

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE  
M.Ing.

PAR  
RIADH ATA

ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE AVEC LA MÉTHODE SPH

MONTREAL, LE 23 SEPTEMBRE 2002

© droits réservés de Riadh Ata

**CE PROJET A ÉTÉ ÉVALUÉ**

**PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de projet**

**Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure**

**M. Louis Lamarche, président de jury**

**Département du génie mécanique de l'École de Technologie Supérieure**

**M. Hassan Manouzi**

**Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec**

**IL A FAIT L'OBJET D'UNE PRÉSENTATION DEVANT JURY**

**LE 10 SEPTEMBRE 2002**

**À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

**MÉMOIRE DE RIADH ATA :  
' ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE AVEC LA MÉTHODE SPH'**

Le mémoire traite de la simulation numérique des écoulements à surface libre en eau peu profonde. On y développe une technique de résolution dite SPH. Celle-ci est traditionnellement utilisée en atmosphérique. L'extension en milieu continu est loin d'être évidente. Le sujet de recherche est original et soulève plusieurs défis. Des techniques sont développées pour appliquer la méthode SPH en hydraulique naturelle. Les résultats obtenus sont encourageants pour de futurs développements. Le mémoire présente un travail de recherche original qui fera l'objet de publications. Je considère le contenu scientifique du mémoire excellent. L'étudiant a certainement développé une quantité de travail importante. Des commentaires/corrections spécifiques sont indiqués sur ma copie.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus vifs et les plus sincères :

- Au professeur Azzeddine Soulaïmani Ing., PhD. mon directeur de recherche. Professeur Soulaïmani a encadré ce travail ce qui m'a permis de profiter de son expérience, de sa réputation dans le domaine, de ses directives et de son soutien aussi bien scientifique que moral. Pour cela et pour bien d'autres choses je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.
- À Hydro-Québec et le CNSRG qui ont financé ce projet.
- À tous les membres du groupe de recherche **Granit** qui m'ont soutenu durant ma maîtrise et spécialement mon cher ami Amin.
- À mes chers amis Adnène Hajji et Ali Chemam
- Je dédie ce travail à mes parents qui représentent tout dans ma vie et dont leur dévouement, leurs sacrifices et leurs encouragements, ainsi que ceux de toute ma famille, m'ont été un grand stimulant pour arriver au terme de ce travail.

# ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE AVEC LA MÉTHODE SPH

RIADH ATA

## RÉSUMÉ

La méthode SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics) est une méthode purement Lagrangienne qui a été utilisée depuis 1977 dans la simulation des problèmes astrophysiques et les chocs à grandes vitesses. Dans le présent travail, une adaptation de cette méthode aux écoulements à surfaces libres est présentée.

Comme première étape, le problème de bris de barrage en mono-dimensionnel est simulé. Cette étape nous a servi à évaluer et se familiariser avec la méthode SPH. Les résultats obtenus ont été validés et comparés avec la solution analytique ainsi qu'avec les résultats déjà publiés dans la littérature.

La deuxième partie de ce mémoire a été consacrée aux cas bidimensionnels. Le problème de bris de barrage dans diverses configurations a été simulé. Les résultats obtenus dépendent directement de chaque cas traité. Pour le cas d'un barrage standard ainsi que le barrage circulaire, les résultats sont très encourageants. En ce qui concerne le cas d'un barrage avec étranglement, le résultat est oscillant.

Ces résultats ont été obtenus avec l'approche standard de la méthode SPH. De plus, une nouvelle formulation basée sur une combinaison EF-SPH a été introduite et testée. Les résultats obtenus sont meilleurs que celle donnés par la formulation standard. Cette amélioration n'est palpable que dans les premiers instants de la simulation. Durant les derniers instants des simulations, un manque de particules à l'emplacement du barrage, cause une concordance moins bonne des courbes trouvées avec celles fournies par la méthode des volumes finis.

Le succès de la méthode SPH dans sa version standard ainsi que dans sa nouvelle version combinée EF-SPH, dépendent de plusieurs facteurs. Des études supplémentaires sont par conséquent suggérées pour standardiser les paramètres qui interviennent dans ces formulations.

## **FREE SURFACE FLOWS WITH SPH METHOD**

Riadh ATA

### **ABSTRACT**

SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) is a Lagrangian method used since the end of the seventeenth century in the simulating of gas dynamics and high-speed shocks. In this work, an adaptation of this method is given for free surface flows simulations.

First, the SPH is used in the one-dimensional case. This step is dedicated to the evaluation and the adaptation of the method to free surface flows. In the second section, the two-dimensional case is studied in details. The problem of dam break in various configurations is used as the benchmark test.

The result obtained depends on the concerned problem. For the cases of standard and circular dams, the results are quite encouraging. The capture of shocks and the shape of the waves were successfully revealed. The results were compared with analytic solution, in the 1D case, and with result given by the finite volume method. We note that the SPH presents a good reproduction of existing solution. Nevertheless, some oscillations are still present in the solutions.

In addition, a new combined finite element-SPH formulation is presented. This formulation seems to be better than the original SPH version. It gives the possibility to introduce all finite elements techniques of corrections and stabilizations. The results obtained with this new formulation show amelioration especially in the earlier times of simulation. The Lagrangian nature of the method (the lack of particles) is the principle cause of the non-conformity of obtained results with finite-volumes ones.

The success of the SPH in the free surface flows depends on the optimisation of its parameters, a smart choice of particles number, type of the kernel and the smoothing of irregularities in the geometry. Additional works are suggested to give more efficiency to this method that promises an interesting future in fields where the Eulerian methods are unable to tackle.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
REMERCIEMENTS .....	III
ABSTRACT .....	V
RÉSUMÉ .....	IV
TABLE DES MATIÈRES .....	VI
CHAPITRE 1 REVUE DE LA BIBLIOGRAPHIE .....	10
1.1 INTRODUCTION .....	10
1.2 LES MÉTHODES NUMÉRIQUES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES .....	11
1.2.1 Les méthodes Euleriennes .....	11
1.2.2 Les méthodes Lagrangiennes .....	12
1.3 ÉCOULEMENTS À SURFACE LIBRE .....	16
1.3.1 Introduction .....	16
1.3.2 Lois de conservation .....	17
1.3.3 Les équations d'eau peu profonde (shallow water equations) .....	19
1.3.4 Les équations de St-Venant .....	26
1.3.5 MEF appliquée aux équations de St-Venant .....	27
1.3.6 Problème du bris de barrage .....	29
CHAPITRE 2 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE SPH .....	31
2.1 INTRODUCTION .....	31
2.2 OUTILS MATHÉMATIQUES .....	32
2.3 EXPRESSION DES GRADIENTS .....	35
2.4 ADAPTATION À LA MÉCANIQUE DES FLUIDES .....	36
2.4.1 Conservation de la masse : équation de continuité .....	39
2.4.2 Équations d'Euler en SPH .....	39
2.4.3 Équation de l'énergie .....	42
2.5 FORMULATION ÉLÉMENTS FINIS-SPH .....	44
2.6 DISCRÉTISATION DU TEMPS .....	48
2.7 CHOIX DU NOYAU ET ESTIMATION DE L'ERREUR .....	49
2.8 CORRECTION DE LA SPH : CSPH .....	51
2.9 LES DÉFIS DU SPH: RECHERCHE DES VOISINS ET CONDITIONS AUX LIMITES... 54	54
2.9.1 Recherche des voisins .....	54
2.9.1.1 Algorithme Séquentiel .....	55
2.9.1.2 Algorithme séquentiel ordonné .....	55
2.9.1.3 Algorithme de recherche par colonnes .....	56
2.9.1.4 Algorithme octree .....	57

2.9.2	Conditions aux limites.....	60
2.9.2.1	Conditions aux limites spatiales.....	60
2.9.2.2	Conditions aux limites cinématiques.....	64
<b>CHAPITRE 3 IMPLÉMENTATIONS ET RÉSULTATS.....</b>		<b>66</b>
3.1	INTRODUCTION.....	66
3.2	PROBLÈME DU BRIS DE BARRAGE EN 1D.....	66
3.2.1	Implémentation et code développé.....	70
3.2.2	Influence de la longueur de lissage.....	74
3.2.2.1	Cas où la longueur de lissage est variable.....	74
3.2.2.2	Cas où la longueur de lissage est fixe.....	75
3.2.3	Influence du shock-capturing.....	76
3.2.4	Effet de l'adaptativité.....	79
3.2.4.1	Effet du lissage.....	79
3.2.4.2	Effet de la linéarisation.....	80
3.2.4.3	Combinaison du lissage et de la linéarisation.....	85
3.2.5	Effet de la dispersion :.....	86
3.2.6	Autre type de correction.....	88
3.2.7	Utilisation de l'équation de continuité.....	90
3.2.8	Écoulement à lit sec.....	93
3.2.8.1	Sans coefficient de frottement.....	94
3.2.8.2	Introduction du coefficient de frottement.....	95
3.2.9	SPH et Méthodes Euleriennes.....	97
3.2.9.1	SPH et éléments finis.....	98
3.2.9.2	SPH et volumes finis.....	99
3.3	PROBLÈME DE BRIS DE BARRAGE EN 2 DIMENSIONS.....	102
3.3.1	Introduction.....	102
3.3.2	La méthode SPH en deux dimensions.....	102
3.3.3	Problème de bris de barrage standard.....	107
3.3.4	Problème de barrage avec étranglement.....	110
3.3.5	Problème de bris de barrage circulaire.....	113
<b>CONCLUSION.....</b>		<b>123</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>		<b>127</b>

## LISTE DES FIGURES

Figure 1	Différence entre la description Lagrangienne et Eulerienne.....	13
Figure 2	Fonctions poids de différents ordres .....	15
Figure 3	Écoulement à surface libre pour une coupe en largeur du canal.....	20
Figure 4	Section d'une rivière - Notations des équations de St-Venant.....	26
Figure 5	Conditions initiales du problème de bris de barrage.....	29
Figure 6	Évolution dans le temps du problème du bris de barrage.....	30
Figure 7	Zone de lissage d'une particule k.....	36
Figure 8	Algorithme séquentiel ordonné.....	56
Figure 9	Méthode de recherche par colonnes.....	57
Figure 10	Algorithme octree .....	59
Figure 11	Particules fantômes .....	61
Figure 12	Méthode des particules miroir .....	63
Figure 13	Conditions initiales de la simulation.....	67
Figure 14	Interface pour l'entrée des paramètres de simulation .....	73
Figure 15	Effet d'une longueur de lissage variable.....	75
Figure 16	Effet d'une longueur de lissage constante .....	75
Figure 17	Influence du chock capturing- $\alpha=1$ .....	77
Figure 18	Influence du chock capturing - $\alpha=2$ .....	77
Figure 19	Influence du chock capturing - $\alpha=4$ .....	78
Figure 20	Influence du chock capturing - $\alpha=8$ .....	78
Figure 21	Effet du lissage – discontinuité standard.....	79
Figure 22	Effet du lissage des coordonnées spatiales .....	80
Figure 23	Effet de la linéarisation .....	81
Figure 24	Cas optimal - Profondeur temps = 30s.....	82
Figure 25	Cas optimal - Vitesse temps = 30s.....	82
Figure 26	Cas optimal - Profondeur temps = 60s.....	83
Figure 27	Cas optimal - Vitesse temps = 60s.....	83
Figure 28	Cas optimal – Profondeur temps = 90s .....	84
Figure 29	Cas optimal - Vitesse temps = 90s.....	84
Figure 30	Combinaison du lissage et de la linéarisation.....	85
Figure 31	Effet de la dispersion $\alpha=1$ et $\mu=0.01$ .....	86
Figure 32	Effet de la dispersion $\alpha=2$ et $\mu=0.01$ .....	87
Figure 33	Effet de la dispersion $\alpha=2$ et $\mu=0$ .....	87
Figure 34	Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=0.5$ et $\alpha=2$ .....	89
Figure 35	Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=1$ et $\alpha=2$ .....	89
Figure 36	Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=0.1$ et $\alpha=2$ .....	90
Figure 37	Utilisation de l'équation de continuité - $\alpha=2$ - $\alpha'=1$ - cas linéarisé .....	92
Figure 38	Utilisation de l'équation de continuité - $\alpha=2$ - $\alpha'=1$ - cas standard .....	92
Figure 39	Écoulement à lit sec – cas sans coeff. de frottement – $t=4s$ - Profondeur ..	94
Figure 40	Écoulement à lit sec – cas sans coefficient de frottement- $t=4s$ - Vitesse ...	94

Figure 41	Écoulement à lit sec-cas avec coeff. de frottement $n=0.01$ - Profondeur....	95
Figure 42	Écoulement à lit sec-cas avec coefficient de frottement $n=0.01$ -Vitesse...	95
Figure 43	Écoulement à lit sec – cas avec coeff. de frottement $n=1$ - Profondeur.....	96
Figure 44	Écoulement à lit sec - cas standard – temps =30s.....	96
Figure 45	Écoulement à lit sec - cas standard – temps =4s.....	97
Figure 46	Écoulement à lit sec - cas standard – temps = 4 s – vitesse.....	97
Figure 47	Comparaison avec la méthode des volumes finis – Profondeur .....	100
Figure 48	Comparaison avec la méthode des volumes finis - Vitesse .....	101
Figure 49	Comparaison avec les volumes finis- écoulement à lit sec - Profondeur...	101
Figure 50	Conditions aux limites cinématiques – cas de particules fantômes .....	105
Figure 51	Algorithme de la méthode SPH .....	107
Figure 52	Conditions initiales du problème de bris de barrage standard en 2D.....	109
Figure 53	Problème de bris de barrage en 2D- Profondeur – Gaussienne - $\alpha = 4$ ....	109
Figure 54	Problème de bris de barrage en 2D- Vitesse-Gaussienne - $\alpha = 4$ .....	110
Figure 55	Problème de bris de barrage en 2D – Profondeur – Spline - $\alpha = 4$ .....	110
Figure 56	Problème de bris de barrage en 2D – vitesse – Spline - $\alpha = 4$ .....	111
Figure 57	Problème de barrage avec étranglement-Conditions initiales-Coupe.....	112
Figure 58	Problème de bris de barrage avec étranglement - Conditions initiales.....	113
Figure 59	Problème de barrage avec étranglement – Profondeur .....	113
Figure 60	Conditions initiales du problème de barrage circulaire .....	115
Figure 61	Barrage circulaire – $t=0.4s$ .....	117
Figure 62	Barrage circulaire – $t=0.4s$ - Vue de dessus.....	117
Figure 63	Barrage circulaire – $t=1.7s$ - $\alpha = 4$ .....	118
Figure 64	Barrage circulaire – $t=2.5s$ - $\alpha = 4$ .....	118
Figure 65	Barrage circulaire – $t=3.5s$ - $\alpha = 4$ .....	119
Figure 66	Barrage circulaire – $t=4.7s$ - $\alpha=1$ .....	119
Figure 67	Barrage circulaire – $t=4.7s$ – vue de dessus .....	120
Figure 68	Barrage circulaire - Augmentation de $\alpha$ – $\alpha = 8$ $t=3.0s$ .....	120
Figure 69	Barrage circulaire - Augmentation de $\alpha$ – $\alpha= 8$ $t=3.6s$ .....	121
Figure 70	Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=0.4s$ - $\alpha=4$ .....	121
Figure 71	Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=1.6s$ - $\alpha=4$ .....	122
Figure 72	Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=2.5s$ - $\alpha=4$ .....	122
Figure 73	Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=3.5s$ - $\alpha=4$ .....	123
Figure 74	Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=4.7s$ - $\alpha=4$ .....	123

# CHAPITRE 1

## REVUE DE LA LITTÉRATURE

### 1.1 Introduction

Les équations différentielles constituent l'outil le plus fréquemment utilisé dans la modélisation des problèmes des sciences physiques et ceux de l'ingénieur [1]. Leur résolution aboutit très rarement à leurs solutions analytiques. Le traitement numérique est, dans la plupart des cas, la seule issue pour aboutir aux solutions. Le rôle de l'ingénieur est, par conséquent, l'adaptation des méthodes numériques aux fins spéciales qui se présentent à lui mais aussi, de les optimiser pour trouver les meilleures approximations de la solution cherchée. L'optimisation de ces méthodes consiste à approximer au mieux la solution avec le moindre coût.

Dès le début du vingtième siècle, plusieurs tentatives ont été vainement faites afin de calculer numériquement les solutions des équations à dérivées partielles. Le manque d'issues théoriques conjugué avec l'absence de moyens informatiques à puissance suffisante, ont contribué à cet échec. Cependant, vers la moitié du siècle, des percés ont été enregistrés aussi bien dans la théorie et l'analyse numérique (concernant l'étude de la stabilité et de l'efficacité des méthodes numérique avec Friedrich, Von Neumann, Lax, Oleinik, Glimm, Godunov, Kreiss, Wendroff et plusieurs autres ), qu'au niveau de la puissance des moyens de calcul. C'est avec ces pionniers que le développement fondamental de la théorie des lois de la conservation hyperbolique a connu son vrai succès. Les études publiées traitaient la stabilité, l'existence et l'unicité des solutions, la stabilité et la convergence des méthodes numériques [23].

Après les succès initiaux en météorologie, en physique des plasmas et en géophysique, ces méthodes ont été appliquées pour résoudre les problèmes en régime permanent dans le domaine aéronautique via l'approche communément qualifiée de « time-asymptotic approach » où les problèmes dépendant du temps sont décomposés dans le temps

(marched in time) jusqu'à ce que la variation du temps soit négligeable et ainsi ils sont assimilés comme des problèmes en régime permanent. La résolution des équations aux dérivées partielles de la mécanique des fluides, était considérée comme un défi majeur vue qu'elles présentent un caractère elliptique ou hyperbolique et parfois même un caractère elliptique-hyperbolique mixte. Les lois de conservation hyperboliques ont des solutions discontinues. Les résoudre nécessite, par conséquent, plus de développements numériques.

## **1.2 Les méthodes numériques en mécanique des fluides**

Les méthodes numériques, en mécanique des fluides, peuvent être regroupées en deux grandes familles : la famille Lagrangienne et la famille Eulerienne.

### **1.2.1 Les méthodes Euleriennes**

La description Eulerienne est fondée sur la notion de champ[19]. Dans ce cas, le mouvement du fluide est donné par une prescription complète des grandeurs physiques comme étant des fonctions du temps et de l'espace. À partir de cette méthode, on obtient de l'information concernant le fluide en terme de « qu'est ce qui se passe en un point fixe de l'espace? »

La plus répandue de toutes les méthodes Eulerienne est la méthode des éléments finis. C'est une méthode approximative de résolution des équations différentielles ou aux dérivées partielles. L'idée de base consiste en la subdivision du domaine de calcul en plusieurs petits « éléments », de forme triangulaire ou quadrilatérale en deux dimensions. En choisissant des points convenables appelés « nœuds » au sein même de ces éléments, les variables de l'équation à résoudre peuvent être écrites en une combinaison linéaire des fonctions d'interpolation choisies préalablement et les valeurs des variables ou de leurs dérivées sont spécifiées aux nœuds.

En utilisant les formulations variationnelles ou les méthodes à résidus pondérés, l'équation différentielle est discrétisée et par conséquent transformée en une « équation élément fini » pour chaque élément. Ensuite, un assemblage de ces équations locales est nécessaire pour obtenir un système global d'équations algébriques. Ce système global peut inclure, au besoin, les conditions aux limites ou bien les conditions initiales imposées par le problème physique.

La méthode des éléments finis a été initialement développée par les ingénieurs de structure aéronautique dans les années 1950 pour l'analyse des méga-systèmes que présente le design des avions.

Les méthodes de volumes finis et de différences finis s'apparentent directement de la même logique que celle des éléments finis.

La méthode des volumes finis est particulièrement efficace pour les équations à dérivées partielles de type hyperbolique telle que les équations de «shallow water», sujet qu'on va étudier ultérieurement dans ce mémoire. Plusieurs applications basées sur des méthodes dérivant de la méthode des volumes finis et traitant les lois de conservation hyperboliques ont été publiées. Ces méthodes sont classées en deux classes : classe des méthodes conservatives et classes des méthodes non-conservatives.

Les méthodes conservatives constituent le meilleur choix pour les problèmes de chocs ou les problèmes présentant des discontinuités très prononcées [23]. Tandis que les schémas non-conservatifs ou les « schémas à variables primitives » sont plutôt conseillés pour les écoulements lisses *smooth flows*. Dans la littérature, il y a une large gamme de travaux s'inspirant de ces méthodes [23].

### **1.2.2 Les méthodes Lagrangiennes**

La description Lagrangienne du mouvement est basée sur la notion de particules qui se déplacent en emportant avec elles toutes les informations physiques. Le domaine est ainsi décomposé en particules qui se déplacent par rapport au référentiel fixe. Toutes les

données et les variables qui constituent le problème (coordonnées spatiales, vitesses, pression, énergie....) sont indexées et liées à chacune des particules.

La différence entre les méthodes Lagrangiennes et les méthodes Eulerienne peut être assimilée dans l'exemple de la fumée qui sort d'une cheminée, illustré par la figure suivante [19] :

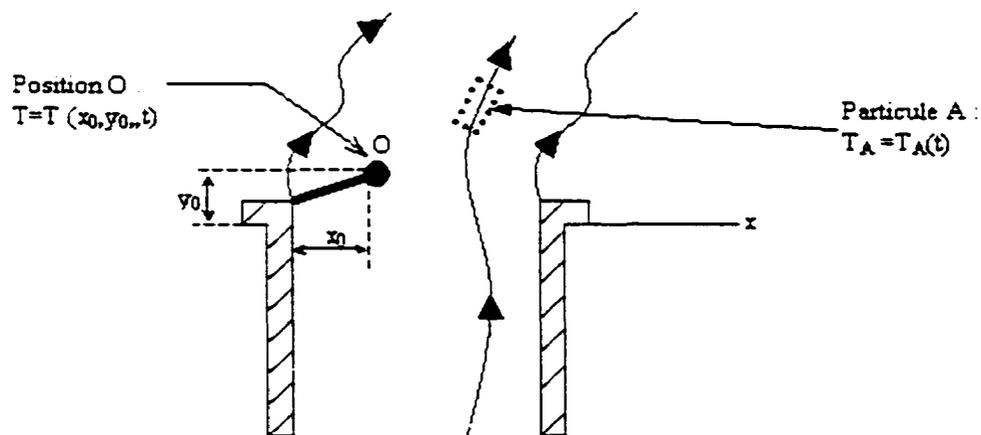


Figure 1 Différence entre la description Lagrangienne et Eulerienne

Dans la méthode Eulerienne, un thermomètre est attaché au point O et la température est enregistrée dans ce point en fonction du temps. À différents instants, il y a différentes particules fluides qui passent par l'instrument fixe. Ainsi, la température est obtenue pour cette position ( $x = x_0$  et  $y = y_0$ ) comme fonction du temps.

Dans la description Lagrangienne, le thermomètre est attaché à la particule A qui se déplace et enregistre à chaque instant la température de cette même particule. Par conséquent le champ de température est donnée par la fonction  $T_A = T_A(t)$ .

La famille des méthodes Lagrangienne est incluse dans la catégorie de méthodes conventionnellement appelées « Meshless Method » qui englobe en outre une multitude de méthodes Euleriennes. Cette appellation provient du fait que ces méthodes ne sont

pas basées sur la notion de maillage fréquemment rencontrée dans les méthodes Eulerienne et en particulier dans la méthode des éléments finis. Le rôle du maillage est de localiser les points là où la fonction recherchée serait calculée. Il sert, en outre, à l'identification de la connectivité et ainsi les nœuds qui interviennent dans le calcul de la variable en un point donné. Le concept de maillage est, par conséquent, remplacé par les fonctions de pondération ou fonctions noyaux ( kernel ).

La première apparition des « meshless methods » date de 1977 avec l'avènement de la méthode SPH ( Smoothed Particles Hydrodynamics ). Par la suite, Nayroles, Touzot & Villon ont présenté la méthode des éléments diffusés en 1992. On peut citer plusieurs autres méthodes qui ont eu, plus ou moins, de succès. À titre d'exemple, on cite la méthode RKPM ( Reproducing Kernel Particle method), la méthode LBIE ( Local Boundary Integral Equation) et la méthode MLPG ( Meshless Local Petrov Galerkin ) développée par Zhu, Zhang et Atluri en 1998 [1].

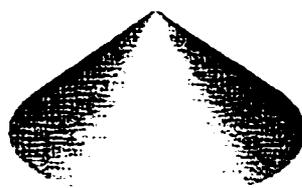
Les méthodes Lagrangiennes sont basées essentiellement sur une interpolation intégrale pondérée. Les formulations variationnelles faibles sont écrites moyennant une fonction poids qui sert à récupérer la valeur recherchée à partir des particules entourant la particule en question et qui sont communément appelées « particules voisines ».

Par conséquent, deux notions extrêmement importantes surgissent : la notion de la fonction poids ou noyau et la notion de « voisins ».

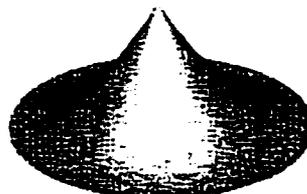
Dans la plupart des temps [1], le noyau est une gaussienne ou bien une fonction quadratique. La différence entre chacune des fonctions est tributaire du domaine de définition (généralement circulaire, elliptique ou rectangulaire), ainsi que de l'ordre de la fonction polynomiale qui la constitue (voir figure 2).

Dans notre cas, nous avons utilisé la méthode SPH basée sur deux types de noyau : la gaussienne et la fonction Spline cubique.

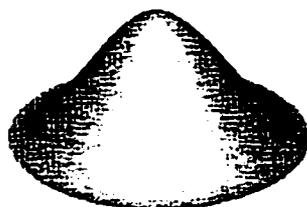
La notion de voisins remplace la notion de maillage et de connectivité dans le cas des méthodes Eulerienne. Les particules sont appelées « voisines », si et seulement si, elles appartiennent au domaine de définition de la fonction d'interpolation de la particule étudiée. Le nombre et la densité de ces particules voisines sont très importants dans l'application des interpolations intégrales. Il faut savoir choisir la bonne répartition et la décomposition optimale du domaine afin que la modélisation Lagrangienne soit plus précise.



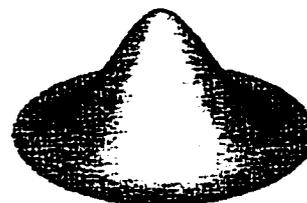
**Fonction poids (1er ordre)**



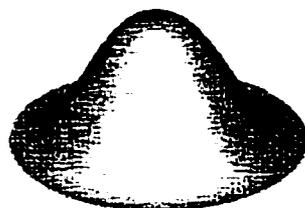
**Fonction poids (2eme ordre)**



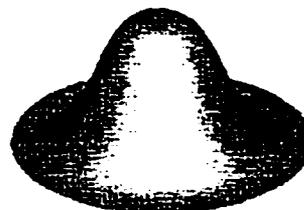
**Fonction poids (3eme ordre)**



**Fonction poids (4eme ordre)**



**Fonction poids (5eme ordre)**



**Fonction poids (10 eme ordre)**

Figure 2 Fonctions poids de différents ordres

## 1.3 Écoulements à surface libre

### 1.3.1 Introduction

Les écoulements à surface libre constituent une gamme importante de problèmes aussi bien scientifiques que d'intérêt pratiques. Ces problèmes s'étendent des marées des océans jusqu'au problème de bris de barrage en passant par l'écrasement des vagues sur les plages, les écoulements dans les canaux à ciel ouvert, le phénomène des inondations dans les rives des fleuves [21],[23]...

La modélisation bidimensionnelle des écoulements à surface libre est conventionnellement appelée « shallow water ». Cette modélisation peut être aussi appliquée pour les écoulements multiphasiques et dans la simulation des couches atmosphériques. Une hypothèse clé dans la formulation et la mise en équation des équations « shallow water » consiste à supposer la pression qui règne comme étant hydrostatique. Cette hypothèse provient du fait qu'on suppose que la composante verticale de l'accélération a un effet négligeable sur la pression. Ainsi, les équations qui résultent sont des équations aux dérivées partielles en deux dimensions, non linéaires, dépendant du temps et de type hyperbolique.

Dans cette section, on va commencer par présenter les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Par la suite, on va procéder à la dérivation des équations « shallow water » pour des domaines à élévations variables du lit. Finalement, on va considérer le cas unidimensionnel pour les écoulements en rivières dont la section est variable. Ces équations sont connues sous le nom des équations de St-Venant.

Dans ce qui suit on va utiliser les notations suivantes : pour n'importe quelle distribution  $\phi$  dépendant des coordonnées spatiales  $x$ ,  $y$  et  $z$  ainsi que du temps :

$$\phi_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}, \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs  $A = (a_1, a_2, a_3)$  et  $B = (b_1, b_2, b_3)$  :  $A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$\text{L'opérateur gradient : } \text{grad} \phi = \nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$\text{L'opérateur de divergence : } \text{div} A = \nabla \cdot A = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

### 1.3.2 Lois de conservation

Les lois locales de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide compressible données en une version différentielle ou dérivative sont les suivantes :

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho V) = 0 \quad (1.1)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V) + \nabla \cdot [\rho V \otimes V + pI - \Pi] = \rho g \quad (1.2)$$

où  $V$  est le vecteur vitesse,  $p$  est la pression et  $g$  est le vecteur des forces de volume.

Les tenseurs mis en jeu dans ces équations sont les suivants :

$$V \otimes V = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wv & vw & w^2 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} & \tau^{xz} \\ \tau^{yx} & \tau^{yy} & \tau^{yz} \\ \tau^{zx} & \tau^{zy} & \tau^{zz} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Le tenseur  $\Pi$  est le tenseur de contraintes visqueuses. Dans tout le reste de cette dissertation on va supposer que ce tenseur est négligeable.

La forme intégrale des équations de conservation est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega = - \iint_{\Gamma} n \cdot (\rho \mathbf{V}) \, d\Gamma \quad (1.6)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} (\rho \mathbf{V}) \, d\Omega = - \iint_{\Gamma} [V(n \cdot \rho \mathbf{V}) + pn - n \cdot \Pi] \, d\Gamma + \iiint_{\Omega} \rho \mathbf{g} \, d\Omega \quad (1.7)$$

Où  $\Omega$  est un volume de contrôle arbitraire d'un élément de fluide en trois dimension et  $\Gamma$  est sa frontière.

Il est parfois plus commode d'exprimer les lois de conservation avec les variables physiques appelées aussi variables primitives ( $\rho, u, v, w$ ). Quand le terme visqueux est négligeable et le terme de force de volume est retenu, les équations deviennent :

$$\left. \begin{aligned}
 \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) &= 0 \\
 u_t + uu_x + vu_y + wu_z + \frac{1}{\rho} p_x &= g_1 \\
 v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho} p_y &= g_2 \\
 w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho} p_z &= g_3
 \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

### 1.3.3 Les équations d'eau peu profonde (shallow water equations)

Considérons la figure suivante qui illustre les conventions et les paramètres qui formuleront les démarches mathématiques subséquentes :

On suppose que le lit ou le fond est défini par la fonction :

$$z = b(x, y) \quad (1.9)$$

et que la position de la surface libre est paramétrée par la fonction :

$$z = s(x, y, t) = b(x, y) + h(x, y, t) \quad (1.10)$$

avec  $h(x, y, t)$  la profondeur effective de l'eau.

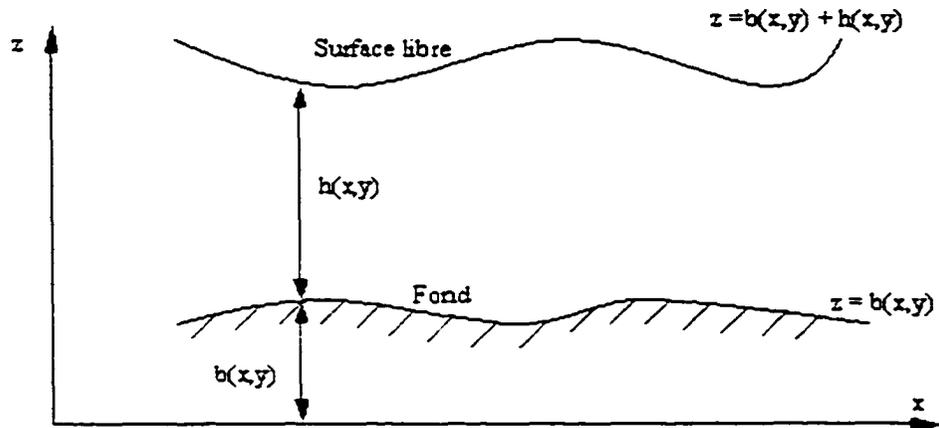


Figure 3 Écoulement à surface libre pour une coupe en largeur du canal

Lorsque la masse volumique est constante (fluide incompressible), les équations (1.8) se simplifient à :

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (1.11)$$

$$u_x + uu_x + vu_y + wu_z = -\frac{1}{\rho} p_x \quad (1.12)$$

$$v_x + uv_x + vv_y + wv_z = -\frac{1}{\rho} p_y \quad (1.13)$$

$$w_x + uw_x + vw_y + ww_z = -\frac{1}{\rho} p_z - g \quad (1.14)$$

Ici on suppose que les force de volume sont restreintes à la gravité  $\mathbf{g} = (0,0,-g)$ .

