ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE NÁUTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Trabajo Fin de Grado

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL A LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

(Rational trigonometry application to celestial navigation)

Para acceder al Título de Grado en

INGENIERÍA NÁUTICA Y TRANSPORTE MARITIMO

Autor: Diego Cifrián Pérez

Director: José Iván Martínez García

Junio - 2020

ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE NÁUTICA

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Trabajo Fin de Grado

APLICACIÓN DE LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL A LA NAVEGACIÓN ASTRONÓMICA

(Rational trigonometry application to celestial navigation)

Para acceder al Título de Grado en

INGENIERÍA NÁUTICA Y TRANSPORTE MARÍTIMO

Junio – 2020

ÍNDICE

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES:

RESUMEN

En el presente trabajo de fin de grado se ha tratado de explicar un nuevo planteamiento de la trigonometría plana y la trigonometría esférica diferente a la que estamos acostumbrados a utilizar habitualmente, la trigonometría racional.

En un primer momento hemos hecho una breve explicación de por qué es tan importante la trigonometría para los seres humanos y, más concretamente, para nosotros los marinos y navegantes.

Para que el trabajo sea más accesible a cualquier lector, hemos comenzado repasando algunos conceptos de la trigonometría clásica. De manera similar, hemos hecho lo propio con la trigonometría esférica, centrándonos en la explicación del triángulo esférico, sus partes y sus relaciones.

Seguidamente hemos realizado un acercamiento a la trigonometría racional, tanto plana como esférica, explicando sus conceptos más importantes y comparándola con la trigonometría clásica.

Para finalizar hemos realizado una serie de ejercicios de navegación astronómica y ortodrómica, los cuales han sido resueltos mediante la trigonometría clásica y la racional. Para facilitar la comprensión de estos, hemos hecho un resumen de los conceptos que aparecen en cada ejercicio.

Terminamos nuestro estudio con una serie de conclusiones relativas a la eficacia y el desarrollo de esta nueva trigonometría racional.

PALABRAS CLAVE

Trigonometría esférica, trigonometría racional, astronomía, triángulos esféricos, navegación, posicionamiento astronómico.

ABSTRACT

The purpose of this final grade project is to explain a new approaching of the plane and the spherical trigonometry different from the one we are used to work with, the Rational trigonometry.

At first, we have done a brief explanation of the importancy of the trigonometry for humans and, specificaly, for the navigators and sailors.

To make this project more accesible to common people, we have started reviewing some concepts of the classic trigonometry. We have done the same with the spherical trigonometry, paying special attention to the spherical trigonometry, its parts and its relations.

Next we have made an approaching to the rational trigonometry, both plane and spherical, explaining their more important concepts and comparing them with the clasical trigonometry.

Finally, we have carried out some exercises of astronomical and otrthodromic navigation, that have been solved with the classical and the rational trigonometry. To ease the understanding of them, we have made a briefing of the concepts that appear in each examples.

To close our project we have made several conclusions relative to the effectiviness and the development of this new rational trigonometry.

KEYWORDS

Spherical trigonometry, Rational trigonometry, astronomy, spherical triangles, navigation, astronomical positioning.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace siglos las antiguas civilizaciones han sentido curiosidad al observar el cielo nocturno y divisar en él esos puntos luminosos que hoy sabemos que son las estrellas. La observación de astros ha servido a lo largo de la historia para multitud de propósitos como pueden ser saber las estaciones del año, las épocas de cosecha, para poder orientarnos o incluso llego a estar muy relacionado con el misticismo.

A nosotros como marinos y navegantes lo que nos interesa es conocer nuestra posición sobre la esfera terrestre, y esto lo logramos mediante observaciones de la altura de los astros con respecto al horizonte y a su orientación con respecto al norte. Utilizando una serie de fórmulas y cálculos matemáticos podemos conocer nuestra longitud y latitud con mucha precisión. Gracias al desarrollo de inventos como el sextante, la aguja giroscópica o el cronómetro entre muchos otros, este método de posicionamiento ha ido mejorando cada vez más a lo largo de los años.

La base matemática de estos cálculos la encontramos en la trigonometría, en concreto en la trigonometría esférica. Las antiguas civilizaciones se dieron cuenta que el cielo que nos rodea se asemejaba a una enorme cúpula que giraba alrededor de nuestras cabezas. Es por esto por lo que empezaron a estudiar la trigonometría esférica incluso antes que la plana que habitualmente nos enseñan en los institutos.

Grandes astrónomos de la antigüedad comenzaron a estudiar los movimientos de los astros y empezaron a descifrar los conocimientos de la geometría, creando tablas trigonométricas que les ayudaban con sus cálculos. Asimismo, fueron apareciendo otros múltiples avances como los logaritmos o el cálculo diferencial que realizaron grandes avances en los cálculos trigonométricos. Así fueron apareciendo tanto las razones trigonométricas que conocemos hoy en día como las fórmulas que nos ayudan a resolver estos ya conocidos triángulos esféricos.

Hoy en día todo este campo de la trigonometría está más que estudiado, pero siempre se puede avanzar algo más. Es por esto por lo que vamos a ver en este trabajo los misterios que entraña un nuevo enfoque de la trigonometría, la trigonometría racional.

2. OBJETIVOS

El principal objetivo del presente trabajo es la obtención de una formulación totalmente desconocida para nosotros que aplicaremos a la resolución de triángulos esféricos. Gracias a esta nueva formulación intentaremos resolver problemas de navegación en los que nos aparezcan este tipo de triángulos. Esta conjunto de fórmulas se basará en la trigonometría racional propuesta por el matemático canadiense Norman J. Wildberger.

Una vez conozcamos, entendamos y probemos cómo funciona la trigonometría racional y, por supuesto, sus fórmulas, trataremos de concluir si este nuevo método de cálculo es igual de eficaz como el que nos enseñan en la universidad.

3. METODOLOGÍA

La metodología que seguiremos en el presente trabajo consistirá en un estudio de la trigonometría racional, explicando cuáles son las bases de este nuevo enfoque de la trigonometría. Una vez conozcamos cómo funciona la trigonometría racional pasaremos a desarrollar la aplicación de esta a la trigonometría esférica.

Para probar la eficacia de esta nueva formulación realizaremos una serie de ejercicios relacionados con la navegación en los cuales nos aparecen triángulos esféricos, en concreto un ejercicio de navegación por círculo máximo (ortodrómica) y otro ejercicio de posicionamiento astronómico. Primero realizaremos los ejercicios de manera tradicional con los métodos habituales que nos han enseñado para luego resolverlos gracias a las nuevas fórmulas obtenidas mediante la trigonometría racional.

Viendo los resultados obtenidos en los problemas por los dos métodos podremos concluir si éste nuevo enfoque de la trigonometría es efectivo. Además, compararemos los desarrollos de ambos métodos en cuanto a la complejidad de los cálculos efectuados para llegar a el resultado final.

4. TRIGONOMETRÍA PLANA

4.1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una de las ramas de las matemáticas que se centra en el estudio de las relaciones numéricas entre los elementos angulares y rectilíneos de los triángulos. La palabra trigonometría proviene del griego "tri” (tres), “gonos" (ángulo) y "metria" (medida), que significa “medición de los triángulos”.

La trigonometría plana se limita a los triángulos que pueden estar contenidos en un plano mientras que la trigonometría esférica estudia los triángulos trazados sobre una esfera.

Esta ciencia se puede aplicar a multitud de campos de conocimiento como en el caso de la navegación, la arquitectura, la geografía o la astronomía. También nos la podemos encontrar en todo tipo de fenómenos vibratorios como el sonido o la luz.

Para medir los ángulos de los triángulos podemos emplear cuatro unidades distintas que son el grado sexagesimal, el radián, el grado centesimal y el mil angular, siendo las más importantes las dos primeras.

Tomando como base que una circunferencia la dividimos en 360 secciones iguales un grado sexagesimal corresponderá al ángulo central de una de esas secciones. Los grados (º) a su vez los podemos dividir en 60 minutos (´) y los minutos en 60 segundos (´´).

Se conoce como radian a un ángulo cuyo arco de circunferencia tiene una longitud igual al radio de la circunferencia. Una circunferencia completa tiene 2π radianes ya que la fórmula del perímetro de una circunferencia es:

$$Perímetro = 2 * \pi * r$$

Si esta misma circunferencia la dividiésemos en 400 secciones tendríamos los grados centesimales que a su vez se dividen en 100 minutos centesimales formados cada uno de ellos por 100 segundos centesimales. Si la circunferencia la dividiésemos en 6400 partes, cada una de estas partes sería un mil angular.

Un ángulo recto es un ángulo formado por dos semirrectas que se cortan perpendicularmente y mide exactamente 90º o π/2 radianes. Veremos muchos ángulos rectos ya que las razones trigonométricas se miden sobre un triángulo rectángulo.

4.2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Con el fin del estudio de la relación entre los ángulos y los lados de un triángulo rectángulo se definieron una serie de funciones llamadas razones trigonométricas. Para poder definirlas primero veremos cómo definir los tres lados tomando como referencia uno de los ángulos agudos, en este caso el ángulo α.

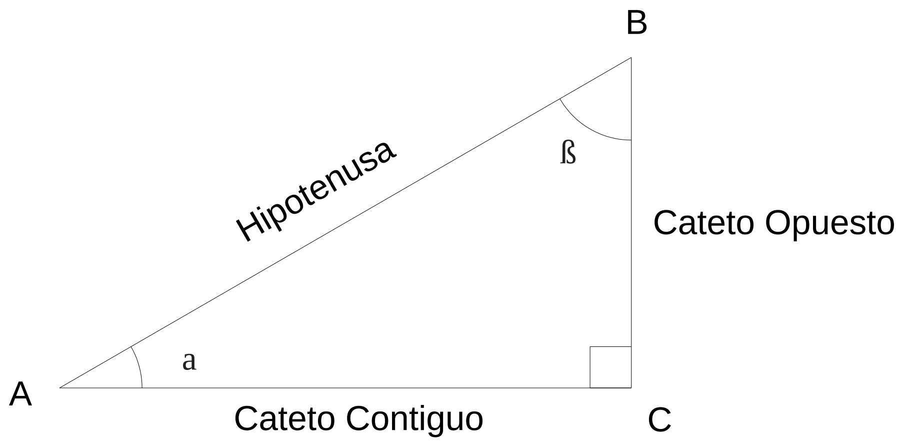

ILUSTRACIÓN 1: TRIÁNGULO RECTÁNGULO BÁSICO (FUENTE: EL AUTOR)

Siendo α un ángulo agudo de un triángulo rectángulo podemos definir las seis funciones trigonométricas del ángulo α en función de los lados del triángulo.

El seno de un ángulo se define como la razón (división) entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{BC}{AB}$$

El coseno de un ángulo es la razón entre el cateto contiguo y la hipotenusa

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{AC}{AB}$$

La tangente se define como la razón entre el cateto opuesto y el cateto contiguo

$$tan\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{BC}{AC}$$

La cosecante es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto y es la razón recíproca (inversa) del seno.

$$cosec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{sen\ \alpha}$$

La secante es la razón entre la hipotenusa y el cateto contiguo, además de ser la razón recíproca del coseno.

$$sec\ \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{cos\ \alpha}$$

La cotangente se define como la razón entre el cateto contiguo y el cateto opuesto. Es la razón recíproca de la tangente.

$$cotg\ \alpha = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{tan\ \alpha}$$

Vamos a definir ahora las razones trigonométricas para el ángulo β. Puesto que los ángulos son complementarios, es decir, α + β = 90º podemos despejar este ángulo como β = 90º - α.

$$sen\ \beta = \frac{AC}{AB} = cos\ \alpha = cos(90º - \beta)$$

$$cos\ \beta = \frac{BC}{AB} = sen\ \alpha = sen(90º - \beta)$$

$$tan\ \beta = \frac{AC}{BC} = cotg\ \alpha = cotg(90º - \beta)$$

$$cosec\ \beta = \frac{AB}{AC} = sec\ \alpha = sec(90º - \beta)$$

$$sec\,\beta = \frac{AB}{BC} = cosec\,\alpha = cosec(90º - \beta)$$

$$cotg\,\beta = \frac{BC}{AC} = tan\,\alpha = tan(90º - \beta)$$

Estas relaciones asocian las funciones en pares (seno-coseno, tangente-cotangente y secante-cosecante), de modo que una de las funciones de uno de los pares es la cofunción de la otra. Con esto podemos decir que cualquier función de un ángulo agudo corresponde a la cofunción del ángulo complementario.

Existen una serie de fórmulas que nos relacionan las distintas razones trigonométricas de un ángulo concreto. Aunque hay una gran cantidad de ellas, aquí vamos a ver la más importante, denominada identidad trigonométrica fundamental. La identidad trigonométrica fundamental dice:

$$\boldsymbol{sen\,(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1}$$

Esta fórmula tiene una demostración muy sencilla. Para ello vamos a basarnos en la ilustración 1 que podemos ver más arriba. Vamos a llamar al cateto contiguo “a”, al cateto opuesto “b” y a la hipotenusa “h”.

Aplicamos la definición del seno y coseno y sumamos sus cuadrados.

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{h^2} = \frac{1}{h^2}(a^2 + b^2)$$

Como tenemos un triángulo rectángulo podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Nos dice lo siguiente.

$$a^2 + b^2 = h^2$$

Por tanto, al sustituir en la primera ecuación tenemos que

$$\frac{1}{h^2}(a^2 + b^2) = \frac{h^2}{h^2} = 1$$

4.2.1. Signos algebraicos de las funciones

Con el objetivo de definir las razones trigonométricas para cualquier ángulo debemos estudiar su signo algebraico. Este signo algebraico lo podremos definir gracias a un sistema de coordenadas cartesianas que nos dividirá nuestro plano en cuatro cuadrantes distintos como podemos ver más abajo en la figura 2.

Definidos los dos ejes cartesianos tomaremos una circunferencia goniométrica (el valor de su radio es la unidad) con su centro en el origen de coordenadas. Observamos que tomando un radio cualquiera podemos obtener un triángulo cuya hipotenusa va a ser la unidad.

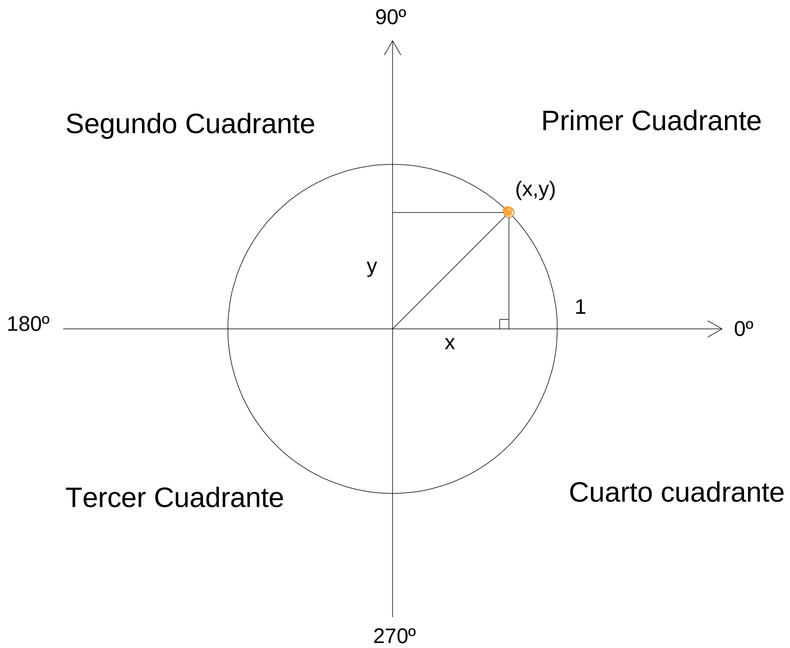

ILUSTRACIÓN 2: CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA Y CUADRANTES. (FUENTE: EL AUTOR)

Esta circunferencia goniométrica tiene la peculiaridad de que el valor numérico del seno de un ángulo cualquiera es igual a la proyección del radio que forma el ángulo sobre el eje de coordenadas Y. Asimismo, la proyección del radio de la circunferencia sobre el eje de coordenadas X será igual al valor numérico del coseno del ángulo en el origen.

La explicación de esta característica es muy sencilla. Las razones trigonométricas del seno y del coseno son obtenidas hallando la razón entre uno de los catetos del triángulo y la hipotenusa de este, que en este caso es la unidad. Como dividir cualquier valor por la unidad sigue siendo el mismo valor podemos deducir que estas dos razones trigonométricas tienen el valor de los catetos del triángulo que se forma, o lo que es lo mismo, la proyección del radio sobre los ejes de coordenadas.

Para estudiar los signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante daremos una vuelta completa a la circunferencia. Empezando desde la posición totalmente horizontal que coincide con el eje X iremos aumentando el valor del ángulo en sentido antihorario, cambiando de cuadrante en los ángulos de 90º, 180º, 270º y 360º, momento en el que volveremos al origen.

- Primer cuadrante

En este cuadrante observamos que el cateto contiguo está sobre el eje X y además tiene un valor positivo. El cateto opuesto, que se ubica paralelo al eje Y, tiene también un valor positivo. Por tanto, como ambos catetos del triángulo tienen valores positivos, todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante serán positivas.

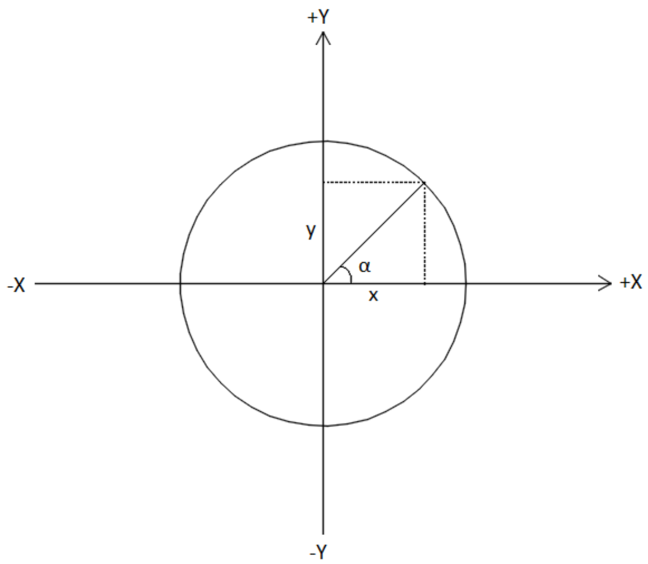

ILUSTRACIÓN 3: FUNCIONES EN EL PRIMER CUADRANTE (FUENTE: EL AUTOR)

- Segundo Cuadrante

En el segundo cuadrante podemos observar que el cateto contiguo está ubicado en el eje negativo de las X. El cateto opuesto sigue estando en la parte positiva del eje Y. Deducimos con esto que las razones del coseno y la tangente, junto a sus razones recíprocas, tienen signo negativo, mientras que el seno y la cosecante serán positivas.

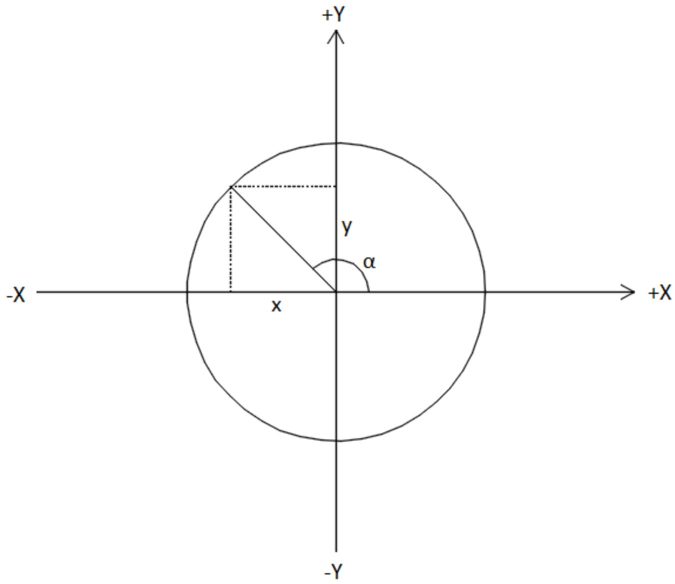

ILUSTRACIÓN 4: FUNCIONES EN EL SEGUNDO CUADRANTE (FUENTE: EL AUTOR)

- Tercer Cuadrante

Llegados al tercer cuadrante nos damos cuenta de que tanto el cateto contiguo como el cateto opuesto están en la parte negativa de los ejes. Debido a esto las razones trigonométricas del seno, el coseno y sus inversas serán resultarán negativas. La tangente y la cotangente serán las únicas positivas en este caso.

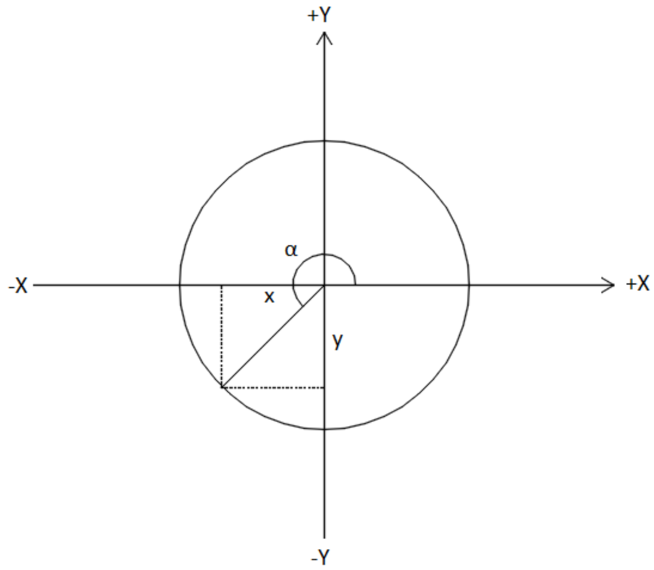

ILUSTRACIÓN 5: FUNCIONES EN EL TERCER CUADRANTE (FUENTE: EL AUTOR)

- Cuarto cuadrante

Para finalizar llegamos al cuarto cuadrante, donde nos encontramos que el cateto contiguo vuelve a ser positivo y el cateto opuesto sigue teniendo un valor negativo. En este último caso solo el coseno y su inversa serán positivas, dejando al seno, cosecante, tangente y cotangente con signo negativo.

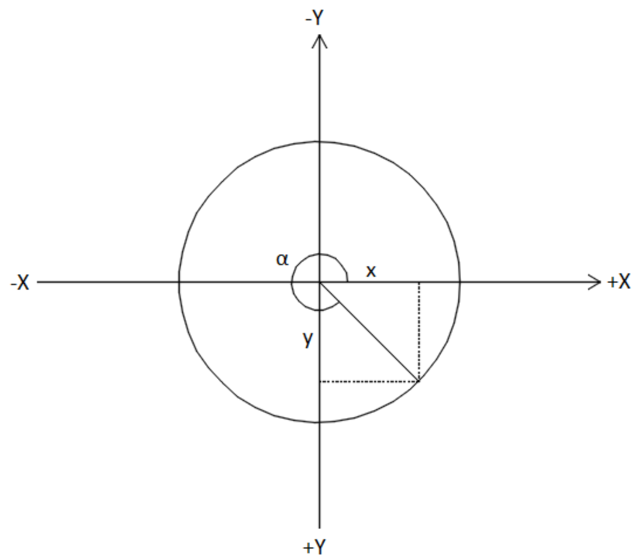

ILUSTRACIÓN 6: FUNCIONES EN EL CUARTO CUADRANTE (FUENTE: EL AUTOR)

4.2.2. Razones trigonométricas de ángulos comunes

Para finalizar con esta breve introducción de la trigonometría clásica vamos a ver las razones trigonométricas para los ángulos más comunes. Los primeros ángulos que deberíamos estudiar son los ángulos en los que cambiamos de cuadrante los cuales no forman ningún triángulo en la circunferencia goniométrica.

Función	0º	90º	180º	270º
Seno	0	1	0	-1
Coseno	1	0	-1	0
Tangente	0	Indefinido	0	Indefinido

TABLA 1: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS COMUNES (FUENTE: EL AUTOR)

Los otros ángulos importantes son los ángulos que se forman en triángulos que nos encontramos habitualmente en nuestro día a día como por ejemplo en una escuadra y un cartabón. La siguiente figura nos ayudará a definir las razones trigonométricas de estos ángulos.

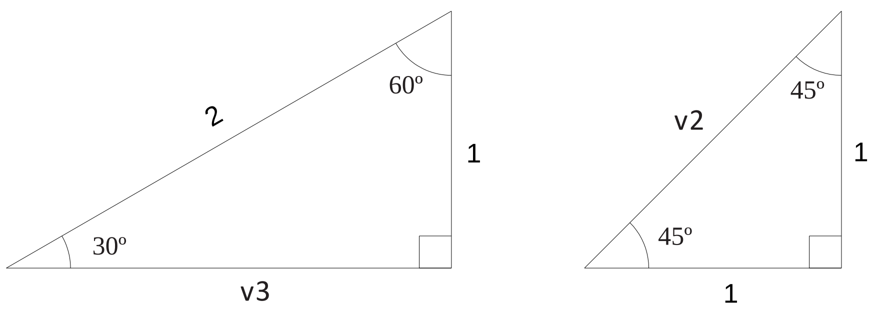

ILUSTRACIÓN 7: RELACIÓN ENTRE TRIÁNGULOS DE 30º, 45º Y 60º (FUENTE: EL AUTOR)

Función	30º	45º	60º
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Coseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

TABLA 2: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS PARA ÁNGULOS DE 30º, 45º, Y 60º (FUENTE: EL AUTOR)

4.3. LEYES DE LA TRIGONOMETRÍA

En la trigonometría plana tenemos una serie de fórmulas que nos relacionan los lados y los ángulos de un triángulo. Esto nos sirve para poder resolverlos teniendo tres elementos distintos (siempre que no sean los tres ángulos). Los más importantes de ellos son el teorema del seno y el teorema del coseno. Vamos a explicarlos con la ayuda del siguiente triángulo para saber en qué momentos los vamos a necesitar.

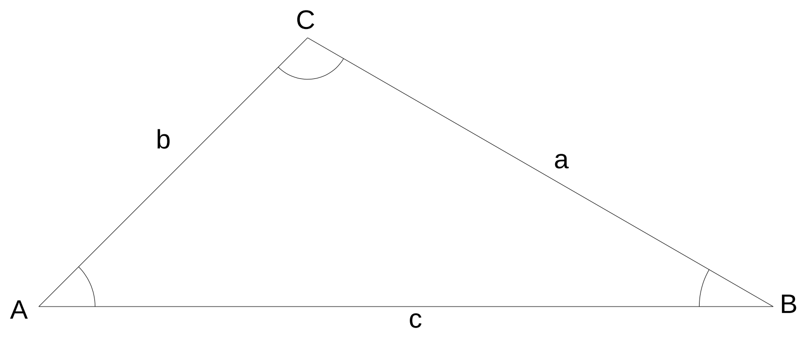

ILUSTRACIÓN 8: TRIÁNGULO CUALQUIERA (FUENTE: EL AUTOR)

4.3.1. Teorema del seno

Este teorema relaciona los lados del triángulo con los senos de los correspondientes ángulos opuestos. Dado el triángulo ABC que podemos ver en la figura superior el teorema del seno presenta la siguiente forma:

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B} = \frac{c}{sen\ C}$$

Se utiliza en caso de tener un triángulo en el cuál conocemos un lado, su ángulo opuesto y otro elemento cualquiera del triángulo. También podemos utilizarlo cuando conocemos los tres ángulos de un triángulo para saber la proporción de los lados. En la vida real se suele utilizar en el cálculo de alturas de árboles o edificios, para calcular la pendiente de una cuesta, etc.

4.3.2. Teorema del coseno

El teorema del coseno relaciona un lado cualquiera de un triángulo con los otros dos y con el coseno del ángulo opuesto (el que forman los otros dos ángulos). Este teorema está muy relacionado con el teorema de Pitágoras ya que si aplicamos este teorema en un ángulo recto obtendríamos el de Pitágoras (coseno de 90º es 0). El teorema dice lo siguiente:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Para este teorema debemos conocer dos lados contiguos de un triángulo y el ángulo que se forma entre ambos. Este teorema se puede utilizar en muchas aplicaciones como por ejemplo el cálculo de la velocidad de un buque cuando está en zonas con corriente.

5. TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA

5.1. INTRODUCCIÓN

Podemos definir a la trigonometría esférica como la parte de la geometría que se centra en el estudio de triángulos formados sobre una superficie esférica, llamados triángulos esféricos. La superficie esférica sobre la que se van a trazar estos triángulos va a ser la bóveda celesta o la superficie terrestre que, aunque no es una esfera perfecta, la consideraremos como tal. Esta trigonometría tiene mucha relevancia para los marinos ya que gracias a ella podemos situarnos en alta mar mediante la observación de los astros.

5.2. TRIÁNGULO ESFÉRICO

Un triángulo esférico lo podemos definir como la región formada por el corte de tres círculos máximos de la esfera. Los arcos de circulo máximo que tenemos corresponderán a los lados del triángulo y en el corte de estos tendremos los vértices y los ángulos.

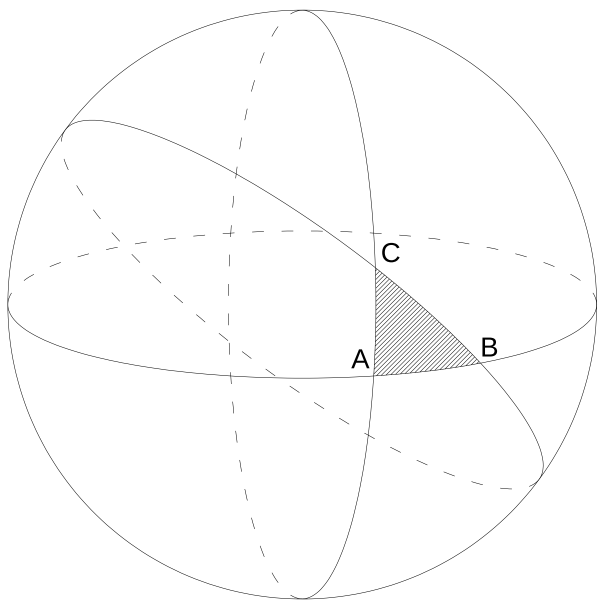

ILUSTRACIÓN 9: EJEMPLO DE TRIÁNGULO ESFÉRICO (FUENTE: EL AUTOR)

Cabe destacar que el radio de la esfera sobre la que se trazan estos triángulos no es relevante ya que solo queremos estudiar las relaciones entre los lados y los ángulos del triángulo. Debido a esto, los lados de un triángulo esférico no se medirán en longitud, sino que se medirán al igual que los ángulos, en grados. Para que este concepto de lados medidos en grados quede más claro vamos a ver una figura estrechamente relacionada con el triángulo esférico y es el triedro correspondiente.

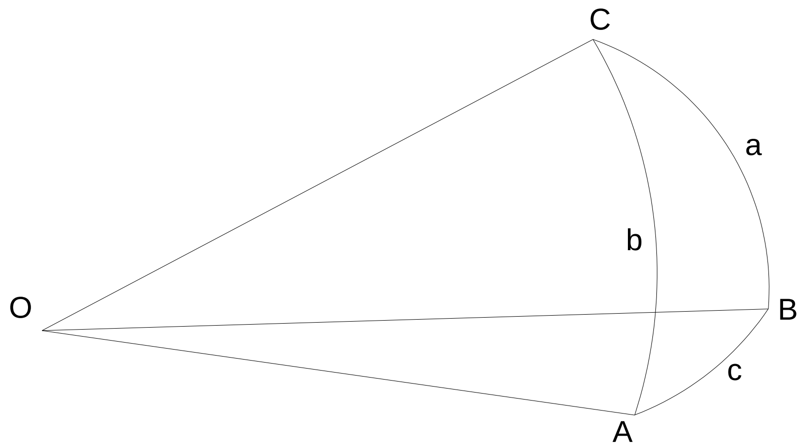

ILUSTRACIÓN 10: TRIEDRO CORRESPONDIENTE AL TRIÁNGULO ESFÉRICO (FUENTE: EL AUTOR)

Este triedro se forma con la unión de los tres vértices del triángulo con el centro de la esfera sobre la que está. Los lados a, b y c del triángulo esférico se miden gracias a los ángulos en el centro de la esfera AOB, BOC y AOC del triedro generado.

5.3. TRIÁNGULO ESFÉRICO POLAR

Se denomina triángulo polar de un triángulo esférico ABC a otro formado por los vértices $A_pB_pC_p$. Este triángulo lo obtenemos uniendo por arcos de círculo máximo los polos correspondientes a cada uno de los lados del triángulo original, escogiendo en cada caso al polo que se encuentra en el mismo hemisferio que el vértice opuesto.

