lernvoraussetzungen können „Knotenpunkte“ scheinbar überspringen, „einfach nebenher vollziehen“ (PROBST, 1983, 98).

> „Wenn man aber Schüler mit schlechten Lernvoraussetzungen vor sich hat ... so werden die individuellen Lernprozesse, wenn sie stattfinden, in ihrer entfalteten Form sichtbar. Sichtbar durch Zeitlupe, sichtbar durch ihren Ausgangspunkt in konkreter Handlung und materi-

> alen Erfahrungen, sichtbar wie unter einem Vergrößerungsglas. Hier darf kein Knotenpünktchen ungestraft ausgelassen werden, und jede Einsicht ist nach den verschiedenen Parametern sorgfältig vorzubereiten. Hier kommt der Beobachter leicht zu der Überzeugung, dass die Einsichten den Weg von außen nach innen gehen, und dass sich die Psycho-Logik über die Logik der Lernanforderungen aufbaut.“ (Probst, 1983, 98)[30]

Das vierte Argument für die Annahmen sind die Voraussetzungsanalysen, die die Autoren durchgeführt haben: Dabei wird für je zwei Aufgaben ein Voraussetzungskoeffizient berechnet, und zwar aus den Häufigkeiten, mit denen in einer Untersuchungsgruppe von 99 Kindern die Kombinationen von Erfolg/Nicht-Erfolg und andere bei diesen beiden Aufgaben auftraten.

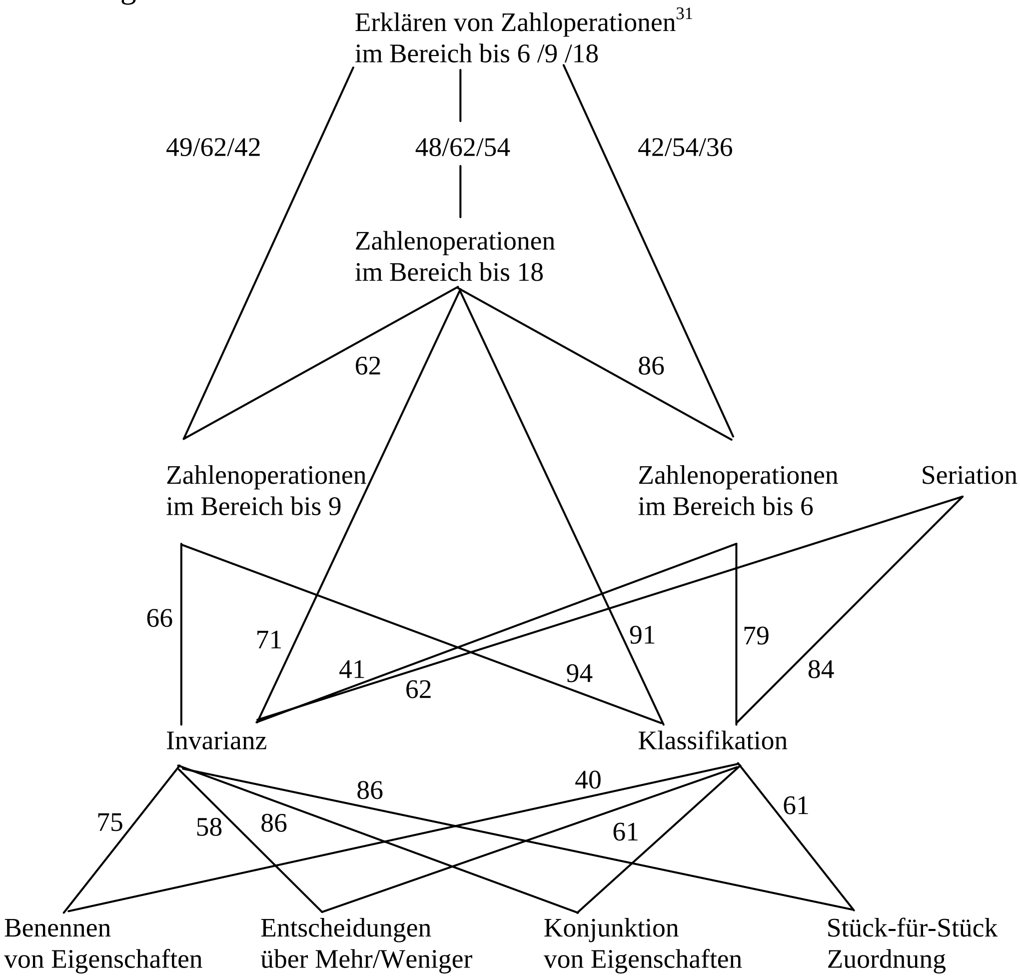


Abb. 5.5: Voraussetzungsstruktur von Lernvoraussetzungen und Teilleistungen für Zahlbegriff und Zahloperation. Erhalten bei der Untersuchung von 99 Schülern von Lernbehinderten-Schulen. Der Voraussetzungskoeffizient, der an die Verbindungslinien geschrieben ist, ist ab V = 78 signifikant auf dem 5%-Niveau. (nach PROBST, 1983, 87)

---

[30] Diese Annahme steht hinsichtlich ihrer didaktischen Implikationen – Lernanforderungen dürfen nur allmählich erhöht werden und sie bereiten jeweils die neue Einsicht des Kindes vor – in Widerspruch zu aktuellen Annahmen, nach denen die Entwicklung des mathematischen Denkens durch komplexe Aufgabenstellungen gefördert wird. Kutzer und Probst gehören jedoch nicht zu denjenigen Didaktikern, die den schwachen Kindern das Denken ersparen wollen. Dieses Thema ist für die didaktische Diskussion außerordentlich wichtig.
Die Aussage „von außen nach innen“ kann so verstanden werden, dass „objektive Eigenschaften“ der Mengen und Handlungen in mathematische Konzepte übergehen. Wir verstehen es lieber so, dass bei schwächeren Schülern der Weg zu abstrakten Überlegungen stärker der Reflexion an sichtbaren, faßbaren Gegebenheiten bedarf.

[31] Damit meint PROBST: „Umformulieren von Rechenaufgaben in Beispiele oder Textaufgaben zum Dokumentieren, dass der Schüler nicht „Rechensätzchen“ hersagt, sondern, wenn erforderlich, sich etwas konkretes oder praktisches unter einer Zahlenoperation vorstellen kann.“ (PROBST, 1983, 84)

Die Struktur, die sich für die Addition und Subtraktion in Teil II ergibt, wird hier nicht abgebildet, da sie nach Aussage der Autoren unvollständig ist (II, 13).

Die Dimensionen der Aufgabenschwierigkeit: „Komplexität“, „Repräsentationsniveau“ und „Lernart“

Die Anordnung der Aufgaben entspricht, wie schon erwähnt, auch der sachlogischen Struktur, die die Autoren auch ihre Komplexität nennen:

> „Dieses meint den Grad ihrer Zusammengesetztheit aus zwei oder mehreren einfacheren Elementen, die Beteiligung mehrerer elementarer und damit leichterer Erkenntnisse, die in eine anspruchsvolle Aufgabe einfließen, und ohne die sie nicht lösbar ist.“ (II,2)

Von der Dimension „Komplexität“ unterscheiden die Autoren eine zweite, die sie das „Repräsentationsniveau“ nennen. Hier wird geprüft, wieweit das Wissen über Mengen bzw. deren Mächtigkeiten auf Zahlen übertragen wurde bzw. werden kann:

> „Dies (das Repräsentationsniveau, R. S.) meint die Abstraktheit der psychischen Repräsentation, die von konkreten Handlungen (Operationen mit Objekten, Mengen) über ihre (teilweise) vorgestellte Ausführung bis zur „rein geistigen“ Lösung zunimmt. In diesem Sinne sind im Test (relativ) leichte Aufgaben erkenntlich, die nach der handelnden Ausführung einer Mengenoperation fragen, während schwierigere nur den vorgestellten Lösungsweg zulassen. Die relativ schwierigsten verlangen die Erklärung oder Demonstration von Verstandenem.“ (II,2)
> „Eine dritte Lerndimension wird in beiden beachtet, im Test aber nicht operationalisiert, nämlich die Lernart: Es ist zu unterscheiden, ob der Proband eine Lösung durch häufige Wiederholung und Auswendigkönnen erzielt, ob dies durch Herumprobieren gelingt oder ob die Lösung durch innere Antizipation gedanklich erzeugt wird.“ (PROBST, 1983, 85)

Zur Bedeutung der „Strukturbezogenen Aufgaben zur Prüfung mathematischer Einsichten“ aus unserer Sicht

Was uns an den Arbeiten sehr gefällt, ist die sorgfältige Durchdachtheit der theoretischen Basis und ihrer Umsetzung in konkrete Aufgabenstellungen. Die Gestaltung des Tests ist in *expliziten* Vorstellungen über *Knotenpunkte* der mathematischen Einsichten und ihrer Entwicklung verankert. Wir meinen, dass ein Verfahren zur Erfassung der Lernvoraussetzungen diesen *Anspruch* haben sollte.
Wir teilen auch die Beurteilung der Autoren über normbezogene Tests zur Erfassung des Lernstandes (sehr verständliche, anschauliche Darstellung der Probleme in Heft I, S. 4-7).

Dass Zahlstrukturen sich auf Mengenebene verdeutlichen lassen und dass dieser Zugang für den Erwerb des Zahlbegriffs und der Zahleigenschaften notwendig ist, findet natürlich auch unsere Zustimmung. Eine Lücke bemerken wir jedoch in der Hinsicht, dass nicht die Frage gestellt wird, wie Kinder nach dem prinzipiellen Verständnis der Additivität von Mächtigkeiten zur Kenntnis von bestimmten Zahlzerlegungen – z. B. den Beziehungen zur 5 und zur 10, den Analogien zwischen Zahlenraum 11 bis 20 und Zahlenraum 1 bis 10 u. ä. – gelangen. Eine Strukturierung von Mengen oder die Fähigkeit zur Strukturierung findet keine Beachtung. Auch Rechenstrategien werden nicht untersucht.

In der Aufgabe 12 von Teil I soll der Schüler gleichmächtige Mengen herstellen („Jetzt sollst du gleich viele haben wie ich. Was musst du tun, damit wir gleich viele haben?“). Die Aufgaben 13 und 14 befassen sich mit der Beherrschung der Zahlwortreihe und dem Zahlenlesen und -schreiben. In den Aufgaben 15 und 16 sollen Basisfakten genannt (Aufgaben schriftlich vorgelegt) und anhand von Plättchen erklärt werden („Kannst du mit den Plättchen zeigen, wie du die Aufgabe gerechnet hast?“). Aus unserer Sicht schließen sich die Fähigkeiten, die die beiden letztgenannten Aufgaben benötigen, nicht an Aufgabe 12, 13 und 14 unmittelbar an.

Die Additivität der Mächtigkeiten (Anzahlen), die man als Übergang des protoquantitativen Teile-Ganzes-Schemas auf die Zahlen, verstehen kann, ist durch Aufgabe 12 nicht hinreichend geprüft.

Der Vergleich mit der Zeit, in der mit Steinchen gezählt wurde und in der keine Zahlwörter existierten, kann dazu führen, dass der von Kindern unserer Zeit oft gewählte Zugang zur Mächtigkeit und zum Rechnen mittels der Zahlwortreihe übergangen wird. Es scheint aus verschiedenen Gründen nicht richtig, das, was Kinder mit in die Schule bringen, nicht einzubeziehen.
Die Art und Weise, in der die Integration der Zahlreihe mit den quantitativen Repräsentationen der Zahlen erfolgt, hängt u. U. von den Vorlieben und Stärken des Kindes, aber auch von seinen Schwächen, ab.

5.4.3 „Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule“ (AMT FÜR SCHULE HAMBURG, 1991)[32]

Dieser „Hamburger Beobachtungsbogen“, wie wir ihn genannt haben, ist der Ausgangspunkt unserer Untersuchungen der uns vorgestellten Kinder gewesen. Aus der Vertrautheit hat sich Verbundenheit entwickelt. Aber nicht geistige Inflexibilität veranlasst uns, diese Beobachtungsanleitung vorzustellen. Sie gefällt uns in ihrer Zielsetzung, ihrer inhaltlichen Differenzierung, in ihren Beobachtungs- und Bewertungshinweisen in vieler Hinsicht noch heute. Auf einzelne Aufgabenstellungen gehen wir in Abschnitt 5.6 ein, aber wir kommentieren nicht jede Aufgabenstellung.

Zielsetzung und Grundlage der Handreichung für Lehrerinnen und Lehrer

Im Gegensatz zu KUTZER & PROBST betonen die Herausgeberinnen die *Individualität von Lernwegen* und damit auch von Lernschwierigkeiten und Lernblockaden. Um dem Kind Lernangebote machen zu können, „die das Kind in seinem Lernprozeß gezielt und fachkompetent fördern“, müssen erst kindliche Vorstellungen und Denkweisen differenziert wahrgenommen und bewertet werden (HH, 3). Wichtig ist also der *Einblick in die individuellen Lösungswege* der Kinder, wofür normierte Test nicht geeignet seien.

[32] Die Lernbeobachtung wurde von Mitarbeiterinnen und Mitarbeiterinnen des Amtes für Schule und Lehrerinnen entwickelt: Marion Godzik, Petra Karsubke, Elke Merz, Wolfgang Rohlfing, Claudia Schützack-Mackrodt, Ursula Zoller. – Wir zitieren aus der Arbeit unter dem Kürzel „HH“.
Ihr zweiter Titel, oder Obertitel, ist „Handreichung zur Feststellung von Schwierigkeiten beim Rechnen“.

Auch mit der folgenden Aussage widersprechen die Autorinnen KUTZER UND PROBST[33]:

> „Die Entwicklung der Lernbeobachtung zum Rechnenlernen hat viel Kopfzerbrechen gemacht, weil gesicherte Kenntnisse über den Aneignungsprozess von mathematischen Kenntnissen bei Kindern weitgehend fehlen.“ (HH, 3)

Da die Übereinstimmung über das, was *inhaltlich* im Mathematikunterricht gelernt werden soll, groß sei, wurden entsprechende Richtlinien zur Grundlage der Aufgabensammlung gemacht. Man beschränkt sich dabei auf den arithmetischen Bereich des Mathematikunterrichts (Aspekte des Zahlbegriffs, Grundrechenarten und Anwendung des Rechnens im Alltag) und auf die Kenntnisse „die für weiteres erfolgreiches Lernen von Mathematik unbedingt erforderlich sind. D. h. es sind Mindestanforderungen!“ (HH, 11)

Die Beobachtungsbögen sind nach dem Zahlenraum, den sie aufbereiten, in drei Gruppen unterteilt, die auch den Inhalten des Mathematikunterrichts der ersten drei Schuljahre entsprechen.

> „Sollte ein Kind bei den Aufgaben 1-3 des Bogens I große Schwierigkeiten haben, kann der Lehrerband zum Unterrichtswerk „Mathematik entdecken und verstehen“ von Reinhard Kutzer Hilfen geben zur Diagnose der Zahlbegriffsentwicklung. Der Aufgabenbogen III endet mit Aufgaben zur halbschriftlichen Rechenverfahren. „Zur Diagnose von Schülerfehlern bei den schriftlichen Rechenverfahren“ sei das Buch gleichen Titels von HANS-DIETER GERSTER empfohlen.“ (HH, 7)

Bogen I Zahlen bis 20	Bogen II Zahlen bis 100	Bogen III Zahlen bis 1000
Zahlbegriff Zählen Zahlen ordnen Aufgabe 1	Zahlbegriff Zählstrategie Zehnerbündelung Zahlen ordnen Stellenwertsystem Aufgabe 1-4	Multiplikation Aufgabe 1 Division Aufgabe 2
Umgang mit Münzbeträgen Aufgabe 2	Umgang mit Münzbeträgen Aufgabe 5	Zahlbegriff Stellenwertsystem Zählen Zahlen ordnen Aufgabe 3, 4
Addition Subtraktion Aufgabe 3	Sachrechnen Aufgabe 6	Addition Subtraktion Aufgabe 5, 6
Umgang mit Gleichungen Verständnis von Addition/Subtraktion Aufgabe 4	Addition Subtraktion Aufgabe 7	

Abb. 5.8: Aufbau der Handreichung zur Untersuchung von Lernschwierigkeiten beim Rechnen.

[33] auf die sie andererseits auf S. 7 hinweisen, als es um die Untersuchung von Kindern geht, die mit den ersten Aufgabenstellungen große Schwierigkeiten haben.

Unser Kommentar

Der Kommentar zu der Grundlage der Handreichung fällt kurz aus, weil sie so bescheiden dargestellt ist, obwohl die Umsetzung in Aufgabenstellung und Beobachtungs- und Bewertungshinweisen Differenzierungen aufweist, über die man einiges sagen könnte:
Die Strukturierung von Punktmengen durch das Kind wird beachtet (visuell-räumliche Fähigkeiten in Verbindung mit Zahlen); verschiedene Rechenstrategien des Kindes werden unterschieden; verschiedenartige Anforderungen beim Zahlenordnen werden unterschieden; das Operationsverständnis wird operationalisiert durch die Herstellung von Beziehungen zwischen „Aufgaben“ (Symbolebene) und Sachsituation, die als Bild mit gesprochenem Begleittext dargeboten ist; Zählstrategien bei einer großen unstrukturierten Menge; Anzahlen mit Zehnerbündelungen herstellen und Größenvergleich auf dieser Grundlage und auf Zahlebene; und anderes mehr. Die theoretische Lücke ist ein Nachteil, weil sie die Erkenntnismöglichkeiten der Lehrerin, die eine Untersuchung mit dem Bogen durchführt, einschränkt.

5.5 Über unser diagnostisches Konzept

In den vorausgehenden Kapiteln haben wir Elemente der Entwicklung der mathematischen Kognitionen herausgearbeitet; in diesem Abschnitt führen wir – zunächst theoretisch – weiter zur Umsetzung in diagnostisches Vorgehen. Überlegungen hinsichtlich der Operationalisierung von Konzepten und Prozeduren, die sich in der Entwicklung befinden, werden angestellt. Wir schließen Hinweise zur Durchführung einer Untersuchung und zur Auswertung der Ergebnisse an.
Die Antwort auf die Frage, ob eine bestimmte Aufgabenstellung geeignet ist, ein spezifisches Verständnis, z. B. das vom Aufbau zweistelliger Zahlen, zu untersuchen, hängt in erster Linie davon ab, welche konzeptuellen Komponenten des Stellenwertverständnisses man annimmt und wie man sich die Entwicklung vorstellt. Ob die Aufgabenstellungen, die wir im folgenden Abschnitt (5.6) vorschlagen, in Bezug auf die zu untersuchenden Konzepte und Fertigkeiten Vollständigkeit und Gültigkeit besitzen, hierzu wünschen wir uns weitere Diskussion unter den Fachleuten. Auch können wir noch nichts darüber sagen, wie Kinder, die gute und mittlere Leistungen in Mathematik zeigen, auf die Aufgabenstellungen reagieren („Normen“ liegen also nicht vor). Ganz gewiss kann die Untersuchung nach unseren Vorschlägen noch nicht „objektiv“ durchgeführt werden, d. h. nicht jede/r Untersucher/in würde bei demselben Kind zum selben Ergebnis kommen.

5.5.1 Basis und Ziel

Notwendiger Bezugspunkt: eine Konzeption der kognitiven mathematischen Entwicklung

Die konstruktive Arbeit des Kindes[34] bei der Bildung mathematischer Konzepte und Fertigkeiten ist bestimmt durch seine spezifisch mathematischen Vorkenntnisse, durch seine allgemeinen intellektuellen „Werkzeuge"[35], durch die Instruktionen, die es erhält, und durch seine Gesamtsituation, soweit sie seine Lernmotivation (für Mathematik) beeinflusst.

Unser Ziel war es, Mittel und Wege zu bestimmen, mit denen und auf denen ein besonderes Kind in seinem Verständnis und Können voranschreiten kann. Daraus folgt in diagnostischer Hinsicht, dass wir *den erreichten Entwicklungsstand* des mathematischen Verständnisses und Könnens *erfassen* und in einen Prozess der Entwicklung *einordnen* mussten. Die Arbeit an dem dafür benötigten Wissen über die Entwicklungsstadien der eigentlich mathematischen Kognitionen und Fertigkeiten hat uns intensiv beschäftigt und stellt unseren wichtigsten Beitrag zum Thema „Rechenschwäche" dar.[36] Wir haben mehrfach begründet, weshalb diese Ebene auch Voraussetzung für die Beurteilung von Hindernissen durch allgemeine intellektuelle Werkzeuge ist.

Ziel der Diagnostik: Konstruktion der Mathematik eines Kindes

Das Vorgehen des Kindes bei der Bearbeitung einer mathematischen Aufgabe ist gemessen an seinem aktuellen Verständnis stets „vernünftig", d. h. ableitbar und erklärbar. In der Diagnostik bei Lernschwierigkeiten in Mathematik geht es darum, *die Mathematik des Kindes so zu konstruieren, dass sein Vorgehen begründet werden kann*. Wenn Lernschwierigkeiten in Mathematik untersucht werden sollen, müssen mathematische Konzepte und Denkweisen behandelt werden[37]. Will man auf die weitere Entwicklung des Kindes Einfluss nehmen, muss man diesen Ausgangspunkt kennen und etwas über die Entwicklungsprozesse wissen.

Erwachsene müssen, um das Verständnis des Kindes zu konstruieren (zu verstehen), ihr eigenes reifes Verständnis teilweise beiseite stellen können. Das Ergebnis hängt stark von der Einsicht ab, die der Untersucher oder die Untersucherin in die Entwicklungswege des mathematischen Verständnisses erworben hat.

---

[34] Kapitel 2

[35] Wir finden es hilfreich, die verschiedenen allgemeinen und grundlegenden kognitiven Funktionen als die Werkzeuge des Kindes zu denken, die es bei der Konstruktion der mathematischen Kognitionen einsetzt. Auf diese Weise wird die eigene Qualität der mathematischen Kognitionen betont und vermieden, dass diese als Wahrnehmungsleistungen mißverstanden werden. Vgl. Abschnitt 1.4.

[36] In der Literatur zur Rechenschwäche erschöpfen sich Hinweise auf die Entwicklung meist darin, dass Handlungen mit Mengen eine entscheidende Grundlage bilden, die, insbesondere über Vorstellungsfähigkeiten vermittelt, allmählich „verinnerlicht" und dann stellvertretend an Zahlsymbolen vollzogen würden. Kritik dazu in Abschnitt 3.2.

[37] Merkmale der Wahrnehmung oder Aufmerksamkeit müssen in bezug auf diese Konzepte und die entsprechenden Bildungsprozesse reflektiert werden.

5.5.2 Psychologische Dimensionen der mathematischen Kognitionen in ihrer Entwicklung

***Grundbausteine, Konzepte und Prozeduren*[38]**

Ausgangspunkt der Operationalisierung sind die Bausteine der Theorie der Entwicklung mathematischer Kognitionen. Wir unterscheiden Grundbausteine, Konzepte und Prozeduren. Als *Grundbausteine* bezeichnen wir drei Leistungen: die Zählfertigkeiten, protoquantitative Urteile über Mengen und die Erfassung/Reproduktion und Analyse/Synthese von Mustern[39]. Wir bezeichnen diese Anforderungen als Grundbausteine, insofern die Konzepte der Zahl als zusammengesetztes Ganzes und der Zerlegbarkeit der Zahl eine Integration dieser Leistungen beinhalten.

Im Hinblick auf die Operationalisierung von Konzepten, denken wir uns ein *Konzept* als *Verbindung von Vorstellungen*, die bei bestimmten mathematischen Problemen aufgerufen oder hergestellt und benutzt werden, *und Formen der mentalen Bearbeitung*[40] dieser Vorstellungen. Bei den diagnostischen Bemühungen wird man also auf die vom Kind herangezogenen Vorstellungen – eingeschlossen die von ihm hergestellten, sinnlich erfahrbaren Konfigurationen – und auf ihre Bearbeitung und Reflexion achten.
Ausgangspunkte der Vorstellungen sind die Zahlreihe einerseits und Muster (und unstrukturierte Mengen) andererseits. *Anfänge der Reflexion* bilden z. B. die genannten protoquantitativen Urteile: das Wissen des Kindes darüber, welche Veränderungen an der ganzen Menge oder an einem Teil der Menge die Vielheit der Gesamtmenge – ob es dadurch mehr oder weniger wurde – beeinflussen. Diese Urteile müssen dann hinsichtlich der Anzahlen (gezählte Mengen) aufrechterhalten und schließlich auf Zahlen, die nicht durch Mengen sichtbar repräsentiert sind, übertragen werden.

Mit *Prozeduren* meinen wir individuell entwickelte oder durch Instruktion vermittelte, durch eine Folge von Schritten charakterisierte Vorgehensweisen speziell beim Rechnen. – Bei der Diagnostik achten wir nicht nur auf die korrekte oder fehlerhafte Durchführung, sondern auch auf die Auswahl, Erklärung und Begründung derselben durch das Kind.

***Nonverbale Konzepte und implizites Wissen*[41]**

Neben der Erfassung von prozeduralen Fertigkeiten beim Rechnen und der Abrufbarkeit von Fakten will man auch *nonverbale* Konzepte erfassen, die das Vorgehen des Kindes bei mathematischen Problemstellungen aller Art grundlegend bestimmen. Wir meinen

---

[38] Inhaltlich muss auf die Kapitel 2 und 3 verwiesen werden.
[39] Insbesondere visuell-räumlich strukturierte Konfigurationen, aber auch zeitlich-sequentielle in anderen Sinnesqualitäten.
[40] Unser Begriff „Vorstellungen“ meint die „re-presentations“ im Sinne von STEFFE UND COBB, mit mentalen Bearbeitungen (Abstraktionen und Reflexionen) meinen wir die von denselben Autoren unterschiedenen „operations“, aber auch alle Arten von Beziehungen, die das Kind im mathematischen Kontext herstellt.
[41] dazu auch Abschnitt 1.7

insbesondere die Zahlkonzepte[42]. Es ist grundsätzlich schwierig, nonverbale Konzepte sprachlich zu erklären. Dies gilt erst recht im Stadium ihrer Entwicklung. Deshalb können gewisse Konzepte nicht durch das Gespräch aufgedeckt werden. Aber auch dem beobachtbaren Handeln des Kindes können die Vorstellungen und Beziehungen, die das Kind herstellt, nur interpretierend entnommen werden. Wir versuchen aus dem Handeln des Kindes zu konstruieren, worauf das Kind seine Aufmerksamkeit richtet, welcher Vorstellungen es sich bedient und welche mentale Arbeit es daran vornimmt[43]. Diese Arbeit ist der konstruktiven Arbeit des Kindes prinzipiell ähnlich, das aus dem eigenen Handeln und aus dem Handeln anderer Personen Konzepte erarbeitet.
Dass es nicht ausreicht, das Handeln des Kindes „äußerlich“ zu beobachten, um daraus wirksame didaktisch-methodische Hilfen zu entwickeln, bemerken wir z. B. in den Situationen, in denen wir dem Kind eine „bessere“ Rechenstrategie oder Betrachtungsweise vorschlagen. Die Erfahrung zeigt oft, dass das Kind die Strategie bestenfalls vorübergehend befolgt. Dann spätestens sind wir gezwungen zu überlegen, was im Kopf des Kindes vorgeht, und müssen „seine“ Mathematik konstruieren. Unsere Aussagen darüber bilden nicht das Denken des Kind ab, es sind Interpretationen und Modelle. Ihre Tauglichkeit beweisen sie dadurch, dass möglichst viele Beobachtungen am Vorgehen des Kindes in einen sinnvollen Zusammenhang gestellt und Anregungen für das Kind daraus entwickelt werden können, die sich als fördernd erweisen.

Stufen und Prozesse

Das mathematische Denken des Kindes ist anfangs an sinnlich erfahrbare Konfigurationen und konkrete Veränderungen an denselben gebunden ist, von denen es sich allmählich löst. In bestimmten Stadien der Konzeptbildung liegen „gegenständliche“ Konzepte vor, bei denen bestimmte Reflexionen über Zahlen nur auf Grundlage von sinnlich erfahrbaren Konfigurationen und Veränderungen, bzw. ihrer Vorstellung, geleistet werden können. Das ist der Grund, weshalb es einen Unterschied macht, wie die Aufgaben gestellt sind und gelöst werden sollen: rein auf Zahlenebene oder mit einem Hinweis auf eine Vorstellung oder nach der Übersetzung der Aufgabenstellung in ein konkretes Vorgehen anhand einer quantitative Zahldarstellung u. ä.[44].
Hinsichtlich der Diagnostik verlangt dies eine *gezielte Variation der Aufgabenstellungen*:

- die Aufgabenstellung/Lösung erfolgt mit Mengen(darstellungen der Zahlen);
- die Aufgabenstellung/Lösung erfolgt ganz oder teilweise aufgrund von Vorstellungen;
- die Aufgabenstellung/Lösung erfolgt auf Symbolebene.

Wir gehen von gewissen hierarchischen Stufen der Konzeptbildung aus (Kap. 3), aber die individuellen Entwicklungswege der Kinder weisen vermutlich qualitative Verschiedenheiten auf, die durch empirische Forschung noch nicht abschließend rekon-

---

[42] Die Idee der Zahlkonzepte ist ein theoretisches Konstrukt zur Charakterisierung des Denkens über Zahlen; es ist weder äquivalent zur Arbeit des Gehirns, noch zu dem, was ein Kind über sein Denken sagen kann, oder zu dem, was es äußerlich tut.
[43] Dabei müssen wir unser eigenes Handeln dem Kind gegenüber (Aufgabenstellung, Gesprächsführung, Hinweise, Fragen usw.) in die Reflexion einbeziehen.
[44] Vgl. die Dimension des Repräsentationsniveaus bei KUTZER UND PROBST.

struiert wurden. Die Beachtung der individuellen Vorlieben, Stärken und Vermeidungen ist vermutlich gerade für schwächere Schüler/innen von Bedeutung. Auch wenn man Beobachtungen dieser Art noch nicht auf der Grundlage empirischen Wissens für die Förderung verwenden kann, sollte man sich davon zu individuell zugeschnittenen Ideen zur Förderung anregen lassen.

Da ein Konzept (oder eine Fertigkeit) stets eine komplexe Schöpfung ist, für das (für die) verschiedene Blickwinkel und Fertigkeiten integriert werden müssen[45], wird der Entwicklungsstand mittels verschiedenartiger Aufgabenstellungen untersucht; auf Übereinstimmungen in den Lösungsansätzen des Kindes soll ebenso geachtet werden wie auf Diskrepanzen, die noch vorhandene Schwierigkeiten, aber auch Erkenntnisfortschritte aufdecken, die noch auf einen Bereich beschränkt sind[46]. Entscheidungen werden auf der Basis der Konvergenz und Divergenz von Informationen aus verschiedenartigen Aufgabenstellungen getroffen.

> „Instructional decisions should be based on the convergence of information from different sources that supports or corroborates the need for a given educational response. When available information is contradictory, for example when a student achieves good test scores but is unable to communicate mathematical processes, an assessment must search for deeper explanation. Simply put, assessment should not rely on a single instrument or technique.“ (NCTM COMMISSION ON STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS, 1989)

Unterschiede, die einen Unterschied machen

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass es für das Kind einen Unterschied macht, ob es bei einer Aufgabe Mengendarstellungen von Zahlen verwendet, oder eine Vorstellung davon heranzieht, oder rein auf Symbolebene arbeitet. Die Aussagekraft des kindlichen Verhaltens bei der Lösung erschöpft sich jedoch nicht in der Feststellung „kann Aufgabe mit Material (nicht) lösen“ oder „kann Aufgabe auf Symbolebene (nicht) lösen“. Erstens ist nicht jede Herbeiführung einer Lösung mit einem Material von gleicher Qualität: Der Umgang mit dem Material kann schon vorhandene Vorstellungen und Strukturen aufzeigen (oder nicht). Wir können bemerken, dass das Kind im voraus reflektiert und plant (oder nicht). Einen wichtigen Unterschied macht, ob es im Anschluss an ein Lösungsverfahren das Vorgehen insgesamt reflektiert, d. h. begründet, erklärt, schlussfolgert – oder nicht.
Zweitens trifft es nicht zu, dass die Lösung mit Material grundsätzlich „leichter“ ist, als die Lösung im Umgang mit Zahlen in Ziffernschreibweise: Die Bitte um die Erklärung der Rechenprozedur am Material kann mehr Probleme bereiten als das Ausrechnen selbst, z. B. wenn ein Kind sich Vorgehensweisen gut merken kann und Lücken im Zahlverständnis dadurch nicht aufgefallen sind und unbearbeitet blieben.

Diese und andere qualitative Unterschiede wollen wir allmählich aus dem Modell der Mathematik des Kindes, das wir bei der Diagnostik konstruieren, erklären können. Sie können (teilweise) geordnet werden durch die folgenden Kategorien: Lösung nennen; Darlegen des Lösungsweges (vorher/nachher); Begründen eines Lösungsweges/einer Lösung; Beurteilen der Richtigkeit eines Lösungsweges/einer Lösung.

---

[45] „in Beziehung gebracht oder gesetzt“ könnte das Wort „integriert“ ersetzen.
[46] Lernfortschritte, die in einer „Mikrowelt“ gemacht werden.

5.5.3 Dimensionen der Inhalte der Mathematik

In Kapitel 4 haben wir vorgeschlagen, folgende Bereiche der mathematischen Fähigkeiten und Fertigkeiten zu unterscheiden: Zahlverständnis (aus Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen), Operationsverständnis, Rechnen, Zahlverarbeitung, Zahlwortreihe und Mathematisieren von Sachsituationen. Zwischen diesen Bereichen muss man grundsätzlich von Überschneidungen (hinsichtlich zentraler Konzepte) und wechselseitigen Einflüssen ausgehen, aber die Differenzierung ist sachlich möglich und berechtigt, um Komponenten des komplexen Prozesses des mathematischen Denkens herauszulösen und hinsichtlich ihres (positiven oder negativen) Beitrages zur Leistung eines Kindes zu befragen.

Wir betonen insbesondere das *Zahlverständnis*, das wir aus den *Bedeutungen* einer Zahl und ihren *Beziehungen* zu anderen Zahlen zusammensetzen. Hier geht es um Konzeptbildungen, die einem flexiblen Umgang mit Zahlen zugrunde liegen. Ein Zahlkonzept denken wir uns als Verbindung von Vorstellungen, die das Kind zu Zahlen (Ziffern und Zahlwörtern) entwickelt hat und die es bei der Arbeit mit Zahlen heranzieht, und von den mentalen Operationen oder Formen der Reflexion, die es an diesen Vorstellungen vornimmt.[47]

Das *Verstehen der mathematischen Operationen* (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) definieren wir als Fähigkeit zwischen Problemstellungen in verbaler oder bildlich-verbaler Form zum ersten, einer quantitativen mathematischen Modellierung zum zweiten und einer mathematischen Symbolisierung zum dritten zu übersetzen[48]. Der Qualität der Zahlbedeutungen und den Strategien beim Ausrechnen wird unter diesem Blickwinkel wenig Beachtung geschenkt.[49]

Unter dem Blickwinkel des *Rechnens* gilt unsere Aufmerksamkeit den abrufbaren Fakten und den Rechenstrategien, nicht nur ihrer korrekten oder inkorrekten Durchführung, sondern auch ihrer Auswahl und Erklärung oder Begründung. Wir sehen die Rechenfertigkeiten in einem engen Zusammenhang mit dem Zahlverständnis und deuten daher die Bearbeitung einiger Rechenaufgaben als Ausdruck des Zahlverständnisses[50].

Bei *Zahlverarbeitung* (wechselseitiges Übersetzen von gesprochenen und geschriebenen Zahlen) und *Zahlwortreihe* (regelgeleitete Bildung der Zahlwortreihe) geht es um Anforderungen, die der Umgang mit der mündlichen und schriftlichen Sprache der Mathematik bietet, soweit dieser von den quantitativen Zahlbedeutungen getrennt, in anderen Worten asemantisch betrachtet werden kann[51].

Die *Mathematisierung von Sachsituationen* stellt über das Operations- und Zahlverständnis hinaus Anforderungen an die sprachlich-logischen Fähigkeiten, an mehrschrittige Planungen und Durchführungen, an die Rekonstruktion von zeitlichen Abläufen oder räumlichen Strukturen aus einer sprachlichen Problemstellung u. a. m. Die Anfor-

[47] Ausführungen in 4.2.1 und 4.3.1
[48] Dazu HUINKER (1993), dargestellt in Abschnitt 5.6 und 8.1.
[49] Ausführungen in den Abschnitten 8.1 und 9.1.
[50] Dazu Abschnitt 4.5.1
[51] Dazu Abschnitt 4.4.1, auch die Ausführungen zum ZAREKI in Abschnitt 5.4.1

derungen sind zwar besonders komplex auf diesem Gebiet, aber man findet durchaus Kinder, die hier ein gutes Verständnis zeigen, jedoch das Rechnen nicht beherrschen und Lücken im Zahlverständnis zeigen. Eine Einarbeitung des zu diesem Bereich vorliegenden Wissens in diesen Forschungsbericht war nicht mehr möglich[52].
Die genannten Bereiche können weiter differenziert und ergänzt werden, z. B. durch die gesonderte, vertiefte Berücksichtigung des Verstehens und des Gebrauchs von Sprache im Bereich der mathematischen Anforderungen, oder der Einstellungen gegenüber Mathematik und Schule.

5.5.4 Struktur einer qualitativen Diagnostik des mathematischen Denkens

Wir haben das Gerüst einer qualitativen Diagnostik im folgenden Schaubild dargestellt:

Wissen über die Entwicklung des mathematischen Denkens im frühen Grundschulalter aus der Sicht der konstruktivistischen Lern- und Entwicklungspsychologie;

Bausteine des Wissens über mathematische Konzepte und Fertigkeiten im Zustand der Entwicklung:

Zahl als zusammengesetztes Ganzes	Zahl in Zahlen zerlegbar	bestimmte Zahlbeziehungen	Zehn als Zehnheit	Anschauungsgebundenes Konzept des Zehners als Einheit	usw.

↓

Interpretieren aufgrund des vorliegenden Wissens.

↑

Sortieren der Beobachtungen, z. B. nach den Bereichen: Zahlbedeutungen, Zahlbeziehungen, Operationsverständnis, Rechnen, Zahlverarbeitung, Zahlwortreihe, Mathematisieren von Sachsituationen. – Zusätzliche Reflexion hinsichtlich übergreifender Beobachtungen.

↑

Beobachtungen B1 bis Bn, wie das Kind die verschiedenen Aufgabenstellungen löst; Protokolle.

↑

Aufgabenstellungen vorlegen: typische Schulaufgaben aus verschiedenen Inhaltsgebieten und besondere Aufgabenstellungen zur Prüfung bestimmter konzeptueller Leistungen.

Abb. 5.6: Struktur einer qualitativen Diagnostik mathematischer Konzepte und Fertigkeiten

Diese Darstellung ist hinsichtlich der relevanten Einflussgrößen auf die Leistung eines Kindes unvollständig. Sie beschränkt sich auf das Herausarbeiten der mathematischen Kognitionen, die aus den Beobachtungen am einzelnen Kind erschlossen werden können. Drei weitere Einflussgrößen auf die Lerntätigkeit des Kindes, die wir schon genannt haben, sind im Schema vernachlässigt: die allgemeinen intellektuellen Werkzeuge des Kindes; die schulischen und außerschulischen Instruktionen, die es erhalten hat; die Gesamtsituation des Kindes, soweit sie seine Lernmotivation hinsichtlich der Mathematik beeinflusst. Wir verweisen dazu auf die Ausführungen in Kapitel 1 (1.5 und 1.7).

[52] Wir verweisen auf die Arbeiten von Stern, z. B. Stern und Reusser in Weinert & Helmke, 1997.

5.5.5 Über die Durchführung der Untersuchung

In der Durchführung der Untersuchung spielt das Gespräch mit dem Kind eine wichtige Rolle. Es gibt in der Literatur und in unseren Erfahrungen eine Vielzahl von Beispielen, die zeigen, dass es höchst irreführend oder wenig aussagekräftig sein kann, nur zu beachten, ob eine Lösung richtig oder falsch ist. Die Frage „Wie hast du das herausgefunden?“ war ein sehr wichtiges Element der Untersuchung. Richtige und falsche Ergebnisse und Lösungen wurden auf diese Weise befragt. Verständnis und richtige Lösungen sind nicht dasselbe.

> „Despite similar written responses on worksheets and tests from many children in your class, interviews with several individuals will uncover a wide range of understandings or methods used. For example, some children will get right answers for computational tasks while having basic misunderstandings of the concepts underlying the procedure used. Other children will reveal original procedures that have not been taught in class. In addition, children making computational errors may reveal a better conceptual understanding of the procedure than many who compute accurately.“ (LABINOWICZ, 1987, 22)

Es gibt aber auch Kinder, die sich kaum über ihr Vorgehen äußern können. Bei diesen Kindern ist es besonders wichtig herauszuarbeiten, wie reflektiert sie ihr Vorgehen unter Verwendung von irgendeinem Material darstellen können.

Klarheit darüber, welche Instruktion zur Aufgabe gegeben werden soll, halten wir auch für wichtig. Wenn eine nicht geplante Veränderung der Instruktion vorgenommen wird, sollte diese genau festgehalten werden. – Ein Beispiel aus einem nicht diagnostischen Kontext: Eine Studentin berichtete nach der ersten Förderstunde mit einem Jungen ratlos, er habe alles gekonnt, sie habe gar nicht gewusst, woran sie mit ihm arbeiten müsse. Bei der genaueren Schilderung der Stunde stellte sich heraus, dass sie mit feinem Gespür dem Jungen genau die Hilfestellungen gegeben hat, die er sich selbst nicht geben kann. Als er beispielsweise einen Packen von Spielgeld zusammenrechnen wollte und dabei die Geldscheine so berücksichtigte wie sie zufällig angeordnet waren, schlug sie ihm vor, die Scheine erst zu ordnen; später empfahl sie ihm, Zwischensummen aufzuschreiben. Bei der Untersuchung dieses Jungen, die der Förderung vorausging, hatte sich gezeigt, dass er einzelne Rechenschritte recht gut durchführen konnte. Es fiel ihm aber schwer, ein mehrschrittiges Vorgehen zu planen und bei der Durchführung zu steuern.

Gerade die Reaktionen des Kindes, die wir nicht sofort einschätzen können, zeichnen wir möglichst genau auf. Das Protokoll sollte daher unmittelbar im Anschluss an die Arbeit mit dem Kind verfasst werden, wenn nicht Tonband- oder Videoaufzeichnungen gemacht werden.

Die Auswertung der Beobachtungen ist weniger an den unterschiedlichen äußeren Formen der Aufgabenstellungen orientiert als an den konzeptuellen und prozeduralen Merkmalen jedes Bereichs, den wir unterschieden haben: Das Kind benutzt bei nahezu allen Aufgaben sein Zahlverständnis, das uns außerordentlich interessiert. Wir betrachten also sein Vorgehen bei verschiedenartigen Aufgaben im Hinblick auf erschließbare Zahlvorstellungen, die das Kind dabei heranzieht, und ihre Bearbeitung während und nach der Lösung. Wir interessieren uns aber auch für vorhandene Vorstellungen, die auf Zahlenebene jedoch nicht benutzt werden.

Eine fertige, leicht handhabbare Anleitung zur Auswertung können wir nicht bieten. Wir hoffen jedoch, in jedem Kapitel Anregungen für eine konzeptuelle Analyse zu geben.

5.6 Diagnostische Aufgabenstellungen für den Zahlenraum bis 20

Vorbemerkungen zu 5.6 und 5.7

Die folgenden Aufgabenstellungen zur Untersuchung des mathematischen Denkens bei Kindern in den Grundschulklassen sind inhaltlich auf die Konzepte und Prozeduren beschränkt, die laut Lehrplan bis zum Ende der zweiten Klasse erworben werden sollten. Darüber hinaus bleiben Multiplikation und Division ausgeklammert, ebenso die Größen. Besondere Aufmerksamkeit haben wir dem Zahlverständnis und den verständigen Rechenstrategien gewidmet. Die inhaltlichen Beschränkungen sind vor allem durch unsere Beobachtungen an den uns vorgestellten Kindern begründet, die –auch noch in höheren Klassenstufen – entsprechende Lücken im grundlegenden Verständnis zeigten. Die Schritte zum Zahlverständnis und zum verständigen Rechnen sind konzeptuell anspruchsvoller, als gemeinhin angenommen wird. Das bestätigte und erhellte auch die von uns herangezogene Literatur. Unser besonderer Beitrag zur Diskussion der Rechenschwäche soll gerade darin bestehen, den Einblick in diese Anforderungen zu verbessern. Dazu sollen auch die folgenden Aufgabenstellungen beitragen.

Wir gliedern inhaltlich in zwei Zahlenräume, den bis 20 und den bis 100 und unterscheiden in jedem dieser Räume zwischen den schon genannten Bereichen: Zahlbedeutungen, Zahlbeziehungen, Operationsverständnis, Rechnen, Zahlverarbeitung, Zahlwortreihe, Mathematisierung von Sachsituationen.
Theoretische Erläuterungen und Begründungen vermeiden wir in diesem Abschnitt weitgehend, Leitfragen und Stichworte müssen genügen. Wir geben einige Beobachtungs- und Auswertungshinweise, aber dies ist noch keine systematisch-wohlgegliederte, vollständig mit Hinweisen versehene Handreichung für Lehrer und Lehrerinnen. Es sind Vorschläge und Anregungen, die inhaltlich noch weiter diskutiert und in der Form (Operationalisierung) verbessert und präzisiert werden können.

In der Untersuchung der uns vorgestellten Kinder folgten wir bis zuletzt keinem festgelegten Untersuchungsplan, auch wenn gewisse Teile faktisch immer darin vorkamen: Simultanerfassung, Invarianzurteile, Bestimmung der Anzahl bei einem strukturierten Muster, Rechnen und Rechenstrategien, Anwendung auf Sachsituationen und Textaufgaben. Die Untersuchung veränderte sich mit unserer Erfahrung und unserem Wissen, aber auch in Anpassung an die Besonderheiten der Kinder. Diese Veränderung und Anpassung ist notwendig, solange man den Untersuchungsgegenstand – das Wesen der Lernschwierigkeiten und ihrer unterschiedlichen Formen – noch nicht genau kennt und durch die Untersuchung versucht, ihn besser verstehen zu lernen.
Am Anfang unserer Untersuchungen verwendeten wir Aufgaben des Hamburger Beobachtungsbogens, die wir bald mit zusätzlichen Beobachtungen versahen. Wir prüften außerdem die Simultanerfassung, die Invarianzurteile, das Zahlenschreiben und -lesen und Textaufgaben mit bestimmten Schwierigkeiten (mit unbekannter Anfangsmenge, mit besonderen sprachlich-logischen Anforderungen). Einen wichtigen Fortschritt machte unser Untersuchungsplan, als wir uns vertieft mit dem Stellenwertverständnis

befassten und Vorschläge zur Untersuchung desselben aus der Literatur übernahmen.[53] Erst zuletzt wagten wir uns an das frühe Zahlverständnis heran, geleitet von eigenen Beobachtungen, die uns verblüfften, – manche sofort, andere erst nach einiger Zeit[54].

Die Auflistung der Aufgaben, die wir vornehmen, ist keine Empfehlung für die Reihenfolge ihrer Verwendung bei der Untersuchung. Nach unserer Erfahrung empfiehlt es sich, nicht nur einen Termin für die Untersuchung vorzusehen. Es gibt gute Argumente dafür, bei den „Grundbausteinen" einzusteigen. Man kann aber auch mit dem „Rechnen" anfangen oder mit einer Textaufgabe, um sich einen Eindruck von den Zahlvorstellungen und Rechenstrategien zu verschaffen, die das Kind spontan wählt. Das Wichtigste und Schwierigste sind ohnehin Auswertung und Interpretation der Beobachtungen.

Zusätzlich haben wir in jedem Fall die Lebensgeschichte und familiäre Situation, Schulgeschichte und schulische Situation und gegebenenfalls andere Untersuchungsergebnisse psychologischer oder medizinischer Diagnostik beachtet. Einflüsse auf und Wechsel-wirkungen mit der Entwicklung mathematischer Kognitionen können verschiedenster Art sein. Hypothesen darüber stellten wir mit Vorsicht auf, da wir uns auf die Untersuchung der mathematischen Kompetenz konzentrierten und Beobachtungen, die nicht auf Mathematik bezogenes Verhalten betrafen, „nebenbei" machten. Wenn wir einen Bedarf nach weiterer psychologischer Beratung vermutet haben, haben wir die Eltern darauf angesprochen.[55]
Der Untersuchungsbericht enthielt auch einen Abschnitt über „Allgemeine Beobachtungen bei der Arbeit an mathematischen Problemen", in dem auf Grundlage des psychologischen Hintergrundwissens übergreifende Merkmale des kindlichen Vorgehens beschrieben wurden. Darin wurde versucht, die Besonderheiten der kognitiven Tätigkeit des Kindes zusammenfassend zu charakterisieren. Vermutungen über den Einfluss auf die mathematische Konzeptbildung wurden angestellt. – Die Elemente dieser „Allgemeinen Beobachtungen" können wir im Rahmen dieses Berichts leider nicht mehr diskutieren. Wir verweisen auf die Beispiele in den beigefügten Fallberichten (Kap. 6).

Vorbemerkungen zum Material und zum Vorgehen bei der Untersuchung

Wenn wir von *„einer Menge von Elementen"* sprechen, meinen wir Gegenstände von etwa 1 cm Durchmesser, für Kinderhände gut greifbar und für Kinderaugen gut erkennbar und ansprechend. Wir haben farbige runde Holzscheiben und Holzzylinder verwendet, aber auch eine Sammlung von Halbedelsteinen mit einem Durchmesser zwischen 5 und 10 mm. – Daher ist manchmal von „Steinen" die Rede.

---

[53] nach der Zusammenstellung in VAN DE WALLE, 1994.
[54] Warum kann ein Kind sogar Aufgaben wie 10 + 3, 14 – 4 und 16 – 10 nicht sofort lösen: Dies fragten wir uns sofort. Über bestimmte Formen des Fingerrechnens stutzten wir erst nach einiger Zeit.
[55] In mehreren Fällen waren Kinder gleichzeitig in Kontakt mit einer/einem anderen Fachfrau/Fachmann und erhielten therapeutische Unterstützung.

„Würfelbild-Kärtchen“ sind quadratische Kärtchen (3 x 3 cm), die die Würfelbilder bis 5 tragen. Jedes Würfelbild ist mehrfach da, so dass eine Zahl auch mittels Einer-Kärtchen dargestellt werden könnte.

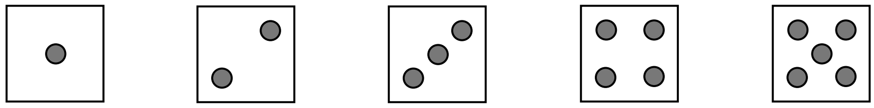


Abb. 5.7: Zahldarstellung mit Würfelbild-Kärtchen

„Punktebilder im Zehnerfeld“ sind dem Buch von VAN DE WALLE (1994) entnommen und sehen so aus:

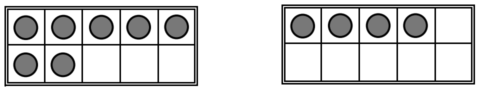


Abb. 5.8: Zahldarstellung mit Zehnerfeldern

Für *„Zehnerbündel“* haben wir Elemente in durchsichtige Säckchen gefüllt. Geeignet sind auch Holzstäbchen, 10 cm lang und 2 mm Kantenlänge, die mit einem Gummiring gebündelt werden.
Man kann auch nicht einsehbare Streichholzschachteln oder Filmdosen, in die man 10 Elemente gefüllt hat, verwenden. Dabei ist die Anforderung, sich die zehn Einzelnen in der Zehn vorzustellen, höher als bei den durchsichtigen Behältern.

„Zehnersystemblöcke“ sind bei uns Einerwürfel, Zehnerstangen und Hunderterplatten aus unlackiertem Holz. Bei den Zehnern und Hundertern sind die Einer durch Kerbungen markiert.

Wir schlagen bei verschiedenen Aufgaben vor, ein *„Tablett“* zu verwenden. Das bedeutet, dass ein begrenzter Hintergrund geschaffen werden soll, auf dem die Mengen oder Zahldarstellungen präsentiert werden. Bei einigen Aufgabenstellungen ist es zweckmäßig, das Tablett zwei Hälften zu unterteilen, beispielsweise durch Aufkleben von Papier in zwei Farben.

Wenn wir schreiben *„Das Kind erhält die Aufgabe „17 – 9““*, dann meinem wir die *schriftliche* Darbietung der Aufgabe. Eine mündliche Aufgabenstellung wird ausdrücklich als solche charakterisiert.

Wenn wir dem Kind einen Hinweis auf einen alternativen Lösungsweg geben und anschließend prüfen wollen, ob es diesen selbständig nachvollziehen kann, sollten wir stets nach beiden Lösungswegen fragen, nicht nur nach dem, den wir für reifer und besser halten.
Eine wichtige Rolle spielte die Frage „Wie hast du das herausgefunden?“, die wir eigentlich ständig gestellt haben. Daher wird sie im folgenden nicht immer erwähnt. Von ähnlich allgemeinem Nutzen ist die folgende Frage: „Kannst du mir mit diesen ..... (Name eines Materials, das dem Kind vertraut ist) zeigen und erklären, wie du das Ergebnis gefunden hast?“

Vorbemerkung zum Aufbau der Darstellung

In einigen Fällen schicken wir der Darstellung der Aufgabe voraus, mit welcher *Absicht* sie gestellt wird, bzw. in welchem Zusammenhang mit anderen Aufgaben sie steht. Diese Aussagen erscheinen in kleinerer Schrift. Nach der *Darstellung der Aufgabe* geben wir – wieder in kleinerer Schrift – *Beobachtungshinweise*.

5.6.1 Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen

Das frühe Zahlverständnis scheint uns am schwierigsten einzusehen und zu rekonstruieren – wie so oft bei „kinderleichten" Anforderungen, die wir selbst als Kinder gemeistert haben, ohne uns des Lernprozesses bewusst zu werden. Die Schwierigkeit wird dadurch größer, dass es sich im wesentlichen um nonverbale Konzepte handelt.

Wir wollen wissen, welche Vorstellungen von Zahlen[56] ein Kind beim Rechnen oder Problemlösen heranzieht und wie es diese strukturiert, zerlegt oder anders bearbeitet. Am Ende wollen wir beurteilen, ob die Zahl x in der Vorstellung des Kindes ein Ganzes ist, das aus x-vielen Einheiten oder Elementen zusammengesetzt ist; ob es eine Zahl als Teil einer anderen Zahl verstehen kann und wie es über Zahlen als Teile einer anderen Zahl nachdenken kann.
Wir wollen auch beurteilen können, wieweit die Zahlreihe, genauer gesagt: das Zählen vorwärts und rückwärts, mit quantitativen Vorstellungen der Zahlen und Beziehungen zwischen Teilen und Ganzem verbunden wurde.

<u>Übersicht über die folgenden Aufgaben zum *Zahlverständnis*</u>

1. Protoquantitative Urteile über Mengen
2. Zählfertigkeiten
3. Simultane Mustererfassung und Analyse von Mustern
4. Vorstellung von Mengen aus bis zu fünf Elementen
5. Ergänzen von zweidimensionalen Mustern; Ergänzen von linear geordneten Mustern
6. Zahlbilder des Kindes
7. Offene Aufgaben zum Wissen über Zahlen
8. Wie erklärt das Kind, dass zwei in der 2 (fünf in der 5) sind?
9. Invarianzurteile über Anzahlen
10. Eins mehr/eins weniger
11. Analyse von Mustern (Punktebildern) zur Bestimmung von Anzahlen
12. Bestimmen einer unbekannten Teil-Anzahl
13. Die Zahlen 5 und 10 als Teil anderer Zahlen
14. Teile-Ganzes-Reflexionen bei konkreten Sachsituationen
15. Zehner und Einer im Zahlenraum bis 20

[56] Mit „Vorstellungen von Zahlen": meinen wir mentale Vorstellungen von Anzahlen oder Zahlenstrahl, die aus dem Verhalten des Kindes erschlossen werden, aber auch konkrete Zahlbilder, die das Kind beim Rechnen oder Problemlösen herstellt.

1. Protoquantitative Urteile über Mengen

Es geht um Urteile über die Auswirkungen von Veränderungen an einer Menge, die nicht gezählt wurde. In den Aufgaben unter Punkt 10 sind Invarianz- und Varianzurteile hinsichtlich einer gezählten Menge verlangt. Wir haben in der Regel erst Invarianzurteile in Verbindung mit Zahlen untersucht und die protoquantitativen Urteile nur abgefragt, wenn das Kind damit Schwierigkeiten hatte oder Unsicherheiten zeigte[57].

- ❖ Eine Menge von Steinen, die nicht gezählt wurde, wird vorgelegt oder vom Kind selbst irgendwo herausgenommen. Es darf schätzen, wie viele es sind.

- ❖ Die Anordnung der Menge auf dem Tisch (oder besser Tablett) wird auf verschiedene Weise verändert (ausgedehnt oder zusammengeschoben oder in eine kleine Schachtel gefüllt).
  „Sind es jetzt noch ebenso viele Steine wie vorhin, oder sind es mehr oder weniger?“

- ❖ Die Menge wird in zwei Häufchen zerlegt, die anschließend in zwei kleine Schachtel gefüllt werden.
  „Sind alle Steine, die du vorhin herausgenommen hast, in einer der beiden Schachteln?“
  „Sind in beiden Schachteln zusammen noch ebensoviel Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“

- ❖ Dann werden verschiedene, einander kompensierende oder nicht kompensierende Veränderungen an einem oder an beiden Teilen vorgenommen:
  - Ein Stein wird aus Schachtel A in Schachtel B getan;
  - aus einer Schachtel wird ein Stein herausgenommen oder es wird einer hinzugefügt.
  „Sind in beiden Schachteln zusammen noch ebenso viele Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“
  Oder: „Sind es insgesamt noch ebenso viele Steine wie vorhin oder sind es jetzt mehr oder weniger?“

Hinweise:
Die Menge sollte so groß sein, dass man sie nicht leicht mit den Augen zählen kann. Die Formulierung „in beiden Schachteln zusammen“ wird am besten durch eine Geste unterstrichen, die einen Kreis um die beiden Schachteln beschreibt. Es ist sinnvoll, die Fragestellung in einen Kontext einzubetten, der geeignet ist, das Kind zu interessieren: Die Steine können eine Sammlung kostbarer Dinge sein, die ein Kind angelegt hat. Die Veränderung wird von einer anderen Person vorgenommen, man muss aufpassen, dass nichts wegkommt.

In diesem Zusammenhang (vorzahlige Urteile über Mengen) kann auch untersucht werden, ob das Kind die Begriffe mehr/weniger/gleichviele richtig verwendet, ob es eine Menge „gerecht“ an zwei Kindern verteilen kann u. ä.

---

[57] Hintergrund: Abschnitt 3.6

2. Zählfertigkeiten

Bevor man die folgenden Aufgaben vorlegt, sollte man prüfen, ob das Kind die Zahlwortreihe bis 20 sicher aufsagen kann. Es geht jetzt um die Überprüfung der Zählprinzipien: Macht das Kind beim Abzählen deutlich, dass es eine Eins-zu-Eins-Zuordnung von Zahlwort und Element vornehmen will? Benennt es – auch nach einer räumlichen Veränderung der Menge – die Anzahl der Menge nach dem letzten Zahlwort, das es beim Abzählen gebrauchte (Kardinalitätsprinzip)?

- ❖ Das Kind soll feststellen, wie viele Steine auf dem Tablett liegen. Nach dem Abzählen werden sie in eine Schachtel gefüllt. „Wie viele Steine sind in dieser Schachtel?“
  Oder: „Schreibe auf den Deckel, wie viele Steine in dieser Schachtel sind.“ „Soll ich es für dich schreiben? Sag mir, was ich schreiben soll.“

- ❖ Eine Puppe zählt eine Menge und beachtet dabei nicht alle Zählprinzipien. Daher kommt sie zu einem anderen Ergebnis als das Kind (oder eine zweite Puppe, die richtig zählt).
  „Hat die Puppe richtig gezählt?“
  Oder „Warum bekommt sie etwas anderes heraus als Du?“

Hinweise:
Es kommt vor, dass ein Kind sich um die Eins-zu-Eins-Zuordnung bemüht, dabei aber Schwierigkeiten hat[58]. In diesem Fall ist die Bedeutung des Prinzips erfasst.
Wenn das Kind die Anzahl nach dem Umfüllen in die Schachtel nicht unmittelbar angibt, sondern erneut zählen will, kann man fragen, ob es noch weiß, bis zu welcher Zahl es vorhin beim Abzählen gekommen ist, um auszuschließen, dass es die Zahl bloß vergessen hat.

3. Mustererfassung und Analyse von Mustern

Es geht um die so genannte Simultanerfassung kleiner Mengen (bis 4 Elemente). Mit der Anschlussfrage soll festgestellt werden, ob das Kind das Muster, das es mit „vier“ oder „fünf“ bezeichnen kann, als Zusammensetzung aus vier oder fünf Dingen versteht oder ob es bei dieser Frage die Punkte abzählen muss.[59]
Das Interesse gilt außerdem den Fähigkeiten des Kindes, Muster zu analysieren, indem beispielsweise vertraute, simultan erfassbare Teilmuster herausgelöst werden (quasi-simultane Anzahlerfassung).

- ❖ *Simultanerfassung:* Mengen oder Bilder von Mengen bis 4 Elemente werden für einen Moment, der fürs Abzählen nicht ausreicht, aufgedeckt. Das Kind soll unmittelbar anschließend – um auch das Abzählen des Nachbildes auszuschließen – sagen, wie viele es gesehen hat. Wir beginnen mit den Würfelbildern, dabei ist das Bild der 5 und der 6 eingeschlossen.

  Anschlussfragen:
  „Du kennst dieses Muster“ – das Würfelbild der 5 (4, 3) wird kurz gezeigt und wieder verdeckt – „Wie viele Plättchen brauchst du, um es zu machen?“

---
[58] bei uns Maria.
[59] Vgl. Abschnitt 3.4.6.

❖ *Varianten, nicht visuell-räumliche Mustererfassung:*
Wir klatschen einige Male in die Hände oder spielen einige Töne. Das Kind soll sagen, wie oft wir geklatscht haben oder wie viele Töne gespielt wurden.[60]
Entsprechendes durch Berühren des Kindes auf der Hand oder auf dem Rücken.

❖ *Analyse von Mustern:*
Ein Blatt voller Punktmuster mit 4 bis 8 Elementen wird vorgelegt.
„Kreise in jedem Muster genau vier Punkte ein. Mach dabei so schnell, wie du kannst."
Variante: „In einigen dieser Muster sind Würfelvierer (Würfelsechser) versteckt: Wenn du einen findest, kreise ihn ein." (Vgl. Abb. 5.9).

Hinweise:

- Bei diesen Aufgaben ist darauf zu achten, ob das Kind alle Punkte oder einen Teil davon abzählt. Wenn das Kind beim Einkreisen visuomotorische Schwierigkeiten zeigt, soll es beruhigt werden, dass es auf schöne Kreise nicht ankommt, sondern auf das Tempo.
- Wenn das Kind bei der Prüfung der Simultanerfassung manchmal mit dem falschen Zahlwort ansetzt und sich dann korrigiert, kann man ausprobieren, ob es leichter ist, die Zahl mit den Fingern zu zeigen oder auf ein entsprechendes Würfelbild zu zeigen.
- Eine andere Variante: Man zeigt jeweils zwei Mengen. Das Kind soll sofort entscheiden, ob es gleich viele oder verschieden viele Punkte sind, indem es „gleich" oder „verschieden" sagt. Auf diese Weise überprüft man die Fähigkeit, die Muster zu unterscheiden, ohne Verbindung zu Zahlwörtern herzustellen.

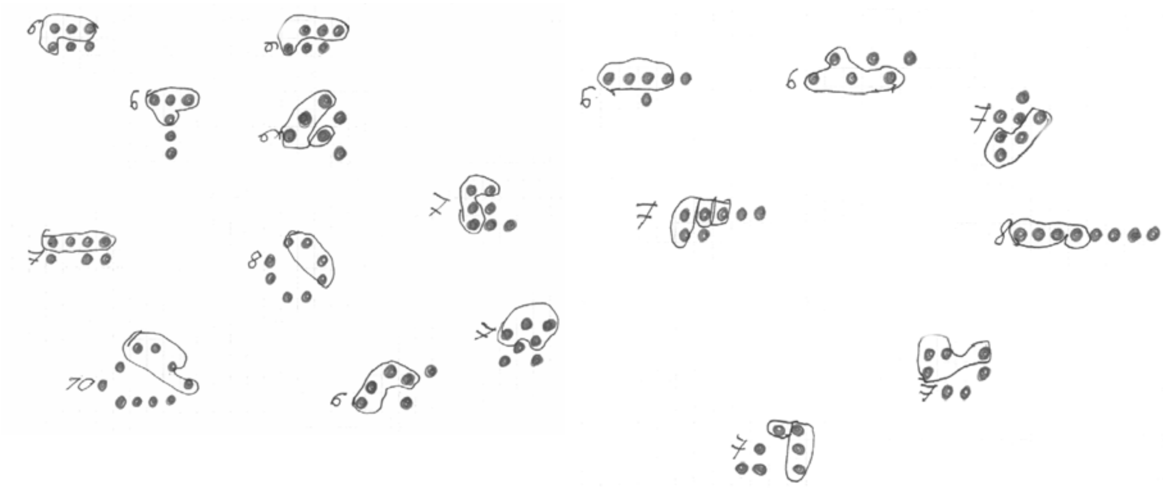


Abb. 5.9: Sara (2. Klasse) bearbeitete dieses Blatt. Auch jetzt kann man noch erkennen, dass sie stets drei Punkte zu Vieren ergänzt.

[60] Idee: Wir sagen bis zu vier Zahlen, die aufeinanderfolgen (5, 6, 7, 8), oder Wörter, und fragen, wie viele Zahlen (Wörter, „Sachen") wir gesagt haben. Wie weit kann das Kind Zählschritte zählen, ohne Hilfsmittel zu verwenden?

4. Vorstellung von Mengen oder Mustern bis 5

Die Fähigkeit sich Muster vorzustellen ist für das Nachdenken über Zahlen im Sinne eines Ganzen, das aus Einzelnen zusammengesetzt ist, und im Sinne der Teile-Ganzes-Beziehungen von großer Bedeutung. Aufgaben, die in der Schule gestellt werden, fordern diese Fähigkeit in der Regel nicht heraus.

❖ Auf einer Hälfte des Tabletts liegen zwei oder drei Elemente. Auf der anderen Hälfte liegen zwei (drei, vier oder fünf) weitere Elemente, evtl. in Würfelbildanordnung (Erleichterung der Aufgabe).
"Wie viele Plättchen liegen insgesamt auf dem Tablett?"

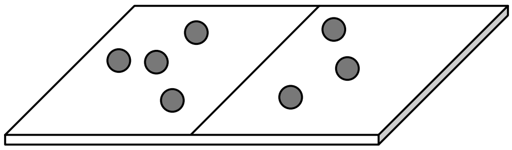


Abb. 5.10: Darstellung einer Anzahl auf dem zweigeteilten Tablett

❖ Auf dem Tablett sind zwei oder drei Elemente sichtbar. Ein Teil des Tabletts ist zugedeckt. „Unter der Decke liegen noch mehr Plättchen; da liegen noch zwei (drei, vier, fünf) Plättchen darunter. Wie viele liegen insgesamt auf dem Tablett?"
Wenn genauere Erläuterung notwendig ist: „Ich meine, die Plättchen, die man sehen kann, und die, die hier versteckt sind, zusammen."
Wenn das Kind die zusätzlichen Elemente mit seinen Fingern zeigt (simultan oder sukzessive?), kann man es bei einer nächsten Aufgabe auffordern, es ohne die Finger zu versuchen oder sich die Finger vorzustellen.

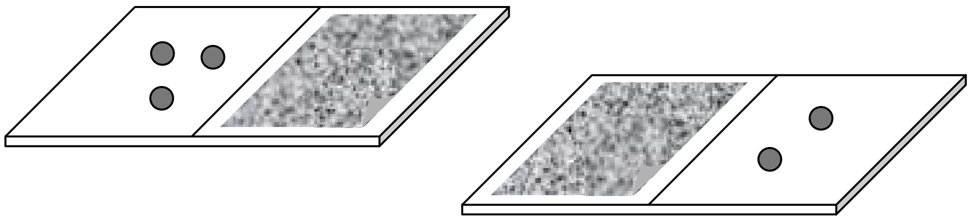


Abb. 5.11: Zahldarstellung mit verdecktem Teil

Hinweise:
Die erste der beiden Aufgabenstellungen ist die Vorbereitung der zweiten. Man kann daran aber auch beobachten, ob das Kind die Lösungen gewisser Aufgaben des Zahlenraums 10 schon auswendig weiß, ob es weiterzählend oder alles zählend[61] vorgeht.
Wie schon gesagt, wollen wir mit der zweiten Aufgabe herausfinden, ob das Kind sich Muster von vier bis fünf Elementen vorstellen und anhand der Vorstellung abzählen kann.[62]
Die Vorgabe der Elemente rechts oder links auf dem Tablett kann die Aufgabe für das Kind erschweren, das Mengen auf den Zahlenstrahl abbildet, d. h. von links nach rechts zählen „muss". Dann können zwei rechts angeordnete Punkte nicht „eins, zwei" sein. Hier ist das (kardinale) Verständnis der Zahl als Zusammensetzung aus Einheiten noch nicht sicher: „5" sind „1, 2, 3, 4, 5" in der Anordnung von links nach rechts.

---

[61] „Weiterzählend": Das Kind erfaßt einen Teil simultan („drei") und ergänzt den Rest durch Abzählen der Einzelelemente („vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun"); „alleszählend": das Kind zählt jedes Element.
[62] Aufgabenstellungen in Anlehnung an STEFFE & COBB, 1988.

5. Ergänzen von zweidimensionalen Zahlbildern in Form von Mustern Ergänzen von linear angeordneten Mengenbildern

1. *Das Ergänzen auf Grundlage von zweidimensionalen Mustern* verlangt die Vorstellung des vollständigen Musters, an dem dann die zu ergänzenden Elemente simultan abgelesen oder abgezählt werden. Es wird also Vorstellungs- und Analysefähigkeit der Muster geprüft.
Hat das Kind Schwierigkeiten bei Lücken, die „mitten im Muster“ auftreten, nicht jedoch bei Lücken am rechten Ende, ist dies ein Hinweis darauf, dass das Kind das zweidimensionale Muster auf die Zahlreihe abbildet und die Elemente noch nicht als „Einheiten“ versteht: Dann fehlen „die 3 und die 4“, aber „die 5“ ist vorhanden. Grundlage dieser Aufgabenstellungen sind Muster der Fünf oder der Zehn , die dem Kind gut bekannt sein sollen (als Zehnerfelder, als Fingerbild, als zwei Würfelfünfen). – Unsere Beispiele beschränken sich auf Würfelbild-Anordnungen.

2. Das Ergänzen auf Grundlage von zwei linearen Anordnungen von Elementen, von denen eine vollständig ist und die andere Lücken aufweist, verlangt das Abzählen oder Addieren der Lückenplätze auf Grundlage der vollständigen Reihe. Auch hier begegnet dasjenige Kind Schwierigkeiten, das Zahlen mit der Zahlreihe in der Weise verbunden hat, dass deren Elemente nicht als „Einheiten“ behandelt werden, siehe Erläuterung im letzten Abschnitt.

❖ Die folgenden Darstellungen werden mit farbigen Plättchen hergestellt, die auf Karton aufgeklebt werden. Sie werden einzeln vorgelegt.
Nachdem man geprüft hat, ob das Kind zwei Würfelfünfen sofort als „10“ benennt, legt man die folgenden unvollständigen Bilder vor.
„Wie viele Plättchen siehst du?“
„Wie viele müssen noch dazugetan werden, damit es 10 (5) sind?“

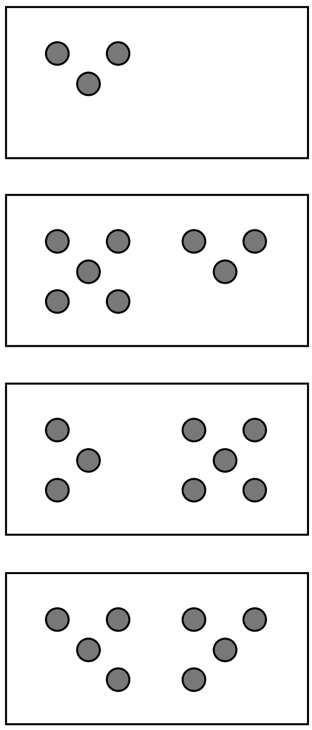


Abb. 5.12: Zahldarstellungen mit Punktebildern

❖ Die folgenden Darstellungen werden aus farbigen Plättchen hergestellt, die auf Karton aufgeklebt sind. Sie werden dem Kind nacheinander vorgelegt.
„Wie viele Plättchen muss ich in der unteren Reihe dazulegen, damit unten ebenso viele liegen wie oben?“
Oder: „In der Reihe oben und der Reihe unten liegen gleich viele Plättchen. Unten sind aber einige verdeckt. Wie viele sind in der unteren Reihe verdeckt?“[63]

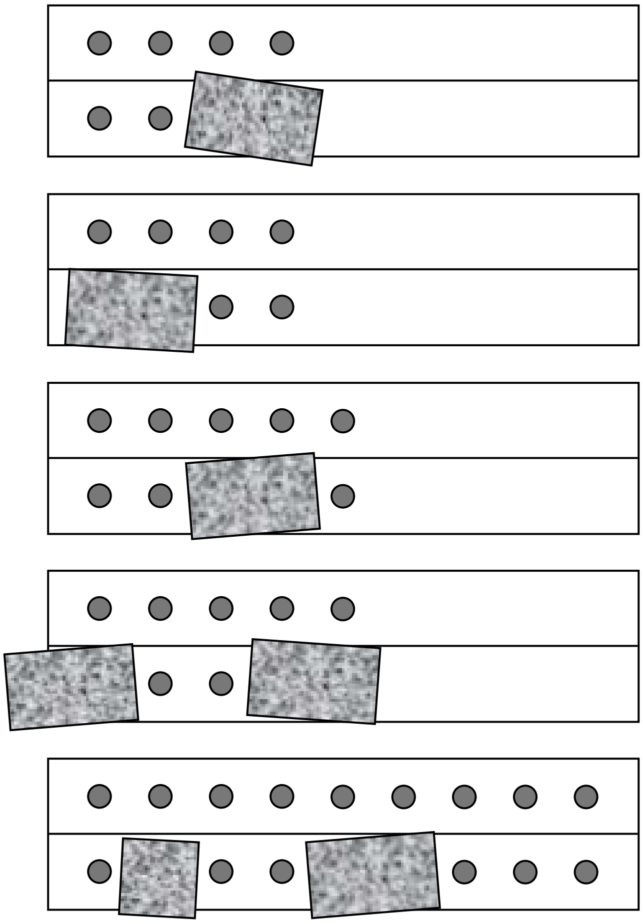


Abb. 5.13: In beiden Reihen sind gleich viele Plättchen. Wie viele sind in der unteren Reihe verdeckt?

6. Zahlbilder und die Art ihrer Verfügbarkeit beim Kind

Aufgabenstellungen:
1) Welche spontane Strukturierung einer nicht simultan erfassbaren Menge nimmt das Kind vor, um die Anzahl schnell, d. h. möglichst ohne zu zählen, feststellen zu können.
2) Welche Fingerzahlbilder kann es sofort als ganzes Bild zeigen, ohne es sukzessiv, begleitet vom Zählen, herzustellen? Akzeptiert es Nicht-Standard-Fingerbilder als Zahlrepräsentationen?
3) Welche Zahldarstellungen mit Würfelbild-Kärtchen stellt das Kind her?

Bedeutung der Aufgaben:
Welche Zahlbilder sind prinzipiell schon vorhanden, die ohne Abzählen erfasst werden können? Werden sie als starre Muster behandelt oder als Zusammensetzung aus einer bestimmten Zahl von Elementen, und sind als solche variabel? Findet das Kind Varianten und kann ihre Vor- und Nachteile reflektieren? Wenn „starre“ Muster (Würfelbilder) vorgegeben sind: Welche Zahldarstellungen bildet das Kind damit? Sind Beziehungen zur 5 und zur 10 vorhanden? Wann muss gezählt werden?

[63] Um ganz sicher zu gehen, dass das Kind die Aufgabenstellung versteht, kann man gemeinsam eine Doppelreihe durch eine Eins-zu-Eins-Zuordnung herstellen.

- Eine Menge, die nicht gezählt wurde (beispielsweise 8 oder 13 Elemente), wird vorgelegt:
  „Lege diese Steine so, dass du gleich sehen kannst, wie viele es sind, ohne viel zu zählen.“
  Wenn das Kind die Steine erst abzählt, beobachtet man, wie es vorgeht. Man wiederholt dann die Aufgabe mit einer neuen Menge und fordert das Kind auf, diesmal erst die Steine so hinzulegen, dass es nachher möglichst wenig zählen muss.
  „Warum kannst du so leicht sehen, wie viele es sind?“

- „Welche Zahlen kannst du mit deinen Fingern zeigen?“
  „Kannst du auch die Zahl x mit deinen Fingern zeigen?“
  „Kannst du die Zahl auch anders zeigen? Wie?“
  „Darf man 6 auch so zeigen?“ (drei Finger an einer Hand, drei an der anderen) „Warum?“
  „Kann man auch Zahlen größer als 10 mit den Händen zeigen? Wie kann man das machen?“

- „Wie viele Finger zeige ich?“
  „Wie viele muss ich noch strecken, damit es 10 Finger sind?“
  „Wie viele musst du noch zeigen, damit es zusammen 14 Finger sind?“

- Mehrere Würfelbild-Kärtchen von 1 bis 5 liegen vor.
  Das Kind soll damit Zahlen größer als 5 und größer als 10 darstellen.
  „Lege mit diesen Kärtchen ein Muster, das 4 (7, 9, 13, 17) Punkte hat.“
  „Kannst du das Muster noch auf andere Weise legen?“

Hinweise:
- Welche spontane Strukturierung nimmt das Kind vor?
- Zählt es die Plättchen ab und versucht die entsprechende(n) Ziffer(n) mit den Plättchen nachzulegen?
- Wie begründet es, dass man die Anzahl am Muster leicht ablesen kann?
- Werden die Fingerbilder simultan oder sukzessiv[64] hergestellt ?
- Bei der Zahldarstellung durch Würfelbilder: Welche Bausteine verwendet das Kind? Kann es Zahlbilder mit Bezug auf die 5 und die 10 spontan zusammensetzen?

