

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE ÉLECTRIQUE
M. Ing.

PAR
Hubert LACOMA

ANALYSE MULTI-ÉCHELLES PAR ONDELETTES COMPLEXES: APPLICATION AUX
SIGNAUX ÉLECTROPHYSIOLOGIQUES INTRACRÂNIENS CHEZ LES PATIENTS
ÉPILEPTIQUES

MONTRÉAL, LE 19 NOVEMBRE 2014

© Tous droits réservés, Hubert LACOMA, 2014

© Tous droits réservés

Cette licence signifie qu'il est interdit de reproduire, d'enregistrer ou de diffuser en tout ou en partie, le présent document. Le lecteur qui désire imprimer ou conserver sur un autre media une partie importante de ce document, doit obligatoirement en demander l'autorisation à l'auteur.

PRÉSENTATION DU JURY

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE:

M. Jean-Marc Lina, directeur de mémoire
Département de génie électrique, École de Technologie Supérieure

M. Gheorghe Marcel Gabrea, président du jury
Département de génie électrique, École Technologie Supérieure

M. Christophe Grova, examinateur externe
Département de génie biomédical, Université McGill

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 21 OCTOBRE 2014

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de recherche Jean-Marc Lina qui m'a supervisé et donné l'opportunité d'approfondir mes connaissances dans le domaine du génie appliqué aux neurosciences. Je tiens à remercier le professeur Jean Gotman et tout particulièrement son étudiant gradué Kais Gadhomi.

Je souhaite remercier Ingrid pour son soutien tout au long de cette Maîtrise et en particulier lors de la rédaction du mémoire. Je souhaite aussi remercier et dédier ce mémoire à ma mère qui a toujours été un modèle de courage, de persévérance et de vertu pour mes sœurs et moi.

ANALYSE MULTI-ÉCHELLES PAR ONDELETTES COMPLEXES: APPLICATION AUX SIGNAUX ÉLECTROPHYSIOLOGIQUES INTRACRÂNIENS CHEZ LES PATIENTS ÉPILEPTIQUES

Hubert LACOMA

RÉSUMÉ

L'objectif principal de cette étude est la conception d'un environnement de calcul logiciel, visant à mettre en place des outils d'analyse, dédiés à la caractérisation des signaux d'électroencéphalogrammes (EEG) intracrâniens chez les patients souffrants d'épilepsie. Plus précisément, cette étude vise à discriminer les phases préictales (avant la crise) des phases interictales (entre les crises).

Lors de l'étude des signaux EEG, on observe trois caractéristiques. La première est la présence d'un comportement en loi de puissance de la densité spectrale de puissance (DSP). Ce comportement de la DSP présenté dans les travaux de Yamaguchi (2003) pourrait s'expliquer par la présence d'invariance d'échelles dans le signal. La seconde est l'augmentation du nombre d'oscillations hautes fréquences (OHF) à l'approche d'une crise. Ce résultat présenté par Zijlmans *et al.* (2011) implique une modification de l'allure de la DSP à l'approche de la crise. La troisième est l'utilisation de signaux EEG intracrâniens qui permettent d'observer les hautes fréquences grâce à un bon rapport signal sur bruit (RSB). Ces trois caractéristiques permettent d'envisager l'étude des propriétés d'invariance d'échelles pour la discrimination des phases interictales et préictales. Une des contributions de ce mémoire a été de développer un estimateur des propriétés d'invariance d'échelles qui utilise les ondelettes complexes symétriques de Daubechies introduites par Lina et Mayrand (1993). Ces ondelettes améliorent les performances de l'estimateur ainsi que la précision temporelle lors du calcul ondelettes. Une autre contribution significative est l'application de l'estimateur aux signaux EEG intracrâniens en utilisant une méthodologie à fenêtre glissante basé sur le test d'hypothèse.

L'utilisation de cette méthodologie sur des signaux EEG intracrâniens chez des patients épileptiques durant la phase interictale et préictale a confirmé la présence de propriétés d'invariance d'échelles. Cette application a aussi montré des variations significatives de ces propriétés lors du passage de la phase interictale à la phase préictale. Ces résultats ont conduit à une collaboration avec l'Institut Neurologique de Montréal dans le cadre de la prédiction des crises épileptiques. Les résultats issus de cette collaboration viennent corroborer le diagnostic établi par le neurologue et permettent une amélioration des performances de l'algorithme de prédiction.

Mot-clés : ondelette, épilepsie, EEG, intracrânien, coefficients dominants, analyse multi-échelle, fractal

MULTISCALE ANALYSIS BASED ON COMPLEX WAVELET : APPLICATION TO INTRACRANIAL ELECTROPHYSIOLOGICAL SIGNALS IN EPILEPTIC PATIENTS

Hubert LACOMA

ABSTRACT

The main aim of this research is to design a computing environment software to develop analytical tools dedicated to the characterization of intracranial signals in epileptic patients. More especially, this study aims at discriminating interictal (between seizures) and pre-ictal (before seizures) periods.

During the study of EEG signals, three features are noticed. The first is the presence of a power-law behavior of the power spectral density (PSD). This behavior of the PSD presented in the work of Yamaguchi (2003) could be explained by the presence of scale invariance in the signal. The second one is the increasing number of high frequency oscillations (HFO) when approaching the seizure. This result presented by Zijlmans *et al.* (2011) implies changes in the shape of the PSD when approaching the seizure. The third one is the use of intracranial EEG signals which allow to see high frequencies thanks to a good signal to noise ratio (SNR). These three characteristics make the study of scale invariance properties a potential candidate for the discrimination of pre-ictal and interictal periods. One contribution of this thesis was to develop an estimator of the scale invariance properties based on symmetrical complex Daubechies wavelets introduced by Lina et Mayrand (1993). These wavelets improve performance of the estimator and the temporal precision when calculating wavelet. Another significant contribution is the application of the estimator to intracranial EEG signals using a sliding window method based on hypothesis testing.

The use of this methodology on epileptic patients intracranial EEG signals during the interictal and preictale period confirmed the presence of scale invariance properties. This application also showed significant variations in these properties at the transition from the préictale to interictal period. These results led to a collaboration with the Montreal Neurological Institute in the framework of epileptic seizure prediction. The results of this collaboration corroborate the diagnosis established by the neurologist and improve the performance of the prediction algorithm.

Keywords: wavelet, epilepsy, EEG, intracranial, wavelet leaders, multiscale analysis, fractal

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 L'ÉTAT DE L'ART SUR L'INVARIANCE D'ÉCHELLES.....	5
1.1 Les origines de l'invariance d'échelles	5
1.2 Les récentes applications au domaine médical	6
CHAPITRE 2 L'ÉPILEPSIE	9
2.1 Les crises	9
2.1.1 Les crises focales	10
2.1.1.1 Les crises focales simples	10
2.1.1.2 Les crises focales complexes	11
2.1.1.3 Les crises focales secondairement généralisées	11
2.1.2 Les crises généralisées	11
2.1.2.1 L'absence épileptique.....	12
2.1.2.2 Les crises myocloniques.....	12
2.1.2.3 Les crises cloniques	12
2.1.2.4 Les crises toniques.....	12
2.1.2.5 Les crises atoniques	13
2.1.2.6 Les crises tonico-cloniques.....	13
2.2 Le traitement	13
2.3 L'EEG intracrânien	14
2.4 L'anatomie du cerveau.....	15
CHAPITRE 3 L'INVARIANCE D'ÉCHELLES	17
3.1 La définition.....	17
3.2 L'exemple du mBf	19
CHAPITRE 4 LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES	25
4.1 La transformée en ondelettes continues.....	25
4.2 La transformée en ondelettes discrètes dyadiques.....	36
4.3 La transformée en ondelettes à coefficients dominants	42
CHAPITRE 5 LA RÉGULARITÉ ET L'EXPOSANT DE HÖLDER	45
5.1 La régularité.....	45
5.2 L'exposant de Hölder	47
5.3 Les singularités	47
CHAPITRE 6 L'ESTIMATEUR DES CUMULANTS	51
6.1 Le simulateur.....	51
6.1.1 Les processus en $1/f$	51

6.1.2	L'implémentation du simulateur	53
6.2	L'estimateur	56
6.2.1	L'estimateur des processus en $1/f$	56
6.2.2	L'estimateur d'invariance d'échelle au sens large.....	59
6.2.3	Rééchantillonnage	65
CHAPITRE 7	L'APPLICATION AUX SIGNAUX ÉPILEPTIQUES RÉELS	69
7.1	Le test statistique.....	74
7.2	L'estimateur à double fenêtres et son application	75
7.3	La discussion.....	79
CONCLUSION	83
ANNEXE I	LES RÉSULTATS CLINIQUES ET OUTILS MATHÉMATIQUES	85
BIBLIOGRAPHIE	91

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau 6.1	Performance de l'estimateur de signaux en $1/f$ 59
Tableau 7.1	Emplacement des canaux 70
Tableau 7.2	Résultats du test d'hypothèse entre la phase interictale et préictale 75
Tableau 7.3	Emplacement dans le cerveau des cumulants c_1 (noir) et c_2 (rouge) les plus discriminants 81

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 0.1	EEG intracrânien d'un patient souffrant d'épilepsie temporale (Pacia et Ebersole (1997))	2
Figure 2.1	Coupe sagittale du système limbique (Roxo <i>et al.</i> (2011))	16
Figure 3.1	Influence de l'exposant de Hölder sur la trajectoire du mBf, du BFG et de la FAC	21
Figure 3.2	Comportement temporelle et fréquentiel du mBf	22
Figure 4.1	Transformée en ondelette continue d'un échelon à l'aide de l'ondelette de Morlet	29
Figure 4.2	Spectre des singularités $D(h)$ avec $c_1 = 0.6$ et $c_2 = -0.03$	35
Figure 4.3	Plan temps-échelles.	37
Figure 4.4	Ondelette et fonction d'échelle de Haar	39
Figure 4.5	Ondelettes db2, db6 et leurs filtres	40
Figure 4.6	Ondelette db6 complexe et son filtre	41
Figure 4.7	Plan temps-échelles pour les coefficients dominants.	43
Figure 5.1	Singularités de type cusp	48
Figure 5.2	Singularités de type cusp et chirp	49
Figure 6.1	Densité spectrale de puissance avec $\gamma = 2$	54
Figure 6.2	Module et phase de $\hat{X}(f)$ accompagnés de $x(t)$ et sa DSP	55
Figure 6.3	Signaux auto-similaires issus du simulateur	55
Figure 6.4	DSP de signaux auto-similaires issus du simulateur	56
Figure 6.5	Signal auto-similaire et sa DSP	57
Figure 6.6	Performance de l'estimateur de signaux en $1/f$	58
Figure 6.7	Performance de l'estimateur avec $\omega = 0$	61

Figure 6.8	Performance de l'estimateur avec $\omega = 1$	62
Figure 6.9	Estimation du spectre multifractal, des exposants d'échelles et des cumulants	63
Figure 6.10	Comparaison du biais entre ondelettes complexes et réelles.....	64
Figure 6.11	Comparaison de la variance entre ondelettes complexes et réelles	64
Figure 6.12	Performance de l'estimateur avec bootstrap	67
Figure 7.1	Schématisation de la méthodologie à fenêtre glissante.....	70
Figure 7.2	Application de l'estimateur à la phase interictale des signaux EEG réels....	72
Figure 7.3	Application de l'estimateur à la phase préictale des signaux EEG réels	72
Figure 7.4	Comparaison de la médiane des cumulants d'ordre 1 durant la phase interictale et préictale pour l'ensemble des canaux	73
Figure 7.5	Comparaison de la médiane des cumulants d'ordre 2 durant la phase interictale et préictale pour l'ensemble des canaux	74
Figure 7.6	Schématisation du fonctionnement de l'estimateur à double fenêtres glissantes.....	76
Figure 7.7	Comparaison entre les phases interictales et préictale du nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée.....	77
Figure 7.8	Nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée sur des intervalles de 50 secondes durant la phase préictale	78
Figure 7.9	Nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée sur le c_1 et c_2	79
Figure 7.10	Application clinique de l'estimateur à 6 patients lors du passage de la phase interictale (noir) à la phase préictale (rouge)	81

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

EEG	Électroencéphalogramme
MEG	Magnétoencéphalographie
EcoG	Electrocorticogramme
IRM	Imagerie par résonance magnétique
IRMf	Imagerie par résonance magnétique fonctionnelle
BCI	Brain computer interface
TEP	Tomographie par émission de positrons
TEMP	Tomographie par émission monophotonique
OHF	Oscillations hautes fréquences
mBf	Mouvement brownien fractionnaire
MBO	Mouvement brownien ordinaire
BFG	Bruit fractionnaire gaussien
FAC	Fonction d'autocorrélation
ARMM	Auto-régressif à moyenne mobile
DSP	Densité spectrale de puissance
QME	Quantité multi-échelle
TOC	Transformée en ondelettes continues
TODD	Transformée en ondelettes discrètes dyadiques
HR	Hypothèse retenue
RT	Résultat du test

XVIII

RSB	Rapport signal sur bruit
BOLD	Blood-oxygen-level dependent

INTRODUCTION

L'épilepsie est un trouble neurologique qui provoque chez le patient des crises de manière aléatoire et involontaire. Ces crises épileptiques résultent d'une activité électrique excessive ou anormale des cellules nerveuses. La mesure et l'enregistrement de l'activité électrique s'effectuent à l'aide d'un examen médical appelé l'électroencéphalographie dont les informations sont présentées sous la forme d'un électroencéphalogramme (EEG). À partir de l'EEG, il est possible d'observer l'évolution de l'activité électrique du cerveau, le point de départ de la crise, les zones du cerveaux impliquées, si l'activité est présente dans les deux hémisphères ainsi que le recensement du type d'activités observées. Les EEGs constituent une source abondante d'informations à partir de laquelle les neurologues se servent pour l'identification et le diagnostic de l'épilepsie.

Parmi ces signaux EEGs, on note trois caractéristiques. La première est un comportement en $1/f$ de la densité spectrale de puissance (DSP) présenté par Hermann et Demiralp (2005). Ce comportement peut être expliqué par la présence d'invariance d'échelles dans le signal. La seconde caractéristique est l'augmentation du nombre d'oscillations haute fréquence (OHF) à l'approche de la crise présenté dans les travaux de Jacobs *et al.* (2009). Ces OHFs sont des biomarqueurs de l'épilepsie qui entraînent une augmentation des hautes fréquences de la DSP à l'approche de la crise. On en conclut qu'il y a une modification de l'allure de la DSP à l'arrivée de la crise. La troisième caractéristique, est l'utilisation de l'EEG intracrânien qui permet l'exploration d'une bande spectrale étendue grâce à son bon rapport signal sur bruit. Ces trois observations nous porte à croire qu'il existerait des propriétés d'invariance d'échelles au sein des signaux EEG intracrâniens. Un exemple de signaux EEG issu des travaux de Pacia et Ebersole (1997) est présenté à la figure 0.1. La figure 0.1 correspond à l'EEG intracrânien d'un patient souffrant d'épilepsie du lobe temporal.

Le début de la crise coïncide avec le début de la phase ictale durant laquelle le patient présente les symptômes de sa maladie. Le début de cette période de temps se manifeste sur l'enregistrement EEG par une augmentation de l'activité électrique du patient. Par opposition à cette phase ictale, on parle de phase interictale quand le patient se situe suffisamment loin des crises

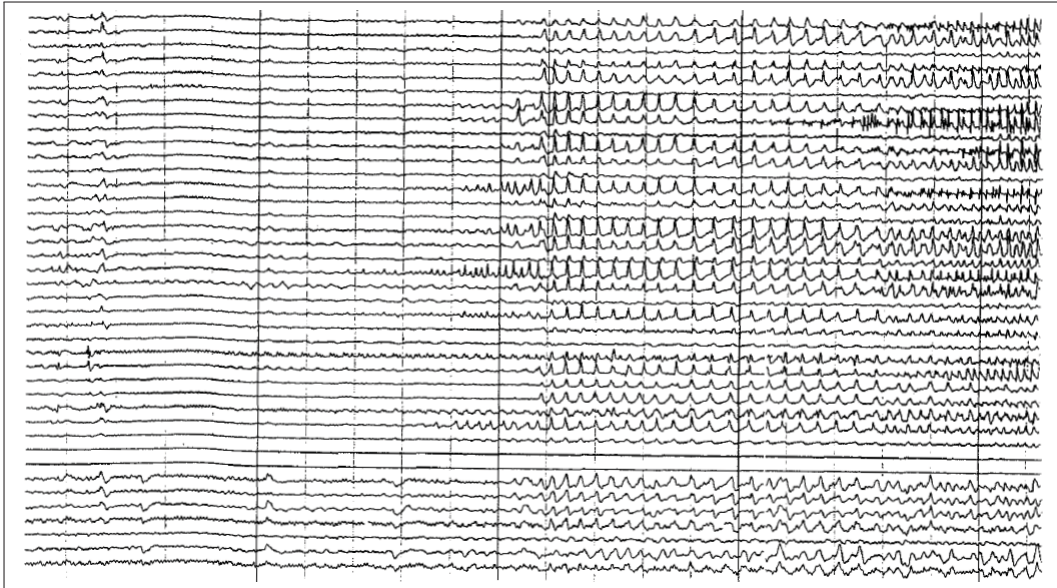


Figure 0.1 EEG intracrânien d'un patient souffrant d'épilepsie temporale (Pacia et Ebersole (1997))

et ne présente aucun symptômes. Donc, le patient alterne continuellement entre phases ictales et phases interictales. Les travaux de Osorio *et al.* (1998) et Salant *et al.* (1998) suggèrent l'existence d'une phase préictale durant laquelle il apparaît des changements caractéristiques quelques seconde avant la phase ictale. Cette phase dite préictale est située immédiatement avant la phase ictale et annoncerait l'arrivée de la crise. L'existence de cette phase préictale reste dans la communauté scientifique un sujet de débat car, on ne sait pas si elle existe de façon universelle chez tous les patients. Étant donné que le signal EEG intracrânien semblent posséder des propriétés d'invariance d'échelles, on souhaiterait savoir si elles peuvent aider à la caractérisation de la phase préictale. Les travaux présentés dans ce mémoire proposent à l'aide d'une approche de traitement du signal de répondre à la question suivante : peut-on discriminer les phases interictale et préictale en s'appuyant sur l'analyse des propriétés d'invariance d'échelles des signaux EEGs intracrâniens. Cette problématique constitue la question à laquelle nous allons nous efforcer de répondre tout au long de ce mémoire.

La différenciation de ces deux phases suscite de nombreux intérêts de part l'étendue des retombées potentielles. Une solution thérapeutique serait d'implanter une électrode de façon permanente qui permettrait l'acquisition en temps réel du signal EEG intracrânien. Cette électrode

serait connectée à une pompe qui injecterait le médicament à l'approche d'une crise. Les électrodes implantées de façon permanente pour les patients souffrants d'épilepsie ont déjà été utilisées par Benabid *et al.* (2009) et par Boex *et al.* (2006) pour le traitement de patients souffrants de la maladie de Parkinson. Un autre exemple d'application thérapeutique serait dans le cas où la différenciation des phases serait possible à l'aide des signaux EEG mesurés sur le cuir chevelu. Dans ce cas, un casque muni d'électrodes pourrait enregistrer l'activité électrique du cerveau qui serait transmise à une pompe qui à son tour injecterait le médicament à l'approche d'une crise. Il en découlerait une meilleure gestion de la maladie accompagnée d'une plus grande autonomie. De plus, les patients prendraient leurs traitements de manière ponctuelle et uniquement quand cela serait nécessaire. Il en découlerait une diminution de la consommation de médicament et des coûts de traitement de la maladie.

Ce mémoire est organisé de la façon suivante.

Le chapitre 1 correspond à l'état de l'art sur l'invariance d'échelle. Il présente les racines historiques de l'invariance d'échelle qui se trouvent en turbulence jusqu'aux applications cliniques récentes.

Le chapitre 2 donne principalement des explications sur l'épilepsie, ses symptômes, les traitements disponibles ainsi que sur l'impacte de la maladie sur la qualité de vie du patient. Il permet de donner une meilleure compréhension des signaux électrophysiologiques et de leurs acquisitions.

Le chapitre 3 aborde l'invariance d'échelle au sens strict et au sens large ainsi que leurs propriétés respectives.

Le chapitre 4 traite de l'analyse temps-échelle des signaux, en particulier de la transformée en ondelettes continues, la transformée en ondelettes discrètes et de l'analyse multirésolution. Ce chapitre présente la récente approche des coefficients dominants et du choix des ondelettes complexes de Daubechies.

Le chapitre 5 introduit les notions de régularité et de singularité qui sont étroitement liées aux propriétés d'invariance d'échelles du signal. On y développe la méthodologie nécessaire aux calculs des quantités multi-échelles qui mesurent l'invariance d'échelles.

Le chapitre 6 correspond au développement d'un simulateur de signaux autosimilaires et d'un estimateur des propriétés invariance d'échelles. Cette section consiste aussi bien à la présentation qu'à l'implémentation de ces procédés.

Le chapitre 7 présente l'application de l'estimateur aux signaux réels intracrâniens provenant de patients souffrant d'épilepsie.

Le mémoire s'achève avec une conclusion sur l'ensemble du travail présenté.

Les travaux de ce mémoire apportent des outils qui pourraient contribuer à une meilleure caractérisation de l'épilepsie et une amélioration des algorithmes de prédiction des crises. Les outils développés pourront être mis à la disposition des usagés de l'application *open source* Brainstorm pour l'analyse des signaux électrophysiologiques tels que l'EEG et la MEG.

CHAPITRE 1

L'ÉTAT DE L'ART SUR L'INVARIANCE D'ÉCHELLES

1.1 Les origines de l'invariance d'échelles

Une caractéristique intéressante des signaux EEGs est le comportement en loi de puissance du spectre fréquentiel (Yamaguchi (2003)). Ce type de comportement est bien connu car, on le retrouve dans différents domaines tels que l'hydrologie (Hubert et Carbonnel (2001)), la finance (Mandelbrot (1999)) ou le trafic internet (Crovella et Bestavros (1997)). En effet, ces signaux sont appelés invariants d'échelles, de part le lien déterministe ou statistique qui existe entre les différentes échelles. Historiquement, l'analyse multi-échelle puise ses sources en physique, plus particulièrement dans l'étude des turbulences. Les physiciens de la turbulence se sont très tôt rendus compte d'un aspect essentiel de ce type de signaux : il existe des composantes dynamiques sur une large gamme d'échelles. Afin de décrire ce comportement un concept extrêmement fécond fut introduit : la cascade d'énergie à travers les échelles, depuis les plus grandes vers les plus petites (Richardson (1922)). Les mouvements correspondant à une échelle donnée, souvent décrits comme des tourbillons, engendrent des mouvements à des échelles plus petites. Ainsi, l'énergie transite depuis une grande échelle, à laquelle elle est injectée par des forces extérieures, jusqu'à des échelles plus petites, où elle est dissipée. Entre les deux échelles extrêmes, l'échelle d'injection et l'échelle dissipative, s'étend alors, selon cette description phénoménologique, toute une gamme d'échelles, les échelles dites inertielles, pour lesquelles l'énergie est seulement transférée, sans être atténuée. Il n'existe pas d'échelle caractéristique à l'intérieur de la gamme des échelles inertielles, ce qui signifie que l'énergie est transférée sans perte de la même façon à chaque échelle. La phénoménologie de la cascade d'énergie est ainsi intimement reliée à une hypothèse d'invariance d'échelle, qui suppose l'absence de toute échelle caractéristique. Cette hypothèse aboutit naturellement à des comportements en loi de puissance en fonction de l'échelle, pour les grandeurs statistiques utilisées pour caractériser la turbulence. Les travaux de Yaglom (1966), Mandelbrot (1974) et Novikov (1971) sont parmi les premiers à avoir posé les bases d'une modélisation des champs turbulents par des mesures

et des processus aléatoires invariants d'échelles. C'est à la suite des travaux sur la transformée en ondelettes de Grossmann et Morlet (1984) qu'une nouvelle grandeur statistique fût utilisée pour l'étude de l'invariance d'échelle. Par la suite, la version discrète introduite par Mallat (1989) fût renormalisée dans les travaux de Jaffard (2004) afin d'aboutir à un nouveau formalisme appelé "coefficients dominants". Ces coefficients dominants appelés aussi *wavelet leaders* en anglais reposent sur une base mathématique solide et constituent un élément central de l'analyse multi-échelle. Ce formalisme offre une plus grande robustesse d'un point de vue statistique.

1.2 Les récentes applications au domaine médical

L'analyse multi-échelles permet, entre autres choses, l'estimation des propriétés d'invariance d'échelles. Elle est présente dans de nombreux champs tel que le domaine médical. Par exemple, Maxim *et al.* (2005) appliquent l'analyse multi-échelles au bruit en imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf) chez les patients atteints d'Alzheimer précoce. Ces travaux mesurent l'invariance d'échelle de ce bruit (signal BOLD) afin de différencier les sujets sains des patients. En effet, les travaux de Maxim *et al.* (2005) démontrent que dans certaines régions du cortex telles que les lobes temporaux, médians et latéraux, il est possible de distinguer le patient du sujet sain en s'appuyant sur l'invariance d'échelles du signal. L'analyse multi-échelles permet dans ce cas une identification des patients atteints d'Alzheimer précoce en plus d'apporter une meilleure compréhension de la physiopathologie. Les travaux de Brodu *et al.* (2012) dans le domaine du Brain computer interface (BCI) sont un autre exemple plus récent de l'utilisation des propriétés d'invariance d'échelles des signaux. Ces travaux portent plus précisément sur la réponse électrique neuronale d'un sujet en réaction à des mouvements imaginaires. En effet, le simple fait d'imaginer un mouvement alors que le sujet est immobile déclenche des variations de l'EEG dans des bandes fréquentielles spécifiques. Ces travaux se concentrent sur l'extraction de ces caractéristiques à partir de l'analyse multi-échelles afin d'identifier l'état mental dans lequel le patient se trouve. Les performances des outils développés dans ces travaux indiquent que les quantités issues de l'analyse multi-échelles peuvent être utilisées seules ou combinées à d'autres mesures afin d'identifier l'état mental du sujet. Ces travaux montrent

que l'étude des propriétés d'invariance d'échelles possèdent clairement un potentiel discriminant à l'égard des signaux électrophysiologiques tels que l'IRMf et l'EEG. Il est donc légitime de s'interroger sur l'existence et la pertinence du rôle joué par l'invariance d'échelle au sein des signaux EEG intracrâniens.

Les travaux de Brodu *et al.* (2012) et Maxim *et al.* (2005) présentent certaines similitudes avec ceux présentés dans ce mémoire car, dans les deux cas il est question d'effectuer la différenciation d'un état, mental dans Brodu *et al.* (2012) et pathologique dans Maxim *et al.* (2005). Les travaux présentés dans ce mémoire se placent dans la même optique en cherchant à mieux comprendre et caractériser un signal électrophysiologique en s'appuyant sur les liens existant entre les différentes fréquences du signal. Dans ce mémoire, la différenciation se fait entre la phase interictale et préictale des signaux EEG intracrâniens des patients épileptiques. Une bonne compréhension de l'épilepsie et des signaux EEG intracrâniens en particulier est nécessaire pour la discrimination des phases. Le chapitre suivant a pour but d'apporter ces connaissances primordiales.