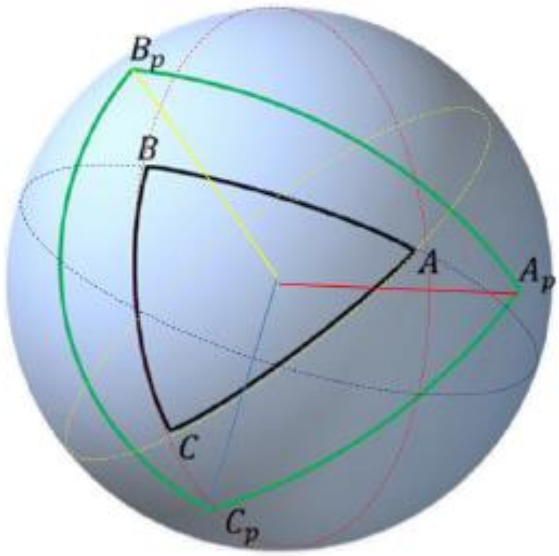

ILUSTRACIÓN 11: TRIÁNGULO POLAR CORRESPONDIENTE (FUENTE: FACULTAD DE CIENCIAS UNAM, GEOMETRÍA ANALÍTICA 2, UNIDAD 3)

El vértice Ap es el polo del círculo máximo que contiene al lado a, más próximo al vértice A. El vértice B_p es el polo del círculo máximo del lado b que está más cercano al punto B. Finalmente el vértice C_p es el polo del círculo máximo que contiene al lado c, que además se encuentra en el mismo hemisferio que el vértice C.

5.4. PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Los triángulos esféricos tienen una serie de características diferentes a sus compañeros los triángulos planos. Muchas de estas propiedades se derivan de las correspondientes propiedades referentes a los ángulos formados en un triedro. En este apartado vamos a ver las propiedades más importantes.

1. Cualquier lado o ángulo de un triángulo esférico será siempre menor que una semicircunferencia. $a, b, c, A, B\ y\ C < 180º$.

2. Cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia. $a < b + c$, $a > b - c$.

3. La suma de los tres lados siempre será menor que cuatro rectos. $a + b + c < 360º$.

4. Si dos lados son iguales, los ángulos opuestos serán iguales y viceversa. $a = b \leftrightarrow A = B$.

5. A mayor lado siempre se opondrá mayor ángulo y viceversa.
   $a < b \leftrightarrow A < B$.

6. La suma de los ángulos siempre es mayor que una semicircunferencia y menor que seis rectos. $180º < A + B + C < 540º$.

7. Cualquier ángulo aumentado en dos rectos es mayor que la suma de los otros dos. $A + 180º > B + C$.

8. Si la suma de dos lados es menor que 180º, la suma de sus ángulos opuestos también será menor de 180º.
   $a + b < 180º \leftrightarrow A + B < 180º$
   También se cumplirá en el caso de ser igual a 180º o de ser mayor de 180º.
   $a + b = 180º \leftrightarrow A + B = 180º$
   $a + b > 180º \leftrightarrow A + B > 180º$

9. Dados un triángulo esférico y su correspondiente triángulo polar, se verifica que cada ángulo de uno de los triángulos es igual al suplemento del lado correspondiente del otro triángulo.
   $A = 180º - a_p$ $\quad B = 180º - b_p$ $\quad C = 180º - c_p$
   $A_p = 180º - a$ $\quad B_p = 180º - b$ $\quad C_p = 180º - c$

La diferencia $360º - (a + b + c)$ recibe el nombre de defecto esférico del triángulo ABC.

El exceso esférico “E” de un triángulo esférico es el valor angular en que la suma de los ángulos excede de 180º. $E = (A + B + C) - 180º$.

El defecto esférico de un triángulo cualquiera coincide con el exceso esférico de su triángulo polar correspondiente.

5.5. CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Teniendo en cuenta las características de los triángulos esféricos podemos clasificarlos en función de sus lados o ángulos rectos. Con este criterio los podríamos clasificar en:

- Triángulo esférico rectángulo: Tiene un ángulo recto.

- Triángulo esférico birrectángulo: Tiene dos ángulos rectos.
- Triángulo esférico trirrectángulo: Tiene los tres ángulos rectos.
- Triángulo esférico rectilátero: Tiene un lado recto.
- Triángulo esférico birrectilátero: Tiene dos lados rectos.
- Triángulo esférico trirrectilátero: Tiene tres lados rectos.
- Triángulo esférico isósceles: Dos de sus lados son iguales.
- Triángulo esférico equiláteros: Sus tres lados son iguales.

5.6. FÓRMULAS FUNDAMENTALES (FORMULAS DE BESSEL)

El principal objetivo de la trigonometría esférica es la resolución de triángulos esféricos, es decir, la obtención de uno de sus elementos a partir de otros tres previamente conocidos. Para ello existen unos grupos de fórmulas que relacionan cuatro de los elementos de un triángulo esférico llamados los grupos de fórmulas de Bessel.

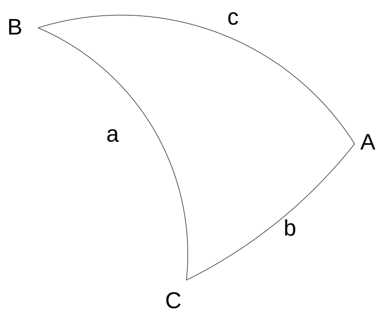

ILUSTRACIÓN 12: REPRESENTACIÓN DE TRIÁNGULO ESFÉRICO (FUENTE: EL AUTOR)

5.6.1. Teorema del coseno (Primer grupo de las fórmulas de Bessel)

En este primer grupo cada una de las fórmulas relaciona los tres lados del triángulo esférico y uno de sus ángulos. El teorema del coseno dice lo siguiente: *En todo triángulo esférico, el coseno de un lado es igual al producto de los cosenos de los otros lados, más el producto de los senos de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.*

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c + sen\, b\, sen\, c\, cos\, A$$

5.6.2. Teorema del seno (Segundo grupo de las fórmulas de Bessel)

Cada fórmula perteneciente a este grupo relaciona dos lados del triángulo esférico con sus dos ángulos opuestos. Este teorema dice: *En un triángulo esférico, los senos de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

$$\frac{sen\ a}{sen\ A} = \frac{sen\ b}{sen\ B}$$

5.6.3. Teorema de la cotangente (Tercer grupo de las fórmulas de Bessel)

Las fórmulas pertenecientes al tercer grupo hacen intervenir dos lados del triángulo con el ángulo entre ellos y otro ángulo opuesto. Lo que nos viene a decir este teorema es lo siguiente: *La cotangente de un lado por el seno de otro es igual al coseno de este último lado por el coseno del ángulo comprendido más el seno de este último ángulo por la cotangente del ángulo opuesto al primer lado*.

$$cotg\ a\ sen\ b = cos\ b\ cos\ C + sen\ C\ cotg\ A$$

5.6.4. Teorema del coseno para los ángulos (Cuarto grupo de las fórmulas de Bessel)

En este último grupo cada fórmula relaciona los tres ángulos del triángulo esférico con uno de sus lados. A este grupo se le llama “polar” del primero. Ya que se obtiene gracias al triángulo polar que vimos anteriormente.

$$cos\ A = -cos\ B\ cos\ C + sen\ B\ sen\ C\ cos\ a$$

5.6.5. Formulario de los grupos de Bessel.

Todas estas fórmulas forman parte de un grupo de fórmulas, el cual se obtiene permutando los lados y los ángulos de una de ellas. A continuación, dejo un formulario con todas las fórmulas de Bessel.

Teorema del coseno:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

Teorema del seno:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

Teorema de la cotangente:

$$\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} A$$
$$\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} c = \cos c \cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} A$$
$$\operatorname{cotg} b \operatorname{sen} c = \cos c \cos A + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} B$$
$$\operatorname{cotg} b \operatorname{sen} a = \cos a \cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} B$$
$$\operatorname{cotg} c \operatorname{sen} b = \cos b \cos A + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} C$$
$$\operatorname{cotg} c \operatorname{sen} a = \cos a \cos B + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} C$$

Teorema del coseno para los ángulos:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cos C + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos c$$

Gracias a estos grupos de fórmulas podemos obtener el valor de cualquiera de los elementos del triángulo esférico a partir de tres elementos conocidos. Estos tres elementos conocidos junto con el cuarto elemento desconocido nos indicarán cuál es la fórmula que debemos utilizar.

5.7. TRIÁNGULOS ESFÉRICOS RECTÁNGULOS.

Una vez vistas las relaciones entre los elementos de un triángulo esférico vamos a ver las de un triángulo en concreto. Este es el triángulo esférico rectángulo que, como definimos anteriormente, es el triángulo que cuenta con un ángulo recto. Es muy interesante el estudio de este tipo de triángulos esféricos ya que cualquier triángulo esférico puede ser dividido en dos triángulos esféricos rectángulos, facilitando los cálculos en multitud de casos. Como en los triángulos planos este triángulo esférico cuenta con dos catetos (lados "c" y "b") y una hipotenusa (lado "a").

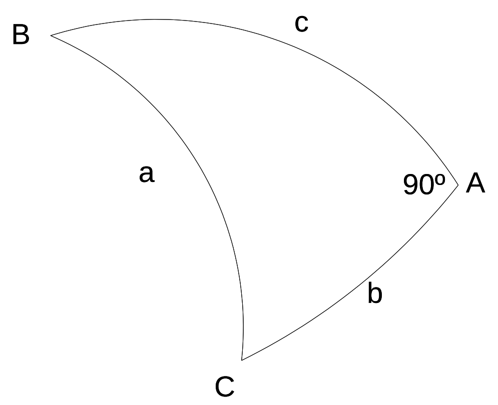

ILUSTRACIÓN 13: TRIÁNGULO ESFÉRICO RECTÁNGULO (FUENTE: EL AUTOR)

5.7.1. Fórmulas que relacionan los elementos de un triángulo esférico rectángulo.

Estas fórmulas exclusivas de los triángulos esféricos rectángulos relacionan 3 elementos y las deducimos a partir de las fórmulas de Bessel. Como podemos ver en el triángulo de la ilustración superior nuestro ángulo recto es el ángulo A. Gracias a la trigonometría plana podemos saber fácilmente que:

$$cos\,A = 0 \quad sen\,A = 1 \quad cotg\,A = 0$$

- Relación entre los 3 lados.

Del teorema del coseno tenemos que:

$$cos\,a = cos\,b\,cos\,c + sen\,b\,sen\,c\,cos\,A$$

Siendo $\cos A = 0$, obtenemos que:

$$\boxed{cos\,a = cos\,b\,cos\,c}$$

- Relación entre un cateto, la hipotenusa y el ángulo opuesto al cateto.

Siendo el teorema del seno:

$$\frac{sen\,a}{sen\,A} = \frac{sen\,b}{sen\,B}$$

Y siendo $\text{sen}\,A = 1$:

$$sen\,a = \frac{sen\,b}{sen\,B}$$

$$\boxed{sen\,b = sen\,a\,sen\,B}$$

- Relación entre un cateto, la hipotenusa y el ángulo comprendido.

Basándonos en el teorema de la cotangente:

$$cotg\,a\,sen\,b = cos\,b\,cos\,C + sen\,C\,cotg\,A$$

Al ser $cotg\,A = 0$:

$$cotg\,a\,sen\,b = cos\,b\,cos\,C$$

$$\frac{sen\,b}{cos\,b} = \frac{cos\,C}{cotg\,a}$$

$$\boxed{tan\,b = tan\,a\,cos\,C}$$

- Relación entre los 2 catetos y un ángulo opuesto a uno de ellos:

Utilizaremos el teorema de la cotangente otra vez, pero de la forma en la cual el ángulo recto aparezca 2 veces:

$$cotg\ b\ sen\ c = cos\ c\ cos\ A + sen\ A\ cotg\ B$$

Siendo $cos\ A = 0$ y $sen\ A = 1$ resulta:

$$cotg\ b\ sen\ c = cotg\ B$$

$$cotg\ b = \frac{cotg\ B}{sen\ c}$$

Pasamos las cotangentes a tangentes y le damos la vuelta a la ecuación:

$$\boxed{tan\ b = sen\ c\ tan\ B}$$

- Relación entre dos ángulos y un lado.

Siendo en teorema del coseno para los ángulos:

$$cos\ A = -\,cos\ B\ cos\ C + sen\ B\ sen\ C\ cos\ a$$

Sabemos que $cos\ A = 0$, por tanto:

$$0 = -\,cos\ B\ cos\ C + sen\ B\ sen\ C\ cos\ a$$

$$cos\ B\ cos\ C = sen\ B\ sen\ C\ cos\ a$$

$$\boxed{cos\ a = cotg\ B\ cotg\ C}$$

Del mismo teorema, pero con otra fórmula:

$$cos\ B = -\,cos\ A\ cos\ C + sen\ A\ sen\ C\ cos\ b$$

Al ser $cos\ A = 0$ y $sen\ A = 1$:

$$cos\ B = \ sen\ C\ cos\ b$$

Es decir:

$$\cos b = \cos B \operatorname{cosec} C$$

A modo de resumen ahora veremos todas las fórmulas que acabamos de ver en este apartado. En estas expresiones podemos permutar los elementos “b” y “B” por “c” y “C”, o viceversa.

$$\cos a = \cos b \cos c$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} B$$

$$\tan b = \tan a \cos C$$

$$\tan b = \operatorname{sen} c \tan B$$

$$\cos a = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C$$

$$\cos b = \cos B \operatorname{cosec} C$$

5.7.2. Regla del pentágono de Neper.

Para recordar fácilmente todas las fórmulas del apartado superior existe una regla nemotécnica llamada la regla del pentágono de Neper. Esta regla consiste en el trazado de un pentágono en el cual se coloca la hipotenusa “a” en el lado inferior, en los lados adyacentes se colocan los ángulos “B” y “C”, y en los lados superiores ponemos el complemento de los catetos, como podemos ver en la ilustración.

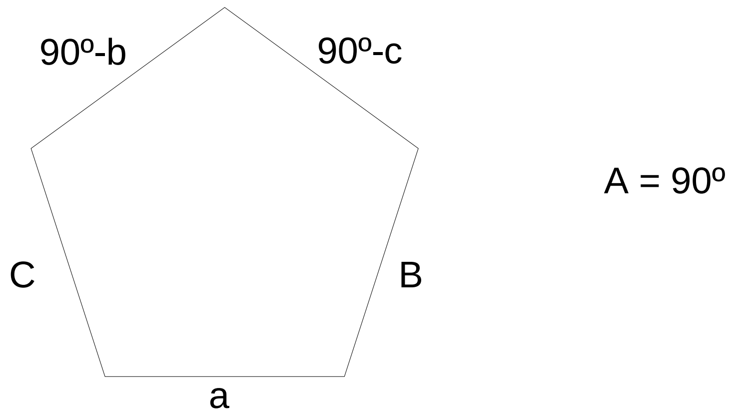

ILUSTRACIÓN 14: PENTÁGONO DE NEPER (FUENTE: EL AUTOR)

La regla de Neper dice que el coseno de un elemento situado en uno de los lados del pentágono es igual al producto:

- De las cotangentes de los lados adyacentes.
- De los senos de los lados opuestos.

Aplicando la regla de pentágono de Neper obtendríamos:

1) $cos\, a = sen\ (90º - b)\ sen\ (90º - c)$

$$\boldsymbol{cos\, a = cos\, b\, cos\, c}$$

2) $cos(90º - b) = sen\ a\ sen\ B$

$$\boldsymbol{sen\ b = sen\ a\ sen\ B}$$

3) $cos\ C = cotg\ a\ cotg\ (90º - b)$

$$\boldsymbol{tan\, b = tan\, a\, cos\, C}$$

4) $\cos(90º - c) = cotg\ B\ cotg\ (90º - b)$

$$\boldsymbol{tan\, b = sen\ c\ tan\, B}$$

5) $\boldsymbol{\cos a = cotg\ B\ cotg\ C}$

6) $\cos B = sen\ C\ sen\ (90º - b)$

$$\boldsymbol{cos\, b = cos\, B\, cosec\ C}$$

Como se puede comprobar, todas estas fórmulas son las mismas que hemos hallado en el apartado anterior.

6. TRIGONOMETRÍA RACIONAL

6.1. PLANTEAMIENTO

Comenzamos ahora la parte más importante de este trabajo, que es la trigonometría racional, formulada por el matemático canadiense Norman J. Wildberger, actualmente profesor de la universidad de Nueva Gales del Sur (Sídney). Para empezar, quiero dejar claro que esto no va a ser una traducción literal de sus ideas expuestas en el libro "Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry" (Proporciones divinas: de la Trigonometría Racional a la Geometría Universal). Tampoco vamos a afrontar las siguientes explicaciones desde el punto de vista del álgebra o la geometría ya que nos encontraríamos con multitud de conceptos demasiado complicados. Esto va orientado a personas con conocimiento de la trigonometría, pero no para expertos matemáticos.

Lo que vamos a desarrollar en este apartado son los conceptos fundamentales de la trigonometría racional para que, con nuestros conocimientos matemáticos, seamos capaces de entender este nuevo enfoque de la trigonometría sin mucha dificultad. Nos encontraremos con conceptos nuevos como son el quadrance (cuadranza en español) y el spread (extensión), así como nuevas fórmulas que sustituirán a los teoremas que utilizamos normalmente como el del seno o el coseno. Para un mejor entendimiento de todos estos nuevos conceptos, iremos comparándolo a medida que lo expliquemos con la trigonometría clásica, viendo sus ventajas y desventajas.

Finalmente vamos a introducirnos también en la trigonometría racional esférica, orientando nuestro estudio a la realización de problemas de trigonometría esférica. Necesitaremos obtener una serie de fórmulas que relacionen los elementos de un triángulo esférico, y así poder solucionar nuestros problemas. Dicho todo esto, empecemos.

6.2. INTRODUCCIÓN

Como adelantábamos en el apartado anterior, la trigonometría racional consiste en una reformulación de la métrica del plano y de la geometría. La principal motivación fue el crear una alternativa a la trigonometría tradicional y así evitar varios problemas que aparecen a la hora de utilizarla. Para empezar, evita el uso de funciones trigonométricas como el seno o el coseno. También evita el uso de tablas trigonométricas que, puesto que tenemos calculadoras, no son muy usadas hoy en día.

Hablemos ahora de los triángulos. Es sabido por todos que un triángulo es un polígono formado por tres lados, el cual viene caracterizado por la longitud de cada uno de sus lados y los ángulos que forman dichos lados, teniendo así 6 elementos. Los lados los medimos en una unidad de longitud, ya sean metros, centímetros, pies, etc., mientras que los ángulos son medidos comúnmente en grados o radianes.

En la trigonometría racional estos valores son sustituidos por otros nuevos, cambiando así las leyes y teoremas que los relacionan. El concepto de distancia utilizado para medir lados se sustituye por su valor al cuadrado y se denomina "quadrance", mientras que el valor de los ángulos es sustituido por su seno elevado al cuadrado, denominado "spread". Para entender mejor este cambio de variables vamos a verlo en un triángulo cualquiera.

Método clásico:

Tenemos el siguiente triángulo con las medidas que podemos ver en el dibujo.

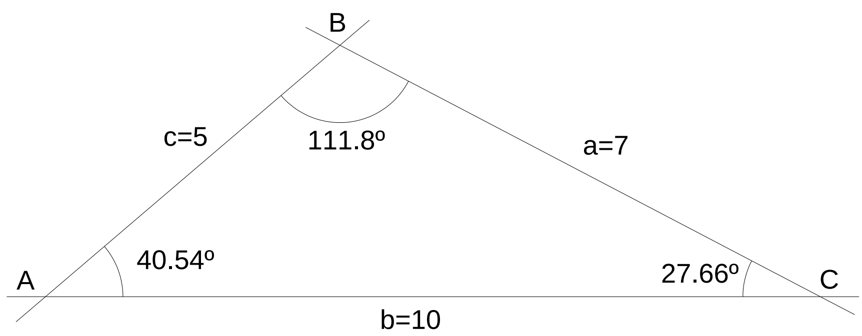

ILUSTRACIÓN 15: MEDICIÓN CLÁSICA DE UN TRIÁNGULO (FUENTE: EL AUTOR)

Estas medidas son las que llevamos utilizando toda la vida y podemos comprobar algunas relaciones como que los tres ángulos suman 180º.. Si nos faltase alguno de estos datos deberíamos recurrir a los teoremas de la trigonometría clásica que involucrarían al seno, coseno y demás. No podríamos resolverlo sin la ayuda de una calculadora.

Método de la trigonometría racional:

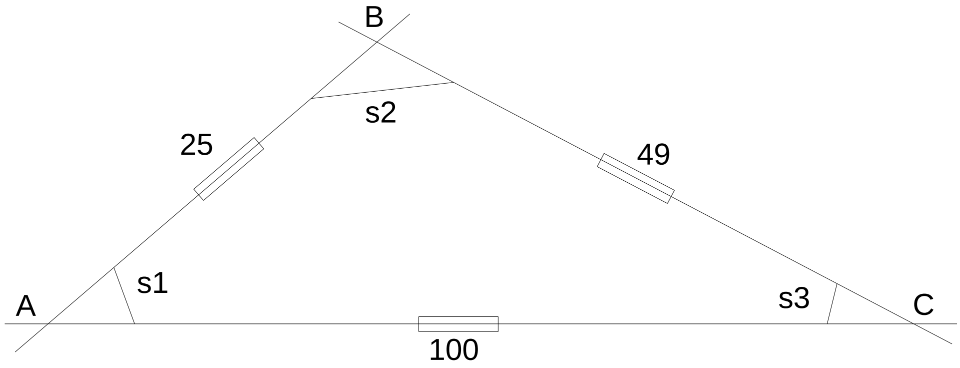

ILUSTRACIÓN 16: TRIÁNGULO CON LAS MEDIDAS DE LA TRIGONOMETRÍA RACIONAL (FUENTE: EL AUTOR)

Podemos observar en la figura la representación de los quadrances y los spreads. Los quadrances, para diferenciarlos de las distancias que tomamos habitualmente los representamos con esos rectángulos en la mitad de los lados del triángulo. A su vez, los spreads son representados con una línea en lugar de con un arco de circunferencia como son representados normalmente los ángulos.

Los valores de los quadrances no son muy difíciles de entender ya que sencillamente es el valor de la distancia al cuadrado. Es más, podríamos definir al quadrance sencillamente como el valor de una distancia elevado al cuadrado.

Con los spreads la cosa no es tan fácil ya que no es tan evidente la obtención de estos, aunque sí más que la obtención del valor de los ángulos. El spread se define como el valor del seno de un ángulo elevado al cuadrado, por tanto, su obtención será muy parecida a la obtención del seno trigonométrico.

En los apartados siguientes vamos a focalizarnos en estos dos nuevos conceptos en los que se basa la trigonometría racional.

6.3. QUADRANCE

Como hemos definido anteriormente el quadrance o cuadranza en español es el valor de la distancia entre dos puntos multiplicada por sí misma, es decir, elevada al cuadrado. Esto nos da una gran ventaja a la hora de realizar cálculos matemáticos ya que en multitud de fórmulas aparecen raíces cuadradas y, gracias a esto, evitaremos el uso de éstas (por ejemplo, el teorema de Pitágoras). Para empezar, vamos a definir cómo se calcula la distancia entre dos puntos cualquiera, definidos con dos coordenadas cartesianas. Vamos a tomar el punto $A_1 = (x_1, y_1)$ y el punto $A_2 = (x_2, y_2)$. La distancia será:

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Como el quadrance es la distancia al cuadrado, sencillamente nos eliminará la raíz de la operación. Lo obtendremos con la siguiente fórmula:

$$Q(A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Viendo las dos funciones nos damos cuenta de que el quadrance es un valor más básico desde el punto de vista de las coordenadas cartesianas sobre un plano. Podemos dar entonces otra definición para el quadrance y es el área que forma un cuadrado cuyo lado es la distancia.

Aunque más tarde vamos a profundizar en las leyes y teoremas de la trigonometría racional, ahora vamos a ver algunos más básicos en los que no intervienen triángulos.

Para empezar, podemos deducir que, al igual que al medir distancias, no importa desde donde se empiece a contar.

$$Q(A_1, A_2) = Q(A_2, A_1)$$

Teorema del punto medio:

En cualquier segmento entre dos puntos vamos a tener un punto "M" que divida al quadrance en dos iguales y cumple la siguiente igualdad:

$$Q(A_1, M) = Q(M, A_2) = Q(A_1, A_2)/4$$

Si fuese una distancia se dividiría entre dos, pero al estar los valores elevados al cuadrado se divide entre 2^2, es decir entre 4. Por ejemplo, un quadrance de 16 al dividirlo en dos partes iguales obtendríamos dos quadrances de valor 4.

6.3.1. Triple quad formula:

Esta fórmula sirve para dividir un quadrance en otros dos no necesariamente iguales. Relaciona tres puntos colineales, es decir, que se encuentran en la misma recta. Es una de las cinco fórmulas de la trigonometría racional.

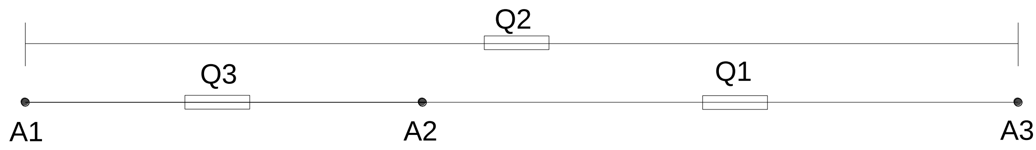

ILUSTRACIÓN 17: EJEMPLO DE LA TRIPLE QUAD FORMULA (FUENTE: EL AUTOR)

Tenemos los siguientes tres puntos $A_1 = (x_1, y_1)$; $A_2 = (x_2, y_2)$ y $A_3 = (x_3, y_3)$ con los quadrances $Q_1 = Q(A_2, A_3)$; $Q_2 = Q(A_1, A_3)$ y $Q_3 = Q(A_1, A_2)$. La fórmula dice:

$$\boldsymbol{(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)}$$

Por ejemplo, en la figura superior suponemos que $Q_2 = 25$ y que $Q_3 = 4$. Para obtener Q_1 tendríamos que sustituir en la ecuación nuestros valores

$$(Q_1 + 25 + 4)^2 = 2(Q_1^2 + 625 + 16)$$

$$(Q_1 + 29)^2 = 2(Q_1^2 + 641)$$

$$Q_1^2 + 58Q_1 + 841 = 2Q_1^2 + 1282$$

$$Q_1^2 - 58Q_1 + 441 = 0$$

Utilizamos la fórmula para las ecuaciones de segundo grado.

$$Q_1 = \frac{58 \pm \sqrt{3364 - 1764}}{2}$$

$$Q = \frac{58 \pm 40}{2}$$

El resultado obtenido dependiendo de si sumamos o restamos en la ecuación de segundo grado sería de 49 o 9. Como podemos ver en la imagen, Q_1 es menor que Q_2, por tanto, el resultado correcto será el de 9.

Para este caso la trigonometría racional no es muy buena elección ya que usando las distancias simplemente tendríamos que sumar o restar. Aquí nos encontramos con ecuaciones de segundo grado dando lugar a dos posibles resultados además de con raíces cuadradas que previamente nos habíamos quitado. A pesar de estos problemas, la trigonometría racional no está enfocada a estos cálculos.

6.3.2. Teorema de Pitágoras:

Este famosísimo teorema es una de las fórmulas principales de la trigonometría racional. Sabemos que en un triángulo rectángulo la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado. Como aquí trabajamos con quadrances, que están elevados al cuadrado, hace que el teorema de Pitágoras sea mucho más sencillo.

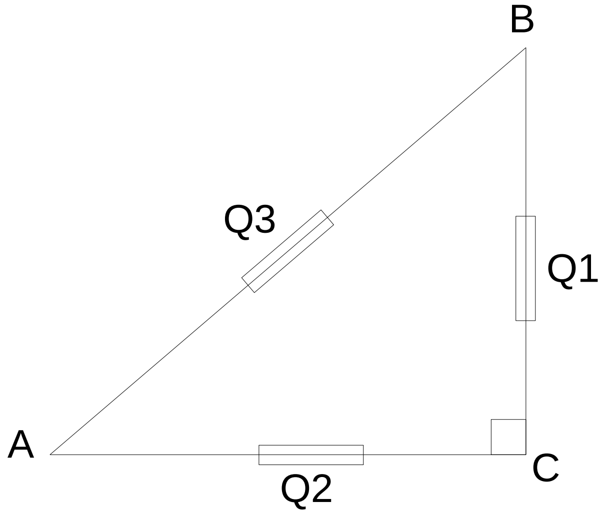

ILUSTRACIÓN 18: TRIÁNGULO RECTÁNGULO CON SUS QUADRANCES (FUENTE: EL AUTOR)

En el triángulo rectángulo ABC el teorema de Pitágoras de la trigonometría racional tiene la siguiente forma.

$$\boldsymbol{Q_1 + Q_2 = Q_3}$$

6.4. SPREAD

El spread, también conocido como extensión, es una medida adimensional que nos indica la separación entre dos líneas rectas. En la trigonometría racional sustituye al concepto de ángulo y tiene un rango de 0 a 1, siendo cero cuando las líneas son paralelas y uno cuando son perpendiculares. A diferencia del concepto de ángulo, el spread es único para dos líneas mientras que el ángulo nos puede dar lugar a equivoco. Para visualizar mejor esto vamos a ayudarnos de la siguiente figura.

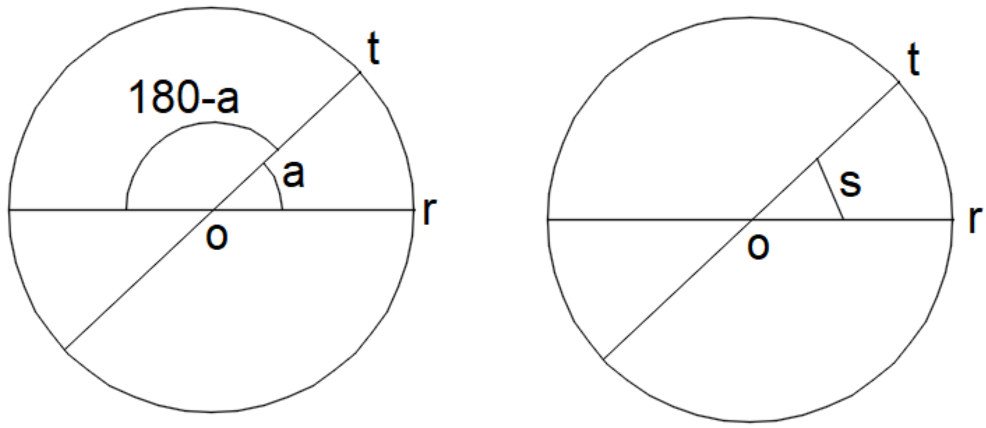

ILUSTRACIÓN 19: COMPARACIÓN ENTRE ÁNGULO Y SPREAD (FUENTE: EL AUTOR)

Cuando queremos medir la separación entre las líneas “t” y “r” mediante un ángulo nos encontramos que éste puede ser el ángulo a o el ángulo 180-a, además de sus similares en la parte de debajo. Con el spread no pasa eso ya que éste va a ser igual en todos los casos. El spread lo hemos definido antes como el valor del seno trigonométrico al cuadrado. Al estar elevado al cuadrado evita que tenga valor negativo como nos ocurría con el seno así que, como estamos comentando, siempre tendrá el mismo valor. Aunque en este ejemplo hemos dibujado el spread en el ángulo agudo podríamos haberlo hecho en cualquiera de los ángulos, simplemente indica entre que líneas esta medido.

Vamos a ver ahora como podemos calcular el valor del spread. Para ello utilizaremos a modo de apoyo la siguiente figura. Nos damos cuenta rápidamente que el cálculo se asemeja al cálculo del seno.