Anschlussaufgaben zum Rechnen mit Zahlbildern:
Man kann die Frage anschließen, wie das Kind mit diesen Zahlbildern „rechnen“ kann, indem man fragt: „Wie viele bleiben, wenn du 5 wegnimmst?“ Und: „Rechne die Aufgaben 8 – 5 oder 13 – 5 mit Hilfe dieses Musters.“ Wie das Kind mit diesen Zahlbildern rechnet, legt offen, ob es die Zahl als Zusammensetzung aus anderen Zahlen versteht (13 als 5 und 5 und 3), oder als Abschnitt der Zahlreihe (es nummeriert die Punkte gewissermaßen durch, von 1 bis 13). Es geht also um Zahlbeziehungen, entsprechende Aufgaben werden an späterer Stelle (13.) dargestellt.

[64] *Simultan*: Das Kind zeigt das ganze Fingerbild sofort. *Sukzessiv*: Es streckt die Finger nacheinander, während es dazu zählt.

7. Offene Aufgabe zum Wissen über eine Zahl

- „Stell dir vor, dein kleiner Bruder (deine kleine Schwester, ein kleines Kind), der (die, das) noch nichts von Zahlen versteht, möchte wissen, was „sechs“ bedeutet. Wie würdest du es ihm erklären?“
  Ergänzende Fragen: „Kannst du es ihm auch *zeigen*?“

Hinweise: Es gibt hier keine richtige und keine falsche Antwort, aber der Untersucher/die Untersucherin kann Hinweise auf Zahlwissen des Kindes und Ausdrucks- und Darstellungsfähigkeiten bekommen.

8. Wie erklärt das Kind, dass zwei in der 2 (fünf in der 5) sind?

- Tom ist ein kleiner Junge (Tina ist ein kleines Mädchen). Im Schreibwarengeschäft gibt es Pixi-Bücher im Sonderangebot. Eins kostet nur eine Mark. Tom möchte zwei (fünf) solche Hefte haben. Die Oma gibt ihm ein Zweimarkstück (Fünfmarkstück) (aufmalen oder vorlegen). Tom guckt eine Weile traurig auf das Geldstück, dann sagt er: „Aber ein Heft kostet doch eine Mark. Dafür bekomme ich nicht zwei (fünf) Hefte.“
  „Was meinst du dazu? Was sagst du zu Tom?“

Hinweis:
Malt man das Geldstück auf, ist das Kind mit einer gewöhnlichen Fünf konfrontiert. Bei einem echten Geldstück kann es u. U. auf sein bereichsspezifisches Wissen über Geld zurückgreifen.
Toms Problem ist, dass er in die Zahl 5 nicht fünf Einer hineinsehen kann. Ein Kind kann die Fünfheit der 5 nicht abstrakt erklären, aber es kann die Bedeutung der 5 durch fünf Schritte erklären. Oder es sagt etwas, aus dem die Äquivalenz des Fünfmarkstücks mit fünf Einmarkstücken hervorgeht. Man kann aus dieser Aufgabe allein aber nicht allzu viel schließen, wenn das Kind ebenso ratlos ist wie Tom.

9. Invarianzurteile

Die Aufgabenstellungen entsprechen denen zu den protoquantitativen Urteilen (Aufgaben unter 1.), aber die Menge wird in diesem Fall zuerst abgezählt und die Urteile werden auf die so erhaltene Anzahl bezogen.
Man kann unterscheiden zwischen Invarianzurteilen,
- die sich auf *eine* Menge beziehen, an der Veränderungen vorgenommen werden;
- die sich auf die *Beziehung zwischen zwei* Mengen beziehen, von denen eine verändert wird;
- die sich auf *eine Menge* beziehen, die *in zwei Teilmengen zerlegt* wird; Veränderungen werden an einer oder an beiden Teilmengen vorgenommen, das Urteil soll jedoch hinsichtlich der Gesamtmenge gefällt werden.

Die Schwierigkeit nimmt in dieser Reihenfolge zu.

- Dreizehn Plättchen werden vorgelegt, abgezählt und in eine Reihe gelegt (1). Dann werden aus dem Innern der Reihe zwei Plättchen weggenommen und zur Seite gelegt (2). Aus der Schachtel zwei neue Plättchen genommen und an einem Ende der Reihe angefügt (4). Nach jeder Veränderung wird gefragt: „Wie viele Plättchen liegen jetzt da?“

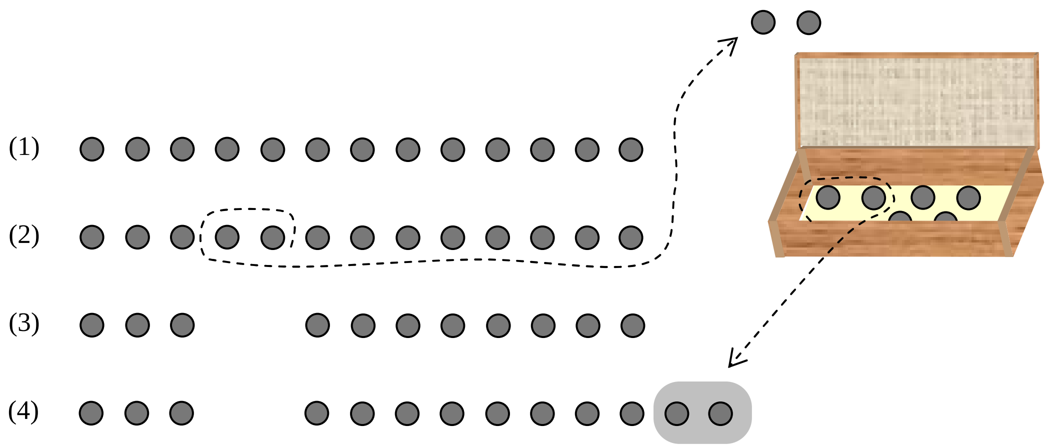
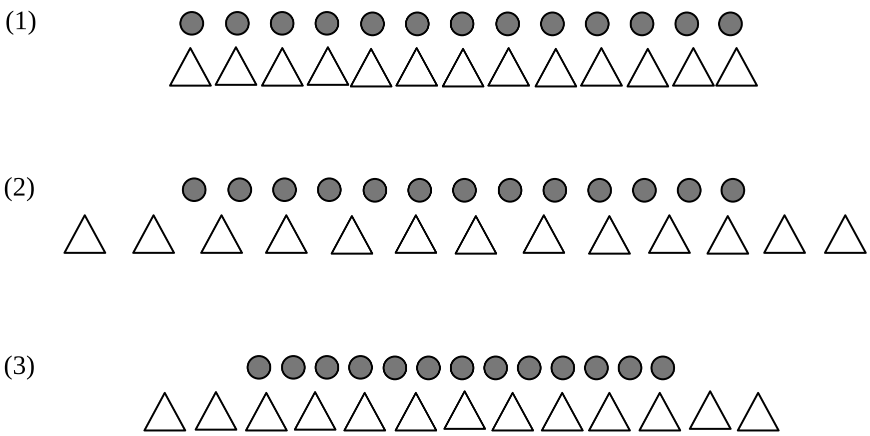


Abb. 5.15: Überprüfung von Invarianz-Urteilen

- ❖ Zwei Mengen aus verschiedenartigen Elementen (Größenunterschied) werden zuerst gemeinsam mit dem Kind in eine Eins-zu-Eins-Zuordnung gebracht (1).
„Sind es gleich viele Kreise wie Dreiecke oder gibt es von einer Sorte mehr?“
Anschließend wird eine Menge umgeordnet (wie in (2) oder (3)) und die Frage wiederholt.



- ❖ Neun Dinge werden vorgelegt und gezählt. Sie werden dann in zwei Gruppen zerlegt, hier vier, dort fünf. Die Anzahl der Elemente in jeder Gruppe wird vom Kind simultan erfasst oder durch Abzählen bestimmt.
„Hier sind also vier und dort sind fünf .... Wie viele sind in beiden Häufchen zusammen?“
(„Wie viele sind es, wenn man beide Häufchen zusammenlegt?“
„Wie viele sind insgesamt auf dem Tablett?“)

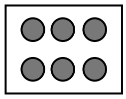
  Ein Element wird von dem linken in das rechte Häufchen gelegt.
„Wie viele sind es jetzt in beiden Häufchen zusammen?“

  Eines der Häufchen wird um ein Element vergrößert oder verkleinert.
„Wie viele sind nun in beiden Häufchen zusammen?“

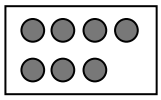
10. Eins mehr/eins weniger

Hat das Kind „eins mehr als“ und „eins weniger als“ mit den Nachbarn einer Zahl in der Zahlreihe verknüpft? Kann es zwei benachbarten Zahlen eine Differenz (von „eins“) zuordnen? Kann es Schlussfolgerungen auf Zahlenebene ziehen, wenn eine von zwei Zahlen um eins vergrößert wird?
Die Aufgaben werden entweder mündlich auf Zahlebene gestellt, ohne Anschauungsmaterial zu benutzen, oder in eine Sachsituation eingebettet (ohne Anschauungsmaterial), oder anhand von Mustern gestellt.
Wenn das Kind auch bei der zweiten Variante Schwierigkeiten zeigt, werden Elemente in Sichtweite gelegt, ohne aber die verwendeten Zahlen damit darzustellen. Diese Menge kann vom Kind als Hinweis verwendet werden, beim Nachdenken über die Zahlbeziehungen an Quantitäten zu denken.
Die dritte Variante greift auf Muster zurück, die dem Kind vertraut sind und die sich nur durch ein Element unterscheiden.

- ❖ Erste Aufgabenvariante:
  „Wie heißt die Zahl, die um eins größer ist als 6?“
  „Welche Zahl ist größer: 6 oder 7? Um wie viel ist 7 größer als 6?“
  „2 und 2 sind ? Weißt du auch, wie viel 2 und 3 sind ?“
- ❖ Zweite Variante:
  „A hat 6 (Autos), B hat eins mehr (eins weniger). Wie viele hat B?
  „A hat 6 (Autos) und B hat 7. Wer von beiden hat mehr? Wie viele hat B mehr als A?“
  „A hat 2 (Autos) und B auch. Wie viele (Autos) haben sie zusammen?
  C hat 3 (Autos). Wie viele haben A und C zusammen?“
- ❖ Dritte Variante:
  „Wie viele Plättchen brauchst du, um dieses Muster zu machen?



  „Wie viele brauchst du, um dieses Muster zu machen?



Hinweise:
Auch ein Kind, das von jeder Zahl des Zahlenraums bis 10 richtig weiterzählen kann, kann bei diesen Aufgaben Mühe haben. Sie setzen voraus, dass die Zahlreihe in bestimmter Weise reflektiert wurde.
Bei der dritten Variante kann man dem Kind, das abzählend vorgeht, entgegenhalten, dass ein anderes Kind gesagt, das wisse es gleich. Mit einer farbigen, durchsichtigen Folie, die beim Siebener über den Sechser gelegt wird, kann man die Überlegung des anderen Kindes nachvollziehbar machen. Anschließend kann man eine entsprechende Aufgabe stellen und das Kind nach *beiden* Lösungswegen fragen.

11. Eine unbekannte Teil-Anzahl bestimmen

Bei der folgenden Aufgabe ist die Gesamtzahl genannt, eine Teilmenge konkret sichtbar, die andere Teilanzahl soll bestimmt werden. Das Vorgehen des Kindes gibt Aufschluss über seine Zahlvorstellungen und über die Art und Weise, in der es über Teile und Ganzes reflektieren kann.
Die Aufgabenstellung ist schwieriger als die der Aufgaben unter 5., da keine Mustervorstellung angeregt ist bzw. keine Vergleichsmenge vorliegt und da die Fragestellung offenlässt, wie das Problem interpretiert wird: es kann als Ergänzungsaufgabe, als Subtraktionsaufgabe, als Problem, das nur durch Ausprobieren verschiedener Zahlen gelöst werden kann o. a. verstanden werden.
Die Aufgabenstellung kann verändert werden hinsichtlich der Gesamtzahl, ob die rechte oder linke Seite verdeckt ist, ob die Elemente des sichtbaren Teils linear, als Würfelbild oder unstrukturiert angeordnet sind.

❖ „Auf dem Tablett sind insgesamt 6 Steine. Nur einen Teil davon kannst du sehen, die anderen sind verdeckt. Wie viele sind verdeckt?“

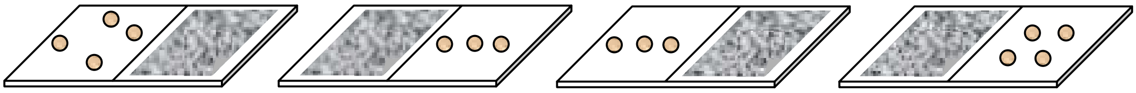


Abb. 5.16: Auf jedem Tablett liegen 6 Steine. Wie viele davon sind verdeckt?

Hinweise:

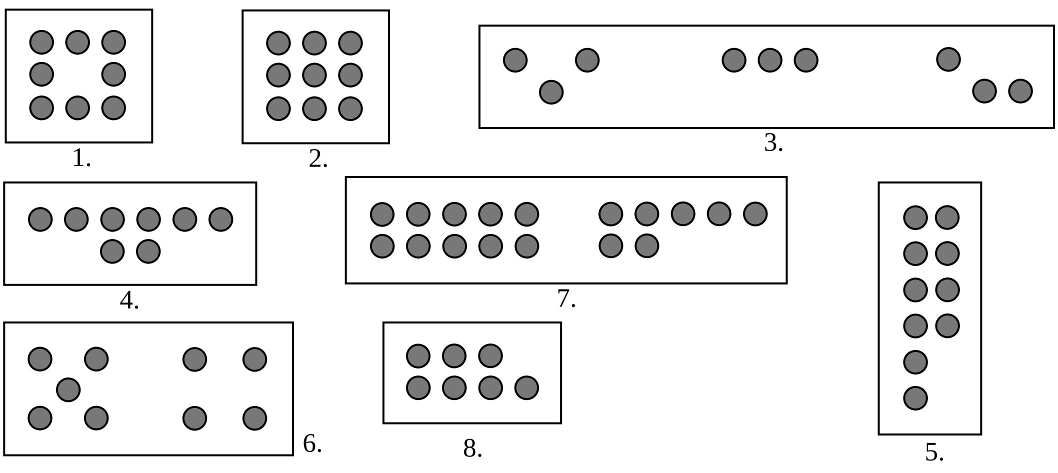
- Zählt das Kind die sichtbaren Elemente ab und versucht die unsichtbaren im Anschluss zu zählen? Mit welchem Erfolg? Bemerkt es Schwierigkeiten, wie geht es damit um?
- Erfasst das Kind die sichtbaren Elemente simultan und fährt dann fort, wie eben beschrieben?
- Fährt das Kind, nachdem es die sichtbaren Elemente erfasst hat, so fort, dass es die Zahlreihe bis zur angegebenen Gesamtzahl fortsetzt, dazu immer einen weiteren Finger streckt und am Fingerbild anschließend die gesuchte Zahl abliest?
- Kann das Kind die Problemstellungen, bei denen die sichtbare Menge rechts (links) angeordnet ist, nicht lösen, wohl aber die Problemstellungen in umgekehrter Anordnung?

12. Bestimmung von Anzahlen durch die Analyse von Mustern[65]

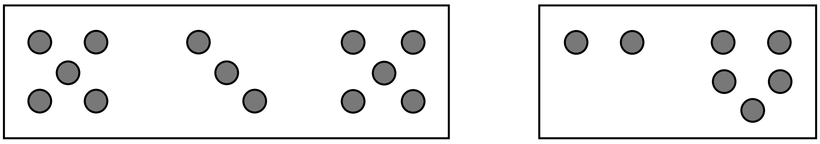
Es geht darum, wie weit das Kind eine Anzahl als Zusammensetzung aus anderen Anzahlen konstruiert, oder aber als Abzählaufgabe. Je nachdem wird es die Punkte im vorgelegten, nicht simultan erfassbaren, strukturierten Punktmuster einzeln abzählen oder weiterzählen (ausgehend von einem Muster, das es simultan erfassen kann) oder einfache Additionsaufgaben bilden und ausrechnen, oder einfache Ableitungen vornehmen.
Da aber auch abrufbare bzw. nicht abrufbare Basisfakten das Vorgehen mitbestimmen, bieten wir uns in einer Wiederholung dem Kind als „Rechenmaschine“ an. Dabei können komplexere Muster verwendet werden.
Je nachdem, wie die Muster beschaffen sind, sind die Anforderungen an eine visuelle Analyse und Synthese mehr oder weniger hoch.

❖ Eine Reihe von strukturierten Punktmustern, deren Strukturkomponenten (Teile) aus maximal 5 Elementen bestehen wird vorgelegt.
„Wie viele Plättchen braucht man, um dieses Muster zu legen? Finde es möglichst geschickt heraus.“

❖ Variante: „Bei den nächsten Mustern bin ich deine Rechenmaschine. Wenn du die Zahl der Plättchen mit meiner Hilfe schneller herausfinden kannst, musst du mir bloß eine Aufgabe sagen. Ich rechne dann für dich.“



[65] Idee aus dem Hamburger Beobachtungsbogen, dem das erste und das siebte Muster entnommen sind.



9. 10.

Abb. 5.17: Bestimmung von Anzahlen durch Analyse strukturierter Punktebilder

Hinweise:

- Zählt das Kind alle Punkte einzeln ab?
- Löst es einen simultan erfassbaren Teil heraus und zählt dann weiter?
- Bildet es Additionsaufgaben aus den Anzahlen von Teilen, die es visuell herausgelöst hat?
- Benutzt es die Fünferstruktur?
- Ordnet es Teile um, um Additionsaufgaben zu benutzen, deren Lösungen es auswendig weiß (4., 9. und 10. Muster) ?
- Nimmt es Ableitungen von einem Muster zu einem anderen vor (z. B. zwischen 1., 2. und 3. oder 4. und 5. Muster)?

13. Die Zahlen 5 und 10 als Teil einer Zahl

1. Reflexion anhand von strukturierten Zahldarstellungen:
Viele der uns vorgestellten Kinder lösten die Aufgabe „13 – 10“, indem sie von „13“ um zehn rückwärts zählten. Sie waren aber in der Lage, die Zahl 13 aus zwei Würfelfünfen und einer Würfeldrei darzustellen. Die folgenden Aufgaben sollen untersuchen:
- ob sie das konkrete Zahlbild für eine raschere Lösung auf Grundlage einer Teile-Ganzes-Reflexion des Bildes nutzen können;
- ob eine Verbindung zwischen der symbolischen Notation der Aufgabe („13 – 10“) und der konkreten Zahldarstellung (spontan oder nach einem Hinweis der Untersucherin) hergestellt wird.
Das Verhalten des Kindes kann hinsichtlich des Zahlverständnisses gedeutet werden, aber auch hinsichtlich des Operationsverständnisses (Operator- bzw. Termverständnis der Aufgabe 13 – 10[66]).

❖ Die im Folgenden verwendete Zahldarstellung sollte (vom Kind selbst oder von der Untersucherin) aus losen Plättchen hergestellt sein.
„Wenn du zehn davon wegnimmst, wie viele Plättchen liegen dann noch da?“

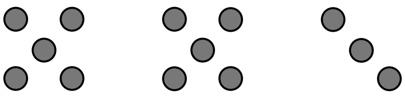
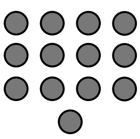


Abb. 5.18: Welcher Rest bleibt, wenn man 10 Plättchen entfernt?

❖ Variante: Eine entsprechende Aufgabenstellung kann erfolgen, wenn das Kind eine andere strukturierte Zahldarstellung gefunden hat, die keine Fünfergliederung aufweist: Ein Mädchen legte die 13 als folgendes Muster und begründete es durch „6 und 6 sind 12, und 1 ist 13“.

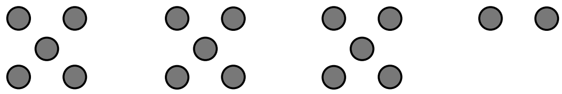


13 – 6 = _

Abb. 5.19: Rechnen anhand von Punktmustern

[66] vgl. Abschnitt 8.3

- ❖ Zu einer Zahldarstellung, z. B. der 17 als drei Fünfen und einen Zweier, erhält das Kind eine Reihe von Aufgaben, wie z. B. 17 – 5, 17 – 10, 17 – 7, 12 + 5, 10 + 7 u. ä.
  „Rechne diese Aufgaben. Wenn du das Ergebnis nicht weißt, kannst du das Bild zu Hilfe nehmen.“
  Wenn das Kind die Aufgaben zählend bearbeitet, ohne das Bild zu Hilfe zu nehmen, wird es aufgefordert, das Ergebnis oder den Rechenweg am Bild zu erklären.



17 – 5 =
10 + 7 =
12 + 5 =
17 – 10 =
17 – 7 =

Abb. 5.20: Rechnen anhand von Punktmustern

2. Reflexion anhand von unstrukturierter Zahldarstellung:
Das Kind, das 14 minus 4 nicht sofort lösen kann, zerlegt bei der folgenden Aufgabe im ersten Teil eine konkrete Menge (14 Elemente) in zwei Teile, deren Anzahlen es kennt (10 und 4). Bei einer gelingenden Teile-Ganzes-Reflexion kann es die folgende Aufgabe „14 – 10“ sofort lösen, indem es sinngemäß folgenden Zusammenhang herstellt: „Hier liegen insgesamt 14, in diesem Teil sind 10 und in jenem 4. Von 14 gehen 10 weg. Dieser kleine Teil bleibt übrig, also 4“.
Mit der letzten Frage vergewissern wir uns, dass das Kind, das die Aufgabe „14 – 10“ nicht mit Bezug auf die konkrete zerlegte Menge gelöst hat, sich an die Anzahlen der Teilmengen erinnert.
Kann das Kind den ersten Teil der Aufgabe spontan lösen (4 weg von 14 bleiben noch 10), stellt man trotzdem die folgende Frage/Aufgabe.

- ❖ Eine Menge von 14 Elementen liegt vor. Das Kind zählt sie ab. Die folgenden Fragen werden in der Reihenfolge gestellt, in der sie angegeben sind. Die Elemente bleiben bis zum Ende der Aufgabe so liegen, wie das Kind sie hingelegt oder angeordnet hat.
  „Wie viele hast du noch, wenn du vier davon zur Seite schiebst?“
  „Rechne jetzt diese Aufgabe: 14 – 10 = ✎“.
  „Wenn du von diesen Steinen 10 weggibst, wie viele hast du noch?“

3. Reflexion anhand von kleinen Textaufgaben, ohne konkrete Zahldarstellung:
Zu den folgenden Aufgaben kann ein Bild gezeigt werden, das einen Jungen oder ein Mädchen zeigt, das zwei Taschen in der Jacke hat.

- ❖ „Tom hat 17 Bonbons. In einer Tasche hat er 10 davon, wie viele sind in der anderen Tasche?

- ❖ „Tom hat 10 Bonbons in einer Tasche, in der anderen Tasche hat er 6. Wie viele hat er insgesamt?“

- ❖ „Tom hat 19 Bonbons. Er gibt 10 davon seinem Freund. Wie viel hat er noch?“

- ❖ „Tom hat noch 4 Bonbons. Gestern hatte er 14. Wie viele hat er gegessen oder verschenkt?

Hinweise:
Man möchte wissen, ob das Kind diese Aufgaben spontan – ohne eine längere Rechenprozedur, aufgrund seines Wissens über die Zusammensetzung der 17 aus 10 und 7 – lösen kann. Bei welchen Aufgaben gelingt das? Ist eine Entwicklung erkennbar?
Wenn das Kind eine Rechenprozedur vornimmt, beobachten wir, *wie* es vorgeht: Welche Zahlbilder – mit Fingern, mit Material, auf Papier – stellt es her? Welche sind offensichtlich in *seiner* Vorstellung vorhanden?

14. Teile-Ganzes-Reflexionen bei Sachsituationen

Der Lösungsweg, der bei folgender Textaufgabe beschritten wird, hängt davon ab, ob reversible Denkoperationen angewendet werden können. Ein Lösungsansatz ergibt sich daraus, dass Vorgänge, die in reversibler Beziehung zueinander stehen – die zweite Veränderung hebt den Anfangszustand auf –, vom Kind in dieser Weise erfasst werden und diese Beziehung auf die Behandlung der Zahlen übertragen wird. Ein zweiter Lösungsansatz bedient sich des Wissens, dass bei der Bildung einer Summe die Teilsummanden in der Summe aufbewahrt sind, also die Teile noch im Ganzen enthalten sind.
Das Kind, das sowohl im ersten als auch im zweiten Schritt der Aufgabe (also zuerst 4 + 9 und dann 13 – 4) rechnen muss, kann keine dieser reversiblen Denkoperationen durchführen und kann Additionsaufgaben gewissermaßen nur in einer Richtung lesen: 4 + 9 = 13 bedeutet für dieses Kind nicht, dass 13 aus 4 und 9 zusammengesetzt ist.

Eine Variation der Aufgabe besteht darin, dass man Zahlen wählt, deren Summe im Zahlenraum bis 10 oder bis 20 liegt. Es kann auch aussagekräftig sein, bei älteren Kindern zweistellige Zahlen zu wählen.
Die Aufgabe wird vom Kind selbst gelesen, wenn es schon lesen kann, oder vorgelesen, oder zusätzlich vorgelesen, nachdem das Kind sie gelesen hat und dabei Schwierigkeiten zeigte.

❖ „Im Autobus sind 4 Personen. An der nächsten Haltestelle steigen 9 Personen ein, niemand steigt aus. An der folgenden Haltestelle steigen 4 Leute aus, niemand steigt ein. Wie viele Menschen sind jetzt im Bus?“

Hinweise:
Es kommt durchaus vor, dass ein Kind, das die gegebenen Zahlenwerte nicht spontan addieren bzw. subtrahieren kann, den beschriebenen ersten Lösungsansatz wählt.
Wenn Schwierigkeiten auftreten, können wir einen Bus aufmalen, in den man vom Fahrersitz her rechts und links auf zwei Reihen mit jeweils zwei nebeneinander liegenden Plätze sieht. Das Kind kann dann das Bild zur Lösung oder zur Erklärung der Lösung verwenden.
Zusatzfragen können lauten: „Ein anderes Kind hat zu mir gesagt, „da muss man gar nichts rechnen, das sieht man gleich“, was meinst du dazu?“. Wenn das Kind zustimmt, bitten wir es um eine Erklärung.
Evtl. wiederholen wir die Aufgabe mit anderen Zahlenwerten.

15. Zehner und Einer im Zahlenraum bis 20

In den folgenden Textaufgaben geht es darum, ob das Kind einen Zehner aus dreizehn Einzelnen bilden bzw. herauslösen kann und (umgekehrt) in einem gegenständlichen Zehner (Eierkarton) zehn Einzelne sehen kann, ob es also einen Zehner als zusammengesetztes Ganzes aus zehn Dingen bilden und neben einzelnen Dingen korrekt behandeln kann. Dies ist eine Voraussetzung für die Erarbeitung des Stellenwertverständnisses.

❖ Für die folgende Aufgabe wird ein leerer Eierkarton verwendet und 13 Tischtennisbälle, die die Eier darstellen sollen.
„Frau Schmidt hat 13 frische Eier aus dem Hühnerstall geholt. Sie verkauft die Eier in Zehnerkartons. In einen Zehnerkarton passen 10 Eier. Wie viele der frischen Eier passen nicht in den Eierkarton?“

❖ Für die folgende Aufgabe wird ein gefüllter, geöffneter Eierkarton vorgelegt.
„Hier sind die Eier, die Frau Schmidt gestern aus dem Stall geholt hat. Wie viele Eier waren es gestern?“

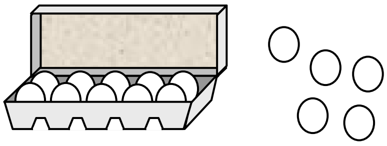


Abb. 5.21: Konkrete Zahldarstellung mit Zehnerbündelung

❖ Bevor wir die nächste Frage stellen, schließen wir den Karton, lassen ihn aber auf dem Tisch stehen.
„Am nächsten Tag kann Frau Schmidt einen Karton füllen und behält noch 4 Eier übrig. Wie viele Eier sind das?“

Hinweise:

- Kann das Kind zur ersten Aufgabe spontan antworten? (Zerlegung der 13 in 10 und 3 ist klar). Wir fragen dann vielleicht, wie es bei 17 Eiern aussieht.
- Zählt es die Plätze der Schachtel ab und fährt dann fort mit „11, 12, 13“, die es mit den Fingern festhält und an denen es nachher „drei“ abliest? – Das Kind hat „10“ noch nicht mit der Zahlreihe von 1 bis 10 identifiziert, aber es versteht die Zahl als diesen Abschnitt der Zahlreihe, entsprechend die Zahl 13.
- Zählt das Kind bei der zweiten Aufgabe die Eier in der Schachtel einzeln, oder zählt es nur die Einzelnen, bei 11 beginnend? „10“ ist noch nicht mit der Zahlreihe von 1 bis 10 identifiziert.
- Zählt das Kind die Schachtel als ein Ding und erhält „6“ als Ergebnis? Das Kind kann zehn Dinge, sobald sie zu einem Ganzen zusammengefasst sind, nicht mehr als „zehn Viele“ konstruieren.
- Bei der dritten Aufgabe müssen die Eier im Geiste aus der einen Schachtel ausgepackt oder aufgedeckt werden. Kann das Kind sich „einen Zehnerkarton“ als „zehn Viele“ denken, ohne dass der Karton geöffnet vorliegt?

5.6.2 Zahlverarbeitung

Geprüft werden in diesem Zusammenhang das Zahlenlesen, Zahlenschreiben, die Verknüpfung von Zahlen/Zahlwörtern mit Mengen und von Mengen mit Fingerbildern – kurz alle Verknüpfungen zwischen relevanten Zahlrepräsentationen im Anfangsunterricht.
In diesem Zusammenhang interessiert uns nur, ob die Übersetzung bzw. Zuordnung ein richtiges Ergebnis hat; es interessiert nicht, wie die Zuordnung hergestellt wird (z. B. ob simultan oder sukzessiv erfasst wird). Auf die Merkmale des kindlichen Vorgehens achten wir insofern, als Fehler erklärt werden müssen.

1. Zahlenlesen

❖ „Lies mir die Zahlen laut vor.“

2. Zahlenschreiben

❖ „Schreibe die Zahl auf, die ich dir jetzt sage: sieben (vierzehn, sechs, sechzehn, neun).“

- Benötigt werden jetzt Kärtchen, auf denen Zahlen geschrieben sind.
  „Auf diesen Kärtchen sind Zahlen geschrieben. Suche das Kärtchen, auf dem die Acht (Zwölf, Drei, usw.) geschrieben ist.“

3. Verbindung von Zahlen und Mengen

Benötigt werden jetzt Zahlenkärtchen und Punktebilder, die teilweise durch Würfelbilder und Kombinationen aus Würfelbildern bestehen, teilweise sich in linearer Anordnung befinden. Einführung in die Aufgabe durch zwei Beispiele aus dem Bereich der simultan erfassbaren Bilder.

- „Hier ist eine Zahl geschrieben. Gib mir so viele Plättchen, wie die Zahl sagt.“
- „Gib mir achtzehn (neun) Plättchen.“
- „Welches Bild zeigt 3 (4, 5) Punkte?
- „Zu jedem Punktebild gehört die Zahl, die sagt, wie viele Punkte es sind. Finde zu jedem Punktebild die richtige Zahlenkarte.“

4. Verbindung von Zahl und Fingerbild

- „Zeige mir vier (acht, drei, sieben) Finger“
- Wir zeigen ein Zahlkärtchen:
  „Zeige diese Zahl mit deinen Fingern.“
- Wir zeigen ein Punktekärtchen mit einer Würfelbildkombination:
  „Zeige so viele Finger wie du hier Punkte auf der Karte siehst.“

5.6.3 Zahl(wort)reihe

Wir untersuchen, wie weit das Kind (korrekt und sicher) zählen kann, ob es ab 10 bzw. ab 20 rückwärts zählen kann, ob es bei einer beliebigen Zahl beginnend vorwärts zählen kann.
Außerdem untersuchen wir in diesem Zusammenhang den Größenvergleich zweier Zahlen und das Ordnen mehrerer Zahlen der Größe nach.

1. Zählen

- Wir lassen das Kind sagen, wie weit es zählen kann. Dann soll es bis 30 zählen, wenn es dies kann. Andernfalls so weit, wie es angegeben hat.

2. Weiterzählen

Die Fähigkeit zum Weiterzählen bringt zum Ausdruck, dass das Kind die Zahlwortreihe schon einer gewissen Reflexion unterzogen hat: Es ist nicht nur ein mechanisch aufgesagtes Ganzes, sondern an jeder beliebigen Stelle kann eingestiegen werden.[67]

[67] Die Fähigkeit des Weiterzählens sollte nicht dazu benutzt werden, dem Kind die Rechenstrategie „Weiterzählen“ für Additionsaufgaben beizubringen, wie dies manchmal geschieht. Wenn das Kind die Zahl 8 noch nicht als Symbol für die Zahlen von 1 bis 8 versteht, ist es besser, es zählt weiterhin auch von 1 bis 8, wenn es beispielsweise die Aufgabe 8 + 4 lösen will. Eine Verkürzung des Verfahrens, ohne konzeptuelle Grundlage dafür, behindert die weitere Entwicklung des kindlichen Verständnisses.

❖ „Fange jetzt nicht mit 1 an, sondern mit 5 (8, 13)."

Hinweis: Wenn das Kind verzögert anfängt, ist es möglich, dass es lautlos bis zur Anfangszahl gezählt hat.

3. Rückwärts zählen

Das Rückwärtszählen bringt zum Ausdruck, dass das Kind einen mentalen Zugang zum Kontext einer Zahl auf der Zahlreihe hat. Der Zugriff kann auf visueller Grundlage erfolgen (man stellt sich die Zahl geschrieben vor und sieht ihre Vorgängerin auch geschrieben vor sich) oder auf akustischer Grundlage (dann ist das Zahl*wort* mit dem vorhergehenden eng assoziiert). – Die zu leistende Arbeit kann man sich selbst illustrieren, indem man versucht, die ersten zehn Buchstaben das Alphabets rückwärts aufzusagen.

❖ „Kannst du auch rückwärts zählen? Fange bitte bei 5 (10, 20) an."

Hinweis: Zählt das Kind sehr langsam und stockend? Dann fragen wir, wie es die jeweils folgende Zahl findet.
Treten Schwierigkeiten im Zahlenraum zwischen 20 und 10 auf, können wir das Kind fragen „Vor 8 kommt welche Zahl?" und damit anregen, auf das Zählen von 10 bis 1 zurückzugreifen. Wir geben aber nicht mehr als diesen Hinweis.

4. Größenvergleich von Zahlen

Zahlenpaare werden mündlich und schriftlich angeboten.

❖ „Ich sage dir immer zwei Zahlen. Sage mir bitte, welche von beiden die größere ist."[68]

❖ „Auf dem Blatt hier stehen in jeder Zeile zwei Zahlen. Mache einen Kringel um diejenige Zahl, die größer ist als die andere."

11	9
4	12
17	16
9	6
12	11
7	8

❖ „Wie hast du herausgefunden, dass diese Zahl größer ist als die?"
Oder: „Warum ist diese Zahl größer als die?"

Hinweise:
- Wenn das Kind „größer" nicht versteht, kann die Aufgabe so gestellt werden: „Welche von den beiden Zahlen kommt beim Zählen später?"
- Wenn das Kind nicht spontan entscheiden kann, sondern länger überlegen muss, fragen wir auf jeden Fall „Wie hast du es herausgefunden?"

---

[68] VON ASTER schlägt zum Zahlvergleich vor, die beiden gesprochenen Zahlen mit den beiden Händen zu verbinden – die erstgenannte Zahl mit der rechten, die zweitgenannte mit der linken. Das Kind soll dann als Antwort auf die Hand zeigen, auf der sie gewissermaßen dargeboten wurde.

5. Ordnen von Zahlen[69]

Die Aufgabe verlangt, dass das Kind eine unvollständige Reihe von Zahlen in Ziffernschreibweise konstruiert. Dafür muss das Kind die Reihe schon gut „verinnerlicht“ haben.
Es sind folgende Zahlenkärtchen vorbereitet: 3, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 19. Sie werden ungeordnet vorgelegt.

❖ „Bitte, ordne diese Zahlen der Größe nach. Fange mit der kleinsten Zahl an und lege sie dahin“ – wir zeigen auf die Seite des Tisches bei der linken Hand des Kindes.
❖ „Du bist fertig? Hast du noch mal durchgeschaut, ob alles richtig ist?“
❖ Wenn Fehler auftreten, wird ein falsch geordnetes Paar herausgegriffen: „Welche Zahl ist größer? Warum ist diese Zahl größer ?“
❖ „Das sind ja nicht alle Zahlen, zwischendrin fehlen welche. Wo zum Beispiel fehlt eine Zahl, welche fehlt da?“
„Kannst du sie auf ein Kärtchen draufschreiben?“
„Kannst du auch die anderen Zahlen aufschreiben, die fehlen, und an die richtige Stelle legen?“

Hinweise:
- Geht das Ordnen rasch oder langsam? Muss häufig umgeordnet werden?
- Treten Fehler auf? Werden diese nach der Aufforderung zur Kontrolle selbständig korrigiert?
- Kann nach dem Vergleich des Paares eine Korrektur der Reihe vorgenommen werden?
- Können Lücken gefunden und ausgefüllt werden?

5.6.4 Operationsverständnis beim Addieren/Subtrahieren

Zur Beherrschung der Addition/Subtraktion im Zahlenraum bis 20 gehören Operations-, Term- und Gleichungsverständnis, flexibles Anwenden von Rechenstrategien sowie die Automatisierung des kleinen Einspluseins, Einsminuseins und des Ergänzens.[70]

Operationsverständnis

Voll entwickeltes Operationsverständnis bei der Addition und Subtraktion besteht in der Fähigkeit, Verbindungen herzustellen zwischen

a) konkreten Sachsituationen, die meist verbal beschrieben werden und möglichst realitätsnah sein sollen,
b) modell- oder bildhaften Darstellungen von entsprechenden Quantitäten und Handlungen mit diesen,
c) symbolischen Schreibweisen für die zugrunde liegenden Quantitäten und Rechenoperationen, meist in Form von Gleichungen (Abb. 8.1).

---

[69] Vergleiche Aufgabenstellung im Hamburger Beobachtungsbogen
[70] Vgl. dazu Kap. 8

Kompetenz beim Lösen von Textaufgaben entwickelt sich nur allmählich und ist abhängig vom Sprach-, Sach- und Situationsverständnis, vom mathematischen Operationsverständnis sowie vom quantitativ-numerischen Verständnis. Die großen interindividuellen Leistungsunterschiede beim Lösen von Textaufgaben beginnen sich bereits im Grundschulalter auszubilden: Kinder, die dort einen Vorsprung im numerischen Verständnis haben, können diesen später weiter ausbauen. Doch bleibt genügend Spielraum für Kompensation. Kinder, die mit Zahlen und Rechenoperationen flexibel umgehen können (beispielsweise das Vertauschungsgesetz beim Addieren anwenden und den Zusammenhang zwischen der Addition und Subtraktion kennen), können damit leichter Modelle für das Lösen von Textaufgaben konstruieren (STERN, 1997, 159).

Wenn Erwachsene eine Textaufgabe lösen, können sie im allgemeinen auch einen angemessenen Lösungsweg angeben. Bei Grundschulkindern kann dies nicht vorausgesetzt werden. „Richtige Antwortzahl, fehlender oder inadäquater Rechenweg“ ist eine Übergangsphase beim expliziten Erwerb eines mathematischen Modells für das Problem. Der Fähigkeit, eine bestimmte komplexe Aufgabe vollständig zu mathematisieren, gehen Phasen voran, in denen lediglich die Antwortzahl oder eine Teilgleichung gefunden werden kann. Für alle Grundschulkinder und alle Aufgaben scheint zu gelten, dass das mathematische Wissen als aufgabenspezifisches Wissen verfügbar ist, bevor Kinder es erläutern und begründen können (STERN, 1997, 169). Kinder gewinnen erst allmählich bewusste Kontrolle über die den Textaufgaben zugrunde liegenden Prinzipien. Mangelnde Sensibilität von Lehrkräften für noch unsicher verfügbares Wissen von Kindern (z. B. der Unfähigkeit, eine Gleichung für eine bereits gelöste Textaufgabe anzugeben) kann diese frustrieren, weil sie in deren Augen als inkompetent gelten, obwohl sie bereits wichtige Lernschritte vollzogen haben. Es ist daher zweckmäßig, das tatsächlich bereits entwickelte Verständnis für Situationen des Addieren/Subtrahierens genauer zu diagnostizieren.

- ❖ *Sachsituation → Modell*: „Zeige mit diesen Plättchen, was in der Textaufgabe geschieht“. Dabei lässt man das Kind erklären, was es mit den Plättchen macht und warum.
- ❖ *Bildhafte Darstellung → Sachsituation:* „Erfinde eine Rechengeschichte, die zu diesem Bild passt.“ Dabei lässt man das Kind erklären, inwiefern die Geschichte zu dem Bild (oder den als Muster vorgegebenen Plättchen) passt. Man kann das Kind auch bitten, noch eine andere zum Bild passende Rechengeschichte zu erfinden.
- ❖ *Sachsituation → symbolische Darstellung*: „Schreibe eine Rechenaufgabe (Zahlenaufgabe, Zahlengleichung) auf, die zu der Rechengeschichte passt. Erkläre, was jede Zahl in der Rechengeschichte bedeutet. Erkläre, warum du so gerechnet hast.“
- ❖ *Symbolische Darstellung → Sachsituation*: „Erfinde eine Rechengeschichte, welche zu der Aufgabe $7 + 4 = \square$ (oder $7 - 4 = \square$) passt. Wieso passt diese Geschichte zu dieser Rechenaufgabe? Erfinde zu der gleichen Rechenaufgabe noch eine andere Rechengeschichte“.
- ❖ *Modell- oder bildhafte Darstellung → symbolische Darstellung*: „ Schreibe eine Rechenaufgabe auf, die zu diesem Bild (oder Modell) passt.“ Man bittet das Kind zu erklären, weshalb es diese Rechenart gewählt hat und was jede Zahl der Rechenaufgabe in dem Bild bedeutet.
- ❖ *Symbolische Darstellung → bildhafte Darstellung oder Modell*: „Zeige mir mit diesen Plättchen (oder einem Bild), was $3 + 5$ (bzw. $7 – 3$) bedeutet“. Man bittet das Kind, den Zusammenhang zwischen der Rechenaufgabe und den Plättchen zu erklären.

- ❖ Sehr aufschlussreich ist es auch, das Kind selbst erlebte oder erfundene Situationen beschreiben und dazu selbst Textaufgaben erfinden zu lassen. Man kann auch fragen, was beispielsweise „3 + 1“ oder „4 + ? = 7“ oder „4 + □ = 7“ alles bedeuten könnte (STEINER, 1997, 174). Können zum gleichen Rechenterm bzw. zur selben Gleichung verschiedene Sachzusammenhänge und verschiedene sprachliche Formulierungen gefunden werden?

Term- und Gleichungsverständnis

Bei der Untersuchung des Operationsverständnisses treten, passend zu den Beispielaufgaben in Tabelle 8.1, bereits Terme und Gleichungen wie 4 + 3, 7 – 3, 4 + □ = 7, 7 – □ = 3, □ + 3 = 7, □ – 4 = 3 auf. Derartige Terme und Gleichungen im Zahlenraum bis 20 sollen Kinder *nach* ausreichender Erarbeitung des prinzipiellen Verständnisses anhand konkreter Situationen und modell- oder bildhafter Darstellungen auch auf rein symbolischer Ebene lösen können. Es ist von diagnostischem Interesse, ob die Lösung unter Anwendung von zählenden und vor allem nicht-zählenden Rechenstrategien[71] oder auswendig gewusster Zahlentripel[72] herbeigeführt wird. Auf Gleichungen mit Rechenzeichen rechts des Gleichheitszeichens kann bei der Diagnostik leistungsschwacher Kinder in Klasse 1 verzichtet werden, zumal dieser Stoff in manchen Bundesländern im 1. Schuljahr nicht vorgeschrieben ist.[73]

Gleichungen mit Leerstelle (z. B. 4 + □ = 7 oder 7 – □ = 3) fallen manchen Kindern schwer, wenn sie diese auf rein symbolischer Ebene lösen sollen. Bei „4 + □ = 7 nennen sie als Ergebnis 11 statt 3 (vgl. Abschnitt 8.4). Bei diesen Kindern kann untersucht werden, ob sie die Aufgaben dieser Struktur auf konkret-handelnder oder bildhafter Ebene lösen können. Statt der Aufgabe „4 + □ = 7" präsentiert man dazu dem Kind ein Tablett, auf dessen linker Seite vier Plättchen zu sehen sind und dessen rechte Seite mit einem Tuch abgedeckt ist (Abb. 5.22). Man sagt dem Kind, dass auf dem Tablett insgesamt 7 Plättchen liegen und fragt, wie viele Plättchen unter dem Tuch versteckt sind.

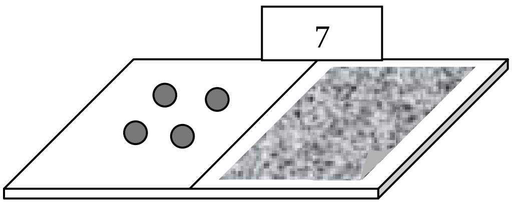


Abb.5.22: Konkrete Präsentation zur Gleichung 4 + □ = 7

Gleichungen vom Typ □ + 3 = 7 und □ – 4 = 3 werden insbesondere jenen Kindern schwer fallen, welche Terme als Handlungsanweisungen deuten und durch Vorwärts- oder Rückwärtszählen lösen wollen: Ihnen fehlt hierfür der Startpunkt. Bei diesen Kindern kann untersucht werden, wie sie die Aufgaben lesen und ob sie sich mit einer Zeichnung selbst helfen können. Steht für die Diagnose genügend Zeit zur Verfügung, kann man untersuchen, ob sie nach einführender Modellierung von Additions- und Subtraktionsaufgaben nach dem Teile-Ganzes-Konzept (Abb. 8.9 bis 8.11) weitere Aufgaben nach diesem Konzept leichter lösen können. Wenn ja, kann dann der Zusammenhang mit der rein symbolischen Präsentation (□ + 3 = 7 bzw. □ – 4 = 7) hergestellt und später diagnostiziert werden. Zu Schwierigkeiten des Gleichungsverständnisses verweisen wir auf Abschnitt 8.4.

[71] (Abschnitt 5.6.5)
[72] (Abschnitt 5.6.6)
[73] Vgl. Abschnitt 8.4

5.6.5 Rechenstrategien beim Addieren und Subtrahieren

Zählstrategien

Zählstrategien zur Berechnung von Summen und Differenzen sind in Abschnitt 8.5.1 dargestellt. Wenn wir vermuten, dass ein Kind Terme wie 4 + 3, 7 + 8, 7 – 3 oder 15 – 8 *zählend* berechnet, können wir fragen: „Wie hast du das herausgefunden?“ Wenn zuvor ein Vertrauensverhältnis aufgebaut wurde, geben die meisten Kinder über ihren Lösungsweg bereitwillig Auskunft. Anschließend kann man das Kind fragen: “Kannst du das auch noch auf eine andere Art ausrechnen?“ Denn zählendes Rechnen kann ein durch starkes Sicherheitsbedürfnis oder Stress ausgelöster Rückgriff auf alte Rechenstrategien sein.
Ob ein Kind zählend rechnet, können wir oft daran erkennen, dass es leise mitzählt, Finger bewegt oder ausgestreckte Finger mit den Augen abtastet, mit dem Kopf nickt, usw. Wenn Kinder zählendes Rechnen verbergen wollen, kann es sein, sie stecken die Hand in die Hosentasche oder zählen anhand von Punktmustern auf Gegenständen im Raum. Weitere Anzeichen für zählendes Rechnen sind:

- Verrechnen um +1 oder –1 infolge unklarer Rolle des Zählanfangs oder -endes.
- Die Berechnung von 2 + 7 dauert länger als die von 7 + 2 (das Kind nutzt nicht den Vorteil der Tauschaufgabe).
- Nach Berechnung von 6 + 6 geht die Berechnung von 6 + 7 nicht schneller vonstatten (das Kind nutzt nicht den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben).
- Nach Berechnung von 3 + 4 geht 13 + 4 nicht rascher (das Kind nutzt nicht Vorteile der dekadischen Analogie).
- Nach Berechnung von 4 + 3 geht 7 – 3 nicht rascher (das Kind nutzt nicht den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion).

Generelle Kennzeichen für zählend rechnende Kinder: Sie wissen nur wenige Basisfakten (Aufgaben des kleinen Einspluseins und Einsminuseins) auswendig und nutzen nicht bereits auswendig gewußte Aufgaben, um daraus weitere Aufgaben abzuleiten.
Bei zählend rechnenden Kindern ist es wichtig zu beobachten, *wie* das Kind zählt und bei welchen Aufgabentypen es dies tut. Weitere Beobachtungshinweise dazu findet man in den Abschnitten 4.2.1 und 4.3.1.

Nicht-zählende Rechenstrategien

Nicht-zählende Rechenstrategien sind eine wichtige Vorbedingung für die Automatisierung der Basisfakten (also des kleinen Einspluseins, Einsminuseins und des Ergänzens im Zahlenraum bis 20). Sie sind im Abschnitt 8.5.2 ausführlich dargestellt. Zur Erfassung des Lernstandes des Kindes genügt es, Aufgaben zu den entsprechenden Strategien zu stellen und zu beobachten, wie leicht oder schwer dem Kind diese Aufgaben fallen, insbesondere, wie viel Zeit es dafür benötigt. Von *Beherrschung* der jeweiligen Strategie kann man nur dann sprechen, wenn die Antworten des Kindes ohne zeitliche Verzögerung, mühelos und sicher erfolgen.

Für die Präsentation der folgenden Aufgaben sind Termkarten zweckmäßig, also Karten, mindestens in Spielkartengröße, auf welche die Rechenterme (Summen oder Differenzen) geschrieben sind. Die schriftliche Darbietung ist, auch wenn sie nur kurzzeitig erfolgt, für die meisten Kinder leichter aufzufassen als bloß mündliche Präsentation, vermutlich, weil der schriftlich präsentierte Term beim Lesen zumindest innerlich gleich leise mitgesprochen wird. Der Grad der Vertrautheit mit den folgenden Aufgabentypen sollte untersucht werden.

❖ *Verdoppeln (Halbieren)*
Vermischt mit anderen Aufgaben stellt man Aufgaben der Art 3 + 3, 7 + 7, 9 + 9, 4 + 4, (6 – 3, 12 – 6, 16 – 8) usw. Hat das Kind sie bereits gedächtnismäßig verankert und abrufbar oder rechnet es hierbei noch zählend?

❖ *Rechnen mit der Null*
Dazu stellt man Aufgaben der Art 8 + 0, 11 – 0, 12 – 12.

❖ *Zehnersummen (Ergänzen bis 10)*
Man stellt dem Kind – vermischt mit anderen Summen und Differenzen – Aufgaben der Art 6 + 4, 8 + 2, 3 + 7, 10 – 3, 10 – 7, von 3 bis 10, von 7 bis 10, 4 + □ = 10, 7 + □ = 10 und beobachtet, ob es die Zehnersummen auswendig beherrscht.

❖ *Zehn als Summand/Subtrahend („Kraft der Zehn“)*
Man stellt dem Kind Aufgaben vom Typ 10 + 4, 4 + 10, 14 – 10 und beobachtet, ob es zählend rechnet oder nutzt, dass vierzehn „zehn und vier“ ist. Aufschlussreich ist es auch das Kind zu fragen, welche der beiden Aufgaben leichter ist: 14 – 9 oder 14 – 10?

❖ *Dekadische Analogie („Kraft der Zehn“)*
Man legt dem Kind unmittelbar nacheinander Aufgaben der Art 5 + 3 und danach 15 + 3; 7 – 4 und danach 17 – 4 vor und beobachtet, ob es den Zusammenhang der beiden Aufgaben für eine rasche Antwort bei der jeweils zweiten Aufgabe nutzen kann.

Zusammenfassen von Fünfen („Kraft der Fünf“)
Das vorteilhafte Zusammenfassen von Fünfen als Teile einer Zahl in Aufgaben der Art 7 + 5, 5 + 8, 9 – 5 und 18 – 5 (vgl. Abschnitt 8.5.2) ist in deutschen Unterrichtswerken leider noch nicht gebräuchlich.[74] . Man kann also kaum erwarten, dass Kinder bei obigen Rechenausdrücken die „Kraft der Fünf“ nutzen, also bei „7 + 5“ die 7 interpretieren als 5 + 2 und die beiden Fünfen zu einer Zehn zusammenfassen. Man kann aber untersuchen, ob bei geeigneter Präsentation mit konkretem Material oder bildhaften Darstellungen das Kind eine solche Strategie entdeckt und nutzen kann.

❖ Man legt dem Kind auf einem unterteilten Tablett mit Zählplättchen oder vorgefertigten Punktekarten eine Darstellung der Summe „7 + 5“ vor und fragt: „Wie viele Plättchen (Punkte) sind das zusammen?

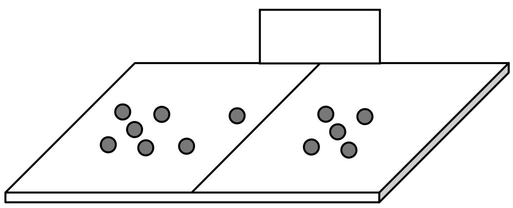


Abb. 5.23: Additionsaufgabe zur „Kraft der Fünf“

[74] (Ausnahme: Das Zahlenbuch, Klett-Schulbuchverlag)

❖ Entsprechend präsentieren wir Subtraktionsaufgaben zur „Kraft der Fünf“

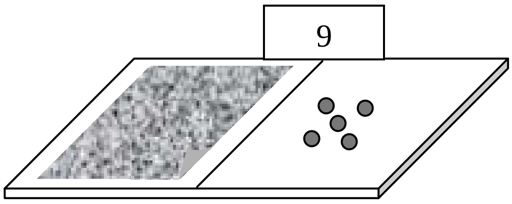


Abb. 5.24: Subtraktionsaufgabe zur „Kraft der Fünf“

Wir sagen dem Kind:“ Auf dem Tablett liegen 9 Plättchen. 5 Plättchen kannst du sehen, die anderen sind unter dem Tuch versteckt. Wie viele Plättchen sind unter dem Tuch?“

Wenn das Kind einige entsprechende Präsentationen von Additions- und Subtraktionsaufgaben leicht versteht, kann man untersuchen, ob es diese Strategie auch bei *schriftlich* präsentierten Aufgaben wie „ 8 + 5“, „5 + 6“, „11 – 5“ und „14 – 5“ anwenden kann.

❖ *Tauschaufgaben*

Man präsentiert zuerst „7 + 2“, gleich danach „2 + 7“. Antwortet das Kind sofort oder rechnet es erneut (eventuell zählend)? Man lässt noch einige weitere derartige Aufgabenpaare folgen, auch „extreme Fälle“ wie etwa „13 + 4“ und „4 + 13“. Aufgaben mit der Null („5 + 0“ und „0 + 5“) sowie mit der Zehn („10 + 5“ und „5 + 10“) sollten ebenfalls dabei sein.
Eine diagnostisch bedeutsame Erschwerung der Aufgabenstellung ergibt sich, wenn man „2 + 7“ oder „4 + 13“ *unmittelbar* vorlegt (ohne vorheriges „7 + 2“ oder „13 + 4“) und beobachtet, ob das Kind zum Ausrechnen die Reihenfolge umkehrt. Kann das Kind Aufgabenkarten wie „2 + 7“ *direkt* laut lesen als „7 + 2“ oder „zwei mehr als sieben“?

❖ *Nachbaraufgaben zu Zehnersummen und Verdoppelungsaufgaben*[75]

Man präsentiert dem Kind zunächst *unmittelbar* nacheinander Aufgaben der Art „5 + 5“ und „5 + 4“, „6 + 6“ und „6 + 7“, „6 + 6“ und „6 + 8“ und beobachtet, ob es den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben nutzt, also bei „6 + 7“ sofort das um 1 größere Ergebnis (bei „6 + 8“ das um 2 größere Ergebnis) nennt. Entsprechende Aufgaben stellt man für die Subtraktion, beispielsweise „12 – 6“, danach „13 – 6“ oder „von 6 bis 12“, danach „von 6 bis 13“.
Die Anforderung an das Kind wird erhöht, wenn man ihm *unmittelbar* Aufgaben der Art „6 + 7“ oder „6 + 8“ stellt und – eventuell durch Erfragen des Lösungsweges – feststellt, ob es spontan die Aufgabe 6 + 6 als Hilfsaufgabe verwendete, ob es also in der 7 bzw. in der 8 die darin enthaltene 6 zum geschickten Rechnen verwendete.

❖ *Zehnerüberschreitung durch Zerlegen (Teilschrittverfahren)*

Die Zerlegung etwa der Aufgabe 6 + 7 in die beiden Teilaufgaben 6 + 4 und 10 + 3 fällt vielen Kindern nicht leicht (vgl. Abschnitt 8.5.2). Stellt man einige derartige Aufgaben, wird man häufig beobachten, dass Kinder lieber zählend rechnen. Dies ist verständlich, wenn auch nur einer der drei Teilschritte (6 + □ = 10, 7 = 4 + □, 10 + 3 = □) nicht automatisiert und somit das Arbeitsgedächtnis überfordert ist.

[75] Diese Strategien beruhen auf der *Kovarianz.* Sie sind im Abschnitt 8.5.2 ausführlich dargestellt.

❖ Mache-Zehn-Strategie („Neunertrick“ und „Achtertrick“)
Interessant ist es, Aufgaben vom Typ „9 + 7“ und vom Typ „8 + 7“ zu stellen. Wenn das Kind kein Problem mit „eins weniger“ und „zwei weniger“ hat, ist hierbei die *Mache-Zehn-Strategie* (Abb. 8.27 in Abschnitt 8.5.2) leicht anwendbar. Entsprechende Aufgaben stellt man für die Subtraktion. (Abb. 8.32 in Abschnitt 8.7).

5.6.6 Grad der Automatisierung

Beherrschung des kleinen Einspluseins und Einsminuseins bedeutet, dass die Ergebnisse aller Aufgaben rasch, sicher und mühelos (wie automatisch) aus dem Gedächtnis abgerufen werden können. Das ist in der Anfangsphase der Automatisierung – bei einzelnen Aufgaben sogar bis ins Erwachsenenalter – ein blitzschnelles Ableiten (bei 8 + 9 beispielsweise aus 8 + 8 oder 8 + 10).

Will man bei einem Kind den Umfang der Automatisierung überprüfen, kann man zur Erfassung tabellarische Darstellungen aller 121 Fälle der kleinen Einspluseins (Tab.5.4), Einsminuseins (Tab. 5.5) oder des Ergänzens (Tab. 5.6) verwenden.

❖ Bei der Überprüfung des kleinen Einspluseins fragt man in willkürlicher Reihenfolge Aufgaben aus der Tabelle ab. Erfolgt eine Antwort sofort (innerhalb von etwa 2 Sekunden) und richtig, setzt man in das entsprechende Feld das Zeichen „✓“. Erfolgt die Antwort richtig, aber zu langsam, notiert man beispielsweise „O“. Nennt das Kind ein falsches Ergebnis (in der Tabelle bei „6 + 7“ das Ergebnis „12“), so notiert man in der Tabelle dieses falsche Ergebnis. Man kann dann etwas später dieselbe Aufgabe nochmals stellen und sehen, ob das Kind wieder das gleiche falsche Ergebnis nennt.

	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10
0											
1											
2											
3								✓			
4						0					
5											
6											
7							12				
8											
9											
10											

Tab. 5.4: Zur Überprüfung der Automatisierung des kleinen Einspluseins

Es ist nicht erforderlich, alle 121 Aufgaben abzufragen. Es genügt beispielsweise, von den Aufgaben mit der Null , Eins oder Zehn nur einige zu überprüfen. Man kann auch gleich Rechenstrategien überprüfen, z. B. das Verdoppeln, Verdoppeln plus 1, Verdoppeln plus 2, die Zehnersummen, Rechnen mit der Zehn, Rechnen mit der Fünf usw., indem man dafür geeignete Aufgaben stellt und das Kind seinen Lösungsweg sagen lässt.

Beim kleinen Einsminuseins und beim Ergänzen kann man entsprechend vorgehen. Allerdings sind die tabellarischen Darstellungen der jeweils 121 Aufgaben nicht ganz so bequem zu handhaben (Tab. 5.5 und 5.6).

	=0	=1	=2	=3	=4	=5	=6	=7	=8	=9	=10
–0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
–1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
–2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
–3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
–4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
–5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
–6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
–7	7	8	9	10	11	12 *6*	13	14	15	16	17
–8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
–9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
-10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Tab. 5.5: Zur Überprüfung des Einsminuseins

fehlen / von... bis...	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12 *6*	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Tab. 5.6: Zur Überprüfung des Ergänzens

5.7 Diagnostische Aufgabenstellungen für den Zahlenraum bis 100

5.7.1 Zahl(wort)reihe

Wir möchten mit den folgenden Aufgaben herausfinden,

- ob das Kind die Zahlwortreihe bis 100 bilden kann;
- ob die Anwendung beim Abzählen gelingt;
- ob es bei einer beliebigen Zahl mit dem Aufsagen der Reihe beginnen kann;
- ob es von einer beliebigen Zahl rückwärts zählen kann;
- ob es spezielle Folgen, wie z. B. die Fünferreihe, Zweierreihe und Zehnerreihe aufsagen kann;
- ob es – bei einer beliebigen Zahl beginnend – in Zehnerschritten zählen kann;
- ob es in Zehnerschritten rückwärts zählen kann;
- ob es diese Fähigkeiten auf die Bestimmung der Summe einer Reihe von Zehnern und Einern anwenden kann.

Diese Anforderungen können weitgehend als prozedurale verstanden werden, die auf der Grundlage *sprachlicher* Regelkompetenz erfüllt werden. Das Zählen in Zehnerschritten und der Wechsel zwischen Zehnerschritten und Einerschritten verlangt jedoch zusätzlich, dass Zehner- und Einerschritte unterschieden werden und dass einem Zehner-Symbol ein anderer Zählschritt zugeordnet wird als einem Einer-Symbol. Für diese Leistung müssen Zehner- und Einerschritte zumindest den Charakter von sprachlichen Konzepten haben. Das eigentliche Verständnis von Zehnern und Einern wird jedoch erst mit den Aufgaben in Abschnitt „Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 100“ untersucht. Die Anforderungen erstrecken sich auch auf die „Zahlverarbeitung“, die im folgenden Abschnitt untersucht wird.

Folgende Unterscheidungen scheinen uns wichtig: Das Kind, das Probleme beim Erlernen der Zahlwortreihe hat, hat u. U. vorwiegend Mühe beim Erfassen sprachlicher Regeln. Seine nonverbale Konzeptbildung muss nicht gleichzeitig beeinträchtigt sein. Das Kind, das in Zehnerschritten zählt, weiß nicht zwangsläufig, dass jeder Zählschritt quantitativ um zehn Einzelne (Elemente, Einheiten) vermehrt oder um einen Zehner vergrößert, geschweige denn, dass es diese beiden quantitativen Betrachtungen schon miteinander verknüpft hat.[76]

<u>Übersicht über die folgenden Aufgabenstellungen:</u>

1. Aufsagen der Zahlwortreihe
2. Abzählen einer Menge mit zweistelliger Anzahl
3. Weiterzählen
4. Rückwärtszählen
5. Besondere Zahlenfolgen
6. In Zehnerschritten zählen, mit beliebiger Anfangszahl
7. Zehner- und Einerschritte koordinieren

[76] Vergleiche Abschnitt 3.8

1. Aufsagen der Zahlwortreihe

❖ „Wie weit kannst du schon zählen?“

Hinweise:
Wir notieren Auslassungen und Vertauschungen sowie Verzögerungen beim Zehnerübergang. Wenn das Kind nicht weiterkommt, helfen wir einmal weiter.
Bringt das Kind „zehnunddreißig“ hervor, bestätigen wir, dass der Gedanke vernünftig ist: „*acht*unddreißig, *neun*unddreißig, *zehn*unddreißig – dreißig und acht dazu, dreißig und neun dazu, dreißig und zehn dazu: Wie heißt die Zahl „dreißig und zehn dazu“?“

2. Abzählen einer Menge mit zweistelliger Anzahl

❖ „Nimm mit beiden Händen von den Steinen aus der Schachtel.“
„Was meinst du: Wie viele hast du mit zwei Händen herausnehmen können? Schätze, wie viele es sind.“
„Zähle die Steine jetzt ab.“

Hinweise:
Wir beachten Zählfehler und ihre Art (werden Zahlwörter oder Elemente ausgelassen; bereitet die Koordination von Hand und Zahlwortreihe Schwierigkeiten; werden die Schwierigkeiten bemerkt und wird versucht, sie zu korrigieren; u. a.).

3. Weiterzählen

❖ „Beginne mit dem Zählen bei 32 (55, 79).“
Wir brechen ungefähr nach 10 bis 15 Zählschritten ab.

❖ „Zähle schriftlich ab 37.“

❖ „So hat ein anderes Kind gezählt. Bitte schau nach (hör genau zu), ob es einen Fehler gemacht hat.“

55, 56, 67, 68, 69, 70, 71	40, 41, 42, 43, 44, 50
32, 24, 25, 26, 28, 29, 30	21, 22, 32, 42, 52, 62, 63

Hinweise:
- Werden Zahlen ausgelassen?
- Wo stockt das Kind?
- Setzt es manchmal zum invertierten Zahlwort an („dreiund...“ statt „achtunddreißig“), korrigiert sich jedoch selbst?
- Setzt es nach einem invertierten Zahlwort die neue Reihe fort, oder kehrt es zur alten zurück?

4. Rückwärtszählen

❖ „Zähle rückwärts ab 77.“
Wir brechen nach zwei Zehnerübergängen ab, beispielsweise bei 48.

Hinweise: Vergleiche vorausgehende Aufgabenstellung

5. Besondere Zahlenfolgen

❖ „Kannst du die Zehnerreihe (Fünferreihe, Zweierreihe) aufsagen?
Versuche es mal.“

6. In Zehnerschritten zählen[77]

❖ „Zähle in Zehnerschritten vorwärts. Fange bei 37 an.“
Wir stoppen bei 127 oder 217.

Hinweise:
Wenn das Kind nicht anfangen kann, hat es vielleicht die Instruktion („Zehnerschritte“) nicht verstanden. Wir können folgende Hilfen geben: „Du sollst jetzt in *Zehnerschritten* zählen.“ „Zu welcher Zahl kommst du, wenn du von 37 zehn Schritte weiterzählst? Kannst du diese Zahl auch finden, ohne die zehn Schritte zu zählen? Kannst du beim Zählen also zehn Schritte überspringen?“ – Wir beobachten, ob das Kind nach einigen Zehnerschritten, die es durch Weiterzählen um zehn Schritte konstruiert hat, die Reihe fortsetzen kann, ohne zehn Einerschritte weiterzuzählen.

7. Zehner- und Einerschritte koordinieren

Bei dieser Aufgabenstellung geht es vor allem darum, ob das Kind beim Zählen richtig – abgestimmt mit dem zu zählenden Material – zwischen Zehner- und Einerschritten wechselt.
Wir schlagen Geld als Material vor. Die Schwierigkeiten der Aufgabe variiert je nachdem, welches Material wir verwenden. Man kann auch Papiertaschentücher verwenden, die in Zehnerpäckchen oder lose vorliegen oder Kärtchen mit zehn Punkten darauf. Da es uns hier vor allem um die Koordination von Zehner- und Einerschritten mit dem Zehner- und Einermaterial geht, schlagen wir vor, ein Material zu verwenden, bei dem Zehner und Einer deutlich unterschieden sind und deren unterschiedliche Bedeutung dem Kind gut vertraut ist.
Man kann die Aufgabe erschweren, indem man die Zehner und Einer in wechselnder Reihenfolge vorlegt.

❖ Wir legen Geldbeträge mit Zehnerscheinen und Einmarkstücken, hier und da durch ein/zwei Fünfmarkstücke ergänzt.
„Wie viel Geld ist das zusammen?“ – („Schreibe die Zahl auf.“[78])

1. 

2. 

3. 

4. 

[77] Bei Kindern ab Klasse 3 kann man die Anforderungen auf naheliegende Weise ergänzen und erhöhen: „Zähle in Zehnerschritten rückwärts ab 253“ (bis 93). „Zähle in Hunderterschritten ab 137“ (bis 937) usw.
[78] Bei Zahlverarbeitung einzuordnen.

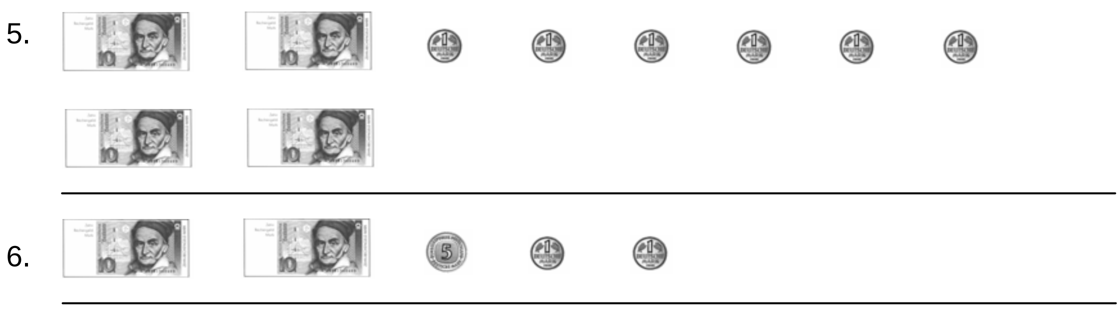


Abb. 5.24: Geldbeträge mit Scheinen und Münzen

Hinweise:

- Zählt das Kind alles in Zehner- oder alles in Einerschritten, weisen wir – mit einer Geste – auf einen Zehner und einen Einer hin und fragen: „Ist beides das Gleiche?“
- Wir notieren, ob das Kind richtige Abkürzungen vornimmt, indem es drei Zehner oder vier Zehner sofort als „30“ bzw. „40“ bezeichnet.
- Zählt es Zehner und Einer getrennt und verbindet „40“ und „6“ sofort zu „46“?
- Zählt es die Einer in Einerschritten zur „40“ dazu: „41, 42, 43, 44, 45, 46“?

5.7.2 Zahlverarbeitung bei zweistelligen Zahlen

Hier geht es um Übersetzungsleistungen zwischen Zahlwort und geschriebener Zahl (beide Richtungen) sowie um Zahlwortanalysen auf akustischer Ebene.
Wenn bei anderen Aufgabenstellungen Inversionen von Zehnerzahl und Einerzahl vorkommen (beim Aussprechen, beim akustischen Aufnehmen und Verwenden, beim Schreiben und beim Lesen geschriebener Zahlen) oder ähnliche Fehler auftreten, wird bei der Auswertung durch einen Vergleich mit den Leistungen im Zahlverständnis geprüft, ob sie hier eingeordnet werden müssen. Es ist möglich, dass Schwierigkeiten bei der Zahlverarbeitung nicht (mehr) auftreten, wenn das Kind sich auf die Übersetzung konzentriert, sich aber noch bemerkbar machen, wenn das Übersetzen in einem Kontext mit mehreren Anforderungen erfolgt.

<u>Übersicht über die folgenden Aufgabenstellungen[79]:</u>

1. Zahlendiktat
2. Zahlenerkennen
3. Zahlenlesen
4. Analyse der Zahlwörter und Verbindung zur Ziffernschreibweise

1. Zahlendiktat

Wir sprechen die Zahlwörter in rascherem Tempo, ohne das Kind zu hetzen.

❖ Wir sagen dem Kind einige Zahlwörter und bitten es, diese aufzuschreiben: „Schreibe die Zahl „achtundzwanzig“.

[79] Erweiterung auf dreistellige Zahlen ist in der Regel nicht schwierig.

Hinweise:

- Werden Zahlen invertiert (mit vertauschten Ziffern) geschrieben? Bemerkt das Kind Fehler?
- Paßt das Kind die Schreibrichtung der Aussprache der Zahlwörter an bzw. bei welchen Zahlen verwendet es diese so genannte invertierte Schreibweise und bei welchen nicht?
- Gibt es feine motorische Hinweise auf eine Umstellung der Schreibrichtung oder der Ziffern unmittelbar vor dem Schreiben?

Macht das Kind Fehler, wiederholen wir das Zahlwort etwas später und bitten es nach Beendigung der Aufgabe, einige der Zahlen vorzulesen.

❖ Variante: „Ich sage dir eine Zahl, z. B. „achtundzwanzig“. Du schreibst dann die Zehnerzahl auf. Also nicht die ganze Zahl, sondern nur die Zehnerzahl.“

2. Zahlen erkennen

Das Kind soll bei dieser Aufgabe eine gesprochene Zahl unter drei geschriebenen Zahlen identifizieren.

❖ „Ich sage dir eine Zahl. Du zeigst mir auf dem Blatt die Zahl, die ich gesagt habe.“

„achtundzwanzig“	82	28	820
„vierundfünfzig“	54	450	45
„sechs“	9	6	5
„zwölf“	12	21	11
„drei“	Ɛ	2	3 [80]

3. Zahlen lesen

❖ Wir legen die Zahlen auf einem Blatt – senkrecht untereinander geschrieben – vor und bitten das Kind, sie zu lesen. Sinnvoll ist es, auch *Aufgaben* lesen zu lassen (7 + 8, 15 – 6, 23 + 57 u. ä.), ohne dass sie gerechnet werden sollen.

4, 6, 16, 9, 28, 45, 39, 85, 54, 67, 71 usw.

7 + 8; 9 – 5; 15 – 6; 67 – 7; 32 + 45 usw.

4. Analysen der Zahlwörter

Um eine akustisch gebotene Zahl („achtunddreißig“) richtig zu schreiben, muss das Kind nur die Ziffernwerte („acht, drei“) entnehmen und diese in bestimmter Reihenfolge aufschreiben. Es muss keine Analyse nach Zehnerzahl und Einerzahl vornehmen; wenn es in invertierter Schreibrichtung schreibt, muss es die Reihenfolge („8 ; 3“) auch nicht umkehren. Diese „oberflächliche“ oder „minimale“ Zahlwortanalyse ist beim Kopfrechnen unzureichend und kann zu Fehlern führen. – Wir weisen erneut[81] ausdrücklich darauf hin, dass eine minimale Analyse dieser Art in der Regel nicht nur Konsequenz einer Schwierigkeit der Sprachanalyse oder eine „schlechte“ Angewohnheit ist, sondern mit Mängeln des Zahlverständnisses in Verbindung steht.

❖ „Ich sage eine Zahl („zweiundachtzig“). Wiederhole bitte, was ich gesagt habe.“

❖ „Jetzt drehe ich die Teile herum: Statt „zwei und achtzig“ sage ich: „achtzig und zwei“. Hast du gemerkt, was ich gemacht habe? Kannst du es wiederholen?“

---

[80] Für die Zahlen im Zahlenraum bis 1000, werden folgende Kombinationen verwendet:
„zweihunderteins“: 21001/ 201/ 2001; „fünfhundertsechzig“: 560/ 5060/ 50060.

[81] Abschnitte 4.5.1, 5.4, 7.4

❖ „Jetzt sage ich dir eine Zahl und du drehst das Wort so herum, wie wir das bei der 82 gemacht haben.“ Es folgen Zahlen wie 89, 72, 27, 36, 63 usw.

Bei den folgenden Aufgabenstellungen kann die Reihe der Zehnerzahlen auf einem Blatt aufgeschrieben sein, oder wir bereiten Kärtchen vor, auf denen immer zwei Zehnerzahlen stehen (zur Zahl „dreiundsechzig“ die Zahlen 30 und 60). Man kann diese beiden Zehnerzahlen aber auch mündlich geben („dreißig oder sechzig ?“).

❖ „Du weißt, was Zehnerzahlen sind? Sag mir ein paar.“

❖ „Ich sage dir eine Zahl, z. B. dreiundsechzig. Du zeigst mir hier auf dem Blatt, welche Zehnerzahl ich dabei gesagt habe.“

10 20 30 40 50 60 70 80 90

❖ „Ich sage dir eine Zahl, z. B. „dreiundsechzig“. Welche Zehnerzahl habe ich dabei gesagt: dreißig oder sechzig?“

30 60

5.7.3 Zahlbedeutungen und Zahlbeziehungen

In diesem Abschnitt stellen wir folgende Fragen an das Verständnis der zweistelligen Zahlen:

- Kann das Kind den Ziffern der geschriebenen Zahl entsprechende Quantitäten zuordnen, d. h. die Stellenwerte nicht nur unterscheiden, sondern auch quantitativ interpretieren?
- Ordnet das Kind größere Mengen spontan in Fünfer- oder Zehnergruppen? Verwendet es also größere Einheiten, um die Menge zu strukturieren?
- Kann das Kind sagen, wie viele Zehnergruppen sich aus einer Menge von Objekten ergeben, deren Anzahl es festgestellt hat? Kann es also die Anzahl, die beim Abzählvorgang aus Einerschritten zusammengesetzt ist, verwandeln in eine, die aus Zehnergruppen und Einzelnen zusammengesetzt ist?
- Kann es umgekehrt bei der Zahldarstellung durch Zehner- und Einermaterial die Zehnersymbole in 10 Einersymbole rückübersetzen, wenn die Problemstellung es erfordert? Sind also Zehner und Einer auf dieser gegenständlich-konkreten Ebene reversibel verbunden?
- Wie ist die Zahlreihenvorstellung einer zweistelligen Zahl (35 als Reihe von 1 bis 35) mit der Darstellung der Zahl durch Zehner- und Einersymbole (3 Zehnerstangen und 5 Einerwürfel) verknüpft?
- Verbindet das Kind „ um zehn größer/um zehn kleiner“ mit einer Veränderung der Zehnerziffer der Zahl? Wie vergrößert oder verkleinert das Kind *die Zahl* um 10?