En principe, se donnant des conditions initiales et des conditions aux limites pour le lit et pour la fonction définissant la surface libre, la solution du problème est donnée par la solution des équations (1.11) - (1.14) pour les variables inconnues qui sont  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $p$ .

Avec cette configuration, le problème représente un défi numérique. La difficulté principale est incarnée par la surface libre. Puisqu'elle modélise une frontière, la surface libre joue aussi le rôle de l'inconnue. De ce fait, il n'est pas évident d'entamer la résolution de ce problème en le modélisant de la sorte (voir Soulaïmani [22]).

Des approximations qui mènent à des simplifications du problème sont envisageables. L'une de ces approximations stipule que l'amplitude de la courbe qui modélise la surface libre est petite devant les autres données du problème et surtout comparativement à une longueur caractéristique telle que la longueur d'onde [22].

Une autre approximation découle du fait que la profondeur de l'eau est petite par rapport à la longueur de l'onde. Par conséquent, la composante verticale de l'accélération sera négligée. La dernière approximation se traduit par le fait que la composante verticale de l'accélération :

$$\frac{dw}{dt} = w_t + uw_x + vw_y + ww_z \quad (1.15)$$

est négligeable devant la gravité.

L'insertion de cette condition dans l'équation (1.14) donne :

$$p_z = -\rho g \quad (1.16)$$

Ce qui veut dire que la pression est hydrostatique.

Puisque la pression à la frontière supérieure (surface libre) est la pression atmosphérique et par conséquent nulle, l'équation (1.16) devient :

$$p = \rho g(s - z) \quad (1.17)$$

et la différenciation de (1.17) par rapport à x et y donne :

$$p_x = \rho g s_x \quad , \quad p_y = \rho g s_y \quad (1.18)$$

Notons que les dérivées de  $p$ ,  $p_x$  et  $p_y$  sont indépendantes de  $z$  et ainsi les composantes suivant  $x$  et  $y$  de l'accélération le sont aussi. Les termes  $wu_z$  et  $wv_z$  sont petits par rapport aux autres termes d'accélération.

En utilisant l'équation (1.18) et en se référant aux équations (1.12) et (1.13), on obtient :

$$u_t + uu_x + vv_x = -gs_x \quad (1.19)$$

et

$$v_t + uv_x + vv_y = -gs_y \quad (1.20)$$

Dans ce qui suit on va intégrer l'équation de continuité (1.11) suivant  $z$  entre  $z = b(x, y)$  et  $z = s(x, y, t)$ : i.e. entre le lit et la surface libre. Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\int_b^s (u_x + v_y + w_z) dz = 0 \quad (1.21)$$

ce qui mène à :

$$w|_{z=s} - w|_{z=b} + \int_b^s u_x dz + \int_b^s v_y dz = 0 \quad (1.22)$$

On va appliquer maintenant les conditions aux limites pour déterminer les deux termes de l'équation (1.22). La surface libre et le fond sont des faces matérielles, ce qui donne :

$$(s_t + us_x + vs_y - w)|_{z=s} = 0 \quad (1.23)$$

et

$$(ub_x + vb_y - w)|_{z=b} = 0 \quad (1.24)$$

De l'équation (1.23) on obtient :

$$w|_{z=s} = (s_z + us_x + vs_y)|_{z=s} \quad (1.25)$$

et de l'équation (1.24) on obtient :

$$w|_{z=b} = (ub_x + vb_y)|_{z=b} \quad (1.26)$$

En substituant les équations (1.25) et (1.26) dans (1.22) :

$$(s_z + us_x + vs_y)|_{z=s} - (ub_x + vb_y)|_{z=b} + \int_b^s u_x dz + \int_b^s v_y dz = 0 \quad (1.27)$$

Afin de simplifier l'équation (1.27) on utilise la formule de Leibniz :

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\xi_1(\alpha)}^{\xi_2(\alpha)} f(\xi, \alpha) d\xi = \int_{\xi_1(\alpha)}^{\xi_2(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\xi + f(\xi_2, \alpha) \frac{d\xi_2}{d\alpha} - f(\xi_1, \alpha) \frac{d\xi_1}{d\alpha} \quad (1.28)$$

ce qui nous mène à :

$$\int_b^s u_x dz = \frac{d}{dx} \int_b^s u dz - s_x u|_{z=s} + b_x u|_{z=b} \quad (1.29)$$

et

$$\int_b^s v_y dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s u dz - s_y \cdot v|_{z=s} + b_y \cdot v|_{z=b} \quad (1.30)$$

La substitution de (1.29) et (1.30) dans (1.27) donne :

$$s_x + \frac{\partial}{\partial x} \int_b^s u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_b^s v dz = 0 \quad (1.31)$$

En notant par  $\bar{u} = \int_b^s u dz$ ,  $\bar{v} = \int_b^s v dz$  les composantes de la vitesse moyennées dans la direction verticale, l'équation (1.30) se simplifie à :

$$h_x + (h\bar{u})_x + (h\bar{v})_y = 0 \quad (1.32)$$

C'est la loi de conservation de la masse écrite sous une forme intégral-différentielle.

Les équations de quantité de mouvement (1.13) et (1.14) peuvent aussi être exprimées sous une forme différentielle. Pour ce fait, on ajoute l'équation (1.32) pré-multipliée par  $u$ , à l'équation (1.19) pré-multipliée par  $h$ . En se rappelant que  $s=b+h$ , on obtient :

$$(h\bar{u}_x + \bar{u}h_x) + [u(h\bar{u})_x + h\bar{u}u_x + hgh_x] + [\bar{u}(h\bar{v})_y + h\bar{v}u_y] = -hgb_x \quad (1.33)$$

en notant que :

$$h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} h^2 \right) \quad (1.34)$$

on obtient :

$$(h\bar{u})_x + \left( h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^3 \right)_x + (h\bar{u}\bar{v})_y = -ghb, \quad (1.35)$$

de même pour la composante suivant y :

$$(h\bar{v})_y + (h\bar{u}\bar{v})_x + \left( h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^3 \right)_y = -ghb. \quad (1.36)$$

Dans ce qui suit, on va confondre la notation  $\bar{u}$  par  $u$  et  $\bar{v}$  par  $v$ .

Les trois lois de conservation représentées par les équations (1.34) (1.35) et (1.36) peuvent être écrites sous forme différentielle, mais regroupées dans un même vecteur :

$$U_x + F(U)_x + G(U)_y = S(U) \quad (1.37)$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^3 \\ huv \end{bmatrix}, \\ G(U) &= \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^3 \end{bmatrix}, \quad S(U) = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Dans le système d'équations (1.37),  $U$  est le vecteur des variables,  $F(U)$  et  $G(U)$  sont les vecteurs flux et  $S(U)$  est le vecteur source. Pour plusieurs applications, il y a ajout d'autres termes telles que les forces de Coriolis, l'effet du vent, la friction du lit...

### 1.3.4 Les équations de St-Venant

Les équations de St-Venant sont d'un intérêt pratique en hydraulique. Elles sont données par :

$$A_t + (Au)_x = 0 \quad (1.39)$$

et

$$(Au)_t + (Au^2)_x + gAh_x = gA(b_t - b_f) \quad (1.40)$$

Elles sont utilisées pour la modélisation des écoulements des rivières. La géométrie et les paramètres mis en jeu dans cette formulation sont illustrés dans la figure suivante :

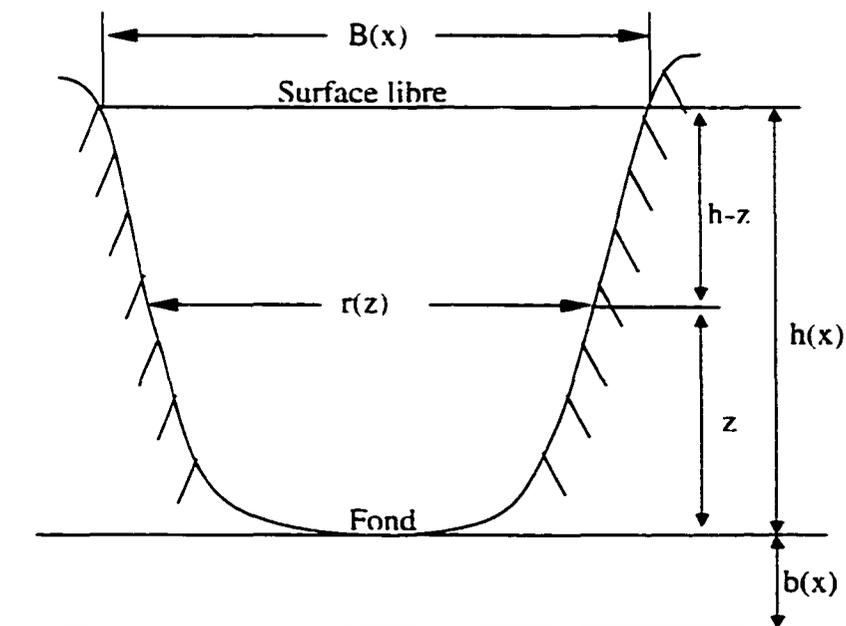


Figure 4 Section d'une rivière - Notations des équations de St-Venant.

Ici on dénote par :

$A=A(x,t)$  la section mouillée définie comme suit :

$$A = \int_0^{h(x)} r(x,z) dz \quad (1.41)$$

avec  $r(x,z)$  la largeur de la section et  $r(x,h)$  la largeur de la surface libre. La quantité  $b_f$  s'appelle facteur de friction (friction slope).

Une remarque importante concernant les équations de St-Venant est que l'équation de quantité de mouvement ne peut, en général, être écrite sous forme conservative comme c'est le cas pour l'équation (1.37). De ce fait, elles présentent des difficultés aussi bien théoriques que pratiques dans la définition du choc qui obéit aux conditions de Rankine-Hugoniot (Voir [23]).

Une autre difficulté qui se manifeste d'après l'écriture même de ces équations, est que (1.39) et (1.40) ne peuvent pas être résolues par un schéma numérique conservatif. Une possibilité pour contourner ce problème est de supposer que la discontinuité, si elle est présente, est *faible*, dans le sens que si les sauts dans les discontinuités sont présentes alors elles sont petites. Ainsi l'équation (1.40) peut être écrite :

$$(Au)_x + (Au^2 + gAh)_x = gA(b_x - b_f) - ghA_x \quad (1.42)$$

### 1.3.5 MEF appliquée aux équations de St-Venant

Les équations « shallow water » ainsi que les équations de St-Venant, ont fait l'objet de plusieurs études. Dans la littérature, un grand nombre de publications s'intéressent à l'application de la méthode des éléments finis aux écoulements dans les rivières, les lacs, les canaux ... et ce en modélisant les équations de St-Venant.

La méthode des éléments finis a bien réussi à développer ces équations et à générer des résultats très fiables [21], [22]. Toutefois, l'implémentation de cette méthode est une

tâche qui est loin d'être facile. Vu que les écoulements à surface libre sont souvent synonymes de géométries complexes et vu le fondement matriciel de la méthode, les formulations variationnelles standards sont rarement stables. Des termes de stabilisations additionnels sont, par conséquent, ajoutés pour adapter la MEF aux fins désirées.

La formulation mathématique éléments finis standard des équations de St-Venant se base sur la formulation de Galerkin. Cette écriture est une écriture intégrale qui met en exergue les diverses parties de l'équation (convection, flux, source...).

Les équations shallow water s'écrivent, en forme quasi-linéaire, comme suit:

$$(A_0 U)_{,x} + A_i U_{,i} - (K_{ij}(U) U_{,j})_{,i} + F(\tau, U) = 0 \quad (1.43)$$

Dans cette écriture, la convention de sommation est utilisée pour les indices répétés,  $i$  indique la dérivée suivant la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée spatiale ( $i, j = 1, 2$ ). Le vecteur  $U$  représente les inconnues (u,h).  $F$  est une fonction non linéaire dépendante de  $U$  et  $\tau$  incarnant les effets de la friction.  $A_i$  est la matrice d'advection pour la  $i^{\text{ème}}$  direction et  $K_{ij}$  représente la matrice de diffusion.

La formulation de Galerkin de l'équation (1.43) est :

$$\int_{\Omega} [(A_0 U)_{,x} + A_i (U) U_{,i} + F(\tau, U)] W \, d\Omega + \int_{\Omega} K_{ij}(U) U_{,j} W_{,i} \, d\Omega = 0 \quad (1.44)$$

L'élément adopté par Soulaïmani et al. est un élément quadratique puisqu'il est le meilleur type d'élément adapté aux écoulements à surface libre (voir Soulaïmani [22]).

Cette formulation est efficace et donne de bons résultats pour le cas des écoulements à faible nombre de Reynolds. Toutefois, pour les écoulements rapides, des oscillations apparaissent et perturbent ainsi la solution du problème. Des termes stabilisateurs sont alors ajoutés à l'équation (1.44). Ces termes sont, en un sens, une diffusion artificielle. Ci-après un exemple de stabilisation introduit par Soulaïmani [21]. Il est annexé dans ce cas à l'équation de continuité qui devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot ((H + h)\mu) - \varepsilon \Delta h = 0 \quad (1.45)$$

Avec :

$$\varepsilon = \left[ \left( 2 \frac{\|\mu\|}{l} \right)^2 + \left( 2 \frac{\nu}{l^2} \right)^2 \right]^{-0.5} \text{ et } l \text{ est la taille de l'élément.}$$

### 1.3.6 Problème du bris de barrage

Le problème de bris de barrage est d'une importance indéniable. Le modèle de ce problème est représenté par un canal horizontal et uniforme, de section rectangulaire. En plus, le canal a deux niveaux différents d'eau au repos et qui sont séparés par un mur ou un barrage.

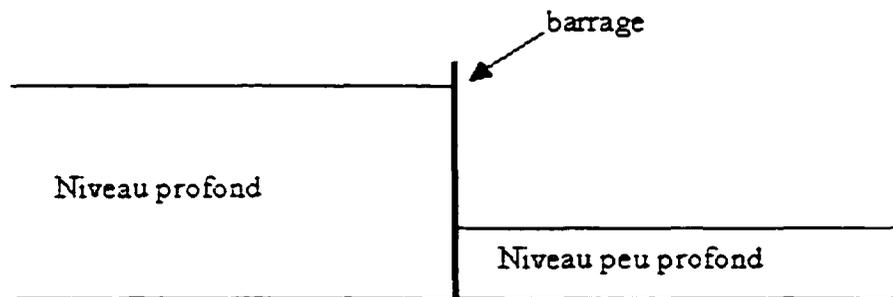


Figure 5 Conditions initiales du problème de bris de barrage

Si le barrage qui sépare les deux zones amont et aval s'effondre brusquement, deux phénomènes majeurs émergent sous formes d'ondes.

Une première onde droite qui se localise dans le côté du niveau bas de l'eau, faisant augmenter brusquement la profondeur de l'eau. Une deuxième onde qui se dirige vers la gauche faisant réduire d'une façon continue la hauteur de la surface libre. Les détails

physiques qui se déroulent lors de la cassure du barrage sont très complexes et restent difficilement modélisable par les équations « shallow-water ». Si le mur séparant les deux régions se casse suffisamment vite, il y aura une naissance des deux ondes d'une façon centralisée dans l'emplacement du mur. L'onde droite est conventionnellement appelée *onde de choc*, celle de gauche est appelée *onde de raréfaction*. Ce système d'ondes peut être obtenu par les équations de St-Venant ( shallow-water).

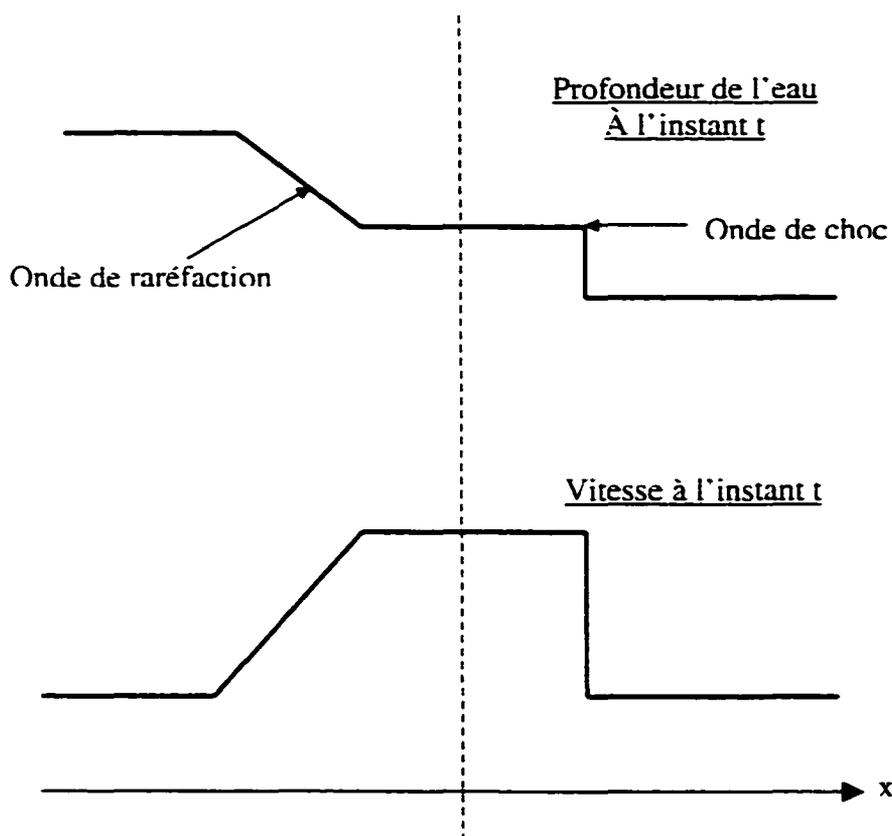


Figure 6 Évolution dans le temps du problème du bris de barrage.

## **CHAPITRE 2**

### **PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE SPH**

#### **2.1 Introduction**

La méthode SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) est une méthode purement Lagrangienne qui a été développée au début pour simuler les dynamiques des fluides astrophysiques (Lucy 1977 [11], Gingold et Monaghan 1977 [12], Benz 1990 [2]). La base de la méthode SPH dérive fondamentalement de la description Lagrangienne des fluides et ce en considérant que le mouvement d'un volume de contrôle d'un fluide peut être représenté par une particule portant toutes les informations physiques (masse, sollicitation, énergie...).

La SPH est donc basée sur une technique de calcul hydrodynamique. La forme des équations de la SPH est simple même en trois dimensions. Cette caractéristique fait de la SPH une approche souhaitée pour les géométries complexes, les milieux à cavitations ou multiphasiques, les champs à écoulements chaotiques, les problèmes d'impact à très grandes vitesses...

La SPH simule le mouvement d'un ensemble de points. A n'importe quel instant, la vitesse, la masse volumique, l'énergie interne... de ces points sont obtenus. Une masse est aussi attribuée à chaque point, d'où on parle de notion de « particule ».

Pour suivre correctement le mouvement de ces particules durant une étape de temps, il est nécessaire de construire les forces exercées sur un élément de fluide. Ces forces doivent être construites à partir des informations portées par la particule.

L'idée de base de la SPH est fondée sur l'utilisation d'une interpolation intégrale basée sur les noyaux (kernels) : les équations différentielles sont alors transformées en équations intégrales qui sont par la suite discrétisées.

## 2.2 Outils mathématiques

Pour une fonction quelconque  $A$  définie sur un domaine  $\Omega$ , et pour un point  $x$  appartenant à  $\Omega$ , on peut écrire :

$$A(x) = \int_{\Omega} A(x') \delta(x - x') dx' \quad (2.1)$$

où  $\delta$  est la masse de Dirac centrée en  $x$ .

Numériquement, la masse de Dirac est non calculable. Par conséquent, elle est remplacée par une fonction poids  $W$  (ou noyau) qui doit vérifier les conditions suivantes [6] :

- $W$  doit être définie sur un domaine  $\Omega$ , inclus dans le domaine total  $\Omega$
- $W$  doit être positive tout au long du domaine.
- $W$  doit avoir un support compact de dimension paramétré par une longueur  $h$  dite longueur de lissage (cette condition est préférable pour ne pas avoir à recourir à des troncatures sur le domaine et ainsi augmenter l'erreur de l'approximation intégrale ).
- $\int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1$
- $W(r)$  doit être monotone et décroît avec la distance  $r = \|x - x'\|$ .
- $W(r, h) \rightarrow \delta(r)$  lorsque  $h \rightarrow 0$  où  $\delta$  est la distribution de Dirac.

Comme approximation de  $A(x)$  on a :

$$\langle A(x) \rangle = \int A(x') W(x - x', h) dx' \quad (2.2)$$

On peut prendre comme exemple de noyau en deux dimensions :

- Le noyau de type gaussienne :

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^2} \exp\left(-\frac{r^2}{h^2}\right) \quad (2.3)$$

- Le noyau de type spline cubique :

$$W(r, l) = \frac{15}{7\pi l^2} \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2}s^3 & 0 \leq s < 1 \\ \frac{1}{6}(2-s)^3 & 1 \leq s < 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad (2.4)$$

avec  $s = \frac{r}{l}$

Supposons un fluide ayant une masse volumique  $\rho(x)$ . On peut écrire la relation (2.2) comme suit :

$$A(x) = \int \frac{A(x')}{\rho(x')} W(x - x', h) \rho(x') dx' \quad (2.5)$$

Pour évaluer l'intégrale, on divise le domaine en  $N$  volumes élémentaires avec des masses respectives  $m_1, m_2, \dots, m_N$ . La contribution à l'intégrale (2.5) d'un élément de volume  $V_k$  de masse  $m_k$  et de centre de masse  $x_k$  est :

$$\frac{A(x_k)}{\rho(x_k)} W(x - x_k, h) m_k \quad (2.6)$$

Et donc une approximation de  $A(x)$  est donnée par

$$\langle A(x) \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \frac{A_k}{\rho_k} W(x - x_k, h) \quad (2.7)$$

avec

$$A_i = A(x_i)$$

Rappelons l'approximation par éléments finis :

$$A_k(x) = \sum_i N_i(x) A_i \quad (2.8)$$

où  $N_i(x)$  sont les fonctions d'interpolation à support compact.

Par conséquent, en SPH les fonctions  $N_i(x)$  sont par analogie aux éléments finis:

$$N_i(x) = V_i W(x - x_i) \text{ et } V_i = \frac{m_i}{\rho_i} \quad (2.9)$$

En utilisant (2.7), on peut approximer tout champ  $A$  par une fonction analytique  $\langle A(x) \rangle$ : si  $W$  est  $n$  fois différentiable alors  $\langle A(x) \rangle$  l'est aussi.

L'approximation de la densité est alors :

$$\langle \rho(x) \rangle = \sum_{k=1}^N m_k W(x - x_k, h) \quad (2.10)$$

qui est parfois interprétée comme étant le lissage de la masse d'une particule par le noyau et ce pour obtenir un champ de densité continue à partir d'un ensemble de points discrets.

## 2.3 Expression des gradients

Suite à l'introduction des fonctions noyaux dans l'approximation de A, la dérivation de A suivant les variables spatiales et temporelles, sera « transmise » sur les noyaux. Ainsi une dérivation de A implique la dérivation du noyau. L'expression du gradient sera donc donnée par :

$$\nabla A = \nabla \langle A(x) \rangle = \sum_{k=1}^N m_k \frac{A_k}{\rho_k} \nabla W(x - x_k, h) \quad (2.11)$$

**Remarque :** Dans l'article original de la méthode SPH, l'équation (2.11) était considérée comme une estimation de Monte Carlo<sup>1</sup> de (2.2), cependant cela donne une estimation très pessimiste de la précision. Une estimation plus raisonnable est basée sur<sup>1</sup> l'esprit des « nombres quasi-ordonnés » (quasi-ordered numbers : voir J.J. Monaghan Comp.Phys.Rep.3 (1985) 71), qui a une erreur  $\alpha (\text{Log}N)d/N$  où d est le nombre de dimension.

---

<sup>1</sup> Cette estimation est souvent utilisée dans les problèmes qui présentent une nature stochastique. Elle présente l'avantage de traiter les phénomènes complexes cependant sa précision est faible. Elle se résume en ce qui suit : en mono-dimensionnel, pour calculer l'intégrale suivant (f étant une fonction définie sur [0,1]) :  $I = \int_0^1 f(x)dx$ , on choisit N couples de nombres  $(x_i, y_i)$  dans [0,1] avec une distribution uniforme et on définit  $z_i$  telque :

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{si } y_i > f(x_i) \\ 1 & \text{si } y_i \leq f(x_i) \end{cases}$$

en posant  $n = \sum_i z_i$ , alors  $I \approx \frac{n}{N}$

Ce qui montre clairement que la précision est faible

## 2.4 Adaptation à la mécanique des fluides

Nous allons, tout d'abord, commencer par donner l'expression de la dérivée matérielle. Cette étape nous amènera ensuite aux expressions des équations de continuité et de quantité de mouvement adaptées par la méthode SPH. Nous allons utiliser dans ce qui suit, un noyau de la forme [4]:

$$W(x_i, t) = W\left(\frac{x_i - \bar{x}_i}{h(x_i, t)}\right) \quad (2.12)$$

où  $x_k$  est le vecteur des coordonnées d'une particule  $k$ .  $\bar{x}_i$  est la variable de la fonction  $W$  et  $h(\bar{x}_i, t)$  est une longueur de lissage qui varie dans le temps et dans l'espace (voir fig.7).

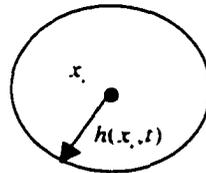


Figure 7 Zone de lissage d'une particule  $k$

Considérons la dérivée matérielle d'un scalaire quelconque  $\rho f$  :

$$D(\rho f) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho f v^\alpha) \quad (2.13)$$

où  $v^\alpha$  sont les composantes de la vitesse du fluide, ici on utilise la convention de la sommation sur les indices répétés.

La dérivée matérielle « lissée » (smoothed) est :

$$\begin{aligned}
[D(\rho f)]_s(x_i, t) &= \int_{\Omega} W(x_i, \bar{x}_i, t) \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\bar{x}_i) f(\bar{x}_i)] d\bar{x} \\
&+ \int_{\Omega} W(x_i, \bar{x}_i, t) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha} [\rho(\bar{x}_i) f(\bar{x}_i) v^\alpha(\bar{x}_i)] d\bar{x}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

L'indice « s » réfère au mot (smoothed). Ces intégrales peuvent être arrangées par des intégrations par partie [4]. Cet arrangement facilitera leur discrétisation. Ainsi :

$$[D(\rho f)]_s(x_k, t) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \tag{2.15}$$

où :

$$T_1 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W(x_k, \bar{x}_k, t) (\rho(\bar{x}_k) f(\bar{x}_k)) d\bar{x} \tag{2.16}$$

$$T_2 = - \int_{\Omega} \frac{\partial W(x_k, \bar{x}_k, t)}{\partial t} \rho(\bar{x}_k) f(\bar{x}_k) d\bar{x} \tag{2.17}$$

$$T_3 = \int_{\Gamma} W(x_k, \bar{x}_k, t) (\rho(\bar{x}_k) f(\bar{x}_k) v^\alpha(\bar{x}_k) n^\alpha) d\bar{\Gamma} \tag{2.18}$$

$$T_4 = - \int_{\Omega} \frac{\partial W(x_k, \bar{x}_k, t)}{\partial \bar{x}^\alpha} \rho(\bar{x}_k) f(\bar{x}_k) v^\alpha(\bar{x}_k) d\bar{x} \tag{2.19}$$

L'intégrale de surface  $T_3$  est sur toute la frontière du volume de travail. Le vecteur  $n$  représente la normale unitaire.

Quand le volume est infini, on suppose que le noyau  $W$  décroît suffisamment vite, ainsi  $T_3=0$ . Dans les espaces finis  $T_3$  est aussi zéro si  $W = 0$  sur le contour. Cependant les noyaux qui vérifient cette condition supplémentaire sont généralement difficiles à

implémenter. Dans ce qui suit, on va supposer que le volume est infini et que le terme  $T_3$  est nul.

En utilisant l'approximation SPH de l'équation (2.7), et en notant par  $x_i^k = x_i^k(t)$  et par  $f_i = f(x_i^k(t))$ , les termes des équations (2.16) - (2.19) deviennent :

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^N m_i W(x^k, \bar{x}_i^k, t) f_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[ \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial t} f_i + \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial x_i^\mu} \frac{\partial x_i^\mu}{\partial t} f_i + W(x^k, \bar{x}_i^k, t) \frac{\partial f_i}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$T_2 = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial t} f_i \quad (2.21)$$

$$T_4 = - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial \bar{x}_i^\alpha} f_i v_i^\alpha \quad (2.22)$$

Dans les expressions de  $T_1$  et  $T_2$  :

$$\frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial t} = \left[ \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial t} \right]_{\bar{x}_i^k = x_i^k} \quad (2.23)$$

Remarquant que le premier terme de  $T_1$  annule  $T_2$ , nous obtenons à la fin :

$$\begin{aligned} [D(\rho f)]_s(x^k, t) &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial f_i}{\partial t} W(x^k, \bar{x}_i^k, t) + \\ &\quad \sum_i m_i f_i \left( \frac{dx_i^\alpha}{dt} - v_i^\alpha \right) \frac{\partial W(x^k, \bar{x}_i^k, t)}{\partial x_i^\alpha} \end{aligned} \quad (2.24)$$

### 2.4.1 Conservation de la masse : équation de continuité

Pour retrouver l'équation de continuité, il nous suffit de remplacer  $f$  par 1 dans (2.24), ce qui nous mène à :

$$\sum_i m_i \left( \frac{dx_i^\alpha}{dt} - v_i^\alpha \right) \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} W(x^i, x_i^\alpha, t) = 0 \quad (2.25)$$

C'est l'équation de continuité donnée avec la forme d'interpolation SPH [9]. L'équation (2.25) est directement satisfaite, puisque la méthode SPH est une méthode Lagrangienne, i.e. :  $\frac{dx_i}{dt} = v_i$

En prenant en considération l'équation de continuité (2.25), l'équation (2.24) devient :

$$[D(\rho f)]_i(x^k, t) = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial f_i}{\partial t} W(x^k, x_i, t) \quad (2.26)$$

### 2.4.2 Équations d'Euler en SPH

Nous allons présenter ici le cas d'un fluide non visqueux en absence de forces de masses [4]. L'équation d'Euler est donnée par :

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(P+q)}{\partial x} \quad (2.27)$$

en SPH elle devient :

$$\left[ D(\rho v^\alpha) \right]_i(x^k, t) = - \int W(x^k, \bar{x}^k, t) \frac{\partial (P(\bar{x}^k) + q(\bar{x}^k))}{\partial \bar{x}^\alpha} d\bar{x} \quad (2.28)$$

où  $P$  est la pression du fluide et  $q$  est une pression artificielle introduite pour la capture des chocs.

Pour retrouver l'équation de quantité de mouvement discrétisée, il suffit de remplacer «  $f$  » par  $v^\alpha$  dans (2.26). La forme lissée (smoothed) de l'équation d'Euler devient donc :

$$\sum_{i=1}^N m_i W(x^k, \bar{x}_i^k, t) \frac{dv_i^\alpha}{dt} = - \sum_{i=1}^N m_i W(x^k, \bar{x}_i^k, t) \left[ \frac{1}{\rho(\bar{x}^k)} \frac{\partial (P(\bar{x}^k) + q(\bar{x}^k))}{\partial \bar{x}^\alpha} \right]_{\bar{x}^k = \bar{x}_i^k} \quad (2.29)$$

En plus, et en se rappelant que l'équation (2.29) provient d'une équation intégrale qui a la forme suivante :  $\int w \frac{dv}{dt} dx = \int w g dx$  (qui signifie que  $g = \frac{dv}{dt}$  dans le cas où la fonction  $w$  est arbitraire) et si le noyau est arbitraire, on trouve :

$$\frac{dv_i^\alpha}{dt} = - \left[ \frac{1}{\rho(\bar{x}^k)} \frac{\partial (P(\bar{x}^k) + q(\bar{x}^k))}{\partial \bar{x}^\alpha} \right]_{\bar{x}^k = \bar{x}_i^k} \quad (2.30)$$

Comme on ne peut pas estimer directement la partie droite de (2.29), il est nécessaire d'approximer les gradients de pression pour une particule  $i$  par le même procédé de lissage. De telles approximations sont  $O(h^2)$  sinon mieux [4] ( $h$  est la longueur de lissage).