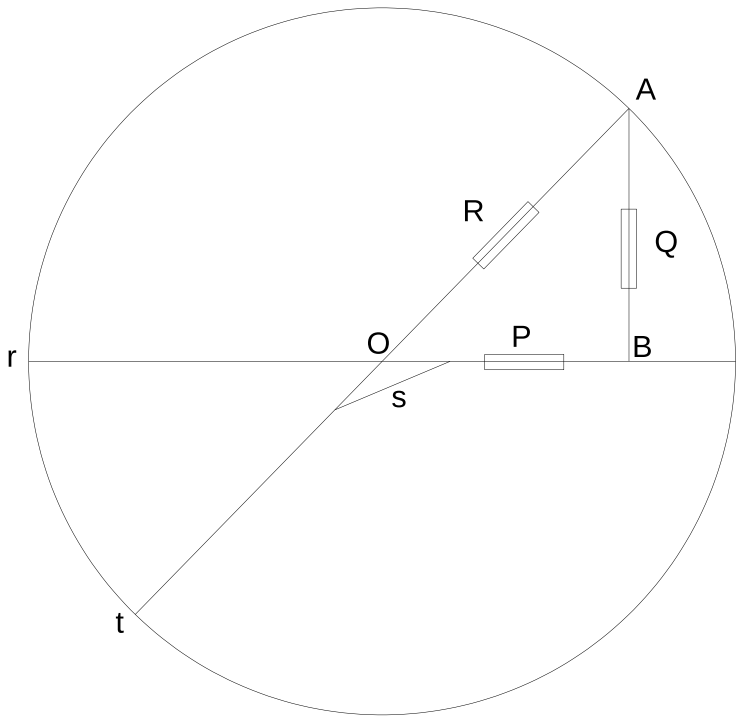

ILUSTRACIÓN 20: CÁLCULO DEL SPREAD ENTRE DOS RECTAS (FUENTE: EL AUTOR)

Como ya conocemos el cálculo del valor del seno, esto no nos debería suponer ningún problema. Sencillamente utilizaremos los quadrances en lugar de las distancias. Para calcular cualquier spread sencillamente necesitaremos formar un triángulo rectángulo con otra recta auxiliar entre las dos en cuestión. Cabe destacar que aquí estamos evitando el uso de raíces cuadradas. La fórmula para calcular el spread es:

$$s(r,t) = \frac{Q(A,B)}{Q(O,A)} = \frac{Q}{R}$$

Aunque esta es la manera que nos interesa a nosotros como estudiantes de trigonometría existen otras maneras de calcular el spread. La más familiar para nosotros es la forma cartesiana que relaciona las dos ecuaciones de las rectas que se cruzan. Una recta cualquiera en el plano se puede definir con una ecuación de la forma $y = mx + n$, o también como $ax + by + c = 0$. En estos casos los valores de "n" y "c" no nos interesan ya que son constantes que no afectan a lo que realmente importa, la pendiente. Esta pendiente nos indicará la inclinación que tendrán las rectas y la podemos saber con el valor "m" en la primera ecuación, o con la relación entre "a" y "b" de la segunda. Bien, visto esto vamos a tomar dos rectas definidas como:

$$a_1x + b_1y = 0 \qquad a_2x + b_2y = 0$$

Teniendo estas dos ecuaciones, podríamos calcular el spread con la siguiente ecuación:

$$s = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$$

No vamos a entrar en demostraciones ya que este modo de calcular los spreads no lo vamos a utilizar (desconocemos las ecuaciones de la recta).

Spreads complementarios:

En la trigonometría clásica dos ángulos complementarios son los que suman 90º. En un triángulo ocurre cuando el triángulo es recto, siendo los otros dos ángulos complementarios. En la trigonometría racional esto nos puede servir para el cálculo de los spreads de manera más sencilla. Para que dos spreads sean complementarios sencillamente tienen que sumar 1.

$$s_1 + s_2 = 1$$

Conceptos de cross y twist:

Aunque en la trigonometría racional utilizamos el spread, que sustituye a la función trigonométrica del seno, también tenemos a estos dos nuevos conceptos relacionados con el coseno y la tangente. Basándonos en la figura anterior vamos a ver cómo se calculan.

Cross: Es el equivalente al coseno elevado al cuadrado y es:

$$c(r,t) = \frac{Q(O,B)}{Q(O,A)} = \frac{P}{R}$$

Gracias a la identidad trigonométrica fundamental que vimos previamente, podemos deducir que igualdad $s + c = 1$, ya que el spread y el cross sustituyen al seno y al coseno al cuadrado. Nos encontraremos al cross más adelante de la forma $c = 1 - s$. Vamos a denominarlo en español como cruce ya que una de las leyes fundamentales tiene su nombre.

Twist: Equivale a la tangente al cuadrado y se calcula:

$$t(r,t) = \frac{Q(A,B)}{Q(O,B)} = \frac{Q}{P} = \frac{s(r,t)}{c(r,t)}$$

6.4.1. Obtención de los spreads de un triángulo

Como adelantábamos unos apartados atrás, vamos a aprender cómo calcular los spreads de cualquier triángulo. En esta ocasión utilizaremos el triángulo que vimos anteriormente y sabremos de dónde vienen esos valores. Vamos a ver el triángulo con alguna modificación.

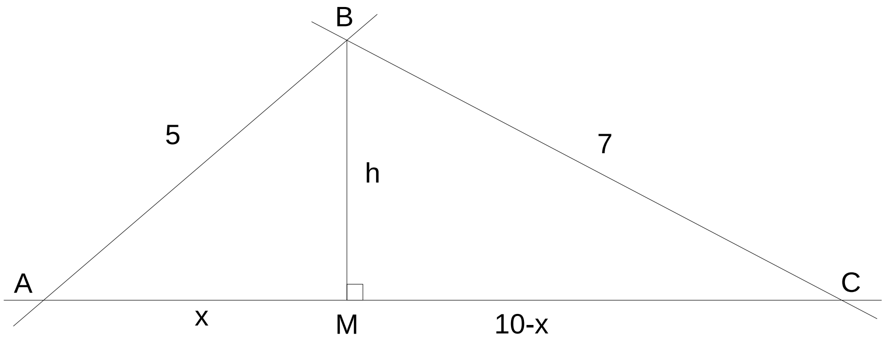

ILUSTRACIÓN 21: TRIÁNGULO DE EJEMPLO (FUENTE: EL AUTOR)

Vemos que hemos obtenido dos triángulos rectángulos. Haciendo el teorema de Pitágoras en ambos triángulos sabemos que

$$h^2 + x^2 = 25$$

$$h^2 + (10 - x)^2 = 49$$

Y restando ambas ecuaciones obtenemos

$$100 - 20x = -24 \quad \rightarrow \quad 20x = 76$$

$$x = \frac{76}{20} = \frac{19}{5}$$

Una vez tenemos la x podemos calcular la h^2 de nuestro problema.

$$h^2 = 25 - x^2 = 25 - \left(\frac{19}{5}\right)^2 = \frac{264}{25}$$

Y una vez obtenidos estos valores podemos obtener el spread de las líneas que se cruzan en el punto "A".

$$s_1 = \frac{Q(M,B)}{Q(A,B)} = \frac{264/25}{25} = \frac{264}{625}$$

Con este mismo método podemos calcular cualquiera de los otros spreads del triángulo en cuestión o de cualquier triángulo. Pero ¿qué pasa si por ejemplo tenemos 2 spreads y queremos calcular el tercero? En la trigonometría clásica esto sería bastante sencillo ya que los tres ángulos de un triángulo suman 180º. En la trigonometría racional tenemos una fórmula que relaciona tres spreads entre tres líneas diferentes.

6.4.2. Triple spread formula

Esta es la fórmula que nos relaciona los spreads formados entre tres líneas rectas. En la mayoría de los casos estas tres líneas nos van a formar un triángulo, pero también cabe la posibilidad de que se crucen en un solo punto y no formen ningún triángulo. En cualquiera de los casos esta fórmula es válida y nos ayudará bastante en la resolución de nuestros cálculos. Tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{(s_1 + s_2 + s_3)^2 = 2(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + 4s_1s_2s_3}$$

Uno de los usos de esta fórmula lo he encontrado en el cálculo de la diferencia de longitud terrestre. En este caso vamos a tener tres líneas que van a ser dos meridianos del lugar y el meridiano de Greenwich que se juntan en un solo punto que es el polo norte. Todo esto se explica en partes posteriores del trabajo, pero aquí vamos a ver un dibujo de cómo sería esta construcción.

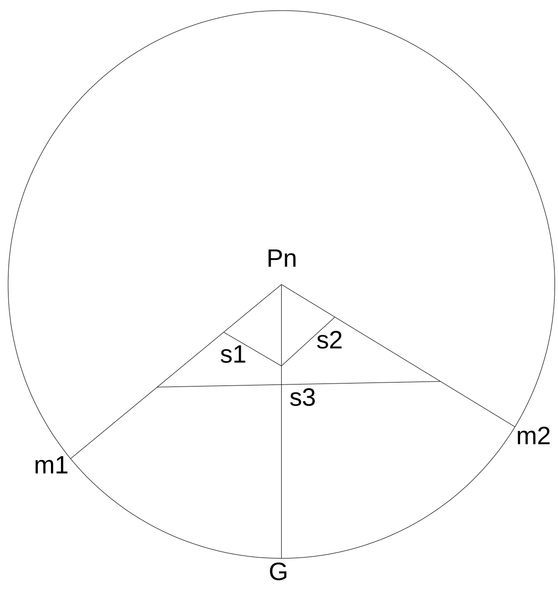

ILUSTRACIÓN 22: EJEMPLO DE TRIPLE SPREAD FORMULA (FUENTE: EL AUTOR)

Nosotros conoceríamos los spreads s1 y s2 y gracias a la fórmula podríamos calcular s3. Este ejercicio hecho con ángulos es mucho más sencillo ya que solo tendríamos que sumar o restar los valores.

6.4.3. Spreads de ángulos comunes

Anteriormente en la trigonometría clásica vimos las razones trigonométricas para los ángulos más comunes. Esta vez vamos a ver dos triángulos similares a los de aquel apartado y a ver los spreads correspondientes. Sabemos que al ángulo de 90º le corresponde el spread de 1 y para 0º el spread es 0.

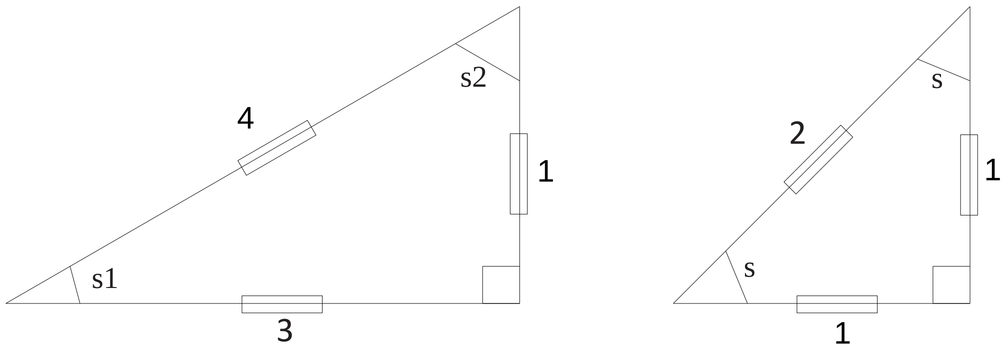

ILUSTRACIÓN 23: OBTENCIÓN DE SPREADS EN ÁNGULOS COMUNES (FUENTE: EL AUTOR)

$$s_1 = \frac{1}{4} \qquad s_2 = \frac{3}{4} \qquad s = \frac{1}{2}$$

6.5. LEYES Y TEOREMAS

Hasta ahora hemos visto varias leyes de la trigonometría racional. Puesto que solo involucraban quadrances o spreads los hemos visto en los apartados correspondientes a cada elemento. Ahora vamos a ver las ecuaciones que utilizan los dos elementos y que además sustituyen a leyes que hemos visto anteriormente en la trigonometría clásica. Estos teoremas son la spread law (ley de extensión) y la cross law (ley de cruce). Para ayudarnos en las explicaciones y en la visualización de estos teoremas utilizaremos el triángulo ABC de la figura siguiente.

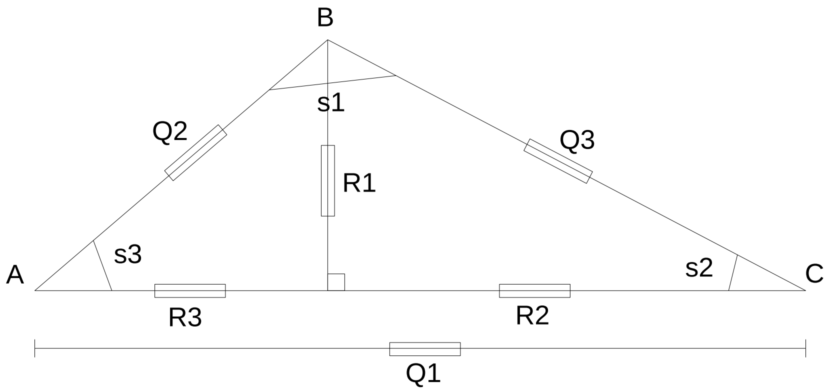

ILUSTRACIÓN 24: EJEMPLO DE TRIÁNGULO CON QUADRANCES Y SPREADS (FUENTE: EL AUTOR)

6.5.1. Spread law

Esta ley o teorema que vamos a tratar en este apartado sustituye al ya conocido por todos teorema del seno. Dice así: Para cualquier triángulo con quadrances no nulos se verifica que

$$\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$$

Puesto que tiene una demostración relativamente sencilla y es de gran relevancia por relacionar todos los elementos de un triángulo, vamos a verla a continuación.

Podemos dividir el triángulo de la figura anterior en dos triángulos rectángulos secundarios. Gracias a esta división sabemos que en el triángulo de la izquierda el spread se calcula de la siguiente forma

$$s_3 = \frac{R_1}{Q_2}$$

De la misma manera en el triángulo de la derecha

$$s_2 = \frac{R_1}{Q_3}$$

Si en este momento despajamos R_1 encontramos que

$$R_1 = s_3 Q_2 \qquad\qquad R_1 = s_2 Q_3$$

Por tanto, obtenemos la siguiente fórmula

$$s_3 Q_2 = s_2 Q_3$$

$$\frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}$$

De la misma manera lo podemos hacer para el otro lado que nos queda, obteniendo finalmente la ley del spread.

$$\boldsymbol{\frac{s_1}{Q_1} = \frac{s_2}{Q_2} = \frac{s_3}{Q_3}}$$

6.5.2. Cross law

Al igual que la ley vista en el apartado anterior, la cross law que vamos a ver en éste también sustituye a un teorema de la trigonometría clásica, el teorema del coseno. Para demostrar esta ley vamos a utilizar el teorema de Pitágoras y la fórmula del triple quad que vimos anteriormente. Para cualquier triángulo se cumple lo siguiente

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2(1 - s_3)$$

Esta ley toma su nombre del concepto de cross, que podemos verlo presente en la parte final de la fórmula. $c = 1 - s$. Utilizaremos el mismo triángulo ABC para la demostración de esta ley.

Al calcular el cross correspondiente al spread número 3 tenemos lo siguiente

$$c_3 = \frac{R_3}{Q_2}$$

Por tanto, R_3 es igual a

$$R_3 = Q_2c_3$$

Anteriormente dijimos que

$$R_1 = Q_2s_3$$

Cambiando el spread por el cross

$$R_1 = Q_2(1 - c_3)$$

Utilizando el teorema de Pitágoras en el triángulo de la derecha tenemos

$$Q_3 = R_1 + R_2$$

$$R_2 = Q_3 - R_1$$

Sustituyendo R_1 en la anterior ecuación

$$R_2 = Q_3 - Q_2(1 - c_3)$$

La triple quad formula que vimos anteriormente podemos escribirla también de la siguiente forma

$$(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2$$

Que para nuestro caso quedaría tal que

$$(Q_1 + R_3 - R_2)^2 = 4Q_1R_3$$

Sustituyendo los valores de R_3 y R_2 tendríamos la ecuación

$$(Q_1 + Q_2c_3 - (Q_3 - Q_2(1 - c_3)))^2 = 4Q_1Q_2c_3$$

$$(Q_1 + Q_2c_3 - Q_3 + Q_2 - Q_2c_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3$$

Que, finalmente, nos daría la cross law que estamos buscando

$$\boldsymbol{(Q_1 + Q_2 - Q_3)^2 = 4Q_1Q_2c_3}$$

6.5.3. Formulario de la trigonometría racional

Puesto que ya hemos visto las cinco fórmulas básicas de la trigonometría racional, vamos a agrupar en un solo apartado a todas ellas.

1) Triple quad formula: Para tres puntos colineales se cumple que:

$$\boldsymbol{(Q_1 + Q_2 + Q_3)^2 = 2(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2)}$$

2) Teorema de Pitágoras: Para cualquier triángulo rectángulo se verifica que:

$$\boldsymbol{Q_1 + Q_2 = Q_3}$$

3) Triple spread formula: Los tres spreads formados por cualquier trio de líneas siempre cumplirán la siguiente fórmula:

$$(\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{s_3})^2 = \mathbf{2}(\boldsymbol{s_1^2} + \boldsymbol{s_2^2} + \boldsymbol{s_3^2}) + \mathbf{4}\boldsymbol{s_1 s_2 s_3}$$

4) Spread law o ley de extensión: Los spreads y quadrances de cualquier triángulo verificarán que:

$$\frac{\boldsymbol{s_1}}{\boldsymbol{Q_1}} = \frac{\boldsymbol{s_2}}{\boldsymbol{Q_2}} = \frac{\boldsymbol{s_3}}{\boldsymbol{Q_3}}$$

5) Cross law o ley cruzada: En cualquier triángulo se verificará la siguiente igualdad:

$$(\boldsymbol{Q_1} + \boldsymbol{Q_2} - \boldsymbol{Q_3})^2 = \mathbf{4}\boldsymbol{Q_1 Q_2 c_3}$$

7. TRIGONOMETRÍA RACIONAL ESFÉRICA

7.1. PLANTEAMIENTO

Comenzamos ahora la parte que más nos interesa en este trabajo. Ya hemos visto en el apartado anterior las bases de la trigonometría racional supuesta para triángulos dibujados sobre una superficie plana. Con los conocimientos adquiridos vamos a desarrollar ahora otra parte de este nuevo enfoque de la trigonometría.

Como ya hemos explicado previamente, la trigonometría esférica pasa de estudiar los triángulos dibujados sobre una superficie plana a una superficie esférica. Vamos a combinar lo aprendido en los apartados 5 y 6 para dar lugar a las fórmulas que nos ayuden a resolver nuestros problemas de navegación. Conociendo la complejidad de este tema intentaremos no entrar en temas excesivamente complicados, como ya comentamos en la introducción del apartado 6.

7.2. INTRODUCCIÓN

Entrando ya en materia, es bueno recordar que en un triángulo esférico tenemos que cambiar la mentalidad a la hora de medir los lados. Ya no vamos a medirlos en distancias o, en este caso con quadrances, sino que vamos a sustituirlos por el valor de un ángulo. Además, hay que añadirle que en trigonometría racional los ángulos son sustituidos por los spreads. Entonces nos damos cuenta de que un triángulo esférico en trigonometría racional va a constar de 6 spreads diferentes.

Para evitar llamar de la misma forma a los 6 spreads que forman el triángulo esférico racional aparecen los conceptos de projective quadrance o quadrance proyectivo y el projective spread o spread proyectivo, que sustituyen a los quadrances y los spreads que ya conocemos. En ocasiones los nombraremos simplemente como spreads y quadrances para abreviar.

La palabra projective viene dada por el nombre que reciben en geometría los puntos que forman el triángulo (projective points). Estos provienen del corte de la esfera con tres rectas procedentes del centro de ésta, formando el triedro correspondiente. Cada uno de los tres puntos va a tener un vector asignado caracterizado por tres valores que indica su ubicación en el espacio.

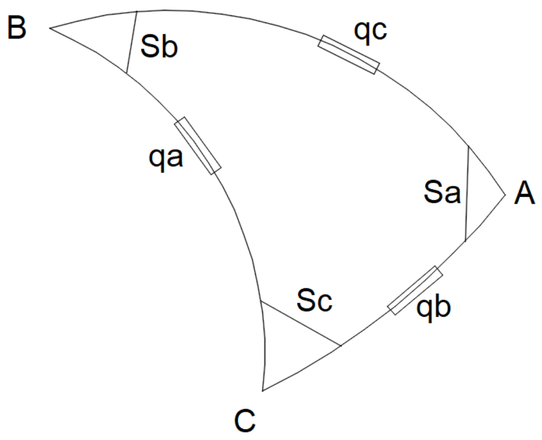

ILUSTRACIÓN 25: TRIÁNGULO RACIONAL ESFÉRICO EN EL PLANO (FUENTE: EL AUTOR)

En la ilustración superior podemos observar la representación de un triángulo esférico racional sobre el plano. Lo primero que vemos es que nuestra notación ha cambiado con respecto a la trigonometría racional plana. Las letras que antes eran minúsculas ahora son mayúsculas y viceversa. Las "S" mayúsculas corresponden a los projective spreads y las "q" minúsculas a los projective quadrances.

7.2.1. Projective Quadrance

Hemos estudiado anteriormente lo que son los quadrances de un triángulo y también cómo es un triángulo esférico. En este apartado vamos a desarrollar los quadrances de un triángulo esférico llamados projective quadrances.

Como bien sabemos, los quadrances son el valor de una distancia al cuadrado, en este caso el lado de un triángulo. Anteriormente estudiamos las partes de un triángulo esférico y vimos que los lados no se miden con distancias sino con ángulos. Estos ángulos van a corresponder a los formados en el origen con dos líneas del triedro correspondiente. A esto tenemos que añadir que todos los valores angulares tenemos que sustituirlos por su seno al cuadrado. Obtenemos de esta manera los projective quadrances, que son denominados con una "q" minúscula.

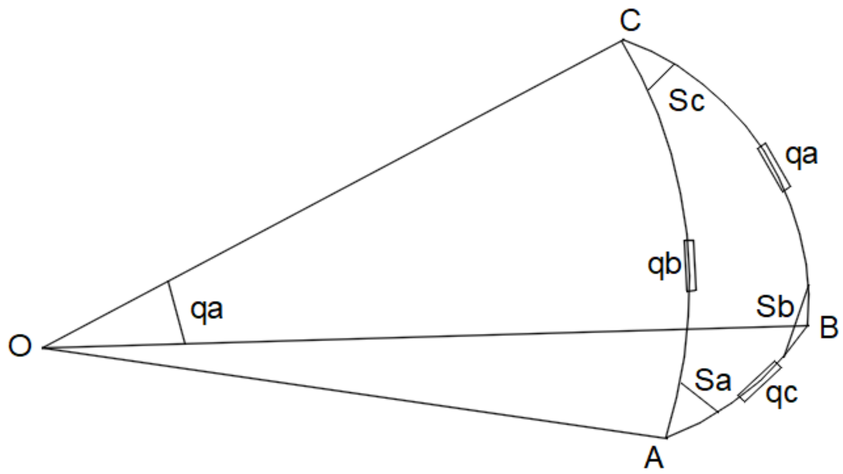

ILUSTRACIÓN 26: TRIEDRO CORRESPONDIENTE CON MEDIDAS RACIONALES (FUENTE: EL AUTOR)

En la figura superior podemos ver al projective quadrance q_a, que corresponde al spread formado entre las líneas OC y OB. Sabiendo que los puntos A, B y C vienen caracterizados por unas coordenadas, podemos medir el spread entre sus líneas correspondientes. Desde el punto de vista de la geometría, todo esto se resuelve mediante vectores o matrices. Como no es nuestro ámbito de estudio lo vamos a resumir de la siguiente manera:

Siendo O, B y C tres projective points tales que

$$O = (0, 0, 0) \qquad B = (x_1, y_1, z_1) \qquad C = (x_2, y_2, z_2)$$

El spread de las dos líneas lo escribiremos como

$$qa = q\ (B, C)$$

Habiendo hecho este breve resumen sobre los projective quadrances comentar que a nosotros no nos hacen falta todas estas explicaciones ya que nuestros datos nos los dan con valores angulares. Nosotros únicamente tenemos que calcular los quadrances correspondientes a los lados de nuestros triángulos. Por poner algunos ejemplos, vamos a tener lados dependientes de latitudes, distancias o alturas de astros. Recordad que siempre va a ser un valor entre 0 y 1.

$$q_l = sen\ (90º - l)^2$$

Una vez tengamos los valores de los projective quadrances nos toca operar con las fórmulas correspondientes para obtener el resultado deseado. Cuando tengamos el resultado final, debemos pasarlo de nuevo a los valores angulares.

$$l = arcsen\sqrt{1 - q_l}$$

7.2.2. Projective Spread

Una vez explicado el projective quadrance pasamos a desarrollar los projective spreads. Estos no se van a diferenciar mucho de los spreads normales ya que siguen calculándose de la misma forma. Recordamos que el spread relaciona la separación entre dos rectas y se obtiene de hacer el seno al cuadrado de un ángulo.

En la trigonometría esférica los projective spreads, denominados con una "S" mayúscula, van a indicar la separación de dos de los tres círculos máximos que forman nuestro triángulo. Para un mejor entendimiento, definiremos al projective spread como la separación entre los planos que contienen a los dos círculos máximos.

Para su cálculo desde el punto de vista de la geometría necesitamos primero explicar la dualidad que existe entre projective quadrances y projective spreads gracias al triángulo esférico polar correspondiente. Este apartado se desarrollará más adelante así que por ahora vamos a quedarnos con lo siguiente:

<u>Los projective spreads de un triángulo esférico cualquiera, son iguales a los projective quadrances de su triángulo polar y viceversa.</u>

Para nosotros como usuarios de la trigonometría racional las medidas de nuestro triángulo esférico nos las van a dar en ángulos, teniendo nosotros que convertirlas en projective spreads. Algunos ejemplos son el horario del astro o ángulo en el polo, los rumbos iniciales o el azimut de un astro.

$$S_P = sen\,(P)^2$$

El resultado final habrá que convertirlo a grados como ocurre con los projective quadrances.

$$P = arcsen\sqrt{S_P}$$

7.3. DUALIDAD ENTRE QUADRANCE Y SPREAD

Ya adelantábamos en el apartado anterior la existencia de esta dualidad entre quadrances y spreads y ahora pasa a ser el objeto de nuestro estudio. En el apartado 5.3. ya vimos lo que era el triángulo polar pero nunca está mal recordarlo.

Dado un triángulo esférico $a_1a_2a_3$ tenemos otro triángulo esférico denominado polar del primero cuyos vértices vamos a denominar $b_1b_2b_3$. Cada vértice de este triángulo se obtiene de la siguiente manera. Suponiendo el plano que contiene uno de los círculos máximos que forman nuestro triángulo, trazamos una recta perpendicular desde el centro de la esfera. El vértice del triángulo será el punto de corte entre esa recta y la esfera que además este más cercano a nuestro triángulo original. En la siguiente ilustración podemos ver uno de los vértices del triángulo polar.

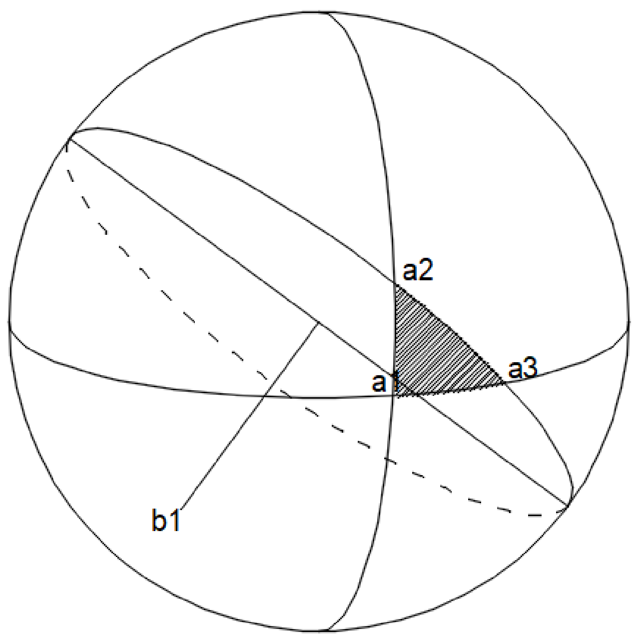

ILUSTRACIÓN 27: VÉRTICE DEL TRIÁNGULO POLAR (FUENTE: EL AUTOR)

De esta manera vamos a tener que

- b_1 es perpendicular a a_2 y a_3.
- b_2 es perpendicular a a_1 y a_3.
- b_3 es perpendicular a a_1 y a_2.

Recordando una de las propiedades de los triángulos esféricos que vimos en el apartado 5.4. sabíamos que cada ángulo del triángulo es igual al suplemento del lado correspondiente de su triángulo polar. Ocurre lo mismo a la inversa ya que el primer triángulo es el polar del segundo.

$$A = 180º - a_p$$

$$A_p = 180º - a$$

Como vimos en la ilustración 19 el spread de un ángulo es el mismo que el de su ángulo suplementario. Por tanto, podemos deducir que un projective spread de un triángulo es igual al projective quadrance de su triángulo polar.

$$S_1 = q_{1P}$$

$$q_1 = S_{1P}$$

De esta manera el cálculo del spread que nos dejamos pendiente en el apartado anterior sería de la siguiente manera:

$$S_1 = q(b_2, b_3)$$

Para el cálculo de la posición de los vértices del triángulo polar volveríamos a entrar en temas de vectores y matrices. Esta explicación acerca de la dualidad nos va a servir para poder obtener una de las fórmulas de la trigonometría racional esférica.

7.4. FÓRMULAS

Pasamos a estudiar en este momento las relaciones entre projective spreads y projective quadrances de cualquier triángulo esférico. Para ello supondremos el siguiente triángulo esférico $a_1a_2a_3$ que podemos ver en la ilustración inferior.

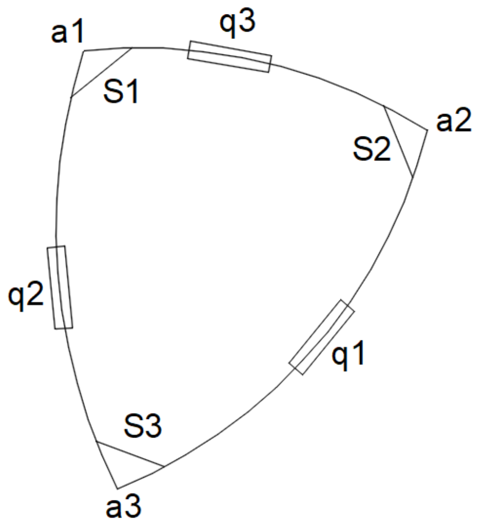

ILUSTRACIÓN 28: TRIÁNGULO ESFÉRICO SUPUESTO (FUENTE: EL AUTOR)

7.4.1. Spread spherical law

La primera fórmula que tenemos es la spread spherical law que sustituirá a la fórmula del seno. Esta ley dice que los spreads del triángulo son proporcionales a los quadrances opuestos de este.

$$\frac{S_1}{q_1} = \frac{S_2}{q_2} = \frac{S_3}{q_3}$$

Esta ley se parece mucho a la fórmula del seno. Para obtenerla, simplemente debemos elevar al cuadrado los numeradores y los denominadores de la anterior fórmula. Vamos a utilizar esta fórmula en nuestros ejercicios una vez conozcamos dos quadrances del triángulo y un spread correspondiente a un quadrance conocido.

7.4.2. Cross spherical law

Esta ley es considerada como la ley principal de la trigonometría racional esférica. Esta será la primera ley que utilicemos en nuestros ejercicios ya que en la mayoría de los casos conoceremos dos quadrances y el spread comprendido entre ambos. La fórmula es la siguiente:

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

La demostración de esta larga fórmula viene del álgebra lineal, incluyendo operaciones con matrices y vectores que se escapan de nuestro rango de conocimiento. Por este motivo nos damos cuenta de que la trigonometría racional, sobre todo la esférica, es mucho más eficiente desde el punto de vista de la geometría y el álgebra.

La fórmula que estamos desarrollando en este apartado tiene otras formas ya que podemos cambiar el projective spread dando lugar a otras dos fórmulas con la misma estructura.

$$(S_2 q_1 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

$$(S_3 q_1 q_2 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

7.4.3. Dual cross spherical law

En el apartado 7.3. vimos que existía una relación entre los spreads de un triángulo y los quadrances de su triángulo polar y viceversa. A priori no le dimos mucha importancia más que el cálculo geométrico de los spreads de un triángulo esférico, pero ahora veremos su utilidad.

Sabemos que en el triángulo polar de nuestro triángulo $a_1a_2a_3$ se cumplen todas las fórmulas anteriores al ser otro triángulo esférico. Si a este triángulo le aplicamos la cross spherical law que acabamos de ver, comprobamos que, debido a la dualidad entre quadrance y spread, obtenemos una fórmula similar en la que los quadrances se nos han convertido en spreads y viceversa.

$$\boldsymbol{(q_1 S_2 S_3 - S_1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 4\,(1 - S_1)(1 - S_2)(1 - S_3)}$$

7.4.4. Fórmulas para triángulos rectángulos

Existen dos fórmulas que nos sirven en el caso de tener un triángulo esférico rectángulo. Desde el punto de vista de la trigonometría racional, un triángulo es rectángulo cuando uno de sus spreads tiene el valor 1 ($S_1 = 1$). Las dos fórmulas son el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras.