- Wenn die Zahl durch Zehnerbündel und Einer dargestellt ist, wie gewinnt das Kind daraus die Zahl, die um zehn größer bzw. um zehn kleiner ist? Wie vergrößert oder verkleinert es *diese Zahldarstellung* um 10?

- Welche Zahlvorstellungen und -beziehungen verwendet das Kind beim Rechnen *mit Zahlen*?

- Welche Zahlvorstellungen und -beziehungen verwendet es beim Rechnen *mit Zahldarstellungen durch Zehner- und Einermaterial*?

- Wenn anhand quantitativer Zahldarstellungen „fortschrittlichere" Strategien verwendet werden, genügt der *Hinweis* auf die Zahldarstellung durch Zehner- und Einerziffer, um diese Strategien auch auf der *symbolischen* Ebene anzuwenden?

Wir verweisen auf die Grundlagen, die in den Abschnitten 3.7 bis 3.9 und in den Abschnitten 4.2.1 und 4.3.1 dargelegt sind.

Wenn wir im Folgenden von „Zahldarstellungen" sprechen, so meinen wir stets eine Art von konkreter, quantitativer Zahldarstellung (Zahl übersetzt in eine konkrete Menge entsprechender Anzahl); ist von „Zahlen" die Rede, sind in Ziffern geschriebene Zahlen gemeint. Eine gewisse Sonderstellung nehmen Zahldarstellungen durch Geld ein.

<u>Übersicht über die Aufgabenstellungen</u>

1. Quantitative Deutung der Stellenwerte
2. Eine Anzahl gedanklich in Zehner gruppieren
3. Häschen zählen
4. Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln herstellen; Äquivalenz von Darstellungen
5. Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln in geschriebene Zahlen übersetzen
6. Zahldarstellungen konkret und in der Vorstellung herstellen
7. Zahldarstellungen verändern
8. Variante der quantitativen Zahldarstellung: mit den Händen
9. Variante der quantitativen Zahldarstellung: mit Zehnersystemblöcken
10. Variante der Zahldarstellung: durch Geld
11. Ergänzen auf Grundlage quantitativer Zahldarstellungen
12. Zahlen verändern
13. Grundbausteine des Kopfrechnens mit zweistelligen Zahlen
14. Ergänzen auf der Zahlebene
15. Größenvergleich von Zahlen und Zahlenordnen

1. Quantitative Deutung der Stellenwerte

Sieht das Kind einen Zusammenhang zwischen einer Menge und der Zahl, die ihre Anzahl angibt? Kann es den Stellenwerten entsprechende Teilmengen der Menge zuordnen? Sieht es in der Zahl 36 „dreißig und sechs", wenn die entsprechende Anzahl vorliegt?

❖ Das Kind nimmt eine Menge von Objekten mit beiden Händen aus einem Behälter. Es soll dann eine Schätzung vornehmen, die das langweilige Abzählen als Prüfung der Schätzung erscheinen lässt.
Wir bitten das Kind, die erhaltene Anzahl aufzuschreiben.
„Das sind also 36 Steine. Schreibe die Zahl bitte hier auf.“

36

❖ „Richtig, so schreibt man 36. – Die Zahl hat zwei Teile, den hier“ (man umfährt die 3 mit einem unsichtbaren Kreis) „und den hier“ (man umfährt die 6 mit einem unsichtbaren Kreis).
„Ich will jetzt wissen, was du darüber denkst: Hat dieser Teil deiner 36“ (Umfahren der Ziffer 6) „etwas damit zu tun, wie viele Steine hier liegen?“
„Und was denkst du über den anderen Teil“ (Umfahren der Ziffer 3): „Hat der etwas damit zu tun, wie viele Steine hier liegen?“

Hinweise:
1. Beim Abzählen der Menge kommt es vor, dass ein Kind spontan Zehnergruppen bildet (oder andere Gruppen). Das interessiert uns.
2. Bei der zweiten Fragestellung beobachteten wir folgende Antworten:
- Das Kind weiß keinen Zusammenhang. – Man wird dann vielleicht die Aufgabenstellung anhand von 16 Objekten wiederholen.
- Das Kind spricht von 6 Einern und 3 Zehnern, stellt aber keine Korrespondenz zu den Objekten her. – Zusatzfragen: Kannst du die Einer hier bei den Steinen zeigen? Kannst du die Zehner hier bei den Steinen zeigen?
- Das Kind trennt zuerst sechs Objekte ab und dann drei Objekte. – Zusatzfrage: „Dieser Teil (auf 6 zeigen) gehört zu diesen sechs Steinen, jener Teil (auf 3 zeigen) gehört zu diesen drei Steinen: Was ist mit den übrigen Steinen?“
- Das Kind trennt im ersten Schritt sechs Objekte ab und setzt sie in Beziehung zur Ziffer 6, im zweiten Schritt bringt es die restlichen Steine („30“) mit der Ziffer 3 in Verbindung.

❖ Zusatzfrage: „Drei Mädchen“ – wir stellen drei Puppen o. ä. auf – „wollen ihrer Freundin, die solche Edelsteine sammelt, zum Geburtstag gemeinsam 36 Steine schenken. Reicht es, wenn jedes Mädchen 10 Steine mitbringt?“

2. Eine Anzahl gedanklich in Zehner gruppieren

Durch den konkreten Hinweis auf eine Schachtel[82], in der jeweils 10 solcher Objekte aufbewahrt werden, wird die Kategorie des Zehners konkret gegenständlich eingeführt. Das Kind soll zunächst ohne eine weitere Hilfestellung überlegen, wie viele solcher Schachteln von 36 Steinen gefüllt würden. Es ist also aufgefordert, die Kategorie des Zehners als einem Ding, das aus zehn Dingen zusammengesetzt ist, auf die Anzahl der Menge anzuwenden.
Wenn das Kind nicht richtig antworten kann, füllt man eine Schachtel und stellt damit einen Zehner gegenständlich her.

❖ „Hier sind Schachteln, in denen man die Edelsteine aufbewahren kann. – Wie viele Steine passen in die Schachtel, wenn man auf jeden Platz genau einen Stein legt, damit man sie gut anschauen kann?“

[82] Sehr schön ist es, wenn man wirklich passende kleine, flache Schachteln mit einer 5 x 2 Aufteilung hat. Aber auch Zehnerfelder passender Größe sind tauglich. Wir fordern dann das Kind auf, sich vorzustellen, das wären Schachteln.

❖ „Zehn Steine passen also in eine solche Schachtel. Wenn du die 36 Steine in solche Schachteln verteilen würdest, wie viele Schachteln würden dann ganz voll?“
„Wie viele Steine wären in der letzten Schachtel?“

❖ Wenn das Kind eine falsche Antwort gibt:
„Wir wollen mal eine Schachtel voll machen.“ – Anschließend: „Was meinst du, wie viele Schachteln brauchen wir für alle 36 Steine?“

❖ „Wenn du 68 Steine hättest, wie viele Schachteln würdest du dann brauchen?“

Hinweise:
Das Kind kann auf unterschiedlichen Wegen zur richtigen Antwort kommen:
- Ein Kind *weiß*, dass 36 aus drei Zehnern und sechs Einern zusammengesetzt ist.
- Ein anderes *findet* es *heraus*, indem es „10, 20, 30“ zählt – vielleicht mit Hilfe des gegenständlichen Zehners, der durch das Füllen einer Schachtel entstanden ist – und hier eine Zäsur macht, bevor es weiterzählt „31, 32, 33, 34, 35, 36“. Sein Wissen über die *Zahlwortreihe*, in Verbindung mit dem hergestellten sichtbaren Zehner, haben ihm ermöglicht, die Frage zu beantworten.
- Ein drittes Kind findet vielleicht keinen Weg: Es gibt an, dass 36 Schachteln gebraucht werden, oder 30 (oder 20). Bei diesem Kind, dem auch das Füllen einer Schachtel nicht weiterhilft, verteilt man alle Steine in Schachteln und beobachtet, welche Schlussfolgerungen das Kind zieht.

3. Häschen zählen

Diese Aufgabenstellung aus dem Hamburger Beobachtungsbogen[83] hat uns, wenn wir sie eingesetzt haben, oft interessante Aufschlüsse gegeben, so dass wir sie zunehmend schätzen lernten. Die Informationen betrafen nicht nur das Thema „Zahlverständnis“, um das es in diesem Abschnitt geht[84], sondern auch die Art und Weise, wie das Kind ein praktisches Problem erfasst und eine Lösung dafür findet. Da es sich um ein „einfaches“ Problem handelt, ist die Unfähigkeit mancher Kinder, eine Maßnahme zur Behebung auszuwählen, bedeutungsvoll. In Verbindung mit anderen Beobachtungen kann man darüber Vermutungen aufstellen.
Hinsichtlich des „Zahlverständnisses“ zeigt sich an der Bearbeitung dieser Aufgabe, ob das Kind Bündelungen wählt oder nicht, oder ob es die Hasen offensichtlich auf eine Zahlreihe abbildet. Im ersten Fall vermuten wir, dass das Kind im Begriff ist, „Zehner“ zu konstruieren und seine Zahlen damit neu zu strukturieren. Im zweiten Fall steht die Zahlreihe als Repräsentation einer Zahl noch im Vordergrund.

❖ „Auf dem Blatt sind viele Häschen. Ich möchte, dass du herausfindest, wie viele es sind. Versuche, dabei möglichst geschickt vorzugehen.“

4. Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln herstellen, Äquivalenz von Darstellungen

Mit den folgenden Aufgaben wird weiter untersucht, wie quantitative Zahldarstellungen als Mengen aus Einzelobjekten einerseits und durch Zehnerbündel und Einzelobjekte andererseits vom Kind in Beziehung zueinander gebracht werden. Benutzt es zur Darstellung einer Anzahl die Bündel oder nur die Einzelelemente? Begreift es beide Darstellungen als äquivalent? Begreift es auch eine unübliche Darstellung, bei der die Möglichkeit zur Verwendung von Zehnerbündeln nicht voll ausgeschöpft ist, als äquivalent?

❖ Man bereitet mit dem Kind zusammen Zehnerbündel in der Form von durchsichtigen Säckchen mit zehn Objekten darin vor. Es sollen 12 Bündel entstehen und eine größere Menge einzelner Objekte übrig bleiben. Das Kind soll wissen, dass

---

[83] Die Abbildung (Kopiervorlage S. 397) ist dem Hamburger Beobachtungsbogen entnommen, die Fragestellung haben wir abgewandelt.
[84] Vergleiche Beispiele Peter 3, Seite 129 und Lissi 1, Seite 137-138.

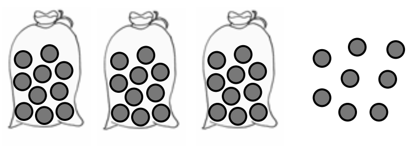
die Säckchen zehn Objekte enthalten, aber sie sollen nicht „Zehner“ genannt werden.[85]
„Wie viele Steine sind insgesamt in diesen Säckchen drin?“

Hinweise:
Mit dieser Frage kann festgestellt werden,

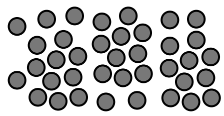
- ob das Kind die Bündel spontan in Zehnerschritten zählt,
- oder ob es sie wie Einzelobjekte zählt (1 bis 12),
- oder ob es die Steine wieder ausschütten will, um ihre Anzahl festzustellen.

❖ „Gib mir bitte 38 Steine“

Hinweise:
Hier möchte man wissen, ob das Kind die Bündel verwendet, oder auf die einzelnen Steine zurückgreift. Im letztem Fall ist sein Verständnis der 38 die eines Ganzen aus 38 Einzelnen. Zehner spielen in *seiner* Zahlbedeutung noch keine Rolle.
Wir beobachten ferner, ob es bei der Verwendung der Bündel dazu „10, 20, 30“ zählt und die restlichen Einzelnen sukzessive hinzufügt, indem es „31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38“ zählt. Im letzten Fall kann das Kind die Darstellung der 38 als 3 Bündel und 8 Einzelne nicht antizipieren, d. h. es hat die 38 als 30 und 8 (oder als 3 Zehner und 8 Einer) noch nicht konstruiert.

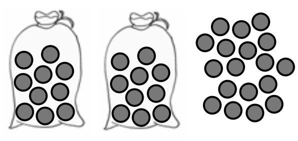


❖ „Ein anderes Kind hat zu mir gesagt: „Es muss so ein Haufen sein; man muss 38 von diesen Steinen nehmen und sie zusammenlegen, so:“



Hinweise:
Stimmt das Kind zu, dass es so besser oder richtiger sei? Ist es verunsichert? Begründet es die Äquivalenz der Darstellungen? Wie macht es das?

❖ „Ich habe noch ein Kind gekannt, das hat es so gemacht: Es hat zwei Säckchen genommen und dann noch von denen da“ (wir nehmen 18 einzelne Objekte und legen sie zu den Säckchen). „Was meinst du dazu?“



❖ Wir zeigen auf die drei verschiedenen Darstellungen, die entstanden sind:
„Das sind 38 und das sind 38 und das hier auch. Welche Art, 38 zu zeigen, findest du am besten?“
„Warum findest du das am besten?“

[85] Aufgabenstellung teilweise in Anlehnung an eine aus dem Hamburger Beobachtungsbogen.

5. Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln in Anzahlen übersetzen

Diese Aufgabe schließt sich gut an die vorausgehende an. Wir legen verschiedene Kombinationen aus Zehnerbündeln und Einzelnen vor. Das Kind soll die Anzahl der Steine in der jeweiligen Kombination bestimmen. Die Art und Weise, in der es dabei vorgeht, gibt Einblick, ob es Zehnerbündel als Einheit und zugleich als Zehnheit versteht (es zählt die Zehner in Einerschritten und übersetzt sie dennoch in eine Zehnerzahl); ob es die Anzahl aus Zehner- und Einerteil zusammensetzt (40 hier und 7 da, macht 47); ob es Zehnerbündel und Einzelne nicht unterscheidet (zählt in Einerschritten und gelangt zu 11); ob es Zehnerbündel und Einzelne beim Zählen unterscheidet, aber die Zahl nicht durch Zusammensetzung findet, sondern in Einzelschritten zählt („40; 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47").

❖ „Wie viele Steine sind das insgesamt?" (4 Zehnerbündel und 7 Einzelne liegen vor).

Hinweise:
- Will das Kind alle Objekte einzeln abzählen?
- Antwortet es mit „11", weil es Bündel und Einzelne in Einerschritten gezählt hat?
- Erfasst es Zehnerbündel („1, 2, 3, 4" oder „10, 20, 30, 40") und Einzelne („1, 2, 3, 4, 5, 6, 7") getrennt voneinander und macht daraus das richtige Zahlwort?
- Oder zählt es – ausgehend von 40 – weiter mit „41, 42, 43, 44, 45, 46, 47"?

Wir achten in diesem Kontext auch auf Vertauschungen von Zehnerwert und Einerwert bei der Produktion des Zahlwortes („vierundsiebzig" statt „siebenundvierzig"). – Die Zahl evtl. aufschreiben lassen.

❖ Anschlussfrage: Wir fügen ein Bündel hinzu, oder nehmen eines weg. „Wie viele sind es jetzt?"

Hinweis: Wir beobachten, ob das Kind sofort antworten kann, oder erst ein „Feststellungsverfahren" einleitet und wie dieses aussieht.

6. Zahldarstellungen konkret und in der Vorstellung herstellen[86]

❖ Wie bei den Aufgaben in 4. wird das Kind aufgefordert, verschiedene Anzahlen von Steinen zu geben. Die Anzahlen werden teilweise mündlich vorgegeben, teilweise schriftlich. Das Kind kann sich auch selbst Zahlen vorgeben.

❖ Anschließend bitten wir das Kind, sich vorzustellen, wie es eine konkrete Anzahl hinlegen würde: „Wie viele Säckchen würdest du nehmen, wie viele Einzelne würdest du noch dazulegen?"

Hinweise:
Zum ersten Teil beachte Hinweise zu Aufgabe 3. Im zweiten Teil wird ausdrücklich untersucht, ob die Zahldarstellung vom Kind auf irgendeine Art und Weise antizipiert oder in der Vorstellung ausgeführt werden kann. Wir halten fest, wie das Kind vorgeht.

7. Zahldarstellungen verändern

Diese Aufgabenstellung schließt sich an die vorausgehende an. Uns interessiert, ob das Kind nach der Aufforderung, 10 Steine wegzunehmen oder abzutrennen, ein Bündel verwendet, d. h. „10 Steine" in „1 Bündel" übersetzt. Wie verwandelt es eine Zahldarstellung in eine andere, die sich von der vorliegenden Darstellung um einen oder zwei Zehner unterscheidet? Wie bezieht es die gegebene Darstellung auf die Darstellung der neuen Zahl? Bedient es sich der Zehnerbündel oder der Einzelnen?

---

[86] Entsprechende Aufgaben bei KUTZER UND PROBST, die statt der Säckchen Wagen eines (Rechen)Zuges verwenden, von denen jeder 10 Container oder Puppen laden kann.

Erkennt das Kind eine Zehnerzahl als Teil seiner Darstellung (z. B. „40“ als Teil der „58“)?
Das Kind kann bei diesen Aufgaben zeigen, in welchem Umfang es (unterstützt von Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln und einzelnen Objekten) Zahlen durch diese beiden Einheiten strukturiert.

❖ „Du hast die 58 Steine richtig hingelegt. Jetzt nimm 10 Steine davon weg.“
Oder: „Nimm 3 Steine davon weg.“
Oder: „Lege so viele Steine dazu, dass aus den 58 Steinen 78 (68) Steine werden.“
Oder: „Mache aus den 58 Steinen 50 (40) Steine.“

Hinweise: Wir beobachten,

- ob das Kind „10“ in „ein Bündel“ übersetzt, oder durch 10 Einzelobjekte realisiert;
- ob es „3“ durch 3 Einzelobjekte realisiert;
- ob es von 58 auf 78 ergänzt, indem es Bündel zufügt oder ob es Einzelobjekte wählt; wenn es Einzelobjekte weiterzählend (59 bis 78) hinzufügt, fragen wir: „Wie viele hast du insgesamt dazugelegt, um 78 aus den 58 zu machen?“;
- ob es nicht ergänzt, sondern die Elemente der 58 für die Darstellung der 78 nur verwendet, nicht aber in Beziehung setzt: Es nimmt z. B. die 5 Zehnerbündel („fünfzig“) und fügt 2 weitere hinzu („sechzig, siebzig“); dann fügt es einzelne Objekte weiterzählend von 71 bis 78 dazu. Wir fragen anschließend, wie viele also zu 58 dazugelegt werden müssen, um 78 daraus zu machen;
- ob es 58 auf 40 reduziert, indem es den Teil 40 aus der 58 herauslöst und den Rest bestimmt.

Es sind viele feine Unterschiede im Vorgehen der Kinder beobachtbar, die wir festhalten und anschließend auswerten hinsichtlich folgender Fragen:
Sind „10 Einzelne“ mit einem Bündel verknüpft (Schritt der Konstruktion des Zehners als neue Einheit)?
Kann das Kind über Zahlen als Verbindung von Zehnern und Einern nachdenken, wenn die Zahlen durch Bündel und Einzelne dargestellt sind?
Oder bringt es zum Ausdruck, dass es sich die Zahlen dennoch als Zahlreihe von 1 bis 58 denkt?
Kann das Kind auf dieser konkreten quantitativen Grundlage Zahlen als Teile von Zahlen denken?

8. Variante der quantitativen Zahldarstellung: mit den Händen

Zur Erläuterung dieser Aufgabenstellung verweisen wir auf die Aufgaben in 3. und 5. Bei der Zahldarstellung mit den Händen muss das Kind die Herstellung sprachlich steuern durch das Wissen, wie man zählend in Zehner- und Einerschritten zu einer Zahl gelangt; es muss also zur Zahl 52 aufsagen können: „10, 20, 30, 40, 50, 52“ (oder „51, 52“). Unsicherheiten bei dieser Steuerung zeigen sich hier besonders deutlich, weil nicht mit dem Blick auf die schon hingelegten Bündel noch mal überprüft werden kann, wie weit man schon gelangt ist.

❖ „Kann man so große Zahlen, auch mit den Fingern oder Händen zeigen?
Wie kann man z. B. 24 zeigen? (37, 43, 52, 65)“

9. Variante der quantitativen Zahldarstellung: mit Zehnersystemblöcken

Alle bisher genannten Aufgaben kann man auch anhand von Zahldarstellungen mit Zehnersystemblöcken bearbeiten lassen. Sofern Kinder dieses Material kennen und instruiert wurden, wie damit zweistellige Zahlen dargestellt werden, kann ihre Zahldarstellung aufgrund der Instruktion erfolgen: „58 – die 5, das sind die Zehner, die 8 sind die Einer, das bedeutet, man muss 5 Zehnerstangen und 8 Würfel nehmen“. Welches konzeptuelle Wissen diesem prozeduralen angeschlossen ist, können wir aus der Fähigkeit zur Zahldarstellung selbst nicht entnehmen. Das gilt allerdings auch für die Darstellungen mit Zehnerbündeln und anderen gegenständlichen Zehnern.

❖ Wenn Zehnersystem-Material verwendet wird, sollte man nicht versäumen, das Kind zu Würfeln, Stangen (und Platten) zu befragen, wenn sich gezeigt hat, dass es diese „Einer“ und Zehner“ (und „Hunderter“) nennt:

„Warum nennt man diese Stange „Zehner“?
„Warum diese Würfel „Einer“?

- ❖ Von Interesse sind anschließend Fragestellungen wie unter Punkt 3, die erhellen, welche Beziehung das Kind zwischen Zehnerstangen, Einerwürfeln und Zahlen herstellt.
Oder: „Wäre es nicht besser, man würde für die Zahl 37 wirklich siebenunddreißig solcher Würfel nehmen?“
Oder: „Ein anderes Kind hat zu mir gesagt: „Aber das sind doch nur 10 Sachen. Das sind nicht 37!“ Was meinst du dazu?“

Hinweise:
Wir erwarten, dass das Kind den „Zehner“ durch zehn Einzelwürfel begründet, aus denen die Stange zusammengesetzt ist.[87]
Die Zusatzfrage, die auch anders gestellt werden kann, zielt darauf, ob das Kind die Darstellung durch 3 Zehner und 7 Einer mit der anderen quantitativen Bedeutung der 37 als 37 Einzelne verbinden kann.

10. Variante der Zahldarstellung: mit Geldscheinen und Münzen

Im Umgang mit Geld zeigen Kinder und Jugendliche oft Zahlwissen, das sie im Umgang mit Zahlen ohne Bezug zum Geld nicht zeigen. Solches Wissen aufzudecken, ist für Fördermaßnahmen von Bedeutung. Man kann alle hier vorgeschlagenen Aufgaben in Verbindung mit Geld bringen, um vorhandenes bereichsspezifisches Wissen zu erfassen.

11. Addieren und Ergänzen auf Grundlage von quantitativen Zahldarstellungen

Wenn eine vorliegende Zahldarstellung zum „Teil“ erklärt wird und zum „Ganzen“ ergänzt werden soll, das durch eine Zahl angegeben ist, wird das Zahlwissen des Kindes in besonderer Weise herausgefordert. Wir können seinem Vorgehen insbesondere entnehmen, ob es in Zehner- und Einerschritten ergänzt, d. h. ob es (unterstützt durch die Zahldarstellung aus Zehner-Einer-Material) Zahlen aus Zehnern und Einern aufbaut. Wie gut kann es (gleichzeitig oder bei anschließender Reflexion) den ergänzten Teil vom Ganzen unterscheiden? Kann es also über Zahlen als Zusammensetzung von anderen Zahlen nachdenken, wenn Zahldarstellungen verwendet werden? Es ist eine komplexe Leistung verlangt, die den wiederholten Wechsel der Aufmerksamkeit vom Ganzen zu einem Teil und die Übersetzung von Zahldarstellung in Zahl und umgekehrt erfordert.
Bei diesen Aufgabenstellungen kann außerdem beobachtet werden, ob im Denken des Kindes eine reversible Beziehung zwischen Zehnermaterial und Einermaterial (entsprechendes für Zehnerschritte und Einerschritte) besteht.

Zur Vorbereitung der folgenden Aufgaben rechnen wir eine oder zwei Additionsaufgaben mit quantitativen Zahldarstellungen auf dem Tablett, um das Kind wieder mit dem Tablett vertraut zu machen. Diese Aufgaben können in zwei Varianten gestellt werden:

- ❖ Auf der linken Hälfte des Tabletts liegt eine Zahldarstellung von 26 aus zwei Zehnerbündeln und sechs einzelnen Objekten. „Wie viele Steine liegen da?“ Wir legen auf die andere Hälfte zwei Zehnerbündel. „Wie viele Steine liegen jetzt insgesamt auf dem Tablett?“
- ❖ Anschlussfrage: „Wie viele Steine habe ich zu den 26 dazugetan?“

[87] Vergleiche Beispiel Sabine 4 (S. 163)

Hinweise:

- Zählt das Kind erst die Zehnerbündel in Zehnerschritten und setzt den Zählvorgang anschließend in Einerschritten fort?
- Erfasst es die Zahl der Zehnerbündel mit einem Blick und ordnet die Zehnerzahl „40“ zu?
- Muss es die Einzelobjekte nicht „dazuzählen“, sondern kann aufgrund seiner Kenntnis der Zahldarstellung von 26 das Ergebnis 46 sofort nennen?
- Wie antwortet es auf die Zusatzfrage: „Zwei“ oder „Zwanzig“?

❖ Auf der linken Hälfte des Tabletts liegt eine Zahldarstellung von 32 aus drei Zehnerbündeln und zwei einzelnen Objekten. „Wie viele Steine liegen hier?“

❖ Wir legen auf die rechte Hälfte zehn (oder zwanzig) einzelne Objekte und teilen dies dem Kind mit: „Wir geben noch zehn (zwanzig) Steine dazu. Wie viele Steine liegen jetzt insgesamt auf dem Tablett?“

Hinweise:

- Antwortet das Kind: „Zweiunddreißig und zehn dazu sind zweiundvierzig“?
- Oder zählt es die zehn Einzelobjekte einzeln dazu („33, 34, 35 usw.“)? In diesem Fall werden die zehn Einzelnen nicht in einen Zehner verwandelt.

Bei den folgenden Aufgaben ist immer eine Hälfte des Tabletts zugedeckt. Zwei (oder mehr) Zahlenkarten sind vorbereitet, z. B. mit den Zahlen 53 und 40. Im Fall der 53 sind nacheinander folgende Anzahlen als Quantitäten sichtbar: 50, 43, 40, 30, 23, 25. Hinsichtlich der 40 wählen wir 32, 20, 21, 39, 29 als Ausgangsquantitäten.

❖ „Auf dem Tablett liegen 53 Steine. Ein Teil davon ist zugedeckt, diese hier kann man sehen. Hier habe ich aufgeschrieben, wie viele insgesamt auf dem Tablett liegen.“ „Wie viele Steine kann man sehen?“ „Wie viele sind verdeckt?“

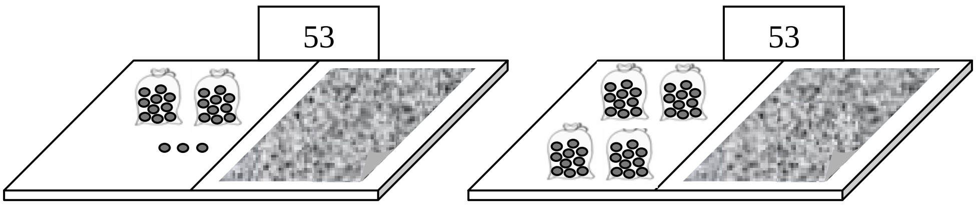


Abb. 5.25: Ergänzen bei konkreter Zahldarstellung

Hinweise:

- Versucht das Kind durch Zählen in Einerschritten die fehlenden Steine zu bestimmen? Übersetzt es die auf diese Weise bestimmte Zahl (ob sie genau stimmt, ist in diesem Zusammenhang nicht so wichtig) anschließend in Zehnerbündel und Einzelobjekte, oder zählt es nur Einzelobjekte?
- Benutzt das Kind Zehner und Einer beim Ergänzen, kann aber anschließend nicht angeben, wie viele Steine es zugefügt hat? Kann es dies herausfinden, wenn es dazu aufgefordert wird? Wie geht es dabei vor? Unterscheidet es Bündel und Einzelne beim Abzählen des zugefügten Materials durch den Wechsel von Zehner- und Einerschritten?
- Wenn das Kind ratlos ist, weiß es vermutlich nicht, wie es sich einen Teil einer Zahl vorstellen soll: 53 ist 10, 20, 30, 40, 50 und 51, 52, 53. Wenn 40 daliegen, fehlen also noch „50, 51, 52, 53“. Es kann dann weiterhelfen, die Aufgabenstellung in folgender Weise zu verändern: „Hier liegen 40 Steine. Lege so viele dazu, dass es nachher 53 sind.“ Oder: „Hier liegen 40 Steine. Lege so viele dazu, dass es nachher 50 sind.“ – „Wie viele Steine hast du *dazu*gelegt?“

12. Zahlen verändern („die um zehn größere/kleinere Zahl")

Diese Aufgabe entspricht der Aufgabe 7, mit dem Unterschied, dass sie keine Zahldarstellungen mit konkretem Material verwendet, sondern auf Zahlebene gestellt wird und auch auf dieser Ebene beantwortet werden soll. Es geht darum, ob das Kind „um 10 größer" bzw. „um 10 kleiner" mit der Veränderung der Zehnerziffer verbunden hat, oder ob es bei dieser Aufgabe zu zehn Zählschritten vorwärts bzw. rückwärts greift.

❖ „Schreibe unter jede Zahl hier auf dem Blatt immer die Zahl, die um 1 kleiner ist."

45 30 81 39 90

❖ „Schreibe unter diese Zahlen immer die Zahl, die um 10 kleiner/größer ist."

54 75 44 90 88

❖ „Wie hast du das herausgefunden?"

Hinweise:

- Kann das Kind die neue Zahl sofort – mündlich und schriftlich korrekt – angeben?
- Wird die neue Zahl zählend gefunden – korrekt oder fehlerhaft?
- Treten bei „kleiner" mehr Fehler auf als bei „größer"?
- Welche Fehler treten auf?

Wir vergleichen mit den Leistungen in den Aufgaben zu 4.

13. Grundbausteine des Kopfrechnens mit zweistelligen Zahlen

Mit den folgenden Aufgaben wollen wir herausfinden, ob bzw. wie das Kind „plus 10" oder „minus 10" in Rechenaufgaben versteht. Wird „minus 10" mit der Verminderung der Zehnerziffer um 1 verknüpft, d. h. eine Beziehung zwischen 10 (Einern) und 1 (Zehner) hergestellt ?

Ordnet das Kind bei der Addition/Subtraktion von einstelligen Zahlen ohne eine Zehnerüberschreitung den einstelligen Addenden oder Subtrahenden der Einerstelle der ersten Zahl zu? Wie löst es eine Aufgabe, bei der beide Schritte miteinander verbunden werden müssen?

Wenn Unsicherheiten erkennbar sind oder der Rechenweg uns „formal" erscheint, schlagen wir vor, anhand konkreter oder vorgestellter Zahl*darstellung*en zu rechnen. Es kann in jedem Fall aufschlussreich sein, wie das Kind seine Rechenstrategie auf der Grundlage einer Zahldarstellung erläutert.

❖ „Rechne die Aufgaben, die hier aufgeschrieben sind (Wir fragen immer: „Wie hast du das herausgefunden?"):

$$\begin{array}{rcrl} 84 & + & 10 & = \\ 47 & - & 10 & = \\ 84 & + & 3 & = \\ 47 & - & 5 & = \\ 84 & + & 13 & = \\ 47 & - & 15 & = \end{array}$$

Hinweise:

- Wird „minus 10" sofort durch Verminderung der Zehnerziffer um 1 realisiert? Wie erläutert das Kind sein Vorgehen?
- Oder durch Rückwärtszählen um 10 Schritte (gesteuert durch die Finger einer Hand)?
- Oder beschreibt das Kind sein Vorgehen als „untereinander schreiben und schriftlich ausrechnen"?

Wenn das Vorgehen oder die Erklärung des Kindes deutlich macht, dass zwischen „10“ und „1 Zehner“ keine sichere Beziehung besteht, bitten wir das Kind, eine Zahl, z. B. 37, durch Zehnersymbole und Einersymbole herzustellen und stellen erneut entsprechende Aufgaben.

❖ „Jetzt probieren wir aus, wie man mit den Zahlen aus Zehnerstangen und Einerwürfeln (Zehnerbündeln und Einzelnen) rechnen kann. Lege die Zahl 37.“

❖ „Rechne jetzt folgende Aufgaben: 37 + 10 = □ ; 37 – 4= □ ; 37 – 14= □

❖ „Kannst du dir *vorstellen*, wie die Zahl 43 aussieht, wenn man sie aus Zehnerstangen und Einerwürfeln macht? Beschreibe mir, wie sie aussieht.“

❖ „Wie würdest du mit dieser Zahl die Aufgabe „43 – 10“ rechnen?“ – Wir legen die Aufgabe schriftlich vor.
„Wie würdest du „43 + 20“ rechnen?“

Hinweise:

- Geht das Kind bei vorliegenden *konkreten* Zahldarstellungen anders vor als mit Zahl*symbolen*, können wir auf den Unterschied hinweisen, beide Vorgehensweisen nebeneinander stellen und vergleichen.
- Kann das Kind eine Verbindung herstellen, die angemessen begründet, weshalb auf beiden Wegen dasselbe Ergebnis herauskommt?
- Welches Verfahren findet es im Prinzip besser?

14. Ergänzen auf Zahlebene

Das Ergänzen von 14 auf 24, von 13 auf 53, von 20 auf 53 u. ä. gibt Einblick, ob ein Kind mental die Beziehung zwischen zwei Zahlen mittels Zehnern und Einern herstellt: Es verwendet dann Zehnerschritte neben Einerschritten. Diese Leistung des Kindes zeigt, dass es Zehner als neue Einheit konstruiert hat und sie abgestimmt mit der Einheit der Einer beim Rechnen verwenden kann. Das Vorgehen des Kindes, das diese Entwicklungsstufe noch nicht erreicht hat, ist für uns Erwachsene sehr aufschlussreich.

Wir stellen folgende Textaufgaben, die wir schriftlich vorlegen:

❖ „A. (hier fügen wir den Namen des betreffenden Kindes ein) hat 14 Perlen. Er/sie möchte ein Armband aus Perlen für seine/ihre Mutter machen. Für so ein Armband braucht er/sie 24 Perlen. Wie viele Perlen muss er/sie noch besorgen?“

❖ „A. hat 35 DM. Für ein Buch braucht er/sie 20 DM. Wie viel Geld behält er/sie übrig?“

Hinweise:

- Wird die erste Aufgabe weiterzählend gelöst (das Kind versteht nicht „24 als zehn mehr als 14“), oder kann sie spontan beantwortet werden?
- Versteht das Kind die Aufgabe als Ergänzen oder als Abziehen?
- Wenn das Kind 35 – 20 schriftlich rechnen will, bitten wir es anschließend, das Ergebnis mit Hilfe von Geld oder anderem Material zu erklären.

Wir bitten das Kind, das die Aufgabe auf irgendeine Weise gelöst hat, außerdem darum, eine passende Aufgabe aufzuschreiben und ordnen dies der Untersuchung des Operationsverständnisses zu.

15. Größenvergleich von Zahlen und Ordnen von Zahlen

Der Größenvergleich von zwei Zahlen und das Ordnen von mehreren Zahlen nach der Größe gelingt schon auf Grundlage des richtigen Zahlenlesens und einer guten Konstruktion der Zahlreihe. Diese erlaubt Urteile der folgenden Art : „Die Sechzigerzahlen kommen vor den Siebzigerzahlen“ und „*vier*undsechzig kommt vor *fünf*undsechzig“[88]. Wir wollen herausfinden, ob das Kind die Zahlreihe in dieser Weise verinnerlicht hat. Wir wollen außerdem die Begründung für den Zahlvergleich kennen lernen, um daraus Informationen über das Zahlverständnis zu entnehmen.

❖ *Zahlvergleich mündlich:* „Ich sage dir immer zwei Zahlen. Auf dieser Hand (wir zeigen die linke) liegt immer die erste Zahl, die ich sage; auf der anderen Hand (wir zeigen die rechte) liegt immer die zweite Zahl. Du zeigst dann auf die Hand, auf der die größere Zahl war.“ Wenn wir die erste Zahl nennen, zeigen wir immer die linke, bei der zweiten Zahl immer die rechte Hand.

Hinweise:
Wir notieren Fehler, Verzögerungen und Rückfragen. Wir vergleichen mit den Schwierigkeiten, die bei der Untersuchung der Zahlverarbeitung aufgefallen sind.

❖ *Zahlvergleich schriftlich*: Es ist ein Blatt vorbereitet, auf denen immer zwei Zahlen nebeneinander geschrieben sind (wir achten darauf, dass die Abstände der Zeilen größer sind als die zwischen den zwei Zahlen in einer Zeile). Das Kind soll die größere Zahl einkreisen.
„In jeder Zeile stehen zwei Zahlen nebeneinander. Mache um die größere der beiden Zahlen einen Kringel.“

Hinweis:
Wir können bei einem oder zwei Paaren fragen, warum das Kind so geurteilt hat.

❖ *Ordnen von Zahlen:* Es werden Zahlenkärtchen mit den Zahlen 51, 52, 60, 62, 64, 65, 67, 68, 74, 84 benötigt. Sie werden ungeordnet vorgelegt, jedoch so, dass sie aus der Sicht des Kindes in richtiger Lage sind.
„Ordne diese Zahlen ihrer Größe nach. Fange mit der kleinsten Zahl an.“[89]
Wenn das Kind den Eindruck erweckt, fertig zu sein: „Bist du fertig damit? Hast du noch mal nachgeschaut, ob alles stimmt?“

❖ Wir greifen die Kärtchen mit 68 und 74 heraus: „Welche Zahl ist größer?“ „Woran siehst du, dass 74 größer ist als 68?“

Hinweise:
- Wie geht das Kind beim Ordnen vor? Gibt es längere Pausen? Kann das Kind Auskunft geben, was es in der Pause überlegt hat?
- Macht das Kind beim Ordnen Fehler? Welche? Korrigiert es sich nach unserer allgemeinen Aufforderung, das Ergebnis zu überprüfen?
- Wie begründet es, dass 68 kleiner als 74 ist? Sagt es „6 ist kleiner als 7“, entgegnen wir, dass aber 8 größer als 4 ist. Wie reagiert das Kind?
- Oder begründet es das Urteil durch einen Hinweis auf die Zahlreihe („68 kommt vor 74“ oder „die Sechzigerreihe kommt vor der Siebzigerreihe“ oder ähnliches?

[88] Vergleiche Abschnitte 4.4 und 3.9
[89] Wir haben die Zahlen verwendet, die im Hamburger Beobachtungsbogen vorgeschlagen sind. Im Zahlenraum 1000 haben wir die Zahlen 74, 347, 374, 437, 473, 674, 734, 743 oder auch 102, 120, 201, 310 u. ä. benutzt.

5.7.4 Rechenstrategien bei der Addition/Subtraktion

Im vorausgehenden Abschnitt über Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 100 wurden bereits mehrere diagnostische Aufgaben zum Addieren/Subtrahieren gestellt, insbesondere unter den Ziffern 11 bis 14. Dort wurden einfache Zahlenwerte gewählt, weil es eher auf das Zahlverständnis als auf die Rechenfertigkeit ankam. Im vorliegenden Abschnitt soll das Augenmerk auf die Wahl geschickter Rechenwege, Rechenfertigkeiten und die Art der Notation gerichtet werden. Insbesondere soll darauf geachtet werden, ob das Kind zählend rechnet oder geeignete Zerlegungen der Zahlen verwendet[90].
Auch wenn im Unterricht aus grundsätzlichen Erwägungen nicht ein kleinschrittiger methodischer Stufengang der Art Zehnerzahl mit Zehnerzahl, Zehnerzahl mit Einerzahl, Zehner-Einerzahl mit Zehnerzahl usw. gewählt wird, kann man bei „leistungsschwachen" Kindern in der Diagnostik mit solchen Aufgaben beginnen, wenn sie mit schwierigeren Aufgaben überfordert sind. Das hat zugleich den Vorteil, dass sie auch in der Diagnosesituation Erfolgserlebnisse haben können bzw. dass elementare Vorkenntnislücken aufgedeckt werden. Bei leistungsstärkeren Kindern kann man gleich mit schwierigeren Aufgaben beginnen.

Addieren im Zahlenraum bis 100

Die folgenden Aufgaben werden dem Kind auf vorgefertigten Aufgabenkarten oder auf ein Blatt geschrieben vorgelegt. Mündliche Aufgabenstellung würde höhere Anforderungen an die Merkfähigkeit des Kindes stellen.

1. Rechnen mit zweistelligen Zahlen

❖ Berechne „40 + 7", „8 + 30"

Hinweise:

- Wir beobachten, ob das Kind zählend rechnet oder „40 + 7" als Zusammensetzung aus 40 und 7 auffasst und gleich mit „siebenundvierzig" reagiert. Wenn das Verhalten des Kindes nicht eindeutig ist, fragen wir: „Wie hast du das so schnell herausgefunden?"
- Bei „8 + 30" beobachten wir zusätzlich, ob das Kind die Reihenfolge vertauscht, also 30 + 8 rechnet.

❖ Berechne „30 + 40", „23 + 60", „20 + 47"

Hinweise:
Nachdem das Kind ein Ergebnis genannt hat, kann man fragen: „Wie hast du das herausgefunden?" Dabei kann man insbesondere auf Folgendes achten:

- Rechnet das Kind zählend? Zählt es in Einerschritten, in Zehnerschritten? Wie kontrolliert es bei +60 die Anzahl der Zählschritte?
- Rechnet es mit den Zehnerziffern und hängt Nullen an?
- Rechnet es mit Zehnern (3Z + 4Z = 7Z) oder sprachlich gestützt: *Drei*ßig plus *Vier*zig ist *Sieb*zig?
- Zerlegt es 23 in 20 und 3, 47 in 40 und 7?
- Nutzt es spontan den Vorteil des Vertauschens (rechnet also 40 + 30, 60 + 23, 47 + 20)
- Kann das Kind seinen Lösungsweg begründen?

Falls das Kind mit obigen Aufgaben nicht bereits überfordert ist, kann man untersuchen, ob es mit schwierigeren Aufgaben zurechtkommt.

---

[90] Vgl. Abschnitt 8.8

❖ Berechne „37 + 25“

Hinweise:
- Rechnet Kind in Einerschritten zählend? Zählt es zuerst in Zehnerschritten, danach in Einerschritten (oder umgekehrt)?
- Zerlegt das Kind beide Zahlen oder nur den zweiten Summanden?
- Kann es Teilaufgaben auswendig (30 + 20, 7 + 5) oder rechnet es beispielsweise in diesem Zusammenhang 7 + 5 zählend oder durch Zerlegen?
- Rechnet das Kind abstrakt oder nutzt es bereitgelegtes Material (Zehnersystemblöcke, Zählrahmen, Steckwürfel) oder zeichnerische Hilfen, z. B. Striche für Zehnerstäbe, Punkte für Einerwürfel?
- Versucht das Kind, halbschriftlich zu rechnen, etwa in der Form
-

$$\begin{array}{l} 37+25 \\ \hline 30+20 = 50 \\ \;\;7+\;\;5 = 12 \\ \hline 37+25 = 62 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} 37+25 \\ \hline 37+20 = 57 \\ 57+\;\;5 = 62 \\ \hline 37+25 = 62 \end{array}$$

- Benutzt das Kind selbständig kürzere Formen des halbschriftlichen Rechnens, z. B.

37 + 25 = 50 + 12 = 62 oder 37 + 25 = 57 + 5 = 62
30 7 20 5 20 5

- Kann es einen entsprechenden Vorschlag rasch aufgreifen und auf weitere Aufgaben anwenden?
- Kann das Kind seinen Lösungsweg erläutern, begründen? Wie?

2. Additionsaufgaben selbst erfinden

❖ Erfinde selbst leichte Aufgaben, erfinde schwierige Aufgaben.

Hinweis: Man kann dabei beobachten, welche Aufgabentypen das Kind selbst als leicht oder als schwer einschätzt, ob es über Anforderungen einer Aufgabe reflektieren und sprechen kann.

3. Addieren anhand quantitativer Zahldarstellungen

❖ Man legt dem Kind eine Darstellung einer Additionsaufgabe vor.
Welche Rechenaufgabe passt zu diesem Bild? Schreibe eine auf.

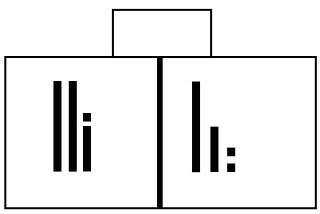


Abb. 5.26: Präsentation einer Additionsaufgabe mit Zehnersystemblöcken

Hinweise:
- Wenn das Kind diese Darstellung von Additionsaufgaben noch nicht kennt, kann man erläutern: “Auf der einen Seite des Tabletts liegen 26 kleine Würfel, auf der anderen Seite 17 kleine Würfel.. Wie viele kleine Würfel sind das zusammen?“
- Nutzt das Kind die Zehnerbündelung? Nutzt es eventuell die Fünferbündelung? Fasst es die Fünferstäbe zusammen?

- Schiebt es die Klötze zusammen, um sie von vorne durchzuzählen?
- Wenn das Kind die Klötze zusammengeschoben und dann durchgezählt hat (wie?), legt man eine neue Aufgabe dieser Art und fragt:

❖ Kannst du ohne Zusammenschieben herausfinden, wie viele das zusammen sind?

Hinweis: Mit dieser Frage wird deutlicher als beim Zusammenschieben das Teile-Ganzes-Konzept überprüft (das mentale Zusammenfassen der Teile zu einem Ganzen, das Verständnis der Zusammensetzung einer Zahl aus Summanden, also auch das Verständnis für Summen wie „26 + 17“).

❖ Löse die Aufgabe mit dem Material (Zehnersystemblöcke)

„39 + 26“ „48 + 17“ „35 + 19“

Hinweise:
- Kann das Kind die Zahlen mit dem Material darstellen?
- Kann es die *Summe* der beiden Zahlen angemessen darstellen?
- Kann es die Summe berechnen, ohne die Stäbe zusammenzuschieben?
- Nutzt es zur Bestimmung der Summe spontan einen „Rechenvorteil“? (Denkt es bei „39 + 26“ einen Würfel von der 26 zur 39 geschoben, um volle Zehner zu erhalten? (Entsprechend zwei Würfel von der 17 zur 48, einen Würfel von der 35 zur 19).
- Wenn das Kind bei „39 + 26“ einen solchen „Rechenvorteil“ nicht spontan nutzt, sondern nach einem Standardverfahren vorgeht (z. B. Zehnerstangen und Einerwürfel getrennt zusammenfasst), kann man anschließend folgenden Impuls geben: „Ein anderes Kind hat gesagt, da schiebe ich einfach zuerst einen Würfel von der 26 rüber zur 39 und rechne dann. Was hat dieses Kind wohl gemeint?
- Kann das Kind diesen Impuls aufgreifen und auf die beiden anderen Aufgaben übertragen?

Anmerkung: Bei Verwendung eines Fünferstabes zur Darstellung der 9 ist der „Neunertrick“ (es fehlt noch eins bis zehn) leichter zu „sehen“ als bei Verwendung von 9 einzelnen Würfeln.

4. Rechenvorteile nutzen bei schriftlicher Darstellung

❖ Rechne geschickt: 29 + 16 =

Hinweise:
- Rechnet das Kind nach einem Standardverfahren , kann man anschließend folgenden Impuls geben: “Ein anderes Kind hat gesagt, ich nehme einfach 30 statt 29. Was hat das Kind wohl gemeint?“ Oder man schreibt unter die Aufgabe 29 + 16 die Aufgabe 30 + 15 und beobachtet, ob das Kind den Zusammenhang zwischen beiden Aufgaben erkennt und auf ähnliche Aufgaben übertragen kann.
- Kann das Kind vorstehenden Impuls aufgreifen, kann man anschließend überprüfen, ob Hilfen auf der symbolischen Ebene das Verständnis der Strategie erleichtern, z. B.

29 + 16 =
1 15

- Wenn diese Hilfe vom Kind aufgegriffen wird, kann man überprüfen, ob es die Strategie auf ähnliche Fälle übertragen kann.

Entsprechend zu dieser Untersuchung der *Kompensation* kann man vorgehen mit der Strategie der *Kovarianz* (leichtere Nachbaraufgabe, vgl. Abschnitt 8.9).

Subtrahieren im Zahlenraum bis 100

1. Rechnen mit zweistelligen Zahlen

❖ Berechne „70 – 30“, „60 – 50“

Hinweise:
- Rechnet das Kind zählend? In Einerschritten? In Zehnerschritten? Vorwärts oder rückwärts?
- Nutzt es bei „60 – 50“ das Konzept „Differenz“ (Unterschied), das Konzept „Ergänzen“?
- Rechnet es mit den Zehnerziffern und hängt Nullen an?
- Rechnet es mit den Zehnern (7Z – 3Z = 4Z) oder sprachlich gestützt (*sieb*zig minus *drei*ßig ist *vier*zig)?

❖ Berechne „70 – 3“, „40 – 8“

Hinweise:
- Man beobachtet, ob das Kind einerweise rückwärts zählt.
- Wenn das Kind bei „40 – 8“ rückwärts zählt, beobachtet man, *wie* das Kind kontrolliert, wie viele Schritte es bereits gezählt hat.
- Macht es Zählfehler?
- Falls das Kind zählend rechnet, fragt man: „Kannst Du das auch anders rechnen?“
- Wenn das Kind nur zählend rechnet, also nicht die 70 zerlegt in 60 und 10, kann man es bitten, obige Aufgabe mit Zehnersystemblöcken, mit Steckwürfeln oder am Zählrahmen zu zeigen. Welches Material kennt es? Welches bevorzugt es?
- Legt es die 70 mit Zehnerstangen oder mit einzelnen Würfeln? Wie nimmt es die 3 (die 8) weg?

❖ Berechne „56 – 4“, „76 – 30“

Hinweise:

- Rechnet das Kind zählend? (Einerschritte, Zehnerschritte)?
- Zerlegt es die Zahlen in Zehner und Einer?
- Ordnet es Zehnerziffern bzw. Einerziffern richtig zu?

❖ Berechne „48 – 6“, „42 – 5“

Hinweise:
- Rechnet das Kind 8 – 6 oder zählt es von 48 um sechs Schritte rückwärts (zerlegt also die 48 nicht)?
- Wie bewältigt das Kind bei der Aufgabe „42 – 5“ die Überschreitung des Zehners: Zählend oder durch Zerlegen der 42 in 30 und 12? Wenn das Verhalten des Kindes nicht eindeutig interpretierbar ist, fragt man: „Wie hast du das herausgefunden“?
- Kann das Kind seinen Lösungsweg erklären?

Wenn das Kind mit obigen Aufgabenstellungen nicht überfordert ist, kann man komplexere Aufgaben stellen.

❖ Berechne „62 – 25“

Hinweise:
- Versucht das Kind, 25 Schritte rückwärts zu gehen? Wie steuert es sein Vorgehen? Erfolg?
- Rechnet es „ 62, 52, 42; 41,40,39, 38, 37“? Wie steuert es sein Vorgehen?
- Zerlegt das Kind beide Zahlen oder nur den Subtrahenden?

- Wählt das Kind den Ansatz 60 – 20, 2 – 5 oder 5 – 2? Wie geht es mit diesem Problem um?
- Kann es die Teilaufgaben auswendig (62 – 20, 42 – 5)?
- Versucht es, (ohne quantitative Vorstellungen?) nach einem sog. halbschriftlichen Verfahren zu rechnen, etwa in der Form

$$\begin{array}{l} \underline{62-25} \\ 62-20=42 \\ \underline{42-\ \ 5=37} \\ 62-25=37 \end{array}$$

- Kennt das Kind kürzere Formen des halbschriftlichen Rechnens, z. B.

$$\underset{-20\ \ -5}{62-25} = 42-5 = 37 \quad \text{oder} \quad \underset{-22\ \ -3}{62-25} = 40-3 = 37$$

- Nutzt es solche Schreibweisen selbständig oder kann es einen entsprechenden Vorschlag rasch aufgreifen und selbständig auf weitere Aufgaben anwenden?
- Kann das Kind seinen Lösungsweg erläutern, begründen? Eventuell am Material?
- Rechnet es „schriftlich im Kopf“?

2. Subtraktionsaufgaben selber erfinden

❖ Erfinde selber einige Minusaufgaben, einige leichte, einige schwierigere.

Hinweis: Man kann dabei beobachten, welche Aufgabentypen das Kind selbst als leicht oder als schwer einschätzt, ob es über Anforderungen einer Aufgabe reflektieren und sprechen kann.

3. Subtrahieren anhand quantitativer Zahldarstellungen

❖ Man präsentiert dem Kind eine gegenständliche oder bildliche Darstellung einer Subtraktionsaufgabe und fragt: „Wie viele Plättchen sind verdeckt?“

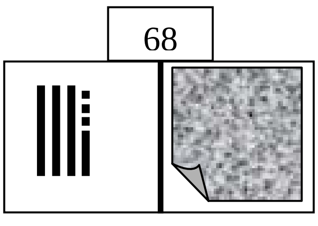


Abb. 5.27: Präsentation einer Subtraktionsaufgabe mit Zehnersystemblöcken

Hinweise:
- Wenn das Kind die Teile-Ganzes-Darstellung in dieser Form nicht kennt, erläutert man die Situation kurz: „Auf dem Tablett liegen insgesamt 68 Klötze. Auf der einen Seite sind es so viele Klötze (hinzeigen). Wie viele Klötze müssen auf der anderen Seite versteckt sein, damit es zusammen 68 Klötze sind?
- Obige Zahlenwerte legen ein Ergänzen nahe. Wie reagiert das Kind, wenn auf der linken Seite nur wenige Klötze (z. B. 5 oder 10) liegen?

❖ Löse die Aufgaben mit dem Material.

63 – 5, 63 – 58, (48 – 5, 48 – 42)

Hinweise:

- Wie geht das Kind bei „63 – 5“ vor? Entbündelt es einen Zehnerstab oder alle?
- Wie geht es bei „63 – 58“ vor? Abziehend oder ergänzend? Legt es zuerst „63“ oder „58“?
- Die in Klammern angegebenen Aufgaben sind einfachere Fälle. Wie geht das Kind dabei vor?

4. Rechenvorteile in symbolischer Darstellung nutzen

❖ Rechne geschickt 41 – 26, 39 – 26, 38 – 13, ...

Hinweise:
Zieht das Kind ab oder ergänzt es?

- Nutzt das Kind die *Konstanz der Differenz* (rechnet also 40 – 25 oder 45 – 30) oder eine leichtere *Nachbaraufgabe* (z. B. 40 – 26 = 14, also 41 – 26 = 15)?
- Nutzt das Kind eine geschickte Zerlegung (z. B. 41 – 26) ?
  –21 –5

Als Fazit lässt sich mit vorstehenden Aufgaben feststellen, ob das Kind sinnvoll mit dem Zehnersystem rechnen kann oder ob es eher einerweise vorwärts oder rückwärts zählt, oder ob es gar den Stellenwert der Ziffern missachtet.

5.7.5 Verdoppeln und Halbieren

Das mühelose Verdoppeln und Halbieren im Zahlenraum bis 100 ist eine wichtige Voraussetzung für das Anwenden von nicht-zählenden Strategien beim Berechnen von Produkten. Beispielsweise folgt aus 2 · 8 = 16 durch Verdoppeln 4 · 8 = 32; aus 10 · 7 = 70 folgt durch Halbieren 5 · 7 = 35. Derartige Beziehungen zwischen Aufgaben sind wichtig für das Knüpfen von Beziehungen zwischen Multiplikationsaufgaben und eine entscheidende Voraussetzung für die Automatisierung des kleinen Einmaleins und Einsdurcheins. Anhand nachfolgender Aufgaben kann leicht festgestellt werden, wie sicher das Kind beim Verdoppeln und Halbieren ist

❖ Verdopple die Zahlen

10	14	34	15	25	27	47

❖ Halbiere die Zahlen

20	80	46	84	10	30	70	16	36	74

Hinweise:

- Sollte ein Kind bei derartigen Zahlen auf der symbolischen Ebene unsicher sein, kann man es die Zahlen mit Zehnersystemblöcken darstellen lassen und mit Blick auf diese Darstellungen das Doppelte/die Hälfte nennen lassen.
- Sollten auch dabei Schwierigkeiten auftreten, kann man das Kind bitten, die Verdoppelungen (nochmals das Gleiche dazulegen und die Gesamtzahl nennen) und die Halbierungen (in zwei gleich große Portionen zerlegen) konkret mit den Zehnersystemblöcken auszuführen.

6. Zwei Fallberichte

6.1 Einführung

Im Projektzeitraum vorgestellt und untersucht wurden 34 Kinder und Jugendliche, die von verschiedenen Fachleuten (Kinder- und Jugendpsychiater/innen, Kinderärztinnen, Lehrer/innen, Psychologinnen u. a.) als „rechenschwach“ beurteilt und zu uns empfohlen worden waren. Wir haben die Gruppe in Abschnitt 1.2 hinsichtlich Geschlechtszugehörigkeit, Schularten, Alter und Klassenstufe beschrieben.

Über jedes Kind wurde ein zusammenfassender Bericht geschrieben, der oft mehrmals diskutiert wurde. Die Berichte sind jeweils Versuche, die Beobachtungen sinnvoll zu ordnen und zu deuten. Anders gesagt: Sie sind qualitative Bearbeitungen des „Materials“ unter der Anleitung unseres Wissens. Da sich unser Wissen in der ganzen Zeit veränderte, veränderten sich auch die Berichte. Sie sind also in vieler Hinsicht „Einzelstücke“.

Wir wollten eigentlich vier oder fünf Berichte vorlegen (dachten noch an Peter aus einer zweiten Klasse, Maria aus einer ersten Klasse und Lissi aus einer vierten Klasse). Weil der Forschungsbericht, insbesondere auch das Kapitel 4 mit den Beispielen, so umfangreich wurde und uns einfach keine Zeit blieb, drei weitere Berichte für die Darbietung in diesem Rahmen zu überarbeiten, haben wir (mit Bedauern) uns auf die zwei beschränkt, die wir zuerst in Angriff genommen hatten.

Franziska und Andrea sind dem Leser/der Leserin schon aus Kapitel 4 bekannt. Beide Mädchen haben sehr verschiedene Lebensgeschichten und Persönlichkeiten. Jede weist auf ihre Weise auf den komplexen Gesamtzusammenhang hin, in dem ihr Mathematiklernen stattfindet: Beziehungen in der Schule, familiäre Beziehungen und ihre Wechselwirkungen mit den inneren Themen und Konflikten des Kindes. Man kann den Einfluss dieser Bedingungen kaum überschätzen.

Auf der anderen Seite zeigen die Berichte, die sich auf das Herausarbeiten des mathematischen Denkens konzentrieren, wie komplex diese spezifische Leistung des Kindes ist. Es wird an den Berichten noch einmal deutlich, dass das Mathematiklernen ein eigener Prozess mit besonderen kognitiv-psychologischen Anforderungen und Schwierigkeiten ist. Gerade die Erfassung der ersten Entwicklungsschritte in der Schule ist schwierig und verlangt ein besonderes kognitiv-psychologisches Wissen auf Seiten der Untersucherin oder des Untersuchers.[1]

[1] Die Frage danach, wer Experte/Expertin für solche Untersuchungen sein oder werden könnte und wie eine entsprechende Weiterbildung aussehen könnte, werden wir an anderer Stelle behandeln.

6.2 Untersuchungsbericht über Andrea H.

Andrea, geboren im Frühling 1987, besuchte die dritte Klasse, als ein Arzt für Kinder- und Jugendpsychiatrie den Eltern ihre Vorstellung im Projekt vorschlug. Von Januar bis März 1997 wurden Andreas mathematische Kenntnisse an sieben Terminen zu je einer Stunde untersucht. Der Arzt überließ uns mit Zustimmung der Eltern seine Ergebnisse (Bericht an den Kinderarzt). Es fanden Gespräche mit Andreas Klassenlehrerin und mit ihrer Mathematiklehrerin statt.
Nach dem ersten Halbjahr wurde Andrea in die zweite Klasse zurückversetzt.

6.2.1 Familiärer Hintergrund

Andrea ist die mittlere von drei Töchtern des Ehepaares H.. Die älteste Tochter besucht die Hauptschule, die jüngste ist in der ersten Klasse der Grundschule. Herr H. ist Handwerker. Auch Frau H. hat auch einen Beruf erlernt und ist einige Stunden berufstätig.
Die Familie lebt in einem Dorf, in dem Herr H. auch geboren ist. Die verwitwete Mutter lebt im selben Haus. Frau H. erwähnt Eheprobleme, in denen auch die Schwiegermutter eine Rolle spielt. Ihr Mann kritisiere sie oft, seine Mutter hingegen nie. Auch wenn diese sich den Kindern gegenüber nicht in seinem Sinne verhalte, richte er seine Kritik stets gegen seine Frau. Eine Hautkrankheit, an der Frau H. zu leiden hatte, führt sie auf diese Situation zurück.

6.2.2 Vor- und Schulgeschichte

„Andrea habe eine Neugeborenenanämie gehabt, die eine Bluttransfusion nötig machte. Die sprachliche Entwicklung sei im Vergleich mit der älteren Schwester langsamer verlaufen. Sie sei nicht so mitteilsam gewesen. Im Kindergarten gab es keine Auffälligkeiten“ (aus dem Bericht des Arztes). Ihre Mutter charakterisiert ihr Sprechen als „sehr schnell, sich verhaspelnd, keine ganzen Sätze bildend“.

Bei der Schulfähigkeitsuntersuchung habe Andrea „nichts gemacht“. Sie wurde ein Jahr zurückgestellt, den Eltern wurde außerdem vorgeschlagen, die Frühförderstelle der Caritas aufzusuchen. Als die ganze Familie dorthin eingeladen worden war, habe Andrea sich erneut passiv verhalten, obwohl man doch ihretwegen hingegangen sei. Die Eltern haben daher den Kontakt mit der Beratungsstelle aufgegeben. Im folgenden Jahr habe sie bei der Untersuchung der Schulfähigkeit mitgemacht.

Mit der Klassenlehrerin der ersten Klasse kam Andrea nicht klar. Frau H. charakterisiert die Lehrerin in der Weise, dass diese bereits nach drei Wochen gewusst habe, welche Kinder dumm und welche gescheit seien. Die „Dummen“ habe sie unfreundlich behandelt. Sie habe Kinder angeschrieen, z. B. dann, wenn ihnen etwas runtergefallen ist. Auch Andrea sei häufig unfreundlich behandelt worden, habe zu Hause jedoch nichts erzählt. Andere Kinder haben Frau H. davon berichtet. Die Lehrerin war im Zeitraum von Andreas erstem Schuljahr ein halbes Jahr krank.

In der zweiten Klasse fand (zumindest in Mathematik) ein Lehrerwechsel statt. Herr F. hatte zuvor an der Hauptschule unterrichtet. Die jetzige Klassenlehrerin berichtet, dass sie niemals Anschauungsmaterial im Klassenzimmer vorgefunden habe, wenn sie nach den Mathematikstunden reinkam. In menschlicher Hinsicht kam Andrea mit diesem Lehrer jedoch besser zurecht. Die Mathematiklehrerin der dritten Klasse sagt, er habe nicht viel über Andrea sagen können. Andreas Leistungen wurden am Ende der zweiten Klasse in Mathematik mit 5 und in Deutsch gerade noch mit 4 bewertet, „damit nicht wiederholt werden muss“ (so die Klassenlehrerin).

Die Klassenlehrerin der dritten Klasse: Am Anfang des Schuljahrs sei Andrea vollkommen verstockt gewesen und habe keinerlei Selbstvertrauen gezeigt, eigene Beiträge verweigert. Sie weinte rasch und suchte oft Hilfe bei anderen. Andererseits sei es in der Klasse üblich gewesen zu lachen, wenn jemand etwas Falsches sagte. Beides habe sich durch die Bemühungen der Klassenlehrerin gebessert.
Ihr fällt auf, dass Andrea vor Arbeitsblättern oft unorientiert wirke, sich auch im Buch nicht rasch zurechtfinde, „als sehe sie vor lauter Bäumen den Wald nicht mehr“. Neulich habe sie die Rückseite eines Arbeitsblattes angeschaut, während alle anderen die Vorderseite ansahen.
In einem anderen Beispiel versteht Andrea die Hausaufgabenstellung nicht richtig: Es wurden Wörter mit „ck“ behandelt. Die Hausaufgabe sollte darin bestehen, im Wortverzeichnis des Lesebuches alle Wörter mit „ck“ herauszusuchen und abzuschreiben. Die Lehrerin fängt damit in der Schule an: Unter A findet man kein „ck-Wort“, unter B findet man „Bäcker“ und „backen“. Am Nachmittag ist Andrea davon überzeugt, dass sie alle Wörter mit „B“ abschreiben müsse. Sie gerät darüber mit der Mutter, die die richtige Aufgabenstellung erahnt, in einen heftigen Streit und setzt sich durch.
Andrea wirke, als sei alles hinter einer Nebelwand.

Die Leistung im Lesen bewertet die Lehrerin mit drei bis vier. In der Rechtschreibung ergibt sich vier bis fünf (eher fünf). Bei Bildergeschichten schreibt Andrea zu jedem Bild einen Satz, der jedoch nicht durchformuliert ist, sondern eher bruchstückhaft wirkt. Die Lehrerin bewertet dies im Kontext der Leistungen der Mitschüler/innen und um zu ermutigen mit „drei bis vier“. Grammatische Begriffe fielen Andrea schwer: Sie könne sich beispielsweise nicht merken, was mit Selbstlaut oder Mitlaut gemeint sei.

Andreas Mathematiklehrerin ist Referendarin. Die Klasse erscheint ihr groß (26 Kinder) und schwierig. Seit Weihnachten kümmere sie sich nicht mehr in der Weise um Andrea, dass sie sich neben sie setzt und sie individuell ermutigt. Die Klasse sei in diesen Situationen unruhig geworden. Andrea mache aber nur dann etwas, wenn man sich neben sie setze. Sonst mache sie entweder nichts oder hänge sich an andere, z. B. indem sie dort abschreibt. Sie erlebt Andrea als gehemmt.

Kommentar:
Andrea hat in der ersten Klasse ungünstige Lernbedingungen gehabt.[2] Diese Bedingungen können durchaus dazu führen, dass ein Kind nur sehr wenig mitbekommt und in seiner eigenständigen Auseinandersetzung mit Lerngegenständen nachhaltig blockiert wird.

[2] Der Name ihrer Lehrerin in der ersten Klasse ist der Untersucherin durch ein anderes (leistungsschwaches) Mädchen bekannt, das das Verhalten der Lehrerin ähnlich beschrieben hat.

Andererseits zeigte Andrea schon bei der Schulfähigkeitsuntersuchung und beim Besuch einer Beratungsstelle eine Tendenz, bei an sie gerichteten Erwartungen sich in passives Verhalten zurückzuziehen. Unter den schlechten Bedingungen versuchte sie wahrscheinlich, „unsichtbar" zu sein. Es ist ihr weitgehend gelungen.
Es zeichnet sich ab, dass Andrea am Ende der zweiten Klasse keine angemessenen Leistungen erbringen wird, dass sie insbesondere dem Mathematikunterricht nur folgt, wenn sie persönliche Ansprache der Lehrerin erhält, dass sie kaum auf ihre eigene Leistung vertraut, sondern sich auf Mitschülerinnen stützt.

6.2.3 Ergebnisse der testpsychologischen Untersuchung

Andrea wurde im Rahmen ihrer Vorstellung beim Kinder- und Jugendpsychiater mit dem K-ABC untersucht. „Andrea arbeitet konzentriert, sehr kontrolliert und bemüht."[3]

Das Gesamtergebnis der intellektuellen Fähigkeiten (Standardwert 83) befindet sich ungefähr eine Standardabweichung unterhalb des Mittelwertes, also im Grenzbereich zwischen durchschnittlicher und unterdurchschnittlicher Leistung.

Anforderungen an das ganzheitliche Denken bewältigt Andrea dem Durchschnitt ihrer Altersgruppe entsprechend (Standardwert 90). Zu beachten ist aber, dass sie im Untertest „Bildhaftes Ergänzen", der die nonverbale Analogienbildung erfassen soll, den gerade noch durchschnittlichen Skalenwert (Prozentrang 16) erzielt. Wir wissen nicht, ob ihre Fehler in starkem Umfang auf eine Missachtung der Raumlage zurückgehen oder auf die Wahl des falschen Bildes. In der Skala des ganzheitlichen Denkens zeigt Andrea eine weitere Schwierigkeit im Räumlichen Gedächtnis (auch hier Prozentrang 16, untere Durchschnittsgrenze). Die Ergebnisse der anderen Untertests zum ganzheitlichen Denken sind jedoch durchschnittlich.

Gravierende Schwierigkeiten zeigt Andrea in zwei von drei Untertests, die die Verarbeitung und Wiedergabe serieller einzelheitlicher Informationen verlangen, und zwar in den sprachgebundenen Untertests der Skala des einzelheitlichen Denkens. Ihre Leistung im Zahlennachsprechen ist nicht altersgerecht (Prozentrang 4). Es ist uns nicht bekannt, ob sie dabei die richtigen Zahlen in falscher Reihenfolge reproduzierte oder auch falsche Zahlen verwendete oder Zahlen ausließ. Noch größere Probleme bereitet Andrea die Aufgabenstellung des Untertests „Wortreihe", bei dem man sich eine Reihe von Wörtern, die konkrete Gegenstände bezeichnen, in der gegebenen Reihenfolge merken muss und auf die bezeichneten Gegenstände in der gegebenen Reihenfolge zeigen muss[4] (Prozentrang 1!).
Keine besonderen Schwierigkeiten zeigt Andrea hingegen bei der Reproduktion einer Reihe von Handbewegungen (Prozentrang 36), so dass ihre Schwierigkeiten in der seriellen Verarbeitung auf den sprachlichen Bereich beschränkt bleiben. Die Gesamtleistung in den drei Untertests zur serialen Verarbeitung platziert sie bei Prozentrang 4, was deutlich unterdurchschnittlich ist.
Ihre Leistungen in den sprachfreien Untertests (Prozentrang 23) entsprechen dem Ergebnis in der Skala des ganzheitlichen Denkens (Prozentrang 27).

[3] Zitate aus dem Bericht des Kinder- und Jugendpsychiaters
[4] auditive Reihenfolgeerfassung und auditiv-visuomotorische Koordination

In der Skala der Fertigkeiten erbringt Andrea insgesamt durchschnittliche Leistungen mit dem besten Ergebnis im Untertest „Gesichter und Orte“ (Prozentrang 65), mit dem Andrea Aufgeschlossenheit gegenüber ihrer Umwelt ebenso belegt, wie ein erfolgreiches Langzeitgedächtnis für Gesichter, Orte und ihre Namen. Bemerkenswert ist, dass sie auch im Untertest „Rechnen“ ein durchschnittliches Ergebnis erzielt (Prozentrang 27). Die Aufgabenstellung im K-ABC erfolgt mündlich, jedoch gestützt auf bildliche Darstellungen.
In den Untertests „Lesen“ und „Lesen und Verstehen“ ist Andreas Leistung durchschnittlich, jedoch ist die Leistung in „Lesen und Verstehen“ (Prozentrang 21) deutlich schwächer als im „Lesen“ (Prozentrang 87).
An der unteren Durchschnittsgrenze befindet sich der erzielte Wert im Untertest „Rätsel“, in welchem Gegenstände aufgrund einiger Eigenschaften erraten werden müssen.

Kommentar:
Eine ergänzende differenzierte Untersuchung des sprachlichen Entwicklungsstandes ist in Andreas Fall empfehlenswert, da ihre intellektuellen Leistungen gerade bei sprachlichen Anforderungen stark abfallen. Die kognitive Grundlage der „Nebelwand“, die die Klassenlehrerin vor dem Mädchen vermutet, ist vermutlich eher im Sprachverstehen begründet.
Im Unterricht kommt es immer auf das Sprachverständnis an, es gibt jedoch Unterrichtsformen, für die dies mehr oder weniger der Fall ist. Für Andrea wäre ein Mathematikunterricht der Montessori-Richtung, mit sorgfältig überlegter sprachlicher Begleitung, besser als ein Unterricht, in dem viel erklärt wird.

6.2.4 Allgemeine Beobachtungen

Der Arzt schreibt: „Andrea erscheint schlank, hübsch mit ihren dunklen Haaren, bunter Windjacke, Ohrenhängern. Sie nimmt Augenkontakt auf und ist zunächst gespannt ängstlich, antwortet knapp auf Fragen, spricht nicht spontan. Sie klammert sich schier an die Mutter, die lang und ausführlich ihre Sorgen und ihre Unsicherheit im Umgang mit Andrea bespricht, die schweigend alles über sich ergehen lässt.“
„Ihre Eltern geben selbst zu, an die Grenze ihrer eigenen Toleranz mit Andrea gekommen zu sein, obwohl oder weil beide Eltern in ihrer Hausaufgabenhilfe für Andrea verschieden vorgehen.“

Auch bei uns zeigt Andrea das anklammernde Verhalten gegenüber der Mutter, der sie sich oft nur nonverbal mitteilt. Auf der anderen Seite zeigt sie auch implizit abgrenzendes Verhalten, indem sie nicht auf mütterliche Ansprachen und Fragen reagiert. Wenn wir über ihre Schulschwierigkeiten sprechen, schmiegt sie sich manchmal an die Mutter und gleichzeitig tut sie so, als ginge es sie nichts an.
Frau H. sagt, Andrea habe sich angewöhnt, auf Hilfe zu warten. Wenn Andrea sich indifferent zeigt oder auf eine Aufforderung der Mutter keine Reaktion zeigt, lächelt Frau H. wiedererkennend („jetzt machst du wieder ...“), wirkt aber zugleich hilflos und frustriert. Andrea könne sich sehr verschließen, sagt ihre Mutter.

Einen Grund für Andreas Verhalten sieht Frau H. darin, dass sie das mittlere Kind sei. Sie kennt diese Position aus eigener Erfahrung und hält sie für besonders unbefriedigend.
Andrea zeige den Wunsch, bei der jüngeren Schwester noch einmal mitzulernen, werde jedoch gehemmt von der Angst, etwas falsch zu machen. Sie genieße es, der jüngeren Schwester vorzulesen, berichtet ihre Mutter.

Andrea gibt nur zögernd Auskunft, was sie möchte, wenn sie sich überhaupt dazu äußert. Als wir die Frage besprechen, ob sie am Rosenmontag in die Pädagogische Hochschule kommen wird, äußert sie keinen Wunsch. Sie sagt auch nicht, wie sie den Rosenmontag gerne gestalten möchte. Sie verhält sich, als würde alles von anderen festgelegt.
Das Gespräch gestaltet sich schwierig, Andrea antwortet oft mit wenigen Worten, die Untersucherin hat das Gefühl, sie nicht gut zu verstehen. Das Mädchen ist nicht ablehnend, sie bemüht sich, die an sie gerichteten Fragen zu beantworten, aber es ist seltsam schwierig, den emotionalen Gehalt dessen zu erfassen, was sie sagt.

Als sie auf einem Blatt mit angefangenen Sätzen einen Satz beenden soll, der mit „Mädchen“ anfängt, fragt sie, was man dazu schreiben soll. Die Untersucherin sagt, man könne schreiben, was Mädchen sind oder was sie tun. Andrea verzieht das Gesicht und zieht es vor, nichts zu schreiben. Zu „Jungen“ fällt ihr hingegen etwas ein: „können nicht kochen“.
Dieses Blatt ist in Schrift, Grammatik und Rechtschreibung auffällig, einem Kind der dritten Klasse nicht angemessen: Vokale und Konsonanten werden verwechselt und vergessen. Es wird viel nachgemalt, überschrieben und verbessert.

Andrea ist Linkshänderin und hält beim Schreiben den Stift auf ungewöhnliche Weise zwischen Fingern eingeklemmt, anstatt die Spitze mit den Fingerspitzen zu führen.

Die Untersucherin hat immer wieder den Eindruck, als bereite ihr beim Sprechen die Artikulation irgendwie Mühe. Manchmal verbirgt sie den Mund beim Sprechen. Ihre Aussprache wirkt undeutlich.
Manchmal fehlen ihr die richtigen Worte, wenn sie beschreiben will, was sie in der Schule oder zu Hause gemacht hat. Ihre Beschreibung von Vorgängen ist für die Untersucherin oft nicht gut nachvollziehbar, wobei sie nicht genau weiß, ob wegen der Wortwahl oder der Reihenfolge oder grammatischer Holprigkeiten.

Kommentar:
Die Beziehung zwischen Andrea und ihrer Mutter scheint ambivalent und eng zugleich. Die Untersucherin kann aufgrund der ihr vorliegenden Informationen keine begründeten Hypothesen vortragen, hält aber die Vermutung für berechtigt, dass es für Andreas gehemmten Ausdruck und reduzierte Aktivität auch emotionale Gründe gibt, die ihre Grundlage in den familiären Beziehungen haben.
Die Beobachtungen zur Sprachverwendung trugen zur Empfehlung bei, die im vorausgehenden Abschnitt gegeben wurde.