En utilisant l'identité :

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla \left( \frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \quad (2.31)$$

de (2.7) nous avons :

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = \nabla\left\langle \frac{P}{\rho} \right\rangle = \sum_{i=1}^N m_i \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla W(x - x_i, h) \quad (2.32)$$

et

$$\nabla(\rho) = \nabla\langle \rho \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \nabla W(x - x_i, h) \quad (2.33)$$

l'équation de quantité de mouvement s'écrit alors pour une particule  $i$  :

$$\frac{dv_i}{dt} = - \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{P_i + q_i}{\rho_i^2} + \frac{P_k + q_k}{\rho_k^2} \right) \frac{\partial W(x_i, x_k, t)}{\partial x_k} \quad (2.34)$$

On note :  $W_{ik} = W(x_i - x_k, h)$

Ainsi on retrouve la forme de Monaghan [17] avec l'hypothèse que W est quelconque.

**REMARQUE** : dans le cas où  $W$  est une Gaussienne [5], la force par unité de masse sur une particule  $i$  due à une particule  $k$ .  $F_{ik}$  est :

$$F_{ik} = m_k \left( \frac{P_k + q_k}{\rho_k^2} + \frac{P_i + q_i}{\rho_i^2} \right) \frac{2(r_i - r_k)}{h^2} W_{ik} \quad (2.35)$$

C'est une force centrale et ainsi les moments sont automatiquement conservés. Le taux de changement de la quantité de mouvement dans le domaine est nul (il y a conservation) si :  $\frac{\partial W_*}{\partial x_i} = -\frac{\partial W_*}{\partial x_j}$  ( $W$  doit être pair)

Cette conclusion est déduite de ce qui suit : Le taux de changement de la quantité de mouvement sur le domaine et en absence de forces extérieures est donné par :

$$\sum_i m_i \frac{dv_i}{dt} = 0 \quad (2.36)$$

ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \left( \frac{P_i + q_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j + q_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W(x_i^k, x_j^k, t)}{\partial x_j} \quad (2.37)$$

Comme les indices  $i$  et  $j$  sont des indices muets alors l'équation précédente peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \left( \frac{P_i + q_i}{\rho_i^2} \right) \left( \frac{\partial W(x_i^k, x_j^k, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial W(x_i^k, x_j^k, t)}{\partial x_i} \right) \quad (2.38)$$

d'où la conclusion citée ci-haut ( la parité de  $W$ ). La remarque citée ci-dessus n'est pas applicable pour le cas des noyaux de type Spline. En effet, la forme exponentielle de la gaussienne est responsable de l'obtention de l'équation (2.35). Pour le cas du Spline, la forme polynomiale ne satisfait pas la condition de parité.

### 2.4.3 Équation de l'énergie

En absence de source de chaleur, de perte et de dissipation on a [9],[4] :

$$\frac{du}{dt} = - \frac{P}{\rho} \nabla \cdot v \quad (2.39)$$

où  $u$  est l'énergie thermique interne par unité de masse et  $v$  est la vitesse.

L'équation (2.39) peut être écrite sous plusieurs formes adaptées au calcul numérique.

On peut, pour cette fin commencer par écrire :

$$\frac{P}{\rho} \nabla \cdot v = \frac{P}{\rho^2} [\nabla \cdot (\rho v) - v \nabla \cdot (\rho)] \quad (2.40)$$

et ensuite utiliser (2.7) pour estimer  $\rho v$  et  $\rho$ , et par suite (2.39). Pour une particule  $i$ , on aura :

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_{k=1}^N m_k (v_i - v_k) \nabla_i W_{ik} \quad (2.41)$$

On peut aussi utiliser l'identité :

$$\frac{P}{\rho} \nabla \cdot v = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} v \right) - v \nabla \cdot \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] \quad (2.42)$$

Ainsi l'équation d'énergie devient :

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{k=1}^N m_k \frac{P_k}{\rho_k^2} (v_i - v_k) \nabla_i W_{ik} \quad (2.43)$$

L'expérience a montré que (2.43) donne de meilleurs résultats concernant la conservation d'énergie.

## 2.5 Formulation Éléments Finis-SPH

En utilisant l'analogie avec les éléments finis et en se basant sur la formulation variationnelle de l'équation aux dérivées partielles, l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\int_{\Omega} \psi_h \frac{dv}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P+q)}{\partial x} d\Omega \quad (2.44)$$

avec  $\psi_h$  une fonction de pondération quelconque qui s'écrit sous la forme  $\psi_h(x) = \sum_i \psi_i N_i(x)$ . En éléments finis,  $N_i$  sont des polynômes à support compact dont la connectivité est fixe.

On peut faire l'analogie  $\langle \psi \rangle = \psi_h$  où :  $N_i(x) = W_i(x - x_i) V_i$  où  $V_i = \frac{m_i}{\rho_i}$

En utilisant l'approximation SPH : ( $\psi_h = \sum_i \psi_i N_i$  où  $N_i = W_i V_i$ ), le problème variationnel (2.44) devient :

$$\int_{\Omega} \psi_h \frac{dv_h}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \psi_h \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P+q)_h}{\partial x} d\Omega \quad (2.45)$$

Comme  $\psi_h$  est quelconque, on a pour toute particule  $i$  :

$$\sum_j \int_{\Omega} W_i V_i W_j V_j \frac{dv_j}{dt} = - \int_{\Omega} W_i V_i \frac{1}{\rho_h} \frac{\partial(P+q)_h}{\partial x} d\Omega \quad (2.46)$$

Ce qui peut se mettre sous une forme matricielle :

$$M\{\dot{v}\} = F \quad (2.47)$$

où

$$M_{ij} = \int_{\Omega} w_i w_j v_i v_j \quad \text{et} \quad F_i = \int_{\Omega} w_i v_i \frac{1}{\rho_h} \frac{\partial(P+q)_h}{\partial x} d\Omega \quad (2.48)$$

Puisque les voisins d'une particule donnée ne sont pas toujours les mêmes et puisque la connectivité n'est pas constante, la sparsité de la matrice  $M$  est variable. Pour surmonter ce problème,  $M$  est remplacée par  $M^*$  qui est donnée par :

$$M_{ij}^* = M_i^* \delta_{ij} \quad (2.49)$$

avec

$$M_i^* = \sum_j \int_{\Omega} w_i w_j v_i v_j d\Omega = \int_{\Omega} w_i v_i \underbrace{\sum_j w_j v_j}_{=v_i} d\Omega = \int_{\Omega} w_i v_i d\Omega = v_i \int_{\Omega} w_i d\Omega = v_i \quad (2.50)$$

d'où la forme finale :

$$M^* \{\dot{v}\} = F \quad (2.49)$$

Cette procédure est communément appelée Lumping en éléments finis. Elle consiste à regrouper tous les éléments d'une même ligne en les sommant et les plaçant sur la diagonale. La matrice  $M^*$  est par conséquent diagonale.

On obtient la forme discrète de (2.30) pour chaque particule  $i$

$$\boxed{M_i^* \frac{dv_i}{dt} = - \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} w_i v_i \left( \frac{\partial(P+q)}{\partial x} \right)_h d\Omega} \quad (2.52)$$

À noter, aussi, qu'il faut exprimer  $\frac{\partial(P+q)_h}{\partial x}$  en utilisant la formulation SPH. Ce terme sera donné par :

$$\left\langle \frac{\partial(P+q)}{\partial x} \right\rangle \equiv \frac{\partial\langle(P+q)\rangle}{\partial x} = \sum_{k=1}^N V_k (P_k + q_k) \frac{\partial W(x_1, \dots, x_k, t)}{\partial x_k} \quad (2.53)$$

On voit que cette formulation EF-SPH est différente de celle de Monaghan. Pour calculer le terme intégral, on peut utiliser la somme de Riemann. Ainsi, l'équation (2.52) devient :

$$M_i \frac{dv_i}{dt} = -v_i \sum_j \left[ \frac{1}{\rho} w_i(x_j) V_j \left\langle \frac{\partial(P+q)}{\partial x} (x_j) \right\rangle \right] \quad (2.54)$$

En comparant cette équation avec celle de Monaghan, on trouve que cette nouvelle écriture donne une forme plus lissée comparativement à la version originale. En effet, elle donne une forme moyennée englobant la forme combinée EF-SPH. L'écriture de Monaghan se base sur un calcul ponctuel concentré sur le point dont on veut récupérer les paramètres physiques. De ce fait, cette nouvelle forme de formulation permet d'appliquer toutes les formes de stabilisation et de correction connues avec la méthode des éléments finis.

L'équation (2.56) nous paraît une formulation nouvelle qui n'existe pas dans la littérature. Son implémentation et sa validation sont présentées dans le chapitre 3.

Un autre exemple pour faire l'analogie avec la méthode des éléments finis est l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi + f = 0 \quad (2.55)$$

la formulation variationnelle est donnée par : pour tout  $\psi$

$$\int_{\Omega} \nabla \psi \nabla \phi \, d\Omega + \int_{\Omega} \psi f \, d\Omega = 0 \quad (2.56)$$

La formulation variationnelle se discrétise avec :

$$\psi = \psi_h = \sum N_i \psi_i \quad (2.57)$$

$$\phi = \phi_h = \sum N_i \phi_i \quad (2.58)$$

et donne :

$$K\{\phi\} = \{F\} \quad (2.59)$$

avec

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla N_i \nabla N_j \, d\Omega \quad F_i = \int_{\Omega} N_i f \, d\Omega \quad (2.60)$$

utilisant le fait que  $N_i(x) = W_i(x - x_i) V_i$ ,  $K_{ij}$  devient :

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla W_i \nabla W_j V_i V_j \, d\Omega \quad (2.61)$$

et l'intégrale peut être évaluée par :

$$K_{ij} \equiv \sum_c V_c \nabla W_i(x_c) \nabla W_j(x_c) V_i V_j \quad (2.62)$$

et

$$F_i = \sum_c W_i(x_c) V_c f_c \quad (2.63)$$

## 2.6 Discrétisation du temps

Avec la structure de la méthode SPH, on peut avoir plusieurs formes de discrétisation du temps.

- Les premières applications [15] et [16] de la SPH ont procédé par le schéma du « saut de mouton » (leap frog).
- Avec l'abordage de problèmes physiques plus compliqués, d'autres schémas ont été utilisés. La méthode « prédictor-correcteur » [10] donne une bonne conservation de l'énergie tout en conservant les moments linéaire et angulaire.
- Benz (1987) [3] a trouvé que le schéma à plus bas ordre de Range-Kutta de Fehlberg, est très efficace.

Tous les schémas illustrés ci-dessus sont des schémas explicites. Aucun schéma implicite n'est apparu à la littérature (d'après Monaghan). Le schéma le plus proche peut être celui Patnaik et al. [20]. Ce schéma peut être éventuellement étendu à la SPH.

## 2.7 Choix du noyau et estimation de l'erreur

Une évaluation de l'erreur du passage de l'équation (2.1) à l'équation (2.7), en supposant toutes les particules sont à masses égales, est donnée par  $\pm\sigma$  [5] :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(\rho_N(r) - \rho_s(r))^2] \\ &= \frac{M^2}{N^2} \sum_i W^2(r - r_i) - \frac{1}{N} \left[ \frac{M}{N} \sum_i W(r - r_i) \right]^2\end{aligned}\quad (2.64)$$

où  $E$  désigne l'espérance,  $\rho_s$  est la densité  $\rho_N$  est son estimation.

Intuitivement, il paraît raisonnable qu'on s'attend que  $W(r)$  peut être « construit » de façon qu'il tende vers  $\delta(r)$  quand  $N$  tend vers l'infini. Dans ce cas  $\rho_s(r)$  tend vers  $\rho(r)$  quand  $N$  devient grand.

Pour rendre ce résultat plus précis, il est convenable d'écrire  $W(r)$  sous la forme :

$$W(r) = \frac{1}{h^d} K\left(\frac{r}{h}\right) \quad (2.65)$$

où  $h$  est un paramètre de dimension d'une longueur et  $d$  est le nombre de dimension.

Des exemples typiques de noyaux sont (en trois dimensions) :

$$W(r, h) = \left[ \frac{1}{\pi h^2} \right]^{\frac{3}{2}} \exp\left(-r^2/h^2\right) \quad [\text{i}]$$

$$W(r, h) = \frac{3H\left(1 - \frac{|r|}{h}\right)}{4\pi h^3} \quad [\text{ii}]$$

$$W(r, h) = \frac{S\left(\frac{|r|}{h}\right)}{h^3} \quad [\text{iii}]$$

sù  $H$  est « the heaviside step function ».  $S$  est la « spherical delta spline » .

Un exemple de noyau donné par Bonet et Kulasegaram [5], et qui présente l'avantage d'avoir un support compact est le suivant :

$$W(r, h) = \frac{\alpha}{h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\zeta^{-2} + \frac{3}{4}\zeta^{-3} & \text{si } \zeta \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - \zeta)^3 & \text{si } 1 < \zeta \leq 2 \text{ avec } \zeta = \frac{r}{h} \\ 0 & \text{si } \zeta > 2 \end{cases} \quad (2.66)$$

d est la dimension du problème et  $\alpha$  est un facteur scalaire introduit pour satisfaire la condition de consistance.

En plus d'imposer que  $\rho_N(r)$  tend vers  $\rho(r)$ , nous avons besoin que  $\sigma$  soit le plus petit possible. Pour satisfaire cette condition, on choisit h qui minimise la fonction :

$$\begin{aligned} L(r) &= \{E[\rho_N(r)] - \rho(r)\}^2 + E[(\rho_N(r) - \rho_s(r))^2] \\ &= E[(\rho_N(r) - \rho(r))^2] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Utilisant les équations (2.7) et (2.67), on trouve que le minimum de L(r) [9] est à :

$$h^7 = \frac{27}{N} \frac{M\rho}{(\Delta\rho)^2} \frac{\int K^2(u)du}{\left(\int K^2(u)u^2 du\right)^2} \quad (2.68)$$

Comme  $\rho$  est inconnue (2.68) ne peut pas être utilisée directement. Mais elle peut nous indiquer que h est de l'ordre de  $\frac{1}{N^{1/7}}$  et que  $L_{\min}$  est de l'ordre de  $\frac{1}{N^{4/7}}$

La précision de l'interpolation intégrale (2.2) dépend de la forme du noyau. Le développement en série de Taylor sur r du terme intégré montre que l'erreur dominante est, dans le cas où W est pair,  $h^2(\Delta x)$ .

Si le noyau est choisi de façon :

$$\int u^2 W(u, h) du = 0 \quad (2.69)$$

alors, l'erreur est  $O(h^4)$ . Mais ces noyaux ne satisfont pas la condition  $W \geq 0$  et doivent être utilisés avec précaution (voir Lattanzio et al. [11]). En remplaçant le terme intégral avec la somme (2.7), on introduit plus d'erreur. Si comme suggéré, les points sont quasi-ordonnés, ces erreurs sont  $O((\text{Log}_e N)^d/N)$  ou équivalent à  $O((h \text{Log}_e h)^d)$  où  $d$  est le nombre de dimension et on suppose ici que  $N$  de l'ordre de  $1/h^d$  [9].

Dans le cas 1D, l'erreur intégrale domine et nous attendons une erreur  $O(h \text{Log}_e h)$ . Tandis qu'en 3D l'erreur d'interpolation domine  $O(h^2)$  : Faible précision en 1D et bonne précision en 3D [9].

## 2.8 Correction de la SPH : CSPH

Un résultat immédiat de l'intégration effectuée par l'équation (2.7), est le fait que la consistance ne soit pas satisfaite parfaitement. Ces conditions sous la forme discrétisée sont énumérées ultérieurement par les équations (2.72a,b). Pour remédier à cette anomalie, une correction est introduite sur le noyau. Il s'agit de multiplier ce dernier par un terme dépendant des paramètres de  $x$  et  $x_i$  (position de la particule et de ses voisins). Pour expliquer l'origine de ces conditions, il suffit de considérer le cas d'une fonction  $f(x')$  à une variable. Un développement en série de Taylor de  $f$  dans le voisinage d'un point  $x$  est donnée par :

$$f(x') = f(x) + f'(x)(x'-x) + \frac{1}{2} f''(x)(x'-x)^2 + \dots \quad (2.70)$$

En substituant cette expression dans l'approximation intégrale (2.2) on obtient :

$$\langle f(x) \rangle = f(x) \int_D W(x-x') dx' - f'(x) \int_D (x-x') W(x-x') dx' + \dots \quad (2.71)$$

d'où l'obligation de satisfaire les conditions suivantes :

$$\int_D W(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \int_D x^j W(x) dx = 0, \quad 0 < j \leq k \quad (2.72a,b)$$

k est appelé degré de consistance

La forme de correction intégrale proposée par Bonet [5] est la suivante :

$$\hat{W}_b(x) = W_b(x) \alpha(x) [1 + \beta(x)(x - x_b)] \quad (2.73)$$

Les paramètres  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  sont évalués de façon à incorporer les conditions de consistance qui sont données après discrétisation de (2.72a,b) par :

$$\sum_{b=1}^N V_b \hat{W}_b(x) = 1 \quad (2.74)$$

$$\sum_{b=1}^N V_b (x - x_b) \hat{W}_b(x) = 0 \quad (2.75)$$

$V_b$  est le volume associé à la particule b

L'utilisation de cette correction assure le fait que les fonctions linéaires sont parfaitement interpolées et que leurs gradients sont calculés d'une façon exacte.

Ces deux dernières équations permettent d'évaluer explicitement les paramètres de correction  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ . En remplaçant l'équation (2.73) dans (2.75), on trouve :

$$\beta(x) = \left[ \sum_{b=1}^N V_b (x - x_b) \otimes (x - x_b) W_b(x) \right]^{-1} \sum_{b=1}^N V_b (x_b - x) W_b(x) \quad (2.76)$$

une fois  $\beta(x)$  calculée, l'expression de  $\alpha(x)$  est obtenue par substitution de l'équation (2.73) dans (2.74):

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sum_{b=1}^N V_b W_b(x) [1 + \beta(x)(x - x_b)]} \quad (2.77)$$

Pour simplifier et alléger cette correction, une correction constante peut être adoptée au lieu d'une correction linéaire. En d'autres termes, on peut prendre le terme  $\beta(x)=0$  dans l'équation (2.73) et l'équation (2.77) ce qui mène à un noyau corrigé donné par l'expression suivante :

$$\hat{W}_b(x) = \frac{W_b(x)}{\sum_{b=1}^N V_b W_b(x)} \quad (2.78)$$

La correction donnée par Bonet est indispensable surtout pour le cas où la subdivision du domaine ne serait pas uniforme. L'importance de ce terme se manifeste proche des frontières. En effet, le terme de correction a dans ce cas, un rôle de compensation. Lorsque le voisinage de lissage est tronqué, la correction du noyau (2.78) compense la partie manquante. Ainsi, il n'y aura pas nécessité de traiter la frontière par les procédés de symétrisation.

## **2.9 Les défis de la méthode SPH: Recherche des voisins et conditions aux limites.**

La méthode SPH, bien qu'elle présente énormément d'avantages, demeure désavantagée par certains problèmes. En plus du temps de calcul excessivement élevé (comparativement aux méthodes Euleriennes en général), dû en particulier à la recherche de voisins, la SPH peut poser des difficultés dans la modélisation des conditions aux frontières.

Dans ce qui suit, on va détailler encore plus ces deux points propres à la méthode SPH.

### **2.9.1 Recherche des voisins**

La recherche des voisins est une tâche indispensable dans la formulation SPH. Il est nécessaire de trouver toutes les particules qui sont dans l'entourage de la particule à laquelle on s'intéresse. Pour le cas d'un noyau de type Spline ces particules sont dans un rayon de  $2h$ . Par ailleurs dans le cas d'une gaussienne, toutes les particules du domaine sont, théoriquement du moins, nécessaire pour récupérer l'approximation intégrale de l'équation (2.7). Toutefois, et en dépit de l'erreur que ça pourrait générer, une troncature à un rayon d'au moins  $4h$ , doit être effectuée.

La tâche de recherche de voisin est la tâche la plus lourde et qui engendre un très grand temps de calcul en plus des moyens informatiques (espace mémoire et temps CPU) considérables. Aussi faut-il, chercher à optimiser et par conséquent alléger cette opération.

Plusieurs algorithmes de recherche de voisin sont envisageables. Dépendamment de la taille et de la complexité du problème traité, le choix de l'algorithme le moins coûteux et le plus efficace, s'impose. Dans la suite, on va énumérer et expliquer quelques algorithmes utilisés tout au long de nos applications.

### **2.9.1.1 Algorithme Séquentiel**

C'est l'algorithme le plus naturel et le plus simple. Cependant, il est le plus coûteux et le plus lourd. Il consiste à balayer, pour chaque particule, la totalité des  $N$  particules qui constituent le domaine. Cette opération compte un ordre de  $N^2$  pour chaque pas de temps.

### **2.9.1.2 Algorithme séquentiel ordonné**

Généralement appliqué dans le cas des simulations en une dimension, cet algorithme est basé sur l'exploitation de la numérotation des particules du domaine. En effet, pour chercher les voisins d'une particule  $k$ , il suffit de balayer les particules qui sont situées en amont et en aval. La détection de ces particules voisines se fait tout simplement par une incrémentation ou une décrémentation du numéro des particules qui sont normalement stockés dans la même table des coordonnées. ( Voir figure 8).

Il est très important de noter que l'utilisation de cet algorithme est conditionnée par le fait que les particules doivent garder l'ordre initial. En d'autres termes, il faut s'assurer que durant toute la simulation, aucune inter-pénétration, aucun saut, aucun changement dans l'ordre des particules, ne peut avoir lieu.

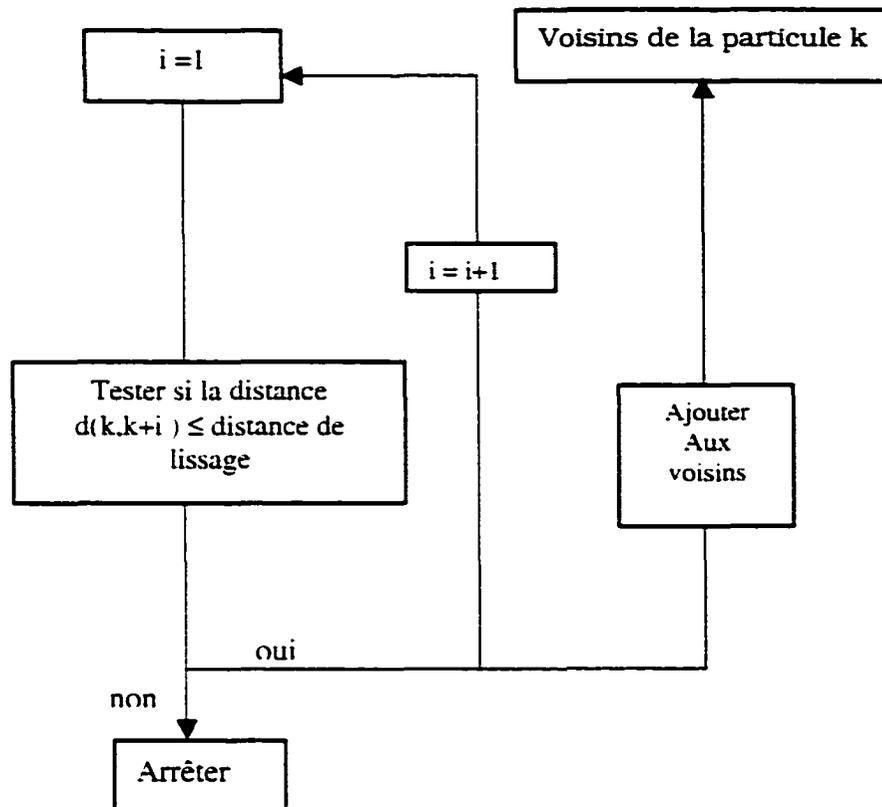


Figure 8 Algorithme séquentiel ordonné

### 2.9.1.3 Algorithme de recherche par colonnes

Il s'agit d'une généralisation de l'algorithme précédent. En effet, cet algorithme est applicable pour les cas de problème où la géométrie est simple en deux dimensions ou plus.

Dans un tel cas, le domaine peut être subdivisé de façon que les particules soient arrangées en colonnes parallèles. (Voir le cas du problème du bris de barrage en 2 D)

Par conséquent, la recherche se fait en détectant la colonne concernée, la plus éloignée (voir fig.9).

Par la suite, une deuxième recherche est nécessaire dans les directions restantes. Ainsi, les voisins sont contournés dans un carré de coté égal à  $4h$  ou  $8h$  dépendamment du choix du noyau.

Cette méthode exige également, qu'on s'assure tout au long de la simulation qu'il n'y ni inter-pénétration si un changement dans l'ordre des particules.

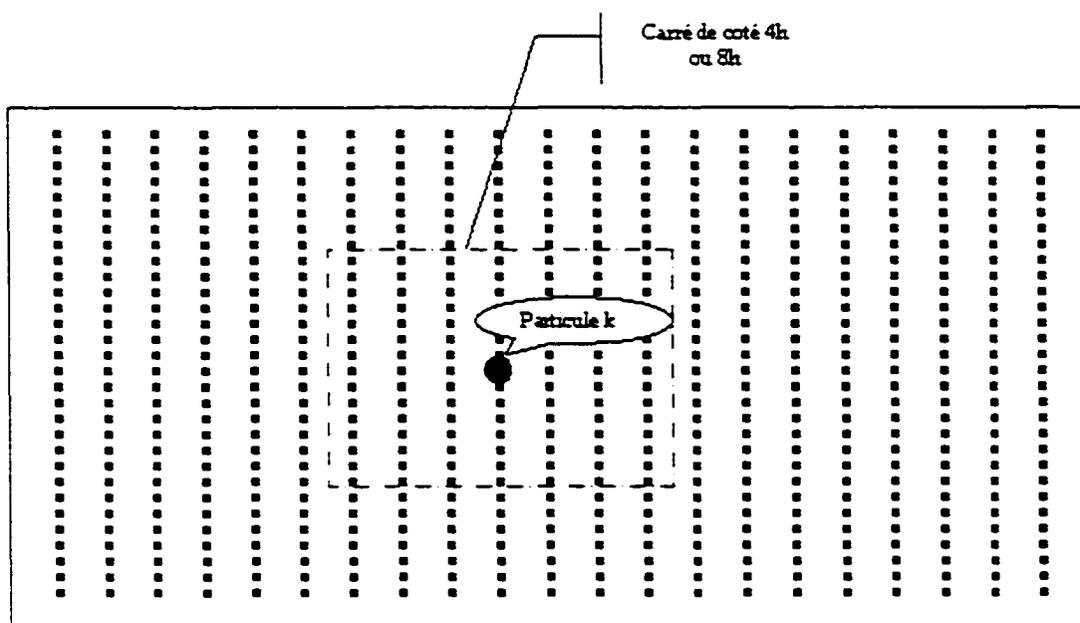


Figure 9 Méthode de recherche par colonnes

#### 2.9.1.4 Algorithme octree

C'est l'algorithme le plus complet et le mieux adapté aux géométries complexes.

L'idée de base de cet algorithme, est l'adoption d'une grille de fond pour le domaine. Comme en éléments finis, cette grille qui aura une forme rectangulaire ou parallélépipédique le cas échéant, servira pour le paramétrage et la détection spatiale des particules appartenant au domaine de calcul.

En plus, et c'est là le rôle le plus important, cette grille permettra d'optimiser et de faciliter la recherche de voisins pour chaque particule.

La grille doit, par conséquent, couvrir tout le domaine. Elle le subdivise en plusieurs sous-domaines quadratiques (figure 10). Chaque sous-domaine recensera les particules

qui lui appartiennent dans une liste. Une mise à jour de ces listes est, de ce fait, indispensable à chaque pas de temps.

La procédure de cet algorithme peut être résumée dans ce qui suit :

La grille (ou maillage ) est utilisée comme un « bookkeeping device » pour déterminer quelles particules sont en interaction avec n'importe autres particules [12].

Ainsi, chaque particule est assignée à une cellule de la grille et donc stockée dans une liste annexée à la cellule. De ce fait, le temps de tri est proportionnel au nombre de particules et non au même nombre au carré.

Dans le cas où on utiliserait la fonction Spline, qui est d'ailleurs le cas le plus prépondérant, on a besoin de faire une recherche limitée à une longueur de 2h. Ainsi, la dimension la plus naturelle des cellules de la grille est 2h. Par conséquent, seules les huit cellules qui entourent la cellule qui englobe la particule, ajoutée cette dernière, sont concernées par la recherche des voisins. Un balayage de toutes les particules qui sont sur les listes de ces dites cellules est systématiquement effectué pour recenser les voisins qui interviennent dans la formulation SPH.

Cette méthode de recherche est très efficace et très optimisée, comparativement aux méthodes évoquées précédemment. À titre d'exemple, dans le cas de la simulation du problème de bris de barrage circulaire (voir paragraphe 3.3.3), avec 40 000 particules et une subdivision relativement structurée du domaine, cet algorithme est 40 fois plus rapide que celui de la recherche par colonnes.

La figure suivante illustre l'algorithme qu'on vient de décrire :

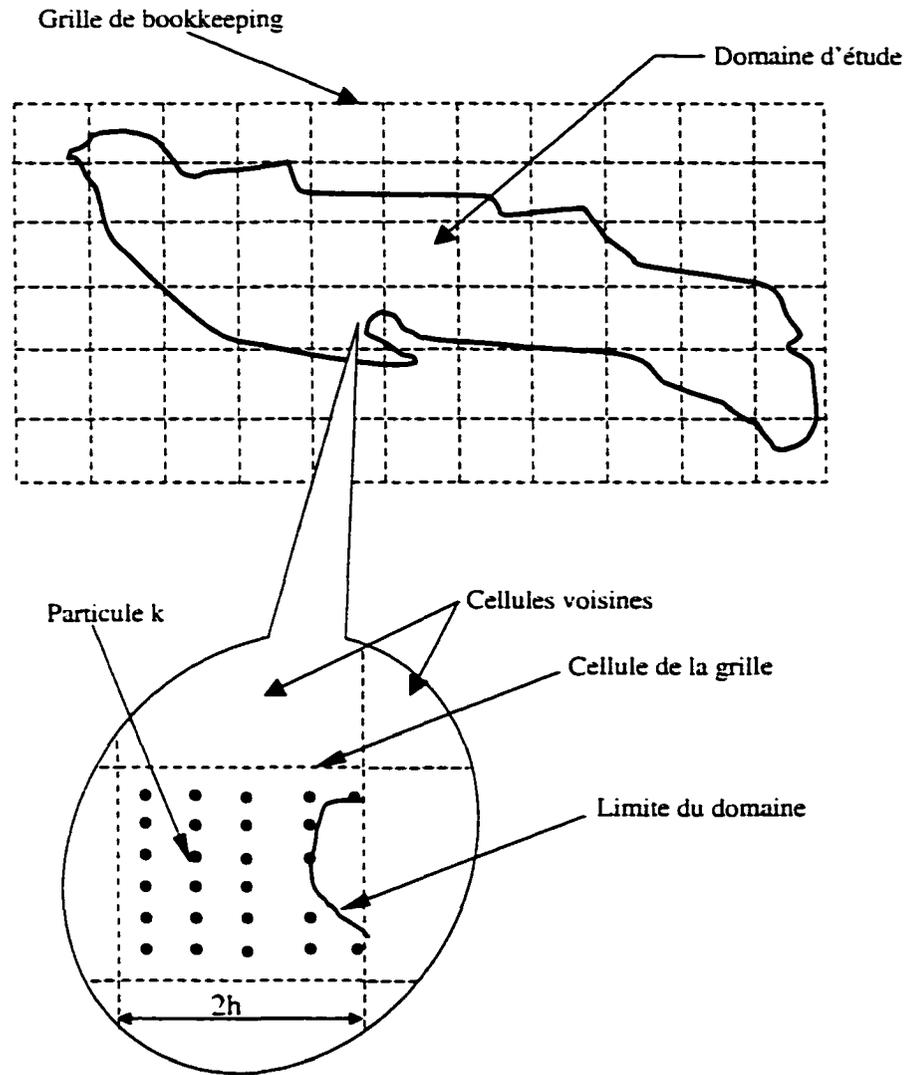


Figure 10 Algorithme octree

## **2.9.2 Conditions aux limites**

Les conditions aux limites est une tâche très importante pour le SPH. Bien réussir une simulation revient en grande partie à bien modéliser les conditions aux limites.