- Teorema de Thales: Sustituyendo S_1 en la spread spherical law obtenemos estas dos igualdades.

$$\boldsymbol{S_2 = \frac{q_2}{q_1} \qquad S_3 = \frac{q_3}{q_1}}$$

- Teorema de Pitágoras: El teorema de Pitágoras nos va a relacionar los tres quadrances del triángulo esférico. Para obtenerlo vamos a sustituir nuestro spread conocido S_1 en la dual cross spherical law. A continuación, utilizaremos el teorema de Thales y sustituiremos los spreads.

$$(q_1 S_2 S_3 - 1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 4\,(1-1)(1-S_2)(1-S_3)$$

$$(q_1 S_2 S_3 - 1 - S_2 - S_3 + 2)^2 = 0$$

$$q_1 \frac{q_2}{q_1}\frac{q_3}{q_1} - 1 - \frac{q_2}{q_1} - \frac{q_3}{q_1} + 2 = 0$$

$$\frac{q_2 q_3}{q_1} - \frac{q_1}{q_1} - \frac{q_2}{q_1} - \frac{q_3}{q_1} + \frac{2q_1}{q_1} = 0$$

$$q_2 q_3 - q_2 - q_3 + q_1 = 0$$

$$\boldsymbol{q_1 = q_2 + q_3 - q_2 q_3}$$

Por el mismo motivo que tenemos la dual cross law (dualidad entre quadrance y spread), también tenemos el teorema de Pitágoras dual. Esta fórmula tiene la misma estructura que la del teorema de Pitágoras que acabamos de ver, sustituyendo nuestros quadrances por spreads.

$$\boldsymbol{S_1 = S_2 + S_3 - S_2 S_3}$$

8. RESOLUCION DE PROBLEMAS

Una vez llegados a este punto del trabajo solo nos queda comprobar la fiabilidad de la trigonometría esférica racional en problemas reales, en este caso de navegación. Puesto que no todo el mundo tiene unos conocimientos avanzados de navegación vamos a realizar un acercamiento a los conceptos relacionados con cada problema. En los supuestos problemas que vamos a realizar vamos a centrarnos en la parte en la que nos aparecen triángulos esféricos ya que son el objeto de estudio de este trabajo.

8.1. NAVEGACIÓN ORTODRÓMICA

Una de las más útiles aplicaciones de la trigonometría esférica es el cálculo de triángulos esféricos sobre la superficie terrestre. Esto nos sirve para poder realizar navegaciones ortodrómicas o de círculo máximo, las cuales siguen la distancia más corta entre dos puntos. Para realizar estos cálculos vamos a utilizar el triángulo esférico que se forma con la unión del origen, el destino y el polo elevado. Este tipo de navegación ofrece una gran ventaja frente a la navegación loxodrómica (sin variar el rumbo) ya que disminuye la distancia que debemos navegar y, por tanto, el tiempo y combustible necesarios. A la hora de realizar cálculos de navegación necesitamos conocer varios conceptos para poder definir el triángulo esférico sobre el que vamos a trabajar.

8.1.1. Esfera terrestre

La Tierra es un objeto esférico ligeramente achatado por los polos y ensanchado por el ecuador. En los apartados anteriores tenemos una serie de fórmulas que funcionan solo cuando la esfera es perfecta, por ello para resolver problemas de navegación vamos a suponer que nuestro planeta es una esfera perfecta a la que llamaremos esfera terrestre. En la ilustración inferior podemos ver una representación de la esfera terrestre con sus puntos y líneas más importantes.

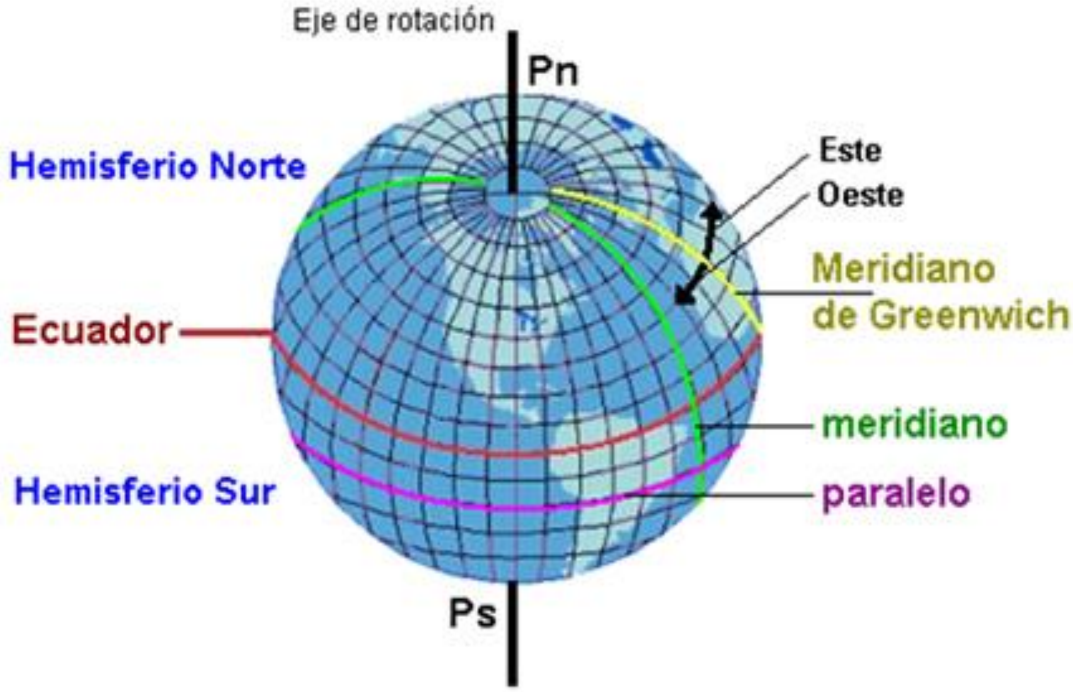

ILUSTRACIÓN 29: ESFERA TERRESTRE (FUENTE: MARALBORAN.ORG)

8.1.2. Coordenadas geográficas

Nos indican la situación de cualquier punto en la superficie terrestre. Esto es muy importante en navegación ya que en todos los casos vamos a situar a nuestro buque gracias a estas coordenadas. Previamente a explicar las coordenadas vamos a definir los puntos y líneas más importantes.

- Eje y Polos: Nuestro planeta se encuentra girando alrededor de un diámetro el cual llamamos eje de La Tierra. En los extremos de este eje, justo cuando corta a la superficie terrestre, tenemos el polo norte (PN) y el polo sur (PS). A este eje de La Tierra lo conocemos también como la línea de los polos.

- Ecuador (QQ´): Es el círculo máximo perpendicular a la línea de los polos. El ecuador divide a La Tierra en dos hemisferios llamados norte y sur, dependiendo de qué polo este en su centro. Como podéis ver, los polos están separados del ecuador 90º.

- Paralelos: Los paralelos son círculos menores de la esfera paralelos al ecuador. Tenemos infinitos paralelos, pero hay algunos que tienen un nombre especial como son los trópicos (de Cáncer en el hemisferio Norte y de Capricornio en el Sur), separados del ecuador 23º 27´, y los círculos polares (ártico en el polo Norte y antártico en el polo sur), que están separados de cada polo 23º 27´.

- Meridianos: Son círculos máximos que pasan por los polos y además son perpendiculares al ecuador. Entre todos los infinitos meridianos que podemos trazar, existen dos que tienen alta importancia que son el del lugar y el de Greenwich.

- Meridiano del lugar: Es el meridiano que pasa por el lugar en el que nos encontramos. Los polos dividen en dos partes al meridiano, siendo el meridiano superior del lugar (MSL) la parte en la cual nos encontramos y meridiano inferior del lugar la otra mitad. Por norma general cuando hablamos del meridiano del lugar solemos referirnos al superior.

- Meridiano de Greenwich (G): Es el meridiano denominado de origen ya que a partir de él se mide una de las coordenadas de La Tierra que es la Longitud. Se llama así porque pasa por el observatorio de la ciudad inglesa del mismo nombre. Al igual que con el meridiano del lugar el meridiano de Greenwich también es dividido en dos mitades por los polos. Normalmente al referirnos al meridiano de Greenwich estamos hablando de la parte del meridiano superior.

Una vez vistos los puntos y líneas más importantes de la esfera terrestre podemos empezar a estudiar las coordenadas geográficas o terrestres. Estas son la latitud y la Longitud. Para ello nos ayudaremos de la siguiente ilustración.

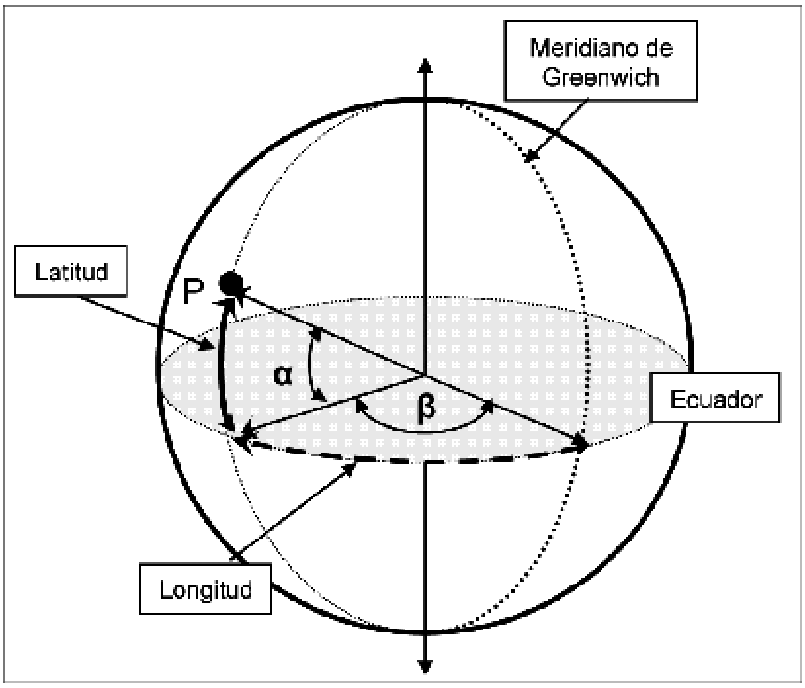

ILUSTRACIÓN 30: LATITUD Y LONGITUD (FUENTE: RESEARCHGATE.NET)

- Latitud (l): La latitud se define como el arco de meridiano medido desde el ecuador hasta el punto donde se encuentra el observador. Ésta siempre es menor de 90º y puede tener componente Norte o Sur, dependiendo en cuál de los dos hemisferios nos encontremos. En navegación a las latitudes norte se les da el signo positivo y a las latitudes sur el signo negativo. Dos puntos que tienen la misma latitud se encuentran en el mismo paralelo. En la ilustración correspondería con el ángulo α.

- Colatitud (c): Es el complemento de la latitud, es decir, se cumple lo siguiente: $c = 90º - l$. Debido a esto podemos definirla también como el arco de meridiano comprendido entre el observador y el polo del mismo nombre que la latitud. En la ilustración estaría comprendida entre el punto P y el polo superior.

- Longitud (L): Es el arco de Ecuador comprendido entre el meridiano de Greenwich y el meridiano superior del lugar. Su valor máximo es de 180º y tiene componente Este (L E) u Oeste (L W) dependiendo a qué lado del meridiano de Greenwich se ubique el meridiano superior del lugar, como podemos ver en la ilustración. En los cálculos de navegación las Longitudes Oeste son positivas y las Longitudes Este son negativas. Los puntos que tienen la misma Longitud se sitúan en el mismo meridiano (superior). En la ilustración 222 correspondería con el ángulo β. La Longitud también es igual al ángulo formado en el polo entre el meridiano superior de Greenwich y el meridiano superior del lugar.

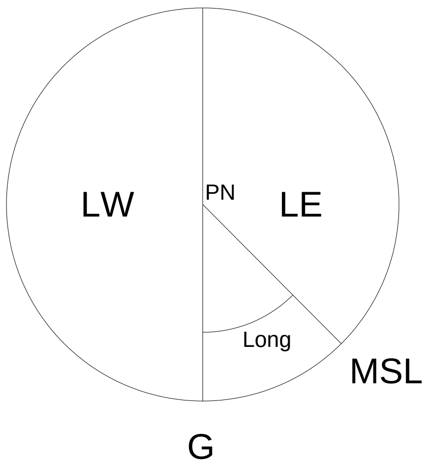

ILUSTRACIÓN 31: ESFERA TERRESTRE VISTA DESDE EL POLO (FUENTE: EL AUTOR)

Conociendo las dos coordenadas geográficas podemos situar cualquier punto en la esfera terrestre. Ahora pasaremos a estudiar la Diferencia de Latitud y la Diferencia de Longitud, que son dos conceptos muy importantes.

- Diferencia de Latitud (Δl): Se define como la longitud del arco meridiano que separa los paralelos en los que se encuentran los dos lugares. En el caso de que las dos latitudes tengan el mismo nombre (Norte o Sur), la diferencia de latitud será la diferencia numérica entre las dos latitudes. Por el contrario, si tienen distinto signo (Están en distinto hemisferio), el valor de la diferencia de latitud es la suma de los dos valores. Si tenemos en cuenta que las latitudes Norte son positivas y las Sur son Negativas, podemos calcular la diferencia de latitud haciendo la diferencia algebraica de ambas.

- Diferencia de Longitud (ΔL): Es el arco de ecuador más corto comprendido entre los dos meridianos superiores de los dos puntos geográficos. Coincide también con el ángulo formado en el polo por los dos meridianos. Si los dos lugares tienen longitudes de igual nombre, la diferencia de longitud es la diferencia entre los dos valores. Si tienen distinto nombre, la diferencia de longitud es igual a la suma de las longitudes. En el caso de que esta supere el valor de 180º, entonces se le restará a 360º y así obtener el valor verdadero. Recordando que las LW son positivas y las LE son negativas, la diferencia de longitud es la diferencia algebraica entre las dos.

- Milla marina: La milla marina es la unidad de longitud que se utiliza en la navegación. Se define como la longitud de un minuto de arco de meridiano y equivale a 1852 metros. En la navegación las velocidades se van a medir en nudos, que no es más que una milla por hora. Para pasar una distancia calculada en grados, minutos y segundos a millas debemos pasar todos los grados a minutos ya que, como hemos dicho anteriormente, un minuto equivaldrá a una milla náutica.

-

8.1.3. Rumbos

Puesto que uno de los principales objetivos de la navegación es la determinación del rumbo vamos a estudiar brevemente lo que es, cómo se cuenta y los distintos tipos que tenemos. El rumbo se define como el ángulo horizontal formado entre la línea proa-popa de nuestro barco con el meridiano que pasa por ese lugar. Podemos contarlo de dos formas:

- Rumbo circular: Se mide a partir del punto cardinal Norte de 0º a 360º en el sentido de las agujas del reloj.

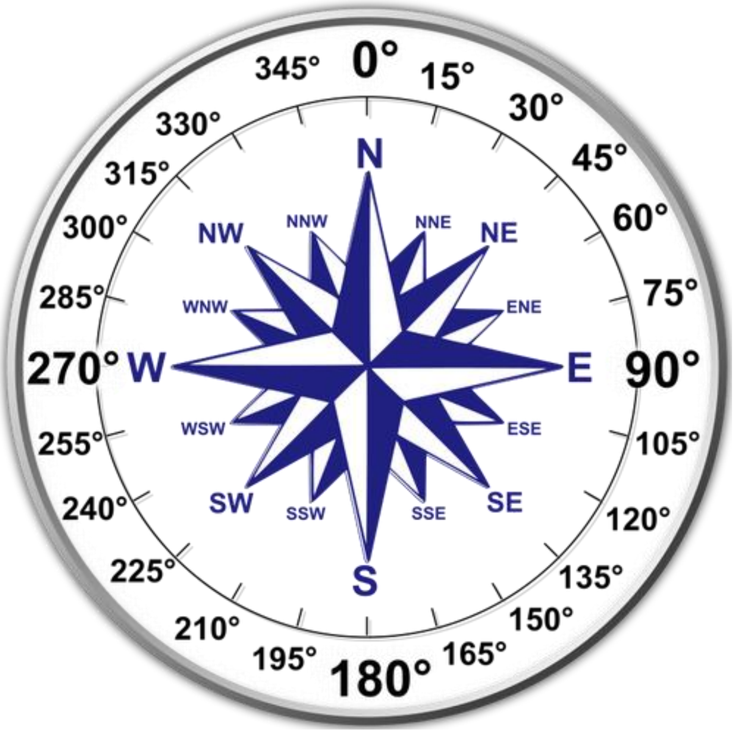

ILUSTRACIÓN 32: ROSA DE LOS VIENTOS CON RUMBOS CIRCULARES (FUENTE: PUBLICDOMAININVENTORS.ORG)

- Rumbo cuadrantal: Supongamos que dividimos una circunferencia en 4 cuadrantes. Los rumbos se cuentan de 0º a 90º desde el norte o el sur hacia el este u oeste, enunciándose en este orden. Por ejemplo, un rumbo circular de 150º sería en circulares S30E.

Tenemos varios tipos de rumbo dependiendo qué meridiano tomemos como referencia.

- Rumbo verdadero (Rv): Es el que tiene como referencia el meridiano geográfico o verdadero del lugar en el que nos encontremos. Este meridiano apuntará al Norte verdadero (Nv).
- Rumbo magnético (Rm): Tendrá como referencia el meridiano magnético del lugar. Este meridiano se separa del geográfico por un ángulo que conocemos como declinación magnética (dm) y se considera positivo si el Norte magnético (Nm) queda a la derecha del Nv, y negativo en caso contrario.
- Rumbo de aguja (Ra): Debido a que a bordo de un buque tenemos elementos metálicos que crean pequeños campos magnéticos, la aguja determinará el Norte de aguja (Na). El Na lo tenemos separado un cierto ángulo del Nm, que

es el desvío (Δ) y que será positivo si el Na está más a la derecha del Nm y negativo si queda a la izquierda.

La suma del desvío y la declinación magnética es la Corrección Total (CT) En la ilustración podemos ver las relaciones entre los distintos tipos de ángulos.

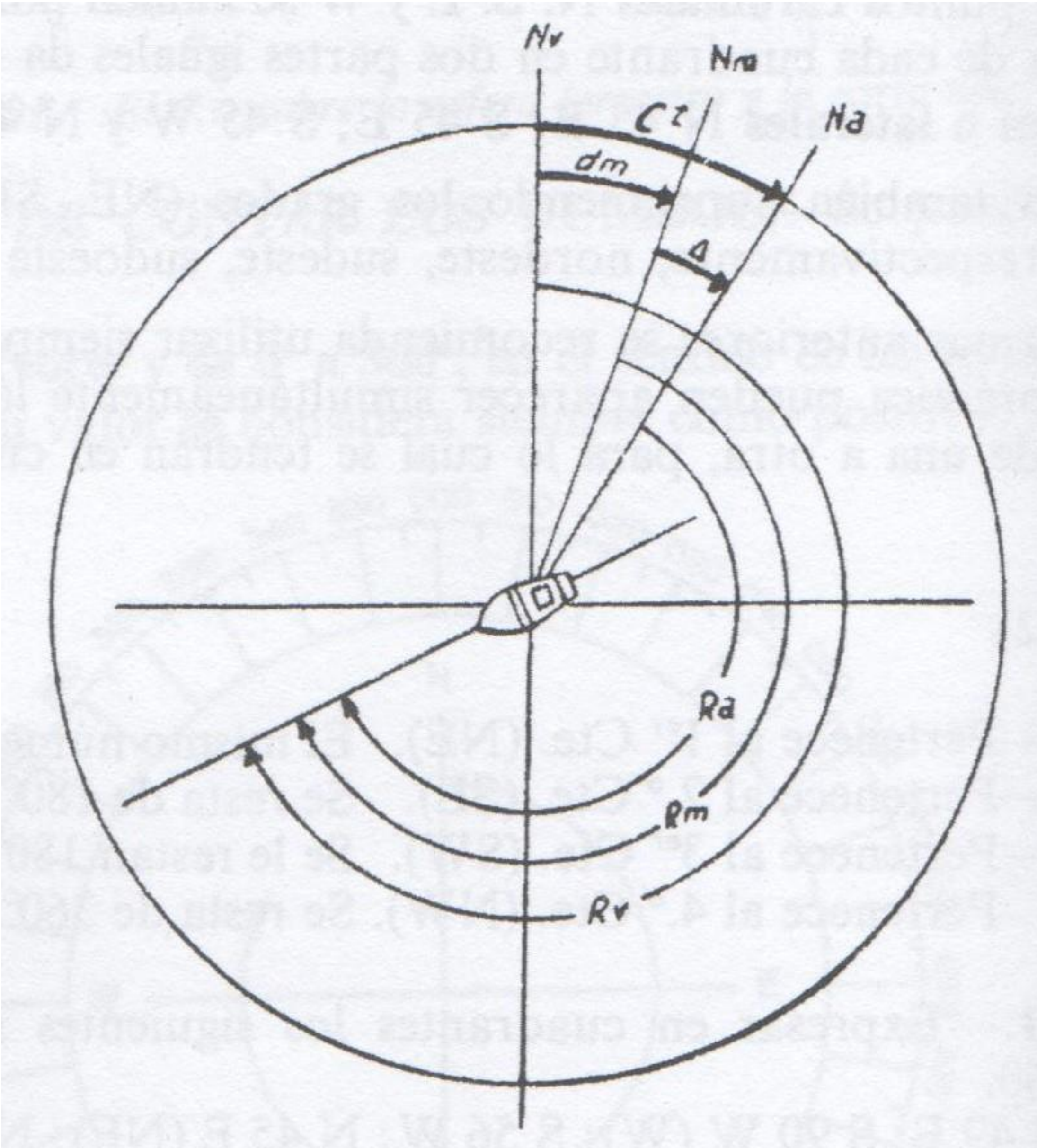

ILUSTRACIÓN 33: RELACIÓN ENTRE RUMBOS (FUENTE: MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

8.1.4. Triángulo esférico correspondiente

El triángulo sobre el que vamos a trabajar es, como hemos comentado anteriormente, el que se forma al unir la situación de origen, nuestro destino y el polo elevado. En la ilustración inferior tenemos una representación de cómo sería el triángulo esférico sobre el que realizaremos nuestros cálculos. Tomaremos como punto de origen el punto A y, por tanto, el punto B como destino final.

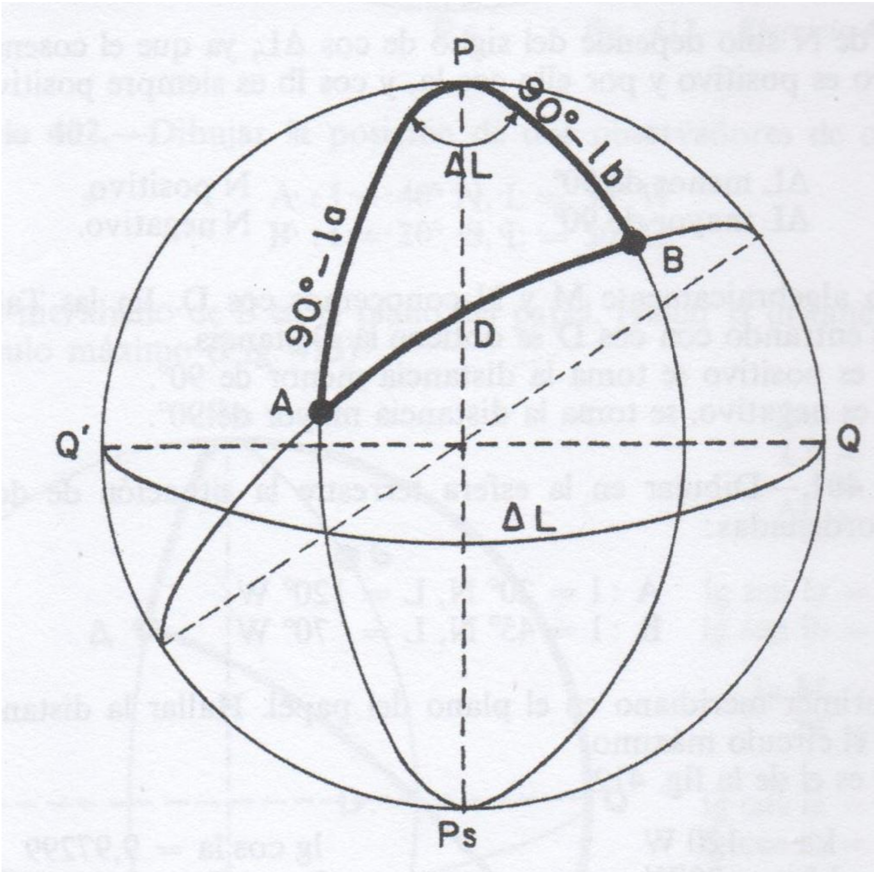

ILUSTRACIÓN 34:TRIÁNGULO ESFÉRICO CORRESPONDIENTE (FUENTE: MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

En este triángulo esférico los ángulos y los lados van a ser:

<u>Lados:</u>

- AP: Este lado tiene el valor de la Colatitud en A. $90º - la$
- BP: Este tiene el valor de la Colatitud en el punto B. $90º - lb$
- AB: Este lado es la distancia que vamos a navegar.

Ángulos:

- P: Es el ángulo en el polo y tendrá el valor de la ΔL.
- A: Este ángulo está relacionado con el rumbo inicial. En este caso el valor del ángulo será igual al rumbo.
- B: Este ángulo se relaciona con el rumbo final. En este caso tendremos que convertirlo.

En el triángulo ABP vamos a conocer los lados AP y BP y el ángulo en el polo P. Gracias a las fórmulas obtenidas anteriormente vamos a calcular cualquiera de los otros elementos de este triángulo esférico.

8.1.5. Problema supuesto

Queremos realizar una navegación por círculo máximo partiendo desde Lisboa (l = 38º 35´ N, L = 9º 18´ W) con destino a Miami (l´ = 25º 44´ N, L´ = 80º 08´ W). Nos piden:

- Calcular el rumbo inicial en Lisboa.
- Calcular la Distancia navegada.
- Coordenadas del punto a 1000 millas de Lisboa.

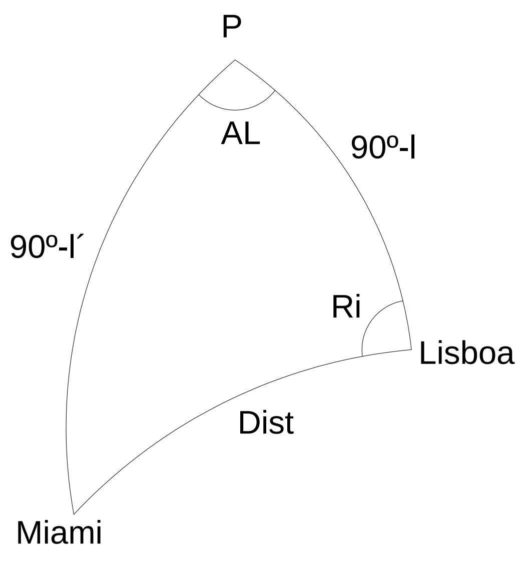

ILUSTRACIÓN 35: TRIÁNGULO CORRESPONDIENTE AL EJERCICIO (FUENTE: EL AUTOR)

Resolución por el método tradicional:

Del triángulo esférico que vamos a resolver tenemos las colatitudes de los dos puntos geográficos y la diferencia de longitud.

$$\Delta L = L' - L$$

$$\Delta L = 80^{o}\,08' - 9^{o}\,18'$$

$$\Delta L = 70^{o}\,50'$$

Para calcular el Rumbo inicial utilizaremos el teorema de la cotangente.

$$cotg\ a\ sen\ b = cos\ b\ cos\ C + sen\ C\ cotg\ A$$

$$cotg\ (90^{o} - l')\ sen\ (90^{o} - l) = cos(90^{o} - l)\ cos\ \Delta L + sen\ \Delta L\ cotg\ Ri$$

Sustituimos las razones trigonométricas como vimos en el apartado 4.2.

$$\tan l'\ \ cos\ l = sen\ l\ cos\ \Delta L + sen\ \Delta L\ cotg\ Ri$$

Despejamos Ri.

$$cotg\ Ri = \frac{tan\ l'\ \ cos\ l}{sen\ \Delta L} - \ sen\ l\ cotg\ \Delta L$$

Sustituimos en la fórmula obtenida por los datos de nuestro problema.

$$cotg\ Ri = \frac{tan\ 25^{o}\ 44'\ \ cos\ 38^{o}\ 35'}{sen\ 70^{o}\ 50'} - \ sen\ 38^{o}\ 35'\ cotg\ 70^{o}\ 50'$$

Vamos a llamar “A” a la primera parte de la ecuación y “B” a la segunda.

$$A = \frac{tan\ 25^{o}\ 44'\ \ cos\ 38^{o}\ 35'}{sen\ 70^{o}\ 50'} = 0.3988788304$$

$$B = sen\ 38^{o}\ 35'\ cotg\ 70^{o}\ 50' = 0.2167719428$$

$$Ri = 79^{o}\ 40'\ 45''$$

Lo que hemos obtenido aquí es el rumbo en cuadrantal. Gracias a la figura del triángulo esférico nos damos cuenta de que su componente es NW, por tanto, el Rumbo inicial será:

$$\boldsymbol{Ri = N\ 79º\ 40'\ 45''\ W}$$

Pasándolo a circular obtendríamos:

$$Ri = 360º - 79º\ 40'\ 45'' = 280º\ 19'\ 15''$$

Ahora calcularemos la distancia navegada en millas. Para ello utilizaremos el teorema del coseno.

$$cos\ a = cos\ b\ cos\ c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A$$

$$cos\ D = cos(90 - l)\ \ cos(90º - l') + sen\ (90º - l)\ sen\ (90º - l')\ cos\ \Delta L$$

Sustituimos como al calcular el rumbo inicial.

$$cos\ D = sen\ l\ \ sen\ l' + cos\ l\ cos\ l'\ cos\ \Delta L$$

Al tener despejado ya D solo nos queda sustituir y calcular.

$$cos\ D = sen\ 38º\ 35'\ \ sen\ 25º\ 44' + cos\ 38º\ 35'\ cos\ 25º\ 44'\ cos\ 70º\ 50'$$

$$A = sen\ 38º\ 35'\ \ sen\ 25º\ 44' = 0.270779346$$

$$B = \ cos\ 38º\ 35'\ cos\ 25º\ 44'\ cos\ 70º\ 50' = 0.2311931735$$

$$D = 59º\ 52'\ 10''$$

Pasamos esta distancia a millas.

$$\boldsymbol{D = 59º\ 52'\ 10'' * 60 = 3592.1648\ millas}$$

Ahora debemos obtener las coordenadas de un punto situado a 1000 millas. En este caso nuestro triángulo esférico será distinto y conoceremos otros datos. En este triángulo sabremos la colatitud de salida, el rumbo inicial y la distancia navegada.

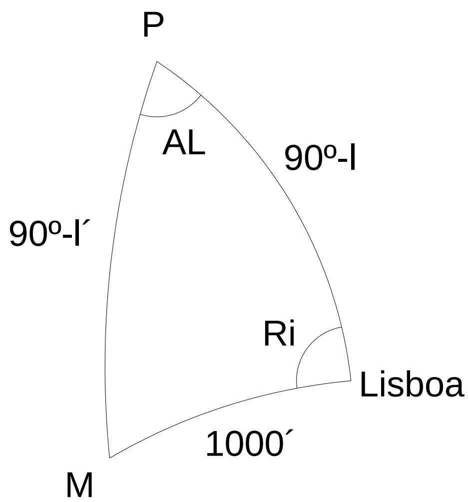

ILUSTRACIÓN 36: SEGUNDO TRIÁNGULO CORRESPONDIENTE AL EJERCICIO (FUENTE: EL AUTOR)

Empezaremos calculando la latitud del punto M. En este caso utilizaremos el teorema del coseno.

$$cos\ a = cos\ b\ cos\ c + sen\ b\ sen\ c\ cos\ A$$

$$cos(90º - l´) = cos(90 - l)\ \ cos\ \ D + sen\ (90º - l)\ sen\ D\ cos\ Ri$$

Sustituiremos las razones trigonométricas como en los apartados anteriores.

