

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DE LA
MAÎTRISE EN GÉNIE MÉCANIQUE
M.Eng.

PAR
ROTH, SIMON-NICOLAS

MÉTHODE DE CALCUL NUMÉRIQUE RAPIDE EN AÉROÉLASTICITÉ
NON-LINÉAIRE BASÉE SUR L'ÉQUATION DU POTENTIEL COMPLET

MONTRÉAL, LE 1^{er} AOÛT 2007

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Azzeddine Soulaïmani, directeur de mémoire
Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure

M. Louis Dufresne, président du jury
Département de Génie Mécanique, École de technologie supérieure

M. Jean-Yves Trépanier, jury
Département de Génie Mécanique, École polytechnique de Montréal

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 18 JUIN 2007

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

MÉTHODE DE CALCUL NUMÉRIQUE RAPIDE EN AÉROÉLASTICITÉ NON-LINÉAIRE BASÉE SUR L'ÉQUATION DU POTENTIEL COMPLET

Roth, Simon-Nicolas

SOMMAIRE

L'objectif de ce travail était le développement d'un outil de calcul capable de trouver la réponse aéroélastique d'une aile dans un délai assez court pour être en mesure d'optimiser sa structure ou sa géométrie. Un code aéroélastique utilisant l'équation du potentiel complet discrétisé en différences finies a donc été développé.

Nous avons remarqué que la consistance de la discrétisation spatiale était un facteur déterminant afin d'obtenir une solution précise et afin de garantir la stabilité du code. De plus, la convergence d'une résolution par triple factorisation des matrices tridiagonales du Jacobien était insuffisante pour résoudre un problème aéroélastique. Un solveur GMRES préconditionné par une factorisation incomplète de la matrice Jacobienne a donc été implémenté.

Nous avons effectué la résolution structurale par une superposition modale. Les algorithmes de couplage CSS (Conventional Serial Staggered) et ISS (Improved Serial Staggered) ont été comparés. L'algorithme CSS doit être itéré afin de bien représenter les non-linéarités lorsque l'écoulement est transsonique. L'algorithme ISS est basé sur un schéma saute-mouton («leap-frog») donc les données transmises bidirectionnellement entre le fluide et la structure sont explicitées en fonction de l'historique des pas de temps précédents. Bien que les résultats du couplage CSS avec un prédicteur-correcteur et du couplage ISS soient pratiquement identiques, le temps de calcul de la méthode CSS fut approximativement 1.75 fois plus important. C'est pour cette raison que l'algorithme ISS a été privilégié.

L'interpolation transfinie (TFI) a été utilisée afin de régénérer le maillage à chaque pas de temps. L'utilisation de quaternions dans la couche près de l'aile permet de conserver l'orthogonalité du maillage.

Le code a été parallélisé afin de réduire le temps de calcul à son minimum. Le code est en mesure d'effectuer 10000 pas de temps par heure en distribuant le calcul sur 24 processeurs AMD 248 sur un réseau Infiniband pour un maillage d'environ 225k noeuds. Étant donné le chevauchement des domaines, l'efficacité du parallélisme dépend de la taille du problème. Pour un problème de taille moyenne, l'efficacité reste supérieure à 80% jusqu'à 8 processeurs alors que pour un problème de grande taille, l'efficacité reste supérieure à 80% jusqu'à 16 processeurs.

Les indices de flottement calculés sur l'aile AGARD 445.6 sont très proches des valeurs expérimentales. Ce qui nous permet de conclure que le présent code est très rapide, robuste et assez précis pour atteindre l'objectif posé pour ce travail.

A REVISITED FULL POTENTIAL METHOD FOR APPLICATION IN FAST AND ACCURATE NONLINEAR COMPUTATIONAL AEROELASTICITY

Roth, Simon-Nicolas

ABSTRACT

The purpose of this work was the development of a computational tool able to find the aeroelastic response of a wing within reasonable time frame in order to optimize its structure and its geometry. An aeroelastic code using the full potential equation discretized with finite difference was thus developed.

We noticed that the consistency of the space discretization was a major factor in order to obtain accurate solutions and to guarantee its stability. Moreover, the convergence of a triple approximate factorization scheme was insufficient to solve an aeroelastic problem. A nonlinear GMRES algorithm with an ILUT preconditioner was thus implemented.

We carried out the structural resolution by modal superposition. The conventional serial staggered (CSS) coupling algorithm and the improved serial staggered (ISS) coupling algorithm were compared. The CSS algorithm must be iterated in order to accurately capture non-linearities when the flow is transonic. The ISS algorithm is constructed with a leap-frog scheme where the fluid system is always computed at half time stations while the structure subsystem is always computed at full time stations. Although the results of the CSS coupling algorithm with a predictor-corrector and of the ISS coupling algorithm give practically identical results, the computing time of the CSS method was roughly 1.75 times more important. For this reason the ISS algorithm has been preferred.

The transfinite interpolation (TFI) was used in order to regenerate the mesh at each time step. The use of quaternions in the layer close to the wing was used to preserve mesh orthogonality.

Parallel processing was implemented in order to reduce the computing time. The code is able to carry out 10000 time steps per hour by distributing the computation load on 24 AMD 248 processors on an Infiniband network for a mesh of approximately 225k nodes. Because the domains overlap, the efficiency of the parallel code depends on the size of the problem. For a problem of medium size, the efficiency remains higher than 80% for up to 8 processors whereas for a problem of large size, the efficiency remains higher than 80% up to 16 processors.

The flutter speed index calculated on the AGARD 445.6 wing are very close to the experimental values. This enables us to conclude that the code developed is very fast, robust and accurate enough to achieve the goals of this work.

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes remerciements les plus vifs et les plus sincères à mon directeur de recherche, le professeur Azzeddine Soulaïmani. Le professeur Soulaïmani m'a permis de profiter de son expérience, de ses directives et de son soutien aussi bien scientifique que moral. Je tiens donc à lui exprimer ma profonde gratitude.

Je tiens à remercier mes parents de m'avoir supporté moralement et financièrement lors de mes études. Leurs sacrifices et leurs encouragements, ainsi que ceux de toute ma famille et amis, ont été pour moi un stimulant pour arriver au terme de ce travail.

Un très grand merci à mon amoureuse de m'avoir enduré et supporté durant ma maîtrise. Je n'ai pas de mots pour lui dire combien j'apprécie tout ce qu'elle a fait pour moi.

Remerciement au CRIAQ d'avoir en partie supporté financièrement ce projet.

Finalement, je veux exprimer ma gratitude envers mes collègues du GRANIT : Riadh, Riyad, Amine, Jacques et Mahboubeh pour le bon climat de travail et surtout pour les bons moments passés en leur compagnie. «Amine, n'oublie pas que nous devons terminer de rédiger «l'article» !»

TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	4
1.1 Revue bibliographique des écoulements potentiels en CFD	4
1.2 Application fluide-structure des méthodes potentiels.....	7
CHAPITRE 2 HYPOTHÈSES ET ÉQUATIONS GOUVERNANTES.....	8
2.1 Dérivation de l'équation du potentiel complet	8
2.1.1 Équation de conservation de la masse.....	8
2.1.2 Équation de conservation de quantité de mouvement	9
2.1.3 Équation de conservation d'énergie.....	11
2.1.4 Lois de comportement	12
2.1.5 Hypothèses de l'équation du potentiel complet.....	13
2.1.6 Formulation du système d'équations	16
2.2 Formulation adimensionnelle du système d'équations	19
2.3 Capture de l'onde de choc de l'équation du potentiel complet.....	20
2.4 Domaine de dépendance d'un écoulement transsonique.....	22
2.5 Description cinématique.....	27
2.5.1 Description eulérienne	27
2.5.2 Description lagrangienne.....	28
2.5.3 Description ALE	30
2.6 Coordonnées généralisées.....	33
2.7 Formulation ALE des équations du potentiel complet en base covariante.....	37
CHAPITRE 3 RÉOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT.....	41
3.1 Discrétisation spatiale en différences finies.....	41
3.1.1 Opérateurs en différences finies	42
3.1.2 Conditions de consistance du schéma	44
3.2 Loi de conservation de géométrie	47
3.3 Algorithme de Newton-Raphson	49
3.3.1 Traitement des flux spatiaux.....	50
3.3.2 Traitement du terme temporel.....	51
3.4 Équation à résoudre par des itérations de Newton-Raphson.....	52
3.5 Algorithme de résolution par factorisation triple	52
3.6 Algorithme de résolution par GMRES.....	54

3.6.1	Algorithme de GMRES linéaire	55
3.6.2	Algorithme de GMRES non-linéaire	58
3.6.3	Algorithme GMRES préconditionné	59
3.7	Terme de densité biaisée.....	63
3.8	Correction non-isentropique.....	64
3.9	Conditions aux frontières.....	68
3.10	Calcul parallèle	72
3.10.1	Décomposition du domaine.....	72
3.10.2	Algorithme par sous-domaines.....	73
CHAPITRE 4 COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE		76
4.1	Modèle structural.....	77
4.2	Résolution structurale	77
4.3	Interface fluide-structure	81
4.3.1	Pistage de l'interface fluide	86
4.4	Couplage fluide-structure.....	87
4.4.1	Algorithme CSS	87
4.4.2	Algorithme ISS	90
4.5	Déformation de maillage	92
4.5.1	Orientation des frontières	95
4.5.2	Algorithme de déformation par l'algèbre des quaternions	96
4.5.3	Implémentation de l'algorithme de déformation de maillage.....	99
4.5.4	Implémentation de l'algorithme de déformation de maillage en calcul distribué.....	100
CHAPITRE 5 RÉSULTATS NUMÉRIQUES		103
5.1	Résultats en régime permanent	103
5.1.1	Aile Onera-M6.....	103
5.1.2	Aile Agard 445.6	115
5.2	Résultats en régime transitoire.....	119
5.3	Comparaison des méthodes de couplage	121
5.3.1	Algorithme CSS	121
5.3.2	Comparaison entre ISS et CSS.....	123
5.4	Effet de la discrétisation	123
5.5	Résolution structurale	125
5.6	Robustesse du code	127
5.7	Courbe d'indices de flottement	131
5.8	Performance du calcul distribué	132
CONCLUSION		137

ANNEXE I : Condition de consistance 1	140
ANNEXE II : Condition de consistance 2	145
BIBLIOGRAPHIE	150

LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Indices de flottement expérimentaux de l'aile Agard 445.6 120
Tableau II	Comparaison des résultats entre les couplages ISS et CSS..... 124
Tableau III	Comparaison du temps de calcul entre les couplages ISS et CSS.... 124

LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Profil d'aile dans un écoulement en régime transsonique 2
Figure 2	Comparaison du saut d'un choc normal pour les relations isentropique et Rankine-Hugoniot [1] 21
Figure 3	Domaine de dépendance hyperbolique 25
Figure 4	Domaine de dépendance elliptique 26
Figure 5	Domaine de dépendance parabolique 26
Figure 6	Description eulérienne du mouvement 28
Figure 7	Description lagrangienne du mouvement 29
Figure 8	Définition des diverses transformations 31
Figure 9	Maillage en «C» 34
Figure 10	Transformation $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$ 35
Figure 11	Résidus d'une discrétisation non consistante 43
Figure 12	Équilibre des flux 47
Figure 13	Variation du facteur K en fonction du nombre de Mach de l'onde de choc 65
Figure 14	Division du domaine en sous-domaines 73
Figure 15	Domaine divisé en quatre sous-domaines avec chevauchement 75
Figure 16	Efficacité prévue 75
Figure 17	Représentation aile-boîte 78
Figure 18	Interfaces non-correspondantes 82
Figure 19	Projection des noeuds fluide 83

Figure 20	Surface bilinéaire.....	85
Figure 21	Détail de la projection des noeuds fluide.....	87
Figure 22	Algorithme CSS.....	88
Figure 23	Algorithme ISS.....	91
Figure 24	Maillage non-déformé et déformé.....	96
Figure 25	Domaines de propagation des déformations.....	99
Figure 26	Algorithme de déformation.....	101
Figure 27	Déformation TFI.....	102
Figure 28	Déformation Quaternion-TFI.....	102
Figure 29	Aile Agard 445.6 à Mach 0.96.....	104
Figure 30	Maillage grossier aile Onera-M6.....	105
Figure 31	Maillage fin aile Onera-M6.....	105
Figure 32	Aile Onera-M6.....	107
Figure 33	Choc λ aile Onera-M6 maillage grossier.....	108
Figure 34	Choc λ aile Onera-M6 maillage fin.....	109
Figure 35	Coefficient de portance aile Onera-M6.....	110
Figure 36	Coefficient de traînée aile Onera-M6.....	110
Figure 37	Aile Onera-M6 à $y/b=0.20$	112
Figure 38	Aile Onera-M6 à $y/b=0.44$	112
Figure 39	Aile Onera-M6 à $y/b=0.65$	113
Figure 40	Aile Onera-M6 à $y/b=0.80$	113
Figure 41	Aile Onera-M6 à $y/b=0.90$	114
Figure 42	Aile Onera-M6 à $y/b=0.95$	114

Figure 43	Aile Onera-M6 à $y/b=0.99$	115
Figure 44	Aile Agard 445.6 à Mach 0.96.....	117
Figure 45	Aile Agard 445.6 à Mach 0.96.....	118
Figure 46	Perturbation appliquée	119
Figure 47	Modes de déformation de l'aile Agard 445.6	120
Figure 48	Comparaison algorithme CSS à Mach 0.499 et $P=135$ psf pour les 2 premiers modes	122
Figure 49	Comparaison algorithme CSS à Mach 0.960 et $P=60$ psf pour les 2 premiers modes	123
Figure 50	Comparaison entre la discrétisation consistante et non-consistante Mach 0.960 et $P=60.6$ psf pour les 2 premiers modes	125
Figure 51	Comparaison entre la résolution modale à Mach 0.499 et $P=135.3$ psf pour le premier mode	126
Figure 52	Comparaison entre la résolution modale à Mach 0.960 et $P=60.6$ psf pour le premier mode	127
Figure 53	Déplacement généralisé pour une vitesse de Mach 0.499	128
Figure 54	Accélération généralisée pour une vitesse de Mach 0.499	128
Figure 55	Force de portance pour une vitesse de Mach 0.499.....	129
Figure 56	Déplacement généralisé pour une vitesse de Mach 0.960.....	129
Figure 57	Accélération généralisée pour une vitesse de Mach 0.960	130
Figure 58	Force de portance pour une vitesse de Mach 0.960.....	130
Figure 59	Indice de flottement de l'aile Agard 445.6	131
Figure 60	Temps de calcul pour le maillage moyen	134
Figure 61	«Speedup» pour le maillage moyen	134
Figure 62	Efficacité pour le maillage moyen	135

Figure 63	Temps de calcul pour le maillage fin	135
Figure 64	«Speedup» pour le maillage fin	136
Figure 65	Efficacité pour le maillage fin	136

LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

Abréviations :

CFD	computational fluid dynamics
CSD	computational structure dynamics
FP	méthode potentiel complet
GMRES	Generalized Minimal RESidual
ILUT	factorisation incomplète LU
SFC	consommation de carburant spécifique
TFI	interpolation transfinie
TSD	méthode des petites perturbations transsonique

Lettres grecques :

γ	ratio de chaleur spécifique (c_p/c_v)
ρ	densité / masse volumique
$\tilde{\rho}$	densité biaisée
τ	contraintes
ϕ	potentiel de vitesse
σ	régime transitoire (1) ou permanent (0)
ξ, η, ζ	coordonnées en base covariante
Γ	circulation au sillage, frontière de l'ouvert Ω
Δt	pas de temps
$\Delta\phi$	correction du potentiel
Ω	ouvert borné
∇f	gradient de la fonction f
$\nabla \cdot f$	divergence de la fonction f
$f \otimes g$	produit vectoriel entre f et g

Lettres romaines :

a	vitesse du son
A_{ij}	coefficients métriques
c_v	chaleur spécifique à volume constant
c_p	chaleur spécifique à pression constante
C_p	coefficient de pression
D	force de traînée
\mathbf{D}	matrice d'amortissement
e	énergie spécifique interne
E	énergie total d'un système
h	enthalpie
J	déterminant du Jacobien
\mathcal{J}	Jacobien
K	correction non-isentropique
\mathbf{K}	matrice de rigidité
L	force de portance
L_ξ, L_η, L_ζ	opérateurs de différentiation
m	masse
M	nombre de Mach, matrice de préconditionnement
\mathbf{M}	matrice de masse
n	normale
P	pression
q	résultante de vitesse
Q	chaleur ajoutée à un système

R	résidus de calcul, constante des gaz parfaits
Re	nombre de Reynolds
s	entropie
t	temps
T	température
W	travail effectué par un système
x, y, z	coordonnées cartésiennes
u, v, w	vitesse dans le système de coordonnées cartésien
U, V, W	vitesse dans le système de coordonnées covariant

Indices et autres symboles :

$\Theta_{i,j,k}$	indices du maillage pour le noeud Θ
$\hat{\Theta}$	variable à l'état sonique
Θ^*	variable adimensionnelle de Θ
Θ^n	valeur de Θ à l'étape n
Θ_∞	valeur dans l'écoulement libre
$\dot{\Theta}$	vitesse
$\ddot{\Theta}$	accélération
$\overleftarrow{\Theta}$	différence finie en amont
$\overrightarrow{\Theta}$	différence finie en aval
$\frac{\partial}{\partial \Theta}$	dérivée partielle par rapport à Θ
$\frac{D}{D\Theta}$	dérivée matérielle par rapport à Θ $\left(\frac{D}{D\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \Theta \right)$

Note : Cette liste ne doit pas être considérée exhaustive. Certains symboles sont utilisés de façon particulière dans un contexte précis ; les définitions explicites sont alors clairement énoncées dans le texte.