6.2 5 Beobachtungen bei der Arbeit an mathematischen Aufgaben

Die Arbeit mit Andrea gestaltet sich schwierig, weil sie der Untersucherin kaum schildert/schildern kann, was sie überlegt. Diese kann ihr Schweigen und Zögern oft nicht interpretieren: „Denkt sie nach, wagt sie nicht zu sagen, dass sie nicht weiß, was sie tun soll, wartet sie ab, bis ihr geholfen wird und bemüht sich gar nicht?“ Die langen Phasen des Schweigens sind für Andrea wahrscheinlich belastend, aber die Untersucherin kann ohne ihre Reaktion und ohne ihre Auskunft vieles nicht verstehen und wartet daher immer wieder. Die Untersuchung weist inhaltliche Mängel auf, die auch aus der geringen Dynamik der Zusammenarbeit hervorgegangen sind.[5]

Es ist bei Andrea eine gewisse Erleichterung – eine geringere Gehemmtheit – festzustellen, wenn sie Aufgaben mit einem Material anpacken kann.
Es hilft ihr, wenn man ihr ausdrücklich bestätigt, dass sie etwas richtig gemacht hat, bevor man sie um eine Erläuterung oder Beschreibung ihres Vorgehens bittet. Sie ist sich vermutlich in allem, was Mathematik betrifft, sehr unsicher.

6.2.6 Differenzierte Beobachtungen zu Andreas mathematischem Verständnis und ihren mathematischen Fertigkeiten

Übersicht über die folgende Darstellung

1. *Zahlbeziehungen und Rechnen im Zahlenraum bis 20 (Symbolebene, Bildebene)*
2. *Zahl(wort)reihe*
3. *Verarbeitung von Zahlwörtern (Zahlendiktat u. a.)*
4. *Ordnung der Zahlen*
5. *Verständnis mehrstelliger Zahlen (Zehnerbündelung, Stellenwerte auf Symbolebene, bei Gelddarstellung, bei Zahldarstellung mit Hunderterplatten, Zehnerstangen und Einerwürfeln)*
6. *Rechnen mit zweistelligen Zahlen*

1. Zahlbeziehungen und Rechnen im Zahlenraum 20

Zahlbilder
Andrea kann Zahlen bis zwanzig (und darüber) mit ihren Händen korrekt darstellen. Dabei verwendet sie bei Zahlen größer als 10 implizit die Beziehung zur Zehn: 13 als zehn und drei, 18 als zehn und acht. Bei anderen Aufgabenstellungen scheinen jedoch die Beziehungen zur 10 nicht bekannt (Beispiele weiter unten).
Andrea kann Zahlen bis 20 mit Würfelbildern bis 5 rasch darstellen und benutzt Beziehungen zur Fünf. Wenn sie Zahlen größer als 10 darstellt, benutzt sie teilweise implizit das Wissen, dass 19 = 10 + 9, teilweise bestimmt sie die zur Zehn hinzuzufügenden Bilder zählend.

[5] Durch die Schwierigkeiten der Verständigung mit Andrea ist die Untersucherin angeregt worden, nach Aufgabenstellungen zu suchen, die nonverbalen Einblick in Denkprozesse ermöglichen. Das war jedoch nicht so schnell zu verwirklichen.

Zahlbeziehungen und Basisfakten
Andrea weiß nur wenige Zahlbeziehungen und Basisfakten spontan. Andere berechnet sie mit Hilfe der Finger, indem sie einen Addenden mit den Fingern darstellt, den zweiten Addenden zählend hinzufügt und dann das Ergebnis entweder abliest oder durch erneutes Zählen, jetzt Weiterzählen, bestimmt. Subtraktionen rechnet sie entsprechend (Beispiele weiter unten).

Die Kommutativität der Addition ist Andrea „bekannt", sie wendet sie aber nur dann an, wenn Aufgabe und Tauschaufgabe unmittelbar nacheinander schriftlich gestellt sind.
Wenn Nachbaraufgaben unmittelbar nacheinander gestellt sind, leitet sie manchmal das Ergebnis einer Aufgabe aus dem der vorausgehenden ab. Beispielsweise 14 – 5 = 9 aus 14 – 4 = 10 und 7 – 6 = 1 aus 7 – 7 = 0.

Beziehungen zur 10 werden beim Rechnen nicht genutzt: Aufgaben wie 10 + 8, 14 – 4 und 16 – 10 werden nicht unmittelbar gelöst.

Als sie die Anzahl der Fünfen in den Zahlen 6, 9, 10, 13, 17 angeben soll, antwortet sie spontan mehrmals falsch, korrigiert sich nach meiner Aufforderung jedoch. Als ich dann Zahlen größer als 20 nenne, antwortet sie teilweise sofort, teilweise nach einer Denkpause richtig.

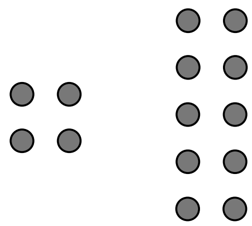
Beispiele zur Addition:
Um die Zahl zu finden, die um zwei größer ist, zählt sie weiter.
Sofort lösen kann sie folgende Aufgaben: 6 + 6, 5 + 5, 5 + 4, 11 + 0, 8 – 0.
Mit Hilfe der Finger rechnet sie: 7 + 4, 7 – 7, 4 + 3, 7 – 3, 5 + 3, 8 – 4.

Wie kann man 6 + 7 = ausrechnen?
Andrea streckt sechs Finger. Sie fügt jetzt sieben weitere dazu, d. h. vier von der zweiten Hand („eins, zwei, drei, vier"), dann benutzt sie erneut die erste Hand („fünf, sechs, sieben"). Sie steuert das Hinzufügen des Addenden, indem sie mit einem Finger nachzählt. An den drei Fingern der ersten Hand liest sie zuletzt das Ergebnis 13 ab.

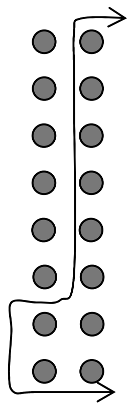
Beispiele zur Subtraktion:
Andrea rechnet „8 – 5" so: Sie zeigt acht Finger und zählt dann vom achten Finger her um fünf Finger zurück. Teilweise zeigt sie mit einem Finger auf den jeweils gezählten Finger. Nach dem Abzählen von fünf Fingern bleiben noch drei, sie ergeben das Ergebnis.

Beispiele zur Zehn:
Ergänzen bis 10 geht nur rasch ab 9, 7 und 5.
14 – 4 = 11 durch Rückwärtszählen gelöst.
16 – 10 = 0 fragend, nach längerer Pause.
10 + 8 = 18 nach längerer Pause zählend errechnet.

Ihre Nichtbeachtung der Zehn zeigt sich auch, wenn Zahldarstellungen durch Plättchen verwendet werden: Vor der Bearbeitung der Aufgabe 16 – 10 lagen vierzehn Plättchen so auf dem Tisch:



Andrea schiebt diese zusammen, so dass sieben Zweierreihen entstehen, und fügt ein weiteres Paar Plättchen hinzu. Dann zählt sie alle Plättchen noch einmal.
Jetzt zählt sie 10 Plättchen ab – eine Hälfte der Paare und zwei von der andere Reihe – und schiebt sie zur Seite. Das Ergebnis erhält sie durch das Abzählen des Restes.



Kommentar zu 1.:
Andrea bewältigt Rechenaufgaben zählend, oft in einer Art, die dem Bereitlegen der Addenden durch Material und anschließenden Durchzählen der Gesamtmenge entspricht. Ihre Fingerdarstellungen oder Fingerbilder der Zahlen größer als 10 beinhalten die Zerlegung in 10 und einen Rest. Aber Andrea „sieht“ dies nicht, d. h. sie sieht ihre Fingerbilder anders. Das Bild der 13 ist in ihren Augen nicht „10 und 3“, sondern (vielleicht) „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10“ und „11, 12, 13“.
Die Aufgabe „Wie viele Fünfen sind in x?“ hat ihr ein wenig Spaß gemacht. Solche Problemstellungen könnten sie anregen, die aus den Fingerbildern der Zahlen erschließbaren Zahlbeziehungen zu reflektieren, die Zerlegbarkeit und die Zerlegungen der Zahlen zu erkennen und sich vom zählenden Rechnen zu lösen.
Parallel zur Arbeit mit den Fingern sollte sie mit anderen Zahldarstellungen vertraut gemacht werden, die für größere Zahlen tauglicher sind.

2. Zahl(wort)reihe

Zahlenraum bis 100
Soll Andrea von einer *mündlich* gegebenen, zweistelligen Zahl weiterzählen, ist mehrfach die erste als Fortsetzung genannte Zahl nicht richtig. Die folgenden Zahlen werden in der richtigen Reihenfolge vorgetragen, doch in langsamem Tempo und vor dem vollen Zehner verzögert.
Beim *schriftlichen* Zählen von 27 bis 42 treten keine Fehler auf.

Beispiele:
Als Andrea ab „neunund*sech*zig" zählen soll, fährt sie fort mit „*sieben*undsechzig, achtundsechzig" usw.[6]
Bei Vorgabe von „neunundvierzig" klappt es.
Bei Vorgabe von „achtundsiebzig", fährt sie fort mit „siebenundsechzig". Nach einer langen Pause, in der die Untersucherin die Anfangszahl wiederholt, fährt sie richtig fort.

Zahlenraum bis 1000
Als Andrea mündlich ab „zweihundert*ein*undneunzig" zählen soll, nennt sie den Hunderter nicht, sondern zählt „*zwei*undneunzig, neunund*drei*ßig" (Untersucherin korrigiert) „*vier*undneunzig" usw. Als sie gebeten wird, die ganze Zahl zu sagen, kann sie es, aber ihr Gesicht verzieht sich dabei. Die Untersucherin hat den Eindruck, als fange sie gleich zu weinen an. Andrea beteuert, die Untersucherin habe mit ihrer Vermutung, dass sie traurig sei, nicht recht. Die Frage, ob das Zählen schwierig sei, bejaht sie jedoch.

Andrea soll „zweihundert*drei*undneunzig" aufschreiben und dann *schriftlich* weiterzählen. Sie schreibt 239 und fährt nach einigem Zögern fort mit 339, 439. Sie ist der Auffassung, dass sie auf diese Weise immer *eins* dazutut.

Kommentar zu 2.:
Es scheint, dass die Entschlüsselung/Verarbeitung eines mündlich gegebenen Anfangszahlwortes hinsichtlich der mündlichen Fortsetzung Mühe bereitet. Beim Zahlen*schreiben* nach Diktat ist ein kleines Stocken bemerkbar, jedoch erfolgt es überwiegend korrekt. Das heißt, die Schwierigkeiten beim Zählen ergeben sich nicht aus dem Vergessen der gegebenen Zahl. Das schriftliche Weiterzählen ist – im Zahlenraum bis 100 – leichter als das mündliche.
Bei dreistelligen Zahlen bereitet das mündliche Zählen (Aussprechen des ganzen Zahlwortes, zugleich Beachten der Veränderung) anscheinend besondere Mühe. Andrea reduziert die Anforderung, indem sie die Hunderterzahl weglässt.
Bei dreistelligen Zahlen gelingt auch das schriftliche Zählen nicht: sie vergrößert jeweils die Hunderterstelle um eins. Dies offenbart eine *Lücke im Verständnis dreistelliger Zahlen.*
Es ist denkbar, dass eine Beziehung zu ihren Problemen in der Verarbeitung serialer verbaler Information bei der testpsychologischen Untersuchung hergestellt werden kann.

---

[6] „*Sieben*undsechzig" kann man verstehen als Mischung aus „nach „neunundsechzig" kommt „*sieb*zig" oder „was mit sieben"" und dem Festhalten an den „Sechzigern".

3. Verarbeitung von Zahlwörtern und Zahlen

Beim Zahlendiktat schreibt Andrea achtzehn zwei- und dreistellige Zahlen korrekt.
In anderen Situationen kommt es aber zu Vertauschungen (siehe Punkt 2.). Die zweistelligen Zahlen schreibt sie in *invertierter Schreibrichtung*. Bei dreistelligen Zahlen schreibt sie Zehner/Einer teilweise in invertierter Richtung.

Die Umstellung von Zehnerzahl und Einerzahl (die Aufgabe lautete: „ich sage siebenundsechzig, du sagst sechzig und sieben“) gelingt in den ersten Versuchen nicht: Andrea macht den Einer zum Zehner und umgekehrt. Nach der Vorübung: „ich sage siebenundsechzig, du sagst nur die Zehnerzahl sechzig“, gelingt es nach kleiner Verzögerung. Andrea gibt an, in der Pause vor ihrer Antwort, das gehörte Zahlwort innerlich zu wiederholen.

Andrea kann eine gesprochene Zahl unter zwei oder drei geschriebenen Zahlen identifizieren (z. B. „sechsundfünfzig“ unter 65, 650, 56).

Bei der Darstellung von mündlich gegebenen Zahlwörtern (Beispiel: siebenundvierzig) mit Seguin-Karten bildet sie zuerst die richtige Kombination aus zwei Einerkarten. Dann greift sie den Einerwert als Zehner (70) und den Zehnerwert als Einer (4) und korrigiert sich selbständig. Bei den nächsten Aufgaben greift sie *zuerst* die Einerkarte (7), dann die Zehnerkarte (40), folgt damit der Ordnung der lexikalischen Elemente im Zahlwort *(sieben*und*vier*zig), die sie mit Einer- und Zehnerkategorie richtig koordiniert (wie beim invertierten Zahlenschreiben).

Kommentar zu 3.:
Andrea kann mündlich gebotene Zahlwörter in der Regel richtig als Zahl aufschreiben und als geschriebene Zahl rasch identifizieren.
Eine Verarbeitung des Wortes („dreiundvierzig“), die eine darüber hinausgehende Analyse/Identifikation von Zehner-Zahlwort („vierzig“) und Einer-Zahlwort („drei“) und eine Veränderung z. B. im Sinne der Umstellung der beiden Teile verlangt, gelingt nicht unmittelbar.
Vermutlich analysiert sie Zahlwörter in der Regel nur so weit, wie sie es beim Zahlenschreiben braucht: Da muss ich nur „sieben“ und „vier“ beachten und die invertierte Schreibrichtung befolgen.
Das sichere Erfassen von Zahlwörtern und ihre Übersetzung in das Bild geschriebener Zahlen ist nicht nur beim Zahlenschreiben und -lesen von Bedeutung. Beim Kopfrechnen müssen wiederholt Zwischenergebnisse vom Zahlwort in das Bild der geschriebenen Zahl übersetzt werden und umgekehrt.
„Fünfunddreißig“ und „dreiundfünfzig“ müssen für Andrea sicher unterscheidbare Zahlwörter werden. Welche Hilfe kann ihr geboten werden? Wir denken an zwei Übungen: 1) Eine Übung zur Analyse der Zahlwörter auf sprachlicher Ebene, bei der Zehnerteil eines Zahlwortes „herausgehört“ werden muss. 2) Eine bessere *quantitative Bedeutung* der Zahlen erleichtert ihre Unterscheidung. Ansatzpunkt könnte die Verbindung der geschriebenen Zahl mit Quantitäten sein, die wiederum mit dem Zahlwort verknüpft werden.

4. Ordnung der Zahlen

Im Zahlenraum bis 100 ordnet Andrea Zahlenkärtchen wie folgt:

51 52 61 62 64 65 67 74 84 60

Dabei entsteht vor der 61 eine lange Pause.
Die Untersucherin legt nun 84 und 60 heraus und fragt, welches die größere Zahl ist. Andrea sagt, dass 60 größer als 84 sei, korrigiert sich dann aber sofort.
Sie fügt nun die 60 hinter der 67 ein.
Als sie jetzt 60 und 67 vergleichen soll, bestätigt sie mehrfach, dass 60 größer sei als 67. Sie zweifelt auch dann nicht an ihrem Urteil, wenn sie an 60 Pfennige und 67 Pfennige denkt. Als wir 60 und 67 Pfennige hinlegen, zeigt sich, dass ihre Unsicherheit daraus resultierte, dass sie nicht wusste, ob 5 Zehner und Sieben etwa schon siebenundsechzig sind. Als sie fünf Zehner gelegt hat, kann sie jedoch entscheiden, dass dies nicht so ist und dass man, um siebenundsechzig zu erhalten, erst mal sechzig legen muss.

Andrea kann zu einem späteren Zeitpunkt gesprochene Zahlen in ihrer Beziehung zu 50 und 60 richtig einordnen (kommt vor 50, zwischen 50 und 60, kommt nach 60). Bei dieser Aufgabe sind die Zahlen 50 und 60 aufgeschrieben, so dass sie an die entsprechende Stelle zeigen kann.

Zwei zweistellige Zahlen beurteilt sie ansonsten immer richtig, gleichgültig ob die Aufgabe mündlich oder schriftlich gestellt ist.
Paare von dreistelligen Zahlen beurteilt sie überwiegend falsch.(beispielsweise „743 bzw. 734“ und „912 bzw. 689“ und – *mündlich* – „zweihundertneunundachtzig, dreihundertvierundzwanzig usw.)

Kommentar zu 4.:
Andrea beurteilt zwei zweistellige Zahlen hinsichtlich ihrer Größe in der Mehrzahl der Fälle richtig. Es besteht aber noch Unsicherheit darüber, wo die vollen Zehner in der Zahlreihe erscheinen. Dies enthüllt auch, dass sie nicht weiß, dass „67“ dasselbe ist wie „60 und 7“. Um sich dies klarzumachen, muss sie konkret 10, 20, 30, 40, 50, 60 zählen, wie sie es tut, als sie die Zahlen mit Geld darstellen will. Es genügt nicht, dass sie nur daran denkt, die Zahlen als Geldbeträge zu geben. Das heißt, sie antizipiert nicht 6 Zehner in 67.
Wenn die Zahlreihe durch 50 und 60 angedeutet ist, kann sie Zahlen richtig platzieren. Dies geschieht nach der zuerst beschriebenen Aufgabe, so dass sich darin ein Lerneffekt zeigen kann.
Dreistellige Zahlen kann sie hinsichtlich ihrer Größenbeziehung nicht beurteilen, gleichgültig ob sie schriftlich oder mündlich präsentiert sind.

5. Verständnis zweistelliger Zahlen

Als Andrea gefragt wird, was sie über *Zehner*zahlen weiß, sagt sie „*vorne*“. Entsprechend sagt sie über *Einer*zahlen „*hinten*“.

Darstellung von Zahlen mit Zehnerbündeln und Einzelnen
Andrea kann zweistellige Anzahlen mit Zehnerbündeln und Einzelnen geben, z. B. 46 als vier Zehnerbündel und sechs Einzelne. Verzögerungen gehen aufs Konto der Analyse des Zahlwortes, das sie sich gelegentlich wiederholen lässt. Sie gelangt zu den Zahldarstellungen auf dem Weg des Abzählens mittels der Zehnerreihe, ohne die Anzahl der Zehner antizipieren zu können: 10, 20, 30, 40. Dann weiß sie aber: „und sechs“.
Bei der Darstellung von Zahlen mit Zehnerstangen und Einerwürfeln kommt es häufig zur Vertauschung von Zehner- und Einerwerten, die sie teilweise selbst korrigiert. Teilweise ist sie aber unfähig zur Korrektur, weil sie die Stangen und Würfel auf gleiche Weise abzählt („eins, zwei, drei, vier“ (Zehnerstangen), „eins, zwei, drei“ (Würfel), „also vierunddreißig“).

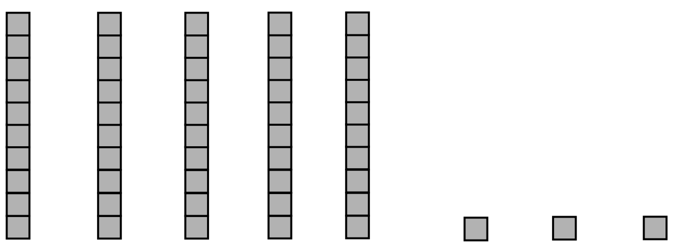
Beispiele:

„fünfundzwanzig“: Andrea legt fünf Zehner und zwei Einer.
Sie korrigiert sich selbst und erklärt dazu: „Zwanzig und fünf“.

„vierunddreißig“: Andrea legt vier Zehner und drei Einer.
Sie überprüft, indem sie die Zehner abzählt („1, 2, 3, 4“). Sie findet ihre Darstellung richtig.

Sie kann die Zahl „vierundzwanzig“ mit ihren Händen zeigen: „Zehn und zehn sind zwanzig und vier sind vierundzwanzig“. Sie versucht es mit „dreiundvierzig“: „Zehn und zehn sind zwanzig und zehn sind dreißig und drei sind dreiundvierzig“. Sie glaubt es sich selbst nicht ganz, aber die Korrektur fällt ihr schwer. Bei einem weiteren Versuch zeigt sie viermal Zehn und fügt dann aber noch vier hinzu, anstatt drei.

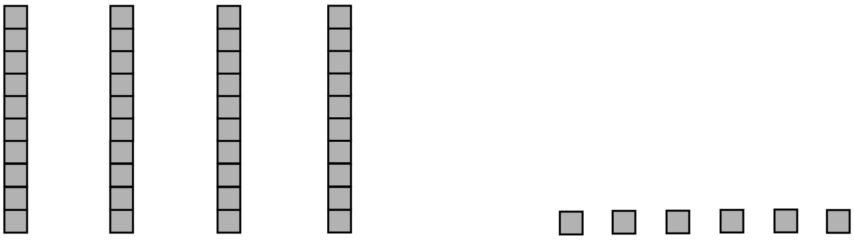
Soll sie umgekehrt *Zahldarstellungen in Zahlwörter* übersetzen, vertauscht sie die Zehner- und Einer-Werte dann, wenn sie erst die Zehner abzählt und dann die Einer. Wenn sie erst die Einer zählt und dann die Zehner, gelingt das richtige Zahlwort.



„eins→ zwei→drei→ vier→ fünf eins→ zwei→drei“: „fünfunddreißig“

„fünf←vier ←drei ←zwei←eins drei ← zwei ←eins“: „dreiundfünfzig“

Als ich sie beim Abzählen der Zehner und der Einer im Anschluss anleite, indem ich immer auf das Element zeige, das im nächsten Schritt hinzugezählt werden soll, zählt sie die Zehnerstangen in Zehnerschritten und zögert beim Wechsel zu den Einerwürfeln ein wenig, um dann richtig fortzufahren.



„zehn, zwanzig, dreißig, vierzig“ (Zögern), „einundvierzig, zweiundvierzig, ... “

Veränderungen an Zahldarstellungen mit Veränderungen der Zahlwörter verbinden:
Ist eine Zahl dargestellt, reagiert Andrea auf kleine Variationen (plus eine oder zwei Zehnerstangen, minus eine Zehnerstange, plus zwei Einer, plus drei Einerwürfel) spontan korrekt, in der Regel ohne nachzuzählen.

Beispiel:
Die Untersucherin legt 7 Zehnerstangen und 3 Einerwürfel. Andrea sagt: „siebenund – äh, dreiundsiebzig.“
Ein Zehner wird weggenommen. Andrea: „dreiundsechzig“.
Zwei Zehner werden weggenommen. Andrea: „dreiundvierzig“.
Zwei Einer werden zugefügt. Andrea: „fünfundvierzig“.
Drei Einer werden zugefügt. Andrea zählt die Einer und findet: „achtundvierzig“.

Ähnliche Beobachtungen kann man bezüglich Zahldarstellungen mit Geld machen.

Zur Untersuchung ihres Verständnisses für die *Beziehung zwischen Zehnern und Einern* erhält Andrea folgende Aufgabe:
Andrea habe so viel Geld und kaufe etwas für 5 DM:

Andrea wirkt ratlos. Nach einiger Zeit sagt sie, man würde in diesem Falle wechseln. Das geschieht so, dass sie die zwei Zehnmarkscheine weglegt und zwei Einmarkstücke hinzufügt.
Im Anschluss hilft die Untersucherin beim Wechseln von 10 DM in zweimal 5 DM, so dass jetzt liegt:

Andrea weiß nicht, wie davon 5 DM weggenommen werden. Sie schlägt zuerst vor, die 10 DM zu nehmen, dann die dreimal 1 DM, erst dann schlägt sie das 5 DM Stück vor.

Dies sind „dreiundfünfzig“ DM, sagt Andrea nun.

Dies erinnert an eine andere Situation, in der sie sechsundfünfzig DM geben sollte. Andrea schrieb die Zahl richtig auf, war aber nicht imstande, den Betrag mit dem Spielgeld zu geben (es standen vier Zehnmarkscheine und viele Silbermünzen zur Verfügung). Sie griff aber nach längerem Zögern einen Zehnmarkschein und ein Fünfmarkstück heraus. Sie konnte ihr Problem an dieser Stelle nicht beschreiben: Sie wisse nicht, wie sie es machen soll.
Es scheint, dass sie auch hier 5 und 10 mit 50 in Verbindung bringt. Zu beachten ist sicher auch, dass keine fünf Zehnmarkscheine zur Verfügung standen, sondern ein Zehner z. B. durch 10 Einmarkstücke für die Lösung der Aufgabe hergestellt werden musste.

Kommentar zum Verständnis zweistelliger Zahlen:
Andrea unterscheidet Zehner und Einer und kann die Übersetzung von Zahlen in Zahldarstellungen mit Zehnerbündeln und Einzelnen und umgekehrt im Prinzip richtig vornehmen. Fehler entstehen durch *Zahlverarbeitungsschwierigkeiten* (aus Zahlwörtern die Werte der Zehnerstelle und der Einerstelle entnehmen).
Bei der Übersetzung in die Zahldarstellung offenbart sie das Wissen, dass 46 gleich 40 und 6 ist. Um 40 herzustellen, bedient sie sich der Zehnerreihe, sie kann nicht (immer) antizipieren, dass 40 vier Zehner sind.

Wenn sie bei Zahldarstellungen durch Zehnersystem-Blöcke die Zehnerstangen und Einerwürfel jeweils in Einerschritten durchzählt und das Zahlwort der dargestellten Zahl gemäß der Reihenfolge der erhaltenen Zahlen bildet („fünf – drei, also *fünf*und*drei*ßig“ oder „drei – fünf, also *drei*und*fünf*zig“) und Fehler zu vermeiden versucht, indem sie die Zählrichtung ändert (erst Einer und dann die Zehnersymbole zählen), hat man auch den Verdacht, dass sie die Übersetzungen vornimmt, ohne Zehner und Einer wirklich (quantitativ) zu unterscheiden.
Wir vermuten, dass Schwierigkeiten bei der *Zahlverarbeitung* sich mit Lücken im *Verständnis* der zweistelligen Zahlen vermischen.

Wenn sie bei der Aufgabe, in der sie etwas bezahlen soll, zwei Zehnmarkscheine in zwei Einmarkstücke „wechselt“, beachtet sie offensichtlich nicht die Beziehung „ein Zehner/zehn Einer“.

Auch in der zuletzt dargestellten Situation versagt sie darin, 50 darzustellen, wenn nicht 5 Zehner vorliegen. Sie probiert, die 50 aus den Symbolen „5“ und „10“ zu schaffen, bemerkt aber, dass es nicht gelingt. Die Beziehung zwischen 50 und fünf Zehnern ist nicht sicher erfasst. Außerdem scheitert sie daran, einen Zehner durch zehn Einer zu herzustellen.

6. Rechnen mit zweistelligen Zahlen

Andrea kann die Aufgabe „40 + 8“ nach einer längeren Pause richtig lösen. Kurze Zeit vorher löste sie „10 + 8“ durch Zählen. In diesem Fall gibt sie an, nicht zählend gerechnet zu haben, sondern so wie bei der Fünferreihe vorgegangen zu sein. Zur Erklärung nennt sie „45, 53 und 25“. Ich versuche in Worte zu fassen, was sie wohl meinte: In der Fünferreihe kommen Zehner vor z. B. 20, 30 und 40. Im nächsten Schritt kommen 5 dazu, dann sind es 25, 35 und 45. Daraus habe sie geschlossen, dass 40 + 8 = 48 sein müsse. Andrea meint, dass ich es richtig gesagt habe.

Andrea gibt an, „56 – 10“ nicht rechnen zu können. Wenn die 56 durch Geld dargestellt ist, nimmt sie richtig einen Zehner weg und bestimmt das Ergebnis korrekt. Man erinnere sich, dass sie Veränderungen an Zahldarstellungen (Zufügen oder Wegnehmen von einer oder zwei Zehnerstangen) spontan richtig verarbeitete.
Auch Aufgaben wie „34 – 4“, „68 – 8“ und „59 – 9“ löst Andrea nicht unmittelbar. Die Untersucherin bittet sie, das Ergebnis zu erraten. Etwas verzögert nennt sie 30, 60 und 50.
Sie soll jetzt eine ähnliche Aufgabe selbst erfinden. Da sie sich unsicher zeigt, gebe ich die erste Zahl vor (67). Sie ergänzt zu „67 – 4“ und „rät“ das Ergebnis sei 60.
In einer der folgenden Stunden kann sie – im Anschluss an die Aufgabe „25 – 5“ – bei langen Denkpausen dazwischen entsprechende Aufgaben selbst finden. Sie kann nun auch zu 57 eine solche Aufgabe aufschreiben.
Die Formulierung „kommt ein glatter Zehner heraus“ versteht sie nicht. Sie urteilt, dass bei folgenden Aufgaben ein glatter Zehner herauskommt: „34 – 4“, „63 – 5“, „42 – 2“, „63 – 3“, „74 – 7“, nicht jedoch bei „86 – 6“. Ihre Begründung lautet, dass die 3, 4, 5, 6 und 7 glatte Zehner sind.

Kommentar zu 6.:
Komplexere Aufgabenstellungen erübrigten sich vorläufig. Andrea demonstriert bei diesen Aufgaben, dass sie die zweistelligen Zahlen nicht hinreichend verstanden hat, um damit rechnen zu können. Bei der eigentümlichen Begründung von „40 + 8 = 48“ belegt sie erneut, wie schon beim Zahlenordnen, dass diese Beziehung (Zerlegung der zweistelligen Zahl in Zehnerzahl und Einerzahl) nicht sicher verstanden ist. Darauf geht wahrscheinlich auch ihre Unsicherheit bei den Aufgaben der Art „68 – 8“ zurück. Man beachte aber, dass sie bei der Zahldarstellung durch Zehnersystemblöcke manchmal eine zweistellige Zahl („25“) in den Zehnerteil und Einerteil zerlegte („20 und 5“).

Auf der Ebene der geschriebenen Zahl kann Andrea die Veränderung um „10 mehr“ und „10 weniger“ nicht spontan herstellen. Im Umgang mit einer Zahldarstellung durch Zehnerstangen und Einerwürfel kann sie die Veränderung korrekt vornehmen und ihre Auswirkung teilweise unmittelbar benennen (Vgl. 5.).

Die Beziehungen zum vollen Zehner und zur um 10 größeren oder kleineren Zahl, die sie bei und mit der Zahldarstellung mit Zehnersystem-Blöcken realisiert, kann sie im Umgang mit den Zahlen *ohne quantitative Veranschaulichung noch nicht* herstellen.

6.2.7 Zusammenfassung und Empfehlungen

1. Andrea hat die Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 20 noch nicht in einer Weise erarbeitet, die in eine Abrufbarkeit dieser Fakten münden könnte. Ihre Art, Aufgaben unter Zuhilfenahme der Finger zählend zu lösen, bedeutet, dass sie die Zahlen durch konkrete Finger und (Standard-)Fingerkonstellationen ersetzt. Dies erinnert an die Beschreibung des perzeptuellen Zählschemas bei Steffe und Cobb, bei dem Zahlen in

Mengen verwandelt und zusammengefügt oder abgetrennt werden. Addieren bedeutet Hintereinanderfügen von Fingermengen, die zweite Menge wird einerweise angefügt. Subtrahieren bedeutet das Abtrennen einer Anzahl von Fingern von einer Fingerkonstellation. Andrea liest das Ergebnis dann teilweise unmittelbar am Fingerbild ab, teilweise bestimmt sie es durch Abzählen. Man hat den Eindruck, dass sie sich von diesen Handlungen noch wenig reflektierend entfernt hat: Wenn etwa die Gesamtfingermenge entstanden ist, sind die beiden Ausgangsmengen quasi verschwunden, darin aufgelöst.
Es wäre für Andrea hilfreich, Fingerkonstellationen im Hinblick darauf zu analysieren, welche Teile darin erkennbar sind. Diese Teile sind als Zahlen in der Zahl zu behandeln. Da sie Fingerbilder von Zahlen unmittelbar herstellen und in Zahlwörter übersetzen kann, besitzt sie Vorstellungen der Fingerbilder, die mit Zahlen assoziiert sind. Dies ist die Grundlage einer solchen Reflexion und die Voraussetzung dafür, dass sie in eine verinnerlichte (mentale) Betrachtung übergehen kann. Umgekehrt wird die Reflexion der Teile im Ganzen an diesen Bildern deren „Verinnerlichung“ fördern, weil sie sich dabei Strukturen aufzeigen kann.

Erfreulich ist, dass Andrea gelegentlich Ableitungen im Sinne von Nachbaraufgaben vornimmt. Sie ist also durchaus geneigt, solche „Vereinfachungen“ durch logisch-mathematische Schlussfolgerungen wahrzunehmen. Ableitungen aus Verdopplungen können sicher rasch mit ihr erarbeitet werden und ihr Erfolg geben. Auf Beziehungen zur 5 und zur 10 sollte besonders geachtet werden.

2. Auffallend sind Andreas Schwierigkeiten im Umgang mit Zahlwörtern. Das Vertauschen von Zehnerwert und Einerwert entgeht leicht ihrer Aufmerksamkeit, noch leichter passiert es ihr, dass sie „53“ sagt, wenn sie „35“ sagen will. Es ist denkbar, dass ihre in der Testdiagnostik festgestellte Schwäche bei der Reproduktion von Reihenfolgen von Wörtern an diesem Zahlverarbeitungsproblem mitwirkt.
Beim Zahlenschreiben hat sie gelernt, auf die Reihenfolge der Lexeme, die die Werte bezeichnen, zu achten: Dem Wort „vierundsiebzig“ entnimmt sie „vier“ und „sieben“ und schreibt 4 und davor eine 7. Diese Analyse genügt für das korrekte Zahlenschreiben.

Von einem verbesserten Zahlverständnis, durch das die unterschiedliche *quantitative* Bedeutung der 35 und 53 für Andrea besser hervortritt, wird auch ihre Unterscheidung der Zahlwörter positiv beeinflusst werden: Wenn etwa „35“ nicht bloß „fünf und drei davor“ und „53“ nicht nur „drei und fünf davor“ ist, sondern „30 und 5“ bzw. „50 und 3“, und „fünf mal 10 und drei dazu“ bzw. „drei mal 10 und fünf dazu“ und diese Aussagen auch eng an quantitative Vorstellungen gekoppelt sind.

Umgekehrt kann die Reflexion der Zahlwörter die Erarbeitung einer Zahlbedeutung unterstützen, dann müssen aber die Sprachelemente, die Zehner und Hunderter anzeigen, beachtet werden, nicht nur die Wert angebenden Lexeme („drei“ und „fünf“).

Bei der Verarbeitung von drei- und mehrstelligen Zahlwörtern benötigt Andrea besondere Hilfen, die andere Kinder nicht benötigen. Die Mühe, die die Zahlwörter ihr bereiten, muss ihre Umwelt durch besonders geduldige und freundliche Reaktionen aufwiegen.

3. Andreas Wissen über zweistellige Zahlen, das sie bei der Herstellung von Zahldarstellungen und bei der Übersetzung von Rechenaufgaben in Veränderungen an diesen Darstellungen schon ein wenig zeigt, blieb bisher von ihren Überlegungen beim Rechnen getrennt: Ergebnisse von 40 + 6 oder 46 – 6 oder 46 – 10 sind Andrea nicht unmittelbar klar, bzw. sie weiß gar nicht, wie sie es herausfinden soll.
   In einigen Situationen zeigt sie, dass sie sich die Herstellung der Zahldarstellungen mit Zehnersystemblöcken nicht vorstellen kann. Man wird also noch länger auf dieser Ebene arbeiten müssen.

   Dafür sprechen auch Fehler beim Wechseln von Zehnern und Einern (einen Zehner in 10 Einer wechseln oder 10 Einer nehmen, wenn man einen Zehner braucht). Die schwierige Beziehung von 1 Zehner zu 10 Einern ist von ihr noch nicht konstruiert. Deshalb sollte Andrea Einer-Mengen noch einmal bündeln und in Zehner-Einer-Mengen verwandeln, und auch das Umgekehrte. Das Wechseln/Umtauschen von Zehnern und Einern sollte im Kontext von Problemstellungen erfolgen und reflektiert werden. Nach einiger Zeit kann die Reflexion mit der Zahlebene verknüpft werden.
4. Andreas Rückkehr in die zweite Klasse war ein vernünftiger Schritt und eigentlich unumgänglich. Aber ihr Problem ist dadurch nicht behoben, weder hinsichtlich ihrer mathematischen Vorkenntnisse, die auch für die zweite Klasse noch nicht ausreichend sind, noch hinsichtlich des passiv-ängstlichen Verhaltens im Kontext der Schule, das sie an einer aktiven Auseinandersetzung mit dem Stoff hindert. Eine Einzelbetreuung für gewisse Zeit ist notwendig, um sie zu einer aktiven Auseinandersetzung mit Zahlen zu ermutigen und zu befähigen. Sie braucht eine Umgebung, die ihr Zuversicht gibt und jedes Gelingen beachtet. Sie braucht aber auch eine Hilfe, die *ihre* Mathematik gut versteht und begreift, woran sie gerade arbeitet.

6.3 Bericht über die Untersuchung von Franziska M.

Franziskas Eltern wurden im Januar 1997 durch eine Kinderärztin auf unser Projekt hingewiesen. Franziska besuchte zu diesem Zeitpunkt die dritte Klasse einer Schule mit Sonderklassen für Kinder mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten. Sie wurde von Februar bis April 1997 an sechs Terminen zu je einer Stunde hinsichtlich ihrer Mathematikkenntnisse untersucht.

6.3.1 Lebensgeschichte

Franziska ist als jüngstes von drei Geschwistern in großem Altersabstand von einer Schwester und einem Bruder im Sommer 1987 in Deutschland geboren. Sie wuchs zunächst in einer europäischen Großstadt (A.) auf und besuchte dort noch die erste Grundschulklasse an der Deutschen Schule. Dann kehrte die Familie wieder nach Deutschland zurück.

Franziska wurde vier Wochen zu früh geboren („eine schwere Geburt“, sagt ihre Mutter). Ihr Atmungssystem war noch unreif, so dass sie für zwei Wochen voll beatmet werden musste. Als Kleinkind sei sie jedoch nicht auffällig gewesen. Die Mutter gibt an, dass von Anfang an „viel über das Sprechen gelaufen sei“. Sie hatte im Kleinkindalter oft Mittelohrentzündungen.

6.3.2 Schulgeschichte

In A. besuchte Franziska zunächst einen internationalen Kindergarten. Da sie unter der Erschwerung der sprachlichen Verständigung sehr zu leiden schien, brachte man sie in einen deutschen Kindergarten.
Nach Aussage der Mutter hatte man im ersten Schuljahr den Eindruck, dass Franziska dem Unterricht gut folgen kann. Überraschend zog der Schulwechsel durch die Rückkehr nach Deutschland erhebliche Schulschwierigkeiten nach sich: Die neue Klasse hatte im ersten Schuljahr die Schreibschrift gelernt, Franziska hingegen Druckschrift. Die Lehrerin sah darüber hinaus „Motorikschwierigkeiten“ und „fehlende Balance“ (dies obwohl Franziska seit ihrem fünften Lebensjahr Ballettunterricht hat). In einem Mathematik-Test erhielt sie nach Angabe der Mutter die Note 5 bis 6. In dieser Situation war nicht nur Franziska, sondern auch ihre Mutter sehr verunsichert. Es wurden verschiedene Untersuchungen an ihr vorgenommen, da Frau M. nun der Verdacht kam, Franziska könnte bei der Geburt eine Hirnschädigung erlitten haben. Es wurden keine neurologischen Abweichungen gefunden. Eine psychologische Testuntersuchung ergab eine durchschnittliche Intelligenz (siehe folgenden Abschnitt).

Auf der Suche nach Rettung aus der bedrückenden Situation kamen Franziska ihre Rechtschreibschwierigkeiten zu Hilfe: Bei der Untersuchung an einer Schule mit Sonderklassen für Kinder mit Lese-Rechtschreibschwierigkeiten schrieb sie 29 von 30 Wörtern falsch, teilweise so, dass man sie nicht lesen konnte. Frau M. war damals über ihre schlechte Leistung sehr erstaunt und gibt zu bedenken, dass Franziska an diesem Tag fiebrig krank gewesen sei, man habe den Termin, der schwierig zu bekommen war, aber nicht absagen wollen. Franziska sei in dieser Zeit überhaupt „ganz fertig“ gewesen.
Franziska fand Aufnahme in der Schule. Sie gibt an, dass dort der Druck weg sei und sie sich ganz glücklich fühle. Bei der Abschlussbesprechung sagt Frau M. jedoch, dass die Schwierigkeiten in Mathematik inzwischen sehr belastend seien und zur Schulunlust führten.

Frau M. hielt die Rechtschreibprobleme immer für weniger gravierend als die Rechenprobleme. Bei der Untersuchung mit dem HAWIK-R waren ihre Leistungen im Rechnen jedoch durchschnittlich. Ihre Leistungen im Rechtschreiben sind inzwischen nicht mehr auffällig.

6.3.3 Testpsychologische Ergebnisse

Die testpsychologische Untersuchung mit dem HAWIK-R im Alter von 8;11 Jahren ergibt einen Gesamt-IQ in Höhe des Mittelwerts. Zwischen Verbal-IQ und Handlungs-IQ

besteht ein signifikanter Unterschied von 17 IQ-Punkten zugunsten der sprachgebundenen Intelligenz. Beide Teil-IQs sind jedoch durchschnittlich (Prozentränge von 23 und 65).
Ihre besten Leistungen zeigt Franziska im „Gemeinsamkeiten finden“ (sprachlogisches Denken, Prozentrang 84), aber auch im „Rechnerischen Denken“ (Prozentrang 75). Die Aufgaben werden in diesem Untertest in Form von Textaufgaben gestellt, teilweise nur mündlich, teilweise vom Kind mitlesbar. Es werden in den ersten Aufgaben „kleine“ Zahlen verwendet, weil es den Verfassern eher auf die Umsetzung der Textaufgabe in den richtigen Lösungsweg ankommt, als auf schwierige Anforderungen ans Kopfrechnen.
Ihre schwächsten Leistungen erbringt Franziska in den Untertests „Mosaik-Test“ und „Figurenlegen“ (jeweils Prozentrang 16). In beiden Untertests sind visuelle Analyse und Synthese und visuomotorische Koordination gefordert. In der Beachtung visueller Details (Untertest „Bilderergänzen“) erreicht sie Prozentrang 25.
Während sie soziale Abläufe gut rekonstruieren kann (Prozentrang 65 im Untertest „Bilderordnen“), fällt ihr die Reflexion von sozialen Regeln nicht so leicht (Prozentrang 25 im Untertest „Allgemeines Verständnis“). Das letztgenannte Ergebnis ist im Verbalteil, in dem sie sonst einen Prozentrang von mindestens 65 erreicht, ihr schwächstes.

Kommentar:
Franziskas kognitive Stärken liegen im sprachlichen Bereich und erstrecken sich auch auf das Verständnis von Textaufgaben, die sie offenbar versteht und für die sie auch eine richtige Lösung herbeiführen kann. Kognitive Schwächen zeigt sie in der visuell-räumlichen Verarbeitung, die die nonverbale Konzeptbildung beeinflusst. Man kann aufgrund dieses Befundes vermuten, dass die Erarbeitung der Zahlkonzepte und der Rechenverfahren, die davon abhängig sind, Mühe bereiten wird. Für die Verbindung der Zahlen mit quantitativen Darstellungen sollten ihr ausreichend Möglichkeiten geboten werden. In höheren Klassen werden dann ihre verbal-logischen Fähigkeiten auch in den Leistungen in Mathematik mehr zum Tragen kommen.

6.3.4 Allgemeine Beobachtungen

Franziska ist schmal und schlank, hat feines blondes Haar in einem Kurzhaarschnitt und ein längliches Gesicht mit lebhafter Mimik. Bei mehreren Treffen trägt sie eine Latzhose und wirkt dann in Verbindung mit dem Haarschnitt ein wenig jungenhaft.

Sie äußert sich spontan und frei. Doch wirkt sie beim ersten Termin aufgeregt. Nervosität führt laut ihrer Mutter dazu, dass sie viel redet und sich stark bewegt (am Pullover zuppelt, bemerkt die Mutter).
Einmal will sie die Mutter fragen, ob sie etwas Bestimmtes erzählen dürfe, oder ob das, was sie sagen will, in die Familie gehört. Ihre Mutter will aber, dass sie dies selbst entscheidet. Franziska bettelt eine Weile um die Hilfe ihrer Mutter bei der Entscheidung, doch diese bleibt hart. Da erzählt sie, dass ihr Bruder mit seiner Freundin in einem Bett schlafe und dass sie, Franziska, die beiden einmal gefragt habe, ob sie mal zusehen dürfe. Die Mutter weist auf das Alter des Sohnes hin und kritisiert Franziska nicht.

Sie charakterisiert sich als „Nesthäkchen“ und beschäftigt sich mit der Zukunft eines Nesthäkchens (als Oma sei man wohl kein Nesthäkchen mehr).

Ihre Mutter sagt, sie habe viele musikalische Interessen und stelle sich gerne selbst dar. Auf die letzte Aussage reagiert Franziska, die dabei ist, ein wenig betroffen.
In Abwesenheit Franziskas sagt die Mutter, sie habe ein starkes Einfühlungsvermögen, die Sorgen anderer „gingen durch sie hindurch“.
In Franziskas Klasse sind nur fünf Mädchen, zwei davon seien langweilig, zwei davon hätten viel Power, seien aber in ihrer Entwicklung Franziska weit voraus. Da so wenig Auswahl sei, habe Franziska diese beiden als Freundinnen gewählt. Frau M. ist über diese Wahl nicht glücklich und denkt, dass die Differenz der Interessen tatsächlich zu groß ist. Sie glaubt z. B., dass Franziskas Interesse an Tic-Tac-Toe kein echtes eigenes Interesse, sondern ihrem Bemühen um Anschluss an diese Mädchen zuzuordnen ist.
Die Lehrerin berichte, dass Franziska sich in der Klasse frei äußert, wenn ihr etwas nicht passe.
Nach kränkenden Erfahrungen, wie z. B. einer schlechten Note im Mathematiktest, weint Franziska, wenn sie nach Hause kommt. Auch Empörung und Schmerz über Verletzungen durch die Freundinnen brechen zu Hause hervor. Frau M. erscheint als Vertrauensperson, der sich Franziska öffnet.

Im Umgang mit der Untersucherin ist Franziska ungezwungen: Sie ahmt typische Verhaltensweisen nach („Wie-hast-du-das-herausgefunden“-Frage). Ob sie auswählen könne, bei wem sie Nachhilfe haben wird? Dann wolle sie zu Frau B. (eine Studentin, die anschließend die Einzelförderung von Franziska übernommen hat).

Bei der Arbeit an mathematischen Problemen wirkt Franziskas Aufmerksamkeit und Konzentration auf die Mathematik stets oberflächlich. Sie scheint sich einerseits auf Prozeduren zu verlassen, die sie sich angeeignet hat – oft Tipps, die man ihr gab –, andererseits auf spontane Einfälle. Immer wieder teilt sie Einfälle mit, die mit der Mathematik nichts zu tun haben. Darunter tritt das Interesse an der Gruppe Tic-Tac-Toe hervor. Sie sagt Texte auswendig auf und weiß zu berichten, dass darin wirkliche Erfahrungen der Sängerinnen festgehalten sind. In einer späteren Stunde kommentiert sie die inzwischen veröffentlichten Details aus deren Leben, allerdings nur den Selbstmord des früheren Ehemannes. Dafür könne man nicht die Lee beschuldigen.

An einem Tag, an dem sie eine unzensierte (weil schlechte) Mathematikarbeit zurückbekam, kommt sie nachmittags zu uns. Nach kurzer Zeit bittet sie darum aufzuhören, da Mathematik ihr bis oben stehe. Sie will dann ein Rollenspiel machen, in dem sie die Klassenbeste ist, und die Untersucherin ein Mädchen, das nicht rechnen kann. Dabei stellt sie sehr einfache Aufgaben und bittet die Untersucherin mehrmals, Fehler beim Lösen zu machen. Sie spricht davon, dass sie Kopfweh hat – auch das schwache Mädchen im Spiel hat Kopfweh – ohne dies aber explizit dafür einzusetzen, die Untersucherin zum Abbruch der Arbeit zu bewegen. Sie bittet darum, dass der Mama nicht erzählt wird, dass sie aufhören wollte.

Auch in der letzten Stunde möchte sie ein Rollenspiel machen: Die Untersucherin soll die Rolle eines Schülers übernehmen, der nicht lesen kann und der in der Schule regelmäßig versagt, obwohl er mit der Mutter übt. Franziska spielt die Mutter. Eines Tages gesteht die Mutter, dass sie selbst nicht lesen kann. In einem Geschäft beobachten sie anschließend, wie der Kaufmann seine „Lesebrille“ sucht. Sie suchen sofort einen Optiker auf und besorgen sich eine solche Lesebrille. Damit kann der Junge in der Schule super lesen und wird am selben Tag daraus entlassen.[7] Franziska hat sich in dieser Stunde wiederholt darum bemüht, dass wir diesen Sketch nachspielen und ließ sich kaum auf später vertrösten.

Kommentar:
Franziska ist ein spontanes, offenes und sensibles Mädchen, die mit ihren Themen herauskommt und offenbar auch herausdarf. Sie hat vermutlich recht, wenn sie ihre Situation als Nesthäkchen betont: Sie ist mit vier Großen aufgewachsen, die sich ihr vermutlich liebevoll zugewandt haben, aber auch die Geschwister durchlebten stets andere Lebensphasen als sie. In den Augen der kleinen Schwester waren sie wahrscheinlich vollkommen kompetent.
Durch ihre Offenheit führt sie der Untersucherin vor Augen, wie viele emotional bedeutende Themen eine Neunjährige „bearbeitet“, die gewissermaßen hereinspazieren, wenn sie bei einem mathematischen Problem hängen bleibt. Man fragt sich, wie ein Kind wie Franziska die Anforderungen der Mathematik als spannende Herausforderung erleben könnte.
In ihrem Spiel zeigt sie, dass sie unter ihren schlechten Leistungen leidet und zur Entlastung in der Phantasie in andere Rollen schlüpft. Dass sie drängt ins Spiel zu wechseln, zeigt wie schwer erträglich der Misserfolg für sie ist. Sie erwartet Hilfe von außen, was sich auch darin ausdrückt, dass sie gerne Nachhilfeunterricht haben möchte. Ihre Wahl sehr einfacher Aufgaben im Spiel mit der Untersucherin bringt u. U. eine geringe Einschätzung des eigenen Könnens zum Ausdruck: Nur bei diesen einfachen Aufgaben ist sie sich in der Rolle der Lehrerin sicher. Auffallend ist, dass sie die Untersucherin in ihre Phantasie einbezieht.

6.3.5 Allgemeine Beobachtungen bei der Arbeit an mathematischen Problemen

Man hat jedoch nicht nur den Eindruck, dass viele Einfälle (mit Bezug auf Themen, die für Franziska zur Zeit bedeutsam sind) die Konzentration auf die Mathematik erschweren. Franziskas Analyse einer mathematischen Problemstellung ist spontan stets oberflächlich. Dies ist vermutlich nicht nur Ausdruck einer Impulsivität (erst handeln, dann denken), sondern eines kognitiven Problems: Die selbständige Strukturierung eines Problems im Sinne der Klärung der Fragestellung, der Planung von Lösungsschritten, Kontrolle/Steuerung ihrer Ausführung und Reflexion des Ergebnisses, fällt ihr tatsächlich schwer. Es ist der Untersucherin unmöglich zu entscheiden, inwieweit ihr Aufwachsen unter erwachsenen Personen, die stets bereit waren, der lebhaften und liebenswerten Nachzüglerin Tipps zu geben, in Verbindung mit ihren gut entwickelten und favorisierten kommunikativen Fähigkeiten, dazu beigetragen haben, diese kognitive Schwierigkeit aufrecht zu halten. Wir geben einige Beobachtungen wieder:

[7] Der Sketch wurde vermutlich in der Schule vorgestellt.

Beobachtung 1:
Franziska soll 52 Steine geben. Es stehen Beutel mit je zehn Steinen und einzelne Steine zur Verfügung. Sie wählt fünf Zehnerbeutel und zwei einzelne Steine. Jetzt soll sie davon zehn Steine wegnehmen. Sie nimmt die zwei Einzelnen und greift nach einem Beutel, an dem sie weitere Einzelne abzählt. Dann unterbricht sie sich und legt einen Beutel weg. Sie bestimmt richtig, wie viele Steine jetzt da liegen: zweiundvierzig. Anschließend beginnt sie spontan über Tic-Tac-Toe zu sprechen.
Bei der Aufgabenstellung, die Zahl zu schreiben, die um zehn kleiner ist als eine gegebene Zahl, oder bei der Aufgabenstellung, die verlangt von 14 auf 24 zu ergänzen, kann sie nicht unmittelbar antworten, sondern findet die Lösung jeweils zählend (siehe dazu Zahlverständnis).

Kommentar:
Hier zeigt sich einerseits ihre Impulsivität, aber auch die Korrektur der umständlichen Lösung nach einer Verzögerung. Auf der Ebene der Zahldarstellung durch Zehnerbündel und Einer, die sie sicher herstellt, nutzt sie also letztlich den Aufbau aus Zehnern und Einern und interpretiert „zehn weniger“ durch „einen Zehnerbeutel weniger“. Aber es ist deutlich, dass sie ihre Handlung nicht in ihrer Gesamtheit reflektiert und mit der Zahl-ebene verknüpft. Eine solche Reflexion hätte folgenden Inhalt: „ Zehn weg von 52, das bedeutet einen Zehner von fünf Zehnern wegnehmen; bleiben noch vier Zehner, also zweiundvierzig (42). Das heißt auch, dass 42 die Zahl ist, die um zehn kleiner ist als 52“.
Diese Schwierigkeit Beziehungen zu realisieren, kann sowohl kognitive als auch motivationale Ursachen haben. Der spontane Wechsel des Themas zeigt jedenfalls, dass es sie nicht besonders interessiert.

Beobachtung 2:
Franziska soll möglichst geschickt herausfinden, wie viele Häschen auf einem Blatt abgebildet sind. Diese Aufgabe erscheint ihr mühevoll und sie hat nicht viel Lust, sich daran zu machen. Sie versucht, in Reihen hochzuzählen (auf der rechten Seite des Blattes von unten nach oben). Sie sieht dabei Schwierigkeiten, die sie so ausdrückt: Man könnte Zahlen doppelt zählen. Nach längerer Zeit, in der ihr keine Möglichkeit einfällt der Schwierigkeit zu begegnen, weist die Untersucherin auf die Stifte hin, die auf dem Tisch liegen. Sie nimmt den Stift in der Weise zu Hilfe, dass sie an jedes Häschen fortlaufend eine Zahl schreibt (sie nummeriert).
Dann fragt sie die Untersucherin, wie viele es sind. Diese fordert Franziska zu einer Schätzung auf. „Hundert“, schätzt sie. R. S.: „Ziemlich gut.“ Franziska: „Mehr oder weniger?“ R. S.: „Weniger“. Franziska: „90?“ R. S.: „Mehr.“ Franziska: „99?“ R. S.: „Weniger.“ Franziska: „95?“ R. S.: „Mehr.“ Franziska: “98?“ R. S.: „Weniger“, usw.

Kommentar:
Abgesehen von der Besonderheit ihrer Lösung unter dem Gesichtspunkt ihres Zahlmodells (sie bildet die Menge auf die Zahlenreihe ab, nummeriert die Elemente) fällt auf, dass sie das Problem des „Doppeltzählens“ nicht selbständig lösen kann.
Zugleich fällt auf, dass sie versucht, die Lösung zu erhalten, indem sie die Untersucherin einbezieht, womit sie aber die Aufgabenstellung vollkommen abwandelt. Als Hypothese ergibt sich daraus, dass sie bei Problemen oder bei Unsicherheit bei anderen Per-

sonen Orientierung und Hilfe sucht, indem sie nach Hinweisen schaut, ob sie richtig oder falsch geantwortet hat, oder indem sie die andere Person kommunikativ einbezieht und deren Kompetenz mitbenutzt.

Beobachtung 3:
So auch in folgender Situation: Die Aufgabenstellung lautet, unter eine geschriebene Zahl die Zahl zu schreiben, die um zehn kleiner ist. Franziska ist sich dabei nicht sicher bzw. löst durch Zurückzählen um zehn (siehe Zahlverständnis). Dann schlägt sie vor, dass die Untersucherin jeweils zwei Lösungen aufschreiben soll, von denen eine die richtige ist, und dass sie eine davon auswähle. Bei ihrer Wahl stützt sie sich z. B. auf die Beobachtung, dass die Untersucherin vor dem Hinschreiben der einen Zahl lange überlegt hat.

Beobachtung 4:
Beim Ordnen von Zahlkärtchen nach der Größe macht sie, obwohl sie sorgfältig vorzugehen scheint, sowohl bei der Gruppe der zweistelligen Zahlen als auch bei der Gruppe der dreistelligen Zahlen, Fehler. Die erste Serie von Karten ordnet sie so:

51	52	62	64	65	67	68	74	84	60	61

Die zweite Serie ordnet sie so:

74	674	347	374	437	473	734	743

Als die Untersucherin in möglichst neutralem Ton bittet zu überprüfen, ob auch alles richtig ist, korrigiert sie sich.

Kommentar:
Das heißt, sie kann einen allgemeinen Kontrollhinweis für eine gezielte Korrektur nutzen, nimmt eine (Über-)Prüfung der Lösung aber nicht spontan vor. (Inwiefern dies mit dem Anforderungscharakter der Aufgabe zusammenhängt, muss und kann an dieser Stelle nicht entschieden werden.)

Beobachtung 5:
Folgende Aufgabe erhält Franziska schriftlich:

> Familie Müller ist zusammen 100 Jahre alt.
> Kai ist 9 Jahre alt.
> Seine Schwester Inge ist 3 Jahre älter.
> Sein Bruder Moritz ist 5 Jahre jünger als Inge.
> Der Vater ist dreimal so alt wie Inge.
> Berechne das Alter der Mutter.[8]

[8] Es wurde nicht erwartet, dass Franziska diese schwierige Aufgabe (aus einem Aufnahmetest für den Besuch einer weiterführenden Schule) selbständig richtig lösen kann. Wir wollten wissen, wie sie bei dieser komplexen Aufgabenstellung verfährt.

Franziska liest den Aufgabentext richtig vor. Ihre ersten Überlegungen gehen in folgende Richtung: Vielleicht müsse man 100 minus irgendwas rechnen. Sie addiert 5 plus 3 plus 9 gleich 17. Der Vater dreimal so alt, also 20 zusammen.
Die Untersucherin unterbricht mit der Frage: „Wie alt ist Inge?“ Franziska: „Drei“.
R.S.: „Schau noch einmal, was in der Aufgabe steht.“ Franziska: „Oh, älter! Sie ist 12.“
Sie schreibt jetzt das Alter der Kinder auf: 9, 12, 7. Das Alter des Vaters sei 15, weil „*drei*mal“ so alt wie Inge.
Ein Hinweis, an dessen Wortlaut sich die Untersucherin nicht mehr erinnert, führt zur Korrektur des Verständnisses von „dreimal“. Franziska addiert jetzt 12 + 12 + 12 im Kopf und erhält richtig 36.
Jetzt sagt sie: „Jetzt zusammenrechnen, oder?“
Wieder erhält sie den Hinweis, bei Unsicherheit die Aufgabe nochmal zu lesen.
Nach dem Lesen sagt sie: „Ich weiß. Wenn ich zusammenrechne, ist das nicht das Alter der Mutter. Ich muss dann gucken, wie viel bis 100 fehlt.“
Beim Zusammenrechnen der Altersangaben weiß sie nicht, wie die Zahlen richtig untereinander geschrieben werden.
Anschließend ergänzt sie richtig von 64 auf 100, kann aber nicht darlegen, wie sie das Ergebnis erhalten hat. Sie vermutete zuerst 31. Sie habe das Ergänzen in einem Schritt vorgenommen.

Kommentar:
Franziskas erster Gedanke trifft die Struktur der Problemstellung sehr gut. Trotz ihrer spontan richtigen Idee wäre sie ohne Beistand gescheitert. Zum einen aufgrund einer oberflächlichen Analyse des genauen Aufgabentextes. Der zweite Grund ist das Fehlverständnis des Begriffes „dreimal so alt“, das sie einmal in plus 3 übersetzt, später in Alter von Inge plus 3. Sie bemerkt an dieser Stelle nicht, dass hier eine Schwierigkeit verborgen liegt.
Unter Umständen war das Eingreifen der Untersucherin beim folgenden Schritt überflüssig und Franziska hätte nach dem Addieren das Ergänzen auf 100 selbständig angeschlossen. Es wäre aber nicht überraschend, wenn sie die Aufgabe nach dem Addieren nicht weiter bearbeitet hätte, weil sie keine selbständige abschließende Überprüfung ihrer Lösungen durch den Vergleich mit der Aufgabenstellung vornimmt.
Nach dem erneuten Lesen der Aufgabenstellung bestätigt sich, dass sie die Struktur der Problemstellung richtig erfasst hat.
Bemerkenswert ist auch, dass sie nicht erläutern kann, *wie* sie herausgefunden hat, wie viele von 64 bis 100 fehlen.

6.3.6 Empfehlung 1

Franziska schenkt mathematischen Aufgaben nur kurze Aufmerksamkeit und überblickt, prüft und reflektiert ihr Vorgehen anschließend nicht. Eine solche Reflexion ist jedoch für das Herausarbeiten von Konzepten nötig. Franziska benötigt Hilfen, die es ihr ermöglichen, impulsives Verhalten in Bezug auf mathematische Probleme abzubauen. Es gibt Strukturen der Problembearbeitung, die mit ihr eingeübt werden können: einen Plan entwerfen, mit der Aufgabenstellung vergleichen, vielleicht schriftlich festhalten usw.

Die sprachliche Selbstanleitung und selbständiges Kontrollverhalten sind ebenfalls bedeutsam.

Franziska sollte keine „Tipps“ im Sinne von prozeduralen Hilfen erhalten wie z. B. „Bei so einer Aufgabe machst du am besten das und das.“ Sie braucht Hilfe, ein anfängliches Chaos im Kopf oder eine anfängliche Unsicherheit im Verständnis auszuhalten, allmählich selber Ordnung herzustellen und selbständig Sicherheit zu gewinnen.
Viel eher als Tipps braucht sie Anstöße, ein Interesse an mathematischen Fragen zu entwickeln.

Wenn Franziska eine Aufgabenlösung nicht erklären kann, sollte sie Material oder eine Zeichnung zu Hilfe nehmen, um die Erklärung zu konstruieren. Was sie nicht erklären kann, kann sie nicht überprüfen. Vielleicht kann man ihre Neigung zu Rollenspielen einbeziehen, indem man ihr den Auftrag gibt, einem Kind das Ergebnis zu erklären, das es nicht herausfinden konnte oder das ein anderes Ergebnis erhalten hat.

6.3.7 Zahlverständnis und Rechnen[9]

Zahlverständnis und Rechnen im Zahlenraum bis 20

Franziska hat ein Fingerbild für jede Zahl von 1 bis 20. Das Bild für Zahlen zwischen 10 und 20 beruht auf einer Zerlegung der Zahl in 10 plus den Rest: 13 wird dargestellt durch drei Finger, wobei Franziska im Sinn behält, dass noch zehn dazugehören.

Beim Rechnen im Zahlenraum bis 20 zieht Franziska ihre Finger heran. Sie rechnet stets mit Bezug zur 10, sowohl bei Addition wie auch bei der Subtraktion. Sie verwendet dabei Zahlzerlegungen im Zahlenraum bis 10, die sie weitgehend automatisiert beherrscht, und das Wissen über die Zehn in den Zahlen zwischen 10 und 20.
Dennoch wird die Analogie zwischen dem Zahlenraum bis 10 und Zahlenraum von 10 bis 20 nicht benutzt (siehe Beispiele zu 16 – 5 und 20 – 9).
Andere Rechenstrategien, wie z. B. Nachbaraufgaben und Berücksichtigung der Beziehung der 9 zur 10, benutzt sie nicht.

Dazu einige Beispiele:
Franziska weiß sofort die Antwort auf die Aufgabe: „Franziska hat in einer Tasche 10 Bonbons. In einer anderen Tasche hat sie noch ein paar. Insgesamt sind es 17 Bonbons. Wie viele sind in der zweiten Tasche?“

13 + 4 = 17   Franziska zeigt drei Finger und fügt vier hinzu. Sieben Finger bedeuten 17.

[9] In diesem Abschnitt beschreiben wir Franziskas Leistungen im Zahlverständnis und Rechnen in den beiden Zahlenräumen bis 20 und bis 100, da sich dort Lücken zeigten. Ihr Vorgehen beim Zählen, Zahlenschreiben und -lesen war unauffällig. Die Empfehlung 2 (Abschnitt 6.3.8) bezieht sich auf die im folgenden Abschnitt dargestellten mathematischen Leistungen und ergänzt die Empfehlung 1 (Abschnitt 6.3.6).

7 + 6 = 13 Bei sieben Fingern sind noch drei übrig, und drei sind sechs. Jetzt sind drei Finger zu sehen, also 13.

8 + 9 = 17 Die vorausgehende Aufgabe hieß 8 + 8. Ihr Ergebnis wusste Franziska auswendig.
Jetzt rechnet sie so: Acht Finger, das heißt noch zwei sind übrig. Und fünf sind zusammen sieben (F. zeigt die 5 Finger) und zwei dazu sind neun. Jetzt sehe ich sieben Finger, also heißt das Ergebnis 17.

Während Franziska die Aufgabe 1 + 5 = 6 unmittelbar löst, bearbeitet sie 11 + 5 verzögert und nimmt die Finger zu Hilfe.

15 – 5 löst sie ebenfalls sofort, nicht jedoch 16 – 5 (mit Fingerhilfe).

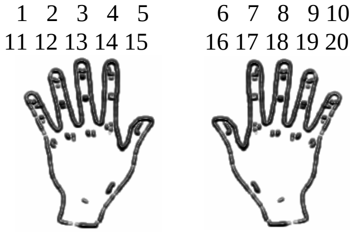
12 – 4 = 8 F. zeigt zwei Finger an einer Hand, um die 12 anzuzeigen. Sie klappt diese weg. Dann klappt sie an der anderen (rechten) Hand noch zwei Finger weg (kleiner Finger und Ringfinger). Aus dem Resultat schließt sie das Ergebnis.

20 – 9 = 11 F. zeigt zehn Finger. Von rechts her zählt sie neun Finger ab. Bleibt noch einer. Also ist die Antwort elf.

13 – 5 = 8 Bei dieser Aufgabe lag ein Bild der 13 aus zwei Würfelfünfen und einem Dreierbild vor. Franziska benutzt das Bild nicht zur Lösung.

Kommentar:
Franziska verbindet die Verwendung von Fingerbildern mit einer Rechenstrategie, die sich auf die Zehn bezieht und Zahlzerlegungen benutzt. Sie versteht Plus als Hinzufügen und Minus als Wegnehmen oder Zurückzählen am Medium ihrer Finger (eines geeigneten Fingerbildes). Bis auf Ausnahmen fügt sie aber Finger nicht einzeln hinzu oder nimmt sie weg.

Einige Beobachtungen legen nahe, dass sie die Finger (teilweise) im Sinne eines Zwanzigerstreifens benutzt, der mit Zahlen beschriftet ist. Drei Finger der linken Hand können sowohl drei als auch dreizehn bedeuten, abhängig vom jeweiligen Kontext:



Mit diesem Modell kann erklärt werden, weshalb es ihr leicht fällt 15 – 5 sofort zu lösen, 16 – 5 jedoch nicht: Das Bild der 15 ist eine volle Hand, das sind fünf; das Bild der 16 sind sechs Finger. Im ersten Fall ist es für Franziska leicht, 5 als Teil der 15 zu se-

hen. Es entspricht ihrer Zahldarstellung durch die Finger: Die Zahlen 15 bis 11 müssen weggenommen werden. 16 – 5 geht nicht so leicht, wenn man nicht die 5 als Teil der 16 sehen kann, sondern minus 5 als Wegnehmen von fünf Zahlen von hinten her.
Besonders nahe liegend ist diese Modellannahme bei ihrer Lösung von 20 – 9: Sie sieht die 10 Finger, die sie sich zeigt, offenbar nicht als 10, von denen sie nun 9 wegnehmen soll, sondern als die Zahlen von 11 bis 20, von denen sie die letzten 9 Zahlen wegnehmen will. Das ist ein interessanter Hinweis darauf, dass ein Kind sehr wohl wissen kann, dass "10 und 10 gleich 20", ohne beim Rechnen die „Zahlen von 11 bis 20" als „10" zu verstehen oder die „20" in „10 und 10" zu zerlegen.

Bei der Bewertung der Verwendung der Finger durch Franziska ist darüber hinaus zu berücksichtigen, dass dies eine Steuerungshilfe sein kann, die bei einem mehrschrittigen Lösungsweg dadurch Entlastung bringt, dass das Zwischenergebnis sichtbar ist und am Bild auch rekonstruiert werden kann, wie viele schon weggenommen oder zugefügt wurden.

Zahlverständnis und Rechnen im Zahlenraum bis 100 und bis 1000

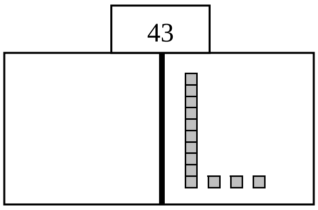
Zehner und Einer in zweistelligen Zahlen:
Franziska weiß, dass 47 in 40 und 7 zerlegbar ist und rechnet Aufgaben, die dieses Wissen verlangen, rasch.
Aber sie kann nicht unmittelbar beantworten, wie viele Zehnergruppen sich bei 47 Elementen ergeben: Als sie gefragt wird, wie viele Schachteln, die jeweils Platz für zehn Steine bieten („Zehnerschachteln"), ganz gefüllt werden, wenn man 47 Halbedelsteine in solche Schachteln verteilt, denkt sie an 40 und 7, kann aber keine Antwort auf die Frage geben.
Erst als einige Schachteln hingelegt sind und sie „zehn, zwanzig, dreißig, vierzig" gezählt hat, entnimmt sie, dass es vier Schachteln sind. Die Wiederholung der Aufgabe mit 75 Steinen kann sie nicht spontan lösen, sondern benötigt dieselbe Prozedur.

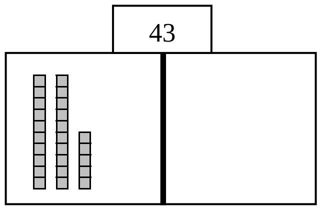
Die Aufgabenstellung „Schreibe die Zahl, die um zehn kleiner ist", wobei eine zwei oder dreistellige Zahl schriftlich geboten ist, versteht sie als „um zehn zurück" zählen oder gehen.
Als die Zahl 47 gegeben ist, schreibt sie als die um 10 kleinere Zahl „38". Sie ist zählend vorgegangen. Als 59 gegeben ist, schreibt sie 47.
Ist eine Zahl durch Zehnerbündel und Einzelne aufgebaut, wird die Aufgabe, zehn wegzunehmen (teilweise verzögert, aber selbständig) durch Wegnahme eines Zehnerbündels gelöst.

Aufgabe: *Franziska hat 14 Perlen. Für ein Armband braucht sie 24 Perlen. Wie viele muss sie noch besorgen?*
Franziska findet das Ergebnis mit Hilfe der Finger. Das geht sehr rasch, sie beschreibt ihren Lösungsweg so: Sie zeigt vier Finger, und sagt: „Da sind noch 6 übrig, und dann noch 4, das sind zusammen 10".

Größenvergleich von Zahlen:
Als sie ihr Urteil, dass 74 größer ist als 68, begründen soll, sagt sie: „Weil der Sechziger Zehner vor dem Siebziger kommt“.
Zur Begründung ihres Urteils über 734 und 473 sagt sie: „weil diese Zahl um drei Zehner über vier hinausgeht“.
Die Frage, welche Bedeutung die Reihenfolge der Ziffern in der Zahl hat, kann sie nicht beantworten. Sie benennt nicht die Stellenwerte.

Ergänzungsaufgaben:
Folgende Anordnungen, die mit Zehnersystem-Material auf einem Tablett ausgelegt sind, werden Franziska nacheinander vorgelegt. Die Aufgabenstellung lautet jeweils: „Auf dem Tablett soll die Zahl dargestellt sein, die oben steht. Lege also soviel dazu, dass 43 dargestellt ist.“





Bei der ersten Anordnung geht Franziska so vor, dass sie drei Zehnerstangen dazulegt, „um zuerst mal 40 zu bekommen“. Dann bemerkt sie, dass sie schon fertig ist.
Bei der zweiten Konstellation legt sie zwei Zehnerstangen dazu und sagt: „15, 25, 35, 45 – aber das ist zuviel!“ In einem zweiten Anlauf legt sie erst eine Zehnerstange (Kommentar:„35“), dann einen Fünfer (Kommentar:„40“), dann noch drei Würfel.

Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100:
Diese Aufgaben löst Franziska so, dass sie die Zahlen im Geiste untereinander stellt und an diesem Bild das entsprechende schriftliche Verfahren durchführt. Dabei kommt es zu Fehlern.

71 – 14 = „eins bis vier sind drei, aber eigentlich muss man unten anfangen.
Vier bis elf sind sieben usw.“
Sie ist unsicher, was mit dem Übertrag geschieht.

Als sie 53 – 25 rechnen will, schreibt sie die 25 über die 53 und führt auch an diesem Bild den Subtraktionsalgorithmus durch.

Beim Rechnen von 70 – 6 gibt Franziska an, die Finger zu Hilfe genommen zu haben und zwar ohne hinzusehen. Sie habe zehn Finger ausgestreckt, sechs Finger weggeklappt und gewusst, wie viele noch übrig sind. Sie gibt das richtige Ergebnis an.

Kommentar:
Franziska hat die Zehnerbündelung als Grundlage der mehrstelligen Zahlen noch nicht konstruiert, auch wenn sie Zahlen durch Zehnerbündel und Einzelne darstellen kann. Ihre Verständnislücken zeigen sich, wenn sie nicht angeben kann, wie viele Zehnergruppen sich aus 47 Einzelnen ergeben, wenn sie nicht realisiert, dass „um zehn kleiner“ be-

deutet, dass die Zahl der Zehner um einen verringert wird oder wenn sie von 14 auf 24 durch Ergänzen auf den vollen Zehner ergänzt.

Folgende Beziehungen bei zweistelligen Zahlen fehlen:
47 das sind vier mal Zehn (10) und sieben (Einzelne).
47 die 4 gibt die Zahl der Zehnergruppen, die 7 steht für sieben Einzelne.
47 ist ein Zehner bzw. 10 Einer mehr als 37.
Einer *Zahldarstellung* durch *Zehnersystem-Material* kann sie leicht entnehmen, wie das Hinzufügen von Zehnerstangen die dargestellte Zahl verändert (sie entnimmt „25, 35, 45“). 5 mit zwei Zehnerstangen (20) sind 25, mit drei Zehnerstangen (30) sind es 35, mit vier Stangen (40) sind es 45.
Ist Franziska dagegen nur mit *Zahlen* konfrontiert, sieht sie darin offensichtlich *nicht* Zehner-Einer-Kombinationen: sie entnimmt den Zahlen 14 und 24 nicht, dass sie sich nur in der Zahl der Zehner unterscheiden. Hinzukommt, dass sie zwischen „zehn mehr/weniger als“ oder „plus/minus 10“ einerseits und „ein Zehner mehr/weniger“ andererseits nicht übersetzt.

Franziska versteht die Zahl 47 als „vierzig und sieben“ oder „40 und 7“ oder „40 + 7“.
Um damit zu rechnen, zeigt sie sieben Finger und behält 40 in ihrem Sinn. Sie berücksichtigt ferner, dass nach dem „Vierziger-Zehner“ der „Fünfziger-Zehner“ kommt und davor der „Dreißiger-Zehner“. Diese Formulierung, die sie bei der Begründung des Zahlvergleiches gewählt hat, ist ein sehr treffender Ausdruck des Zahlverständnisses aufgrund der Zahlenfolge, die sie bereits in Gruppen eingeteilt hat (Zwanziger, Dreißiger usw.). Sie hat diese Zwanziger-, Dreißiger-Zehner aber *noch nicht* mit zehn (10) oder mit einem Zehner identifiziert.

Beim Rechnen bildet Franziska eine solche Zehnergruppe (z. B. den „Sechziger-Zehner“) auf ihre zehn Finger ab. Das geschieht beispielsweise, wenn sie 70 – 6 löst, indem sie zehn Finger (unter dem Tisch) ausstreckt, sechs davon wegklappt, die verbleibenden Vier (ohne hinzusehen) „abliest“ und daraus das Ergebnis 64 ableitet. Aber sie „begreift“ ihr Vorgehen noch nicht als Zerlegung der 70 in 60 und *10*, eher als Zerlegung in 60 und *die zehn Zahlen von 61 bis 70*. Darauf deutet hin, dass sie andere Aufgaben, die sie auf entsprechende Art lösen könnte, durch Rückwärtszählen löst.

Für Franziskas Ausweichen auf das schriftliche Rechnen dann, wenn das Fingerrechnen nicht möglich ist, sind zwei Gründe denkbar: erstens die Art und Einschränkung des Zahlverständnisses; zweitens die Schwierigkeit der mentalen Steuerung bei mehrschrittigen Prozeduren.

6.3.8 Empfehlung 2

Um die Lücke im Zahlverständnis zu schließen, müssen Zehnerbündel zum Einsatz kommen. Es muss darauf geachtet werden, dass zwischen der Ebene der Zahldarstellungen durch Zehnerbündel und Einzelelemente und der Ebene der geschriebenen und gesprochenen Zahl eine ausreichende Beziehung hergestellt wird.