Como la distancia la tenemos en millas la debemos pasar a grados y eso se consigue dividiendo entre 60.

$$\frac{D}{60} = 16º\ 40´$$

$$sen\ l´ = sen\ l\ \ cos\ \ D + cos\ l\ sen\ D\ cos\ Ri$$

Solo nos queda sustituir por nuestros datos y calcular.

$$sen\ l´ = sen\ 38º\ 35´\ \ cos\ \ 16º\ 40´ + \cos 38º\ 35´\ sen\ 16º\ 40´\ cos\ 79º\ 40´\ 45´´$$

$$A = sen\ 38º\ 35´ \cos 16º\ 40´ = 0.5974523007$$

$$B = \cos 38º\ 35´\ sen\ 16º\ 40´\ cos\ 79º\ 40´\ 45´´ = 0.0401667009$$

$$l´ = 39º\ 36´\ 52´´$$

Ahora calcularemos la Longitud. Primero obtendremos la diferencia de Longitud y luego obtendremos el valor para el punto M. Utilizaremos el teorema de la cotangente.

$$cotg\ a\ sen\ b = cos\ b\ cos\ C + sen\ C\ cotg\ A$$

$$cotg\ D\ sen\ (90º - l) = cos(90º - l)\ cos\ Ri + sen\ Ri\ cotg\ \Delta L$$

Procedemos de igual manera que anteriormente, sustituyendo para facilitar los cálculos y despejando ΔL.

$$cotg\ D\ cos\ l = sen\ l\ cos\ Ri + sen\ Ri\ cotg\ \Delta L$$

$$cotg\ \Delta L = \frac{cotg\ D\ \ cos\ l}{sen\ Ri} - \ sen\ l\ cotg\ Ri$$

Introducimos nuestros datos en la fórmula.

$$cotg\ \Delta L = \frac{cotg\ 16º\ 40´\ \ cos\ 38º\ 35´}{sen\ 79º\ 40´\ 45´´} - \ sen\ 38º\ 35´\ cotg\ 79º\ 40´\ 45´´$$

$$A = \frac{cotg\ 16º\ 40´\ \ cos\ 38º\ 35´}{sen\ 79º\ 40´\ 45´´} = 2.654008207$$

$$B = sen\ 38º\ 35´\ cotg\ 79º\ 40´\ 45´´ = 0.1135710907$$

$$\Delta L = 21º\ 29´\ 10´´$$

Como nos desplazamos hacia el W y tenemos una Longitud inicial W entonces tenemos que sumarle este valor a la longitud de salida.

$$L´ = L + \Delta L$$

$$L´ = 9º\ 18´ + 21º\ 29´\ 10´´ = 30º\ 47´\ 10´´$$

El punto M situado a 1000 millas de Lisboa será:

$$\boldsymbol{l´ = 39º\ 36´\ 52´´\ N}$$

$$\boldsymbol{L´ = 30º\ 47´\ 10´´\ W}$$

Resolución por la trigonometría racional:

Tenemos los datos de la coordenadas de los dos puntos. Les dejaremos por aquí.

Lisboa (l = 38º 35´ N, L = 9º 18´ W)

Miami (l´ = 25º 44´ N, L´ = 80º 08´ W)

El primer paso que debemos realizar es convertir nuestros ángulos a spreads con la ayuda de una calculadora. Aunque puede que nos dé lugar a más error vamos a utilizar 6 decimales. Recordad que para calcular el spread tenemos que calcular el valor del seno al cuadrado.

Lisboa:

$$l = 38º35´\,N \;\rightarrow q = 0.388942\ (lat)$$

$$L = 9º18´\,W \;\rightarrow S = 0.026116\ (long)$$

Miami:

$$l´ = 25º44´\,N \;\rightarrow q´ = 0.188515\ (lat)$$

$$L´ = 80º08´\,W \;\rightarrow S´ = 0.970637\ (long)$$

Mientras que las longitudes sí son spreads al uso, las latitudes son quadrances convertidos que funcionan como spreads. Hay que tener muy en cuenta esto ya que en la trigonometría racional esférica solo nos aparecen spreads.

Una vez tenemos estos datos pasaremos a calcular la diferencia de longitud gracias a la fórmula del triple spread. Llamaremos s_p al spread correspondiente a la diferencia de longitud ya que será el ángulo en el polo.

$$(S_1 + S_2 + S_3)^2 = 2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + 4S_1S_2S_3$$

$$(S + S´ + S_p)^2 = 2\left(S^2 + S´^2 + S_p^2\right) + 4S\,S´S_p$$

Sustituimos por nuestros valores y vamos calculando

$$(0.026 + 0.97 + S_p)^2 = 2\left(0.026^2 + 0.97^2 + S_p^2\right) + 4 * 0.026 * 0.97 * S_p$$

$$(0.996 + S_p)^2 = 2\left(0.943 + S_p^2\right) + 0.101S_p$$

$$S_p^2 + 1.993S_p + 0.993 = 1.886 + 2S_p^2 + 0.101S_p$$

$$S_p^2 - 1.892S_p + 0.892 = 0$$

Calculamos la ecuación de segundo grado

$$S_p = \frac{1.892 \pm \sqrt{3.58 - 4 * 0.892}}{2}$$

$$S_p = \frac{1.892 \pm 0.108}{2}$$

Obtenemos para P los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{S_p = 0.892207}$$

$$S_p = 0.999902$$

Como las longitudes tienen el mismo signo entonces habría que restarlas, siendo el valor correcto el primero ya que está entre los dos valores. Una vez tenemos este spread vamos a ver el triángulo esférico en cuestión.

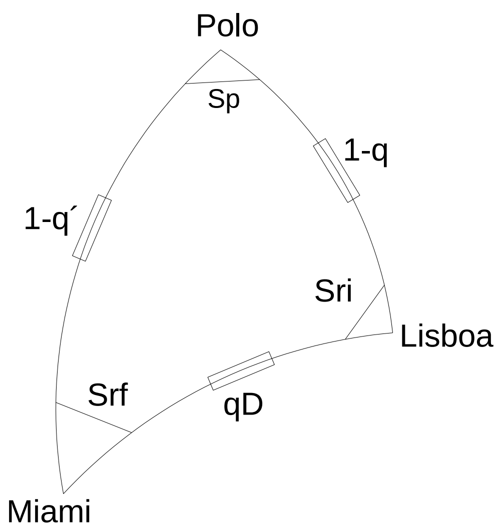

ILUSTRACIÓN 37: TRIÁNGULO CORRESPONDIENTE AL EJERCICIO DE TRIG. RACIONAL (FUENTE: EL AUTOR)

Los dos lados conocidos del triángulo esférico son:

$$1 - q = 1 - 0.388942 = 0.611058$$

$$1 - q' = 1 - 0.188515 = 0.811485$$

Primero vamos a calcular la distancia navegada gracias a la cross spherical law.

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

Sustituimos nuestros datos y operamos

$$(S_P(1 - q)(1 - q') - q_D - (1 - q) - (1 - q') + 2)^2 = 4\,(1 - q_D)q\,q'$$

$$(0.892 * 0.611 * 0.811 - q_D - 0.611 - 0.811 + 2)^2 = 4(1 - q_D)0.389 * 0.189$$

$$(0.442 - q_D + 0.577)^2 = 4\,(1 - q_D)0.389 * 0.189$$

$$(1.019 - q_D)^2 = 0.293\,(1 - q_D)$$

$$q_D^2 - 2.0397q_D + 1.04 = 0.293 - 0.293q_D$$

$$q_D^2 - 1.746q_D + 0.747 = 0$$

Una vez tenemos la ecuación de segundo grado la resolvemos como ya hemos hecho

$$q_D = \frac{1.746 \pm \sqrt{3.05 - 4 * 0.747}}{2}$$

$$q_D = \frac{1.746 \pm 0.25}{2}$$

Obtenemos los siguientes resultados

$$q_D = 0.998$$

$$\boldsymbol{q_D = 0.748}$$

El resultado verdadero es el segundo ya que al pasarlo a grados obtenemos una distancia de

$$\boldsymbol{q_D = 0.748 \rightarrow D = 59º\,52'\,10'' * 60 = 3592.1648\, millas}$$

Exactamente la misma que con el método anterior.

Ahora pasaremos a calcular el rumbo inicial con la spread spherical law. Para ello utilizaremos el valor del spread relacionado con la distancia que acabamos de calcular.

$$\frac{S_1}{q_1} = \frac{S_2}{q_2} = \frac{S_3}{q_3}$$

$$\frac{S_P}{q_D} = \frac{S_{Ri}}{1 - q´}$$

$$\frac{0.892}{0.748} = \frac{S_{Ri}}{0.811}$$

$$S_{Ri} = \frac{0.892}{0.748} * 0.811$$

$$\boldsymbol{S_{Ri} = 0.968}$$

Al pasar este spread relacionado con el rumbo inicial a grados tenemos que el ángulo del triángulo esférico será

$$Ri = 79º\ 40´\ 46´´$$

Que traducido a rumbo cuadrantal nos queda

$$\boldsymbol{Ri = N\ 79º\ 40´\ 46´´\ W}$$

Prácticamente el mismo que el obtenido en el apartado anterior.

Ahora pasaremos a calcular las coordenadas del punto situado a 1000 millas de Lisboa. Vamos a pasar las 1000 millas a grados y posteriormente a calcular el spread correspondiente.

$$\frac{D}{60} = 16º\ 40´ \rightarrow q_D = 0.082$$

Vamos a dibujar el triángulo esférico nuevo y veremos qué datos tenemos y cuáles no. Tenemos que calcular con las fórmulas de la trigonometría racional el Sp y el q´ para obtener las coordenadas del punto M.

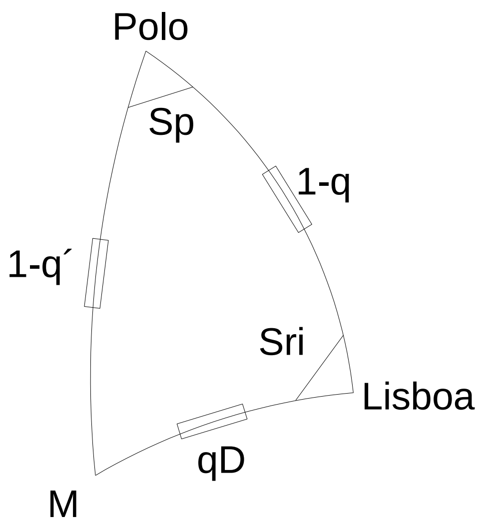

ILUSTRACIÓN 38: SEGUNDO TRIÁNGULO CORRESPONDIENTE AL EJERCICIO DE TRIG. RACIONAL (FUENTE: EL AUTOR)

Empezaremos calculando la latitud del punto M gracias a la cross spherical law

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3)$$

Sustituimos nuestros datos y calculamos.

$$(S_{ri}(1-q)q_D - (1-q´) - (1-q) - q_D + 2)^2 = 4\,q´q(1-q_D)$$

$$(0.968 * 0.611 * 0.082 - (1-q´) - 0.611 - 0.082 + 2)^2 = 4q´ * 0.389(1-0.082)$$

$$(0.049 - 1 + q´ + 1.307)^2 = 4q´ * 0.389 * 0.918$$

$$(0.355 + q´)^2 = 1.428q´$$

$$q´^2 + 0.711q´ + 0.126 = 1.428q´$$

$$q´^2 - 0.717q´ + 0.126 = 0$$

Realizamos la ecuación de segundo grado como otras tantas veces hemos hecho.

$$q´ = \frac{0.717 \pm \sqrt{0.514 - 4 * 0.126}}{2}$$

$$q´ = \frac{0.717 \pm 0.096}{2}$$

Los dos resultados que nos da la ecuación son:

$$\boldsymbol{q' = 0.407}$$

$$q' = 0.311$$

Aquí podríamos tener dudas en cuál de los resultados es el correcto, pero comparándolo con el resultado obtenido anteriormente nos damos cuenta de que el correcto es el primero. También es un resultado más lógico ya que solo hemos recorrido 1000 millas de las 3600 que son el viaje total.

$$\boldsymbol{q' = 0.407 \rightarrow l' = 39º36'52''}$$

Pasemos ahora a calcular la diferencia de longitud para, posteriormente, poder calcular la longitud del punto M. Para ello utilizaremos la spread spherical law.

$$\frac{S_1}{q_1} = \frac{S_2}{q_2} = \frac{S_3}{q_3}$$

$$\frac{S_{ri}}{1 - q'} = \frac{S_p}{q_D}$$

Sustituimos nuestros datos en la fórmula y calculamos

$$\frac{0.968}{0.593} = \frac{S_p}{0.082}$$

$$S_p = \frac{0.968}{0.593} * 0.082$$

$$S_p = 0.134$$

Teniendo el spread correspondiente a la diferencia de longitud ahora tenemos que utilizar la triple spread law para obtener la longitud deseada.

$$(S_1 + S_2 + S_3)^2 = 2(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) + 4S_1S_2S_3$$

$$(S + S' + S_p)^2 = 2\left(S^2 + S'^2 + S_p^2\right) + 4S\,S'S_p$$

Sustituimos y operamos

$$(0.026 + S' + 0.134)^2 = 2(0.026^2 + S'^2 + 0.134^2) + 4 * 0.026 * S' * 0.134$$

$$(0.16 + S')^2 = 2(0.019 + S'^2) + 0.014S'$$

$$S'^2 + 0.321S' + 0.026 = 0.037 + 2S'^2 + 0.014S'$$

$$S'^2 - 0.307S' + 0.012 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$S' = \frac{0.307 \pm \sqrt{0.094 - 4 * 0.012}}{2}$$

$$S' = \frac{0.307 \pm 0.217}{2}$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$$\boldsymbol{S' = 0.262}$$

$$S' = 0.045$$

El resultado tiene que estar entre 8º y 80º. Puesto que hemos recorrido entre un tercio y un cuarto del viaje la respuesta más lógica es la primera que es

$$\boldsymbol{S' = 0.262 \rightarrow L' = 30º47'11''}$$

Con ambos métodos hemos conseguido resultados similares. Cierto es que con el primer método no hay esa ambigüedad de resultados al no tener operaciones de segundo grado, pero en cuanto a eficacia hemos comprobado que la trigonometría racional es un método fiable para este tipo de problemas.

8.2. POSICIONAMIENTO ASTRONÓMICO

Desde hace siglos los marinos de antiguas civilizaciones se han guiado en sus rutas a través de las estrellas gracias a una ciencia llamada astronomía. La parte o rama de la astronomía que nos interesa como navegantes es la parte de la astronomía de posicionamiento, que estudia las posiciones aparentes en las que vemos los astros para poder determinar la posición de nuestro buque. Estos astros de los que hablamos son todos los cuerpos que vemos durante la noche en el firmamento, siendo por lo general estrellas o planetas. También podemos llegar a utilizar dos astros incluso de día que son la Luna y el Sol.

En este problema utilizaremos un triángulo esférico muy importante llamado el triángulo de posición. Este triángulo de posición lo vamos a tener dibujado en la esfera celeste y sus tres vértices van a ser el Cenit, el Polo elevado y un astro. Todos estos conceptos van a ser definidos más adelante para así poder realizar el problema en cuestión.

8.2.1. Esfera celeste.

A la hora de ponernos a observar los astros del universo nos damos cuenta de que todos se encuentran a unas distancias enormes, unos más lejos que otros. El observador desde la Tierra no distingue las distancias a la que están estos astros, sino que parece que todos están a la misma distancia dibujados sobre una esfera de radio arbitrariamente grande. Esta aparente esfera la conocemos como esfera celeste y la vamos a utilizar para la resolución de los problemas de navegación astronómica.

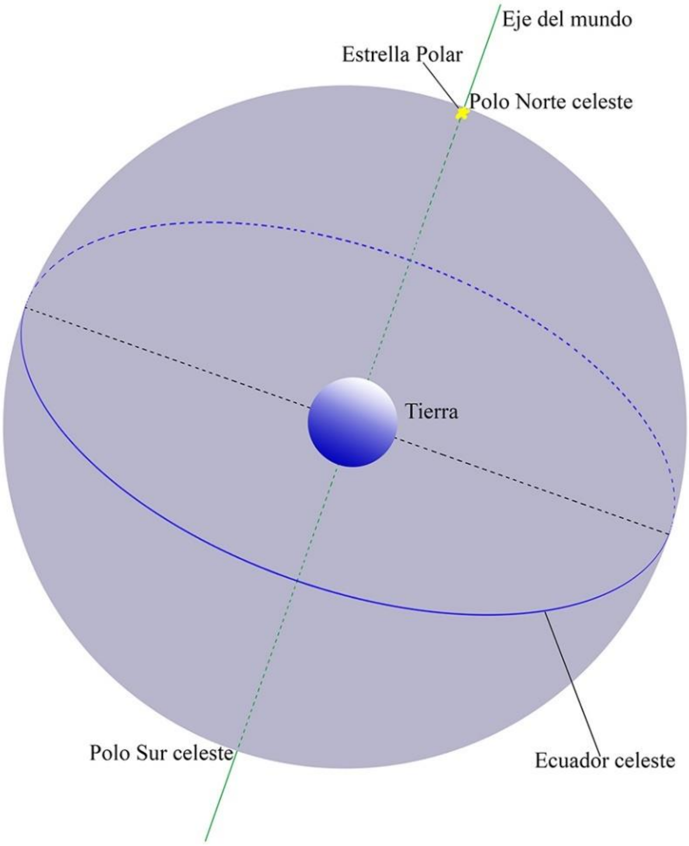

ILUSTRACIÓN 39: ESFERA CELESTE (FUENTE: ASTRONOMIAPARATODOS.COM)

8.2.2. Líneas de referencia.

Al igual que en la esfera terrestre, la esfera celeste también tiene varios puntos y líneas muy importantes, siendo muchos de ellos proyecciones de la esfera terrestre sobre la celeste.

- Polos celestes: Si prolongamos el eje de rotación terrestre hasta el infinito, éste cortará a la esfera celeste en dos puntos que son los polos de la esfera celeste que, además, reciben el mismo nombre que los polos terrestres, Norte y Sur. Siempre vamos a tener uno de ellos sobre el horizonte, es decir, situado en el cielo al cual llamaremos polo elevado. El otro polo que se encuentra bajo el horizonte y, por tanto, no podemos ver, se llama polo depreso. El polo elevado siempre va a tener el mismo nombre de la latitud en la que se encuentra el observador, por ejemplo, en el hemisferio norte el polo elevado será el polo norte.

- Línea Cenit-Nadir: Es una línea imaginaria que pasa por el observador, por el centro de la Tierra y por las antípodas. Si esta línea la prolongamos hasta que corte a la esfera celeste tendremos el Cenit (Z) sobre nuestras cabezas, y el Nadir (Z´) en la parte opuesta de la esfera.

- Ecuador celeste: Es el círculo máximo de la esfera celeste que contiene al plano formado por el ecuador terrestre. Al igual que en la esfera terrestre es perpendicular al eje de la Tierra y divide a la esfera celeste en dos hemisferios del mismo nombre que el polo que se encuentra en su centro. También podemos definirlo como la proyección del ecuador terrestre sobre la esfera celeste.

- Horizonte: El horizonte es otro círculo máximo formado por la intersección de la esfera celeste y el plano perpendicular a la línea Zenit-Nadir que además pasa por el centro de la esfera terrestre.

- Meridiano del Lugar: Se forma por la intersección del plano que contiene al meridiano del lugar terrestre con la esfera celeste. Los polos nos lo van a dividir en dos partes, el meridiano superior y el inferior, siendo el primero muy importante ya que es fundamental para calcular la Longitud Geográfica. En los dibujos solemos trazarle sobre el papel por la facilidad a la hora de dibujar los demás puntos y líneas.

- Meridiano de Greenwich: Para contar una de las coordenadas geográficas como es la Longitud, vamos a necesitar definir un origen. Este origen es el meridiano de Greenwich, meridiano Cero o primer meridiano. Se forma por la intersección del plano que contiene al meridiano de Greenwich terrestre con la esfera celeste.

- Paralelos: Los paralelos, al igual que en la esfera terrestre, son círculos menores paralelos al ecuador. Estos círculos menores son perpendiculares a todos los círculos horarios y los cortan en 2 puntos. También son conocidos por paralelos de declinación ya que siguiendo estos círculos se mueven aparentemente los astros (más tarde veremos que es la declinación).

- Círculo horario: Los círculos horarios son círculos máximos de la esfera celeste que pasan por ambos polos celestes. Estos círculos horarios sustituyen a los meridianos en la esfera celeste (son perpendiculares al ecuador), aunque tenemos dos excepciones que son el meridiano del lugar y el de Greenwich. Generalmente tenemos los círculos horarios de un astro, que pasan por los polos y por el centro del astro en cuestión.

- Vertical: Llamamos verticales a los círculos máximos que pasan por el Zenit y el Nadir y, además, son perpendiculares al horizonte. Cada astro en un instante dado tiene un círculo vertical que lo contiene. Se llama vertical primario al vertical que pasa por los puntos cardinales E y W, que además es perpendicular al meridiano del lugar.

- Almicantarat: Los definimos como círculos menores paralelos al horizonte. Éstos son perpendiculares a los verticales y cortan al meridiano del lugar y al de Greenwich en dos puntos.

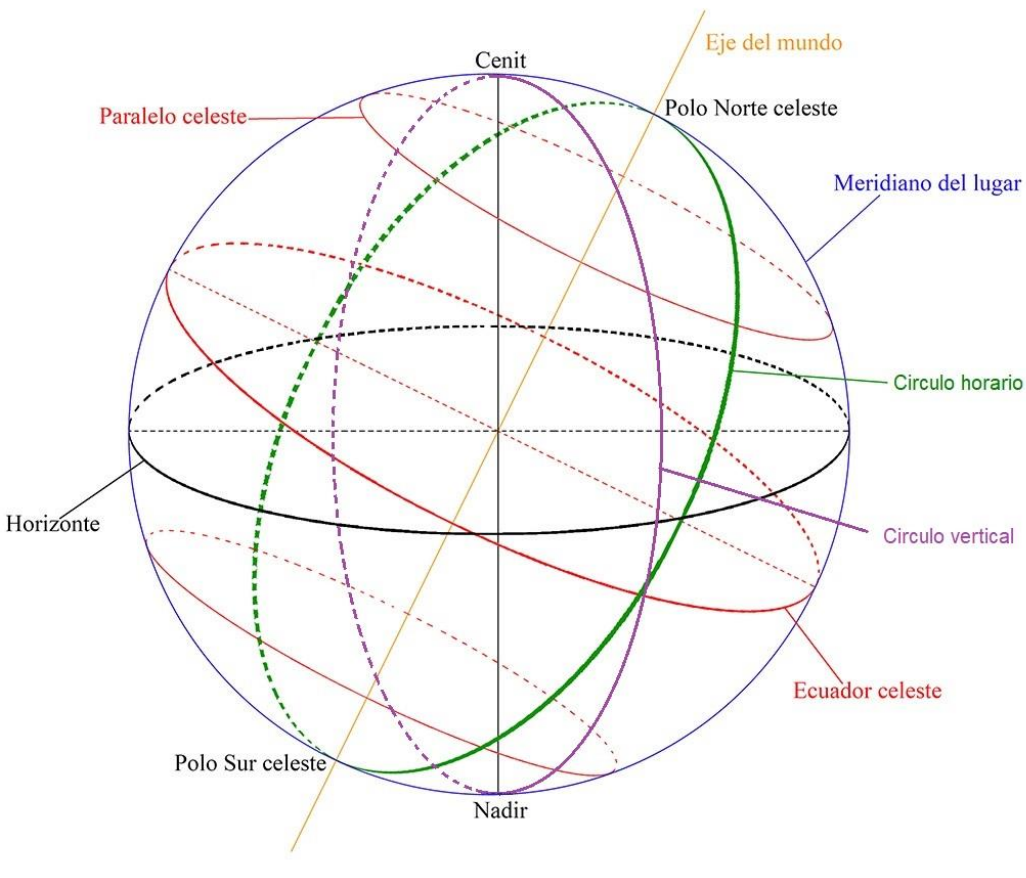

ILUSTRACIÓN 40: ESFERA CELESTE, LÍNEAS Y PUNTOS (FUENTE: ASTRONOMIAPARATODOS.COM)

8.2.3. Coordenadas celestes.

Podemos situar un punto en el espacio basándonos en dos sistemas de coordenadas: Las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares o esféricas. Las primeras determinan la posición de un punto en el espacio por las coordenadas X, Y y Z, es decir, por tres distancias desde un origen. Por otra parte, las polares o esféricas sitúan a cualquier punto gracias a dos ángulos y la distancia del origen. En la astronomía de posicionamiento nos interesa obtener la dirección en la que vemos a un astro, por tanto, vamos a necesitar un sistema que no nos hable de distancias y ese es, omitiendo la distancia, el sistema de coordenadas esférico.

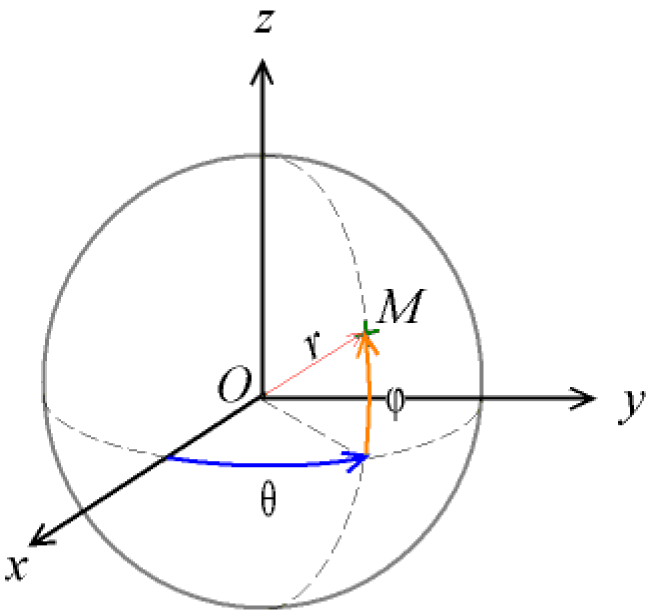

ILUSTRACIÓN 41: COORDENADAS ESFÉRICAS (FUENTE: YEPEZCINTHYA.BLOGSPOT.COM)

Ya sabemos que el tipo de coordenadas que vamos a utilizar van a ser la medida de dos ángulos, pero nos falta otra cosa muy importante que son el origen de coordenadas y el plano de referencia.

- Origen de coordenadas: Este punto del espacio nos indicará cuál es el centro de nuestra esfera celeste. Puede ser el centro del sol, dándonos lugar a un sistema eclíptico; el centro de la Tierra, obteniendo un sistema geocéntrico; o la posición del observador que nos dará un sistema local de coordenadas o sistema topocéntrico. Para nosotros el origen siempre va a estar en la situación del observador.

- Plano de referencia: Es el círculo máximo perpendicular al eje vertical de la esfera celeste. Teniendo en cuenta los sistemas de coordenadas que nos interesan vamos a tener dos planos de referencia distintos.

  Plano de referencia: el horizonte → Coordenadas horizontales.

  Plano de referencia: el ecuador → Coordenadas horarias.

8.2.3.1. Coordenadas horizontales.

Se cuentan en los círculos máximos perpendiculares entre sí que son el horizonte y vertical del astro y estas son el Azimut (Z) y la altura (a). Este sistema de coordenadas depende de la posición del observador por contarse en el horizonte y el vertical, que varían en función de nuestra situación.

- Azimut: Es el arco de horizonte contado desde uno de los puntos cardinales norte o sur hasta el vertical del astro. Como podemos ver en la ilustración inferior tenemos tres tipos de azimuts distintos.
  - Azimut Náutico: Se cuenta siempre desde el punto cardinal Norte hacia el Este (sentido horario) hasta el vertical. Su valor está comprendido entre 0º y 360º. En la figura → Z = 250º.
  - Azimut cuadrantal: Se cuenta desde el norte o el sur hacia el este u oeste hasta el vertical del astro. Se cuenta hasta 90º y se nombra primero el punto cardinal desde donde empezamos seguido del valor del azimut y al final el otro punto cardinal al que nos dirigimos, al igual que con los rumbos. En la figura → Z = S70W.
  - Azimut astronómico: Contado desde el punto norte o sur que coincida con nuestra latitud hasta el vertical del astro. Siempre es menor de 180º y se indicará si es oriental u occidental, dependiendo si contamos hacia E u W respectivamente. En la figura → Za = 110 W. A este azimut también se le llama ángulo cenital, que es uno de los ángulos que utilizaremos en el triángulo de posición.

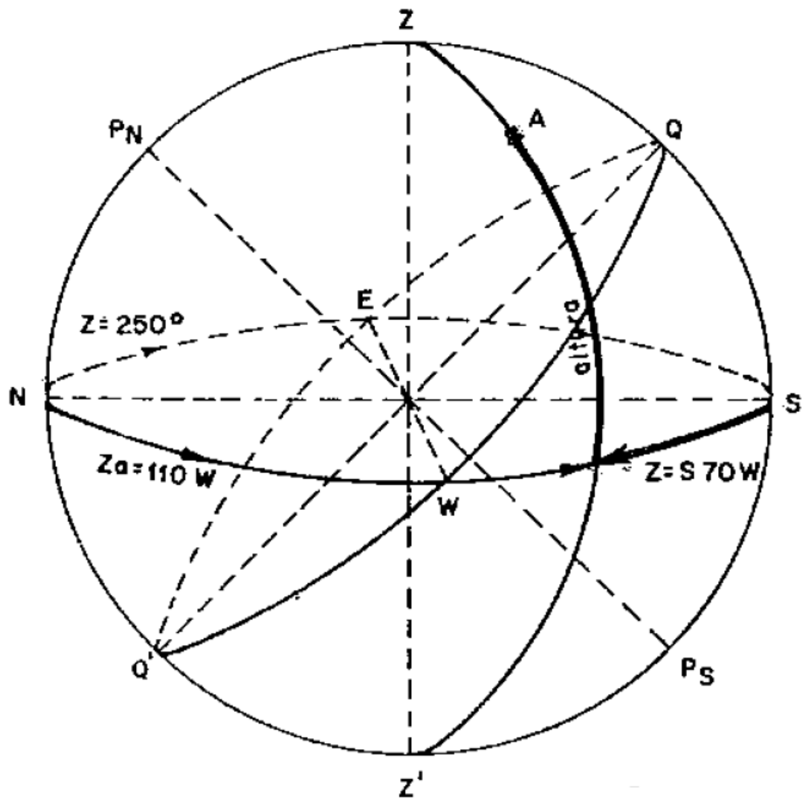

ILUSTRACIÓN 42: COORDENADAS HORIZONTALES (FUENTE: MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

- Altura: La altura es el arco de vertical contado desde el horizonte hasta el astro, siendo siempre menor de 90º. Suele ser positiva ya que los astros con altura negativa quedarían por debajo del horizonte no siendo visibles para nosotros. Los astros con la misma altura están en el mismo almicantarat.
- Distancia cenital (z): Es el arco de vertical contado desde el cenit hasta el astro. Para los astros visibles es el complementario de la altura. $z = 90º - a$.

8.2.3.2. Coordenadas horarias.

En este sistema de coordenadas los círculos máximos que vamos a utilizar para medir son el Ecuador y el círculo horario del astro. Estas son el horario y la declinación. A diferencia que las anteriores, estas coordenadas si son independientes al observador.

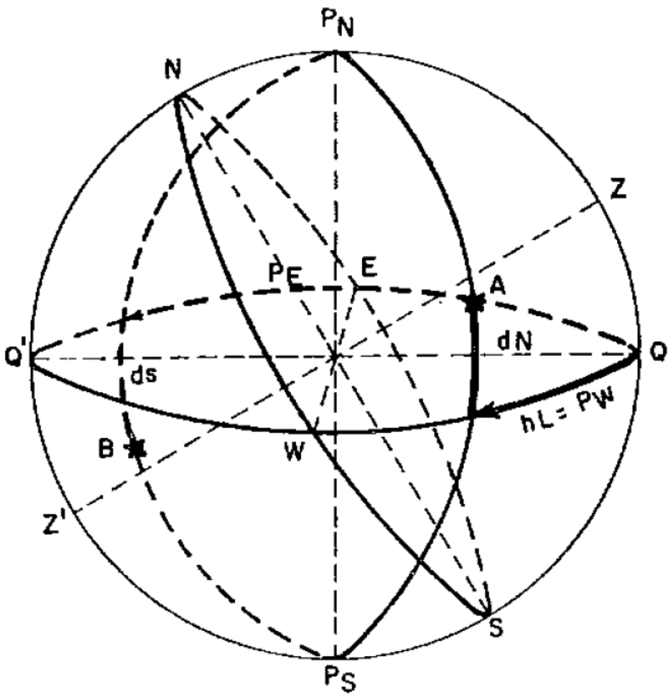

ILUSTRACIÓN 43: COORDENADAS HORARIAS (FUENTE: MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

- Horario del lugar (hL): Es el arco de ecuador contado hacia el W desde el MSL hasta el círculo horario del astro y se cuenta hasta 360º. Podemos contar este ángulo de 0º a 180º indicando si es oriental u occidental (E u W). Este ángulo es igual al ángulo en el polo (P) y lo necesitaremos para resolver nuestro triángulo de posición. Puesto que ésta coordenada varía en función de la posición del observador vamos a necesitar el horario de Greenwich para nuestros cálculos.
- Horario de Greenwich (hG): Se define como el arco de ecuador contado desde el meridiano superior de Greenwich hasta el círculo horario del astro. Este, al no variar con la posición, será el mismo para todos los observadores y nos lo facilita el almanaque náutico para el Sol, la Luna, Aries y planetas. Para pasar de hG a hL necesitamos la siguiente fórmula: $hG = hL + L$. Teniendo en cuenta que las LW son positivas y LE negativas.
- Aries (Y): En la esfera celeste tenemos un punto fijo imaginario que nos sirve para posicionar estrellas y planetas sobre la esfera celeste. Gracias a que el almanaque náutico nos da el horario de Aries en Greenwich, vamos a poder situar cualquier astro. Para ello vamos a necesitar otro concepto más que veremos a continuación.