INTRODUCTION

L'optimisation du rayon d'action d'un avion dépend principalement de la fonction suivante [2] :

$$\text{Rayon d'action} = \text{Fonction de} \left(M_{\infty} \frac{L}{D}, \frac{M_D}{M_S}, \frac{1}{\text{SFC}} \right)$$

Le SFC est la consommation spécifique de carburant, qui est déterminée par un système de propulsion efficace. Le ratio entre la masse maximale au décollage (M_D) et la masse de l'appareil à vide (M_S) est maximal lorsque la structure de l'avion a été minimisée. Le facteur $M_{\infty} L/D$ représente la fraction de portance sur la traînée et doit être maximisé.

Pour diminuer la masse à sec de l'appareil et pour maximiser le paramètre $M_{\infty} L/D$, nous devons calculer adéquatement les forces de pression qui agissent sur l'aile afin de minimiser la masse de sa structure et de minimiser sa traînée. Ceci nous oblige à faire de la conception d'une aile d'avion un projet multidisciplinaire qui implique le couplage entre la mécanique des fluides et la résistance des matériaux. De plus, les ailes doivent être conçues de telle façon qu'elles soient stables sous les régimes statique et dynamique. C'est cette étude de l'interaction mutuelle entre les forces d'inertie, les forces élastiques et les forces aérodynamiques agissant sur des structures exposées à un écoulement qui définissent l'aéroélasticité.

L'importance des écoulements transsoniques provient du fait que les avions commerciaux sont préférablement opérés à des vitesses près de la vitesse du son pour avoir des conditions optimales. Nous allons définir un écoulement transsonique comme étant un écoulement où il y a simultanément une grande région qui est subsonique et une petite région qui atteint des vitesses supersoniques. Pour un écoulement transsonique, la nature non-linéaire de l'aérodynamique rend la prévision de charge difficile. C'est dans ce régime d'écoulement qu'une baisse soudaine dans la vitesse de flottement se produit. Cet effet est connu comme étant le «transonic dip».

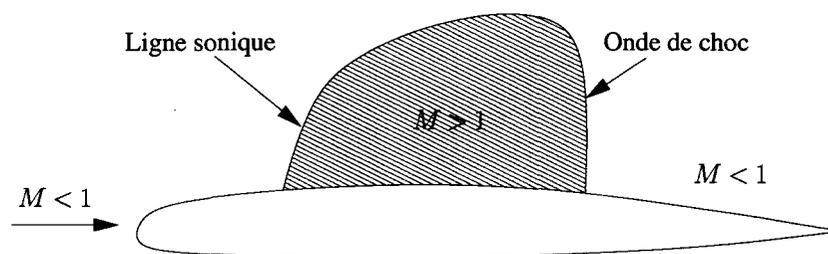


Figure 1 Profil d'aile dans un écoulement en régime transsonique

Dans l'étape de conception de nouveaux avions, la variation de plusieurs paramètres liés à la structure et à l'écoulement exige des simulations numériques en aéroélasticité qui demandent souvent une longue durée de calcul. Il existe plusieurs modèles mathématiques régissant les écoulements transsoniques ; cependant, certains possèdent des applications limitées telles la résolution du potentiel compressible linéarisé, la résolution du modèle des petites perturbations transsonique (TSD). D'autres méthodes basées sur les équations d'Euler ou de Navier-Stokes représentent très bien le phénomène physique, mais étant donné le nombre d'équations à résoudre, elles requièrent un temps de calcul trop grand pour être utilisées dans une période préliminaire de conception. Une autre approche, celle de la résolution numérique du potentiel complet, est capable de reproduire les phénomènes de chocs et donne un champ de pression relativement précis avec un temps de calcul respectable. Cette équation unique est une simplification des cinq équations d'Euler (domaine tridimensionnel) et donne des résultats pratiquement identiques pour des écoulements subsoniques. La différence de résultat entre ces deux méthodes devient plus apparente lorsque l'écoulement est transsonique et qu'il y a présence d'ondes de choc. Cependant, elle demeure petite si le nombre de Mach de l'onde de choc reste inférieur à 1.3 (section 2.3, page 20). C'est pour cette raison que la méthode numérique utilisée dans ce mémoire est basée sur la résolution du potentiel complet.

Le couplage fluide-structure peut être calculé dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel. Dans la dernière approche, la structure et le fluide constituent un milieu

continu régi par les lois de conservation. Celles-ci sont alors discrétisées dans l'espace et le temps. Ainsi, pour chaque condition de vol (nombres de Mach, nombre de Reynolds et pression dynamique) une exécution de calcul est nécessaire pour obtenir l'évolution du système couplé. Si le système, dit aéroélastique, est instable alors pour toute perturbation autour d'un état d'équilibre, la structure exhibe des déplacements divergents. On fixe généralement le nombre de Mach et on fait varier, à chaque exécution du code, la pression dynamique de référence jusqu'à l'obtention de la pression critique correspondant au point de flottement de l'aile. Ceci exige un grand nombre de simulations et confirme la nécessité d'un code aéroélastique pouvant donner la réponse dynamique dans un délai respectable.

Dans ce mémoire, nous exposons les aspects importants pour élaborer un code aéroélastique rapide. Nous présentons au premier chapitre une revue bibliographique de la méthode des potentiels et de leurs applications en aéroélasticité. Au second chapitre, les équations directrices sont développées afin de préciser les hypothèses posées pour dériver l'équation du potentiel complet et les limitations de celles-ci sur la résolution d'un écoulement. Dans le troisième chapitre, nous présentons la discrétisation et les schémas numériques utilisés afin de résoudre l'écoulement. Dans ce chapitre, nous dévoilons aussi la stratégie adoptée afin de paralléliser le code. Dans le quatrième chapitre, la résolution structurale par superposition modale, les algorithmes de couplage fluide-structure ainsi que la méthode de déformation de maillage par l'interpolation transfinie (TFI) sont détaillés. Finalement, au cinquième chapitre, les résultats en régime permanent sur l'aile Onera-M6 et l'aile AGARD 445.6 sont présentés. De plus, l'étude aéroélastique de l'aile AGARD 445.6 est comparée avec les résultats expérimentaux.

CHAPITRE 1

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1.1 Revue bibliographique des écoulements potentiels en CFD

L'intérêt pour l'équation du potentiel provient des écoulements transsoniques. En effet, durant les années 1960, des solutions pour résoudre les écoulements transsoniques étaient convoitées. C'est en 1971 que Murman et Cole [3] ont contribué largement au développement du calcul des écoulements transsoniques en proposant une combinaison de deux méthodes de différences finies selon le domaine de dépendance, écoulement subsonique et écoulement supersonique, pour résoudre l'équation des petites perturbations transsonique (TSD).

Après 1971, de nombreux chercheurs ont présenté des solutions pour résoudre l'équation de TSD ainsi que l'équation du potentiel complet. Steger et Lomax [4], Garabedian et Korn [5] ont proposé des solutions pour un écoulement transsonique sur une aile. L'hypothèse des profils minces n'était plus nécessaire comme elle l'était dans la publication originale de Murman et Cole. En 1973, Murman [6] a produit une formulation qui résolvait avec succès l'équation de TSD en se basant sur sa proposition initiale d'utiliser deux méthodes de différentiation.

En 1972, Whitcomb, étudiant les profils supercritiques a affirmé que le fait de négliger la viscosité ne donnerait pas une bonne solution pour l'analyse de profils supercritiques. Garabedian, Korn et Bauer [7] ont répondu rapidement en incorporant une méthode d'intégration pour résoudre la couche limite turbulente dans leur code de résolution de l'équation du potentiel complet (FPE). Trois ans plus tard, Whitcomb déclarait dans une conférence que la simulation numérique avec la méthode du potentiel couplée à une couche limite donnait des résultats si près des mesures pour les profils supercritiques, que les tests bi-dimensionnels en soufflerie de ces profils devaient être limités. Par contre, les analyses

numériques pour les ailes finies ne donnaient pas encore de résultats aussi près des expérimentations.

Jameson [8] a proposé en 1974 une façon plus flexible de résoudre l'équation du potentiel complet. Il y avait à l'époque des problèmes lorsque l'écoulement était supersonique, mais non aligné avec l'écoulement principal. Jameson a tenu compte de ce problème lors de la discrétisation de l'équation et a réussi à résoudre des problèmes en deux et en trois dimensions. C'est ainsi que l'idée de résoudre l'équation du FP en coordonnées de calcul, pivotées selon des directions parallèle et perpendiculaire à l'écoulement est apparue. Il trouvait en fait une solution pour résoudre les ailes finies qui présentaient un angle de rotation.

Toujours en 1974, Murman [9] a prouvé que les équations potentielles devaient être résolues sous la forme conservative afin d'obtenir la bonne intensité de choc. Pour des chocs faibles, la forme non-conservative donne une bonne solution. Par contre, lorsque le choc est de forte intensité, cette solution est grandement affectée. En 1975, Jameson [10] a résolu l'équation du potentiel complet sous sa forme conservative. Ceci a donné une représentation améliorée des ondes de choc par rapport à celles obtenues avec la forme non-conservative. Pour les différents domaines de dépendance, Jameson a appliqué le concept de viscosité artificielle.

Une nouvelle tendance pour résoudre le potentiel complet est apparue en 1978 et a été établie par Hafez et al. [11]. La forme conservative de l'équation du potentiel complet a été résolue en employant une compressibilité artificielle. Une fois appliquée à l'équation du potentiel, la viscosité nécessaire dans la région supersonique est introduite par la densité. La densité est modifiée dans les régions où l'écoulement est supersonique de façon à ce que l'augmentation nécessaire soit fournie. Contrairement à la méthode originale proposée par Murman et Cole [3], cette méthode emploie la différence finie centrée dans tout

l'écoulement. Cette méthode simplifie énormément la façon de programmer un code en différences finies ou en volumes finis.

En 1981, Steinhoff et Jameson [12] ont démontré que la forme conservative pour un calcul bidimensionnel en régime permanent pouvait donner des résultats multiples. Cependant, cette caractéristique n'a pas pu être démontrée pour un calcul utilisant la forme non conservative, pour un calcul en régime transitoire ou pour un calcul tridimensionnel d'un problème de CFD traditionnel (calcul d'aile d'avion ou calcul aile/fuselage). De plus, l'ajout de la correction non-isentropique a dans certain cas éliminé les solutions multiples. McGrattan [13] a démontré que pour un cas transsonique sur une aile avec de faibles ondes de choc, la solution obtenue avec la forme conservative de l'équation du potentiel complet ainsi que la solution obtenue avec une solution en Euler pouvait dans les deux cas être multiple. Les solutions n'étaient pas identiques, mais similaires. Ce qui suggère que le problème de la non unicité de la solution n'est pas causé par l'hypothèse d'un écoulement isentropique irrotationnel.

La contribution la plus récente dans la recherche de l'écoulement potentiel a été faite par Holst [14]. Il a développé une méthode de solution qui est applicable aux ailes finies ou à un jumelage aile/fuselage dans un écoulement tridimensionnel. Une grille intérieure est employée pour décrire la surface de l'aile alors que le maillage externe est décrit comme une région lointaine. Le chevauchement des maillages peut prendre avantage de l'approche de Chimera.

La recherche sur l'écoulement potentiel a progressé tout au long des années 1970 et dans le début des années 1980. En fait, il y a eu tellement d'innovations pendant cette période qu'il y a eu très peu de découvertes depuis ce temps. Plusieurs codes développés durant cette période sont encore employés aujourd'hui.

Pour plus d'informations sur les écoulements potentiels en CFD, voir [15, 16, 17].

1.2 Application fluide-structure des méthodes potentiels

Les applications en aéroélasticité des méthodes potentielles sont surtout réalisées par des codes utilisant la méthode des petites perturbations transsonique. Des exemples d'application aéroélastique en trois dimensions sont donnés dans les références [18, 19, 20] pour le code XTRANS3S et dans les références [21, 22] pour le code CAP-TSD. Dans la référence [21], les indices de flottement pour l'aile Agard 445.6 sont trouvés. La version linéaire et la version non-linéaire du code CAP-TSD sont comparées. Les points de flottement trouvés avec le code linéaire sont légèrement surestimés. Ceux calculés avec le code non-linéaire sont aussi légèrement surestimés tandis qu'en transsonique, ils sont légèrement conservateurs.

Les applications en aéroélasticité pour des codes utilisant la méthode du potentiel complet sont limitées à un mouvement rigide imposé à l'aile. Des résultats bidimensionnels sont présentés dans les références [23, 24, 25, 26] et tridimensionnels dans les références [27, 28, 29].

Remarque: Le couplage d'un code utilisant la méthode du potentiel complet avec un code structural a probablement été réalisé. Cependant, les résultats de ce couplage ne sont pas publiés. Il semble que les codes aéroélastiques utilisant l'équation des petites perturbations transsonique ont subi une telle évolution que la nécessité d'utiliser l'équation du potentiel complet a été délaissée pour passer directement aux équations d'Euler.

CHAPITRE 2

HYPOTHÈSES ET ÉQUATIONS GOUVERNANTES

2.1 Dérivation de l'équation du potentiel complet

L'équation du potentiel complet compressible (FP) contient deux variables inconnues, le potentiel ϕ et la densité ρ . La densité est trouvée par une fonction non linéaire $\rho(\phi)$. Pour dériver l'équation du FP, nous avons besoin des équations de base de la mécanique des fluides, c'est à dire les équations de conservation de la masse, conservation de quantité de mouvement et de conservation de l'énergie. L'équation de conservation de la masse nous permet de trouver le potentiel ϕ . De plus, la combinaison des équations de conservation de quantité de mouvement et de l'énergie ainsi que des relations provenant d'hypothèses nous donnera la relation non linéaire $\rho(\phi)$ pour trouver la densité ρ .

2.1.1 Équation de conservation de la masse

L'équation portant sur le potentiel ϕ est dérivée par l'équation de continuité. Cette équation stipule que *la masse d'un système matériel suivi dans son mouvement reste constante*.

