

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE LA  
MAÎTRISE EN GÉNIE DE LA PRODUCTION AUTOMATISÉE  
M.Ing.

PAR  
FATNA ASSOULI

COORDINATION DE PLUSIEURS MANIPULATEURS  
POUR DÉPLACER UN OBJET RIGIDE

MONTRÉAL, LE 08 DÉCEMBRE 2003

© droits réservés de Fatna Assouli

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ  
PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

- M. Guy Gauthier, directeur de mémoire  
Département de génie de la production automatisée à  
L'École de technologie supérieure
- M. Maarouf Saad, codirecteur  
Département de génie électrique à  
L'École de technologie supérieure
- M. Pascal Bigras, professeur  
Département de génie de la production automatisée à  
L'École de technologie supérieure
- M. Louis Lamarche, professeur  
Département de génie mécanique à  
L'École de technologie supérieure

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET UN PUBLIC

LE 06 NOVEMBRE 2003

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

## **COORDINATION DE PLUSIEURS MANIPULATEURS POUR DÉPLACER UN OBJET RIGIDE**

Fatna Assouli

### **SOMMAIRE**

Dans ce projet, nous avons traité la coordination de deux manipulateurs robots manipulant un objet rigide. En effet, la coopération de plusieurs robots manipulateurs implique une amélioration de la capacité de manipulation des objets. Ceci est dû au fait que l'on effectue ce traitement soigneusement et avec précision. Cette coordination devrait être en mesure de s'adapter aux variations environnementales. Nous avons commencé par la modélisation du système qui consiste à étudier son comportement dynamique. Pour cela on a modélisé chaque manipulateur individuellement, puis les deux en coordination. Ensuite, après avoir trouvé le modèle de l'objet et la relation mathématique qui décrit la contrainte de point de contact, nous déduisons le modèle global de notre système.

En ce qui concerne le contrôle nous avons choisi la méthode du couple précalculé, afin de compenser la non linéarité de notre système. Nous avons adopté dans le cadre de ce sujet deux types de contrôleurs : a) des contrôleurs conventionnels permettant de contrôler le suivi de trajectoire et la force interne; b) des contrôleurs flous pour le suivi de trajectoire tout en conservant le contrôle conventionnel de la force interne. Le choix de la commande floue est dû au fait que sa réalisation ne nécessite pas la connaissance du modèle du système. Si notre système était composé de plusieurs manipulateurs, sa modélisation et sa commande par l'approche classique deviennent plus compliquées. Par contre, la généralisation de l'approche floue pour la coordination entre plusieurs robots est directe. Nous avons évalué les résultats de simulation obtenus en utilisant deux robots ayant chacun 5 degrés de liberté pour comparer l'efficacité des deux techniques.

## COORDINATION SEVERAL MANIPULATORS TO MOVE A RIGID OBJECT

Fatna Assouli

### ABSTRACT

In this work, we treated the coordination of two manipulators handling a rigid object. In fact, the cooperation of several robots ensures an improvement of the object's handling capacity due to the precision and environmental constraints imposed during the trajectory tracking. We started with the modeling of the system that consists in studying its dynamic behaviour. First, we developed each manipulator's model and then after having found the model of the object and the mathematical relations that describe the constraint of the contact point, we deduce the global model of our system.

Concerning the control part, we chose the computed torque approach in order to obtain a linear closed loop dynamics. This approach can be seen as a particular case of the general feedback linearization technique. Two types of controllers were adopted in this work: a) Conventional controllers allowed to control the trajectory tracking and the internal force; b) Fuzzy controllers for the trajectory tracking with the conventional control of the internal force. The fuzzy controller doesn't generally require any dynamic modeling. If many robots are involved in the coordination task, the modeling and the control become very complicate using the conventional approach. However using the fuzzy approach, the complexity degree is almost the same as using two manipulators. The performance and efficiency of the two approaches are evaluated from simulation results while using two robots having each 5 degrees of freedom.

## REMERCIEMENTS

Je remercie sincèrement mon directeur de recherche Monsieur Guy Gauthier, professeur au département de génie de la production automatisée à l'ÉTS (École de technologie supérieure) et aussi mon co-directeur Monsieur Maarouf Saad, professeur au département de génie électrique à l'ÉTS, sans l'initiative desquels ce projet n'aurait pas été possible. Je tiens à leur exprimer toute ma reconnaissance pour leur dévouement, la confiance qu'ils m'ont accordée, leur rigueur et la qualité des commentaires et suggestions dont ils m'ont fait part.

Je remercie particulièrement mon époux et tous mes amis(es), qui m'ont soutenu et encouragé durant toute la période de mes études, et je dédie ce travail à mes chers enfants : Ali et Elmahdi.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	i
ABSTRACT .....	ii
REMERCIEMENTS .....	iii
TABLE DES MATIÈRES.....	iv
LISTE DES TABLEAUX.....	vi
LISTE DES FIGURES .....	vii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	x
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 MODÉLISATION ET COMMANDE DU SYSTÈME .....	4
1.1 Modélisation d'un manipulateur .....	4
1.2 Modélisation de deux manipulateurs.....	5
1.3 Modélisation de l'objet .....	6
1.4 Modèle de contact et représentation de la prise.....	10
1.5 La contrainte du point de contact.....	16
1.6 Modélisation de l'ensemble.....	20
1.7 Générateur de la trajectoire utilisée dans le contrôle de notre système .....	21
1.8 Contrôle du système manipulateurs - objet.....	22
1.8.1 Description du système.....	22
1.8.2 Description du contrôle en force.....	23
1.8.3 La commande globale du système.....	24
CHAPITRE 2 CONTRÔLE PAR LA LOGIQUE FLOUE .....	26
2.1 Les ensembles flous .....	26
2.2 Étapes de réalisation d'un contrôleur flou .....	29
2.2.1 Étape de fuzzification.....	29
2.2.2 Étape d'inférence.....	30
2.2.3 Étape de défuzzification.....	32
CHAPITRE 3 CONTRÔLE DU SYSTÈME.....	34
3.1 Description des contrôleurs utilisés pour le système.....	34
3.2 Les contrôleurs utilisés pour le suivi de la trajectoire désirée .....	34
3.2.1 Trajectoire désirée avec des translations selon les axes x, y et z de 0.4 m .....	39

3.2.2	Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe z de 0.2 m et une rotation autour de y de 10 degrés.....	48
3.2.3	Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe x de 0.2 m et y de 0.2 m et une rotation autour de x de 45 degrés .....	54
3.2.4	Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe x de 0.2 m et une rotation autour de x de 20 degrés et autour de y et z de 10 degrés.....	60
CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS .....		66
ANNEXE : MODÉLISATION D'UN SEUL ROBOT.....		68
BIBLIOGRAPHIE.....		92

## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Table d'inférence [13] ..... 30
Tableau II	Paramètres des contrôleurs conventionnels des deux robots ..... 35
Tableau III	Étape 2 : Étape d'inférence (Règles floues) ..... 36
Tableau IV	Gains du contrôleur flou utilisés pour les articulations des deux robots. 38
Tableau V	Paramètres cinématiques de Denavit-Hartenberg modifié ..... 73



## LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1	Schéma du système (manipulateurs - objet) .....	4
Figure 2	L'objet manipulé.....	7
Figure 3	Type de contact avec l'objet [21].....	11
Figure 4	Diagramme relationnel entre les points de contact et le centre de masse de l'objet (vitesse, effort).....	18
Figure 5	Schéma du contrôle du système global.....	24
Figure 6	Fonctions d'appartenance [13].....	27
Figure 7	Exemple de pendule inversé [13].....	28
Figure 8	Étapes de mise en œuvre d'un contrôleur flou [13] .....	28
Figure 9	Schéma représentant la loi de commande floue .....	29
Figure 10	Représentation de l'opérateur « min » pour le ET .....	31
Figure 11	Représentation de l'opérateur « max » pour le OU .....	32
Figure 12	Schéma du contrôleur flou proportionnel dérivé .....	35
Figure 13	Étape 1 : Fonctions d'appartenance pour les entrées sortie du contrôleur.....	36
Figure 14	Étape 3 : Surface de commande du contrôleur flou proportionnel dérivé.....	37
Figure 15	Trajectoire cartésienne désirée de l'objet.....	39
Figure 16	Trajectoire cartésienne désirée de l'objet en 3D .....	40
Figure 17	Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur conventionnel) 40	40
Figure 18	Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur flou).....	41
Figure 19	Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur conventionnel).....	41
Figure 20	Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur conventionnel).....	42
Figure 21	Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur flou).....	42
Figure 22	Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur flou).....	43
Figure 23	Trajectoire du centre de masse et des points de contacts (contrôleur conventionnel) .....	43
Figure 24	Trajectoire du centre de masse et des points de contact (contrôleur flou).....	44

Figure 25	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel) .....	45
Figure 26	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou).....	45
Figure 27	Accélérations articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel).....	46
Figure 28	Accélérations articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel).....	47
Figure 29	Accélérations articulaires du robot 1 (contrôleur flou).....	47
Figure 30	Accélérations articulaires du robot 2 (contrôleur flou).....	48
Figure 31	Trajectoire désirée de l'objet .....	48
Figure 32	Erreurs cartésiennes (contrôleur conventionnel) .....	49
Figure 33	Erreurs cartésiennes (contrôleur flou) .....	49
Figure 34	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel) .....	50
Figure 35	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel) .....	51
Figure 36	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur flou) .....	51
Figure 37	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur flou) .....	52
Figure 38	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N) le contrôleur conventionnel.....	53
Figure 39	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N) avec le contrôleur flou.....	53
Figure 40	Trajectoire cartésienne désirée de l'objet.....	54
Figure 41	Trajectoire cartésienne désirée de l'objet en 3D .....	55
Figure 42	Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur conventionnel) .....	56
Figure 43	Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur flou).....	56
Figure 44	Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur conventionnel).....	57
Figure 45	Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur conventionnel).....	58
Figure 46	Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur flou).....	58
Figure 47	Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur flou).....	59
Figure 48	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel) .....	59
Figure 49	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou).....	60

Figure 50	Trajectoire cartésienne désirée de l'objet.....	61
Figure 51	Erreurs cartésiennes (contrôleur conventionnel).....	61
Figure 52	Erreurs cartésiennes (contrôleur flou).....	62
Figure 53	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel) .....	62
Figure 54	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel) .....	63
Figure 55	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur flou) .....	63
Figure 56	Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur flou) .....	64
Figure 57	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel) .....	64
Figure 58	Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou).....	65
Figure 59	Cinématique de Denavit-Hartenberg.....	71
Figure 60	Bras robotisé Maker 100.....	72

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$F_{\text{int}}$	Vecteur des forces internes sur l'objet
$F, F_0$	Vecteur des forces subies par l'objet
$g$	Constante gravitationnelle (9.81 m/s <sup>2</sup> )
$G$	Matrice de prise
$G^+$	Pseudo inverse de la matrice de prise
$H_i(q_i, \dot{q}_i)$	Vecteur représentant les forces de Coriolis et centripètes et de gravité pour le $i^{\text{ème}}$ manipulateur
$H_i(q, \dot{q})$	Vecteur représentant les forces de Coriolis et centripètes et de gravité du système global
$H_0(x, \dot{x})$	Vecteur représentant les forces de Coriolis et centripètes et de gravité de l'objet
$J_1$	Matrice Jacobienne du 1 <sup>er</sup> manipulateur
$J_2$	Matrice Jacobienne du 2 <sup>ème</sup> manipulateur
$J_e$	Matrice Jacobienne du système global
$M_0(x)$	Matrice d'inertie de l'objet
$M_i(q_i)$	Matrice d'inertie pour le $i^{\text{ème}}$ manipulateur
$M_i(q)$	Matrice d'inertie du système manipulateurs et objet
$q$	Vecteur des coordonnées généralisées
$\dot{q}$	Vecteur des vitesses
$q_i$	Vecteur des coordonnées généralisées du manipulateur $i$
$V_{\text{contact}}$	Vecteur vitesse des points de contacts
$x$	Vecteur de position / orientation de l'objet
$\tau$	Vecteur de Couples appliqués aux articulations
$\tau_i$	Vecteur de Couples appliqués aux articulations du manipulateur $i$

## INTRODUCTION

Jusqu'à nos jours, les robots utilisés dans les systèmes manufacturiers réalisent des tâches séparées. Dans le cas de coopérations de plusieurs robots entre eux, cela implique l'amélioration de leur capacité à manipuler soigneusement et avec précision des objets. La prise en compte de coopération passe par l'intégration de ces deux manipulateurs dans une commande coordonnée.

La prise en charge de cet aspect implique la résolution d'un ensemble de problèmes, tel que, la modélisation du système, la génération de trajectoires optimales, la coordination d'un système composé d'au moins deux robots manipulateurs coopérants.

Parmi les différents domaines d'application, il y a premièrement les problèmes de manipulation, d'assemblage et de manutention dans les cellules/ateliers flexibles robotisés. Le problème tient essentiellement à éviter toute collision des manipulateurs entre eux et les objets manipulés.

Ce sujet pourrait être utile pour le cas des cellules robotisées qui font usage à des robots en coordination pour manipuler un objet volumineux et (ou) lourd.

Par exemple, les contraintes induites par l'environnement, sur deux manipulateurs qui déplacent ensemble un objet, étaient prises en compte par Jankowski et al. [7]. La commande retenue par Yun [20] utilise une rétroaction non linéaire, tandis que celle de Jankowski et al. [7] utilise un découplage non-linéaire et une boucle de retour linéarisante.

La modélisation de notre système ou le modèle dynamique utilisé, est basée sur l'approche de Jankowski et al. [7].

La commande utilisée par Hsu [5] dans le cas de l'assemblage de deux objets manipulés par deux robots ayant une certaine coordination est basée sur un régulateur d'accélération pour le suivi de trajectoire et un contrôleur proportionnel intégral pour la commande de la force interne. Nous nous sommes basés sur cette approche pour le contrôle de notre système avant d'implanter la commande floue.

Jaydev et al. [8] se sont basés sur un algorithme développé à partir d'une étude qui traite le comportement des bras humains. Cet algorithme a été implanté pour manipuler un objet par deux bras robotisés.

Gauthier [3] a traité la coordination pour la manipulation d'objets avec un contrôleur flou de la trajectoire; analysant le cas d'un système planaire avec deux manipulateurs déplaçant un objet dans un plan.

Pour le suivi de trajectoire d'un objet manipulé par deux robots dans l'espace cartésien, Haipeng et al. [4] ont étudié et mis en application un type de contrôleur de force de contact basé sur des données dynamiques.

Ce mémoire sera divisé en quatre chapitres. Le premier chapitre examine la modélisation d'un système manipulateurs-objet. Le second chapitre traite du contrôle

du système manipulateurs-objet avec une génération de trajectoire dans l'espace cartésien. Le troisième chapitre décrit le contrôleur flou. Le dernier chapitre présente le contrôle de notre système en introduisant des contrôleurs flous à la place des contrôleurs conventionnels qui ont été utilisés au début du travail. Les résultats de simulations sont présentés et analysés. Et enfin, une conclusion est tirée de tous les résultats des simulations.

## CHAPITRE 1

### MODÉLISATION ET COMMANDE DU SYSTÈME

Dans un premier temps, on procède à la modélisation du système à contrôler. Celui-ci consiste en un ensemble de deux robots ayant 5 degrés de liberté (d.d.l.) manipulant ensemble un objet rigide. La figure 1 permet de mieux saisir le contexte de cette modélisation. Elle montre le cas d'un système de deux robots à 5 d.d.l. déplaçant un objet rigide.

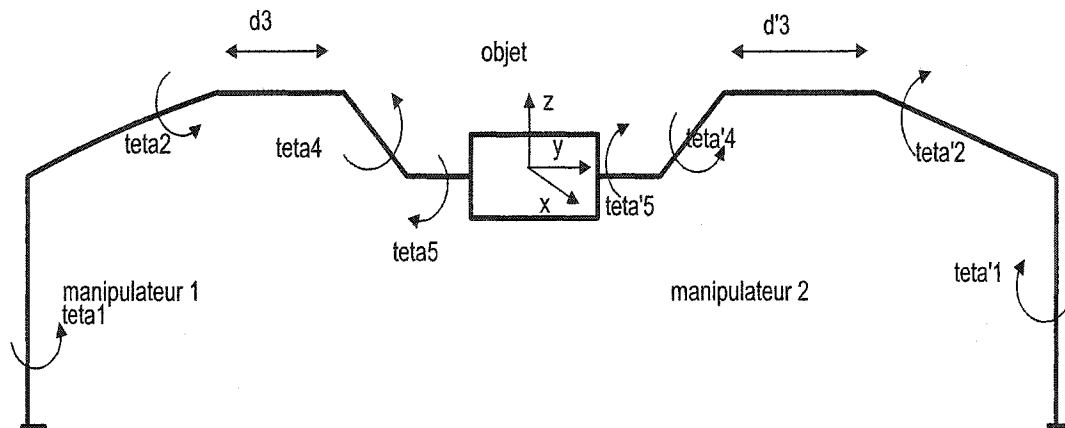


Figure 1 Schéma du système (manipulateurs - objet)

#### 1.1 Modélisation d'un manipulateur

Le modèle du manipulateur (dans notre cas à 5 d.d.l) est donné par Craig [1] :

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + H_i(q_i, \dot{q}_i) = \tau_i \quad (1.1)$$

où  $M_i(q_i)$  est la matrice d'inertie du  $i^{\text{ème}}$  manipulateur;  $i \in \{1, 2\}$  est l'indice identifiant le manipulateur. On retrouve aussi  $q_i$ , le vecteur des coordonnées généralisées pour



chaque manipulateur;  $H_i(q_i, \dot{q}_i)$ , le vecteur prenant en compte les forces de gravité, de Coriolis et centripètes pour chaque manipulateur et  $\tau_i$ , le vecteur des couples appliqués aux articulations de chaque manipulateur.

Le calcul détaillé pour aboutir à une telle équation est montré en annexe.

En prenant en compte l'objet rigide, l'équation précédente sera :

$$M_i(q_i)\ddot{q}_i + H_i(q_i, \dot{q}_i) = \tau_i - J_i^T(q_i)F_{O_i} \quad (1.2)$$

où  $F_{O_i}$  est le vecteur représentant la force résultante appliquée sur l'objet,  $J_i(q_i)$  est la matrice Jacobienne de chaque manipulateur dans le repère de sa base .

## 1.2 Modélisation de deux manipulateurs

Le modèle d'un manipulateur peut être étendu à deux (ou plusieurs) manipulateurs. Ce modèle généralisé sera donné par :

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau - J_E^T(q)F_O \quad (1.3)$$

Dans cette nouvelle équation, les termes sont directement obtenus à partir du modèle d'un seul manipulateur, puisque les deux manipulateurs sont supposés indépendants l'un de l'autre.

Ainsi la nouvelle matrice d'inertie, des deux robots, est donnée par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} M_1(q_1) & 0 \\ 0 & M_2(q_2) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

avec  $M_1$  et  $M_2$  : les matrices d'inertie de chaque manipulateur.

Le nouveau vecteur qui représente les forces de Coriolis, centripètes et de gravité des deux robots est donné par :

$$H(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} H_1(q_1, \dot{q}_1) \\ H_2(q_2, \dot{q}_2) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où  $H_1$  et  $H_2$  sont les vecteurs prenant en compte les effets gravitationnels, de Coriolis et des forces centripètes, de chacun des deux manipulateurs.

Le nouveau vecteur des coordonnées généralisées est construit directement à partir des deux vecteurs de coordonnées des deux manipulateurs et s'écrit  $q = [q_1 \quad q_2]^T$ .

La matrice Jacobienne du modèle complet sera une matrice diagonale par blocs et s'écrira :

$$J_E(q) = \begin{bmatrix} J_1(q_1) & 0 \\ 0 & J_2(q_2) \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont les matrices Jacobiennes de chacun des manipulateurs.

### 1.3 Modélisation de l'objet

L'objet manipulé par les deux manipulateurs est rigide et cubique avec le côté de longueur «  $2r$  » égale à 30 centimètres comme l'indique la figure 2.

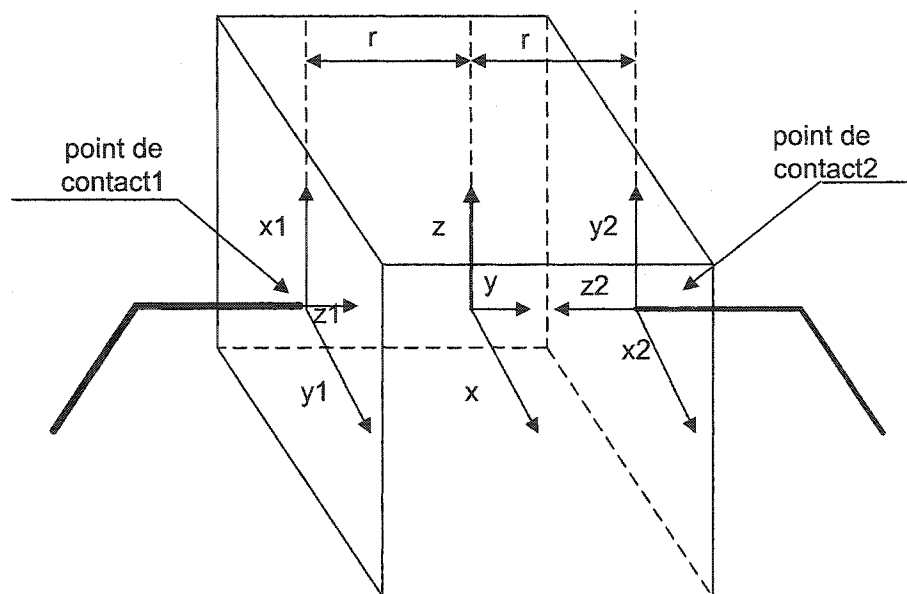


Figure 2 L'objet manipulé

Les variables de l'objet sont définies par :

- Le vecteur  $v_o(m/s) = \begin{bmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \\ v_{oz} \end{bmatrix}$  qui exprime la vitesse linéaire de l'objet par rapport au repère inertiel projetée dans le repère de l'objet.
- Le vecteur  $\omega_o(rd/s) = \begin{bmatrix} \omega_{ox} \\ \omega_{oy} \\ \omega_{oz} \end{bmatrix}$  qui désigne la vitesse angulaire de l'objet par rapport repère inertiel projetée dans le repère de l'objet.
- Le vecteur  $f_o(N) = \begin{bmatrix} f_{ox} \\ f_{oy} \\ f_{oz} \end{bmatrix}$  représente la résultante des forces appliquées sur l'objet par rapport au référentiel de son centre de masse.

- Le vecteur  $\tau_o(N.m) = \begin{bmatrix} \tau_{ox} \\ \tau_{oy} \\ \tau_{oz} \end{bmatrix}$  qui caractérise le couple résultant appliqué à l'objet par rapport au référentiel de son centre de masse.
- $m_o(Kg)$  est la masse de l'objet.
- $j_o(Kg/m^2)$  est le moment d'inertie de l'objet défini tel que :

$$j_o(Kg/m^2) = \left( \frac{m_o l^2}{6} \right) \cdot I_{3 \times 3}$$

avec  $I_{3 \times 3}$  qui est la matrice identité de dimension  $3 \times 3$ .

Pour trouver le modèle dynamique qui caractérise l'objet manipulé, nous utiliserons la méthode de Newton Euler qui exprime son mouvement de translation par :

$$f_o = m_o \dot{v}_o + m_o \omega_o \times v_o = m_o \dot{v}_o + m_o S(\omega_o) v_o \quad (1.7)$$

et son mouvement de rotation par :

$$\tau_o = \omega_o \times j \omega_o + j \dot{\omega}_o = S(\omega_o) j \omega_o + j \dot{\omega}_o \quad (1.8)$$

$$\text{avec } S(\omega_o) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{oz} & \omega_{oy} \\ \omega_{oz} & 0 & -\omega_{ox} \\ -\omega_{oy} & \omega_{ox} & 0 \end{bmatrix}.$$

Si l'on combine les équations (1.7) et (1.8) on aura l'équation du mouvement de l'effort

$F_o = \begin{bmatrix} f_o \\ \tau_o \end{bmatrix}$  défini comme suit :

$$M_o \ddot{X}_o + W_o M_o \dot{X}_o = F_o \quad (1.9)$$

tel que  $\dot{X}_o = \begin{bmatrix} v_o \\ \omega_o \end{bmatrix}$ .

Dans l'équation (1.9),  $M_o = \begin{bmatrix} m_o I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & j_o \end{bmatrix}$  représente la matrice étendue de masse et

$W_o = \begin{bmatrix} S(\omega_o) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & S(\omega_o) \end{bmatrix}$  représente la matrice étendue de vitesse.

Si on pose  $H_o = W_o M_o$ , l'équation (1.9) devient sous la forme suivante :

$$M_o \ddot{X}_o + H_o \dot{X}_o = F_o \quad (1.10)$$

En introduisant le terme de gravité de l'objet l'équation (1.10) peut être mis sous la forme :

$$M_o \ddot{X}_o + H_o \dot{X}_o + G_o = F_o \quad (1.11)$$

$G_o$  caractérise le vecteur résultant du champ gravitationnel appliqué à l'objet par rapport au référentiel de son centre de masse :

$$G_o = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} R^T \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_o g \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R$  est la matrice de rotation du centre de masse de l'objet par rapport au référentiel inertiel.

L'équation (1.11) représente le modèle de l'objet qui représente son comportement dynamique. Avant de faire le bilan dynamique on commence tout d'abord par trouver l'expression exacte de la matrice de rotation de l'objet par rapport au référentiel de base.

Pour déterminer la matrice de rotation du centre de masse de l'objet par rapport au référentiel de l'objet à l'aide des angles d'Euler  $\alpha, \beta, \gamma$  qui correspondent successivement aux angles de rotation autour des axes x, y, z, on se base sur la figure 1 qui indique que la rotation de l'objet se fait autour de y puis autour de z et finalement autour de x, et par conséquent on a la matrice de rotation qui s'exprime par :

$$R_{yx}(\beta, \gamma, \alpha) = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & -s\beta & c\beta s\alpha \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha c\gamma & s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

#### 1.4 Modèle de contact et représentation de la prise

Dans le cas du système que nous avons étudié, les contacts des deux effecteurs sont avec frottement combinés (translation et rotation), et ceci comme montré à la figure 3. Les forces des frottements sont exercées sur l'objet dans toutes les directions appartenant à une surface conique.