- Angulo sidéreo (As): Es el arco de ecuador contado desde el punto Aries hasta el círculo horario del astro contado de 0º a 360º en sentido horario. Esta coordenada al ser independiente del observador nos la da el almanaque náutico para las estrellas ya que prácticamente no varía.

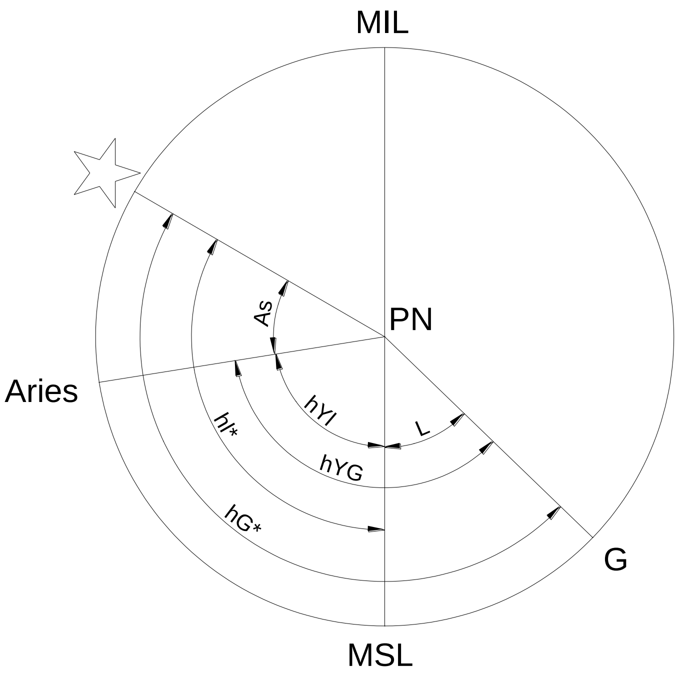

ILUSTRACIÓN 44: ÁNGULOS QUE SE MIDEN EN EL ECUADOR CELESTE (FUENTE: EL AUTOR)

- Declinación (d): El arco de círculo horario contado desde el ecuador hasta el astro se denomina declinación. Siempre va a ser menor de 90º y puede ser Norte (+) o Sur (-), dependiendo en que hemisferio este el astro. Es independiente del observador y viene en el almanaque náutico para todos los astros. Los astros con la misma declinación están en el mismo paralelo de declinación y su movimiento aparente será sobre dicho paralelo.
- Codeclinación: Es el arco de círculo horario que va desde el polo elevado del observador hasta el astro. También es conocida como distancia polar y puede ser mayor de 90º cuando la declinación tiene distinto nombre que la latitud.

8.2.4. Determinante de un astro.

La obtención de una posición mediante la observación de astros se consigue gracias al trazado sobre una carta de una recta de altura. Esta recta representa una parte muy pequeña de un círculo de altura trazado sobre la esfera terrestre. Desde todos los puntos de ese círculo vamos a ver al astro seleccionado con una altura determinada.

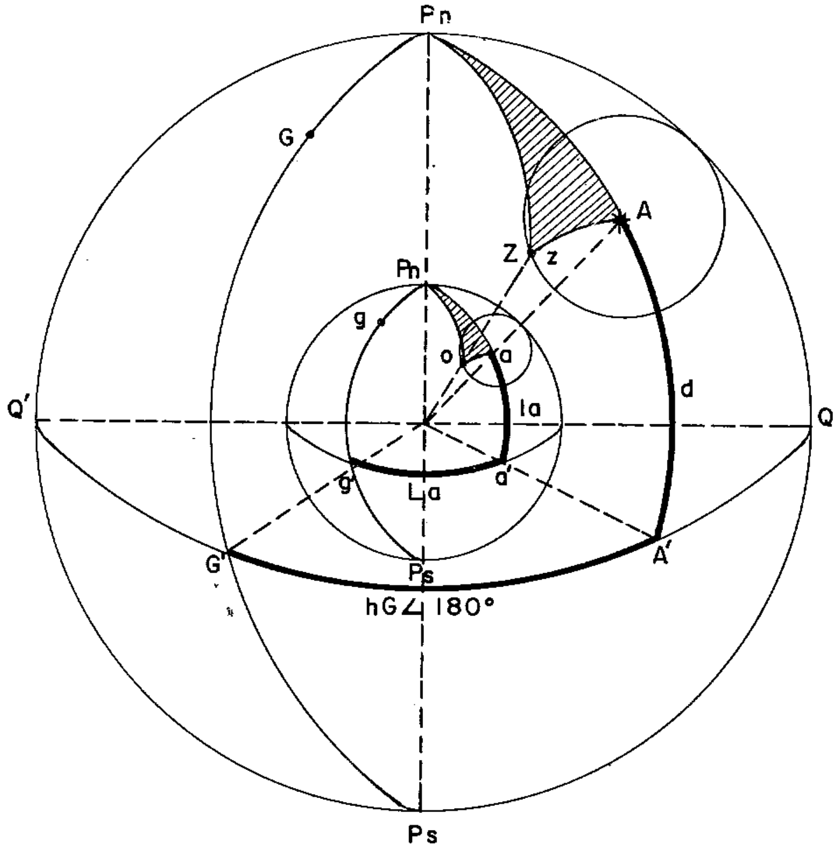

ILUSTRACIÓN 45: CÍRCULO DE ALTURA EN LA ESFERA CELESTE Y LA ESFERA TERRESTRE (FUENTE: : MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

No me quiero meter muy a fondo en todo lo que son las rectas y los círculos de altura, pero no está de más comentarlo brevemente. En resumen, nuestra posición la vamos a determinar gracias a la intersección de dos o más rectas de altura, pero ¿Qué necesitamos para trazar una recta de altura? La respuesta es el determinante del astro. En esta parte vamos a aprender cómo obtener este determinante ya que va a ser el objetivo de nuestro problema de posicionamiento astronómico.

Un determinante de un astro viene caracterizado por dos valores que representan un ángulo y una distancia, el azimut del astro (Z_V) y la diferencia de alturas (Δa). Esta diferencia de alturas se calcula restando la altura verdadera que obtenemos gracias a la observación del astro con un sextante y la altura aparente que debería tener el astro desde nuestra posición estimada. A la altura observada habrá que aplicarle las correcciones necesarias para obtener la altura verdadera.

8.2.5. Triángulo de posición.

Como bien adelantábamos en la introducción, el triángulo esférico que vamos a utilizar en este problema tiene nombre propio, el triángulo de posición. Este triángulo se forma con tres círculos máximos que son el meridiano del lugar, el círculo horario del astro y el vertical del astro. Los vértices que lo forman serán el polo elevado, nuestro zenit y el astro.

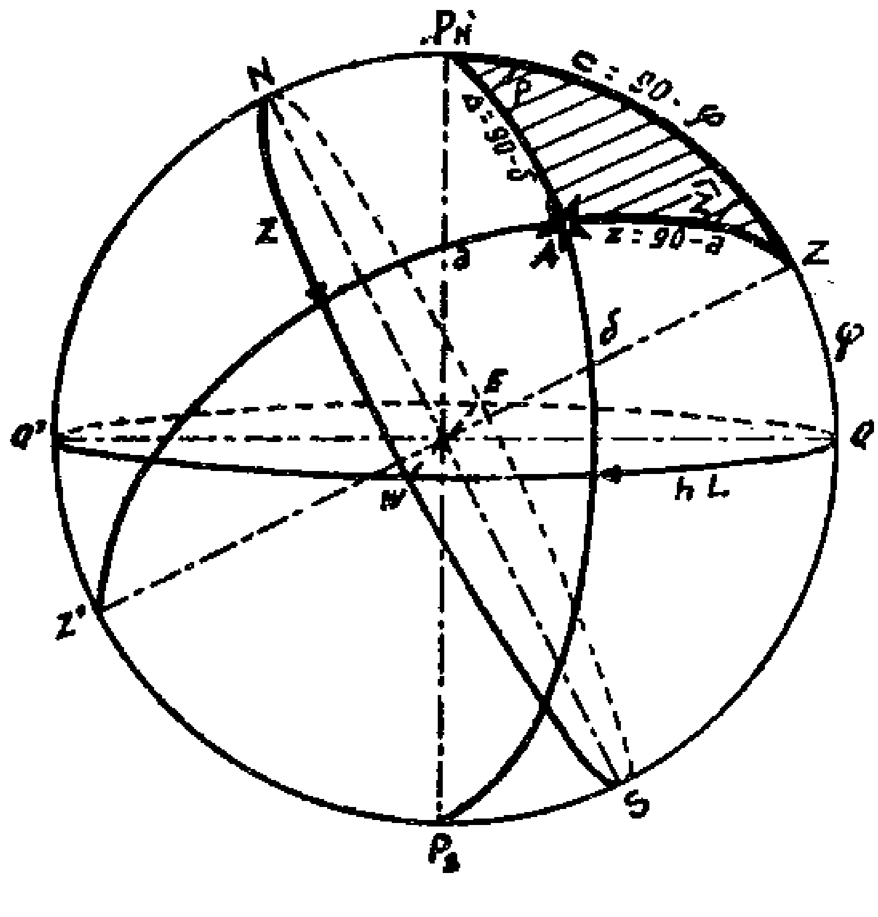

ILUSTRACIÓN 46: TRIÁNGULO DE POSICIÓN (FUENTE: : MOREU CURBERA, MARTÍNEZ JIMÉNEZ, ASTRONOMÍA Y NAVEGACIÓN TOMO I)

En este triángulo esférico los ángulos y los lados van a ser:

Lados:

- Colatitud $(90º - l)$: Este lado corresponde al lado entre el zenit y el polo. Puesto que el polo que utilizamos es el polo elevado (mismo nombre que nuestra latitud) este valor nunca será mayor de 90º.

- Distancia cenital $(90º - a)$: Corresponde al lado entre el zenit y el astro. Como el astro siempre va a ser visible y no puede tener altura negativa, este lado tampoco superará los 90º.

- Codeclinación $(90º - d)$: Está entre el polo y el astro. Este es el único lado que puede superar los 90º en ciertos casos. (Declinación negativa y latitud norte o viceversa)

Ángulos:

- Ángulo en el polo: Como su nombre indica es el ángulo formado con vértice en el polo elevado. Lo forman el meridiano del lugar y el círculo horario del astro. Es igual al horario del lugar del astro.

- Ángulo cenital: Se forma sobre nuestras cabezas entre el meridiano del lugar y el vertical del astro. Como todos los ángulos de un triángulo esférico no puede ser mayor de 180º. Coincidirá con el azimut astronómico.

- Ángulo paraláctico: Es el ángulo cuyo vértice es el astro observado. Este ángulo no nos interesa en el estudio de la astronomía de posicionamiento.

Este triángulo de posición se puede trasladar a la esfera terrestre, sustituyendo los vértices por sus análogos. El polo celeste se sustituye por el polo terrestre, el zenit por la situación de observación y el astro por un punto llamado polo de iluminación del astro o punto astral.

8.2.6. Problema supuesto

Los datos de este problema los hemos obtenido con el programa Stellarium. Es por esto por lo que las alturas de los astros vienen directamente como alturas aparentes y no como alturas instrumentales. Para tomar los datos hemos tomado la posición que corresponde a Santander, pero para realizar el problema tomaremos una situación estimada con una ligera variación. Puesto que el objetivo de este trabajo está en la trigonometría esférica, el resultado final del ejercicio serán los dos determinantes de los astros observados y no nuestra posición verdadera. Aclarado esto, comenzamos.

El día 8 de marzo de 2020 desde Santander a la hora reloj de bitácora 20:36:26 (UTC+1) se observan dos astros simultáneamente. El primero de ellos el Aldebarán con una altura aparente de 54º 8´ 7.3´´ y un azimut de 230º 8´ 53.7´´. El segundo de ellos es un astro desconocido con una altura aparente = 30º 35´ 58.9´´ y un azimut = 291º 59´ 50.2´´. Se pide hallar el astro desconocido y el determinante de ambos astros.

Posición estimada: l = 43º 28´ 48.9´´ N, L = 3º 52´ 33´´ W

Resolución por el método tradicional:

Empezaremos con el cálculo del determinante de Aldebarán. Para ello empezaremos calculando su altura verdadera.

Cálculo de la av:

Aap = 54º 8´ 7.3´´

CxR = - 0.9´

av = 54º 7´ 13.3´´

Ahora pasamos a calcular el horario del astro del lugar. Necesitaremos para ello calcular el horario de Aries en el lugar y el ángulo sidéreo del astro (almanaque náutico)

Cálculo del h*L y de P:

hɣG = 91º 56.2´

Cxmys = + 9º 8.0´

hɣGc = 101º 4´ 12´´

L = (-) 003º 52´ 33´´ W

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = + 290º 44.1´

H*L = 387º 55´ 45´´ → P = 27º 55´ 45´´

Del almanaque náutico también obtenemos la declinación de Aldebarán.

d* = 16º 32.8´ (+)

Con estos datos ya podemos dibujar nuestro triángulo de posición.

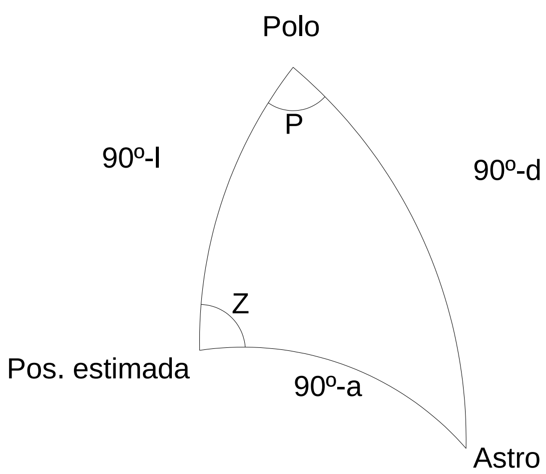

ILUSTRACIÓN 47: TRIÁNGULO DE POSICIÓN DEL EJERCICIO (FUENTE: EL AUTOR)

Pasaremos a calcular la altura estimada que tiene nuestro astro desde nuestra supuesta posición. Para ello utilizamos el teorema del coseno

$$cos\, a = cos\, b\, cos\, c + sen\, b\, sen\, c\, cos\, A$$

Transformándola para despejar la altura nos quedaría la siguiente fórmula:

$$sen\, ae = sen\, l\, sen\, d + \cos l \cos d\, cos\, P$$

Operamos:

$$sen\ ae = sen\ \ 43º\ 28´\ 48.9´´\ sen\ 16º\ 32.8´ + \cos\ \ 43º\ 28´\ 48.9´´ \cos 16º\ 32.8´\ cos\ 27º\ 55´\ 45´´$$

$$sen\ ae = 0.196 + 0.615$$

$$sen\ ae = 0.811$$

$$ae = 54º\ 8´\ 47.7´´$$

Pasamos a calcular la diferencia de alturas ahora que tenemos las dos alturas

$$\Delta\mathrm{a} = av - ae$$

$$\Delta\mathrm{a} = 54º\ 7´\ 13.3´´\ - 54º\ 8´\ 47.7´´$$

$$\Delta\mathrm{a} = -\ 0º\ 1´\ 34.4´´$$

Este dato junto con el azimut que tenemos al observar el astro completa el determinante de Aldebarán.

$\boldsymbol{\Delta\mathrm{a} = -\ 1´\ 34.4´´}$ $\boldsymbol{Zv = 230º\ 8´\ 53.7´´}$.

Comenzamos con la identificación de nuestro astro desconocido. Para reconocerlo debemos obtener su ángulo sidéreo y su declinación partiendo de la posición estimada. Una vez hecho esto pasaremos a buscar en el almanaque náutico la estrella que tenga unos valores similares.

Cálculo de la av:

Aap = 30º 35´ 58.9´´

CxR = - 1.7´

av = 30º 34´ 16.9´´

Calcularemos la declinación de nuestro astro desconocido. Usaremos el teorema del coseno para obtenerla. Como el azimut es superior a 180º lo tenemos que restar de 360º.

$$Z = 360º - 291º\ 59'\ 50.2'' = 68º\ 0'\ 9.8''$$

$$sen\ d = sen\ av\ sen\ l + cos\ av\ cos\ l\ cos\ Z$$

Sustituimos con nuestros valores:

$$sen\ d = sen\ \ 30º\ 34'\ 16.9''\ sen\ 43º\ 28'\ 48.9'' + cos\ \ 30º\ 34'\ 16.9''\ cos\ 43º\ 28'\ 48.9''\ cos\ 68º\ 0'\ 9.8''$$

$$sen\ d = 0.350 + 0.234$$

$$sen\ d = 0.584$$

$$d = 35º\ 43'\ 57.8''$$

Cálculo del ángulo en el polo. Usaremos el teorema de la cotangente, con el que obtendremos la fórmula del ángulo en el polo.

$$cotg\ a\ sen\ b = cos\ b\ cos\ C + sen\ C\ cotg\ A$$

$$cotg\ (90º - av)\ sen\ (90º - l) = cos(90º - l)\ cos\ Z + sen\ Z\ cotg\ P$$

$$tan\ av\ cos\ l = sen\ l\ cos\ Z + sen\ Z\ cotg\ P$$

Despejamos P obteniendo la fórmula general del horario

$$cotg\ P = \frac{tan\ av\ cos\ l - sen\ l\ cos\ Z}{sen\ Z}$$

Sustituimos y operamos:

$$cotg\ P = \frac{tan\ 30º\ 34'\ 16.9''\ cos\ 43º\ 28'\ 48.9'' - sen\ 43º\ 28'\ 48.9''\ cos\ 68º\ 0'\ 9.8''}{sen\ 68º\ 0'\ 9.8''}$$

$$cotg\ P = \frac{0.429 - 0.258}{0.927}$$

$$cotg\ P = 0.184$$

$$P = 79º\ 33'\ 24.1''$$

Con el horario en el lugar de aries que calculamos anteriormente podemos obtener el ángulo sidéreo.

AS = h*L - hɣL

H*L = 79º 33´ 24.1´´

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = - 17º 33´ 14.9´´ → AS = 342º 21´ 45.1´´

Con el ángulo sidéreo y la declinación del astro desconocido nos vamos al almanaque náutico y buscamos el astro. Nos damos cuenta de que es el astro Mirach y sus valores reales son:

d = 35º 43.5´

AS = 342º 17.6´

Pasemos a calcular el determinante de Mirach

Cálculo del horario del astro (ángulo en el polo):

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = + 342º 17.6´

H*L = 439º 29´ 15´´ → P = 79º 29´ 15´´

Calculamos la altura estimada con la fórmula obtenida anteriormente:

$$sen\ ae = sen\ l\ sen\ d + \cos l \cos d\ cos\ P$$

$$sen\ ae = sen\ \ 43º\ 28´\ 48.9´´\ sen\ 35º\ 43.5´ + \cos\ \ 43º\ 28´\ 48.9´´ \cos 35º\ 43.5´\ cos\ 79º\ 29´\ 15´´$$

$$sen\ ae = 0.402 + 0.107$$

$$sen\ ae = 0.509$$

$$ae = 30º\ 36´\ 51.8´´$$

Calculamos la diferencia de alturas:

$$\Delta \mathrm{a} = av - ae$$

$$\Delta \mathrm{a} = 30º\ 34´\ 16.9´´\ - 30º\ 36´\ 51.8´´$$

$$\Delta a = -\ 0º\ 2´\ 34.9´´$$

Ya tenemos el determinante del astro desconocido (Mirach)

$$\mathbf{\Delta a = -\ 2´\ 34.9´´}$$
$$\boldsymbol{Zv = 291º\ 59´\ 50.2´´}$$

Resolución por la trigonometría racional:

Para obtener los dos determinantes con este método vamos a necesitar los spreads y los quadrances de los respectivos triángulos de posición. En el ejercicio anterior utilizamos la ley del triple spread para obtener el spread correspondiente al ángulo en el polo. Nos dimos cuenta de que con este método una operación tan simple como una suma o una resta se convertía en una ecuación de segundo grado. Para que el ejercicio no se vuelva tan complicado vamos a realizarlo utilizando la trigonometría racional únicamente a la hora de resolver el triángulo de posición con la cross spherical law y la spread spherical law. Aclarado todo esto comenzamos.

Primero vamos a coger del método anterior los valores del triángulo esférico de Aldebarán para pasarlos a spreads y quadrances. Recordad que para pasarlo debemos calcular el valor del seno del ángulo al cuadrado.

P = 27º 55´ 45´´ → $S_P = (sen\ P)^2 = 0.219379$

d* = 16º 32.8´ (+) → $q_d = (sen\ (90º - d))^2 = 0.918891$

l = 43º 28´ 48.9´´ N → $q_l = (sen\ (90º - l))^2 = 0.526512$

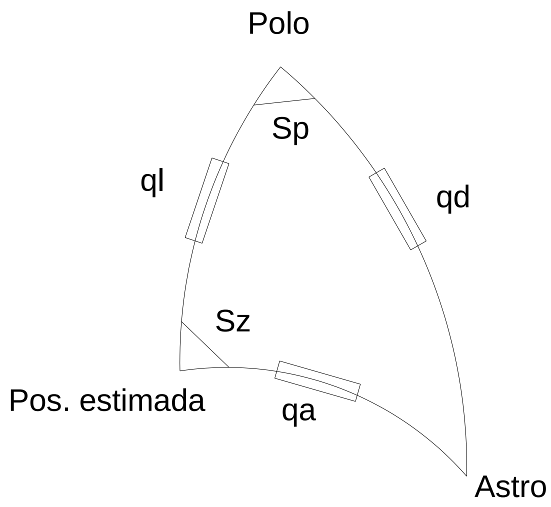

ILUSTRACIÓN 48: TRIÁNGULO DE POSICIÓN RACIONAL (FUENTE: EL AUTOR)

Necesitamos obtener q_a para conocer la altura estimada y calcular la diferencia de alturas. Para ello usaremos la cross spherical law.

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

$$\left(S_p q_l q_d - q_a - q_l - q_d + 2\right)^2 = 4\,(1 - q_a)(1 - q_l)(1 - q_d)$$

$$(0.219 * 0.527 * 0.919 - q_a - 0.527 - 0.919 + 2)^2 = 4\,(1 - q_a)0.473 * 0.081$$

$$(0.106 - q_a + 0.555)^2 = 4\,(1 - q_a)0.473 * 0.081$$

$$(0.661 - q_a)^2 = 0.154\,(1 - q_a)$$

$$q_a^2 - 1.321 q_a + 0.437 = 0.154 - 0.154 q_a$$

$$q_a^2 - 1.168 q_a + 0.283 = 0$$

Utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado calculamos q_a.

$$q_a = \frac{1.168 \pm \sqrt{1.364 - 4 * 0.283}}{2}$$

$$q_a = \frac{1.168 \pm 0.482}{2}$$

Obtenemos los siguientes resultados:

$$q_a = 0.82479$$

$$q_a = 0.34306$$

Conociendo el spread correspondiente a 90º menos la altura verdadera podemos saber cuál es la solución correcta.

av = 54º 7´ 13.3´´ → $q_{av} = (sen\ (90º - av))^2 = 0.34349$

La solución que más se acerca es la segunda, por tanto, es la correcta. En este punto podríamos usar la ley del triple quadrance, pero, como hemos dicho anteriormente, nos convertiría una simple resta en una ecuación de segundo grado.

q_a = 0.34306 → $ae = arcsen\sqrt{1 - 0.343} = 54º\ 8´\ 47.7´´$

Nos damos cuenta de que la altura estimada es la misma que con el método tradicional y, por tanto, la diferencia de alturas será igual

$$\Delta \mathrm{a} = av - ae$$

$$\Delta \mathrm{a} = 54º\ 7´\ 13.3´´\ - 54º\ 8´\ 47.7´´$$

$$\Delta \mathrm{a} = -\ 0º\ 1´\ 34.4´´$$

El determinante del astro será igual que con el anterior método.

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{\Delta \mathrm{a} = -\ 1´\ 34.4´´} \\ \boldsymbol{Zv = 230º\ 8´\ 53.7´´.}\end{gathered}}$$

Comenzamos con nuestra segunda observación, el astro desconocido. Como hemos hecho antes, vamos a reconocer el astro obteniendo su declinación y su ángulo sidéreo.

Empezamos calculando los spreads que tenemos.

Z = 291º 59´ 50.2´´ → $S_Z = (sen\ Z)^2 = 0.859703$

av = 30º 34´ 16.9´´ → $q_a = (sen\ (90º - a))^2 = 0.741315$

l = 43º 28´ 48.9´´ N → $q_l = (sen\ (90º - l))^2 = 0.526512$

Empezaremos calculando la declinación gracias a la cross spherical law.

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\,(1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

$$(S_Z q_a q_l - q_d - q_a - q_l + 2)^2 = 4\,(1 - q_d)(1 - q_a)(1 - q_l)$$

$$(0.859 * 0.741 * 0.527 - q_d - 0.741 - 0.527 + 2)^2 = 4\,(1 - q_d)0.259 * 0.473$$

$$(0.336 - q_d + 0.732)^2 = 4\,(1 - q_d)0.259 * 0.473$$

$$(1.068 - q_d)^2 = 0.489(1 - q_d)$$

$$q_d^2 - 2.135q_a + 1.14 = 0.489 - 0.489q_d$$

$$q_d^2 - 1.646q_a + 0.65 = 0$$

Obtenemos q_d:

$$q_d = \frac{1.646 \pm \sqrt{2.708 - 4 * 0.65}}{2}$$

$$q_d = \frac{1.646 \pm 0.327}{2}$$

Dándonos como resultados:

$$q_d = 0.987$$

$$q_d = 0.659$$

Lo que significa que la declinación de nuestro astro puede ser:

q_d = 0.986548 → $ae = arcsen\,\sqrt{1 - 0.987} = 6º\ 39´\ 36.7´´$

q_d = 0.658961 → $ae = arcsen\,\sqrt{1 - 0.659} = 35º\ 43´\ 52.8´´$

Pasemos a calcular el ángulo en el polo. Utilizaremos la spread spherical law. Como no sabemos con certeza cuál es la declinación correcta ya que los dos casos son posibles probaremos con los dos resultados.

$$\frac{S_1}{q_1} = \frac{S_2}{q_2} = \frac{S_3}{q_3}$$

$$\frac{S_Z}{q_d} = \frac{S_p}{q_a}$$

Utilizando 6º 39´ 36.7´´ como declinación:

$$\frac{0.859}{0.987} = \frac{S_P}{0.741}$$

$$S_p = \frac{0.859}{0.987} * 0.741$$

$$S_p = 0.646$$

$S_p = 0.646 \rightarrow P = arcsen\sqrt{0.646} = 53º\ 29´\ 19.9´´$

Una vez tenemos el horario del astro calculamos el supuesto ángulo sidéreo:

AS = h*L - hɣL

H*L = 53º 29´ 19.9´´

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = - 43º 42´ 19.1´´ → AS = 316º 17´ 40.9´´

Utilizando 35º 43´ 52.8´´ como declinación:

$$\frac{0.859}{0.659} = \frac{S_P}{0.741}$$

$$S_p = \frac{0.859}{0.659} * 0.741$$

$$S_p = 0.967144$$

$S_p = 0.967 \rightarrow P = arcsen\sqrt{0.967} = 79º\ 33´\ 24.1´´$

Calculamos el ángulo sidéreo:

AS = h*L - hɣL

H*L = 79º 33´ 24.1´´

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = - 17º 33´ 14.9´´ → AS = 342º 21´ 45.1´´

Dando lugar a estas dos posibilidades:

d* = 6º 39´ 36.7´´ **d* = 35º 43´ 52.8´´**

AS = 316º 17´ 40´´ **AS = 342º 21´ 45.1´´**

Buscamos el astro en el almanaque náutico y comprobamos que el único resultado que corresponde a una estrella es el segundo resultado. El astro desconocido es Mirach y sus valores reales son:

d* = 35º 43.5´ (+) → $q_d = (sen\ (90º - d))^2 = 0.659066$

AS = 342º 17.6´

Cálculo del ángulo en el polo:

hɣL = 97º 11´ 39´´

AS = + 342º 17.6´

H*L = 439º 29´ 15´´ → P = 79º 29´ 15´´

P = 79º 29´ 15´´ → $S_P = (sen\ P)^2 = 0.966712$

Pasemos a calcular su determinante. Con todos los resultados obtenidos pasamos a calcular la altura estimada del astro mediante la cross spherical law.

$$(S_1 q_2 q_3 - q_1 - q_2 - q_3 + 2)^2 = 4\ (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3)$$

$$\left(S_p q_l q_d - q_a - q_l - q_d + 2\right)^2 = 4\ (1 - q_a)(1 - q_l)(1 - q_d)$$

$$(0.967 * 0.527 * 0.659 - q_a - 0.527 - 0.659 + 2)^2 = 4\ (1 - q_a) 0.473 * 0.341$$

$$(0.335 - q_a + 0.815)^2 = 4\ (1 - q_a) 0.473 * 0.341$$

$$(1.150 - q_a)^2 = 0.646\ (1 - q_a)$$

$$q_a^2 - 2.299 q_a + 1.322 = 0.646 - 0.646 q_a$$

$$q_a^2 - 1.654 q_a + 0.676 = 0$$

Calculamos las dos posibles soluciones para q_a.

$$q_a = \frac{1.654 \pm \sqrt{2.736 - 4 * 0.676}}{2}$$

$$q_a = \frac{1.654 \pm 0.172}{2}$$

Obtenemos los siguientes resultados:

$$q_a = 0.91338$$

$$\boldsymbol{q_a = 0.74066}$$

El resultado correcto es el segundo ya que es muy similar al de la altura verdadera.

Calculamos la altura estimada:

q_a = 0.74066 → $ae = arcsen\,\sqrt{1 - 0.741} = 30º\ 36´\ 51.8´´$

Y finalmente calculamos la diferencia de alturas:

$$\Delta \text{a} = av - ae$$

$$\Delta \text{a} = 30º\ 34´\ 16.9´´\ - 30º\ 36´\ 51.8´´$$

$$\Delta \text{a} = -\ 0º\ 2´\ 34.9´´$$

Hemos calculado el determinante del astro desconocido

$$\boldsymbol{\Delta \text{a} = -\ 2´\ 34.9´´}$$
$$\boldsymbol{Zv = 291º\ 59´\ 50.2´´}$$

Al igual que en el anterior ejercicio hemos obtenido resultados prácticamente iguales. Nos ocurre el mismo problema relacionado con las ecuaciones de segundo grado que nos aparecen al usar la trigonometría racional. Éstas nos dan dos posibles resultados en algunas ecuaciones teniendo que deducir cuál es el correcto.

8.3. TABLA DE COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Resultado	Trigonometría clásica	Trigonometría racional
Prob. 1: Rumbo inicial	280º 19´ 15´´	280º 19´ 14´´
Prob. 1: Distancia	3592.165 millas	3592.165 millas
Prob. 1: Coordenadas punto 1000´	lat: 39º 36´ 52´´ N Long: 30º 47´ 10´´ W	lat: 39º 36´ 52´´ N Long: 30º 47´ 11´´ W
Prob. 2: Determinante Aldebarán	Δa = -1´ 34.4´´ Zv = 230º 8´ 53.7´´	Δa = -1´ 34.4´´ Zv = 230º 8´ 53.7´´
Prob. 2: Determinante astro desconocido	Δa = -2´ 34.9´´ Zv = 291º 59´ 59.2´´	Δa = -2´ 34.9´´ Zv = 291º 59´ 59.2´´

CONCLUSIONES

A lo largo del presente trabajo de fin de grado hemos podido llegar a diversas conclusiones, las cuales han sido recogidas en este apartado.

1. En primer lugar, hemos podido verificar que la trigonometría racional esférica es un método fiable a la hora de realizar problemas de navegación. La precisión de los resultados es prácticamente la misma, habiendo en algunos casos pequeñas variaciones debido a los decimales utilizados.

2. Siendo cierto que los resultados son similares, el uso de la trigonometría racional implica tener que cambiar nuestra mentalidad a la hora de resolver los problemas (se abandona el uso de ángulos). Esto puede llegar a ser confuso ya que los datos reales tenemos que transformarlos para poder operar (por ejemplo, el sistema de coordenadas terrestre está basado en medidas angulares).

3. De la trigonometría racional hemos podido comprobar que tiene algunas complicaciones cuando se utilizan ciertas fórmulas. Al aplicar la triple spread formula y la triple quad formula utilizamos ecuaciones de segundo grado para unos cálculos que en la trigonometría clásica son una simple suma o resta.