Dans ce qui suit, on va détailler les diverses possibilités et les différentes alternatives qu'on peut faire adapter à méthode SPH et ce concernant la modélisation des conditions aux limites spatiales, de vitesses ou d'inter-réaction.

### **2.9.2.1 Conditions aux limites spatiales**

En se basant sur la nature même de la SPH, l'obtention de la valeur d'une grandeur physique en un point donné, passe nécessairement par un lissage sur le voisinage du point. Par conséquent, un problème émerge pour les points situés aux limites du domaine ainsi que les emplacements qui ne présentent pas assez d'espace pour lisser.

Pour modéliser les limites du domaine deux alternatives se présentent. Dépendamment de l'objectif ou du rôle assigné à la frontière spatiale, ces deux alternatives sont facilement adaptables. La première méthode est conventionnellement appelée « la méthode des particules fantômes » [5]; la seconde est « la méthode de symétrie ou particules miroir ».

#### **2.9.2.1.a Méthode des particules fantômes**

Il s'agit de contourner le domaine par des séries de particules qui sont appelées particules fantômes. Cette appellation provient du fait que ces particules ne servent à rien d'autre que pour récupérer un voisinage de lissage suffisant. Le nombre et la répartition spatiale de ces séries de particules sont déterminés de façon à respecter les

longueurs de lissage du noyau utilisé ( $2h$  pour le cas d'un noyau de type Spline et  $4h$  pour le cas de la gaussienne).

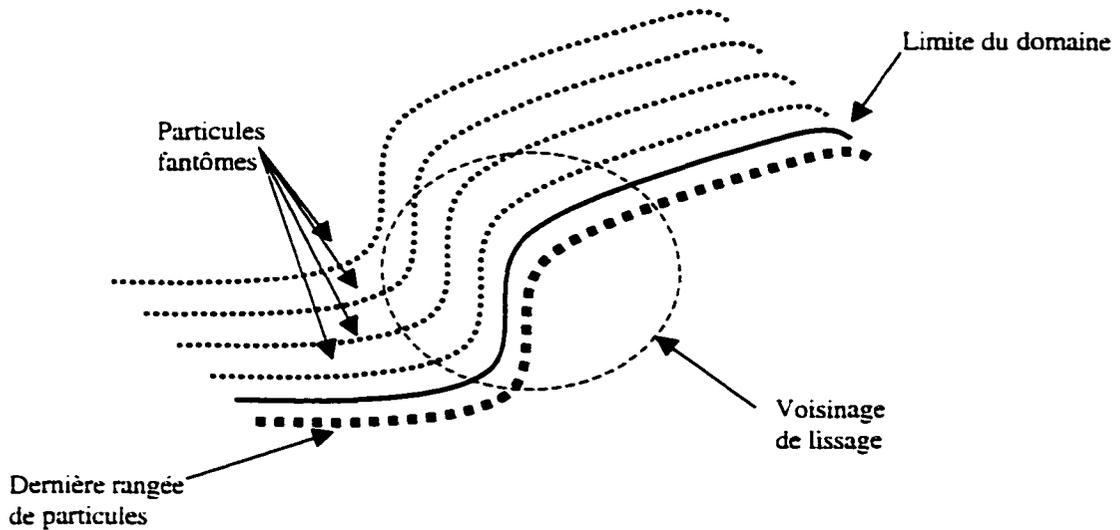


Figure 11 Particules fantômes

À titre d'exemple, pour obtenir la condition  $u \cdot n = 0$  ( $n$  étant la normale à la frontière,  $u$  le vecteur vitesse), il suffit d'attribuer à la première rangée de particules fantômes un vecteur vitesse qui vérifie la condition suivante :

$$\frac{1}{2}(\bar{u}_k + \bar{u}_i) \cdot n = 0 \quad (2.79)$$

$k$  étant la dernière particule réelle et  $i$  étant la première particule fantôme.  $n$  est la normale à la frontière.

La demi-somme vectorielle est nécessaire pour récupérer la vitesse au milieu des deux points cités ci-haut, qui correspond exactement à la frontière du domaine. Étant donnée

que le vecteur normal  $n$  est connu ainsi que la vitesse  $u_k$  à la particule  $k$ , il suffit de résoudre le système linéaire engendré par l'équation (2.79). Dans le cas simple où la frontière est droite, le problème se simplifie et se limite à attribuer l'opposé de la valeur de la composante suivant  $n$  de la vitesse de la particule  $k$  à la particule fantôme  $i$ .

La méthode des particules fantômes présente l'avantage d'être simple et efficace pour les géométries conventionnelles. Toutefois, elle pourrait être délicate à implémenter pour des géométries compliquées.

En plus, l'ajout de particules fantômes, représente un fardeau de mémoire en plus, surtout dans le cas où leur nombre ne serait pas négligeable.

### **2.9.2.1.b Méthode des particules miroir**

La deuxième méthode qui se présente pour surmonter les problèmes de conditions aux frontières, est la méthode de symétrisation ou de particules miroir.

Pour retrouver le domaine nécessaire au lissage (smoothing), il suffit d'appliquer l'effet miroir de la partie existante pour compenser la partie symétrique manquante. Donc, il est impératif de savoir et de discerner aussi bien, les particules qui sont incluses dans le rayon de lissage, que les limites de la partie manquante à compenser.

La figure 12 donne une idée simplifiée du procédé de symétrisation à travers une frontière droite.

On va, dans ce qui suit, illustrer la façon de modéliser la condition  $u \cdot n = 0$  dans le cas simple d'une frontière droite.

Lors du recensement des voisins d'une particule  $k$  concernée par le problème de conditions aux frontières, la routine de symétrisation capte les voisins qu'il faut « dédoubler » pour compenser le cercle de lissage. Afin de modéliser la condition  $u \cdot n = 0$ , il suffit de jouer sur le signe de la composante de vitesse suivant la normale  $n$ . En effet, en inversant le signe de ces composantes, la sommation totale (de la formulation SPH) va causer naturellement l'annulation de la composante de vitesse suivant  $n$ . Dans le cas

où on voudrait modéliser la condition de non-glissement, il suffit d'inverser la composante parallèle à la frontière.

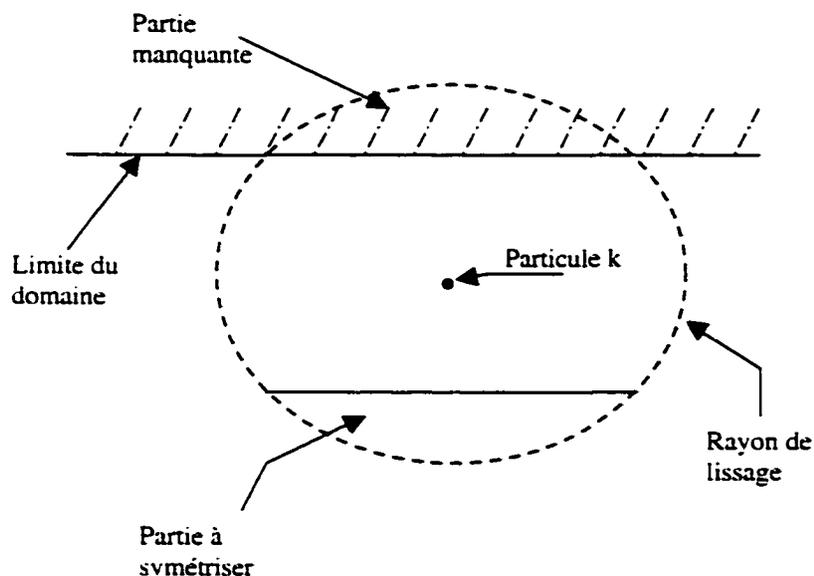


Figure 12 Méthode des particules miroir

La méthode des particules miroirs présente l'avantage de limiter le nombre de particules en évitant l'ajout d'autres particules comme c'était le cas pour la méthode des particules fantômes. Cependant, elle implique un ajout d'autres fonctions au code pour vérifier à chaque fois si la particule manque de zone de lissage et dans le cas affirmatif, sélectionner toutes les particules à symétriser. Par conséquent, cette méthode engendre un surplus de temps de calcul.

Pour modéliser un mur aux frontières, c'est-à-dire une frontière imperméable et répulsive, il suffit d'attribuer aux particules un comportement moléculaire. En appliquant sur les particules qui s'approchent de la limite du domaine une force proportionnelle au rapport entre la distance les séparant de la frontière et la même distance à l'instant initial, la particule ne va pas dépasser cette frontière.

L'expression de la force appliquée est celle de Lennard-Jones [18] et elle est donnée ci-après :

$$\begin{cases} f(r) = D \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right) \frac{\vec{r}}{r^2} & \text{si } r \leq r_0 \\ 0 & \text{si } r > r_0 \end{cases} \quad (2.80)$$

Avec  $r$  et  $r_0$  sont les positions actuelle et initiale respectivement de la particule par rapport à la frontière. Les constantes  $p_1$  et  $p_2$  sont prises respectivement égales à 12 et 6. La constante  $D$  qui a la dimension d'une vitesse au carré est choisie en considérant la configuration physique du problème. Pour les problèmes de bris de barrage, Monaghan propose l'expression suivante :

$$D = 5gH$$

où  $H$  est la profondeur de l'eau et  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Des essais avec  $D = 10gH$  et  $D = gH$  ont donné des résultats similaires.

### 2.9.2.2 Conditions aux limites cinématiques

Comme pour tout problème physique et pour n'importe quel moyen mathématique, la simulation des écoulements à surface libre a besoin de spécifier le type de conditions aux limites cinématiques sur les frontières. Les deux types conventionnels de ces conditions sont celles de Dirichlet et celles de Neumann.

Pour modéliser ces deux types de conditions aux limites deux méthodes se présentent suivant le type de frontière et/ou suivant la modélisation de la frontière.

Dans le cas où la modélisation de la frontière est faite par les particules fantômes, il suffit d'attribuer à ces dernières la vitesse de la dernière particule 'réelle' (appartenant au domaine effectif de calcul). Ainsi, on garde une symétrie de vitesse et on crée une condition de glissement parfaite (voir section 3.3.2). Dans le cas où la vitesse affectée

aux particules fantômes est nulle, la configuration coïncide avec une condition de frottement parfait, ou la condition de vitesse nulle au bord.

Au cas où la méthode des particules miroirs serait appliquée, il suffit d'affecter à la particule symétrisée la valeur de vitesse qui correspond à son emplacement virtuel. En d'autres termes, il faut imaginer que les particules existent effectivement dans leurs coordonnées symétriques et tenir compte de ces emplacements pour calculer les gradients ainsi que la viscosité artificielle. (voir section 2.8.2.2)

## CHAPITRE 3

### IMPLÉMENTATION ET RÉSULTATS

#### 3.1 Introduction

L'objectif de ce travail étant d'appliquer la méthode SPH aux écoulements à surface libre, on va commencer dans ce qui suit de traiter le cas à une dimension. Cette première étape servira entre-autres à l'évaluation de chacun des paramètres intervenant dans la formulation SPH. En se basant sur l'analogie avec la solution analytique ainsi que les résultats de Shen et al. [26], on va évaluer numériquement les courbes obtenues en faisant varier les divers paramètres et en introduisant des facteurs de corrections et de stabilisation.

Cette étape nous permettra de cerner les valeurs de chaque facteur numérique impliqué dans la formulation mathématique et numérique de la méthode SPH. Une fois l'évaluation de la méthode terminée, la version finale obtenue nous servira de base pour les implémentations suivantes en deux dimensions.

#### 3.2 Problème du bris de barrage en 1D

Dans le cas d'un écoulement à surface libre à 1D, Wang et Shen [26] ont utilisé les équations de Saint Venant dans un canal ouvert rectangulaire. Ces équations sont :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_0 - S_f) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où :

$h$  : profondeur de l'eau dans le canal.

$u$  : vitesse de l'écoulement

$S_0$  et  $S_f$  : pentes et friction du lit

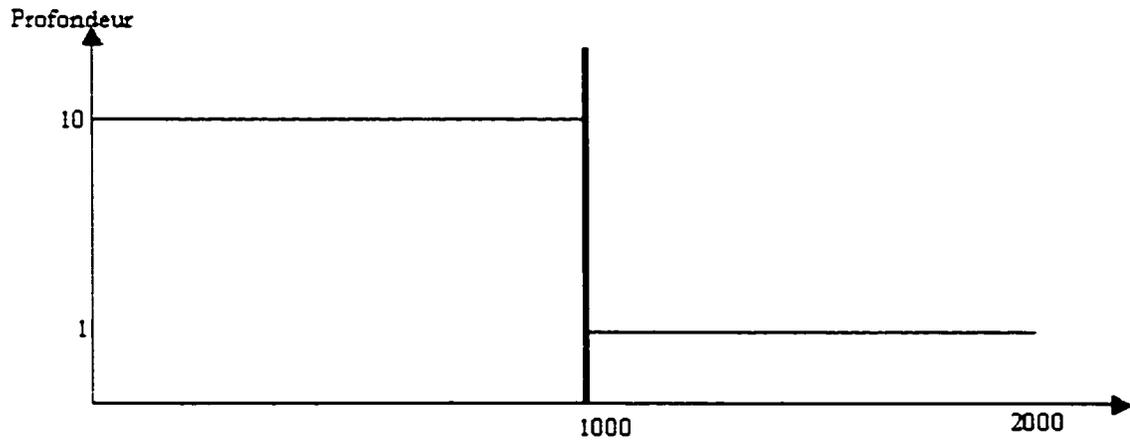


Figure 13 Conditions initiales de la simulation

Supposant que, pour une fonction  $f$ , les valeurs de celles-ci sont connues en un ensemble de points quelconque au voisinage de  $x$ ,  $f$  peut être approximée par :

$$\langle f(x) \rangle = \sum_{j=1}^N f_j \frac{V_j}{h_j} W(x - x_j, l) \quad (3.2)$$

où  $l$  est la longueur de lissage et  $V_j$  le volume par unité de largeur pour une parcelle et  $h_j$  est la profondeur de l'eau. Le rapport  $\frac{V_j}{h_j}$  représente la longueur  $dx$  de la particule  $j$ .

Par suite, la profondeur de l'eau d'une parcelle  $k$  peut être estimée par :

$$h_k = \sum_j V_j W(x_k - x_j, \tilde{l}_{kj}) = \sum_j V_j W_{kj} \quad (3.3)$$

où  $\tilde{l}_{kj} = (l_k + l_j) / 2$  est la longueur de lissage moyennée.

Une autre alternative pour estimer  $h_k$  est de moyenner le noyau :

$$h(x_k) = \sum_j \frac{1}{2} V_j [W(x_k - x_j, l_k) + W(x_k - x_j, l_j)] = \sum_j V_j \tilde{W}_{kj} \quad (3.4)$$

L'interpolation (3.4) sera utilisée dans ce qui suit.

Chaque particule a sa propre longueur de lissage, qui varie dans le temps et dans l'espace suivant la densité de la parcelle.

Selon Shen [26], dans le but de donner le maximum d'efficacité et de précision à l'interpolation,  $l$  doit être variable de la forme :

$$l = l_0 \frac{h}{h_0} \quad (3.5)$$

où  $l_0$  et  $h_0$  sont respectivement la longueur de lissage et la profondeur initiales. La longueur de lissage initiale est la longueur de la parcelle. La largeur doit être soigneusement fixée de façon à inclure toutes les parcelles voisines intervenant dans les sommes (3.2) (3.3) et (3.4). Une constante de largeur de  $4l_0$  a été adoptée par les auteurs pour une fin de simplification.

Cette suggestion a été testée dans notre cas. Cependant elle a généré des oscillations accentuées surtout au niveau de la discontinuité. Ces tests confirment bien les résultats de Bicknell [4] qui déconseille de faire varier la longueur de lissage (voir paragraphe 3.3.2).

En se basant sur (3.2) et (3.4), l'équation de quantité de mouvement peut être écrite :

$$\frac{du_k}{dt} = -g \sum_j V_j \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_k} + g(S_0 - S_f)_k \quad (3.6)$$

où  $d/dt$  est la dérivée particulière.

En introduisant le terme de viscosité artificielle proposé par Monaghan [17], l'équation (3.6) devient :

$$\frac{du_k}{dt} = - \sum_j V_j (g + \Pi_{kj}) \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_k} + g(S_0 - S_f)_k \quad (3.7)$$

avec :

$$\Pi_{kj} = \begin{cases} -\alpha \frac{\tilde{l}_{kj} \bar{c}_{kj} (u_k - u_j)(x_k - x_j)}{\tilde{h}_{kj} [(x_k - x_j)^2 + \epsilon l_k^2]} & \text{si } (u_k - u_j)(x_k - x_j) < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $\tilde{l}_{kj} = \frac{1}{2}(l_k + l_j)$ ,  $\bar{c}_{kj} = \frac{1}{2}(c_k + c_j)$  la moyenne de la vitesse de l'onde à la surface et

$\tilde{h}_{kj} = \frac{1}{2}(h_k + h_j)$ .  $\alpha$  et  $\epsilon$  sont deux constantes empiriques. Monaghan [17] propose une

valeur de 1 pour  $\alpha$  et de 0.01 pour  $\epsilon$ .

En appliquant l'algorithme d'Euler à l'équation (3.6), qui est une discrétisation explicite en temps, on obtient le schéma de calcul suivant :

$$u_k^{n+1} = u_k^n - \Delta t_k \left[ \sum_j (V_j + \Pi_{kj}) \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_k} - g(S_0 - S_f)_k \right]^n \quad (3.9)$$

Où

$$S_{\Delta t} = \frac{\bar{u}_k |\bar{u}_k| n_M^2}{\bar{h}_k^{5/3}} \quad \text{avec } \bar{u}_k = \frac{1}{2}(u_k^{n-1} + u_k^n) \text{ et } \bar{h}_k = \frac{1}{2}(h_k^{n-1} + h_k^n) \quad (3.10)$$

$n_M$  étant le coefficient de frottement de Manning.

Le pas de temps est limité par la condition de Courant qui est déterminée par la longueur de lissage «  $l$  » et la vitesse d'écoulement «  $c$  ». En d'autres termes :  $\Delta t_k < l_k / (\bar{u}_k + c_k)$ .

L'équation (3.9), avec le terme non linéaire peut être résolue par une procédure implicite prédicteur-correcteur. Pour les cas où les coefficients de friction du lit et du fond sont négligeables, ce qui est notre cas, l'équation (3.9) peut être résolue explicitement.

La nouvelle position de la parcelle est calculée par :

$$x_k^{n+1} = x_k^n + \bar{u}_k \Delta t \quad (3.11)$$

avec  $\bar{u}_k = (u_k^n + u_k^{n+1}) / 2$

### 3.2.1 Implémentation et code développé

Les calculs et les simulations ont été accomplis sur un ordinateur dont le microprocesseur a une fréquence de 550 MHz. Avec les nouvelles générations d'ordinateurs, qui se caractérisent par des capacités plus développées, on peut améliorer les capacités de l'ordinateur utilisé et ainsi réduire les temps de calcul.

Le code a été développé en langage Fortran 90 avec le Logiciel Compaq Visual Fortran sous environnement Windows. Une interface graphique a été conçue pour la saisie des données et des paramètres de chaque simulation. L'affichage se fait en temps réel grâce à l'utilisation de la bibliothèque de visualisation annexée au logiciel et qui porte le nom de Array Visualizer. Ci-après une figure qui donne l'allure de cette interface.

Les paramètres que l'interface permet de choisir sont les suivants :

- Le noyau : la fonction Spline ou la gaussienne
- Le nombre maximal de particules
- Le numéro de la première particule : négatif dans le cas de particules fantômes ou égal à 1 dans le cas où il y aurait utilisation de la méthode des particules miroirs
- Les coefficients de la viscosité artificielle  $\alpha$  et  $\beta$
- Le pas de temps
- Le temps total de la simulation
- Le choix d'utiliser l'équation de continuité
- Le choix d'un mode linéarisé ou avec des discontinuités standard
- Les profondeurs amont et aval de l'eau (par rapport au barrage)
- Le temps d'édition des fichiers de sortie
- Le choix d'affichage en temps réel (Profondeur ou vitesse)

Le code développé est structuré en routines traitant chacune une tâche spécifique. Dépendamment de l'application, le choix d'une combinaison de routines est effectué. Ces routines peuvent être répertoriées dans trois grandes catégories : routines d'implémentation, routines de calcul et routine d'affichage.

Les routines d'implémentation comprennent les séquences de définition de la géométrie et les conditions initiales du problème (profondeur, longueur de lissage, emplacement du barrage...), ainsi que le nombre et la disposition des particules. En plus, une routine impose le type de conditions aux frontières à implémenter

Les routines de calcul englobent la routine de recherche de voisin, une routine de calcul des vitesses basée sur les équations de St-Venant, une routine de mise à jour des paramètres qui varient avec le temps, une routine de calcul des gradients en plus d'une autre routine pour le calcul de la viscosité artificielle.

Enfin, deux routines d'affichage sont annexées au code. La première offre la possibilité de stocker les résultats dans des fichiers « .txt ». La fréquence de sortie de ces fichiers

est introduite par l'utilisateur à travers l'interface graphique. La deuxième routine s'occupe de l'affichage en temps réel. À chaque pas de temps, et selon le choix de l'utilisateur, la profondeur ou la vitesse de toutes les particules est affichée à travers le logiciel « *Compaq Array Visualizer* ».

S.P.H. \_ □ ×



**- Paramètres**

Noyau :  1 : gaussienne  
2 : cubic spline function

Nb max :

Nb min :

Alpha :

beta :

pas de temps :

temps de simulation :

Utilisation de l'équation de continuité :  1 : oui  
0 : non

Mode :  0 : discontinuité linéarisée  
1 : discontinuité standard

Prof. amont :

Prof. aval :

Pas d'affichage :

Affichage en temps réel :  1 : profondeur  
2 : vitesse



Pas de temps :

**Hydro Québec**



Figure 14 Interface pour l'entrée des paramètres de simulation

### 3.2.2 Influence de la longueur de lissage

Bicknell [4] a prouvé qu'un choix de longueur de lissage variable, cause des problèmes quant à la conservation de l'énergie et celle des moments. Pour prouver cette suggestion, on va implémenter le calcul dans notre cas de simulation avec les deux cas possibles, c'est-à-dire avec longueur de lissage variable et constante et comparer les résultats correspondants.

#### 3.2.2.1 Cas où la longueur de lissage est variable

Shen et al. [26] ont suggéré une variation de la longueur de lissage qui tient compte de la variation de la profondeur d'eau dans le cas d'un problème de bris de barrage en 1D, selon :

$$l(k,t) = \frac{h(k,t)}{h_0(k)} l_0(k) \quad (3.12)$$

où :

- $l(k,t)$  : longueur de lissage de la particule  $k$  à l'instant  $t$
- $h(k,t)$  : profondeur de l'eau correspondant à la particule  $k$
- $h_0(k)$  : profondeur initiale de la particule  $k$
- $l_0(k)$  : longueur de lissage initiale de la particule  $k$

L'implémentation de cette variation de longueur de lissage avec un coefficient de shock-capturing  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ , et pour un cas standard (discontinuité non linéarisée) donne la courbe suivante après 30 secondes :

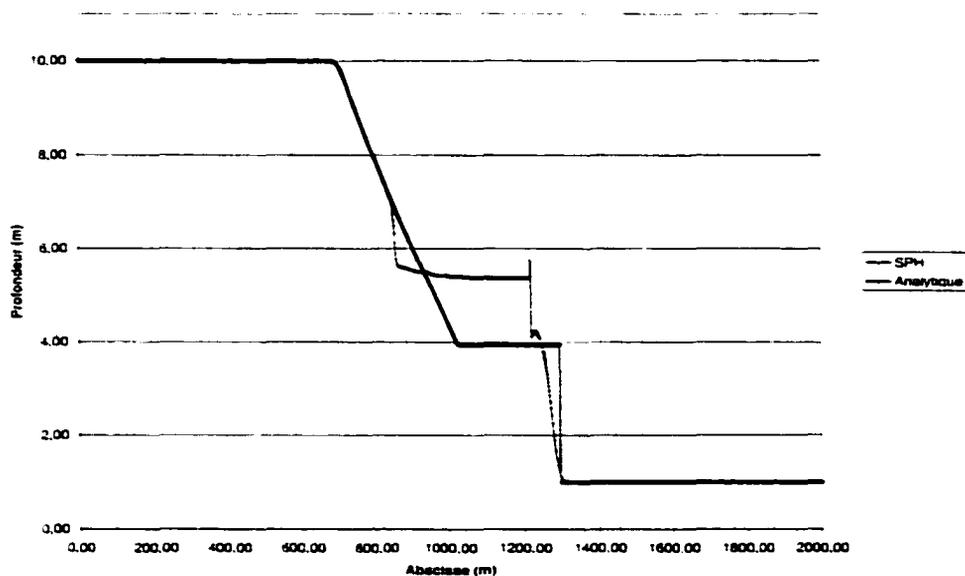


Figure 15 Effet d'une longueur de lissage variable

### 3.2.2.2 Cas où la longueur de lissage est fixe

Dans ce cas, on a fixé la longueur de lissage à des valeurs qui correspondent aux doubles des longueurs spatiales initiales des parcelles; c'est-à-dire  $l = 2(x_{k+1} - x_k)$ . La courbe ci-après donne le résultat obtenu après 30 secondes :

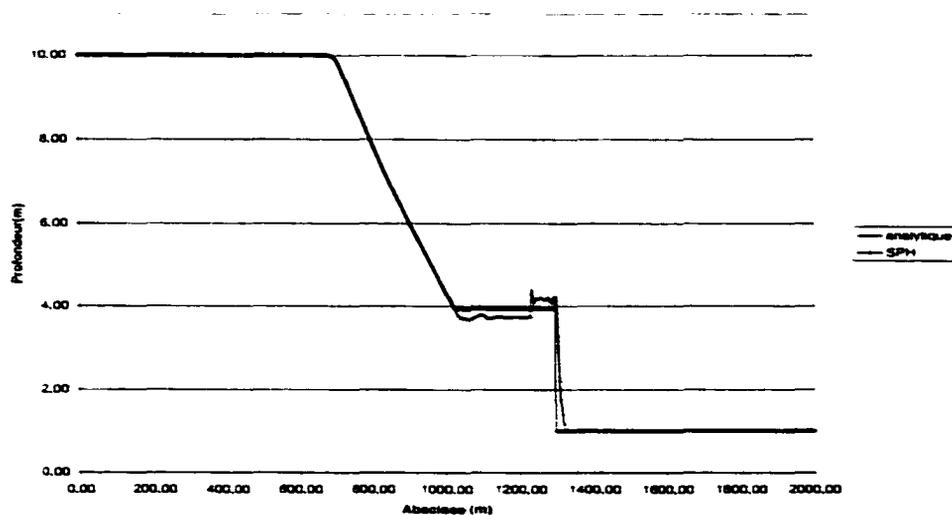


Figure 16 Effet d'une longueur de lissage constante

On peut clairement conclure que le cas où la longueur de lissage est variable fausse les calculs. En effet, le niveau du « plateau » correspondant à l'onde de front dans la première courbe est situé près de la valeur de 5.5 tandis que dans la deuxième courbe, il se situe au niveau de 4. En se fiant à la solution analytique, on conclut aisément que la variation de la longueur de lissage est une initiative à éviter.

### 3.2.3 Influence du shock-capturing

Pour capter le phénomène de choc, on introduit dans l'expression de calcul de vitesse un terme qui correspond à une viscosité artificielle. En une dimension, ce terme est donné par :

$$\Pi_{kj} = \begin{cases} -\alpha \bar{c} \mu_{kj} + \beta \mu_{kj}^2 & \text{si } (u_k - u_j)(x_k - x_j) < 0 \\ 0 & \text{si } (u_k - u_j)(x_k - x_j) \geq 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\text{où } \mu_{kj} = \frac{(u_k - u_j)(x_k - x_j)l_{kj}}{h_{kj}((x_k - x_j)^2 + \epsilon l_{kj})}$$

$\bar{c} = (c_k + c_j)/2$  et  $c_k = \sqrt{gh_k}$  qui est la célérité de l'onde à la surface.

$$l_{kj} = (l_k + l_j)/2$$

$\alpha, \beta$  et  $\epsilon$  sont des constantes. Comme valeurs typiques de ces constantes, Monaghan [17] suggère, pour le même type de problème,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0$ .  $\epsilon$  est prise dans notre cas égale à 0.01.

Puisque le deuxième terme est un terme de second ordre son influence est négligeable. De ce fait, on va consacrer le prochain paragraphe à l'étude de l'influence du coefficient  $\alpha$  tout en fixant la valeur de  $\beta$  à 0.