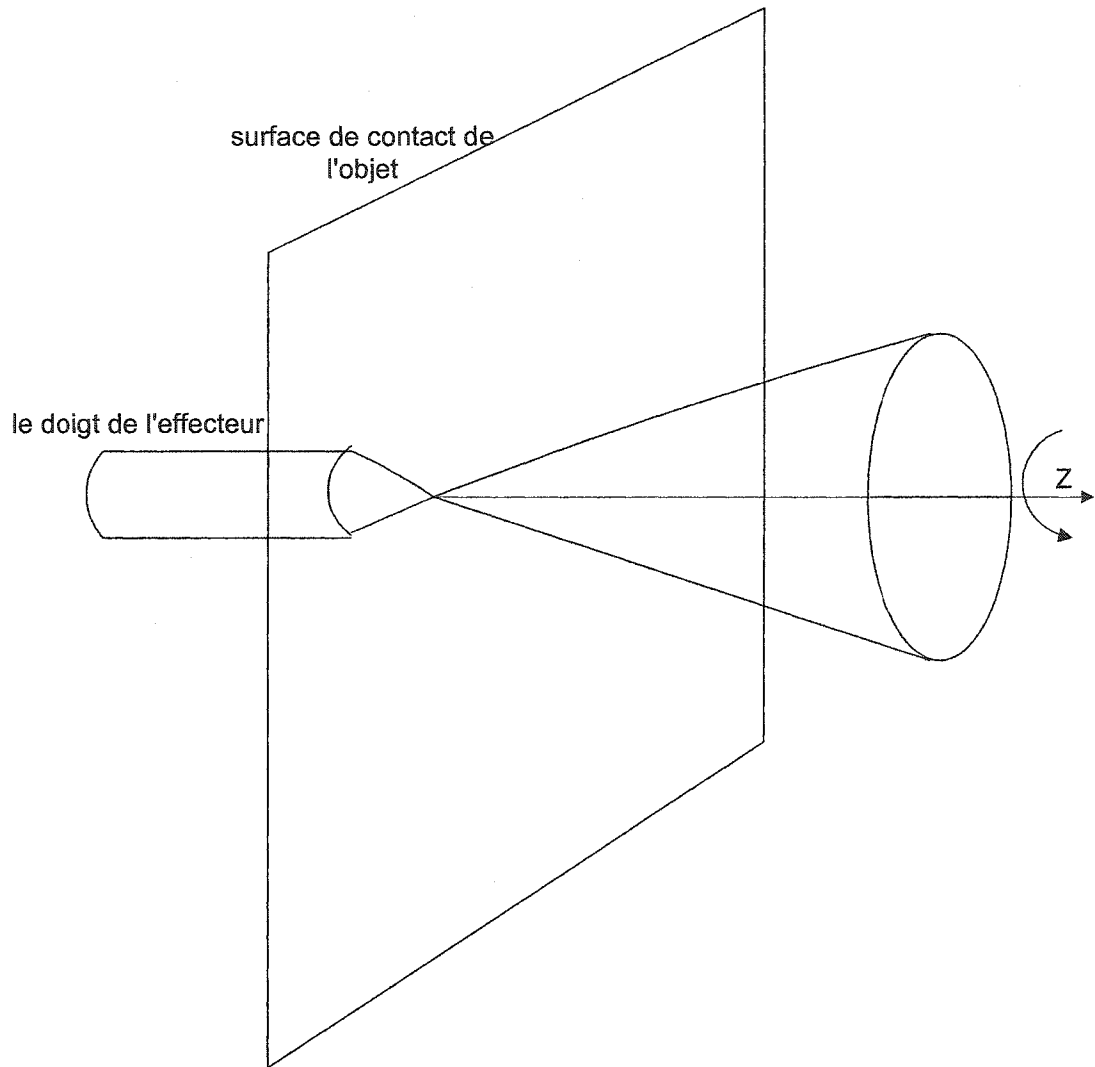


Figure 3 Type de contact avec l'objet [21]

Les efforts de contacts  $F_{c_i}$  sont appliqués sur la surface de l'objet avec frottements combinés (translation et rotation). Ces forces de contacts sont exercées suivant les trois axes  $x$ ,  $y$ , et  $z$  avec un seul couple normal suivant l'axe  $z$  comme l'indique la figure 3 et on a l'expression suivante :

$$F_{c_i} = B_{c_i} f_{c_i}, B_{c_i} \in \mathfrak{R}^{m_i \times p} \quad (1.13)$$

Dans notre cas, nous avons un mouvement en 3D (voir figure 3), et nous avons  $p = 4$  pour notre cas car les efforts sont composés par des forces selon X, Y, Z et une torsion selon l'axe Z. En ce qui concerne le paramètre  $m_i$ , celui-ci représente le nombre des forces et des couples appliquées par les points de contacts sur l'objet, alors dans notre cas nous avons  $m_i = 6$ . Par conséquent suivant l'équation (1.12), nous obtenons l'expression suivante :

$$F_{c_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_{c_i}$$

avec  $f_{c_i} \in FC$  sachant que  $FC$  est un sous-ensemble de  $\mathfrak{R}^6$  [21].

Les points de contact des manipulateurs 1 et 2 sont respectivement  $f_{c_1} = f_{c_1}$  et  $f_{c_2} = f_{c_2}$ .

La matrice de transformation des efforts des points de contact  $F_{c_i}$  par rapport au référentiel du centre de masse de l'objet est dite matrice de prise, elle est définie à travers l'expression (1.14) présentée ci-dessous :

$$F_{o_i} = \begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ \hat{p}_{oc_i} R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix} B_{c_i} f_{c_i} \quad (1.14)$$

$R_{oc_i}$  est la matrice de rotation du référentiel du point de contact par rapport au référentiel du centre de masse de l'objet. Le paramètre  $p_{c_i}$  est le vecteur de translation



de l'origine du référentiel du point de contact par rapport au référentiel du centre de masse de l'objet. La matrice de prise du  $i^{\text{ème}}$  manipulateur est définie par :

$$G = \begin{bmatrix} R_{oc_i} & 0 \\ \hat{p}_{oc_i} R_{oc_i} & R_{oc_i} \end{bmatrix} B_{c_i} \quad (1.15)$$

La figure 2 indique les points de contacts des deux manipulateurs 1 et 2 avec l'objet tels que l'on a dans notre système.

Les matrices de rotation du référentiel des points de contact des manipulateurs 1 et 2

par rapport au référentiel de l'objet sont respectivement  $R_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et

$$R_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs de translation de l'origine du référentiel du point de contact des manipulateurs 1 et 2 jusqu'à l'origine du référentiel de l'objet sont égaux à  $p_{c_1} = [0 \ -r \ 0]^T$  et  $p_{c_2} = [0 \ r \ 0]^T$  où  $r$  représente la distance entre les deux origines.

Les matrices anti-symétriques correspondant aux deux vecteurs  $p_{c_1}$  et  $p_{c_2}$  sont

$$\text{respectivement } \hat{p}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \hat{p}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons aussi :

$$B_{c_1} = B_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices de prise des manipulateurs 1 et 2 sont définies par  $G_{c_1} = \begin{bmatrix} R_{c_1} & 0 \\ \hat{P}_{c_1} R_{c_1} & R_{c_1} \end{bmatrix} B_{c_1}$

et  $G_{c_2} = \begin{bmatrix} R_{c_2} & 0 \\ \hat{P}_{c_2} R_{c_2} & R_{c_2} \end{bmatrix} B_{c_2}$ .

Par conséquent, nous avons les deux matrices suivantes :

$$G_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & r & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } G_{c_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce que nous amène à la matrice de prise globale :

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

L'équation (1.10) devient sous sa nouvelle forme :

$$M_o \ddot{X}_o + H_o \dot{X}_o + G_o = GF_c \quad (1.17)$$

Le vecteur  $F_c$  représente l'ensemble des efforts de contacts fournis par les manipulateurs qui interagissent avec l'objet, ce vecteur est constitué de deux parties, une qui sert à déplacer l'objet et l'autre qui provoque des contraintes internes sur l'objet. La matrice de prise  $G$  quand à elle sert à transformer les efforts des référentiels des points de contacts au référentiel du centre de masse de l'objet. Ainsi, pour faire apparaître ces efforts internes, on réécrit l'équation (1.17) sous sa nouvelle forme définie comme suit :

$$F_c = G^+ (M_o (X_o) \ddot{X}_o + H_o (X_o, \dot{X}_o)) + F_{\text{int}} \quad (1.18)$$

avec  $H_o (X_o, \dot{X}_o) = H_o \dot{X}_o + G_o$ .

En posant  $F_m = G^+ (M_o (X_o) \ddot{X}_o + H_o (X_o, \dot{X}_o))$ , on peut écrire  $F_c = F_m + F_{\text{int}}$ .

Ceci met en évidence la composante des efforts pour déplacer l'objet (identifiée par  $F_m$ ) et la composante provoquant des contraintes internes dans l'objet. La matrice  $G^+$  est le pseudo inverse de  $G$ .

Les efforts internes sont définis comme suit :

$$F_{\text{int}} = Pf_{\text{int}} \quad (1.19)$$

tel que :  $GP = 0$

$P$  est une base orthogonale de l'espace nul de  $G$  obtenue à partir de la décomposition en valeurs singulières ou SVD puisque l'effort interne qui s'effectue sur chaque point de contact est composé par une force sur l'axe  $z$  et un couple sur l'axe  $z$ .

$$\text{Ainsi, } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad f_{\text{int}} = \begin{bmatrix} f_{c_{iz}} \\ \tau_{i\theta} \end{bmatrix}, \quad f_{c_{iz}} = K_z \Delta d \quad \text{et} \quad \tau_{i\theta} = K_\theta \Delta \theta \quad \text{avec}$$

$K_z$  et  $K_\theta$  sont les constantes de déformation de l'objet . Dans ces expressions :

$\Delta d$  est la déformation linéaire de l'objet due aux forces internes.

$f_{c_{iz}}$  est la force normale due à cette déformation linéaire .

$\Delta \theta$  est la déformation angulaire de l'objet due aux forces internes.

$\tau_{i\theta}$  est le couple normal du à cette déformation angulaire .

### 1.5 La contrainte du point de contact

Pour avoir le modèle global du système robots et objet, il faut définir la liaison mathématique qui détermine la contrainte du point de contact entre les robots et l'objet. Pour cela on utilise un diagramme (figure 4 [21]) qui représente toutes les transformations possibles entre les points de contact.

Notre but est de manipuler un objet à l'aide de deux robots ayant leurs effecteurs en contact avec l'objet. Les points de contact (celui de chaque robot et celui de l'objet) doivent être au même endroit dans l'espace. Les vitesses de tous les points de contact sont déterminées par rapport à l'objet dans le référentiel de base.

Elles peuvent être exprimées par le vecteur suivant :

$$\dot{x}_{\text{contact}} = G^T V_o \quad (1.20)$$

où  $\dot{x}_{contact}$  est le vecteur des vitesses du repère de contact par rapport au repère inertiel projetées dans le repère de contact et  $V_o$  représente le vecteur vitesse du centre de masse de l'objet qui engendre la vitesse linéaire et angulaire de l'objet. Ainsi, la contrainte cinématique qui s'applique sur les deux robots lors de la manipulation de l'objet est entièrement décrite par la matrice de prise  $G$ . Donc,  $V_o$  est la vitesse de l'objet projetée dans le repère de l'objet. Par contre, la vitesse de l'objet par rapport au référentiel de base est :

$$V = \begin{bmatrix} R_{YZX} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & R_{YZX} \end{bmatrix} V_o$$

Les vitesses de ces points de contact dans les référentiels des effecteurs des robots peuvent être exprimées par le vecteur suivant :

$$\dot{x}_{contact} = J_E \dot{q} \quad (1.21)$$

Donc, on peut écrire :

$$G^T V_o = J_E \dot{q} \quad (1.22)$$

Afin de pouvoir établir un bilan qui détermine les transformations entre les points de contacts et le centre de masse de l'objet, on présente sur la figure 4 le diagramme qui explique ces transformations. Ce diagramme indique que pour effectuer ce traitement on doit faire une transformation de la matrice Jacobienne globale des manipulateurs.

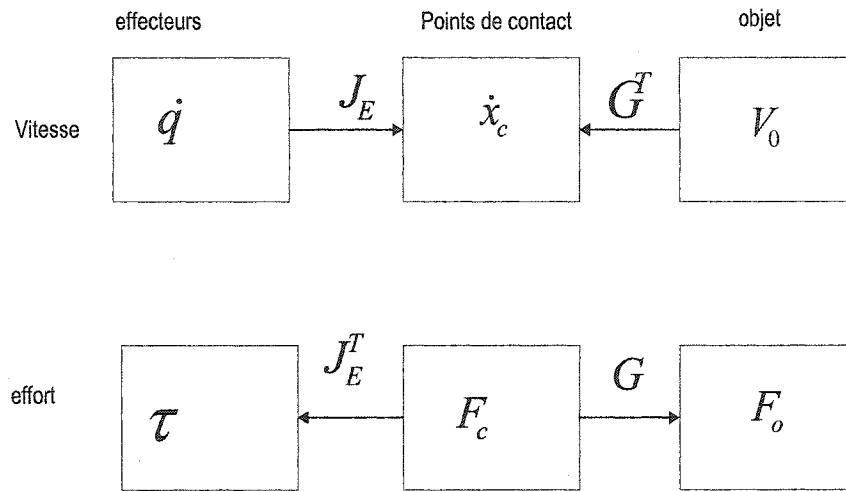


Figure 4 Diagramme relationnel entre les points de contact et le centre de masse de l'objet (vitesse, effort)

On sait que le vecteur vitesse dans un référentiel A peut être transformé dans un autre référentiel B par la transformation suivante :

$$\begin{bmatrix} {}^A v \\ {}^A w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A R & 0 \\ 0 & {}^A R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^B v \\ {}^B w \end{bmatrix}$$

ce que implique que la transformation de la matrice Jacobienne est définie comme suit :

$${}^A J(\theta) = \begin{bmatrix} {}^A R & 0 \\ 0 & {}^A R \end{bmatrix} {}^B J(\theta) \quad (1.23)$$

La transformation de vitesse du point de contact de chaque effecteur avec l'objet du référentiel de base dans le référentiel du point de contact est définie comme suit, si on note « S » le référentiel de base et « C » celui du point de contact :

$$\begin{bmatrix} {}^s v \\ {}^s w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^s R & 0 \\ 0 & {}^s R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c v \\ {}^c w \end{bmatrix}$$

En introduisant la matrice  $B_{c_i}$  définie ultérieurement, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} {}^c v \\ {}^c w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^s R^T B_{c_i}^T & 0 \\ 0 & {}^s R^T B_{c_i}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^s v \\ {}^s w \end{bmatrix}$$

donc la matrice Jacobienne pour chaque point de contact est :

$$J_{Ei} = \begin{bmatrix} {}^s R^T B_{c_i} & 0 \\ 0 & {}^s R^T B_{c_i} \end{bmatrix} J_i$$

$$J_E = \begin{bmatrix} J_{E1} & 0 \\ 0 & J_{E2} \end{bmatrix}$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont respectivement les matrices Jacobiennes des effecteurs 1 et 2.

En dérivant (1.22) et en isolant le terme de l'accélération de l'objet, on obtient :

$$\ddot{X}_o = (G^T)^+ [J_E \dot{q} + J_E \ddot{q}] \quad (1.24)$$

avec le terme  $(G^T)^+$  qui représente le pseudo-inverse de la transposée de la matrice de prise G.

## 1.6 Modélisation de l'ensemble

Pour écrire les équations générales du modèle complet, on va combiner l'équation de l'objet et celle des manipulateurs, i.e., on va remplacer  $F_o = F$ . Combinant les équations (1.3) et (1.9) on trouve :

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau - J_E^T G^+ [M_o(X_o)\ddot{X}_o + H_o(X_o, \dot{X}_o)] - J_E^T F_{\text{int}} \quad (1.25)$$

Pour tenir compte de la contrainte du point de contact, l'équation (1.24) est utilisée dans l'équation précédente, pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \left[ M(q) + J_E^T G^+ M_o(X_o) (G^T)^+ J_E \right] \ddot{q} + H(q, \dot{q}) + \\ & J_E^T G^+ M_o(X_o) (G^T)^+ J_E \dot{q} + J_E^T G^+ H_o(X_o, \dot{X}_o) = \tau - J_E^T F_{\text{int}} \end{aligned} \quad (1.26)$$

Posons :

$$M_i(q, X_o) = M(q) + J_E^T G^+ M_o(X_o) (G^T)^+ J_E \quad (1.27)$$

et

$$H_i(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) = H(q, \dot{q}) + J_E^T G^+ M_o(X_o) (G^T)^+ J_E \dot{q} + J_E^T G^+ H_o(X_o, \dot{X}_o) \quad (1.28)$$

Alors, l'équation de l'ensemble sera donnée par :

$$M_i(q, X_o)\ddot{q} + H_i(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) + J_E^T F_{\text{int}} = \tau \quad (1.29)$$

Cette équation ressemble beaucoup au modèle d'un manipulateur standard, où une partie des couples appliqués aux manipulateurs sert à déplacer l'objet, et l'autre partie sert à générer les forces internes sur l'objet.



### 1.7 Générateur de la trajectoire utilisée dans le contrôle de notre système

Pour générer la trajectoire du centre de masse de l'objet dans l'espace cartésien, on a pris un cas avec un point de départ  $x_i$  et le point d'arrivée  $x_f$ . La trajectoire est définie comme suit :

$$X_{od} = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \quad (1.30)$$

Le temps total de la trajectoire pour notre simulation était fixé à T (temps de simulation) en secondes. Pour trouver les vecteurs  $q_1$  et  $q_2$  (vecteurs des coordonnées généralisées) du poignet de chaque manipulateur, on a procédé de la façon suivante.

En premier lieu, les positions du point de contact de chaque manipulateur avec l'objet sont calculées. Ces positions sont identifiées par  $x_{contact1}$  et  $x_{contact2}$ . Ainsi,  $x_{contact1}$  est le vecteur de la position du point de l'extrémité de l'outil du manipulateur 1 exprimé dans le référentiel de base,  $x_{contact2}$  est le vecteur correspondant pour le manipulateur 2.

Donc :

$$x_{contact1} = \begin{bmatrix} x_{c1} \\ y_{c1} \\ z_{c1} \\ \theta_{c1} \\ \psi_{c1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ob} + R_{yzz}p_{c1} - b_{r1} \\ -\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } x_{contact2} = \begin{bmatrix} x_{c2} \\ y_{c2} \\ z_{c2} \\ \theta_{c2} \\ \psi_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{ob} - R_{yzz}p_{c2} - b_{r2} \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans ces deux vecteurs :

$X_{ob}$  est le vecteur de déplacement du centre masse de l'objet dans le référentiel de base.

$\alpha$  est l'angle de rotation de l'objet autour de l'axe X.

$b_{r1}$  est le vecteur de position de référentiel de robot 1 au référentiel de base.

$b_{r2}$  est le vecteur de position de référentiel de robot 2 au référentiel de base.

Et  $R_{yzt}$  est la matrice de rotation de l'objet par rapport à son centre de masse.

En ayant ces données, on calcule ensuite, à l'aide de la cinématique inverse, les vecteurs de coordonnées généralisées  $q_1$  et  $q_2$  pour les points de contact des effecteurs des deux robots (voir la cinématique inverse du robot Maker 100 en annexe).

Ces vecteurs de coordonnées généralisées définissent ainsi la trajectoire de chaque robot qui fera en sorte que le centre de masse de l'objet suive la trajectoire voulue.

Ainsi, on obtient le système manipulateurs-objet en se basant sur son modèle dynamique global. Le contrôle de ce système est présenté à la section suivante.

## 1.8 Contrôle du système manipulateurs - objet

Dans ce chapitre on va aborder la description du contrôle du système constitué d'un contrôleur proportionnel-dérivée (conventionnel ou flou) pour le suivi de trajectoire; Celui ci sera remplacé par la suite par un contrôleur flou, un contrôleur (proportionnel-Intégral) est utilisé pour maintenir la force interne désirée.

### 1.8.1 Description du système

Pour le suivi de trajectoire du système, on a appliqué une commande de type couple pré calculé (Computed-torque) avec l'utilisation d'un contrôleur (proportionnel dérivée).

Rappelons tout d'abord l'équation du mouvement global du système (1.29) qui est la suivante :

$$M_i(q, X_o)\ddot{q} + H_i(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) + J_E^T F_{int} = \tau$$

Selon cette équation les couples appliqués peuvent être représentés par deux composantes, l'une sert au déplacement de l'objet et l'autre partie sert à générer les forces internes sur l'objet.

Pour un bon suivi de trajectoire avec le régulateur d'accélération, les couples qui servent à déplacer l'objet sont définis comme suit :

$$M_t(q, X_o)(\ddot{q}_d - K_v(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d)) + H_t(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) = \tau_1 \quad (1.31)$$

avec  $K_p$  et  $K_v$ , les gains du contrôleur PD conventionnel et  $\tau_1$  représente le couple de la partie assurant le déplacement de l'objet. La matrice d'inertie et le vecteur des forces de Coriolis sont estimés dans cette commande.

### 1.8.2 Description du contrôle en force

Pour contrôler l'intensité de la force interne, on utilise un contrôleur proportionnel-intégral (PI) représenté par l'équation suivante :

$$F_{ID} = F_{int_d} + K_I \int (F_{int} - F_{int_d}) dt \quad (1.32)$$

La loi de commande du contrôleur est représentée comme suit :

$$\tau_{int} = J_E^T F_{ID} \quad (1.33)$$

En tenant compte de (1.19) la relation (1.33) deviendra :

$$\tau_{int} = J_E^T P f_{ID} \quad (1.34)$$

### 1.8.3 La commande globale du système

Le schéma de notre système avec le contrôle est représenté à la figure suivante :

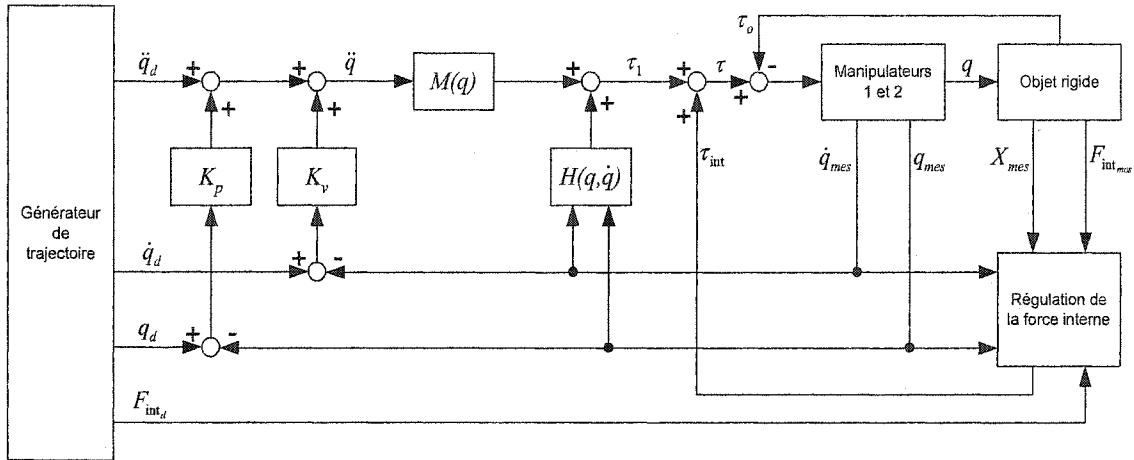


Figure 5 Schéma du contrôle du système global

La commande globale du système est alors la somme des équations (1.34) et (1.31) qui viennent remplacer le terme de droite de l'équation (1.29) [3] est donc présentée comme suit :

$$M_t(q, X_o)\ddot{q} + H_t(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) + J_E^T P f_{int} = M_t(q, X_o)(\ddot{q}_d - K_v(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d)) + H_t(q, \dot{q}, X_o, \dot{X}_o) + J_E^T P f_{ID} \quad (1.35)$$

Si on simplifie l'équation précédente, on obtient :

$$M_t(q, X_o)((\ddot{q} - \ddot{q}_d) - K_v(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d)) = J_E^T P (f_{ID} - f_{int}) \quad (1.36)$$

Une stratégie pour aller plus loin est de prémultiplier les deux cotés de l'égalité par le pseudo inverse de  $(J_E^T)^+$  et par la matrice de prise G donc on trouve :

$$G(J_E^T)^+ M_t(q, X_o) \left( (\ddot{q} - \ddot{q}_d) - K_v(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d) \right) = GP(f_{ID} - f_{int}) \quad (1.37)$$

Il est important de noter que  $GP = 0$ , car P est un vecteur situé dans l'espace nul de G.

On aura alors :

$$G(J_E^T)^+ M_t(q, X_o) \left( (\ddot{q} - \ddot{q}_d) - K_v(\dot{q} - \dot{q}_d) - K_p(q - q_d) \right) = 0 \quad (1.38)$$

avec  $K_v$  et  $K_p$  sont des matrices gains diagonales et définies positives.

De l'équation (1.38) on remarque que la dynamique de l'erreur peut être dans l'espace nul de  $G(J_E^T)^+ M_t(q, X_o)$ , donc on ne peut pas affirmer avec certitude que l'erreur converge vers zéro .

Pour la force interne l'erreur peut être dans l'espace nul de GP, et par conséquent la convergence de  $f_{int}$  vers  $f_{ID}$  n'est pas garantie. D'autres stratégies de commande peuvent corriger cet inconvénient.

Les résultats des simulations réalisées avec cette configuration sont montrés et analysés au chapitre 3. Remarquons que si on regarde toutes les simulations qui ont été faites, on a presque toutes les erreurs articulaires qui converge vers zéro. Il en est de même pour la force interne qui convergeait vers la valeur désirée.

## CHAPITRE 2

### CONTRÔLE PAR LA LOGIQUE FLOUE

#### 2.1 Les ensembles flous

Le concept de base d'un ensemble flou est considéré comme étant des classes d'objets. La fonction d'appartenance, de ces objets à la classe, est une fonction qui prend des valeurs courantes entre 0 et 1, contrairement aux ensembles «booléens», dont la fonction caractéristique ne prend que deux valeurs possibles 0 ou 1.

Ces ensembles flous constituent une représentation mathématique de variables linguistiques largement utilisés dans l'expression de connaissances expertes, qualitatives et manipulées dans le raisonnement approché qui sera fait à partir de cette connaissance.

Les ensembles flous ont entre autre la propriété de modéliser des contraintes souples, et des informations incomplètes. Cette propriété leur permet de résoudre aisément plusieurs problèmes.

Pour donner une introduction à cette notion, prenons un exemple tiré de l'ouvrage de Mokhtari [13] qui traite l'âge d'une personne qui est souvent défini par trois classes : jeune, âge moyen et âgé, dans un intervalle allant de zéro à cent ans.

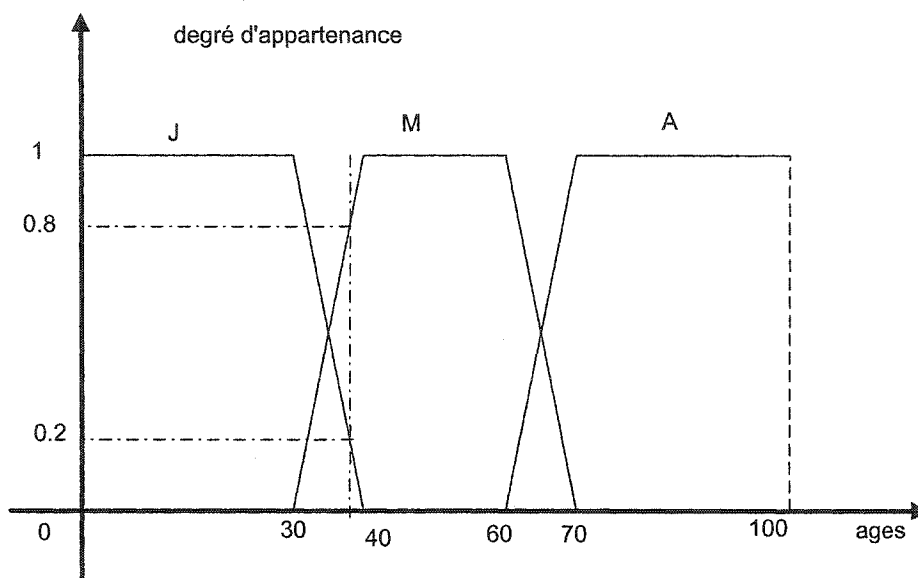


Figure 6 Fonctions d'appartenance [13]

La figure 6 nous permet de dire qu'une personne âgée de 38 ans est à 20% jeune et à 80% d'âge moyen. Ceci est interprété par le fait que les degrés d'appartenance à ces deux classes d'âge sont égales à 0.2 pour l'ensemble flou J et à 0.8 pour l'ensemble flou M.

La figure 6 montre que les fonctions d'appartenance des ensembles flous J, M et A (âgé) sont successivement représentés en Z, en trapézoïdale et en S [13].

Le domaine dans lequel la logique floue a été le plus souvent appliquée est celui du contrôle des procédés industriels qui ne possèdent pas de modèles mathématiques ou qui ont des modèles fortement non linéaires.

Prenons l'exemple d'un pendule inversé, pour lequel on doit maintenir sa position verticale en appliquant une force au chariot qui le supporte (voir figure 7).