4. En relación con el apartado anterior, en la trigonometría racional nos aparece un gran problema, las ecuaciones de segundo grado. Son muchas las fórmulas que tienen estas ecuaciones y es un gran problema porque empiezan a aparecer resultados dobles. En muchos casos podemos deducir cuál es el correcto (uno de los dos está fuera del rango posible de soluciones), pero en otros se nos hace imposible saber cuál es (reconocimiento de un astro desconocido). Este es, bajo mi punto de vista, el mayor problema de la trigonometría racional.

5. Por otra parte, la trigonometría racional es más sencilla desde el punto de vista de matemáticas o geometría ya que elimina el valor del ángulo y, con ello las funciones trigonométricas. Para un cálculo sin disponibilidad de calculadoras ni tablas trigonométricas este método resultaría efectivo. En la antigüedad, cuando aún no se habían inventado las calculadoras podría haber sido de gran utilidad.

6. Para finalizar y dada la experiencia adquirida en el uso de la trigonometría racional, podemos deducir que esta podría ser mucho más útil desde el punto de vista de la geometría o del álgebra. Los físicos o los matemáticos podrían desarrollar utilidades mucho más complejas de la trigonometría racional que se escapan de mi campo de estudio.

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, F. J. 1987. *Teoría y problemas de trigonometría plana y esférica*. México. Editorial McGraw-Hill.

Vila Mitjà, A. 1993. *Elementos de trigonometría esférica*. Barcelona, España. Servicio editorial de la Universidad Politécnica de Cataluña.

Avello Ugalde, M. 1959. *Trigonometría rectilínea y esférica*. Madrid, España. Ed. Dossat, S.A.

Iglesias Martín, M. A. 2004. *Trigonometría esférica: teoría y problemas resueltos.* Bilbao, País Vasco. Servicio editorial de la Universidad del País Vasco, D.L.

Moreu Curbera, J. M.; Martínez Jiménez, F. 1968. *Astronomía y Navegación Tomo I*. Vigo, España. Hijos de E. Minuesa, S. L.

Moreu Curbera, J. M.; Martínez Jiménez, F. 1987. *Astronomía y Navegación Tomo II.* Vigo, España. Hijos de E. Minuesa, S. L.

Ibáñez, I. 2016. *Navegación Astronómica: compendio y cálculos*. Bilbao, País Vasco. Servicio editorial de la Universidad del País Vasco, D.L.

Mederos Martín, L. 2016. *Navegación astronómica, 6ª edición ampliada y actualizada*. Boadilla del Monte, Madrid. Ediciones Tutor, S.A.

Perera Marrero, J.; Melón Rodríguez, E. A. 2010. *Astronomía náutica y navegación.* San Cristóbal de La Laguna, Tenerife. Servicio de Publicaciones, Universidad de La Laguna.

Moreno Rodríguez, F. 2004. *Astronomía, Navegación y cálculos náuticos.* Madrid, España. Sepha edición y diseño, S.L.

Wildberger, N.J. 2005. *Divine Proportions: rational trigonometry to universal Geometry*. Sydney, Australia. Ed: Wild Egg.

Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Francisco. (2019). Almanaque Náutico 2020 con suplemento para la Navegación Aérea, Vol. CCXXIX. Ministerio de Defensa.

ANEXO 1: ALMANAQUE NÁUTICO

En el ejercicio que hemos realizado de posicionamiento astronómico hemos obtenido varios datos del almanaque náutico.

Este es un libro que contiene una hoja para cada día del año en la cual se detallan las horas de salida y puesta del sol en función de la latitud, los horarios respecto a Greenwich del Sol, la luna, Aries y algún planeta, y algunos otros datos de interés. También nos ofrece multitud de tablas de correcciones para los datos proporcionados, correcciones para datos de nuestra observación, posiciones de estrellas, etc.

En este apartado vamos a recoger las páginas que hemos utilizado para la realización de nuestros cálculos.

UT	SOL SD: 16′.1 PMG: 12h10m.6		LUNA SD: 16′.5 Edad: 13d.3 PMG: 23h37m.2 PHE 4h: 60′.7 12h: 60′.9 20h: 61′.1 R: 56m				Lat	SOL			LUNA			
								Puesta	Crepúsculo		Salida		Puesta	
	hG ☉	Dec	hG ☾	Dif	Dec	Dif			Civil	Náutico	Hora	R.	Hora	R.
h	° ′	° ′	° ′		° ′		°	h m	h m	h m	h m	m	h m	m
0	177 18.2	- 4 47.4	19 15.5	61	+17 16.2	104	60 N	17 46	18 27	19 16	15 35	102	6 57	15
1	192 18.3	46.4	33 40.6	62	5.9	105	58	17 48	27	13	44	98	47	18
2	207 18.5	45.5	48 5.8	62	+16 55.4	106	56	17 50	27	10	52	94	38	22
3	222 18.6	44.5	62 31.0	62	44.7	107	54	17 51	27	8	59	91	30	25
4	237 18.8	43.5	76 56.2	63	34.0	109	52	17 53	27	6	16 5	89	23	27
5	252 19.0	- 4 42.5	91 21.5	63	+16 23.1	110	50	17 54	18 27	19 4	16 11	86	6 17	29
6	267 19.1	- 4 41.6	105 46.8	63	+16 12.2	111	45	17 57	18 27	19 1	16 23	81	6 3	34
7	282 19.3	40.6	120 12.1	64	1.1	112	40	18 0	27	18 58	33	77	5 52	38
8	297 19.4	39.6	134 37.5	64	+15 49.8	113	35	18 2	27	57	42	73	42	42
9	312 19.6	38.6	149 2.9	64	38.5	114	30	18 4	28	56	49	70	34	44
10	327 19.7	37.7	163 28.3	65	27.1	116	20	18 8	30	55	17 2	65	19	49
11	342 19.9	- 4 36.7	177 53.8	65	+15 15.5	117	10 N	18 11	18 32	18 56	17 13	61	5 6	53
12	357 20.0	- 4 35.7	192 19.3	66	+15 3.9	118	0	18 14	18 35	18 59	17 24	56	4 54	57
13	12 20.2	34.7	206 44.9	66	+14 52.1	119	10 S	18 17	38	19 3	34	52	41	61
14	27 20.4	33.8	221 10.5	66	40.2	120	20	18 21	43	9	45	48	28	65
15	42 20.5	32.8	235 36.1	67	28.2	121	30	18 25	49	17	58	42	12	71
16	57 20.7	31.8	250 1.8	67	16.1	122	35	18 27	53	23	18 5	39	3	74
17	72 20.8	- 4 30.8	264 27.5	68	+14 3.9	123	40	18 30	18 57	19 30	18 13	36	3 53	77
18	87 21.0	- 4 29.8	278 53.3	68	+13 51.6	124	45	18 33	19 3	19 38	18 23	32	3 41	81
19	102 21.1	28.9	293 19.1	68	39.2	125	50	18 37	10	49	35	27	26	86
20	117 21.3	27.9	307 44.9	69	26.7	126	52	18 39	13	55	40	25	19	88
21	132 21.5	26.9	322 10.8	69	14.1	127	54	18 41	17	20 1	46	22	11	91
22	147 21.6	25.9	336 36.7	69	1.4	128	56	18 43	21	8	52	20	3	93
23	162 21.8	- 4 25.0	351 2.6	70	+12 48.6	129	58	18 46	26	15	60	16	2 53	97
24	177 21.9	- 4 24.0	5 28.6		+12 35.7		60 S	18 49	19 31	20 25	19 8	13	2 41	102

UT	ARIES PMG 12h53m.2	VENUS Mag: -4.3 PMG: 14h 56m		MARTE Mag: +1.0 PMG: 7h 56m		JUPITER Mag -2.0 PMG: 8h 24m		SATURNO Mag: +0.7 PMG: 8h 57m	
	hG ♈	hG ♀	Dec	hG ♂	Dec	hG ♃	Dec	hG ♄	Dec
h	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′
0	166 9.4	135 50.0	+14 8.1	240 43.3	-23 12.5	233 40.0	-21 50.8	225 11.8	-20 25.3
1	181 11.8	150 49.9	9.2	255 43.9	12.4	248 42.0	50.7	240 14.0	25.3
2	196 14.3	165 49.8	10.4	270 44.5	12.2	263 44.0	50.7	255 16.2	25.2
3	211 16.8	180 49.7	11.5	285 45.1	12.1	278 46.0	50.6	270 18.4	25.2
4	226 19.2	195 49.6	12.6	300 45.7	11.9	293 48.0	50.5	285 20.7	25.1
5	241 21.7	210 49.6	+14 13.7	315 46.3	-23 11.8	308 50.0	-21 50.5	300 22.9	-20 25.1
6	256 24.1	225 49.5	+14 14.9	330 46.9	-23 11.6	323 52.0	-21 50.4	315 25.1	-20 25.1
7	271 26.6	240 49.4	16.0	345 47.5	11.5	338 54.0	50.4	330 27.3	25.0
8	286 29.1	255 49.3	17.1	0 48.0	11.4	353 56.0	50.3	345 29.6	25.0
9	301 31.5	270 49.2	18.2	15 48.6	11.2	8 58.0	50.2	0 31.8	24.9
10	316 34.0	285 49.1	19.3	30 49.2	11.1	24 0.0	50.2	15 34.0	24.9
11	331 36.5	300 49.0	+14 20.5	45 49.8	-23 10.9	39 2.0	-21 50.1	30 36.2	-20 24.8
12	346 38.9	315 48.9	+14 21.6	60 50.4	-23 10.8	54 4.0	-21 50.1	45 38.5	-20 24.8
13	1 41.4	330 48.9	22.7	75 51.0	10.6	69 6.0	50.0	60 40.7	24.8
14	16 43.9	345 48.8	23.8	90 51.6	10.5	84 8.0	49.9	75 42.9	24.7
15	31 46.3	0 48.7	24.9	105 52.2	10.3	99 10.0	49.9	90 45.2	24.7
16	46 48.8	15 48.6	26.0	120 52.7	10.2	114 12.1	49.8	105 47.4	24.6
17	61 51.3	30 48.5	+14 27.1	135 53.3	-23 10.1	129 14.1	-21 49.8	120 49.6	-20 24.6
18	76 53.7	45 48.4	+14 28.3	150 53.9	-23 9.9	144 16.1	-21 49.7	135 51.8	-20 24.5
19	91 56.2	60 48.3	29.4	165 54.5	9.8	159 18.1	49.6	150 54.1	24.5
20	106 58.6	75 48.3	30.5	180 55.1	9.6	174 20.1	49.6	165 56.3	24.5
21	122 1.1	90 48.2	31.6	195 55.7	9.5	189 22.1	49.5	180 58.5	24.4
22	137 3.6	105 48.1	32.7	210 56.3	9.3	204 24.1	49.4	196 0.8	24.4
23	152 6.0	120 48.0	33.8	225 56.9	9.2	219 26.1	49.4	211 3.0	24.3
24	167 8.5	135 47.9	+14 34.9	240 57.4	-23 9.0	234 28.1	-21 49.3	226 5.2	-20 24.3
Dif	—	−1	+11	+6	+1	+20	+1	+22	0

ILUSTRACIÓN 49: PÁGINA DEL DÍA DE OBSERVACIÓN (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

CORRECCIONES

36 min.	Sol y planetas	Aries	Luna	Dif.	Correc.	37 min.	Sol y planetas	Aries	Luna	Dif.	Correc.
s	° '	° '	° '		'	s	° '	° '	° '		'
0	9 0,0	9 1,5	8 35,4	0,0	0,0	0	9 15,0	9 16,5	8 49,7	0,0	0,0
1	9 0,2	9 1,7	8 35,6	3,0	0,2	1	9 15,3	9 16,8	8 50,0	3,0	0,2
2	9 0,5	9 2,0	8 35,9	6,0	0,4	2	9 15,5	9 17,0	8 50,2	6,0	0,4
3	9 0,7	9 2,2	8 36,1	9,0	0,5	3	9 15,8	9 17,3	8 50,4	9,0	0,6
4	9 1,0	9 2,5	8 36,4	12,0	0,7	4	9 16,0	9 17,5	8 50,7	12,0	0,8
5	9 1,3	9 2,7	8 36,6	15,0	0,9	5	9 16,3	9 17,8	8 50,9	15,0	0,9
6	9 1,5	9 3,0	8 36,8	18,0	1,1	6	9 16,5	9 18,0	8 51,1	18,0	1,1
7	9 1,8	9 3,2	8 37,1	21,0	1,3	7	9 16,8	9 18,3	8 51,4	21,0	1,3
8	9 2,0	9 3,5	8 37,3	24,0	1,5	8	9 17,0	9 18,5	8 51,6	24,0	1,5
9	9 2,2	9 3,7	8 37,5	27,0	1,6	9	9 17,3	9 18,8	8 51,9	27,0	1,7
10	9 2,5	9 4,0	8 37,8	30,0	1,8	10	9 17,5	9 19,0	8 52,1	30,0	1,9
11	9 2,7	9 4,2	8 38,0	33,0	2,0	11	9 17,8	9 19,3	8 52,3	33,0	2,1
12	9 3,0	9 4,5	8 38,3	36,0	2,2	12	9 18,0	9 19,5	8 52,6	36,0	2,3
13	9 3,3	9 4,7	8 38,5	39,0	2,4	13	9 18,3	9 19,8	8 52,8	39,0	2,4
14	9 3,5	9 5,0	8 38,7	42,0	2,6	14	9 18,5	9 20,0	8 53,1	42,0	2,6
15	9 3,8	9 5,2	8 39,0	45,0	2,7	15	9 18,8	9 20,3	8 53,3	45,0	2,8
16	9 4,0	9 5,5	8 39,2	48,0	2,9	16	9 19,0	9 20,5	8 53,5	48,0	3,0
17	9 4,2	9 5,7	8 39,5	51,0	3,1	17	9 19,3	9 20,8	8 53,8	51,0	3,2
18	9 4,5	9 6,0	8 39,7	54,0	3,3	18	9 19,5	9 21,0	8 54,0	54,0	3,4
19	9 4,8	9 6,2	8 39,9	57,0	3,5	19	9 19,8	9 21,3	8 54,3	57,0	3,6
20	9 5,0	9 6,5	8 40,2	60,0	3,7	20	9 20,0	9 21,5	8 54,5	60,0	3,8
21	9 5,3	9 6,7	8 40,4	63,0	3,8	21	9 20,3	9 21,8	8 54,7	63,0	3,9
22	9 5,5	9 7,0	8 40,6	66,0	4,0	22	9 20,5	9 22,0	8 55,0	66,0	4,1
23	9 5,7	9 7,2	8 40,9	69,0	4,2	23	9 20,8	9 22,3	8 55,2	69,0	4,3
24	9 6,0	9 7,5	8 41,1	72,0	4,4	24	9 21,0	9 22,5	8 55,4	72,0	4,5
25	9 6,2	9 7,7	8 41,4	75,0	4,6	25	9 21,3	9 22,8	8 55,7	75,0	4,7
26	9 6,5	9 8,0	8 41,6	78,0	4,7	26	9 21,5	9 23,0	8 55,9	78,0	4,9
27	9 6,8	9 8,2	8 41,8	81,0	4,9	27	9 21,8	9 23,3	8 56,2	81,0	5,1
28	9 7,0	9 8,5	8 42,1	84,0	5,1	28	9 22,0	9 23,5	8 56,4	84,0	5,3
29	9 7,3	9 8,7	8 42,3	87,0	5,3	29	9 22,3	9 23,8	8 56,6	87,0	5,4
30	9 7,5	9 9,0	8 42,6	90,0	5,5	30	9 22,5	9 24,0	8 56,9	90,0	5,6
31	9 7,7	9 9,2	8 42,8	93,0	5,7	31	9 22,8	9 24,3	8 57,1	93,0	5,8
32	9 8,0	9 9,5	8 43,0	96,0	5,8	32	9 23,0	9 24,5	8 57,4	96,0	6,0
33	9 8,2	9 9,7	8 43,3	99,0	6,0	33	9 23,3	9 24,8	8 57,6	99,0	6,2
34	9 8,5	9 10,0	8 43,5	102,0	6,2	34	9 23,5	9 25,0	8 57,8	102,0	6,4
35	9 8,8	9 10,2	8 43,8	105,0	6,4	35	9 23,8	9 25,3	8 58,1	105,0	6,6
36	9 9,0	9 10,5	8 44,0	108,0	6,6	36	9 24,0	9 25,5	8 58,3	108,0	6,8
37	9 9,3	9 10,8	8 44,2	111,0	6,8	37	9 24,3	9 25,8	8 58,5	111,0	6,9
38	9 9,5	9 11,0	8 44,5	114,0	6,9	38	9 24,5	9 26,0	8 58,8	114,0	7,1
39	9 9,7	9 11,3	8 44,7	117,0	7,1	39	9 24,8	9 26,3	8 59,0	117,0	7,3
40	9 10,0	9 11,5	8 44,9	120,0	7,3	40	9 25,0	9 26,5	8 59,3	120,0	7,5
41	9 10,3	9 11,8	8 45,2	123,0	7,5	41	9 25,3	9 26,8	8 59,5	123,0	7,7
42	9 10,5	9 12,0	8 45,4	126,0	7,7	42	9 25,5	9 27,0	8 59,7	126,0	7,9
43	9 10,8	9 12,3	8 45,7	129,0	7,8	43	9 25,8	9 27,3	9 0,0	129,0	8,1
44	9 11,0	9 12,5	8 45,9	132,0	8,0	44	9 26,0	9 27,5	9 0,2	132,0	8,3
45	9 11,3	9 12,8	8 46,1	135,0	8,2	45	9 26,3	9 27,8	9 0,5	135,0	8,4
46	9 11,5	9 13,0	8 46,4	138,0	8,4	46	9 26,5	9 28,0	9 0,7	138,0	8,6
47	9 11,8	9 13,3	8 46,6	141,0	8,6	47	9 26,8	9 28,3	9 0,9	141,0	8,8
48	9 12,0	9 13,5	8 46,9	144,0	8,8	48	9 27,0	9 28,5	9 1,2	144,0	9,0
49	9 12,3	9 13,8	8 47,1	147,0	8,9	49	9 27,3	9 28,8	9 1,4	147,0	9,2
50	9 12,5	9 14,0	8 47,3	150,0	9,1	50	9 27,5	9 29,1	9 1,6	150,0	9,4
51	9 12,8	9 14,3	8 47,6	153,0	9,3	51	9 27,8	9 29,3	9 1,9	153,0	9,6
52	9 13,0	9 14,5	8 47,8	156,0	9,5	52	9 28,0	9 29,6	9 2,1	156,0	9,8
53	9 13,3	9 14,8	8 48,0	159,0	9,7	53	9 28,3	9 29,8	9 2,4	159,0	9,9
54	9 13,5	9 15,0	8 48,3	162,0	9,9	54	9 28,5	9 30,1	9 2,6	162,0	10,1
55	9 13,8	9 15,3	8 48,5	165,0	10,0	55	9 28,8	9 30,3	9 2,8	165,0	10,3
56	9 14,0	9 15,5	8 48,8	168,0	10,2	56	9 29,0	9 30,6	9 3,1	168,0	10,5
57	9 14,3	9 15,8	8 49,0	171,0	10,4	57	9 29,3	9 30,8	9 3,3	171,0	10,7
58	9 14,5	9 16,0	8 49,2	174,0	10,6	58	9 29,5	9 31,1	9 3,6	174,0	10,9
59	9 14,8	9 16,3	8 49,5	177,0	10,8	59	9 29,8	9 31,3	9 3,8	177,0	11,1
60	9 15,0	9 16,5	8 49,7	180,0	11,0	60	9 30,0	9 31,6	9 4,0	180,0	11,3

ILUSTRACIÓN 50: CORRECIÓN POR MINUTOS Y SEGUNDOS (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

N°		NOMBRE	Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
				°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
1 – α	And	*Alpheratz*	2.1	**357**	38.9	39.0	39.1	39.0	38.8	38.6	38.3	38.1	38.0	38.0	38.0	38.1
2 – β	Cas	*Caph*	2.4	**357**	26.5	26.8	26.8	26.7	26.5	26.1	25.7	25.4	25.3	25.2	25.4	25.6
3 – γ	Peg	*Algenib*	2.9	**356**	26.3	26.4	26.4	26.3	26.2	25.9	25.7	25.5	25.4	25.3	25.4	25.4
4 – α	Phe	*Ankaa*	2.4	**353**	11.3	11.4	11.5	11.4	11.3	11.0	10.7	10.4	10.3	10.2	10.3	10.4
5 – α	Cas	*Schedir*	2.5	**349**	35.5	35.7	35.8	35.8	35.6	35.2	34.9	34.6	34.3	34.3	34.3	34.5
6 – β	Cet	*Diphda*	2.2	**348**	51.4	51.5	51.5	51.5	51.3	51.1	50.9	50.7	50.5	50.5	50.5	50.5
7 – γ	Cas	*Navi*	2.8	**345**	31.3	31.6	31.8	31.7	31.5	31.2	30.8	30.4	30.1	30.0	30.1	30.2
8 – β	And	*Mirach*	2.4	**342**	17.4	17.5	17.6	17.6	17.4	17.2	16.9	16.7	16.5	16.4	16.4	16.4
9 – α	Eri	*Achernar*	0.6	**335**	23.3	23.5	23.7	23.8	23.6	23.4	23.0	22.7	22.4	22.3	22.3	22.4
10 – γ	And	*Almak*	2.3	**328**	43.1	43.3	43.4	43.4	43.3	43.1	42.8	42.5	42.3	42.2	42.1	42.1
11 – α	UMi	*Polaris*	2.1	**315**	36.8	51.4	64.0	71.6	71.3	63.5	50.5	34.8	20.2	9.8	5.2	8.0
12 – α	Ari	*Hamal*	2.2	**327**	55.6	55.7	55.8	55.8	55.7	55.5	55.3	55.1	54.8	54.7	54.7	54.7
13 – θ	Eri	*Acamar*	3.3	**315**	14.7	14.9	15.0	15.1	15.1	15.0	14.8	14.5	14.2	14.1	14.0	14.0
14 – α	Cet	*Menkar*	2.8	**314**	10.2	10.3	10.4	10.4	10.4	10.3	10.1	9.8	9.6	9.5	9.4	9.3
15 – β	Per	*Algol*	2.9	**312**	37.9	38.1	38.2	38.3	38.2	38.1	37.8	37.5	37.2	37.0	36.9	36.9
16 – α	Per	*Mirfak*	1.9	**308**	33.6	33.8	34.0	34.1	34.1	33.9	33.6	33.3	32.9	32.7	32.5	32.5
17 – η	Tau	*Alcyone*	3.0	**302**	49.9	50.0	50.1	50.2	50.2	50.1	49.9	49.6	49.4	49.2	49.0	49.0
18 – γ	Eri	*Zaurak*	3.2	**300**	15.5	15.6	15.8	15.9	15.9	15.8	15.6	15.4	15.2	15.0	14.8	14.8
19 – α	Tau	*Aldebaran*	1.1	**290**	43.9	44.0	44.1	44.2	44.3	44.2	44.0	43.8	43.5	43.3	43.2	43.1
20 – β	Ori	*Rigel*	0.3	**281**	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.8	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8	6.7
21 – α	Aur	*Capella*	0.2	**280**	27.3	27.4	27.6	27.8	27.9	27.8	27.6	27.3	27.0	26.7	26.4	26.3
22 – γ	Ori	*Bellatrix*	1.7	**278**	26.9	26.9	27.0	27.2	27.2	27.2	27.1	26.9	26.6	26.4	26.2	26.1
23 – β	Tau	*Elnath*	1.8	**278**	6.6	6.6	6.8	6.9	7.0	6.9	6.8	6.5	6.3	6.0	5.8	5.7
24 – δ	Ori	*Mintaka*	2.5	**276**	44.5	44.5	44.7	44.8	44.8	44.8	44.7	44.5	44.3	44.1	43.9	43.7
25 – ε	Ori	*Alnilam*	1.8	**275**	41.5	41.5	41.7	41.8	41.8	41.8	41.7	41.5	41.3	41.1	40.9	40.7
26 – ζ	Ori	*Alnitak*	2.0	**274**	33.4	33.4	33.6	33.7	33.7	33.7	33.6	33.4	33.2	33.0	32.8	32.7
27 – κ	Ori	*Saiph*	2.2	**272**	49.3	49.4	49.5	49.6	49.7	49.7	49.6	49.4	49.2	49.0	48.8	48.6
28 – α	Ori	*Betelgeuse*	0.6	**270**	56.1	56.1	56.2	56.4	56.4	56.4	56.3	56.1	55.9	55.7	55.5	55.3
29 – β	Aur	*Menkalinan*	2.1	**269**	44.9	45.0	45.1	45.3	45.4	45.4	45.3	45.0	44.7	44.4	44.1	43.9
30 – β	CMa	*Mirzam*	2.0	**264**	6.1	6.2	6.3	6.5	6.6	6.6	6.5	6.3	6.1	5.9	5.7	5.5
31 – α	Car	*Canopus*	-0.9	**263**	53.6	53.7	54.0	54.2	54.4	54.5	54.5	54.3	54.0	53.7	53.4	53.3
32 – γ	Gem	*Alhena*	1.9	**260**	16.9	16.9	17.0	17.1	17.2	17.2	17.1	17.0	16.8	16.5	16.3	16.1
33 – α	CMa	*Sirius*	-1.6	**258**	29.4	29.4	29.5	29.7	29.8	29.8	29.8	29.6	29.4	29.2	29.0	28.8
34 – ε	CMa	*Adhara*	1.6	**255**	8.6	8.6	8.8	8.9	9.1	9.1	9.1	8.9	8.7	8.5	8.3	8.1
35 – δ	CMa	*Wezen*	2.0	**252**	41.7	41.7	41.9	42.0	42.2	42.2	42.2	42.0	41.8	41.6	41.4	41.2
36 – η	CMa	*Aludra*	2.4	**248**	46.5	46.5	46.6	46.8	46.9	47.0	47.0	46.8	46.7	46.4	46.2	46.0
37 – α	Gem	*Castor*	1.6	**246**	1.8	1.7	1.8	2.0	2.1	2.1	2.1	1.9	1.7	1.5	1.2	1.0
38 – α	CMi	*Procyon*	0.5	**244**	54.7	54.7	54.7	54.9	55.0	55.0	55.0	54.8	54.7	54.4	54.2	54.0
39 – β	Gem	*Pollux*	1.2	**243**	21.8	21.8	21.9	22.0	22.1	22.2	22.1	22.0	21.8	21.6	21.3	21.1
40 – ζ	Pup		2.3	**238**	55.4	55.4	55.5	55.7	55.9	56.0	56.0	55.9	55.7	55.5	55.2	55.0
41 – γ	Vel	*Regor*	1.9	**237**	27.4	27.4	27.5	27.7	27.9	28.1	28.1	28.1	27.9	27.6	27.3	27.1
42 – ε	Car	*Avior*	1.7	**234**	15.6	15.6	15.8	16.1	16.4	16.6	16.7	16.7	16.5	16.2	15.8	15.5
43 – δ	Vel		2.0	**228**	40.7	40.7	40.8	41.0	41.3	41.5	41.6	41.6	41.4	41.2	40.8	40.5
44 – ζ	Hyd		3.3	**225**	53.2	53.1	53.1	53.2	53.3	53.4	53.4	53.3	53.2	53.0	52.8	52.5
45 – λ	Vel	*Suhail*	2.2	**222**	48.7	48.6	48.7	48.9	49.1	49.2	49.3	49.3	49.2	48.9	48.7	48.4
46 – β	Car	*Miaplacidus*	1.8	**221**	37.9	37.9	38.1	38.5	38.9	39.3	39.6	39.7	39.5	39.2	38.6	38.1
47 – ι	Car	*Aspidiske*	2.3	**220**	35.1	35.0	35.2	35.4	35.7	36.0	36.1	36.1	36.0	35.7	35.4	35.0
48 – α	Lyn		3.3	**219**	25.9	25.8	25.8	25.9	26.0	26.1	26.1	26.1	26.0	25.7	25.5	25.2
49 – α	Hyd	*Alphard*	2.2	**217**	51.3	51.3	51.3	51.4	51.5	51.5	51.6	51.6	51.4	51.3	51.1	50.8
50 – α	Leo	*Regulus*	1.3	**207**	38.4	38.3	38.3	38.3	38.4	38.5	38.6	38.6	38.5	38.3	38.1	37.8

ILUSTRACIÓN 51: ÁNGULO SIDÉREO ESTRELLAS 1 (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

Declinación

POSICIONES APARENTES DE LAS ESTRELLAS, 2020

Procivel, S.L.