Die Bedeutung von plus/minus Zehn (Hundert) sollte ausgehend von der Ebene *konkreter Zahldarstellungen* entwickelt werden. Franziska hat auf der Darstellungsebene teilweise entsprechendes Verständnis gezeigt, an das angeknüpft werden kann. Es ist darauf zu achten, dass die Erkenntnisse anhand der Zahldarstellungen mit Zehnersystem-Material eine Verknüpfung mit Franziskas Zahlvorstellung auf Grundlage der Zahlreihe erhalten, indem Franziska sich versichert, dass *38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47* (aber auch die Zahlen 61 bis 70, oder 60 bis 69) wirklich *zehn* Zahlen sind.

Man hat den Eindruck, dass ein gewisses Nachdenken über ihr Vorgehen und einfache Verbalisierungen von Teilschritten („70 das sind 60 und 10; die 60 lasse ich in Ruhe und rechne einfach 10 – 6 “) sie von der Verwendung der Finger unabhängiger machen würde.

Franziskas Schwierigkeiten bei Planung und Steuerung von Rechenprozeduren werden u. U. durch die Entwicklung von Zahlvorstellungen aufgrund der Zahldarstellungen durch dezimale Bündelungen schon verbessert. Auf diese ihre Schwierigkeit muss jedoch geachtet und weitere Hilfe evtl. entwickelt werden. Siehe Empfehlung 1.

7 Zahlverständnis im Unterricht

> Number is not something with an independent objective existence that children happen to have a particular conception of. Instead, the study of number is the study of something in evolution, something in the process of construction. Children don't conceive number, they make it. And they don't make it all at once or out of nothing. There is a long process of building intellectual structures that change and interact and combine. (PAPERT in FORMAN & PUFALL, 1988, 4).

Wenn ein Kind in die Schule aufgenommen wird, ist es Zahlen bereits in vielerlei Situationen begegnet. Es kann schon ein Stück der Zahlwörterfolge aufsagen, es kann kleine Mengen abzählen, es kennt Hausnummern, Telefonnummern, Ziffern und Zahlbilder auf Spielkarten und Spielwürfeln und es kann auf Spielfeldern um eine bestimmte Anzahl Felder vorrücken. Vielleicht kann es auch Münzen anhand der aufgeprägten Zahlen unterscheiden usw. Dies alles sind *Aspekte* des Zahlbegriffs.
Dennoch fällt es auch Erwachsenen sehr schwer zu sagen, was eine Zahl ist. Zur Zahl "sieben" fällt ihnen vielleicht zuerst die Gestalt der Ziffer "7" ein, dann vielleicht die Sieben als Anzahl der Wochentage, dann vielleicht, dass 7 um 2 mehr ist als 5 usw. Doch die Zahl 7 ist nicht dasselbe wie die Ziffer "7". Sie ist auch nicht der schwarze Stab von den Cuisenaire-Stäben, auch nicht die sieben Äpfel auf dem Teller. Manche Leute denken, Zahlen seien das, was man auf Papier schreibt. Sie wissen, dass man beliebig große Zahlen mit den zehn Ziffern von 0 bis 9 schreiben kann, und dass man mit geschriebenen Zahlzeichen so rechnen kann als wären dies die Zahlen. Wir können Zahlen "an und für sich" nicht direkt erfahren. Jede Aussage über sie meint immer nur einen der soeben genannten oder noch nicht genannten Aspekte.
Was soll der Schulunterricht zum Zahlbegriff beisteuern? Generell all das, was beispielsweise über die Zahl sieben im Abschnitt 2.1.2 angedeutet wurde.

7.1 Das Lernen der Zahlwortreihe

In der Grammatik unterscheiden wir transitive Verben wie "essen", die auf Objekte zielen (einen Apfel, ein Stück Brot) und intransitive Verben wie "schlafen", die sich nicht auf ein Objekt beziehen. Das Wort "zählen" kann transitiv und intransitiv verwendet werden. Man kann Dinge zählen (abzählen) oder auch bloß zählen, also ein Stück der Zahlwortreihe aufsagen. Letzteres ist eine Voraussetzung für ersteres. Kinder wollen schon sehr früh beides lernen. Manche Kinder lernen die Zahlwortreihe leichter, wenn sie auf Dinge hindeuten können oder bloß mit dem Finger auf den Tisch klopfen, als würden sie das Antippen mitzählen (PIMM, 1995).
Das Aufsagen der Zahlwortreihe ist eine sprachliche (linguistische) Leistung, etwa wie das Aufsagen der Buchstaben des Alphabets. Die Zahlwörter bis zwölf und deren Reihenfolge muss sich das Kind dabei einfach merken, zu verstehen gibt es dabei (leider!) nichts. Man kann zur Not beim Wort "zwölf" die "zwei" heraushören. Wenn man zwölf Eier in einen Zehnerkarton packt, werden zwei übriggelassen, bei elf Eiern eines. Etymologisch kommt "elf" von "ein-lif", "zwölf" von "zwei-lif". Das althochdeutsche "lif" bedeutet "über", 11 ist also 1 über 10, zwölf ist 2 über 10 (WITTMANN & MÜLLER, Zahlenbuch I, Lehrerband, S. 73).
In jeder Sprache muss das System der Zahlwortbildung strukturiert und regelhaft sein. Die deutsche Sprache hat für die Zahlen 13 bis 99 etwa diese Regel: Sage zuerst die Ei-

ner, dann etwas für die Zehner, also drei-zehn, drei-undzwanzig, usw. Da wir die Buchstaben von Wörtern von links nach rechts schreiben und die Ziffern bei großen Zahlen im Prinzip auch, haben wir in der deutschen Sprache beim Schreilben zweistelliger Zahlen ein Problem: Sprech- und Schreibweise sind entgegengesetzt. Wenn Kinder damit Schwierigkeiten haben, sollten wir dafür Verständnis haben. Näheres dazu folgt in Abschnitt 7.4. Würden wir die Zahlwörter so regelhaft aufbauen, wie es beispielsweise in fernöstlichen Sprachen üblich ist, würden wir sagen: zehn-eins, zehn-zwei, zehn-drei,..., zwei-zehn, zwei-zehn-eins, zwei-zehn-zwei, zwei-zehn-drei,..., drei-zehn, drei-zehn-eins, usw. Dieses logisch aufgebaute System der Zahlwortbildung wäre leichter zu lernen als das System der Zahlwörter in der deutschen Sprache (beispielsweise *zwei-zehn-drei* statt dreiundzwanzig). Ab Hundert verwenden auch wir zum Glück eine klar strukturierte Sprechweise, beispielsweise *sieben-tausend-zwei-hundert*-fünfunddreißig.

7.1.1 Erlernen der Zahlwörter bis 12

Sehr kleine Kinder zählen beispielsweise "eins, zwei, fünf, vier, sieben, ...". Die Reihenfolge ist zwar noch nicht richtig, aber die Kinder zeigen damit, dass sie bereits Zahlwörter von Nichtzahlwörtern unterscheiden können. Wenn Kinder die richtige Reihenfolge der Zahlwörter lernen, solange sie den Wörtern noch kaum weitere Bedeutung zuordnen können (beispielsweise die Nummern von nebeneinander liegenden Garagen, die Anzahl von Fingern), so ist dies eine reine Gedächtnisleistung. Es ist etwa so, wie wenn wir Erwachsene zwölf für uns sinnlose Wörter (beispielsweise chinesische) in der richtigen Reihenfolge aufsagen lernen müssten. Wahrscheinlich würden wir Erwachsene sofort versuchen, den chinesischen Wörtern uns bekannte Bedeutungen zuzuordnen, um unsere Chancen beim Auswendiglernen zu verbessern. Doch womit soll ein Kind die für es noch bedeutungslosen Wörter verbinden?
Häufig geschieht das Erlernen der ersten Zahlwörter mit Hilfe von Zählversen wie "eins-zwei-drei, Engele flieg'". Hinweise dazu geben GUDER (1993) und RADATZ u. a. (1996, 59). Wenn aber ein Kind daran noch kein Interesse hat, ist dies kein Grund zur Besorgnis. Es gibt andere Wege zum Zählen, etwa über die Bedeutung von Zahlen als Anzahlen (Abschnitt 7.2).

7.1.2 Das Erlernen von Zahlwörtern ab 13

Auch die Namen für die Zahlen ab 13 lassen sich auf rein sprachlicher Ebene erlernen. Wenige Rezepte genügen dafür. Ein Kind kann schnell lernen zu zählen: ein-undzwanzig, zwei-undzwanzig.... Eine Hürde ist der Übergang zu "dreißig". Sowohl bei "zwanzig" wie auch "dreißig" ist die Regel für die Zahlwortbildung noch nicht deutlich erkennbar. Die nächsten Zehnerzahlen sind auf der rein sprachlichen Ebene leichter zu bilden (vier-zig, fünf-zig, sech-zig, usw.). Die Lücken zwischen den Zehnerzahlen sind leicht zu füllen, mit Hilfe sprachlicher Schritt-für-Schritt-Regeln, sequentiell und prozedural. Das Erlernen der Zahlwortreihe ist ein Beispiel für den Erwerb *sprachlicher* Regeln (Abschnitt 2.1.2).

Wenn ein Kind die Zahlwortreihe bis 10 oder 29 oder 100 oder 1000 oder 10000 aufsagen kann, heißt das noch nicht, dass es entsprechende Mengen von Dingen richtig abzählen kann oder sonstige Verbindungen zwischen Zahlwörtern und anderen Bedeutungen, beispielsweise Quantitäten, Größen, Hausnummern herstellen kann. Dennoch ist diese sprachliche Fähigkeit eine erstaunliche und nützliche kognitive Leistung und ein wichtiger Baustein auf dem Weg zu einem entwickelten Zahlbegriff (PIMM, 1995, 67). Beispielsweise kann das Kind damit schon Zahlen der Größe nach vergleichen. Die Zahl ist größer, die in der Zahlwörterreihe später drankommt. Wenn aber ein Kind an diesem Wissen noch kein Interesse zeigt, ist das kein Anlass zur Besorgnis. Man kann dies verstehen als ein Zeichen dafür, dass das Kind nur das lernen will, was für es selbst von *Bedeutung* ist. Wenn ein Kind aber Interesse hat an der Zahlwortreihe, sollte man es nicht bremsen mit der Begründung, es hätte ja noch gar keine Anzahlvorstellung (PIMM, 1995, 67). Solche konstruktiven Leistungen von Kindern sind Ausdruck ihrer spontanen Aktivität und sollten nicht bemängelt und auch nicht gebremst werden.

7.1.3 Übungen zur Zahlwortreihe

Wenn wir Dinge zählen, also transitiv zählen, müssen wir bei eins beginnen, die Zahlwortreihe exakt einhalten, keines der Dinge und auch keines der Zahlwörter auslassen, also jedes Ding genau einmal zählen, jedes Zahlwort genau einmal nennen, jedem Ding genau ein Zahlwort zuordnen usw. Auf solche einschränkenden Bedingungen müssen wir beim Üben der Zahlwortreihe nicht achten.

Schüleraktivitäten

A 1 Aufsagen der Zahlwortreihe in Einer-, Zweier-, Fünfer- und Zehnerschritten. Von einer gegebenen Zahl vorwärts oder rückwärts zählen, auch dies in Einer-, Zweier-, Fünfer-, Zehnerschritten.

A 2 Obige Zählübungen auch mit Bewegungen gekoppelt
In einer Reihe sitzend beim Vorwärtszählen aufstehen, beim Rückwärtszählen sich wieder setzen, auch im Kreis sitzend. Zählübungen gekoppelt mit Ball-Tippen, Ball gegen eine Wand prellen, Ball im Kreis stehend dem Nachbarn zuwerfen.
Solche Übungen helfen Kindern, Vertrautheit, Geläufigkeit und Routine im Umgang mit der Zahlwortreihe zu erwerben. Wir müssen sie dabei nicht künstlich einschränken auf Zahlen, mit denen sie bereits Anzahlvorstellungen verbinden können.

A 3 Zahlkärtchen nach der Größe der Zahlen ordnen

7.1.4 Von der Zahlwortreihe zum Rechnen – ein problematischer Weg

Um Missverständnissen vorzubeugen: Wir befürworten *nicht*, im Unterricht von der Zahlwortreihe direkt zum Rechnen weiterzugehen. Wir halten den Weg zum Rechnen über Anzahlen (Abschnitt 7.2) aus verschiedenen Gründen für günstiger. Aus der Beobachtung rechenschwacher Kinder wissen wir aber, dass nicht wenige Kinder in ihren Eigenkonstruktionen diesen Weg gegangen sind und zu zählenden Rechnern wurden – mit allen damit verbundenen Nachteilen. Aufgaben wie 7+6, 13 – 6, 47+25, 47 – 25 usw.

kann man durch Operieren auf der Zahlwortreihe lösen. Man muss dazu nur von einer gegebenen Zahl vorwärts- bzw. rückwärts zählen können, in Einer- und eventuell sogar Zehnerschritten. Bei der Aufgabe 47 + 25 können wir zählend rechnen (47), 57, 67, *68, 69, 70, 71, 72*. Dies stellt aber hohe Anforderungen an Konzentration und Merkfähigkeit. Zur Erleichterung des Weiterzählens werden deshalb meist Finger benutzt. Ein Verständnis von Zahlen als Anzahlen, Quantitäten ist dafür nicht erforderlich, auch wenn wir dies Kindern, wenn sie so rechnen, manchmal unterstellen. Zählendes Rechnen hat weitere deutliche Nachteile (GERSTER, 1994a, 42-46). Hier seien nur einige besonders wesentliche genannt.

Erstens: Unklare Rolle des Anfangs- und Endgliedes der Zählsequenz. Bei 5 + 3 zählt man "sechs, sieben, acht" und nennt das letztgenannte Zählwort als Ergebnis. Bei 8 – 3 zählt man "*sieben, sechs, fünf*" und nennt das *letzt*genannte Zählwort als Ergebnis oder man zählt "*acht, sieben, sechs*" und nennt die *nächst*kleinere Zahl fünf als Ergebnis. Letzteres passt zur Vorstellung von acht Dingen, von denen man das Achte, das Siebte und das Sechste wegnimmt. Diese beiden verschiedenen Prozeduren können leicht miteinander interferieren: Man beginnt die Zählprozedur bei 8, zählt um drei zurück und nennt das letztgenannte Zahlwort (6) als (falsches) Ergebnis oder man zählt sieben, sechs, fünf und nennt die nächstkleinere Zahl vier als (falsches) Ergebnis. Man kann weitere damit zusammenhängende Schwierigkeiten des Von-fünf-bis-acht-Zählens sich an einer Zahlenkette klarmachen.

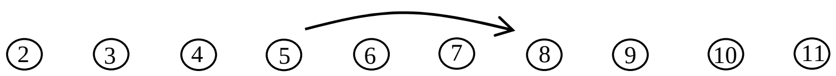


Abb. 7.1: Rechnen an der Zahlenkette

Sind es von 5 bis 8 alle vier Zahlen oder nur die zwei dazwischenliegenden oder etwa doch drei (was am unwahrscheinlichsten aussieht)? Dass von 5 bis 8 drei fehlen, wird deutlicher, wenn man in obiges Bild Pfeile für die Schritte einzeichnet, was man aber nicht macht, wenn man die Zahlenkette in der Hand hält oder sich die Zahlenkette oder den Zahlenstrahl nur vorstellt.

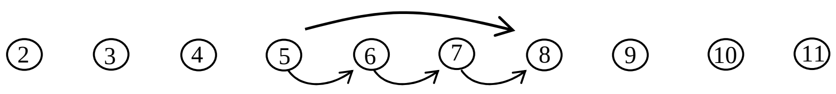


Abb. 7.2: Zählschritte an der Zahlenkette

Zweitens: Zählendes Rechnen wird bei größeren Zahlen aufwändig. Bei der Aufgabe 47 + 25 erfordert zählendes Rechnen ein sehr genaues Überwachen (monitoring) der Anzahl der Zehnerschritte, des Wechsels von Zehnerschritten zu Einerschritten und der Einerschritte, der Festlegung von Start- und Endpunkten.

Drittens: Zählendes Rechnen erschwert den Zugang zu Strukturgesetzen und Rechenvorteilen. Wie wir in den Abschnitten 8.5.2 und 9.5.2 sehen werden, ist das Kommutativgesetz bei Punktmengen unmittelbar klar, wodurch sich die Anzahl der zu lernenden Aufgaben des kleinen Einsundeins halbiert. Bei ordinaler Zahlauffassung und Operator-Deutung des Addierens/Subtrahierens ist dies *nicht* der Fall (Abbildung 7.3).

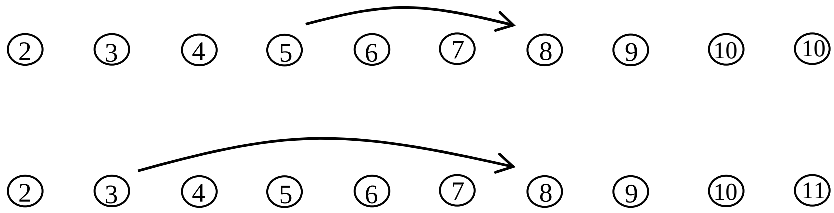


Abb. 7.3: 5 + 3 bzw. 3 + 5 an Zahlenketten

Kinder, die das Vertauschungsgesetz nicht verinnerlicht haben, verwenden häufig *nicht* die Strategie des Weiterzählens vom *größeren* Summanden, obwohl dies die Anzahl der Zählschritte verringern würde.

Viertens: Die Darstellung von Zahlen an der Zahlenkette forciert die Auffassung von einer Zahl (z. B. 8) als einem einzelnem Ding und nicht als einer Zusammenfassung von (z. B. 8) Dingen. Die für Zahlvorstellung und Rechnen überaus nützliche Vorstellung von *Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen* wird dadurch eher behindert.

Fünftens: Zählendes Rechnen führt Kinder dazu, mit Zahlen zu operieren als rein abstrakten Dingen, unabhängig von den aktuellen Quantitäten, welche sie repräsentieren. Deshalb haben Kinder, deren Unterricht sich auf zählendes Rechnen stützt, Schwierigkeiten, Sachprobleme oder Textaufgaben zu lösen, auch wenn sie das bloße Rechnen beherrschen (HATANO, 1982, 215, 216).

7.2 Anzahlen

7.2.1 Von der Zahlwortreihe zur Anzahl

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, kann die Zahlwortreihe als rein sprachliches Gebilde erworben werden (rote counting). Manchen Kindern fällt es aber leichter, die Zahlwortreihe in einem bedeutungsvolleren Zusammenhang kennenzulernen, beispielsweise als Anzahlen. Anzahlen zu verstehen ist eine unabdingbare Leistung, die *alle* Grundschulkinder erbringen müssen. Auch dabei sind spezifische Schwierigkeiten zu überwinden. In jedem Fall muss das Anzahlverständnis mit der Zahlwortreihe verbunden werden.

Ein Kernproblem des Anzahlbegriffs besteht darin, dass beim Abzählen von Mengen die Zahlwörter in *doppelter* Bedeutung verwendet werden. Beim Abzählen von Dingen ordnen wir jedem zu zählendem Ding genau ein Zahlwort zu. Wir stellen eine Einszueins-Zuordnung her zwischen jedem einzelnen Ding der zu zählenden Menge und dem Beginn der Zahlwortreihe (rational counting).

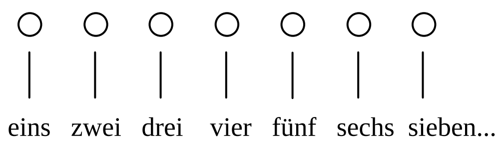


Abb. 7.4: Einszueins-Zuordnung

Durch diese Zuordnung bringen wir die Dinge in eine Reihenfolge (das Erste, das Zweite,...), auch wenn wir nur "eins, zwei, drei,..." sagen. Bei dieser Zuordnung wird dem siebten Element der Menge das Zahlwort "sieben" zugeordnet. Das siebte Element bekommt sozusagen den Namen "Sieben". Beim Zählen der Finger einer Hand bekommt der Mittelfinger auf diese Weise den Namen "Drei", überspitzt gesagt: Der Mittelfinger ist die "Drei". Dieser Aspekt des Zählvorgangs ist das Konzept der *Seriation*, des In-eine-Reihenfolge-Bringens.

Wenn die sieben Nüsse auf dem Teller als eine abzuzählende *Menge*, also als *ein* Ganzes, aufgefasst werden, so bekommt das beim Zählprozess zuletzt genannte Wort einen weiteren Sinn: Es soll zugleich die Anzahl der insgesamt abgezählten Objekte bezeichnen (Kardinalzahl-Prinzip). Jetzt werden die sieben einzelnen Dinge gedanklich (!) zu *einer* Menge zusammengefasst. Dies ist das Konzept der *Klassifikation* (Mengenbildung). Diesen Zusammenhang meint Piaget, wenn er sagt: Der Anzahlbegriff ist die Synthese einer Seriations- und einer Klassifikationsleistung.

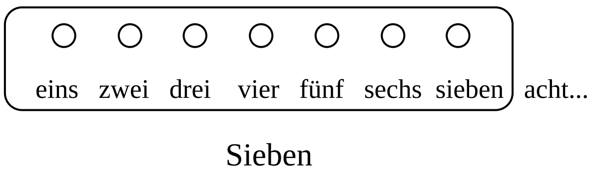


Abb. 7.5: Die Kardinalzahl als Synthese einer Seriations- und einer Klassifikationsleistung

Beachten wir also: Damit ein Kind die Zahl 7 als *Anzahl* erfassen kann, muss es zwei Leistungen erbringen: Erstens die Herstellung einer Einszueins-Zuordnung zwischen Einzeldingen und Zählwörtern und zweitens eine Klassifikationsleistung, das gedankliche Zusammenfassen der gezählten Dinge zu einer Menge und das Zuordnen eines *einzigen* Zahlwortes (beispielsweise des Wortes "Sieben" zur *gesamten* Menge). Dies ist die *Konstruktion* der Vorstellung von der Zahl "Sieben" als einer *Einheit, die aus Einheiten aufgebaut ist* (VON GLASERSFELD, 1987, 268). Die Zahl "Sieben" wird dabei zum Symbol für das Zusammenfassen von sieben einzelnen Dingen zu *einem Ganzen, einem Siebener*. Erst wenn das Kind dieses Verständnis der "Sieben" entwickelt hat, kann es 7 (Dinge) als Zusammensetzung von 3 (Dingen) und 4 (Dingen) *verstehen*.

> The ability to create a unit containing an initial segment of a number sequence is a crucial step in the construction of whole numbers. (STEFFE, 1994, 15)

Beachten wir weiter: Kinder können schon im Alter von zwei bis drei Jahren die "last-word-rule" lernen (PAYNE & HUINKER, 1993, 48). Dafür genügt eine kurze Instruktion der Art: „Wenn du Dinge zählst, sagt dir das letzte Wort, wie viele Dinge es sind. Beobachte mich: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben. Sieben. Das sind 7 Klötze. Schau nochmals...So sagt dir das letzte Wort beim Zählen, wie viele Dinge du hast." Diese Fähigkeit ist ein Zwischenschritt auf dem Weg zum Verständnis des Kardinalzahlprinzips. Er erfordert den Wechsel im Denken von „sieben“ als der Nummer des zuletzt gezählten Dings zur „Sieben“ als der Anzahl der gesamten Menge. Die kardinale Bedeutung der Zahlen entsteht erst dann, wenn das Kind eine *Integrations-Operation* ausführt, den Wechsel von *sieben* getrennten Objekten zu *einer* gesamten Menge mit der Anzahlei-

genschaft sieben (PAYNE & HUINKER, 1993, 48). Dieser Wechsel (transition) ist ein *Schlüsselereignis im Zahlverständnis* des Kindes. Er ermöglicht dem Kind, sein Zähl-Wissen in sein Verständnis von Mengen von Dingen zu integrieren und später Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen (z. B. $7 = 3 + 4$) zu verstehen. Diese Integration nennen STEFFE & COBB (1988) die "Integration der Zählakte".
Erschwert wird diese komplexe mentale Leistung durch die Tatsache, dass in unserer Sprache Zahlwörter wie eins, zwei, drei, usw. in doppelter Bedeutung verwendet werden. In allen indogermanischen Sprachen bezeichnen die Zahlwörter eins, zwei, drei,... den *ordinalen* Aspekt (Rangplatz in der Serie der Zahlwörter) und den *kardinalen* Aspekt (Anzahl der bis dahin gezählten Dinge). In fernöstlichen Sprachen, zum Beispiel in der japanischen Sprache, werden für diese beiden verschiedenen Verwendungsarten der Zahlwörter *verschiedene* Wörter gebraucht. In der deutschen Sprache haben wir diese Möglichkeit nur bei wenigen Zahlen. Wir können abzählen: eins, zwei, drei, ..., zwölf und dann das Ergebnis der Zählprozedur nennen: ein Dutzend.
Die meisten Kinder schaffen diese Einsicht der doppelten Verwendung der Zahlwörter im Alter von etwa viereinhalb Jahren (FUSON & HALL, 1983). Schwache Kinder verbinden mit der Zahl "vier" noch in den ersten Grundschuljahren nur die Vorstellung "das vierte Ding" oder bestenfalls die Vorstellung von vier einzelnen Dingen, vier einzelnen Einheiten, aber *nicht* die Vorstellung von "Vier" als *einer* neuen Einheit, die aus vier einzelnen Einheiten, z. B. den Zahlwörtern eins, zwei, drei, vier, zusammengesetzt ist. Sie haben also noch nicht die Vorstellung, das Konzept, entwickelt: "Bis dahin sind es *insgesamt* vier Dinge" (vgl. Abb. 7.5). Ein Verständnis der Zusammensetzung beispielsweise der Sieben aus Vier und Drei ist damit nicht möglich. Die Zehnerüberschreitung durch Zerlegen kann damit *nicht* verstanden werden. Additionsterme können dann nur als Anweisung zum Weiterzählen verstanden werden (Abschnitt 8.3). Ein Verständnis der Multiplikation ist so nicht möglich.
Zum entwickelten *Anzahlverständnis* gehören fünf Zählprinzipien. Dies sind das *Eins-zueins-Prinzip* (jedem der zu zählenden Gegenstände wird genau ein Zahlwort zugeordnet), das *Prinzip der stabilen Ordnung* (die Reihe der Zählwörter hat eine feste Ordnung), das *Kardinalzahl-Prinzip* (das beim Zählprozess zuletzt genannte Zählwort ist zugleich die Anzahl der Elemente der gezählten Menge), das *Abstraktions-Prinzip* (jedes zu zählende Objekt zählt genau einmal, unabhängig von seiner Größe, Farbe,...), das *Prinzip der beliebigen Reihenfolge* (es ist gleichgültig in welcher Reihenfolge die Objekte gezählt werden).

Lehrer/Schüler-Aktivitäten

A 1 Zum Kardinalzahlprinzip.
Man gibt dem Kind etwa 6 Zählplättchen und fragt: "Wie viele sind das"? Wenn das Kind beim Abzählen das letztgenannte Zahlwort wiederholt, kann davon ausgegangen werden, dass es den Wechsel von ordinalen zum kardinalen Gebrauch des letzten Zahlwortes vollzogen hat. Wenn der kardinale Gebrauch nicht klar ist, kann die Frage "wie viele?" wiederholt werden. Wenn das Kind jetzt die Anzahl ohne erneutes Zählen nennt, ist der kardinale Gebrauch des Zahlwortes klar, das Konzept *Anzahl* dem Kind verfügbar. Wenn das Kind auf die Frage "wie viele?" die ganze Menge erneut zählt, ist das ein Anzeichen dafür, dass das Kind diese Frage als Anweisung *zu zählen* (die Zählprozedur

durchzuführen) versteht und noch nicht als Frage nach der Anzahleigenschaft der Menge.

A 2 Zum Kardinalzahl-Prinzip
Um festzustellen, ob das Kind die Frage "Wie viele sind es?" in kardinalem Sinn versteht, kann man die Menge, die das Kind soeben abgezählt hat, mit einem Stück Karton zudecken und dann die Frage stellen "Wie viele sind es?"

A 3 Zum Kardinalzahl-Prinzip.
Man lässt die Kinder aus einer großen Menge von Plättchen eine Menge mit beispielsweise 7 (oder 12) Plättchen auszählen.

A 4 Zum Abstraktions-Prinzip.
Man lässt die Kinder mehrere Mengen abzählen, bei denen die Dinge sich in der Größe stark unterscheiden, deren Anzahl aber gleich ist. Man bespricht mit den Kindern, inwiefern die Mengen gleich sind oder verschieden.

A 5 Zum Prinzip der beliebigen Reihenfolge.
Man lässt die Kinder eine Menge abzählen. Dann ordnet man vor den Augen der Kinder die Menge um und fragt: "Wie viele sind es jetzt?" Wenn die Kinder keine Notwendigkeit sehen, die Menge erneut abzuzählen, kann davon ausgegangen werden, dass das Konzept *Anzahl* unabhängig ist von der Anordnung.

A 6 Zur kardinalen Invarianz.
Man lässt das Kind beispielsweise 8 Zählplättchen auszählen. Man schiebt die Zählplättchen zusammen, auseinander, in Kreisform, linear usw. und fragt jedesmal: "Wie viele Plättchen sind es jetzt?" Wenn das Kind ohne zu zählen mit "acht" antwortet, hat es die kardinale Invarianz erfasst.

7.2.2 Von der gliedernden Mengenauffassung zur Anzahl

Im vorigen Abschnitt erwähnten wir die Integrations-Operation, also den Übergang von beispielsweise *sieben* einzelnen Dingen zur Gesamt-Menge mit sieben Elementen, d. h. den Übergang von sieben Einheiten zu *einer* neuen Einheit von Einheiten, dem "Siebener". Dieser Sichtwechsel ist ein Schlüsselereignis auf dem Weg zum Anzahlverständnis und – von der Zählprozedur herkommend – zugleich eine erste Hürde, an der „rechenschwache“ Kinder scheitern können. Der Übergang von einzelnen gezählten Dingen zur Gesamtmenge kann erleichtert werden mit Hilfe der sogenannten *Simultan-Erfassung*. Bereits Säuglinge können (ohne Zahlwörter zu kennen) eine Menge mit zwei Dingen von einer Menge mit einem, drei oder vier Dingen unterscheiden oder eine Menge mit drei Dingen von einer Menge mit einem, zwei oder vier Dingen. Selbst Vögel können das. Sie sind im Allgemeinen erst verwirrt, wenn sie zwischen Haufen mit 4 bzw. 5 Körnern wählen müssen (BARROW, 1994, 263).
Auch beim Menschen reicht die Simultanerfassung (Anzahlerfassung mit einem Blick, subitizing, vgl. italienisch "subito") bis vier. Dies ist eine Anzahlerfassung ohne zu zählen. Ab fünf steigt der Zeitbedarf für das Erkennen der Anzahl bei ungeordneten Mengen stark an, weil dann gezählt werden muss oder in simultan erfassbare Teilmengen

zerlegt und gerechnet oder aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden muss (*quasi-simultane Anzahlerfassung*).
Die Simultanerfassung ist bei Schuleintritt der Kinder in der Regel längst voll entwickelt. Auch ältere Kinder oder Erwachsene leisten hierbei nicht mehr. Anzahlen bei Figuren wie I , II , III , IIII können wir mit einem Blick sicher erfassen. Mit etwas Übung können wir auch noch IIIII mit einem Blitz-Blick (innerhalb einer Sekunde) erfassen, wenn wir die Mitte fixieren und links und rechts davon je 2 sehen. Dies wird wesentlich erleichtert, wenn wir den Mittelstrich etwas verlängern (Abb. 7.6)

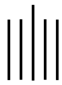


Abb. 7.6: Quasi-Simultanerfassung der Fünf

Abb. 7.7: Menschliche Hand

Dies ist auch zugleich die Struktur der Hand. Der längste Finger (Mittelfinger) in der Mitte, links davon je 2 Finger. Die Anzahlen bis vier können wir simultan erfassen, die Fünf erfassen wir bereits quasi-simultan als "eins-mehr-als-vier", die Sechs als "drei-und-drei" (Abb. 7.6). Das wird auch bei den Zahlbildern des Spielwürfels benutzt (Abb. 7.8).

Abb. 7.8: Zahlbilder des Spielwürfels

Die Simultanerfassung bis vier mit dem Eins-mehr-als-vier-Verständnis der Fünf scheint eine zentrale Grundlage für das Zehnersystem zu sein. Ist doch die Zehn eine Doppel-Fünf. Dies wird in der römischen Zahlschrift für Zehn (X) deutlich, denn das Zeichen „X“ lässt sich auffassen als eine gespiegelte Fünf (V), und "V" symbolisiert *eine* volle Hand. Die arabische Zahlenschrift enthält diese Information nicht mehr (Abb. 7.9).

Zahldarstellung mit Fingern

Römische Zahlenschrift	V	X
Arabische Zahlenschrift	5	10

Abb. 7.9: Zunehmende Abstraktion der Symbole – weniger Hinweise auf Quantitäten

WEICHBRODT (1994) hat eine Methode zur Prüfung der Fähigkeit der Simultanerfassung, den sogenannten "Blitz-Blick" entwickelt und berichtet aus ihrer Erfahrung mit weit mehr als 100 Untersuchten. Sie stellte fest, dass alle Kinder, deren Simultanerfassung bei Eintritt ins Grundschulalter nur bis drei reichte, in der Grundschule erhebliche Probleme im Mathematikunterricht hatten.
Die Simultanerfassung lässt sich durch Training verbessern. Dieses Training ist zugleich für schwache Kinder, die mit der Reihenfolge der Zahlwörter Schwierigkeiten haben, ein Weg, diese Reihenfolge in bedeutungsvollem Kontext zu lernen (Abschnitt 7.1.1).

Lehrer/Schüler-Aktivitäten

A 1 Zweier-, Dreier- und Vierer-Mengen erkennen
Man verbirgt drei Pfennige unter einem Blatt und fragt: "Wie viele Pfennige sind unter dem Blatt?" Man deckt dieses nur für etwa eine Sekunde auf und beobachtet, ob das Kind einerweise zählt oder ob es die Gruppierung als Ganzes sieht. Dies wird mit zwei Pfennigen, vier Pfennigen, drei Pfennigen in verschiedenen Lagen wiederholt. Man ermutigt das Kind zu raschen Antworten.

A 2 Zweier-, Dreier- und Vierer-Mengen herstellen
Jedes Kind erhält 10 Zählsteine. Diese Menge soll es in lauter Zweiermengen zerlegen. Danach soll es die Steine wieder zu einem Haufen zusammenschieben und die Zweiermengen *rascher* bilden. Anfangs brauchen die Kinder etwa 1 Minute. Nach etwas Übung schaffen sie es in etwa 10 Sekunden. Anschließend das Entsprechende mit 12 Zählsteinen und Dreier-Mengen bzw. Vierer-Mengen.

Beim Erkennen und Herstellen von Vierer-Mengen kann es bereits hilfreich sein, die Vier als "Zwei-und-zwei" oder als "Drei-und-eins" zu denken, also als Zusammensetzung aus anderen Anzahlen.

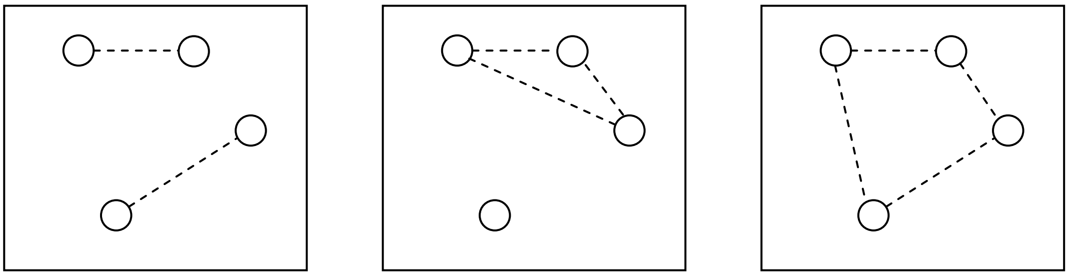


Abb. 7.10: Die Vier als Zwei-und-zwei, als Drei-und-eins und als *ein* Ganzes

Das sichere, blitzartige Erkennen von Anzahlen bis vier scheint eine wichtige Voraussetzung zu sein für erfolgreiche Teilnahme am Mathematikunterricht. Zahlreiche Arbeitsmittel werden erst praktikabel und effektiv, wenn diese Voraussetzung erfüllt ist. Dies muss beim Schulanfang für alle Kinder überprüft werden, denn nicht alle bringen diese Voraussetzung bereits mit (Sara in Abschnitt 5.6.1, Abb. 5.9).

Schüleraktivität

A 1 Zweier-, Dreier- und Vierermengen bilden
Auf einem Arbeitsblatt mit Punkten sollen die Kinder Zweier-, Dreier- und Vierermengen einkringeln. Die Kinder sollen die Kringel als Symbole für Teller verstehen, auf denen jeweils vier Dinge liegen. Bei schwachen Kindern sollte darauf geachtet werden, dass sie die Kringel *rasch* bilden können, ohne die Punkte einzeln zu zählen. Das Tempo soll bei mehrmaliger Bearbeitung des Arbeitsblattes gesteigert werden. Ziel ist, das Erfassen von jeweils vier Dingen mit einem Blitz-Blick.

7.2.3 Quasi-simultane Anzahlerfassung der Zahlen 5 bis 10

Die simultane Anzahlerfassung ist – bei zufälliger Anordnung der Dinge – auf Anzahlen bis vier begrenzt. Bei größeren Mengen zählen wir einerweise oder zerlegen die ganze Menge in simultan erfassbare Teilmengen (z. B. lauter Zweier) und zählen in Zweierschritten) oder wir erkennen spezielle Zahlenmuster, wie die bekannten Würfelbilder oder sonstige prägnante Muster (Abb. 7.11, 7.12, 7.16, 7.17). Dabei wirken die Gestaltgesetze mit (PREIß, 1996). VON GLASERSFELD (1987, 271) spricht von figuralen, als ganzheitliche Muster benennbaren Zahldarstellungen.
Manche schwache Kinder beginnen bereits bei der Würfel-Fünf und Würfel-Sechs die Punkte einerweise zu zählen. Dann ist es hilfreich, auch diese Zahlenmuster in simultan erfassbare Teilmengen zu zerlegen (Abb. 7.11 und 7.12).

Abb. 7.11: Die Fünf als Vier-und-eins, Drei-und-zwei, Drei-und-eins-und-eins

Abb. 7.12: Die Sechs als Drei-und-drei, Vier-und-zwei, Fünf-und-eins

Auch fünf *zufällig* angeordnete Zählplättchen erfassen wir mit einem Blick quasi-simultan als Drei-und-zwei oder Vier-und-eins oder als eine durch gedanklich vorgestellte Verschiebung erzeugte Würfel-Fünf (Abb. 7.13).

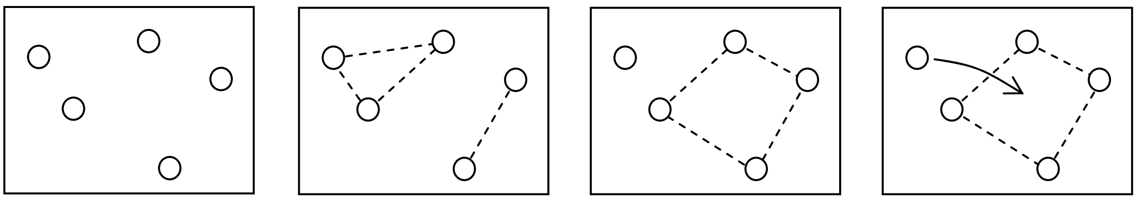


Abb. 7.13: Quasi-simultane Anzahlerfassung der Fünf bei zufälliger Anordnung

Entsprechendes Gliedern in simultan erfassbare Teilmengen hilft auch beim nicht-zählenden Erkennen der Anzahlen 6 bis 10 (Abb. 7.14 und 7.15).

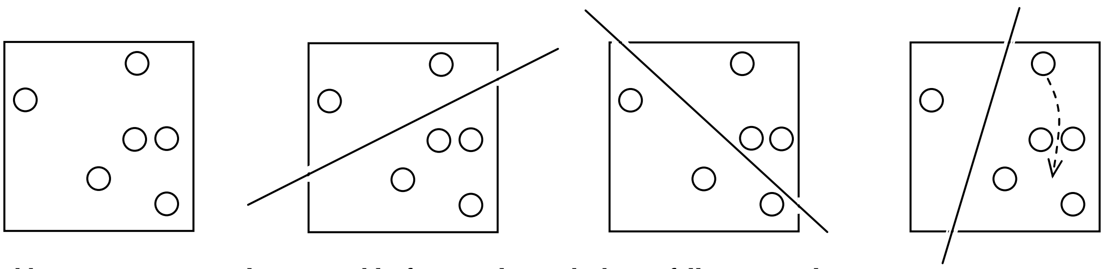


Abb. 7.14: Quasi-simultane Anzahlerfassung der Sechs bei zufälliger Anordnung

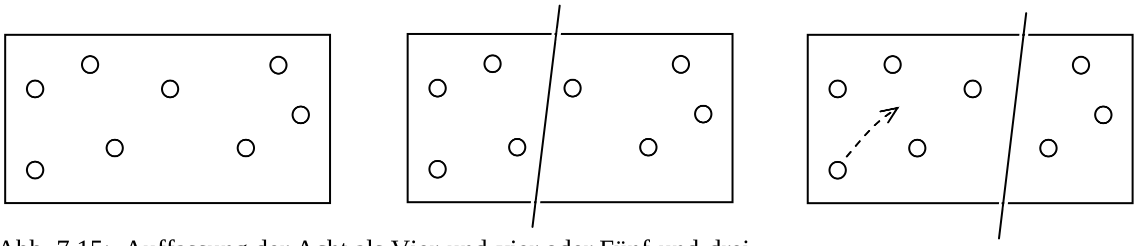
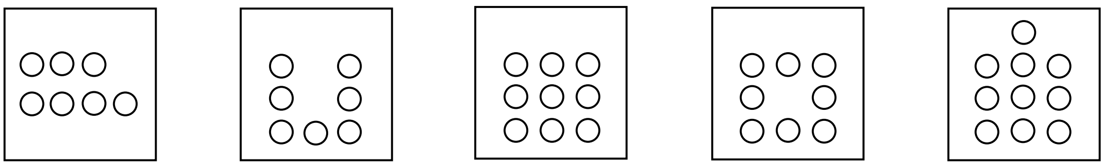


Abb. 7.15: Auffassung der Acht als Vier-und-vier oder Fünf-und-drei

Leichter in simultan erfassbare Teilmengen zerlegbar sind regelmäßige Punktmuster (Abb. 7.16).



a) b) c) d) e)

Abb. 7.16: Punktmuster für die Zahlen 7 bis 10

In den Abbildungen 7.16 a) und b) sehen wir die Sieben als Sechs-und-eins, in d) die Acht als Sechs-und-zwei oder als Neun-weg-eins, in e) die Zehn als Neun-und-eins. ROSENKRANZ (1992, 1993) hat auf der Grundlage derartiger Zahlbilder auf einem Steckbrett der Form der Abb. 7.16 e) für sogenannte rechenschwache Kinder einen Lehrgang zum Zahlverständnis und Rechnen im Zahlenraum bis 20 entwickelt.

Lehrer/Schüler-Aktivitäten

A 1 Anzahlen bis 10 mit einem Blitz-Blick erkennen
Punktemuster wie in Abb. 7.16 auf Folie bzw. auf einem Stapel Kartonblätter werden nur kurz (etwa eine Sekunde) aufgedeckt. Die Kinder (oder der Partner in einer Zweiergruppe) sagen, wie viele Punkte sie gesehen haben und wie sie diese gesehen haben (als vier-und-drei, als sechs-und-zwei).

A 2 Zahlbilder legen
Die Kinder sollen 6, 7, 8, 9, 10 Plättchen so auf ein Stück Karton legen, dass der Partner oder die Lehrerin mit einem Blick (ohne zu zählen) sehen kann, wie viele Plättchen das sind. Dabei darf ein Zehner-Eierkarton oder ein sogenanntes Zehnerfeld verwendet werden (vgl. Abschnitt 7.3.2). Mögliche Muster für die Zehn zeigt Abb. 7.17.

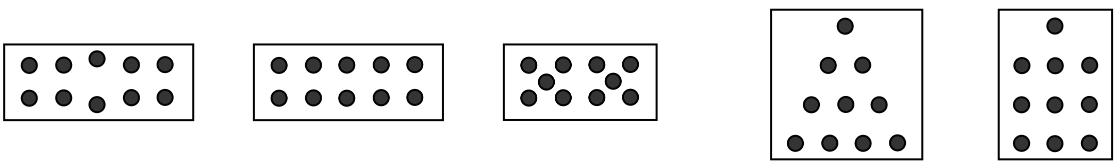


Abb. 7.17: Punktmuster für die Zehn

A 3 Plättchenmengen zerlegen, Partnerarbeit
Ein Kind legt 6, 7, 8, 9 oder 10 Plättchen auf ein Stück Karton. Das andere Kind legt ein Stäbchen so auf den Karton, dass dieses die Menge der Plättchen in zwei mit einem Blick erfassbare Teilmengen zerlegt (vgl. Abb. 7.14 und 7.15). Dazu kann gesprochen werden "vier und zwei sind 6".

7.2.4 Zum Verständnis von Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen

> Probably the major conceptual achievement of the early school years is the interpretation of numbers in terms of part and whole relationships. With the application of a Part-Whole schema to quantity, it becomes possible for children to think about numbers as compositions of other numbers. This enrichment of number understanding permits forms of mathematical problem solving and interpretation that are not available to younger children. (RESNICK, 1983, 114)

In ihrer Theorie der Zahlbegriffsentwicklung stellt Lauren Resnick fest, dass die Kinder im Vorschulalter eine Art mentaler Zahlenkette konstruieren, mit deren Hilfe sie Dinge abzählen und auch Zahlvergleiche durchführen können. Als die wahrscheinlich wichtigste Leistung der ersten Schuljahre nennt Resnick die Anwendung des Teile-Ganzes-Schemas auf Zahlen. Dieses ermöglicht, die Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu sehen. Wie wir in späteren Abschnitten sehen werden, ist diese Fähigkeit eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung mentaler Vorstellungsbilder für Zahlen, das eigene Erfinden und Verstehen effektiver Rechenstrategien, die Automatisierung der Basisfakten, das Verstehen der Stellenwertschreibweise und der meisten Strategien des Kopfrechnens, das Verstehen der schriftlichen Rechenverfahren und das Lösen von Sachproblemen zu allen vier Grundrechenarten.
Das Teile-Ganzes-Schema entwickelt sich als ein protoquantitatives Schema (also ohne exakte Quantifizierung) aus "real-life-situations", in denen zusammengesetzt und zerlegt wird, aber noch keine exakte Quantifizierung erforderlich ist. Beispiele dafür sind: Im Puzzle fehlt ein Teil, das Kind gibt seinem Bruder einen Teil (nicht alle) seiner Bonbons, es isst nur einen Teil des Kuchenstücks usw. Das Teile-Ganzes-Schema befasst sich mit *Beziehungen* zwischen dem Ganzen und seinen Teilen.
Im Alter von etwa fünf Jahren scheinen Kinder sensibel zu sein für Teile-Ganzes-Beziehungen. Ihr Wissen bezieht sich aber eher auf *vorzahlige* Konzepte: Beim Zusammenfügen wird es mehr, wenn man einen Teil wegnimmt wird es weniger, wenn eine Menge Teil ist einer anderen Menge, dann ist der Teil weniger als das Ganze. Dies ist ein (protoquantitatives) *Vorverständnis* des Addierens und Subtrahierens, das noch nicht mit exakter Quantifizierung (z. B. Anzahlen) verbunden ist (SOPHIAN & MCCORGRAY, 1994, 30). Die Autorinnen weisen darauf hin, dass aus konstruktivistischer Sicht des Lernens die Integration dieses konzeptuellen Grundverständnisses in quantitative Situationen (also beispielsweise Zahlvorstellungen, Rechnen mit Zahlen) *keineswegs automatisch* erfolgt (S. 32). Wenn Unterricht zu wenig unternimmt, das bei Kindern vorhandene Teile-Ganzes-Schema mit dem *Anzahlverständnis* zu verbinden, dann kann es sein, dass einzelne Kinder dieses grundlegende Teile-Ganzes Konzept nicht spontan auf Zahlen übertragen und beispielsweise am zählenden Rechnen hängen bleiben, die Stellenwertschreibweise nicht verstehen, sich die Basisfakten nicht merken können und gewisse Textaufgaben nicht bewältigen (z. B. first unknown problems).

FISCHER (1990) konnte in einem 25-mal 20 Minuten umfassenden Unterrichtsexperiment mit Kindergartenkindern im Alter von 4.8 bis 6.9 Jahren nachweisen, dass Teil-Teil-Ganzes-Aktivitäten im Zahlenraum von 0 bis 7 zu signifikant höheren Leistungen bei Zahlkonzepten, bei Sachaufgaben zur Addition und Subtraktion und bei Stellenwertkonzepten führten. Die beiden Kontrollgruppen (44 Kinder) erhielten Unterricht in einem "Count/Say/Write Curriculum", die beiden Experimentalgruppen in einem "Part-Part-Whole Curriculum". Hierbei wurde die Aufmerksamkeit der Kinder nicht nur auf die Anzahl der Gesamtmenge gelenkt, sondern auch auf die Anzahlen der Teilmengen bei verschiedenen Zerlegungen und Zusammensetzungen der Mengen.
Obwohl der Unterricht sich nur auf den Zahlenraum bis 7 erstreckte, wurde im Vor- und Nachtest aller Gruppen die Leistung der Kinder beim Zählen bis 30, Mengenabzählen bis 6, Mengenherstellen bis 12, Kardinalzahlverständnis bis 12 sowie bei Sachaufgaben und Aufgaben zum Zerlegen im Zahlenraum bis 15 gemessen. Dadurch konnten Transfereffekte des prinzipiellen Verständnisses auf größere Zahlen festgestellt werden. Insbesondere zeigten sich deutliche Unterschiede zwischen den Experimentalgruppen und den Kontrollgruppen beim Lösen von Sachaufgaben und bei Aufgaben zum Stellenwertkonzept (bei Zahlen bis 14), obwohl beides nicht Inhalt des Unterrichtsexperimentes war.
In Sidney untersuchte BOBIS (1993) in zwei Kindergartengruppen mit 32 bzw. 35 Kindern, deren Alter bei Beginn des Projektes 4.5 bis 5.7 Jahre betrug, die Fähigkeit der Kinder, Punktemuster in der Vorstellung aus Teilen zusammenzusetzen und in Teile zu zerlegen. In der Anfangsphase des einjährigen Projektes fanden die etwa zehnminütigen Übungen täglich statt, danach vierzehntägig. Ziel war, die Visualisierungsstrategien der Kinder zu fördern. Dazu wurden alle Zahlen ab 4 auf mindestens drei verschiedene Arten als Punktmuster dargestellt (Abb. 7.18).

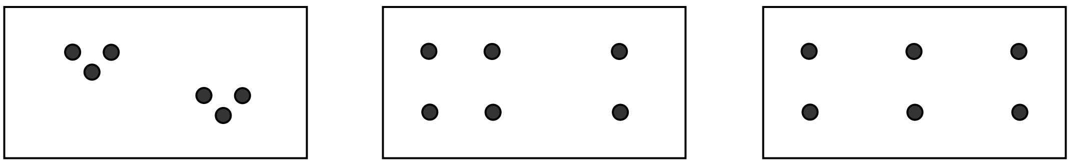


Abb. 7.18: Punktekarten für die Zahl 6 nach Bobis

Neben Punktekarten wie in Abb. 7.18 wurden auch Zehnerfelder (ten frames, vgl. Abschnitt 7.3.2) verwendet, auf denen Kinder Zählsteine nach ihren eigenen Vorstellungen anordnen konnten (Abb. 7.19).

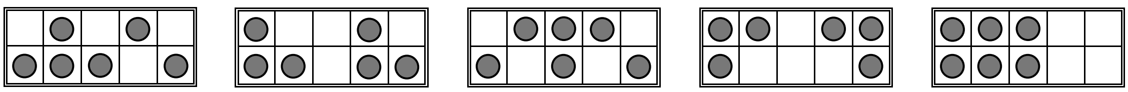


Abb. 7.19: Freie Anordnung von sechs Zählsteinen auf dem Zehnerfeld

Die Punktmuster wurden in den Großgruppen auf Karton oder mit dem Overheadprojektor präsentiert, in selbständig arbeitenden Kleingruppen verwendet und in individuellen Interviews von drei bis fünf Minuten mit einzelnen Kindern diskutiert. Häufige Übungen waren "Blitzblick und Anzahl sagen" und "Paare mit gleicher Anzahl finden". Die Zahlmuster wurden auch akustisch präsentiert und sie wurden gezählt. Die Kinder sollten die Muster verbal beschreiben und danach beurteilen, ob die Gesamtanzahl leicht oder schwer erkennbar war.

Die Studie zeigt, dass die Kinder dieses Alters durch Übung lernen konnten, Muster in der Vorstellung zusammenzusetzen und zu zerlegen und so fähig wurden, das Ganze und seine Teile sofort (instantly) zu erfassen – eine effiziente Strategie, die Basisfakten der Addition und Subtraktion abrufbar zu machen (vgl. Abschnitt 8.6). Nachdem für die Basisfakten (wie $3 + 4 = 7$; $8 - 5 = 3$; ...) abstrakte mathematische Symbole eingeführt worden waren, konnten die meisten Kinder dieser Studie dann mit Symbolen schreiben, was sie zuvor mit dem Material dargestellt, als Punktemuster gezeichnet und diskutiert hatten.

IRWIN (1996 a, b) führte in Neuseeland empirische Untersuchungen zum Teile-Ganzes-Schema an über 100 Kindern im Alter von vier bis sieben Jahren durch. Sie unterschied dabei dreierlei Situationen: Nicht abgezählte Mengen von Einzeldingen, abgezählte Mengen von Einzeldingen und Addition und Subtraktion in Gleichungsschreibweise. Untersucht wurde dabei der Effekt auf ein aus zwei Teilen bestehendes Ganzes, wenn ein Ding von einer Teilmenge zur anderen Teilmenge bewegt wurde (*Kompensation*) und wenn einer der beiden Teile des Ganzen um ein Ding vermehrt wurde (*Kovarianz*). Dabei wurde nachgewiesen, dass 72 % der Vierjährigen, 81 % der Fünfjährigen und 92 % der Sechsjährigen ein sicheres Verständnis (firm understanding) zeigten, wenn es sich um eine nicht-quantitative Situation handelte. Bei abgezählten Mengen (z.B. vier Knöpfen, die an zwei Hände verteilt wurden), wurde die Zahl der Dinge in einer der beiden Teilmengen um eins erhöht. In dieser quantitativen Situation waren die entsprechenden Erfolgsquoten deutlich niedriger als im nicht-quantitativen Experiment (58 % der Vierjährigen, 66 % der Fünfjährigen, 88 % der Sechsjährigen und 95 % der Siebenjährigen).
Die Auswertung der mit den Kindern geführten Einzelinterviews ergab, dass es Kindern schwer fiel zu sagen, wie sich *gezählte* Mengen veränderten, obwohl sie verstanden hatten, was sich bei *nicht-gezählten* Mengen ereignete. Deutlich zeigte sich, dass bei abgezählten Mengen die Kinder auch in Teile-Ganzes-Situationen auf ein zählendes Mehr-Weniger-Schema auswichen und nicht ihr nicht-quantitatives Teile-Ganzes-Schema anwandten. Die Interviews befragten Lehrkräfte gaben an, dass sie vom nicht-quantitativen Teile-Ganzes-Verständnis der Kinder keinen Gebrauch machten (IRWIN, 1996b, 144).
Die von IRWIN untersuchte Kompensation und Kovarianz beim Teile-Ganzes-Konzept wäre in quantitativen Situationen sehr nützlich (Abb. 7.20).

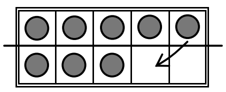
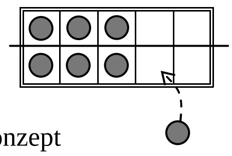



Abb. 7.20: Kompensation und Kovarianz beim Teile-Ganzes-Konzept

Die *Kompensation* (das Ganze ändert sich nicht, wenn ein Ding von einem Teil zum anderen Teil bewegt wird) ist vor allem dann nützlich, wenn der eine Teil zwei Dinge mehr enthält als der andere Teil, weil dadurch Gleichheit der beiden Teile erzeugt wird und die Gesamtzahl sich durch Verdoppeln ergibt ($5+3 = 4+4$). Die *Kovarianz* (wenn man einen Teil eines Ganzen um eins vergrößert, vergrößert sich auch das Ganze um eins) ist Grundlage der so genannten Nachbaraufgaben (z. B. $3 + 3 = 6$; also $3 + 4 = 7$).

Am Beginn dieses Abschnittes erwähnten wir Resnick, die die Anwendung des Teile-Ganzes-Schemas auf Quantitäten als wahrscheinlich wichtigste Leistung der ersten Schuljahre bezeichnet. Denn dieses ermöglicht, Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu sehen. Damit ergibt sich – am Beispiel des Verständnisses der Zahl 7 anhand von Punktmustern aufgezeigt – die nachfolgende Entwicklungskette von konkreten Handlungen mit Quantitäten über bildliche und sprachliche Darstellung bis zur symbolischen Ebene und vom kleinen Einspluseins bis zum kleinen Einmaleins:

- 7 Plättchen sind zusammengesetzt aus 5 Plättchen und 2 Plättchen (Abb. 7.21)
- 7 Plättchen sind 5 Plättchen und 2 Plättchen
- 7 ist 5 und 2
- 7 ist das Gleiche wie 5 und 2
- $7 = 5 + 2$
- $5 + 2 = 7$; $2 + 5 = 7$
- $7 - 2 = 5$; $7 - 5 = 2$
- $7 + 6 = 13$ (Abb. 7.22)
- $7 \cdot 6 = 42$ (Abb. 7.23)

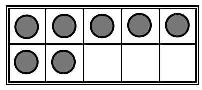


Abb. 7.21: Die Zahl 7 auf dem Zehnerfeld

Abb. 7.22: Die Summe 7 + 6 auf Zehnerfeldern und auf dem Zwanzigerfeld

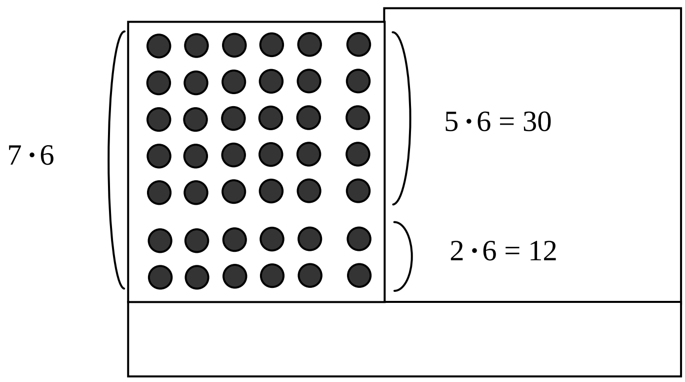


Abb. 7.23: Das Produkt $7 \cdot 6$ auf dem Hundert-Punktefeld

Die komplexe Ableitung von $7 \cdot 6$ aus $5 \cdot 6$ und $2 \cdot 6$ klappt wegen der geringen Kapazität des Arbeitsgedächtnisses nur dann, wenn die vorausgehenden Teilschritte $7 = 5 + 2$; $5 \cdot 6 = 30$; $2 \cdot 6 = 12$ bereits automatisiert sind. Die Grundlage dafür wird bereits am Beginn des ersten Schuljahres geschaffen!

7.3 Beziehungen zwischen Zahlen

7.3.1 Eins oder zwei mehr, eins oder zwei weniger

Es ist eine Sache, von einer Zahl um eins oder zwei weiterzuzählen und es ist eine andere Sache, die Beziehung "eins mehr" bzw. "zwei mehr" zu erkennen und zu einer Zahl die um eins größere oder um zwei größere sofort (wie automatisch) nennen zu können.

Letzterem Ziel dienen nachfolgende Übungen. Das Automatisieren von "eins mehr", "zwei mehr", "eins weniger", "zwei weniger" ist Voraussetzung für viele Rechenstrategien, wie beispielsweise

$5 + 5 = 10$, also ist $5 + 7 = 12$		(zwei mehr)
$10 + 5 = 15$, also ist $9 + 5 = 14$		(eins weniger)
$10 + 7 = 17$, also ist $8 + 7 = 15$		(zwei weniger)
$5 \cdot 8 = 40$, also ist $7 \cdot 8 = 56$		(zweimal 8 mehr)
$10 \cdot 8 = 80$, also ist $9 \cdot 8 = 72$		(einmal 8 weniger)

Schüleraktivitäten

A 1 Eins-weniger-Domino
Mit handelsüblichen Dominosteinen oder selbstgefertigten Domino-Karten wird wie üblich gespielt, nur dass jetzt nicht Steine mit gleicher Punktzahl angelegt werden, sondern mit *Eins weniger*. Entsprechend kann man eine der drei anderen Beziehungen als Spielregel vereinbaren.

A 2 Zwei-mehr-Blitzrechnen (auch als Partnerarbeit)
Man zeigt ein Punktmuster nur etwa 1 bis 3 Sekunden lang. Die Kinder sollen dann die Zahl sagen, die z*wei mehr* ist als die Anzahl der Punkte, welche sie sehen. Hierbei kann auch die Sprechweise "*zwei mehr* als 6 ist 8" eingeübt werden. Wenn die Kinder Ziffernkärtchen vorrätig haben, können sie als Antwort auch das Kärtchen hochhalten, welches die um zwei größere Zahl zeigt.

A 3 Zwei-weniger-Maschine
Man zeichnet das Bild einer Maschine an die Tafel (Abb. 7.24). Man sagt den Kindern, dass diese "Denkmaschine" immer eine Zahl ausspuckt, die *zwei weniger* ist als die Zahl, die man eingibt. Dazu kann man Karten anfertigen, deren Vorderseite die Eingabezahl als Ziffer oder Punktmuster zeigt und deren Rückseite die Ausgabezahl angibt. Man lässt die Eingabezahl langsam durch die Maschine wandern. Nachdem die Kinder die Ausgabezahl gerufen haben, wendet man die Karte zur Bestätigung in der Nähe des Ausgangs der Maschine um.

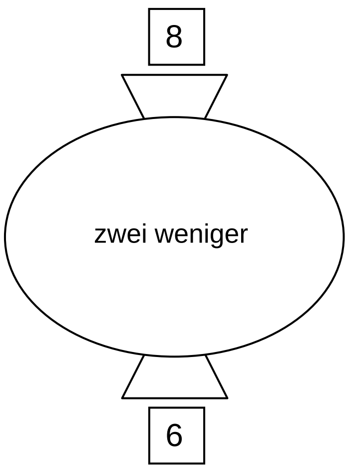


Abb. 7.24: Zwei-weniger-Maschine

Diese Übung kann auch als Tempo-Übung ohne Karten durchgeführt werden. Man nennt die Eingabezahl, die Kinder rufen sehr rasch die Ausgabezahl.

A4 Zwei-mehr-Taschenrechner (Stillarbeit)
Man drückt auf dem Taschenrechner (mit Konstantenautomatik) die Tastenfolge 2, +, +. Das Kind tippt jetzt eine Zahl ein und nennt anschließend die um zwei größere Zahl. Zur Kontrolle seines Ergebnisses drückt das Kind die Taste „=“. Dann erscheint im Display die um zwei größere Zahl. Da „+2“ eingespeichert ist, kann die Prozedur mit beliebigen weiteren Zahlen durchgeführt werden. Entsprechend geht es mit den Tastenfolgen 1, +, + sowie 1, –, –, und 2, –, –.

7.3.2. Die Zahlen an der Fünf und an der Zehn verankern

In diesem Abschnitt geht es um die Beziehung von Zahlen zur Fünf und zur Zehn. Die Bedeutung dieses Konzeptes kann gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Das Wissen "7 ist 5 und 2" und "von 7 bis 10 fehlen 3" spielt eine hilfreiche Rolle bei späteren Aufgaben wie 5 + 2; 7 – 2; 7 – 5; 7 + 6; 7 + 5; 12 – 7; 7 + 4; 7 + 8 usw. Dies wird offenkundig, wenn man mit Blick auf Abb. 7.25 diese Aufgaben löst.

Abb. 7.25: Darstellung der Zahl 7 auf dem Zehnerfeld und im Eierkarton

Die Zahldarstellung auf dem Zehnerfeld (Zehnerrahmen, ten-frame) geht wahrscheinlich zurück auf Wirtz (1978), wurde übernommen von Thompson & Van de Walle (1984), Labinowicz (1985) und seither von vielen anderen (ausführlich in Van de Walle, 1994).

Bei der Einführung des Zehnerfeldes verwendet man auf Karton kopierte Zehnerfelder, die so groß sind, dass die verfügbaren Zählplättchen (Zählchips, Knöpfe, Bohnenkerne) darauf Platz haben. Man braucht dann nur noch zu vereinbaren, dass auf dem Gitter zuerst die obere Reihe von links nach rechts aufgefüllt wird (so wie wir in einem Buch lesen, in den Zeilen von links nach rechts, die Zeilen von oben nach unten).

Das Zehnerfeld kann aufgefasst werden als eine Abstraktion von dem in Deutschland üblichen Zehner-Eierkarton, ist aber für viele Zwecke handlicher als dieser. In Abb. 7.26 sind die Zahlen von 0 bis 10 auf dem Zehnerfeld dargestellt. Der große Vorteil dieser visuellen Darstellung der Punktmengen liegt darin, dass man die Anzahl der Punkte mit einem Blick erkennt, ohne zu zählen. Man kann diese Bilder als *Kennkarten* der Zahlen auffassen. Bis vier Punkte sind leicht auf einen Blick zu erkennen. Die Fünf erkennt man daran, dass eine Reihe des Gitters voll ist. Die Sechs erkennt man als 5 + 1, die Zehn als zwei Fünfen, beziehungsweise als volles Zehnergitter.

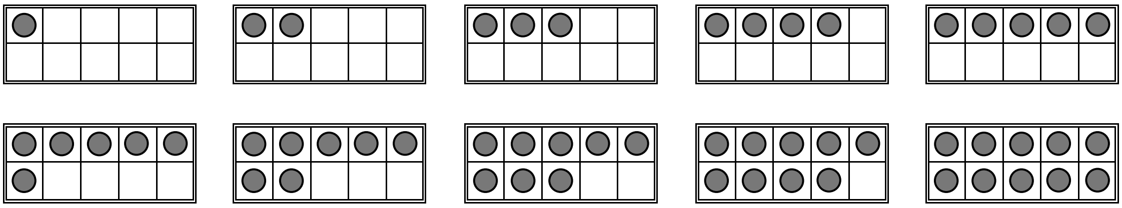


Abb. 7.26: Darstellung der Zahlen 1 bis 10 auf dem Zehnerfeld

FLEXER (1986) schlägt vor, Fünferstreifen und Zehnerfelder in aufrechter Stellung zu benutzen, so wie auch Zehnerstäbe meist benutzt werden. Die aufrechte Position könnte für manche Linkshänder, Ambidexter und richtungsunsichere Kinder vorteilhaft sein (Abb. 7.27).

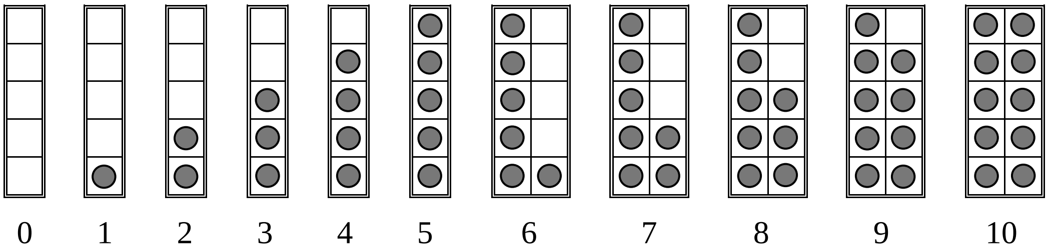


Abb. 7.27: Zahlen von 0 bis 10 auf dem Zehnerfeld

FLEXER lehnt sich mit ihrem Vorschlag an eine Empfehlung der Association of Mathematical Instruction in Japan[1] an, die zur Darstellung der Zahlen bis 10 quadratische Plättchen als Einer und Rechtecke als Fünfer vorschlägt (Abb. 7.28). Im Unterschied zum Zehnerfeld ist hier der Fünfer *nicht* untergliedert. Er kann schneller gelegt werden als fünf einzelne Plättchen.

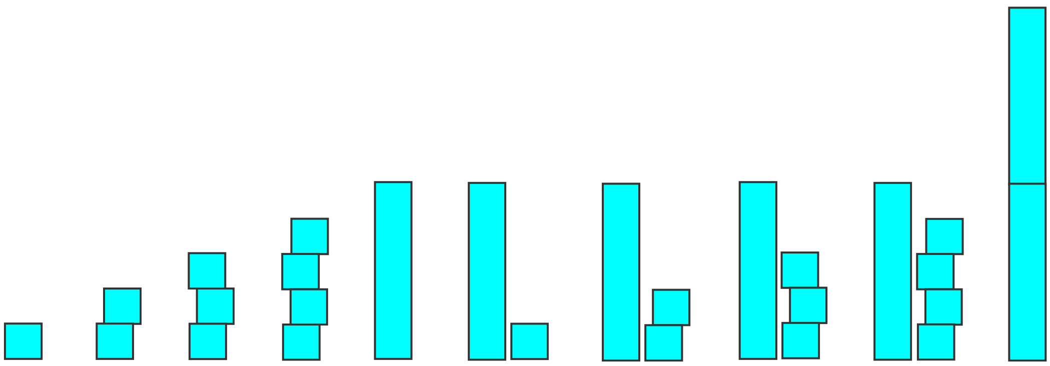


Abb. 7.28: Darstellung der Zahlen 1 bis 9 mit Japan-Tiles

Diese im asiatischen Raum verbreitete Benutzung der Fünfer-/Zweierbündelung scheint sehr günstig zu sein für die Grundlegung des Zahlbegriffs und des Rechnens. Diese Materialien stützen sich auf die Fähigkeit von Schulanfängern, Mengen mit bis zu vier Elementen auf einen Blick – ohne zu zählen – zu erkennen. Gesonderte Repräsentanten für Zweier, Dreier und Vierer sowie Sechser, Siebener usw. wie bei den farbigen Cuisenaire-Stäben sind insofern nicht erforderlich. Die Tiles wurden in Japan entwickelt für den Unterricht mit sehr jungen Kindern (im Kindergarten und im schulischen Anfangs-

[1] EASLEY, 1983; HATANO, 1982; YAMANOSHITA & MATSUSHITA, 1996

unterricht) sowie bei Kindern mit Entwicklungsverzögerungen. Die ungegliederte Fünf als eine Zwischen-Einheit (vor der Zehn als Einheit) ermöglicht, die Zahlen 6, 7, 8 und 9 als "fünfundeins", "fünfundzwei", "fünfunddrei" und "fünfundvier" kennenzulernen und zu begreifen. Sie erleichtert somit die quasi-simultane, nichtzählende Anzahlauffassung im Zahlenraum bis 10. Ein weiterer Vorteil der Fünferbündelung: Sie ist eine gute Vorbereitung auf die schwierigere Zehnerbündelung, die Grundlage unseres Stellenwertsystems. Denn Fünferbündel sind auf Materialebene einfacher zu handhaben und leichter reflektierend zu betrachten als Zehnerbündel. Später werden zwei Fünferbündel zu einem Zehnerbündel zusammengefasst. Die gemischte Fünfer/Zehnerbündelung liegt den fernöstlichen Abacusformen und auch der römischen Zahlenschrift zu Grunde. Später wird die Fünf nicht mehr als Einheit verwendet, sondern durch die Zehn ersetzt (HATANO, 1982, 216). Zur Entwicklung sicherer mentaler Vorstellungsbilder von Zahlen am Zehnerfeld (bzw. mit Japan-Tiles) bietet sich eine Vielzahl von Übungen an.

Schüleraktivitäten

A 1 Zahldarstellung im Zehnerfeld

Man gibt Zahlen vor mit Punktekarten, mit den Fingern, mit Ziffernkarten, mit Zählmarken auf dem Arbeitsprojektor oder nennt Zahlwörter. Die Kinder sollen die Zahlen mit Zählplättchen auf ihren Zehnerfeldern oder mit Japan-Tiles darstellen.

A 2 Zehnerfeld-Blitzblick

Man zeigt der Klasse Zehnerfeld-Karten eine bis drei Sekunden lang und lässt die Kinder sagen, wie viele Punkte sie sehen. Man steigert das Tempo, das macht den Kindern Spaß. Man wiederholt diese Übung oft, aber immer nur für wenige Minuten. Diese Aktivität lässt viele Varianten zu. Beispielsweise können die Kinder jeweils *eins mehr* nennen als die Zahl der Punkte oder die Zahl der leeren Felder.

A 3 Fünf und wie viel?

Man zeichnet ein großes leeres Zehnerfeld an die Tafel oder auf ein Poster, stellt sich daneben und ruft eine Zahl zwischen 5 und 10. Wenn die Kinder "acht" hören, rufen sie im Chor "fünf und drei ist acht".

A 4 Mache 10

Die Lehrerin (oder ein Kind) ruft eine Zahl zwischen 0 und 10. Die Kinder der Klasse rufen die Anzahl, die bis 10 fehlt oder noch besser, sie nennen Zehnerpärchen (beispielsweise "7 und 3 ist 10", "6 und 4 ist 10").

A 5 Übungen am Zehnerfeld

Wichtig bei der Arbeit mit dem Zehnerfeld sind immer die Dialoge mit den Kindern. Nachdem die Kinder einen Blitzblick auf die Zehnerfeld-Karte mit der 8 (oder mit der 4) geworfen haben, kann gefragt werden:

- Wie viele Punkte sind auf der Karte?
- Wie viele Felder sind leer?
- Wie viele Punkte sind es, wenn wir einen dazu tun?
- Wie viele Punkte fehlen bis 10?
- Wie viele Punkte sind es mehr als 5 (weniger als 5)?

Das Zehnerfeld erweist sich bei der Erarbeitung von Zahlvorstellungen als außerordentlich wichtiges Arbeitsmittel. Aber auch außerhalb des Zahlenraums bis 10 ist der Nutzen groß. Es ist der strukturierende Rahmen (ten-frame) für das Darstellen von Anzahlen durch Mengen von Zählplättchen. Die Festlegung, die Plättchen in fester Ordnung zu legen, also zuerst die obere Reihe zu füllen, und zwar in Schreibrichtung, also von links nach rechts, und danach erst die zweite Reihe, stellt ein Bindeglied dar zwischen der Zählreihe (Abschnitt 7.2.1) und der gliedernden Anzahlerfassung (der grundlegend wichtigen Erfassung von Anzahlen aus simultan erfassbaren Teilmengen). Zumindest die Standarddarstellung der Zahlbilder bis 10 sollten *alle* Kinder mühelos auch bloß in der Vorstellung rekonstruieren können.

A 6 Visualisierungsübung

Die Kinder werden gebeten, die Augen zu schließen und sich das leere Zehnerfeld vorzustellen. Dann sollen sie sich vorstellen, dass sie nacheinander in der üblichen Weise 6 (oder eine andere Anzahl) Plättchen auf das Zehnerfeld legen. Jetzt sollen sie mit ihren Worten beschreiben, wie sie die 6 Plättchen sehen (oben eine volle Reihe, also 5, unten links ein einzelnes Plättchen). Die Lehrerin kann folgende Fragen anschließen und die Kinder antworten mit immer noch geschlossenen Augen

- Wie viele sind es mehr (weniger) als fünf?
- Wie viele sind es weniger als 10?
- Wie viele sind in der oberen Reihe (in der unteren Reihe) usw.

Sehr nützlich ist es, die Standard-Darstellung nicht dogmatisch und starr zu verwenden. Durch Auflegen eines Stäbchens können die Kinder auch andere Zerlegungen der Zahlen 6 bis 9 zeigen (Abb. 7.29).

Abb. 7.29: Verschiedene Zerlegungen der Zahl 7

Neben den Standard-Darstellungen (Abb. 7.29) ist auch die Darstellung der Zahlen als Doppeltes oder Doppeltes-und-eins wichtig (Abb. 7.30).

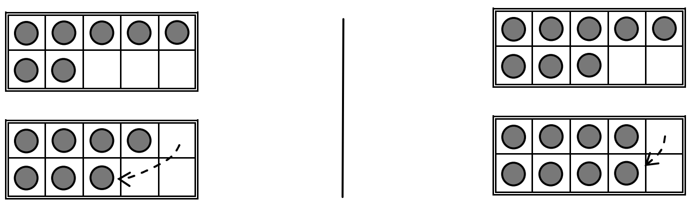
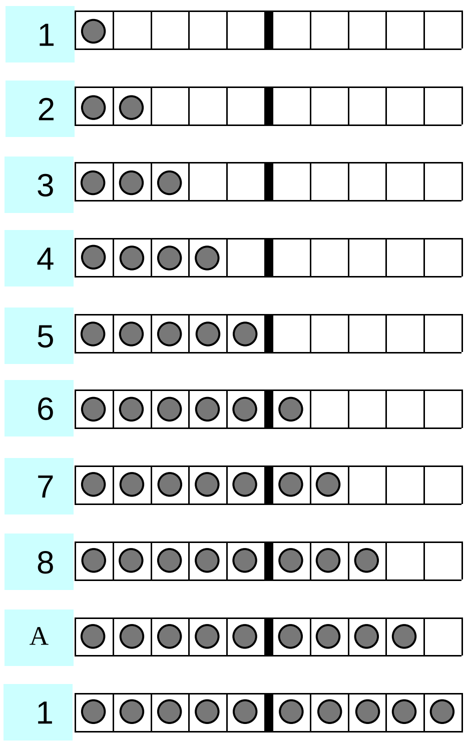


Abb. 7.30: Zehnerfeld-Darstellung der Zahlen 7 und 8 in Standardform und als Verdoppelung/Verdoppe-lung-und-eins.