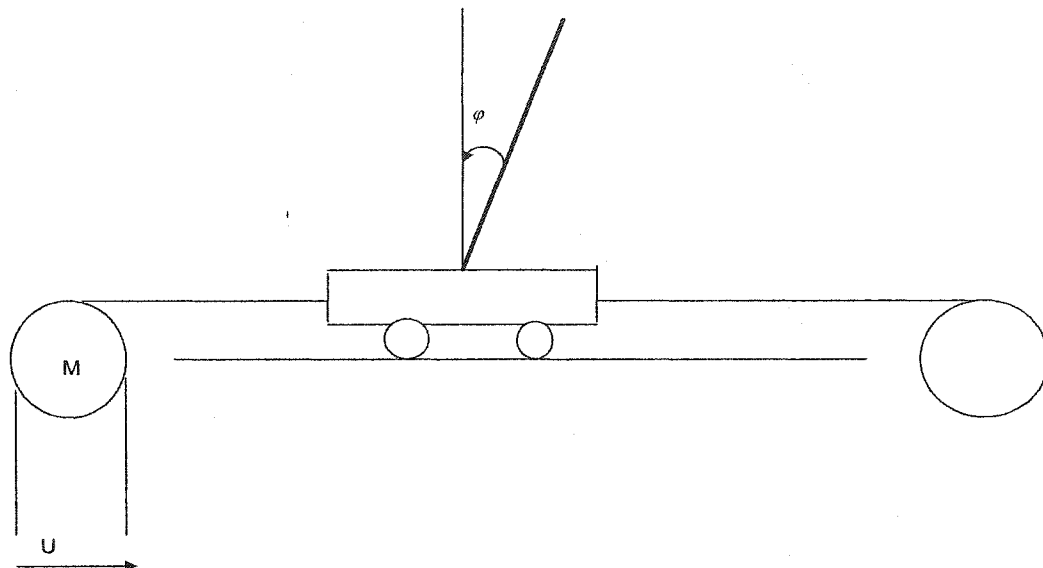


Figure 7 Exemple de pendule inversé [13]

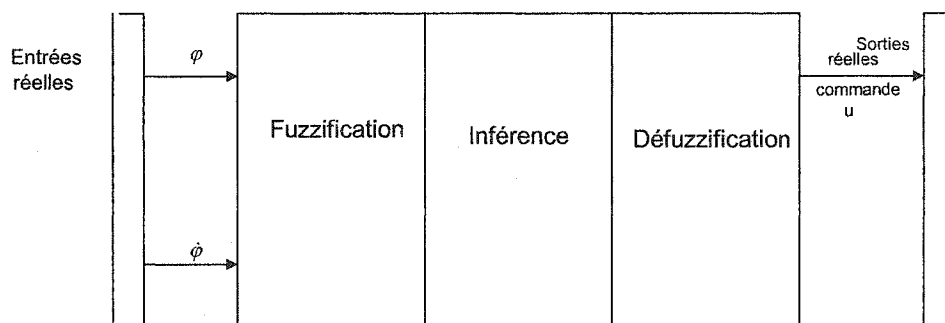


Figure 8 Étapes de mise en œuvre d'un contrôleur flou [13]

Pour ce système, afin de réaliser un régulateur flou, on doit passer par 3 étapes principales illustrées à la figure 8.



## 2.2 Étapes de réalisation d'un contrôleur flou

### 2.2.1 Étape de fuzzification

La fuzzification est une étape qui permet de définir les ensembles flous pour les variables d'entrées et de sorties. L'intervalle de définition de chacune de celles-ci doit être déterminé a priori. Souvent, l'erreur calculée entre la sortie du processus et la consigne est caractérisée comme étant une variable d'entrée du régulateur flou. Il en est de même pour sa dérivée qui représente sa variation.

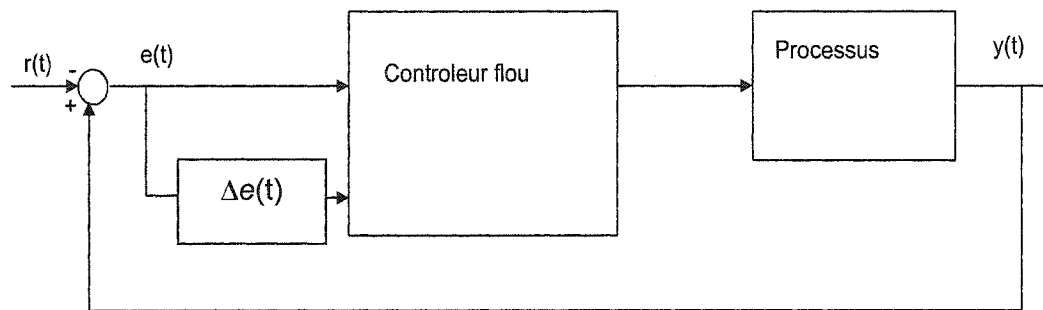


Figure 9 Schéma représentant la loi de commande floue

L'erreur et sa variation sont définies comme suit (pour une entrée  $r(t)=0$ ) :

$$\begin{aligned} e(t) &= y(t) \\ \Delta e(t) &= y(t) - y(t-1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dans le cas du pendule inversé présenté précédemment sur la figure 7, il s'agit d'annuler l'angle  $\varphi$ . En ayant comme première considération que le pendule n'est pas récupérable en dehors de l'intervalle  $[-20^\circ, 20^\circ]$ , et comme une seconde considération que la vitesse maximale de l'angle est de 10 degrés/seconde en valeur absolue. Ces

variables sont définis par 3 ensembles flous ayant des fonctions d'appartenance triangulaires (N pour négative, Z pour zéro et P pour positive).

La sortie du régulateur représente la tension appliquée à l'induit du moteur qui est définie dans l'intervalle  $[-10V, 10V]$ . On utilise pour la sortie 5 ensembles flous (NG : négative grande, N : négative, Z : zéro, P : positive et PG : positive grande) de formes triangulaires. Dans l'étape de fuzzification, on détermine les ensembles flous pour les variables des entrées-sorties.

### 2.2.2 Étape d'inférence

Pour l'exemple du pendule inversé de la figure 7, les règles floues qui engendrent la commande en fonction de l'erreur et de sa variation sont données par le tableau I.

Tableau I

Table d'inférence [13]

e Δe	N	Z	P
N	PG	P	Z
Z	P	Z	N
P	Z	N	NG

Suivant le tableau I nous avons les trois cas qui ont la même commande Z, soit :

1. L'erreur est Z et sa variation est Z (pendule à sa position initiale).
2. L'erreur est P mais sa variation est N.
3. L'erreur est N mais sa variation est P.

Les cinq règles floues sont alors :

1. Si (e est N) ET ( $\Delta e$  est N) ALORS u est PG,
2. Si {(e est N) ET ( $\Delta e$  est Z)} OU {(e est Z) ET ( $\Delta e$  est N)} ALORS u est P,
3. Si {(e est Z) ET ( $\Delta e$  est Z)} OU {(e est P) ET ( $\Delta e$  est N)} OU {(e est N) ET ( $\Delta e$  est P)} ALORS u est Z.
4. Si {(e est P) ET ( $\Delta e$  est Z)} OU {(e est Z) ET ( $\Delta e$  est P)} ALORS u est N
5. Si (e est P) ET ( $\Delta e$  est P) ALORS u est NG.

Les règles sont composées de prémisses liées par les opérateurs ET, OU et donne lieu à une implication par l'opérateur ALORS.

La méthode de Mamdani se base sur l'utilisation de l'opérateur « min » pour le ET et l'opérateur « max » pour le OU pour trouver une seule valeur de la variable de sortie.

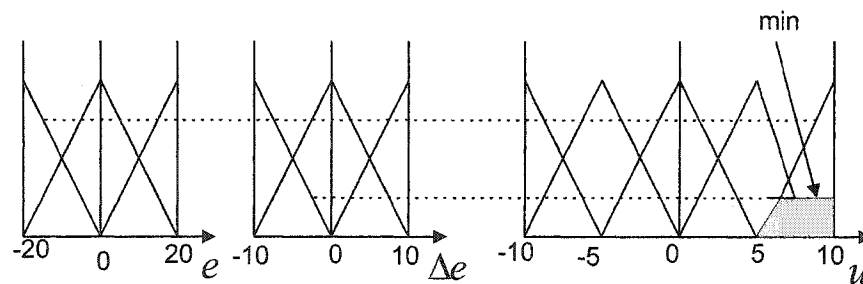


Figure 10 Représentation de l'opérateur « min » pour le ET

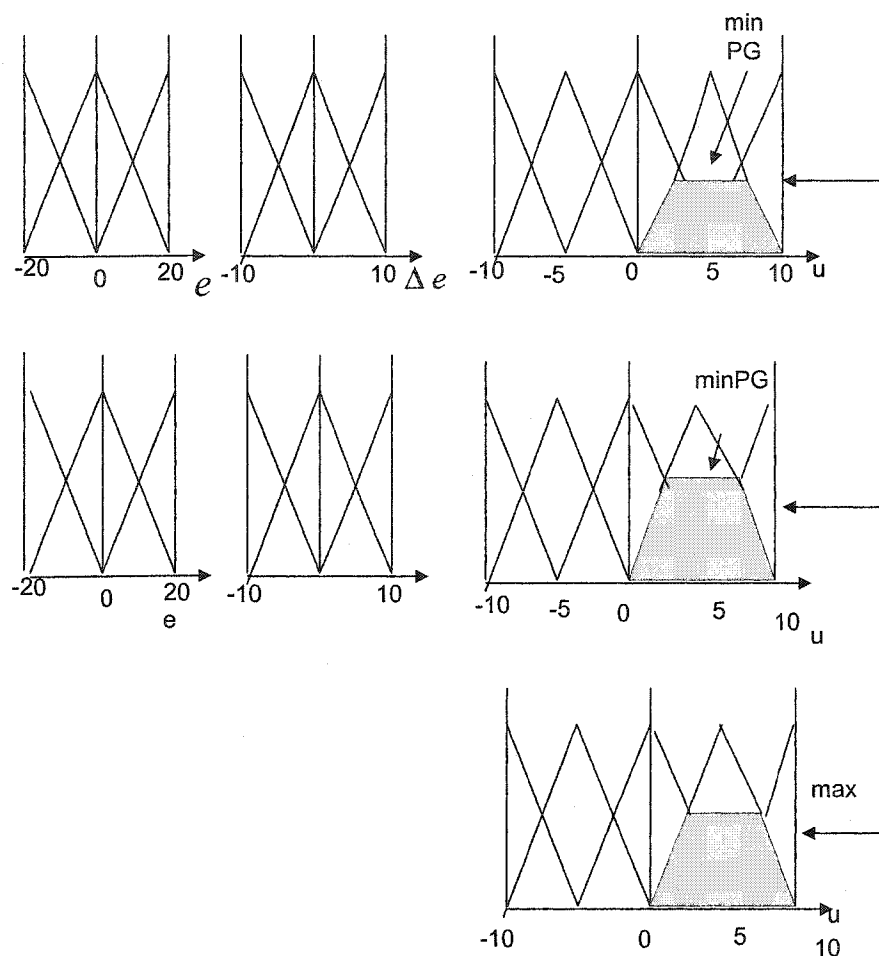


Figure 11 Représentation de l'opérateur « max » pour le OU

### 2.2.3 Étape de défuzzification

Le but de défuzzification est d'obtenir une valeur réelle de la sortie à partir des surfaces de l'étape d'inférence, cette valeur est la commande du système. Les méthodes de défuzzification les plus classiques sont :

- La méthode du centre de gravité (le type de défuzzification utilisé pour notre contrôleur flou)
- La méthode de la moyenne des maximums
- La méthode de bissecteur de la surface
- La méthode du plus petit des maximums en valeur absolue

- La méthode du plus grand des maxima en valeur absolue

Pour évaluer les performances de notre système, nous avons utilisé un contrôleur flou proportionnel dérivé pour la génération de trajectoire dont on a établi les règles floues à l'aide de la méthode de Mamdani et pour l'étape de la défuzzification on a utilisé la méthode de centre de gravité.

Diverses situations, avec leurs résultats numériques, utilisant cette approche sont illustrées dans le chapitre suivant.

## **CHAPITRE 3**

### **CONTRÔLE DU SYSTÈME**

#### **3.1 Description des contrôleurs utilisés pour le système**

Le contrôle du système étudié dans le cadre de ce travail est réalisé à l'aide d'un régulateur d'accélération pour le suivi de trajectoire. En premier lieu, nous avons utilisé un contrôleur conventionnel (proportionnel dérivée), en second lieu nous avons fait usage à un contrôleur flou (proportionnel dérivé).

Pour pouvoir contrôler la force interne exercée par l'objet sur les deux effecteurs des deux robots aux points de contact, nous avons utilisé un contrôleur conventionnel (proportionnel intégral).

Nous verrons par la suite les résultats obtenus pour quatre trajectoires désirées des positions cartésiennes de l'objet.

#### **3.2 Les contrôleurs utilisés pour le suivi de la trajectoire désirée**

Nous présentons dans le tableau suivant les valeurs attribuées aux gains du contrôleur conventionnel. Nous avons choisi ces gains de manière à diminuer les erreurs cartésiennes et articulaires.

Tableau II

Paramètres des contrôleurs conventionnels des deux robots

Gains Articulations Robot 1, Robot 2	$K_p$	$K_v$
1,6	1000	75
2,7	1000	75
3,8	1000	30
4,9	2000	50
5,10	1000	40

Nous avons utilisé un contrôleur flou proportionnel dérivé tel que nous l'indique la figure ci-dessous.

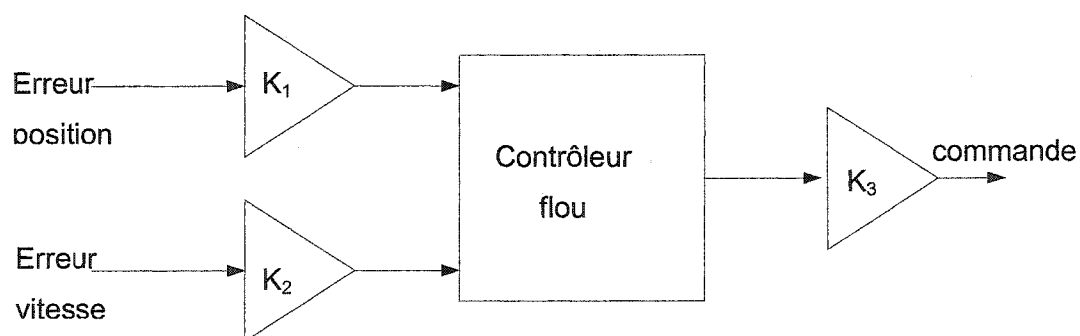


Figure 12 Schéma du contrôleur flou proportionnel dérivé

La figure 13, le tableau III et la figure 14 illustrent les étapes de la mise en œuvre du contrôleur flou utilisé.

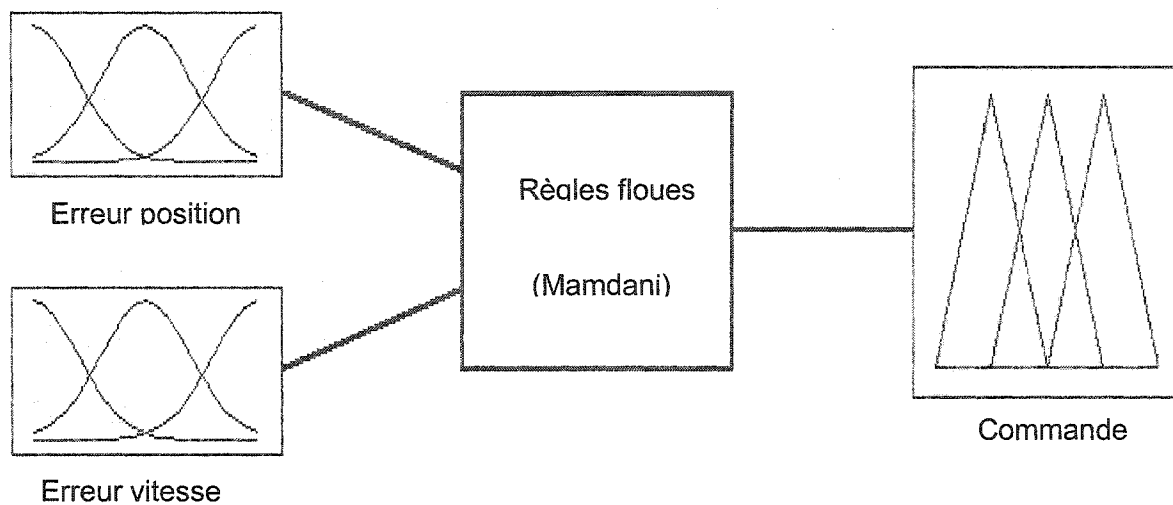


Figure 13 Étape 1 : Fonctions d'appartenance pour les entrées sortie du contrôleur

Tableau III

Étape 2 : Étape d'inférence (Règles floues)

$\Delta e$ \ e	GP	PP	Z	PN	GN
GP	GP	GP	PP	PP	Z
PP	GP	PP	PP	Z	PN
Z	PP	PP	Z	PN	PN
PN	PP	Z	PN	PN	GN
GN	Z	PN	PN	GN	GN



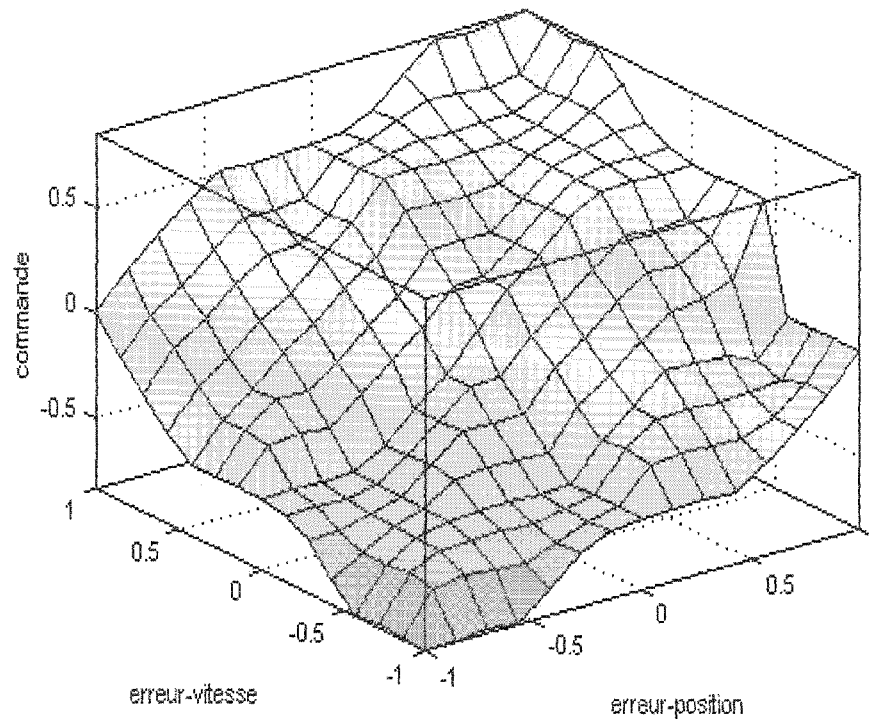


Figure 14 Étape 3 : Surface de commande du contrôleur flou proportionnel dérivé

Les gains du contrôleur flou proportionnel dérivé ont été calculés en utilisant les équations suivantes :

$$K_1 \cdot K_3 = K_p \quad (3.1)$$

$$K_2 \cdot K_3 = K_d \quad (3.2)$$

Avec  $K_p$  et  $K_d$  qui représentent les gains du contrôleur PD conventionnel. Les équations (3.1) et (3.2) sont des approximations fort grossières à partir des quelles on peut faire des modifications et des ajustements pour raffiner les résultats.  $K_3$  est la constante de normalisation.

Tableau IV

Gains du contrôleur flou utilisés pour les articulations des deux robots

Gains Articulations Robot 1, Robot 2	$K_1$	$K_2$	$K_3$
1,6	1000/33	75/30	30
2,7	1000/33	75/30	30
3,8	1000/33	30/30	30
4,9	2000/33	50/30	30
5,10	1000/33	40/30	30

Les résultats avec ce contrôleur seront présentés en détails dans la partie qui suit du présent chapitre. En simulant le système avec quatre trajectoires désirées des positions cartésiennes de l'objet.

Les gains du contrôleur de force interne sont sur la diagonale d'une matrice définie positive :

$$K_f = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

### 3.2.1 Trajectoire désirée avec des translations selon les axes x, y et z de 0.4 m

Dans cette simulation les deux robots vont tenir l'objet en le déplaçant selon l'axe x, y, et z de 0.4 m. C'est un mouvement fort simple pour le système qui répond facilement à une telle exigence.

Les figures 15 et 16 indiquent que les trajectoires désirées du centre de masse de l'objet représentent des translations selon les axes x, y et z.

Le mouvement exigé du système est simple car il n'y a pas de mouvement de rotation. Ce qui est montré selon les figures 17 et 18, c'est que les erreurs cartésiennes de position de l'objet sont acceptables et de même ordre de grandeur avec les deux contrôleurs de suivi de trajectoire : le conventionnel et le flou.

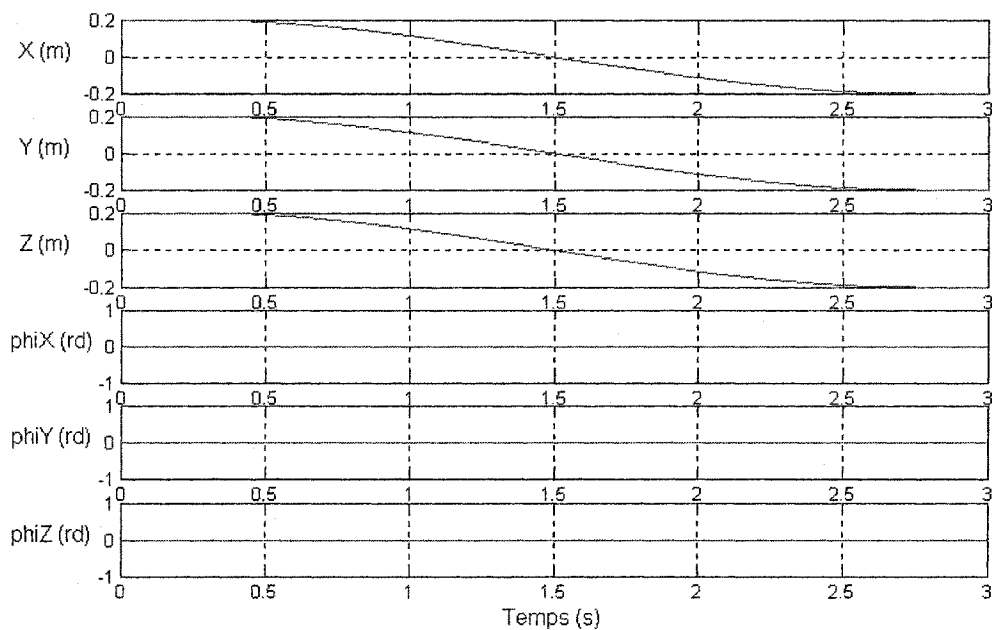


Figure 15 Trajectoire cartésienne désirée de l'objet

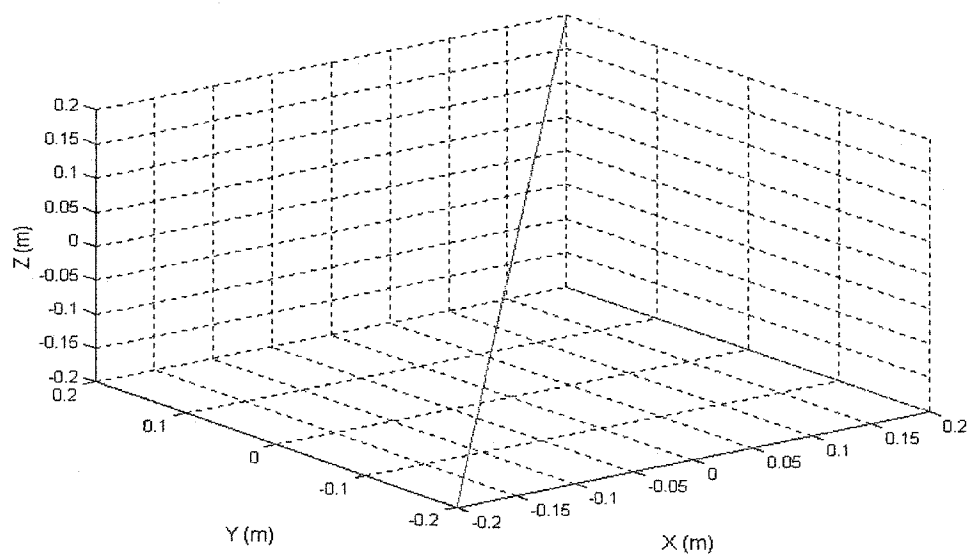


Figure 16 Trajectoire cartésienne désirée de l'objet en 3D

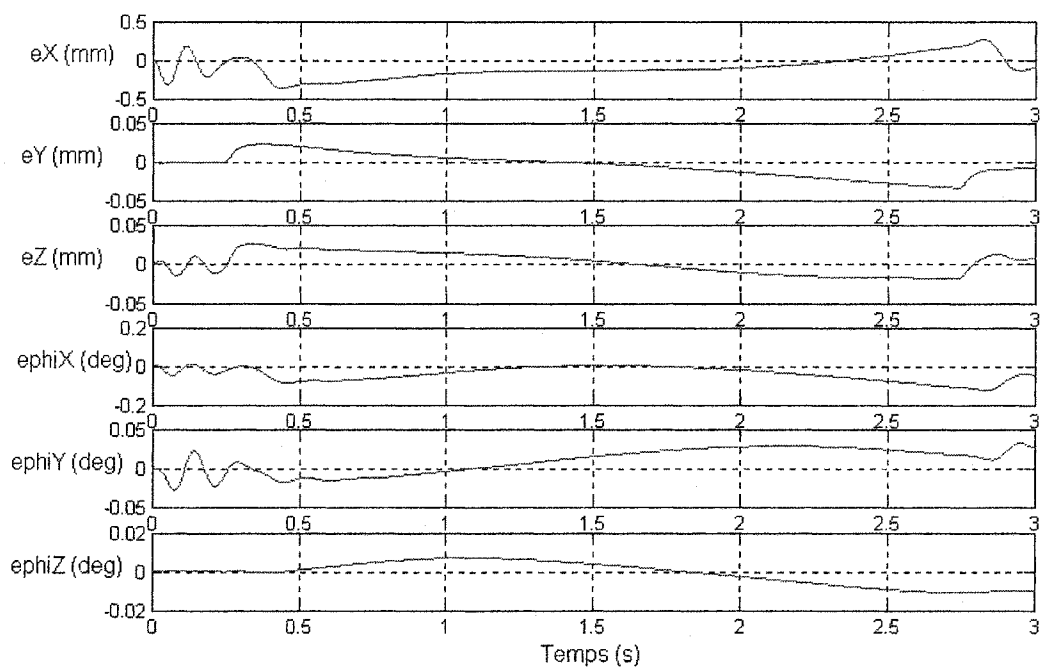


Figure 17 Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur conventionnel)

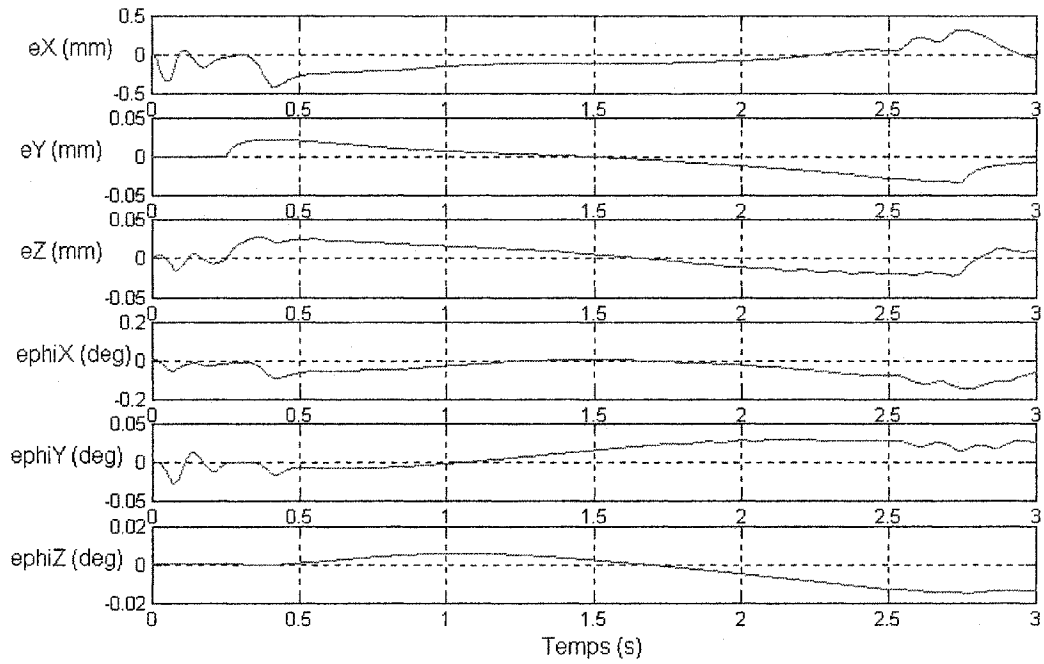


Figure 18 Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur flou)