N°		NOMBRE	Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
				°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
1 – α	And	*Alpheratz*	2.1	+ **29**	12.1	12.0	11.9	11.9	11.9	11.9	12.0	12.1	12.3	12.4	12.4	12.4
2 – β	Cas	*Caph*	2.4	+ **59**	15.8	15.7	15.5	15.4	15.3	15.3	15.4	15.6	15.7	15.9	16.0	16.1
3 – γ	Peg	*Algenib*	2.9	+ **15**	17.6	17.6	17.5	17.5	17.5	17.6	17.7	17.8	17.9	18.0	18.0	18.0
4 – α	Phe	*Ankaa*	2.4	– **42**	12.2	12.2	12.1	11.9	11.7	11.6	11.5	11.5	11.6	11.7	11.8	11.9
5 – α	Cas	*Schedir*	2.5	+ **56**	39.0	38.9	38.8	38.6	38.6	38.6	38.6	38.8	38.9	39.1	39.2	39.3
6 – β	Cet	*Diphda*	2.2	– **17**	52.9	52.9	52.8	52.7	52.6	52.5	52.4	52.3	52.3	52.4	52.5	52.5
7 – γ	Cas	*Navi*	2.8	+ **60**	49.6	49.6	49.5	49.3	49.2	49.2	49.3	49.4	49.6	49.7	49.9	50.0
8 – β	And	*Mirach*	2.4	+ **35**	43.6	43.6	43.5	43.4	43.4	43.4	43.5	43.6	43.7	43.8	43.9	44.0
9 – α	Eri	*Achernar*	0.6	– **57**	8.5	8.5	8.4	8.2	8.0	7.9	7.8	7.7	7.8	7.9	8.1	8.2
10 – γ	And	*Almak*	2.3	+ **42**	25.6	25.5	25.5	25.4	25.3	25.3	25.4	25.5	25.6	25.7	25.8	25.9
11 – α	UMi	*Polaris*	2.1	+ **89**	21.1	21.2	21.1	21.0	20.8	20.7	20.6	20.6	20.7	20.9	21.1	21.3
12 – α	Ari	*Hamal*	2.2	+ **23**	33.4	33.3	33.3	33.2	33.2	33.3	33.3	33.4	33.5	33.6	33.6	33.7
13 – θ	Eri	*Acamar*	3.3	– **40**	13.8	13.9	13.8	13.7	13.5	13.4	13.2	13.1	13.1	13.2	13.4	13.5
14 – α	Cet	*Menkar*	2.8	+ **4**	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	10.0	10.1	10.2	10.2	10.3	10.2	10.2
15 – β	Per	*Algol*	2.9	+ **41**	2.0	2.0	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2
16 – α	Per	*Mirfak*	1.9	+ **49**	56.0	56.0	55.9	55.9	55.8	55.7	55.7	55.7	55.8	55.9	56.0	56.1
17 – η	Tau	*Alcyone*	3.0	+ **24**	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	9.9	10.0	10.0	10.1	10.1	10.1
18 – γ	Eri	*Zaurak*	3.2	– **13**	27.4	27.4	27.4	27.3	27.3	27.1	27.0	26.9	26.9	26.9	27.0	27.1
19 – α	Tau	*Aldebaran*	1.1	+ **16**	32.8	32.8	32.8	32.8	32.8	32.8	32.9	32.9	33.0	33.0	33.0	33.0
20 – β	Ori	*Rigel*	0.3	– **8**	10.9	11.0	11.0	11.0	10.9	10.8	10.7	10.6	10.6	10.6	10.6	10.7
21 – α	Aur	*Capella*	0.2	+ **46**	1.0	1.1	1.1	1.1	1.0	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0	1.1
22 – γ	Ori	*Bellatrix*	1.7	+ **6**	21.9	21.9	21.9	21.9	21.9	22.0	22.0	22.1	22.1	22.1	22.1	22.0
23 – β	Tau	*Elnath*	1.8	+ **28**	37.3	37.4	37.4	37.4	37.3	37.3	37.3	37.3	37.4	37.4	37.4	37.4
24 – δ	Ori	*Mintaka*	2.5	– **0**	17.2	17.3	17.3	17.3	17.2	17.2	17.1	17.0	17.0	17.0	17.0	17.1
25 – ε	Ori	*Alnilam*	1.8	– **1**	11.5	11.6	11.6	11.6	11.5	11.5	11.4	11.3	11.3	11.3	11.3	11.4
26 – ζ	Ori	*Alnitak*	2.0	– **1**	56.1	56.2	56.2	56.1	56.1	56.0	56.0	55.9	55.8	55.8	55.9	56.0
27 – κ	Ori	*Saiph*	2.2	– **9**	39.9	40.0	40.0	40.0	40.0	39.9	39.8	39.7	39.6	39.6	39.7	39.8
28 – α	Ori	*Betelgeuse*	0.6	+ **7**	24.5	24.5	24.5	24.5	24.5	24.5	24.6	24.6	24.7	24.7	24.6	24.6
29 – β	Aur	*Menkalinan*	2.1	+ **44**	56.9	56.9	57.0	57.0	56.9	56.8	56.8	56.8	56.7	56.7	56.8	56.8
30 – β	CMa	*Mirzam*	2.0	– **17**	58.1	58.2	58.3	58.2	58.2	58.1	58.0	57.9	57.8	57.8	57.9	58.0
31 – α	Car	*Canopus*	-0.9	– **52**	42.6	42.7	42.8	42.7	42.7	42.5	42.3	42.2	42.1	42.1	42.2	42.4
32 – γ	Gem	*Alhena*	1.9	+ **16**	22.8	22.8	22.8	22.8	22.8	22.8	22.9	22.9	22.9	22.9	22.8	22.8
33 – α	CMa	*Sirius*	-1.6	– **16**	44.8	44.9	44.9	44.9	44.8	44.8	44.6	44.5	44.5	44.5	44.6	44.7
34 – ε	CMa	*Adhara*	1.6	– **28**	60.1	60.2	60.3	60.3	60.2	60.1	60.0	59.9	59.8	59.8	59.9	60.0
35 – δ	CMa	*Wezen*	2.0	– **26**	25.6	25.7	25.8	25.8	25.8	25.7	25.5	25.4	25.3	25.3	25.4	25.5
36 – η	CMa	*Aludra*	2.4	– **29**	20.6	20.8	20.8	20.8	20.8	20.7	20.6	20.4	20.4	20.4	20.4	20.6
37 – α	Gem	*Castor*	1.6	+ **31**	50.5	50.6	50.6	50.6	50.7	50.6	50.6	50.6	50.5	50.5	50.4	50.4
38 – α	CMi	*Procyon*	0.5	+ **5**	10.3	10.3	10.2	10.2	10.3	10.3	10.4	10.4	10.4	10.4	10.3	10.2
39 – β	Gem	*Pollux*	1.2	+ **27**	58.5	58.6	58.6	58.6	58.6	58.6	58.6	58.6	58.5	58.5	58.5	58.4
40 – ζ	Pup		2.3	– **40**	3.6	3.8	3.9	3.9	3.9	3.8	3.7	3.5	3.4	3.4	3.4	3.6
41 – γ	Vel	*Regor*	1.9	– **47**	23.7	23.9	24.0	24.1	24.1	24.0	23.8	23.7	23.6	23.5	23.6	23.7
42 – ε	Car	*Avior*	1.7	– **59**	34.4	34.6	34.7	34.8	34.8	34.7	34.5	34.4	34.2	34.2	34.2	34.4
43 – δ	Vel		2.0	– **54**	46.8	47.0	47.2	47.2	47.2	47.2	47.0	46.9	46.7	46.7	46.7	46.8
44 – ζ	Hyd		3.3	+ **5**	52.1	52.0	52.0	52.0	52.0	52.1	52.1	52.1	52.1	52.1	52.0	52.0
45 – λ	Vel	*Suhail*	2.2	– **43**	30.7	30.9	31.0	31.1	31.1	31.1	31.0	30.8	30.7	30.6	30.7	30.8
46 – β	Car	*Miaplacidus*	1.8	– **69**	47.8	48.0	48.2	48.3	48.3	48.3	48.2	48.0	47.9	47.8	47.8	47.9
47 – ι	Car	*Aspidiske*	2.3	– **59**	21.4	21.6	21.8	21.9	21.9	21.9	21.7	21.6	21.4	21.4	21.4	21.5
48 – α	Lyn		3.3	+ **34**	18.3	18.4	18.4	18.5	18.5	18.5	18.5	18.4	18.3	18.3	18.2	18.1
49 – α	Hyd	*Alphard*	2.2	– **8**	44.7	44.8	44.9	44.9	44.9	44.9	44.8	44.7	44.7	44.7	44.8	44.9
50 – α	Leo	*Regulus*	1.3	+ **11**	52.1	52.1	52.1	52.1	52.1	52.1	52.2	52.2	52.1	52.1	52.0	51.9

ILUSTRACIÓN 52: DECLINACIÓN ESTRELLAS 1 (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

N°		NOMBRE	Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
				°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
51 – μ	Vel		2.8	**198**	5.3	5.1	5.1	5.2	5.3	5.5	5.7	5.8	5.7	5.6	5.3	5.0
52 – ν	Hyd		3.3	**197**	20.8	20.6	20.6	20.6	20.7	20.8	20.9	20.9	20.9	20.7	20.5	20.3
53 – β	UMa	*Merak*	2.4	**194**	14.4	14.1	14.0	14.1	14.3	14.5	14.6	14.7	14.6	14.5	14.2	13.8
54 – α	UMa	*Dubhe*	2.0	**193**	45.7	45.4	45.3	45.4	45.6	45.8	46.0	46.1	46.1	45.9	45.5	45.1
55 – β	Leo	*Denebola*	2.2	**182**	28.9	28.7	28.6	28.6	28.6	28.7	28.8	28.9	28.9	28.8	28.6	28.4
56 – γ	Crv	*Gienah*	2.8	**175**	47.5	47.3	47.2	47.2	47.2	47.3	47.4	47.5	47.5	47.4	47.3	47.0
57 – α	Cru	*Acrux*	1.6	**173**	4.1	3.7	3.5	3.5	3.6	3.8	4.1	4.4	4.5	4.5	4.2	3.8
58 – γ	Cru	*Gacrux*	1.6	**171**	55.7	55.4	55.2	55.2	55.3	55.4	55.7	55.9	56.0	55.9	55.7	55.4
59 – γ	Cen	*Muhlifain*	2.4	**169**	20.7	20.4	20.2	20.2	20.2	20.3	20.5	20.6	20.7	20.7	20.5	20.2
60 – β	Cru	*Mimosa*	1.5	**167**	46.5	46.2	46.0	45.9	45.9	46.1	46.4	46.6	46.7	46.7	46.5	46.1
61 – ε	UMa	*Alioth*	1.7	**166**	16.6	16.2	16.0	15.9	16.0	16.2	16.4	16.6	16.7	16.7	16.5	16.2
62 – α	CVe	*Cor Caroli*	2.9	**165**	45.7	45.5	45.3	45.2	45.3	45.4	45.5	45.6	45.7	45.7	45.5	45.3
63 – ε	Vir	*Vindemiatrix*	3.0	**164**	12.6	12.4	12.2	12.2	12.2	12.2	12.3	12.4	12.4	12.4	12.3	12.1
64 – ζ	UMa	*Mizar*	2.4	**158**	49.3	48.9	48.7	48.6	48.6	48.8	49.0	49.2	49.3	49.3	49.2	49.0
65 – α	Vir	*Spica*	1.2	**158**	26.5	26.2	26.1	26.0	26.0	26.0	26.1	26.2	26.2	26.2	26.1	25.9
66 – η	UMa	*Alkaid*	1.9	**152**	55.3	55.0	54.8	54.7	54.7	54.8	54.9	55.1	55.3	55.3	55.2	55.0
67 – β	Cen	*Hadar*	0.9	**148**	41.6	41.1	40.8	40.6	40.6	40.7	40.8	41.1	41.3	41.4	41.3	41.0
68 – θ	Cen	*Menkent*	2.3	**148**	2.3	2.0	1.8	1.7	1.6	1.7	1.7	1.9	2.0	2.0	2.0	1.7
69 – α	Boo	*Arcturus*	0.2	**145**	51.7	51.4	51.2	51.1	51.1	51.1	51.2	51.3	51.4	51.4	51.4	51.2
70 – α	Cen	*Rigil Kent*	0.1	**139**	45.8	45.4	45.0	44.8	44.7	44.8	44.9	45.2	45.5	45.6	45.5	45.2
71 – α	Lib	*Zubenelgenubi*	2.9	**136**	60.5	60.3	60.1	59.9	59.8	59.8	59.9	60.0	60.1	60.1	60.1	59.9
72 – β	UMi	*Kochab*	2.2	**137**	20.5	19.8	19.2	18.9	18.8	19.1	19.6	20.1	20.7	21.0	21.1	20.9
73 – β	Lib	*Zubeneschamali*	2.7	**130**	29.1	28.8	28.6	28.5	28.4	28.3	28.4	28.5	28.6	28.7	28.6	28.5
74 – α	CBr	*Gemma*	2.3	**126**	7.4	7.1	6.9	6.7	6.6	6.6	6.6	6.8	6.9	7.0	7.0	6.9
75 – α	Ser	*Unuk*	2.8	**123**	41.6	41.3	41.1	41.0	40.8	40.8	40.8	40.9	41.0	41.1	41.1	41.0
76 – α	Sco	*Antares*	1.1	**112**	21.0	20.7	20.5	20.2	20.1	20.0	20.0	20.1	20.2	20.3	20.4	20.3
77 – α	TrA	*Atria*	1.9	**107**	19.2	18.6	18.0	17.5	17.1	16.9	16.9	17.2	17.6	17.9	18.1	18.0
78 – ε	Sco		2.4	**107**	8.7	8.4	8.1	7.9	7.7	7.6	7.6	7.6	7.8	7.9	8.0	7.9
79 – η	Oph	*Sabik*	2.6	**102**	7.6	7.4	7.2	7.0	6.8	6.7	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0	6.9
80 – α	Her	*Rasalgethi*	3.5	**101**	7.1	6.9	6.7	6.4	6.3	6.2	6.2	6.2	6.4	6.5	6.6	6.5
81 – λ	Sco	*Shaula*	1.7	**96**	16.1	15.9	15.6	15.3	15.1	14.9	14.9	14.9	15.1	15.2	15.3	15.3
82 – α	Oph	*Rasalhague*	2.1	**96**	2.5	2.4	2.1	1.9	1.7	1.6	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.0
83 – θ	Sco		2.0	**95**	19.3	19.1	18.8	18.5	18.2	18.1	18.0	18.1	18.2	18.4	18.5	18.4
84 – γ	Dra	*Eltanin*	2.4	**90**	44.5	44.3	44.0	43.7	43.5	43.4	43.4	43.5	43.7	44.0	44.2	44.3
85 – ε	Sgr	*Kaus Australis*	2.0	**83**	38.2	38.0	37.7	37.4	37.2	37.0	36.9	36.9	37.0	37.2	37.3	37.3
86 – α	Lyr	*Vega*	0.1	**80**	36.3	36.2	35.9	35.7	35.4	35.3	35.2	35.3	35.5	35.6	35.8	35.9
87 – σ	Sgr	*Nunki*	2.1	**75**	53.1	52.9	52.7	52.4	52.2	52.0	51.9	51.9	52.0	52.1	52.2	52.2
88 – α	Aqu	*Altair*	0.9	**62**	4.2	4.1	3.9	3.7	3.4	3.3	3.1	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5
89 – γ	Cyg	*Sadr*	2.3	**54**	16.4	16.3	16.2	15.9	15.6	15.4	15.3	15.2	15.3	15.5	15.7	15.8
90 – α	Pav	*Peacock*	2.1	**53**	12.7	12.5	12.3	11.9	11.5	11.2	10.9	10.8	10.9	11.1	11.3	11.5
91 – α	Cyg	*Deneb*	1.3	**49**	28.9	28.8	28.7	28.4	28.1	27.9	27.7	27.7	27.8	28.0	28.2	28.3
92 – α	Cep	*Alderamin*	2.6	**40**	14.9	14.9	14.8	14.5	14.1	13.7	13.5	13.4	13.5	13.8	14.1	14.4
93 – ε	Peg	*Enif*	2.5	**33**	43.0	42.9	42.9	42.7	42.5	42.2	42.0	41.9	41.9	42.0	42.1	42.2
94 – δ	Cap	*Deneb Algedi*	3.0	**32**	58.4	58.4	58.3	58.1	57.9	57.6	57.4	57.3	57.3	57.3	57.4	57.5
95 – α	Gru	*Al Nair*	2.2	**27**	38.4	38.4	38.3	38.1	37.8	37.4	37.2	37.0	36.9	37.0	37.2	37.3
96 – β	Gru		2.2	**19**	2.8	2.8	2.8	2.6	2.3	2.0	1.7	1.5	1.4	1.5	1.6	1.8
97 – α	PsA	*Fomalhaut*	1.3	**15**	19.2	19.2	19.2	19.0	18.8	18.6	18.3	18.1	18.0	18.1	18.2	18.3
98 – β	Peg	*Scheat*	2.6	**13**	49.2	49.3	49.3	49.1	48.9	48.7	48.4	48.3	48.2	48.2	48.3	48.4
99 – α	Peg	*Markab*	2.6	**13**	34.0	34.1	34.0	33.9	33.7	33.5	33.3	33.1	33.0	33.0	33.1	33.2

ILUSTRACIÓN 53: ÁNGULO SIDÉREO ESTRELLAS 2 (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

POSICIONES APARENTES DE LAS ESTRELLAS, 2020

Procivel, S.L.

N°		NOMBRE	Mag		Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
				°	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′	′
51 – μ	Vel		2.8	– 49	31.3	31.5	31.7	31.8	31.9	31.9	31.8	31.7	31.5	31.4	31.4	31.5
52 – ν	Hyd		3.3	– 16	17.8	17.9	18.0	18.1	18.1	18.1	18.0	17.9	17.9	17.9	17.9	18.0
53 – β	UMa	*Merak*	2.4	+ 56	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.7	16.7	16.6	16.4	16.3	16.1	16.0
54 – α	UMa	*Dubhe*	2.0	+ 61	38.4	38.4	38.6	38.7	38.8	38.8	38.7	38.6	38.5	38.3	38.1	38.1
55 – β	Leo	*Denebola*	2.2	+ 14	27.6	27.5	27.5	27.6	27.6	27.6	27.7	27.7	27.6	27.6	27.4	27.3
56 – γ	Crv	*Gienah*	2.8	– 17	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.3	39.3	39.2	39.2	39.2	39.2	39.3
57 – α	Cru	*Acrux*	1.6	– 63	12.2	12.4	12.5	12.7	12.8	12.9	12.9	12.8	12.7	12.6	12.5	12.5
58 – γ	Cru	*Gacrux*	1.6	– 57	13.2	13.3	13.5	13.6	13.8	13.8	13.8	13.7	13.6	13.5	13.4	13.4
59 – γ	Cen	*Muhlifain*	2.4	– 49	3.8	4.0	4.1	4.3	4.4	4.4	4.4	4.4	4.3	4.2	4.1	4.1
60 – β	Cru	*Mimosa*	1.5	– 59	47.5	47.6	47.8	48.0	48.1	48.2	48.2	48.1	48.0	47.9	47.8	47.8
61 – ε	UMa	*Alioth*	1.7	+ 55	50.9	50.9	51.0	51.1	51.2	51.3	51.3	51.3	51.1	51.0	50.8	50.6
62 – α	CVe	*Cor Caroli*	2.9	+ 38	12.5	12.5	12.5	12.6	12.7	12.8	12.8	12.8	12.7	12.6	12.4	12.2
63 – ε	Vir	*Vindemiatrix*	3.0	+ 10	51.1	51.0	51.0	51.0	51.1	51.1	51.2	51.2	51.2	51.1	51.0	50.9
64 – ζ	UMa	*Mizar*	2.4	+ 54	49.1	49.1	49.1	49.3	49.4	49.5	49.5	49.5	49.4	49.2	49.0	48.8
65 – α	Vir	*Spica*	1.2	– 11	15.8	15.9	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	16.0	15.9	15.9	16.0	16.0
66 – η	UMa	*Alkaid*	1.9	+ 49	12.6	12.6	12.7	12.8	12.9	13.0	13.1	13.0	12.9	12.8	12.6	12.4
67 – β	Cen	*Hadar*	0.9	– 60	27.7	27.8	28.0	28.1	28.3	28.4	28.4	28.4	28.3	28.2	28.1	28.0
68 – θ	Cen	*Menkent*	2.3	– 36	27.8	27.9	28.0	28.1	28.2	28.3	28.3	28.2	28.2	28.1	28.1	28.1
69 – α	Boo	*Arcturus*	0.2	+ 19	4.7	4.6	4.6	4.6	4.7	4.8	4.8	4.8	4.8	4.7	4.6	4.5
70 – α	Cen	*Rigil Kent*	0.1	– 60	54.7	54.7	54.8	55.0	55.1	55.2	55.3	55.3	55.2	55.1	55.0	54.9
71 – α	Lib	*Zubenelgenubi*	2.9	– 16	7.3	7.4	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
72 – β	UMi	*Kochab*	2.2	+ 74	4.2	4.1	4.2	4.3	4.5	4.6	4.7	4.7	4.6	4.4	4.2	4.0
73 – β	Lib	*Zubeneschamali*	2.7	– 9	27.3	27.3	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.4	27.3	27.3	27.4	27.4
74 – α	CBr	*Gemma*	2.3	+ 26	38.8	38.7	38.7	38.7	38.8	39.0	39.0	39.1	39.1	39.0	38.9	38.7
75 – α	Ser	*Unuk*	2.8	+ 6	21.8	21.7	21.7	21.7	21.8	21.8	21.9	21.9	21.9	21.9	21.8	21.7
76 – α	Sco	*Antares*	1.1	– 26	28.4	28.4	28.5	28.5	28.5	28.5	28.6	28.6	28.6	28.5	28.5	28.5
77 – α	TrA	*Atria*	1.9	– 69	3.5	3.4	3.4	3.5	3.6	3.8	3.9	4.0	4.0	3.9	3.8	3.7
78 – ε	Sco		2.4	– 34	19.5	19.6	19.6	19.6	19.7	19.7	19.8	19.8	19.8	19.8	19.7	19.7
79 – η	Oph	*Sabik*	2.6	– 15	44.8	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9	44.9
80 – α	Her	*Rasalgethi*	3.5	+ 14	22.1	22.0	21.9	22.0	22.0	22.1	22.2	22.3	22.3	22.3	22.2	22.1
81 – λ	Sco	*Shaula*	1.7	– 37	6.9	6.9	6.9	6.9	7.0	7.0	7.0	7.1	7.1	7.1	7.1	7.0
82 – α	Oph	*Rasalhague*	2.1	+ 12	32.8	32.7	32.6	32.6	32.7	32.8	32.9	33.0	33.0	32.9	32.9	32.8
83 – θ	Sco		2.0	– 43	0.4	0.4	0.4	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.5
84 – γ	Dra	*Eltanin*	2.4	+ 51	29.1	29.0	28.9	28.9	29.1	29.2	29.4	29.5	29.5	29.5	29.4	29.3
85 – ε	Sgr	*Kaus Australis*	2.0	– 34	22.4	22.4	22.3	22.3	22.3	22.4	22.4	22.4	22.5	22.5	22.5	22.4
86 – α	Lyr	*Vega*	0.1	+ 38	48.1	48.0	47.9	47.9	48.0	48.1	48.3	48.4	48.5	48.5	48.4	48.3
87 – σ	Sgr	*Nunki*	2.1	– 26	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2	16.2
88 – α	Aqu	*Altair*	0.9	+ 8	55.3	55.2	55.2	55.2	55.2	55.3	55.4	55.5	55.6	55.6	55.5	55.5
89 – γ	Cyg	*Sadr*	2.3	+ 40	19.3	19.1	19.0	19.0	19.0	19.2	19.3	19.5	19.6	19.7	19.6	19.6
90 – α	Pav	*Peacock*	2.1	– 56	40.3	40.2	40.1	40.0	39.9	39.9	40.0	40.1	40.2	40.3	40.3	40.2
91 – α	Cyg	*Deneb*	1.3	+ 45	21.2	21.0	20.9	20.8	20.9	21.0	21.2	21.3	21.5	21.5	21.5	21.5
92 – α	Cep	*Alderamin*	2.6	+ 62	40.3	40.1	40.0	39.9	39.9	40.0	40.2	40.4	40.5	40.7	40.7	40.7
93 – ε	Peg	*Enif*	2.5	+ 9	58.0	57.9	57.9	57.9	57.9	58.0	58.1	58.2	58.3	58.3	58.3	58.3
94 – δ	Cap	*Deneb Algedi*	3.0	– 16	2.3	2.3	2.3	2.2	2.1	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.1
95 – α	Gru	*Al Nair*	2.2	– 46	52.1	52.0	51.9	51.7	51.6	51.6	51.5	51.6	51.7	51.8	51.9	51.9
96 – β	Gru		2.2	– 46	47.1	47.0	46.9	46.7	46.6	46.5	46.5	46.5	46.6	46.7	46.8	46.8
97 – α	PsA	*Fomalhaut*	1.3	– 29	31.2	31.2	31.1	31.0	30.9	30.8	30.7	30.7	30.7	30.8	30.9	30.9
98 – β	Peg	*Scheat*	2.6	+ 28	11.5	11.4	11.3	11.3	11.3	11.4	11.5	11.6	11.8	11.8	11.9	11.9
99 – α	Peg	*Markab*	2.6	+ 15	18.7	18.7	18.6	18.6	18.6	18.7	18.8	19.0	19.0	19.1	19.1	19.1

ILUSTRACIÓN 54: DECLINACIÓN ESTRELLAS 2 (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

CORRECCIONES PARA OBTENER LA ALTURA VERDADERA DEL LIMBO INFERIOR DEL SOL, PLANETA O ESTRELLA

TABLA A

DEPRESION DE HORIZONTE

Elevacion del observador en metros	Correccion	Elevacion del observador en metros	Correccion
m	′	m	′
1.9		15.7	− 7.0
2.1	− 2.6	15.9	− 7.1
2.3	− 2.7	16.1	− 7.1
2.5	− 2.8	16.3	− 7.2
2.7	− 2.9	16.5	− 7.2
2.9	− 3.0	16.7	− 7.3
3.1	− 3.1	16.9	− 7.3
3.3	− 3.2	17.1	− 7.3
3.5	− 3.3	17.3	− 7.4
3.7	− 3.4	17.5	− 7.4
3.9	− 3.5	17.7	− 7.5
4.1	− 3.6	17.9	− 7.5
4.3	− 3.7	18.1	− 7.6
4.5	− 3.8	18.3	− 7.6
4.7	− 3.8	18.5	− 7.6
4.9	− 3.9	18.7	− 7.7
5.1	− 4.0	18.9	− 7.7
5.3	− 4.1	19.1	− 7.8
5.5	− 4.2	19.3	− 7.8
5.7	− 4.2	19.5	− 7.8
5.9	− 4.3	19.7	− 7.9
6.1	− 4.4	19.9	− 7.9
6.3	− 4.5	20.1	− 8.0
6.5	− 4.5	20.3	− 8.0
6.7	− 4.6	20.5	− 8.0
6.9	− 4.7	20.7	− 8.1
7.1	− 4.7	20.9	− 8.1
7.3	− 4.8	21.1	− 8.2
7.5	− 4.9	21.3	− 8.2
7.7	− 4.9	21.5	− 8.2
7.9	− 5.0	21.7	− 8.3
8.1	− 5.1	21.9	− 8.3
8.3	− 5.1	22.1	− 8.3
8.5	− 5.2	22.3	− 8.4
8.7	− 5.2	22.5	− 8.4
8.9	− 5.3	22.7	− 8.5
9.1	− 5.4	22.9	− 8.5
9.3	− 5.4	23.1	− 8.5
9.5	− 5.5	23.3	− 8.6
9.7	− 5.5	23.5	− 8.6
9.9	− 5.6	23.7	− 8.6
10.1	− 5.6	23.9	− 8.7
10.3	− 5.7	24.1	− 8.7
10.5	− 5.8	24.3	− 8.8
10.7	− 5.8	24.5	− 8.8
10.9	− 5.9	24.7	− 8.8
11.1	− 5.9	24.9	− 8.9
11.3	− 6.0	25.1	− 8.9
11.5	− 6.0	25.3	− 8.9
11.7	− 6.1	25.5	− 9.0
11.9	− 6.1	25.7	− 9.0
12.1	− 6.2	25.9	− 9.0
12.3	− 6.2	26.1	− 9.1
12.5	− 6.3	26.3	− 9.1
12.7	− 6.3	26.5	− 9.1
12.9	− 6.4	26.7	− 9.2
13.1	− 6.4	26.9	− 9.2
13.3	− 6.5	27.1	− 9.2
13.5	− 6.5	27.3	− 9.3
13.7	− 6.6	27.5	− 9.3
13.9	− 6.6	27.7	− 9.3
14.1	− 6.7	27.9	− 9.4
14.3	− 6.7	28.1	− 9.4
14.5	− 6.8	28.3	− 9.4
14.7	− 6.8	28.5	− 9.5
14.9	− 6.9	28.7	− 9.5
15.1	− 6.9	28.9	− 9.5
15.3	− 6.9	29.1	− 9.6
15.5	− 7.0	29.3	− 9.6

TABLA B = SOL (LIMBO INFERIOR)

SEMIDIAMETRO, REFRACCION Y PARALAJE

Altura observada limbo inferior Sol	Correccion	Altura observada limbo inferior Sol	Correccion	Altura observada limbo inferior Sol	Correccion	Altura observada limbo inferior Sol	Correccion
° ′	′	° ′	′	° ′	′	° ′	′
6 0	+ 7.7	9 0	+ 10.3	15 0	+ 12.6	25 0	+ 14.1
6 6	+ 7.9	9 12	+ 10.4	15 20	+ 12.7	25 30	+ 14.1
6 12	+ 8.0	9 24	+ 10.5	15 40	+ 12.7	26 0	+ 14.2
6 18	+ 8.1	9 36	+ 10.7	16 0	+ 12.8	26 30	+ 14.2
6 24	+ 8.2	9 48	+ 10.8	16 20	+ 12.9	28 0	+ 14.3
6 30	+ 8.3	10 0	+ 10.9	16 40	+ 12.9	29 0	+ 14.4
6 36	+ 8.4	10 12	+ 11.0	17 0	+ 13.0	30 0	+ 14.5
6 42	+ 8.5	10 24	+ 11.1	17 20	+ 13.1	32 0	+ 14.6
6 48	+ 8.6	10 36	+ 11.2	17 40	+ 13.1	34 0	+ 14.7
6 54	+ 8.7	10 48	+ 11.2	18 0	+ 13.2	36 0	+ 14.8
7 0	+ 8.8	11 0	+ 11.3	18 20	+ 13.2	39 0	+ 14.9
7 6	+ 8.9	11 12	+ 11.4	18 40	+ 13.3	42 0	+ 15.0
7 12	+ 9.0	11 24	+ 11.5	19 0	+ 13.4	45 0	+ 15.1
7 18	+ 9.1	11 36	+ 11.6	19 20	+ 13.4	48 0	+ 15.2
7 24	+ 9.2	11 48	+ 11.6	19 40	+ 13.5	51 0	+ 15.3
7 30	+ 9.2	12 0	+ 11.7	20 0	+ 13.5	53 0	+ 15.4
7 36	+ 9.3	12 12	+ 11.8	20 20	+ 13.5	56 0	+ 15.4
7 42	+ 9.4	12 24	+ 11.9	20 40	+ 13.6	59 0	+ 15.5
7 48	+ 9.5	12 36	+ 11.9	21 0	+ 13.6	62 0	+ 15.6
7 54	+ 9.6	12 48	+ 12.0	21 20	+ 13.7	65 0	+ 15.6
8 0	+ 9.6	13 0	+ 12.0	21 40	+ 13.7	68 0	+ 15.7
8 6	+ 9.7	13 12	+ 12.1	22 0	+ 13.8	71 0	+ 15.7
8 12	+ 9.8	13 24	+ 12.2	22 20	+ 13.8	74 0	+ 15.8
8 18	+ 9.9	13 36	+ 12.2	22 40	+ 13.8	77 0	+ 15.8
8 24	+ 9.9	13 48	+ 12.3	23 0	+ 13.9	80 0	+ 15.9
8 30	+ 10.0	14 0	+ 12.3	23 20	+ 13.9	83 0	+ 15.9
8 36	+ 10.1	14 12	+ 12.4	23 40	+ 13.9	86 0	+ 15.9
8 42	+ 10.1	14 24	+ 12.4	24 0	+ 14.0	88 0	+ 16.0
8 48	+ 10.2	14 36	+ 12.5	24 20	+ 14.0	90 0	+ 16.0
8 54	+ 10.3	14 48	+ 12.5	24 40	+ 14.0		

CORREC. ADICIONAL

Fecha	Correccion
	′
Ene 1	
	+ 0.3
Ene 23	
	+ 0.2
Feb 27	
	+ 0.1
Mar 22	
	+ 0.0
Abr 13	
	− 0.1
May 7	
	− 0.2
Jun 11	
	− 0.3
Jul 28	
	− 0.2
Sep 2	
	− 0.1
Sep 26	
	+ 0.0
Oct 18	
	+ 0.1
Nov 10	
	+ 0.2
Dic 16	
	+ 0.3
Dic 31	

TABLA C = PLANETAS Y ESTRELLAS

REFRACCION

Altura observada	Correc.	Altura observada	Correc.
° ′	′	° ′	′
6 0	− 8.3	14 0	− 3.8
6 15	− 8.1	15 0	− 3.6
6 30	− 7.8	16 0	− 3.4
6 45	− 7.6	17 0	− 3.1
7 0	− 7.3	18 0	− 3.0
7 15	− 7.1	19 0	− 2.8
7 30	− 6.9	20 0	− 2.7
7 45	− 6.7	21 0	− 2.5
8 0	− 6.5	22 0	− 2.4
8 15	− 6.4	23 0	− 2.3
8 30	− 6.2	24 0	− 2.2
8 45	− 6.0	25 0	− 2.1
9 0	− 5.9	26 0	− 2.0
9 15	− 5.7	27 0	− 1.9
9 30	− 5.6	28 0	− 1.8
9 45	− 5.5	30 0	− 1.7
10 0	− 5.3	32 0	− 1.6
10 15	− 5.2	34 0	− 1.4
10 30	− 5.1	36 0	− 1.3
10 45	− 5.0	38 0	− 1.2
11 0	− 4.9	40 0	− 1.2
11 15	− 4.8	45 0	− 1.0
11 30	− 4.7	50 0	− 0.8
11 45	− 4.6	55 0	− 0.7
12 0	− 4.5	60 0	− 0.6
12 15	− 4.4	65 0	− 0.5
12 30	− 4.3	70 0	− 0.4
12 45	− 4.2	75 0	− 0.3
13 0	− 4.1	80 0	− 0.2
13 15	− 4.1	85 0	− 0.1
13 30	− 4.0	90 0	− 0.0

PARALAJE

FECHA	VENUS PARA CUALQUIER ALTURA	MARTE ALTURAS OBSERVADAS < 30°	> 30° < 60°	> 60°
	′	′	′	′
Ene 1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0	+ 0.0
Ene 21	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Feb 10	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Mar 1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Mar 21	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Abr 10	+ 0.3	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Abr 30	+ 0.3	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
May 20	+ 0.5	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Jun 9	+ 0.5	+ 0.1	+ 0.1	+ 0.0
Jun 29	+ 0.4	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.0
Jul 19	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.1
Ago 8	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.1
Ago 28	+ 0.2	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1
Sep 17	+ 0.2	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1
Oct 7	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1
Oct 27	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1
Nov 16	+ 0.1	+ 0.3	+ 0.2	+ 0.1
Dic 6	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.2	+ 0.1
Dic 26	+ 0.1	+ 0.2	+ 0.1	+ 0.0

ILUSTRACIÓN 55: CORRECCIONES A LA ALTURA DE LOS ASTROS (FUENTE: ALMANAQUE NÁUTICO 2020)

AVISO DE RESPONSABILIDAD:

Este documento es el resultado del Trabajo Fin de Grado de un alumno, siendo su autor responsable de su contenido.

Se trata por tanto de un trabajo académico que puede contener errores detectados por el tribunal y que pueden no haber sido corregidos por el autor en la presente edición.

Debido a dicha orientación académica no debe hacerse un uso profesional de su contenido.

Este tipo de trabajos, junto con su defensa, pueden haber obtenido una nota que oscila entre 5 y 10 puntos, por lo que la calidad y el número de errores que puedan contener difieren en gran medida entre unos trabajos y otros,

La Universidad de Cantabria, la Escuela Técnica Superior de Náutica, los miembros del Tribunal de Trabajos Fin de Grado, así como el profesor tutor/director no son responsables del contenido último de este Trabajo.”