CHAPITRE 2

L'ÉPILEPSIE

L'épilepsie est un trouble neurologique chronique caractérisé par un dysfonctionnement soudain de l'activité électrique du cerveau. En effet, des neurones libèrent des décharges électriques en excès et de manière aléatoire dans une région du cerveau. La région du cerveau responsable de cette activité électrique anormale est définie comme étant la zone épileptogène. L'emplacement et l'étendu de la zone épileptogène impacte la nature de l'épilepsie ainsi que les symptômes présentés par le patient. Parmi cette palette de symptômes, on compte la perte de tonus musculaire, la perte de connaissance et aussi des troubles cognitifs comme présenté dans Elger *et al.* (2004). De plus, la nature, l'origine ainsi que les symptômes de la crise varie grandement d'un patient à un autre. Selon les travaux de Sander (2003), DeBoer *et al.* (2008) et Banerjee *et al.* (2009), on estime à l'échelle mondiale le nombre de personnes atteintes d'épilepsie à 50 millions. L'aspect chronique de la maladie entraîne des limitations physiques et mentales présenté par Buelow et Janice (2011) qui se font ressentir tant au niveau professionnel que personnel. Les patients souffrant d'épilepsie ont deux à trois fois plus de chance de mourir de manière prématurée selon Bell et Sander (2001). Néanmoins, les traitements médicamenteux permettent de soigner 70% des patients selon Regesta et Tanganelli (1999). Les 30% restants, pour lesquels le traitement ne fonctionne pas, sont dit réfractaires ou pharmacorésistants. Dans ce cas, les patients peuvent avoir recours à la chirurgie pour être traités.

2.1 Les crises

Selon la définition proposée par Fisher *et al.* (2005), la ligue internationale contre l'épilepsie définit une crise d'épilepsie comme la survenue transitoire de signes cliniques et symptômes en réponse à une activité anormale excessive ou synchrone du cerveau. Ces décharges électriques dans le cerveau peuvent causer des lésions cérébrales, des tumeurs, des maladies du système nerveux central et d'autres troubles. Chez les patients épileptiques les crises peuvent souvent être déclenchées par de l'hyperventilation ou des stimuli visuels comme un flash lumineux. Chez les personnes non atteintes d'épilepsie une crise ponctuelle peut survenir. Ce type

de crise occasionnelle peut être déclenchée par l'utilisation de drogue, l'hypoglycémie ou la fièvre par exemple. Cette section consacrée aux différents types de crises épileptiques ainsi que leurs symptômes s'appuie sur les travaux de Francois (2008), Gauffin (2012), Zelman (2012), Camara (2006) et SAILLET (2006).

2.1.1 Les crises focales

On distingue deux grande famille de crises : les crises focales et les crises généralisées. La crise focale aussi appelée crise partielle, implique une zone épileptogène localisées dans le cortex cérébral. Les décharges électriques pour ce type de crises commencent dans une zone spécifique mais, en pratique une crise sera dite focale quand il n'y aura qu'un seul hémisphère impliqué. Il peut arriver que la crise focale se propage aux deux hémisphères, dans ce cas on parle de crise focale secondairement généralisée. Parmi les crises focales, on distingue trois classes :

- les crises focales simple,
- les crises focales complexe,
- les crises focales secondairement généralisées.

2.1.1.1 Les crises focales simples

La crise focale simples est caractérisées par l'absence d'altération de la conscience. Dans tous les cas, les symptômes présentés par le patient reflètent la zone du cerveau touchée. La crise focale simple se décline sous plusieurs formes en fonction des symptômes associés à la crise :

- On parle de crise focale simple avec signes somato-moteurs quand elle touche la zone du cerveau responsable de la motricité. Un exemple de symptôme est la marche Jacksonienne qui entraîne l'apparition de convulsions sur le coté du corps opposé à la décharge épileptique. Il existe aussi le cas des crises versives au cours desquelles il y a une déviation de la tête et des yeux sur le côté.

-On parle de crise focale simple avec signes somato-sensitifs quand elle engage les sens du patient et peut provoquer des sensations de fourmillements, de picotements ou des hallucinations visuelles, auditives, gustatives et olfactives.

-On parle de crise focale simple avec signes psychiques quand elle peut provoquer des troubles du langage, la sensation de déjà vu, la sensation d'être dans un rêve, un sentiment d'angoisse ou de peur.

-On parle de crise focale simple avec signes végétatifs quand le patient présente des symptômes digestifs tels que l'hyper salivation, la nausée ou des palpitations.

2.1.1.2 Les crises focales complexes

La crise focale complexe est caractérisées par une altération initiale ou secondaire de la conscience du patient et d'une amnésie à la suite de la crise. Elle s'accompagne de symptômes qui apparaissent sous la forme d'automatismes tels que des mâchonnements, des mouvement des mains, des frottements, des exclamations ou des onomatopées. Parfois les automatismes sont plus complexes comme se boutonner, se déboutonner ou marcher.

2.1.1.3 Les crises focales secondairement généralisées

Toutes les formes de crises partielles, simples ou complexes peuvent se généraliser. On entend par généralisation, la propagation de l'activité anormale au deux hémisphères. Quelque fois cette généralisation survient si rapidement que les symptômes focalisés passent inaperçus.

2.1.2 Les crises généralisées

La crise généralisée fait intervenir plusieurs régions du cerveau en même temps. En effet, plusieurs zones épileptogènes apparaissent et entraînent des décharges électriques simultanément dans tout le cerveau. Cela déclenche des symptômes moteurs qui peuvent être dangereux pour le patient et les personnes autour de lui. Parmi les crises généralisées, on distingue six classes :

- l'absence épileptique,
- les crises myocloniques,

- les crises cloniques,
- les crises toniques,
- les crises atoniques,
- les crises tonico-cloniques.

2.1.2.1 L'absence épileptique

L'absence épileptique ou Petit Mal, est une crise de courte durée qui entraîne une altération de la conscience du patient. Ces crises touchent surtout des enfants entre 3 et 10 ans selon Lortie et Vannasse (2006). On distingue les absences typiques et les absences atypiques. Lors d'absences typiques, l'enfant épileptique cesse ce qu'il fait, son regard devient fixe, il ne réagit plus et par la suite, il ne garde aucun souvenir des crises. Elles peuvent être aussi accompagnées de troubles de la motricité. Les absences atypiques, comportent une altération de la conscience moins profonde, une durée plus longue ainsi qu'un début et une fin plus progressive.

2.1.2.2 Les crises myocloniques

La crise d'épilepsie myoclonique est caractérisée par des secousses musculaires brèves et symétriques. Elle provoque une contraction soudaine et rapide des muscles qui rappelle un état de choc.

2.1.2.3 Les crises cloniques

Les crises cloniques sont constituées de secousses musculaires de durée variable et souvent asymétriques qui ralentissent progressivement.

2.1.2.4 Les crises toniques

Les crises toniques sont caractérisées par une contraction musculaire prolongée non vibratoire durant quelques secondes à une minute et à des troubles végétatifs.

2.1.2.5 Les crises atoniques

Les crises atoniques se caractérisent par une diminution ou une perte totale de tonus musculaire qui peut éventuellement entraîner la chute du patient.

2.1.2.6 Les crises tonico-cloniques

Les crises tonico-cloniques ou Grand Mal se déroulent en 2 phases. La première est la phase tonique caractérisée par des contractions et des convulsions musculaires prolongées provoquant un état de rigidité et de contracture généralisée du corps. La seconde est la phase clonique caractérisée par des spasmes et des secousses désordonnées et violentes affectant la face et les membres.

2.2 Le traitement

Dans la plupart des cas, 50% des patients sont traités grâce aux anticonvulsifs. Ces médicaments ne guérissent pas l'épilepsie mais, ils diminuent ou empêchent l'apparition des crises. Les effets de ces médicaments varient énormément d'un patient à un autre, c'est la raison pour laquelle les médecins proposent un dosage progressif. Selon le type de crise, un assortiment d'anticonvulsifs peut être proposé. Cette approche permet d'augmenter le taux de succès auprès des patients de 50 à 70% en s'appuyant sur les travaux de Sander (2004). Cependant, les 30% restants ne sont pas capables de contrôler leurs crises, on parle de patients réfractaires ou pharmacorésistants. Pour les patients pharmacorésistants ayant une épilepsie focale, une opération chirurgicale est envisageable afin d'effectuer l'ablation de la région épileptogène. En revanche, pour une épilepsie généralisée la chirurgie n'est pas une option car les zones épileptogènes sont multiples et localisées parfois dans des régions du cortex contrôlant la motricité. L'extraction de ces tissus pathogènes devient alors périlleuse. Pour une épilepsie focale, l'objectif de la chirurgie est de libérer le patient de ses crises en retirant les tissus pathologiques responsables des troubles neurologiques. Il arrive que la chirurgie n'atteigne pas les résultats escomptés en permettant la disparition de l'ensemble des symptômes. Néanmoins, il n'est pas rare de consta-

ter des améliorations notables. Ainsi, après la chirurgie, 70% des patients souffrant d'épilepsie focale du lobe temporal n'ont plus de symptômes selon Clusmann *et al.* (2002).

2.3 L'EEG intracrânien

Localiser la zone épileptogène est une tâche compliquée qui se base en partie sur le comportement du patient lors des crises. Généralement, le travail de localisation se base aussi sur l'activité électrophysiologique. Elle peut être faite en faisant appel à différentes modalités telles que : l'électroencéphalogramme (EEG), l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle (IRMf), la tomographie par émission de positrons (TEP), la magnétoencephalographie (MEG), la tomographie par émission monophotonique (TEMP), l'imagerie par résonance magnétique (IRM) morphologique et l'évaluation neuropsychologique. Ces méthodes sont dites non invasives car elles sont simples à mettre en œuvre et ne présentent aucun risque pour la vie du patient. L'évaluation pré-chirurgicale de l'épilepsie a pour objectif la recherche de zone épileptogène avec toutes les modalités énumérées précédemment. Il arrive que ces méthodes non invasives ne fournissent pas suffisamment d'information sur l'emplacement de la zone épileptogène. Dans ce cas, on peut envisager une méthode invasive comme l'EEG intracrânien. Cette modalité permet une meilleure localisation de la zone épileptogène et par conséquent de meilleurs résultats. Si le patient a une épilepsie focale, il peut être candidat à la chirurgie qui consiste à retirer les tissus pathogènes. Il devra subir au préalable une pré-chirurgie afin de savoir exactement quelles sont les parties du cerveau à l'origine des crises.

L'EEG conventionnel est un exemple de méthode exploratoire non invasive qui permet l'enregistrement de l'activité électrique du cerveau à l'aide d'électrodes placées sur le cuir chevelu. À l'inverse, l'EEG intracrânien est une méthode exploratoire invasive qui consiste à placer les électrodes dans le cerveau du patient. Les électrodes sont placées durant la pré-chirurgie dans les régions supposées être à l'origine des troubles neurologiques. Ce placement *in situ* permet d'explorer l'activité bioélectrique qui porte l'information sur la nature de l'épilepsie du patient. L'utilisation de l'EEG intracrâniens avec des électrodes présente trois principaux avantages. Le premier est de pouvoir accéder à des structures profondes dans le cerveau, comme l'amygdale et l'hippocampe. L'accès à ces structure profonde est un atout majeur car il per-

met une meilleure acquisition des OHFs qui sont des biomarqueurs de l'épilepsie. À l'inverse, l'électrocorticogramme (ECoG) qui consiste à placer une grille d'électrodes dans la couche sousdurale du cerveau ne permet pas l'accès à ces structures profondes. Le second avantage de l'EEG intracrâniens avec des électrodes est qu'il permet de mesurer avec une très grande précision spatiale l'activité cérébrale. Le troisième avantage de cette approche est qu'elle permet d'éviter l'atténuation du signal EEG. En effet, contrairement à l'EEG sur le cuir chevelu, l'EEG intracrânien offre un meilleur rapport signal sur bruit avec un contenu fréquentiel plus riche. Étant donné que l'acquisition se fait *in situ*, le signal mesuré ne passe pas à travers la boîte crânienne qui comme un filtre le déforme, l'atténue et modifie l'étendu de sa bande spectrale. Par conséquent, le signal EEG intracrânien se prête à une investigation multi-spectrale sur toute une gamme de fréquences et d'échelles. Cependant, l'EEG intracrânien présente un inconvénient. Sa précision est telle que si l'électrode n'est pas située exactement dans la zone épileptogène, il est possible que le signal mesuré ne soit pas celui escompté. Donc, la grande précision de l'EEG intracrânien se révèle être à la fois un avantage et un inconvénient.

2.4 L'anatomie du cerveau

Les données expérimentales qui seront utilisés dans ce mémoire sont des enregistrements EEG intracrâniens issus d'un patient épileptiques ayant des électrodes implantés dans le système limbique. Le système limbique est le nom donné à un groupe de structures du cerveau jouant un rôle très important dans le comportement et en particulier, dans diverses émotions comme l'agressivité, la peur, le plaisir ainsi que la formation de la mémoire. Ces électrodes sont implantés plus précisément dans trois régions : l'amygdale, l'hippocampe et le parahippocampe. La figure 2.1 présente le système limbique et l'emplacement de ces trois régions.

Les régions tels que l'amygdale, l'hippocampe et le parahippocampe se retrouvent dans les deux hémisphères. Donc, selon les informations collectées par les spécialistes sur la nature de l'épilepsie, on peut choisir d'implanter uniquement une électrode (dans un hémisphère) ou deux (dans chaque hémisphère). Pour nos données expérimentales, les électrodes sont implantées dans les trois régions et possèdent trois capteurs qui effectuent l'acquisition de l'activité électrique du cerveau.

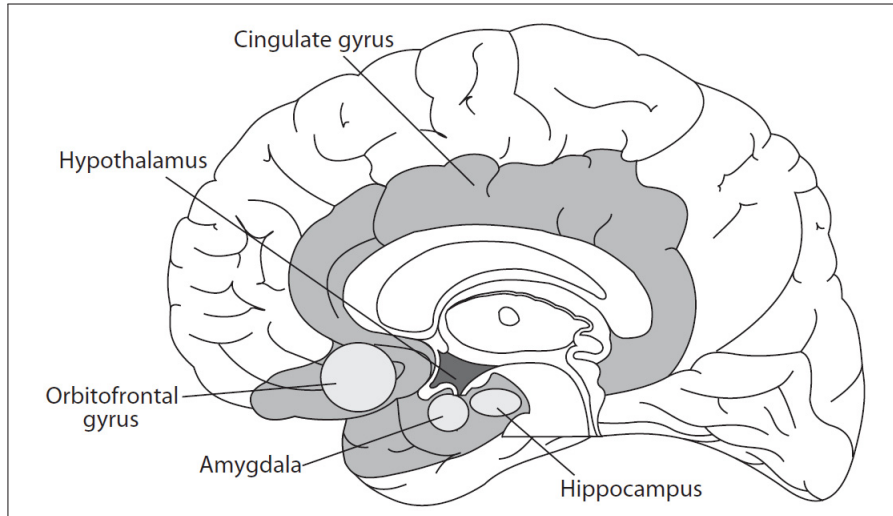


Figure 2.1 Coupe sagittale du système limbique (Roxo *et al.* (2011))

Les travaux de ce mémoire cherchent à dissocier la phase préictale de la phase interictale en s'appuyant sur les propriétés d'invariance d'échelles des signaux EEG intracrâniens de patients souffrant de l'épilepsie. Maintenant que nous avons une meilleure compréhension de la maladie et des signaux électrophysiologiques, le chapitre suivant présente les propriétés d'invariance d'échelles sur lesquelles se feront la discrimination des phases interictales et préictales.

CHAPITRE 3

L'INVARIANCE D'ÉCHELLES

L'invariance d'échelles est une propriété rencontrée dans beaucoup de signaux tels que ceux mesurés en hydrologie Hubert et Carbonnel (2001) , en finance Mandelbrot (1999) et dans le trafic internet Crovella et Bestavros (1997). Les travaux de Brodu *et al.* (2012) et Maxim *et al.* (2005) montrent que l'invariance d'échelle est une propriété à partir de laquelle on peut effectuer des opérations de classification des signaux électrophysiologiques. Ainsi, ce chapitre présente la notion d'invariance d'échelles, d'auto-similarité et se termine par l'exemple du mouvement brownien fractionnaire (mBf).

3.1 La définition

L'invariance d'échelles se caractérise par l'absence d'échelles caractéristiques dans l'objet (physique ou mathématique) considéré. L'invariance d'échelles dans un signal au sens strict se décline en deux versions : déterministe et statistique. Dans les deux cas, on parle de processus (signal) auto-similaire ou monofractal. On s'attardera surtout sur le cas statistique étant donné que celui-ci est une version plus générale de la version déterministe. De plus, l'invariance d'échelle dans le cas statistique est plus approprié à l'étude des signaux EEG qui sont plus complexes à étudier. L'invariance d'échelles est caractérisée par un comportement identique à différentes échelles. En effet, un processus $x(t)$ sera dit invariant d'échelles et plus précisément auto-similaire si ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante :

$$x(at) \stackrel{L}{=} a^H x(t) \quad (3.1)$$

a : paramètre d'échelle.

H : exposant de Hurst.

La présence du symbole L sur le signe égal, souligne que les deux processus possèdent des lois de probabilité égales. C'est à dire que l'égalité est vraie au sens statistique et que par

conséquent tous les moments statistiques à droite et à gauche de l'égalité sont égaux. On définit les moments statistiques comme suit :

Soit une fonction de densité de probabilité $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I (non réduit à un point) de \mathbb{R} . Étant donné un entier naturel q , le moment d'ordre q de f est défini, sous réserve d'existence, par :

$$E \{X^q\} = \int_{x \in I} x^q f(x) dx$$

La quantité $x(at)$ décrit le signal $x(t)$ à l'échelle a . À priori, l'échelle a n'étant pas bornée, l'ensemble de définition peut être défini sur \mathbb{R}^+ . Bien que théoriquement possible, des signaux ayant des échelles infinies n'existent pas dans la nature. C'est pour cela qu'un signal réel sera souvent dit auto-similaire sur un ensemble d'échelles finies. Le paramètre a permet de sélectionner l'échelle tandis que l'exposant de Hurst H renormalise l'amplitude en fonction de ces échelles. L'exposant H mesure la propriété d'invariance d'échelles du signal et sa valeur décrit un signal de plus en plus irrégulier à mesure que H tend vers 0. On en déduit que le signal $x(t)$ à n'importe quelle échelle a est statistiquement identique au signal $x(t)$ à l'échelle $a = 1$ à un facteur près. Par conséquent, l'équation (3.1) traduit parfaitement le concept d'invariance d'échelles.

La propriété d'invariance d'échelles de l'équation (3.1) peut être généralisée aux moments statistiques d'ordres supérieurs :

$$E \{x(at)^q\} = a^{\xi(q)} E \{x(t)^q\} \quad (3.2)$$

Les valeurs de q correspondent à l'ordre des moments statistiques tandis que $E \{x(t)\}$ correspond à l'espérance mathématique de $x(t)$. La situation particulière où les exposants d'échelles ont un comportement linéaire avec $\xi(q) = qH$ correspond au cas auto-similaire. L'équation (3.2) montre que les moments du signal à différentes échelles ont un comportement en loi de puissance en fonction des exposants d'échelles. De tels processus peuvent être vus comme la propagation d'un motif statistiquement identique à travers les différentes échelles du signal.

Plus intuitivement, on aura beau *zoomer* vers l'avant ou l'arrière, on observera un comportement statistiquement identique. Le comportement linéaire des exposants d'échelles ainsi qu'un exposant de Hurst H unique sont des caractéristiques propres à l'invariance d'échelle au sens strict. L'invariance d'échelle au sens large offre un cadre plus riche et plus flexible. Dans ce cas on parle de signaux multi-fractals. En effet, les signaux multi-fractals ont la spécificité d'avoir des exposants d'échelles $\xi(q)$ non linéaires. Leurs propriétés font l'objet d'une étude plus approfondie dans les chapitres 4 et 5 car, ils permettent la caractérisation de signaux plus complexes.

3.2 L'exemple du mBf

Le Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf) est un modèle défini par Mandelbrot et VanNess (1968) qui fût introduit plus tôt par Kolmogorov (1940). Ce modèle est couramment utilisé pour la modélisation de processus ayant des propriétés d'invariance d'échelles au sens strict. Il se révèle intéressant car c'est un modèle simple qui utilise uniquement l'exposant de Hurst comme paramètre. De plus, il offre la possibilité de décrire des signaux complexes et très irréguliers.

Le mBf de paramètre H ($0 \leq H \leq 1$), noté B_H , a été défini par Mandelbrot et VanNess (1968) comme une extension du mouvement brownien ordinaire où $H = 1/2$. Des exemples de mBf avec trois valeurs de H distinctes sont présentés dans la colonne de gauche de la figure 3.1. D'un point de vue pratique, le mBf est un processus gaussien, continu, centré, et possède des accroissements stationnaires. Avec la condition initiale $B_H(0) = 0$, sa fonction d'autocovariance, notée $C_B(u, v)$, le décrit entièrement.

La fonction d'autocovariance $C_X(u, v)$ de la variable aléatoire X est la mesure de la covariance entre la variable aléatoire et une version d'elle-même décalée dans le temps. Grossièrement, l'amplitude des coefficients représente le degré de similitude entre les observations à différents instants. De manière générale, la fonction d'autocovariance d'une variable aléatoire X entre les instants u et v est définie comme suit :

$$C_X(u, v) = E \{ (X(u) - \mu_X)(X(v) - \mu_X) \} \quad (3.3)$$

où $\mu_X = E\{X\}$

En traitement du signal la fonction d'autocovariance peut être normalisée par la variance pour obtenir la fonction d'autocorrélation $R(u, v)$. La fonction d'autocorrélation du mBf est défini comme suit :

$$R_B(u, v) = \frac{1}{2}(u^{2H} + v^{2H} - (v - u)^{2H}) \quad (3.4)$$

Les deux notions peuvent être utilisées indifféremment car elles apportent la même information. Le signe des coefficients ainsi que la vitesse de convergence de la fonction d'autocorrélation (FAC) sont deux caractéristiques qui permettent de mieux comprendre les propriétés du signal étudié. Le premier aspect qui est le signe des coefficients, donne des indications sur la trajectoire. En effet, une FAC avec des valeurs négatives se traduit par le fait qu'une augmentation du signal est souvent suivie d'une diminution du dit signal, et vice-versa. Dans ce cas, on parle de phénomènes anti-persistants. À l'inverse, des valeurs positives de la FAC indiquent qu'une augmentation du signal est souvent suivie d'une augmentation de ce même signal. Dans ce cas, on parle de phénomènes persistants. L'autre aspect fréquemment étudié est la vitesse à laquelle la FAC décroît. La FAC évolue en fonction du décalage croissant existant entre les différents éléments. La vitesse de convergence vers zéro de la FAC indique le degré de corrélation à mesure que le décalage augmente. Ainsi, on parle de processus à courte mémoire lorsqu'une FAC décroît rapidement, cela indique que la corrélation entre les moments passés est faible. D'un autre côté une décroissance lente de la FAC implique qu'il existe une corrélation bien plus longue et importante entre les moments passés et futurs. Dans ce cas on parle de processus à longue mémoire, persistants ou à longue dépendance. Le calcul de la fonction d'autocorrélation du mBf est effectué à partir de ces incréments stationnaires appelés Bruit Fractionnaire Gaussien (BFG). Nous rappelons que pour un processus stochastique $X = \{X(u) : u \geq 0\}$, on définit les incréments comme la différence $X(v) - X(u)$ entre deux instants où $v > u$. Pour que ces incréments soit stationnaires, il faut que $X(v) - X(u) \stackrel{L}{=} X(v - u) - X(0)$, c'est à dire que les propriétés statistiques soit indépendantes du temps. La figure 3.1 présente l'influence de l'exposant de Hölder sur la trajectoire de mBfs, du BFG et de la FAC. La colonne de gauche

représente des mBf de 4000 échantillons avec une valeur de H fixée. La colonne du milieu correspond aux BFG et celle de droite aux FAC. Les valeurs de H en partant du haut vers le bas sont respectivement : 0.3, 0.5 et 0.9.

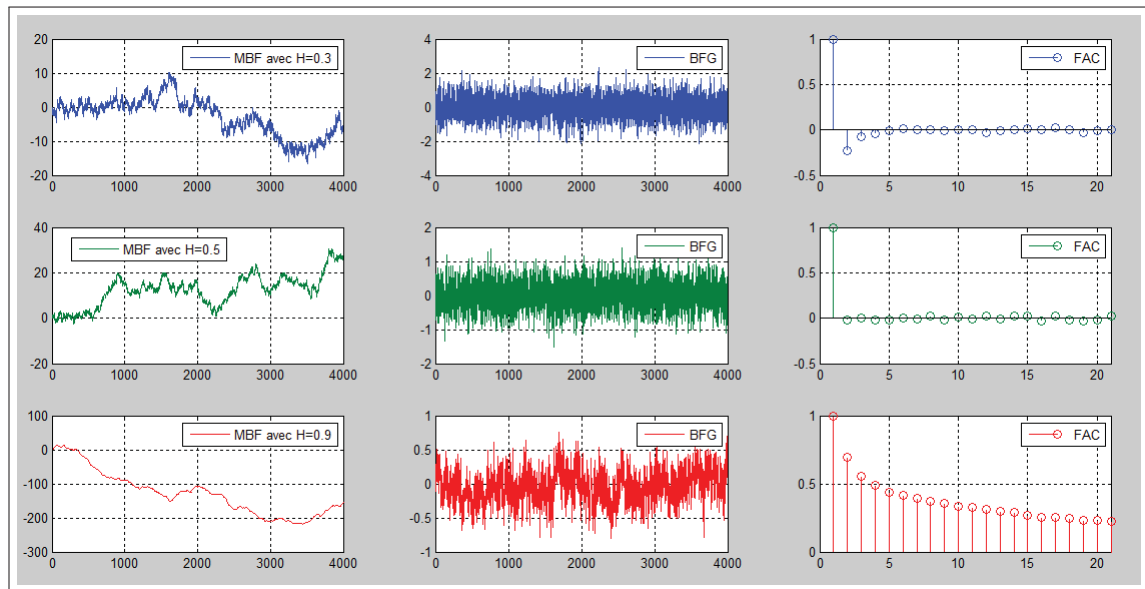


Figure 3.1 Influence de l'exposant de Hölder sur la trajectoire du mBf, du BFG et de la FAC

Les incréments du mBf sont stationnaires et contiennent l'ensemble des informations nécessaires à la caractérisation du mBf (colonne du milieu figure 3.1). Il est donc possible à partir des propriétés du BFG de retrouver celles du mBf et vice versa. Avec un mBf ayant un exposant Hurst supérieur à $1/2$ on observe que si la série a augmenté précédemment, il y a une forte probabilité pour qu'elle continue à le faire. La FAC du BFG associée indique que ce type de processus a des propriétés de persistances. Ce type de mBf est beaucoup plus régulier et se rapproche donc plus d'une fonction polynomiale. Ces séries persistantes sont des processus à longue dépendance, où chaque observation porte la mémoire des événements qui l'ont précédé. Ces propriétés observables sur la dernière ligne de la figure 3.1, s'expliquent par une décroissance lente de la FAC. À l'opposé, un mBf ayant un exposant de Hurst inférieur à $1/2$ implique que la FAC de son BFG décroît très rapidement et prend des valeurs négatives. Comme il est illustré à la première ligne de la figure 3.1, ces signaux sont anti-persistants, à mémoire courte

et possèdent une plus forte irrégularité que pour les valeurs de $H \geq 1/2$. Pour une valeur de H égale à $1/2$, le mBf est réduit à un Mouvement Brownien Ordinaire (MBO). Le BFG associé est alors un bruit blanc, ce qui se traduit par une FAC nulle partout sauf en zéro. L'exemple du mBf nous permet de mettre en évidence la présence de corrélation dans les signaux invariants d'échelles.