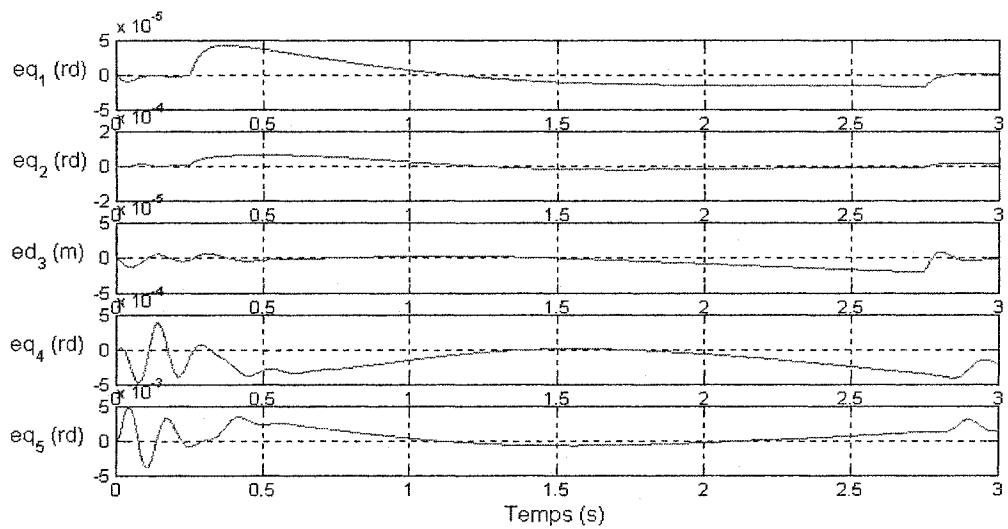


Figure 19 Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur conventionnel)

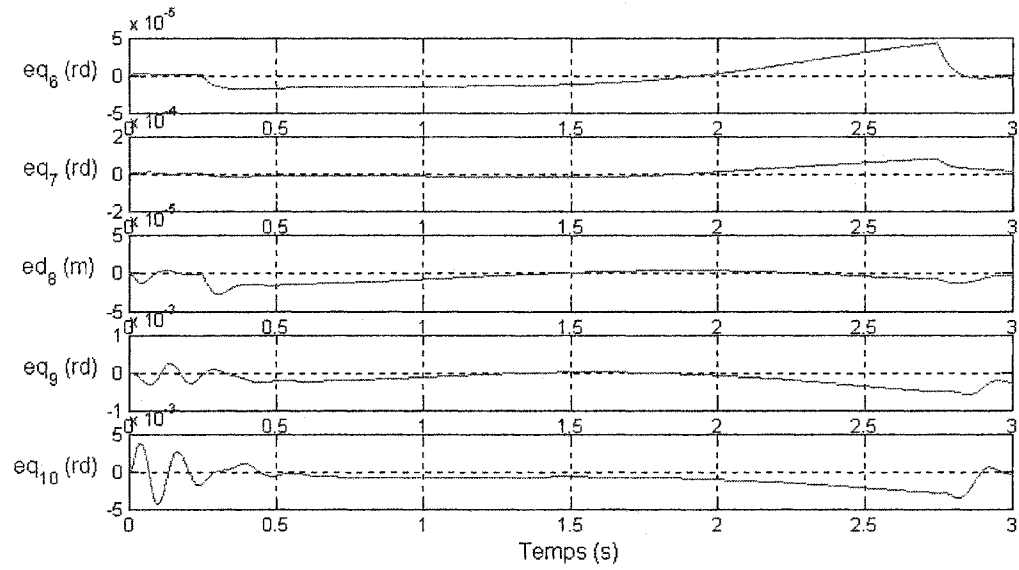


Figure 20 Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur conventionnel)

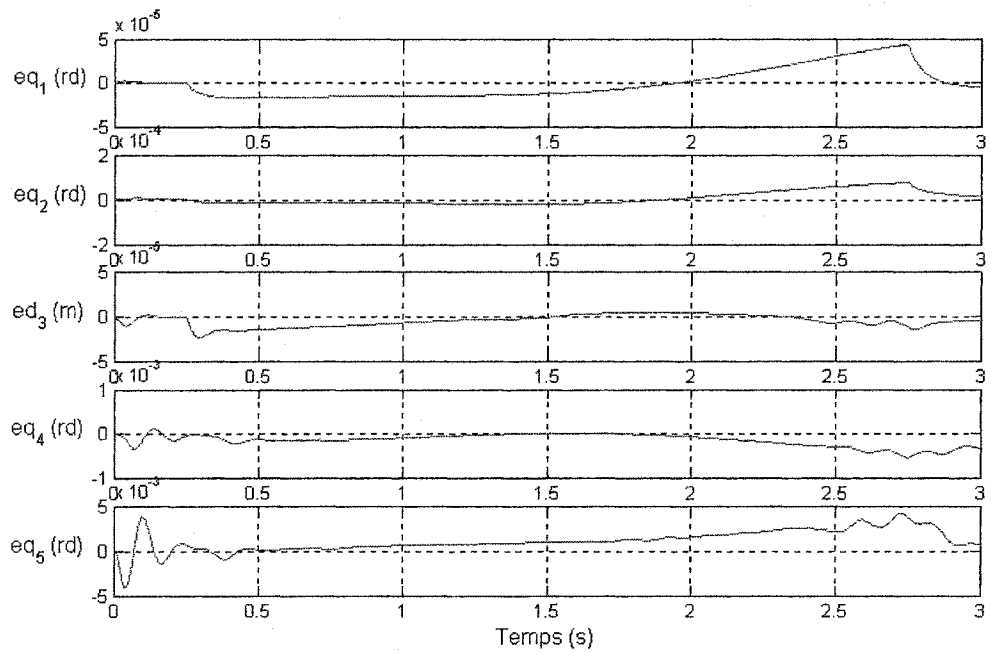


Figure 21 Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur flou)

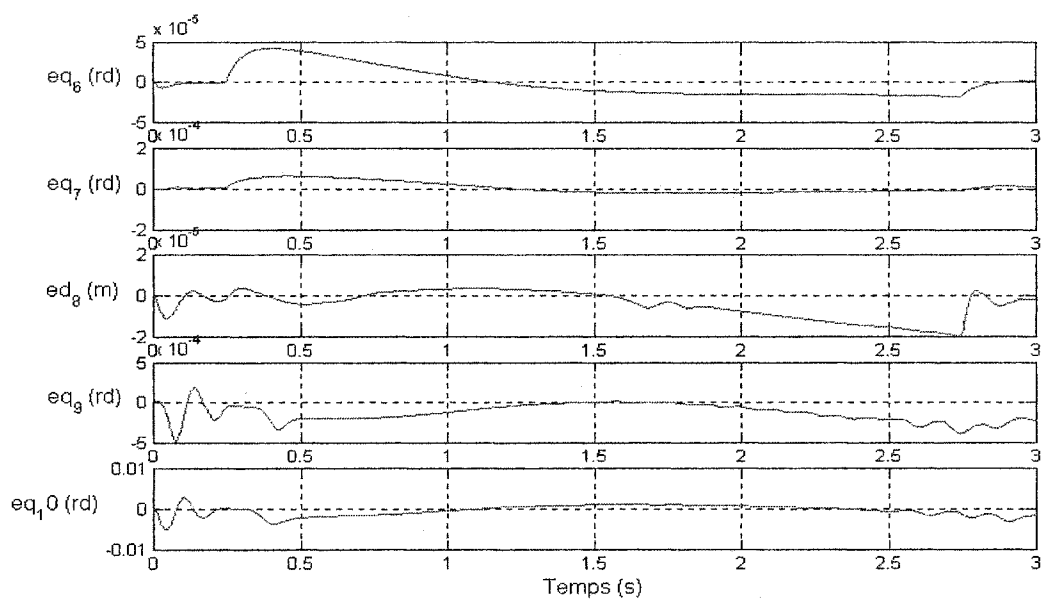


Figure 22 Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur flou)

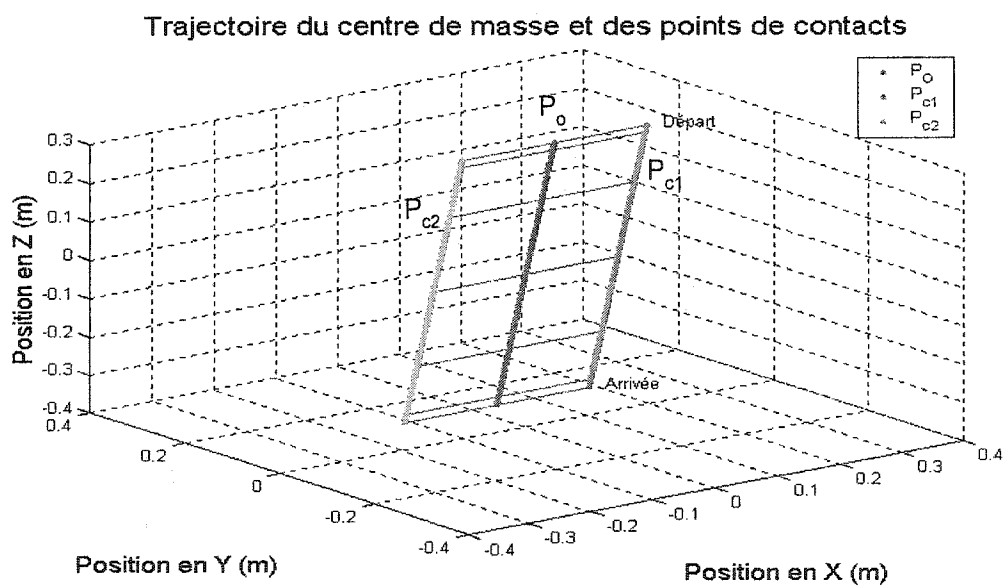


Figure 23 Trajectoire du centre de masse et des points de contacts (contrôleur conventionnel)

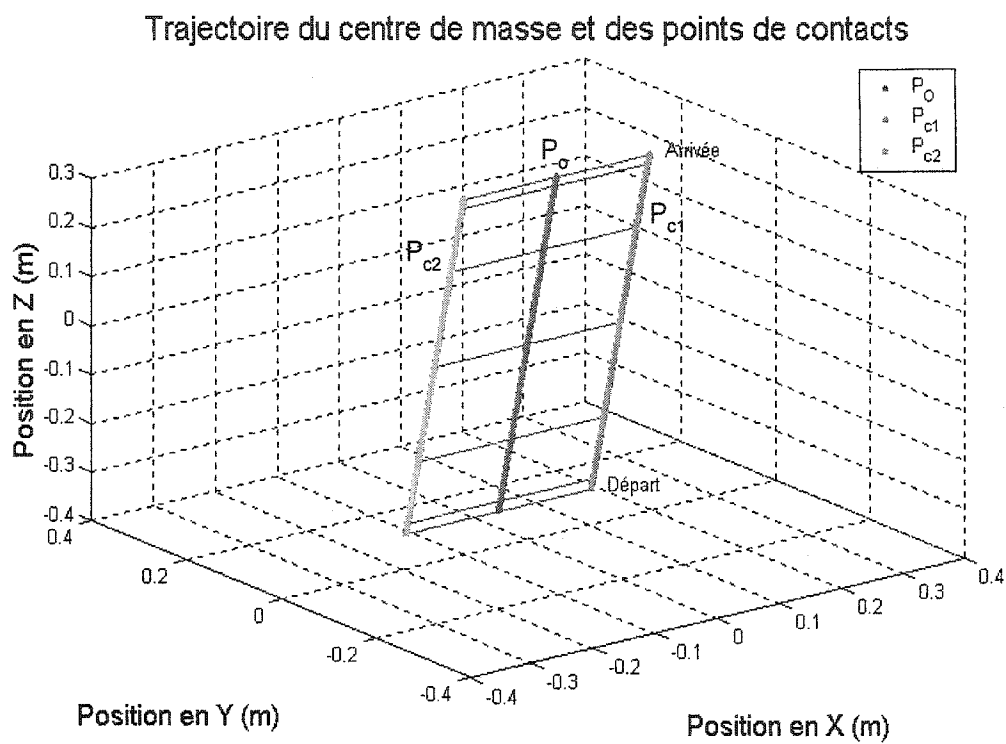


Figure 24 Trajectoire du centre de masse et des points de contact (contrôleur flou)

Les figures 19, 20, 21 et 22 nous permettent de déduire le bon fonctionnement du générateur de la trajectoire utilisée avec les deux contrôleurs. Quiconque peut remarquer que les erreurs articulaires sont négligeables.

Les figures 23 et 24 nous montrent la trajectoire des points de contact des deux robots avec le centre de masse de l'objet. On remarque que le centre de masse de l'objet ainsi que les points de contact suivent la trajectoire désirée et qu'ils tiennent l'objet.

Chaque ligne horizontale montre la position des points de contact et du centre de masse de l'objet à chaque 0.5 sec.



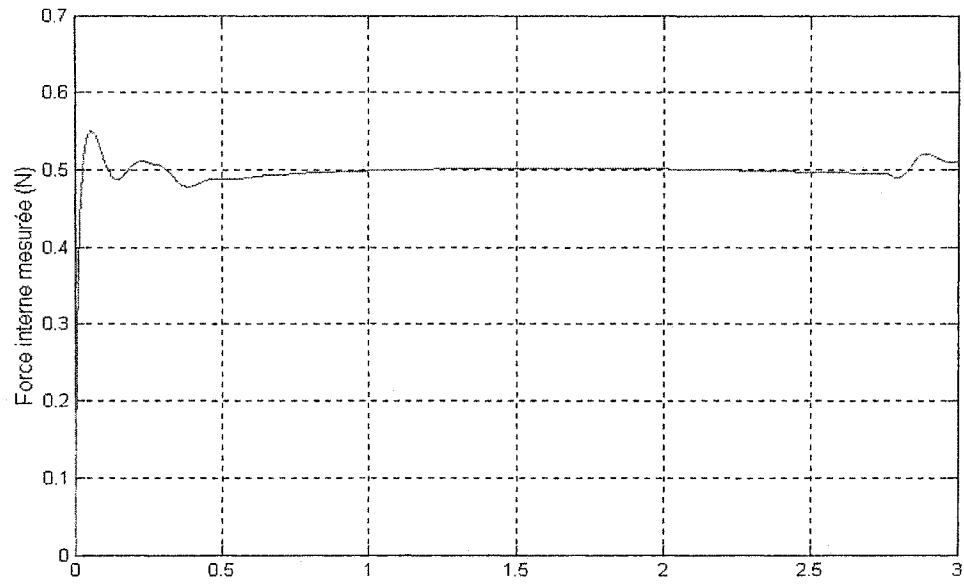


Figure 25 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel)

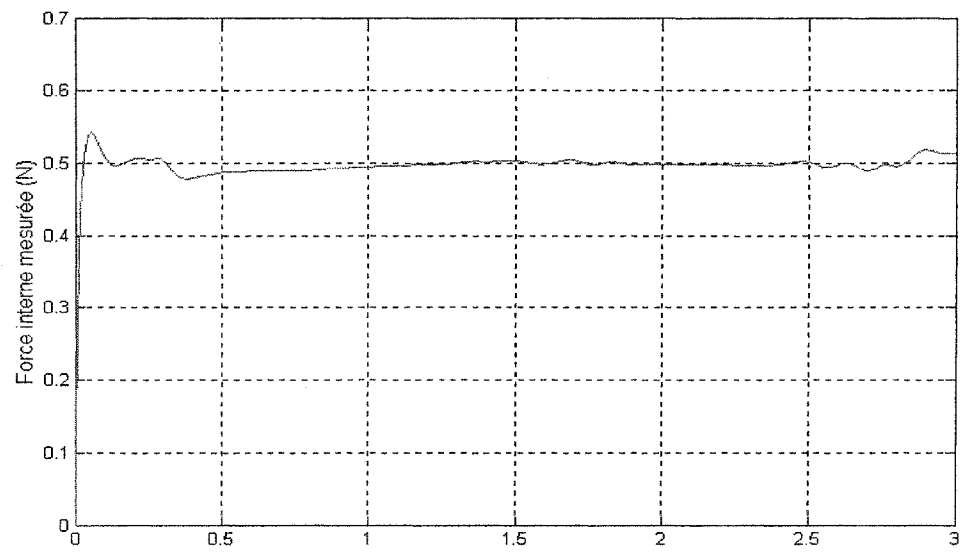


Figure 26 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou)

Nous remarquons à partir des figures 25 et 26 que la force interne mesurée est très proche de la valeur désirée; au départ le dépassement est dû aux accélérations des articulations des deux robots (figures 27, 28, 29 et 30), et à la fin on remarque une (bosse) due aux décélérations articulaires des robots.

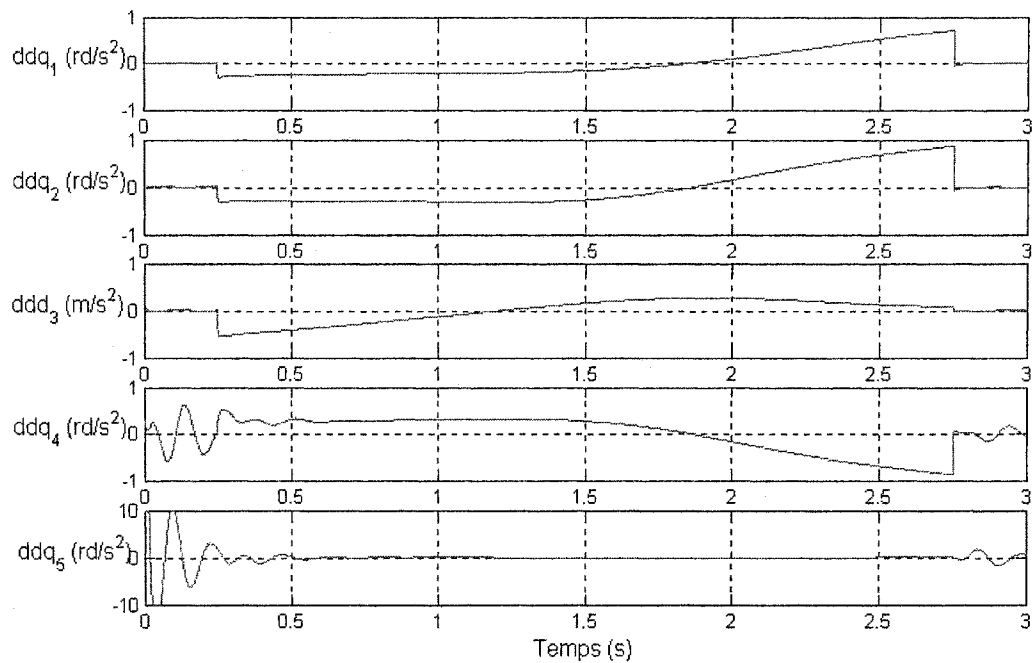


Figure 27 Accélérations articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel)

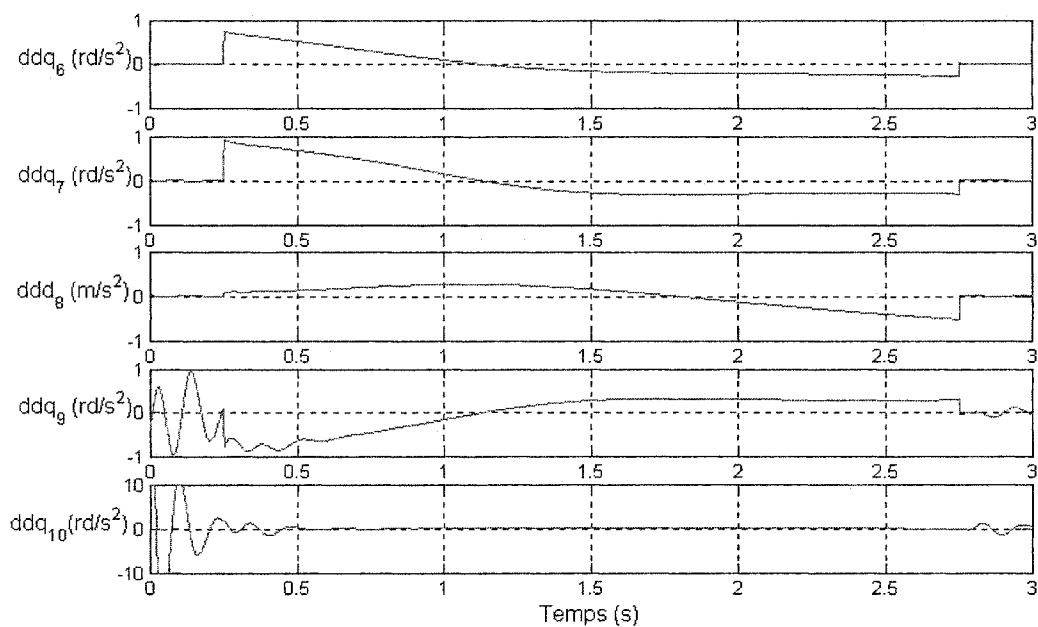


Figure 28 Accélérations articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel)

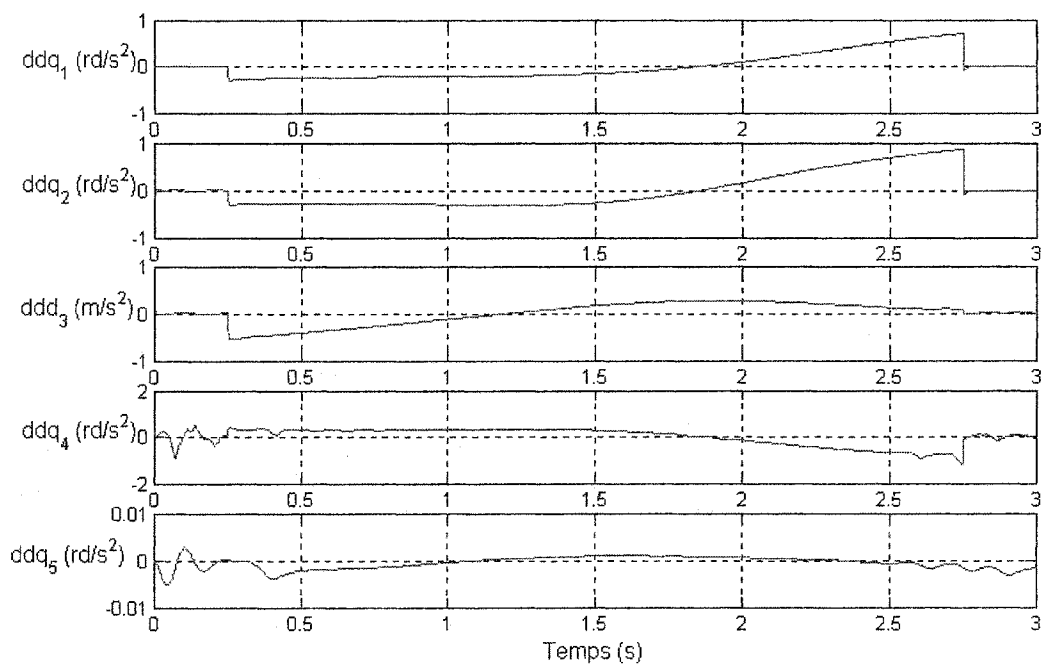


Figure 29 Accélérations articulaires du robot 1 (contrôleur flou)

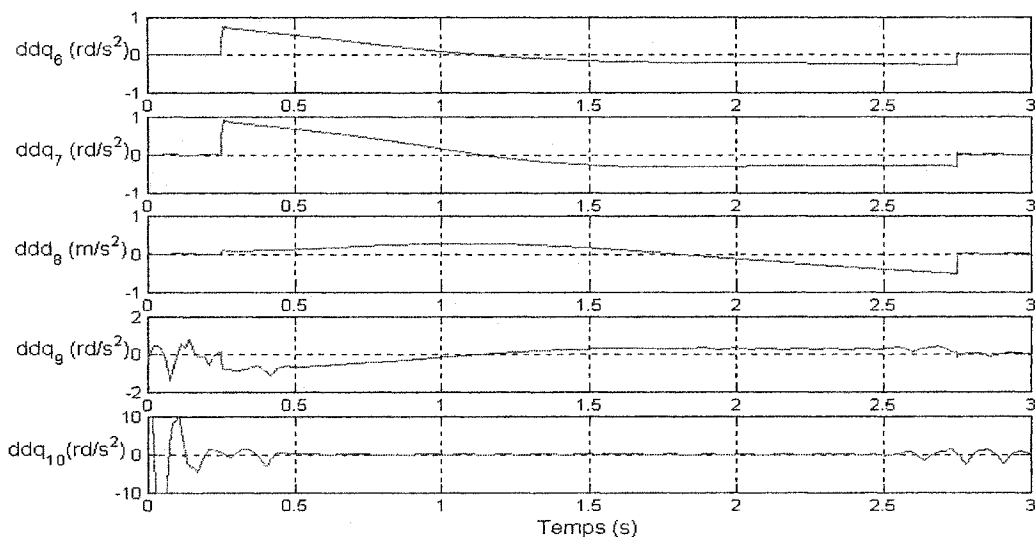


Figure 30 Accélérations articulaires du robot 2 (contrôleur flou)

### 3.2.2 Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe z de 0.2 m et une rotation autour de y de 10 degrés

Pour cette simulation, les deux robots font déplacer l'objet verticalement selon l'axe z en le faisant tourner autour de l'axe y de 10 degrés (figure 31).