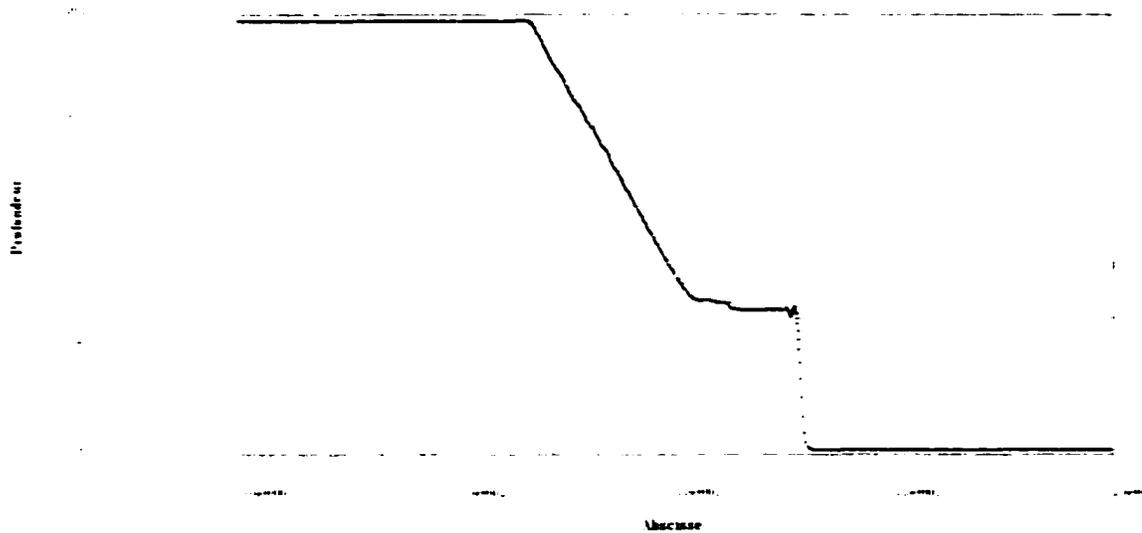


Figure 17 Influence du chock capturing-  $\alpha=1$

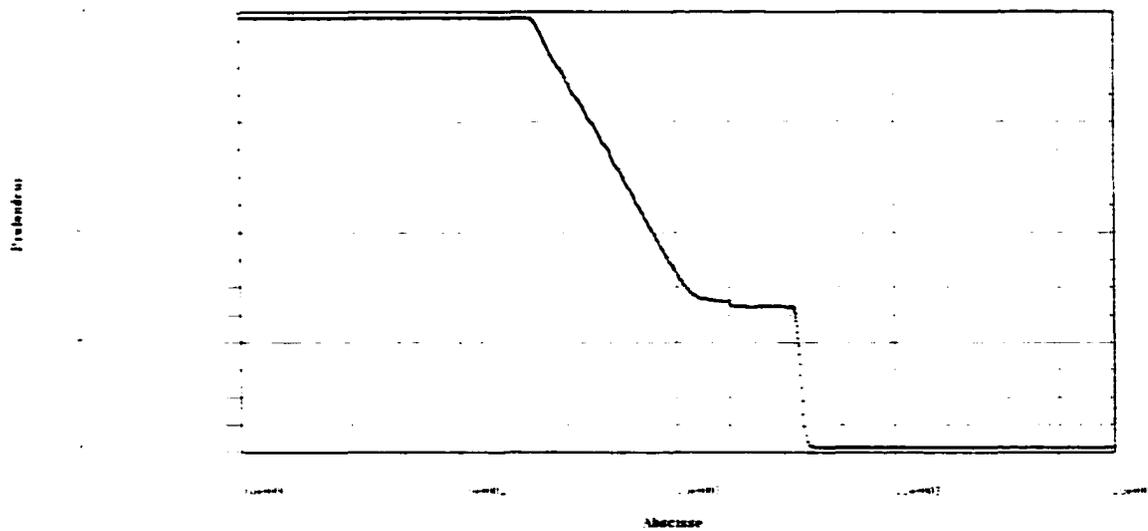


Figure 18 Influence du chock capturing -  $\alpha=2$

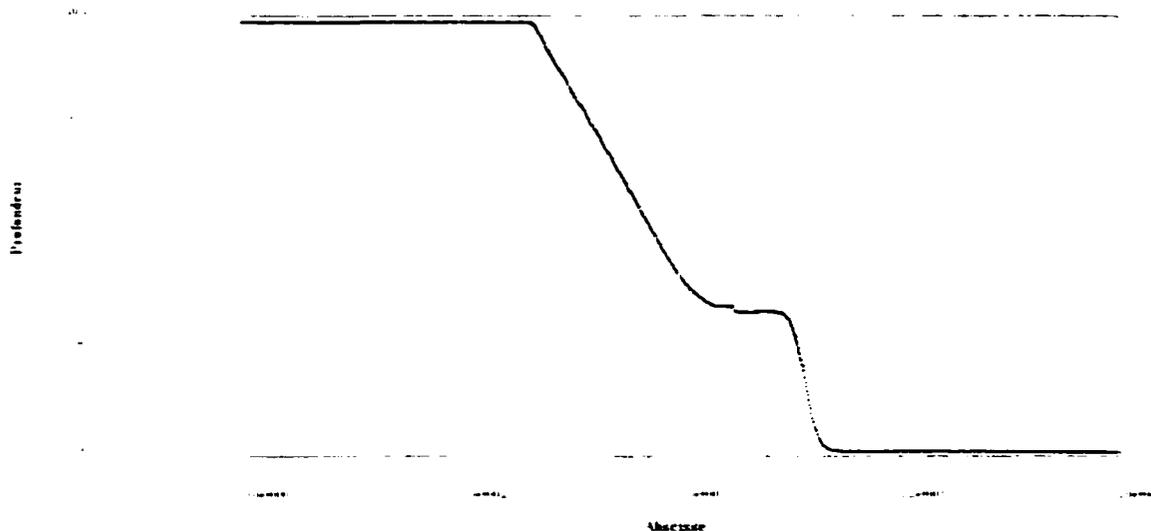


Figure 19 Influence du chock capturing  $-\alpha=4$

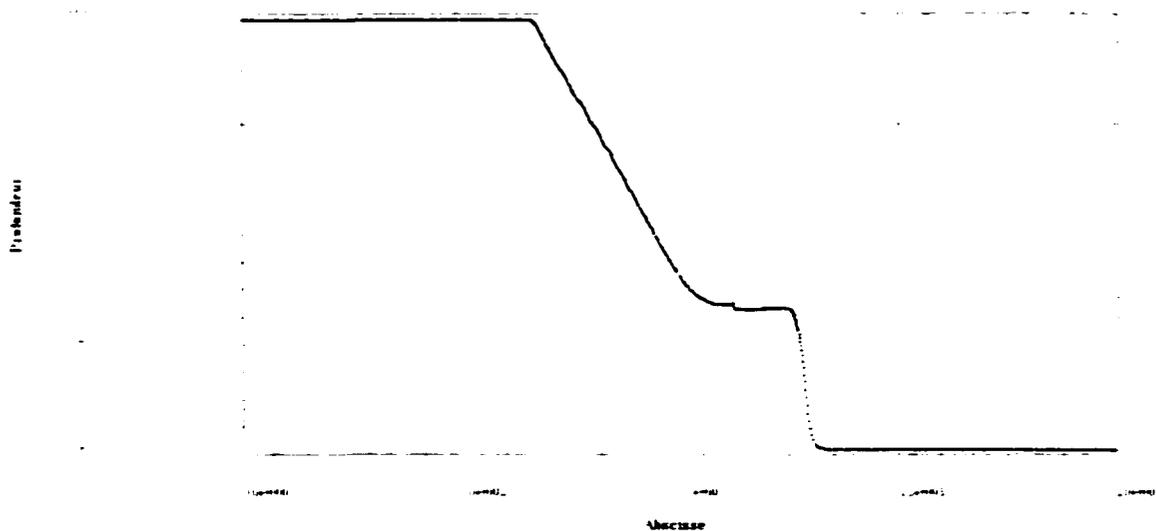


Figure 20 Influence du chock capturing  $-\alpha=8$

D'autres essais ont été accomplis pour des valeurs de  $\alpha$  variant de 0.1 à 20. La valeur optimale de  $\alpha$ , donc qui fait éliminer toute oscillation, est la valeur de 2. Ce qui nous amène, par la suite à adopter cette valeur pour tous nos calculs ultérieurs.

### 3.2.4 Effet de l'adaptativité

Dans cette section, on va étudier l'effet d'un facteur très important, c'est le facteur d'adaptativité. L'adaptativité s'explique par la localisation ou l'augmentation de parcelles dans les régions où d'éventuelles oscillations pourraient être présentes dans le domaine.

Dans notre cas, il est clair que la discontinuité représentée par la présence du barrage, constitue une source de problèmes numériques. On va de ce fait, analyser, en premier lieu l'effet d'un lissage de la discontinuité initiale: c'est-à-dire une augmentation du nombre de parcelles au voisinage du barrage. En second lieu, on va voir l'effet de la linéarisation de la discontinuité. Enfin, on va étudier l'effet d'une combinaison de ces deux interventions.

#### 3.2.4.1 Effet du lissage

L'implémentation du problème standard avec un nombre de parcelles de 1 000 en amont et de 250 en aval du barrage nous a donné la courbe suivante ( $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$  et  $t = 30s$ ) :

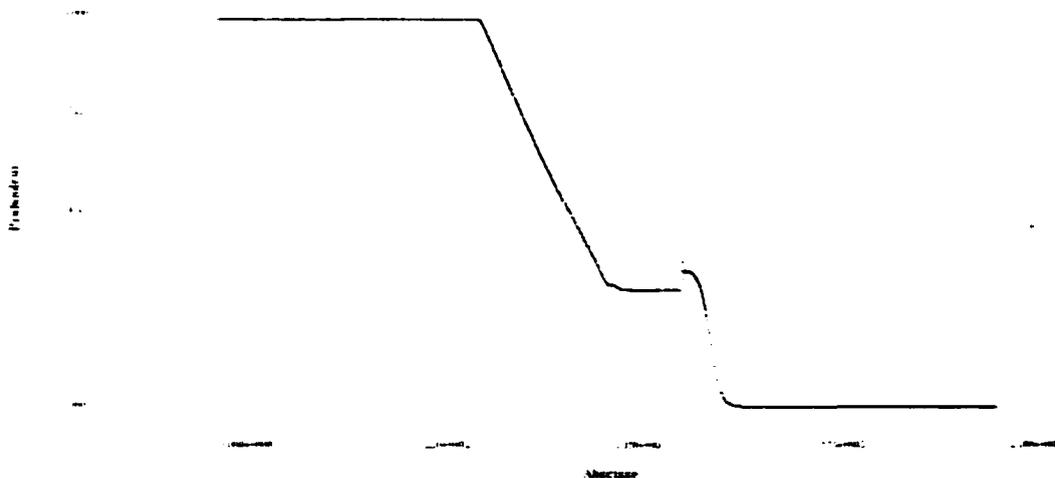


Figure 21 Effet du lissage – discontinuité standard

Une deuxième implémentation, consiste à remplacer les particules entre  $x = 965$  m et  $x = 1\,000$  m (qui coïncide avec la position du barrage) par 50 parcelles dont la longueur ( $\Delta x$ ) croît linéairement de 1 m à 4 m. Le résultat est donné par la figure suivante :

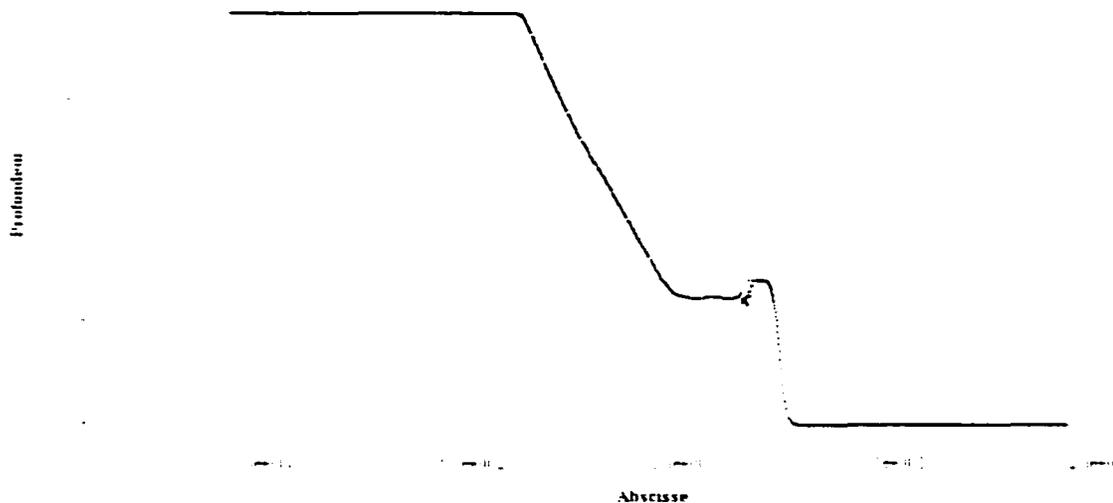


Figure 22 Effet du lissage des coordonnées spatiales

La figure 22 montre bien que le lissage des coordonnées spatiales, tout seul, n'a rien ajouté, aussi bien sur la précision que sur l'atténuation de la discontinuité.

### 3.2.4.2 Effet de la linéarisation

La linéarisation consiste en un remplacement de la discontinuité incarnée par le barrage, par une « descente linéaire ». En d'autres termes, on va garder le même nombre de parcelles en amont et en aval, et on va linéariser tous les autres paramètres intervenant dans la paramétrisation du problème.

De ce fait, la hauteur d'eau (profondeur), la constante de volume  $V_j$ , la longueur de lissage  $l$  et les coordonnées spatiales vont être linéarisées.

Les particules situées entre  $x = 980$  m et  $x = 1020$  m ont été affectées par cette linéarisation.

Le résultat de cette implémentation est donné dans le graphe suivant :

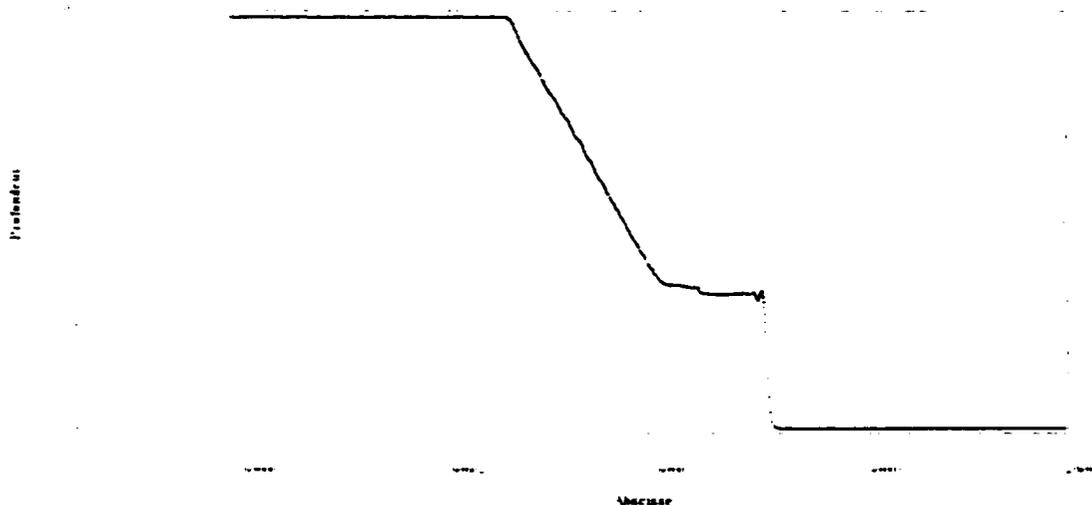


Figure 23 Effet de la linéarisation

Le figure 23 révèle que la linéarisation a donné une bonne atténuation des oscillations localisées à l'emplacement de la discontinuité. Ce résultat est encourageant bien qu'une petite oscillation subsiste au niveau de la partie aval de l'ancien emplacement du barrage.

Pour essayer de faire disparaître la dite oscillation, seule la variation du paramètre  $\alpha$  (coefficient de la viscosité artificielle) peut agir. En effet, l'augmentation du coefficient  $\alpha$  a effectivement éliminé toute l'oscillation en aval. Ce qui était prévisible. Toutefois, l'emplacement du barrage constitue encore le seul lieu d'oscillation dans la courbe.

Les résultats suivants sont obtenus par la valeur optimale du facteur  $\alpha$  et donne une illustration de la profondeur et de la vitesse à des temps correspondants à 30s, 60s et 90s.



Figure 24 Cas optimal - Profondeur temps = 30s

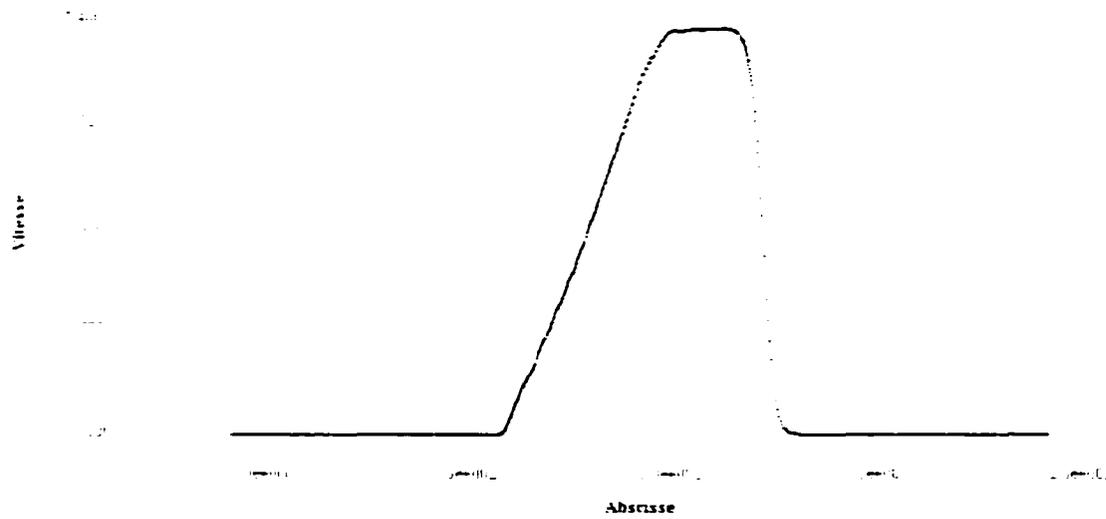


Figure 25 Cas optimal - Vitesse temps = 30s

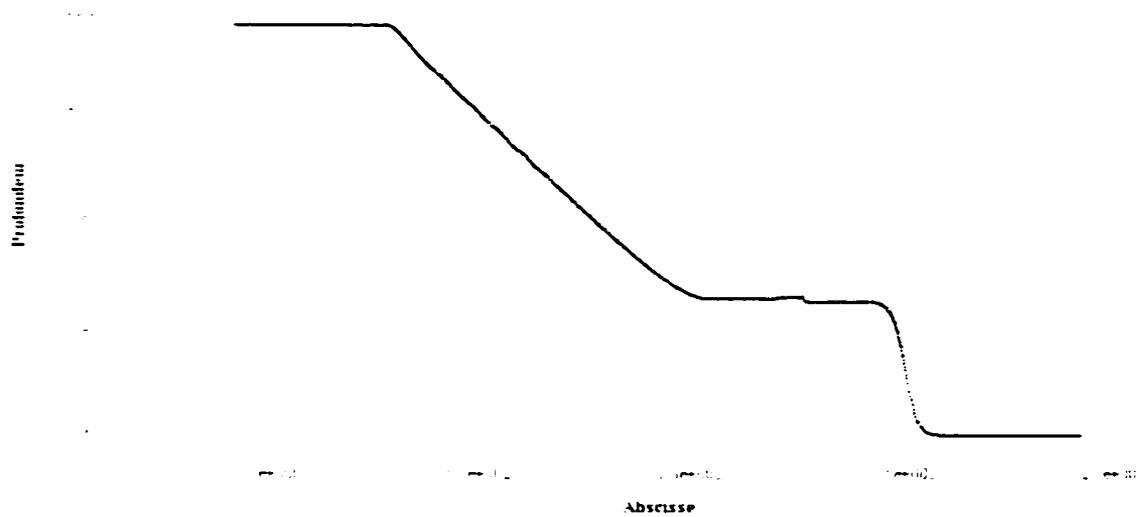
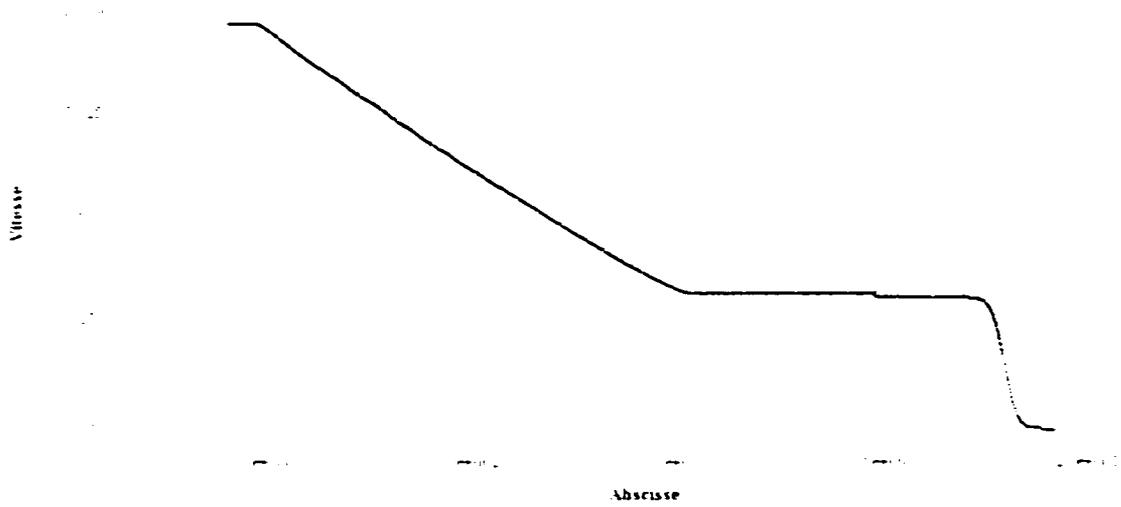


Figure 26 Cas optimal - Profondeur temps = 60s



Figure 27 Cas optimal - Vitesse temps = 60s



### 3.2.4.3 Combinaison du lissage et de la linéarisation

Dans ce qui suit, on va combiner l'effet du lissage et de la linéarisation. En effet, en plus de la linéarisation de tous les paramètres de la simulation, et ce au niveau de l'emplacement du barrage, on va ajouter des particules pour mieux lisser la discontinuité. Les facteurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont pris respectivement 2 et 0

Les détails du lissage, et de la linéarisation sont exactement ceux évoqués dans la section 3.2.4.

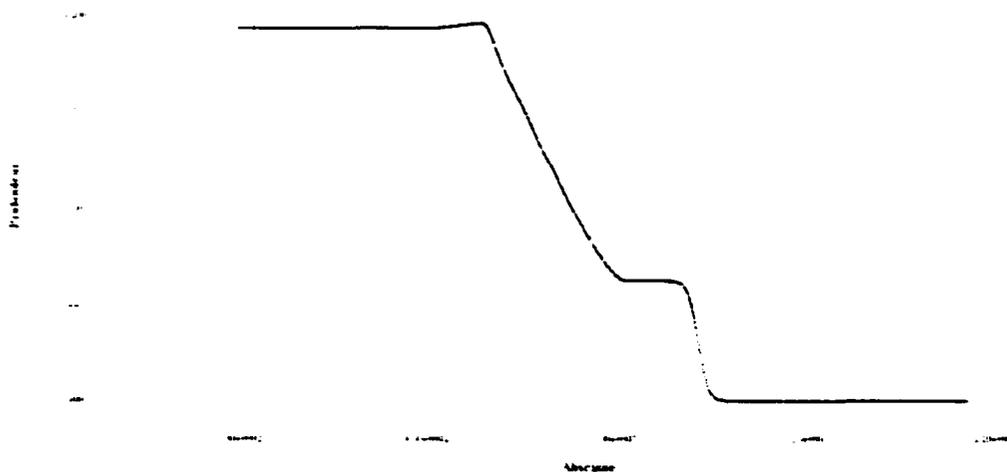


Figure 30 Combinaison du lissage et de la linéarisation

La figure 30 montre bien que l'effet combiné du lissage et de la linéarisation est très probant. Cette courbe représente le meilleur résultat obtenu jusqu'à cette étape. Le seul défaut que représente ce résultat est le petit pic qui est généré au niveau du début de la zone linéarisée. Ce pic peut être interprété comme étant une réflexion de l'onde de raréfaction.

### 3.2.5 Effet de la dispersion :

Dans l'équation de quantité de mouvement, un terme de dispersion est introduit. Il représente l'effet de la viscosité sur le calcul de la vitesse de déplacement des particules. Ce terme est donné par :  $\mu \Delta u$ . Où  $\mu$  est un coefficient de viscosité et  $u$  n'est que la vitesse de la particule. Ainsi l'équation de la quantité de mouvement devient :

$$\frac{du_k}{dt} = -\sum_j V_j (g + \Pi_{ij}) \frac{\partial W_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_k \quad (3.14)$$

Le calcul du terme contenant le Laplacien se fait en stockant dans une table séparée les composantes du gradient spatial. Ensuite, la formulation SPH de l'équation (2.7) est appliquée sur le gradient.

Dans ce qui suit, on va voir l'effet de l'ajout de ce terme de dispersion visqueux et plus précisément l'effet d'une variation du coefficient de viscosité  $\mu$

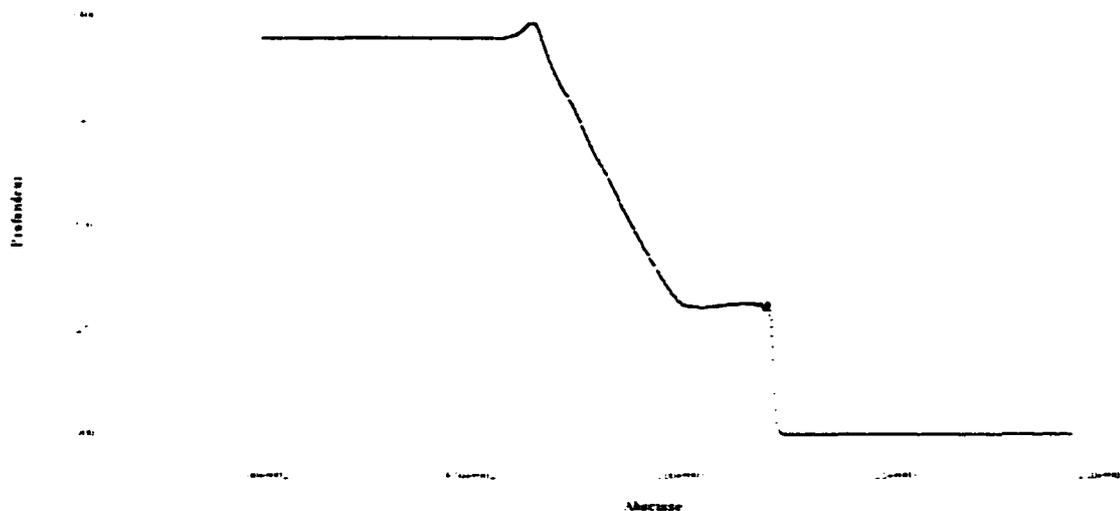


Figure 31 Effet de la dispersion  $\alpha = 1$  et  $\mu = 0.01$

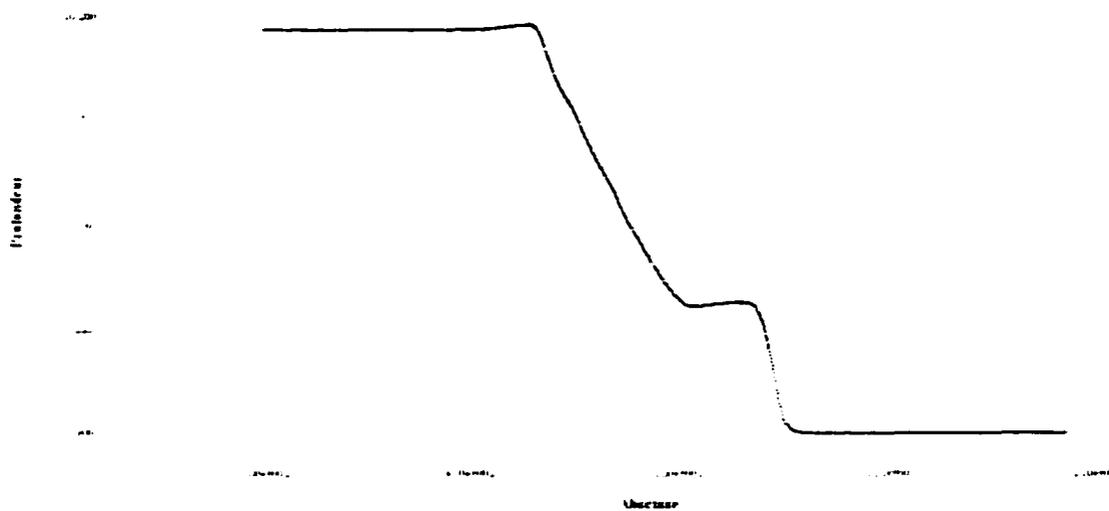


Figure 32 Effet de la dispersion  $\alpha=2$  et  $\mu = 0.01$

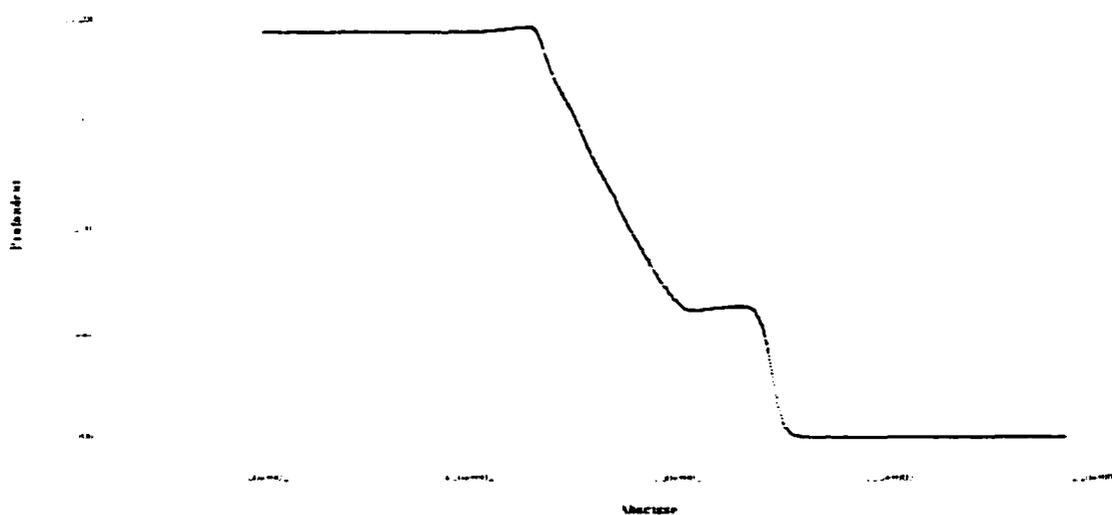


Figure 33 Effet de la dispersion  $\alpha=2$  et  $\mu = 0$

Des essais semblables ont été effectués sur le même cas avec des coefficients  $\mu$  allant jusqu'à 20. ont révélé que le coefficient de dispersion n'affecte que très peu les résultats. Ainsi, on va ignorer le terme de dispersion dans les calculs ultérieurs.

### 3.2.6 Autre type de correction

Monaghan [18] propose une correction sur la vitesse qui consiste à ajouter un terme dans le côté droit de l'équation de calcul de la vitesse citée ci-dessous :

$$\frac{dr_a}{dt} = v_a \quad (3.15)$$

Le terme de correction de vitesse est induit par la forme corrigée de la SPH communément appelée XSPH. Il sera ajouté à droite de l'équation (3.15) et sera pris en considération avant d'appliquer un schéma d'intégration pour retrouver la position  $r_a$  de la particule a. Ce terme est donné par :

$$\Delta v_a = \varepsilon \sum_b V_b (u_b - u_a) W_{ab} \quad (3.16)$$

$V_b$  étant le volume associé à la particule b et  $u$  désigne la vitesse.  $\varepsilon$  est une constante.

D'après Monaghan[14], cette correction de la vitesse garde les particules dans leur ordre et, dans le cas d'un écoulement à très grande vitesse, empêche la pénétration d'un fluide par un autre.

Nous avons, par conséquent, implémenté cette correction dans le cas d'un problème de bris de barrage en 1D. Nous avons pris comme valeur de départ pour la constante  $\varepsilon$  la valeur de 0.5 (valeur suggérée par Monaghan). Les constantes intervenant dans le terme de la viscosité artificielle ont été variées pour voir leur influence sur les résultats.

Les figures ci-dessous montrent les courbes obtenues suite à cette implémentation. Il s'est avéré que, seules les valeurs de 8 et 1 de  $\alpha$  et de  $\beta$  respectivement, donnent l'allure

de la forme souhaitée. Toutefois, des oscillations subsistent au niveau de l'emplacement du barrage ainsi qu'au début de la zone affectée par le mouvement des particules (onde de raréfaction). Les valeurs de  $\alpha = 0.01$  et de  $\beta = 0$  suggérées par Monaghan ont donné une dispersion totale.



Figure 34 Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=0.5$  et  $\alpha=2$

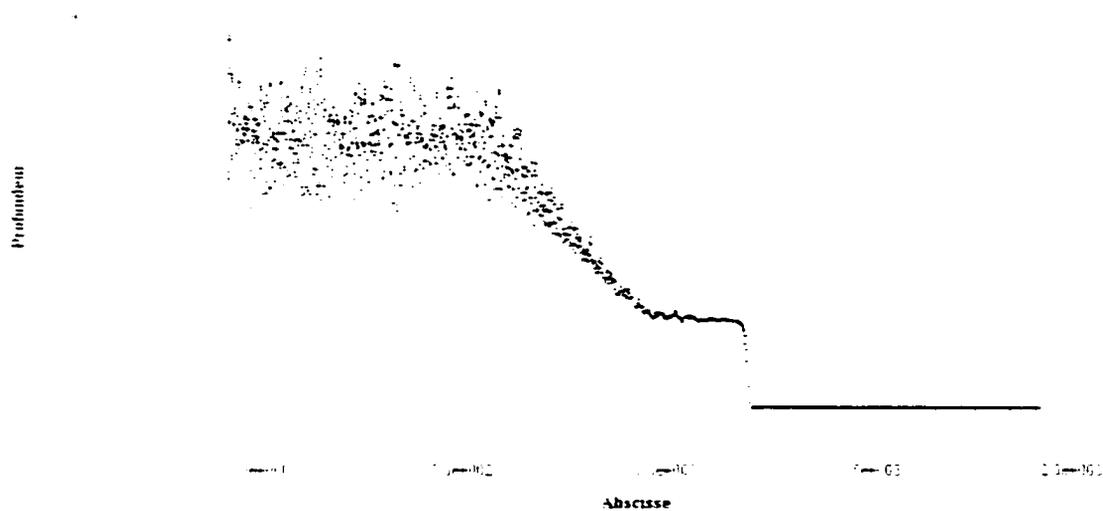


Figure 35 Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=1$  et  $\alpha=2$

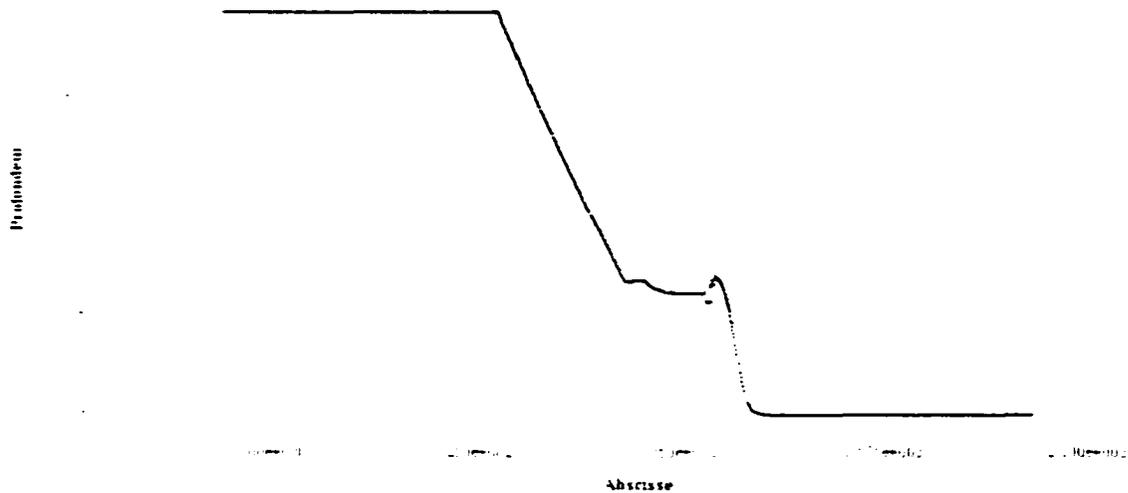


Figure 36 Effet de la correction de vitesse- $\epsilon=0.1$  et  $\alpha=2$

Une conclusion qu'on peut tirer à partir de cette implémentation est que le terme de correction évoqué ci-haut incarne uniquement une source d'oscillation très prononcée. Vu que l'ordre des vitesses dans le cas du bris de barrage reste relativement bas comparativement aux chocs à grandes vitesses par exemple, l'ajout du terme correcteur est déconseillé.