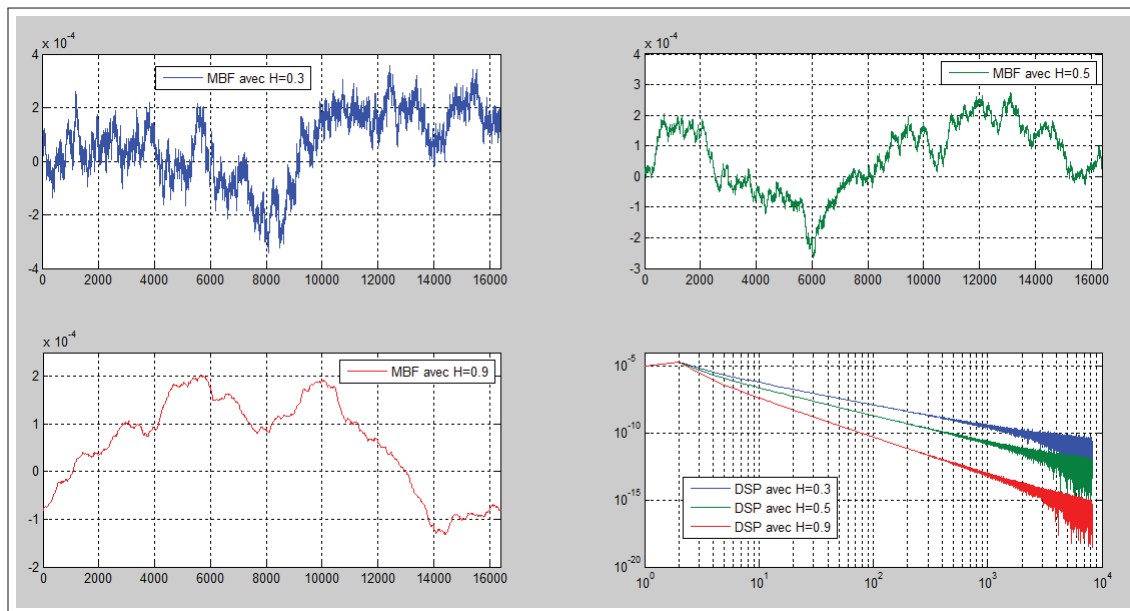


Figure 3.2 Comportement temporelle et fréquentiel du mBf

Sur la figure 3.2 nous avons trois mBf ayant des exposants de Hurst de 0.3, 0.5 et 0.9. Le graphique en haut à gauche correspond à un mBf avec $H = 0.3$, celui en haut à droite à un mBf avec $H = 0.5$ et celui en bas à gauche à un mBf avec $H = 0.9$. Le graphique en bas à droite correspond à la DSP de l'ensemble mBf dans un diagramme log-log. On constate que les DSPs possèdent un comportement linéaire avec trois pentes négatives différentes dans le diagramme log-log. Cela implique une allure en $1/f$ des DSP dans le domaine fréquentiel. On en déduit que l'énergie augmente à mesure que l'on tend vers les basses fréquences et que ces dernières dominent les hautes fréquences. Par ailleurs, on constate dans le domaine temporel une augmentation de l'irrégularité à mesure que la valeur de l'exposant de Hurst H diminue.

On en conclut qu'il existe un comportement particulier dans le domaine temporel et fréquentiel pour les signaux ayant des propriétés d'invariance d'échelles.

Il en résulte que la caractérisation de ces signaux invariants d'échelles nécessite de faire appel à des outils d'analyse temps fréquences. Ils permettront l'étude des caractéristiques à la fois dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel. Dans ce mémoire, l'outil choisi est la transformée en ondelette qui fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES

La transformée de Fourier permet la décomposition du signal sur une base trigonométrique de fréquences pures. Cependant, l'application de cette transformée aux signaux non stationnaires ne permet pas leurs caractérisations. La transformée en ondelettes continues fût une alternative introduite par Grossmann et Morlet (1984). Elle propose une description du contenu des échelles tout en offrant une localisation temporelle. Par la suite, Arneodo *et al.* (1995) introduit une approche statistique utilisant la transformée en ondelettes continues afin de caractériser les signaux invariants d'échelles. Dans la même optique, la transformée en ondelettes à coefficients dominants fût introduite par Jaffard (2004). Cette dernière à la particularité de fournir des résultats plus précis et robustes en s'appuyant sur la transformée en ondelettes discrètes. Ce chapitre présente l'ensemble de ces transformées en ondelettes utilisées pour l'analyse multi-échelle. La première section présente la transformée en ondelettes continues ainsi que son utilisation pour la caractérisation des propriétés d'invariance d'échelles. Les sections suivantes présentent la transformée en ondelettes discrètes ainsi que la récente approche des coefficients dominants aussi appelés *wavelet leaders*.

4.1 La transformée en ondelettes continues

Une ondelette est une fonction qui appartient à l'espace de Hilbert¹ $L^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.1)$$

L'équation (4.1) indique que l'intégrale de la fonction $\psi(t)$ doit être nulle. Par conséquent cela implique que la fonction $\psi(t)$ doit alterner entre des valeurs positives et négatives et par conséquent elle doit osciller.

1. Une fonction $f(t)$ appartient à l'espace Hilbert $L^p(\mathbb{R})$ si $\|f(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$

L'ondelette est caractérisée par son nombre de moments nuls N :

$$\int_{\mathbb{R}} t^k \psi(t) dt = 0, \forall k \in [0, N - 1], N \geq 1, N \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

Cette propriété signifie que la fonction $\psi(t)$ est orthogonale aux polynômes de degré inférieur ou égal à $N - 1$. Le nombre N de moments nuls contrôle les oscillations de $\psi(t)$, au sens où plus N est grand, plus $\psi(t)$ oscille. Cela permet de caractériser l'irrégularité du signal en étant *aveugle* aux fonctions polynomiales. De plus, dans le cas où $k = 0$ on retrouve à nouveau la condition d'oscillation de l'ondelette mentionnée précédemment.

Une famille d'atomes temps-échelle $\psi_{a,b}(t)$ s'obtient en dilatant l'ondelette $\psi(t)$ par un facteur a , et en la translatant par un facteur b :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (4.3)$$

Les paramètres a et b sont respectivement les paramètres d'échelles et de translations. Le terme $\frac{1}{\sqrt{a}}$ est un terme de normalisation qui permet la conservation de l'énergie lors des différents changements d'échelles. Étant donné que la fonction mère $\psi(t)$ est normée et centrée au voisinage de $t = 0$, il en découle que $\|\psi_{a,b}(t)\| = 1$.

Preuve

Démontrons que la famille $\psi_{a,b}(t)$ est de norme unitaire.

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

En faisant le changement de variable suivant : $\alpha = \frac{t-b}{a}$, on obtient :

$$\|\psi_{a,b}(t)\| = \left(\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} a |\psi(\alpha)|^2 d\alpha \right)^{1/2} = \|\psi(t)\| = 1 \quad (4.5)$$

La transformée en ondelettes continues (TOC) est la projection du signal sur la famille d'atomes $\psi_{a,b}(t)$. Elle permet d'analyser des signaux non stationnaires en les projetant sur une base composée de translatées et des dilatées de l'ondelette $\psi(t)$. Cette transformée fournit les coefficients en ondelettes notés $c(a, b)$ et ces derniers sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} c(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \end{aligned} \quad (4.6)$$

Le terme $\psi^*(t)$ correspond au conjugué complexe de $\psi(t)$.

Les coefficients $c(a, b)$ sont la projection du signal sur les atomes et mesurent les variations du signal à différentes échelles au cours du temps. Les résultats de la TOC d'un signal peuvent être représentés dans un tableau temps-échelle où l'ensemble des coefficients obtenus sont placés en fonction de leurs coordonnées a et b . L'amplitude de chaque coefficient traduit l'importance des fluctuations au sein du signal à une échelle et un temps donné. Dans le cas des ondelettes continues les indices a et b sont continus, donc théoriquement infinis. En pratique, la transformée en ondelettes continues se fait numériquement avec des valeurs de a et b discrètes, finies avec de faibles incréments.

La projection d'un signal sur une famille d'atomes pour d'obtenir les coefficients en ondelettes est appelé l'analyse. Le processus inverse qui consiste à reconstruire le signal original à partir des coefficients en ondelettes est appelé la synthèse. Cette synthèse est définie en fonction de l'erreur quadratique quand a tend vers les plus petites échelles :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| f(t) - \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2} \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \psi_{a,b}(t) db da \right|^2 = 0 \quad (4.7)$$

Les résultats numériques instables obtenus lors de la reconstruction à l'aide de l'équation (4.7) sont la raison pour laquelle les ondelettes continues ne sont pas utilisées lors de la synthèse. Le terme C_ψ est une constante qui dépend du choix de l'ondelette et est définie par :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{\|\hat{\psi}(f)\|}{f} df < +\infty \quad (4.8)$$

Une condition nécessaire mais pas suffisante à l'existence de C_ψ est que la transformée de Fourier de l'ondelette $\hat{\psi}(f)$ soit nulle en $f = 0$.

$$\hat{\psi}(f) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \exp(-2j\pi ft) dt \quad (4.9)$$

$$\hat{\psi}(f = 0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0 \quad (4.10)$$

Cette condition nécessaire à la construction de l'ondelette $\psi(t)$ est rempli en s'assurant que l'ondelette oscille.

Une illustration de la transformée en ondelette continue est présentée à la figure 4.1. Le graphique du haut correspond à un échelon de 500 échantillons. Le graphique du milieu correspond à l'ondelette de Morlet. Le graphique du bas correspond à la transformée en ondelettes continues de l'échelon en utilisant l'ondelette de Morlet. Il est à noter que le nombre de coefficients calculés est identique sur chacune des échelles.

La fonction échelon est un signal de 500 échantillons qui est nulle pour les 250 premiers échantillons et égale à 1 partout ailleurs. La fonction possède donc une discontinuité à l'échantillon 250. Cette fonction est choisie afin de mettre l'accent sur l'habileté de la TOC à détecter les variations du signal. En effet, on observe sur le graphique du bas que pour la TOC, les valeurs les plus fortes sont précisément observées au voisinage de l'échantillon 250. Les valeurs élevées obtenues à l'extrémité droite du plan temps-échelles sont dues aux effets de bord. Ils sont obtenus suite à des altérations non désirées lors du calcul des coefficients en ondelettes.

La faible incrémentation des paramètres a et b offre une grande précision. Cependant cela a pour conséquence l'obtention d'une transformée redondante. La TOC sera donc privilégiée dans le cas où l'on souhaite effectuer des analyses minutieuses. En revanche, elle sera à proscrire pour le codage, la transmission d'information ou la compression à cause du nombre élevé de coefficients et de l'instabilité liée à la synthèse.

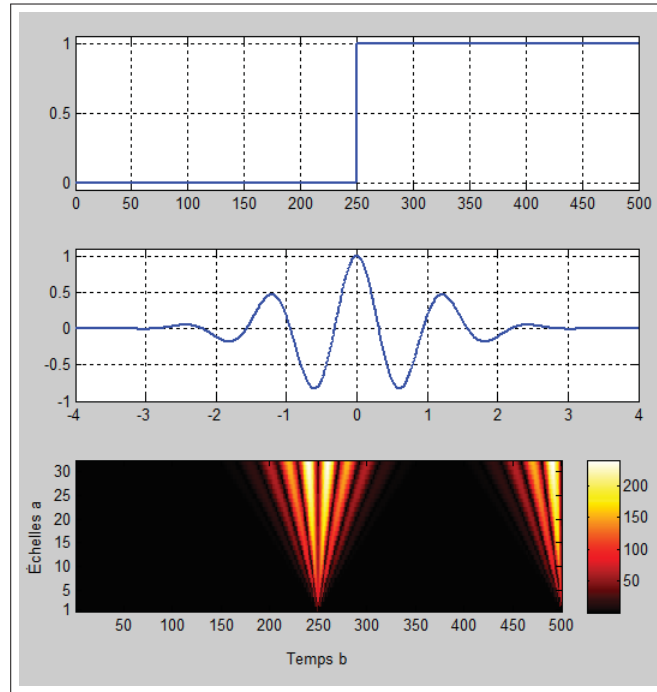


Figure 4.1 Transformée en ondelette continue d'un échelon à l'aide de l'ondelette de Morlet

L'analyse multi-échelle permet d'étudier les relations qui existent entre les différentes bandes de fréquences. Elle permet la caractérisation, l'identification ou la classification des signaux ayant des propriétés d'invariance d'échelles. Les travaux de Parisi et Frisch (1985) montrent que l'utilisation des ondelettes est possible lors de l'analyse multi-échelle. En effet, en présence de signaux auto-similaires, Jaffard (1989), Bacry *et al.* (1993) et Arneodo *et al.* (1995) observent que les coefficients en ondelette ont un comportement en loi de puissance en fonction des échelles.

$$|c(a, \cdot)| \sim C a^H, \quad a \rightarrow 0^+ \quad (4.11)$$

où C est une constante.

Le signal est décrit par les coefficients en ondelette qui se comportent localement en loi de puissance à mesure que l'on se rapproche des petites échelles. En s'appuyant sur la méthode

du module maximal de la transformée en ondelettes présentée par Mallat (2008), nous pouvons étendre ce concept à l'ensemble du plan temps-échelle avec la fonction de structure $S_c(a, q)$.

$$S_c(a, q) = \sum_b |c(a, b)|^q \quad (4.12)$$

La fonction de structure $S_c(a, q)$ est une quantité qui calcule la somme des coefficients à la puissance q sur l'ensemble des b . Le terme q correspond à l'ordre des moments statistiques et appartient à l'ensemble \mathbb{Z} . En injectant l'équation (4.11) dans (4.12) on obtient l'équation suivante :

$$S_c(a, q) \sim a^{qH} = a^{\xi_c(q)} \quad (4.13)$$

Cette expression est valide quand a tend vers 0.

Le terme $\xi_c(q)$ une fonction qui dépend de l'ordre des moments statistiques et qui vaut qH dans le cas de signaux auto-similaires. La fonction $\xi_c(q)$, appelée exposants d'échelles, mesure la décroissance de la fonction de structure $S_c(a, q)$. Donc, une fonction ayant des propriétés multi-échelles possède une fonction de structure avec un comportement en loi de puissance et peut être caractérisée par ces exposants d'échelles. Les exposants d'échelles étant une fonction de q , ils peuvent être développés sous la forme de séries de Taylor :

$$\xi_c(q) = \sum_{p \geq 1} c_p \frac{q^p}{p!} \cong c_1 q + c_2 \frac{q^2}{2} + \dots \quad (4.14)$$

Les exposants d'échelles sont caractérisés par les cumulants c_p . En probabilité et en statistique, les cumulants c_p d'une distribution de probabilité sont un ensemble de quantités équivalentes aux moments qui décrivent la distribution d'une variable aléatoire. Afin de définir les cumulants c_p mathématiquement, nous présentons au préalable la notion de densité de probabilité et de fonction caractéristique.

La fonction de probabilité d'une variable aléatoire x notée $P_x(u)$, mesure la probabilité d'apparition de x dans l'intervalle $]u, +\infty[$:

$$P_x(u) = Pr(u < x)$$

où $Pr(\cdot)$ désigne la probabilité.

Si elle existe, la densité de probabilité de x , notée $p_x(u)$, est définie comme suit :

$$p_x(u) = \frac{dP_x(u)}{du}$$

La première fonction caractéristique relative à la variable x , noté $\Phi_x(v)$, est alors définie comme la transformée de Fourier de la densité de probabilité de x :

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(u) \exp(jvu) du \quad (4.15)$$

où j désigne la racine carré de -1.

Du fait de l'inégalité de Schwarz, $\Phi_x(v)$ converge toujours :

$$\Phi_x(v) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(u) |\exp(jvu)| du = 1$$

De plus, l'intégrale de la densité de probabilité sur l'intervalle $] -\infty, +\infty[$ étant égale à l'unité, $\Phi_x(0) = 1$. En conséquence, $\Phi_x(v)$ est non nulle au voisinage de zéro. Sur ce voisinage, on peut alors définir son logarithme népérien

$$\Psi_x(v) = \ln \Phi_x(v) \quad (4.16)$$

$\Psi_x(v)$ est appelée seconde fonction caractéristique dans Lacoume *et al.* (1997) ou fonction génératrice des cumulants par Kim et Powers (1979). On peut également rencontrer le terme de fonction cumulative. Les cumulants c_p sont définis à partir de la fonction génératrice des cumulants :

$$c_p = (-j)^k \left. \frac{d^p \Psi_x(v)}{d^p v} \right|_{v=0}$$

Dans notre cas, on se limite aux deux premiers cumulants car ils récupèrent une importante partie de l'information contenue dans les exposants d'échelles. Dans le cas de signaux auto-similaires, les exposants d'échelles sont linéaires avec $\xi_c(q) = qH$. Pour les cumulants, dans le cas auto-similaire ont a $c_1 = H$ et $c_2 = 0$ tandis que dans le cas multi-fractal $c_2 \neq 0$. Par conséquent, le nombre de quantités nécessaires à la description des propriétés multi-échelles du signal se réduit à deux valeurs c_1 et c_2 . À l'inverse, les exposants d'échelles dépendent du nombre de moments statistiques q qui est souvent supérieur à 2. C'est la raison pour laquelle on choisit d'étudier le comportement des cumulants d'ordre un et deux, lors de la différentiation des phases interictales et préictale.

En plus des cumulants et des exposants d'échelles nous allons présenter une troisième quantité appelée le spectre des singularités noté $D_c(h)$. Ce spectre des singularités aussi appelé spectre multi-fractal caractérise les exposants d'échelles du signal. Le spectre des singularités $D_c(h)$, les exposants d'échelles $\xi_c(q)$ et les cumulants c_p sont des représentations équivalentes et permettent une description des propriétés d'invariance d'échelles du signal. Jusqu'à maintenant il a été question de signaux auto-similaires ayant un seul exposant de Hurst. Mais en pratique, les processus sont bien plus complexes. Par exemple, pour les signaux complexes on observe que les propriétés d'auto-similarités son vraies avec un exposant de Hurst H à certain endroits. Mais, si on sélectionne d'autres endroits dans ce même signal, on observe des propriétés d'auto-similarités avec un exposant de Hurst différent. Donc, on a plus un exposant global H pour tout le signal mais plutôt un ensemble exposants h locaux. On appel ces exposants locaux h les exposants de Hölder. Le spectre des singularité $D_c(h)$ correspond à la fréquence d'occurrence de chaque h . Plus précisément, le spectre multi-fractal $D_c(h)$ correspond à la dimension de l'ensemble des points ayant localement h comme exposant. Le spectre multi-fractal $D_c(h)$ se

calculé à l'aide de la transformation de Legendre des exposants d'échelles $\xi_c(q)$. La transformation de Legendre est une opération mathématique qui, transforme une fonction définie par sa valeur en un point, en une fonction définie par sa tangente, Zia *et al.* (2009). Le spectre multi-fractal est une représentation différente mais équivalente à celle utilisant des exposants d'échelles. La transformation de Legendre des exposants d'échelle donne une majoration du spectre multi-fractal :

$$D_c(h) \leq \min_q (1 + qh - \xi_c(q)) \quad (4.17)$$

Pour trouver le minimum il suffit de trouver la valeur pour laquelle la dérivée s'annule :

$$\frac{d}{dq} (1 + hq - \xi_c(q)) = 0$$

donc :

$$h = \xi'_c(q) \quad (4.18)$$

Par conséquent, le spectre multi-fractal sera défini sur un ensemble qui correspond à toutes les valeurs distinctes prises par la dérivée (pente) des exposants d'échelles. Pour un signal auto-similaire les exposants d'échelles correspondent à une fonction linéaire en fonction de q avec une pente H . Dans ce cas $\xi_c(q) = qh$ et le spectre multi-fractal $D_c(h)$ est réduit à une impulsion de Dirac où $D_c(h) = \delta(h - H)$. La plus part du temps on aura une distribution pour le spectre des singularités. Dans le cas d'un signal composé uniquement de points isolés, la dimension multi-fractale serait nulle. En effet, un point est dit isolé lorsque ses voisins ne possèdent pas le même exposant h . L'ensemble des points isolés forme donc un ensemble de dimension nul. En conclusion, pour un signal auto-similaire même contenant des points isolés, la dimension de l'intervalle reste 1.

Les travaux de Jaffard (1997) montre que dans le cas d'un signal multi-fractal, le spectre multi-fractal est une fonction concave dont le support correspond à l'ensemble des h présents dans le signal. La valeur du spectre multi-fractal pour une valeur h correspond à la dimension de

l'ensemble des supports ayant pour exposant local h . Cette dimension est positive et inférieure ou égale à 1 pour chacune des valeur de h , d'où l'utilisation du terme fractal. Lors du recensement de l'exposant h , si le support se réduit à l'ensemble vide, la dimension multi-fractale est égale à moins l'infinie. Autrement, la dimension de l'ensemble des points ayant comme exposant h est comprise entre 0 et 1. Après la transformation de Legendre, les cumulants c_1 et c_2 correspondent respectivement à la valeur de h la plus fréquente ainsi que la largeur du spectre multi-fractal. On comprend mieux le lien et l'influence des cumulants sur le spectre des singularités en appliquant la transformée de Legendre à $\xi(q) \cong c_1q + c_2q^2$. Dans ce cas l'équation (4.18) devient :

$$q = \frac{h - c_1}{c_2} \quad (4.19)$$

En injectant (4.19) dans (4.17) on obtient :

$$D_c(h) \leq 1 + \frac{(h - c_1)^2}{c_2} = 1 - \frac{(h - c_1)^2}{|c_2|} \quad (4.20)$$

La concavité des $\xi(q)$ impose $c_2 < 0$.

$$\begin{aligned} D_c(h) &\leq 1 - \frac{(h - c_1)^2}{|c_2|} \\ \frac{dD_c(h)}{dh} &\leq -\frac{2h - 2c_1}{|c_2|} \\ \frac{d^2D_c(h)}{d^2h} &\leq -\frac{2}{|c_2|} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

La valeur négative prise par la dérivée seconde de $D_c(h)$ montre que la fonction est concave. Dans le cas multi-fractal, on aura une fonction concave avec un ensemble de valeur de h . À l'inverse, dans le cas auto-similaire où $c_1 = H$ et $c_2 = 0$, le spectre des singularités se réduit à une impulsion de Dirac. Comme la figure 4.2 le montre, l'expression de $D_c(h)$ indique que son

maximum est atteint en $h = c_1$ et que la largeur à mi-hauteur correspond à $\sqrt{c_2}$. La figure 4.2 est un exemple de spectre de singularité $D_c(h)$ où les cumulants c_1 et c_2 prennent respectivement les valeurs 0.6 et -0.03 .

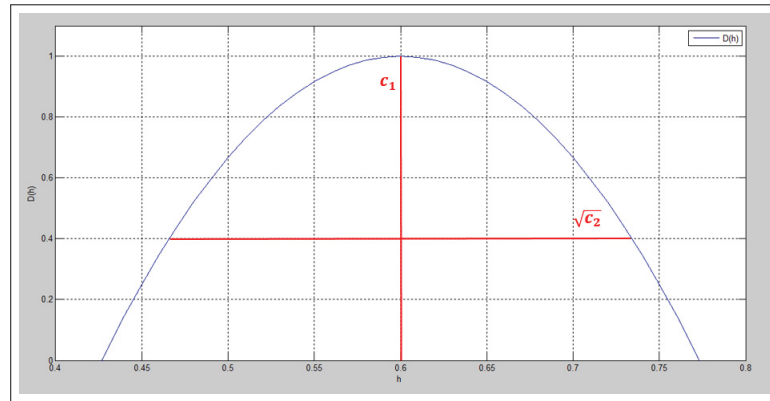


Figure 4.2 Spectre des singularités $D(h)$ avec $c_1 = 0.6$ et $c_2 = -0.03$

La transformée en ondelettes continue offre une description riche et précise du contenu à différentes échelles en fonction du temps. Cependant, cette redondance ainsi que l'instabilité numérique associées à la synthèse, en font un outil utilisable mais peu adapté à l'analyse multi-échelles des signaux.

Les cumulants, les exposants d'échelles et le spectre multi-fractal sont les quantités multi-échelles (QME) issues de la TOC. Elles contiennent, sous trois formes différentes, les mêmes informations concernant les propriétés d'invariance d'échelles. Dans la suite du mémoire, les cumulants sont choisis comme QME lors de l'analyse multi-échelles. Ce choix se base sur leurs capacités à décrire les propriétés d'invariance d'échelles à l'aide de deux quantités uniquement.

Les limitations imposées par l'utilisation de la TOC peuvent être levées en ayant recours à des paramètres d'échelles et de translation discrets. Cette transformée en ondelette est dite discrète et fait l'objet de la section suivante.

4.2 La transformée en ondelettes discrètes dyadiques

La transformée en ondelette discrète se différencie de la TOC par des valeurs discrètes des paramètres a et b . La transformée en ondelettes discrètes dyadique (TODD) permet la représentation du signal en conservant un minimum de coefficients tout en préservant l'information nécessaire à la reconstruction parfaite. En posant $a = 2^j$ et $b = k2^j$ où $j, k \in \mathbb{Z}$, la TODD d'une fonction $x(t)$ est définie par

$$d(j, k) = 2^{-\frac{j}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^*(2^{-j}t - k) dt \quad (4.22)$$

Le paramètre d'échelles $a = 2^j$ se situe sur l'axe des ordonnées du plan temps-échelles et augmente suivant une suite géométrique de raison 2. Le paramètre de translation $b = k2^j$ se situe sur l'axe des abscisses du plan temps-échelle et varie en fonction des échelles. Le terme dyadique indique qu'il existe un lien entre les ordonnées et les abscisses dans le plan temps-échelle lors de la transformée en ondelettes discrètes.

Cette nouvelle représentation non-redondante du signal $x(t)$, permet la reconstruction du signal sans pertes. Comme illustré à la figure 4.3, les coefficients de la TODD ne forment plus un continuum, mais plutôt un maillage discret d'entier relatif du plan temps-échelle. On définit $\lambda_{j,k}$ par

$$\lambda_{j,k} = [k2^j, (k+1)2^j[$$

La terme $\lambda_{j,k}$ correspond à l'intervalle qui sépare les points du maillage à une échelle j donnée.

La largeur et la hauteur de chaque pavé du plan temps-échelle correspondent respectivement à l'étalement temporel et spectral de chaque atome. Les étalements varient selon les échelles tout en conservant la surface du pavé constante. Cette propriété du plan temps-échelle est connu sous le nom d'incertitude d'Heisenberg. En effet, ce principe stipule qu'il est impossible d'être parfaitement localisé, à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel. Par conséquent, une grande précision temporelle implique une faible localisation fréquentielle et ceci réciproque-

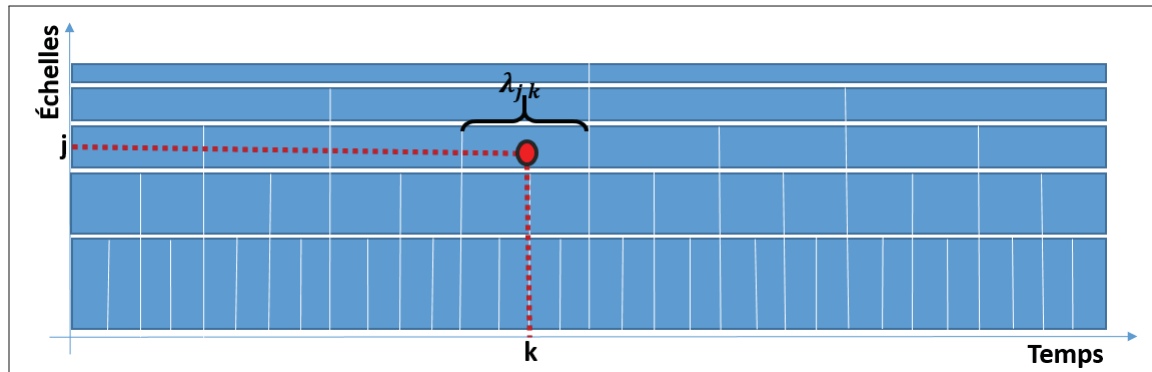


Figure 4.3 Plan temps-échelles.

ment. Ce compromis se traduit dans le tableau par des atomes représentés par des quadrilatères ayant toujours la même surface mais pas les mêmes dimensions. En effet, les échelles les plus basses correspondent à des quadrilatères possédant une faible largeur et une hauteur importante. Ces quadrilatères nous permettent d’avoir une bonne localisation temporelle des variations du signal mais, une faible localisation fréquentielle. Pour les échelles élevées c’est l’inverse qui se produit, les quadrilatères sont très larges avec une faible hauteur. Ce qui a pour conséquence d’offrir une grande précision fréquentielle au détriment d’une bonne localisation temporelle.