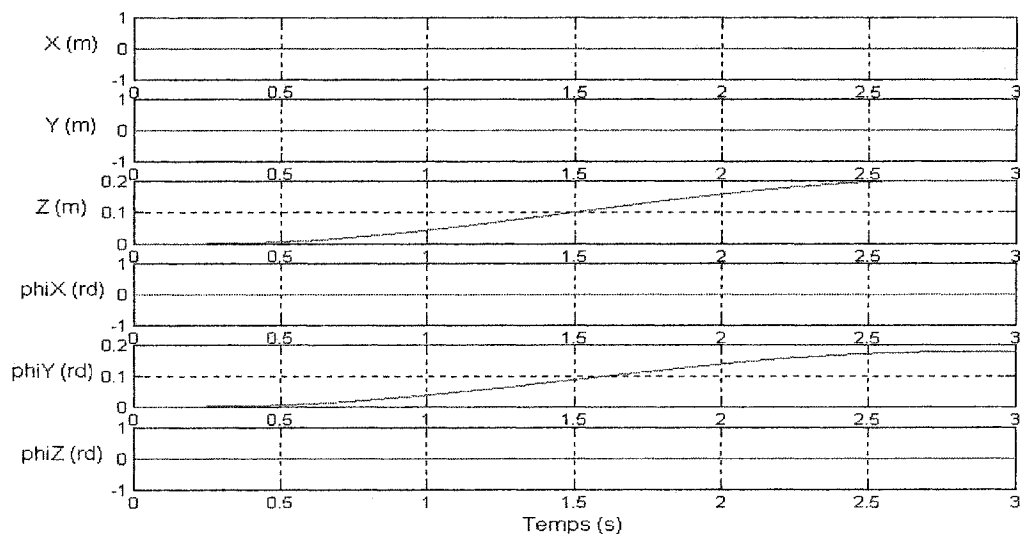


Figure 31 Trajectoire désirée de l'objet

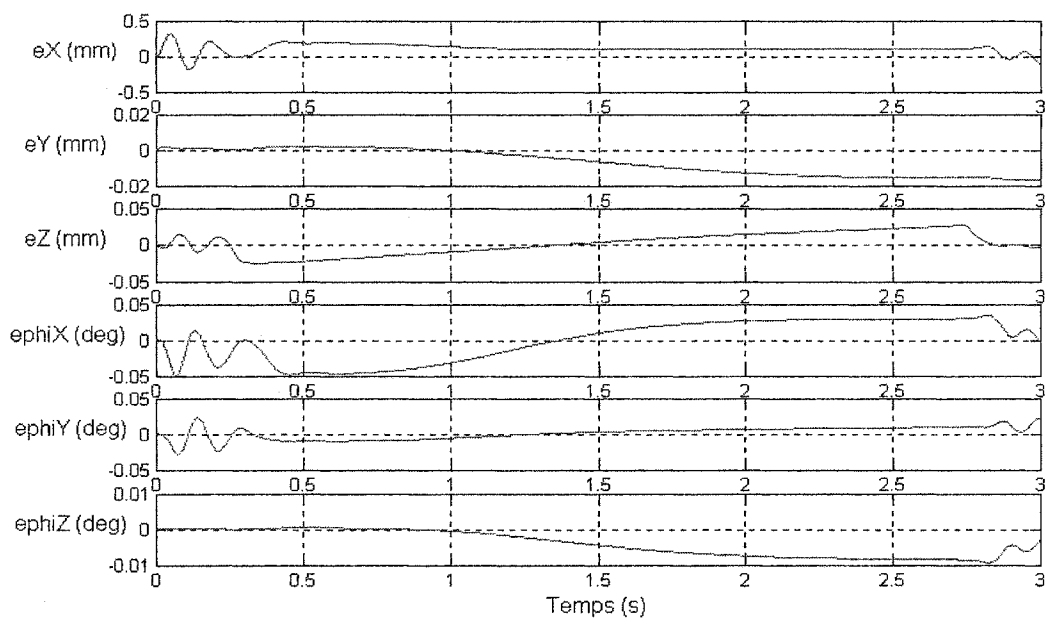


Figure 32 Erreurs cartésiennes (contrôleur conventionnel)

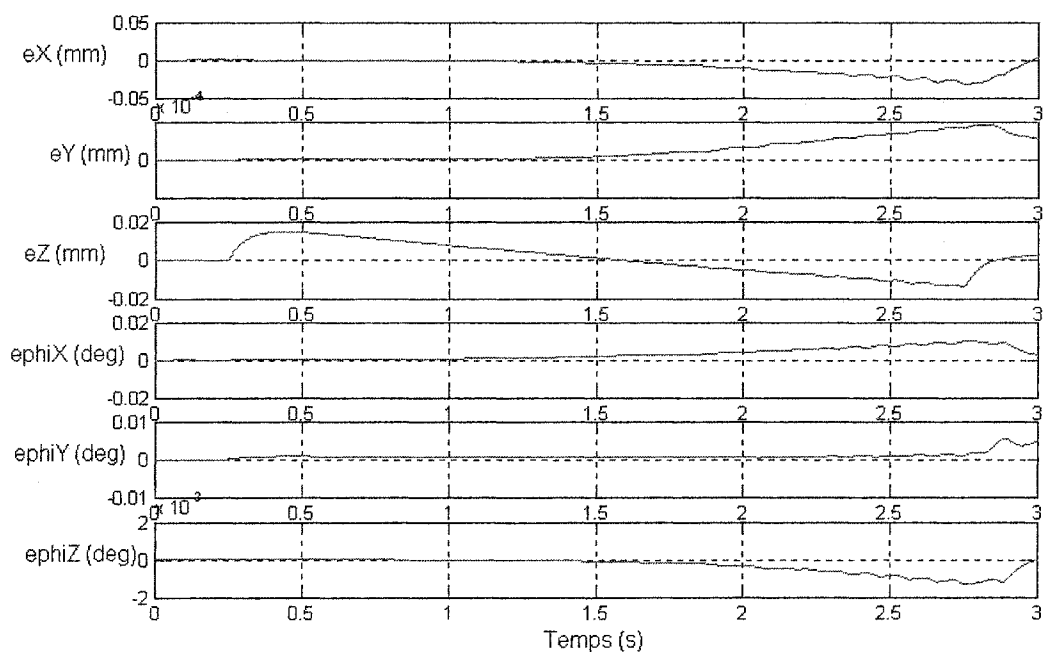


Figure 33 Erreurs cartésiennes (contrôleur flou)

Nous constatons, à partir des figures 32 et 33, que les erreurs cartésiennes sont faibles; quoique les résultats obtenus par le contrôleur flou soient meilleurs puisque selon y les erreurs obtenues par le contrôleur conventionnel sont d'ordre  $-0.02$  degrés en régime permanent. Celles obtenues par le contrôleur flou sont de  $10^{-4}$  degrés. Remarquez qu'il n'y a pas d'oscillations pendant la période transitoire avec le contrôleur flou.

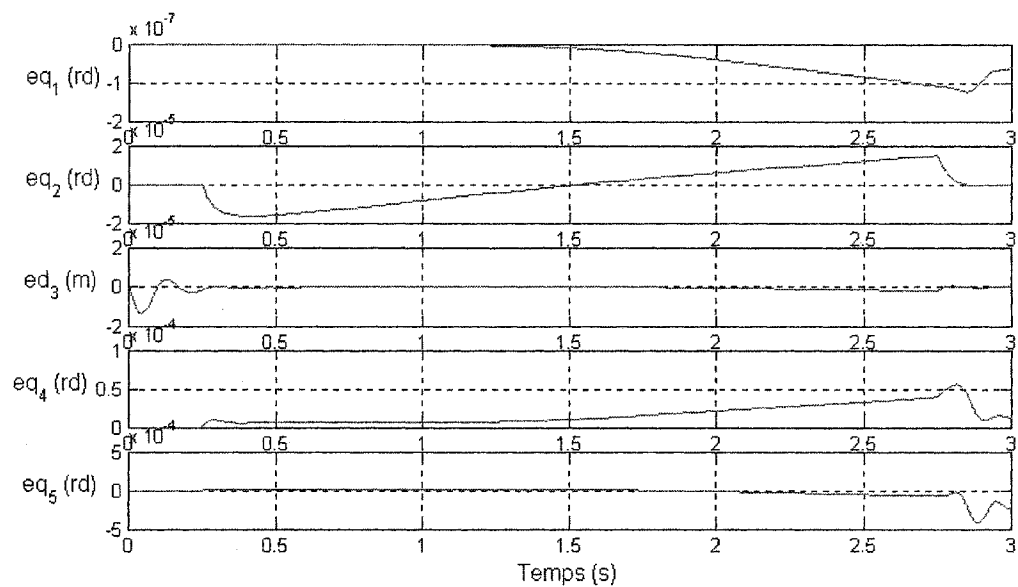


Figure 34 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel)

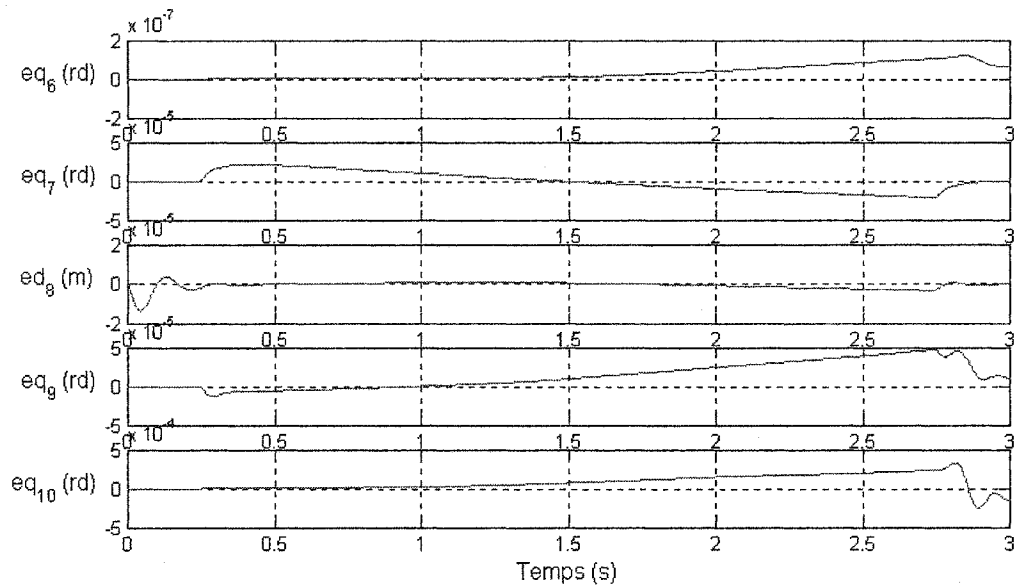


Figure 35 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel)

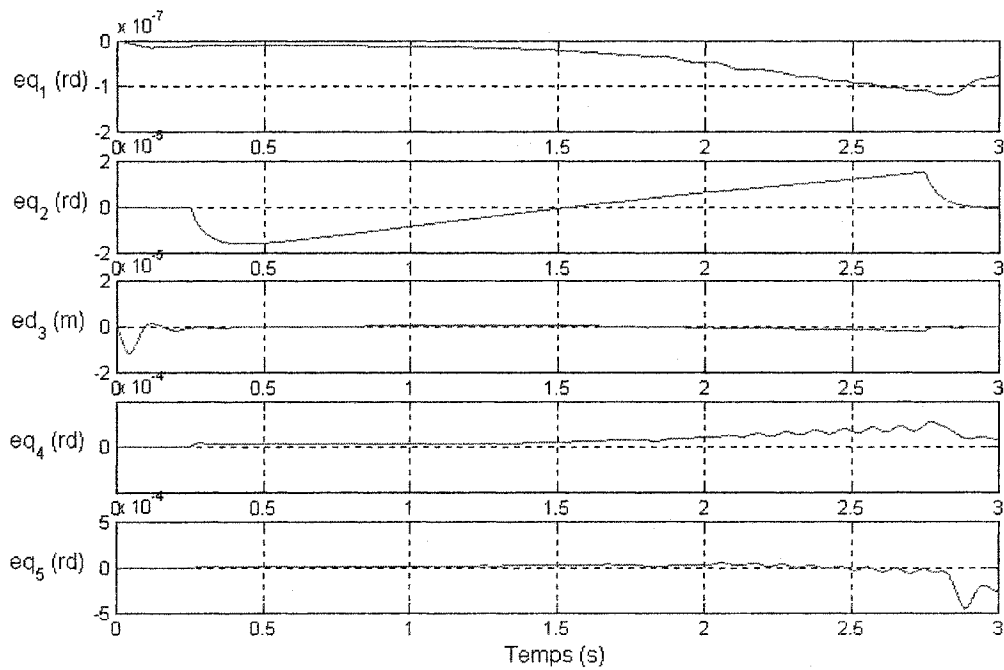


Figure 36 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur flou)

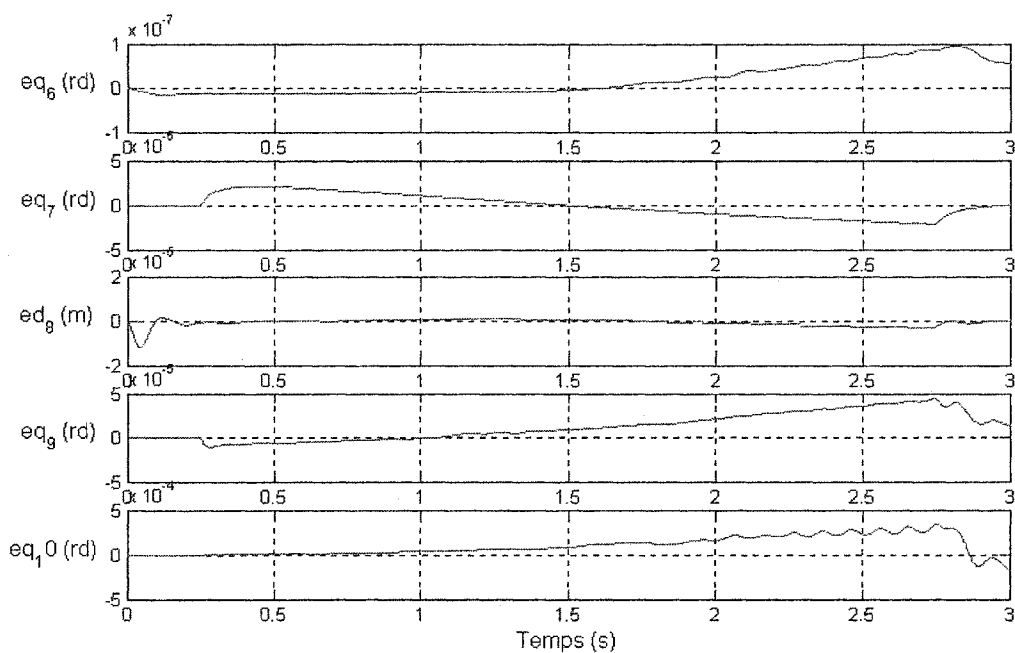


Figure 37 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur flou)

Les figures 34, 35, 36 et 37 nous permettent de voir clairement que les erreurs des trajectoires articulaires des deux robots sont très négligeables puisque pour les articulations 1 et 6, elles sont de l'ordre,  $10^{-7}$  pour les articulations 2, 3, 4, 7, 8 et 9 sont d'ordre de  $10^{-5}$ ; et pour les articulations 5 et 10 les erreurs sont de l'ordre de  $10^{-4}$ . Cela s'explique par un choix convenable des paramètres des contrôleurs et la validité du modèle dynamique du système.



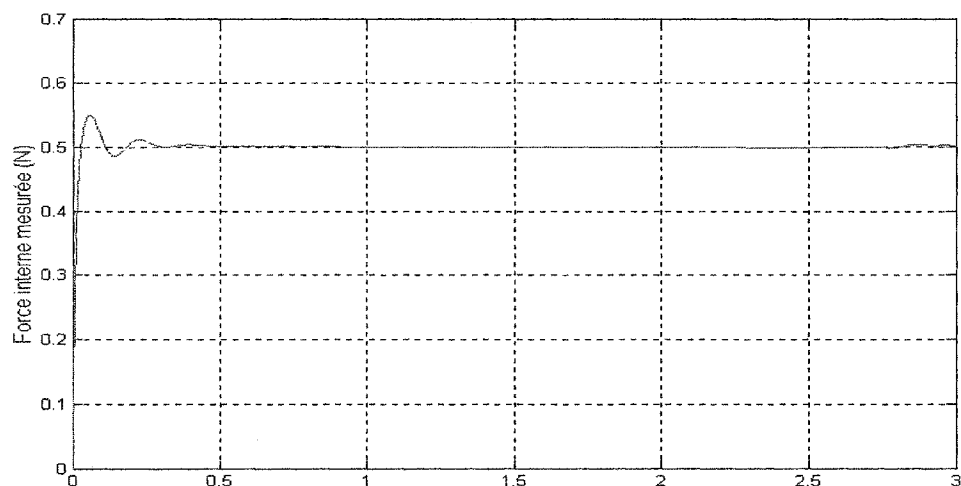


Figure 38 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N) le contrôleur conventionnel

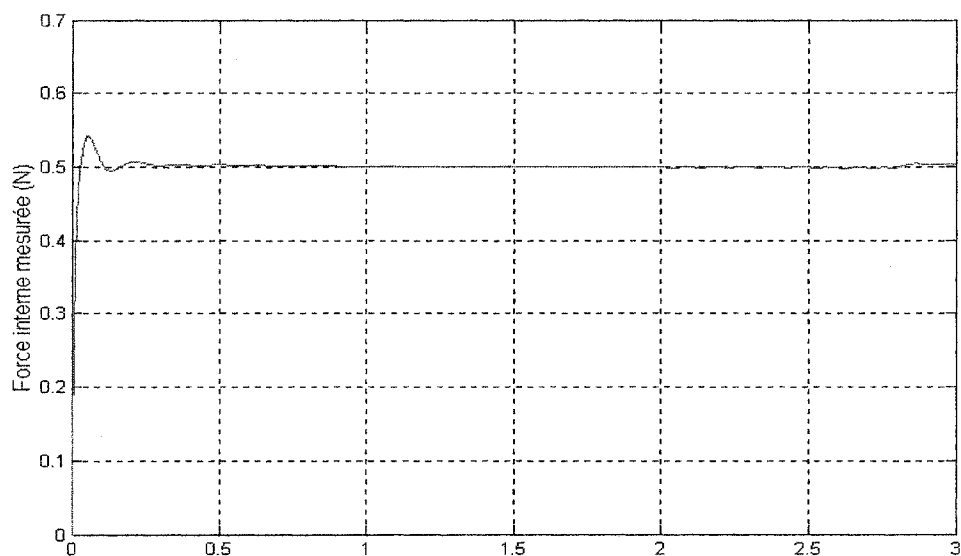


Figure 39 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N) avec le contrôleur flou

Le système est capable de tenir et de déplacer l'objet (figures 38 et 39). Cela est dû à l'efficacité des contrôleurs utilisés. Nous pouvons par conséquent constater que les deux robots peuvent déplacer l'objet et la force interne est maintenue à sa valeur désirée.

### 3.2.3 Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe x de 0.2 m et y de 0.2 m et une rotation autour de x de 45 degrés

Dans ce cas les robots vont faire un mouvement légèrement plus compliqué que les mouvements précédents puisqu'ils déplacent l'objet selon x et selon y de 0.2 m et le font tourner autour de l'axe x de 45 degrés. Les résultats de simulation sont présentés comme suit :

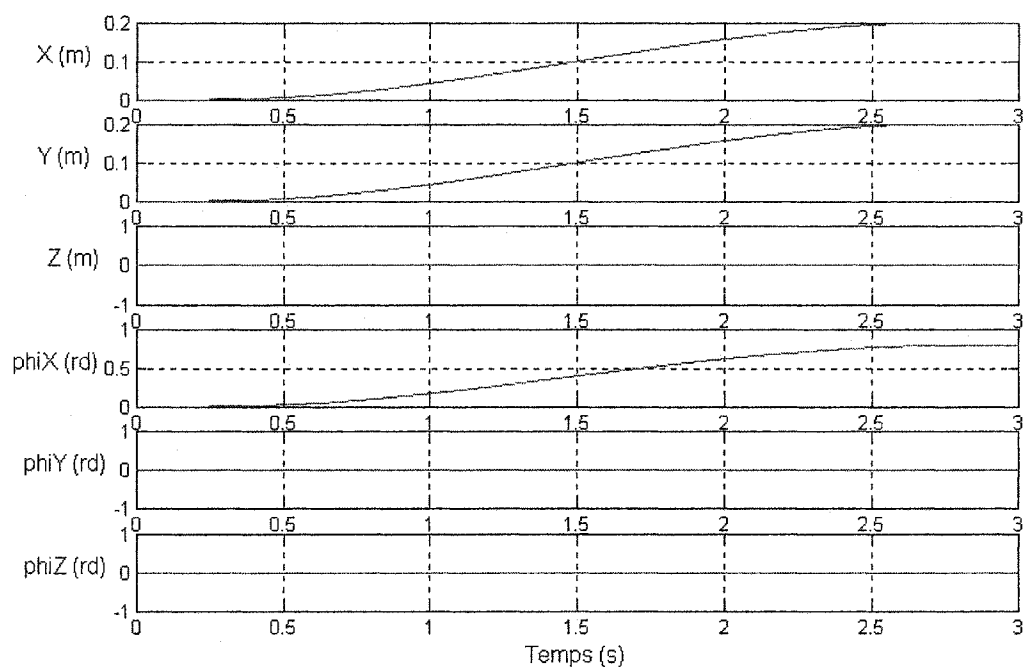


Figure 40 Trajectoire cartésienne désirée de l'objet

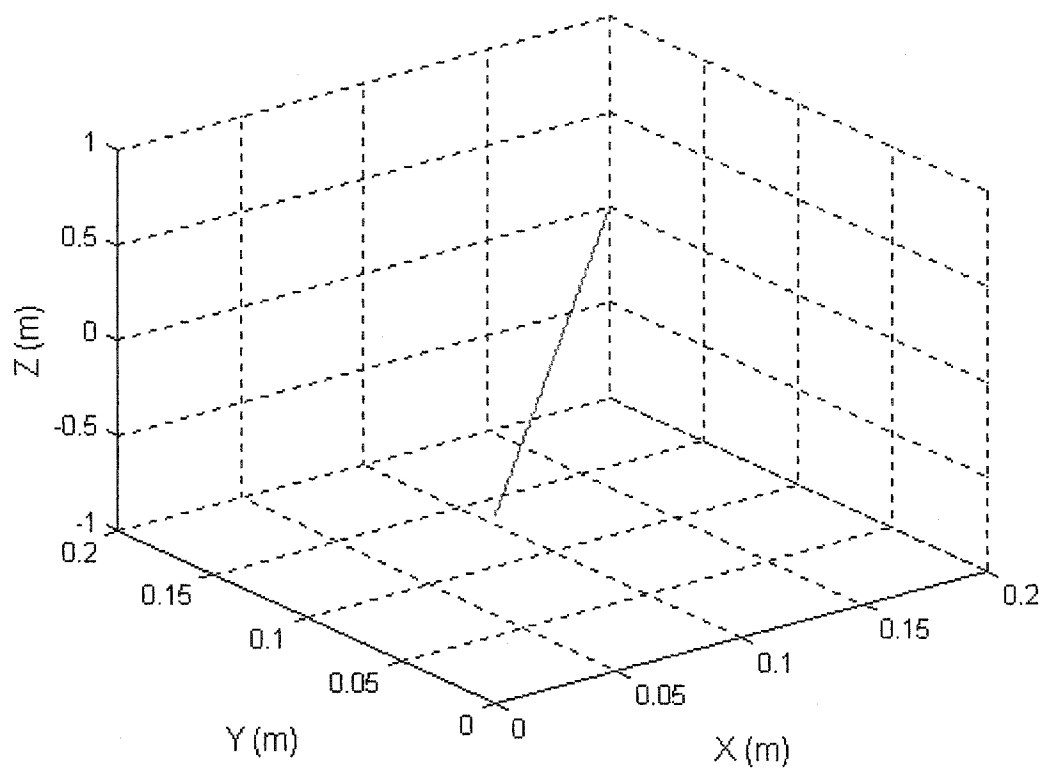


Figure 41 Trajectoire cartésienne désirée de l'objet en 3D

Pour cette simulation on a choisi un mouvement de translation selon l'axe x de 0.2 m et une rotation aussi selon l'axe x de 45 degrés (figures 40 et 41)

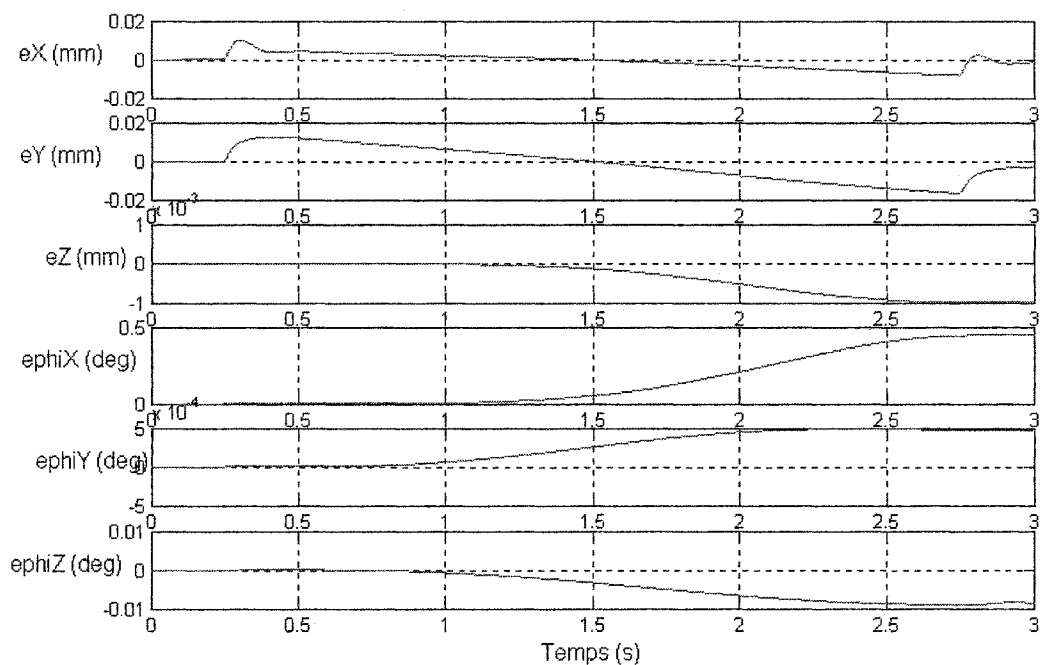


Figure 42 Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur conventionnel)

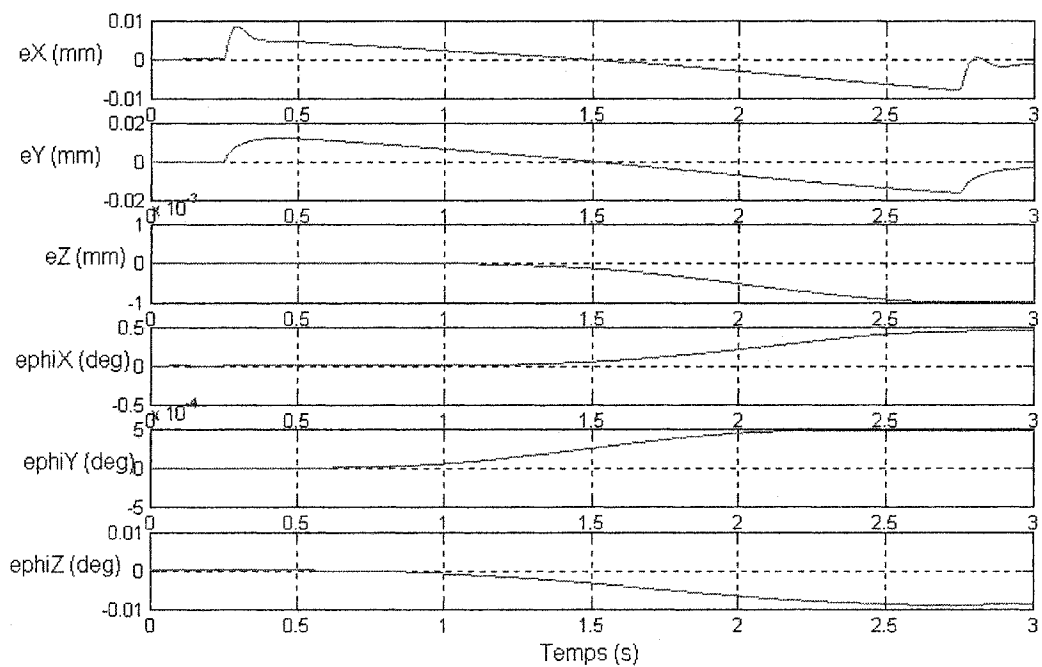


Figure 43 Erreurs de la position cartésienne de l'objet (contrôleur flou)

Selon les figures 42 et 43 les erreurs cartésiennes sont acceptables et les dépassements au régime transitoire sont au-dessous de 0.01 mm selon x et de 0.02 mm selon y. Les erreurs angulaires sont  $10^{-4}$  degrés autour y et de  $-0.01$  degrés autour de z et de 0.5 degrés autour de x.