### 3.2.7 Utilisation de l'équation de continuité

Dans cette section, on va introduire l'équation de continuité comme outil de calcul. En effet, dans tout ce qui a suit, l'équation de continuité est implicitement vérifiée. Ceci découle de la nature Lagrangienne de la formulation SPH.

Toutefois, on va se baser dans cette section, sur l'équation de continuité, moyennant la discrétisation SPH, comme base de calcul des variables recherchées, en l'occurrence la profondeur et la vitesse des particules.

Par la suite, on va introduire un terme de stabilisation proportionnel au Laplacien de la profondeur  $h$ .

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{dh_k}{dt} = -h_k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.17)$$

Pour calculer le gradient de la vitesse, on applique la formule de discrétisation SPH relative au gradient (équation (2.11)) en prenant comme fonction variable, la vitesse  $u$ .

Ainsi, le gradient de la vitesse sera donnée par :

$$\nabla u = \sum_{k=1}^N m_k \frac{(u_k - u_i)}{\rho_k} \nabla W(x_k - x_i, h) \quad (3.18)$$

Le rapport  $m_k/\rho_k$  correspond au volume  $V_k$ . Par conséquent, la modélisation mathématique de l'équation de continuité sera donnée comme suit :

$$\frac{dh_k}{dt} = -h_k \sum_j V_j u_j \nabla(W_{kj}) + \alpha' \Delta(h_k) \quad (3.19)$$

où

- $h_k$  : profondeur de la parcelle  $k$
- $u_k$  : vitesse de la parcelle  $k$
- $V_j$  : constante de volume de la parcelle  $j$
- $\alpha'$  : coefficient de stabilisation
- La sommation se fait sur les voisins  $j$  de la parcelle  $k$

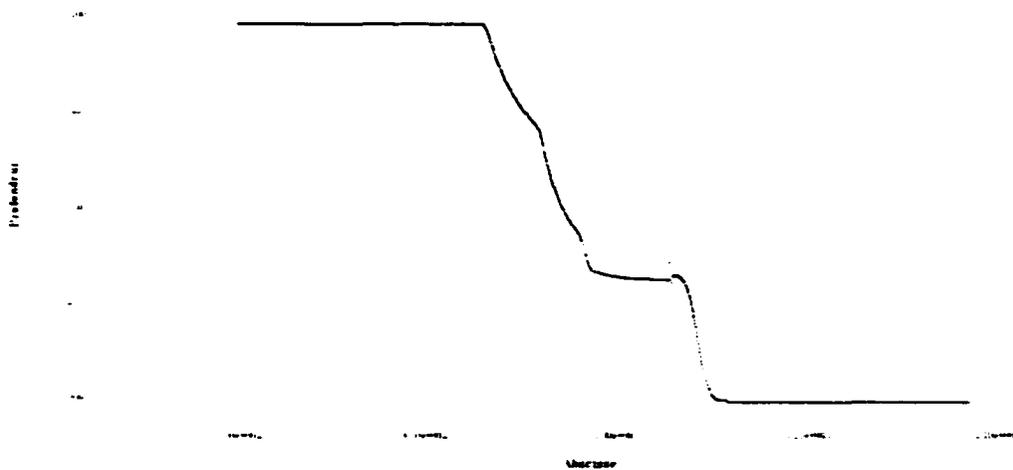


Figure 37 Utilisation de l'équation de continuité -  $\alpha=2$  -  $\alpha'=1$  - cas linéarisé

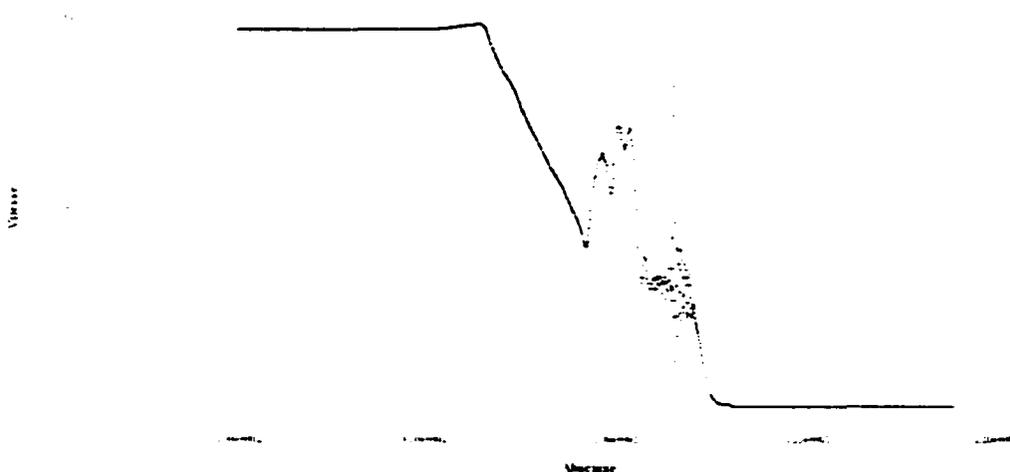


Figure 38 Utilisation de l'équation de continuité -  $\alpha=2$  -  $\alpha'=1$  - cas standard

L'utilisation de l'équation de continuité comme base de calcul est par conséquent incapable de détecter les chocs. En plus, le problème reste très sensible à la présence des discontinuités bien que un terme de stabilisation proportionnel au Laplacien de  $h$  est introduit.

### 3.2.8 Écoulement à lit sec

La solution analytique en 1 D du problème du Dam-break a été obtenue par Stoker (1957) pour les conditions initiales données en sus ainsi que pour le cas d'un lit sec en aval du barrage. Dans ce qui suit, on va présenter une analogie des résultats qu'on a trouvés avec la méthode SPH et la solution analytique. Dans le même contexte on va énumérer les résultats fournis par la méthode des volumes finis.

On va présenter deux cas où le coefficient de frottement est introduit ainsi qu'un calcul sans frottement.

Dans l'équation de quantité de mouvement, on peut introduire un coefficient qu'on a l'habitude de l'appeler dans la littérature, coefficient de frottement. Il est donné par [21] :

$$f = \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (3.20)$$

avec

- n : coefficient Manning
- u : vitesse de la particule
- h : profondeur de la particule

Ainsi l'équation de quantité de mouvement devient :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - g \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (3.21)$$

Le temps de simulation est de 4 secondes et ce pour faire des comparaisons ultérieures avec la méthode des volumes finis.

Le lit sec en aval est implémenté par une valeur infinitésimale de la profondeur. La valeur introduite est  $10^{-9}$  m. La valeur nulle engendre des problème dans le calcul des gradients.

### 3.2.8.1 Sans coefficient de frottement

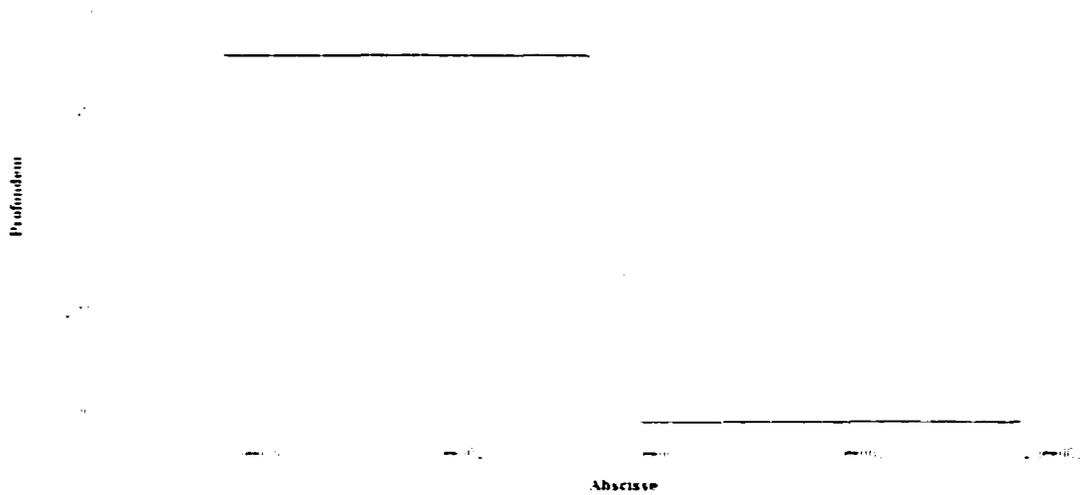


Figure 39 Écoulement à lit sec – cas sans coefficient de frottement –  $t=4s$  - Profondeur



Figure 40 Écoulement à lit sec – cas sans coefficient de frottement-  $t=4s$  - Vitesse

### 3.2.8.2 Introduction du coefficient de frottement

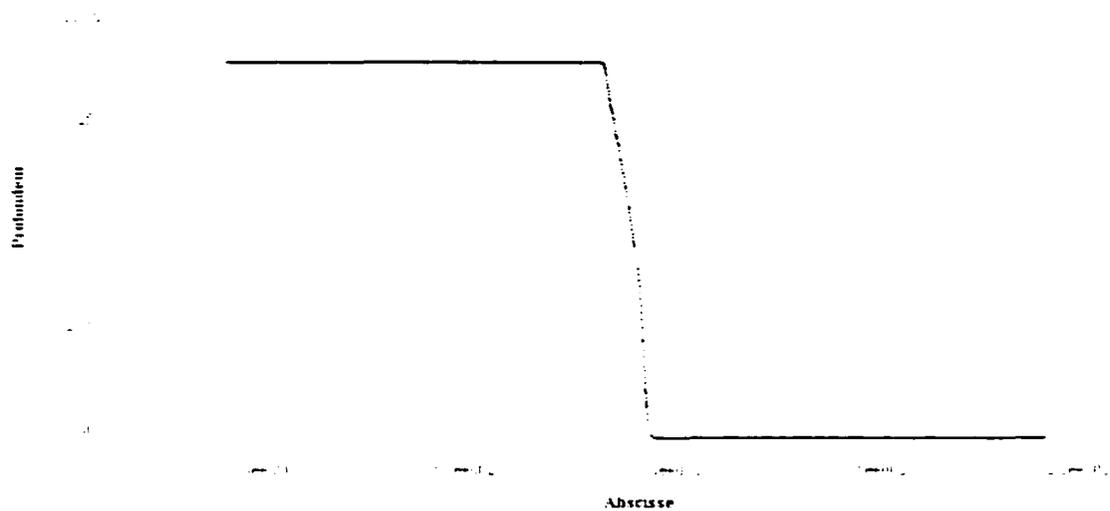


Figure 41 Écoulement à lit sec-cas avec coefficient de frottement  $n=0.01$ - Profondeur

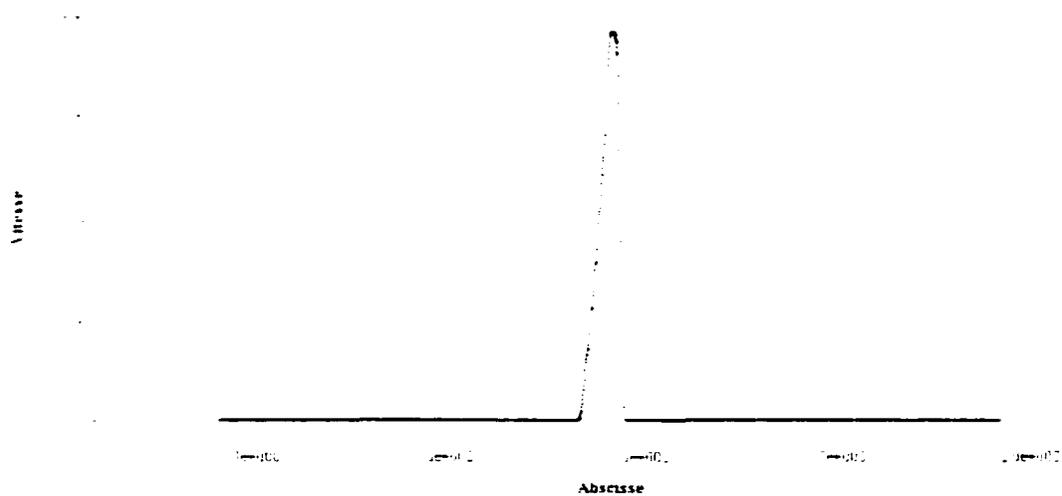


Figure 42 Écoulement à lit sec-cas avec coefficient de frottement  $n=0.01$ -Vitesse

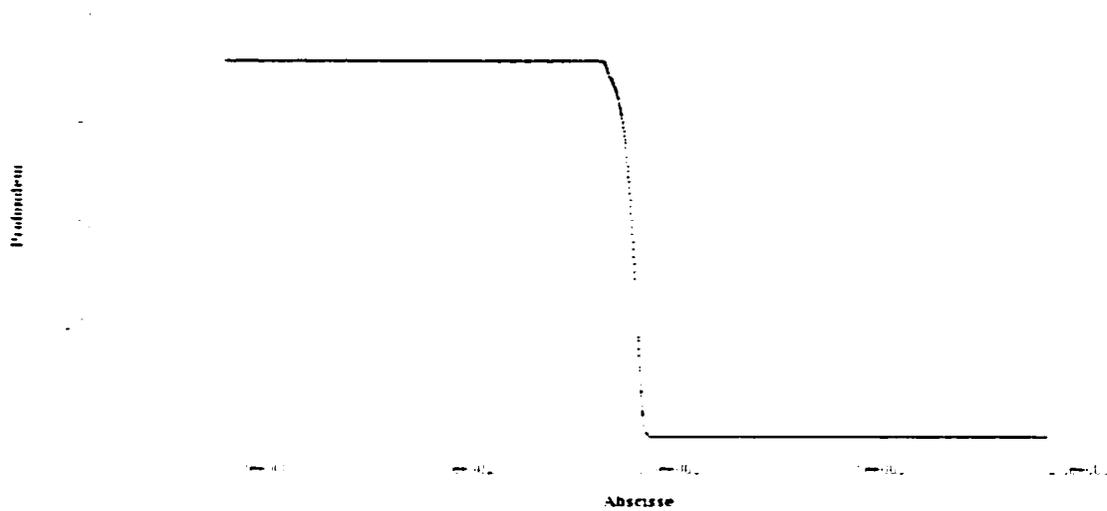


Figure 43 Écoulement à lit sec – cas avec coefficient de frottement  $n = 1$  - Profondeur

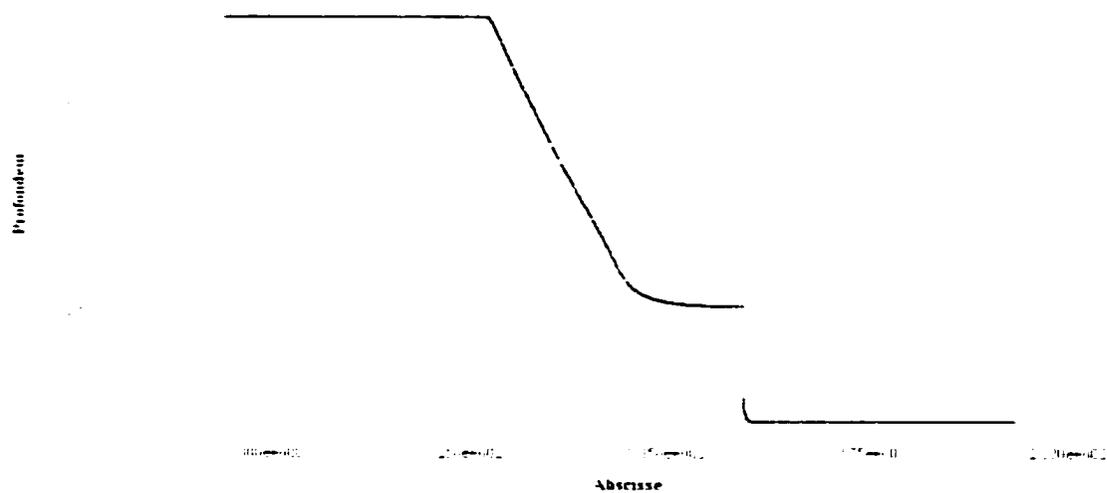


Figure 44 Écoulement à lit sec - cas standard – temps =30s

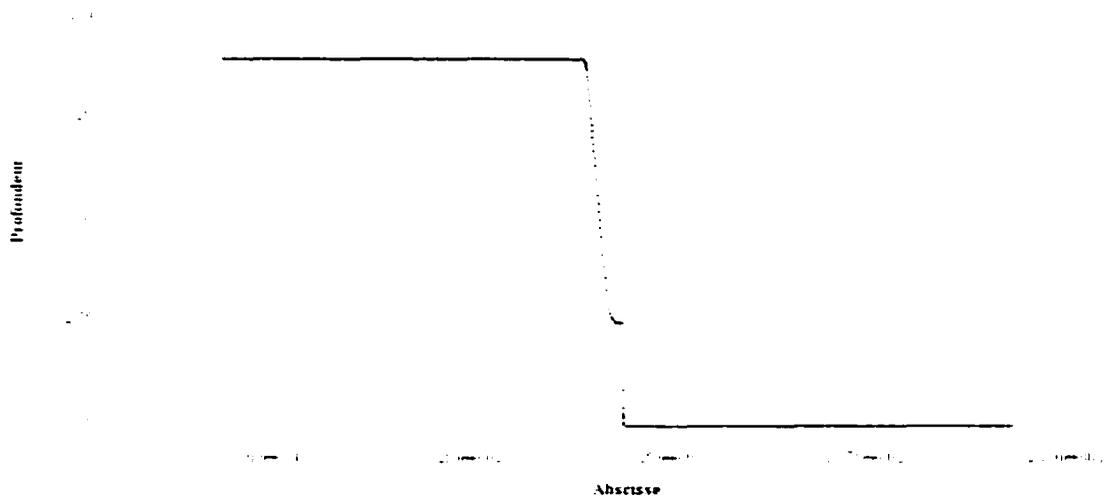


Figure 45 Écoulement à lit sec - cas standard – temps =4s

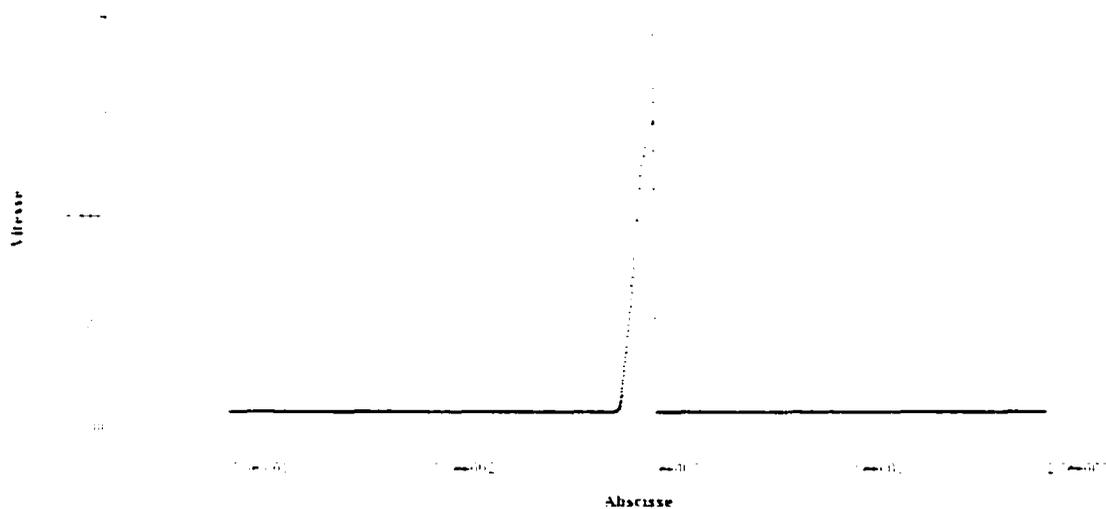


Figure 46 Écoulement à lit sec - cas standard – temps = 4 s – vitesse

### 3.2.9 SPH et Méthodes Euleriennes

Les méthodes particulières et plus particulièrement le SPH, ont fait le sujet de plusieurs études en parallèle avec les méthodes Eulerienne, en l'occurrence, la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis.[23], [2],[24], [14].

Dans ce qui suit, on va évoquer quelques études qui ont réussi à faire un couplage entre le SPH et les méthodes Euleriennes. Aussi, allons-nous faire une analogie des résultats obtenus par la SPH et ceux offerts par la méthode des volumes finis et la méthode des éléments finis.

### **3.2.9.1 SPH et éléments finis**

Le couplage SPH-Éléments finis est généralement adopté lorsqu'un problème d'hétérogénéité physique du domaine subsiste dans la simulation. En effet, une simulation dans un domaine solide-liquide ou liquide-gazeux nécessite, pour le cas des éléments finis du moins, deux implémentations différentes. A savoir, un maillage différent pour chaque phase, une précision de calculs différents et surtout des conditions aux limites qui ne sont pas évidents à modéliser.

La SPH offre l'avantage d'être très bien adaptée aux géométries complexes. Ce qui réduit les erreurs de calcul et offre une bonne modélisation géométrique et mathématique du domaine. C'est dans ce sens là, que Lu et al. [14] ont parfaitement adapté le couplage de la SPH avec la méthode des éléments finis pour simuler le phénomène de transport de glace sur la rivière du Niagara.

Une modélisation SPH a été adoptée pour la partie solide du domaine (la glace) et une approche basée sur la méthode des éléments finis a permis de modéliser la partie fluide de la rivière. La méthode des éléments finis est, du moins, très complexe à implémenter pour le problème de transport. En contre partie, le SPH, avec sa légèreté et sa facilité, s'est révélée mieux adaptée pour ce genre de problème.

Attaway et al. [2] ont réussi à offrir une ingénieuse mixture de la méthode des éléments finis et de la méthode SPH pour la dynamique rapide. En effet, ils ont adopté les

équations et la morphologie SPH dans des particules qui ne sont autre que les mailles rectangulaires pré-données par le maillage du domaine. Ainsi, une particule SPH est une maille rectangulaire dont la masse est concentrée en un point choisi de la maille. Cette technique leur a permis d'intégrer la méthode SPH dans un code de calcul éléments finis déjà existant (PRONTO).

Les auteurs sus-indiqués ont implémenté ce « métissage de méthode » dans diverses applications qui ont donné des résultats très encourageants.

### **3.2.9.2 SPH et volumes finis**

La méthode des volumes finis a souvent été proche de la SPH dès les premières applications de cette dernière. Bien que les applications soient nombreuses, on va présenter dans ce qui suit uniquement deux travaux qui nous paraissent les plus pertinents en plus qu'ils sont proches de notre domaine d'étude.

Vila et Ben Moussa [25] ont donné une nouvelle analyse mathématique, combinée SPH-Volumes finis, pour l'approximation des solutions non-linéaires des lois de conservation scalaires de premier ordre. Leur nouveauté consiste à donner une interprétation originale des schémas particulière et les considérer comme une combinaison des schémas classiques de différence finie unidimensionnelle. Ainsi les schémas obtenus peuvent être résolus par des procédures explicites, chose qui n'était pas possible avant avec le travail de Mas-gallaic et Raviart (voir : A Particle Method for first-order systems, Numer. Math..51(1987).pp.323-352).

Le deuxième travail qu'on va évoquer dans la suite, est celui de Toro [23]. Une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode des volumes finis et ceux obtenus par la SPH pour le problème de bris de barrage, sera présentée. Par conséquent, son travail va constituer une base de comparaison qu'on va adopter pour évaluer les résultats donnés par la méthode SPH.

Une vision critique préliminaire montre que la discontinuité qui était concrétisée par le barrage subsiste après l'élimination de ce dernier et se manifeste par un palier au niveau  $h = 4$  m. Les passages de la hauteur initiale amont ( $h = 10$ m) à celle correspondante au palier ( $h = 4$  m) ainsi que de celui ci au niveau initial aval, sont des discontinuités raides et sont plus proches de la solution analytique.

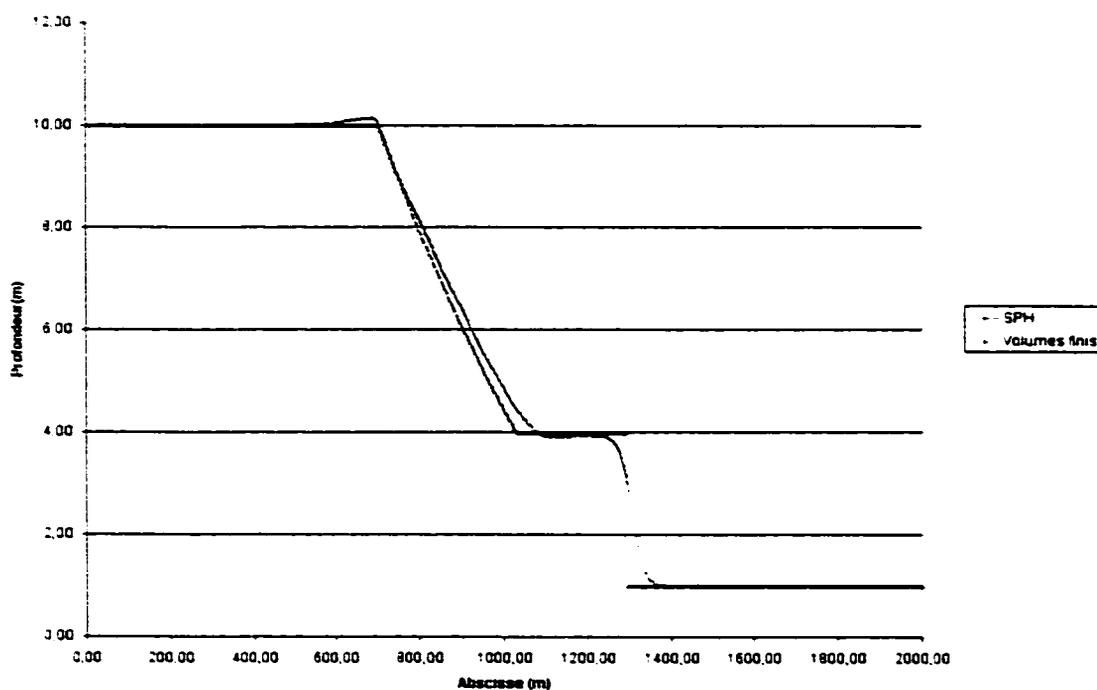


Figure 47 Comparaison avec la méthode des volumes finis – Profondeur

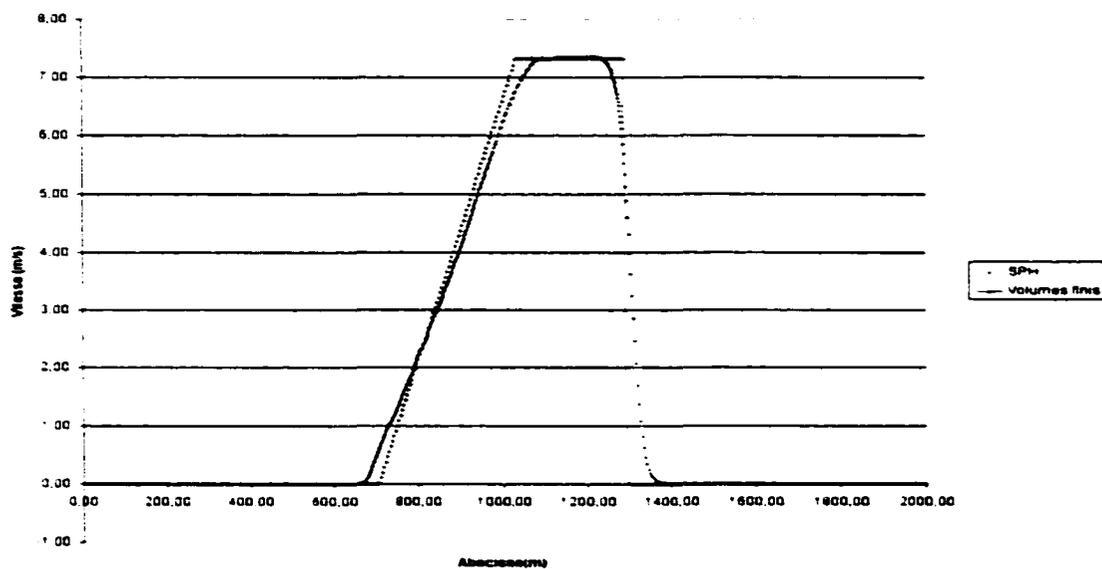


Figure 48 Comparaison avec la méthode des volumes finis - Vitesse

On va refaire le même travail pour le cas d'un lit sec en aval du barrage.

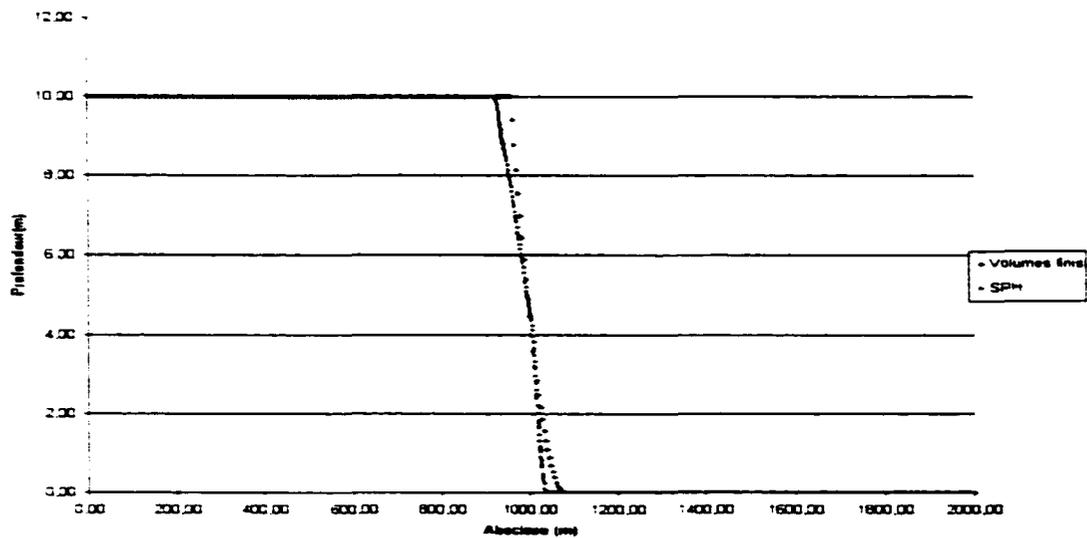


Figure 49 Comparaison avec la méthode des volumes finis- écoulement à lit sec - Profondeur

### 3.3 Problème de bris de barrage en 2 dimensions

#### 3.3.1 Introduction

Dans ce qui suit, on va présenter l'implémentation du problème de bris de barrage en deux dimensions. On va commencer par rappeler la formulation SPH des équations de St-Venant en deux dimensions. Par la suite, divers cas de problèmes seront présentés en commençant par le problème de bris de barrage standard, passant par le problème de barrage avec étranglement et finalement le problème de barrage circulaire.