Le succès des ondelettes discrètes est dû notamment à l’implémentation d’un algorithme rapide à base de bancs de filtres miroirs en quadrature développés par Mallat (1989). Il permet d’effectuer la transformée en ondelette (analyse) ainsi que la reconstruction (synthèse) de signaux.

Analyse multi-résolution

Afin de construire des bases d’ondelettes orthonormées, Mallat (1989) et Meyer (1986) ont introduit la notion d’analyse multirésolution. Une analyse multirésolution est une suite de sous-espaces fermés $V_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ imbriqués les uns dans les autres :

$$\dots V_{j+2} \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset V_{j-2} \dots$$

Vérifiant les propriétés suivantes :

I) Si $x(t) \in V_j$, alors $x(2t) \in V_{j+1}$

II) $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

III) $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = \{L^2\}$

IV) Il existe une fonction $\phi(t) \in L^2\mathbb{R}$ tel que $\phi(t - k)_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormal de V_0 .

Le principe de l'analyse multi-résolution consiste à projeter itérativement un signal appartenant à l'espace V_j sur un espace V_{j+1} ayant une résolution deux fois moins élevée. L'espace d'approximation V_{j+1} est accompagné de l'espace de détail W_{j+1} tel que

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$$

Autrement dit, l'espace de détail correspond à la différence lors de la projection d'une échelle à une autre. En prenant le cas de l'espace V_0 on obtient

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 = V_2 \oplus W_2 \oplus W_1$$

On peut donc écrire une forme plus générale

$$V_0 = V_J \oplus W_J \oplus W_{J-1} \oplus W_{J-2} \cdots \oplus W_j \cdots \oplus W_2 \oplus W_1$$

Lors de la transformée en ondelettes discrètes, l'espace d'approximation V_0 correspond à la résolution initiale du signal et J au dernier niveau de décomposition. La somme des espaces W constituent l'espace des ondelettes et V_J l'espace d'approximation pour le dernier niveau de décomposition. Donc lors de la TODD, le signal initialement dans l'espace d'approximation V_0 subit une succession de projections à l'issue de laquelle on obtient une version grossière du

signal de départ accompagné d'un ensemble de coefficients de détail situé dans l'espace des ondelettes.

Ondelettes de Daubechies complexes

La famille d'ondelettes la plus connue est sans doute celle introduite par Ingrid Daubechies (1988), notées dbN . Ces ondelettes résultent d'un compromis entre : l'orthogonalité de la base d'ondelettes et la compacité du support de l'ondelette. L'ondelette de Daubechies $db1$ à la particularité de correspondre à l'ondelette de Haar présenté à la figure 4.4.

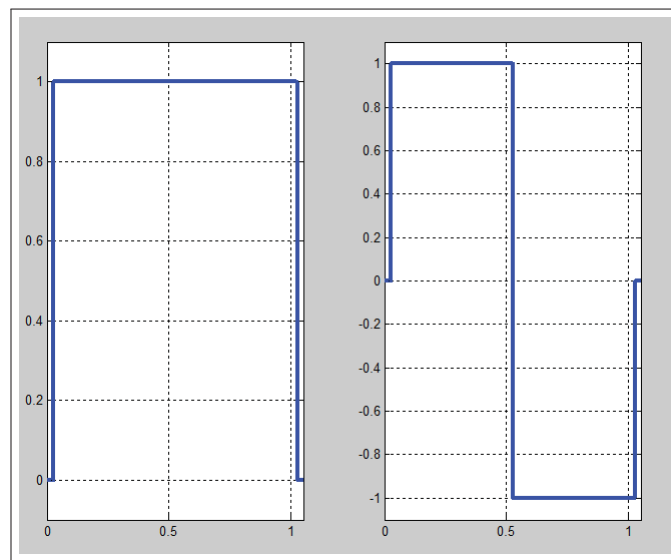


Figure 4.4 Ondelette et fonction d'échelle de Haar

Le graphique de gauche de la figure 4.4 correspond à la fonction d'échelle de Haar. Elle est continue par morceaux et vaut 1 sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs. Le graphique de droite de la figure 4.4 correspond à l'ondelette de Haar. Elle est aussi continue par morceaux et vaut 1 sur $[0, 1/2[$, -1 sur $[1/2, 1[$ et 0 ailleurs.

Cette famille d'ondelette réelle possède entre autre les propriétés suivantes :

- le support est compacte,
- les bases sont orthogonales,
- les ondelettes dbN sont asymétriques,

- des moments nuls N .

L'illustration des ondelettes de Daubechies présentée à la figure 4.5 montre deux ondelettes ainsi que leurs filtres associés pour 2 et 6 moments nuls. On observe alors deux phénomènes : le premier étant l'augmentation de la régularité de l'ondelette en fonction du nombre de moments nuls et le second étant la présence d'asymétrie au sein de l'ondelette. Cette asymétrie de l'ondelette sur son support entraîne un biais temporel lors du calcul de la transformée en ondelettes.

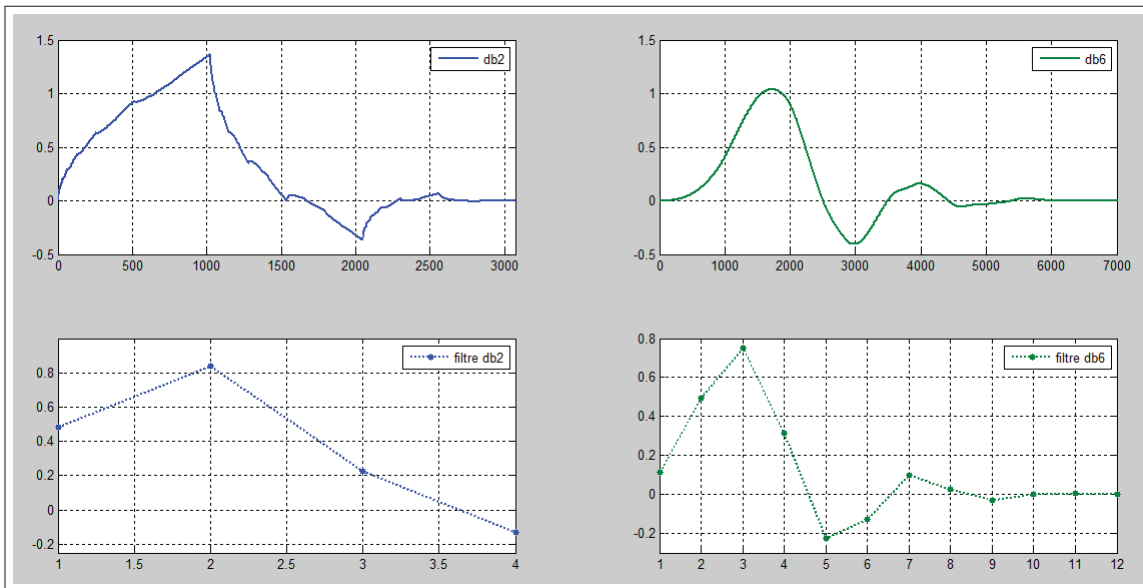


Figure 4.5 Ondelettes db2, db6 et leurs filtres

La symétrie est donc une propriété supplémentaire souhaitée. Cependant, l'ondelette de Haar est la seule ondelette réelle symétrique. Les ondelettes complexes développées par Lina et Mayrand (1993) sont utilisées afin d'apporter une symétrie aux ondelettes de Daubechies d'ordre supérieur à 1. Elles possèdent un support S de taille minimale défini par $S = 2N + 2$ où N correspond au nombre de moments nuls. La partie réelle et imaginaire de l'ondelette de Daubechies complexes pour 6 moments nuls ainsi que son filtre associé sont présentés à la figure 4.6.

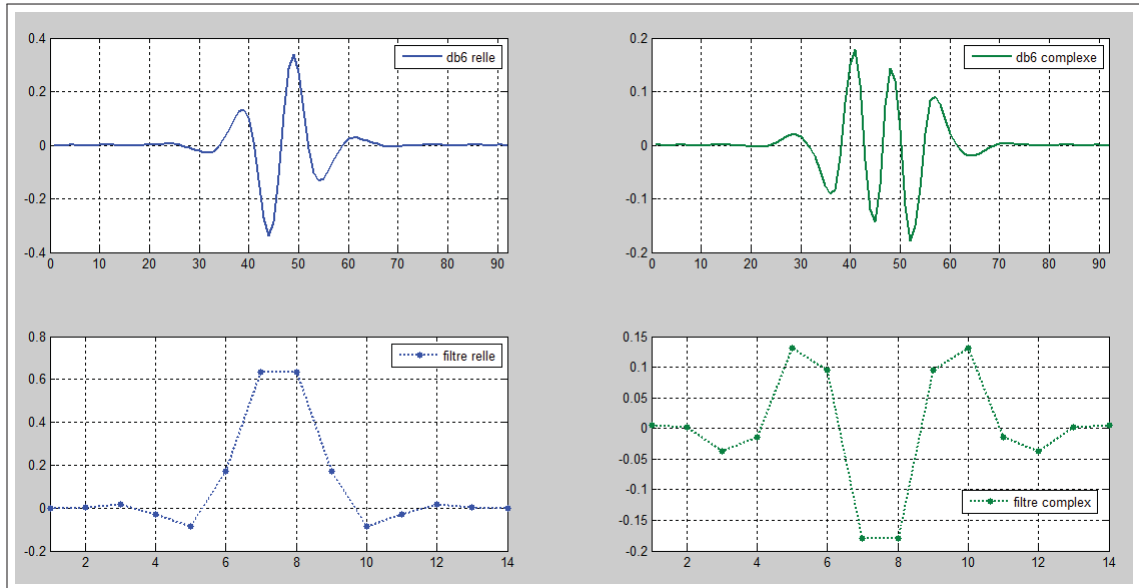


Figure 4.6 Ondelette db6 complexe et son filtre

La partie réelle et la partie imaginaire sont respectivement à gauche et à droite sur la ligne du haut. Les parties réelle et imaginaire du filtre associé à l'ondelette de Daubechie pour 6 moments nuls sont présentées sur la ligne du bas.

Le calcul dans le cas discret des QME tels que $\xi_d(q)$, $D_d(h)$ ainsi que des cumulants c_p peut se faire à l'aide des coefficients issus de la TODD. En substituant les coefficients $c(a, b)$ issus de la TOC aux $d(j, k)$ provenant de la TODD, on obtient une nouvelle fonction de structure $S_d(j, q)$ dans le cas discret.

$$S_d(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} |d(j, k)|^q \quad (4.23)$$

$$S_d(j, q) \sim 2^{jqH} \quad (4.24)$$

Le terme n_j correspond au nombre de coefficients d'ondelettes à l'échelle j . En utilisant cette nouvelle fonction de structure $S_d(j, q)$, l'estimation des exposants d'échelles, du spectre multi-fractal et des cumulants ce fait de la même manière que dans le cas continu :

$$D_d(h) \leq \min_q (1 + qh - \xi_d(q)) \quad (4.25)$$

Ce formalisme présente deux limitations majeures. La première étant que les coefficients d'ondelette discrets se révèlent instables pour la partie droite du spectre de singularités. En effet, la combinaison de coefficients $d(j, k)$ proches de zéro et de valeur négatives de q implique que la fonction de structure $S_d(j, q)$ diverge. Par conséquent, les exposants d'échelles $\xi_d(q)$ deviennent dénués de sens pour les valeurs négatives de q .

La seconde limitation de ce formalisme est présentée par Meyer (1998) et montre que les coefficients en ondelette discrets ne sont pas capables de décrire le comportement en loi de puissance des échelles du signal, en présence de singularités oscillantes².

En conclusion, ce formalisme permet de décrire fidèlement seulement une partie du spectre multi-fractal si le signal ne contient que des singularités non oscillantes. Un nouveau formalisme récemment développé par Jaffard (2004) permet de s'affranchir de ces limites, il s'appuie sur la transformée en ondelette à coefficients dominants qui fait l'objet de la section suivante.

4.3 La transformée en ondelettes à coefficients dominants

Aux vues des limitations imposées par l'analyse multi-échelles basée sur les coefficients en ondelette discrets, Jaffard (2004) a développé une nouvelle approche appelée transformée en ondelette à coefficient dominants (TOCD) ou *leaders*. La TOCD permet de résoudre deux limitations majeures rencontrées lors de l'utilisation des ondelettes discrètes. La première est le manque de robustesse en présence de singularités oscillantes, la seconde est la description fidèle de la totalité du spectre multi-fractal. La TOCD y parvient en effectuant une renormalisation des coefficients d'ondelette discrets du plan temps-échelles.

2. Le sujet des singularités oscillantes et non oscillantes sera abordé plus en détail dans le chapitre suivant.

On définit $\lambda_{j,k}$ comme étant l'intervalle séparant les points du maillage dans le plan temps-échelles à l'échelle j et au moment k . L'union de $\lambda_{j,k}$ et de ces deux plus proches voisins $\lambda_{j,k-1}$ et $\lambda_{j,k+1}$ qui sont situés de part et d'autre de $\lambda_{j,k}$ forment l'intervalle $3\lambda_{j,k}$.

$$3\lambda_{j,k} = \lambda_{j,k-1} \cup \lambda_{j,k} \cup \lambda_{j,k+1} \quad (4.26)$$

Lors du calcul d'un coefficient dominant il est nécessaire de tenir compte des coefficients voisins. Le calcul du coefficient dominant en $\lambda_{(j,k)}$ requiert de prendre en considération l'ensemble des coefficients se trouvant dans l'intervalle $3\lambda_{j,k}$ jusqu'aux échelles les plus petites. Une illustration de cet intervalle dans le plan temps-échelle est donnée à la figure 4.7.

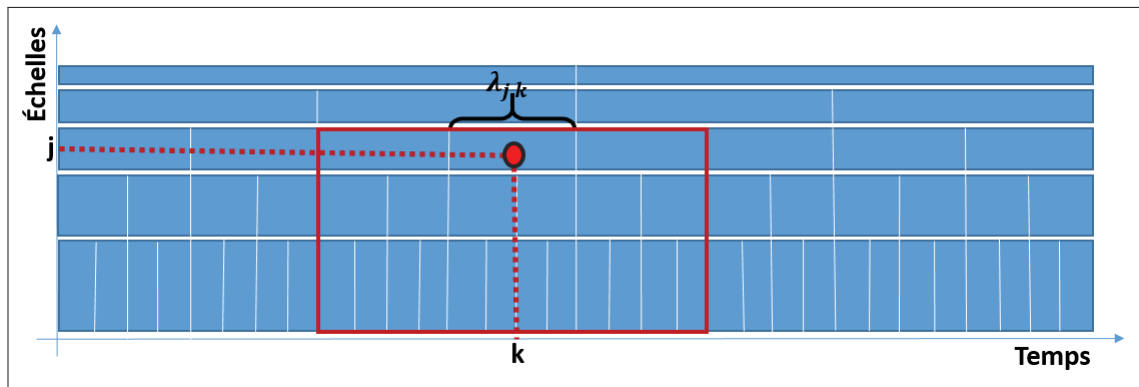


Figure 4.7 Plan temps-échelles pour les coefficients dominants.

Le point rouge désigne le coefficient d'ondelette classique pour lequel on souhaite calculer le coefficient dominant associé. Le coefficient dominant correspond au coefficient en ondelette ayant la plus grande valeur absolue dans la zone aux contours rouges. Cette zone est de largeur $3\lambda_{j,k}$ et va jusqu'aux plus petites échelles.

Les coefficients dominants $l(j,k)$ sont définis à partir des coefficients $d(j,k)$ de la façon suivante :

$$l(j,k) = \sup_{\lambda'_{j,k} \subset 3\lambda_{j,k}} |d(\lambda'_{j,k})| \quad (4.27)$$

$l(j, k)$ désigne le coefficient dominant à l'échelle j et au temps k . Les coefficients dominants $l(j, k)$ consiste à sélectionner le coefficient en ondelette discrets ayant la plus grande valeur absolue dans l'intervalle $\lambda'_{j,k}$. Autrement dit les coefficients obtenus sont dits dominants car on veut s'assurer que lorsque l'on part des petites échelles et que l'on remonte vers les grandes échelles qu'il y ait toujours une augmentation de la valeur des coefficients. Cela permet de mieux approcher le comportement des signaux en $1/f$ car la densité spectrale de puissance va augmenter en allant vers les basses fréquences. De plus, les coefficients dominants ont la particularité de se comporter en loi de puissance en fonction des échelles. Les coefficients dominants tendent vers un comportement en loi de puissance et cela peu importe les singularités présentes, par conséquent ils s'avèrent intéressants pour caractériser les signaux invariants d'échelles. À partir de ces nouveaux coefficients, on définit une nouvelle fonction de structure $S_l(j, q)$ comme suit :

$$S_l(j, q) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} l(j, k)^q \simeq 2^{j\xi_l(q)}$$

En utilisant cette nouvelle fonction de structure $S_l(j, q)$ on peut calculer les exposants d'échelles, le spectre multi-fractal ainsi que les cumulants de la même manière que dans le cas discret.

$$D_l(h) \leq \min_q (1 + qh - \xi_l(q)) \quad (4.28)$$

Les coefficients dominant pour les valeurs négatives de q ne prennent pas de valeurs nulles et par conséquent la fonction de structure $S_l(j, q)$ reste stable. Donc, l'analyse multi-échelle qui s'appuie sur les coefficients dominants permet la description de l'intégralité du spectre multi-fractal. La caractérisation des propriétés d'invariance d'échelles à l'aide des coefficients dominants se révèle être une alternative aux problèmes rencontrés précédemment avec les coefficients discrets. Étant donné que l'invariance d'échelles s'accompagne d'un comportement très irrégulier, le chapitre suivant présente une autre perspective de l'analyse multi-échelles basé sur l'étude de l'irrégularité et des singularités des signaux.

CHAPITRE 5

LA RÉGULARITÉ ET L'EXPOSANT DE HÖLDER

Les signaux électrophysiologiques possèdent des propriétés d'invariance d'échelles qui s'accompagnent d'une forte irrégularité, Mehtal *et al.* (1994). En effet, nous l'avons vu avec le mBf où le changement des propriétés d'invariance d'échelles affecte l'irrégularité du signal. Ce chapitre présente la notion de régularité, sa mesure à l'aide de l'exposant de Hölder h et le spectre des singularités $D(h)$. Ce chapitre permet d'approfondir ces notions centrales à partir desquelles s'effectuera la différenciation des phases interictales et préictales des signaux électrophysiologiques.

5.1 La régularité

Intuitivement, une fonction est dite régulière si ces variations sont relativement faibles au cours du temps. Une fonction régulière est supposée être *lisse* et donc modélisable par un polynôme. Par conséquent, ces signaux sont continus, dérivables et appartiennent à la classe¹ C^1 . La dérivée existe en tous points et est définie comme suit :

$$f^{(1)}(t_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (5.1)$$

On constate que lorsque $f(t)$ appartient à C^1 , les termes $f(t) - f(t_0)$ et $t - t_0$ sont proportionnels. De telles propriétés sont caractéristiques des signaux réguliers et de l'absence d'invariance d'échelles. Or, dans notre cas nous cherchons à caractériser l'irrégularité des signaux liée à l'invariance d'échelles.

Un signal est dit irrégulier en t_0 quand ses variations sont si importantes, qu'il ne peut pas être décrit uniquement à l'aide d'un polynôme. Bien que continu, ce signal est non dérivable en t_0 , on parle de singularité en t_0 . On remarque que les signaux irréguliers liés à l'invariance

1. Soit n un entier naturel non nul. On dit que la fonction f est de classe C^n (ou est n fois continûment dérivable) sur l'intervalle I si elle est n fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I .

d'échelles se situent dans un domaine de signaux ayant pour "extrémités" les classes C^0 et C^1 .

Une définition mathématique de cette notion heuristique d'irrégularité est donnée par :

$f \in C^\alpha(t_0)$, avec $0 > \alpha > 1$, s'il existe des constantes $C > 0$ et $\delta > 0$, ainsi qu'un polynôme P d'ordre strictement inférieur à α tel que si $|t - t_0| \leq \delta$, alors

$$|f(t) - P(t - t_0)| \leq C |t - t_0|^\alpha \quad (5.2)$$

Le terme $P(t - t_0)$ correspond à la partie régulière et lisse du développement en série de Taylor de la fonction $f(t)$ au voisinage de t_0 . La partie gauche de l'équation (5.2) correspond donc au résidu au voisinage de t_0 . Le résidu correspond à l'erreur d'approximation² faite entre la fonction et son développement en série de Taylor en un point. Dans le cas d'un signal irrégulier, le résidu est appelé singularité. La singularité correspond à la composante irrégulière du signal qui a la particularité d'être continu mais non dérivable. La partie droite de l'équation (5.2) correspond au comportement en loi de puissance caractéristique des signaux invariants d'échelles. Cette loi est paramétrée par l'exposant α qui prend un continuum de valeurs non entières afin de majorer la singularité. L'équation (5.2) donne une définition de la régularité en s'appuyant sur la généralisation de l'équation de la dérivée donnée en (5.1).

L'équation (5.2) permet la majoration des singularités à l'aide de l'exposant α qui est compris entre 0 et 1. Par ailleurs, on parlera de fonction α -régulière si il existe un α en tout point. Cette définition de la régularité paramétrée par α , permet une caractérisation de l'ensemble des signaux se trouvant entre les classes C^0 et C^1 . Il en découle que l'équation (5.2) permet de savoir si il existe des singularités au sein du signal.

Une autre perspective est de voir le signal comme étant une irrégularité superposée à un comportement régulier. Le comportement régulier correspond à l'approximation en séries de Taylor de la fonction $f(t)$ au voisinage de t_0 , tandis que l'irrégularité si elle existe, correspond à la singularité obtenue en faisant la différence entre $f(t)$ et le polynôme de Taylor $P(t - t_0)$.

2. Voir annexe

Ce type de comportement rappelle celui observé dans les signaux EEGs. En effet, les pointes épileptiques qui sont des variations très brutales et brèves sont comparables à des singularités qui se superposent au signal de fond. La majoration de la singularité étant possible pour un ensemble de valeur de α , la section suivante aborde le choix de cette valeur.

5.2 L'exposant de Hölder

L'exposant local de Hölder estimé au voisinage de t_0 de $f(t)$ est noté $h(t_0)$ et consiste à prendre la valeur maximale de α permettant de majorer la singularité. Il est défini comme suit :

$$h_f(t_0) = \sup\{\alpha \text{ tel que } f \in C^\alpha(t_0)\} \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) nous indique que l'exposant de Hölder local $h(t_0)$ est la valeur de α la plus petite qui permet la majoration de la singularité. L'exposant de Hölder appelé aussi "la force de la singularité", permet une description de l'irrégularité maximale atteinte localement. Une fonction sera dite uniformément Höldérienne lorsqu'il sera possible de calculer l'exposant de Hölder en tout point.

Pour un signal auto-similaire, la propagation d'un motif à plusieurs échelles se traduit par la présence de singularités ayant toutes le même exposant de Hölder. Dans ce cas, l'ensemble des singularités ont le même exposant de Hölder qui est égale à l'exposant de Hurst. On peut considérer l'exposant de Hurst comme un cas particulier de l'exposant de Hölder dans le cas de signaux auto-similaires. En revanche, dans le cas multi-fractal la propagation de plusieurs motifs à travers les échelles indique qu'il existe des singularités ayant des exposants de Hölder distincts. La section suivante présente les différents types de singularités que l'on peut trouver ainsi que l'impact de l'exposant de Hölder sur l'aspect de la singularité.

5.3 Les singularités

La force de la singularité détermine sa régularité et son aspect. On distingue deux types de singularités, les singularités oscillantes et les singularités non oscillantes appelées respectivement "chirp" et "cusp". Les deux types de singularités ainsi que l'impact de l'exposant de Hölder

sont présentés dans cette section.

Singularités de type cusp

Une singularité de type cusp est illustrée sur la figure 5.1 avec les fonctions $|t - t_0|^h$ où $h = [1; 0.7; 0.4; 0.1]$ et $t_0 = 0$. On voit que pour une valeur de h élevée (courbe bleu) la singularité est proche de la limite pour laquelle on considère le signal comme étant continu et lisse. À l'inverse, pour des valeurs plus petites de h (courbe rouge) on voit apparaître des variations plus importantes et donc une singularité plus forte.

On remarque que l'ensemble des fonctions $|t - t_0|^h$ avec $0 \leq h \leq 1$ sont continues mais non dérivables en 0. Ce qui confirme bien leur appartenance à une classe comprise entre C^0 et C^1 .

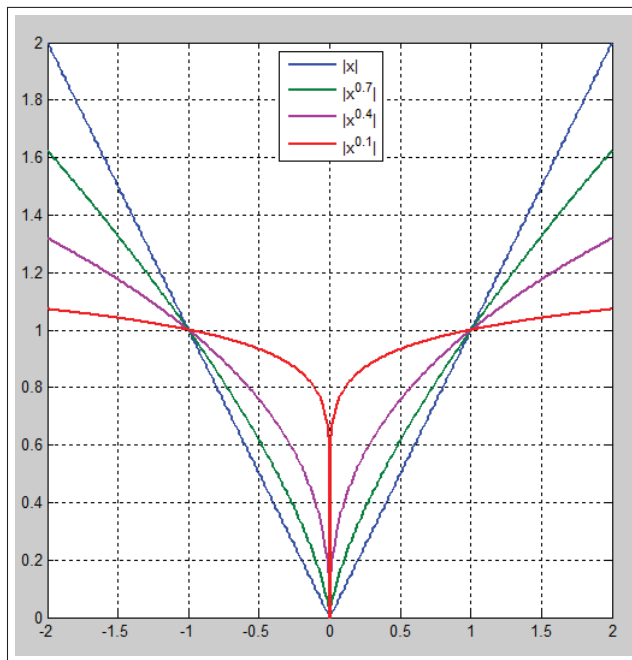


Figure 5.1 Singularités de type cusp

La figure 5.1 montre l'influence de la valeur de l'exposant de Hölder sur les singularités de type cusp. La valeur de h varie d'une courbe à l'autre : $h = 1$ pour la courbe bleue, $h = 0.7$ pour la courbe verte, $h = 0.4$ pour la courbe violette et $h = 0.1$ pour la courbe rouge. On observe que

l'irrégularité du signal augmente lorsque la valeur du paramètre h diminue.

Singularités de type chirp

Les singularités de type chirp constituent une forme plus générale qui englobe les singularités de types cusp. Elles possèdent une composante oscillante supplémentaire apportée par un terme sinusoïdale ainsi qu'un exposant d'oscillation positif noté : β . Les singularités oscillantes sont définis comme suit :

$$|f(t) - P(t - t_0)| \leq |t - t_0|^h \sin \left(\frac{1}{|t - t_0|^\beta} \right) \quad (5.4)$$

Un exemple de singularité de type chirp est donné sur la figure 5.2. Il illustre bien qu'il est possible d'avoir le même exposant de Hölder pour des singularités différentes.