Statt der *flächigen* Darstellung von Zahlen am Zehner*feld* kann man für die Anzahlen bis 10 auch eine lineare Darstellung am Zehnerstreifen bzw. mit Japan-Tiles verwenden (Abb. 7.31 und 7.32).



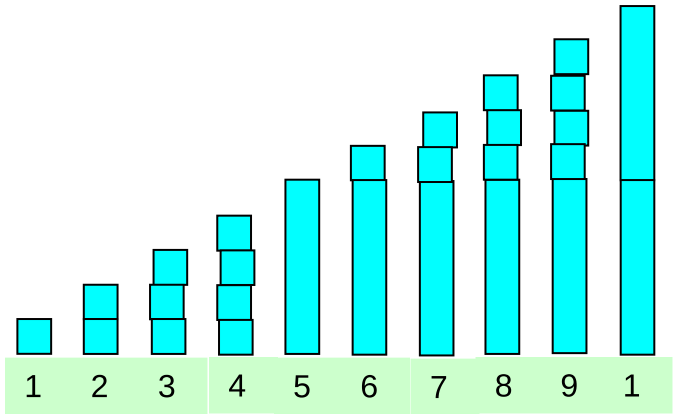


Abb. 7.31: Zahldarstellung am Zehnerstreifen

Abb. 7.32: Zahldarstellung mit Japan-Tiles

Die flächige Darstellung ist anfangs jedoch zu bevorzugen, weil beispielsweise die 7 in Abb. 7.29 leichter aufzufassen ist als die 7 in Abb. 7.31, denn das Erkennen der Zwei erleichtert das Erkennen der Fünf, also des anderen Teils der Sieben. Insofern stellen das Zehnerfeld und die Japan-Tiles nach Abb. 7.27 Vorstufen dar, mit zumindest den folgenden Vorteilen: Die Zusammensetzung der 7 aus einer 5 und einer 2 ist deutlicher als bei der linearen Darstellung. Die flächige Darstellung liegt näher beim Teile-Ganzes-Schema, das der wichtigen Zusammensetzung von Zahlen aus anderen Zahlen zugrunde liegt. Die lineare Darstellung dagegen ist näher am Zählreihenschema und kann eher eine ordinale Zahlauffassung anregen.

7.4 Anzahlen bis 100

Auf der Grundlage des Teile-Ganzes-Schemas lassen sich die Zahlen bis 100 verstehen als Zusammensetzung aus Zehnern und Einern. Die Zehnerziffer gibt dabei die Anzahl der Zehner, die Einerziffer die Anzahl der Einer an (Abb. 7.33).

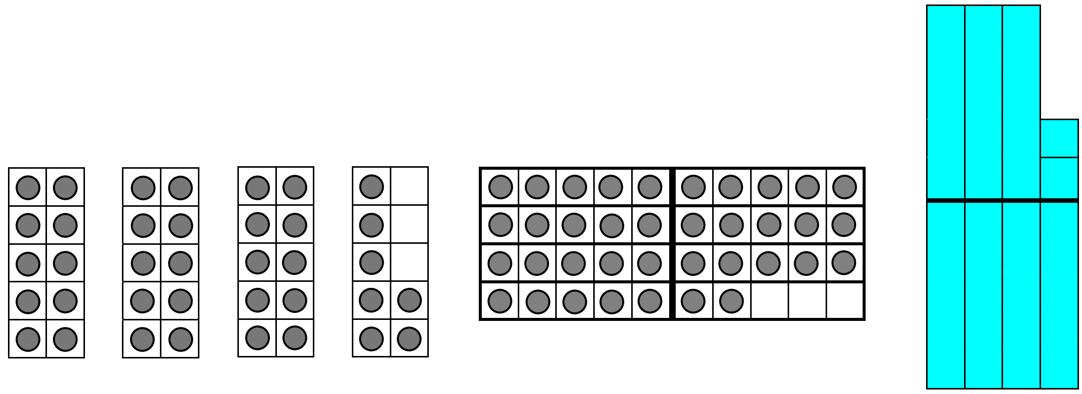


Abb. 7.33: Darstellung der Zahl 37 mit Zehnerfeldern, Zehnerstreifen und Japan-Tiles

Die Darstellung mit Zehnerfeldern passt zur Alltagssituation des Verpackens von 37 einzelnen Eiern in Zehnerkartons. Die Darstellung mit Zehnerstreifen kann erfolgen durch Auslegen von leeren Zehnerstreifen mit 37 Zählplättchen. Das Kind kann dabei feststellen: Wenn man 37 einzelne Plättchen auf Zehnerstreifen legt, werden drei Zehnerstreifen voll, für den vierten Streifen bleiben 7 Plättchen übrig. 37 ist also dreißig-und-sieben. Dieses Wissen über die Zusammensetzung zweistelliger Zahlen ist für Kinder keineswegs selbstverständlich (vgl. Abschnitt 3.7 und 3.8).
Die Darstellung mit Japan-Tiles ist die abstrakteste dieser drei Darstellungen. Es sind nicht mehr alle 37 Einheiten sichtbar. Statt dessen sieht man drei Doppel-Fünfen, also drei Zehner, also 30 und dazu noch 7 als eine Fünf und zwei Einzelne. Diese Darstellung gibt dennoch eine gute quantitative Vorstellung von der Zahl 37, *wenn* die Koppelung der Fünf an fünf Einzelne bzw. der Zehn an 10 Einzelne beim Kind genügend entwickelt ist.
Die Zusammensetzung der Zahl 37 aus mehreren Teilen ist wohl am deutlichsten bei der Darstellung mit Zehnerfeldern. Diese Darstellung hat wohl auch die geringste Nähe zur Zählreihe (zweidimensionalen numberline), also auch zur Hundertertafel. Dies wirkt einer einseitig ordinalen Zahlauffassung (37 als das siebenunddreißigste Element in der Zahlwortreihe) entgegen.
Wichtig für die Entwicklung quantitativer Vorstellungen im Zahlenraum bis 100 sind die klassischen Übungen zur Zahl*auffassung* (von einer konkreten oder bildhaften Darstellung zur symbolischen, also Zahlwörter- oder Ziffernschreibweise) und zur Zahl*darstellung* (von der sprachlichen oder Zifferndarstellung zu einer zeichnerischen oder mit konkretem Material).

Die in der deutschen Sprache bestehende Diskrepanz zwischen der Reihenfolge beim Sprechen und beim Schreiben zweistelliger Zahlen stellt eine besondere Schwierigkeit für Kinder dar, vor allem dann, wenn die Einführung des Hunderterraums vorwiegend auf der symbolischen Ebene, also mit gesprochenen und geschriebenen Symbolen erfolgt. Man spricht "dreiundfünfzig" und schreibt "53" (zuerst die Ziffer 5 und danach die Ziffer 3 in der Reihenfolge von links nach rechts). Hauptgrund, dem naiv wohlmeinenden Rezept "schreibe wie du hörst" (bei dreiundfünfzig also zuerst die Ziffer 3) *nicht* zu folgen ist: Dem Kind würde die bewusste Analyse des gehörten Zahlwortes erspart, es müsste nicht bewusst wahrnehmen, welches die Zehner- und welches die Einerziffer ist, die Aktivierung von quantitativer Zahlvorstellung unterbliebe. Hinzu kommt, dass die zweistelligen Zahlen bis 20 meist von links nach rechts geschrieben werden, ebenso die glatten Zehnerzahlen. Die inkonsequente Schreibweise – mal so, mal so – wäre eine ständige Fehlerquelle. Zahlreiche Rechenfehler von Schülern wurzeln hier. Methodische Hinweise zur Vorbeugung gegen Inversionsfehler und Schreibrichtungsfehler findet man in GERSTER, 1994a, 67-70; GOTTBRATH, 1984; KLÖCKENER, 1990).

In der Arbeit mit rechenschwachen Kindern haben sich insbesondere sogenannte Segu-in-Plättchen bewährt. Das sind zehn Kärtchen für die Ziffern 0 bis 9 und neun doppelt so breite Kärtchen für die Zehnerzahlen 10 bis 90. Wenn ein Kind damit die Zahl "dreiundfünfzig" legen möchte, muss es zuerst die "50" hinlegen und danach die "3" auf die Null von der "50". Nicht wenige Kinder meinten daraufhin: "Ach, jetzt verstehe ich, wo die Null von der Fünfzig geblieben ist." (Bis dahin war die „5“ in „53“ eben nur eine „5“.)

Das Kapitel zur Entwicklung des Zahlverständnisses abschließend soll VON GLASERSFELD (1987, XII) zitiert werden, der seinerseits ein Zitat wiedergibt.

> Obschon sowohl Berkeley wie auch Vico ganz ausdrücklich sagten, dass die Zahlen vom denkenden Geist konstruiert werden, ging mir das Licht erst auf dank einer Anekdote, die Juan Caramuel, ein Bischof von Vigevano, um 1670 geschrieben hatte, und die ich erst dreihundert Jahre später zu lesen bekam.
>
>> „Da war einmal ein Mann, der sprach im Schlaf. Als die Uhr die vierte Stunde schlug, sagte er: "Eins, eins, eins, eins – die Uhr ist ja verrückt, sie hat viermal eins geschlagen!" Der Mann hatte offensichtlich viermal einen Schlag wahrgenommen, nicht aber, dass die Uhr vier geschlagen hatte. Was er im Sinn hatte, war nicht vier, sondern viermal eins; woraus man ersieht, dass Zählen etwas anderes ist, als mehrere Dinge als gleichzeitig zu betrachten. Hätte ich vier Uhren in meiner Bibliothek, und alle vier schlügen eins zur gleichen Zeit, so würde ich nicht sagen, sie hätten vier geschlagen, sondern viermal eins. Dieser Unterschied liegt nicht in den Dingen, unabhängig von den Operationen des Geistes. Im Gegenteil, er hängt vom Geist desjenigen ab, der zählt. Der Intellekt also *findet keine* Zahlen, sondern er *macht* sie; er betrachtet unterschiedliche Dinge, jedes an sich verschieden, und vereinigt sie willentlich im Denken“. (CARAMUEL, 1670/1977:13)

8 Addition und Subtraktion

8.1 Operationsverständnis

Schulanfänger verfügen bereits über vielfältige Erfahrungen in Sachsituationen des Addierens und Subtrahierens. Aufgaben der Art "Lege zwei von deinen Klötzen vor dich hin. Wenn ich dir sieben von meinen Klötzen gebe, wie viele Klötze hast du dann insgesamt?" lösten 90 % von ihnen richtig (PADBERG, 1992, 75). Bei der Subtraktionsaufgabe "Lege acht von deinen Klötzen vor dich hin. Wenn du mir fünf von deinen Klötzen gibst, wie viele Klötzchen hast du dann noch?" waren es sogar 98 % richtige Lösungen (PADBERG, 1992, 94). Wo liegt angesichts so hoher Erfolgsquoten von Schulanfängern das Problem?

Entscheidend für die Beurteilung der genannten Rechenfähigkeiten der Kinder ist, dass obige Aufgaben an das Alltagswissen der Kinder anknüpften, in Alltagssprache formuliert waren und mit Material gelöst werden durften. Zwar benutzten bei der Additionsaufgabe 40 % und bei der Subtraktionsaufgabe ein Drittel der Schüler das bereitgelegte Material und es kann gut sein, dass diese Kinder die Aufgaben bloß mit Hilfe einer Zeichnung oder in der Vorstellung nicht hätten lösen können. Vor allem aber ist mit obigen Ergebnissen nicht gesagt, dass die Kinder die Aufgaben in symbolischer Form (als $2 + 7$, $8 - 5$ oder gar in Gleichungsschreibweise $2 + 7 = 9$ oder $8 - 5 = 3$) hätten lösen können. Auch bedeuten obige Erfolgsquoten nicht, dass die Kinder Summen wie $2 + 7$ oder Differenzen wie $8 - 5$ auswendig wüssten. Unter welchen Umständen wollen wir sagen: Das Kind hat die Operationen des Addierens/Subtrahierens "verstanden"?

Operationsverständnis beim Addieren/Subtrahieren besteht nach unserer Auffassung in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen

a) (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
b) modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
c) symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrundeliegenden Quantitäten und Rechenoperationen.

Eine Additions- oder Subtraktionsaufgabe kann demnach in drei verschiedenen "Sprachen" dargestellt werden: Als eine konkrete Situation, eine bild- oder modellhafte Darstellung oder eine symbolische Darstellung (Abb. 8.1). *Operationsverständnis* zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen Sprachen hin- und herübersetzen zu können (HUINKER, 1993; VAN DE WALLE, 1994, 116). Dabei sind sechs verschiedene Übersetzungsrichtungen möglich.

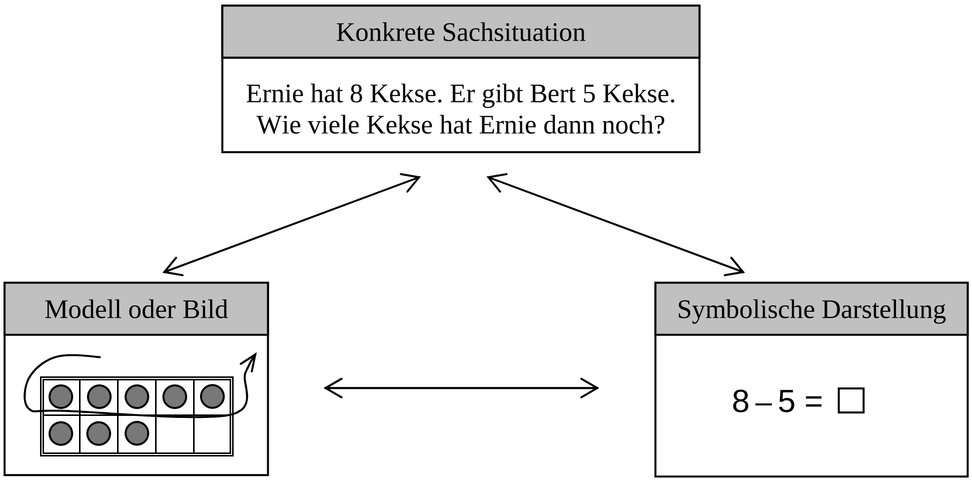


Abb. 8.1: Verschiedene Repräsentationen einer Subtraktionsaufgabe

Erwachsenen sind die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Repräsentationen in Abbildung 8.1 unmittelbar klar. Die Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsformen sind ihnen so geläufig, dass diese "automatisch" ablaufen, also meistens nicht mehr bewusst wahrgenommen werden. Daher fällt es ihnen schwer, sich in die beim Kind noch erforderlichen Denkkonstruktionen hineinzuversetzen. Für das Kind ist es ein großer Unterschied, ob eine Aufgabe als konkrete Sachsituation, als bildliche Darstellung oder als mit Symbolen geschriebener Rechenterm vorgelegt wird. Wenn ein Kind die Kekse-Aufgabe mit Keksen, mit Hilfe von Zählplättchen oder mit Hilfe von gezeichneten Kringeln löst, dann hat das mit einem Subtraktionsterm wie 8 – 5 möglicherweise nichts zu tun. Und wenn man einem Kind sagt, dass es die Aufgabe 8 – 5 lösen kann, indem es von der Zahl 8 um 5 Schritte zurückzählt (vgl. Abschnitt 8.5.1), dann hat dies mit einer Sachsituation wie in Abb. 8.1 wenig zu tun. Diese Zählhandlung kann mechanisch durchgeführt werden ohne jede Vorstellung von Quantitäten.

Bildliche Darstellungen von Rechenoperationen sind häufig keineswegs eindeutig. Um die Abb. 8.2 als eine Subtraktionsaufgabe zu interpretieren, müssen Konventionen bekannt sein: Die beiden Bildteile rechts sollen nicht etwa Satelliten mit Antennen darstellen, sondern "durchgestrichene Plättchen", also wegzunehmende oder bereits weggenommene (?) Plättchen.

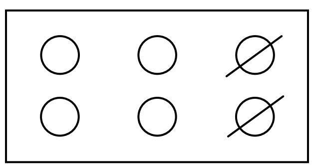


Abb. 8.2: Bildliche Darstellung einer Subtraktionsaufgabe

Selbst wenn das Kind dieses weiß, hat es immer noch große mentale Anforderungen zu meistern. Das Bild kann sagen: Es sollen zwei Plättchen weggenommen werden. Aber wovon? Schulbuchautoren meinen mit Abb. 8.2, es sollen 2 Plättchen von 6 Plättchen weggenommen werden. Diese 6 Plättchen entstehen aber erst durch eine mentale Rekonstruktion: Die Striche müssen "weggedacht" werden, so dass 6 Plättchen als ein Ganzes vorliegen, von dem der eine Teil (die beiden durchgestrichenen Plättchen) weggenommen werden soll. Wenn diese Rekonstruktion der 6 gelungen ist, besteht für das Kind immer noch die Schwierigkeit, dies in eine Gleichheitsaussage auf der symbolischen Ebene umzusetzen. Ein "rechenschwaches" Kind schrieb in diesem Zusammenhang die Gleichung $4 - 2 = 6$ und verstand diese Gleichung so: 4 Plättchen sind da, 2 Plättchen wurden weggenommen, also sind es insgesamt 6 Plättchen.
Nicht wenige Kinder leisten diese Konstruktion der Gesamtmenge mit 6 Plättchen angesichts dieser Abbildung nicht (SEMADINI in MANSFIELD et al., 1996, 225). Sie interpretieren Abb. 8.2 als eine bildliche Darstellung der Aufgabe $4 - 2$. Sie sehen 4 vorhandene Plättchen und dass 2 Plättchen wegzunehmen sind. Auch diese Interpretation lässt noch verschiedene Lösungen zu: Man kann von den 4 Plättchen 2 Plättchen (laut Anweisung) wegnehmen und erhält das Ergebnis 2 oder man kann die beiden wegzunehmenden Plättchen einfach weglassen (ignorieren) und erhält die richtige Lösung 4 aufgrund einer falschen Überlegung (die Gesamtzahl 6 wurde dabei überhaupt nicht konstruiert).

Die gleiche Schwierigkeit des Verständnisses bildlicher Darstellungen zur Subtraktion zeigen "rechenschwache" Kinder beim Verständnis der Aufgabe 4.3 im Hamburger Beobachtungsbogen (AMT FÜR SCHULE, Hamburg, 1991, 18). Abgebildet ist ein Baum, auf dem 4 Äpfel hängen. 2 Äpfel liegen auf dem Boden. Die Kinder sollen der Situation eine Minusaufgabe zuordnen. Erwartet wird die Zuordnung der Subtraktionsaufgabe $6 - 2$. Häufig nennen die Kinder statt dessen aber die Aufgabe $4 - 2$. Sie interpretieren die beiden auf dem Boden liegenden Äpfel als die Zahl 2, die auf dem Baum hängenden als die Zahl 4. Solche Interpretationen werden sogar durch Unterrichtswerke nahegelegt.

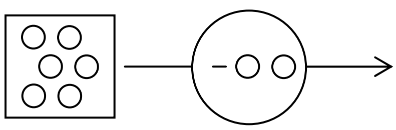


Abb. 8.3: Bildliche Darstellung einer Subtraktionsaufgabe in einem Unterrichtswerk

In dieser Darstellung werden die Plättchenmengen als Symbole für Anzahlen verwendet. Es ist also die Differenz $6 - 2$ gemeint. Kinder können die Abbildung aber auch so verstehen: Das Minuszeichen sagt, dass 2 Plättchen wegzunehmen sind. 8 Plättchen sind es insgesamt, 2 sind wegzunehmen, also bleiben 6 Plättchen übrig. Zum gleichen Ergebnis gelangen sie durch die Überlegung: Die beiden Plättchen hinter dem Minuszeichen sind wegzunehmen, also bleiben die 6 Plättchen übrig. Irritierend an der Abbil-

dung ist, dass die wegzunehmenden Plättchen *doppelt gezeichnet* sind, einmal im Minuenden, einmal als Subtrahend.
Weniger verwirrend wäre es, wenn das Minuszeichen ausschließlich als Symbol zwischen Zahlen und nicht zwischen Mengen verwendet würde. Entscheidend für das Verständnis der Subtraktion ist, dass der *Subtrahend ein Teil des Minuenden* ist und beim Berechnen der Differenz der andere Teil des Minuenden gesucht wird. Diese Sichtweise wird in Abschnitt 8.3 näher ausgeführt. Zuvor werden im Abschnitt 8.2 Sachsituationen zur Addition und zur Subtraktion betrachtet.

8.2 Konkrete Situationen des Addierens und Subtrahierens

RADATZ u. a. (1996, 77-80) geben eine Übersicht über mögliche Sachsituationen zur Addition und Subtraktion. Die Aufgaben sind der Übersicht wegen alle aus demselben Sachzusammenhang entnommen und mit denselben Zahlenwerten versehen. Die angegebenen Lösungsprozentsätze stammen aus einer empirischen Untersuchung von Erstklässlern mit ähnlichen Zahlenwerten und ähnlichen Kontexten (STERN, 1992). Sie geben also nur eine allgemeine Tendenz des Schwierigkeitsgrades der jeweiligen Aufgabe an. Aufgaben, für die kein Prozentsatz angegeben ist, kamen in der Untersuchung von Stern nicht vor. Die Unterscheidung der Strukturtypen soll Lehrkräfte für die Komplexität von Additions- und Subtraktionssituationen sensibilisieren. Die nachfolgenden "eingekleideten" Aufgaben sollen nicht als beispielhafte Formulierungen für Sachaufgaben angesehen werden. Dafür ist der Platz in der Tabelle zu knapp. Sie sind hier künstliche Konstrukte, welche lediglich die *Struktur* einer großen Vielfalt echter Problemsituationen aufzeigen sollen.

An den Lösungsprozentsätzen sehen wir, dass Kindern jene Aufgaben leichter fallen, bei denen eine Handlung nahe liegt. Das mag an den Vorerfahrungen der Kinder liegen, aber auch daran, dass im Unterricht diese Situationen eher behandelt werden als die Situationen beispielsweise des Ausgleichens oder gar des Vergleichens. Besonders schwierig (Lösungsprozentsätze 22 % bzw. 16 %) sind Aufgaben, bei denen irreführende Signalwörter auftreten (das Wort "mehr" bei einer Subtraktion oder "weniger" bei einer erforderlichen Addition).

Sachsituationen zur Addition und Subtraktion

Verändern *einer* Menge (Dynamische Situationen, funktionale Aufgaben)

Aufgabentyp	**Beispielaufgabe**	**richtige Lösungen**
Dazugeben		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 4 Kekse. Bert gibt ihm noch 3 Kekse dazu. Wie viele Kekse hat Ernie jetzt?	89 %
Veränderung unbekannt	Ernie hat 4 Kekse. Dann gibt Bert ihm weitere Kekse. Jetzt hat Ernie 7 Kekse. Wie viele hat Bert ihm gegeben?	52 %
Ausgangslage unbekannt	Am Anfang hatte Ernie einige Kekse. Dann gab Bert ihm 3 Kekse dazu. Jetzt hat Ernie 7 Kekse. Wie viele hatte er zu Anfang?	49 %
Weggeben		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. 3 Kekse gibt er an Bert ab. Wie viele Kekse hat Ernie jetzt noch?	95 %
Veränderung unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Davon gibt er einige an Bert ab. Dann hat er noch 4 Kekse. Wie viele hat er Bert gegeben?	49 %
Ausgangslage unbekannt	Ernie hat einige Kekse. Dann gibt er 3 Kekse an Bert ab. Jetzt hat er noch 4 Kekse. Wie viele hatte er zu Anfang?	38 %
Ausgleichen nach oben („genau so viel wie ...“)		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 3 Kekse. Er bekommt 4 Kekse dazu. Jetzt hat er *genau so viele* Kekse wie Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	
Veränderung unbekannt	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 7 Kekse. Wie viele Kekse muss Ernie noch bekommen, damit er *genau so viele* Kekse wie Bert hat?	96 %
Ausgangslage unbekannt	Ernie hat einige Kekse. Bert hat 7 Kekse. Nun bekommt Ernie 4 Kekse dazu. Dann hat er *genau so viele* Kekse wie Bert. Wie viele Kekse hatte Ernie zu Anfang?	
Ausgleichen nach unten („genau so viel wie ...“)		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Er gibt 3 Kekse ab. Jetzt hat er *genau so viele* Kekse wie Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	
Veränderung unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 3 Kekse. Wie viele Kekse muss Ernie abgeben, damit er *genau so viele* hat wie Bert?	96 %
Ausgangslage unbekannt	Ernie hat einige Kekse. Bert hat 3 Kekse. Nun gibt Ernie 4 Kekse ab und hat *genau so viele* wie Bert. Wie viele Kekse hatte Ernie zu Anfang?	

Vergleichen *zweier* Mengen (Statische Situationen, komparative Aufgaben)

Aufgabentyp	**Beispielaufgabe**	**richtige Lösungen**
Vergleichen zweier Mengen („mehr als ...“)		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 4 Kekse *mehr als* Ernie. Wie viele Kekse hat Bert?	53 %
Veränderung unbekannt	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 7 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert *mehr als* Ernie?	28 %
Ausgangslage unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Er hat 3 Kekse *mehr als* Bert . Wie viele Kekse hat Bert?	22 %
Vergleichen zweier Mengen („weniger als ...“)		
Ergebnis unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 4 Kekse *weniger als* Ernie. Wie viele Kekse hat Bert?	58 %
Veränderung unbekannt	Ernie hat 7 Kekse. Bert hat 4 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert *weniger als* Ernie?	32 %
Ausgangslage unbekannt	Ernie hat 4 Kekse. Er hat 3 Kekse *weniger als* Bert. Wie viele Kekse hat Bert?	16 %

Vereinigen *zweier* Mengen (Statische Situationen)

(„zusammen“)		
Das Ganze ist unbekannt	Ernie hat 3 Kekse. Bert hat 4 Kekse. Wie viele Kekse haben sie *zusammen*?	87 %
Ein Teil ist unbekannt	Ernie und Bert haben *zusammen* 7 Kekse. Ernie hat 3 Kekse. Wie viele Kekse hat Bert?	55 %

Tab. 8.1: Sachsituationen zur Addition und Subtraktion

8.3 Additions- und Subtraktionsterme und ihre Darstellung

In den Abschnitten 7.2.2 bis 7.2.4 und 7.3.2 haben wir häufig Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen betrachtet und dabei Sprechweisen wie "die Fünf als Drei-und-zwei" oder "die Acht als Fünf-und-drei" verwendet. Damit sollte deutlich gemacht werden, dass arithmetische Aussagen ohne symbolische Schreibweisen in Alltagssprache beschrieben werden können. Dies sollte im Mathematikunterricht der Grundschule auch stets geschehen. Erst allmählich werden dann symbolische Schreibweisen für Zahlen und Rechenoperationen eingeführt. Dadurch soll vermieden werden, dass Kinder den Eindruck gewinnen, Mathematik sei vorwiegend ein Manipulieren mit Symbolen, Zahlen seien nichts anderes als Ziffern und Rechenterme nichts anderes als Aufforderungen zum Zählen. Symbole für Zahlen und Rechenoperationen sollen erst dann eingeführt werden, wenn die Kinder mit den Inhalten bereits vertraut sind. *Mathematische Symbole* sollen im mathematischen Anfangsunterricht nur eine Art *Kurzschrift für Quantitäten und Handlungen mit diesen* sein, welche die Kinder schon kennen.[1]

8.3.1 Einführung des Pluszeichens

Das *Pluszeichen* führen wir ein als ein *Zeichen für die Zusammensetzung eines Ganzen aus Teilen.* Beispielsweise erfinden Kinder verschiedene Möglichkeiten, die Anzahl 6 mit Wendeplättchen darzustellen (Vorderseite blau, Rückseite rot). Der Summenterm wird eingeführt als eine Kurzschreibweise, die uns beispielsweise sagt, wie viele Plättchen jeweils blau bzw. rot sind (WITTMANN & MÜLLER u. a., 1994, Zahlenbuch I, 22). Die Verwendung der Würfel-Sechs und das Zahlbild für die Sieben in nachfolgenden Schüleraktivitäten soll die Wahrnehmung des *Ganzen* erleichtern.

Schüleraktivitäten

A 1 Zusammen immer 6

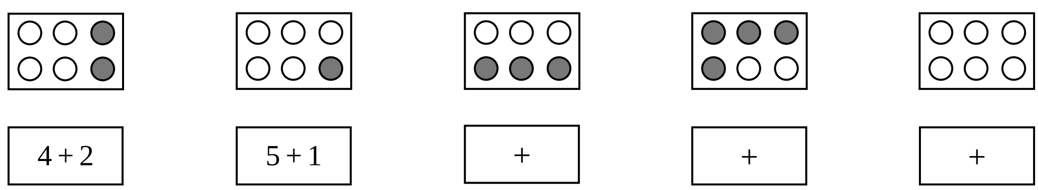


Abb. 8.4: Verschiedene Zusammensetzungen von 6 Plättchen

[1] Vgl. Abschnitt 5.6.4

A 2 Zusammen immer 7

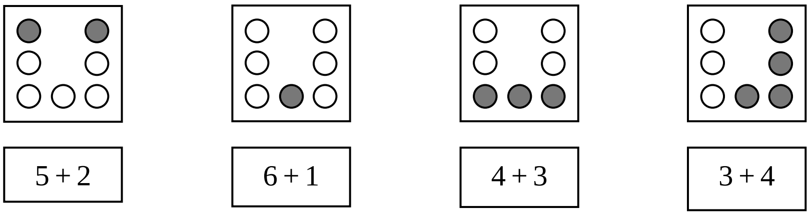


Abb. 8.5: Verschiedene Zusammensetzung von 7 Plättchen

Diese Art der Einführung hat wesentliche Vorteile:

Erstens: Der Summenterm (Plus-Term, Plus-Namen ist ein *Name* für eine Gesamtanzahl, die sich aus zwei Anzahlen zusammensetzt und nicht bloß eine Anweisung, von einer gegebenen Zahl um eine gegebene Anzahl von Schritten weiterzuzählen. Nebenbei sei angemerkt: Diese Auffassung entspricht dem mathematischen Termbegriff als der Verknüpfung von Zahlen, wobei die Summe und die Differenz ebenfalls eine Zahl bezeichnen. Ohne das Teile-Ganzes-Konzept bleibt das Kind hängen an der Deutung von Rechentermen als Handlungsanweisungen (5 + 2 = 7 im Sinne des Operatorkonzeptes als „5 und 2 dazu ergibt 7).

Zweitens: Die Zusammensetzung von Zahlen aus anderen Zahlen ist wahrscheinlich die wichtigste konzeptuelle, d. h. beziehungsstiftende Leistung der ersten Schuljahre (Abschnitt 7.2.4). Sie ermöglicht unmittelbar einleuchtende Zugänge zum vorteilhaften Rechnen bis hin zur Ableitung der Basisfakten aus bereits bekannten Zahlensätzen (Abschnitte 8.5 und 8.6). Beispielsweise ist nach dem Teile-Ganzes-Verständnis unmittelbar klar, dass die Namen „7 + 2“ und „2 + 7“ *dieselbe* Gesamtzahl bezeichnen (und somit auch „2 + 7“ in der Form „zwei mehr als 7“ berechnet werden kann), während die Operatoren +2 und +7 als Zufüghandlungen verschieden sind.

Drittens: Wenn eine Addition als Zufüghandlung gedeutet wird, dann ist nach dem Hinzufügen der Anfangszustand nicht mehr erkennbar, auch nicht das Zugefügte, nur noch das Ergebnis der Handlung ist sichtbar. Deshalb stellen manche Schulbücher die Zufüghandlung mit Hilfe von drei Bildern dar. Aber auch dann ist eine den Zusammenhang der drei Zahlen (Summanden und Summe) reflektierende Abstraktion schwierig.

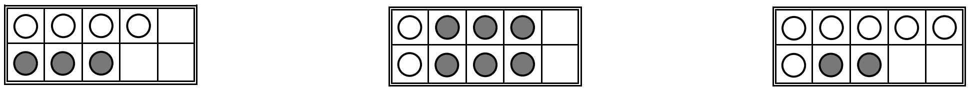
Viertens: Der Summenterm lässt sich als Beschreibung einer statischen Situation auf alle statischen Situationen anwenden. Wenn die Anwendungssituation eine dynamische ist, lässt er sich auch dynamisch deuten: Zuerst werden die blauen Plättchen hingelegt, dann die roten Plättchen *hinzugefügt*. Die Summe gibt dann den Endzustand an.

Fünftens: Die Einführung des Pluszeichens geschieht unabhängig von der Einführung des Gleichheitszeichens. Dadurch wird die unterschiedliche Bedeutung der beiden Symbole deutlich. Das Pluszeichen ist ein Zeichen für eine *Operation* (wie auch das

Minus-, das Mal- und das Divisionszeichen), das Gleichheitszeichen ein Zeichen für eine *Relation* (im Sinne von größer, kleiner, gleich).

Schüleraktivitäten

Allen Aktivitäten in den Abschnitten 7.2.3 und 7.3.2 können jetzt Summenterme zugeordnet werden. Werden Plusaufgaben mit Wendeplättchen auf einem Zehnerfeld gelegt, kann neben der Anzahl der blauen und der roten Plättchen auch die Gesamtzahl unmittelbar, ohne zu zählen, erkannt werden, beispielsweise $4+3$ sind 7, $2+6$ sind 8.

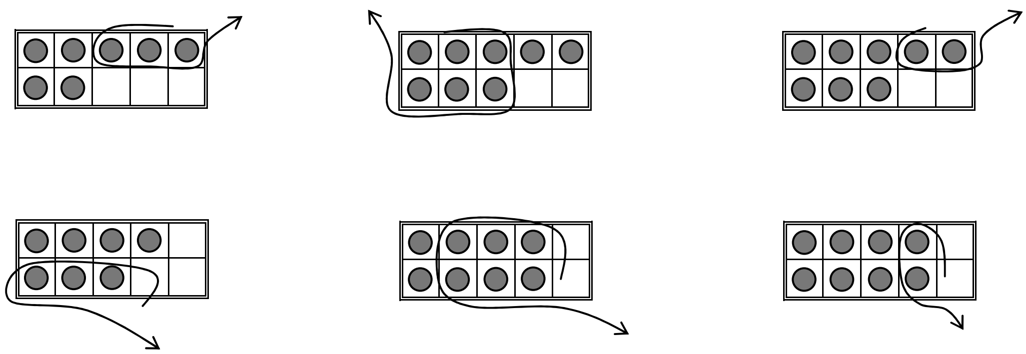


$4+3$ oder $3+4$ $2+6$ oder $6+2$ $6+2$ oder $2+6$

Abb. 8.6: Darstellung von Summentermen

8.3.2 Einführung des Minuszeichens

Das *Minuszeichen* führen wir ein als ein Zeichen dafür, dass die Anzahlen eines Ganzen und eines Teiles des Ganzen bekannt sind. Der Minusterm bezeichnet den anderen (unbekannten) Teil des Ganzen. Wenn beispielsweise 7 Wendeplättchen auf einem Zehnerfeld liegen und 3 davon rot sind, dann sind 7 – 3 Plättchen blau, das sind 4 Plättchen (Abb. 8.7).



$7-3$ $8-6$ $8-2$

Abb. 8.7: Darstellung von Minustermen

Will man den Term $7-3$ bestimmen, dann legt man beispielsweise 7 blaue Plättchen auf ein Zehnerfeld und wendet anschließend 3 davon. Somit erkennt man den bekannten Teil (3 rote Plättchen) der Gesamtmenge. Der Term $7-3$ bedeutet in diesem Modell also: Es sind insgesamt 7 Plättchen, 3 davon sind rot. Gesucht ist der *andere* Teil (die Anzahl der blauen Plättchen). Wenn wir die roten Plättchen deuten als *wegzunehmende* Plättchen, dann sehen wir: Die Deutung des Subtrahierens als Wegnehmen ist ein Sonderfall des Subtrahierens als der Bestimmung des fehlenden Teils im Teile-Ganzes-Konzept.

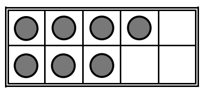
Das Teile-Ganzes-Konzept der Subtraktion hat typische Vorteile:

Erstens: Die Differenz $a - b$ sagt: a ist die Anzahl des Ganzen, b ist die Anzahl des einen Teils des Ganzen (häufig gedeutet als das Wegzunehmende), $a - b$ bezeichnet die Anzahl des anderen Teils. Damit bezeichnet die *Differenz* eine *Zahl* (nicht bloß eine Wegnehmhandlung).

Zweitens: Ohne das Teile-Ganzes-Konzept bleibt das Kind hängen an der Deutung von Differenzen als Handlungsanweisungen (als Wegnehmen oder Rückwärtsgehen auf der Zahlenreihe). Dann ist die Deutung der Differenz als Unterschied oder als Ergänzen erschwert.

Drittens: Da der wegzunehmende Teil nicht entfernt wird, sondern nur durch Umdrehen von Wendeplättchen gekennzeichnet oder ein bisschen zur Seite geschoben wird, kann man gleichzeitig die Gesamtmenge, die wegzunehmende Menge und die Restmenge (Differenzmenge) sehen. Dies ermöglicht reflektierende Abstraktion der Beziehung zwischen den drei beteiligten Zahlen.

Viertens: Beim Teile-Ganzes-Konzept wird der Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion besonders deutlich. Ein- und dieselbe Situation (Abb. 8.8) lässt sich deuten als zwei Additionsaufgaben und zwei Subtraktionsaufgaben.



$4 + 3$

$3 + 4$

$7 - 3$

$7 - 4$

Abb. 8.8: Additions-und Subtraktionsterme

Fünftens: Das Teile-Ganzes-Konzept lässt sich gut mit Hilfe eines Tabletts modellieren (Abb. 8.9).

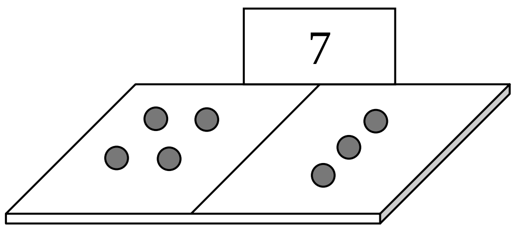


Abb. 8.9: Modellierung der Addition $4 + 3$ nach dem Teile-Ganzes-Konzept mit einem Tablett und einem Schild für die Gesamtzahl

Legen wir auf die eine Seite des Tabletts 4 Plättchen und auf die andere Seite 3, so liegen insgesamt $4 + 3$ Plättchen auf dem Tablett. Das sind 7 Plättchen.

Wenn wir eine Subtraktionsaufgabe modellieren wollen, decken wir einen Teil (die gesuchte Differenz) mit einem Stück Karton oder Tuch zu (Abb. 8.10).

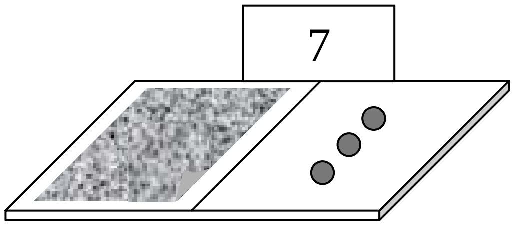


Abb. 8.10: Darstellung der Subtraktionsaufgabe $7 - 3$ nach dem Teile-Ganzes-Konzept

Wir wissen: Auf dem Tablett sind insgesamt 7 Plättchen. Der eine Teil sind 3 Plättchen. Wie viele Plättchen bilden den anderen Teil (die Restmenge)? Die Antwort lautet $7 - 3$. Dies sind 4 Plättchen, denn $4 + 3$ sind zusammen 7 Plättchen.

Sechstens: Das Teile-Ganzes-Konzept für den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion liegt auch dem Konzept der Zahlenmauern (Abb. 8.11) zugrunde, allerdings schon weitgehend auf der symbolischen Ebene.

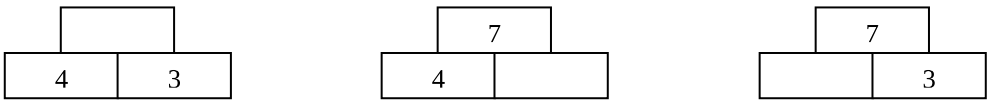


Abb. 8.11: Zahlenmauer als Modell für die Addition und Subtraktion

Hierbei wird vereinbart: Der auf die beiden unteren Steine aufgelegte Stein stellt die Summe der beiden unteren Steine dar.

Siebtens: Das Teile-Ganzes-Konzept ist Grundlage für das Verständnis
beim Addieren: die Teile zusammen,
beim Subtrahieren: der andere (der fehlende) Teil,
beim Multiplizieren: mehrere gleiche Teile zusammen,
beim Dividieren: in gleichgroße Teile zerlegen.

8.4 Additions- und Subtraktionsgleichungen

Nicht selten stoßen Lehrer auf Schülerfehler der Art $4 + \boxed{11} = 7$. Dieser Fehler ist ein Anzeichen dafür, dass das Kind die mathematische Bedeutung des Gleichheitszeichens noch nicht verstanden hat. Das Gleichheitszeichen steht *zwischen Symbolen*, welche dieselbe Zahl bezeichnen und sollte gelesen werden "... ist gleich ..." oder ausführlicher "... bezeichnet dieselbe Zahl wie ...". Obiger Fehler ist etwa so zu verstehen: Das Kind sieht ein Pluszeichen für "addiere" und interpretiert das Gleichheitszeichen als "dabei kommt heraus". Das heißt: Das Gleichheitszeichen hat eher den Charakter einer Rechenoperation, der Anweisung "rechne aus" oder des Hinweises "jetzt kommt das Ergebnis" oder "... ergibt ..." und nicht den Charakter einer Beziehung "... bezeichnet die gleiche Zahl wie ..." zwischen Symbolen.
Das Gleichheitszeichen ist ein Zeichen zwischen Symbolen und kann wohl auch nur auf dieser Ebene (als Zeichen zwischen Symbolen) eingeführt werden. Der Versuch, das Gleichheitszeichen mit Hilfe einer Waage einzuführen, ist fragwürdig, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Gleichung $x - 4 = 7$ formen Kinder dadurch um, dass sie auf beiden Seiten (der vorgestellten Waage) 4 wegnehmen. Denn es heißt ja "– 4". Dies ergibt die Aussage $x = 3$, die offensichtlich keine Lösung der obigen Gleichung ist. Fragwürdig ist auch die Verwendung der sogenannten Rechenwaage, die sich auf das Hebelgesetz stützt, das Grundschülern nicht ausreichend bekannt sein dürfte.

Eine vielleicht taugliche Merkhilfe für das Zeichen "=" ist die Vorstellung von zwei parallelen Stangen, zwischen die überall gleich viele Plättchen passen (vgl. WITTMANN, MÜLLER u. a., 1994, Zahlenbuch I, 38).

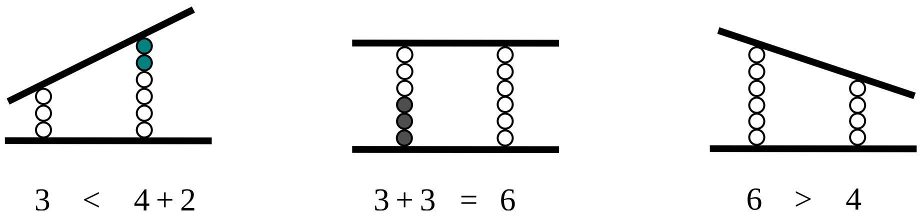


Abb. 8.12: Das Gleichheitszeichen als Symbol für "gleiche Anzahl"

Eine offene Frage ist, ob Gleichungen der Form $6 = 4 + 2$; $6 = 4 + \square$; $6 = \square + 4$ oder $4 = 7 - 3$; $4 = 7 - \square$ und $4 = \square - 3$ im Anfangsunterricht überhaupt behandelt werden sollten, wie es der aktuelle Lehrplan in Baden-Württemberg fordert Nach obigem Konzept wäre dies möglich. Viele Kinder werden derartige Schreibweisen aber so abgeändern, dass der Rechenterm links des Gleichheitszeichens steht. Manche Schulbuchautoren verzichten auf Gleichungen dieser Art und verwenden das Gleichheitszeichen nur, wenn der Rechenterm links und das Ergebnis rechts steht, also in Fällen wie $a + b = \square$; $a + \square = b$ und $\square + a = b$ sowie $a - b = \square$; $a - \square = b$; $\square - a = b$ (z. B. WITTMANN & MÜLLER u. a., 1994, Zahlenbuch I). Das hat den psychologischen Vorteil, den Kindern im Anfangsunterricht Verunsicherungen zu ersparen. Vor Beginn der Algebra in Klasse 7 oder 8 muss dann allerdings der Gleichungsbegriff verallgemeinert werden.

8.5 Rechenstrategien im Zahlenraum bis 20

8.5.1 Zählstrategien

Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 20 lassen sich grundsätzlich zählend bewältigen. Zählmethoden entsprechen der natürlichen Entwicklung der Kinder und werden auch von Erwachsenen in bestimmten Zusammenhängen angewendet, beispielsweise um festzustellen, wie viele Tage es vom 22. bis 27. Oktober sind. Anhand der Beispielaufgabe $3+5$ beziehungsweise $8-5$ betrachten wir einige Zählstrategien.

Alles-Zählen

Diese Methode wird wohl von allen Kindern spontan erfunden. Dabei werden im ersten Schritt die beiden Summanden mit Hilfe von zu zählenden Objekten dargestellt (Zählplättchen, Finger, Zahlwörter). Im zweiten Schritt werden dann alle Objekte von vorn durchgezählt.

1. Schritt:	1	2	3	1	2	3	4	5
	●	●	●	●	●	●	●	●
2. Schritt:	1	2	3	4	5	6	7	8

Weiterzählen

Dabei wird die erste Menge von Objekten (oder Zählwörtern) nur *einmal* gezählt oder als bereits gezählt aufgefasst. Der zweite Summand gibt dann an, um wie viele Schritte weiterzuzählen ist (vorwärts bzw. rückwärts).

$3+5$: (3); 4, 5, 6, 7, 8, also 8
$8-5$: (8); 7, 6, 5, 4, 3, also 3
$8-5$: (8); 8., 7., 6., 5., 4., also 3

Hierbei ist *doppeltes Zählen* erforderlich: Eins dazu sind 4, zwei dazu sind 5,..., fünf dazu sind 8. Statt auf diese Weise *verbal* doppelt zu zählen, benützen Kinder zur Bestimmung der Anzahl der Zählschritte häufig die Finger: An den nacheinander ausgestreckten Fingern lesen sie ab, wie viele Schritte sie schon weitergezählt haben. Offensichtlich erfordert die Zählprozedur bei mehr als vier Schritten, die noch simultan überblickt werden können, große Aufmerksamkeit und Sorgfalt. Häufig ist dabei das Verrechnen um +1 oder –1, weil die Rolle des Anfangs- oder Endgliedes der Zählprozedur unklar ist. Bei $8-5$ kollidieren zwei *unterschiedliche* Zählverfahren. *Erstens* (Objekte wegnehmen): Das 8., 7., 6., 5., und 4. Objekt wegnehmen, also Ergebnis 3. *Zweitens* (Schritte ausführen): Zur 7, zur 6, zur 5, zur 4, und zur 3, also Ergebnis 3. Bei der ersten

Möglichkeit beginnt der Zählprozess bei der 8, im zweiten Fall bei der 7. Beides ist korrekt, wenn man im ersten Fall als Ergebniszahl die *nächste Zahl nach* dem Zählvorgang, im zweiten Fall aber die *letzte Zahl im* Zählvorgang nennt. Durch Vermischung beider Zählverfahren entsteht häufig das Verrechnen um +1 oder –1.

Zählmethoden haben nicht nur den Nachteil der Fehleranfälligkeit. Ein Hauptproblem liegt darin, dass das Verständnis für Rechenoperationen oberflächlich bleibt, wenn Zahlsymbole und Operationszeichen lediglich als Anleitungen für Zählhandlungen verstanden werden. Einsichten in operative Zusammenhänge (Abschnitt 8.5.2) bleiben weitgehend aus, wenn Zahlen nicht als strukturierte Ganzheiten aufgefasst und miteinander in Beziehung gebracht werden, sondern nur als "Zündung für mechanisch zählende Feuerwerke" (HESS, 1997) verstanden werden.

Im japanischen Mathematikunterricht werden Strategien des zählenden Rechnens *nicht* empfohlen, weil sie zu langsam und zu fehleranfällig sind und Schüler dazu verleiten, mit Zahlen als rein "abstrakten" Dingen (gemeint sind Wörter der Zählreihe) zu operieren, getrennt von ihrer aktuellen quantitativen Bedeutung. Es wird darauf hingewiesen, dass Kinder in zählend-orientierten Lehrprogrammen Schwierigkeiten zeigten, konkrete Sach- oder Textaufgaben zu lösen, auch wenn sie die reinen Zahlenaufgaben bewältigten (HATANO, 1982, 215, 221).

Bei zählend rechnenden Kindern fällt auf, dass sie nur wenige Rechensätze automatisiert haben. Zählendes Rechnen führt nicht zum Auswendigwissen des kleinen Einspluseins und Einsminuseins. Weitere Nachteile des zählenden Rechnens sind aufgeführt in GERSTER (1994a) und GERSTER (1995). Wenn Kinder am wenig effektiven zählenden Rechnen hängen bleiben, kann dies verschiedene Ursachen haben:

- einseitiges Termverständnis (Deutung des zweiten Summanden oder des Subtrahenden als Handlungsanweisung, z. B. Vorwärts- oder Rückwärtszählen),
- fehlendes Teile-Ganzes-Verständnis von Rechenausdrücken,
- fehlende Vorkenntnisse (z. B. Grundaufgaben des Verdoppelns, Halbierens, Zehnersummen), um daraus weitere Aufgaben abzuleiten,
- fehlende Aufmerksamkeit für Beziehungen zwischen Aufgaben,
- fehlende Übung in nicht-zählenden Strategien usw.

Es nützt wenig, zählendes Rechnen, insbesondere Fingerbenutzung, zu verbieten. Es ist eine natürliche Methode, die Kinder bereits im Vorschulalter spontan entwickeln und die vermutlich häufig von Eltern gefördert wird. Verbote führen nur dazu, dass Fingerrechnen heimlich angewandt wird und Lösungswege nur noch schwer erkennbar und zu optimieren sind. Der wohl einzige erfolgversprechende Weg ist, effektivere Strategien so zu vermitteln, dass sie von Kindern als leichter, sicherer, wirksamer erlebt werden.

8.5.2 Nichtzählende Strategien

> "Relational understanding of numbers and operations permit many individuals to invent their own strategies, probably without conscious thought. For those children who do not spontaneously develop efficient fact strategies, it is our job to help them do so by engaging them in activities that will encourage construction of these helpful relationships". (VAN DE WALLE, 1994, 134)

Im Unterschied zu Methoden des zählenden Rechnens sind nichtzählende Rechenstrategien nicht one-way-methods, also immer nach demselben Prinzip ablaufende Prozeduren, sondern eher den jeweiligen Zahlenwerten angepasste flexible Lösungswege. Hierzu gehören insbesondere:

Grundaufgaben:

- Addieren/Subtrahieren der Null, Eins und Zwei
- Verdoppeln/Halbieren
- Zehnersummen
- Zehn als Summand/Subtrahend (“Kraft der Zehn”, mit Zehnerportionen rechnen)
- “Kraft der Fünf” (mit Fünferportionen rechnen)

sowie *Ableitungsstrategien*:

- Tauschaufgaben
- Nachbaraufgaben, z. B. das “Verdoppeln plus 1”
- Gegensinniges Verändern der Summanden/gleichsinniges Verändern bei Differenzen, z. B. das “Verdoppeln plus 2”, verallgemeinert die *Kompensation*.

Einige dieser Strategien werden im Folgenden erläutert.

Verdoppeln/Halbieren

Aufgaben des Verdoppelns/Halbierens gehören häufig zu den ersten Aufgabentypen, welche Kinder auswendig wissen. Dies liegt an ganz elementaren Erfahrungen. Wenn man immer 2 Äpfel in den Korb legt (in jeder Hand einen), braucht man nur mit geraden Zahlen zu zählen (2, 4, 6, 8,...) oder die Anzahl der Handlungen zu verdoppeln. Auch beim Spiegeln verdoppelt sich die Anzahl der Elemente. Stellt man die Anzahlen auf dem Zehner- oder Zwanzigerfeld dar, ergeben sich einprägsame Bilder (Abb. 8.13).

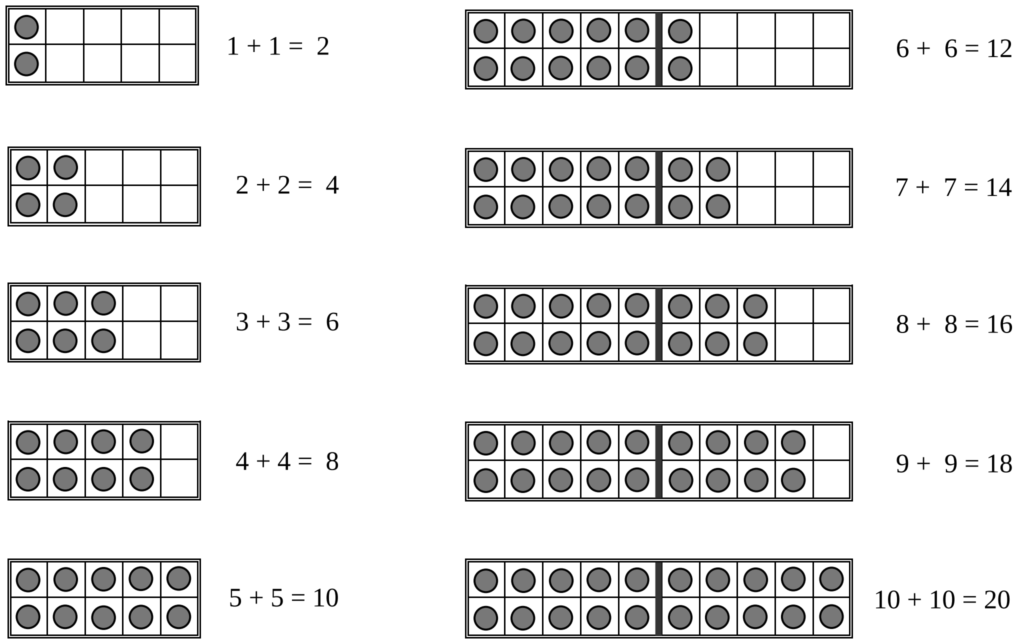


Abb. 8.13. Verdoppelungen im Zahlenraum bis 20

Die Ähnlichkeit der Verdoppelungsaufgaben zu 1 und 6, 2 und 7, 3 und 8 sowie 4 und 9 zeigt den Vorteil der "Kraft der Fünf". Ist es Zufall, dass die Ziffern 2 und 7, 3 und 8 sowie 4 und 9 einander ähnlich sind?

Die Verdoppelungen der Zahlen 5 bis 10 sind besonders einprägsam auch mit den Japan-Tiles darstellbar (Abb. 8.14).

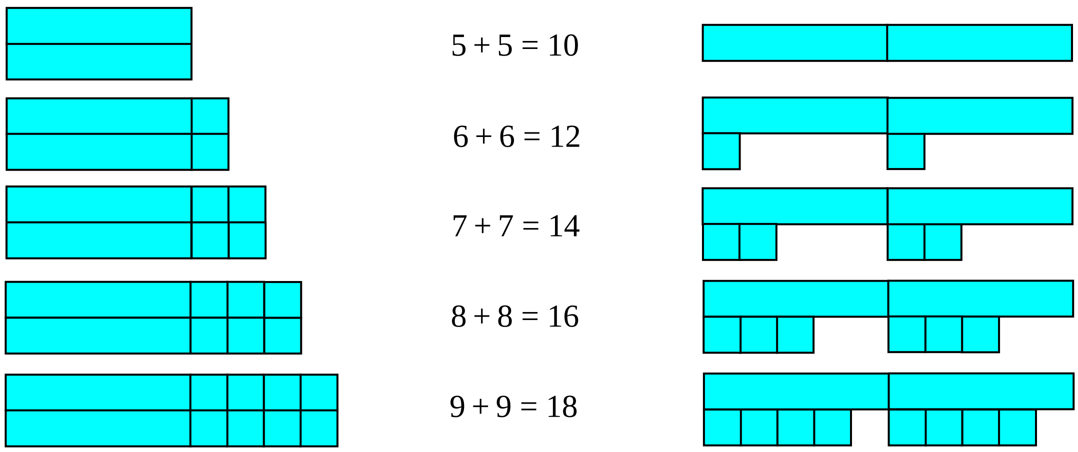


Abb. 8.14: Verdoppelungen mit Japan-Tiles

Ein Vorteil der *Japan-Tiles* liegt darin, dass Kinder die Zahlen von 5 bis 10 rasch legen können, weil gebündelte Fünfen zur Verfügung stehen. Ein Vorteil der *Zehnerfelder* besteht darin, dass nach Darstellung einer Zahl mit Plättchen die quasi-simultane Zahlauffassung durch die bis zur 10 bzw. 20 fehlenden Plättchen erleichtert wird, sich also

auch die Beziehungen der jeweiligen Zahl zur 5, 10 oder 20 zur reflektierenden Abstraktion anbieten.
Das zeitraubende Nacheinander-Hinlegen von Wendeplättchen auf ein Zwanzigerfeld lässt sich erheblich vereinfachen durch Verwenden des Abacus Typ C aus dem Schubi-Verlag, bei dem sich mit einem Fingerstrich hälftig gefärbte Kugeln von grau auf weiß bzw. rot umstellen lassen. Dadurch ergeben sich Zahldarstellungen wie in Abb. 8.13. Dasselbe leistet der bekannte Zählrahmen mit 5 weißen und 5 roten Kugeln auf Metallstangen, *wenn* die Kinder die Kugeln nicht einzeln abzählen, sondern beispielsweise die 7 als $5+2$ mit einer einzigen Schiebebewegung darstellen (Abb. 8.15).

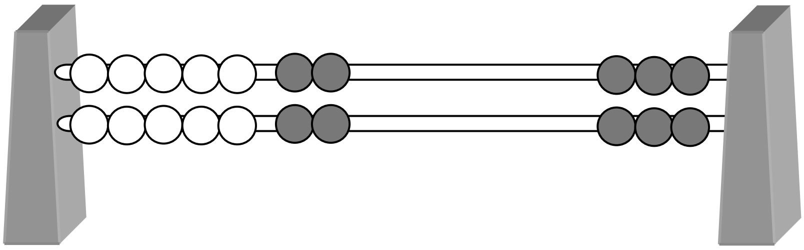
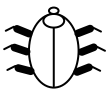


Abb. 8.15: $7 + 7 = 14$ am Zählrahmen

Das Halbieren einer geraden Zahl lässt sich dadurch einfach bewerkstelligen, dass man die zu halbierende Zahl gleich auf 2 Stangen darstellt. Auf einer Darstellung wie in Abb. 8.15 kann man dann unmittelbar sehen, dass die Hälfte von 14 die Zahl 7 ist.

VAN DE WALLE (1994, 138) bietet für einige Verdoppelungsaufgaben folgende Assoziationen als Merkhilfe an (Abb. 8.16).

$3+3=6$

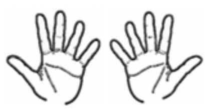


Käfer

$4+4=8$

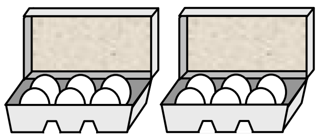
Spinne

$5+5=10$



2 Hände

$6+6=12$



ein Dutzend

$7+7=14$

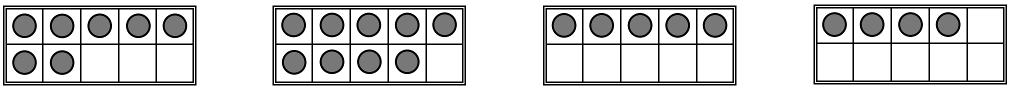
M	D	M	D	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

2 Wochen
14 Tage

Abb. 8.16: Merkhilfen für Verdoppelungsaufgaben

Zehnersummen

Besonders wichtig für vorteilhaftes Rechnen ist das Ergänzen zum vollen Zehner. Sowohl am Zehnerfeld (Abb. 8.17) wie auch am Zählrahmen (Abb. 8.15) lassen sich Zehnersummen durch Ablesen der noch freien Felder bzw. der am rechten Rand verbleibenden Kugeln unmittelbar erkennen.



7 + **3** = 10 9 + **1** = 10 5 + **5** = 10 4 + **6** = 10

Abb. 8.17: Zehnersummen am Zehnerfeld

Die Fünferbündelung ist auch dabei die entscheidende Hilfe. Ohne sie könnten die sieben Kugeln in Abb. 8.15 ohne einerweises Zählen nicht sicher aufgefasst werden. Ein besonders reizvolles Gerät zum Training der Zahlzerlegungen ist die sogenannte Rappelkiste (Beenen-Lehrmittel). Hier füllt man beispielsweise 10 Holzperlen in eine Box, die durch einen Steg teilweise in zwei Fächer abgetrennt ist (Abb. 8.18). Ein Fach ist auf der Vorderseite mit Papier abgedeckt. Nach kräftigem Schütteln befinden sich beispielsweise 7 Holzkugeln auf der rechten Seite, die bis 10 fehlenden Kugeln sind auf der anderen Seite verborgen. Das Kind nennt die Anzahl der nicht sichtbaren Kugeln oder besser gleich den Satz 7 + 3 = 10. Zur Kontrolle wird die Box gedreht: Das Kind sieht jetzt außer den 7 auch noch die fehlenden 3 Kugeln. Wichtig ist, dass die Größe der Kugeln und die Breite des Faches so aufeinander abgestimmt sind, dass genau 5 Kugeln in eine Reihe passen, Anzahlen bis 10 also *ohne zu zählen* erkannt werden können. Das Spiel "Rappelkiste" eignet sich besonders als Partnerspiel, wobei die Kinder sich gegenüber sitzen. Manche Kinder erfassen Zehnersummen aber am Zehnerfeld leichter, weil „das Ganze“ dort deutlicher ist.

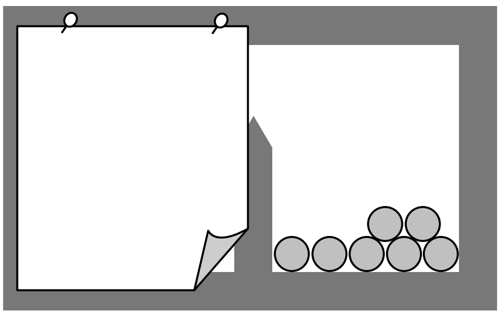


Abb. 8.18: Rappelkiste

Zehn als Summand/Subtrahend (“Kraft der Zehn”)

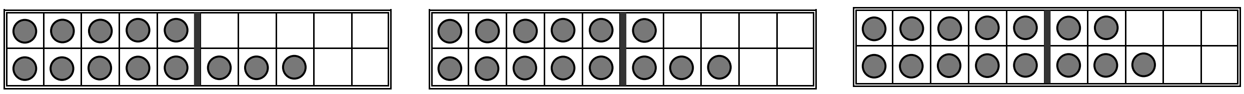
Bei “rechenschwachen” Kindern fällt oft auf, dass sie Rechenausdrücke der Art 10 + 3, 7 + 10 oder 14 – 10 zählend berechnen (Abschnitt 3.7 und 3.8). Sie interpretieren dabei Zahlen wie 14 *nicht* als “vier-und-zehn”, also als Zusammensetzung aus 10 und 4, sondern als ein Ganzes, ein bestimmtes Wort in der Folge der Zahlwörter, das eben “vierzehn” heißt. Für diese Kinder ist es wichtig, Verbindungen herzustellen von dem ihnen bekannten Zählwort “vierzehn” und der gewohnten Schreibweise “14” zu den im Unterricht verwendeten Materialien[2]. Hilfreich für die mentale Konstruktion des Zusammenhangs zwischen der symbolischen *Schreibweise* “14” und der Zahldarstellung mit konkretem Material sind die im Abschnitt 7.4 beschriebenen Seguin-Plättchen.

Nach dieser Vorarbeit zum Verständnis zweistelliger Zahlen wird das Addieren/ Subtrahieren der Zahl 10 einfach. Diese Operationen bedeuten auf der konkreten Ebene lediglich ein Dazulegen oder Wegnehmen eines Zehners (Abb. 8.19).

Abb. 8.19: Darstellung von 7 + 10 und 14 – 10

Fünfen zusammenfassen (“Kraft der Fünf”)

Liegen beide Summanden zwischen 5 und 10, so kann man mit Vorteil die "Kraft der Fünf" anwenden (FLEXER, 1986; KRAUTHAUSEN, 1995). Dazu einige Beispiele (Abb. 8.20).



5 + 8 6 + 8 7 + 8

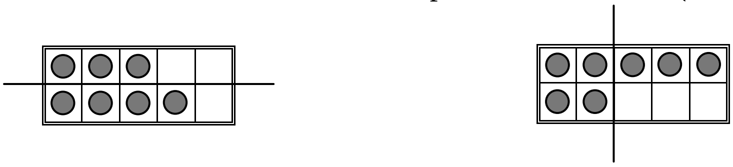
Abb. 8.20: „Kraft der Fünf“

Das sehr effektive Zusammenfassen von Fünfen reduziert das Rechnen mit den Zahlen 5, 6, 7, 8 und 9 auf das besser vertraute Rechnen mit den Zahlen 0, 1, 2, 3 und 4. Bei 6 + 8 muss man im Wesentlichen nur 1 + 3 rechnen (und die Doppel-Fünf, also die Zehn addieren). Es soll allerdings auch hier betont werden, dass diese Strategie anhand visueller Vorstellungen wie in Abb. 8.20 eingeführt werden muß. Auf rein symbolischer Ebene ist es für Kinder anfangs schwierig, in der symbolischen Schreibweise "6 + 8" die beiden Fünfen zu erkennen. Eine Hilfe auf symbolischer Ebene wäre die Notation der Zerlegungen in der Form $\underset{5\;1}{\underset{\wedge}{6}} + \underset{5\;3}{\underset{\wedge}{8}}$.

[2] Beispielsweise Zehnerfelder, Zehnerstreifen, Japan-Tiles oder Zehnersystem-Blöcke. Vgl. dazu Abb. 7.33 in Abschnitt 7.4.

Tauschaufgaben

Auf der Ebene konkreten Materials und bildlicher Darstellungen ist das Vertauschungsgesetz $a + b = b + a$ beim Teile-Ganzes-Konzept unmittelbar klar (Abb. 8.21).



$3 + 4 = 4 + 3$ $4 + 3 = 3 + 4$

Abb. 8.21: Vertauschungsgesetz der Addition

Für das schwache Kind kommt es darauf an, enge Verbindungen herzustellen zwischen konkreten und bildlichen Vorstellungen und den zugehörigen symbolischen Schreibweisen für Summen. Dazu gibt man konkrete oder bildliche Darstellungen wie in Abb. 8.21 vor und lässt die Kinder die beiden dazu passenden Summenterme zuordnen. Die Gleichungsschreibweise wie in Abb. 8.21 ist für schwache Kinder nicht erforderlich. Es genügt zu wissen: Die Aufgaben “4 + 3” und “3 + 4” haben dasselbe Ergebnis. Ein Ziel der Übungen ist es zu erreichen, dass die Kinder Aufgaben vom Typ “4 + 9“ gleich als “9 + 4” interpretieren. Als Training dazu kann die Lehrerin Karten mit Rechenausdrücken wie “4 + 9” hochhalten. Die Kinder sollen dazu die jeweils einfachere Rechenaufgabe – hier also “9 + 4” – sagen. Sie sollen die Karte “6 + 9” also lesen als “9 + 6”. Bei Aufgaben wie “1 + 8” sollen sie sagen “eins mehr als acht”, bei “2 + 7” sagen sie “zwei mehr als sieben” (vgl. dazu Abschnitt 7.3.1).

Verdoppeln plus 1

Bei "rechenschwachen" Kindern kann man oft beobachten, dass sie Aufgaben wie $6 + 7$ durch Weiterzählen von der Sechs um sieben Schritte lösen. Häufigste Ursache dafür ist wohl, dass diese Kinder Rechenterme lediglich als Anweisungen für Zählhandlungen verstehen, beispielsweise die Aufgabe, von dem Zahlwort Sechs um sieben Zahlwörter weiterzuzählen oder konkreter, zu sechs Gegenständen oder Fingern noch sieben weitere hinzuzufügen. Liegen sechs Plättchen unstrukturiert nebeneinander und werden sieben Plättchen, ebenfalls unstrukturiert, hinzugefügt, dann ist zählendes Rechnen wohl die einzige naheliegende Lösungsstrategie (Abb. 8.22).

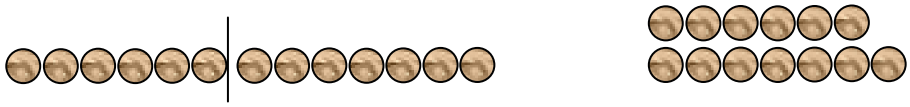


Abb. 8.22: 6 und 7 Plättchen, linear bzw. flächig angeordnet.

Beim Betrachten dieser beiden Darstellungen spürt man sofort, dass bei der linearen Darstellung wohl nur das Auszählen als Lösungsstrategie in Frage kommt. Nutzt man zusätzlich zur flächigen Darstellung noch die Fünfergliederung, so ergeben sich Darstellungen (am Modell oder bildlich), die unmittelbar – mit einem Blick – aufgefasst werden können und den Zusammenhang zwischen den Termen 6 + 6 und 6 + 7 (oder auch 3 + 3 und 3 + 4) sinnfällig erscheinen lassen (Abb. 8.23).

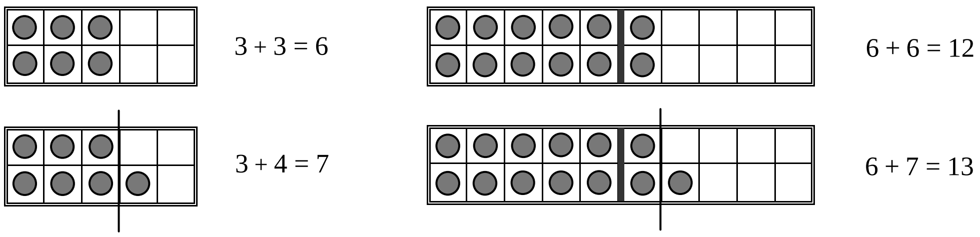


Abb. 8.23: Darstellung der Strategie "Verdoppeln plus 1" am Zehner- und Zwanzigerfeld

Ein weiteres Problem bei Rechenausdrücken wie 3 + 4 oder 6 + 7 besteht für Kinder darin, dass die Ziffern 4 bzw. 7 *nicht* signalisieren, dass die Zahl 4 aus 3 und 1 zusammengesetzt ist und die Zahl 7 aus 6 und 1. Die Darstellung mit Modellen oder mentalen Vorstellungsbildern wie in Abb. 8.23 dagegen legen solche Zusammensetzungen beziehungsweise Zerlegungen nahe, weil 3 der 4 Plättchen sich visuell mit den oberen Plättchen zu einer ganzheitlich wahrnehmbaren Würfel-Sechs verbinden und entsprechend 6 der 7 Plättchen sich mit den oberen 6 Plättchen zu einer Zwölf verbinden.

Obige Bilder hätten sich auch ergeben durch *Hinzulegen von jeweils einem Plättchen*[3] zu den Verdoppelungen 3 + 3 beziehungsweise 6 + 6. Für "rechenschwache" Kinder (und nicht nur für diese) genügt es *nicht*, eine Strategie wie "Verdoppeln plus 1" nur auf der symbolischen Ebene einzuführen, etwa in der Form 3 + 3 = 6, also 3 + 4 = 7; 6 + 6 = 12, also 6 + 7 = 13. Solche Notationen bleiben für Kinder bedeutungslos und wenig einprägsam, wenn sie nicht auf der Ebene des konkreten, strukturierten Handelns (Legen von Plättchen auf das Zehner- oder Zwanzigerfeld) den Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben 6 + 6 = 12 und 6 + 7 = 13 herstellen und anschließend reflektieren können. Dies heißt unter anderem, die konkrete Darstellung zu 6 + 7 soll nicht völlig neu gelegt werden, nachdem zuvor die Aufgabe 6 + 6 dargestellt wurde, sondern *aus* der Darstellung von 6 + 6 entwickelt werden. So wird der enge Zusammenhang zwischen diesen beiden Aufgaben für Kinder erfahr- und reflektierbar und kann – nach ausreichender Erfahrung mit realen Quantitäten und eventuell bildhaften Darstellungen – auch auf der symbolischen Ebene nachvollzogen und schließlich spontan genutzt werden.

Verdoppeln plus 2

Summen wie 2 + 4, 3 + 5, 7 + 5, 8 + 6, 7 + 9, deren Summanden sich um 2 unterscheiden, lassen sich bequem und sicher mit der Strategie "Verdoppeln plus 2" berechnen. Auch diese Strategie muss – soll sie von Kindern übernommen werden – durch konkretes Handeln mit Quantitäten eingeführt oder noch besser von Kindern in einer geeigne-

[3] Den Nachbaraufgaben zugrunde liegt das Konzept der *Kovarianz* (Abschnitt 7.2.4, insbesondere Abb. 7.20)

ten Lernumgebung selbst erfunden werden. Dazu präsentiert man die Aufgaben in symbolischer Schreibweise und die Kinder bearbeiten sie durch Legen von Plättchen auf einem Zehner- oder Zwanzigerfeld (Abb. 8.24).

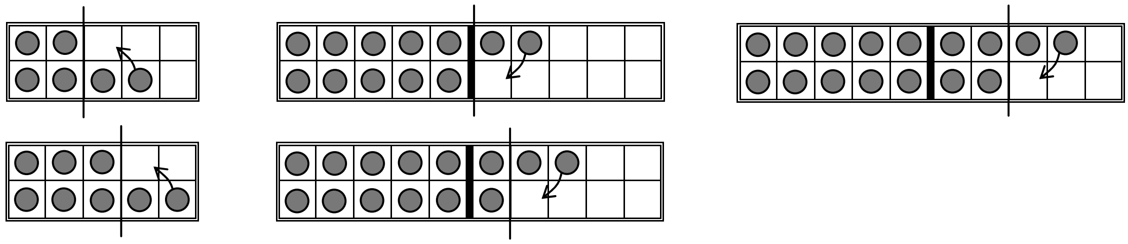


Abb. 8.24: Strategie "Verdoppeln plus 2" am Zehner- und Zwanzigerfeld

Die Kinder werden in solchen Fällen bald herausfinden, dass man die Summe der beiden Zahlen leicht mit einem Blick erkennt, wenn man die kleinere der beiden Zahlen verdoppelt (was einfach ist) und dann noch 2 addiert (was ebenfalls einfach ist). Die Regel dazu lautet "kleinere Zahl verdoppeln, dann plus 2". Eine andere Möglichkeit besteht darin, den Überschuss der einen über die andere Zahl *gerecht* zu verteilen (Pfeile in Abb. 8.24). Dann entstehen reine Verdoppelungsaufgaben, die ja meist auswendig gewusst werden. Dann lautet die Regel: "Zwischenzahl verdoppeln". Dies ist ein Sonderfall des allgemeineren Prinzips: Eine Summe ändert sich nicht, wenn man den einen Summanden um einen Betrag verkleinert und den anderen Summanden um denselben Betrag vergrößert (gegensinniges Verändern der Glieder einer Summe)[4].

Zehnerüberschreitung durch Zerlegen eines Summanden (Teilschrittverfahren)

Diese Strategie ist wohl die bekannteste Strategie zur Lösung von Aufgaben des kleinen Einsundeins. Die Aufgabe $6 + 7$ beispielsweise wird dadurch gelöst, dass der Operator $+7$ zerlegt wird in die nacheinander auszuführenden Operatoren $+4$, dann $+3$. Häufig wird die Zerlegung des Operator mit Hilfe eines Pfeilbildes dargestellt (Abb. 8.25).

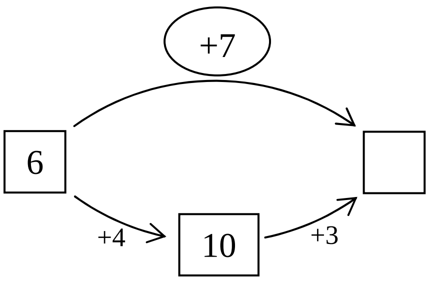


Abb. 8.25: Pfeilbild zur Zehnerüberschreitung durch Zerlegen des Operationsschrittes

Wir halten diese Pfeildarstellung des Lösungsweges für sehr formal. Es wird auf rein symbolischer Ebene argumentiert, eine Veranschaulichung von *Quantitäten* findet nicht

[4] Dem gegensinnigen Verändern der Glieder einer Summe liegt das Konzept der *Kompensation* zugrunde (Abschnitt 7.2.4, Abb. 7.20).

statt. Für viele Kinder ist das formale Zerlegen des Operationsschrittes, also das sogenannte Teilschrittverfahren zu komplex, denn es erfordert die sichere Beherrschung und *Koordination* von mindestens drei Teilaufgaben:

1. Ergänzung bis 10: 6 + □ = 10
2. Zerlegung der 7: 7 = 4 + □
3. Addieren zur 10: 10 + 3 = □

Wenn auch nur einer dieser drei Teilschritte nicht bereits automatisiert ist, dann stellt die Koordination dieser drei Teilschritte eine Überforderung des Kurzzeitgedächtnisses[5] dar (vgl. Abschnitt 8.6.1). Wenn das Kind auch nur einen der Teilschritte zählend löst, wird es gleich die ganze Aufgabe zählend lösen[6]. Dies beobachten wir ständig bei leistungsschwachen Kindern. In der neueren fachdidaktischen Literatur wird die Methode der Zehnerüberschreitung durch Zerlegen des Operationsschrittes durchaus kritisch gesehen. RADATZ u. a. (1996, 102) stellen fest, dass dieser Weg nicht für alle Kinder der einfachste Weg ist und berichten, dass viele Kinder diesen Weg nur widerwillig anwenden. Krauthausen (in MÜLLER & WITTMANN, 1995, 88) nennt das Teilschrittverfahren (gemeint ist die Zerlegung des Operationsschrittes) das anspruchsvollste Verfahren, was die erforderlichen Teilleistungen betrifft. Eine Handlung mit quasi-simultan erfassbaren *Quantitäten* ergibt sich, wenn man die Aufgabe mit Plättchen auf zwei Zehnerfeldern oder einem Zwanzigerfeld darstellt.