#### 3.3.2 La méthode SPH en deux dimensions

##### 3.3.2.1 Formulation SPH standard

Les équations de St-Venant en deux dimensions et en absence de termes de frottement, sont données par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.24)$$

L'équation (3.22) correspond à l'équation de continuité. Cette équation ne sera pas prise en compte dans les outils de calcul.

La formulation SPH finale des équations (3.23) et (3.24) sont les suivantes :

$$\frac{du_k}{dt} = - \sum_j V_j (g + \Pi_{kj}) \frac{\partial W_{jk}}{\partial x_k} \quad (3.25)$$

et

$$\frac{dv_k}{dt} = - \sum_j V_j (g + \Pi_{kj}) \frac{\partial W_{jk}}{\partial y_k} \quad (3.26)$$

avec :

$$\frac{dx_k}{dt} = u_k \text{ et } \frac{dy_k}{dt} = v_k \quad (3.27)$$

$$\Pi_{kj} = \begin{cases} -\alpha \frac{\tilde{l}_y \tilde{c}_y u_{kj} r_{kj}}{\tilde{h}_y [r_{kj}^2 + \varepsilon l_k^2]} & \text{si } u_{kj} \cdot r_{kj} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

avec  $\tilde{l}_y = \frac{1}{2}(l_i + l_j)$ ,  $\tilde{c}_y = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$  la moyenne de la vitesse de l'onde à la surface et  $\tilde{h}_y = \frac{1}{2}(h_i + h_j)$ .  $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont deux constantes empiriques et  $u_{kj} \cdot r_{kj}$  désigne le produit scalaire entre la différence des vecteurs vitesses et celles des vecteurs positions relatifs aux particules k et j.

Les « constantes de volumes »  $V_j$  correspondent, dans le cas deux dimensions, au volume de chaque particule j :

$$V_j = h_j \Delta_x \Delta_y \quad (3.29)$$

où  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  sont les dimensions suivant  $x$  et  $y$  de la particule  $j$ . Pour garantir la conservation de la masse et en considérant le caractère Lagrangien de la Méthode SPH, ces constantes de volume restent constantes tout au long du temps de la simulation.

L'équation qui permet le calcul de la profondeur  $h_k$  d'une particule  $k$ , reste semblable à celle utilisée dans le cas mono-dimensionnel (voir équations (3.3) et (3.4)). Seule l'expression du noyau est adaptée au cas bidimensionnel. Elle est donnée par :

$$h_k = \sum_j \frac{1}{2} V_j [W(x_k - x_j, l_k) + W(x_k - x_j, l_j)] = \sum_j V_j \bar{W}_{kj} \quad (3.30)$$

L'expression du noyau en deux dimensions est la suivante :

La gaussienne :

$$W(r, h) = \left[ \frac{1}{\pi \cdot l^2} \right] \exp(-r^2/l^2) \quad (3.31)$$

$l$  étant la longueur de lissage et  $r = \left[ (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$

La Spline cubique :

$$W(r, l) = \frac{15}{7\pi l^2} \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{1}{2} s^3 & 0 \leq s < 1 \\ \frac{1}{6} (2-s)^3 & 1 \leq s < 2 \\ 0 & s \geq 2 \end{cases} \quad (3.32)$$

avec  $s = \frac{r}{l}$

Les conditions initiales de chaque problème traité seront introduites dans le paragraphe correspondant.

### 3.3.2.2 Formulation EF-SPH

En adoptant la même démarche décrite dans le paragraphe (2.5). Les composantes suivant x et y des équations shallow water s'écrivent comme suit :

$$\frac{Du_x}{Dt} = \sum_j W_{ij} \frac{V_j}{h_j} \left( \sum_k (g + \Pi_{kj}) V_k \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.33)$$

$$\frac{Dv_x}{Dt} = \sum_j W_{ij} \frac{V_j}{h_j} \left( \sum_k (g + \Pi_{kj}) V_k \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.34)$$

### 3.3.2.3 Conditions aux limites

Les conditions aux limites spatiales ont été détaillées dans la section 2.8.2.1. Quant-aux conditions aux limites cinématiques, elles sont présentées dans ce qui suit dépendamment de la méthode choisie afin de simuler la frontière spatiale. La figure suivante donne une idée illustrative dans le cas où la méthode des particules fantômes serait adoptée. Cette configuration garantit un phénomène de glissement parfait à la paroi du domaine :

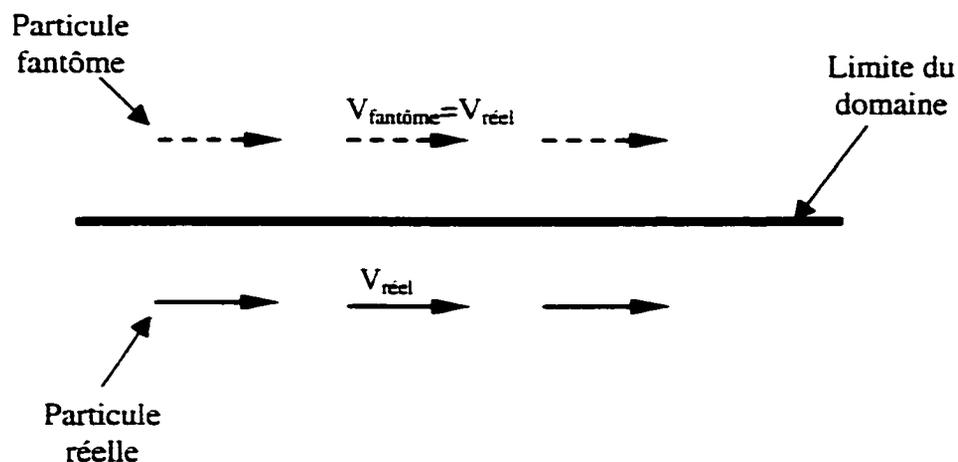


Figure 50 Conditions aux limites cinématiques – cas de particules fantômes

Dans le cas où on voudrait imposer une condition de frottement parfait au mur, il suffit d'inverser le signe de la vitesse affectée aux particules fantômes. Ainsi la somme vectorielle  $V_{réelle} + V_{fantôme}$  donne une vitesse nulle à la paroi et donc un frottement parfait est obtenu.

La même logique s'applique lorsqu'on adopte la méthode des particules miroirs dans la modélisation des conditions aux frontières. Les particules symétrisées auront les vitesses des particules réelles ou leurs opposées, selon le cas où on voudrait obtenir une condition de glissement ou de frottement parfait à la frontière.

Pour résumer toute la procédure SPH et son implémentation en deux dimensions, nous présentons dans ce qui suit un diagramme qui illustre l'algorithme de la méthode :

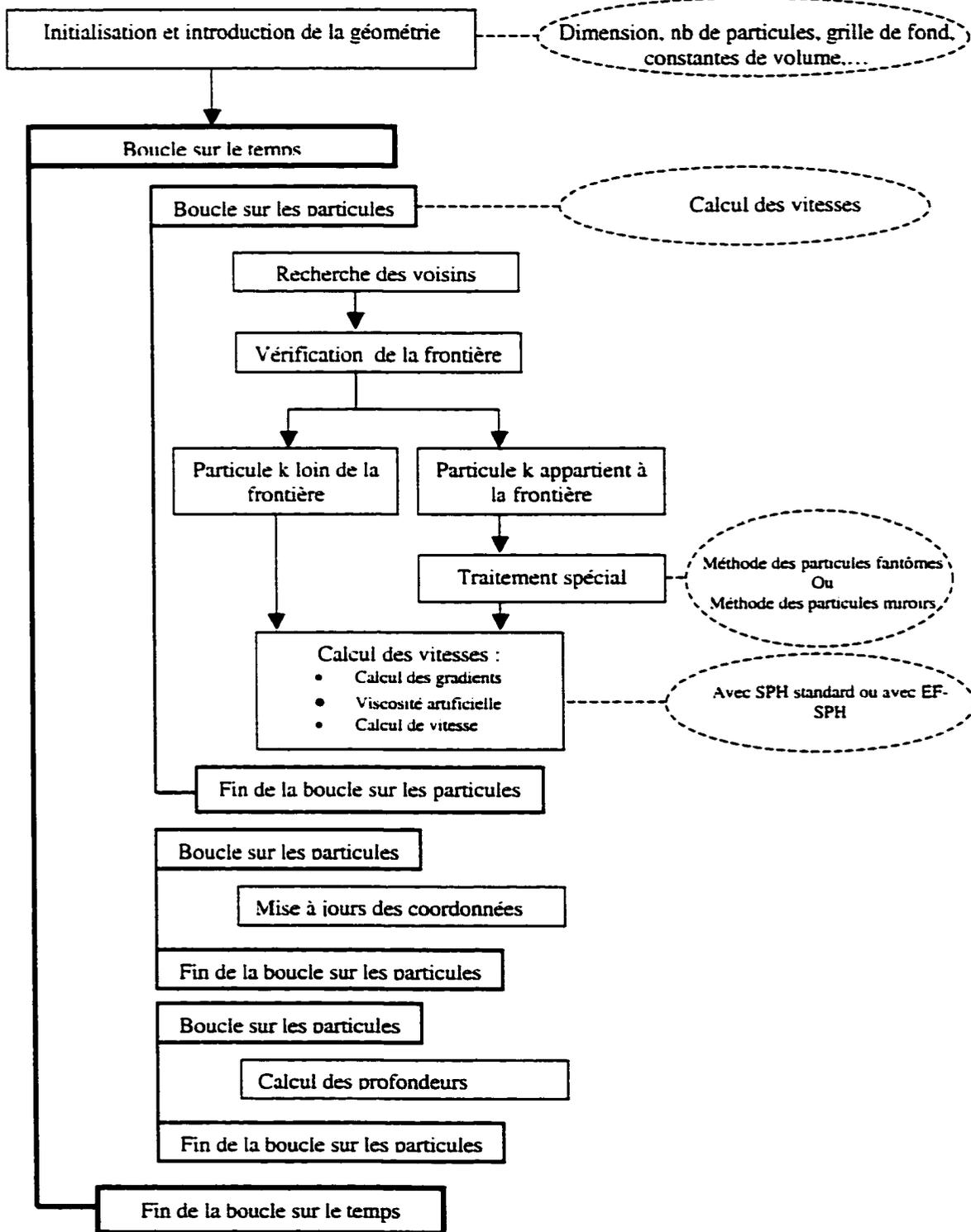


Figure 51 Algorithme de la méthode SPH

### 3.3.3 Problème de bris de barrage standard

L'implémentation des équations de St-Venant en deux dimensions peut être appliquée à plusieurs problèmes physiques. Dans cette première section, on va commencer par le problème de bris de barrage standard en deux dimensions.

Ce cas a été testé en utilisant 10080 particules (504x20 : 8040 particules en amont du barrage et 2040 en aval) modélisant ainsi un domaine de longueur 2000 mètres et de largeur 75 mètres. La profondeur en amont du barrage est de 10 m et de 1m en aval de celui-ci. Deux types de noyaux ont été utilisés : les figures 53 et 54 illustrent le cas d'une gaussienne et les figures 55 et 56 le cas d'une Spline cubique.

La méthode des particules miroirs a été utilisée pour représenter les conditions aux frontières. Pour la recherche des voisins, on a appliqué l'algorithme de recherche par colonnes ainsi que l'algorithme octree. Les deux algorithmes ont donné le même résultat toutefois, le dernier algorithme s'est avéré nettement plus rapide.

Bien que la gaussienne présente le désavantage d'avoir un support infini (non compact) ce qui est synonyme d'une erreur de troncature plus ou moins importante, le résultat qu'elle offre est nettement meilleur que celui donné par la fonction spline cubique. En comparant la figure 53 et 55 respectivement avec la figure 54 et 56, on remarque la présence d'oscillations accentuées surtout dans la zone de l'onde de raréfaction dans le cas de la fonction Spline. Ces oscillations sont pratiquement absentes dans la zone de l'onde de choc. D'un autre côté, la fonction spline a mieux récupéré les valeurs de la profondeur dans les deux zones du graphique. Les conditions initiales de ce problème sont données dans la figure 52. Les valeurs de  $\alpha$  et de  $\beta$  sont indiquées avec chaque figure.

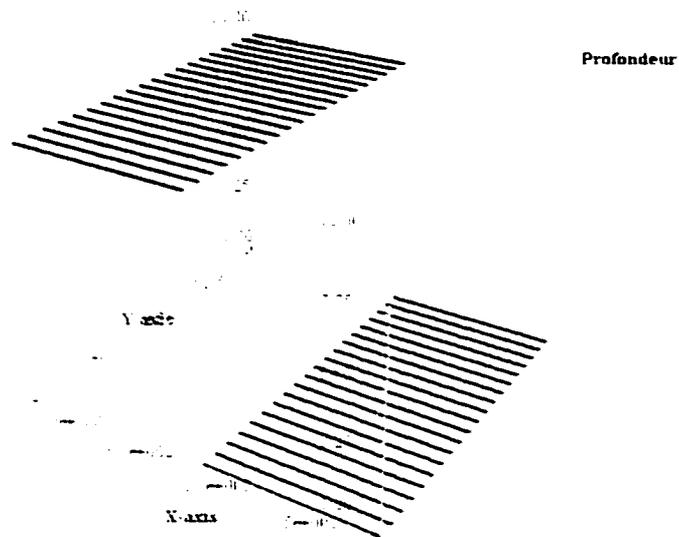


Figure 52 Conditions initiales du problème de bris de barrage standard en 2D

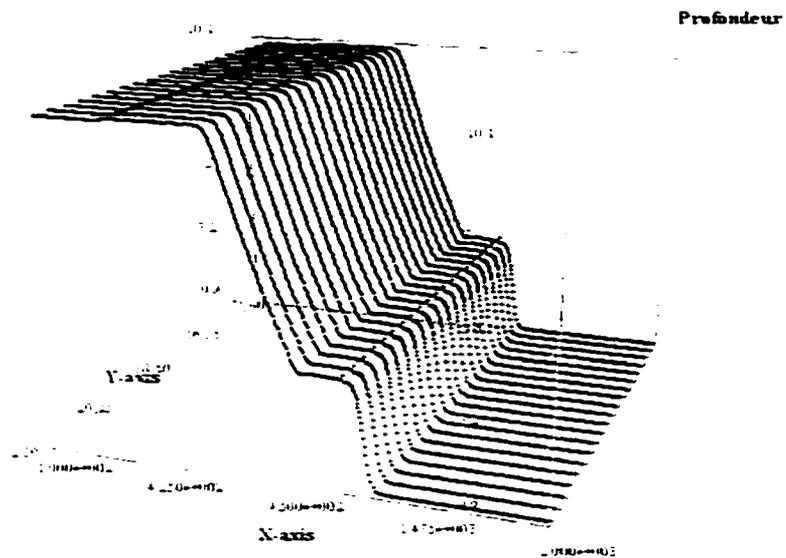


Figure 53 Problème de bris de barrage en 2D- Profondeur – Gaussienne -  $\alpha = 4$

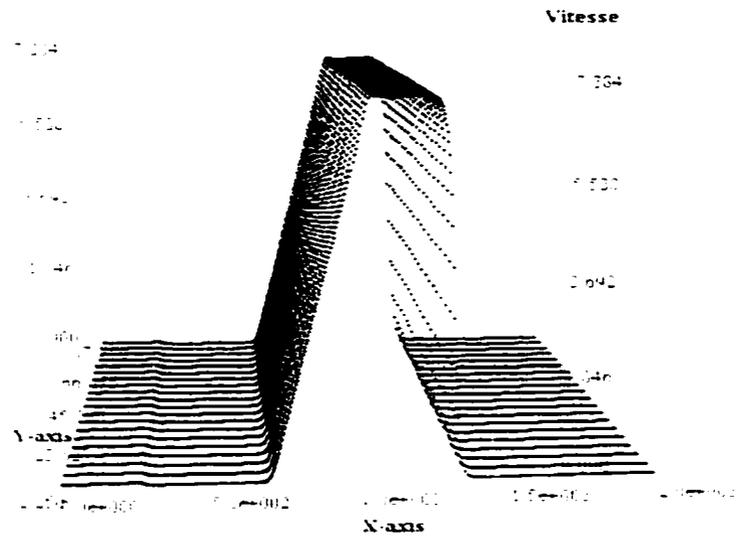


Figure 54 Problème de bris de barrage en 2D- Vitesse-Gaussienne -  $\alpha = 4$

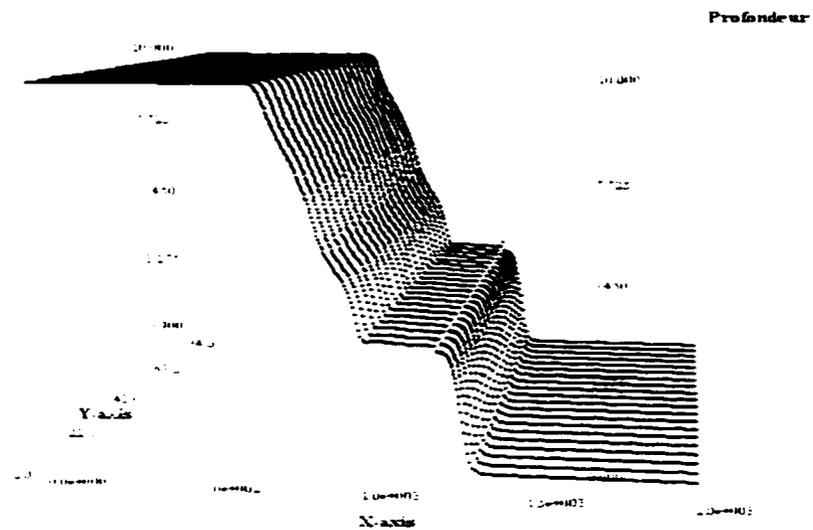


Figure 55 Problème de bris de barrage en 2D – Profondeur – Spline -  $\alpha = 4$

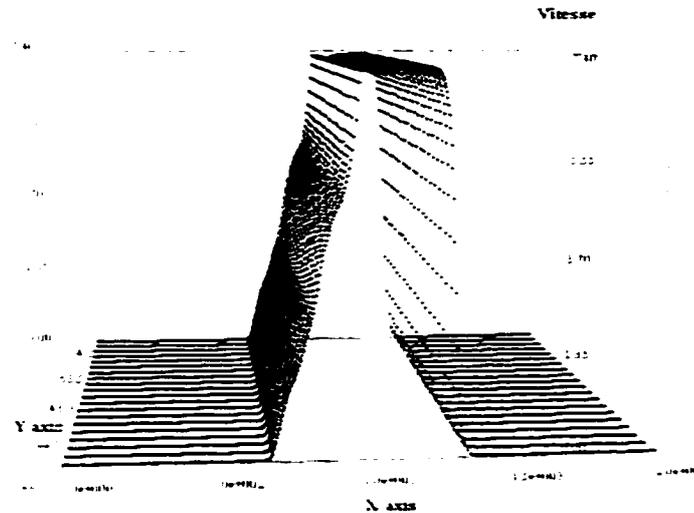


Figure 56 Problème de bris de barrage en 2D – vitesse – Spline -  $\alpha = 4$

### 3.3.4 Problème de barrage avec étranglement

Il s'agit de simuler le même cas que précédemment (même dimensions spatiales, même répartitions des particules et même profondeurs amont et aval). Toutefois, le barrage est, dans ce cas, restreint à une part de la largeur du canal. Pour des fins de simplicité, on a simulé ce cas avec un barrage centré et ayant une longueur égale à la moitié de la largeur du canal (voir figures 57 et 58)

La simulation a été accomplie avec 12000 particules, 8000 en amont et 4000 en aval. La méthode des particules miroirs et l'expression de la force inter-moléculaire de répulsion ont été utilisées pour simuler les frontières.

Le cas d'un bris de barrage avec étranglement est un cas présentant des défis majeurs. En effet, vu le grand nombre de discontinuités présentes dans ce problème, la stabilité et

la convergence de la méthode sont mises en question. Les points qui coïncident avec le début et la fin du barrage incarnent les emplacements les plus délicats. Ils présentent des singularités aussi bien au niveau de la géométrie du domaine, qu'au niveau de la profondeur de l'eau. De ce fait. On s'attendait dès le début à trouver des difficultés. La figure 59 illustre le meilleur résultat qu'on a trouvé. Cette figure correspond à un coefficient de viscosité artificielle de 4 et un noyau de type gaussienne.

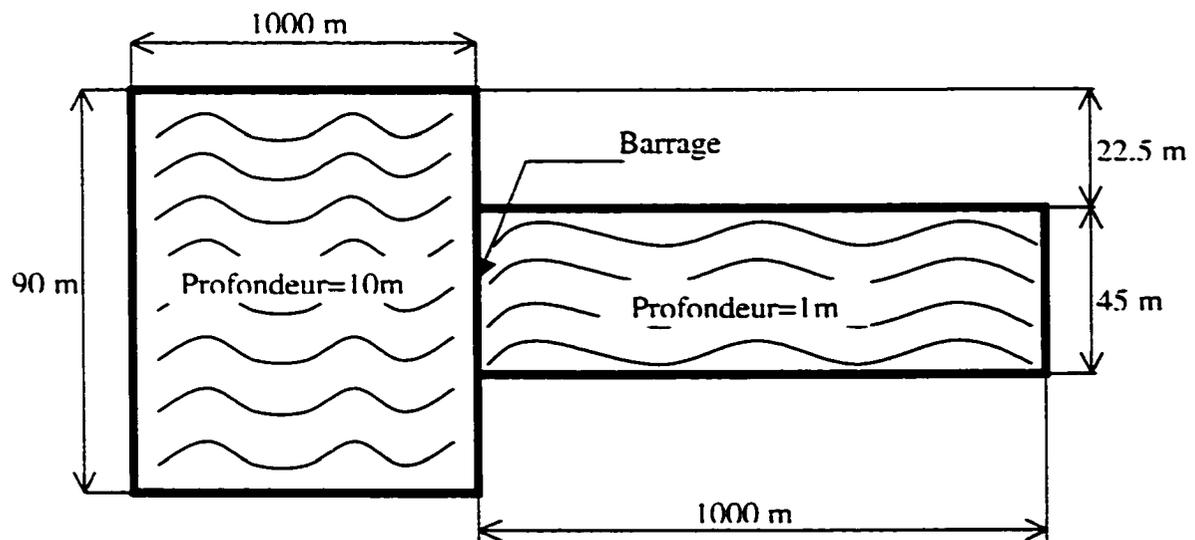


Figure 57 Problème de barrage avec étranglement-Conditions initiales-Vue en coupe

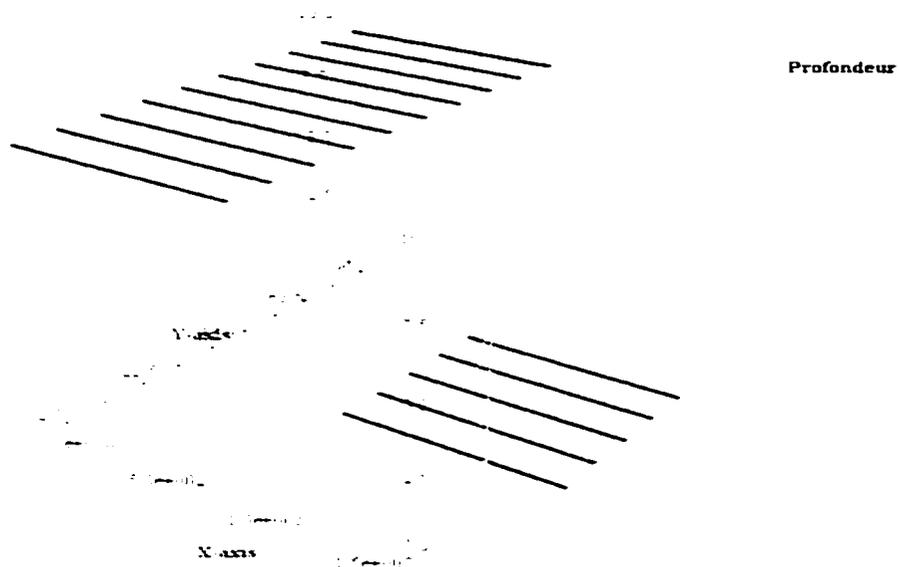


Figure 58 Problème de bris de barrage avec étranglement - Conditions initiales.

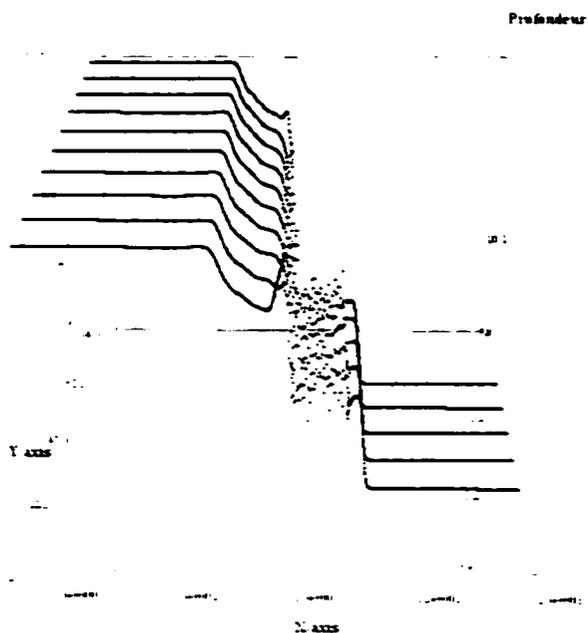


Figure 59 Problème de barrage avec étranglement – Profondeur

Les oscillations s'expliquent, par conséquent, par le fait qu'il y a une concentration de singularités, aussi bien géométrique (étranglement), que de conditions initiales (Profondeur de l'eau), que de la solution du problème (départ de l'onde de choc), dans un seul point ( $x=1000m$ ). La réunion de toutes ces irrégularités en un seul point pose des problèmes pour tout code numérique et donne souvent des solutions oscillantes. Le SPH a le mérite de donner une solution à ce problème en dépit de toutes ces difficultés. Le code réussit à tourner même pour des cas plus oscillants, avantage qui n'est pas offert par les méthodes Euleriennes.

### **3.3.5 Problème de bris de barrage circulaire.**

La simulation de problème de bris de barrage peut être configuré de plusieurs manières. La géométrie et la forme du barrage sont deux facteurs qu'on peut fixer suivant le besoin et l'objectif escompté.

Dans ce qui suit, on va présenter le cas d'un barrage circulaire. L'idée consiste en un barrage de forme cylindrique qui se brise instantanément et voir son comportement dans le temps. Les équations de St-Venant sont toujours l'outil mathématique de cette simulation et la méthode SPH est notre voie numérique.

Les conditions initiales de ce problème sont présentées dans la figure suivante :

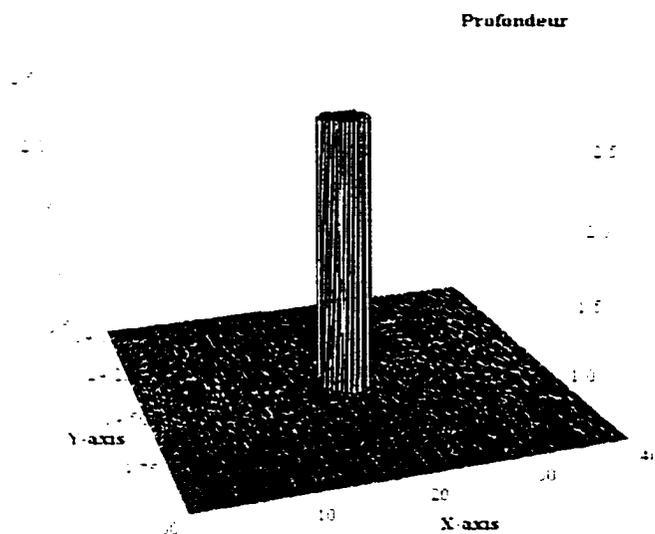


Figure 60 Conditions initiales du problème de barrage circulaire

Le barrage est centré dans un domaine carré de côté 40 mètres. Son rayon est 2.5 m et la hauteur de l'eau à l'intérieur est de 2.5m. La hauteur à l'extérieur est de 0.5m.

Le nombre de particules utilisées est 40 000 (une grille de 200x200 particules) et le temps de simulation est de 4.7 secondes. La méthode des particules miroirs a été utilisée pour représenter les conditions aux frontières. Les particules symétrisées ont les mêmes valeurs de profondeur et de vitesse ce qui configure une frontière infinie et évite par conséquent les réflexions des ondes sur les frontières du domaine. Pour la recherche des voisins, on a appliqué l'algorithme octree. Un pas de temps de 0.04s et un noyau de type gaussienne ont été également utilisés.

Bien que le nombre de particules soit important, la simulation ne nécessite que 38 minutes. Les résultats de cette simulation sont donnés dans les figures qui suivent. Des comparaisons sont faites avec des courbes obtenues avec la méthode des volumes finis à différents instants[23].

Le choix du coefficient de viscosité artificielle s'avère déterminant dans ce cas de problème. En effet, comme le montre les figures 63 et 63, des oscillations accentuées apparaissent pour les valeurs standards du coefficient  $\alpha$ . En augmentant ce dernier

jusqu'à une valeur de 8, les oscillations disparaissent complètement. Toutefois, un lissage accentué caractérise la courbe obtenue de façon que l'onde de choc atteigne la limite du domaine d'une façon prématurée. (voir figures 68 et 69)

Les courbes obtenues dans cette simulation sont très encourageantes. La capture du choc est obtenue dans la naissance de la première onde ainsi que dans l'apparition de la deuxième onde dans le centre du barrage.

La nouvelle formulation EF-SPH récupère les valeurs de la profondeur mieux que la formulation SPH standard surtout dans les premiers instants de la simulation. Les figures 70-74 illustrent les résultats trouvés avec cette nouvelle approche en comparaison avec les résultats du SPH standard ainsi qu'avec ceux de la méthode des volumes finis. Les derniers instants de la simulation montrent l'effet de l'aspect lagrangien du SPH sur les résultats. Le déplacement des particules qui étaient au milieu du domaine vers les bords, cause un 'manque' de particules ce qui empêche de reproduire correctement l'allure de la profondeur surtout à l'emplacement du barrage.