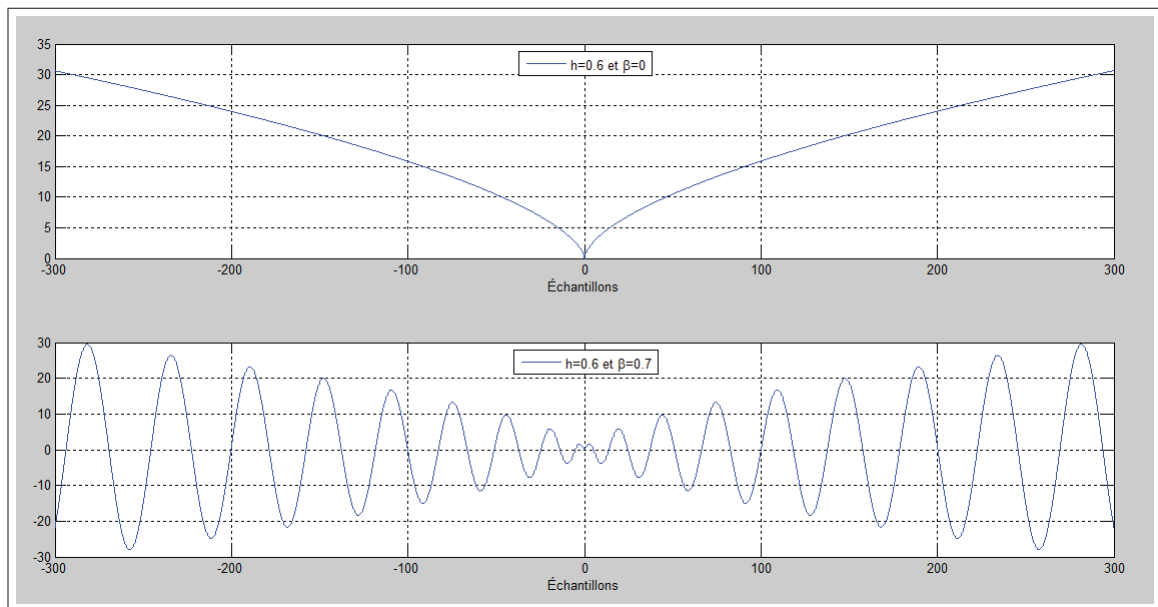


Figure 5.2 Singularités de type cusp et chirp

La figure 5.2 montre l'influence de la valeur de l'exposant β sur deux singularités ayant des exposants de Hölder h similaires. Nous avons deux singularités avec des couples (h, β) différents. Le graphique du haut correspond à une singularité $(0.6, 0)$ et celui du bas à une singularité

(0.6, 0.7). Pour le graphique du haut, la composante oscillante est nulle donc la singularité peut être vue comme un cusp avec $h = 0.6$.

La caractérisation des chirps se fait à partir de l'estimation de l'exposant d'oscillation β . Jusqu'à ce jour, les techniques développées ne permettent pas une estimation stable de l'exposant d'oscillation. Par conséquent, il n'est pas possible de savoir si l'exposant β est non nul lors de l'analyse multi-échelles. L'estimateur développé par la suite dans ce mémoire s'appuie uniquement sur les singularités de type cusp, pour évaluer un changement lors du passage des phases interictales aux phases préictales chez les patients épileptiques.

De manière générale, la caractérisation de ce type de signaux s'appuie sur l'étude de la régularité tout au long du signal. Cette régularité est définie par l'exposant de Hölder qui caractérise la présence de singularités. Par conséquent un signal ayant des propriétés d'invariance d'échelles peut être décrit à l'aide de ses singularités.

Les chapitres précédents ont décrit des outils théoriques pour l'étude et la compréhension des signaux invariants d'échelles. Le chapitre suivant aborde l'aspect pratique avec la mise en place d'un simulateur et d'un estimateur de signaux invariants d'échelles. C'est cet estimateur qui une fois appliqué aux signaux réels permettra la différenciation entre les phases interictales et préictales.

CHAPITRE 6

L'ESTIMATEUR DES CUMULANTS

Nous avons précédemment mis en place les fondements théoriques de l'analyse multi-échelles ainsi que l'expression des principales quantités qui permettent sa description. Ce chapitre apporte une perspective pratique avec des solutions numériques pour le calcul des quantités multi-échelles. Le chapitre est séparé en deux parties, la première aborde la conception d'un simulateur de signaux ayant des propriétés d'invariance d'échelles tandis que la seconde présente un estimateur capable de quantifier ces propriétés. Le rôle du simulateur est de valider le bon fonctionnement de l'estimateur. Dans la première partie, on présente les propriétés des signaux auto-similaires, l'implémentation du simulateur ainsi qu'un exemple de simulation. La seconde partie s'inspire des travaux de Wendt *et al.* (2007) et présente un estimateur des propriétés invariances d'échelles pour les signaux auto-similaires et multi-fractals ainsi que l'apport de la méthode du rééchantillonnage.

6.1 Le simulateur

Dans cette section, il est question de présenter les signaux en $1/f$ et leurs propriétés ainsi qu'une description du fonctionnement du simulateur développé.

6.1.1 Les processus en $1/f$

De manière générale, on définit le bruit comme étant un processus aléatoire parasite qui se superpose au signal d'intérêt. On parle de bruit blanc lorsque toutes les fréquences sont présentes en proportions égales. Dès lors qu'une composante est manquante, atténuée ou simplement modifiée on obtient alors un bruit coloré. Dans beaucoup de phénomènes physiques, il est possible de voir l'apparition de bruits blancs ou de bruits colorés. Les bruits en $1/f$ sont des bruits colorés, leur densité spectrale de puissance (DSP) suit une loi de puissance proportionnelle à l'inverse des fréquences. Une partie importante de l'énergie se trouve dans les basses fréquences. Les bruits colorés sont observés dans des domaines très variés tels que : le battement

cardiaque, le taux d'insuline dans le sang d'un diabétique, le bruit sismique, l'activité solaire et en turbulence. Ces processus possèdent une DSP de la forme

$$DSP(f) \propto 1/f^\gamma \quad (6.1)$$

$$DSP(f) = \left| \hat{X}(f) \right|^2 \quad (6.2)$$

où $\hat{X}(f)$ est la transformée de Fourier du signal $x(t)$.

Le comportement en loi de puissance de ces processus en $1/f$ se traduit par un comportement linéaire dans un diagramme log-log où la valeur de la pente correspond à γ . On obtient un bruit rose quand la valeur de γ est égale à 1, car ce type de signaux se trouvent à mi-chemin entre le bruit rouge ($\gamma = 2$) et le bruit blanc ($\gamma = 0$). La première partie du travail consistera à simuler des signaux en $1/f$.

En analysant le comportement de la DSP des signaux en $1/f$ on constate que :

$$DSP(cf) \propto 1/(cf)^\gamma = c^{-\gamma} DSP(f) \quad (6.3)$$

La propriété donnée par l'équation (6.3) est étroitement liée à la définition des processus auto-similaires. En effet, on remarque que le signal en $1/f$ à l'échelle c correspond au produit du signal en $1/f$ et $c^{-\gamma}$. Cela est dû au fait que toute compression dans le domaine fréquentiel engendre une dilatation dans le domaine temporel et inversement. L'équation (6.3) permet de confirmer l'idée intuitive d'un processus auto-similaire. Il est possible à l'aide des travaux de Wornell (1991) de faire un lien entre l'exposant de Hurst et l'exposant γ :

$$\gamma = 2H + 1 \quad (6.4)$$

6.1.2 L'implémentation du simulateur

Le simulateur proposé est un outil numérique qui génère des processus $x(t)$ dont la DSP suit une loi de puissance de la forme $1/f^\gamma$. Ce travail débute avec la conception de la densité spectrale de puissance du signal $x(t)$. Puis, à partir de cette densité spectrale, est calculée la transformée de Fourier $\hat{X}(f)$ du signal $x(t)$. Et, la dernière étape consiste à obtenir le signal $x(t)$ désiré en effectuant la transformée de Fourier inverse de $\hat{X}(f)$. Le simulateur produit un signal $x(t)$ ayant une DSP en $1/f$, une longueur L et paramétré par l'exposant de Hurst H .

Le module et la phase sont nécessaires pour le calcul de transformée de Fourier inverse de $\hat{X}(f)$. Le module de $\hat{X}(f)$ est donné par $|\hat{X}(f)| = \sqrt{DSP(f)}$. La phase de $\hat{X}(f)$ doit respecter deux conditions :

- Assurer que le signal $x(t)$ soit réel et par conséquent imposer : $\hat{X}(-f) = \hat{X}(f)^*$ ¹.
- Assurer de produire un processus aléatoire lors des simulations. La composante aléatoire des signaux simulés est obtenue dans notre cas avec une phase de $\hat{X}(f)$ qui suit une loi uniforme sur $[-\pi, \pi]$.

En respectant ces deux conditions sur $\hat{X}(f)$, on obtient après la transformée de Fourier inverse, un processus auto-similaire $x(t)$ ayant une densité spectrale de puissance de la forme $1/f^\gamma$ pour un H choisi.

Exemple

Dans le cas où la longueur $L = 50$ et $H = 1/2$, on obtient $\gamma = 2$ à l'aide de l'équation (6.4). La DSP illustrée à la figure 6.1 est obtenue en traçant la fonction $1/f^2$.

1. Soit $x(t)$ un signal réel continu. La transformée de Fourier de $x(t)$ noté $\hat{X}(f)$ est définie par :

$$\hat{X}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi ft} dt$$

Le complexe conjugué de $\hat{X}(f)$ est noté $\hat{X}(f)^*$. Une propriété immédiate est : $\hat{X}(-f) = \hat{X}(f)^*$. Ce qui implique $|\hat{X}(-f)| = |\hat{X}(f)|$ et $arg(\hat{X}(-f)) = -arg(\hat{X}(f))$.

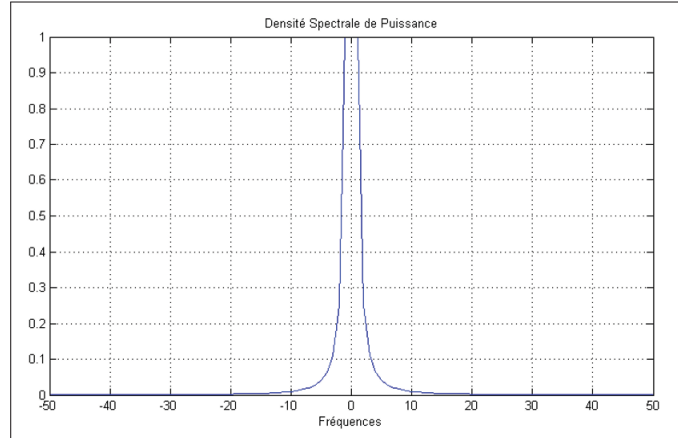


Figure 6.1 Densité spectrale de puissance avec $\gamma = 2$

Par la suite, le module et l'argument de la transformée de Fourier $\hat{X}(f)$ sont présentés respectivement sur les graphiques en haut à gauche et en haut à droite de la figure 6.2. Sur cette même figure sont présentés le signal $x(t)$ en bas à gauche ainsi que sa DSP dans le diagramme log-log en bas à droite. L'exposant γ correspond à la pente dans le diagramme log-log.

$$DSP(f) \propto C f^{-\gamma} \Rightarrow \log(DSP(f)) \propto -\gamma \log(f) + \log(C)$$

On observe sur la figure 6.2 que la DSP à un comportement quasi linéaire sur une grande partie des fréquences, ce qui confirme la présence d'invariance d'échelles au sens strict au sein de $x(t)$.

Les figures 6.3 et 6.4 représentent le comportement temporel et fréquentiel de trois signaux issus du simulateur. Pour ces trois signaux nous avons une valeur de H vaut 0.3, 0.6 et 0.9.

La figure 6.3 présente la simulation de trois signaux en $1/f$ à l'aide du simulateur possédant des exposants de Hurst H distincts. Les valeurs prises par H sont : 0.3, 0.6 et 0.9 en partant du haut vers le bas. On observe une augmentation de l'irrégularité du signal à mesure que la valeur de H diminue. De même, on observe du côté fréquentiel que les signaux sont linéaires dans le diagramme log-log avec trois pentes négatives distinctes. Ces comportements caractéristiques dans le domaine temporel et fréquentiel permettent de valider l'auto-similarité des signaux et le bon fonctionnement du simulateur. Dans la prochaine section, le simulateur sera utilisé pour

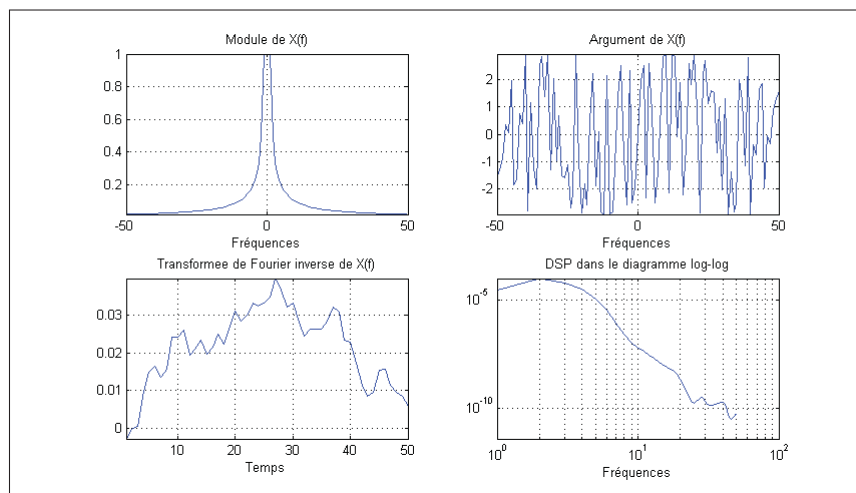


Figure 6.2 Module et phase de $\hat{X}(f)$ accompagnés de $x(t)$ et sa DSP

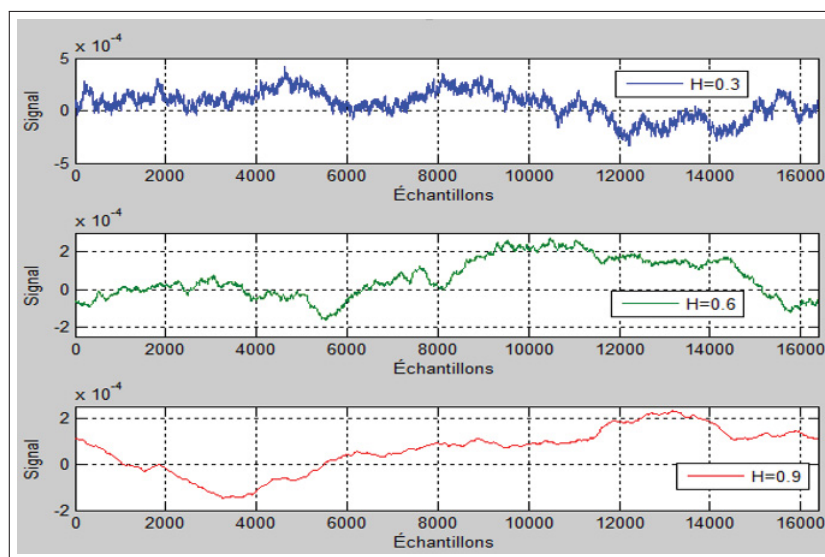


Figure 6.3 Signaux auto-similaires issus du simulateur

la mise en place d'un estimateur de signaux multi-fractals.

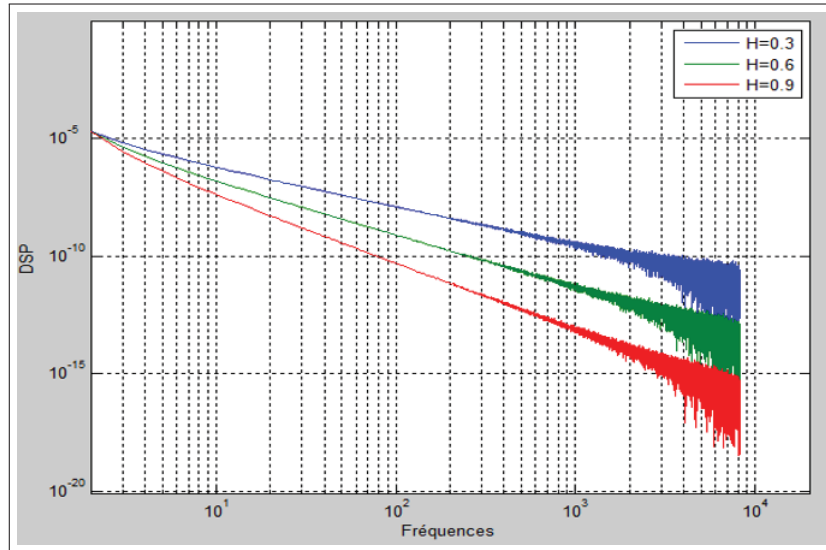


Figure 6.4 DSP de signaux auto-similaires issus du simulateur

6.2 L'estimateur

L'objectif de cette section est de développer un outil numérique capable d'estimer les propriétés d'invariance d'échelles. On s'intéresse notamment aux quantités développées dans les travaux de Ciuciu *et al.* (2008) et Wendt *et al.* (2007). La section se décompose en trois parties. La première partie aborde l'estimation des quantités multi-échelles pour des signaux auto-similaires ayant un comportement en $1/f$. La deuxième partie aborde l'estimation des quantités multi-échelles pour des signaux invariants d'échelles au sens large. Et, la troisième partie présente la méthode du rééchantillonnage qui permet d'apporter une plus grande précision et robustesse à l'estimateur.

6.2.1 L'estimateur des processus en $1/f$

Le rôle de l'estimateur est de calculer l'exposant de Hurst H d'un signal auto-similaire. L'estimateur commence par calculer la DSP du signal puis effectue une régression linéaire de cette dernière dans un diagramme log-log. L'exposant de Hurst est obtenue à partir de l'exposant

γ qui correspond à la pente dans le diagramme. Un exemple de signal auto-similaire issu du simulateur avec $H = 0.6$ et $L = 2048$ échantillons ainsi que sa DSP dans le diagramme log-log sont présentés à la figure 6.5.

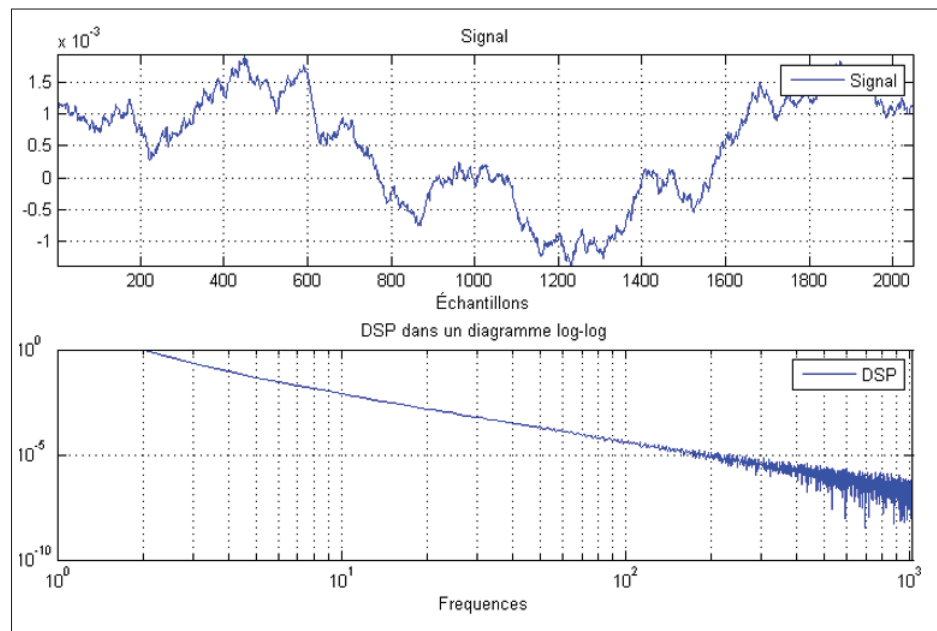


Figure 6.5 Signal auto-similaire et sa DSP

La figure 6.5 présente un signal auto-similaire et sa DSP. La figure du haut correspond au signal auto-similaire de 2048 échantillons obtenu à partir du simulateur où l'exposant de Hurst est de 0.6. Sur le graphique du bas on retrouve la DSP du signal dans un diagramme log-log. La valeur de γ est calculée à l'aide d'une régression linéaire dans un diagramme log-log. Dans l'exemple de la figure 6.5, on obtient l'équation suivante lors de la régression linéaire : $y = -2.3x + 0.8$ autrement dit un exposant $\gamma = 2.3$ ou un exposant de Hurst $H = 0.65$. On note une différence de 0.05 i.e. une erreur relative d'environ 8,3% par rapport à la valeur réelle. Afin de connaître les performances de l'estimateur, il est nécessaire d'effectuer un plus grand nombre de simulations. Ainsi, il nous sera possible de connaître la précision et le biais de l'estimateur ainsi que la confiance que l'on peut lui attribuer.

On effectue 200 réalisations pour chaque valeur de H . Les valeurs de H vont de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1. Les performances des simulations sont illustrées sur la figure 6.6 et le

tableau 6.1. Le graphique de la figure 6.6 correspond aux valeurs estimées en fonction des valeurs réelles de H lors de 200 simulations. La fonction en pointillés verts représente les résultats d'un estimateur parfait (non biaisé) pour lequel toutes les estimations sont égales aux valeurs réelles.

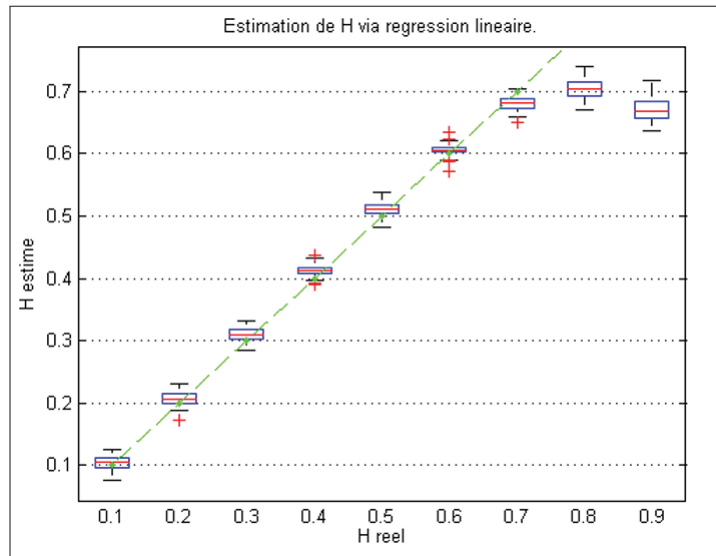


Figure 6.6 Performance de l'estimateur de signaux en $1/f$

Le biais et la variance mesurent respectivement le décalage et la précision des estimations par rapport aux valeurs réelles. Avoir un estimateur biaisé signifie qu'il y a un décalage identique et continu à chaque estimation par rapport à la valeur réelle. En d'autres termes, un estimateur biaisé renvoie les résultats décalés. Un estimateur qui manque de précision possède une variance élevée et la réciproque est vraie. Le tableau 6.1 montre l'erreur relative faite lors de l'estimation des valeurs réelles de H .

La figure 6.6 et le tableau 6.1 indiquent tous deux que les exposants de Hurst estimés sont proches du comportement parfait pour $H < 0.8$. En effet, sur cet intervalle le biais, la variance ainsi que l'erreur relative sont faibles. En revanche, quand $H \geq 0.8$, on note des écarts croissants à mesure que H augmente.

Tableau 6.1 Performance de l'estimateur de signaux en $1/f$

Valeurs réelles	Erreur relative en %
0.1	4.61
0.2	3.79
0.3	3.23
0.4	3.21
0.5	2.30
0.6	0.96
0.7	2.66
0.8	12.4
0.9	25.8

L'estimateur développé permet le calcul de l'exposant de Hurst H qui indique la force de l'unique singularité présente dans un signal auto-similaire. Cependant, pour un signal multi-fractal l'exposant de Hurst a peu de sens car il existe plusieurs singularités ayant des forces distinctes. De plus, l'estimation de l'exposant de Hurst H via une régression linéaire peu manquer de robustesse. En effet, on peut être confronté à plusieurs valeurs de H quand il existe plusieurs droites pouvant approcher le comportement de la DSP du signal. Précédemment, il a fallu répéter 200 fois la simulation et l'estimation afin d'avoir accès à la distribution de l'exposant H et faire un choix. Cependant, dans le cas des signaux EEG réels il n'est pas possible de simuler plusieurs fois une crise chez un patient car les enregistrements sont uniques. Par conséquent, cet estimateur peu robuste se limite au signaux auto-similaires ayant des exposants inférieurs à 0.8. La section suivante porte sur le développement d'un estimateur capable de repousser ces limites.

6.2.2 L'estimateur d'invariance d'échelle au sens large

Ce nouvel estimateur est conçu pour mesurer l'invariance d'échelles des signaux multi-fractals en s'appuyant sur le calcul des cumulants. Le calcul des cumulants est présenté à l'aide des équations (6.5) à (6.8)

$$\hat{c}_p = (\log_2(e)) \sum_{j=j_1}^{j=j_2} w_j \hat{C}(j, p) \quad (6.5)$$

$$\hat{C}(j, p) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(l(j, k)^p) \quad (6.6)$$

$$w_j = n_j \frac{(V_0 j - V_1)}{(V_0 V_2 - V_1^2)} \quad (6.7)$$

$$V_i = \sum_{j=j_1}^{j=j_2} j^i n_j \quad (6.8)$$

Le terme n_j correspond au nombre de coefficients d'ondelette à l'échelle j . Le terme $\hat{C}(j, p)$ correspond aux cumulants d'ordre p du logarithme népérien des *leaders* à l'échelle j . Pour le calcul du spectre des singularités, un estimateur a été proposé par Chhabra *et al.* (1989) afin d'éviter de calculer la transformée de Legendre.

Dans notre cas, l'estimation des cumulants s'inspire des travaux présentés par Ciuciu *et al.* (2012) où les coefficients en ondelettes dominants sont définis comme suit :

$$l^{(\omega)}(j, k) = \sup_{\lambda'_{j,k} \subset 3\lambda_{j,k}} 2^{j\omega} |d(\lambda'_{j,k})| \quad (6.9)$$

Cette nouvelle expression des leaders fait appel à un paramètre supplémentaire ω . Le paramètre ω régularise la définition des wavelet leaders et permet de retrouver l'expression des coefficients en ondelette dominants définis au chapitre 4 quand $\omega = 0$. De cette nouvelle expression des leaders découle une nouvelle expression de la fonction de structure définie comme suit :

$$S^{(\omega)}(j, k, \omega) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} (l^{(\omega)}(j, k))^q \cong 2^{j(q(h+\omega))} \quad (6.10)$$

Ce qui implique une nouvelle expression des exposants d'échelle, des cumulants et de leur estimation :

$$\xi(q, \omega) = q(h + \omega) \cong c_1^{(\omega)} q + c_2^{(\omega)} \frac{q^2}{2} \quad (6.11)$$

$$c_1 = c_1^{(\omega)} - \omega \text{ et } \forall p \geq 2 \ c_p = c_p^{(\omega)} \quad (6.12)$$

$$\hat{c}_p^{(\omega)} = (\log_2(e)) \sum_{j=j_1}^{j=j_2} w_j \hat{C}^{(\omega)}(j, p) \quad (6.13)$$

$$\hat{C}^{(\omega)}(j, p) = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} \ln(l^{(\omega)}(j, k)^p) \quad (6.14)$$

Ce paramètre qui a été mis en place pour des raisons techniques, est régularisé par la suite en fonction des résultats obtenus lors des simulations.

La figure 6.7 présente les résultats obtenus lors de l'estimation des cumulants d'ordre un avec $\omega = 0$. Cette figure est obtenue après 200 simulations suivies de 200 estimations pour chaque valeur de H . La valeur de H varie de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1. Les simulations sont faites pour un signal auto-similaire de longueur 2^{14} échantillons. Le calcul est fait sur des échelles allant de 3 à 6 et pour des valeurs de q allant de -5 à 5 . La droite verte représente le comportement d'un estimateur parfait.

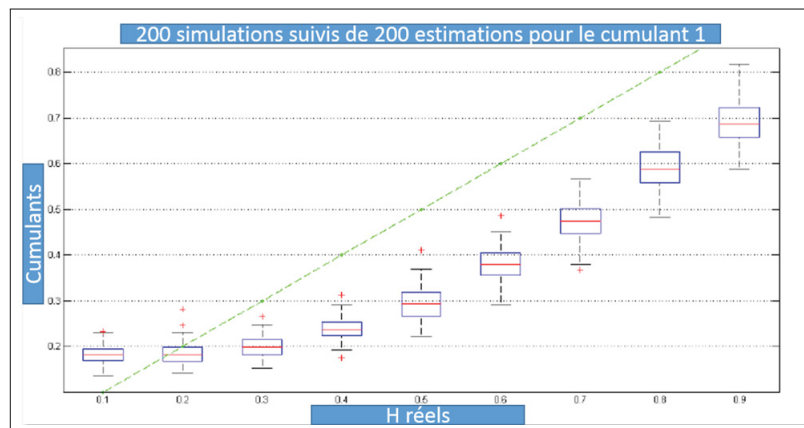


Figure 6.7 Performance de l'estimateur avec $\omega = 0$

Cette estimateur est biaisé à cause de la différence importante entre les valeurs estimées et réelles. Le résultats des performances montre qu'effectivement le paramètre ω ne peut pas être nul. Le même travail est effectué avec $\omega = 1$. Les résultats sont présentés à la figure 6.7.