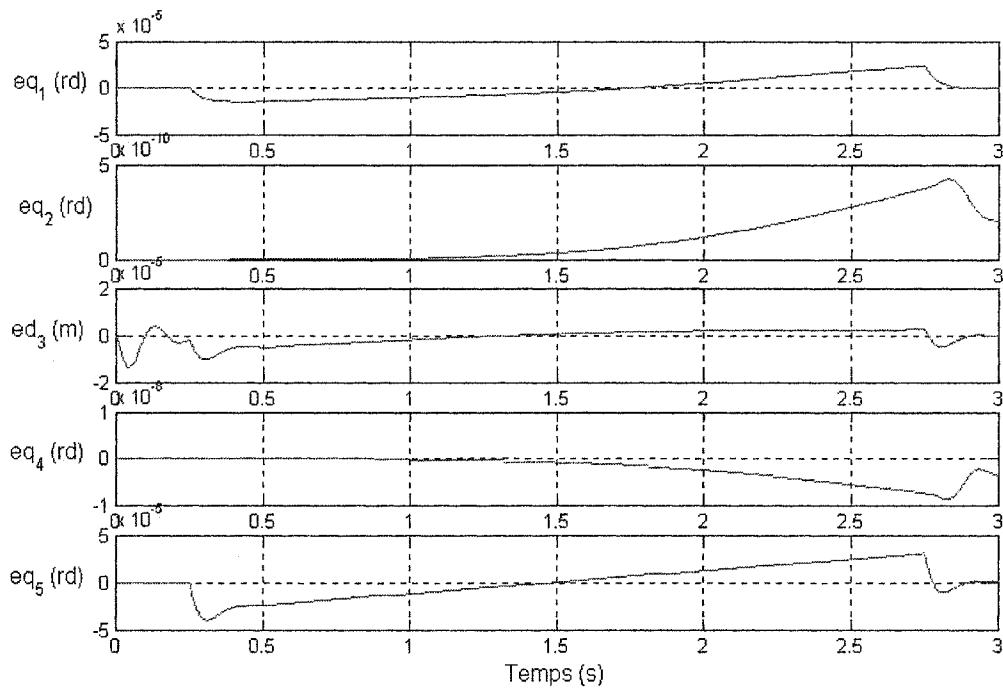


Figure 44 Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur conventionnel)

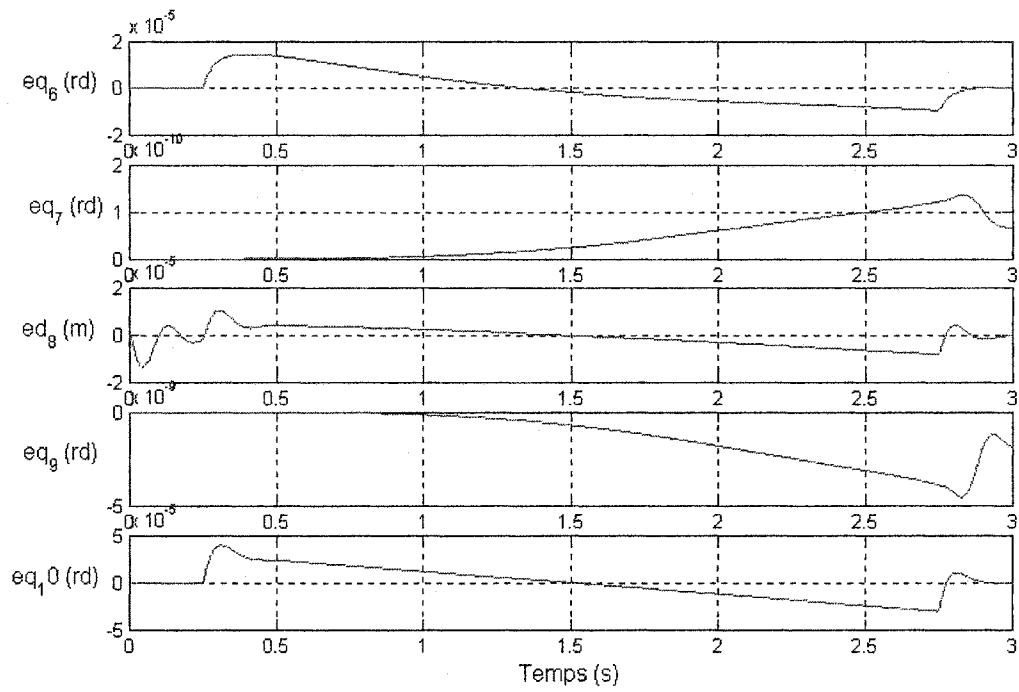


Figure 45 Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur conventionnel)

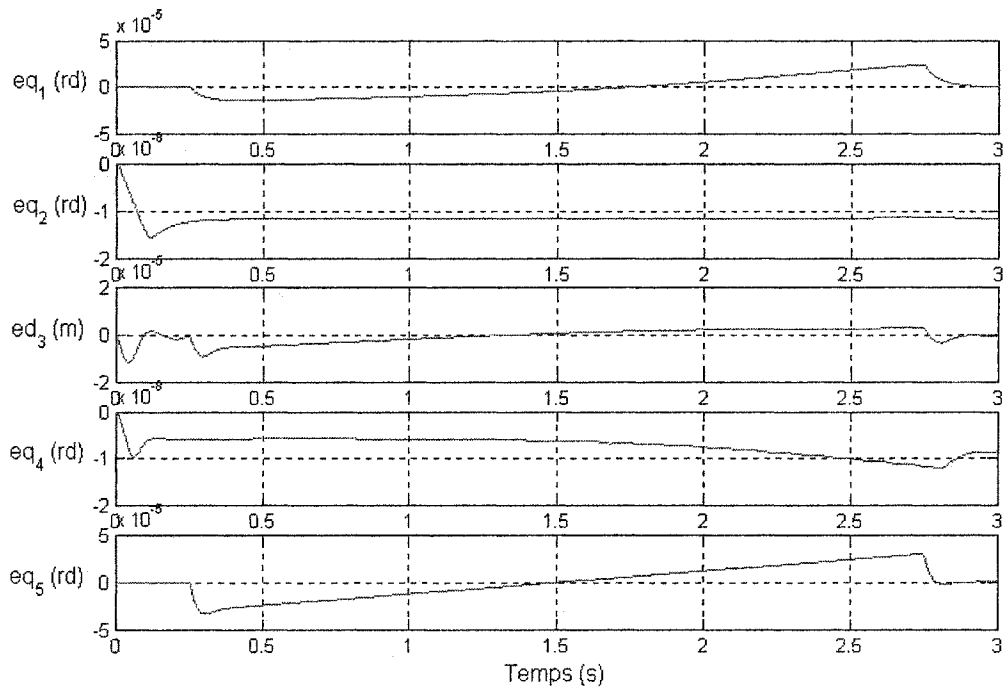


Figure 46 Erreurs des articulations du robot 1 (contrôleur flou)

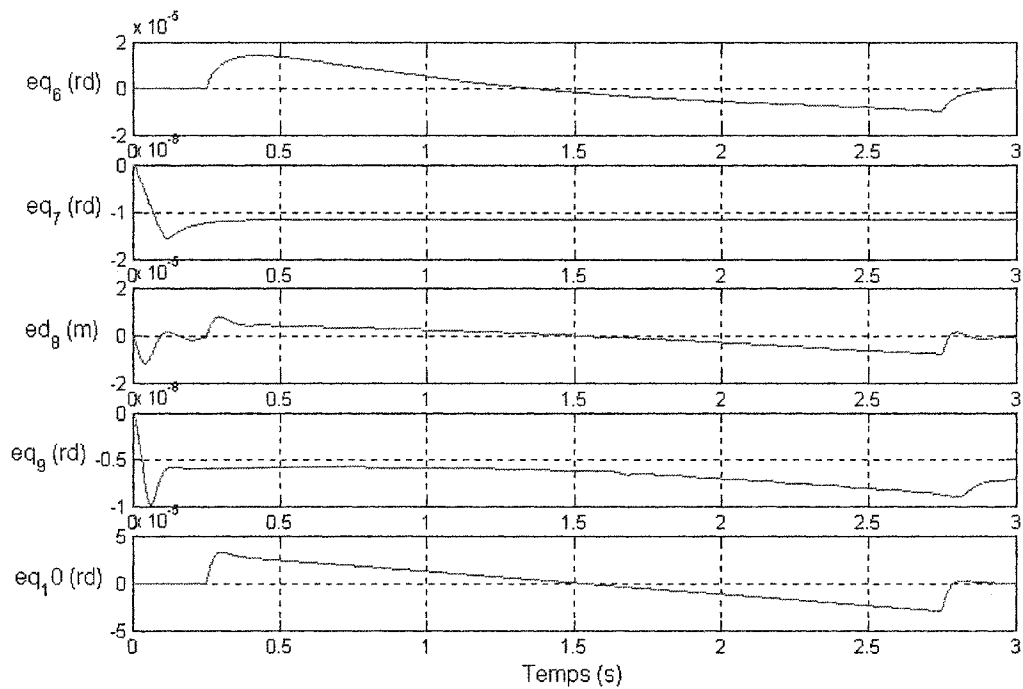


Figure 47 Erreurs des articulations du robot 2 (contrôleur flou)

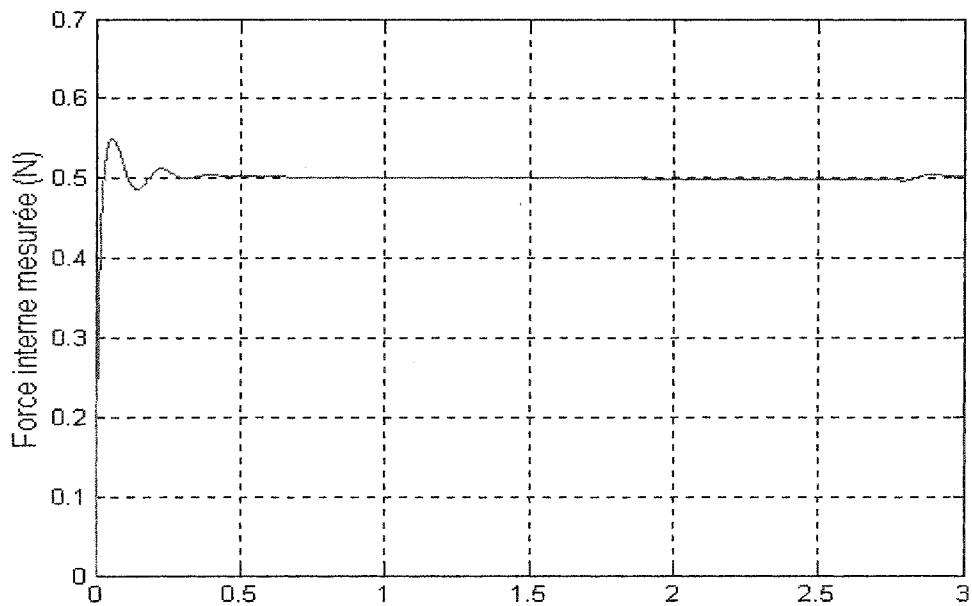


Figure 48 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel)

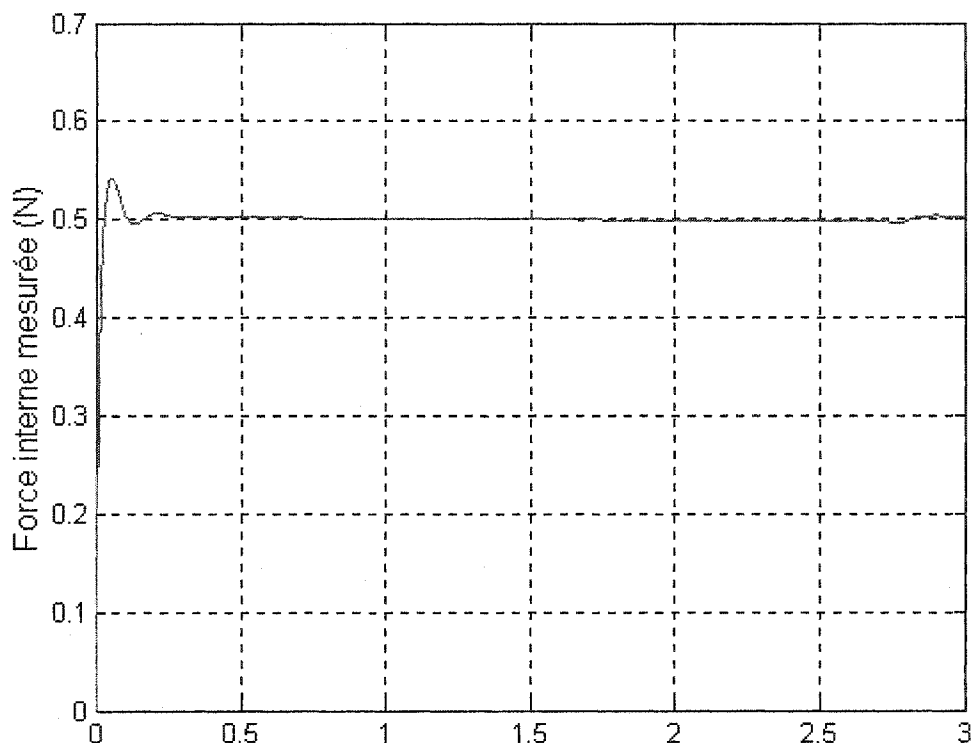


Figure 49 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou)

On remarque que les deux contrôleurs fonctionnent très bien puisque comme on peut le remarquer sur les figures 44 à 49, les erreurs sont très négligeables ce qui explique le bon choix des paramètres des contrôleurs.

### 3.2.4 Trajectoire désirée de l'objet est une translation selon l'axe x de 0.2 m et une rotation autour de x de 20 degrés et autour de y et z de 10 degrés

Pour cette simulation, on était très exigeant pour le système puisque le mouvement demandé est de faire bouger l'objet de 0.2 m selon l'axe x et en même temps le faire tourner de 20 degrés autour de x et de 10 degrés autour de y et de z (figures 50 et 51). Cela implique donc de contrôler un mouvement comportant des rotations sur les trois axes.



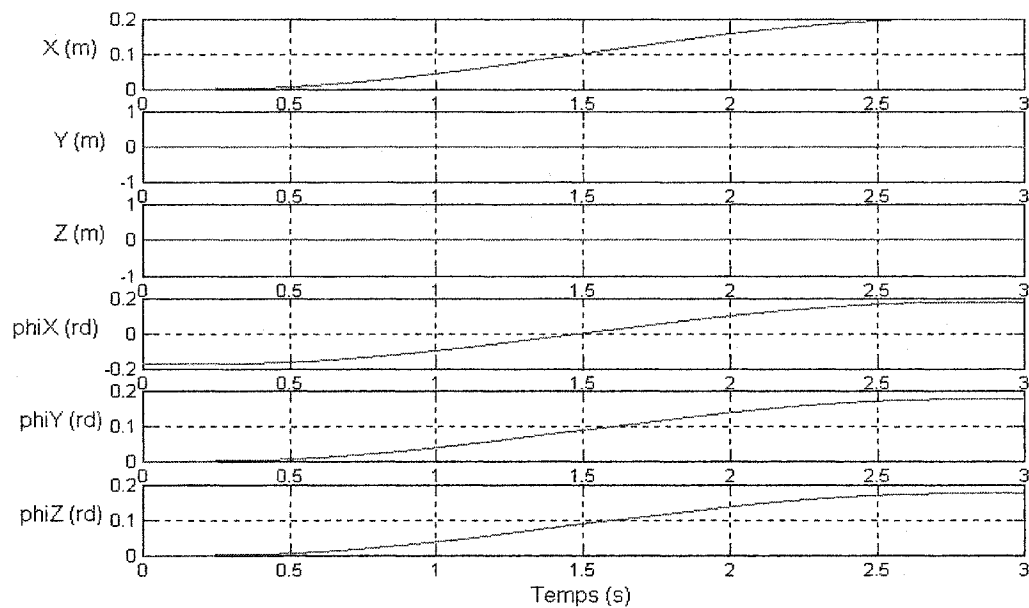


Figure 50 Trajectoire cartésienne désirée de l'objet

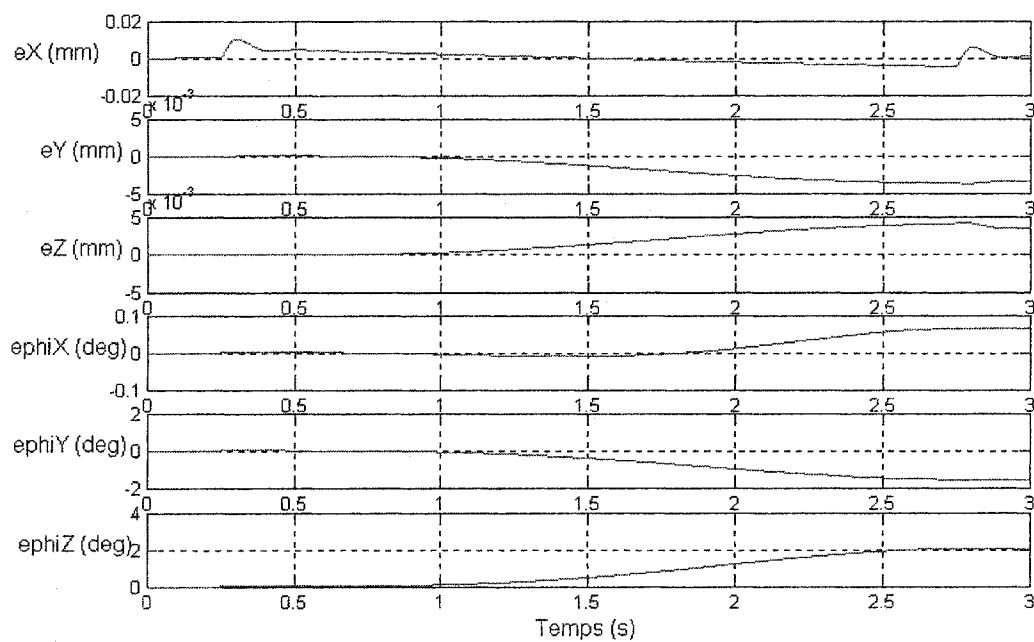


Figure 51 Erreurs cartésiennes (contrôleur conventionnel)

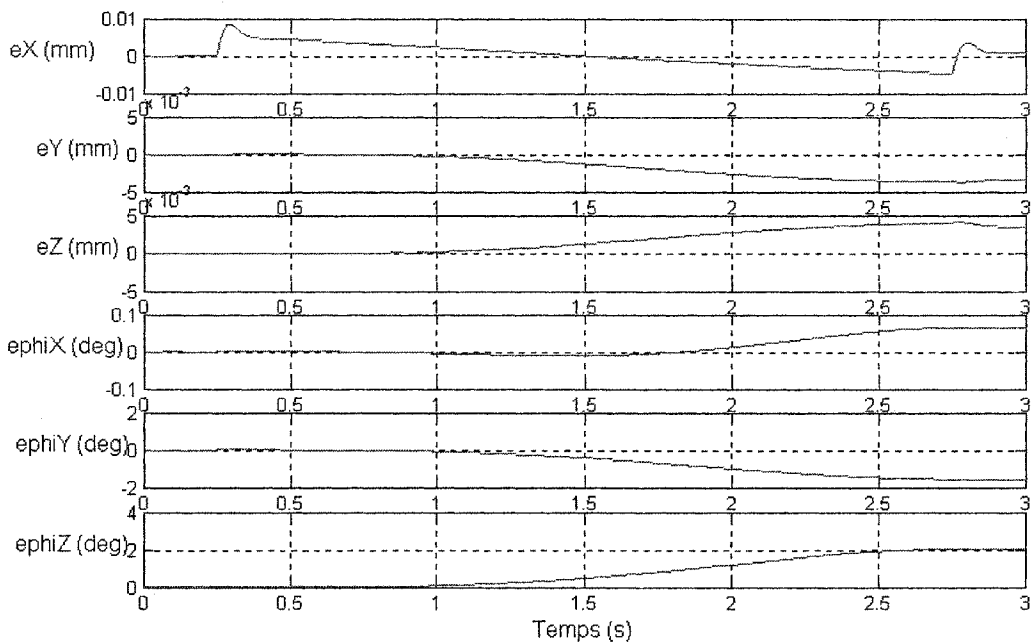


Figure 52 Erreurs cartésiennes (contrôleur flou)

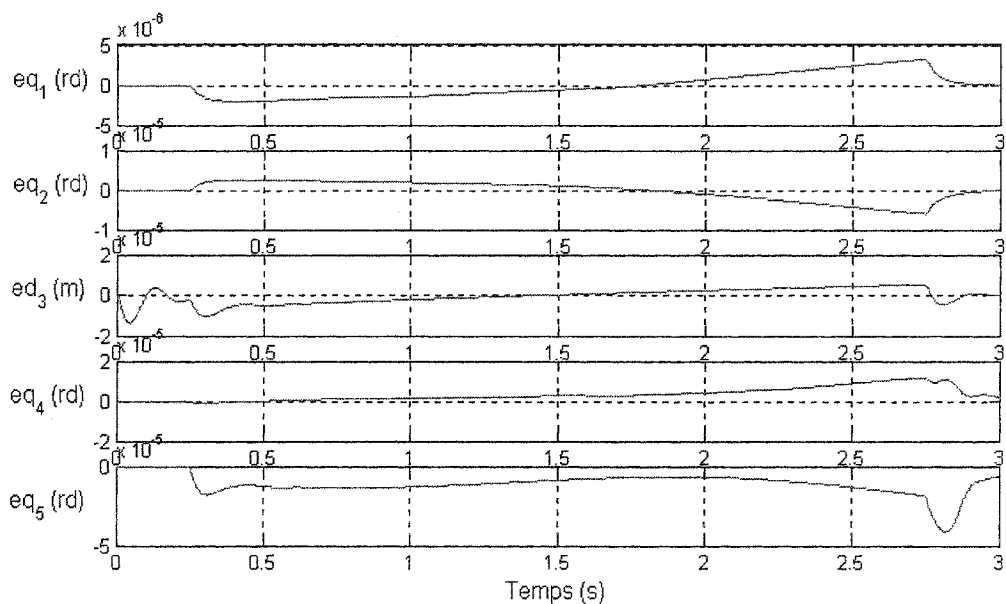


Figure 53 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur conventionnel)

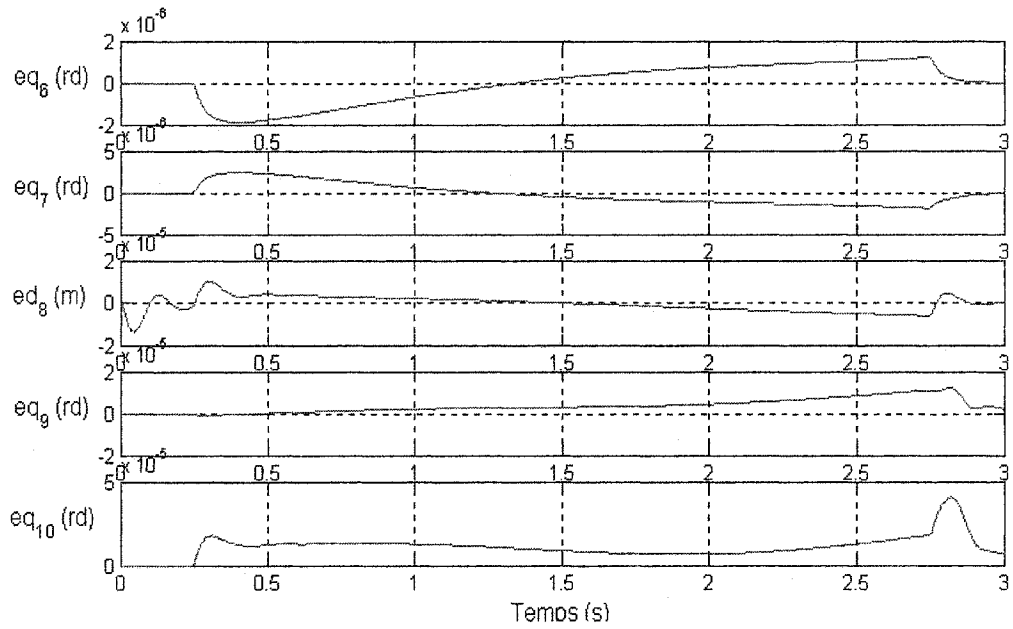


Figure 54 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur conventionnel)

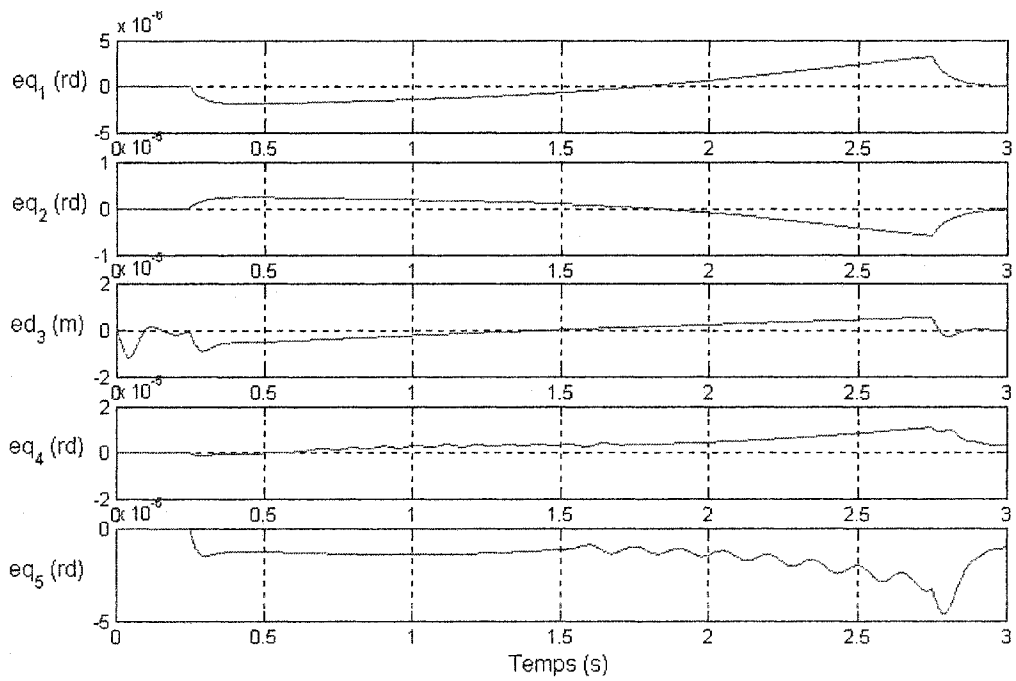


Figure 55 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 1 (contrôleur flou)

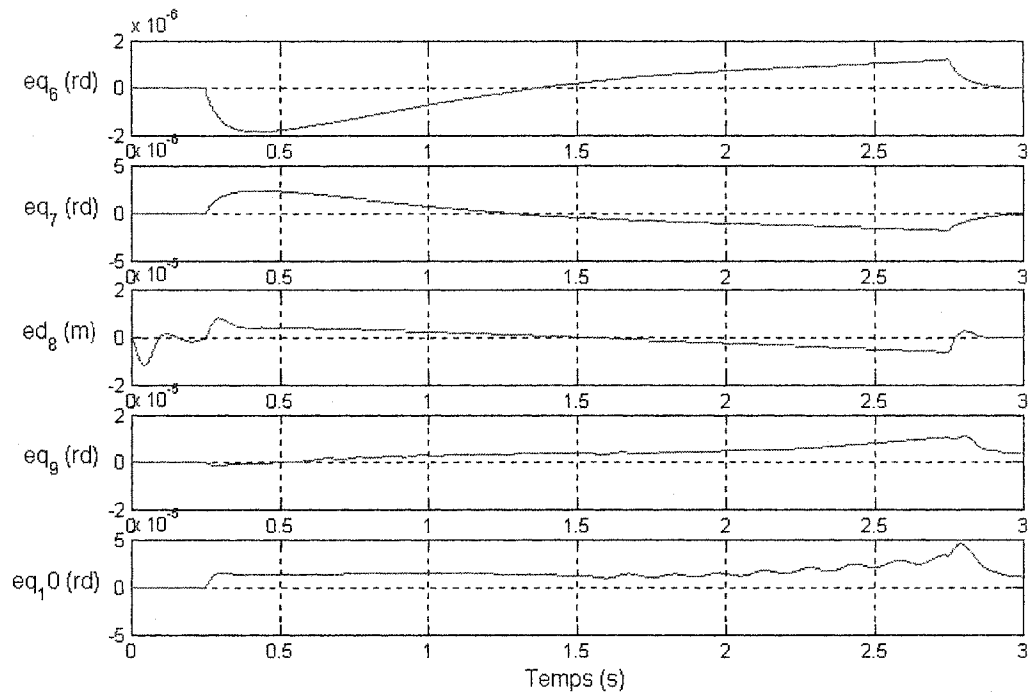


Figure 56 Erreurs des trajectoires articulaires du robot 2 (contrôleur flou)