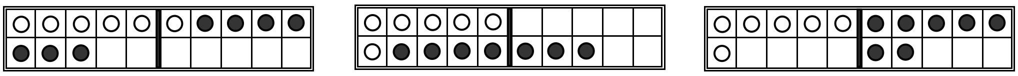


Abb. 8.26: Zehnerüberschreitung bei der Aufgabe "6 + 7" auf dem Zwanzigerfeld

In diesen Darstellungen kann man die beiden gegebenen Zahlen 6 und 7 erkennen, ebenso die Zerlegung der 7 in 4 und 3 und das Ergebnis 13.

VAN DE WALLE (1994, 139) befürwortet das Teilschrittverfahren nur dann, wenn einer der beiden Summanden eine Neun oder Acht ist. Er schlägt vor, derartige Aufgaben mit Blick auf eine Neun oder Acht auf einem Zehnerfeld zu lösen (Abb. 8.27).

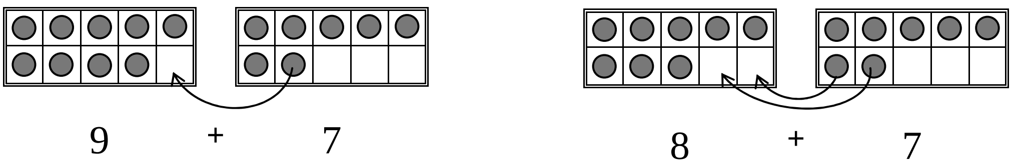


Abb. 8.27: Mache-Zehn-Strategien: „Neuner-Trick“ und „Achter-Trick“

[5] Das Kurzzeitgedächtnis kann höchstens 7 ± 2 Informationen gleichzeitig speichern und miteinander vergleichen, kombinieren und ordnen. Wegen dieser Verarbeitungsprozesse wird das Kurzzeitgedächtnis auch Arbeitsgedächtnis genannt. Es ist der Teil unseres Gedächtnisses, in welchem Informationen simultan bearbeitet werden und ins Bewußtsein gelangen können. Ohne die Fähigkeit, Fakten rasch und ohne bewußte Steuerung aus dem Langzeitgedächtnis abrufen zu können, ist die Verarbeitungskapazität des Kurzzeitgedächtnisses bei komplexen Aufgaben überfordert. Bei Kindern ist die Verarbeitungskapazität des Kurzzeitgedächtnisses noch geringer als der oben angegebenen Wert. Nur durch Automatisierung der Teilschritte bleiben genügend Aufmerksamkeitsreserven zur Steuerung des Gesamtablaufs.

[6] Das gilt erst recht, wenn das Kind den Operator +7 nicht als Zusammensetzung aus anderen Operatoren verstehen kann, weil es die Zahl 7 nicht als Zusammensetzung aus anderen Zahlen verstehen kann (Abschnitt 7.2.4).

Die 9 bzw. 8 auf dem Zehnerfeld fordert zum Auffüllen zum vollen Zehner heraus. Wie viel von 8 oder 9 bis zur 10 fehlt, ist nahezu allen Kindern geläufig, erfordert also keine besondere Aufmerksamkeit. Der zweite Summand verringert sich dadurch um eins oder zwei[7]. Auch diese Operation (eins weniger, zwei weniger) ist mit etwas Übung leicht zu automatisieren (Abschnitt 7.3.1). Sätze wie Neun plus *sieben* gleich *sech*-zehn lassen sich leicht einprägen (Eins-weniger-Strategie), ebenso acht plus *sieben* gleich *fünf*-zehn (Zwei-weniger-Strategie). Wenn das Vertauschungsgesetz wirklich vertraut ist, lässt sich der Neuner-Trick bzw. Achter-Trick auch bei Aufgaben wie “7 + 9” oder “6 + 8” anwenden.

8.6 Wege zur Beherrschung des kleinen Einspluseins

> Curtailment of the response via reflection and abstraction leads to a solid numerical connection. That these curtailments can happen is unquestionable; how they happen is yet to be explored. I believe that there are moments when it seems natural to a child not to count, and I am accounting for this seemingly natural change in the child’s knowledge. (STEFFE, 1994, 31)

8.6.1 Abruf aus dem Langzeitgedächtnis

Mit "Beherrschung" des kleinen Einspluseins ist gemeint, dass jede der 121 Aufgaben rasch (innerhalb von 2 bis maximal 3 Sekunden), mühelos und sicher aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen werden kann (Steinberg, 1985; Rightsel & Thornton, 1985; VAN DE WALLE, 1994, 133). Die beiden aktuellen Gedächtnistheorien, die Zwei-Speicher-Theorie und die Theorie der Verarbeitungstiefe (ZIMBARDO, 1992, 289) gehen davon aus, dass Einspeicherung im Langzeitgedächtnis nur möglich ist über das Evaluieren der Fakten. Das heißt, ein Satz des kleinen Einspluseins, z. B. 6 + 8 = 14, wird nur dann im Langzeitgedächtnis gespeichert, wenn ihm Bedeutung zugemessen wird, beispielsweise indem Verbindungen zu anderen Aufgaben hergestellt werden, die bereits im Langzeitgedächtnis eingespeichert sind. Das kann beispielsweise sein

- die Strategie "Kraft der Fünf" $6 + 8 = (5 + 1) + (5 + 3) = 10 + 4 = 14$
- das "Verdoppeln plus 2" $6 + 8 = 6 + 6 + 2 = 12 + 2 = 14$ oder
  $6 + 8 = 7 + 7 = 14$
- die "Mache-Zehn-Strategie" $8 + 6 = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$

Zählendes Rechnen beim Lösen dieser Aufgabe (6; plus 1 gibt 7, plus 2 gibt 8, ..., plus 8 gibt 14) führt nach diesen Gedächtnistheorien und auch nach der praktischen Erfahrung *nicht* zum Einspeichern der Ergebnisse in das Langzeitgedächtnis. Für eine rein assoziative Verknüpfung von 6 + 8 und dem nach einer langen Zählprozedur gefundenen Er-

[7] Dies ist wieder eine Anwendung des Konzepts der *Kompensation* (vgl. Fußnote 3)

gebnis 14 ist der zeitliche Abstand viel zu groß. Das Knüpfen von Assoziationen gelingt am besten, wenn Reiz und Reaktion höchstens eine halbe Sekunde auseinanderliegen, das heißt, nahezu gleichzeitig erfolgen (BIRBAUMER & SCHMIDT, 1991, 533).

8.6.2 Lehrstrategie zur Automatisierung von Rechenstrategien

Beherrschung des kleinen Einspluseins besteht im Auswendigwissen oder blitzschnellem Herleiten aller 121 Aufgaben des kleinen Einspluseins. Tab. 8.2 gibt dafür eine Übersicht.

Durch das Vertauschungsgesetz $a + b = b + a$ wird die Anzahl der einzuprägenden Aufgaben von 121 auf $(121 - 11) : 2 + 11 = 66$ reduziert. Von den noch verbleibenden 66 Aufgaben sind etwa die Hälfte vom Typ +0, +1, +2. Blitzschnelles Anwenden auch dieser Rechenoperationen muss geübt und automatisiert werden, so dass beispielsweise Kinder wie automatisch anstelle "1 + 8" gleich denken "eins mehr als 8, also 9".

Die Verdoppelungen (abfallende Diagonale) und die Zehnersummen (aufsteigende Diagonale) begrenzen die Einspluseins-Aufgaben im Zahlenraum bis 10. Wenn Kinder im Zahlenraum bis 10 die Aufgabentypen +0, +1 und +2, sowie die Verdoppelungen und die Zehnersummen beherrschen, so bleiben nur noch die beiden Aufgaben 4 + 3 und 6 + 3 (Nachbaraufgaben zu 3 + 3 = 6 und 6 + 4 = 10) sowie die Aufgaben 5 + 3 und 5 + 4 (unmittelbar klar, wenn die 8 als 5 + 3 und die 9 als 5 + 4 eingeführt wurde). RIGHTSEL UND THORNTON (1985) konnten nachweisen, dass die Beherrschung der Aufgaben des kleinen Einspluseins im Zahlenraum bis 10 in der ersten Hälfte des ersten Schuljahres für alle Grundschulkinder möglich ist, geeignete Methodik vorausgesetzt.

		+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10
Null mehr	0	0										
Eins mehr	1		2									
Zwei mehr	2			4								
	3				6							
	4				4+3	8						
Fünfer-Trick	5						10					
	6				6+3	10	11	12	6+7			
	7				10	7+4		7+6	14			
Achter-Trick	8			10						16		
Neuner-Trick	9		10								18	
Zehner-Trick	10	10										20

Tab. 8.2: Einspluseins-Tafel

Die restlichen Aufgaben des kleinen Einspluseins (Ergebnisse von 11 bis 20) ergeben sich leicht aus den Strategien

- Verdoppeln,
- Addieren zu 10 („Zehner-Trick“)
- Mache 10 („Neuner-Trick“ und „Achter-Trick“, d. h. 9 oder 8 als Summand),
- Fünferbündel (die Aufgaben $6 + 5$ und $7 + 5$).
- Die jetzt noch verbliebenen Aufgaben $7 + 4$ und $7 + 6$ ergeben sich als Nachbaraufgaben zu den Grundaufgaben $7 + 3 = 10$ und $6 + 6 = 12$.

Die ersten drei dieser Strategien sind sehr ergiebig. Sie decken fast alle Fälle ab.

Die soeben dargestellte Lehrstrategie ist *für die Lehrkraft* gedacht, nicht zur unmittelbaren Weitergabe an Kinder. Um Kindern den Zusammenhang zwischen Aufgaben (beispielsweise $6 + 6 = 12$ und $6 + 7 = 13$) bewusst zu machen, sollten Visualisierungen und Darstellungen an Modellen verwendet werden (vgl. Abb. 8.23). In der Trainingsphase kann die Lehrkraft auch häufiger die beiden in Verbindung zu bringenden Aufgaben unmittelbar nacheinander stellen, sowohl schriftlich als auch mündlich.

8.6.3 Training der Auswahl von Rechenstrategien

VAN DE WALLE (1994, 133) nennt drei Schritte auf dem Weg zur Automatisierung von Basisfakten.

Erstens: Entwicklung eines sicheren *Operationsverständnisses*. Hierzu gehört die Beherrschung der Übergänge zwischen konkreten Sachsituationen, bildlichen Darstellungen und symbolischen Darstellungen (Rechentermen und Gleichungen). Dies wurde in den Abschnitten 8.1 bis 8.4 behandelt.

Zweitens: Entwicklung *effizienter Rechenstrategien* und der Fähigkeit, noch nicht auswendig gewusste Rechenergebnisse rasch, mühelos und sicher aus bereits auswendig gewussten Aufgaben ableiten zu können. Diese in den Abschnitten 8.5.2 und 8.6.2 dargestellten Strategien werden von Kindern am ehesten dann für den selbständigen Gebrauch übernommen, wenn sie diese selber – in der Regel anhand von Materialien – erfinden oder wenigstens nach entsprechender Anregung diskutieren und anwenden lernten.
Vor der Erarbeitung effizienter Rechenstrategien dürfen nicht zu viele Übungsaufgaben gestellt werden. Erst *nachdem* ein gutes Verständnis für diese Strategien entwickelt worden ist, darf das Rechnen geübt werden, und zwar anhand der neu erarbeiten Strategien. Andernfalls üben die Kinder beim Rechnen wieder nur zählendes Rechnen. Durch wiederholten Gebrauch dieser Strategien wird ihre Anwendung leichter, rascher und allmählich soweit automatisiert, dass sie fast unbewusst angewandt werden können.

Drittens: Training des *Strategie-Abrufs* und der *Strategie-Auswahl*. Zur Beherrschung des gesamten Einspluseins genügt es nicht, dass Kinder nacheinander jede einzelne Rechenstrategie bis zur Automatisierung trainieren. Geübt werden muss in der dritten Phase die vermischte Anwendung dieser Strategien, d. h. das Abrufen der verschiedenen

Strategien und die Auswahl geeigneter Strategien. Das Üben der Auswahl einer geeigneten Strategie ist ebenso wichtig wie die Einführung einer neuen Strategie. Dafür ist es wichtig, dass verschiedene Strategien – wie wir es in Abschnitt 8.5.2 getan haben – eigene Namen erhalten und ihre Vor- und Nachteile diskutiert werden.

Übung der Strategie-Auswahl

In Hope (1988, X) findet man einen sehr guten Vorschlag zur Übung der Strategieauswahl. Man schreibt die Bezeichnungen für Rechenstrategien an die Tafel oder auf Karten, die an die Magnettafel oder an die Wand geheftet werden können (Abb. 8.28). Jedes Kind der Klasse erhält ein oder mehrere Kärtchen mit Rechentermen, die es dann einer jeweils passenden Strategie zuordnen darf. Wir setzen jetzt voraus, dass die einzelnen Strategien bereits geübt worden sind, insbesondere auch das Rechnen mit der Null oder Zehn beziehungsweise mit Eins oder Zwei als Summand.

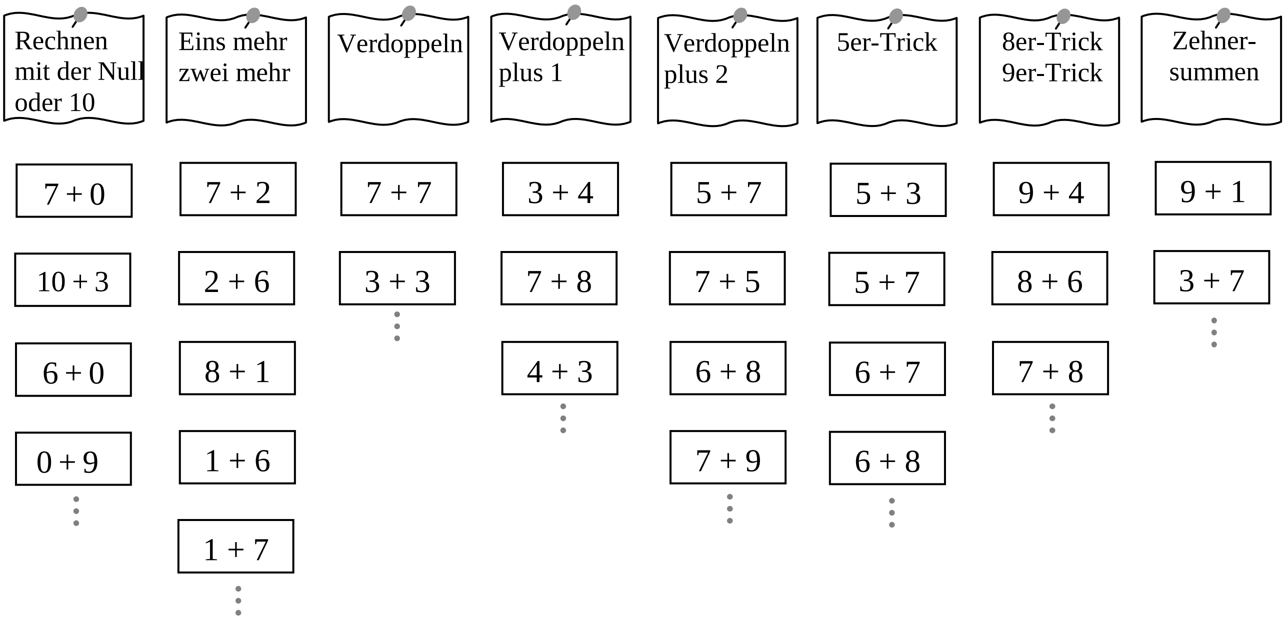


Abb. 8.28: Zuordnung von Rechentermen zu Rechenstrategien

Dieses Zuordnungsspiel kann öfters gespielt werden. Dadurch prägen sich die unterschiedlichen Rechenstrategien, ihre Bezeichnungen und die zugehörigen Anwendungsfälle besser ein. Dabei sollte auch *mit den Kindern diskutiert* werden, dass ein Kärtchen mehreren Strategien zugeordnet werden könnte. Die Aufgabe 5 + 7 beispielsweise passt zur Strategie "Fünfen zusammenfassen" und zur Strategie "Verdoppeln plus 2". Die Aufgabe 8 + 6 passt zu den Strategien "Verdoppeln plus 2", "Fünfen zusammenfassen" und "Mache Zehn". Dabei wird den Kindern deutlich, dass verschiedene Wege zum Ziel führen und dass sie dabei auch ihren persönlichen Neigungen folgen dürfen.

Auch die umgekehrte Übung ist nützlich. Man gibt eine Term-Karte vor (beispielsweise 8 + 5) und die Kinder ordnen geeignete Rechenstrategien zu, deren Bezeichnungen auf Strategie-Karten geschrieben sind, beispielsweise "Mache Zehn" oder "Fünfen zusammenfassen".

8.7 Automatisierung der Subtraktion im Zahlenraum bis 20

8.7.1 Abziehen oder Ergänzen?

Prinzipiell ist zu überlegen, ob Subtraktionsaufgaben in der Form des *Abziehens* (z. B. 9 – 5 = □) oder in der Form des *Ergänzens* (z. B. 5 + □ = 9) präsentiert werden sollen. Mehrere Gründe sprechen für das Ergänzen:

- Das Ergänzen lässt sich einfach an das Addieren anknüpfen. Wenn ich weiß, dass 5 + 4 = 9 ist (eine Aufgabe des kleinen Einspluseins), dann weiß ich auch, wie viel von 5 bis 9 fehlt (eine Aufgabe des Ergänzens), was der *Unterschied* ist zwischen 5 und 9, die *Differenz* von 5 und 9. Wenn das Kind "5 + 4" hört, soll es dazu automatisch die Zahl "9" aus dem Langzeitgedächtnis abrufen, bei "von 5 bis 9" ebenso rasch die Zahl "4". Das Kind soll also Tripel wie (5, 4, 9) auswendig wissen und zu jeweils zwei gegebenen Zahlen sofort die Dritte nennen können.
- Vorwärts-Rechnen ist einfacher als Rückwärts-Rechnen.
- Auch mit Minuszeichen geschriebene Rechenterme wie 9 – 5 (Differenzen, Unterschiede) lassen sich in der Form des Ergänzens von der kleineren Zahl zur größeren, vom Teil zum Ganzen lösen. Bei der Hälfte aller Subtraktionsfälle ist die Ergänzungszahl kleiner als der Subtrahend. Bei 9 – 5 beispielsweise muss man nur 4 ergänzen, müsste aber 5 abziehen. Wenn das Kind den Subtraktionsterm 9 – 5 sieht, sollte es sofort *denken*: wie viel fehlt von 5 (dem bekannten Teil) bis 9 (dem Ganzen)? Ebenso sollte es bei 15 – 9 sofort *denken*: 9 plus wie viel ist 15? Der *Unterschied (die Differenz)* zweier Zahlen lässt sich berechnen durch eine "Denk-Addition" (VAN DE WALLE, 1994, 141).
- Bei der schriftlichen Subtraktion ist seit etwa 40 Jahren das Ergänzungsverfahren vorgeschrieben (WITTMANN, 1997; GERSTER, 1982, 1994b). Hierfür ist das *Subtrahieren in der Form des Ergänzens* unverzichtbar.

Eine Lehrstrategie für das Ergänzen im Zahlenraum bis 20 wurde bereits dargestellt (GERSTER, 1994a, 59f). Wer dennoch auch das Eins*minus*eins automatisieren möchte, kann sich an nachfolgender Lehrstrategie orientieren.

8.7.2 Lehrstrategie zum kleinen Einsminuseins

Nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über 121 Aufgaben des kleinen Einsminuseins. Aufgaben mit Ergebnissen größer als 10 (z. B. 16 – 5 oder 18 – 6) sind dabei nicht enthalten. Die ungewöhnliche Beschriftung der Tabelleneingänge wurde gewählt, um alle Minuenden von 0 bis 20 in einer quadratischen Tabelle anordnen zu können.

Außerdem ergibt sich so eine deutliche Ähnlichkeit zur Tafel des kleinen Einspluseins (Abschnitt 8.6).

Unterschied 0, 1, 2

Unterschied 5

Unterschied 10, 9, 8

Subtrahiere 0, 1, 2

Subtrahiere 5

Subtrahiere 10, 9, 8

	=0	**=1**	**=2**	=3	=4	**=5**	=6	=7	**=8**	**=9**	**=1**
–0	**0**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
–1	1	**2**	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11
–2	2	3	**4**	5	6	7	8	9	**10**	11	12
–3	3	4	5	**6**	7	8	9	**10**	11	12	13
–4	4	5	6	7	**8**	9	**10**	11	12	13	14
–5	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	14	15
–6	6	7	8	9	**10**	11	**12**	13	14	15	16
–7	7	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	17
–8	8	9	**10**	11	12	13	14	15	**16**	17	18
–9	9	**10**	11	12	13	14	15	16	17	**18**	19
-	**10**	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**

Tab. 8.3: Kleines Einsminuseins

Folgende Rechenstrategien sind bei Minusaufgaben zweckmäßig:

1. Subtrahieren der 0, 1 oder 2

Diese 33 Aufgaben (die oberen drei Zeilen der Tabelle) lassen sich mit den Beziehungen "Null weniger", "Eins weniger" und "Zwei weniger" lösen. Hinweise zur Automatisierung dieser Konzepte gaben wir in Abschnitt 7.3.1.

2. Unterschied 0, 1 oder 2

Diese 33 Aufgaben (die ersten drei Spalten der Tabelle) lassen sich automatisieren mit den Konzepten
"Unterschied 0" (Aufgaben wie 3 – 3, 6 – 6, 8 – 8, ...)
"Unterschied 1" (Aufgaben wie 3 – 2, 6 – 5, 8 – 7, ...)
"Unterschied 2" (Aufgaben wie 3 – 1, 5 – 3, 8 – 6, ...).
Diese Rechenstrategien sind eng verbunden mit den Beziehungen "eins mehr" und "zwei mehr" (Ergänzen vom Teil zum Ganzen).

3. Halbierungen

Bei diesen elf Aufgaben (absteigende Diagonale) vom Typ 6 – 3, 8 – 4, ..., 14 – 7, 16 – 8, ist der wegzunehmende Teil halb so groß wie das Ganze (der Minuend). Das Ergebnis ergibt sich nach dem Konzept "die andere Hälfte".

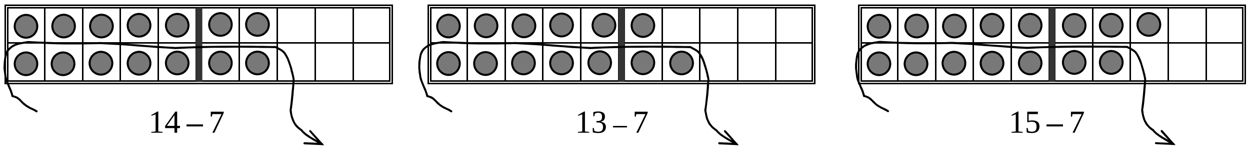


Abb. 8.29: Halbierungen und Nachbaraufgaben

An die Aufgaben des Halbierens lassen sich *Nachbaraufgaben*[8] ankoppeln, wenn man bemerkt, dass der Minuend (die Vollzahl) dicht beim Doppelten des Subtrahenden (der Abzugszahl) liegt.

4. Subtrahieren von der Zehn

Diese elf Aufgaben (aufsteigende Diagonale in Tab. 8.3) sind vom Typ 10 – 3, 10 – 4, 10 – 7. Hier bilden der Subtrahend und das Ergebnis "Zehnersummen", welche den Kindern vom Addieren im Zahlenraum bis 10 vertraut sind (Abschnitt 8.5.2). An die Aufgaben des Subtrahierens von der 10 lassen sich *Nachbaraufgaben* ankoppeln. Beispielsweise ist 9 – 3 *eins weniger als* 10 – 3.

5. Rechnen mit der Fünf

Elf Aufgaben der obigen Tabelle sind vom Typ 5 – 5, 6 – 5, ..., 10 – 5, 11 – 5, ..., 15 – 5. Sie sind einfach zu lösen, wenn man den Subtrahenden als Teil des Ganzen auffasst.

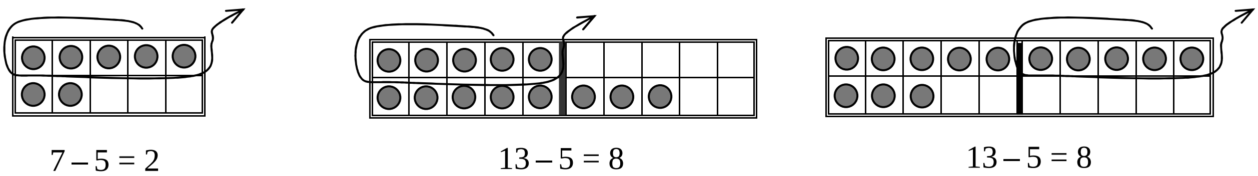


Abb. 8.30: Subtrahieren der Fünf

Ähnliche Struktur haben die elf Aufgaben mit dem Ergebnis 5, d. h. die Aufgaben 5 – 0, 6 – 1, ..., 10 – 5, 11 – 6, ..., 15 – 10.

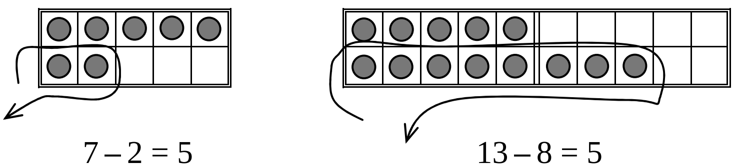


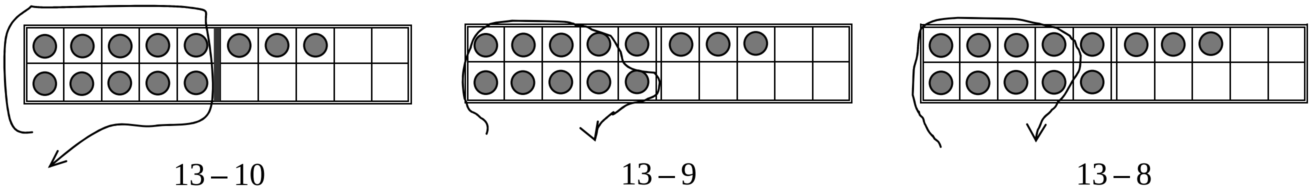
Abb. 8.31: Differenzen mit dem Ergebnis 5

6. Subtrahieren der 10, der 9 oder der 8

Das Subtrahieren der 10 (unterste Zeile der Tabelle) sollten Kinder keinesfalls zählend rechnen müssen. Dies ist sehr einfach, wenn die Kinder sich den Minuenden vorstellen als Zusammensetzung aus 10 und 3.

---

[8] Prinzip der Kovarianz: Das Ganze verändert sich in gleicher Weise wie ein Teil. Vgl. dazu “Verdoppeln plus 1” in Abschnitt 8.5.2



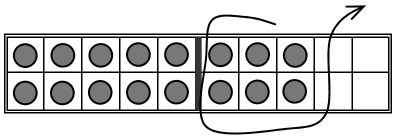
13 – 10 13 – 9 13 – 8

Abb. 8.32: Subtrahieren der 10, der 9 und der 8

An das Subtrahieren der 10 lässt sich das Subtrahieren der 9 (evtl. auch der 8) ankoppeln. Nimmt man statt 10 nur 9 weg, bleibt *eins mehr* übrig.

7. Unterschied 10, 9 oder 8

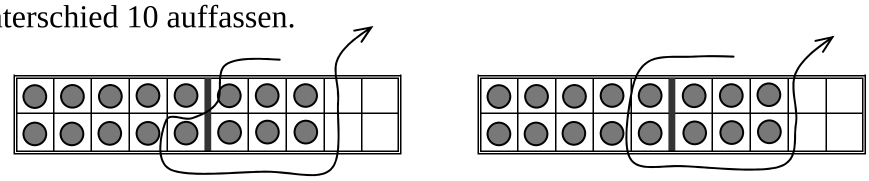
Elf Aufgaben (letzte Spalte der Tabelle) sind vom Typ 13 – 3, 16 – 6, 18 – 8. Diese Aufgaben mit Unterschied 10 können nichtzählend gerechnet werden, wenn Zahlen wie 16 als Zusammensetzung aus 10 und 6 aufgefasst werden.



16 – 6

Abb. 8.33: Unterschied 10

Die Aufgaben mit Unterschied 9 oder 8 lassen sich als Nachbaraufgaben zu Aufgaben mit Unterschied 10 auffassen.



16 – 7 = 9 16 – 8 = 8

Abb. 8.34: Unterschied 9 oder 8

Mit den genannten Strategien sind *alle* Fälle des kleinen Einsminuseins erfasst. Würde ein Kind alle diese Strategien beherrschen, bräuchte es keine einzige Aufgabe auswendig zu lernen.

Besonders ergiebig sind die Strategien *Subtrahieren der 0, 1 oder 2* und *Unterschied 0, 1 oder 2,* mit denen bereits fast die Hälfte aller Subtraktionsaufgaben beherrscht wird. Sehr nützlich sind außerdem die Strategien *Halbieren*, *Subtrahieren von der 10* und *Rechnen mit der Fünf*. Bereits mit diesen fünf einfachen Strategien beherrscht man das Rechnen im Zahlenraum bis 10 (aufsteigende Diagonale in Tabelle 8.3 und Bereich oberhalb, also 110/2 + 11 = 66 Aufgaben). Das Subtrahieren im Zahlenraum bis 10 sollten Kinder in der ersten Hälfte des ersten Schuljahres beherrschen. Am einfachsten ist es wohl zu erreichen durch Bewusstmachen des Zusammenhangs zwischen Addition und Subtraktion (Abschnitt 8.3, insbesondere Abb. 8.8).

Will man das Einsminuseins gesondert trainieren, ist es zweckmäßig, die obigen Rechenstrategien anhand der Zehnerfelddarstellung oder der Japan-Tiles zu erarbeiten und zu benennen. Dazu kann man dann Karten mit Bezeichnungen für die Strategien und

Karten mit Rechentermen anfertigen und den Strategie-Karten passende Minusterme zuordnen (vgl. Abb. 8.35).

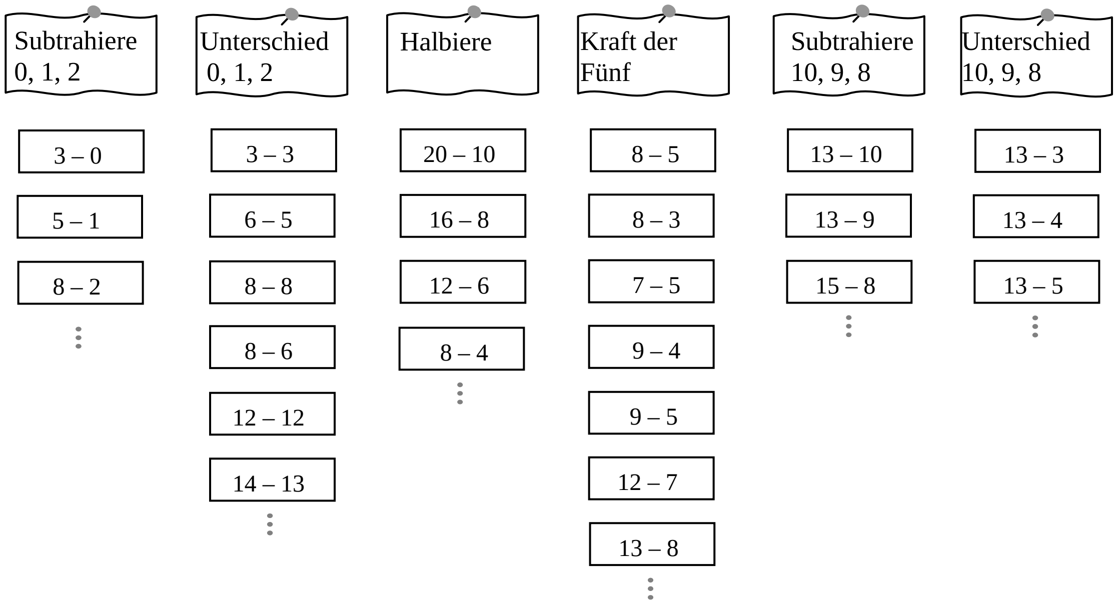


Abb. 8.35: Zuordnung von Rechenstrategien und Minus-Termen

8.8 Weitere Methoden zur Automatisierung des Rechnens im Zahlenraum bis 20

In diesem Abschnitt wird auf vier verschiedene Trainingsformen hingewiesen, welche zur Automatisierung des kleinen Einspluseins, Einsminuseins und des Ergänzens im Zahlenraum bis 20 beitragen können. Das erste Verfahren wurde speziell für diese Thematik entwickelt, die drei weiteren Verfahren sind allgemeine Trainingsformen für weitere Bereiche des Kopfrechnens. Alle Verfahren setzen voraus, dass Zahl-, Term- und Gleichungsverständnis im Unterricht bereits entwickelt worden sind. Ziel ist jetzt die Automatisierung auf der *sprachlich-symbolischen* Ebene.

1. Lernkartei

GERSTER & GERSTER (1994a) haben eine Lernkartei zur Automatisierung des Rechnens im Zahlenraum bis 20 entwickelt. Dabei handelt es sich um einen Holzkasten mit etwa 550 Aufgabenkärtchen und einem herausnehmbaren Sortierkasten mit fünf Fächern, deren Tiefe von 1 cm bis 5 cm zunimmt. Dort werden die zu übenden Aufgabenkärtchen einsortiert. Die Grundidee dazu stammt von LEITNER (1972), der die Idee Lernkartei vor allem für das Vokabellernen entwickelt hat, wo sie inzwischen weit verbreitet ist. Auf der Vorderseite der Karteikärtchen steht beispielsweise ein italienisches Wort, auf der Rückseite dessen deutsche Übersetzung. Jedes Kärtchen wandert in immer größer werdenden zeitlichen Intervallen durch die fünf Fächer des Sortierkastens. Kann die

Aufgabe eines Kärtchens nicht sofort aus dem Gedächtnis abgerufen werden, wird das Kärtchen in das erste Sortierfach zurückgesteckt und wandert erneut durch den Sortierkasten. Der Inhalt jedes Kärtchens wird also mindestens fünfmal aus dem Langzeitgedächtnis abgerufen, schwierige Inhalte so häufig, bis auch sie unmittelbar abrufbar gespeichert sind.

Bei der Lernkartei zur Automatisierung des Rechnens kommt zu diesem lernpsychologischen Prinzip noch die für das Kind sofort erkennbare Strukturierung der Rechenaufgaben in sogenannte

- *Grundaufgaben* auf *blauen* Kärtchen mit visuellen Stützen,
- *Ableitungsaufgaben* auf *gelben* Kärtchen, ebenfalls visuell gestützt und reine
- *Abrufaufgaben*, ohne jede Abrufhilfe auf *weißen* Kärtchen.

Der Inhalt der Kartei ist in 35 Kapitel gegliedert. In Kapitel 3 (Plusaufgaben im Zahlenraum bis 10: Ergebnis 10, Nachbaraufgaben) befinden sich elf blaue Kärtchen mit Aufgaben zu Zehnersummen und fünf gelbe Kärtchen mit zugehöriger Nachbaraufgabe. In Kapitel 6 gibt es 36 weiße Kärtchen mit Additionsaufgaben im Zahlenraum bis 10 ohne jede Abrufhilfe (Abb. 8.36).

Auf der Rückseite aller Kärtchen wird die Aufgabenstellung von der Vorderseite nochmals wiederholt und dazu das Ergebnis angegeben. Dadurch sind Aufgabe *und* Ergebnis in enger räumlicher und zeitlicher Nähe, so dass Lernen durch Assoziationen möglich ist. Optimal für Assoziationslernen ist: maximal 500 Millisekunden zwischen Reiz und Reaktion (BIRBAUMER & SCHMIDT, 1991, 547).

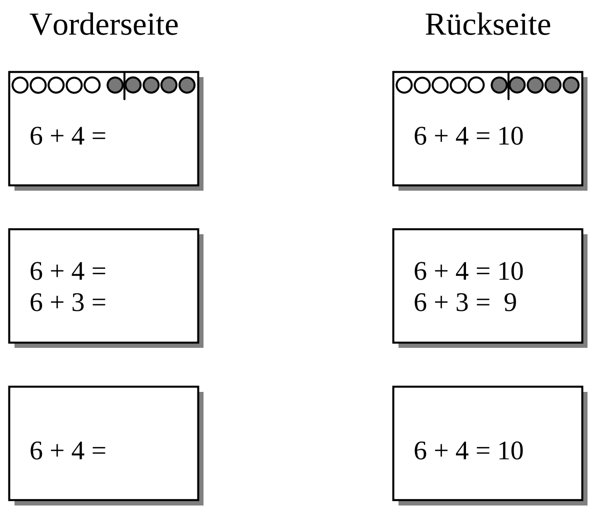


Abb. 8.36: Karteikarten zur Grundaufgabe 6 + 4 = □

Im Kapitel 20 (Plusaufgaben im Zahlenraum bis 20: Verdoppeln und Nachbaraufgaben) befinden sich sechs blaue Aufgabenkärtchen mit Aufgaben zum Verdoppeln und acht gelbe Kärtchen mit Nachbaraufgaben zum Verdoppeln. Die entsprechende bloße Abrufaufgabe befindet sich bei den weißen Kärtchen in Kapitel 24.

Vorderseite	Rückseite
7 + 7 =	7 + 7 = 14
7 + 7 = 7 + 8 =	7 + 7 = 14 7 + 8 = 15
7 + 8 =	7 + 8 = 15

Abb. 8.37: Aufgabenkarten aus der Lernkartei

Die Lernkartei ist gedacht als Trainingsmittel in *Einzelarbeit*. Es ist zweckmäßig, wenn einem Kind ein Kasten für längere Zeit zur Verfügung steht, damit es an seinen selbständig eingeordneten Kärtchen beobachten kann, wie sich sein Lernstand von Tag zu Tag verändert. Es wird vorgeschlagen, dass das Kind täglich maximal fünf Minuten mit der Lernkartei übt.

2. Drei-Minuten-Training nach Krüll

Diese Trainingsform soll dem Kind Anreiz geben, Aufgaben aus dem Gedächtnis abzurufen, anstatt sie zählend zu lösen. Dazu soll es innerhalb von drei Minuten möglichst viele Aufgaben lösen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhält es einen Punkt (eine Belohnung). Wenn das Kind merkt, dass Auswendigwissen sich lohnt und erlebt, dass es das auch kann, wächst der Mut, Ergebnisse einfach aus dem Gedächtnis abzurufen. Das Ziel, möglichst viele Punkte und damit eine möglichst große Belohnung zu erreichen, weckt Ehrgeiz und eventuell auch positiven Stress, so dass mit den Aufgaben verbundene negative Gefühle eventuell weniger wahrgenommen werden (KRÜLL, 1994, 97 ff.).
Kritisch ist anzumerken: Es ist besser, wenn die Belohnung *intrinsisch* ist, also aus Freude an der Sache, am Tun selbst, aus dem Wahrnehmen der eigenen Tüchtigkeit entsteht.

3. CD-Rom-Blitzrechnen nach Krauthausen[9]

Dieses Automatisierungstraining am Computer lehnt sich an den „Blitzrechenkurs“ im Zahlenbuch von WITTMANN UND MÜLLER (1994) an. Es beinhaltet Übungen zur Orientierung im Zahlenraum, Vertiefung des Zahlbegriffs, Einführung der Addition und Subtraktion sowie Zahlen und Muster. Das Programm dient hauptsächlich der Automatisierung von bereits Gelerntem. Eine solide Grundlegung im Unterricht ist demnach unabdingbare Voraussetzung für einen vernünftigen Einsatz auch dieses Programms.

[9] vgl. KRAUTHAUSEN (1997)

4. Elektronischer Rechentrainer Little Professor (vgl. RADATZ u. a., 1996)

Dieses Trainingsgerät vom Typ „Taschenrechner“ stellt Aufgaben zu allen vier Grundrechenarten in jeweils fünf Schwierigkeitsstufen. Es werden immer fünf Aufgaben nacheinander gestellt. Jede richtig gelöste Aufgabe wird sofort „belohnt“, jede falsch gelöste noch einmal gestellt und nach dem dritten Versuch mit der richtigen Lösung angeboten.

8.9 Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100

Das Addieren und Subtrahieren im Zahlenraum bis 100 wird häufig unter dem Stichwort "halbschriftliches Rechnen" behandelt. Angesichts der Schwierigkeiten von Kindern mit diesem Stoff scheinen zwei methodische Wege fragwürdig: Erstens: Die strenge Einhaltung eines methodischen Stufengangs vom Einfachen zum Schwierigen und das Einüben genormter Schreibweisen (sogenannte halbschriftliche *Verfahren*).
Halbschriftliches Rechnen soll nichts anderes sein als ein *Kopfrechnen* mit Notieren von Zwischenergebnissen oder schriftlichem Andeuten eines Lösungsweges. Unterschiedliche Lösungswege sind erwünscht und sollten diskutiert werden. Nach unseren Beobachtungen wird das Rechnen im Unterricht zu sehr nur auf der symbolischen Ebene betrieben. Am Beginn des Lernprozesses sollten unbedingt quantitative, gut strukturierte Vorstellungen von Zahlen und den Operationen stehen, die erst anschließend schriftlich in Kurzform festgehalten werden.
Statt eines kleinschrittigen Zugangs "vom Leichten zum Schweren" sind aktiv-erfindende Lösungswege zu bevorzugen und möglichst durch konkretes Handeln mit Material zu erproben. Vorteilhaft ist dabei das Teile-Ganzes-Konzept.
Auf die *Einführung* der Zahlen bis 100 sind wir in Abschnitt 7.4 kurz eingegangen. Wesentlich dabei ist, zweistellige Zahlen nicht bloß als punktuelle Ganzheiten (Positionen) in der Zahlwortreihe aufzufassen, sondern als Zusammensetzung aus anderen Zahlen, beispielsweise aus Zehnern und Einern (Abb. 7.33). Günstig ist die Verwendung von Zehnersystem-Blöcken. Um die quasi-simultane Zahldarstellung und Zahlauffassung zu erleichtern, ist es zweckmäßig, einige Zehnerstäbe in jeweils zwei Fünferstäbe zu zersägen, so dass man ein Analogon zu den Japan-Tiles erhält (Abb. 7.32, 7.33 und 8.14). In den nachfolgenden Abbildungen sind Zehnerstäbe und Fünferstäbe der Einfachheit halber mit Strichen, Einerwürfel als Punkte dargestellt.

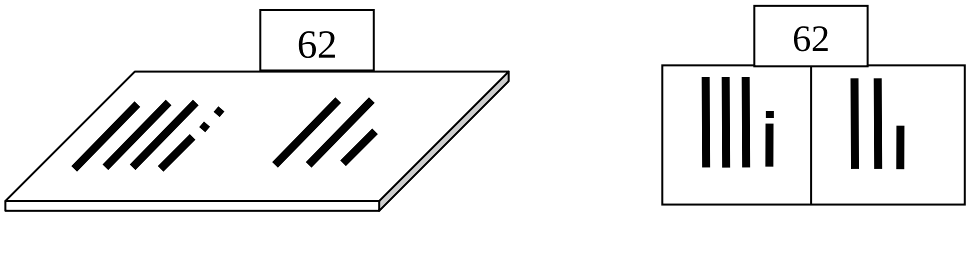
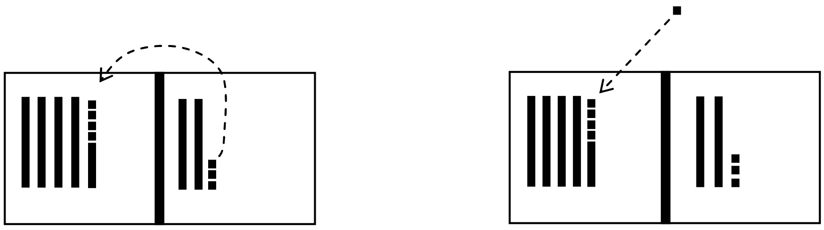


Abb. 8.38: Darstellung der Summe 37 + 25

Bei diesem Konzept der Addition werden die beiden Summanden als Teile eines Ganzen aufgefasst. Wenn man die Teile nicht zusammenschiebt, sondern nur in der Vorstellung zusammenfasst, hat dies den Vorteil, dass die Summanden sichtbar bleiben und der Zusammenhang zwischen den Teilen und dem Ganzen auch nach der Addition reflektierend betrachtet werden kann. Der Wert der Summe lässt sich auf verschiedene Weisen bestimmen:

- Zuerst die Zehner zusammenfassen, danach – soweit vorhanden – die Fünfen und Einer (Zerlegen der beiden Summanden in Zehner und Einer). In symbolischer Darstellung: $\underset{30\quad 7}{37} + \underset{20\quad 5}{25} = 50 + 12 = 62$
- Zum ersten Summanden zuerst die Zehner des zweiten Summanden addieren, danach – soweit vorhanden – die Fünfer und Einer des zweiten Summanden (Zerlegen des zweiten Summanden). In symbolischer Darstellung
  $$37 + \underset{20\quad 5}{25} = 57 + 5 = 62$$

In Sonderfällen bieten sich "Rechenvorteile" an, beispielsweise die *Kompensation* (zu einem Summanden einen Teil des anderen Summanden addieren) oder die *Kovarianz* (einen Summanden so verändern, dass eine leichtere "Nachbaraufgabe") entsteht (Abb. 8.39).



49 23
Kompensation
(Konstanz der Summe)

49 23
Kovarianz
(Nachbaraufgabe)

Abb. 8.39: Darstellung der Summe 49 + 23

In Abb. 8.39 *denkt* man sich einen Einer von der 23 zum anderen Summanden (49) gelegt. Der Wert der Summe ändert sich dabei nicht (Kompensation, Veränderung im entgegengesetzten Sinn, Konstanz der Summe). Die Summe 50 + 22 ist einfach zu berechnen.
Oder man denkt sich zum ersten Summanden einen weiteren Einer hinzu. Dadurch entsteht die leichtere Aufgabe 50 + 23 = 73. Von diesem Ergebnis ist der beim ersten Summanden hinzugedachte Einer wieder abzuziehen (Kovarianz, Veränderung im gleichen Sinne, Nachbaraufgabe).

Auch für die Subtraktion verwenden wir das Teile-Ganzes Konzept. Dabei bieten sich zwei methodische Varianten an, das Ergänzen oder das Wegnehmen. Betrachten wir als Beispiel die Aufgabe 62 – 45.

Beim *Ergänzen* gehen wir aus von dem bekannten Teil (45) des Ganzen (62). Wir haben also die Aufgabe, zu 45 den noch fehlenden Teil (den Unterschied) hinzuzufügen (Abb. 8.40).

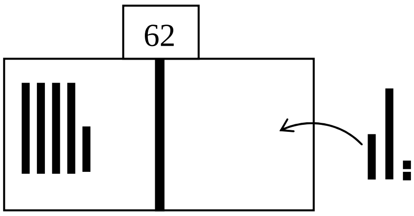


Abb. 8.40: Bestimmung von 62 – 45 durch Ergänzen

Beim *Abziehen* gehen wir aus von dem bekannten Ganzen (62). Davon trennen wir den bekannten Teil (45) ab und erhalten als Rest den gesuchten anderen Teil.

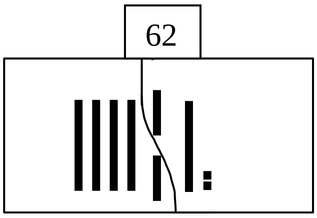


Abb. 8.41: Bestimmung von 62 – 45 durch Abziehen

Dazu legt man die Gesamtzahl (62) auf das Tablett. (Man kann sie zusätzlich noch mit einem Zahlenkärtchen festhalten). Danach trennt man den bekannten Teil (45) davon ab. Dazu muss unter Umständen ein Zehner entbündelt werden. Häufig genügt es, den Zehnerstab durch zwei Fünferstäbe zu ersetzen, was rascher geht und übersichtlicher ist als das Umtauschen eines Zehners in zehn (nicht simultan erfassbare) Einzelne.

9. Multiplikation und Division

9.1 Operationsverständnis

Ein Verständnis des Multiplizierens und Dividierens kann auf verschiedenen Konzepten aufgebaut werden. Für die Grundschule am wichtigsten ist das Konzept der Multiplikation als *wiederholtes Addieren* gleicher Summanden, das auf der Vereinigung gleichmächtiger Mengen beruht.[1] Daneben werden in der Grundschule auch bereits Konzepte des *Produktes von Anzahlen* verwendet, gelegentlich bei der Behandlung des kombinatorischen Modells und häufiger beim Ausmessen des Flächeninhaltes von Rechtecken mit einer Einheitsfläche. Eine Übersicht über Sachsituationen zu diesen Konzepten wird im Abschnitt 9.2 gegeben.

Wie wir für die Addition/Subtraktion bereits im Abschnitt 8.1 ausführten, besteht auch bei der Multiplikation/Division *Operationsverständnis* in der Fähigkeit, Verbindungen herstellen zu können zwischen:

a) konkreten Sachsituationen, die meist verbal beschrieben werden und möglichst realitätsnah sein sollen,
b) modell- oder bildhaften Darstellungen von entsprechenden Quantitäten und Beziehungen,
c) symbolischen Schreibweisen für die zugrundeliegenden Quantitäten und Rechenoperationen, meist in Form von Gleichungen.

Eine Multiplikations- oder Divisionsaufgabe kann demnach in drei verschiedenen „Sprachen“ dargestellt werden: als eine konkrete Situation, eine modell- oder bildhafte Darstellung oder eine symbolische Darstellung (Abb. 9.1).

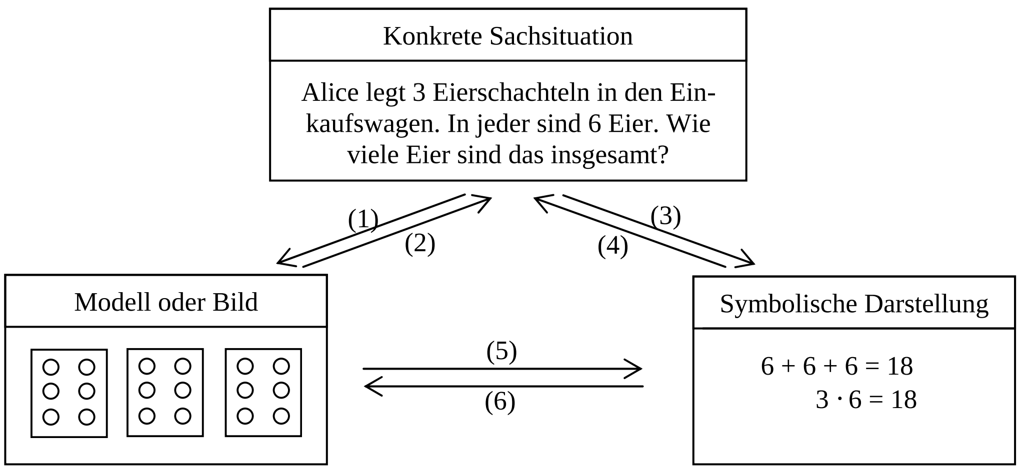


Abb. 9.1: Verschiedene Repräsentationen einer Multiplikationsaufgabe

[1] Allerdings geht dieses Konzept der Multiplikation über das der Addition hinaus, denn der Multiplikator zählt Mengen, ist also eine Eigenschaft einer Menge von Mengen, während der Multiplikand eine Eigenschaft einer Menge ist (vgl. Abb. 9.2). Die beiden Faktoren operieren also auf verschiedenartigen Mengen, die Summanden bei der Addition dagegen auf gleichartigen. Näheres dazu in Abschnitt 9.3.2.

Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen „Sprachen“ hin- und herübersetzen zu können, also *Verbindungen herstellen* zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-)Situationen und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen. Modelle und bildhafte Darstellungen übernehmen dabei häufig eine Vermittlerrolle.
Um festzustellen, wo sich ein Kind in der Entwicklung *seines* Operationsverständnisses befindet, kann man ihm verschiedene (diagnostische) Aufgaben zu den erwähnten „Übersetzungsleistungen“ vorlegen (HUINKER, 1993):

- *Sachsituation → Modell*: „Zeige mit diesen Plättchen, was in der Textaufgabe geschieht“. Dabei lässt man das Kind erklären, was es mit den Plättchen macht und warum.
- *Bildhafte Darstellung → Sachsituation:* „Erfinde eine Rechengeschichte, die zu diesem Bild passt.“ Dabei lässt man das Kind erklären, inwiefern die Geschichte zu dem Bild (oder den als Muster vorgegebenen Plättchen) passt. Man kann das Kind auch bitten, noch eine andere zum Bild passende Rechengeschichte zu erfinden.
- *Sachsituation → symbolische Darstellung*: „Schreibe eine Rechenaufgabe (Zahlenaufgabe, Zahlengleichung) auf, die zu der Rechengeschichte passt. Erkläre, was jede Zahl in der Rechengeschichte bedeutet. Erkläre, warum du so gerechnet hast.“
- *Symbolische Darstellung → Sachsituation*: „Erfinde eine Rechengeschichte, welche zu der Aufgabe $4 \cdot 15$ (oder $20 : 4$) passt. Wieso passt diese Geschichte zu dieser Rechenaufgabe? Erfinde zu der gleichen Rechenaufgabe noch eine andere Rechengeschichte“.
- *Modell- oder bildhafte Darstellung → symbolische Darstellung*: „ Schreibe eine Rechenaufgabe auf, die zu diesem Bild (oder Modell) passt.“ Man bittet das Kind zu erklären, weshalb es diese Rechenart gewählt hat und was jede Zahl der Rechenaufgabe in dem Bild bedeutet.
- *Symbolische Darstellung → bildhafte Darstellung oder Modell*: „Zeige mir mit diesen Plättchen (oder einem Bild), was $3 \cdot 5$ (bzw. $15 : 3$) bedeutet“. Man bittet das Kind, den Zusammenhang zwischen der Rechenaufgabe und den Plättchen (dem Bild) zu erklären.
- Sehr aufschlussreich ist es auch, das Kind selbst erlebte oder erfundene Situationen beschreiben und dazu selbst Textaufgaben bilden zu lassen. Man kann auch fragen, was beispielsweise „$3 \cdot 4$“ oder „$4 \cdot ? = 12$“ oder „$4 \cdot \square = 20$“ bedeuten könnte (STEINER, 1997, 174). Kann das Kind zum gleichen Rechenterm bzw. zur selben Gleichung verschiedene Sachzusammenhänge und verschiedene sprachliche Formulierungen finden?

9.2 Konkrete Situationen des Multiplizierens/Dividierens

In der Tabelle 9.1 ist eine Übersicht gegeben über eine Vielzahl von Sachsituationen zur Multiplikation und Division. Diese Übersicht soll zeigen, wie viele verschiedenartige konkrete Situationen die gemeinsame *Struktur* der Multiplikation/Division enthalten. Die Unterscheidung der Strukturtypen soll die Lehrerin auf die Komplexität der Multiplikation/Division, die Vielfalt ihrer Aspekte aufmerksam machen. Die eingekleideten Aufgaben dieser Übersicht sollten nicht als beispielhafte Formulierungen für Sachaufgaben angesehen werden. Dafür ist der Platz in der Übersicht zu eng. Sie sind hier künstliche Konstrukte, welche lediglich die *Struktur* einer großen Vielfalt realer Situationen aufzeigen sollen.

Tabelle 9.1: Sachsituationen zur Multiplikation/Division

Gliederungsstruktur / Sachstruktur		**Aufteilen** (quotitive division)	**Verteilen** (partitive division)
	Multiplikation a · b = □	Division □ · b = c Multiplikator (Anzahl der Portionen) gesucht	Division a · □ = b Multiplikand (Größe der Portionen) gesucht
<u>1. Vervielfachung von Größen</u>	Geg.: Anzahl u. Größe d. Teilportionen	Geg.: Das Ganze und **Größe** der Teilportionen	Geg.: Das Ganze und **Anzahl** der Teilportionen
1.1 Teile-Ganzes-Struktur Räumlich-simultan	3 Tüten, in jeder 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel. In jede Tüte 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel. In 4 Tüten.
	3 Schnüre, jede 4 m lang. 3 Gefäße, jedes fasst 4 l.	Insgesamt 12 m. Jedes Stück 4 m. Insgesamt 12 l. In jedes Gefäß 4 l.	Insgesamt 12 m. Teilen in 4 gleiche Stücke. Insgesamt 12 l. Verteilen auf 4 gleiche Gefäße.
Zeitlich-sukzessiv	3-mal gehen. Jedesmal 4 Äpfel holen.	Insgesamt 12 Äpfel holen. Jedes Mal 4 Äpfel.	Insgesamt 12 Äpfel holen. 4-mal gehen.
	3-mal gehen. Jedes Mal 4 kg holen.	Insgesamt 12 kg holen. Jedes Mal 4 kg.	Insgesamt 12 kg holen. 4-mal gehen.
1.2 Proportionalitätsstruktur	In 1 Tüte 4 Äpfel. Wie viele Äpfel in 3 Tüten?	In eine Tüte 4 Äpfel. Wie viele Tüten für 12 Äpfel?	12 Äpfel sollen in 4 Tüten abgepackt werden. Wie viele kommen in eine Tüte?
	In 1 h 4 km. Wie viele km in 3 h? 4 DM pro kg. Wie viel kosten 3 kg?	In 1 h 4 km. Wie lange für 12 km? 1 kg kostet 4 DM. Wie viele kg für 12 DM?	In 4 h ging er 12 km. Wie viele km in 1 h? 4 kg Äpfel kosten 12 DM. Wie viel kostet 1 kg?
1.3 Maßumwandlung	1 Zoll sind 2,54 cm. Wie viele cm sind 3 Zoll?	1 Zoll sind 2,54 cm. Wie viel Zoll sind 7,62 cm?	4 Zoll sind 10,16 cm. Wie viele cm ist 1 Zoll?
1.4 Multiplikativer Vergleich zweier Größen	A hat 4 Äpfel. B hat 3-mal so viele.	A hat 4 Äpfel, B hat 12 Ä. Wievielmal so viel?	B hat 12 Äpfel. Das sind 4-mal so viele wie A.
	A bekommt monatlich 5 DM Taschengeld. B bekommt 3-mal so viel.	A bekommt monatlich 5 DM, B bekommt 15 DM. Wievielmal so viel bekommt B?	B bekommt 15 DM. Das ist 4-mal so viel wie A bekommt. Wie viel bekommt A?
1.5 Multiplikative Veränderung einer Größe	Ein Elastikband kann auf das Dreifache seiner Länge gedehnt werden. Auf welche Länge kann ein 4 m-Band gedehnt werden?	Ein Elastikband der Länge 4 m kann auf 12 m gedehnt werden. Auf das Wievielfache seiner Originallänge kann es gedehnt werden?	Ein Elastikband kann auf das Vierfache seiner Länge gedehnt werden. Welche Originallänge hat ein auf 12 m gedehntes Band?
<u>2. Produkt von Größen</u> 2.1 Anzahl x Anzahl Kombinatorisches Modell	3 Röcke, 4 Blusen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten?	Division wäre möglich, ist aber nicht üblich.	
Ausmessen mit Einheits-Fläche	Ein Zimmer ist 3 m lang und 4 m breit. Wie viele Meterquadrate braucht man zum Auslegen?		
2.2 Länge x Länge	Ein Teppich ist 3 m lang und 4 m breit. Wie groß ist sein Flächeninhalt?	Ein Teppich hat 20 m² Flächeninhalt. Er ist 4 m breit. Wie lang ist er?	
2.3 Produkt sonstiger Größen	Ein elektrisches Heizgerät mit 3 kW Leistung brennt 4 h. Wie viele kWh verbraucht es?	Ein Heizgerät mit 4 kW Leistung verbrauchte 12 kWh. Wie lange war es eingeschaltet?	In 4 h verbrauchte ein Heizgerät 12 kWh. Wie groß ist die Heizleistung?

Der Übersichtlichkeit wegen wurden in den meisten Beispielen dieselben Zahlenwerte (das Tripel 3, 4, 12) verwendet. Ziel im Unterricht ist es, an die vielfältigen *Erfahrungen der Kinder* mit multiplikativen Situationen und an ihr Vorwissen anzuknüpfen. Im Anschluss daran soll ihr Erfahrungshintergrund erweitert werden, und zwar möglichst reichhaltig und anwendungsorientiert. Es ist gut, wenn die Lehrerin die Vielfalt der Beispiele in ein gut strukturiertes Raster, beispielsweise das der Tabelle 9.1, einordnen kann. Das Raster kann ihr dann helfen, für die täglichen Kopfrechenübungen variantenreiche Rechengeschichten zur Multiplikation und Division zu erfinden.
Wenn bei der Multiplikation der Multiplikator und der Multiplikand eine deutlich unterscheidbare Rolle spielen, dann ergeben sich zwangsläufig zwei verschiedene Typen von Divisionsaufgaben (in Tabelle 9.1 bei Ziffer 1 und 2.3). Ist bei der Vervielfachung von Größen außer der Gesamtgröße der Multiplikand bekannt, also die *Größe* der Teilportionen, so sprechen wir vom *Aufteilen zu je*, vom *Messen*, vom *Enthaltensein* (quotitive division). Ist dagegen der Multiplikator bekannt, also die *Anzahl* der Teilportionen, so sprechen wir vom *Verteilen oder Aufsplitten* (partitive division).
Es ist nicht wichtig, dass Kinder Begriffe wie „Aufteilen“, „Messen“, „Verteilen“ usw. streng unterscheiden können. Wichtig ist aber, dass sie den unterschiedlichen Sachsituationen passende Modelle und Rechenaufgaben zuordnen können und umgekehrt (Abschnitt 9.1). Je flexibler sie dabei sind, um so besser ist ihr Operationsverständnis (VAN DE WALLE, 1994, 128). Bei der Behandlung der Division sollten in jeder Unterrichtswoche *Sachprobleme* zur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division gestellt werden. Dabei sollten die Kinder selbständig herausfinden, welche Rechenart jeweils passt. Diese sollte nicht schon aus den Überschriften erkennbar sein.

9.3 Verständnisschwierigkeiten bei der Multiplikation/Division

9.3.1 Sprachliche Schwierigkeiten

Bei der Beschreibung konkreter Sachsituationen zur Multiplikation und Division tritt eine Vielzahl von Begriffen auf, die nicht einfach zu verstehen sind und Unterschiedliches bedeuten können (vgl. Tab. 9.1). Solche Begriffe sind: jeder, in jeder, für jede, jedesmal, pro, je, dreimal so viele, zweimal mehr, wievielmal so viele, auf das Wievielfache. Zu derartigen Begriffen passen situationsabhängig Multiplikations- *oder* Divisionsaufgaben.

9.3.2 Schwierigkeiten aufgrund des Zahlverständnisses

Für Kinder am einfachsten ist der Zugang zur Multiplikation über das mehrfache Addieren gleicher Summanden. Dem liegt die Vereinigung gleichmächtiger Mengen von Dingen zugrunde.

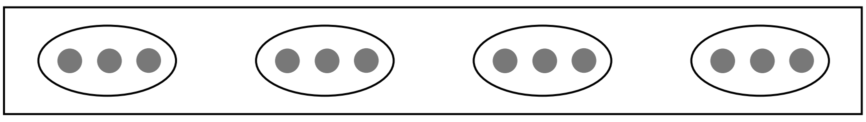


Abb. 9.2: Vereinigung gleichmächtiger Mengen

Die mentale Konstruktion dieses Konzeptes ist keineswegs einfach, insbesondere wenn sie auf der Basis der *Zahlwortreihe* erfolgt. Wenn die Zahlvorstellung von Kindern auf der Zahlwortreihe beruht, besteht die Gefahr, dass sie noch im dritten oder vierten Schuljahr die Zahl „3“ verstehen als drei einzelne Dinge und noch nicht als *ein* Ganzes, das aus drei Einzeldingen zusammengesetzt ist. Diese Kinder fokussieren bei der „Drei“ auf drei Einzeldinge, *nicht* aber auf die Dreiermenge als *ein* Ganzes. Sie führen also nicht spontan die Integrations-Operation aus, also die Zusammenfassung der drei Dinge zu *einem* Ganzen (Abschnitt 7.2.1). Sie haben die „Drei“ nicht als ein „Fertigprodukt“, als einen „Dreier“ verfügbar (Abb. 9.2), sondern müssen die „Drei“ jedesmal durch drei Zählakte herstellen (Abb. 9.3).
Daraus ergeben sich mehrere Probleme. Die Aufmerksamkeit des Kindes ist auf das „Herstellen“ der Summanden durch Zählakte gerichtet. Dadurch ist es für das Kind schwierig, zugleich auch noch auf die Anzahl der soeben konstruierten Summanden zu achten. Ein solches Kind kann eventuell „in Dreierschritten“ bis 12 zählen, indem es jede dritte Zahl betont ausspricht. Und dennoch kann es auf die Frage „Wie viele Dreier sind das?“ die Antwort „acht!“ geben.

$$1,\ 2,\ \underline{3},\ 4,\ 5,\ \underline{6},\ 7,\ 8,\ \underline{9},\ 10,\ 11,\ \underline{12}$$

Abb. 9.3: In Dreierschritten bis 12

Anhand von Abb. 9.3 ist leicht zu erkennen, dass bei diesem Zahlkonzept keineswegs klar ist, was „Dreier“ sind. Fokussiert werden sollten eigentlich jeweils *drei* gleichartige Elemente. Die Zahlwörter der Zahlwortreihe sind aber verschiedene Dinge. Deutlicher als jeweils die Zusammenfassung dreier gleichartiger Dinge, also Dreiermengen, fallen die eventuell leise mitgesprochenen *Zwischenzahlen* auf, und davon sind es tatsächlich acht! Wenn das Kind nur die Zwischenzahlen mit den Fingern mitzählt und jede dritte Zahl laut nennt, dann sieht es am Schluss tatsächlich acht aufgeklappte Finger.
Diese Überlegungen zeigen: Das Verständnis der Multiplikation ist schwierig, solange das Kind noch nicht spontan verfügt über das Konzept der Zahl als „abstract composite unit“, d. h. der Zahl als *ein* Ganzes, das aus Einheiten zusammengesetzt ist und das selbst wieder als zählbare Einheit auftritt (vgl. Abb. 9.2). Hierfür erhalten die Ausführungen in den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2 nochmals besonderes Gewicht. Dieses Verständnis der Multiplikation auf der Basis der Zahlwortreihe zu erreichen wäre keine einfache Angelegenheit. Ähnlich problematisch ist der Zugang zur Multiplikation auf der Basis des *Zahlenstrahls* (Abb. 9.4).

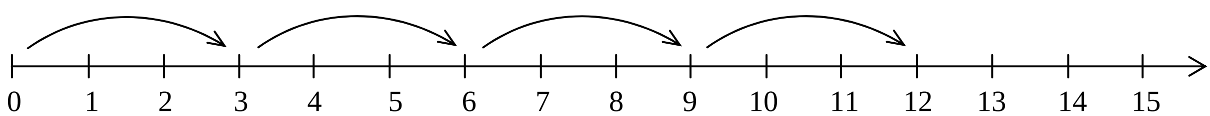


Abb. 9.4: Sprünge am Zahlenstrahl

Auch hier ist nicht unbedingt klar, was „Dreier“ bzw. „Dreiersprünge“ sind. Deutlicher als drei Dinge erscheinen am Zahlenstrahl zwei Dinge (die beiden übersprungenen Zahlen) oder vier Dinge (die vier bei jedem Sprung beteiligten Zahlen).

Sowohl beim Zugang über die Zahlwortreihe (Abb. 9.3) als auch beim Zahlenstrahl (Abb. 9.4) ist nicht genügend klar, welches die aus Einzeldingen zusammengesetzten Einheiten sind, die zu zählen sind. Sind es Zahlwörter oder Striche oder Schritte von Zahlwort zu Zahlwort, von Strich zu Strich? Eine weitere Schwierigkeit besteht darin, dass zuerst Repräsentanten für die gleichen Summanden hergestellt werden müssen und zugleich ihre Anzahl festgestellt werden soll. Leichter verständlich ist der Zugang zur Multiplikation über die Bildung von beispielsweise vier *Mengen* mit jeweils drei Dingen, die anschließend einzeln durchgezählt werden:

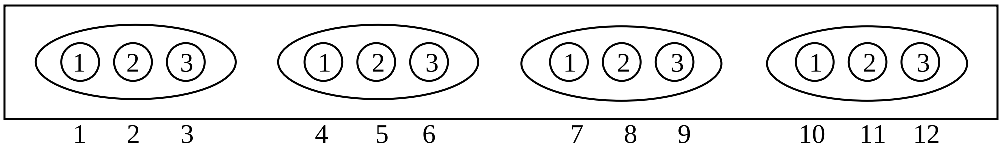


Abb. 9.5: Vier Dreiermengen

Hier ist es für das Kind leichter als beispielsweise am Zahlenstrahl oder an der Zahlwörterfolge, die aus jeweils gleich vielen Einzeldingen zusammengesetzten Einheiten (Teilportionen) als zählbare Objekte zu erkennen.
Das Erkennen von *zusammengesetzten Einheiten als zählbare Einheiten* fällt schwachen Kindern leichter beim Einstieg über Mengen von Paaren, die in natürlichen Zusammenhängen vorkommen (Paare von Schuhen, Handschuhen, Brillengläsern usw., Abb. 9.6).

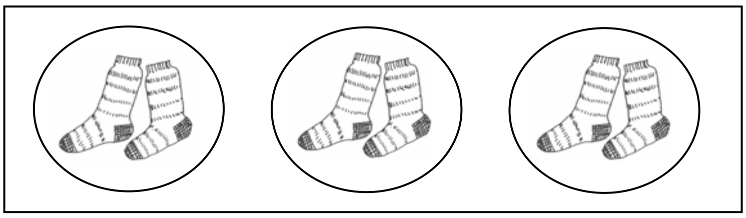


Abb. 9.6: Menge von Paaren als Modell für die Multiplikation

Dabei kann das Kind am leichtesten lernen, dass 2 Dinge (Schuhe) *eine* Einheit (ein Paar) bilden können und *Paare* gezählt werden können. Die Idee des Zählens von Paaren kann anschließend ausgeweitet werden zum *Konzept des Zählens von Dreiermengen, Vierermengen* usw., also *von größeren zusammengesetzten Ganzen*.

An dieser Stelle können wir noch einmal deutlich machen, dass ähnliche Anforderungen wie bei der Multiplikation auch beim Verständnis zweistelliger Zahlen gestellt werden. Auch im dritten oder vierten Schuljahr finden wir sogenannte rechenschwache Kinder, welche zwar 87 Steckwürfel abzählen können, aber nicht ohne weiteres sagen können, wie viele Zehnerstangen sie aus diesen 87 Steckwürfeln zusammenbauen könnten. Hier zeigt sich: Es ist *eine* Sache die Zahlwortreihe bis 87 aufzusagen oder 87 Einzeldinge abzuzählen oder auch die Zehnerzahlen bis 70 oder 80 aufzusagen. Eine *andere* Sache ist es festzustellen, wie viele Zehnermengen in einer Menge von 87 Einzeldingen enthalten sind. Denn dabei muss das Kind die zehn Steckwürfel, die zu einer Zehnerstange zusammengesteckt werden, als *ein* Ding auffassen und diese zusammengesetzten Ganzen zählen, wie es bisher Einzeldinge zählte. Nur *so* kommt es zur Erkenntnis, dass acht Zehnertürme gebaut werden können und in der Zahl 87 die Zehn *achtmal* enthalten ist (KILLION & STEFFE, 1989).

Entsprechend ist es eine Sache, in Dreierschritten bis 24 zu zählen und eine andere Sache zu wissen, dass es 8 *Dreier* sind, die zusammen 24 ergeben.

9.3.3 Schwierigkeiten mit der Null und der Eins bei der Multiplikation/Division

Worin besteht das Problem?

Es ist allgemein bekannt, dass Schüler häufig Fehler der Art $5 \cdot 0 = 5$, $0 \cdot 5 = 5$ oder $5 : 5 = 0$ produzieren. Der letzte Fehler tritt besonders häufig auf in der Bruchschreibweise als $5/5 = 0$, weil eben „alles weggekürzt“ wurde. Fehler dieser Art zeigen an, dass Erweiterungen des Verständnisses der Rechenoperationen auf „Randfälle, pathologische Fälle“ noch nicht stattgefunden haben. Diese Erweiterungen werden im Unterricht häufig zu wenig beachtet (KORNMANN, 1997).
Wird die Multiplikation *nur* als abgekürzte *Addition* gleicher Summanden verstanden (z. B. $3 \cdot 4$ als $4 + 4 + 4$), dann ist $1 \cdot 4$ und erst recht $0 \cdot 4$ unklar, denn diese Produkte sind nicht mehr als *Summen* erklärbar. Auch Sachsituationen zu solchen Produkten wirken unnatürlich. 5 Tüten mit jeweils 0 (!) Äpfeln oder 0 (!) Tüten mit jeweils 5 Äpfeln zu füllen oder 0 (!) Äpfel an 5 Kinder zu verteilen, solche Vorstellungen wirken auf Kinder gekünstelt. Vernünftige *Handlungen* sind so nicht möglich.
Die Vorstellung von der Null als Anzahleigenschaft der leeren Menge kann fehlerhafte Assoziationen und fehlerauslösende sprachliche Formulierungen bewirken. Das Addieren oder Subtrahieren einer Null sieht als *Handlung* aus wie ein Nichts-Tun, Nichts-Verändern, Nichts-Rechnen. Dies kann zur Vorstellung führen, die Null verändere stets beim Rechnen nichts, sei stets „neutrales Element“, also sei $0 \cdot 4 = 4$, $0 : 4 = 4$ usw. Aus „mit Nichts malnehmen“ wird leicht „nicht malnehmen“, also „unverändert lassen“. Dies zeigt, wie problematisch es ist, den „Nichts-Charakter“ der Null zu betonen und ihren *Zahlcharakter* zu vernachlässigen.

Welche Maßnahmen können helfen?

Erstens: ***Den Zahlcharakter der Null hervorheben, das Permanenzprinzip anwenden***.
Das Permanenzprinzip ist immer nützlich bei der Erweiterung eines Zahlenbereichs. Es fordert eine Gesetzmäßigkeit beizubehalten (permanere (lat.) = fortbestehen, verbleiben). Beispielsweise gilt:

$$\begin{array}{llll} & 3\cdot 4 = 12 & 4\cdot 3 = 12 & 0\cdot 3 = 0 \\ & 2\cdot 4 = 8 & 4\cdot 2 = 8 & 0\cdot 2 = 0 \\ & 1\cdot 4 = 4 & 4\cdot 1 = 4 & 0\cdot 1 = 0 \\ \textit{Also} & \mathit{0\cdot 4 = 0} & \mathit{4\cdot 0 = 0} & \mathit{0\cdot 0 = 0} \end{array}$$

In den beiden ersten Aufgabensequenzen wird ein Faktor immer um eins und das Ergebnis immer um vier kleiner. Durch Fortsetzung dieser Gesetzmäßigkeit bis zur untersten Zeile ergeben sich die kursiv geschriebenen Aussagen. Entsprechendes gilt für das Dividieren.

$$\begin{array}{ll} & 12 : 4 = 3 \\ & 8 : 4 = 2 \\ & 4 : 4 = 1 \\ \textit{Also} & \mathit{0 : 4 = 0} \end{array}$$

Zweitens: ***Vertauschungsgesetz anwenden***.
Man kann dem Permanenzprinzip entsprechend fordern, dass das Vertauschungsgesetz $a \cdot b = b \cdot a$ auch für die Faktoren 1 und 0 gelten soll.

$$1 \cdot 4 = 4 \cdot 1 = 1+1+1+1, \quad \textit{also} \quad 1 \cdot 4 = 4$$
$$0 \cdot 4 = 4 \cdot 0 = 0+0+0+0, \quad \textit{also} \quad 0 \cdot 4 = 0$$

Drittens: ***Kombinatorisches Modell mit dem Permanenzprinzip anwenden.***
Eine einigermaßen plausible *Veranschaulichung* zu $0 \cdot 4$ ergibt sich aus dem kombinatorischen Aspekt. Zur Darstellung von $3 \cdot 4$ kann man sich 3 waagrechte Stäbe oder Fäden vorstellen, die sich mit 4 dazu senkrechten Stäben oder Fäden kreuzen. Dies ergibt folgende Veranschaulichung:

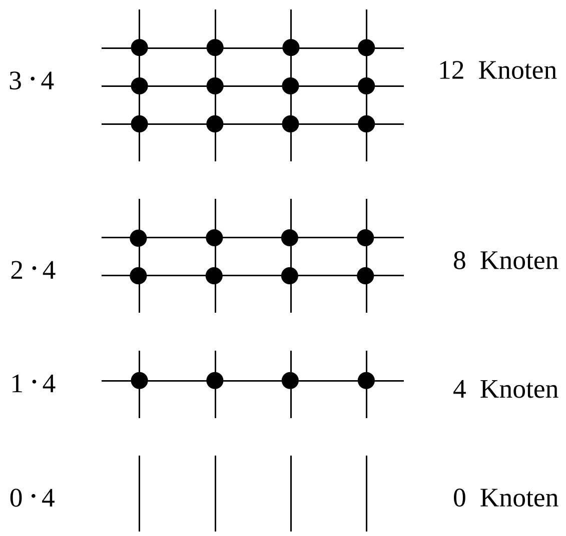


Abb. 9.7: Veranschaulichung des Permanenzprinzips zur Erklärung von $1 \cdot 4$ und $0 \cdot 4$

9.3.4 Schwierigkeiten beim multiplikativen Vergleich und bei der multiplikativen Veränderung

Diese Konzepte der Multiplikation werden von Kindern erst *nach* dem Konzept des Zusammensetzens eines Ganzen aus mehreren gleichen Teilen gebildet. Auch hierbei ergeben sich typische Verständnisschwierigkeiten. Wenn man aus einer Menge mit vier Bonbons *dreimal so viele* machen möchte, muss man noch *zweimal* vier Bonbons *dazu* tun (Abb. 9.8). Es sind dann *zweimal mehr* Bonbons als vier Bonbons und das sind *dreimal so viele* wie am Anfang.