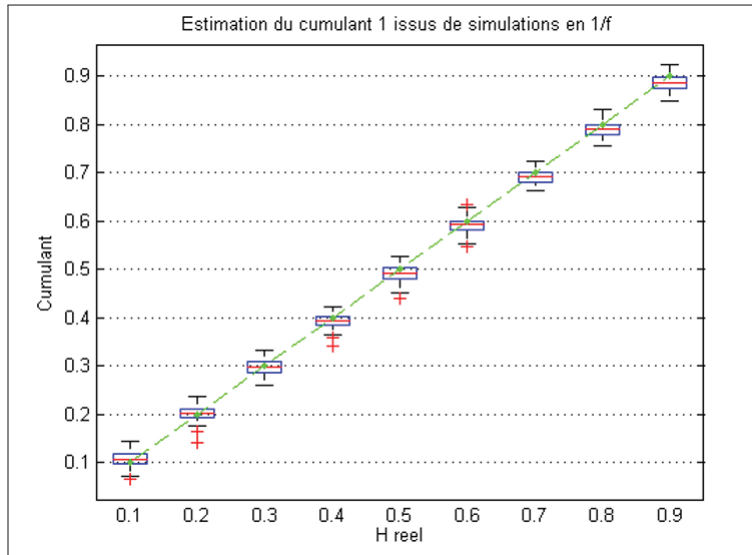


Figure 6.8 Performance de l'estimateur avec $\omega = 1$

On remarque qu'avec $\omega = 1$ les performances sont très proches du comportement d'un estimateur parfait. En effet, il n'y a pas de biais et la faible variance des distributions en font un estimateur précis. Par conséquent à partir des simulations, nous constatons que le paramètre ω doit être égal à 1 afin d'avoir un estimateur performant. Dans le reste du mémoire, ce sont les coefficients dominants $l^{(\omega)}(j, k)$ ainsi que le paramètre $\omega = 1$ qui seront utilisés pour l'estimation des QME.

Un exemple de l'estimation des QME est présenté à la figure 6.9 avec $\omega = 1$. Le signal utilisé est issu du simulateur et possède 2^{14} échantillons avec $H = 0.6$. Le calcul s'est fait sur des échelles allant de 3 à 6 et pour des valeurs de q allant de -5 à 5 . Le graphique de gauche de la figure 6.9 représente le spectre multi-fractal en fonction des valeurs de h . Le graphique du milieu correspond aux exposant d'échelles $\xi(q)$ du signal où la courbe rouge est la régression linéaire d'équation $y = 0.6 * q - 1.1$. Le graphique de droite représente les deux premiers cumulants.

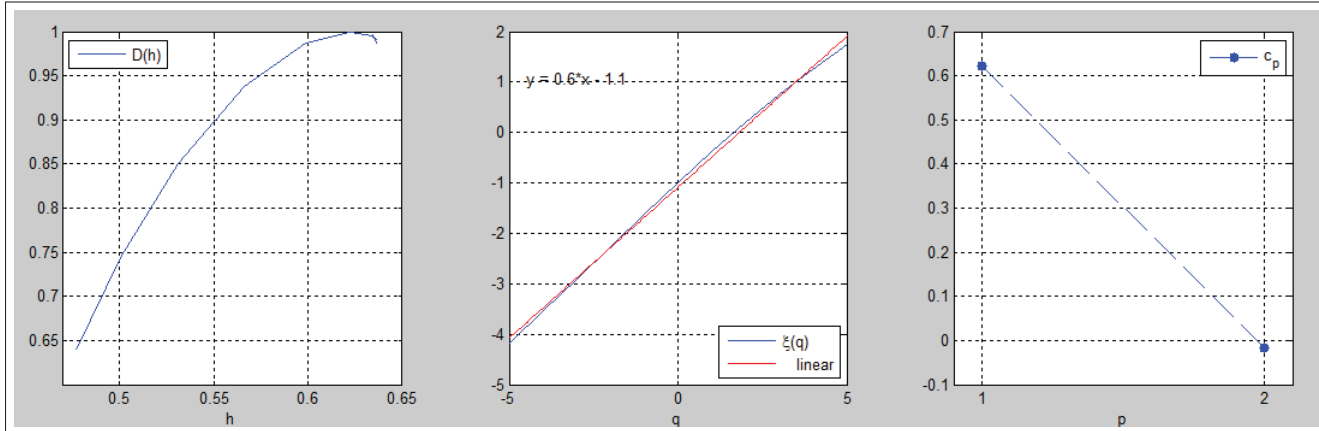


Figure 6.9 Estimation du spectre multifractal, des exposants d'échelles et des cumulants

On observe que le spectre des singularités atteint son maximum pour un exposant de Hölder autour de $h = 0.62$. De même, on obtient un exposant de Hölder $h = 0.60$ en se basant sur la pente des exposants d'échelles. Pour les cumulants d'ordre un et deux on trouve respectivement 0,62 et $-0,02$. Le spectre des singularités, les exposants d'échelles ainsi que les cumulants donnent une estimation de l'exposant de Hölder qui est proche de la valeurs théorique 0.6.

Maintenant que l'estimation des quantités multi-échelles est possible, nous allons aborder l'influence du choix de l'ondelette sur les performances de notre estimateur. Précédemment, nous avons précisé qu'il y avait un choix à faire entre les ondelettes réelles de Daubechies et les complexes de Daubechies. Une de mes contributions a été d'étudier l'apport des ondelettes complexes de Daubechies lors de l'estimation des cumulants. Après 200 simulations suivies de 200 estimations, on obtient les graphiques 6.10 et 6.11. Le graphique 6.10 correspond à la valeur absolue du biais obtenu avec l'utilisation des ondelettes complexes et réelles. Les résultats obtenus pour les ondelettes réelles sont en bleu et ceux pour les ondelettes complexes sont en rouge. Lors de ces estimations $\omega = 1$ et les valeurs de H varient de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1.

La figure 6.11 correspond à la variance des estimations en utilisant les ondelettes réelles de Daubechies en bleue et les ondelettes complexes de Daubechies en rouge.

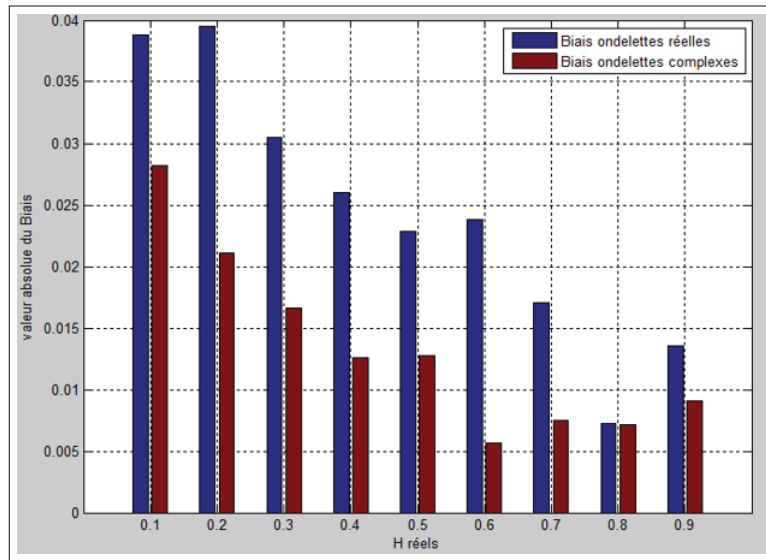


Figure 6.10 Comparaison du biais entre ondelettes complexes et réelles

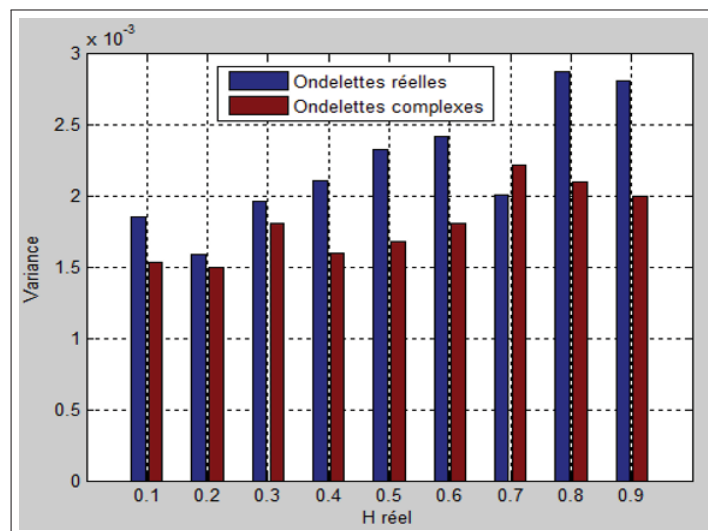


Figure 6.11 Comparaison de la variance entre ondelettes complexes et réelles

Un estimateur parfait possède un biais et une variance nuls. Donc, les meilleures performances sont celles obtenues avec les ondelettes complexes symétriques qui donnent un biais et une variance plus faibles qu'avec les ondelettes réelles. L'utilisation des ondelettes complexes symétriques de Daubechies améliorent les performances de l'estimateur et par conséquent l'estimation des cumulants c_p .

La prochaine section présente une étape supplémentaire qui sera ajoutée à l'estimateur afin que la distribution de h soit accessible à partir d'un seul échantillonnage.

6.2.3 Rééchantillonnage

En statistique, comme le présente Lahiri (2003) le rééchantillonnage aussi appelé *bootstrap* est une méthode d'attribution des mesures de précision tels que le biais, la variance, les intervalles de confiance ou l'erreur de prédiction à partir d'un seul échantillonnage. La mesure de ces propriétés est effectuée en estimant la distribution de l'échantillonnage. Le rééchantillonnage déduit la distribution de la population à partir de celle de l'échantillon. À partir des données, cette méthode génère d'autres signaux ayant les mêmes propriétés d'invariance d'échelles. Dans notre cas le bootstrap s'effectue à partir des enregistrements EEG intracrâniens.

Le bruit blanc est un bon candidat pour expliquer le fonctionnement du bootstrap car ces échantillons ne possèdent aucune corrélation entre eux. En effet, un nouveau bruit blanc peut être créé simplement en agençant de manière aléatoire les échantillons. Plus rigoureusement, on parle de tirage aléatoire avec remise pour désigner cette manière de procéder. C'est sur ce principe que repose la méthode du bootstrap. Cependant, le rééchantillonnage ne peut être appliqué directement aux signaux EEG intracrâniens à cause de la dépendance qui existe au sein des signaux. En revanche, les coefficients en ondelette ont la particularité d'être faiblement corrélés. En effet, leurs fonctions de corrélation décroissent rapidement ce qui se traduit par une faible corrélation en fonction du temps sur l'ensemble des échelles. On parle du "pouvoir de décorrélation" des coefficients en ondelettes. Donc le bootstrap aura lieu dans l'espace des ondelettes.

Concrètement, le bootstrap s'effectue ici par un tirage aléatoire avec remise des coefficients dominants des données empiriques. Cette opération a pour conséquence la conservation des propriétés d'invariance d'échelles du signal même si il n'y a plus conservation de l'énergie du signal. L'ensemble des signaux générés peuvent être considérée comme des réalisations de variables indépendants et identiquement distribués.

Le rééchantillonnage par bloc

Contrairement au bruit blanc, la corrélation entre les coefficients dominants est faible mais pas

nulle. Afin que les propriétés du signal soient conservées lors du bootstrap, il est nécessaire de garder cette faible corrélation entre les coefficients dominants. Le rééchantillonnage par bloc est une alternative qui regroupe les coefficients dominants en blocs de longueur LB sur chacune des échelles avant d'effectuer un tirage aléatoire qui suit une loi de probabilité uniforme. La longueur des blocs LB est proportionnelle au nombre de moment nuls N de l'ondelette utilisée. Dans le cas des ondelettes de Daubechies on a $LB = 2 * N$, Wendt *et al.* (2007). Dans le cadre de notre estimateur nous avons choisis des ondelettes de Daubechies avec $N = 6$ et des blocs de longueur $LB = 12$.

La figure 6.12 présente les performances de l'estimateur lorsque ce dernier est jumelé au bootstrap. Les résultats représentent l'évolution du cumulants d'ordre 1 en fonction des valeurs réelles. L'estimateur calcul le cumulants d'ordre 1 du signal auto-similaire de longueur 2^{14} généré par le simulateur ainsi que ces 100 bootstraps. La valeur de H des signaux générés varie de 0.1 à 0.9 avec un pas de 0.1. Le calcul s'est fait sur de échelles allant de 3 à 6, pour des valeurs de q allant de -5 à 5 et $\omega = 1$. Le graphique donne la répartition des cumulants estimée en fonction des valeurs réelles. La droite verte représente le comportement d'un estimateur parfait.

On constate que les résultats obtenus sont proches du comportement d'un estimateur parfait. La faible variance de l'estimateur lui confère une bonne précision. Les résultats obtenus avec plusieurs simulations (sans bootstrap) sont légèrement meilleurs que ceux obtenus avec le bootstrap. Cela s'explique en partie du fait que le bootstrap est une technique statistique et que par conséquent que la véracité des résultats est proportionnel au nombre de bootstrap effectué. De plus, le choix du paramètre LB influent aussi sur les résultats. Néanmoins, on note que les performances de l'estimateur avec et sans bootstrap sont très proches. Ces résultats sont encourageants car ils sont obtenus à partir d'une seule simulation. À l'issue du bootstrap, c'est la moyenne des cumulants qui est sélectionnée pour caractériser les propriétés d'invariance d'échelles du signal. La combinaison des coefficients dominants et du bootstrap permet d'obtenir un estimateur précis et robuste des quantités multi-échelles d'un signal.

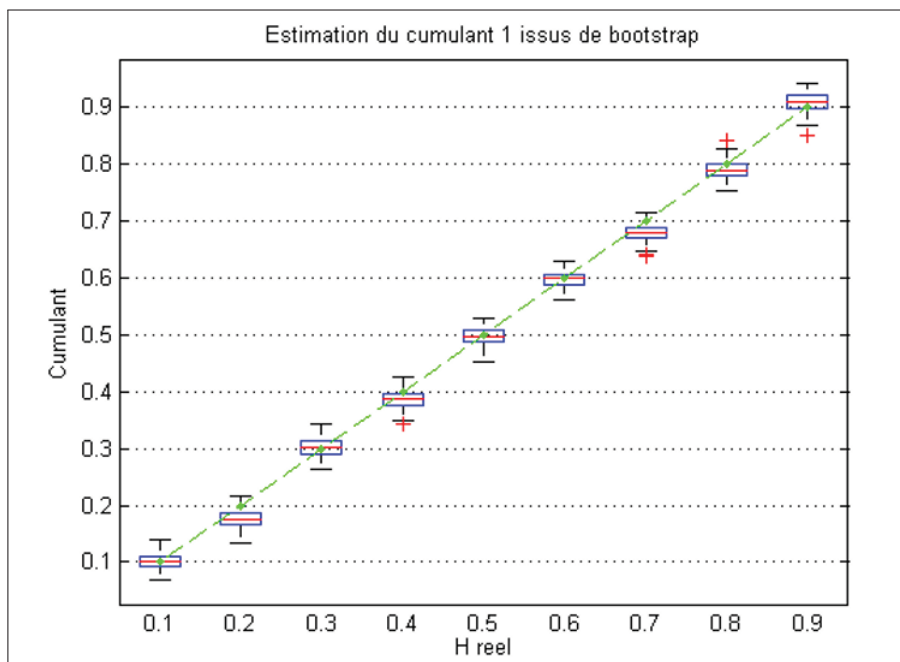


Figure 6.12 Performance de l'estimateur avec bootstrap

À partir de cet estimateur des propriétés d'invariances d'échelles, l'étude des signaux épileptiques réels est donc possible et fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 7

L'APPLICATION AUX SIGNAUX ÉPILEPTIQUES RÉELS

Après avoir testé l'estimateur sur des signaux synthétiques, ce chapitre porte sur son application aux signaux réels intracrâniens acquis chez des patients souffrant d'épilepsie. Cette partie clinique est réalisée en collaboration avec Kais GADHOUMI sous la co-supervision du Prof. Jean GOTMAN et du Prof. Jean-Marc LINA. Les signaux synthétiques ont été utilisés afin de démontrer la faisabilité de la méthode pour les signaux réels.

L'application de l'estimateur aux signaux EEG intracrâniens réels a pour but de différencier au cours du temps la phase interictale (entre les crises) de la phase préictale (avant la crise) à l'aide des cumulants c_1 et c_2 qui mesurent les propriétés d'invariance d'échelles du signal. Les signaux EEG intracrâniens utilisés sont des données expérimentales provenant d'un patient où le neurologue a marqué le début de la crise. Ces données sont composées d'une phase préictale et d'une phase interictale. La phase préictale est définie comme une période de temps sélectionnée quelques minutes avant le début d'une crise et qui est supposée être différente de ce qui se passe loin des crises. À l'inverse, la phase interictale correspond à une période de temps sélectionnée entre deux crises suffisamment éloignées pour être considérée extérieure à la phase préictale. L'application de l'estimateur se fait à l'aide d'une méthodologie à fenêtre glissante. En effet, comme le présente la figure 7.1 l'estimation des cumulants se fait sur une fenêtre qui glisse sur tout le signal.

La figure 7.1 est un exemple pour un signal de longueur 2000 échantillons et une fenêtre glissante de 500 échantillons. Les données électrophysiologiques sont présentées sous la forme de matrices où les colonnes correspondent à l'acquisition de l'activité électrique au cours du temps et les lignes aux canaux (capteurs). Les canaux correspondent aux différents emplacements dans le cerveau où les mesures sont faites. Dans notre cas les canaux se situent dans le système limbique et plus précisément dans l'Amygdale, l'Hippocampe et le Parahippocampe. Chaque capteur a un numéro qui indique la profondeur à laquelle il se trouve. Plus le capteur est superficiel et plus le chiffre est grand, à l'inverse, plus le canal est situé profondément dans

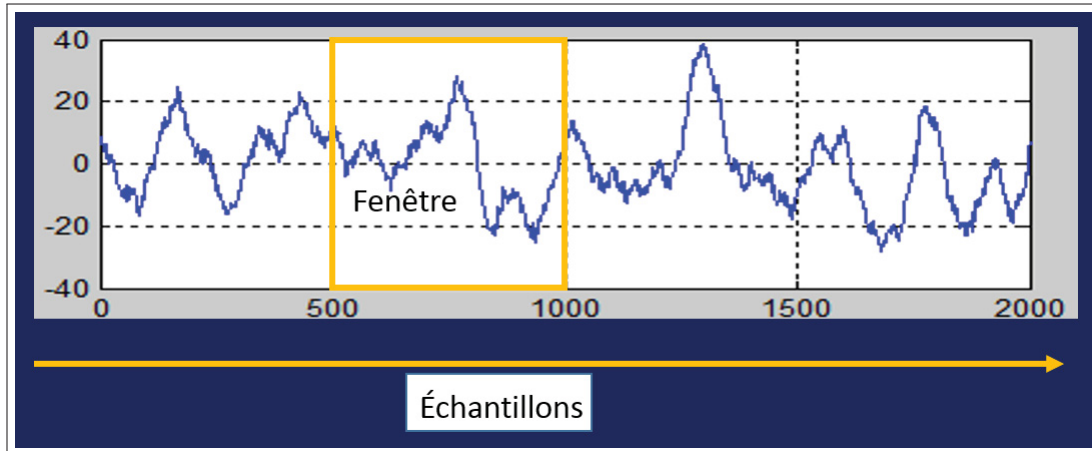


Figure 7.1 Schématisation de la méthodologie à fenêtre glissante.

la région et plus ce nombre est faible. Le tableau 7.1 présente l'emplacement des 15 canaux dans les différentes régions du cerveau.

Tableau 7.1 Emplacement des canaux

Canal	Nom
1	Amygdale Gauche 1 (AG1)
2	Amygdale Gauche 2 (AG2)
3	Amygdale Gauche 3 (AG3)
4	Hippocampe Gauche 1 (HG1)
5	Hippocampe Gauche 2 (HG2)
6	Hippocampe Gauche 3 (HG3)
7	Amygdale Droit 1 (AD1)
8	Amygdale Droit 2 (AD2)
9	Amygdale Droit 3 (AD3)
10	Hippocampe Droit 1 (HD1)
11	Hippocampe Droit 2 (HD2)
12	Hippocampe Droit 1 (HD3)
13	Parahippocampe Droit 1 (PD1)
14	Parahippocampe Droit 2 (PD2)
15	Parahippocampe Droit 3 (PD3)

Nous avons une électrode dans chaque hémisphère pour l'Amygdale et l'Hippocampe. En revanche, dans le Parahippocampe nous avons une seule électrode situé dans l'hémisphère droit.

En effet, une électrode correspond à une couleur et à un ensemble de trois canaux dans le tableau 7.1.

Les données expérimentales à notre disposition sont constituées d'une période interictale et d'une période préictale de 2.5×10^6 et 1.85×10^6 échantillons. Étant donnée, que la fréquence d'échantillonnage est de 2 KHz on obtient des enregistrements d'environ 20 minutes pour la phase interictale et 15 minutes pour la phase préictale. L'algorithme de l'estimateur prend comme argument d'entrée les enregistrements (interictale et préictale) et fourni en sortie les cumulants. Il est possible de spécifier certains paramètre d'entrée tel que : la largeur de la fenêtre de balayage en échantillons (lgr), les échelles (j_{min} et j_{max}), l'ordre des moments statistiques (q), le nombre de rééchantillonnage (NR) ainsi que les quantités multi-échelle souhaitées. Les paramètres utilisés sont $lgr = 2^{11}$, $j_{min} = 3$, $j_{max} = 6$, $q = [-5 : 5]$ et $NB = 100$. Les échelles j_{min} et j_{max} correspondent à l'intervalle sur lequel se fait l'analyse tandis que NB correspond au nombre de bootstrap effectué. Le graphique du haut de la figure 7.2 illustre le signal temporel du canal 1 durant la période interictale. Les graphiques du bas correspondent aux cumulants d'ordre un et deux. Le même travail est effectué à la figure 7.3 durant la phase préictale.

La figure 7.2 présente l'évolution de la différence de potentiel (DDP) en fonction des échantillons et des cumulants pour le canal 1 durant la période interictale. Le graphique du haut représente l'évolution au cours du temps de la DDP en micro-volts. Le deuxième et le troisième graphique correspondent respectivement aux cumulants d'ordre un et deux.

La figure 7.3 présente le même travail durant la période préictale.

Entre les phases interictale et préictale, on constate que les cumulants varient pour un même canal. Les variations les plus importantes sont observées pour les cumulants d'ordre un, tandis que les variations des cumulants d'ordre deux sont beaucoup plus faibles. Quand il y a des variations des cumulants d'ordre deux, il est fort probable que ces dernières soient accompagnées d'une variation des cumulants d'ordre un. Même si la réciproque est fautive et que les variations observées sur les cumulants d'ordre un ne sont pas forcément perceptibles sur les cumulants

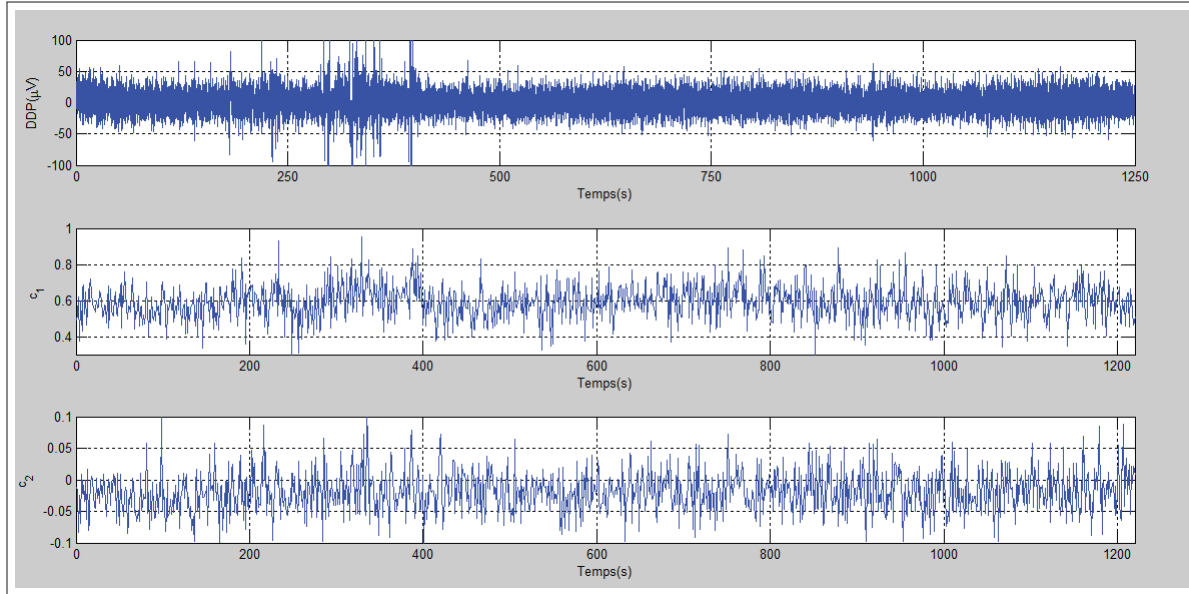


Figure 7.2 Application de l'estimateur à la phase interictale des signaux EEG réels

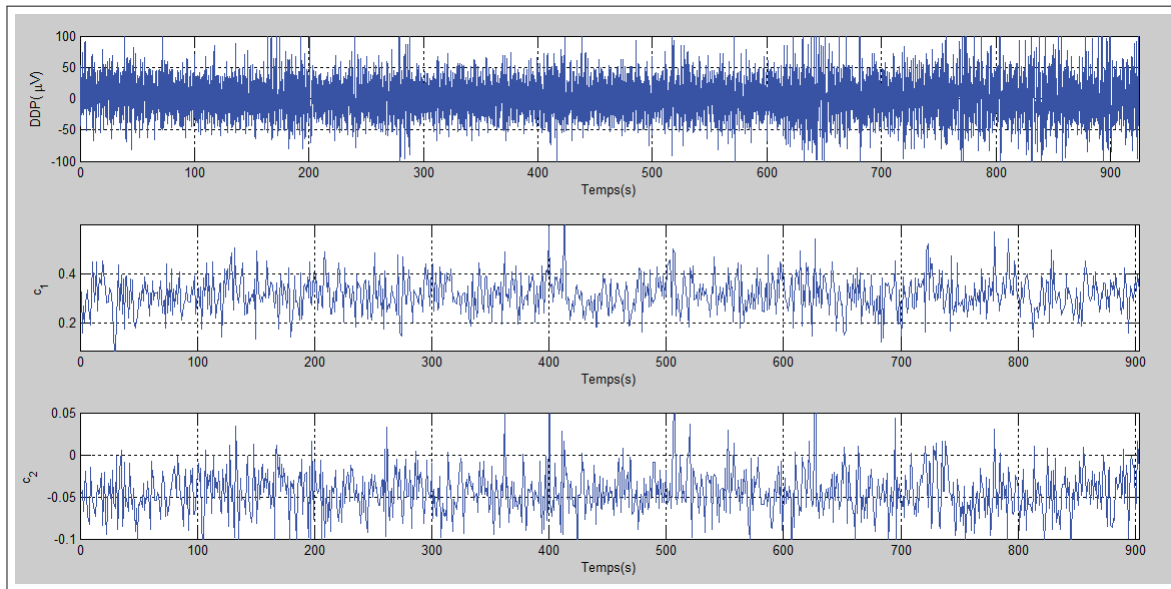


Figure 7.3 Application de l'estimateur à la phase préictale des signaux EEG réels

d'ordre deux, le cumulants d'ordre deux varie significativement d'une phase à une autre et reste pertinent en corroborant les résultats obtenus avec les cumulants d'ordre un. Les figures 7.4 illustrent le comportement global du cumulants d'ordre un pour l'ensemble des canaux lors du passage de la phase interictale à préictale.