La masse d'un système est donnée par :

$$m = \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega \quad (2.1)$$

Selon le principe énoncé, on a :

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (2.2)$$

En appliquant le théorème de transport de Reynolds, on obtient :

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \, d\Omega + \iint_{\Gamma} \vec{n} \cdot \rho \vec{v} \, d\Gamma = 0 \quad (2.3)$$

où \vec{n} est la normale unitaire extérieure à Γ . Ici, on désigne Ω comme étant un ouvert borné de l'espace euclidien \mathbb{R}^n , où n est le nombre de dimensions, ayant pour frontière Γ . L'équation (2.3) indique que *le taux de changement de la masse dans un volume de contrôle fixe arbitraire par rapport au temps (première intégrale) est compensé par la sortie nette de la masse partant du même volume (deuxième intégrale)*. Cette équation peut être mise sous une forme différentielle en transformant l'intégrale sur la surface en intégrale sur le volume par le théorème de divergence de Gauss.

$$\iint_{\Gamma} \vec{n} \cdot \rho \vec{v} \, d\Gamma = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \rho \vec{v} \, d\Omega \quad (2.4)$$

Puisque le volume de contrôle Ω est fixe en fonction du temps, on peut entrer la dérivée temporelle dans l'intégration du premier terme de l'équation (2.3). En combinant les deux intégrales sur le volume du premier et deuxième terme, on obtient :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) \, d\Omega = 0 \quad (2.5)$$

Puisque le volume de contrôle est arbitraire, ceci est vrai pour n'importe quel volume de contrôle, on peut éliminer l'intégration de cette dernière équation pour retrouver la forme différentielle de l'équation de continuité :

$$\rho_t + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (2.6)$$

2.1.2 Équation de conservation de quantité de mouvement

La deuxième équation nécessaire à la résolution de l'équation du potentiel complet est dérivée en partie par l'équation de conservation de quantité de mouvement. Cette équation stipule que *la résultante des forces \vec{F} qui agissent sur une masse de fluide m est égale à la variation temporelle de la quantité de mouvement \vec{a} de cette masse*. On appelle

communément cette équation par la seconde équation de Newton :

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (2.7)$$

En appliquant le théorème de transport de Reynolds, on obtient :

$$\frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho\vec{v} \, d\Omega + \iint_{\Gamma} \vec{v} (\vec{n} \cdot \rho\vec{v}) \, d\Gamma = \iiint_{\Omega} (\vec{f}_{\text{volumique}} + \vec{f}_{\text{surfactive}}) \, d\Omega \quad (2.8)$$

Les forces volumiques proviennent généralement de facteurs externes tels la gravité ou le potentiel électromagnétique. Dans le cas où on négligerait les forces magnétohydrodynamiques, on peut définir le vecteur des forces volumiques par :

$$\vec{f}_{\text{volumique}} = \rho\vec{g} \quad (2.9)$$

où \vec{g} est le vecteur d'accélération gravitationnelle.

Les forces surfaciques sont causées par les contraintes de pression et de viscosité sur les frontières Γ du volume de fluide. On peut définir les forces surfaciques par :

$$\vec{f}_{\text{surfactive}} = \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (2.10)$$

où $\vec{\tau}$ est le tenseur de contrainte. L'équation (2.8) devient :

$$\frac{D\rho\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho\vec{v} \, d\Omega + \iint_{\Gamma} \vec{v} (\vec{n} \cdot \rho\vec{v}) \, d\Gamma = \iiint_{\Omega} (\rho\vec{g} + \nabla \cdot \vec{\tau}) \, d\Omega \quad (2.11)$$

Pour une application sur une aile d'avion, nous allons négliger les forces volumiques. Puisque l'équation du potentiel prend comme hypothèse un écoulement isentropique, donc non visqueux, seules les contraintes de pressions seront considérées. Le tenseur de contrainte sera alors égal à $\vec{\tau} = -P\delta_{ij}$, où δ_{ij} est le delta de Kronecker. Pour obtenir l'équation différentielle de conservation de quantité de mouvement pour un écoulement non vis-

queux, aussi appelée équation d'Euler, nous appliquons la même démarche qu'à la section (2.1.1), ce qui donne :

$$(\rho \vec{v})_t + \vec{v} \cdot \nabla (\rho \vec{v}) + \nabla P = 0 \quad (2.12)$$

2.1.3 Équation de conservation d'énergie

La première loi de la thermodynamique stipule que *la somme du travail et de la chaleur ajoutée à un système augmente l'énergie totale de ce système* :

$$\delta E = \delta Q + \delta W \quad (2.13)$$

où δQ = chaleur ajoutée et δW = travail reçu par le système

La quantité E dénote la quantité totale d'énergie du système. Dans un système en mouvement, E inclut l'énergie interne (e), l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. L'énergie totale du fluide à l'intérieur d'un volume de contrôle Ω en négligeant l'énergie potentielle est donnée par :

$$E = \iiint_{\Omega} \rho \left(e + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) d\Omega \quad (2.14)$$

Par le théorème de transport de Reynolds, l'équation (2.13) devient :

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt} \quad (2.15)$$

Cette équation peut être décrite par le principe que *le taux de changement d'énergie totale d'un volume matériel est égal au taux de chaleur ajouté à ce volume additionné par le taux de travail ajouté à ce dernier*. Dans notre cas, l'écoulement est adiabatique, donc seul le terme de travail est ajouté. Ce travail est associé aux forces surfaciques causées par le volume en mouvement. Le taux de travail ajouté sur le volume est donné par :

$$\frac{DW}{Dt} = \iiint_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\tau}) \right) d\Omega \quad (2.16)$$

Avec l'hypothèse d'un écoulement non visqueux faite à la section 2.1.2, cette équation devient

$$\frac{DW}{Dt} = \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot (-P\vec{v})) d\Omega \quad (2.17)$$

On obtient finalement la forme différentielle de l'équation de conservation d'énergie sans conduction pour un écoulement non visqueux :

$$E_t + \nabla \cdot (E + P)\vec{v} = 0 \quad (2.18)$$

2.1.4 Lois de comportement

On doit disposer d'équations supplémentaires afin de fermer le système d'équations. Ces équations sont fournies par les lois de comportement des fluides. Dans le cas de l'air, on peut utiliser l'équation des gaz parfaits :

$$P = \rho RT \quad (2.19)$$

où R est la constante du gaz considéré et :

$$R = c_p - c_v \quad (2.20)$$

où c_p et c_v sont respectivement appelés chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. L'équation (2.19) peut aussi être écrite sous la forme :

$$Pv = RT \quad (2.21)$$

où v est le volume massique $v = 1/\rho$.

On doit aussi introduire les relations thermodynamiques, h pour l'enthalpie et s pour l'entropie. L'énergie spécifique interne e et l'enthalpie spécifique h sont liées par la relation :

$$h = e + \frac{P}{\rho} \quad (2.22)$$

L'énergie spécifique interne et l'enthalpie sont uniquement fonction de la température pour un gaz caloriquement parfait. Dans le cas où la température n'est pas trop élevée ($T < 1000$ K pour l'air) on peut prendre c_p et c_v constants. On trouve alors :

$$e = c_v T \quad \text{et} \quad h = c_p T \quad (2.23)$$

Finalement, on doit respecter la relation de Gibbs :

$$T ds + \frac{1}{\rho} dp = dh \quad (2.24)$$

Cette relation est essentiellement une forme alternative de la première loi de thermodynamique exprimée en terme d'entropie.

2.1.5 Hypothèses de l'équation du potentiel complet

L'écoulement résolu par l'équation du potentiel complet sous forme conservative est un écoulement irrotationnel et isentropique. L'hypothèse d'un écoulement isentropique simplifie énormément l'équation du potentiel. Par contre, selon la deuxième loi de la thermodynamique, lorsqu'on traverse une onde de choc, il y a une augmentation d'entropie, ce qui veut dire qu'un écoulement transsonique n'est pas isentropique. Cependant, les ailes finies sont conçues de telles façons que les ondes de choc sont faibles, donc l'augmentation d'entropie à travers l'onde de choc est dans ce cas négligeable. Nous allons démontrer à la section (2.3) que cette hypothèse est acceptable pour un choc ayant une vitesse inférieure à Mach 1.3.

Nous pouvons maintenant développer les deux hypothèses pour un écoulement irrotationnel et isentropique.

Hypothèse 2.1.1 (Écoulement isentropique) *Pour un écoulement isentropique, on a les relations :*

$$\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^\gamma, \quad a^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (2.25)$$

Preuve Pour un écoulement isentropique, on pose $ds = 0$ dans la relation de Gibbs. On obtient donc :

$$\frac{1}{\rho} dP = dh \quad (2.26)$$

Par (2.23) et (2.19) on pose :

$$dh = c_p dT \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{RT}{P}$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{dP}{P} = \frac{c_p}{R} \frac{dT}{T} \quad (2.27)$$

On intègre les 2 côtés :

$$\int_P^{P_\infty} \frac{dP}{P} = \frac{c_p}{R} \int_T^{T_\infty} \frac{dT}{T} \quad (2.28)$$

Ce qui donne :

$$\ln \left(\frac{P_\infty}{P} \right) = \frac{c_p}{R} \ln \left(\frac{T_\infty}{T} \right) \quad (2.29)$$

Après simplification :

$$\frac{P_\infty}{P} = \left(\frac{T_\infty}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (2.30)$$

De plus, en prenant $v = 1/\rho$ et $ds = 0$, on modifie la relation de Gibbs :

$$v dP = dh \quad (2.31)$$

Par (2.22) et (2.23), on pose :

$$\begin{aligned} h &= c_v T + P v \\ dh &= c_v dT + v dP + P dv \end{aligned}$$

En substituant, on obtient :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} \quad (2.32)$$

On intègre les 2 côtés :

$$\int_v^{v_\infty} \frac{dv}{v} = -\frac{c_v}{R} \int_T^{T_\infty} \frac{dT}{T} \quad (2.33)$$

Ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{v_\infty}{v}\right) = -\frac{c_v}{R} \ln\left(\frac{T_\infty}{T}\right) \quad (2.34)$$

Après simplification :

$$\frac{v_\infty}{v} = \left(\frac{T_\infty}{T}\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}} \quad (2.35)$$

Comme $\rho/\rho_\infty = v_\infty/v$, avec (2.30) et (2.35), on retrouve la première relation de (2.25) :

$$\boxed{\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (2.36)$$

La vitesse d'une petite perturbation produite par un corps en mouvement dans un fluide compressible est fonction de la pression et de la densité. Cette petite perturbation est la vitesse du son et est représentée par $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_s = a^2$. On peut ainsi trouver la deuxième relation de (2.25) :

$$\boxed{\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho} = a^2} \quad (2.37)$$

Hypothèse 2.1.2 (Écoulement irrotationnel) *Pour un écoulement irrotationnel on peut définir la relation entre la vitesse \vec{v} et le potentiel ϕ selon :*

$$\vec{v} = \{u, v, w\} = \nabla\phi \quad \text{où} \quad \phi = \phi(x, y, z, t) \quad (2.38)$$

Preuve Le théorème de Crocco [30] isentropique est :

$$\vec{v} \otimes (\nabla \otimes \vec{v}) = \nabla h + \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.39)$$

Avec (2.30), le membre de droite de l'équation (2.39) devient :

$$\nabla h + \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.40)$$

D'après (2.12) écrite sous forme quasi-linéaire, l'équation (2.40) est nulle. Alors le terme de gauche de (2.39) doit nécessairement être nul. Donc :

$$\boxed{\vec{v} \otimes (\nabla \otimes \vec{v}) = 0} \quad (2.41)$$

Alors $\nabla \otimes \vec{v} = 0$, ce qui est effectivement le cas en prenant $\vec{v} = \nabla\phi$

2.1.6 Formulation du système d'équations

Dans les sections précédentes, nous avons défini toutes les relations nécessaires pour dériver les deux équations du potentiel complet. La première est tout simplement l'équation de continuité (2.6) écrite en terme de potentiel. Celle-ci devient :

$$\boxed{\rho_t + \nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = 0} \quad (2.42)$$

Nous devons avoir une autre équation pour résoudre le potentiel, car l'équation (2.42) possède deux inconnues, ρ et ϕ . Nous allons dériver cette équation à l'aide des équations

de conservation de quantité de mouvement (2.12), de conservation d'énergie (2.18) ainsi que des relations isentropiques (2.26).

On réorganise sous la même forme les équations de conservation de quantité de mouvement (2.12) et de conservation d'énergie (2.18).

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\nabla P = 0, \quad (2.43)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{E+P}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho}P_t = 0 \quad (2.44)$$

Par les relations (2.14), (2.19) et (2.22), on peut développer :

$$\frac{E+P}{\rho} = \frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \quad (2.45)$$

Avec la relation vectorielle

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) - \underbrace{\vec{v} \otimes (\nabla \otimes \vec{v})}_{\text{par 2.41}=0} \quad (2.46)$$

On peut écrire :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \quad (2.47)$$

En multipliant par \vec{v} l'équation (2.43) et en utilisant (2.47), on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \nabla P = 0 \quad (2.48)$$

On reconnaît que le terme de droite est la dérivée convective de la pression. On substitue (2.45) dans l'équation d'énergie (2.44), ce qui donne :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \frac{D}{Dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} P_t = 0 \quad (2.49)$$

On reconnaît que le dernier terme est la dérivée locale de la pression.

On incorpore (2.48) dans (2.49), et en additionnant le terme convectif au terme local, on obtient la dérivée matérielle :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} = 0 \quad (2.50)$$

En utilisant (2.38), (2.48) et (2.50), on peut réécrire l'équation de conservation de quantité mouvement :

$$\nabla \left(\phi_t + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} \right) = 0 \quad (2.51)$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient la forme algébrique de l'équation de conservation d'énergie appelée équation de Bernoulli :

$$\phi_t + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \text{constante} \quad (2.52)$$

La constante dans l'équation précédente est trouvée par les conditions aux limites du problème considéré. Donc l'équation devient :

$$\phi_t + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = \frac{1}{2} \vec{v}_\infty \cdot \vec{v}_\infty + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_\infty}{\rho_\infty} \quad (2.53)$$

Avec les relations isentropiques (2.25), et les relations suivantes :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \quad \text{et} \quad M = \frac{v}{a} \quad (2.54)$$

On obtient l'équation en régime transitoire de Bernoulli :

$$\phi_t + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \frac{v_\infty^2}{(\gamma-1)M_\infty^2} \left(\left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) - \frac{1}{2} v_\infty^2 = 0 \quad (2.55)$$

En isolant $\frac{\rho}{\rho_\infty}$ de l'équation de Bernoulli, on obtient en utilisant la définition du potentiel (2.38) :

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(\frac{2\phi_t + \nabla\phi \cdot \nabla\phi}{v_\infty^2} - 1 \right) \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}} \quad (2.56)$$

Cette équation est la forme conservative de l'équation du potentiel complet. Avec l'équation (2.42) elle forme le groupe d'équations à résoudre numériquement.

2.2 Formulation adimensionnelle du système d'équations

Puisque les équations de base d'un écoulement sont très difficiles à résoudre (équations aux dérivées partielles non linéaires), un large éventail de problèmes relatifs au cas réel d'écoulement se fie aux résultats expérimentaux pour leur résolution. Peu de problèmes sont résolus par le moyen unique de l'analyse. On combine généralement l'analyse numérique à l'analyse expérimentale et le succès de cette combinaison repose sur l'interprétation, la compréhension et la corrélation des résultats et données obtenus.

L'étude réalisée sur les modèles permet de développer des formules empiriques ou de prédire le comportement de systèmes réels. Ce dernier ne peut être atteint sans établir la relation entre le modèle et les systèmes réels. D'où la nécessité de travailler avec des variables adimensionnelles. On doit alors établir des règles de similitude pour transférer à la situation réelle les résultats obtenus numériquement ou expérimentalement à l'échelle.

Pour avoir cette similitude, mais avec un modèle à échelle, nous devons redéfinir les nouvelles variables adimensionnelles sous la forme des variables dimensionnelles selon la forme :

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{L_r} & \rho^* &= \frac{\rho}{\rho_r} \\ t^* &= \frac{t u_r}{L_r} = \frac{t}{t_r} & \phi^* &= \frac{\phi}{u_r L_r} \end{aligned} \quad (2.57)$$

En utilisant ces relations et les équations (2.42, P-16) et (2.56, P-19) , on trouve le système d'équations adimensionnel à résoudre :

$$\boxed{\rho_{t^*}^* + \nabla_{x^*} \cdot (\rho^* \nabla_{x^*} (\phi_i^*)) = 0} \quad (2.58)$$

$$\boxed{\rho^* = \left(1 - \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) M_\infty^2 (2\phi_{t^*}^* + \nabla_{x^*} \phi^* \cdot \nabla_{x^*} \phi^* - 1) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (2.59)$$

Note : Dans la suite on omet les * et toutes les variables sont adimensionnelles excepté si spécifié.