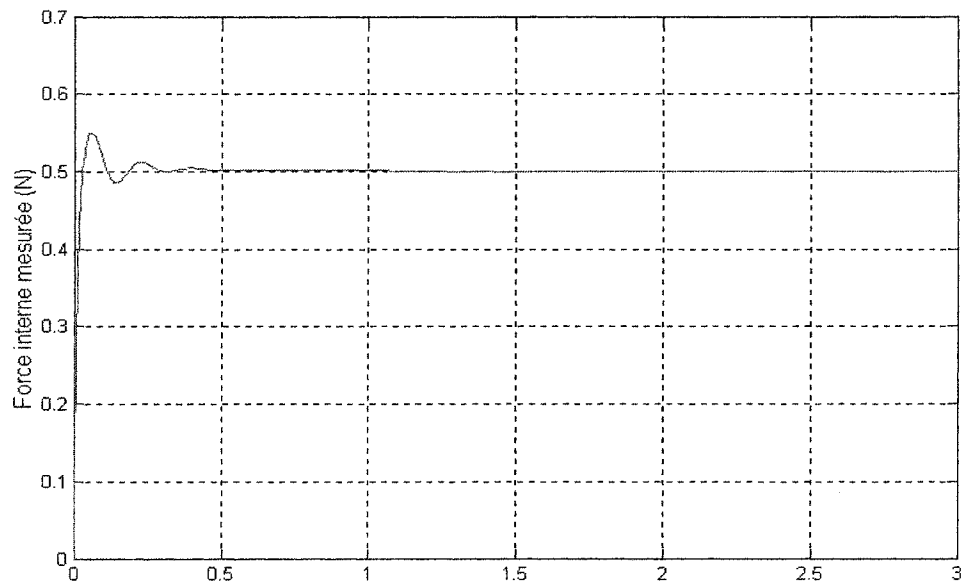


Figure 57 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur conventionnel)

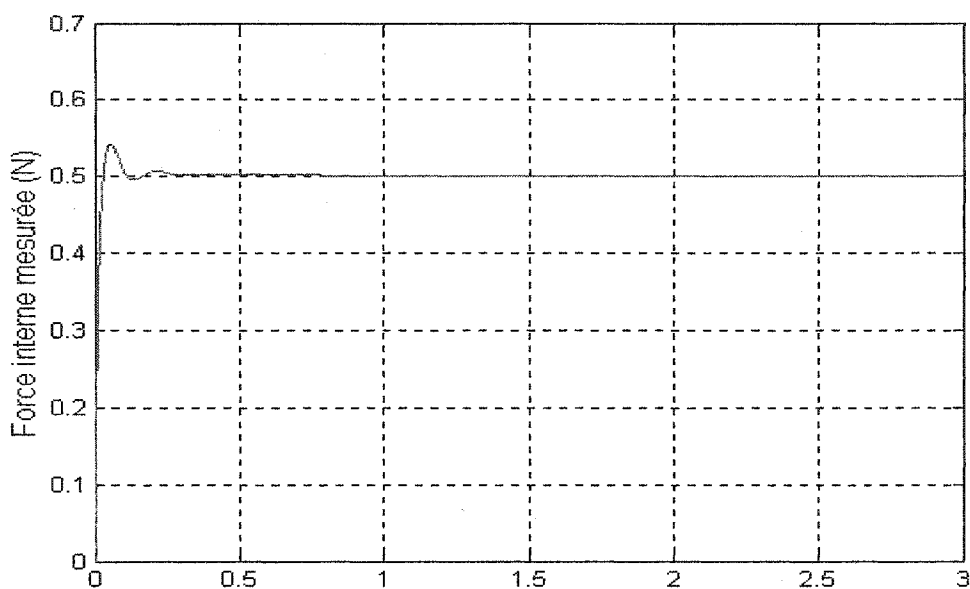


Figure 58 Force interne mesurée (valeur désirée de 0.5 N, contrôleur flou)

Pour ce dernier mouvement (figures 50 et 51) qui est une translation selon l'axe x de 0.2 m combinée avec trois rotations autour des axes x, y et z, c'est très exigeant comme mouvement. Les valeurs des erreurs cartésiennes (figure 52) avec le contrôleur conventionnel et qu'on peut remarquer sur figure 53 avec le contrôleur flou convergent au dessous de 0.1 degrés autour de x et autour de y converge vers une valeur au dessous de  $-0.2$  degrés et autour de z vers 2 degrés. Malgré ces résultats, on peut conclure que notre modèle est valide et le choix de nos contrôleurs est efficace étant donné que le mouvement est très compliqué avec trois rotations. On remarque que la force interne (figures 57 et 58) converge vers la valeur désirée, donc les deux robots ne laissent pas tomber l'objet et les erreurs articulaires sont acceptables.

## CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

Dans le cadre de ce mémoire nous avons conçu et implanté le modèle dynamique d'un système composé de deux robots manipulateurs et un objet rigide. Ces robots devraient être en mesure de manipuler soigneusement et avec précision cet objet. Nous avons traité le contrôle du système manipulateurs-objet avec une génération de trajectoire dans l'espace cartésien et avec un maintien de la force interne. Pour le suivi de trajectoire, nous avons décrit deux types de contrôleurs; un conventionnel et un autre flou. Nous avons obtenu les résultats de simulation correspondants à ces deux types de contrôleurs. Nous avons pu tirer quelques interprétations sur l'efficacité de chaque contrôleur, et ceci en terme de précision et de bon fonctionnement. Pour maintenir la force interne désirée sur l'objet nous avons utilisé un contrôleur proportionnel-intégral (PI).

En effet, nous avons obtenu d'excellents résultats pour quelques trajectoires cartésiennes désirées de l'objet. Ces résultats ont montré que les deux robots ont pu maintenir et déplacer l'objet sans sortir de leurs environnements de travail et sans dépasser leurs vitesses maximales caractérisées et elles montrent ainsi l'efficacité et la validité du modèle dynamique du système.

Les résultats des simulations nous ont permis de constater le bon fonctionnement du générateur de la trajectoire utilisée. Cette remarque a été interprétée par la continuité des trajectoires articulaires et par le fait que les deux robots ne sortent pas de leurs enveloppes de travail. De même, nous avons pu voir clairement que les erreurs des trajectoires articulaires des deux robots sont très négligeables. Cela s'explique par l'efficacité de notre modèle et le bon choix du type commande qui a assuré la stabilité de notre système.

Nous avons aussi constaté que les points de contact des deux robots avec l'objet répondent fidèlement aux exigences de la trajectoire désirée. Par conséquent, nous pouvons dire que le système est capable de tenir et de déplacer l'objet puisque durant toutes les simulations on avait presque l'égalité entre les forces internes mesurées et

désirées, cela s'expliquant par le choix adéquat des gains du contrôleur des forces internes.

Les résultats des simulations donnaient une faible erreur en position cartésienne de l'objet et des erreurs négligeables articulaires des deux manipulateurs avec les deux contrôleurs.

Le générateur de trajectoire de l'objet se basait sur un mouvement désiré dans l'espace cartésien. Puisque les deux robots tenaient l'objet par les doigts aux deux points de contact on a utilisé l'information sur leurs mouvements pour calculer les commandes des articulations des deux robots par la cinématique inverse.

Pour la comparaison des deux contrôleurs utilisés pour le suivi de trajectoire, rappelons que notre système est composé des deux robots de 5 d.d.l et un objet rigide. On a dû faire une modélisation pour pouvoir contrôler le système résultant, ce qui est nécessaire pour faire un choix adéquat des paramètres du contrôleur conventionnel. Cet effort n'est pas nécessaire pour le contrôle flou puisque ce dernier n'a pas besoin d'un modèle dynamique pour contrôler le système.

Le contrôleur flou a un avantage, quand le système est composé de plusieurs manipulateurs. Mais pour l'analyse de la stabilité d'un système le contrôleur flou aura besoin d'une représentation mathématique puisque c'est un contrôleur non linéaire.

Ainsi on peut conclure que les choix des contrôleurs qu'on a utilisés au niveau des articulations des robots pour la réalisation de la méthode du couple pré calculé pour le contrôle nous ont amené vers un cas difficile pour l'étude de la dynamique de l'erreur. Des exemples des solutions à ce problème se trouvent dans [21].

## **ANNEXE : MODÉLISATION D'UN SEUL ROBOT**



Nous avons repris et réadapté le calcul de Sioufi A. [17] pour ressortir le modèle dynamique du robot Maker 100. Nous avons effectué ce traitement de manière à être plus consistant et plus sûr de l'exactitude de son calcul.

### Méthode de Lagrange

Pour avoir le modèle dynamique du manipulateur utilisé, on passe par la méthode de Lagrange. La méthode de Lagrange se résume à un bilan énergétique. Le Lagrangien  $L(q, \dot{q})$  est défini comme suit :

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - U(q) \quad (\text{A.1})$$

Avec  $K(q, \dot{q})$ , représentant l'énergie cinétique du système mécanique et  $U(q)$ , représentant l'énergie potentielle du système mécanique.

Pour obtenir, les équations de mouvement du manipulateur on doit calculer le Hamiltonien donné par :

$$\frac{d\partial L}{dt\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau \quad (\text{A.2})$$

et que l'on peut réécrire :

$$\frac{d\partial K}{dt\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = \tau \quad (\text{A.3})$$

Donc, pour trouver le modèle dynamique du robot on doit calculer son énergie cinétique ainsi que son énergie potentielle et puis appliquer l'équation de Lagrange. Pour calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du manipulateur, il faut d'abord faire le modèle cinématique du Maker 100.

## Modèle cinématique du Maker 100

### Systèmes d'axes

Le robot Maker 100 de US Robotic est un robot cylindrique de 5 ddl. La figure 52 montre la configuration de ce robot. Il s'agit d'axes rotatifs pour chacun des axes 1, 2, 4 et 5, puis prismatique pour l'axe 3. Les caractéristiques de ce robot sont les suivantes :

- La charge maximale est de 2.3 kg.
- L'enveloppe de travail du maker est définie comme suit :
  - o  $\theta_1 \in [0^\circ \quad 350^\circ]$  : angle de rotation pour l'axe 1;
  - o  $\theta_2 \in [-141^\circ \quad 141^\circ]$  : angle de rotation pour l'axe 2;
  - o  $d_3 \in [400mm \quad 910mm]$  : déplacement pour l'axe de translation 3;
  - o  $\theta_4 \in [-141^\circ \quad 141^\circ]$  : angle de rotation pour l'axe 4;
  - o  $\theta_5 \in [0^\circ \quad 348^\circ]$  : angle de rotation pour l'axe 5.
- Les vitesses maximales des articulations de chaque manipulateurs sans charge sont :
  - o  $\dot{\theta}_1 = 1.72 \text{ rad / sec}$  ;
  - o  $\dot{\theta}_2 = 1.42 \text{ rad / sec}$  ;
  - o  $\dot{d}_3 = 1.0 \text{ m / sec}$  ;
  - o  $\dot{\theta}_4 = 3.27 \text{ rad / sec}$  ;
  - o  $\dot{\theta}_5 = 3.21 \text{ rad / sec}$  ;
  - Angle maximal de tangage :  $43.2^\circ$  ;
  - Angle maximal de roulis :  $23.5^\circ$  ;

### Démarche :

Lors de l'établissement des systèmes d'axes, on a suivi la démarche donnée dans Craig [1], qui se résume dans les points suivants :

- On fixe un système de coordonnées (fixe) qui sera considéré comme référence pour tous les mouvements.
- Ensuite, on définit les axes Z des rotations (ou des translations) pour les joints angulaires (ou prismatiques). Le sens positif peut être décidé d'une façon arbitraire (voir figure 61).

Puisque le dernier joint est rotatif, on choisit son origine ( $O_5$ ) de telle sorte que la distance  $d_5$  soit égale à 0, donc confondu avec l'origine  $O_4$ .

Afin de déterminer les axes x et y de chaque système de coordonnées, on a suivi la procédure vue en [1] qui se présente comme suit.

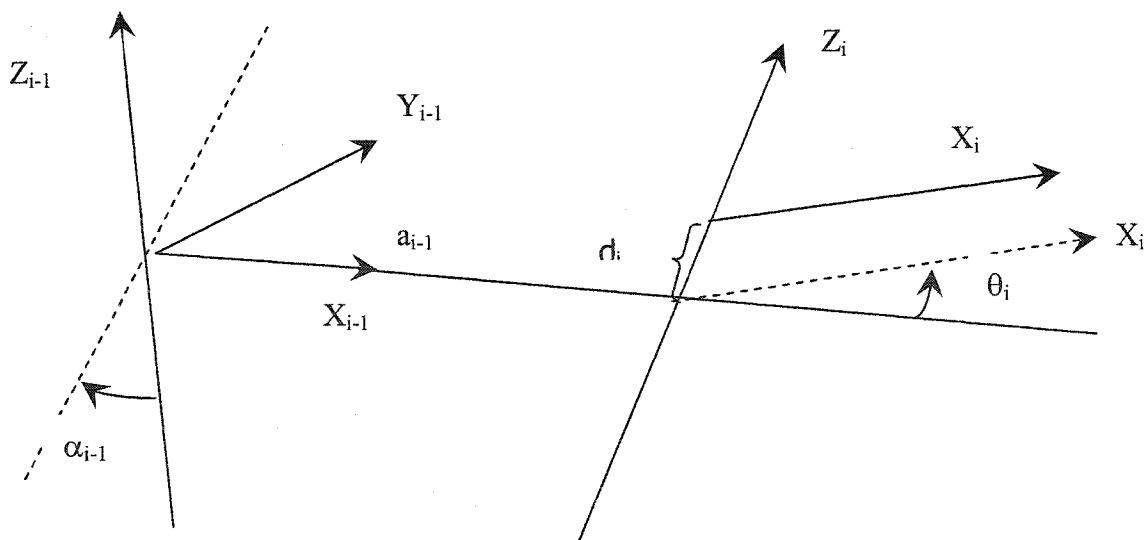


Figure 59 Cinématique de Denavit-Hartenberg

Les paramètres utilisés sur la figure 59 sont :

- $a_{i-1}$  : perpendiculaire commune des axes  $i-1$  et  $i$  (attachée au membre  $i-1$ ).
- $\alpha_{i-1}$  : l'angle de torsion (fixe): angle nécessaire pour ramener l'axe  $i$  parallèle à l'axe  $i-1$ .
- $\theta_i$  : rotation autour de  $Z_i$  de  $X_{i-1}$  vers  $X_i$ .
- $d_i$  : translation selon  $Z_i$  des points de rencontre avec  $X_{i-1}$  et  $X_i$ .

### Représentation des systèmes d'axe

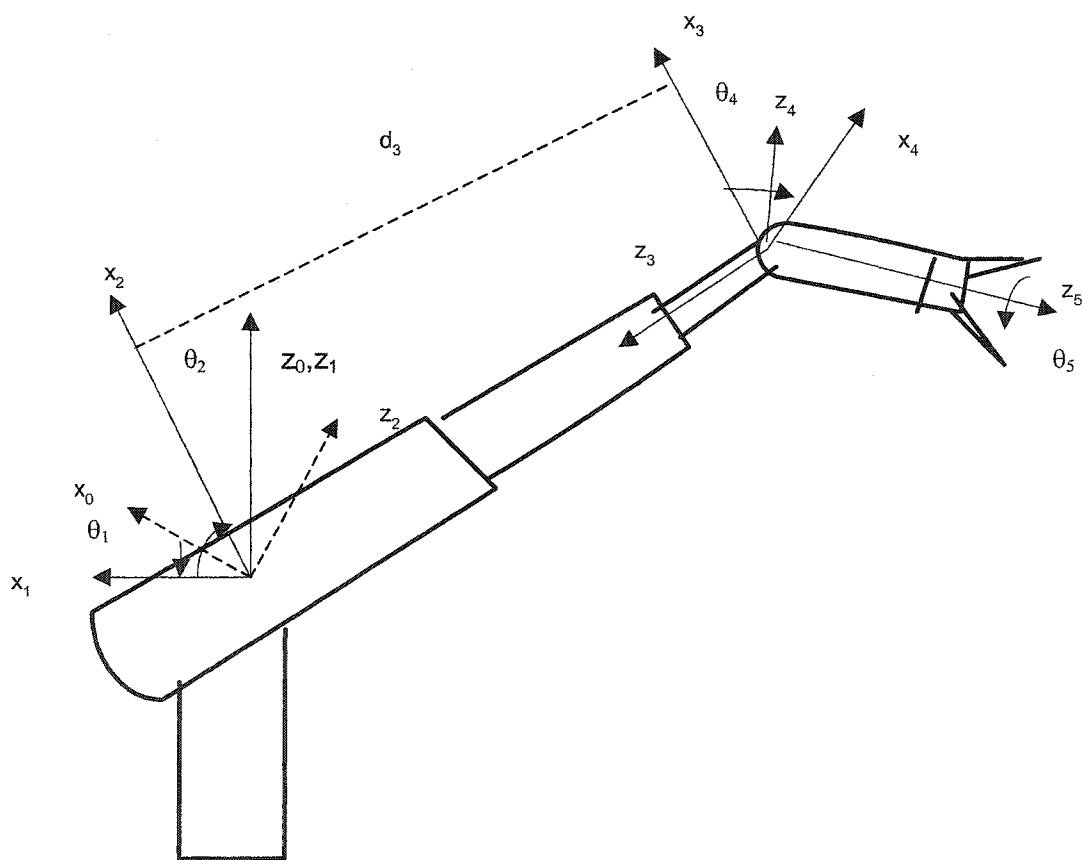


Figure 60 Bras robotisé Maker 100

### Matrices de transformation homogène

La cinématique du robot est développée à l'aide des paramètres d'une version modifiée de Denavit-Hartenberg (DH) en utilisant les conventions proposées par Craig [1]. Le tableau suivant nous donne les paramètres DH du Maker 100 (figure 60).

Tableau V

Paramètres cinématiques de Denavit-Hartenberg modifié

Joint	Variable	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	$\theta_1$	0	0	0	$\theta_1$
2	$\theta_2$	90	0	0	$\theta_2$
3	$d_3$	90	0	$-d_3$	0
4	$\theta_4$	-90	0	0	$\theta_4$
5	$\theta_5$	-90	0	0	$\theta_5$

En général la matrice de transformation homogène s'écrit de la façon suivante :

$${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & -d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Dans la partie qui va suivre on va déterminer les matrices de transformation homogène qui correspondent chacune à une articulation.

En utilisant la matrice générale de transformation de chaque référentiel par rapport à l'autre, donc en prenant tous les paramètres cinématiques de Denavit-Hartenberg, nous obtenons les matrices de transformations suivantes :

$$\begin{aligned}
{}^0_1T &= \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^1_2T &= \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^2_3T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
{}^3_4T &= \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & {}^4_5T &= \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

### Étude de la cinématique directe

Pour étudier la cinématique directe, il faut tout d'abord déterminer la matrice de transformation globale du robot défini comme suit :

$${}^0_5T = {}^0_1T \cdot {}^1_2T \cdot {}^2_3T \cdot {}^3_4T \cdot {}^4_5T \quad (\text{A.5})$$

On trouve après simplification et en posant  $\cos\theta_i = c_i$ ;  $\cos(\theta_i + \theta_j) = c_{ij}$ ,  $\sin\theta_i = s_i$  et  $\sin(\theta_i + \theta_j) = s_{ij}$  :

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} c_1c_5c_{24} - s_1s_5 & -c_1s_5c_{24} - s_1c_5 & -c_1s_{24} & -c_1s_2d_3 \\ s_1c_5c_{24} - c_1s_5 & -s_1s_5c_{24} + c_1c_5 & -s_1s_{24} & -s_1s_2d_3 \\ c_5s_{24} & -s_5s_{24} & c_{24} & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

### Étude de la cinématique inverse

La cinématique inverse nous permet de calculer les angles des articulations en donnant les coordonnées (position et orientation) du poignet. Supposons que les coordonnées du poignet dans le référentiel de base ainsi que ses orientations sont données par :

- $p_x$  : ordonnée selon l'axe des  $\hat{X}$  ;

- $p_y$  : ordonnée selon l'axe des  $\hat{Y}$  ;
- $p_z$  : ordonnée selon l'axe des  $\hat{Z}$  ;
- $\Psi$  : angle de tangage du poignet;
- $\gamma$  : angle de roulis du poignet.

$$M = \begin{bmatrix} m & n & o & p \\ m_x & n_x & o_x & p_x \\ m_y & n_y & o_y & p_y \\ m_z & n_z & o_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Sachant que  $M$  et  ${}^0_5T$  ont la même forme, on veut déterminer les paramètres ( $\theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_5$  et  $d_3$ ) du Robot qui permettent d'atteindre ce point. Une simple comparaison entre  $M$  et  $T$ , nous donne :

$$\begin{aligned} p &= \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 d_3 \\ -s_1 s_2 d_3 \\ c_2 d_3 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} &= \frac{s_1}{c_1} \Rightarrow \theta_1 = \text{atan } 2(p_y, p_x) \\ \Rightarrow p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 &= d_3^2 \Rightarrow d_3 = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \\ \Rightarrow c_1 p_x + s_1 p_y &= -s_2 d_3 \\ \Rightarrow \frac{c_1 p_x + s_1 p_y}{-p_z} &= \frac{s_2}{c_2} \Rightarrow \theta_2 = \text{atan } 2(c_1 p_x + s_1 p_y, -p_z) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

De même on a :

$$\begin{aligned}
 o &= \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 s_{24} \\ -s_1 s_{24} \\ c_{24} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow -c_1 o_x - s_1 o_y &= s_{24} & (A.9) \\
 \Rightarrow \frac{-c_1 o_x - s_1 o_y}{o_z} &= \frac{s_{24}}{c_{24}} \Rightarrow \theta_2 + \theta_4 = \text{atan } 2(-c_1 o_x - s_1 o_y, o_z) = \Psi \\
 \Rightarrow \theta_4 &= \Psi - \theta_2 = \text{atan } 2(-c_1 o_x - s_1 o_y, o_z) - \text{atan } 2(c_1 p_x + s_1 p_y, -p_z)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} m_z \\ n_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_5 s_{24} \\ -s_5 s_{24} \end{bmatrix} \\
 \Rightarrow \frac{-n_z}{m_z} &= \frac{s_5}{c_5} \Rightarrow \theta_5 = \text{atan } 2(-n_z, m_z) = \gamma & (A.10)
 \end{aligned}$$

### Vitesses angulaires et linéaires du Robot

Dans le cas d'une articulation rotative les vitesses angulaires et linéaires sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}W_{i+1} &= {}^i R {}^i W_i + \dot{\theta}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \\
 {}^{i+1}V_{i+1} &= {}^i R ({}^i V_i + {}^i W_i \otimes {}^i P_{i+1}) & (A-11)
 \end{aligned}$$

Dans le cas d'une articulation prismatique les vitesses angulaires et linéaires sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
 {}^{i+1}W_{i+1} &= {}^i R {}^i W_i \\
 {}^{i+1}V_{i+1} &= {}^i R ({}^i V_i + {}^i W_i \otimes {}^i P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1} {}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} & (A.12)
 \end{aligned}$$



Pour l'articulation 1 (rotative), on peut écrire la série d'équations suivante :

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1W_1 = {}^1_0R {}^0W_0 + \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \dot{\theta}_1 {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

$${}^1V_1 = {}^1_0R ({}^0V_0 + {}^0W_0 \otimes {}^0P_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour l'articulation 2 (rotative), on peut écrire la série d'équations suivante :

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^2_1R = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En combinant les deux articulations, on peut calculer les vitesses :

$${}^2W_2 = {}^2_1R {}^1W_1 + \dot{\theta}_2 {}^2\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$${}^2V_2 = {}^2R({}^1V_1 + {}^1W_1 \otimes {}^1P_2) = \begin{bmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^1V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } {}^1P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour l'articulation 3 (prismatique), on peut écrire la série d'équations suivante :

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^3_2R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En combinant cette articulation avec les deux articulations précédentes, on peut calculer de nouveau les vitesses :

$${}^3W_3 = {}^3R {}^2W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 c\theta_2 \end{bmatrix}$$

$${}^3V_3 = {}^3R({}^2V_2 + {}^2W_2 \otimes {}^2P_3) + \dot{d}_3 {}^3\hat{Z}_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_1 c\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_3 \dot{\theta}_2 \\ d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Pour l'articulation 4 (rotative), on peut écrire la série d'équations suivante :

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4R = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^4_3R = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 \\ -s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En combinant cette articulation avec les trois articulations précédentes, on peut calculer les vitesses :

$${}^4W_4 = {}^4_3R {}^3W_3 + \dot{\theta}_4 {}^4\hat{Z}_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 \\ -s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1 c\theta_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s_{2+4} \\ \dot{\theta}_1 c_{2+4} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix}$$

$${}^4V_4 = {}^4_3R ({}^3V_3 + {}^3W_3 \otimes {}^3P_4) = \begin{bmatrix} c\theta_4 & 0 & -s\theta_4 \\ -s\theta_4 & 0 & -c\theta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_3 \dot{\theta}_2 \\ d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -d_3 \dot{\theta}_2 c\theta_4 - \dot{d}_3 s\theta_4 \\ -d_3 \dot{\theta}_2 s\theta_4 - \dot{d}_3 c\theta_4 \\ d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \end{bmatrix}$$

Enfin, pour l'articulation 5 (rotative), on peut écrire la série d'équations suivante :

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5R = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -s\theta_5 & -c\theta_5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$${}^5_4R = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 \\ -s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En combinant l'ensemble des articulations, on peut calculer les vitesses :

$${}^4W_5 = {}^5_4R {}^4W_4 + \dot{\theta}_5 {}^5\widehat{Z}_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 \\ -s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 s_{2+4} \\ \dot{\theta}_1 c_{2+4} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_5 \dot{\theta}_1 s_{2+4} - s_5 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ -s_5 \dot{\theta}_1 s_{2+4} - c_5 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1 c_{2+4} \end{bmatrix}$$

$${}^5V_5 = {}^5_4R ({}^4V_4 + {}^4W_4 \otimes {}^4P_5) = \begin{bmatrix} c\theta_5 & 0 & -s\theta_5 \\ -s\theta_5 & 0 & -c\theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -d_3 \dot{\theta}_2 c\theta_4 - \dot{d}_3 s\theta_4 \\ -d_3 \dot{\theta}_2 s\theta_4 - \dot{d}_3 c\theta_4 \\ d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-d_3 \dot{\theta}_2 c\theta_4 - \dot{d}_3 s\theta_4) c_5 - (d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2) s_5 \\ -(-d_3 \dot{\theta}_2 c\theta_4 - \dot{d}_3 s\theta_4) s_5 - (d_3 \dot{\theta}_1 s\theta_2) c_5 \\ -d_3 \dot{\theta}_2 s\theta_4 - \dot{d}_3 c\theta_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
{}^0W_5 &= {}^0_5R^5W_5 = \begin{bmatrix} c_1c_5c_{24} - s_1s_5 & -c_1s_5c_{24} - s_1c_5 & -c_1s_{24} \\ s_1c_5c_{24} - c_1s_5 & -s_1s_5c_{24} + c_1c_5 & -s_1s_{24} \\ c_5s_{24} & -s_5s_{24} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5\dot{\theta}_1s_{24} - s_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ -s_5\dot{\theta}_1s_{24} - c_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1c_{24} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} s_1\dot{\theta}_2 - c_1s_{24}\dot{\theta}_5 + s_1\dot{\theta}_4 \\ -c_1\dot{\theta}_2 - s_1s_{24}\dot{\theta}_5 - c_1\dot{\theta}_4 \\ c_{24}\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En résumé, les vitesses linéaires et angulaires du robot sont :

$${}^1W_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \text{ et } {}^1V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^2W_2 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1s_2 \\ \dot{\theta}_1c_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \text{ et } {}^2V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^3W_3 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1s_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ -\dot{\theta}_1c_2 \end{bmatrix} \text{ et } {}^3V_3 = \begin{bmatrix} -d_3\dot{\theta}_2 \\ d_3\dot{\theta}_1s_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$${}^4W_4 = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1s_{24} \\ \dot{\theta}_1c_{24} \\ \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} \text{ et } {}^4V_4 = \begin{bmatrix} -d_3\dot{\theta}_2c_4 - \dot{d}_3s_4 \\ -d_3\dot{\theta}_2s_4 - \dot{d}_3c_4 \\ d_3\dot{\theta}_1s_2 \end{bmatrix}$$

$${}^4W_5 = \begin{bmatrix} c_5\dot{\theta}_1s_{24} - s_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ -s_5\dot{\theta}_1s_{24} - c_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1c_{24} \end{bmatrix} \text{ et } {}^5V_5 = \begin{bmatrix} (-d_3\dot{\theta}_2c_4 - \dot{d}_3s_4)c_5 - (d_3\dot{\theta}_1s_2)s_5 \\ -(-d_3\dot{\theta}_2c_4 - \dot{d}_3s_4)s_5 - (d_3\dot{\theta}_1s_2)c_5 \\ -d_3\dot{\theta}_2s_4 - \dot{d}_3c_4 \end{bmatrix}$$