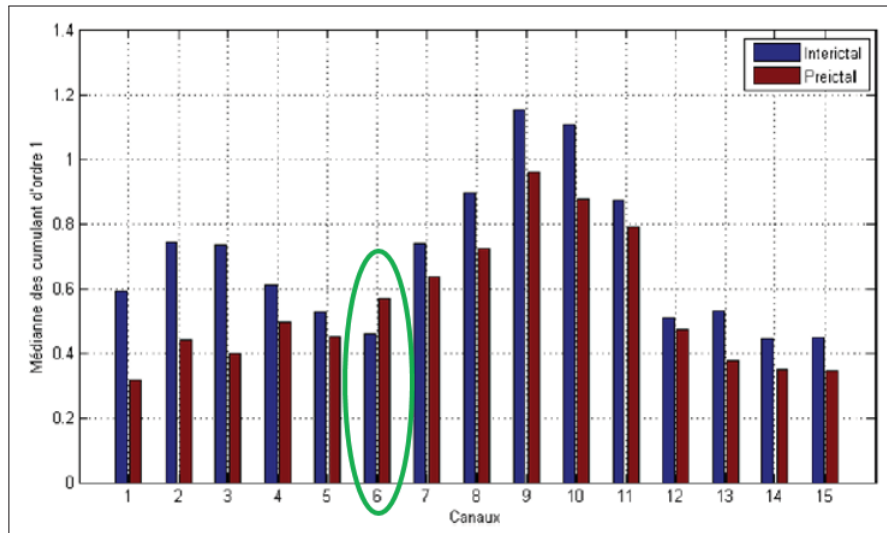


Figure 7.4 Comparaison de la médiane des cumulants d'ordre 1 durant la phase interictale et préictale pour l'ensemble des canaux

Lors du passage de la phase interictale à la phase préictale il y a des variations claires sur l'ensemble des canaux. On note que 14 canaux sur 15 subissent une diminution de la médiane de c_1 . Le canal 6 se démarque des autres car il a une variation positive lors du passage de la phase interictale à la phase préictale. De manière qualitative nous pouvons dire que l'irrégularité du signal augmente à l'approche de la crise. Il est à noter que les plus fortes variations sont observées dans l'amygdale gauche sur les canaux 1, 2 et 3. Le même travail est fait pour le cumulants d'ordre 2 à la figure 7.5

La première observation est que l'amplitude des variations sur les c_2 est moins importante que pour les c_1 . La deuxième chose et sûrement la plus importante, c'est que la valeur des c_2 est négative. Cette valeur négative confirme la présence d'invariance d'échelles au sein des signaux EEG intracrâniens. Une autre observation qui cette fois locale, est l'augmentation importante de la valeur de la médiane des c_2 pour les canaux situés dans l'amygdale gauche. Cette augmentation des c_2 se traduirait par une tendance du signal à devenir plus multifractal à mesure que la crise s'installe. Bien que l'on puisse observer qualitativement ces différences, il est nécessaire d'introduire un outil quantitatif afin de mesurer avec précision les variations lors du passage d'une période à une autre.

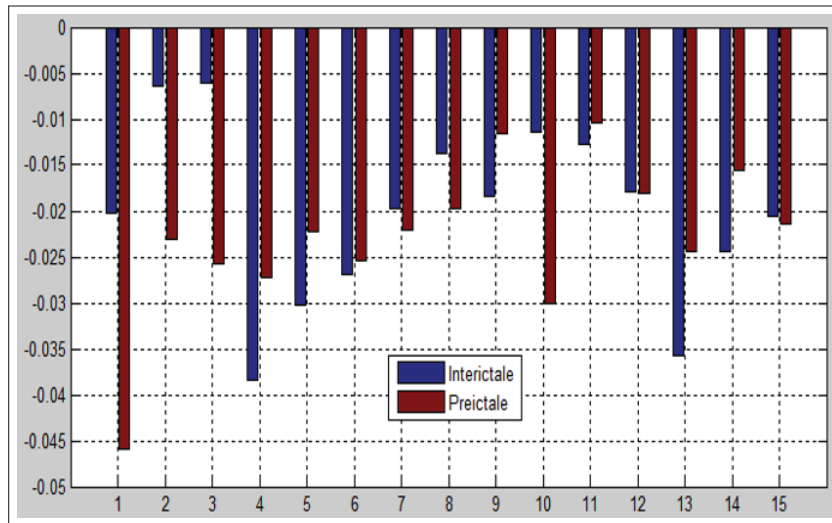


Figure 7.5 Comparaison de la médiane des cumulants d'ordre 2 durant la phase interictale et préictale pour l'ensemble des canaux

7.1 Le test statistique

Le test d'hypothèse statistique est l'outil que l'on va utiliser afin de déterminer si il existe une différence significative entre les cumulants de la phase interictale et ceux de la phase préictale. Dans le cadre des travaux présentés dans ce mémoire, nous considérons deux hypothèses. La première hypothèse H_0 correspond à un comportement identique des cumulants quelque soit la période où ils sont calculés. L'hypothèse alternative H_1 correspond à des cumulants significativement différents entre la phase interictale et préictale. On utilise le test de Student¹ afin d'établir l'existence d'un changement statistique significatif entre les deux phases. Un résultat élevé du test indique que les chances de rejet de l'hypothèse H_0 , alors que celle-ci est vraie sont minces. Les résultats du test pour un seuil de signification statistique α fixé à 0.05 sont présentés dans le tableau 7.2. Le test est effectué sur l'ensemble des canaux du signal et renvoi l'hypothèse retenue (HR) ainsi que le résultat du test (RT).

On constate pour les cumulants d'ordre 1, que l'hypothèse nulle H_0 est rejetée sur tous les canaux ce qui indique un changement significatif lors de la transition entre les deux phases. On remarque que même le canal 12 qui variait très peu rejette l'hypothèse nulle lors du changement

1. Voir index

Tableau 7.2 Résultats du test d'hypothèse entre la phase interictale et préictale

Canaux	Cumulants 1		Cumulants 2	
	HR	RT	HR	RT
1	H_1	71,83	H_1	18,95
2	H_1	60,54	H_1	11,63
3	H_1	69,74	H_1	14,29
4	H_1	23,36	H_1	-10,56
5	H_1	17,29	H_1	-8,066
6	H_1	-28,09	H_1	-4,095
7	H_1	26,75	H_0	0,3450
8	H_1	49,24	H_1	3,410
9	H_1	46,56	H_1	-5,885
10	H_1	51,15	H_1	8,760
11	H_1	21,19	H_0	-1,480
12	H_1	10,29	H_0	-0,651
13	H_1	33,21	H_1	-11,68
14	H_1	15,16	H_1	-11,92
15	H_1	23,64	H_1	-4,737

de phase. Donc, ces résultats montrent qu'il y a des changements sur l'ensemble des canaux. On note que le comportement particulier du canal 6 est confirmé avec un résultat négatif au test d'hypothèse. Les résultats du test confirment que les propriétés d'invariance d'échelles varient plus pour les canaux 1, 2 et 3. Les canaux 13, 14 ainsi que ceux situés dans l'amygdale gauche présentent pour c_2 les variations les plus importantes. Cela confirme la tendance au moins des signaux de l'amygdale gauche à devenir de plus en plus multi-fractal quand la crise approche. Les cumulants d'ordre un ont des résultats au test d'hypothèse bien plus élevés que ceux obtenus pour les cumulants d'ordre deux. En effet, la somme des valeurs absolues des résultats au test sur l'ensemble des canaux sont 548.04 pour les cumulants d'ordre un et 116.45 pour les cumulants d'ordre deux. Cela corrobore les observations précédentes en montrant qu'il y a globalement un pouvoir discriminant plus important pour les cumulants d'ordre un.

7.2 L'estimateur à double fenêtres et son application

À partir des enregistrements des périodes interictales et préictales sélectionnées par un spécialiste, l'estimateur à fenêtre glissante permet la comparaison statistique à l'aide des cumulants.

Cela implique que l'on dispose au préalable de ces périodes comme arguments d'entrées de l'estimateur. Cette supposition n'est pas forcément valide. La présente section propose de repousser les limitations de l'estimateur précédant en effectuant la différenciation au court du temps. Pour cela, nous utilisons un estimateur à double fenêtre glissante dont le fonctionnement est présenté à la figure 7.6. L'avantage de cet estimateur est qu'il permet de diminuer l'intervention du neurologue et d'envisager l'analyse multi-échelles en temps réel. On s'attend à des comportements qui varient en fonction de la phase dans laquelle on se trouve, notamment à la fin de la phase préictale.

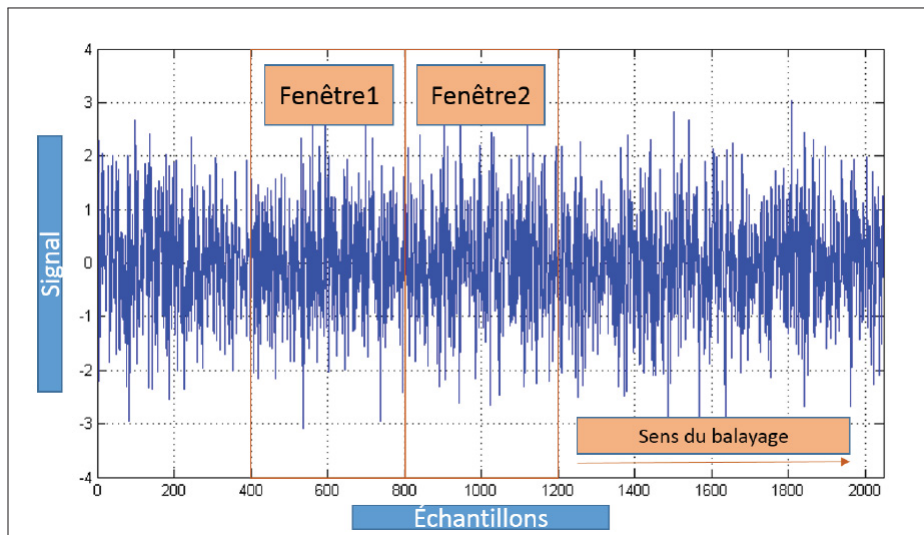


Figure 7.6 Schématisation du fonctionnement de l'estimateur à double fenêtres glissantes

La figure 7.6 montre un signal de 2000 échantillons auquel est appliqué l'estimateur double fenêtres. L'estimateur possède deux fenêtres de 400 échantillons chacune, où vont s'effectuer le calcul des cumulants.

Pour l'estimateur à double fenêtres glissantes, on s'intéresse aux changements significatifs existant entre les deux fenêtres glissantes au cours du temps. Pour cet estimateur, l'hypothèse nulle H_0 suppose que les cumulants obtenus après rééchantillonnage dans la première fenêtre glissante sont identiques à ceux obtenus dans la seconde. On s'attend à ce que l'on soit capable

d'observer des variations significatives au niveau des cumulants lors du changement de phase. Dans le cas où une telle approche fonctionnerait la discrimination des deux phases se ferait sans l'intervention d'un neurologue. Rappelons que le jeu de donnée disponible n'est pas un enregistrement EEG intracrânien standard (non marqué) de plusieurs heures où s'alternent les différentes phases. Nous avons deux portions de quelques minutes chacune correspondant aux périodes interictale et préictale. Donc, à défaut de ne pouvoir tester l'estimateur sur des données non marquées, nous allons vérifier à partir du jeu de donnée à notre disposition si nous sommes en mesure d'observer des différences significatives entre les deux phases. De plus, on portera une attention particulière sur les variations des cumulants à l'approche de la phase ictale qui correspond à la fin de la phase préictale. En effet, on s'attend à voir durant cette période un changement important qui serait le précurseur d'une crise imminente.

En appliquant l'estimateur à double fenêtre on s'intéresse à la valeur des cumulants, leurs variations à l'aide du test statistique ainsi qu'à leur évolution. La différenciation des phases se fait en fonction du nombre de fois que l'hypothèse nulle est retenue au cours du temps sur chaque canal. La figure 7.7 fait la comparaison pour le cumulant d'ordre un entre la phase interictale et préictale du nombre de fois où l'hypothèse nulle H_0 est conservée.

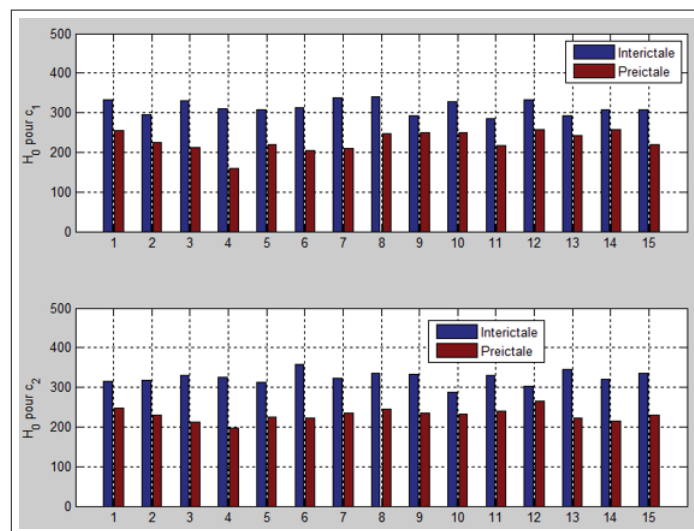


Figure 7.7 Comparaison entre les phases interictales et préictale du nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée

On constate pour c_1 et c_2 que l'hypothèse nulle H_0 est plus souvent conservée durant la période interictale. Cette observation implique que les propriétés d'invariance d'échelles varient plus durant la phase préictale que durant la phase interictale. Par conséquent, la différenciation au cours du temps est possible en se basant sur le nombre de fois que est l'hypothèse H_0 est retenue.

Afin d'observer le comportement des cumulants à l'approche de la crise, nous traçons l'évolution du nombre de fois que l'hypothèse nulle H_0 est conservée. La figure 7.8 présente le tracé de l'évolution de cette distribution des H_0 au cours du temps sommé sur l'ensemble des canaux. Chaque distribution recense l'ensemble des H_0 obtenues pour l'ensemble des canaux sur un intervalle de 50 secondes.

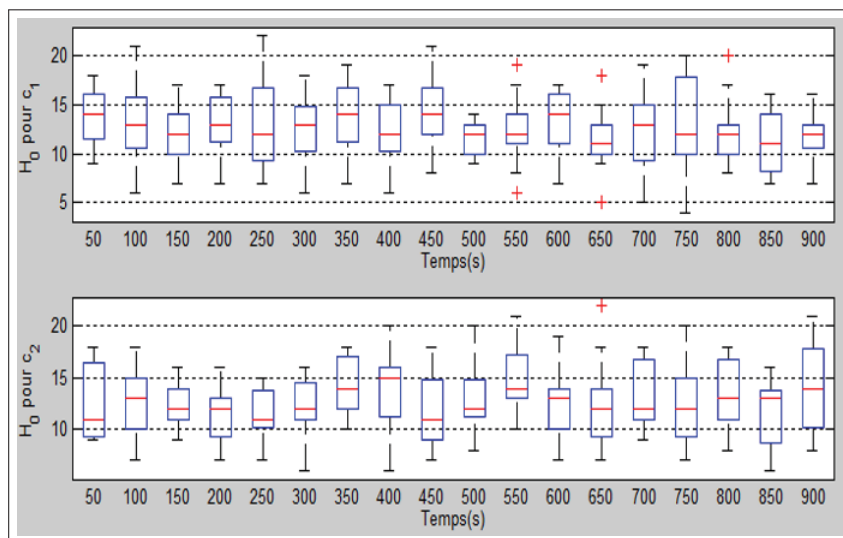


Figure 7.8 Nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée sur des intervalles de 50 secondes durant la phase préictale

Les médianes oscillent autour de 12. On ne distingue donc aucun comportement particulier à l'approche de la crise. Donc, pour ce patient on observe pas de comportement particulier à l'approche de la phase ictale en se basant sur le nombre de fois que l'hypothèse H_0 est retenue.

La dernière question à la quelle nous souhaitons répondre est de savoir si il existe au moins un capteur sensible à l'approche de la crise dans la phase préictale. La figure 7.9 montre le

nombre de fois que l'hypothèse H_0 est conservée sur des intervalles de 50 secondes durant la phase préictale.

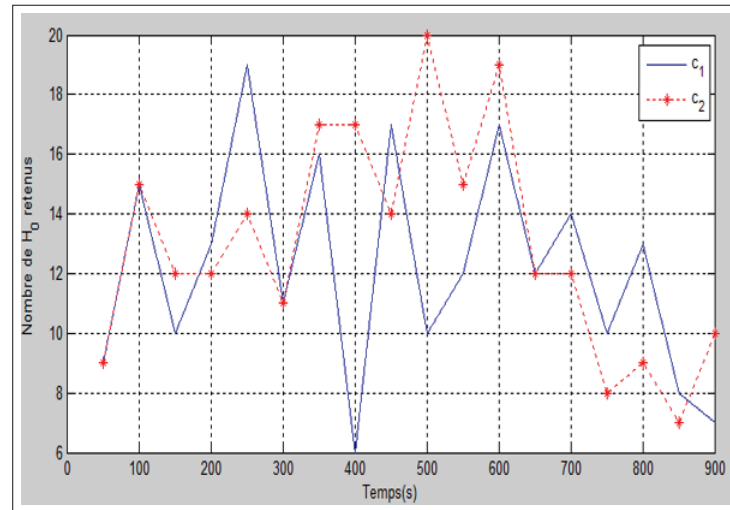


Figure 7.9 Nombre de fois que l'hypothèse nulle est conservée sur le c_1 et c_2

Pour le c_1 et le c_2 on choisit respectivement le canal 5 et le canal 9. Nous avons trouvé au moins deux canaux pour lesquels H_0 diminue à l'approche de la crise. Ce comportement particulier à l'arrivée de la crise justifie l'étude des c_p dans le cadre de la prédiction de crises. Cette étude fait l'objet de la section suivante.

7.3 La discussion

Au chapitre précédent, les résultats aux tests statistiques montrent clairement des variations significatives lors du passage de la phase interictale à la phase préictale. L'estimateur utilisé lors de cette analyse se base principalement sur les cumulants des coefficients dominants d'ordre un et deux. L'étude de ces cumulants montre que ceux d'ordre un ont un pouvoir discriminant plus élevé. De plus, l'analyse des signaux EEG à l'aide de l'estimateur offre une localisation spatiale grâce aux résultats des tests statistiques élevés obtenus uniquement sur certains canaux. La capacité de l'estimateur à différencier la phase interictale de la phase préictale ainsi qu'à localiser spatialement les régions impliquées est soutenue par les résultats obtenus lors de l'étude

clinique menée dans le cadre de la prédiction des crises par Kais Gadhomi de l'Université McGill au sein de l'Institut Neurologique de Montréal.

L'estimateur a été appliqué à un jeu de données provenant de 6 patients souffrant d'épilepsie temporale mésiale. Un total de 12 électrodes sont implantées chez chaque patient dont 6 dans chaque hémisphère. Pour chacune de ces 12 électrodes, on sélectionnera uniquement les trois canaux les plus superficiels (région néocorticale) et les trois plus profonds (région mésiale). Les canaux de la région mésiale choisis se situent dans l'hippocampe, le parahippocampe et l'amygdale. L'ensemble des enregistrements ont une fréquence d'échantillonnage de $2KHz$ et sont filtrés à $500Hz$. Pour chaque patient on sélectionne trois périodes préictales et trois périodes interictales. Leurs durées respectives sont comprises entre 15 et 50 minutes pour la phase préictale, et de 26 à 50 minutes pour la phase interictale. L'algorithme développé dans ce mémoire a été appliqué à l'ensemble des phases interictales et préictales des 6 patients. La figure 7.10 présente le canal ayant la plus grande variation lors du passage de la phase interictale (noir) à la phase préictale (rouge). Ce résultat est présenté pour chaque cumulant et chaque patient.

On observe que pour les 6 patients il y a une variation significative lors du passage de la phase interictale à la phase préictale. On observe parallèlement que les variations pour le cumulant d'ordre deux sont moins marquées que pour le cumulant d'ordre un. En effet, c'est sur les cumulants d'ordre un que l'on retrouve plus de 80% des variations les plus importantes. Ces résultats soutiennent les observations précédentes lors du passage d'une phase à une autre. Cependant, on observe une variation de la valeur des cumulants d'ordre un, qui est positive lors du passage de l'interictale au préictale. Ce comportement est apparu uniquement sur le canal 6 avec les données de notre patient.

Le tableau suivante présente une distribution spatiale des cumulants pour le canal le plus discriminant. Il présente aussi l'hémisphère où débute la crise (dit ipsilatérale), par opposition à l'autre hémisphère (dit contrelatéral) qui ne contient pas la zone épileptogène. De plus, le tableau 7.3 permet de spécifier la région où apparaissent ces changements. En effet, dans le ta-

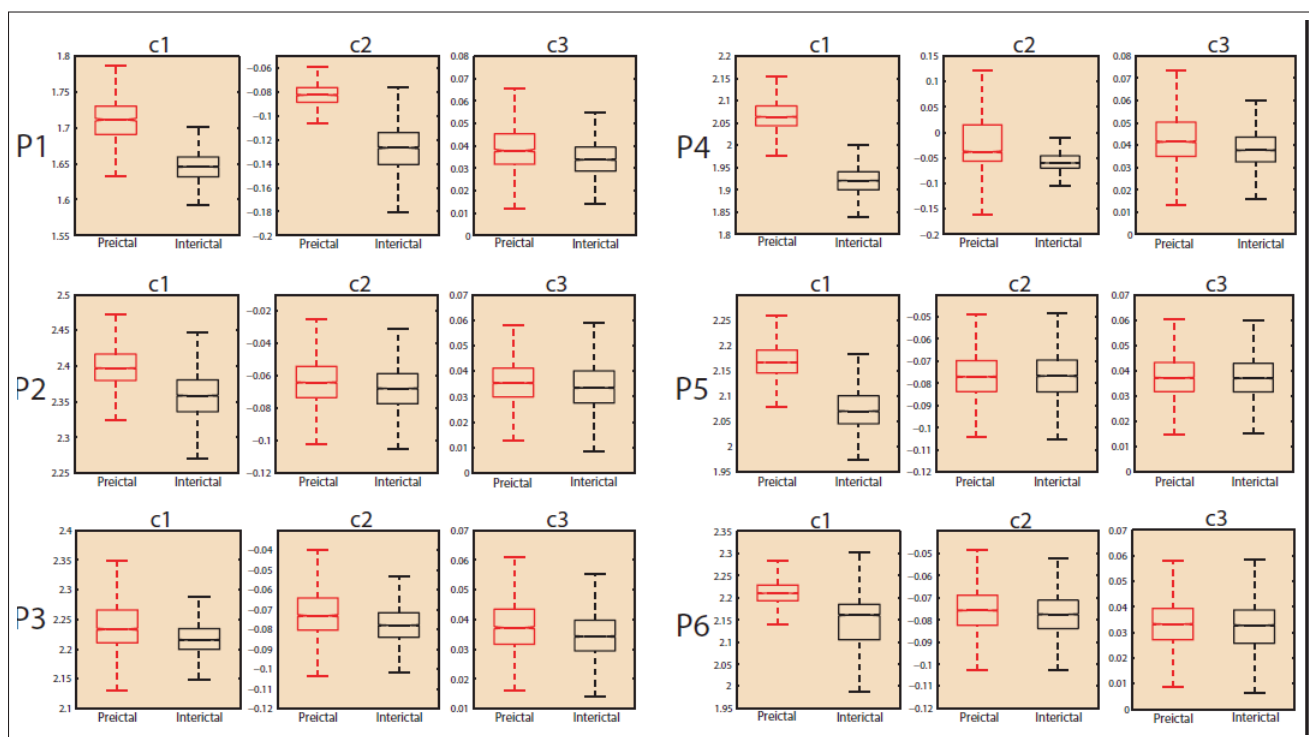


Figure 7.10 Application clinique de l'estimateur à 6 patients lors du passage de la phase interictale (noir) à la phase préictale (rouge)

bleau 7.3 , la région néocorticale désigne la partie superficielle du lobe temporal par opposition à la région mésiale plus profonde.

Tableau 7.3 Emplacement dans le cerveau des cumulants c_1 (noir) et c_2 (rouge) les plus discriminants

Patient	Latéralité		Emplacement	
	Ipsilatéral	Contrelatéral	Mésial	Néocortical
P1	●	●	●	●
P2		● ●	●	●
P3		● ●	● ●	
P4	● ●		●	●
P5	● ●		●	●
P6	●	●	●	●

On constate par ailleurs que pour l'ensemble des patients, les c_1 les plus discriminants se situent dans la région mésiale. Les c_2 apparaissent principalement dans la région néocorticale. En ce qui concerne la latéralité, on ne constate aucune prédominance pour un quelconque cumulant.

L'ensemble de ces résultats confirment qu'il y a un changement significatif lors du changement de la phase interictale à la phase préictale. Ils confirment aussi que les cumulants d'ordre un, varient de manière plus importante que ceux d'ordre deux lors du changement de phase. Par ailleurs, la région où les cumulants d'ordre un sont les plus discriminants, correspond à celle mise en cause dans le diagnostic du neurologue. Ces résultats ont été présentés lors d'un atelier intitulé "Dynamiques invariantes d'échelle et réseaux en neurosciences" au centre de recherche mathématique de l'Université de Montréal. Mon travail exploratoire concernant les propriétés d'invariance d'échelles du signal électrophysiologique mesurée chez les patients épileptiques a permis d'envisager que cette propriété puisse être prise en considération dans la prédiction de crise.

CONCLUSION

L'étude des propriétés d'invariance d'échelles dans les signaux électrophysiologiques est un domaine en plein essor et, ce mémoire se démarque d'autant plus que l'analyse multi-échelles des signaux EEG intracrâniens chez les patients épileptiques est une première dans le domaine.

Les contributions apportées par les travaux de ce mémoire sont au nombre de trois. La première est la mesure des propriétés d'invariance d'échelle des signaux EEG intracrâniens à l'aide des ondelettes symétriques complexes de Daubechies. Ces ondelettes ont permis d'améliorer la précision temporelle ainsi que la mesure des propriétés d'invariances d'échelles. La seconde contribution est l'utilisation d'une méthodologie à fenêtre glissante basée sur un test d'hypothèse pour la caractérisation des propriétés d'invariance d'échelles. La dernière contribution a été de différencier les phases interictales et préictales des signaux EEG intracrâniens chez les patients épileptiques en s'appuyant sur les propriétés d'invariances d'échelles ainsi que son application à la prédiction des crises (collaboration avec l'institut neurologique de Montréal).

L'estimateur développé se différencie par l'utilisation d'ondelettes complexes de Daubechies qui offre une meilleure précision temporelle, par des coefficients dominants qui accroît sa stabilité et sa robustesse ainsi que par un rééchantillonnage offrant une plus grande précision. La combinaison de l'ensemble de ces éléments font de cet estimateur un outil capable de retranscrire fidèlement les propriétés d'invariance d'échelles de l'activité électrique neuronale. Son application aux signaux EEG intracrâniens des patients épileptiques montre qu'il existe de l'invariance d'échelles. Cet estimateur montre aussi que la différenciation des phases interictale et préictale est possible à l'aide de l'invariance d'échelles. Nos résultats attestent que le cumulants d'ordre un est le plus discriminant et que ce dernier apporte des informations sur l'emplacement de la zone épileptogène. Dans le domaine de la prédiction des crises d'épilepsie, l'ajout des cumulants permet une amélioration de la sensibilité et de la spécificité de l'algorithme. De plus, l'utilisation de l'estimateur à double fenêtres laisse entrevoir des possibilités de traitement des signaux en "temps-réel". Parallèlement, l'estimateur pourrait s'avérer pertinent pour l'étude des enregistrements durant la phases II du sommeil. Cependant, le problème de la caractérisation des singularités oscillantes reste entier car elle pourrait améliorer

les performances de l'estimateur en supposant qu'elles puissent être associées aux OHF dont le nombre augmente à l'approche des crises.