2.3 Capture de l'onde de choc de l'équation du potentiel complet

Malgré l'hypothèse d'isentropie, l'équation du potentiel complet est valide dans le cas où l'entropie serait générée par un choc de faible intensité. L'entropie générée à travers l'onde de choc est fonction du nombre de Mach en amont du choc [31] :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = O(M_1^2 - 1)^3 \quad (2.60)$$

où s_1 et s_2 sont respectivement les valeurs de l'entropie en amont et en aval du choc. On peut remarquer que pour des valeurs faibles de $M^2 - 1$, l'entropie produite est très petite. Pour trouver jusqu'à quel nombre de Mach cette hypothèse est acceptable, on peut comparer la relation du saut isentropique avec la solution de Prandtl du saut donné par la relation de Rankine-Hugoniot. Cette dernière est définie par :

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad (2.61)$$

Pour l'équation du potentiel, la relation de conservation de masse à travers un choc unidimensionnel normal à la vitesse u est :

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \quad (2.62)$$

Par cette relation et l'équation (2.56) adimensionnalisée par a et ρ , on obtient la relation du saut isentropique unidimensionnel :

$$\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_1^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} u_1 = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_2^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} u_2 \quad (2.63)$$

avec la relation entre u et M définie par :

$$u^2 = \frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \quad (2.64)$$

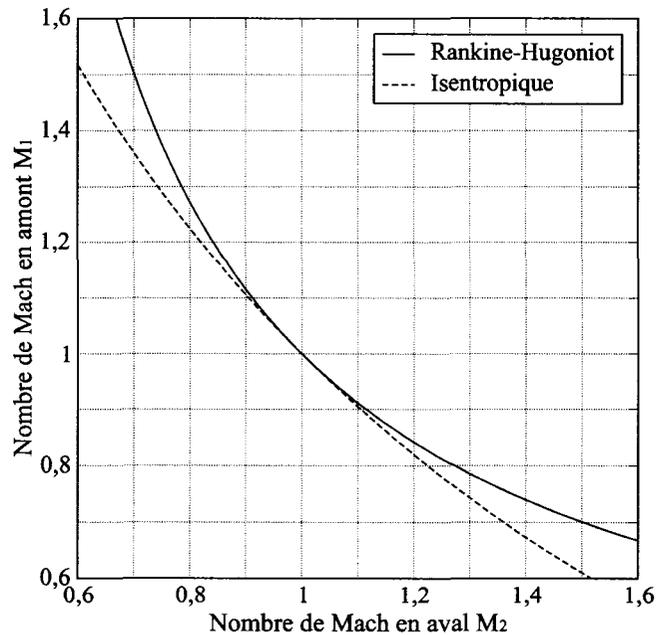


Figure 2 Comparaison du saut d'un choc normal pour les relations isentropique et Rankine-Hugoniot [1]

La figure 2 montre la comparaison entre les deux relations. Pour un nombre de Mach local (M_1) inférieur à 1.3, on obtient une approximation raisonnable par la formulation isentropique. En effet, on peut calculer un écart inférieur à 5%. Les valeurs de M_1 inférieures à 1 correspondent à des ondes d'expansions. Celles-ci sont exclues dans les formulations non-isentropiques. Dans une formulation potentielle isentropique, l'introduction de termes dissipatifs ou d'une viscosité artificielle avec une formulation décentrée en amont donnent le même effet.

2.4 Domaine de dépendance d'un écoulement transsonique

Pour simplifier la démonstration des différents domaines de dépendance et d'influence d'un écoulement transsonique, nous allons utiliser l'équation du potentiel complet bidimensionnel transformé sous sa forme quasi-linéaire. L'équation quasi-linéaire de conservation de quantité de mouvement en négligeant les effets visqueux est donnée en deux dimensions par :

$$\begin{aligned} \text{En } x : \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \text{En } y : \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.65)$$

En utilisant les propriétés de la dérivée en chaîne, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y} \quad (2.66)$$

En utilisant la propriété (2.66) dans les équations (2.65) et en multipliant respectivement par u et v l'équation (2.65) en x et en y et avec la relation (2.37), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \\ \frac{uv}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v^2}{a^2} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.67)$$

L'équation de conservation de masse sous forme quasi-linéaire est :

$$-\frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.68)$$

En substituant l'équation (2.67) dans (2.68) et en multipliant le résultat par a^2 , on obtient :

$$(u^2 - a^2) \frac{\partial u}{\partial x} + uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (v^2 - a^2) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.69)$$

Et finalement, en appliquant la définition du potentiel de vitesse (2.38), on obtient :

$$(u^2 - a^2) \phi_{xx} + 2uv \phi_{xy} + (v^2 - a^2) \phi_{yy} = 0 \quad (2.70)$$

L'équation (2.70) est une équation aux dérivées partielles non-linéaire de second ordre. Elle est aussi la forme non conservative de l'équation du potentiel complet appelée équation du potentiel complet quasi-linéaire. Pour déterminer si elle est elliptique, parabolique ou hyperbolique, on peut examiner une solution au problème de Cauchy posé sur une courbe $\Gamma = (f(s); g(s))$.

Des relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(x, y) \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{S}(x, y) \frac{\partial U}{\partial y} &= 0 \\ \frac{dU}{ds} &= \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} = f' \frac{\partial U}{\partial x} + g' \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.71)$$

On résoud ce système à 2 équations et 2 inconnues $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}, \frac{\partial u_i}{\partial y} \right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= (g' \mathbf{R} - f' \mathbf{S})^{-1} \left(\frac{dU}{ds} \mathbf{S} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= (g' \mathbf{R} - f' \mathbf{S})^{-1} \left(\frac{dU}{ds} \mathbf{R} \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

Si la matrice $g'\mathbf{R} - f'\mathbf{S}$ est régulière, le problème de Cauchy aura une solution par les relations (2.72). Les caractéristiques sont formées des courbes Γ telles que la matrice $g'\mathbf{R} - f'\mathbf{S}$ soit singulière en tous points :

$$\det \left(\frac{dy}{dx} \mathbf{I} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} \right) = 0 \quad (2.73)$$

En transformant l'équation (2.70) en un système de premier ordre, en introduisant une fonction ϕ' telle que :

$$\phi'(x, y) = \phi(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, s) ds \quad (2.74)$$

La fonction vérifie alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} = 0 \quad (2.75)$$

D'après cette relation, on a $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y^2}$ et l'équation (2.70) devient

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \phi'}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial x} + C \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.76)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = u^2 - a^2 \\ B = 2uv \\ C = v^2 - a^2 \end{cases}$$

Alors

$$\underbrace{\begin{bmatrix} B & A \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

En résolvant par (2.73), on obtient l'équation caractéristique :

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -C & \lambda - \frac{B}{A} \end{vmatrix} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \lambda_{1,2} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}
 B^2 - 4AC > 0 &\implies \text{hyperbolique} \\
 B^2 - 4AC = 0 &\implies \text{parabolique} \\
 B^2 - 4AC < 0 &\implies \text{elliptique}
 \end{aligned}
 \tag{2.79}$$

On remarque avec le résultat de (2.79) que lorsque la vitesse de l'écoulement est supérieure à la vitesse du son ($M > 1$), la pente donne un nombre réel. Dans cette situation, l'équation du potentiel complet est hyperbolique. Lorsque l'écoulement est inférieur à la vitesse du

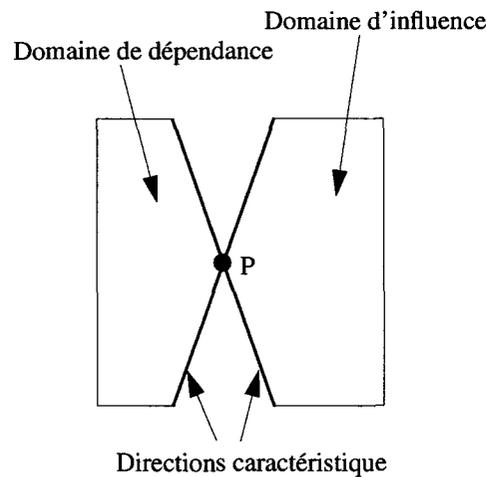


Figure 3 Domaine de dépendance hyperbolique

son ($M < 1$), l'équation du FP est elliptique et la pente de l'équation caractéristique (2.78) ne donne pas un nombre réel.

À une vitesse sonique ($M = 1$), il existe une seule réponse à l'équation (2.78) et l'équation du FP est dite parabolique. Dans les solutions elliptiques, chaque point dans le domaine sera influencé par les autres points.

Lorsque la vitesse de l'écoulement s'approche de l'état sonique, les signaux auront une force plus forte de propagation dans le sens de l'écoulement. En d'autres termes, un point dans l'écoulement sera plus affecté par ce qui se produit en amont de celui-ci. Pendant que

Domaine de dépendance et d'influence

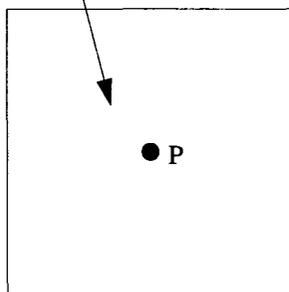


Figure 4 Domaine de dépendance elliptique

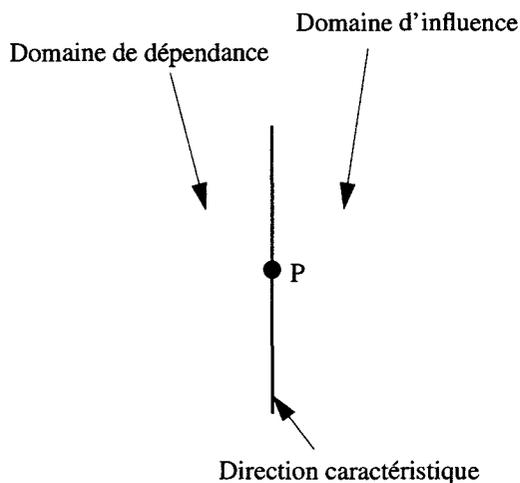


Figure 5 Domaine de dépendance parabolique

l'écoulement devient supersonique, la nature de l'écoulement change pour devenir hyperbolique. Les signaux de l'information voyageront seulement dans le sens de l'écoulement.

Un domaine de dépendance est formé où les propriétés de l'écoulement à un point sont seulement affectées par ce qui se produit dans le domaine en amont. D'une manière semblable, un domaine d'influence existe où un point dans l'écoulement peut seulement affecter d'autres points qui se situent dans un domaine en aval de ce point. Quand le domaine de dépendance et d'influence existe, l'information dans l'écoulement subsonique voyageant en amont doit se déplacer autour de la région supersonique. Les ondes de choc

seront présentes dans ces situations et serviront de frontières entre les régions elliptiques et hyperboliques.

2.5 Description cinématique

Peu importe la méthode numérique employée, le choix d'une description cinématique appropriée est une considération importante à la simulation de problèmes en mécanique des fluides. En mécanique des milieux continus on se sert de trois types de description de mouvement : la description *lagrangienne*, la description *eulérienne* et la description *eulérienne-lagrangienne mixte* (ALE).

2.5.1 Description eulérienne

La description *eulérienne* est largement répandue en mécanique des fluides. L'idée fondamentale de cette formulation consiste en l'analyse de quantités physiques liées aux particules fluides passant par une région fixe de l'espace pendant que le temps évolue. Mathématiquement, on prend la configuration de référence \mathcal{R} égale à la configuration spatiale $R_{\mathbf{x}}$. Ceci est obtenu en considérant un mouvement de chacune des particules sans toutefois avoir un mouvement du noeud m du maillage qui lui est associé $\phi_t = \psi_t$. Donc le mouvement spatial ϕ_t ne coïncide pas avec le mouvement du maillage λ_t . La transformation ψ_t représente le mouvement relatif des particules de $R_{\mathbf{x}}$ par rapport à celle de $R_{\mathbf{x}}$ qui sera étudiée à la section (2.5.3). Cette formulation facilite le traitement de grandes distortions dans le mouvement du fluide et est indispensable pour la simulation des écoulements à frontières mobiles. Les équations de conservation sont formulées en termes de coordonnées spatiales \mathbf{x} et du temps t . Par conséquent, la description eulérienne du mouvement implique seulement des variables et des fonctions ayant une signification instantanée dans une région fixe de l'espace. La vitesse matérielle \vec{v} à un noeud considéré du maillage, correspond à la vitesse du point matériel coïncidant au temps t de ce noeud. La vitesse \vec{v} est par conséquent exprimée en fonction du noeud fixe sans référence à la configuration

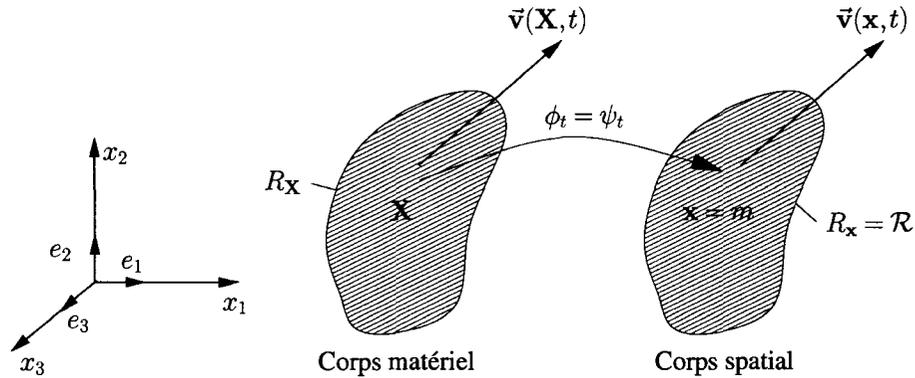


Figure 6 Description eulérienne du mouvement

initiale du continuum et des coordonnées matérielles \mathbf{X} :

$$\vec{v} = \vec{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.80)$$

Puisque la formulation eulérienne dissocie les noeuds du maillage des particules matérielles, des effets convectifs apparaissent causés par le mouvement relatif entre le matériel déformé et le maillage. La faiblesse de la méthode eulérienne est la difficulté de suivre les surfaces libres et les interfaces mobiles entre différents matériaux ou différents médias (par exemple, interfaces fluide-fluide et fluide-solide).

2.5.2 Description lagrangienne

La description *lagrangienne* est principalement employée en mécanique des solides. Cette formulation est basée sur le fait que chacun des noeuds du maillage suit la particule matérielle qui lui est associée pendant le mouvement. Mathématiquement, on prend la configuration de référence \mathcal{R} égale à la configuration matérielle $R_{\mathbf{X}}$. Ceci est obtenu en ayant un mouvement de chacune des particules égale au mouvement du noeud m du maillage qui lui est associé $\phi_t = \lambda_t$. La transformation λ_t est définie comme un mouvement animant le référentiel qui sera étudiée à la section (2.5.3). On définit un mouvement ϕ de $R_{\mathbf{X}}$ comme une transformation qui pour tout instant t associe une transformation ϕ_t du

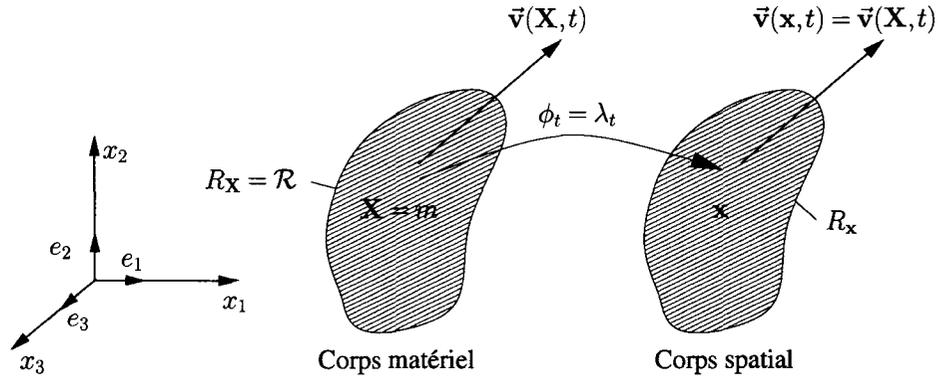


Figure 7 Description lagrangienne du mouvement

domaine matériel $R_{\mathbf{X}}$ à ses valeurs dans le domaine spatial $R_{\mathbf{x}}$:

$$\phi_t : \mathbf{X} \in R_{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathbf{x} = \phi_t(\mathbf{X}) = \phi(\mathbf{X}, t)$$

où \mathbf{x} désigne le point spatial de la particule \mathbf{X} dans le domaine matériel selon le mouvement ϕ . L'ensemble $\phi_t(R_{\mathbf{X}})$ est appelé la configuration de R à l'instant t .