### Matrice Jacobienne

On a :

$${}^0_5T = \begin{bmatrix} c_1c_5c_{24} - s_1s_5 & -c_1s_5c_{24} - s_1c_5 & -c_1s_{24} & -c_1s_2d_3 \\ s_1c_5c_{24} - c_1s_5 & -s_1s_5c_{24} + c_1c_5 & -s_1s_{24} & -s_1s_2d_3 \\ c_5s_{24} & -s_5s_{24} & c_{24} & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La vitesse linéaire du poignet est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^0V_5 = {}^0_5R {}^5V_5 &= \begin{bmatrix} c_1c_5c_{24} - s_1s_5 & -c_1s_5c_{24} - s_1c_5 & -c_1s_{24} \\ s_1c_5c_{24} - c_1s_5 & -s_1s_5c_{24} + c_1c_5 & -s_1s_{24} \\ c_5s_{24} & -s_5s_{24} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-d_3\dot{\theta}_2c_4 - \dot{d}_3s_4)c_5 - (d_3\dot{\theta}_1s_2)s_5 \\ -(-d_3\dot{\theta}_2c_4 - \dot{d}_3s_4)s_5 - (d_3\dot{\theta}_1s_2)c_5 \\ -d_3\dot{\theta}_2s_4 - \dot{d}_3c_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1s_2d_3\dot{\theta}_1 - c_1c_2d_3\dot{\theta}_2 - c_1s_2\dot{d}_3 \\ -c_1s_2d_3\dot{\theta}_1 - s_1c_2d_3\dot{\theta}_2 - s_1s_2\dot{d}_3 \\ -s_2d_3\dot{\theta}_2 + c_2\dot{d}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La vitesse angulaire du poignet est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^0W_5 = {}^0_5R {}^5W_5 &= \begin{bmatrix} c_1c_5c_{24} - s_1s_5 & -c_1s_5c_{24} - s_1c_5 & -c_1s_{24} \\ s_1c_5c_{24} - c_1s_5 & -s_1s_5c_{24} + c_1c_5 & -s_1s_{24} \\ c_5s_{24} & -s_5s_{24} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5\dot{\theta}_1s_{24} - s_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ -s_5\dot{\theta}_1s_{24} - c_5(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \\ \dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1c_{24} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s_1\dot{\theta}_2 - c_1s_{24}\dot{\theta}_5 + s_1\dot{\theta}_4 \\ -c_1\dot{\theta}_2 - s_1s_{24}\dot{\theta}_5 - c_1\dot{\theta}_4 \\ c_{24}\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour déterminer le Jacobien on utilise la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Donc on peut conclure que le Jacobien est défini comme suit :

$$J = \begin{bmatrix} s_1 s_2 d_3 & -c_1 c_2 d_3 & -c_1 s_2 & 0 & 0 \\ -c_1 s_2 d_3 & -s_1 c_2 d_3 & -s_1 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & -s_2 d_3 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 & s_1 & -c_1 s_{24} \\ 0 & -c_1 & 0 & -c_1 & -s_1 s_{24} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c_{24} \end{bmatrix}$$

**Coordonnées des centres de masses, vecteur de gravité dans le référentiel inertiel**

Voici les coordonnées des centres de masses des différentes articulations :

$${}^0Pc_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad {}^0Pc_2 = \begin{bmatrix} -c_1 s_2 y_2 \\ -s_1 s_2 y_2 \\ c_2 y_2 \end{bmatrix}, \quad {}^0Pc_3 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 (z_3 - d_3) \\ s_1 s_2 (z_3 - d_3) \\ -c_2 (z_3 - d_3) \end{bmatrix}, \quad {}^0Pc_4 = \begin{bmatrix} -c_1 (s_{24} y_4 + s_2 d_3) \\ -s_1 (s_{24} y_4 + s_2 d_3) \\ c_{24} y_4 + c_2 d_3 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$${}^0Pc_5 = \begin{bmatrix} -c_1 (s_{24} z_5 + s_2 d_3) \\ -s_1 (s_{24} z_5 + s_2 d_3) \\ c_{24} z_5 + c_2 d_3 \end{bmatrix}.$$

Dans le référentiel de base, tous les vecteurs de gravité de chaque articulation sont données comme suit :

$$\vec{g} = [0 \quad 0 \quad -g]^T$$

### Énergie potentielle totale

L'énergie potentielle totale est obtenue de l'énergie de chaque articulation :

$$U_1 = m_1 g z_1$$

$$U_2 = m_2 g c_2 y_2$$

$$U_3 = -m_3 g c_2 (d_3 - z_3)$$

$$U_4 = m_4 g (c_{24} y_4 + c_2 d_3)$$

$$U_5 = m_5 g (c_{24} z_5 + c_2 d_3)$$

et elle est égale à :

$$U = \sum_i U_i = g \left\{ \begin{array}{l} m_1 z_1 - m_2 y_2 s_1 s_2 + m_3 z_3 c_2 + (-m_3 + m_5) c_2 d_3 \\ -m_4 y_4 s_1 s_{24} - m_4 s_1 s_2 d_3 - m_3 z_3 c_{24} \end{array} \right\} \quad (\text{A.13})$$

En posant :

$$\begin{array}{lll} p_0 = m_1 z_1 & p_1 = m_2 y_2 & p_2 = m_3 z_3 \\ p_3 = m_4 y_4 & p_4 = m_5 z_5 & p_5 = -m_3 + m_5 \\ & & p_6 = m_4 \end{array}$$

on obtient alors :

$$U = \sum_i U_i = g \{ p_0 - p_1 s_1 s_2 + p_2 c_2 + p_3 c_2 d_3 - p_3 s_1 s_{24} - p_6 s_1 s_2 d_3 - p_2 c_{24} \} \quad (\text{A.14})$$



## Énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du robot est donnée par :

$$k(q, \dot{q}) = \sum_i k_i \quad (\text{A.15})$$

$k_i$  est l'énergie cinétique de l'articulation  $i$ . Cette énergie est donnée par :

$$k_i = \frac{1}{2} m_i {}^0 v_{ci}^T {}^0 v_{ci} + \frac{1}{2} {}^i w_i^T c_i I_i c_i {}^i w_i \quad (\text{A.16})$$

## Énergie cinétique linéaire

Voici les composantes d'énergie cinétique linéaire des articulations :

$$\begin{aligned} k_{1lin} &= 0 \\ k_{2lin} &= \frac{1}{2} m_2 y_2^2 (s_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \\ k_{3lin} &= \frac{1}{2} m_3 \left[ (s_2^2 \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) (z_3 - d_3)^2 + \dot{d}_3^2 \right] \\ k_{4lin} &= \frac{1}{2} m_4 \left[ (s_{24} y_4 + s_2 d_3)^2 \dot{\theta}_1^2 + (y_4^2 + d_3^2 + 2y_4 d_3 c_4) \dot{\theta}_2^2 + \dot{d}_3^2 + y_4^2 \dot{\theta}_4^2 \right] + \\ &\quad m_4 y_4 \left[ (y_4 + c_4 d_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - s_4 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 - s_4 \dot{\theta}_4 \dot{d}_3 \right] \\ k_{5lin} &= \frac{1}{2} m_5 \left[ (s_{24} z_5 + s_2 d_3)^2 \dot{\theta}_1^2 + (z_5^2 + d_3^2 + 2z_5 d_3 c_4) \dot{\theta}_2^2 + \dot{d}_3^2 + z_5^2 \dot{\theta}_4^2 \right] + \\ &\quad m_5 z_5 \left[ (z_5 + c_4 d_3) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - s_4 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 - s_4 \dot{\theta}_4 \dot{d}_3 \right] \end{aligned}$$

Ce qui donne en bout ligne :

$$\begin{aligned}
k_{lin} = & \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (m_2 y_2^2 + m_3 z_3^2) s_2^2 + (m_3 + m_4 + m_5) s_2^2 d_3^2 + (m_4 y_4^2 + m_5 z_5^2) s_{24}^2 \\ & - 2m_3 z_3 d_3 s_2^2 + 2(m_4 y_4 + m_5 z_5) s_2 s_{24} d_3 \end{aligned} \right] \dot{\theta}_1^2 + \\
& \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & (m_2 y_2^2 + m_3 z_3^2 + m_4 y_4^2 + m_5 z_5^2) + (m_3 + m_4 + m_5) d_3^2 - 2m_3 z_3 d_3 \\ & + (m_4 y_4 + m_5 z_5) c_4 d_3 \end{aligned} \right] \dot{\theta}_2^2 + \\
& \frac{1}{2} [m_3 + m_4 + m_5] \dot{d}_3^2 + \frac{1}{2} [m_4 y_4^2 + m_5 z_5^2] \dot{\theta}_4^2 + [-(m_4 y_4 + m_5 z_5) s_4] \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + \\
& [(m_4 y_4^2 + m_5 z_5^2) + (m_4 y_4 + m_5 z_5) c_4 d_3] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + [-(m_4 y_4 + m_5 z_5) s_4] \dot{\theta}_4 \dot{d}_3
\end{aligned}$$

En posant :

$$p_{11} = m_2 y_2^2 + m_3 z_3^2 \quad p_{12} = m_4 y_4^2 + m_5 z_5^2 \quad p_{13} = m_3 + m_4 + m_5$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
k_{lin} = & \frac{1}{2} [p_{11} s_2^2 + p_{13} s_2^2 d_3^2 + p_{12} s_{24}^2 - 2p_2 d_3 s_2^2 + 2(p_3 + p_4) s_2 s_{24} d_3] \dot{\theta}_1^2 + \\
& \frac{1}{2} [p_{11} + p_{12} + p_{13} d_3^2 - 2p_2 d_3 + (p_3 + p_4) c_4 d_3] \dot{\theta}_2^2 + \\
& \frac{1}{2} p_{13} \dot{d}_3^2 + \frac{1}{2} p_{12} \dot{\theta}_4^2 - (p_3 + p_4) s_4 \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + [p_{12} + (p_3 + p_4) c_4 d_3] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - (p_3 + p_4) s_4 \dot{\theta}_4 \dot{d}_3
\end{aligned}$$

### Énergie cinétique angulaire

Introduisons tout d'abord les matrices d'inerties de chaque articulations qui sont :

$$\begin{aligned}
{}^{c1}I_1 &= \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix}, & {}^{c2}I_2 &= \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}, & {}^{c3}I_3 &= \begin{bmatrix} I_{xx3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz3} \end{bmatrix}, \\
{}^{c4}I_4 &= \begin{bmatrix} I_{xx4} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy4} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz4} \end{bmatrix} \text{ et } {}^{c5}I_5 &= \begin{bmatrix} I_{xx5} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy5} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

L'énergie cinétique angulaire est composée des éléments suivants pour chaque articulation :

$$\begin{aligned}
 k_{1ang} &= \frac{1}{2} I_{zz1} \dot{\theta}_1^2 \\
 k_{2ang} &= \frac{1}{2} \left[ (I_{xx2} s_2^2 + I_{yy2} c_2^2) \dot{\theta}_1^2 + I_{zz2} \dot{\theta}_2^2 \right] \\
 k_{3ang} &= \frac{1}{2} \left[ (I_{xx3} s_2^2 + I_{zz3} c_2^2) \dot{\theta}_1^2 + I_{yy3} \dot{\theta}_2^2 \right] \\
 k_{4ang} &= \frac{1}{2} \left[ (I_{xx4} s_{24}^2 + I_{yy4} c_{24}^2) \dot{\theta}_1^2 + I_{zz4} \dot{\theta}_2^2 + I_{zz4} \dot{\theta}_4^2 \right] + [I_{zz4}] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 \\
 k_{5ang} &= \frac{1}{2} \left[ (I_{xx5} s_{24}^2 + I_{zz5} c_{24}^2) \dot{\theta}_1^2 + I_{xx5} \dot{\theta}_2^2 + I_{xx5} \dot{\theta}_4^2 + I_{zz5} \dot{\theta}_5^2 \right] + [I_{zz5} c_{24}] \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [I_{xx5}] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4
 \end{aligned}$$

Ce qui donne comme énergie cinétique angulaire totale :

$$\begin{aligned}
 k_{ang} &= \frac{1}{2} \left[ (I_{xx2} + I_{xx3}) s_2^2 + (I_{yy2} + I_{zz3}) c_2^2 + (I_{xx4} + I_{xx5}) s_{24}^2 + (I_{yy4} + I_{zz5}) c_{24}^2 + I_{zz1} \right] \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[ I_{zz2} + I_{yy3} + I_{zz4} + I_{xx5} \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \left[ I_{zz4} + I_{xx5} \right] \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} I_{zz5} \dot{\theta}_5^2 + I_{zz5} c_{24} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + [I_{zz4} + I_{xx5}] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4
 \end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
 p_{a1} &= I_{xx2} + I_{xx3} & p_{a2} &= I_{zz4} + I_{xx5} & p_{a3} &= I_{xx4} + I_{xx5} & p_{a4} &= I_{yy3} + I_{zz2} \\
 p_7 &= I_{zz3} + I_{yy2} & p_8 &= I_{zz5} + I_{yy4} & p_9 &= I_{zz1} & p_{10} &= I_{zz5}
 \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
 k_{ang} &= \frac{1}{2} \left[ p_{a1} s_2^2 + p_7 c_2^2 + p_{a3} s_{24}^2 + p_8 c_{24}^2 + p_9 \right] \dot{\theta}_1^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \left[ p_{a2} + p_{a4} \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} p_{a2} \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} p_{10} \dot{\theta}_5^2 + p_{10} c_{24} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + p_{a2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4
 \end{aligned}$$

En posant :

$$p_{11} = p_{11} + p_{a2} \quad p_{12} = p_{11} + p_{12} + p_{a4} \quad p_{13} = p_{12} + p_{a2} \quad p_{14} = p_{12} + p_{a3}$$

Cela fait que l'on peut conclure que l'énergie cinétique totale est:

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{2} \left[ -2p_2 d_3 s_2^2 + 2(p_3 + p_4) s_2 s_{24} d_3 + \right. \\
& \left. (p_5 s_2^2 d_3^2 + p_7 c_2^2 + p_8 c_{24}^2 + p_9 + p_{11} s_2^2 + p_{14} s_{24}^2) \right] \dot{\theta}_1^2 \\
& + \frac{1}{2} \left[ -2p_2 d_3 + 2(p_3 + p_4) d_3 c_4 + p_5 d_3^2 + p_{12} \right] \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} p_5 \dot{d}_3^2 + \\
& \frac{1}{2} (p_{13}) \dot{\theta}_4^2 + \frac{1}{2} (p_{10}) \dot{\theta}_5^2 + (p_{10}) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 c_{24} - [(p_3 + p_4)] s_4 \dot{d}_3 \dot{\theta}_4 - (p_3 + p_4) s_4 \dot{d}_3 \dot{\theta}_2 + \\
& [(p_3 + p_4) c_4 d_3 + p_{13}] \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4
\end{aligned}$$

Et le Hamiltonien peut s'écrire :

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} -2p_2 d_3 s_2^2 + 2(p_3 + p_4) s_2 s_{24} d_3 \\ + (p_5 s_2^2 d_3^2 + p_7 c_2^2 + p_8 c_{24}^2 + p_9 + p_{11} s_2^2 + p_{14} s_{24}^2) \end{array} \right] \dot{\theta}_1 + p_{10} c_{24} \dot{\theta}_5 \\ \left[ -2p_2 d_3 + 2(p_3 + p_4) d_3 c_4 + p_5 d_3^2 + p_{12} \right] \dot{\theta}_2 + [(p_3 + p_4) c_4 d_3 + p_{13}] \dot{\theta}_4 \\ p_5 \dot{d}_3 + -[(p_3 + p_4)] s_4 \dot{\theta}_4 - (p_3 + p_4) s_4 \dot{\theta}_2 \\ p_{13} \dot{\theta}_4 - [(p_3 + p_4)] s_4 \dot{d}_3 + [(p_3 + p_4) c_4 d_3 + p_{13}] \dot{\theta}_2 \\ p_{10} \dot{\theta}_5 + p_{10} c_{24} \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}$$

Donc, si on prend la relation suivante :

$$\frac{d \partial K}{dt \partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau$$

avec l'équation du mouvement du robot est définie comme suit :

$$M(q) \ddot{q} + V_m(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (\text{A.16})$$

Que l'on réécrit de la façon suivante :

$$M(q) \ddot{q} + B(q) S + C \dot{q}^2 + G(q) = \tau \quad (\text{A.17})$$

avec :

$$S = [\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1 \dot{d}_3, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_2 \dot{d}_3, \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4, \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5, \dot{d}_3 \dot{\theta}_4, \dot{d}_3 \dot{\theta}_5, \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5]$$

Donc on peut trouver les termes de cette équation, qui sont :

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \\ G_5 \end{bmatrix}$$

$$\text{avec } G_1 = \frac{\partial U_1}{\partial \theta_1} = 0, \quad G_2 = \frac{\partial U_2}{\partial \theta_2} = -g(p_1 s_2 + p_3 s_2 d_3 + p_2 s_{24}), \quad G_3 = \frac{\partial U_3}{\partial d_3} = g p_3 c_2,$$

$$G_4 = \frac{\partial U_4}{\partial \theta_4} = -g p_2 s_{24} \text{ et } G_5 = \frac{\partial U_5}{\partial \theta_5} = 0$$

Puis :

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 & B_{17} & 0 & 0 & B_{17} \\ 0 & 0 & 0 & -B_{17} & B_{25} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{36} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{17} & -B_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_{17} & 0 & B_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$B_{11} = -4p_2 d_3 s_2 c_2 + 2(p_3 + p_4) d_3 c_2 s_{24} + 2d_3 (p_3 + p_4) s_2 c_{24} + 2p_{13} s_2 c_2 d_3^2 - 2p_7 c_2 s_2 - 2p_8 c_{24} s_{24} + 2p_{11} c_2 s_2 + 2p_{14} c_{24} s_{24}$$

$$B_{12} = -2p_2 s_2^2 + 2(p_3 + p_4) d_3 s_2 s_{24} + 2p_{13} s_2^2 d_3$$

$$B_{13} = 2(p_3 + p_4) d_3 s_2 c_{24} - 2p_8 c_{24} s_{24} + 2p_{14} c_{24} s_{24}$$

$$B_{17} = -s_{24} p_{10} \quad B_{24} = -B_{17} \quad B_{36} = -2(p_3 + p_4) c_4$$

$$B_{44} = -B_{17} \quad B_{45} = -B_{36} \quad B_{51} = B_{17}$$

$$B_{53} = B_{17}$$

Puis encore :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{B_{11}}{2} & 0 & 0 & \frac{B_{26}}{2} & 0 \\ -\frac{B_{12}}{2} & -\frac{B_{25}}{2} & 0 & \frac{B_{36}}{2} & 0 \\ -\frac{B_{13}}{2} & -\frac{B_{26}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et enfin :

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & M_{15} \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 \\ 0 & M_{42} & M_{43} & M_{44} & 0 \\ M_{15} & 0 & 0 & 0 & M_{15} \end{bmatrix}$$

avec :

$$M_{11} = (p_{11} - 2p_2 d_3) s_2^2 + 2(p_3 + p_4) s_2 s_{24} d_3 + p_{15} s_2^2 d_3^2 + p_7 c_2^2 + p_8 c_{24}^2 + p_9 + p_{14} s_{24}^2$$

$$M_{22} = [-2p_2 d_3 + 2(p_3 + p_4) d_3 c_4 + p_{15} d_3^2 + p_{12}]$$

$$M_{15} = p_{10} c_{24} \quad M_{23} = -s_4 (p_3 + p_4) \quad M_{24} = [(p_3 + p_4) c_4 d_3 + p_{13}]$$

$$M_{33} = p_{15} \quad M_{44} = p_{13} \quad M_{55} = p_{10}$$

Par conséquent, on peut conclure que :

$$\tau_1 = M_{11} \ddot{\theta}_1 + M_{15} \ddot{\theta}_5 + B_{11} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + B_{12} \dot{\theta}_1 \dot{d}_3 + B_{13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + B_{17} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + B_{17} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + G_1 + F_1 \dot{\theta}_1$$

$$\tau_2 = M_{22} \ddot{\theta}_2 + M_{23} \ddot{d}_3 + M_{24} \ddot{\theta}_4 - B_{17} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + B_{25} \dot{\theta}_2 \dot{d}_3 + B_{26} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \frac{B_{11}}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{B_{26}}{2} \dot{\theta}_4^2 + G_2 + F_2 \dot{\theta}_2$$

$$\tau_3 = M_{23} \ddot{\theta}_2 + M_{33} \ddot{d}_3 + M_{23} \ddot{\theta}_4 + B_{36} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 - \frac{B_{12}}{2} \dot{\theta}_1^2 - \frac{B_{25}}{2} \dot{\theta}_2^2 + \frac{B_{36}}{2} \dot{\theta}_4^2 + G_3 + F_3 \dot{\theta}_3$$

$$\tau_4 = M_{24}\ddot{\theta}_2 + M_{34}\ddot{d}_3 + M_{44}\ddot{\theta}_4 - B_{17}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_5 - B_{36}\dot{\theta}_2\dot{d}_3 - \frac{B_{13}}{2}\dot{\theta}_1^2 - \frac{B_{26}}{2}\dot{\theta}_2^2 + G_4 + F_4\dot{\theta}_4$$

$$\tau_5 = M_{15}\ddot{\theta}_1 + M_{55}\ddot{\theta}_5 + B_{17}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + B_{17}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_4 + F_5\dot{\theta}_5$$

On peut finalement écrire l'équation du mouvement du manipulateur comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + V_m(q, \dot{q}) + G(q) + F\dot{q} = \tau \quad (\text{A.18})$$

avec :

$$V_m = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(B_{11}\dot{\theta}_2 + B_{12}\dot{d}_3 + B_{13}\dot{\theta}_4) & \frac{1}{2}(B_{11}\dot{\theta}_1 + B_{17}\dot{\theta}_5) & \frac{1}{2}(B_{12}\dot{\theta}_1) & \frac{1}{2}(B_{13}\dot{\theta}_1 + B_{17}\dot{\theta}_5) & \frac{B_{17}(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4)}{2} \\ -\frac{1}{2}(B_{11}\dot{\theta}_1 + B_{17}\dot{\theta}_5) & \frac{1}{2}(B_{25}\dot{d}_3 + B_{26}\dot{\theta}_4) & \frac{1}{2}(B_{25}\dot{\theta}_2) & \frac{1}{2}(B_{26}\dot{\theta}_2 + B_{26}\dot{\theta}_4) & -\frac{B_{17}}{2}\dot{\theta}_1 \\ -\frac{1}{2}(B_{12}\dot{\theta}_1) & \frac{1}{2}(B_{36}\dot{\theta}_4 - B_{25}\dot{\theta}_2) & 0 & \frac{1}{2}(B_{36}\dot{\theta}_2 + B_{36}\dot{\theta}_4) & 0 \\ -\frac{1}{2}(B_{13}\dot{\theta}_1 - B_{17}\dot{\theta}_5) & \frac{1}{2}(-B_{36}\dot{d}_3 - B_{26}\dot{\theta}_2) & -\frac{1}{2}(B_{36}\dot{\theta}_2) & 0 & -\frac{B_{17}}{2}\dot{\theta}_1 \\ \frac{1}{2}(B_{17}\dot{\theta}_2 + B_{17}\dot{\theta}_4) & \frac{B_{17}}{2}\dot{\theta}_1 & 0 & \frac{B_{17}}{2}\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a vérifié que la matrice  $\dot{M} - 2V_m$  est une matrice antisymétrique.

L'équation de mouvement est alors :

$$M(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \tau \quad (\text{A.19})$$

avec :

$$H(q, \dot{q}) = V_m(q, \dot{q}) + G(q) + F\dot{q} \quad (\text{A.20})$$

et nous allons négliger dans ce cas les frottements. Par conséquent nous allons supposer que toutes les forces de frottements des articulations sont nulles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Craig, J. J. (1989), *Introduction to robotics- Mechanics and Control*. (2 ed.): Adisson-Wesley.
- [2] Ding, D, Liu, Y. H., Zhang, J., & Knoll, A. (2001), *Computation of fingertip positions for a form-closure grasp*. Paper presented at the Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul.
- [3] Gauthier, G. (1997). *Coordination de robots pour la manipulation d'objets*. Université du Montréal/École polytechnique, Montréal.
- [4] Haipeng, X.I., Bryson, J., Farshid, S. & Patel, R.V. (1999), *A robust control scheme for dual-arm redundant manipulators: experimental results*. Paper presented at the Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp 2507-2507.
- [5] Hsu, P. (1993). *Coordinated control of multiple manipulator systems*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 9(4), 400-410.
- [6] Hsu, P., & Su, S. (1992). *Coordinated control of multiple manipulator systems- Experimental results*. Paper presented at the Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, Nice, Fr.
- [7] Jankowski, K. P., Elmaraghy, H.A., & Elmaraghy, H.W. (1993). *Dynamic coordination of multiple robot arms with flexible joints*. The international journal of robotics research, 12(6), 505-528.
- [8] Jaydev, P. Desai, M. Z. & Vijay, K. (1997). *Two-arm manipulation tasks with friction assisted grasping*. Proc. IROS, pp 189-195.
- [9] Jean, J. H., Fu, I.C. (1993). *an adaptive control scheme for coordinated multimanipulator systems*. IEEE Transaction on robotics and automation., 9(2), 226-231.
- [10] Khalil, W., Dombre, E. (1999). *Modélisation identification et commande des robots*. (2ème ed.). Paris: Hermes.
- [11] Laroussi, K., Hemami, H., & Goddard, R. E. (1988). *Coordination of Two Planar Robots in Lifting*. IEEE Journal of Robotics and Automation, 4(1), 77-85.
- [12] Lee, K. M., Joni, J., & Yin, X. (2001). *Compliant grasping force modeling for handling of live objects*. Paper presented at the Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation, Seoul.
- [13] Mokhtari, M., (1998), *Applications de MATLAB 5 et SIMULINK 2*, Springer.



- [14] Montigny, M., Sicard, P. (1999). *Commande adaptative force/position d'une main robotique*. Paper presented at the Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering., Shaw Conference Center, monton, Alberta, Canada.
- [15] Park, J., Harada, K., Kaneko, M. (2001). *Enveloping Grasp Feasibility Inequality*. Paper presented at the International conference on Robotics & Automation., Seoul, Korea.
- [16] Shneider, S. A., Cannon, R.H. (1989). *Object Impedance for Cooperative Manipulation: Theory and Experimental Results*.
- [17] Sioufi, A. A. (1997). *Intégration d'un contrôleur numérique et planification des trajectoires rectilignes d'un robot industriel.*, Université du Québec. École de technologie supérieure, Montréal.
- [18] Sudsang, A., Kavraki, L.e. (2001). *a geometric approach to Designing a Programmable force field with a unique stable Equilibrium for parts in the Plane*. Paper presented at the International Conference on Robotics & Automation., Seoul, Kores.
- [19] Unseren, M. A., & Koivo, A. J. (1989). *Reduced order model and decoupled control architecture for two manipulators holding an object*. Paper presented at the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Scottsdale.
- [20] Yun, X. (1991), *Nonlinear Feedback Control of Two Manipulators in Presence of Environnemental Constrains*, Control and Dynamic System, vol. 40, 259-284
- [21] Murray, R. M. (1994), *A mathematical introduction to robotic manipulation*, CRC press LLC.