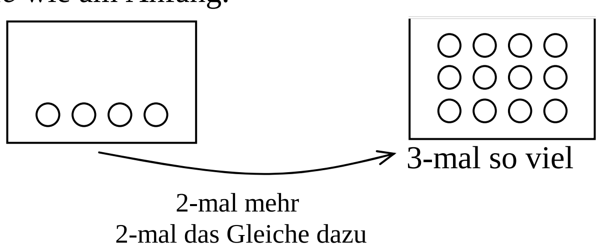


Abb. 9.8: Das Dreifache

Will man ein elastisches Band auf *das Dreifache* der ursprünglichen Länge dehnen, beträgt die *Verlängerung* das Doppelte der ursprünglichen Länge (Abb. 9.9). Wird eine Strecke *um das Doppelte vergrößert*, ist sie nachher *dreimal so lang.*

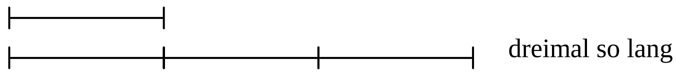


Abb. 9.9: Dreifache Länge (*um* das Doppelte länger)

Dies macht zweierlei deutlich: Erstens: Die Strategie des *Hinzufügens* zweier Summanden kann zu Verständnisschwierigkeiten beim Multiplizieren mit 3 führen. Denn in $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$ werden gegenüber $1 \cdot 4$ nur 2 Vieren *hinzugefügt*. Zweitens: Sprechweisen wie „zweimal mehr“ (also eine Gemisch aus Addition und Multiplikation) sollte man ersetzen durch klarere Sprechweisen wie „das Dreifache“ oder „dreimal so viel“.

9.3.5 Schwierigkeiten auf der Symbolebene

Wir haben bei Kindern bemerkt, dass sie „$3 \cdot 3$ als zwei Dreier auffassten, also als “zweimal die Drei“, also als $3 + 3$.

9.4 Multiplikations- und Divisionsterme und ihre Darstellung

Multiplikationsterme, also *Produkte* wie $3 \cdot 4$, führen wir ein als *Zeichen für die Zusammensetzung eines Ganzen aus mehreren gleichen Teilportionen*. Wir vereinbaren dabei: Der erste Faktor (Multiplikator) gibt an, *wie viele solche gleiche Teilportionen* es sind und der zweite Faktor (Multiplikand) gibt an, *wie groß* diese sind. Diese Vereinbarung passt zum Alltags-Sprachgebrauch: Mit „drei mal vier“ meint man „dreimal Vier“, also drei Portionen zu je vier, also *drei Vierer-Portionen*.

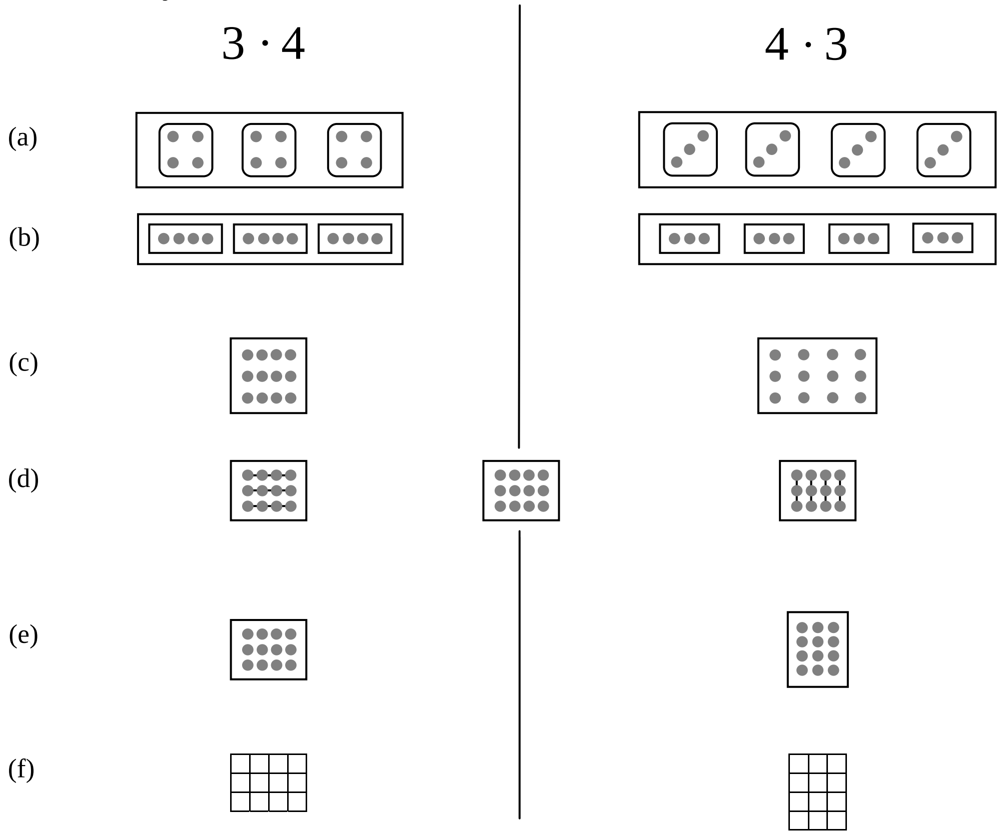


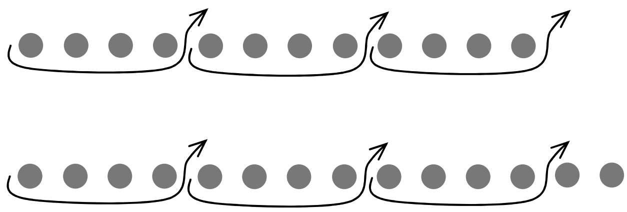
Abb. 9.10: Verschiedene bildliche Darstellungen der Produkte $3 \cdot 4$ und $4 \cdot 3$

In den Abbildungen a) und b) sind sowohl die gleichen Teilportionen als auch die Gesamtmenge eingerahmt, in c) bis e) nur noch die Gesamtmenge. In allen Fällen dient der Rahmen der Verdeutlichung des Zusammenfassens von Dingen zu zusammengesetzten Einheiten, die auch ohne die Rahmen vom erkennenden Gehirn nach dem gestaltpsychologischen Gesetz der Nähe so aufgefasst würden (PREIß, 1996).
Im mittleren Bild von d) sind die Abstände in beiden Richtungen gleich. In diesem Fall kann man nur durch Hilfslinien deutlich machen, ob 3 Viererportionen oder 4 Dreierportionen gemeint sind. Bei Verwendung gleicher Abstände wird für den Unterricht (in Unterrichtswerken, Arbeitsblättern) häufig vereinbart, dass die Punktefelder *zeilen*weise gelesen werden sollen, so wie man einen Text liest (Abb. e). Das Vertauschungsgesetz der Multiplikation ergibt sich in Abb. 9.10 e) durch Drehen des Bildes um 90°.
Wenn – wie in obiger Festlegung – der Multiplikator und der Multiplikand eine unterschiedliche Rolle im Produkt spielen, dann können wir *zwei Arten des Dividierens* unterscheiden.
Wird $a : b = \square$ verstanden als die Lösung der Gleichung $\square \cdot b = a$, d. h. als Frage danach, wie viele *gleiche Teilportionen zu je b* es sind, dann sprechen wir vom <u>*Aufteilen zu je b*</u> (quotitive division). In der traditionellen deutschen Rechendidaktik wurde dafür $12 \div 4$ geschrieben. Dies war die Frage danach, wie oft man jeweils 4 von 12 *wegnehmen* (subtrahieren) kann oder wie oft 4 in 12 *enthalten* ist. Deshalb das Minuszeichen bei den Divisionspunkten, das international heute noch üblich ist, bei uns allerdings nur auf dem Taschenrechner. Dafür ein Beispiel:

a) Lege 12 (14) Plättchen. Wie viele *Viererportionen* gibt es?

$12 : 4$

$14 : 4$



b) Lege 14 Plättchen. Wie viele *Viererreihen* gibt es?

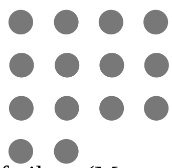
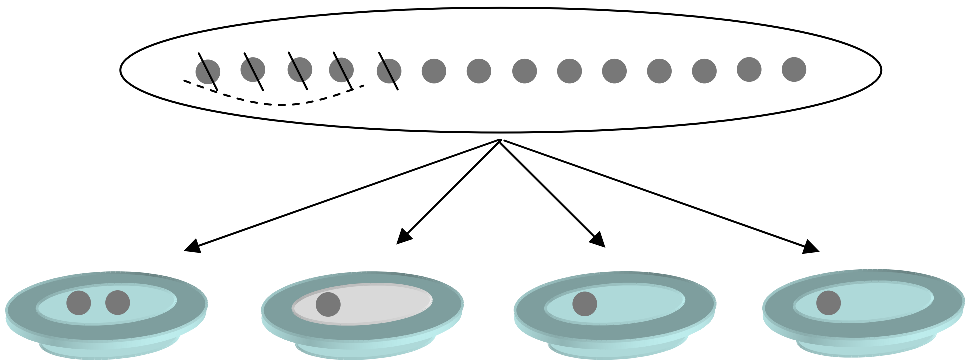


Abb. 9.11: Bildliche Darstellungen des Aufteilens (Messens)

Am Beispiel $14 : 4$ wird übrigens deutlich, dass die *Strategie des Vorwärtszählens* (4, 8, 12) günstiger ist als die Strategie des Rückwärtszählens (14, 10, 6, 2), denn beim Vorwärtszählen kann man die vertrauten Viererzahlen benutzen. Manche Kinder entdecken diesen Vorteil spontan (SELTER, 1993, 138). Bei *Größen* spricht man anstatt vom Aufteilen häufig vom *Messen*. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe $12\,\text{m} \div 4\,\text{m}$. Man fragt dabei, wie oft $4\,\text{m}$ in $12\,\text{m}$ *enthalten* sind (Ergebnis: *dreimal*).
Wird dagegen $a : b = \square$ verstanden als die Lösung der Gleichung $b \cdot \square = a$, d. h. als

Frage danach, wie groß die Teilportionen werden, wenn wir *b gleiche Teile bilden*, dann sprechen wir vom *Verteilen an b* (partitive division, GREER in GROUWS, 1992). In der traditionellen deutschen Rechendidaktik wurde dafür $12 : 4$ geschrieben. Das ist die Frage danach, wie groß die Teilportionen sind, wenn man aus dem Ganzen beispielsweise vier gleichgroße Teile bildet:

a) Verteile 14 Plättchen auf 4 Teller, auf jeden gleich viel. Der Rest soll möglichst klein sein.



b) Du hast 14 Plättchen. Lege 4 Reihen, in jede gleich viele und möglichst viele Plättchen.

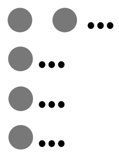


Abb. 9.12: Bildliche Darstellungen des Verteilens

In abstrakter Form versteht man unter $12 : 4$ bei *dieser* Sichtweise des Dividierens die Lösung der Gleichung $4 \cdot \square = 12$. Man fragt also: Viermal welche Zahl ergibt 12? Man weiß: Es ist die vierte Zahl in einer Einmaleinsreihe. Man fragt also: In welcher Einmaleinsreihe steht an der vierten Stelle eine 12?
Bei Größen sagt man statt „Verteilen“ häufig nur „Teilen“. Die Aufgabe $12\text{ m} : 4$ verlangt, die Größe 12 m in 4 gleiche Teile zu zerlegen (Ergebnis 3 m).

Vergleich der beiden Grundvorstellungen

- Auf der *Ebene von Handlungen mit konkreten Gegenständen* ist das Aufteilen (immer 4 wegnehmen und feststellen, wie oft das geht) einfacher und rascher als das Verteilen, wo in jeder Runde Anfang und Ende beachtet werden muss.
  Rationeller als beim Einzeln-Reihumverteilen lässt sich das Verteilen gestalten, wenn man überlegt: Für jede Runde braucht man 4 Äpfel. Für *wie viele Runden* reichen 14 Äpfel? (Der gestrichelte Bogen in Abb. 9.12 deutet dies an). Wir sprechen dann vom *Verteilen nach der Strategie des Aufteilens*. SELTER (1993, 159) und BÖNIG (1995, 177) konnten beobachten, dass Kinder *diese* Strategie spontan anwenden. Sind beispielsweise 20 Kekse gleichmäßig an 4 Kinder zu *verteilen*, so nehmen

viele Kinder spontan jeweils 4 Kekse (bilden also *Viererportionen wie beim Aufteilen*) und geben jedem Kind einen davon.

- Auf der *Ebene bildhafter Darstellungen* ist das Aufteilen wesentlich einfacher als das Verteilen, bei dem jedes Element zweimal gezeichnet werden muss.
- Auf der *symbolischen Ebene* ist wiederum das Aufteilen einfacher, denn man weiß, um welche Einmaleinsreihe es sich handelt (die Viererreihe) und fragt nur, wie oft man die 4 vervielfachen muss, um 12 zu erreichen (oder 14 fast zu erreichen).
- Die Vorstellung des Aufteilens entspricht besser der Umkehrung des Multiplizierens: Das *Multiplizieren ist ein wiederholtes Addieren* derselben Zahl, das *Aufteilen ein wiederholtes Subtrahieren* derselben Zahl.
- Wenn man Divisionsaufgaben mit Hilfe von *Einmaleinskenntnissen* lösen will, ist die Vorstellung des Verteilens streng genommen erst zulässig, nachdem *alle* Einmaleinsreihen behandelt sind, denn bei $12 : 4$ fragt man ja, in *welcher* Einmaleinsreihe an vierter Stelle die 12 steht.
- Die Vorstellung des Aufteilens hat darüber hinaus den Vorteil, dass eine einfache *Sprechweise* zur Verfügung steht: *Wie oft geht 4 in 14?* Die entsprechende Formulierung für das Verteilen wäre sehr holperig: Das Vierfache von welcher möglichst großen Zahl ist kleiner oder gleich 14?
- Der Unterschied zwischen Aufteilen und Verteilen wird auch deutlich, wenn man beispielsweise die Steckwürfelaufgabe als Aufgabe des Aufteilens bzw. des Verteilens *formuliert*:
  Als *Aufteil*-Aufgabe: Aus 14 Steckwürfeln sollen *Vierer*türme gebaut werden. Wie viele gibt das?
  Als *Verteil*-Aufgabe: Aus 14 Steckwürfeln sollen *vier* Türme gebaut werden. Sie sollen alle gleich hoch werden. Sie sollen möglichst hoch werden (es sollen möglichst wenige Steckwürfel übrig bleiben). Wie hoch werden sie?

Zur Behandlung im Unterricht

Obige Überlegungen legen nahe, bei der Einführung der Division mit *Aufteilhandlungen* zu beginnen und diesen gegenüber den Verteilhandlungen den Vorzug zu geben, wie es auch in den meisten Unterrichtswerken geschieht. Darüber hinaus ist es ökonomisch, auch Verteilhandlungen nach der Strategie des Aufteilens zu bearbeiten. Geeignete Handlungen des Aufteilens (Herstellens von Vierer-Portionen) sind beispielsweise:

- Immer 4 Äpfel in Netze abfüllen,
- Aus 14 Steckwürfeln lauter Vierertürme bauen,
- Herumlaufende Kinder zu Vierergruppen zusammenfassen,
- Immer 4 Plättchen in eine Reihe legen,
- Auf einem Punktefeld immer 4 Punkte einkreisen,
- Von einer 12 m langen Schnur lauter 4 m-Stücke abschneiden, usw.

9.5 Rechenstrategien beim Multiplizieren/Dividieren

9.5.1 Zählende Strategien

Schon früh, oft vor Schuleintritt, entwickeln Kinder informelle Strategien, um Vielfache einer Anzahl (z. B. der Räder von Spielautos) zu bestimmen. Für Produkte wie $5 \cdot 4$ verwenden Schulkinder verschiedene Strategien und Mischformen dieser Strategien, beispielsweise:

- Modellieren mit Material und vollständiges Auszählen. Günstig dabei ist Anordnung des Materials in entsprechenden Portionen (Abb. 9.10 a und b).
- Rhythmisches Zählen (1, 2, 3, $\underline{4}$, 5, 6, 7, $\underline{8}$, ..., 17, 18, 19, $\underline{20}$), wobei die unterstrichenen Zahlen betont werden. Diese Methode erfordert hohe Konzentration, weil einerseits beim Nennen von Zahlwörtern wie 13, 14, 15, ... darauf geachtet werden muss, dass jeweils vier zusammengefasst werden und das Vierte betont gesprochen wird und andererseits noch mitgezählt werden muss, wie viele Viererportionen es bis dahin waren. Manche Kinder erfinden dafür folgende Hilfe: Sie bilden mit der linken Hand beim Aufsagen der Zahlwortreihe durch Aufklappen von Fingern jeweils Viererportionen und zählen mit den Fingern der rechten Hand die Anzahl der Viererportionen mit (BAROODY, 1988, 135). Andere Kinder sprechen rhythmisch jeweils vier Zahlwörter (1, 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8; 9, 10, 11, 12; ...) und zählen die Anzahl der Portionen durch Aufklappen von Fingern mit.
- Benutzen von Zahlenfolgen, z. B. 4, 8, 12, 16, ... Manchmal kennen Kinder nur den Anfang und rechnen beispielsweise 4, 8, 12; 13, 14, 15, 16; 17, 18, 19, 20. Diese Mischmethode erfordert wiederum hohe Konzentration, weil Zahlwörter wie 13, 14, ... gesprochen werden und deren Anzahl mitgezählt werden muss und überdies noch die Anzahl der Viererportionen mitgezählt werden muss.
- Rückführung auf die Addition. Hierbei addieren die Kinder jeweils: $4 + 4 = 8$; $8 + 4 = 12$; $12 + 4 = 16$; .... Schwierig dabei ist festzustellen, wie oft man addiert hat. Bei $4 + 4 + 4$ hat man die 4 *nur zweimal* zur ersten Zahl addiert! Diese Irritation kann bei Aufgaben wie $5 \cdot 4$ zum Ergebnis einer Nachbaraufgabe (16 oder 24 statt 20) führen.
- Bei Aufgaben mit etwas größeren Zahlen (z. B. $7 \cdot 8$) versagen alle diese zählenden Methoden! Wir müssen vor allem schwächeren Kindern helfen, Wege zu effektiveren Rechenstrategien zu finden.

9.5.2 Nichtzählende Strategien

Nichtzählende Strategien beruhen auf dem Verständnis der Multiplikation als Zusammensetzung eines Ganzen aus gleichen Teilportionen. Visuelle Stützen für diese Strategien sind Felderdarstellungen. Diese kann man leicht realisieren durch Abdecken von Bereichen des Hundert-Punktefeldes mit einem Winkelfeld (Abb. 9.13 und 9.14).

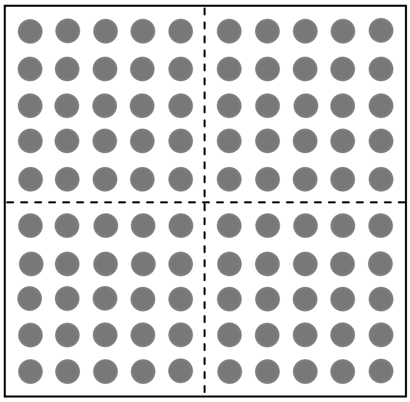


Abb. 9.13: Hundert-Punktefeld

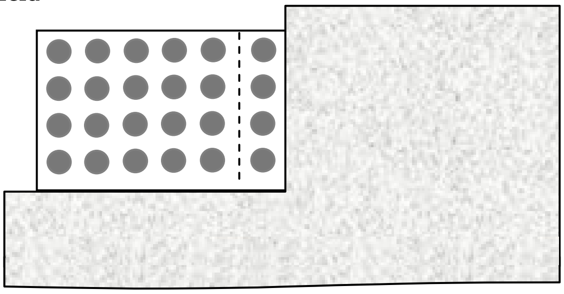


Abb. 9.14: $4 \cdot 6$ auf dem Hundert-Punktefeld

Nichtzählende Strategien zur Berechnung von Produkten verwenden Grundgesetze der Arithmetik: das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz $a \cdot b = b \cdot a$), das Distributivgesetz (Verteilungsgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ sowie das Assoziativgesetz (Verbindungsgesetz $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$). Diese Gesetze werden in der Grundschule natürlich nicht in algebraischer Form, sondern anhand von Zahlenbeispielen erarbeitet und mit Punktefeldern veranschaulicht.

Das Vertauschungsgesetz

In Sachsituationen ist dieses Gesetz keineswegs selbstverständlich. Zwei Tüten mit je sieben Äpfeln sind etwas anderes als sieben Tüten mit jeweils zwei Äpfeln. An den abstrakteren Punktefeldern (Abb. 9.15) ist das Gesetz dagegen unmittelbar klar.

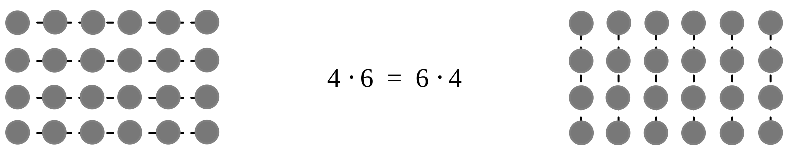


Abb. 9.15: Veranschaulichung des Vertauschungsgesetzes

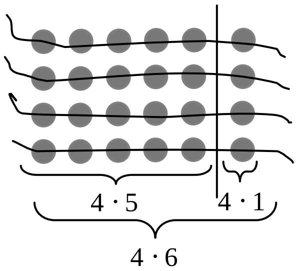
Wenn es im Unterricht wirklich gelingt zu erreichen, dass Kinder das Vertauschungsgesetz bei Einmaleinsaufgaben *tatsächlich* anwenden (also bei $7 \cdot 2$ an $2 \cdot 7$ denken), dann verringert sich die Anzahl der auswendig zu wissenden Einmaleinsaufgaben auf die Hälfte! $7 + 7$ ist gerade auch für zählend rechnende Kinder einfacher zu berechnen als $2+2+2+2+2+2+2$, zumal viele Kinder Verdoppelungen recht früh auswendig wissen.

Wichtige Anwendung: Das Vertauschungsgesetz macht *einsichtig*, dass $10 \cdot 6 = 6 \cdot 10$, also 60 ist, was im Unterricht leider oft rein rezepthaft als formales „Null-Anhängen“

abgetan wird. Auf der Ebene konkreter Handlungen ist keineswegs trivial, dass in 10 Sechser-Eierschachteln genau so viele Eier passen wie in 6 Zehner-Eierschachteln. Klarer wird dies schon, wenn man die 10 Sechser-Eierschachteln aufeinander stellt. Dann befinden sich jeweils 10 Eier übereinander. Es sind also 6 Zehnerportionen, also 60 Eier. Auch mit Einerwürfeln und Zehnerstangen kann man sich das Verzehnfachen klar machen: Aus einem Einerwürfel wird dabei eine Zehnerstange, aus 6 Einerwürfeln werden also 6 Zehnerstangen. Dies ist aber bereits eine andere Argumentation!

Das Verteilungsgesetz

In Sachsituationen ist dieses Gesetz selbstverständlich. Sind in einer Tüte 5 Äpfel und 1 Birne, dann sind in vier Tüten 20 Äpfel und 4 Birnen. Also ist $4 \cdot (5 + 1) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1$. Auch dieses Gesetz lässt sich an Punktefeldern veranschaulichen.



$$4 \cdot \underset{5\ 1}{6} = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1$$

Abb. 9.16: Veranschaulichung des Verteilungsgesetzes

Das Verteilungsgesetz erleichtert die nichtzählende Berechnung vieler Einmaleinsaufgaben (meist nach der Strategie der sogenannten *Nachbaraufgaben*). Beispielsweise ist

$3 \cdot \underline{9} = 3 \cdot \underline{10} - 3 \cdot \underline{1}$	(Nachbaraufgabe, Kraft der Zehn)
$\underline{9} \cdot 6 = \underline{10} \cdot 6 - 1 \cdot 6$	(Nachbaraufgabe, Kraft der Zehn)
$\underline{3} \cdot 8 = \underline{2} \cdot 8 + 1 \cdot 8$	(Nachbaraufgabe zu einer Verdopplung)
$\underline{4} \cdot \underline{7} = 4 \cdot \underline{5} + 4 \cdot 2$	(7 als übernächster Nachbar zur Fünf)
$\underline{7} \cdot 8 = \underline{5} \cdot 8 + 2 \cdot 8$	(7 als übernächster Nachbar zur Fünf)

Das Verbindungsgesetz

An Punktefeldern ist auch dieses Gesetz leicht zu verstehen (Abb. 9.17).

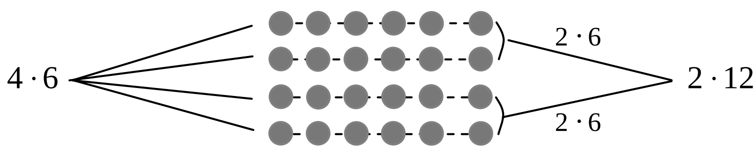


Abb. 9.17: Veranschaulichung des Verbindungsgesetzes

Das Verbindungsgesetz verwenden wir, wenn wir in einem Produkt *einen Faktor verdoppeln und den anderen dafür halbieren* (*doppelt so viele* Portionen machen, die dafür nur *halb so groß* werden bzw. halb so viele Portionen, die dann doppelt so groß werden). Statt $5 \cdot 6$ können wir auch rechnen $10 \cdot 3$, statt $4 \cdot 6$ auch $2 \cdot (2 \cdot 6)$. Das Ergebnis von $4 \cdot 6$ erhalten wir also durch *Verdoppelung* von $2 \cdot 6$. Eine besonders wichtige Anwendung: $5 \cdot 6$ *ist die Hälfte von* $10 \cdot 6$, denn $2 \cdot (5 \cdot 6) = (2 \cdot 5) \cdot 6 = 10 \cdot 6$.
Es ist nicht Ziel des arithmetischen Anfangsunterrichtes, diese Gesetze auszuformulieren. Der Lehrerin sollte aber bewusst sein, dass sie die Grundlage bilden für das im Lehrplan erwähnte „geschickte Rechnen durch Vertauschen der Faktoren, Nachbaraufgaben, Verdoppeln und Halbieren". Zugleich sind dies wichtige *Einprägestrategien beim Erlernen des kleinen Einmaleins.*

9.6 Wege zur Beherrschung des kleinen Einmaleins

9.6.1 Abruf aus dem Langzeitgedächtnis

Ein Kind „beherrscht“ das kleine Einmaleins, wenn es jede der 121 Aufgaben des kleinen Einmaleins innerhalb von 2, maximal 3 Sekunden aus dem Langzeitgedächtnis abrufen kann, ohne Zählstrategien oder dergleichen zu Hilfe nehmen zu müssen. Man sagt dazu kurz: Wenn es die Ergebnisse aller 121 Aufgaben „auswendig weiß“. Aufsagenkönnen der Achterreihe ist *nicht* Beherrschen des Einmaleins der 8. Dieser Weg zum Ergebnis von $7 \cdot 8$ dauert zu lange, geht nicht mühelos und nicht automatisch, d. h. (fast) unbewusst.

Wie kommt es eigentlich zur Automatisierung auch so schwieriger Einmaleinssätze wie „7 mal 8 gleich 56“? Hierfür gilt entsprechendes wie das im Abschnitt 8.6 über das kleine Einsundeins Gesagte. Einmaleinssätze wie $7 \cdot 8 = 56$ werden nur dadurch im Langzeitgedächtnis dauerhaft und rasch und sicher abrufbar eingespeichert, dass Verbindungen zu anderen Aufgaben hergestellt werden, die bereits im Langzeitgedächtnis abgespeichert sind. Diese *Verbindungen* dienen dann als Abrufreize bzw. Abruf*pfade* (GERSTER, 1994, Bd. 1, S. 94). Typische Verbindungen zu anderen Aufgaben werden hergestellt durch die folgenden Konzepte bzw. Nichtzähl-Strategien:

„Kraft der 5“	$7 \cdot 8 = \underline{5} \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 40 + 16 = 56$
„Kraft der 10“	$7 \cdot 8 = 7 \cdot \underline{10} - 7 \cdot 2 = 70 - 14 = 56$
„Verdoppeln“	$7 \cdot 8 = (7 \cdot 4) \cdot \underline{2} = 28 \cdot 2 = 56$
„Vertauschen“	$7 \cdot 8 = 8 \cdot 7$ (falls die Tauschaufgabe bereits beherrscht wird)
„Nachbaraufgabe“	$7 \cdot 8 = 7 \cdot (\underline{7} + 1) = 49 + 7 = 56$ (falls $7 \cdot 7 = 49$ bekannt ist)
oder	$7 \cdot 8 = \underline{6} \cdot 8 + 1 \cdot 8 = 48 + 8 = 56$ (falls $6 \cdot 8 = 48$ bekannt ist).

9.6.2 Eine Lehrstrategie für das kleine Einmaleins

Die in nachfolgender Tabelle 9.2 dargestellte Lehrstrategie für das kleine Einmaleins ist für die Lehrkraft gedacht, nicht zur unmittelbaren Weitergabe an die Kinder. Sie bietet einen strukturellen Rahmen für vielfältige methodische Einkleidungen, von denen einige anschließend angedeutet werden.

In der fallenden Diagonalen stehen die *Quadratzahlen*, welche erfahrungsgemäß von Kindern leicht gemerkt werden können. Nach dem Vertauschungsgesetz kann man $(121 - 11) : 2 = 55$ Aufgaben aus anderen Aufgaben ableiten durch Vertauschen von Multiplikator und Multiplikand. Es genügt also, die Aufgaben oberhalb der Diagonalen zu beherrschen ($7 \cdot 2$ erhält man aus $2 \cdot 7$). Damit muss nur noch die Hälfte der Einmaleinsaufgaben „auswendig“ gelernt werden, wenn die Anwendung des Vertauschungsgesetzes tatsächlich ernst genommen wird.

„Kurze Ein-mal-eins-reihe“

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0·	0										
1·		1									
2·			4								
3·				9							
4·					16						
5·						25					
6·							36				
7·								49			
8·									64		
9·										81	
10·											100

Zu Nachbaraufgaben

Zu Nachbaraufgaben

Zu Nachbaraufgaben

Tabelle 9.2: Eine Lehrstrategie für das kleine Einmaleins

Die Multiplikatoren 0·, 1·, 2·, 5· und 10· gehören zu den sogenannten *kurzen Einmaleinsreihen*, die leicht zu beherrschen sind (schattierte Zeilen der Tabelle 9.2). Allein mit diesen Aufgabentypen beherrscht man wiederum die Hälfte des Einmaleins. Aus den Verdoppelungen (Multiplikator 2) leiten wir ab die Ver*drei*fachungen und Ver*vier*fachungen (Multiplikatoren 3 und 4). Aus den Aufgaben mit Multiplikator 5 die Aufgaben mit dem Multiplikator 6 und 7. Aus den Aufgaben $10 \cdot a$ leiten wir ab $9 \cdot a$ und $8 \cdot a$. Das 8fache einer Zahl lässt sich auch bestimmen durch Verdoppeln des 4fachen.

Mit der soeben erwähnten Lehrstrategie sind alle Aufgaben des kleinen Einmaleins erfaßt. Bei der Vermittlung dieser Strategien ist es zweckmäßig, *innerhalb einer* Einmaleinsreihe zu trainieren. In jeder Einmaleinsreihe wird zuerst die *kurze Einmaleinsreihe* gelernt, natürlich vernetzt. Eine Möglichkeit dazu ist, die Aufgaben in der Reihenfolge *1*-mal, dann *10*-mal, dann *5*-mal sowie *1*-mal, dann *2*-mal abzufragen. Das Verdoppeln (also der Faktor 2) müßte den Kindern ohnehin vom kleinen Einspluseins her bekannt sein. In einer späteren Trainingsphase werden an diese Aufgaben der *kurzen Einmaleinsreihe* weitere Aufgaben angekoppelt, als nächstes jedoch nicht $3 \cdot 8$ an $2 \cdot 8$, denn hier ist der Vorteil gegenüber dem Aufsagen der Reihe zu gering. Als nächste Aufgabe bietet sich statt dessen an, die Aufgabe $9 \cdot 8$ innerhalb folgender Serie einzuüben:

$$\underline{1} \cdot 8 = 8$$
$$\underline{10} \cdot 8 = 80$$
also $$9 \cdot 8 = \square\square$$

Es soll hier noch einmal ausdrücklich gesagt werden, dass diese Strategien nicht bloß auf verbal-symbolischer Ebene abgehandelt werden sollen. Das ist für viele Kinder zu abstrakt. Eine gute Möglichkeit zur Erarbeitung obiger Lehrstrategie ist die Erarbeitung des Einmaleins der 6 mit zehn Sechser-Eierschachteln (5 Deckel werden blau eingefärbt und 5 erhalten eine rote Farbe).

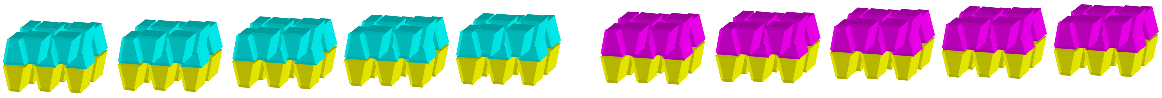


Abb. 9.19: Einmaleins der Sechs mit Sechser-Eierschachteln

In 10 Eierschachteln sind es $10 \cdot 6 = 60$ Eier. Wir nehmen eine (rote) Schachtel weg. Wie viele Eier sind es dann noch? Entsprechend zeigen wir mit diesem Modell $7 \cdot 6$ (5 blaue Schachteln mit 30 Eiern, dazu 2 rote mit 12 Eiern). In 7 Sechser-Schachteln sind also $30 + 12 = 42$ Eier. Die Zahl „42" wird im Zusammenhang mit der Sechser-Reihe als „$30 + 12$" interpretiert!

9.6.3 Weitere Lehrstrategien zur Beherrschung des kleinen Einmaleins

Lernkartei

Für das *individuelle* Üben eignet sich wieder eine Lernkartei, die für das kleine Einmaleins etwa so aussehen kann:

Zuerst die Kernaufgaben:

0 • 8 = 1 • 8 = 2 • 8 =	1 • 8 = 10 • 8 = 5 • 8 =

Dann die Ableitungstechniken:

0 • 8 = 1 • 8 = 2 • 8 =	5 • 8 = 6 • 8 = 7 • 8 =	10 • 8 = 9 • 8 = 8 • 8 =

Letzter Schritt der Lernsequenz ist schließlich das Training des unmittelbaren Abrufens der folgenden Kärtchen (ohne Abrufhilfe):

0 • 8 =	1 • 8 =	2 • 8 =	...	10 • 8 =

Einmaleinsergebnis-Zahlen

Einen weiteren Beitrag zur sicheren Beherrschung des kleinen Einmaleins liefert die Betrachtung der Einmaleinsergebnis-Zahlen. Bei den 121 Einmaleinssätzen treten nur 43 verschiedene Ergebniszahlen auf. Leicht zu berechnende Produkte mit den Faktoren 0 oder 1 oder mit Primzahlen und einfachen zusammengesetzten Zahlen als Ergebnissen brauchen nicht so häufig geübt zu werden. Lässt man die entsprechenden Einmaleinsergebnisse außer Betracht, so verbleiben für ein regelmäßig einzusetzendes, sehr effektives Übungsblatt nur noch 24 Einmaleinsergebnisse (Tabelle 9.3).

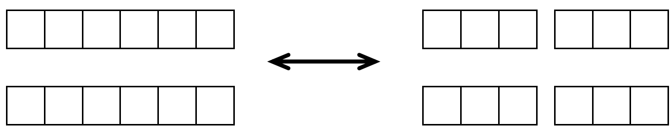
Die Kinder bekommen den Auftrag, unter die Einmaleinsergebnis-Zahlen passende Aufgaben des kleinen Einmaleins zu schreiben. Man kann ihnen vorschlagen, jeweilige Tauschaufgaben wegzulassen. Dann ergeben sich die in Tabelle 9.3 bereits eingetragenen Produkte.

12	**16**	**18**	**20**	**21**	**24**
$2 \cdot 6$ $4 \cdot 3$	$2 \cdot 8$ $4 \cdot 4$	$2 \cdot 9$ $3 \cdot 6$	$2 \cdot 10$ $4 \cdot 5$	$3 \cdot 7$	$3 \cdot 8$ $6 \cdot 4$
25	**27**	**28**	**30**	**32**	**35**
$5 \cdot 5$	$3 \cdot 9$	$4 \cdot 7$	$3 \cdot 10$ $6 \cdot 5$	$4 \cdot 8$	$5 \cdot 7$
36	**40**	**42**	**45**	**48**	**49**
$4 \cdot 9$ $6 \cdot 6$	$4 \cdot 10$ $8 \cdot 5$	$6 \cdot 7$	$5 \cdot 9$	$6 \cdot 8$	$7 \cdot 7$
54	**56**	**63**	**64**	**72**	**81**
$6 \cdot 9$	$7 \cdot 8$	$7 \cdot 9$	$8 \cdot 8$	$9 \cdot 8$	$9 \cdot 9$

Tabelle 9.3: Zusammengesetzte Zahlen und zugehörige Aufgaben des kleinen Einmaleins

Hat eine Zahl zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen, so hängen diese meistens doch eng zusammen (z. B. $12 = 2 \cdot 6$ und $12 = 4 \cdot 3$): Verdoppelt man im ersten Produkt einen Faktor und halbiert den anderen, so erhält man eine zweite multiplikative Zerlegung derselben Zahl (Abb. 9.20). Zerlegt man in doppelt so viele Portionen, werden diese nur halb so groß.

$2 \cdot 6$



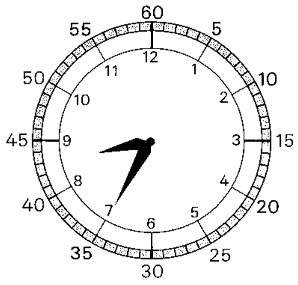
$4 \cdot 3$

Abb. 9.20: Konstante Produkte

Die Schüler können angeregt werden, dieses Übungsblatt in zeitlichen Abständen *wiederholt* zu bearbeiten und dabei nur Einmaleinsaufgaben (also nicht beispielsweise $24 = 2 \cdot 12$) einzutragen und Tauschaufgaben wegzulassen. Da hierbei multiplikative Zahlentripel erarbeitet werden, ist dies zugleich eine sehr gute Vorbereitung auf die Division ($3 \cdot 4 = 12$, also $12 : 4 = 3$ und $12 : 3 = 4$).
Neben diesen generellen Lehr-/Lernstrategien für das kleine Einmaleins kann man für spezielle Einmaleins-Reihen und für spezielle Aufgaben spezielle Strategien verwenden.

Einmaleins der 5

Das Einmaleins der 5 verwenden wir mehr oder weniger bewusst täglich, wenn wir Minuten auf einer Zeigeruhr ablesen. Steht der Minutenzeiger auf der 7, sind es 35 Minuten nach der vollen Stunde.



$$7 \longrightarrow 35$$

$$7 \cdot 5 = 35$$

9.21: Einmaleins der Fünf am Ziffernblatt der Uhr

Der Zusammenhang zwischen Ziffern auf dem Ziffernblatt und dem Einmaleins der 5 kann Kindern helfen „die Uhr kennenzulernen“ und umgekehrt das Einmaleins/Einsdurcheins der 5 zu automatisieren.

Mini-Einmaleins

Das Mini-Einmaleins, (d. h. die 25 Aufgaben von $1 \cdot 1$ bis $5 \cdot 5$) ist sehr einfach. Die Ergebnisse der Aufgaben können mit etwas Übung auch bequem durch teilweises Abdecken im linken oberen Viertel des Hundert-Punktefeldes abgelesen werden.

„Kraft der Fünf“ im 2er-, 4er-, 6er- und 8er-Einmaleins

In der Zweier-, Vierer-, Sechser- und Achterreihe ist *das Fünffache* eine glatte Zehnerzahl. Deshalb wiederholen sich ab dem Fünffachen die Einerziffern. Am Beispiel der Sechserreihe:

$$\begin{array}{lcl}
0 \cdot 6 = \underline{0} & \longrightarrow & 5 \cdot 6 = 3\underline{0} \\
1 \cdot 6 = \underline{6} & \longrightarrow & 6 \cdot 6 = 3\underline{6} \\
2 \cdot 6 = 1\underline{2} & \longrightarrow & 7 \cdot 6 = 4\underline{2} \\
3 \cdot 6 = 1\underline{8} & \longrightarrow & 8 \cdot 6 = 4\underline{8} \\
4 \cdot 6 = 2\underline{4} & \longrightarrow & 9 \cdot 6 = 5\underline{4}
\end{array}$$

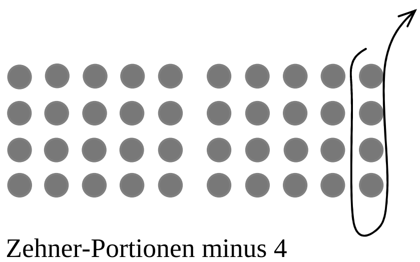
Abb. 9.22: Kraft der Fünf beim Einmaleins der Sechs

Das *2*fache und das *7*fache von 6 unterscheiden sich also um 30. Dies kann man beim mündlichen Üben auch bewusst machen, indem man entsprechende Paare von Aufgaben *unmittelbar nacheinander* aufruft.

Neuner-Einmaleins

Bei der Neunerreihe gibt es viele nette Besonderheiten. Sie beruhen auf der Beziehung „9 ist eins weniger als 10“. Also ist

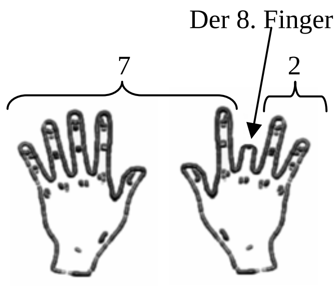
$$\begin{array}{ll}
\underline{1} \cdot 9 = 10 - 1 = \underline{9} & \\
\underline{2} \cdot 9 = 20 - 2 = 1\underline{8} & \text{(2 weniger als zwanzig)} \\
\underline{5} \cdot 9 = 50 - 5 = 4\underline{5} & \text{(5 weniger als fünfzig)} \\
\underline{8} \cdot 9 = 80 - 8 = 7\underline{2} & \text{(8 weniger als achtzig)}
\end{array}$$



$\underline{4} \cdot 9 = 40 - 4 = \underline{36}$

Abb. 9.23: 4 Neuner-Portionen sind 4 Zehner-Portionen minus 4

Die *Einer*ziffer des Ergebnisses ist also immer der *Zehnerpartner* zum Multiplikator, z. B. <u>vier</u>mal 9 ist <u>*sechs*</u>unddreißig. Die *Zehner*ziffer dagegen ist immer *um eins kleiner als der Multiplikator*, z. B. <u>vier</u>mal 9 ist sechsund<u>*drei*</u>ßig.



$\underline{8} \cdot 9 = \underline{72}$

Abb. 9.24: Fingerrechnen beim Neuner-Einmaleins

Klappt man von zehn ausgestreckten Fingern den <u>*achten*</u> Finger weg, so sieht man rechts noch <u>*zwei*</u> Finger (die Einerziffer von 7<u>2</u>) und links daneben <u>*sieben*</u> Finger (Zehnerziffer von <u>7</u>2). Dies geht entsprechend auch mit allen anderen Multiplikatoren von 1 bis 9. Wird einer von zehn Fingern weggeklappt, bleiben 9 und dies ist die Quersumme bei den Neunerzahlen.

9.7 Automatisierung des kleinen Einsdurcheins

Beherrschung des kleinen Einsdurcheins bedeutet, das Ergebnis jeder der 110 Aufgaben von $0:1$ bis $100:10$ innerhalb von 2 Sekunden mühelos und sicher nennen zu können. Um dieses Ziel zu erreichen kann man verschiedene methodische Wege beschreiten.

Enge Koppelung des Einsdurcheins an das Einmaleins

Aus $7 \cdot 8 = 56$ folgt $56 \div 8 = 7$ und $56 : 7 = 8$ (7 Portionen zu je 8 sind ja 56). Die 7 und die 8 sind in mathematischer Sprache *Faktoren* der 56. Anschaulich gesprochen sind sie *multiplikative Bausteine* der 56. Dies kann man entsprechend den additiven Bausteinen von Zahlen (Abb. 8.9) auch bildlich darstellen als „Zahlenmauer“ oder symbolisch mit dem „Zerlegungszeichen“.

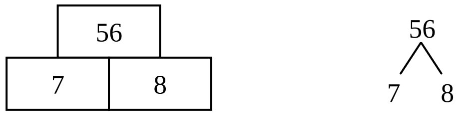


Abb. 9.25: Ein multiplikatives Tripel

Einmaleinsergebnis-Zahlen

Zur Automatisierung des kleinen Einsdurcheins trägt die Kenntnis der Einmaleinsergebnis-Zahlen bei (Abschnitt 9.6.3). Das sind im Wesentlichen 24 Ergebniszahlen, die noch dazu in engen Zusammenhängen stehen (vgl. Tab. 9.3 auf Seite 19). Beispielsweise gilt

$3 \cdot 8 = 24$	Also ist	$24 : 3 = 8$	und	$24 : 8 = 3$
Verdoppeln/Halbieren		Verdoppeln/Halbieren		Halbieren/Verdoppeln
$6 \cdot 4 = 24$	Also ist	$24 : 6 = 4$	und	$24 : 4 = 6$

In all diesen Fällen entstehen doppelt so viele Portionen, die aber nur halb so groß sind.

Stützaufgaben des Einsdurcheins

Innerhalb einer Einsdurcheins-Reihe (z. B. der Achterreihe) sind das 2fache, 10fache und 5fache wichtige *Stützen* für das Ableiten benachbarter Aufgaben (Abb. 9.26).

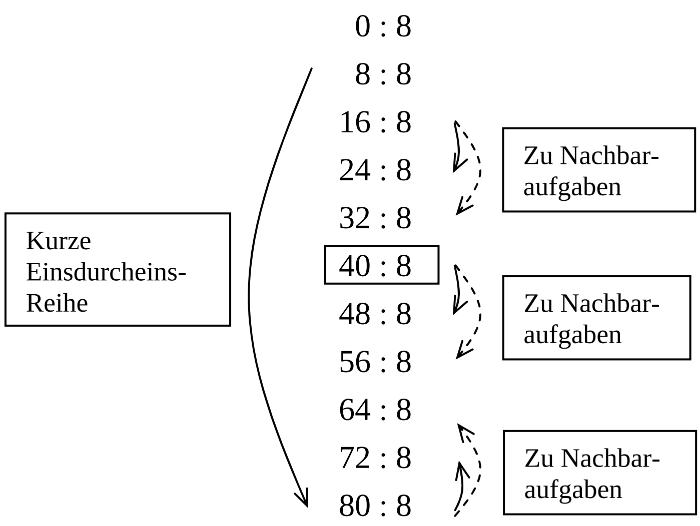


Abb. 9.26: Ableitungsstrategien beim kleinen Einsdurcheins

Lautet die Aufgabe 72 : 8, könnte das Kind denken: „Ich weiß 80 : 8 = 10“. Dieser Reiz kann einen Abrufpfad eröffnen für „72 : 8 = 9“. Lautet die Aufgabe 56 : 8, könnte das Kind denken: „Ich weiß 40 : 8 = 5. Und 56 ist 16 mehr. 16 : 8 = 2, also ist 56 : 8 = 7“.

Je öfter solche *Ableitungswege* beschritten werden, umso rascher geht dies und umso automatischer, leichter und auch weniger bewusst „funktionieren“ sie. Denn häufig gemeinsam aktivierte Neuronen im Gehirn verstärken ihre Verbindungen (Hebb’sche Regel). Dadurch bilden sich „assemblies“, d. h. stabilisierte neuronale Aktivitätsmuster. Wird ein genügend großer Teil einer „assembly“ aktiviert, so erfasst die Erregung über das eingefahrene Netz von Verbindungen auch die anderen beteiligten Neuronen (PALM, 1990).

Einfacher gesagt: Um eine Gedankenverbindung wie 56 : 8 = 7 *automatisch* ausführen zu können, muss im Gehirn ein Programm fest verankert werden. Dies geschieht dadurch, dass Nervenimpulse immer wieder über die selben Bahnen laufen, die dadurch ausgebaut und effektiver verschaltet werden. Erst nach längerer Einübungszeit werden sie automatisch, mit einem Minimum an bewusster Kontrolle, fließend und sicher ausgeführt, wodurch der Arbeitsspeicher des Gehirns entlastet wird.

Lernkartei

Für das *individuelle* Üben eignet sich wieder eine Lernkartei, die für das Einsdurcheins der Acht etwa so aussehen kann:

Zuerst die Kernaufgaben:

0 : 8 = 8 : 8 = 16 : 8 =	8 : 8 = 80 : 8 = 40 : 8 =

Dann die Ableitungstechniken:

16 : 8 = 24 : 8 = 32 : 8 =	40 : 8 = 48 : 8 = 56 : 8 =	80 : 8 = 72 : 8 = 64 : 8 =

Letzter Schritt der Lernsequenz ist schließlich das Training des unmittelbaren Abrufens der folgenden Kärtchen (ohne Abrufhilfe):

0 : 8 =	8 : 8 =	16 : 8 =	...	80 : 8 =

Spezielle Einsdurcheins-Aufgaben

Division durch 5

Für die *Division durch 5* kann die Vorstellung des Ziffernblattes der Uhr eine Hilfe sein. Bei 35 : 5 kann man sich die Zeigerstellung 35 Minuten nach der vollen Stunde vorstellen. Also Ergebnis 7. Und 45 Minuten nach der vollen Stunde zeigt der Zeiger auf die 9, also 45 : 5 = 9.

Einsdurcheins der 9

Für das *Einsdurcheins der 9* entdecken manche Kinder den folgenden „Trick“:
$\underline{7}2 : 9 = \underline{8}$, $\underline{6}3 : 9 = \underline{7}$, $\underline{2}7 : 9 = \underline{3}$, d. h. das Ergebnis ist stets um 1 größer als die *Zehner*ziffer. In Worten bedeutet dies beispielsweise: Zweiund*<u>sieb</u>zig* durch 9 ist gleich *<u>acht</u>*.
Auch die *Einer*ziffer der Neunerzahlen gibt einen Hinweis auf das Ergebnis:
$7\underline{2} : 9 = \underline{8}$; $6\underline{3} : 9 = \underline{7}$; $2\underline{7} : 9 = \underline{3}$, d. h. die Einerziffer und das Ergebnis zusammen bilden Zehnersummen (vgl. dazu Abschnitt 9.6.3).

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1980). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band 1: Kognitive Aspekte der Handlungstheorie*. *Band 2: Denkprozesse*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1981). *Denken: Das Ordnen des Tuns. Band 2: Denkprozesse*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Ahlberg, A. (1997). *Children´s ways of handling and experiencing numbers.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Amt für Schule, Hamburg (1991). *Beobachtung des Lösungsweges beim Rechnen in der Grundschule. Handreichung zur Feststellung von Schwierigkeiten beim Rechnen.*

Andresen, U. (1985). *So dumm sind sie nicht. Von der Würde der Kinder in der Schule*. Weinheim: Beltz.

Apel, H., Bork, R. Drechsel, K. & Schmarse, H. (1994). *Lernstandsanalyse und Lernförderung.* Hildesheim. NLI-Bericht Nr. 39.

Aster, M. von (1991). Gibt es ein Dyskalkuliesyndrom? In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Störungen beim Mathematiklernen* (S. 41-52). Köln: Aulis.

Aster, M. von (1992). Neuropsychologie der Dyskalkulie. In H.-Ch. Steinhausen (Hrsg.) *Hirnfunktionsstörungen und Teilleistungsschwächen* (S. 155-167). Berlin: Springer.

Aster, M. von (1994). Developmental dyscalculia in children: review of the literature and clinical validation. *Acta Paedopsychiatrica, 56* (3), 169-178.

Aster, M. von (1996). *Die Störungen des Rechnens und der Zahlverarbeitung in der kindlichen Entwicklung.* Habilitationsschrift. Medizinische Fakultät der Universität Zürich.

Aster, M. von & Goebel, D. (1990). Kinder mit umschriebener Rechenschwäche in einer Inanspruchnahmepopulation. *Zs für Kinder- und Jugendpsychiatrie, 18*, 23-28.

Baireuther, P. (1997). Zahl und Form. Der Formzahlaspekt – ein Beitrag zur Verbindung von arithmetischen und geometrischen Erfahrungen. *Mathematische Unterrichtspraxis*, (1), 3-16.

Baroody, A. J. (1990). Mastery of basic number combinations: internalization of relationships or facts? *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (2), 83-89.

Barron, S. B. (1992). *Developmental dyscalculia. A neuropsychological perspective.* Diss. Columbia University.

Barrow, J. D. (1994). *Ein Himmel voller Zahlen.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Battista, M. (1980). Interrelationships between problem solving ability, right hemisphere processing facility and mathematics learning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 2* (1), 53-60.

Bauer, L. (1991). Christian – Eine Fallstudie über Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht der 1. Jahrgangsstufe. *mathematik lehren,* (49), 12-17.

Bauer, L. (1992). Fingerrechnen – Untersuchungen und Überlegungen zu einem Phänomen. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (4), 1-14.

Bauersfeld, H. (1988). Interaction, Construction, and Knowledge: Alternative Perspektives for Mathematics Education. In: Grouws, et al. *Effective Mathematics Teaching, a.a.O.*

Bauersfeld, H. (1992). Integrating theories for mathematics education. *For the Learning of Mathematics, 12* (2), 19-28.

Bauersfeld, H. (1995). Theorien im Mathematikunterricht. *mathematica didactica, 18* (2), 3-19.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1988). A constructivist approach to numeration in primary school: results of a three year intervention with the same group of children. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 299-331.

Begemann, E. (1992). „Sonder“-(schul-)Pädagogik: Zur Notwendigkeit neuer Orientierungen. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 43* (4), 217-267.

Benezet, L. P. (1988). Die Geschichte eines Unterrichtsexperiments. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 16*, 351-366.

Besuden, H. (1995). *Die Zahl als Beziehungsbegriff. Ein uraltes und doch ganz neues Rechenhilfsmittel.* Uni Oldenburg. Oldenburger Vordrucke, Heft 264.

Bettencourt, L. U. de, Putnam, R. T. & Leinhardt, G. (1993). Learning disabled student's. understanding of derived facts in addition and subtraction. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 15* (4), 27-43.

Betz, D. & Breuninger, H. (1987). *Teufelskreis Lernstörungen* (2. Aufl.). München. Psychologie Verlags Union.

Bideaud, J & Meljac, C. (1992). *Pathways to number*. Hilsdale, New Jersey.

Birbaumer, N. & Schmidt, R. F. (1991). *Biologische Psychologie.* Berlin: Springer.

Bley, N. S. & Thornton, C. A. (1995). *Teaching mathematics to students with learning disabilities.* Third edition. Austin. Texas: pro.ed.

Bobis, J. (1993). *Visualisation and the development of mental computation.* Paper presented at the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA) (1993). Brisbane.

Brissiaud, R. (1992). A toll for number construction: Finger Symbol Sets. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (pp. 41-65). Hillsdale: Erlbaum.

Brügelmann, H. (1994). Straßenmathematik und Schulmathematik. *Die Grundschulzeitschrift 74*, 37.

Carpenter, Th. et al. (1993). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24* (5), 428-441.

Cobb, P. (1986). An investigation into the sensory-motor and conceptual origins of the basic addition facts. *Psychology of Mathematics Education, 10,* 141-146.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics Education. *Educational Psychologist, 23* (2), 87-103.

Cobb, P. (1990). A constructivist perspective on information-processing theories of mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14,* 67-92.

Cobb, P. (1995a). Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (4), 362-385.

Cobb, P. (1995b). The teaching experiment classroom. In Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 17-24). Hillsdale: Erlbaum.

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 10* (3), 1-28.

Confrey, J. (1994). A theory of intellectual development. Part 1. *For the Learning of Mathematics, 14* (3), 2-8.

Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. Part 2. *For the Learning of Mathematics, 15* (1), 38-48.

Confrey, J. (1995). A theory of intellectual development. Part 3. *For the Learning of Mathematics, 15* (2), 36-45.

Das, J. P. & Varnhagen, C. K. (1986). *Neuropsychological functioning and cognitive Processing.* In J.E. Obrzut & G.W. Hynd (Eds.), *Child neuropsychology. Vol. 1. Theory and Research* (S. 117-140). Orlando: Academic Press.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. & Cohen, L (1991). Two mental calculation systems: a case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia, 29* (11), 1045-1074.

Dietel, B. (1987). Sensorische Integration nach Jean Ayres. Einige kritische Anmerkungen. *der Kinderarzt, 18* (10), 1360-1367.

Dietel, B. (1992). Grundlagen neuropsychologischer Diagnostik. In G. Deegener, B. Dietel, H. Kassel, R. Matthaei & D. H. Nödl (Hrsg.). *Neuropsychologische Diagnostik bei Kindern und Jugendlichen. Handbuch zur TÜKI (Tübinger Luria-Christensen Neuropsychologische Untersuchungsreihe für Kinder).* Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Dilling, H. (Hrsg.).(1991). *Internationale Klassifikation psychischer Störungen.* Bern: Huber.

Easley, J. (1983). A Japanese approach to arithmetic. *For the Learning of Mathematics, 3* (3), 8-14.

Erichson, Ch. (1994). Sachrechnen: Eine Chance zur Fächerintegration. *Lehrmittel aktuell, 20* (1), 45-47.

Ezawa, B. (1992). Die Förderung mathematischer Fähigkeiten bei Geistigbehinderten mit spezifischen Lernstörungen – ein Fallbericht und therapeutische Vorschläge. *Zeitschrift für Heilpädagogik, 43* (2), 73-83.

Ezawa, B. (1996). *Zählen und Rechnen bei geistig behinderten Schülern. Leistungen, Konzepte und Strategien junger Erwachsener mit Hirnfunktionsstörungen.* Frankfurt/Main: Peter Lang, Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Ezawa, B. (1997). Das Kardinalzahlkonzept. Untersuchungen bei einer Schülerin mit geistiger Behinderung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* (1), 11-20.

Fischer, F. E. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number in the kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*. 207-215.

Flexer, R. J. (1986). The power of five: The step before the power of ten. *Arithmetic Teacher, 33* (11), 5-9.

Forman, G. & Pufall, P. B. (1988). Constructivism in the computer age. Hillsdale: Erlbaum.

Fuson, K. C. & Hall, J. W. (1983). The acquisition of early number word meanings: A conceptual analysis and review. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* (pp. 49-107). New York: Academic Press.

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 243-275). New York: Macmillan.

Gaddes, W. H. (1991). *Lernstörungen und Hirnfunktion.* Heidelberg: Springer.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number.* Cambridge, MA. Harvard University Press.

Gerster, H.-D. (1982). *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren. Diagnose und Therapie.* Freiburg: Herder.

Gerster, H.-D. (1994a). Arithmetik im Anfangsunterricht. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik. Band 1. Erstes und zweites Schuljahr* (S. 35-102). Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D. (1994b). Arithmetik im 3. und 4. Schuljahr. In A. Abele & H. Kalmbach (Hrsg.), *Handbuch zur Grundschulmathematik. Band 2. Drittes und viertes Schuljahr* (S. 33-81). Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D. (1994c). Vom zählenden Rechnen zur Automatisierung des Einsundeins und des Einmaleins. *Grundschule,* (6), 52-55.

Gerster, H.-D. (1995). Vom zählenden Rechnen zur Abrufbarkeit der Basisfakten – ein zentrales Ziel der Prävention und der Förderung. In Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen (Hrsg.), *Rechenstörungen. Diagnose – Förderung – Materialien* (S. 173-191). Donauwörth: Auer.

Gerster, G. & Gerster, H.-D. (1994a). *Lernkartei. Grundlagen des Rechnens. Übungen zur Automatisierung. Teil 1: Rechnen im Zahlenraum bis 20.* Stuttgart: Klett.

Gerster, G. & Gerster, H.-D. (1994b). *Lernkartei. Grundlagen des Rechnens. Übungen zur Automatisierung. Teil 2: Rechnen im Zahlenraum bis 100.* Stuttgart: Klett.

Ginsburg, H. P. (Ed.) (1983). *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press.

Glasersfeld, E. von (1987). *Wissen, Sprache und Wirklichkeit.* Braunschweig: Vieweg.

Glasersfeld, E. von (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning.* London: The Falmer Press.

Glasersfeld, E. von (1997). *Wege des Wissens. Konstruktivistische Erkundungen durch unser Denken.* Heidelberg: Carl-Auer-Systeme.

Gottbrath, G. (1984). Zum Problem der Inversion bei zweistelligen Zahlen. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (2), 3-9.

Gravemeijer, Koeno (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematical Education, 25,* 443-471.

Grouws, Douglas A., Cooney, Thomas J. & Jones, Douglas (1988). *Perspectives on research on effective mathematics teaching.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Guder, R. (1993). *Mathematikunterricht in der Anfangsphase des 1. Schuljahres* (6. Aufl.). Hildesheim: NLI-Bericht Nr. 34.

Hatano, G. (1982). Learning to add and subtract: A Japanese perspective. In Carpenter, T., Moser, J. & Romberg, T. (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp.211-223). Hillsdale: Erlbaum.

Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1994). Rechenfähigkeit von Schulanfängern. In H. Brügelmann, H. Balhorn & I. Füssenich (Hrsg.), *Am Rande der Schrift. Schwierigkeiten und Besonderheiten beim Lesen-/Schreibenlernen.* Bottighofen: Libelle.

Hess, K. (1997). Aufbau mentaler Mengenvorstellungen durch ein Repräsentationsformat mit figuralen Prototypen. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 211-214). Hildesheim: Franzbecker.

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale: Erlbaum.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics, 19,* 333-355.

Hiebert, J. & Carpenter, Th. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale: Erlbaum.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992a). Emerging relationships between teaching and learning arithmetic during the primary grades. *Psychology of Mathematics Education, 16*, 273-280.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1992b). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23* (2), 98-122.

Holt, J. (1979). *Wie Kinder lernen.* Weinheim: Beltz.

Hope, J. A., Lentzinger, L. & Reys, B. (1988). *Mental math in the primary grades.* Palo-Alto, CA: Dale Seymour Publications.

Huinker, D.. M. (1993). Interviews: A window to students` conceptual knowledge of the operations. In N.L. Webb & A.F. Coxford (Eds.), *Assessment in the mathematics classroom. 1993 Yearbook* (pp. 80-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Irwin, K. C. (1996a). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part-whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (1), 25-40.

Irwin, K. C. (1996b). Young children's formation of numerical concepts: Or 8 = 9 + 7. In H. Mansfield, N. A. Pateman & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow' s young children* (pp. 137-150). Dordrecht: Kluber Academic Publishers.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale: Erlbaum.

Jensen, R. J. (Ed.) (1993). *Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics.* New York: Macmillan Publishing Company.

Jones, G.A., Thornton, C.A., Putt, I. J. et al. (1996). Multidigit number sense: A framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (3), 310-336.

Kail, R. (1992). *Gedächtnisentwicklung bei Kindern*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Kalmykova, Z. I. (1963). Psychological prerequisites for increasing the effectiveness of learning in problem solving in arithmetic. In B. Simon & J. Simon (Eds.), *Educational Psychology in the USSR* (pp. 180-191). London.

Kamii, C. (1986). Place value: An explanation of its difficulty and implications for the primary grades. *Journal of Research in Childhood Education*, (August), 75-86.

Kamii, C. & Joseph, L. (1988). Teaching place value and double-column addition. *Arithmetic Teacher, 35* (2), 48-52.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Livingston, S. J. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures, *Arithmetic Teacher*, (December), 200-203.

Kaufman, A. S. & Kaufman, N. L.(1991). *K-ABC: Kaufman assessment battery for children*. Deutschsprachige Fassung von Peter Melcher und Ulrich Preuß. Amsterdam: Swets & Zeitlinger.

Kaput, J. J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive Processes. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluver.

Kibel, M. (1992). Linking language to action. In T. R. Miles & E. Miles (Eds.), *Dyslexia and mathematics* (pp. 42-57). London: Routledge.

Killion, K. & Steffe, L. P. (1989). Children's multiplication. *Arithmetic Teacher,* (Sept). 34-36.

Klöckener, J. (1990). Schreibrichtungsinversion beim Schreiben zweistelliger Zahlen – eine Untersuchung über Ursachen und Abhilfen. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (3), 15-30.

Kornmann, R. & Wagner, H.-J. (1995). *Sonderpädagogik. Variationen von Anforderungen und Fehleranalysen als Methoden der förderungsorientierten Diagnostik – aufgezeigt für einfache Rechenaufgaben.* Hagen: Fernuniversität - Gesamthochschule.

Krauthausen, G. (1993). Kopfrechnen, halbschriftliches Rechnen, schriftliche Normalverfahren, Taschenrechner: Für eine Neubestimmung des Stellenwertes der vier Rechenmethoden. *Journal für Mathematikdidaktik, 14,* (3/4), 189-219.

Krauthausen, G. (1995). "Die Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87-108). Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.

Krauthausen, G. (1997). „Blitzrechnen 1/2" – Computerunterstützte Kopfrechenübungen im 1. und 2. Schuljahr. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 287-290). Hildesheim: Franzbecker.

Krüll, K. E. (1992). Metakognition in der Dyskalkulietherapie. *Psychologie, Erziehung, Unterricht, 39*, 204-213.

Krüll, K. E. (1994). *Rechenschwäche was tun?* München: Reinhardt.

Krummheuer, G. (1997). Zum Begriff der "Argumentation" im Rahmen einer Interaktionstheorie des Lernens und Lehrens von Mathematik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. (1), 1-10.

Kutzer, R. & Probst, H. (o.J.). *Strukturbezogene Aufgaben zur Prüfung Mathematischer Einsichten*, Teil 1 und 2 – nur zum internen Gebrauch –.

Labinowicz, E. (1985). *Learning from children. New beginnings for teaching numerical thinking.* Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Labinowicz, E. (1987). The interview method. *Arithmetic Teacher,* (Nov.). 22-23

Laschkowski, W. (1992). Rechenstörung – Bedingungen. Diagnostik und Möglichkeiten der Beeinflussung. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe,* (10), 459-466.

Laschkowski, W. (1994). Diagnostik. In Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen (Hrsg.), *Rechenstörungen. Diagnose – Förderung – Materialien* (S. 23-59). Donauwörth: Auer.

Leitner, S. (1972). *So lernt man lernen.* Freiburg: Herder.

Lobeck, A. (1992). *Rechenschwäche. Geschichtlicher Rückblick, Theorie und Therapie.* Luzern: Schweizerische Zentralstelle für Heilpädagogik.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J. H. (Hrsg.) (1993). Mathematik und Anschauung. Köln: Aulis.

Lorenz, J. H. (1994). Mathematische Lernschwierigkeiten erkennen. *Grundschulunterricht, 41* (2), 18-21.

Lorenz, J. H. (1995a). Arithmetischen Strukturen auf der Spur. Funktion und Wirkungsweise von Veranschaulichungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift,* (82), 9-12.

Lorenz, J. H. (1995b). Die mentale Repräsentation arithmetischer Beziehungen und das Problem des Zusammenhangs zwischen Anschauung und Mathematiklernen. In H.-G. Steiner & H.-J. Vollrath, (Hrsg.), *Untersuchungen zum Mathematikunterricht.*

Band 20. Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze (S. 91-96). Köln: Aulis.

Lorenz, J. H. & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht.* Hannover: Schroedel.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21* (1), 16-32.

Maier, H. & Voigt, J. (1994). *Verstehen und Verständigung. Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung.* Köln: Aulis.

Mansfield, H., Pateman, N. A. & Bednarz, N. (Eds.). (1996). *Mathematics for tomorsrow' s young children.* Dordrecht: Kluber Academic Publishers.

Means, B., Chelemer, C. & Knapp, M. (1991). *Teaching advanced skills to at-risk students.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Milz, I. (1993). *Rechenschwächen erkennen und behandeln. Teilleistungsstörungen im mathematischen Denken.* Dortmund: Borgmann.

Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (1994). Bildungsplan für die Grundschule. *Kultus und Unterricht, 43.*

Müller, G. N. & Wittmann, E. Ch. (1995). *Mit Kindern rechnen.* Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, Virginia.

National Research Council (1989). *Everybody counts. A report to the nation on the future of mathematics education.* Washington, D.C.: National Academy Press.

Nolte, M. (1995). Grenzen und Möglichkeiten der Arbeit mit rechenschwachen Kindern in der Grundschule. *Mathematische Unterrichtspraxis,* (4), 15-22.

Nolte, M. (1995). Mein Kind kann nicht rechnen. Hat es eine Rechenschwäche? *Grundschule, 27* (5), 19-21.

Nolte, M. (1996). Und er schafft es doch! Über die Arbeit mit einem rechenschwachen Kind in der Grundschule. *mathematica didactica, 19* (1), 39-53.

Nolte, M. (1997). Christian hat eine Rechenmaschine im Kopf – Zum neuropsychologischen Ansatz der Deutung mathematischer Lernprozesse. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 391-394). Hildesheim: Franzbecker.

Novak, Ch. (1992). *Experimental analysis of basic addition performance of learning disabled students.* Diss. Iowa.

Nunes, T., Schliemann, A. D. & Carraher, D. W. (1993). *Street mathematics and school mathematics.* New York: Cambridge University Press.

Padberg, F. (1992). *Didaktik der Arithmetik* (2. Aufl.). Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Payne, J. N. & Huinker, D. M. (1993). Early number and numeration. In R.J. Jensen (Ed.), *Research ideas for the classroom. Early childhood mathematics* (pp. 43-71). New York: Macmillan Publishing Company.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1972). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde.* Stuttgart: Klett.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in chool mathematics*. London: Routledge.

Preiß, G. (1996). Der Beitrag der Gestaltpsychologie. Zur Verbindung von Arithmetik und Geometrie. *Grundschule,* (3), 15-18.

Probst, H. (1983). Testverfahren zur Diagnostik spezifischer Lernvoraussetzungen. In R. Horn, K. Ingenkamp & R.S. Jäger (Hrsg.), *Tests und Trends 3. Jahrbuch der Pädagogischen Diagnostik* (S. 77-105). Weinheim.

Radatz, H., Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (1996). *Handbuch für den Mathematikunterricht. 1. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44* (2), 162-169.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M. et al. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (1), 8-27.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale: Erlbaum.

Resnick, L. B., Bill, V. L., Lesgold, S. B., &Leer, M. N. (1991). Thinking in arithmetic class. In B. Means, C. Chelemer & M. Knapp (Eds.), *Teaching advanced skills to at-risk students* (pp. 27-53). San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Rightsel, P. S. & Thornton, Carol A. (1985). 72 additon facts can be mastered by midgrade 1. *Arithmetic Teacher, 32* (11), 8-10.

Robold, A. (1983). Grid arrays for multiplication. *Arithmetic Teacher,* (January), 14-17.

Rosenkranz, Ch. (1992). *Kieler Zahlenbilder. Ein Förderprogramm zum Aufbau des Zahlbegriffs für rechenschwache Kinder. Zahlenraum 1-20*. Kiel: Veris Verlag.

Rosenkranz, Ch. (1993). Rechnen mit Zahlenbildern. *Grundschule,* (6), 40-42.

Rosenthal, R. & Jacobson, L. (1975). *Pygmalion im Unterricht.* Weinheim: Beltz.

Ross, S. H. (1989). Parts, wholes, and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher, 36* (2), 47-51.

Rourke, B. P. (1989). *Nonverbal learning disabilities,the syndrome and the model*. London: Guilford.

Rourke, B. P. (1993). Arithmetic disabilities, specific and otherwise: A neuropsychological perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26* (4), 214-226.

Russell, R. L. & Ginsburg, H. P. (1984). Cognitive analysis of children's mathematics difficulties. *Cognition and Instruction 1* (2), 217-244.

Sawada, D. (1985). Mathematical symbols: insight through invention. *Arithmetic Teacher*, (February), 20-22.

Scherer, P. (1994a). Fördern durch Fordern – Aktiv-entdeckende Lernformen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. *Zeitschrift für Heilpädagogik,* (11), 761-773.

Scherer, P. (1994b). Kleinschrittiges Vorgehen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Mehr Rückschritt als Fortschritt?! In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 322-325). Hildesheim: Franzbecker.

Scherer, P. (1995a). Arbeitsmittel und Veranschaulichungen im Unterricht mit lernschwachen Schülern. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 408-411). Hildesheim: Franzbecker.

Scherer, P. (1995b). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte*. Heidelberg: Winter.

Scherer, P. (1997a). Lernen in kleinen Schritten oder in komplexen Umgebungen? Was ist geeignet für Kinder mit Lernschwächen? *Grundschule,* (3), 28-31.

Scherer, P. (1997b). Schülerorientierung UND Fachorientierung – notwendig und möglich! *Mathematische Unterrichtspraxis,* (1), 37-48.

Schilling S. & Prochinig, T. (1986). *Dyskalkulie –Rechenschwäche.* Winterthur: Schubi.

Schipper, W. (1996a). Arbeitsmittel für den arithmetischen Anfangsunterricht. *Die Grundschulzeitschrift,* (96), 39-41.

Schmidt, S. (1983). Zur Bedeutung und Entwicklung der Zählkompetenz für die Zahlbegriffsentwicklung bei Vor- und Grundschulkindern. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* (2), 101-111.

Schulz, Andrea (1995). *Lernschwierigkeiten im Mathematikunterricht der Grundschule. Grundsätzliche Überlegungen zum Erkennen, Verhindern und Überwinden von Lernschwierigkeiten – dargestellt am Beispiel der Klassenstufe 3.* Berlin: Paetec (Dissertation Humboldt-Uni Berlin).

Schulz, Andreas (1996). Vergleichende Analyse mathematik-diagnostischer Verfahren im Vorschul- und Sonderschuleingangsbereich. *Heilpädagogische Forschung, 22,* (2), 65-75.

Schütte, S. (1994). *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen.* Stuttgart: Klett.

Schütte, S. (1996). Mehr Offenheit im mathematischen Anfangsunterricht. *Die Grundschulzeitschrift,* (96), 16-19.

Selter, Ch. (1993): *Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr.* Wiesbaden: Deutscher Universitäts-Verlag.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). Offenheit gegenüber dem Denken der Kinder. *Grundschule,* (3), 12-14.

Selter, Ch. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26* (3), 9-15.

Sophian, C. (1988). Limitations on preschool children's knowledge about counting: using counting to compare two sets. *Developmental Psychology, 24,* 634-640.

Sophian, C. & McCorgray, P. (1994). Part-whole knowledge and early arithmetic problem solving. *Cognition and Instruction, 12* (1), 3-33.

Spiegel, H. (1993). Rechnen auf eigenen Wegen – Addition dreistelliger Zahlen zu Beginn des 3. Schuljahres. *Grundschulunterricht, 40,* (10), 5-7.

Starkey, P., Spelke, E. S. & Gelman, R. (1990). Numerical abstraction by human infants. *Cognition, 36,* 97-127.

Steeg, F. H. (1996). *Lernen und Auslese im Schulsystem am Beispiel der Rechenschwäche*. Frankfurt/M.: Peter Lang Europäischer Verlag der Wissenschaften.

Steffe, .L. P. (1992). Learning stages in the construction of the number sequence. In J. Bideaud, C. Meljac, & J.-P. Fischer (Eds.), *Pathways to number* (pp. 83-98). Hillsdale: Erlbaum.

Steffe, L. P.(1994). Childrens multiplying schemes. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 3-39). Albany: State University of New York Press.

Steffe, L. P. & Cobb, Paul (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer.

Steffe, L. P. & Kieren, T. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education. 25* (6), 711-733.

Steinberg, R. M. (1985). Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 16* (5), 337-355.

Steiner, G. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Kommentar. In F. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 171-179). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Stern, E. (1992). Warum werden Kapitänsaufgaben "gelöst"? Das Verstehen von Textaufgaben aus psychologischer Sicht. *Mathematikunterrich*t, (5).

Stern, E. (1994). Die Erweiterung des mathematischen Verständnisses mit Hilfe von Textaufgaben. *Grundschule,* (3), 23-26.

Stern, E. (1994). Wie viele Kinder bekommen keinen Mohrenkopf? Zur Bedeutung der Kontexteinbettung beim Verstehen des quantitativen Vergleiches. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie, 26,* (1), 79-93.

Stern, E. (1997): Erwerb mathematischer Kompetenzen: Ergebnisse aus dem SCHOLASTIK-Projekt. In F. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), *Entwicklung im Grundschulalter* (S. 157-170). Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Stern, Elsbeth (1998). *Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter.* Lengerich: Pabst Science Publishers.

Thompson, Ch. S. & Van de Walle, J. (1984). Let's do it. The power of 10. *Arithmetic Teacher, 35* (4), 6-11.

Van de Walle, J. A. (1994). *Elementary school mathematics. Teaching developmentally* (2. ed.) White Plains, N.Y: Longman.

Voigt, J. (1994). Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. In H. Maier & J. Voigt (Hrsg.), *Verstehen und Verständigung* (S. 77-111). Köln: Aulis

Watzlawick, P. (Hrsg.). (1997). *Die erfundene Wirklichkeit. Wie wissen wir, was wir zu wissen glauben? Beiträge zum Konstruktivismus.* (9. Aufl.). München: Piper.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education.* 19 (5), (S. 371-384).

Weichbrodt, K. (1994). Rechenschwäche – oder nicht? *Grundschule,* (5), 25-27.

Weinert, F. & Helmke, A. (Hrsg.) (1997). *Entwicklung im Grundschulalter.* Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Wember, F.B. (1990). Schwierigkeiten beim Rechnen- und Schreibenlernen. Neue neuropsychologische Syndrome? *Zeitschrift für Heilpädagogik, 41* (7), 483-486.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunterricht. *mathematik lehren.* (2), 4-16.

Wittmann, E. Ch. (1997). Zur schriftlichen Subtraktion. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 211-214). Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1. Vom Einspluseins zum Einmaleins.*(2. Aufl.). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2. Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. u. a. (1994). *Das Zahlenbuch.* Stuttgart: Klett.

Yamanoshita, T.& Matsushita, K. (1996). Classroom models for young children’s mathematical ideas. In H. Mansfield, N. A. Pateman & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow' s young children* (pp. 285-301). Dordrecht: Kluber Academic Publishers.

Zimbardo, P. G. (1992). *Psychologie.* (5. Aufl.). Berlin: Springer.