Le gradient de ϕ peut être représenté selon :

$$\frac{\partial \phi}{\partial(\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \vec{\mathbf{v}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

La vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est par conséquent exprimée en fonction des coordonnées matérielles \mathbf{X} .

$$\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.81)$$

avec $\left|_{\mathbf{X}}$ signifiant que \mathbf{X} est fixe. Ici on définit $\frac{d}{dt}$ comme étant une dérivée matérielle, la dérivée spatiale peut être définie par $\frac{\partial}{\partial t}$. On peut lier la dérivée matérielle à la dérivée spatiale d'une fonction f par :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\mathbf{v}} \cdot \nabla f \quad (2.82)$$

Cette relation peut être interprétée par la variation locale de la quantité physique d'une particule X additionnée d'un terme convectif pour tenir compte du mouvement relatif entre les domaines matériel et spatial.

Puisque les points matériels coïncident avec les points du maillage pendant le mouvement, il n'y a aucun effet convectif en calculs lagrangiens : la dérivée matérielle est réduite à une dérivée simple en temps. Le fait que chaque élément fini d'une maille lagrangienne contient toujours les mêmes particules matérielles représente un avantage significatif du point de vue algorithmique. Les applications classiques de la description lagrangienne sont surtout liées à des problèmes de petites déformations. Elle permet le cheminement facile des surfaces et des interfaces libres entre différents matériaux. Sa faiblesse est son incapacité de suivre de grandes déformations sans recours à de fréquentes opérations de formation de nouveaux maillages.

2.5.3 Description ALE

La description *ALE* (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) est particulièrement utile dans des problèmes d'écoulement impliquant de grandes déformations en présence de frontières mobiles et déformées. Les exemples typiques sont des problèmes décrivant l'interaction entre un fluide et une structure flexible. L'idée principale de cette formulation est l'introduction d'un référentiel qui peut se déplacer avec une vitesse indépendante de la vitesse des particules matérielles. En combinant les avantages respectifs des méthodes lagrangiennes et eulériennes, la méthode ALE réduit les difficultés produites par les descriptions cinématiques classiques.

Dans la description du mouvement ALE, la configuration de référence $\mathcal{R} = R_{\chi}$ est telle que son nom l'indique, arbitraire. Elle est ni associée au référentiel spatial R_x , ni associée au référentiel matériel R_X . Nous devons décrire le mouvement physique entre la configuration matérielle R_X et la configuration spatiale R_x du corps. Nous résolvons alors la transformation de $\phi_t : R_X \longrightarrow R_x$. Pour réaliser ceci, on utilise deux transformations sup-

plémentaires : $\psi_t : R_{\mathbf{X}} \longrightarrow R_{\boldsymbol{\chi}}$ (mouvement matériel) et $\lambda_t : R_{\boldsymbol{\chi}} \longrightarrow R_{\mathbf{x}}$ (mouvement du référentiel), ce qui relie les référentiels spatial $R_{\mathbf{x}}$ et matériel $R_{\mathbf{X}}$ du corps matériel au domaine de référence $R_{\boldsymbol{\chi}}$. Le système de coordonnées $\boldsymbol{\chi}$ est introduit pour identifier les noeuds m du maillage.

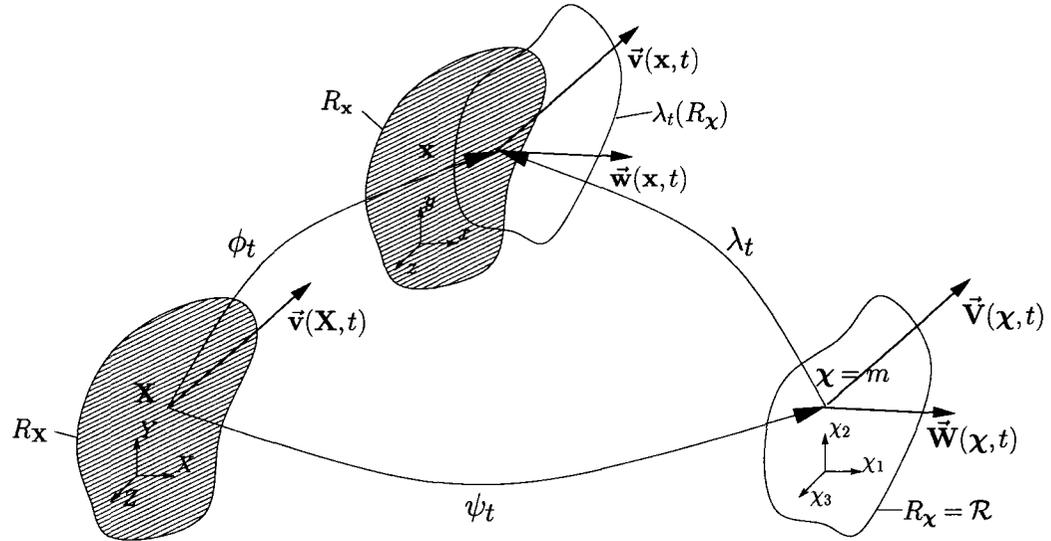


Figure 8 Définition des diverses transformations

Définissons tout d'abord les deux transformations λ_t et ψ_t . Soit λ , un mouvement animant le référentiel $R_{\boldsymbol{\chi}}$, défini par :

$$\lambda_t : \boldsymbol{\chi} \in R_{\boldsymbol{\chi}} \longrightarrow \mathbf{x} = \lambda_t(\boldsymbol{\chi}) = \lambda(\boldsymbol{\chi}, t)$$

La relation entre les particules \mathbf{X} et $\boldsymbol{\chi}$ peut être exprimée par :

$$\boldsymbol{\chi} = \lambda_t^{-1}(\phi(\mathbf{X}, t)) = \psi(\mathbf{X}, t)$$

La transformation $\psi : t \longrightarrow \psi_t$ représente le mouvement relatif des particules de $R_{\mathbf{X}}$ par rapport à celles de $R_{\boldsymbol{\chi}}$. Le mouvement composé par λ^{-1} et ϕ désigne la position actuelle

χ de la particule \mathbf{X} dans R_χ . Ce qui donne la définition de la transformation de ψ_t :

$$\psi_t : \mathbf{X} \in R_{\mathbf{X}} \longrightarrow \chi = \psi_t(\mathbf{X}) = \psi(\mathbf{X}, t)$$

On peut réaliser que les trois transformations ϕ_t , λ_t et ψ_t ne sont pas indépendantes. Le gradient de λ peut être représenté selon :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial(\chi, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} & \vec{\mathbf{w}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

où la vitesse $\vec{\mathbf{w}}$ du maillage est :

$$\vec{\mathbf{w}} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\chi} \quad (2.83)$$

Le gradient de ψ_t peut être représenté selon :

$$\frac{\partial \psi}{\partial(\mathbf{X}, t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} & \vec{\mathbf{V}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

où le vecteur vitesse $\vec{\mathbf{V}}$ donne la vitesse relative calculée dans la base covariante. C'est la vitesse des points que mesurerait un observateur à la position χ attaché au référentiel R_χ utilisant la base vectorielle covariante (section 2.6).

$$\vec{\mathbf{V}} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (2.84)$$

La relation entre les vitesses $\vec{\mathbf{v}}$ (vitesse de la particule par rapport au référentiel spatial $R_{\mathbf{x}}$), $\vec{\mathbf{w}}$ (vitesse du maillage par rapport au référentiel $R_{\mathbf{x}}$) et $\vec{\mathbf{V}}$ (vitesse des particules du domaine référentiel R_χ) peut être trouvée par une transformation successive du gradient des transformations $\phi_t = \lambda_t \circ \psi_t$.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial(\mathbf{X}, t)} = \frac{\partial \lambda_t(\chi, t)}{\partial(\chi, t)} \frac{\partial \psi_t(\mathbf{X}, t)}{\partial(\mathbf{X}, t)}$$

sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} & \vec{\mathbf{v}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} & \vec{\mathbf{w}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{X}} & \vec{\mathbf{V}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui donne pour $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \vec{\mathbf{V}}$$

Alors, on introduit la vitesse relative $\vec{\mathbf{u}}$ qui est la vitesse d'une particule relative au maillage par rapport au référentiel spatial $R_{\mathbf{x}}$.

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \vec{\mathbf{V}} \implies \vec{\mathbf{V}} = \frac{\partial \chi}{\partial x} (\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}})} \quad (2.85)$$

Si le système de coordonnées est fixe, alors $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3) = 0$ et on obtient bien $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{v}}$, qui correspond à une description cinématique eulérienne.

Pour plus de détails voir les références [32, 33].

2.6 Coordonnées généralisées

Les équations présentées jusqu'à maintenant sont écrites en repère cartésien fixe et en description eulérienne. Cependant, pour implémenter un algorithme de résolution numérique, les équations gouvernantes du domaine cartésien peuvent être transformées en un domaine de calcul. Ceci permet de simplifier l'implémentation des équations et des conditions aux frontières lorsqu'on discrétise ces équations par différences finies et par certaines formulations en volumes finis. Le domaine de calcul doit être en mesure de représenter toute surface géométrique complexe du domaine physique en une forme simplifiée. Le maillage en «C» en coordonnées cartésiennes représenté à la figure (9) est transformé en coordonnées covariantes telles que représentées à la figure (10). On peut arriver à appliquer cette transformation en introduisant pour tout point $\chi \in R_{\chi}$ la base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, dite covariante,

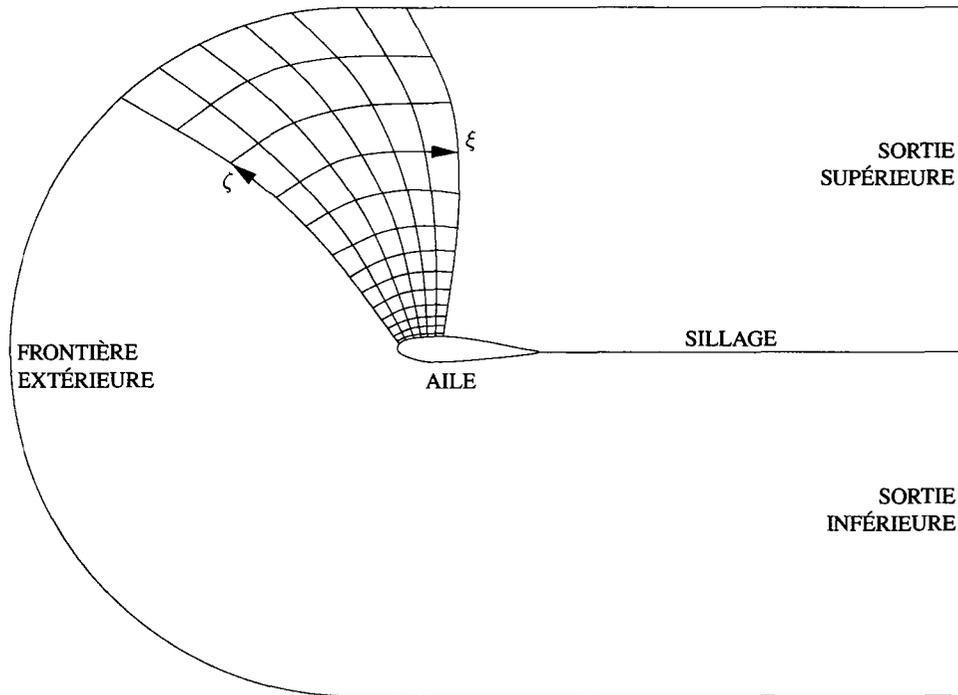


Figure 9 Maillage en «C»

du système de coordonnées curvilignes, tels que les vecteurs \hat{e}_i soient tangents aux courbes formant le maillage. Les vecteurs \hat{e}_i s'expriment dans la base cartésienne e_i par la relation :

$$\hat{e}_i = \frac{\partial x_j}{\partial \chi_i} e_j$$

Sous forme générale, les coordonnées deviennent :

$$\chi_i = \chi_i(x_1, x_2, x_3, t) \text{ et } \tau = t \quad (2.86)$$

On peut aussi affirmer que :

$$x_i = x_i(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \tau) \text{ et } t = \tau \quad (2.87)$$

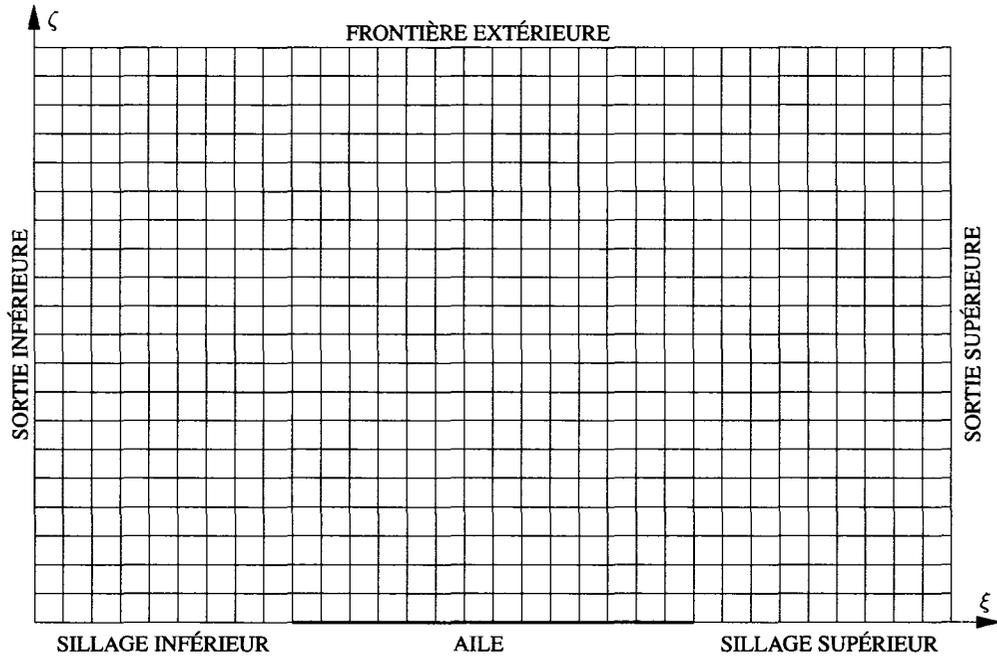


Figure 10 Transformation $(x, y, z) \leftrightarrow (\xi, \eta, \zeta)$

$$\text{avec } \begin{cases} \chi_1 = \xi \\ \chi_2 = \eta \\ \chi_3 = \zeta \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \end{cases}$$

En utilisant la règle de la dérivée en chaîne, les dérivées partielles deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Les coefficients métriques $(\xi_x, \eta_x, \zeta_x, \xi_y, \eta_y, \zeta_y, \xi_z, \eta_z, \zeta_z)$ dans le groupe d'équations (2.88) peuvent être trouvés de la façon suivante :

a. On écrit les expressions différentielles :

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi_x dx + \xi_y dy + \xi_z dz \\ d\eta &= \eta_x dx + \eta_y dy + \eta_z dz \\ d\zeta &= \zeta_x dx + \zeta_y dy + \zeta_z dz \end{aligned} \quad (2.89)$$

b. En mettant ces expressions sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

c. Avec la relation (2.87), la matrice (2.90) devient :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

d. Donc,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix}^{-1} \\ &= |J| \begin{bmatrix} y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta & -(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) & x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta \\ -(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) & x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi & -(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\ y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi & -(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) & x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.92)$$

où $|J|$ est le déterminant de la transformation $J = \frac{\partial(\tau, \xi, \eta, \zeta)}{\partial(t, x, y, z)}$. À partir de maintenant, J sera utilisé afin de représenter le déterminant de la matrice Jacobienne et sera tout simplement appelé Jacobien.

e. Donc, les métriques sont :

$$\begin{aligned}
 \xi_x &= J(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) \\
 \xi_y &= -J(x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) \\
 \xi_z &= J(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \\
 \eta_x &= -J(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) \\
 \eta_y &= J(x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \\
 \eta_z &= -J(x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \\
 \zeta_x &= J(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\
 \zeta_y &= -J(x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) \\
 \zeta_z &= J(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

f. Le Jacobien de la transformation donne :

$$J = \frac{1}{x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)} \tag{2.94}$$

Le Jacobien est interprété comme étant le ratio d'un élément infinitésimal au noeud (i, j, k) dans le plan (ξ, η, ζ) sur l'aire de son image sur le plan (x, y, z) .