En conclusion, les périodes interictales et préictales peuvent être discriminées pour les patients atteints d'épilepsie à l'aide des propriétés d'invariance d'échelles des signaux EEG intracrâniens de manière indépendante ou en complément d'autres mesures. Cependant, l'analyse en temps réel ainsi que la caractérisation des singularités oscillantes sont des aspects à développer notamment si l'on souhaite son application clinique.

ANNEXE I

LES RÉSULTATS CLINIQUES ET OUTILS MATHÉMATIQUES

1 L'épilepsie du lobe temporal

Le lobe temporal est une région du cortex cérébral située en dessous du sillon latérale sur les deux hémisphères cérébraux du cerveau chez les mammifères. Le lobe temporal est l'un des quatre principaux lobes ou régions du cortex cérébral.

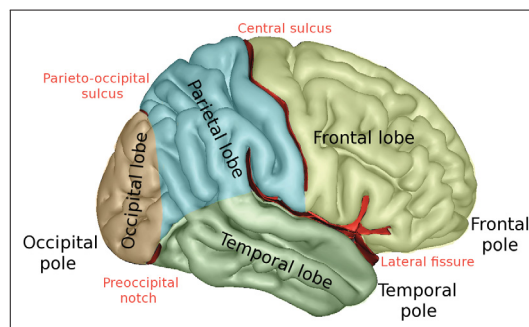


Figure-A I-1 Principaux lobes

Les lobes temporaux jouent un rôle important dans l'organisation de l'entrée sensorielle, la perception auditive, du langage, de la production de la parole et de la mémoire. La région néocorticale du lobe temporel aussi appelée région externe ou latérale, correspond à la partie superficielle du lobe temporel. À l'inverse, la région mésiale aussi appelée région interne correspond à la partie plus profonde du lobe.

2 Le poster

Ce poster fut présenté lors d'un atelier intitulé "Dynamiques invariantes d'échelle et réseaux en neurosciences" au centre de recherche mathématique de l'Université de Montréal.



Investigation of Seizure Predictability with Wavelet Leader Based Multifractal Analysis of Intracerebral EEG



Kais Gadhomi, Hubert Ariel Lacoma[†], Jean-Marc Lina[†] and Jean Gotman
 Montreal Neurological Institute, McGill University, Montréal, Québec, Canada
[†]École de Technologie Supérieure, Montréal, Québec, Canada

INTRODUCTION

Scaling properties of the EEG are mainly studied using multifractal analysis, which describes the temporal fluctuations of signal irregularities. In this work, we analyse the multifractal properties of the intracerebral EEG. Multifractal parameters are robustly estimated using wavelet leaders and bootstrap approach to investigate the discriminability of preictal and interictal states.

METHODS

1. Data set

- 6 consecutive patients with mesial temporal lobe epilepsy.
- 3 preictal (15 to 50 min each) and 3 interictal (26 to 50 min each) EEG epochs (filtered at 500Hz and sampled at 2000Hz) for each patient.
- Bipolar channels from the 3 deepest contacts (mesial) and the 3 most superficial contacts (neocortical) of depth electrodes bilaterally implanted in the hippocampus, amygdala and parahippocampus.

2. Wavelet leader multifractal analysis

- Wavelet leaders

- For each channel $x(t)$: discrete wavelet analysis using Daubechies 4 wavelet in a 1s (50% overlap) sliding window \rightarrow Wavelet coefficients D_s .
- Wavelet leaders L_s : supremum of wavelet coefficients taken within adjacent intervals, and over all finer scales.

- Scaling function cumulants

The multifractal analysis estimates the degree of irregularity in the signal by calculating the multifractal spectrum. It is based on structure functions $S(q)$ defined as the average of q^{th} power of wavelet leaders L_s . A scaling function $\zeta(q)$ is defined from the functions $S(q)$. Its Legendre transform is an indirect measurement of the multifractal spectrum. The first 3 coefficients c_p ($p = 1, 2, 3$) of the polynomial expansion of the scaling function $\zeta(q)$ are the cumulants of order 1, 2 and 3. They provide an approximate summary of the multifractal spectrum.

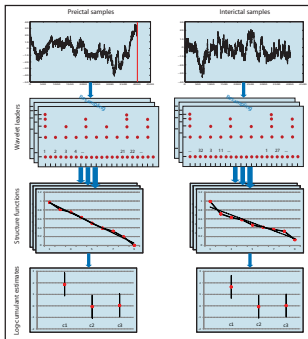


Figure 1. Bootstrap multifractal analysis. Estimation of log-cumulants.

- Empirical multifractal parameter estimation

- Figure 1 summarizes the log-cumulant estimation procedure: structure functions and log-cumulants c_p are estimated by linear regression in the log-log plot.
- Final c_p estimates are the average of the estimates obtained using 100 random resamples with replacement of wavelet leaders (bootstrap approach).

3. Statistical comparison

For each of the 3 log-cumulants, preictal and interictal observations are averaged across corresponding epochs. Preictal and interictal mean log-cumulant observations are then compared using a two sample t-test ($p < 0.01$, Bonferroni corrected), independently in each channel.

CONCLUSIONS

The question of seizure predictability using EEG remains an open subject despite existing studies and algorithms. The fundamental hypothesis remains whether a preictal state exists and if it is separable from an interictal state. In this work, we investigated the discriminability between preictal and interictal epochs of intracerebral EEG using wavelet leader based multifractal analysis supported by bootstrap statistical approach. Statistical estimates of log-cumulants summarizing properties of irregularity in the EEG discriminated between preictal and interictal epochs. This study suggests that epileptic temporal lobe seizures may potentially be predicted using measures of multifractal property of EEG.

RESULTS

1. Difference between mean log-cumulant observations

- For a subset of channels, there was a significant difference ($p < 0.01$) between preictal and interictal mean log-cumulant observations in all patients. Figure 2 illustrates this difference for channels with the most significant difference.
- In general (5 of 6 patients), this difference is larger for the 1st log-cumulant than for the 2nd and 3rd log-cumulant.

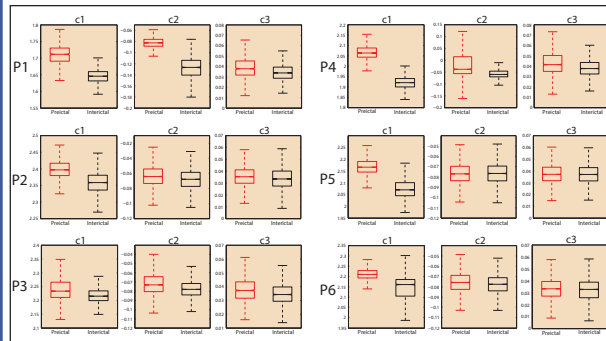


Figure 2. Mean preictal and interictal log-cumulant observations (c1, c2 and c3) for the most discriminant channel in each patient (P1 to P6).

2. Location of the most discriminant channel

Table 1 shows the location and the side (referred to seizure focus) of the channel with the most significant difference between preictal and interictal mean log-cumulant observations.

Laterality: No clear preponderance for any log-cumulant.

Mesial vs. Neocortical: the most discriminant channel was:

- c1: mesial for all patients.
- c2: mostly neocortical (5 of 6 patients).
- c3: (no preponderance).

Patient	Laterality		Location	
	Ipsilateral	Contralateral	Mesial	Neocortical
P1	•		•	
P2	•		•	
P3	•		•	
P4	•		•	•
P5	•		•	•
P6	•		•	•

Table 1. Laterality and location of the best discriminant channel for log-cumulant c1 (•), c2 (•) and c3 (•).

Contact: kais.gadhomi@mail.mcgill.ca

This work was supported by the Canadian Institutes of Health Research (CIHR) grants MOP-10189/102710 and by the Royal Society of Canada and the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC) grant CHRPJ 323490-06.

3 L'erreur d'approximation du développement en série de Taylor

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et $x_0 \in I$. On peut alors effectuer le développement de Taylor de f en x_0 à l'ordre n :

$$P_{x_0,n}(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} \quad (\text{A I-1})$$

La notation $P_{x_0,n}(x)$ dénote l'approximation polynomiale d'ordre n en x_0 de la fonction $f(x)$. L'erreur ϵ correspond à la différence entre la fonction et son approximation.

$$\epsilon(x) = f(x) - P_{x_0,n}(x)$$

La dérivée d'ordre $n + 1$ de l'erreur absolue s'écrit de la manière suivante :

$$\epsilon^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

En effet, l'approximation est nulle car la dérivée d'ordre v d'un polynôme d'ordre u est nulle pour $v > u$. Un exemple rapide pour s'en convaincre. La dérivée d'ordre 3 de x^2 qui est un polynôme d'ordre 2 : $\frac{d^3}{dx^3}x^2 = 0$.

En considérant que la dérivée d'ordre $n + 1$ admet une borne supérieure M au voisinage de x_0 tel que :

$$f^{(n+1)}(x) \leq M, \text{ où } M \in \mathbb{R} \quad (\text{A I-2})$$

$$\text{Avec } M = \sup |f^{(n+1)}(x)| \quad (\text{A I-3})$$

Donc :

$$|\epsilon^{(n+1)}(x)| \leq M$$

En sachant que :

$$\left| \int \rho(x) dx \right| \leq \int |\rho(x)| dx$$

On peut écrire que :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \epsilon^{(n+1)}(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\epsilon^{(n+1)}(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} M dx$$

$$|\epsilon^{(n)}(x)| \leq Mx + C \quad (\text{A I-4})$$

$$|\epsilon^{(n)}(x)| \leq M(x - x_0) \quad (\text{A I-5})$$

La dérivée d'ordre n de l'erreur en x_0 est nulle et permet donc le calcul de la constante C où : $C = -Mx_0$ à partir de (A I-4). De manière générale, la valeur des constantes lors de chaque intégration est calculée en se plaçant en x_0 . Les valeurs des dérivées en x_0 sont données par :

$$\begin{aligned} |\epsilon(x_0)| &= |f(x_0) - P_{x_0,n}(x_0)| = 0 \\ |\epsilon^{(1)}(x_0)| &= |f^{(1)}(x_0) - P_{x_0,n}^{(1)}(x_0)| = 0 \\ &\vdots = \quad \quad \quad \vdots = 0 \\ |\epsilon^{(n)}(x_0)| &= |f^{(n)}(x_0) - P_{x_0,n}^{(n)}(x_0)| = 0 \\ |\epsilon^{(n+1)}(x_0)| &= |f^{(n+1)}(x_0)| \end{aligned}$$

Car :

$$\begin{aligned}
P_{x_0,n}(x_0) &= f(x_0) \\
P'_{x_0,n}(x_0) &= f'(x_0) \\
P''_{x_0,n}(x_0) &= f''(x_0) \\
&\vdots \\
P^{(n)}_{x_0,n}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)
\end{aligned}$$

En itérant le processus d'intégration plusieurs fois, il est possible de remonter à partir de la dérivée d'ordre $n + 1$ jusqu'à l'expression de l'erreur absolue :

$$|\epsilon(x)| \leq \frac{M(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}$$

Ou plus rigoureusement :

$$\forall x \in [x_0 - h, x_0 + h], |\epsilon(x)| \leq \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \sup_{u \in [x_0 - h, x_0 + h]} |f^{(n+1)}(u)|$$

4 Le test Student

Le principe du test de Student est le suivant : on veut déterminer si la valeur d'espérance μ d'une population de distribution normale et d'écart type σ non connu est égale à une valeur déterminée μ_0 . Pour ce faire, on tire de cette population un échantillon de taille n dont on calcule la moyenne \bar{x} et l'écart-type empirique s . Selon l'hypothèse nulle, la distribution d'échantillonnage de cette moyenne se distribue elle aussi normalement avec un écart type $\frac{s}{\sqrt{n}}$. La variable : $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$, suit alors une loi de Student avec $n-1$ degrés de liberté.

où :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A I-6})$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{A I-7})$$

On peut ensuite utiliser une table des valeurs de la distribution de loi de Student pour voir si la valeur de la statistique est supérieure (en valeur absolue pour un test bilatéral) au quantile à 95% et donc rejeter ou non l'hypothèse nulle.

BIBLIOGRAPHIE

- Abry, Gonçalvès, et Lévy-Véhel. 2002. *Lois d'échelles, fractales et ondelettes*. Hermès Science.
- Abry, Jaffard, et Lashermes. 2004. « Revisiting scaling, multifractal, and multiplicative cascades with the wavelet leader lens ». *SPIE*, vol. 5607, n° 1, p. 103-117.
- Arneodo, Bacry, et Muzy. 1995. « The thermodynamics of fractals revisited with wavelets ». *Physica A*, vol. 213, n° 1-2, p. 232-275.
- Arneodo, Bacry, Jaffard, et Muzy. 1997. « Oscillating singularities on Cantor sets : A grand-canonical multifractal formalism ». *Journal of Statistical Physics*, vol. 87, n° 1-2, p. 179-209.
- Ayoubian, Lacoma, et Gotman. 2013. « Automatic seizure detection in SEEG using high frequency activities in wavelet domain ». *Medical Engineering & Physics*, vol. 35, n° 3, p. 319–328.
- Bacry, Muzy, et Arneodo. 1993. « Singularity spectrum of fractal signal from wavelet analysis : exact result ». *Journal of Statistical Physics*, vol. 70, n° 3-4, p. 635-674.
- Banerjee, Filippi, et Hauser. 2009. « The descriptive epidemiology of epilepsy-a review ». *Epilepsy Research*, vol. 85, n° 1, p. 31-45.
- Beghi, Garattini, Ricci, et Cornago Parazzini. 2004. « Direct cost of medical management of epilepsy among adults in Italy : a prospective cost-of-illness study (EPICOS) ». *Epilepsia*, vol. 45, n° 2, p. 171-178.
- Bell et Sander. 2001. « The epidemiology of epilepsy : the size of the problem ». *Seizure*, vol. 10, n° 1, p. 306-314.
- Benabid, Chabardes, Mitrofanis, et Pollak. 2009. « Deep brain stimulation of the subthalamic nucleus for the treatment of Parkinson's disease ». *The Lancet Neurology*, vol. 8, n° 1, p. 67-81.
- Berendt et Gram. 1999. « Epilepsy and Seizure Classification in 63 Dogs : A Reappraisal of Veterinary Epilepsy Terminology ». *Journal of Veterinary Internal Medicine*, vol. 13, n° 1, p. 14-20.
- Boex, Vulliémoz, Foletti, Pollo, et Seeck. 2006. « Stimulation électrique intracrânienne dans le traitement de l'épilepsie ». *Epileptologie*, vol. 23, n° 1, p. 126-130.
- Brodu, Lotte, et Lécuyer. 2012. « Exploring Two Novel Features for EEG-based Brain-Computer Interfaces : Multifractal Cumulants and Predictive Complexity ». *Neurocomputing*, vol. 79, n° 1, p. 87-94.

- Buelow et Janice. 2011. « Epilepsy Management Issues and Techniques ». *Journal of Neuroscience Nursing*, vol. 33, n° 5, p. 260-269.
- Camara. 2006. « Prise en charge et recherche de facteurs parasitaires d'épilepsie dans le cadre d'une Recherche-action en Réseau sur l'Épilepsie à Markacoungo ». PhD thesis, Université de Bamako.
- Chhabra, Meneveau, Jensen, et Sreenivasan. 1989. « Direct determination of the singularity spectrum and its application to fully developed turbulence ». *Physical Review Applied*, vol. 40, n° 1, p. 5284-5294.
- Ciuciu, Abry, Rabrait, et Wendt. 2008. « Log wavelet leaders cumulant based multifractal analysis of EVI fMRI time series : evidence of scaling in ongoing and evoked brain activity ». *IEEEs*, vol. 2, n° 1, p. 929-943.
- Ciuciu, Varoquaux, Abry, Sadaghiani, et Kleinschmidt. 2012. « Scale-free and multifractal time dynamics of fMRI signals during rest and task ». *Frontiers in physiology*, vol. 3, n° 186, p. 1-18.
- Clusmann, Schramm, Kral, Helmstaedter, Ostertun, Fimmers, Haun, et Elger. 2002. « Prognostic factors and outcome after different types of resection for temporal lobe epilepsy ». *Journal of Neurosurgery*, vol. 97, n° 5, p. 1131-1141.
- Crovella et Bestavros. 1997. « Self-Similarity in World Wide Web traffic : evidence and possible causes ». *IEEE ACM trans. on Networking*, vol. 5, n° 6, p. 835-846.
- Daubechies. 1988. « Orthonormal bases of compactly supported wavelets ». *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, n° 1, p. 909-996.
- DeBoer, Mula, et Sander. 2008. « The global burden and stigma of epilepsy ». *Epilepsy & Behavior*, vol. 12, n° 4, p. 540-546.
- Delour, Muzy, et Arneodo. 2001. « Intermittency of 1d velocity spatial profiles in turbulence : A magnitude cumulant analysis ». *European Physical Journal B*, vol. 23, n° 2, p. 243-248.
- Efron et Tibshirani, 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. New York, NY : Chapman & hall.
- Elger, Helmstaedter, et Kurthen. 2004. « Chronic epilepsy and cognition ». *Lancet Neurology*, vol. 3, n° 11, p. 663-672.
- Falconer, 1990. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons.
- Firpi, Smart, Worrel, Marsh, Dlugos, et Litt. 2007. « High-Frequency Oscillations Detected in Epileptic Networks Using Swarmed Neural-Network Features ». *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 35, n° 9, p. 1573-1584.

- Fisher, Boas, Blume, Elger, Genton, Lee, et Engel. 2005. « Epileptic seizures and epilepsy : definitions proposed by the International League Against Epilepsy (ILAE) and the International Bureau for Epilepsy (IBE) ». *Epilepsia*, vol. 46, n° 4, p. 470-472.
- Francois. 2008. « Conséquence fonctionnelle d'une lésion de la boucle entorhino-hippocampique ». PhD thesis, Université Louis Pasteur.
- Fukuchi, Kanemoto, Kato, Yuasa, Kawasaki, Suzuki, et Onuma. 2002. « Death in epilepsy with special attention to suicide cases ». *Epilepsy research*, vol. 51, n° 3, p. 233-236.
- Gauffin. 2012. « Epilepsy in young adulthood : medical, psychosocial and functional aspects ». PhD thesis, Linköping University.
- Grossmann et Morlet. 1984. « Decompositions of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape ». *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 15, n° 4, p. 723-736.
- Hausdorff. 1919. « Dimension und ausseres Mass ». *Math. Annalen*, vol. 79, n° 1, p. 157-179.
- Hermann et Demiralp. 2005. « Human EEG gamma oscillations in neuropsychiatric disorders ». *Clin Neurophysiol*, vol. 116, n° 12, p. 2719-2733.
- Hsu, Lin, Ju, et Sun. 2007. « Wavelet-based fractal features with active segment selection : Application to single-trial EEG data ». *Journal of neuroscience methods*, vol. 163, n° 1, p. 145-160.
- Hubert et Carbonnel. 2001. « Dimensions fractales de l'occurrence de pluie en climat soudano-sahélien ». *Hydrologie Continentale*, vol. 4, n° 1, p. 3-10.
- Jacobs, Zelmann, Jirsch, Chander, Châtillon, Dubeau, et Gotman. 2009. « High frequency oscillations (80–500 Hz) in the preictal period in patients with focal seizures ». *Epilepsia*, vol. 50, n° 7, p. 1780–1792.
- Jaffard. 1989. « Hölder exponents at given points and wavelet coefficients ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Série I*, vol. 308, n° 1, p. 79-81.
- Jaffard. 1997. « Multifractal formalism for functions part I and II ». *Journal of Mathematical Analysis*, vol. 28, n° 4, p. 944–970.
- Jaffard. 2000. « On lacunary wavelet series ». *Annals of Applied Probability*, vol. 10, n° 1, p. 313-329.
- Jaffard. 2004. « Wavelet techniques in multifractal analysis, in Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoît Mandelbrot ». *Symposia Pure Mathematics, American Mathematical Society*, vol. 72, n° 2, p. 91-152.
- Jaffard, Lashermes, et Abry. 2006. « Wavelet leaders in multifractal analysis, in Wavelet Analysis and Applications ». *Proc. Int. Summer School Physics Enrico Fermi, Amsterdam : North Holland*, vol. 1, n° 1, p. 219-264.

- Keshner. 1979. « Renewal Process and Diffusion Models of 1/f Noise ». PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- Keshner. 1982. « 1/f noise ». *IEEE*, vol. 70, n° 3, p. 212-218.
- Kim et Powers. 1979. « Digital bispectral analysis and its applications to nonlinear wave interactions ». *IEEE transactions plasma science*, vol. 7, n° 2, p. 120-131.
- Kolmogorov. 1940. « Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum ». *Acad. Sci. URSS*, vol. 26, n° 1, p. 115–118.
- Lacoume, Amblard, et Comon, 1997. *Statistiques d'ordre superieur traitement du signal*. Masson.
- Lahiri, 2003. *Resampling Methods for Dependent Data*. New York : Springer Science & Business Media.
- Lehnertz, Andrzejak, Arnhold, Kreuz, Mormann, Rieke, Widman, et Elger. 2001. « Nonlinear EEG Analysis in Epilepsy : Its Possible Use for Interictal Focus Localization, Seizure Anticipation, and Prevention ». *Journal of Clinical Neurophysiology*, vol. 18, n° 3, p. 209–222.
- Lina et Mayrand. 1993. « Complex Daubechies wavelets ». *Applied and computational harmonic analysis*, vol. 2, n° 3, p. 219–229.
- Lortie et Vannasse, 2006.
- Mallat. 1989. « A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, n° 7, p. 674-693.
- Mallat, 2008. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press.
- Mandelbrot. 1974. « Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier ». *Journal of fluid mechanics*, vol. 62, n° 1, p. 331–358.
- Mandelbrot, 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. W.H. Freeman.
- Mandelbrot. 1999. « A multifractal walk down Wall Street ». *Scientific American*, vol. 1, n° 1, p. 70–73.
- Mandelbrot et VanNess. 1968. « Fractional Brownian motions, fractional noises and applications ». *SIAM*, vol. 10, n° 1, p. 422-436.
- Maxim, Sendur, Fadili, Suckling, Gould, Howard, et Bullmore. 2005. « Fractional Gaussian noise, functional MRI and Alzheimer's disease ». *NeuroImage*, vol. 25, n° 1, p. 141-158.
- Mehtal, Onaral, et Koser. 1994. « Detection of Seizure Onset using Wavelet Analysis », vol. 2, n° 1. p. 1220-1221.

- Meyer. 1986. « Ondelettes et fonctions splines ». (Ecole Polytechnique, Paris, France 1986).
- Meyer, 1998. *Wavelets, vibrations and scalings*. American Mathematical Society & Centre de Recherches Mathematiques.
- Muzy, Bacry, et Arneodo. 1993. « Multifractal formalism for fractal signals : The structure-function approach versus the wavelet-transform modulus-maxima method ». *Physical Review E*, vol. 47, n° 2, p. 875-884.
- Muzy, Bacry, et Arneodo. 1994. « The multifractal formalism revisited with wavelets ». *International journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 4, n° 2, p. 245-302.
- Novikov. 1971. « Intermittency and scale-similarity in the structure of a turbulent flow ». *Appl. Math. Mech.*, vol. 35, n° 1, p. 231-241.
- Osorio, Frei, et Wilkinson. 1998. « Real-time automated detection and quantitative analysis of seizures and short-term prediction of clinical onset ». *Epilepsia*, vol. 39, n° 6, p. 615-627.
- Pacia et Ebersole. 1997. « Intracranial EEG substrates of scalp ictal patterns from temporal lobe foci ». *Epilepsia*, vol. 38, n° 6, p. 642-654.
- Parisi et Frisch. 1985. « On the singularity structure of fully developed turbulence ». *Proc. Int. Summer School Physics Enrico Fermi, Amsterdam : North Holland*, vol. 1, n° 1, p. 84-88.
- Pentland. 1984. « Fractal-based description of natural scenes ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 6, n° 6, p. 661-674.
- Podell. 1996. « Seizures in dogs ». *The Veterinary Clinics of North America. Small Animal Practice*, vol. 26, n° 4, p. 779-809.
- Regesta et Tanganelli. 1999. « Clinical aspects and biological bases of drug-resistant epilepsies ». *Epilepsy research*, vol. 34, n° 2-3, p. 109-129.
- Richardson, 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press.
- Roxo, Franceschini, Zubaran, Kleber, et Sander. 2011. « The Limbic System Conception and Its Historical Evolution ». *The scientific world journal*, vol. 11, n° 1, p. 2427-2440.
- Saillet. 2006. « Antiepileptic effects of neurostimulation to seizure-detection in rat model of epilepsy ». PhD thesis, Université de Grenoble.
- Salant, Gath, et Henriksen. 1998. « Prediction of epileptic seizures from two-channel EEG ». *Medical Biological Engineering Computing*, vol. 36, n° 5, p. 549-556.
- Sander. 2003. « The epidemiology of epilepsy revisited ». *Current opinion in neurology*, vol. 16, n° 2, p. 165-170.

- Sander. 2004. « The use of antiepileptic drugs—principles and practice ». *Epilepsia*, vol. 45, n° 6, p. 28-34.
- Sander et Bell. 2004. « Reducing mortality : an important aim of epilepsy management ». *Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry*, vol. 75, n° 3, p. 349-351.
- Schroeder, 1991. *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*. Dover Publications.
- Serrano et Figliola. 2009. « Wavelet leaders : A new méthode to estimate the multifractal singularity spectra ». *Physica*, vol. 388, n° 14, p. 2793–2805.
- Thomas. 2000. « Idiopathic epilepsy in dogs ». *The Veterinary Clinics of North America. Small Animal Practice*, vol. 30, n° 1, p. 183-206.
- Tricot, 1993. *Courbes et dimension fractale*. Springer.
- VanDerZiel. 1988. « Unified presentation of 1/f noise in electronic devices : Fundamental 1/f noise sources ». *IEEE*, vol. 76, n° 3, p. 233-258.
- Voss. 1979. « 1/f (flicker) noise : A brief review ». *Annual Symposium on Frequency Control*, vol. 1, n° 1, p. 40-46.
- Watters et Martin. 2004. « A method for estimating long-range power law correlations from the electroencephalogram ». *Biological Psychology*, vol. 66, n° 1, p. 79–89.
- Wendt, Abry, et Jaffard. 2007. « Bootstrap for Empirical Multifractal Analysis ». *IEEE signal processing magazine*, vol. 38, n° 1, p. 38-48.
- Wornell. 1991. « Synthesis, analysis, and processing of fractal signal ». PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- Yaglom. 1966. « Effect of fluctuations in energy dissipation rate on the form of turbulence characteristics in the inertial subrange ». *Dokl. Akad. Nauk.*, vol. 166, n° 1, p. 49–52.
- Yamaguchi. 2003. « Fourier and Wavelet analyses of normal and epileptic electroencephalogram (EEG) ». *IEEE*, vol. 1, n° 1, p. 406-409.
- Zelmann. 2012. « Automatic detection and analysis of high frequency oscillations in the human electroencephalogram ». PhD thesis, McGill University.
- Zia, Redish, et McKay. 2009. « Making sense of the Legendre transform ». *American Journal of Physics*, vol. 77, n° 7, p. 614-622.
- Zijlmans, Jacobs, Kahn, Dubeau, et Gotman. 2011. « Ictal and interictal high frequency oscillations in patients with focal epilepsy ». *Clinical Neurophysiology*, vol. 122, n° 4, p. 664-671.