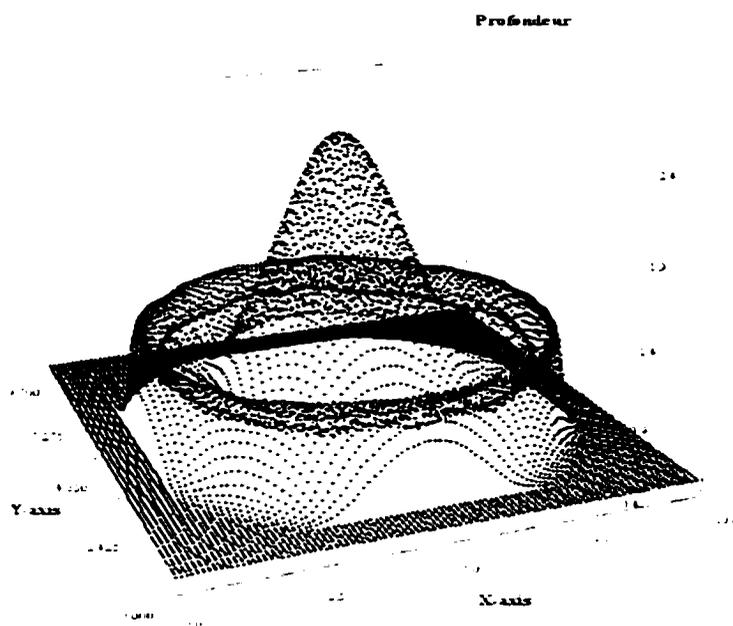


Figure 61 Barrage circulaire –  $t=0.4s$

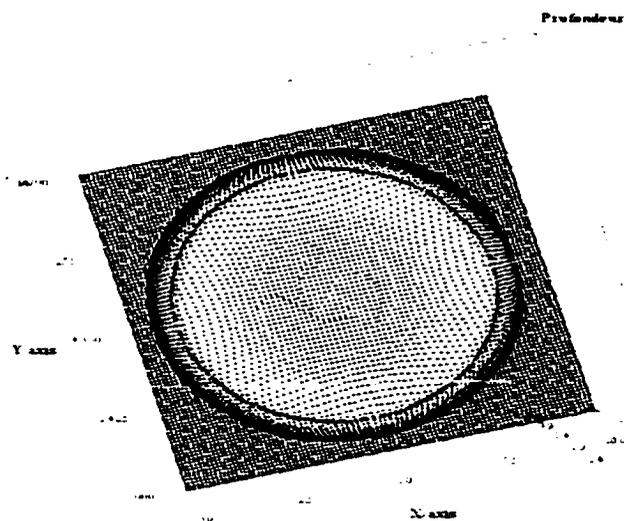


Figure 62 Barrage circulaire –  $t=0.4s$ - Vue de dessus

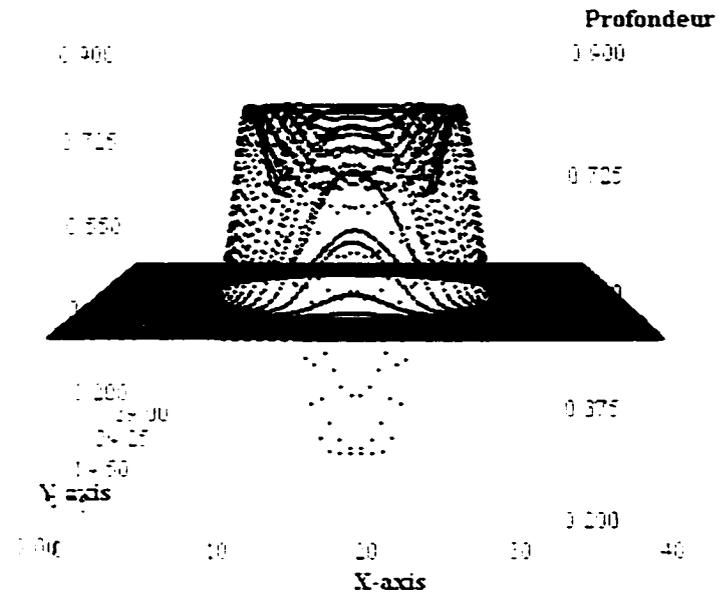


Figure 63 Barrage circulaire –  $t=1.7s$ -  $\alpha = 4$

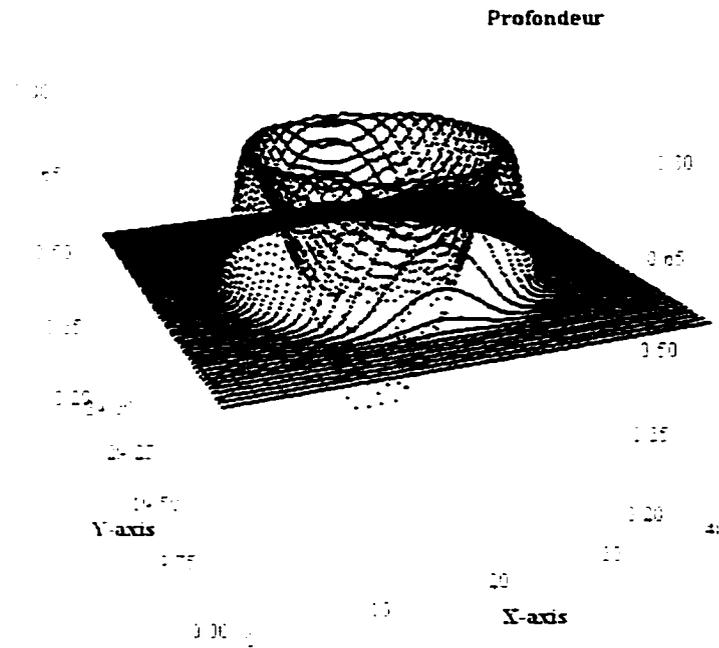


Figure 64 Barrage circulaire –  $t=2.5s$ -  $\alpha = 4$

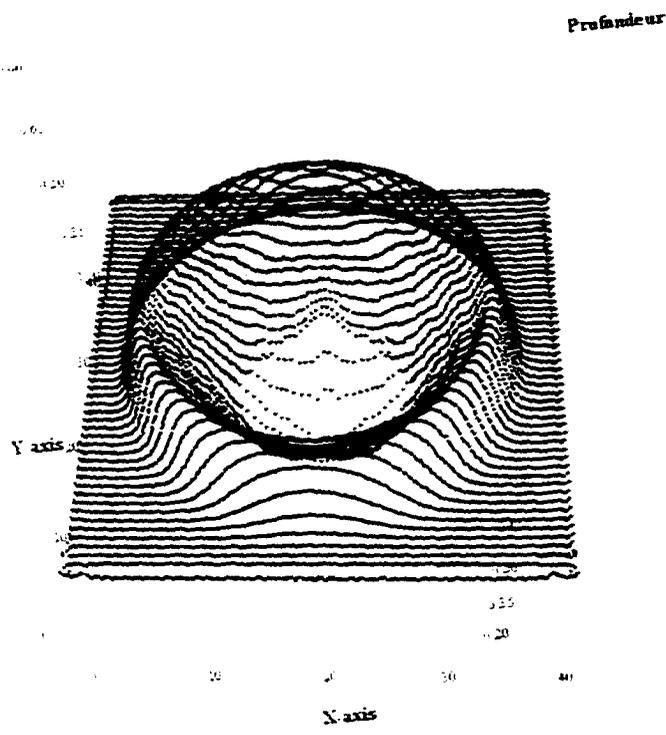


Figure 65 Barrage circulaire -  $t=3.5s$  -  $\alpha = 4$

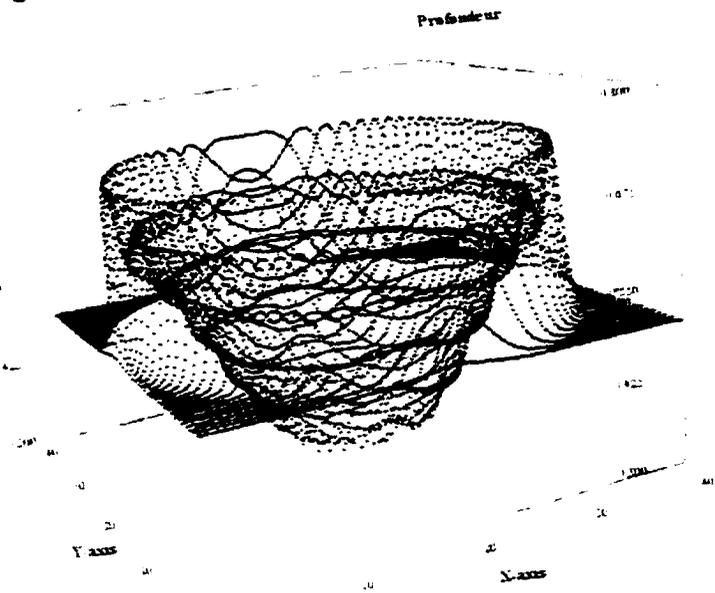


Figure 66 Barrage circulaire -  $t=4.7s$  -  $\alpha=1$

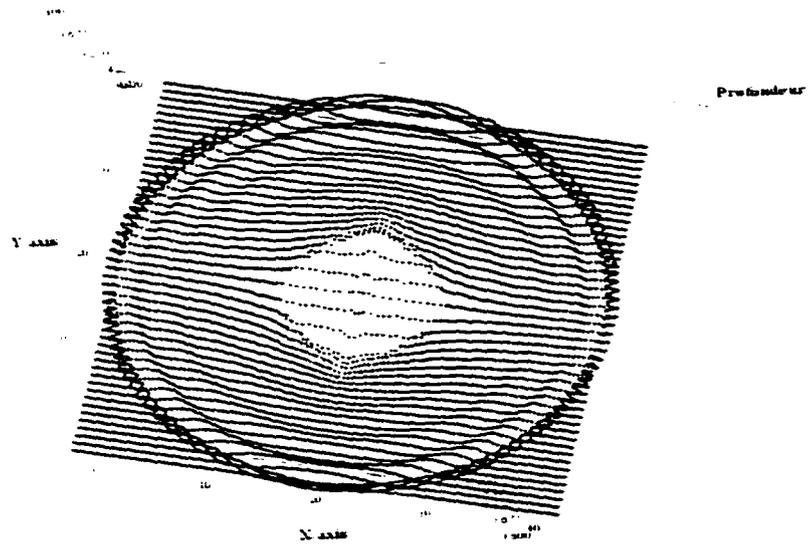


Figure 67 Barrage circulaire -  $t=4.7s$  - vue de dessus

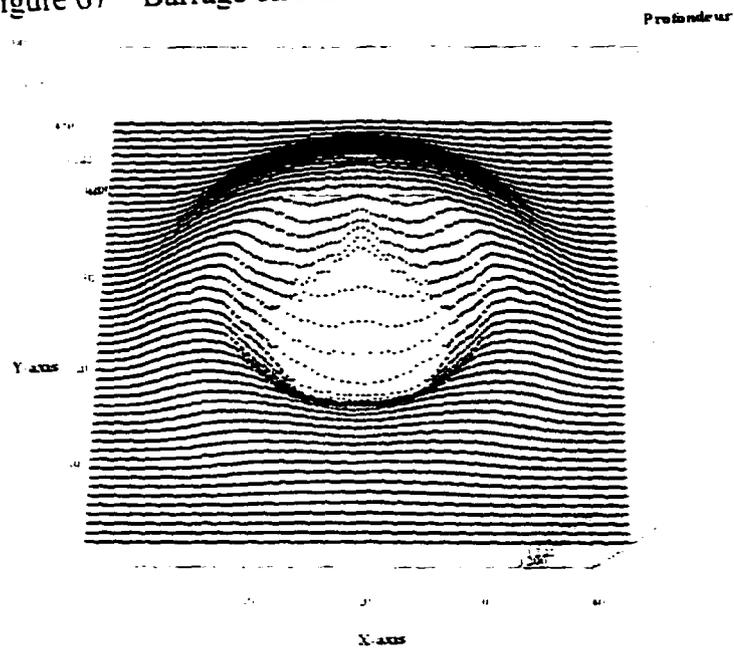


Figure 68 Barrage circulaire - Augmentation de  $\alpha$  -  $\alpha = 8$   $t=3.0s$

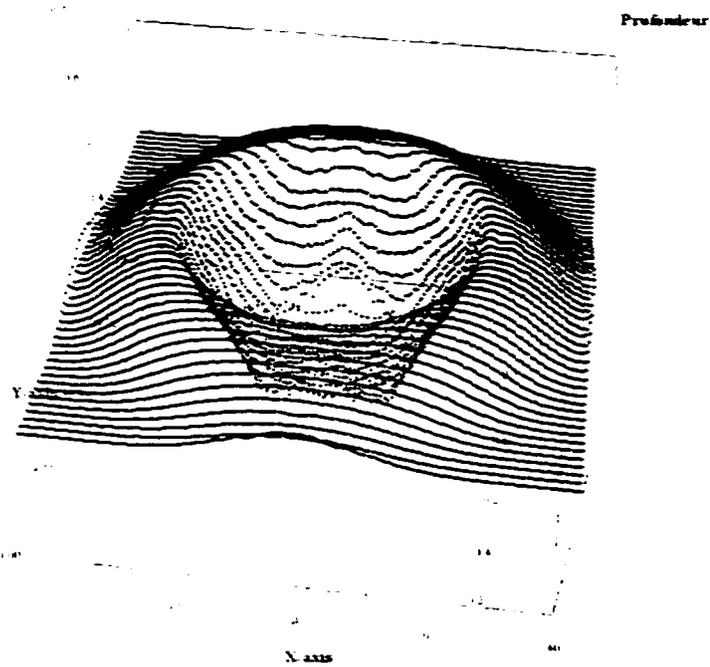


Figure 69 Barrage circulaire - Augmentation de  $\alpha$  -  $\alpha=8$   $t=3.6s$

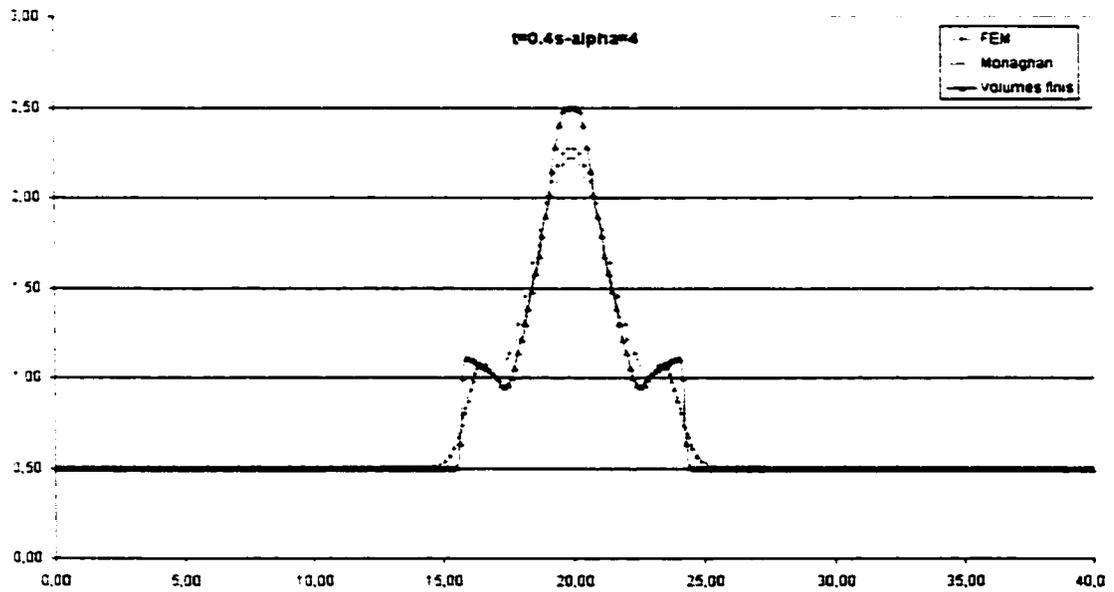


Figure 70 Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=0.4s$ - $\alpha=4$

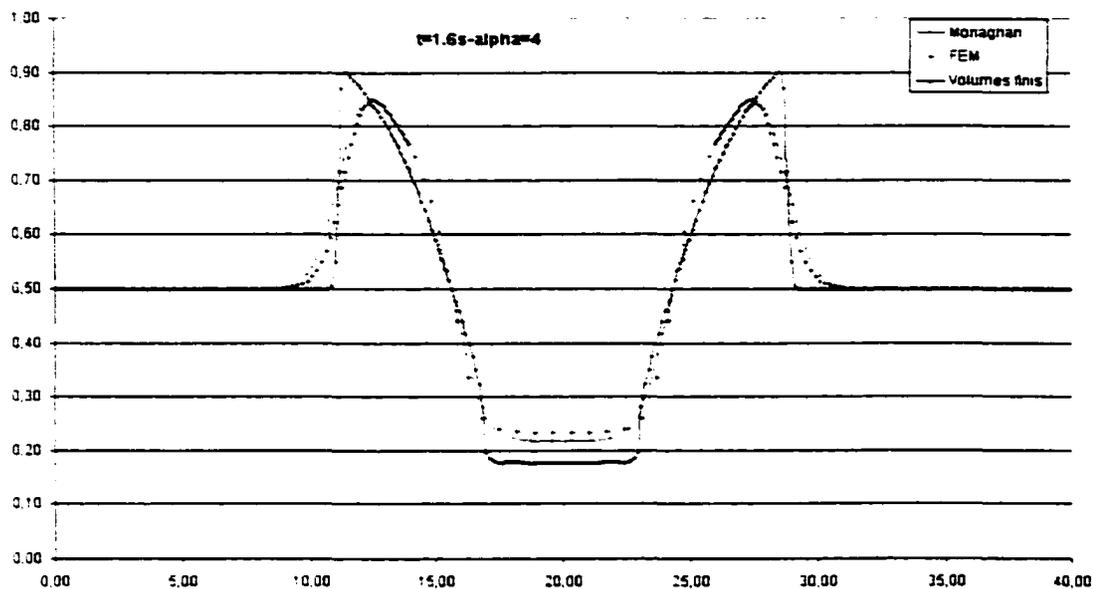


Figure 71 Barrage circulaire-comparaison avec les volumes fins- $t=1.6s - \alpha=4$

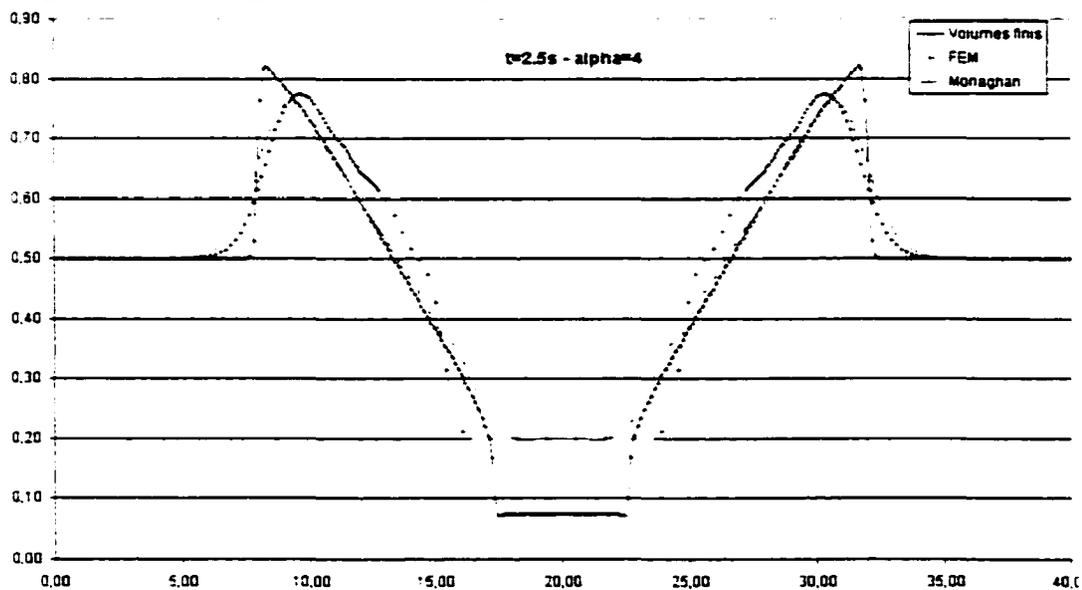


Figure 72 Barrage circulaire-comparaison avec les volumes fins- $t=2.5s - \alpha=4$

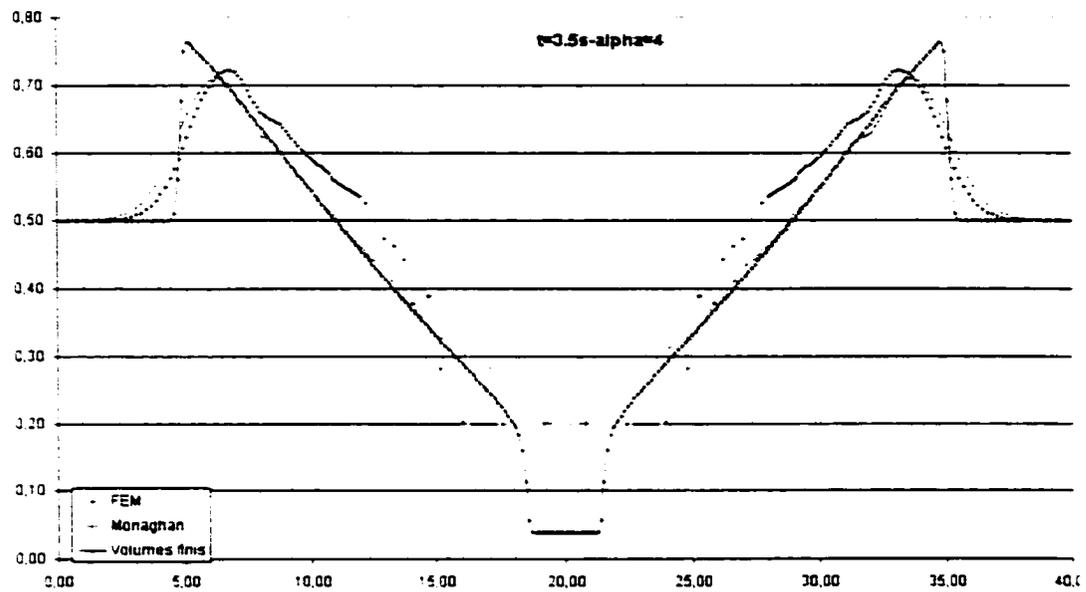


Figure 73 Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=3.5s$ - $\alpha=4$

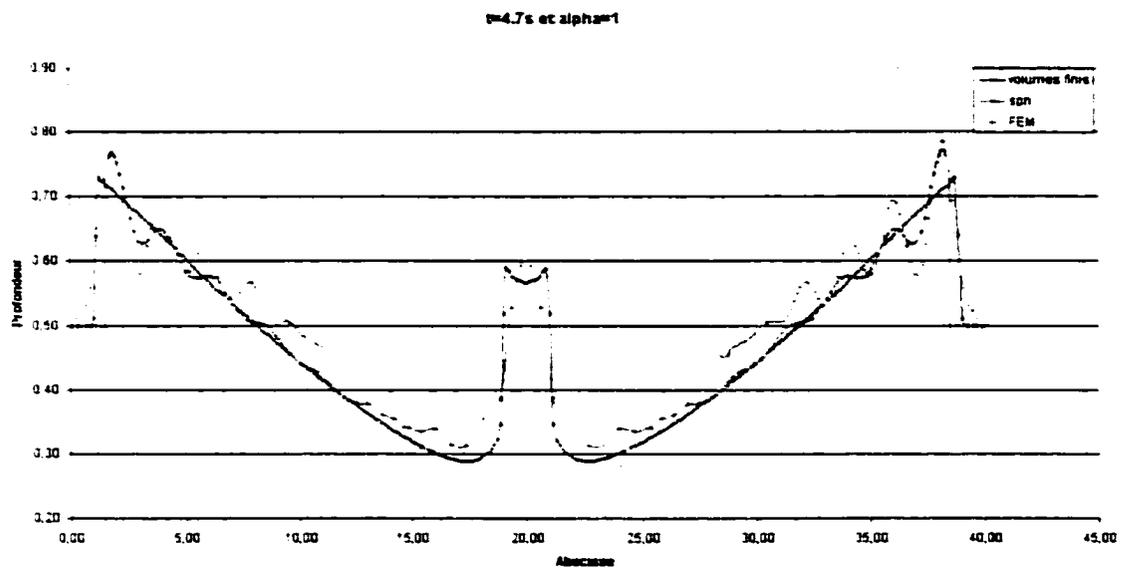


Figure 74 Barrage circulaire-comparaison avec les volumes finis- $t=4.7s$ - $\alpha=4$

## Conclusion

Au cours de ce projet, on s'est intéressé à la modélisation numérique de quelques problèmes d'écoulements à surface libre. Le point commun des problèmes traités est la formulation mathématique qui se base sur les équations de St-Venant. La majeure partie de ce travail a été consacrée au problème de bris de barrage dans de diverses configurations.

Une nouvelle méthode a été adoptée pour résoudre numériquement les équations de St-Venant. Il s'agit de la méthode SPH : Smoothed Particle Hydrodynamics. C'est une méthode purement Lagrangienne qui est basée sur une discrétisation de l'écriture intégrale des équations. La SPH n'est pas basée sur un maillage comme c'est le cas des majeurs outils Euleriens telle que la méthode des éléments finis ou celle des volumes finis. Elle se caractérise par la simplicité de sa mise en oeuvre. Aussi faut-il signaler sa consistance et son adaptation aux géométries complexes et aux problèmes qui présentent des discontinuités et des irrégularités dans leurs domaines de définitions.

Comme première étape de ce projet, on s'est intéressé au problème de bris de barrage en une dimension. Cette étape de familiarisation avec la méthode, a servi à évaluer ses divers paramètres ainsi qu'à voir l'influence de l'ajout de certains termes de stabilisation et de correction. Au terme de cette étape, une formulation optimale de la SPH a été dégagée et a été adoptée pour la suite du travail.

La deuxième partie de ce projet a été consacrée à l'application de la formulation finale de la méthode SPH. Différents cas de problèmes d'écoulements à surface libre en deux dimensions ont été traités. Le premier cas est le cas standard d'un bris de barrage. Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent bien les capacités numériques remarquables de la méthode SPH. Un cas plus complexe a été, par la suite, testé. Il s'agit du problème de barrage avec étranglement. Ce problème présente des singularités très

prononcées et concentrées. Le code a, tant bien que mal, abouti à un résultat qui, bien qu'il présente des oscillations accentuées, reste acceptable.

Le dernier cas testé est le cas d'un barrage circulaire. Les simulations effectuées dans le cadre de ce problème ont été très bien réussies. En effet, la méthode a été capable de capter les chocs et de bien les discerner. Une comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des volumes finis révèle une bonne concordance. Cependant, il reste quand-même des oscillations

Dans ce travail, on a corrigé, d'une part, le résultat déjà publié dans la littérature concernant l'application de la méthode SPH en une dimension [26]. D'autre part, on a poussé l'utilisation de la dite méthode au cas bidimensionnel où elle a montré de bons résultats.

À partir des tests effectués dans ce travail, on peut avancer une évaluation de la méthode SPH dans sa version standard. On peut résumer cette évaluation dans les points suivants :

1. Le nombre minimum de particules requis, pour atteindre un degré donné de précision, doit être déterminé empiriquement. Le nombre optimal de ces particules serait trouvé après l'exécution de quelques tests. Cette remarque a été tirée du problème de bris de barrage standard et de celui du barrage circulaire.
2. L'algorithme de calcul est suffisamment robuste qu'il est capable de tourner même dans les cas où la solution et/ou la géométrie du problème présentent des irrégularités ou des distorsions prononcées. Le cas du problème de barrage avec étranglement confirme cette conclusion.
3. Pour un nombre de particules donné, il y a une longueur de lissage «  $l$  » optimale. Si  $l$  est trop grande, la solution est très lissée dans l'espace, si elle est trop petite, les fonctions lissées deviennent oscillantes [7]. Le choix de la

longueur de lissage doit prendre en considération le choix du noyau et plus précisément son domaine d'influence.

4. Le choix du noyau est très important pour réussir une simulation. Ce choix dépend du problème traité. Un noyau de type Spline est souvent meilleur à cause de son support compact. Cependant, dans certains cas, ce noyau est oscillant (voir le cas du problème standard de bris de barrage en 2D).
5. La méthode SPH a le potentiel d'être applicable dans une large gamme de problèmes. Toutefois, elle a encore besoin de plusieurs développements supplémentaires en particulier concernant la précision, la stabilité et le choix des paramètres.

Une bonne combinaison du paramétrage ajoutée à une bonne adaptation de la géométrie et des conditions aux frontières, sont garantes d'une bonne implémentation de la méthode SPH. Toutefois, la méthode SPH dans sa version originale reste oscillante. Pour surmonter ce problème, une nouvelle formulation combinée SPH-Éléments finis est présentée. Cette version promet d'être plus stable que la version originale. En effet, elle présente une formulation plus lissée puisqu'elle est moyennée sur un ensemble de points et non concentrée en un seul point comme c'est le cas pour la version de Monaghan [17]. En plus, cette nouvelle approche permet d'introduire toutes les techniques de stabilisation et de correction déjà connues de la méthode des éléments finis. Les résultats de cette approche ont montré que cette dernière donne de meilleures reproductions des valeurs de la profondeur dans les premiers instants de la simulation. Les figures 70 et 71 prouvent que la formulation SPH-EF est plus conservative que la formulation standard (elle récupère la profondeur mieux que la version standard).

Ainsi, la méthode SPH, déjà populaire dans le domaine de l'astrophysique et des chocs à grandes vitesses, a réussi à s'introduire dans le domaine des écoulements à surface libre. Les champs d'application de la méthode SPH restent ouverts et variés dans le domaine des écoulements à surface libre. Les écoulements multiphasiques, le phénomène d'érosion et le problème de transport de polluant ne représentent qu'une illustration

limitée des horizons à explorer par la SPH dans ce domaine. Des études supplémentaires sont, par conséquent, à réaliser pour tirer profit de cette méthode dans le but d'aborder des problèmes devant lesquelles les méthodes Euleriennes restent impuissantes.

Des travaux futurs sont, par conséquent, recommandés dans le but de mieux maîtriser la méthode. Ces travaux doivent être orientés vers l'étude et l'optimisation des points suivant :

- La capacité de la méthode à capter correctement les chocs et à retrouver avec précision (optimiser le lissage et diminuer les oscillations) les solutions discontinues des équations de St-Venant.
- Le choix du noyau et des paramètres qui interviennent dans la formulation SPH et spécialement la longueur de lissage et le coefficient  $\alpha$  de la viscosité artificielle.
- La procédure de recherche de voisin et son adaptativité à divers type de problèmes
- La modélisation des conditions aux limites aussi bien spatiales que cinématiques et sa dépendance de chaque type de géométrie ou de problème.
- La possibilité de parallélisation du code développé et ainsi son application dans des problèmes de tailles considérables qui serait très difficiles à implémenter avec le code séquentiel qu'on a développé.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alturi, S. N., Shen, S. (2002) *The Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method*. Tech Science Press.
- [2] Attaway S.W, Swegle J.W.. (1993) *Coupling of smooth particle hydrodynamics with PRONTO* . Nuc. Eng. Des. Vol 150 pp. 265-274
- [3] Benz W.. (1987) Los Alamos national laboratory, private communication.
- [4] Bicknell G.V.. (1991) *The equation of motion of particles in smoothed particle hydrodynamics*. SIAM J.Sci.Stat. Comput.
- [5] Bonet, J., Kulasegraram, S. (1999) *Correction and stabilization of smoothed particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations*. International journal for numerical methods in engineering.Vol.47 pp. 1189-1214
- [6] Chevrolet.D, Audic, S., Bonnini, J. *Bird impact analysis on bladed disk*.
- [7] Cloutman, L.D. (1990). *Basics of smoothed particle hydrodynamics*. Lawrence Livermore National Laboratory report UCRL-ID-103698
- [8] DeNeff.T., Moretti, G. (1980).Shock fitting foreveryone. Computer and fluids, 8<sup>eme</sup> edition. P 217-231.
- [9] Gingold R.A., Monaghan J.J.. (1977) *Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non spheroidal stars*. Monthly notices of the royal astronomical society. Vol 181. pp.375-389

- [10] Lattanzio, J.C. , Monaghan J.J. (1986) , SIAM J.Sci.Stat. Comput. Vol 7 pp.591
- [11] Lattanzio J.C., Monaghan J.J., (1985) astron. astrophys. vol 149 pp. 135-143.
- [12] Libersky, L.D., Petschek, A.G. *smooth particle hydrodynamics with strength materials*. Center of Explosives Technology Research report. pp248-257
- [13] Liu W. K., (1995) *Reproducing kernel particle methods*. International journal for numerical methods in engineering.
- [14] Lu S., Hung T.S. and Randy D.C., (June 1999) *Numerical study of ice jam dynamics in upper Niagara river* . Journal of cold regions engineering. Juin 1999. pp. 78-102
- [15] Lucy L. B., (1977) *A numerical approach to testing of fusion process* . The astronomical journal. Vol 82. pp.1013-1024
- [16] Monaghan J.J., (1992) Journal of computational physics.82,1.
- [17] Monaghan J.J., (1988) *Introduction to SPH*. Computer physics communication. Vol 48. pp.89-96
- [18] Monaghan J.J.,(1994) *Simulating free surface flows with SPH*. Journal of computational physics. p. 399-406.
- [19] Munson, B., Young, D.F., Okiishi, T.H. (1990) *Fundamental of fluid mechanics*. John Wiley Editions. 2<sup>ème</sup> edition.
- [20] Patnaik G., (1987) Journal of computational physics. Vol 71, pp. 1-20

- [21] Soulaïmani, A., Idrissi, M. (1999) *Identification of friction coefficient in shallow-water flows using optimal control theory*. IJCFD, Vol12, pp29-48.
- [22] Soulaïmani, A. (1983) *Nouveaux aspects de l'application de la méthode des éléments finis en hydrodynamique*. Thèse de doctorat. Publication de l'université Laval (Québec).
- [23] Toro E.F., (2001) *Shock capturing methods for free surface shallow water flows*. Wiley editions.
- [24] Vila, J.P., (1999), *On particle weighted methods and smooth particle hydrodynamics*. Mathematical models and methods in applied sciences. vol. 9, no.2, p. 191-209.
- [25] Vila, J.P., Ben Moussa, B., (2000). *Convergence of SPH method for scalar nonlinear conservation laws*. Siam. J. Numer. Anal. Vol37, No3, pp893-887.
- [26] Wang Z., Shen H.T. (1999) *Lagrangian Simulation of one dimensional dam-break flow*. Journal of hydraulic engineering., Vol 125 N 11. p. 1216-1220