2.7 Formulation ALE des équations du potentiel complet en base covariante

Considérons une quantité matérielle f dont on veut évaluer la dérivée matérielle dans un référentiel mobile :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho f \, d\Omega \tag{2.95}$$

En appliquant le théorème de transport de Reynolds et en tenant compte de la vitesse du maillage par rapport au référentiel spatial R_x , on obtient :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega(t)} \rho f \, d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega(t)} \rho f \, d\Omega + \iint_{\Gamma(t)} \rho f (\vec{v} - \vec{w}) \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.96)$$

On introduit J qui associe la configuration initiale d'un volume arbitraire $\Omega(0)$ borné par $\Gamma(0)$ avec sa configuration actualisée $\Omega(t)$. Alors (2.96) devient :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega(0)} \frac{\rho f}{J} \, d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega(0)} \frac{\rho f}{J} \, d\Omega + \iint_{\Gamma(0)} \frac{\rho f \vec{V}}{J} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.97)$$

On transforme l'intégrale sur la surface en une intégrale sur le volume en utilisant le théorème de divergence de Gauss :

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{\Omega(0)} \frac{\rho f}{J} \, d\Omega = \iiint_{\Omega(0)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho f}{J} \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{\rho f \vec{V}}{J} \right) \, d\Omega \quad (2.98)$$

L'opérateur ∇_x signifie que la divergence est calculée suivant les coordonnées du domaine $\Omega(0)$ dans la base covariante. L'équation différentielle correspondante à (2.95) est :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\rho f}{J} \right) + \nabla_x \cdot \left(\frac{\rho f \vec{V}}{J} \right) = 0 \quad (2.99)$$

Pour $f = 1$, on a l'équation de la conservation de la masse :

$$\boxed{\left(\frac{\rho}{J} \right)_\tau + \left(\rho \frac{U}{J} \right)_\xi + \left(\rho \frac{V}{J} \right)_\eta + \left(\rho \frac{W}{J} \right)_\zeta = 0} \quad (2.100)$$

Avec U, V, W , les composantes du vecteur vitesse relative en base covariante définies par l'équation (2.85), c'est à dire $\vec{V} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} (\vec{v} - \vec{w})$:

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w \\ V &= \eta_t + \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w \\ W &= \zeta_t + \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w \end{aligned} \quad (2.101)$$

avec

$$\begin{aligned} \xi_t &= -\xi_x w_1 - \xi_y w_2 - \xi_z w_3 \\ \eta_t &= -\eta_x w_1 - \eta_y w_2 - \eta_z w_3 \\ \zeta_t &= -\zeta_x w_1 - \zeta_y w_2 - \zeta_z w_3 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Par la définition du potentiel de vitesse (2.38, P-16) et en utilisant l'équation (2.88, P-35), on obtient :

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + A_{11}\phi_\xi + A_{12}\phi_\eta + A_{13}\phi_\zeta \\ V &= \eta_t + A_{12}\phi_\xi + A_{22}\phi_\eta + A_{23}\phi_\zeta \\ W &= \zeta_t + A_{13}\phi_\xi + A_{23}\phi_\eta + A_{33}\phi_\zeta \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 & A_{12} &= \xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z \\ A_{22} &= \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 & A_{13} &= \xi_x \zeta_x + \xi_y \zeta_y + \xi_z \zeta_z \\ A_{33} &= \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 & A_{23} &= \zeta_x \eta_x + \zeta_y \eta_y + \zeta_z \eta_z \end{aligned} \quad (2.104)$$

L'équation d'énergie (2.59, P-20) par (2.88) devient en base covariante :

$$\rho = \left(1 - \left(\frac{\gamma - 1}{2} \right) M_\infty^2 \left(2\phi_\tau + (U + \xi_t) \phi_\xi + (V + \eta_t) \phi_\eta + (W + \zeta_t) \phi_\zeta - 1 \right) \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \quad (2.105)$$

CHAPITRE 3

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉCOULEMENT

L'équation (2.100) doit être résolue afin de trouver le potentiel de vitesse ϕ . On peut représenter cette équation par :

$$R(\phi) = 0 \quad (3.1)$$

ϕ est l'inconnue à trouver pour les points i, j, k du maillage au temps $n + 1$. La matrice résultante de la discrétisation de l'équation 3.1 est une matrice creuse, non symétrique et non linéaire. On doit utiliser des méthodes de résolution itératives pour approximer la solution. Parmi les méthodes itératives, on trouve la méthode de Newton-Raphson ou les méthodes de sous-espaces de Krylov, notamment la méthode GMRES (Generalized Minimal RESidual) [34]. Dans un premier temps, nous allons présenter un algorithme basé sur la méthode de Newton-Raphson. Par la suite, nous proposerons un algorithme utilisant la méthode GMRES non-linéaire préconditionné. De plus, nous présenterons les détails de la discrétisation ainsi que les conditions aux frontières requises afin de résoudre l'équation du potentiel complet. Finalement, la décomposition du problème afin d'effectuer le calcul sur plusieurs processeurs sera détaillée.

3.1 Discrétisation spatiale en différences finies

Les maillages structurés possèdent généralement des irrégularités tels des points singuliers, des cellules fortement obliques et un espacement rapidement croissant dans la région éloignée de l'aile. Lorsque le problème est discrétisé en différences finies, ceci cause des instabilités et des problèmes au niveau de la qualité de la solution. Nous devons donc formuler la discrétisation spatiale pour traiter ce type de maillage adéquatement. De plus, pour éliminer l'erreur de troncature¹ associée à une densité et à un champ de vitesse

¹Cette erreur est nulle si on admet la solution d'un écoulement libre comme solution du problème discrétisé en différences finies.

constants, nous devons calculer les métriques (voir équation 2.93 P-37) de façon appropriée. La figure 11 présente les résidus associés à une discrétisation spatiale possédant une erreur de troncature (pour obtenir cette erreur de troncature, la densité, les métriques et les flux sont calculés au centre des cellules).

Pulliam et Steger [35] ont fait cette vérification pour les équations d'Euler. Ils ont remarqué qu'une seule condition devait être respectée afin d'obtenir une erreur de troncature nulle. Cependant, la qualité de la solution a été peu affectée et cette procédure n'a pas été retenue. Toujours pour l'équation d'Euler, Thomas et Lombard [36] ont étudié les erreurs géométriques introduites par la différentiation des métriques. Pour l'équation du potentiel complet sous forme conservative, Flores et al. [37] ont présenté les trois conditions à respecter pour obtenir une erreur de troncature nulle. La première condition s'applique au calcul de la densité alors que les deux autres s'appliquent au calcul des flux. Nous allons dans un premier temps définir les opérateurs de différences finies utilisés et ensuite, les trois conditions seront détaillées.

3.1.1 Opérateurs en différences finies

L'opérateur de deuxième ordre central pour un espace normalisé peut être défini par :

$$\delta_{\xi}()_{i,j,k} = \frac{1}{2} \left(()_{i+1,j,k} - ()_{i-1,j,k} \right) \quad (3.2)$$

Les différences décentrées pour un espace normalisé sont définies par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta}_{\xi}()_{i,j,k} &= ()_{i+1,j,k} - ()_{i,j,k} && \text{(amont)} \\ \overleftarrow{\delta}_{\xi}()_{i,j,k} &= ()_{i,j,k} - ()_{i-1,j,k} && \text{(aval)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

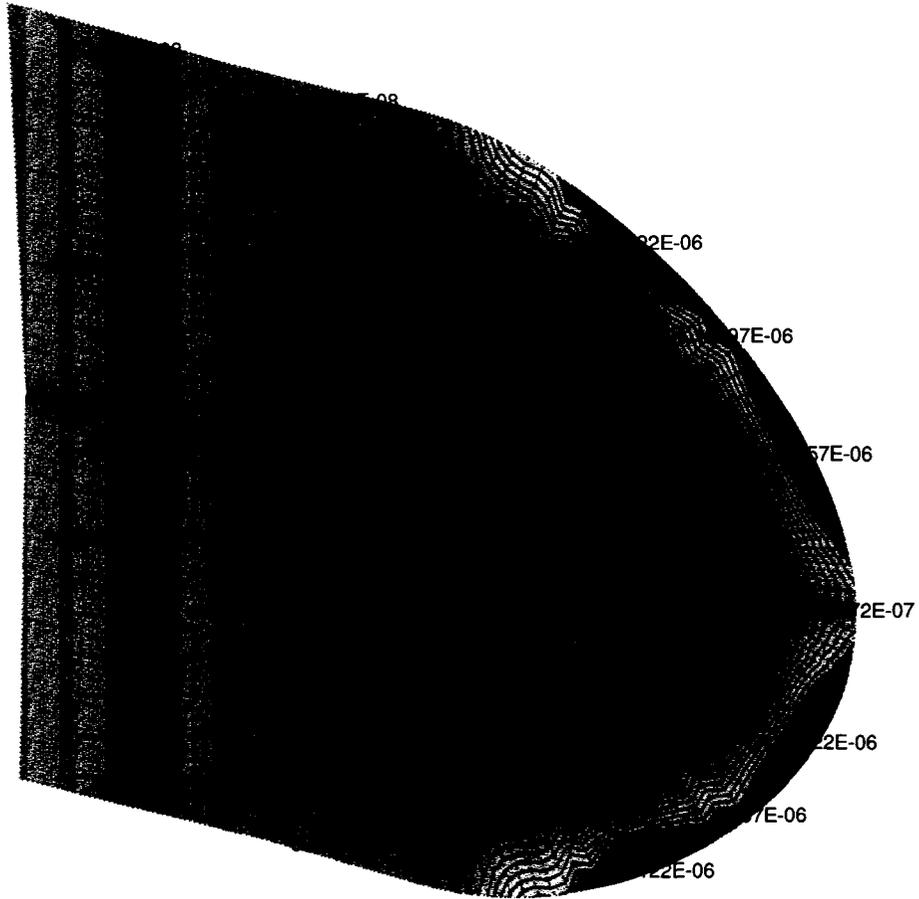


Figure 11 Résidus d'une discrétisation non consistante

Les opérateurs de moyenne sont :

$$\begin{aligned}
 \mu_{\xi}()_{i,j,k} &= \frac{1}{2} \left(()_{i+1,j,k} + ()_{i-1,j,k} \right) \\
 \vec{\mu}_{\xi}()_{i,j,k} &= \frac{1}{2} \left(()_{i+1,j,k} + ()_{i,j,k} \right) \\
 \overleftarrow{\mu}_{\xi}()_{i,j,k} &= \frac{1}{2} \left(()_{i,j,k} + ()_{i-1,j,k} \right)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ces opérateurs sont symétriques donc l'extension sur η et ζ est triviale.

3.1.2 Conditions de consistance du schéma

La première condition doit donner une densité constante pour un écoulement libre ($\rho = \rho_\infty$). Alors, le terme dans la parenthèse de l'équation (2.105) pour un régime permanent doit pouvoir être réduit à $q_\infty = u_\infty^2 + v_\infty^2 + w_\infty^2$ en prenant un écoulement potentiel défini par :

$$\phi = u_\infty x + v_\infty y + w_\infty z \quad (3.5)$$

On peut prouver que lorsqu'on prend les mêmes opérateurs de différences finies pour les différences en ξ , η et ζ sur x , y , z et ϕ , on trouve $q^2 = q_\infty^2$.² Donc, on peut trouver ces différences au point $(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ par :

$$\begin{aligned} ()_\xi \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} &= \vec{\mu}_\eta \vec{\mu}_\zeta \vec{\delta}_\xi ()_{i,j,k} \\ ()_\eta \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} &= \vec{\mu}_\xi \vec{\mu}_\zeta \vec{\delta}_\eta ()_{i,j,k} \\ ()_\zeta \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} &= \vec{\mu}_\xi \vec{\mu}_\eta \vec{\delta}_\zeta ()_{i,j,k} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les deux autres conditions sont associées au calcul du flux. Pour une densité constante, on peut réécrire le résidu (2.100) par :

$$\left(\frac{\xi_x \phi_x + \xi_y \phi_y + \xi_z \phi_z}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_x \phi_x + \eta_y \phi_y + \eta_z \phi_z}{J} \right)_\eta + \left(\frac{\zeta_x \phi_x + \zeta_y \phi_y + \zeta_z \phi_z}{J} \right)_\zeta = 0 \quad (3.7)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_x &= \xi_x \phi_\xi + \eta_x \phi_\eta + \zeta_x \phi_\zeta = J \left((y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) \phi_\xi - (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) \phi_\eta + (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \phi_\zeta \right) \\ \phi_y &= \xi_y \phi_\xi + \eta_y \phi_\eta + \zeta_y \phi_\zeta = -J \left((x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta) \phi_\xi - (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi) \phi_\eta + (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi) \phi_\zeta \right) \\ \phi_z &= \xi_z \phi_\xi + \eta_z \phi_\eta + \zeta_z \phi_\zeta = J \left((x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) \phi_\xi - (x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi) \phi_\eta + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) \phi_\zeta \right) \end{aligned}$$

²Voir annexe I

On peut prouver que lorsqu'on prend les mêmes opérateurs de différences finies pour les différences en ξ , η et ζ sur x , y , z et ϕ , on trouve³ $\phi_x = u_\infty$, $\phi_y = v_\infty$ et $\phi_z = w_\infty$. Ceci est la deuxième condition de consistance. On peut noter que cette condition peut être respectée de la même façon que précédemment, mais puisqu'on ne calcule pas les flux au même point que la densité, les deux conditions sont indépendantes.

Avec $\phi_x = u_\infty$, $\phi_y = v_\infty$ et $\phi_z = w_\infty$ on peut réécrire le résidu par :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\xi_x u_\infty + \xi_y v_\infty + \xi_z w_\infty}{J} \right)_\xi + \left(\frac{\eta_x u_\infty + \eta_y v_\infty + \eta_z w_\infty}{J} \right)_\eta \\ & + \left(\frac{\zeta_x u_\infty + \zeta_y v_\infty + \zeta_z w_\infty}{J} \right)_\zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

En substituant les métriques on doit satisfaire :

$$\begin{aligned} & (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)_\xi - (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi)_\eta + (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)_\zeta = 0 \\ & (x_\eta z_\zeta - x_\zeta z_\eta)_\xi - (x_\xi z_\zeta - x_\zeta z_\xi)_\eta + (x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi)_\zeta = 0 \\ & (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)_\xi - (x_\xi y_\zeta - x_\zeta y_\xi)_\eta + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)_\zeta = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ceci est la troisième condition de consistance. Holst et Thomas [38] ont démontré⁴ qu'une erreur de troncature nulle peut être obtenue si on évalue le premier terme $(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)_\xi$ par :

$$(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)_{i-\frac{1}{2},j,k} \quad (3.10)$$

On évalue le premier terme de cette expression y_η par :

$$y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - y_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \quad (3.11)$$

³Voir annexe II

⁴Nous avons vérifié cette condition de consistance numériquement plutôt que symboliquement

Et finalement, le premier terme de cette expression $y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}$ est trouvé par la demie somme :

$$\frac{1}{2} \left(y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + y_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \quad (3.12)$$

On peut reproduire cette approximation pour tous les termes de l'équation (3.9). Pour simplifier, on peut former les variables primitives pour x , y et z au centre des cellules en utilisant les huit noeuds voisins selon :

$$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} & (x_{i,j,k} + x_{i+1,j,k} + x_{i,j+1,k} + x_{i+1,j+1,k} \\ & + x_{i,j,k+1} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k+1}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Donc, on peut donc satisfaire les deuxième et troisième conditions en calculant les métriques, par exemple pour la direction ξ à $(i+\frac{1}{2},j,k)$, avec les différences calculées par :

$$\begin{aligned} ()_{\xi} |_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \overrightarrow{\delta_{\xi}} ()_{i,j,k} \\ ()_{\eta} |_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mu_{\xi}} \overrightarrow{\mu_{\eta}} \overrightarrow{\mu_{\zeta}} \overleftarrow{\delta_{\eta}} \overleftarrow{\delta_{\zeta}} ()_{i,j,k} \right) \\ ()_{\zeta} |_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{\mu_{\xi}} \overrightarrow{\mu_{\eta}} \overrightarrow{\mu_{\zeta}} \overleftarrow{\delta_{\zeta}} \overleftarrow{\delta_{\eta}} ()_{i,j,k} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'extension dans les directions η et ζ à $(i,j+\frac{1}{2},k)$ and $(i,j,k+\frac{1}{2})$ est similaire.

On doit donc former les six métriques pour le calcul des densité à $(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})$ par les différences données par (3.6) (ces densités sont moyennées afin de trouver la densité à (i,j,k)) et les neuf métriques pour le calcul du flux autour de la cellule (figure 12) par les différences données par (3.14) pour un total de quinze métriques afin d'avoir une erreur de troncature nulle pour un calcul en trois dimensions.

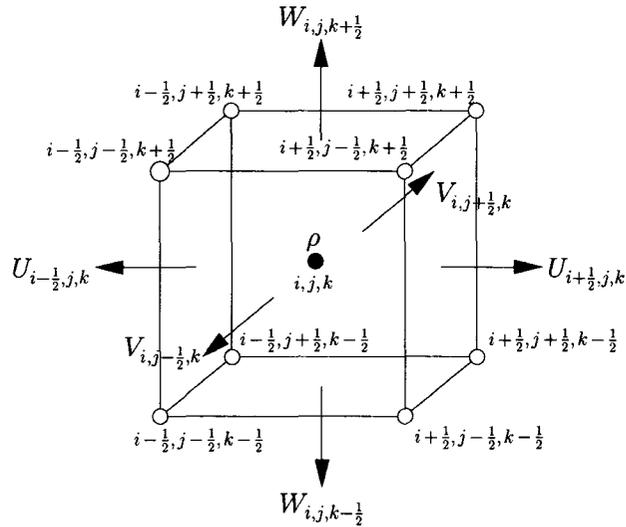


Figure 12 Équilibre des flux

Finalement, on peut discrétiser le résidu (terme de droite de l'équation 3.29) par :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\left(\frac{\rho}{J}\right) - \left(\frac{\rho}{J}\right)^n}{\Delta\tau_1} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\tilde{\rho}U}{J} \right)_{i+1/2,j,k} - \left(\frac{\tilde{\rho}U}{J} \right)_{i-1/2,j,k} + \left(\frac{\tilde{\rho}V}{J} \right)_{i,j+1/2,k} \\ & - \left(\frac{\tilde{\rho}V}{J} \right)_{i,j-1/2,k} + \left(\frac{\tilde{\rho}W}{J} \right)_{i,j,k+1/2} - \left(\frac{\tilde{\rho}W}{J} \right)_{i,j,k-1/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2 Loi de conservation de géométrie

L'aspect décrit à la section précédente est très important puisqu'il est directement associé à la loi de conservation de géométrie (GCL) [36]. Cette loi stipule que le calcul des paramètres associés à la géométrie doivent être exécutés de telle manière que le schéma numérique résultant préserve l'état d'un écoulement libre indépendamment du mouvement du maillage. Un schéma numérique qui ne satisfait pas la GCL produit des erreurs dans le calcul de l'écoulement, car des sources ou des puits seront ajoutés à certains endroits de l'écoulement.

La GCL a la même forme que la loi de conservation de masse (2.100 page 38). La forme différentielle de la GCL peut être obtenue en substituant $\rho = 1$ et $\vec{v} = (u, v, w) = 0$ dans cette équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta_t}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta_t}{J} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Cette équation de conservation géométrique est parfaitement satisfaite en milieu continu, par contre lors de la discrétisation, rien ne garantit qu'elle est aussi satisfaite. La condition de GCL en discret revient à dire que lorsque $\rho = 1$ et $\vec{v} = (u, v, w) = 0$, la forme discrète de (2.100) ne donne aucune erreur de troncature et ce quelque soit le mouvement du maillage.

Nous avons démontré à la section 3.1.2 que lorsque $\rho = \rho_\infty$ et $q = q_\infty$ pour un champ en régime permanent sans mouvement de maillage donné par $\phi = u_\infty x + v_\infty v + w_\infty z$, la discrétisation de l'équation (2.100) ne donne aucune erreur de troncature. On doit maintenant trouver si l'ajout du mouvement de maillage donne une erreur. Ceci peut être vérifié en discrétisant l'équation (3.16) et en vérifiant l'erreur de troncature. Pour la formulation utilisée, nous avons observé numériquement qu'il y avait effectivement violation de la GCL. Cependant, nous démontrons à la section (5.4 page 123) que le respect des trois conditions de consistance aide à diminuer l'erreur de troncature associée à la violation de la GCL.

Tel que mentionné dans la référence [39], un schéma qui respecte la GCL n'est pas une condition nécessaire mais suffisante. Nous pouvons citer deux méthodes que nous pouvons implémenter pour respecter la forme discrète de la GCL :

- Lorsque le Jacobien est calculé par la relation (2.94), un schéma d'intégration en temps doit être choisi de telle façon à satisfaire l'équation discrète de la GCL [40, 41, 42] ;
- Utiliser la relation de récurrence sur la forme discrète de (3.16) afin de trouver J^{n+1} .

3.3 Algorithme de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est basée sur le développement en série de Taylor d'ordre un du résidu au voisinage du résultat de l'itération précédente. Pour l'équation (3.1), on obtient l'approximation suivante :

$$R(\phi_*) + \left(\frac{\partial R}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_*} \Delta\phi = 0 \quad (3.17)$$

ou encore

$$R(\phi_*) + \mathcal{J}(\phi_*)\Delta\phi = 0 \quad (3.18)$$

Où ϕ_* est la valeur de ϕ au pas n et $\Delta\phi = \phi^{n+1} - \phi_*$. Lorsqu'il y aura convergence, $\Delta\phi$ tendra vers 0 et ϕ^{n+1} tendra vers ϕ_* .

Un pseudo algorithme de Newton-Raphson se présente comme suit :

Algorithme de Newton-Raphson

a. *Début* :

Choisir une solution approchée ϕ_0

b. *Résoudre* :

Résoudre $\mathcal{J}(\phi_*)\Delta\phi = -R_{\phi_*}$

c. *Former la solution approchée* :

$$\phi^{n+1} = \phi_* + \Delta\phi$$

d. *Convergence* :

Si le critère de convergence est satisfait, arrêter, sinon continuer la boucle au point 2.

À chaque itération, l'algorithme de Newton-Raphson exige l'évaluation et l'inversion de la matrice Jacobienne. Par contre, pour l'algorithme de résolution présenté, l'inversion complète de la matrice du Jacobien ne sera pas effectuée. Seule la matrice tridiagonale

pour chacune des directions ξ , η et ζ sera évaluée et inversée. Bien que l'évaluation analytique de la matrice Jacobienne soit complexe, nous allons développer chacun des termes situés sur la bande tridiagonale dans la section suivante. Premièrement, le développement des flux spatiaux sera effectué. Par la suite, le terme temporel sera traité. Finalement, l'algorithme par évaluation successive de la matrice tridiagonale sera présenté.

3.3.1 Traitement des flux spatiaux

Considérons le terme $\left(\rho \frac{U}{J}\right)_\xi$ de l'équation (2.100). En effectuant un développement en série de Taylor de premier ordre on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\rho \frac{U}{J} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(f + \frac{\partial f}{\partial \phi} \Delta \phi \right), \quad f = \left(\rho \frac{U}{J} \right)_{\phi=\phi_*} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{1}{J} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \phi} + U \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right) \quad (3.20)$$

La densité ρ considérée est implicite (au temps $n+1$) et doit être calculée par un développement en série de Taylor de premier ordre :

$$\rho = \rho(\phi_*) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_*} \Delta \phi \quad (3.21)$$

Donc,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \phi} \right)_{\phi=\phi_*} = \left\{ -\frac{\rho}{a^2} \left(\frac{1}{\Delta \tau_1} + U \frac{\partial}{\partial \xi} + V \frac{\partial}{\partial \eta} + W \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right\}_{\phi=\phi_*} \quad (3.22)$$

Pour $\frac{\partial U}{\partial \phi}$, on a :

$$\frac{\partial U}{\partial \phi} = A_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial}{\partial \eta} + A_{13} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (3.23)$$

Pour un écoulement où il y a simultanément des régions elliptiques et hyperboliques, le terme $\frac{\partial \rho}{\partial \phi}$ donne une matrice pentadiagonale causée par le terme :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\rho}{J} \left(A_{11} - \frac{U^2}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \phi \right\} \quad (3.24)$$

de l'équation (3.20). Pour préserver la matrice tridiagonale, on néglige le terme $U \frac{\partial \rho}{\partial \phi}$ de l'équation (3.20). Puisque $\Delta \phi \rightarrow 0$ en approchant de la convergence, alors ceci ne cause pas de problème. On peut donc discrétiser les termes de flux spatiaux selon :

$$\left(\tilde{\rho} \frac{U}{J} \right)_{\xi} + \left(\tilde{\rho} \frac{V}{J} \right)_{\eta} + \left(\tilde{\rho} \frac{W}{J} \right)_{\zeta} + \left\{ \overleftarrow{\partial}_{\xi} \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{U}}{J} \right) + \overleftarrow{\partial}_{\eta} \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{V}}{J} \right) + \overleftarrow{\partial}_{\zeta} \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{W}}{J} \right) \right\} \Delta \phi \quad (3.25)$$

où $\tilde{\rho}$ est la densité corrigée pour représenter la viscosité artificielle.

$$\text{avec } \begin{cases} \hat{U} &= A_{11} \overrightarrow{\partial}_{\xi} + A_{12} \overrightarrow{\partial}_{\eta} + A_{13} \overrightarrow{\partial}_{\zeta} \\ \hat{V} &= A_{12} \overrightarrow{\partial}_{\xi} + A_{22} \overrightarrow{\partial}_{\eta} + A_{23} \overrightarrow{\partial}_{\zeta} \\ \hat{W} &= A_{13} \overrightarrow{\partial}_{\xi} + A_{23} \overrightarrow{\partial}_{\eta} + A_{33} \overrightarrow{\partial}_{\zeta} \end{cases}$$

3.3.2 Traitement du terme temporel

On discrétise le terme $\left(\frac{\rho}{J} \right)_{\tau}$ de l'équation (3.25) selon :

$$\left(\frac{\rho}{J} \right)_{\tau} = \frac{(a_1 - \theta b_1) \left\{ \left(\frac{\rho}{J} \right)^{n+1} - \left(\frac{\rho}{J} \right)^n \right\} - \theta b_1 \left\{ \left(\frac{\rho}{J} \right)^n - \left(\frac{\rho}{J} \right)^{n-1} \right\}}{a_1 \Delta \tau_1 - \theta b_1 (\Delta \tau_1 + \Delta \tau_2)} \quad (3.26)$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_1 = (\Delta \tau_1 + \Delta \tau_2)^2 \\ b_1 = \Delta \tau_1^2 \\ \theta = 0 \text{ premier ordre} \\ \theta = 1 \text{ deuxième ordre} \\ \Delta \tau_1 = \tau^{n+1} - \tau^n \\ \Delta \tau_2 = \tau^n - \tau^{n-1} \end{cases}$$

Pour un système de premier ordre en temps, on obtient :

$$\left(\frac{\rho}{J} \right)_{\tau} = \frac{1}{\Delta \tau_1} \left(\left(\frac{\rho}{J} \right)^{n+1} - \left(\frac{\rho}{J} \right)^n \right) \quad (3.27)$$

On connaît déjà la valeur de ρ^n et ρ^{n-1} , donc on doit seulement linéariser le terme ρ^{n+1} .

Par (3.22) et (3.21), on peut donc discrétiser le terme temporel par :

$$\frac{1}{\Delta\tau_1} \left(\left(\frac{\rho}{J} \right)^{n+1} - \left(\frac{\rho}{J} \right)^n \right) - \left\{ \frac{\left(\frac{\rho}{J} \right)^{n+1}}{a^2 \Delta\tau_1^2} (1 + \Delta\tau_1 U \partial_\xi + \Delta\tau_1 V \partial_\eta + \Delta\tau_1 W \partial_\zeta) \right\} \Delta\phi \quad (3.28)$$

Pour les équations suivantes, l'indice de pas de temps $()^{n+1}$ sera omis pour alléger les équations.

3.4 Équation à résoudre par des itérations de Newton-Raphson

Avec (3.28) et (3.25), chaque itération de Newton-Raphson (3.17) requiert de trouver la solution du système linéaire suivant afin d'avoir la correction $\Delta\phi$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \beta (1 + \Delta\tau_1 U \partial_\xi + \Delta\tau_1 V \partial_\eta + \Delta\tau_1 W \partial_\zeta) \right\} \Delta\phi \\ & - \left\{ \overleftarrow{\partial}_\xi \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{U}}{J} \right) + \overleftarrow{\partial}_\eta \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{V}}{J} \right) + \overleftarrow{\partial}_\zeta \left(\tilde{\rho} \frac{\hat{W}}{J} \right) \right\} \Delta\phi \\ & = \frac{\left(\frac{\rho}{J} \right) - \left(\frac{\rho}{J} \right)^n}{\Delta\tau_1} + \left(\tilde{\rho} \frac{U}{J} \right)_\xi + \left(\tilde{\rho} \frac{V}{J} \right)_\eta + \left(\tilde{\rho} \frac{W}{J} \right)_\zeta \end{aligned} \quad (3.29)$$

avec $\beta = \frac{\rho}{Ja^2 \Delta\tau_1^2}$

3.5 Algorithme de résolution par factorisation triple

Pour résoudre l'équation (3.29) on utilise la méthode proposée par *Shankar et al.* [23, 27]. On peut factoriser le terme $\frac{\partial R}{\partial \phi}$ de l'équation (3.17) par une triple approximation de facteurs :

$$L_\xi L_\eta L_\zeta \Delta\phi = R(\phi_*) \quad (3.30)$$

$$\text{avec } \begin{cases} L_\xi = \left(1 + \Delta\tau_1 U \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\tilde{\rho}}{J} A_{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ L_\eta = \left(1 + \Delta\tau_1 V \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\tilde{\rho}}{J} A_{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ L_\zeta = \left(1 + \Delta\tau_1 W \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\tilde{\rho}}{J} A_{33} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\alpha = (1 - \theta) + \theta \left(\frac{\left(a_1 - \frac{b_1 (\Delta\tau_1 + \Delta\tau_2)}{\Delta\tau_1} \right)}{a_1 - b_1} \right) \quad (3.32)$$

L'équation (3.30) est résolue au plan $n + 1$ en trois étapes :

Algorithme de triple factorisation

a. *Étape 1 :*

Calculer $L_\xi \Delta\phi'' = R(\phi_*)$

b. *Étape 2 :*

Calculer $L_\eta \Delta\phi' = \Delta\phi''$

c. *Étape 3 :*

Calculer $L_\zeta \Delta\phi = \Delta\phi'$

d. *Former la solution :*

$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta\phi$

Les matrices L_ξ , L_η et L_ζ sont des matrices tridiagonales. On peut discrétiser par différence finie la matrice L_ξ par :

$$L_\xi = \Delta\phi_{i,j,k} + \Delta\tau U_{i,j,k} (\Delta\phi_{i,j,k})_\xi - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\left(\frac{\tilde{\rho} A_{11}}{J} \right)_{i,j,k} (\Delta\phi_{i,j,k})_\xi - \left(\frac{\tilde{\rho} A_{11}}{J} \right)_{i-1,j,k} (\Delta\phi_{i-1,j,k})_\xi}{\Delta\xi} \right)$$

En dérivant par différence finie les termes portant sur $\Delta\phi$ on obtient :

$$L_\xi = \Delta\phi_{i,j,k} + \Delta\tau U_{i,j,k} \left(\frac{\Delta\phi_{i+1,j,k} - \Delta\phi_{i-1,j,k}}{2\Delta\xi} \right) - \frac{1}{\beta\Delta\xi} \left(\left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i,j,k} \left(\frac{\Delta\phi_{i+1,j,k} - \Delta\phi_{i,j,k}}{\Delta\xi} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i-1,j,k} \left(\frac{\Delta\phi_{i,j,k} - \Delta\phi_{i-1,j,k}}{\Delta\xi} \right) \right)$$

Finalement, en posant $\Delta\xi = 1$ et en factorisant les termes $i-1$, i , $i+1$ portant sur $\Delta\phi$ on obtient les trois coefficients de la matrice tridiagonale :

$$A\Delta\phi_{i-1,j,k} + B\Delta\phi_{i,j,k} + C\Delta\phi_{i+1,j,k} \quad (3.33)$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = -\frac{\Delta\tau U_{i,j,k}}{2} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i-1,j,k} \\ B = 1 + \frac{1}{\beta} \left(\left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i,j,k} + \left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i-1,j,k} \right) \\ C = \frac{\Delta\tau U_{i,j,k}}{2} - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\tilde{\rho}A_{11}}{J} \right)_{i,j,k} \end{cases} \quad (3.34)$$

3.6 Algorithme de résolution par GMRES

Nous avons remarqué que la factorisation triple est efficace pour obtenir une solution en régime permanent. Cependant, en régime transitoire, le résidu reste relativement élevé et le pas de temps doit être petit afin de conserver une bonne stabilité. Nous avons donc implémenté une résolution par un algorithme de GMRES.

3.6.1 Algorithme de GMRES linéaire

L'objectif est de résoudre le système linéaire :

$$\mathcal{J}\delta = -R \quad (3.35)$$

La méthode GMRES fait partie des méthodes de résolution par sous-espaces de Krylov, méthodes qui cherchent la solution approchée δ_m dans l'espace $\delta_0 + \mathcal{K}_m$, où \mathcal{K}_m est le sous-espace de Krylov de dimension m associé à la matrice \mathcal{J} et au résidu initial $r_0 = -R - \mathcal{J}\delta_0$, où δ_0 est une estimation de la solution initiale.

$$\mathcal{K}_m = \text{span} \{r_0, \mathcal{J}r_0, \dots, \mathcal{J}^{m-1}r_0\} \quad (3.36)$$

La solution est mise sous la forme :

$$\delta = \delta_0 + z \quad (3.37)$$

où z est la nouvelle inconnue appartenant au sous-espace de Krylov \mathcal{K}_m . L'algorithme GMRES détermine z de façon telle que la norme euclidienne du résidu soit minimisée.

$$\min_{z \in \mathcal{K}_m} \| -R - \mathcal{J}(\delta_0 + z) \|_2 \quad (3.38)$$

On construit via le procédé d'Arnoldi une base orthonormée v_m de l'espace de Krylov de dimension m . Le procédé d'Arnoldi est basé sur la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, qui peut être présentée comme suit :

Algorithme d'Arnoldi-Modifié

a. *Début* :

Choisir le vecteur $v_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

b. *Itération* : Pour $j=1, \dots, m$ faire

$$w_j = \mathcal{J}v_j$$

Itération : Pour $i=1, \dots, j$ faire

$$h_{i,j} = (w_j, v_i)$$

$$w_j = w_j - h_{i,j}v_i$$

Fin de boucle

$$h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$$

$$v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$$

Fin de boucle

où v_m est le k^{e} vecteur de la base orthogonale de l'espace de Krylov.

$$\mathcal{K}_m = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = \text{span}\{v_1, \mathcal{J}v_1, \dots, \mathcal{J}^{m-1}v_1\} \quad (3.39)$$

Si V_m est la matrice de dimension $N \times k$ dont les colonnes sont les vecteurs de la base orthonormée de l'espace de Krylov, on peut montrer que la relation suivante est satisfaite :

$$\mathcal{J}V_m = V_{m+1}H_m \quad (3.40)$$

où H_m est la matrice de Hessenberg supérieure de dimension $(m+1) \times k$. Si on écrit z comme combinaison linéaire des v_j , on peut déduire :

$$z = V_m y, \quad y \in \mathbb{R}^m \quad (3.41)$$

et

$$r_0 = U_{m+1} e, \quad e = (\|r_0\|_2, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^m \quad (3.42)$$

La norme euclidienne du résidu peut être réécrite par :

$$\begin{aligned}
\| -R - \mathcal{J}(\delta_0 + z_m) \|_2 &= \| r_0 - \mathcal{J}z_m \|_2 \\
&= \| V_{m+1}e - \mathcal{J}z_m \|_2 \\
&= \| V_{m+1}e - \mathcal{J}V_m y_m \|_2 \\
&= \| V_{m+1}e - V_{m+1}H_m y_m \|_2 \\
&= \| V_{m+1}(e - H_m y_m) \|_2 \\
&= \| e - H_m y_m \|_2
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Donc, le problème de minimisation dans l'espace de Krylov (3.38) \mathcal{K}_m peut être reformulé comme suit :

$$\min_{z \in \mathcal{K}_m} \| -R - \mathcal{J}(\delta_0 + z_m) \|_2 = \min_{y \in \mathbb{R}_m} \| e - H_m y_m \|_2 \tag{3.44}$$

Donc, on peut former la solution approchée par :

$$\delta_m = \delta_0 + V_m y_m \text{ où } y_m \text{ minimise } \| e - H_m y_m \|_2 \text{ sur } \mathbb{R}_m \tag{3.45}$$

Un algorithme GMRES linéaire peut être présenté comme suit :

Algorithme de GMRES linéaire

a. *Début* :

Choisir δ_0

Choisir $r_0 = -R - \mathcal{J}\delta_0$

Choisir $v_1 = r_0 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$

b. *Itération* : Pour $j=1, \dots, m$ faire

$w_j = \mathcal{J}v_j$

Itération : Pour $i=1, \dots, j$ faire

$h_{i,j} = (w_j, v_i)$

$w_j = w_j - h_{i,j}v_i$

Fin de boucle

$h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$

$v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$

Fin de boucle

c. *Former la solution approchée* :

$\delta_m = \delta_0 + V_m y_m$, où y_m minimise $\|e - H_m y_m\|_2, y \in \mathbb{R}^m$

d. *Condition*

Si la condition de convergence est satisfaite, arrêter, sinon retourner au point 2 avec $\delta_0 = \delta_m$

3.6.2 Algorithme de GMRES non-linéaire

La méthode GMRES non-linéaire est basée sur la version linéaire sans toutefois effectuer le calcul explicite du Jacobien \mathcal{J} . En effet, le calcul du Jacobien coûte trop cher pour être effectué à chaque itération de Newton. Une approximation de la matrice \mathcal{J} servira de matrice de préconditionnement. Comme dans l'algorithme GMRES on a besoin de

calculer le produit $w_j = \mathcal{J}v_j$ celui-ci peut être remplacé par :

$$\mathcal{J}v_j = \frac{R(\delta_0 + \epsilon v_j) - R(\delta_0)}{\epsilon} \quad (3.46)$$

où ϵ est un nombre assez petit pouvant fournir une bonne approximation de la dérivée directionnelle. Cette approche est aussi appelée Newton-Inexacte.

3.6.3 Algorithme GMRES préconditionné

Le préconditionnement est très important afin d'assurer la convergence et la stabilité de la méthode GMRES employée dans cette étude. En effet, pour la discrétisation de l'équation du potentiel complet utilisée, nous avons remarqué que le préconditionneur n'est pas seulement un artifice afin d'accélérer la convergence, mais qu'il est une condition essentielle à la convergence de la méthode. Plusieurs préconditionneurs ont été testés, notamment le préconditionnement par une triple factorisation et le préconditionnement par la diagonale de la matrice Jacobienne. Ces préconditionneurs, bien que très rapides à calculer ne sont pas suffisants pour arriver à faire converger la méthode GMRES adéquatement. Nous avons donc utilisé la matrice Jacobienne calculée telle que présentée aux sections 3.3.1 et 3.3.2, sans toutefois négliger les termes qui sont situés à l'extérieur des trois diagonales

principales. Le Jacobien peut donc être discrétisé par :

$$\begin{aligned}
& \beta \left[\phi_{i,j,k} + \tau_1 U_{i,j,k} \left(\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i-1,j,k}}{2} \right) + \tau_1 V_{i,j,k} \left(\frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2} \right) \right. \\
& \left. + \tau_1 W_{i,j,k} \left(\frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{11} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} \left(\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k} \right) \right. \\
& - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{11} \right)_{i-\frac{1}{2},j,k} \left(\phi_{i,j,k} - \phi_{i-1,j,k} \right) + \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{12} \right)_{i+1,j,k} \left(\phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j-1,k} \right) \right. \\
& - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{12} \right)_{i-1,j,k} \left(\phi_{i-1,j+1,k} - \phi_{i-1,j-1,k} \right) + \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{13} \right)_{i+1,j,k} \left(\phi_{i+1,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k-1} \right) \\
& \left. \left. - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{13} \right)_{i-1,j,k} \left(\phi_{i-1,j,k+1} - \phi_{i-1,j,k-1} \right) \right\} \right] - \left[\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{12} \right)_{i,j+1,k} \left(\phi_{i+1,j+1,k} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \phi_{i-1,j+1,k} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{12} \right)_{i,j-1,k} \left(\phi_{i+1,j-1,k} - \phi_{i-1,j-1,k} \right) \right\} + \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{22} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k} \left(\phi_{i,j+1,k} \right. \\
& \left. - \phi_{i,j,k} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{22} \right)_{i,j-\frac{1}{2},k} \left(\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j-1,k} \right) + \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{23} \right)_{i,j+1,k} \left(\phi_{i,j+1,k+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \phi_{i,j+1,k-1} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{23} \right)_{i,j-1,k} \left(\phi_{i,j-1,k+1} - \phi_{i,j-1,k-1} \right) \right\} \right] - \left[\frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{13} \right)_{i,j,k+1} \right. \right. \\
& \left. \left(\phi_{i+1,j,k+1} - \phi_{i-1,j,k+1} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{13} \right)_{i,j,k-1} \left(\phi_{i+1,j,k-1} - \phi_{i-1,j,k-1} \right) + \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{23} \right)_{i,j,k+1} \right. \\
& \left. \left(\phi_{i,j+1,k+1} - \phi_{i,j-1,k+1} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{23} \right)_{i,j,k-1} \left(\phi_{i,j+1,k-1} - \phi_{i,j-1,k-1} \right) \right\} \\
& \left. + \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{33} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \left(\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k} \right) - \left(\frac{\tilde{\rho}}{J} A_{33} \right)_{i,j,k-\frac{1}{2}} \left(\phi_{i,j,k} - \phi_{i,j,k-1} \right) \right]
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Le préconditionnement proposé est effectué selon l'algorithme de préconditionnement de GMRES à droite («Right Preconditionned GMRES»). Il s'agit de transformer le système (3.35) sous la forme :

$$\mathcal{J}M^{-1}M\delta = -R \tag{3.48}$$

où M est la matrice de préconditionnement. Celle-ci est obtenue par la factorisation incomplète (*ILUT*) de la matrice Jacobienne (3.47). Ce type de préconditionnement est relativement peu coûteux et la matrice M ne doit pas nécessairement être factorisée à chaque pas de temps. Cette factorisation peut être effectuée selon l'algorithme :

Algorithme de factorisation ILUT

a. *Itération* : Pour $i=1, \dots, n$ faire

2. *Itération* : Pour $k=1, \dots, i-1$ faire

$$M_{i,k} = \frac{M_{i,k}}{M_{k,k}}$$

Condition : Si $\|M_{i,k}\|$ n'est pas trop petit

3. *Itération* : Pour $j=k+1, \dots, n$ faire

$$M_{i,j} = M_{i,j} - M_{i,k}M_{k,j}$$

Fin de boucle

Fin de condition

Fin de boucle

Appliquer la condition de délestage à la ligne $M_{i,*}$

Fin de boucle

On peut finalement redéfinir l'algorithme de GMRES pour un problème non-linéaire et en ajoutant un préconditionnement à droite.

Algorithme de GMRES non-linéaire préconditionné à droite

a. *Début* :

Choisir δ_0

Choisir $r_0 = -R(\delta_0)$

Choisir $v_1 = r_0 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$

b. *Itération* : Pour $j=1, \dots, m$ faire

$$z_j = M_j^{-1} v_j$$

$$w_j = \frac{R(\delta_0 + \epsilon z_j) - R(\delta_0)}{\epsilon}$$

Itération : Pour $i=1, \dots, j$ faire

$$h_{i,j} = (w_j, v_i)$$

$$w_j = w_j - h_{i,j} v_i$$

Fin de boucle

$$h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$$

$$v_{j+1} = \frac{w_j}{h_{j+1,j}}$$

Fin de boucle

c. *Former la solution approchée* :

$$\delta_m = \delta_0 + M^{-1} Z_m y_m, \text{ où } y_m \text{ minimise } \|e - H_m y_m\|_2, y \in \mathbb{R}^m$$

d. *Condition*

Si la condition de convergence est satisfaite, arrêter, sinon retourner au point 2 avec $\delta_0 = \delta_m$

La perturbation ϵ peut être calculée par :

$$\epsilon \simeq \frac{10^{-3}}{\sqrt{\|z_j\|_2}} \quad (3.49)$$

3.7 Terme de densité biaisée

Tel que démontré à la section 2.4, page 22, un écoulement transsonique est caractérisé par la coexistence de régions elliptiques et hyperboliques. L'onde de choc servant de frontière entre ces différentes régions doit être bien modélisée. Ainsi, sa position et son intensité sont des facteurs déterminants afin d'obtenir une solution précise.

Une particule de fluide passant au travers de l'onde de choc subit une réduction de vitesse, donc son énergie cinétique se transforme en énergie interne qui se manifeste en fait par un changement d'entropie. Le schéma numérique pour une formulation potentielle doit être modifié afin de bien reproduire ce phénomène. De plus, tel que spécifié à la section 2.3, page 20, pour une formulation isentropique, cette modification doit être en mesure d'enlever la présence d'ondes d'expansion.

De nombreuses méthodes ont été développées afin de représenter ce phénomène [8, 43, 11]. *Hafez, Osher, Whitlow* [44] ont proposé de modifier artificiellement la densité des zones supersoniques en biaisant le flux directionnellement. Cette méthode est utilisée dans ce travail puisqu'elle ne requiert aucune constante additionnelle devant être explicitée selon la nature de l'écoulement [45].

Selon cette formulation, la densité $\tilde{\rho}$ doit être corrigée selon :

$$\tilde{\rho} = \rho - \frac{1}{q} \left(\left(\frac{U}{Q} \Delta \xi \overleftarrow{\partial}_\xi + \frac{V}{Q} \Delta \eta \overleftarrow{\partial}_\eta + \frac{W}{Q} \Delta \zeta \overleftarrow{\partial}_\zeta \right) (\rho q)^- \right) \quad (3.50)$$

$$\text{où } Q = \sqrt{U^2 + V^2 + W^2}$$

$$\text{et } \begin{aligned} (\rho q)^- &= \rho q - \hat{\rho} \hat{q} \quad \text{pour } q > \hat{q} \\ (\rho q)^- &= 0 \quad \text{pour } q \leq \hat{q} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Les variables \hat{q} et $\hat{\rho}$ sont respectivement la vitesse et la densité pour un écoulement sonique et peuvent être calculées selon :

$$\hat{q}^2 = \frac{2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} \left(1 - (\gamma - 1) M_\infty^2 \left(\phi_\tau + \xi_t \phi_\xi + \eta_t \phi_\eta + \zeta_t \phi_\zeta - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (3.52)$$

$$\hat{\rho} = (\hat{q} M_\infty)^{\frac{2}{\gamma-1}} \quad (3.53)$$

Pour un écoulement en régime permanent, $\hat{\rho}$ et \hat{q} sont constantes.

3.8 Correction non-isentropique

À la section 2.1.5 page 13, nous avons posé l'hypothèse d'un écoulement isentropique irrotationnel. Le théorème de Crocco démontre que pour un écoulement non-visqueux avec une enthalpie totale constante, la vorticité est produite en fonction du gradient d'entropie normale aux lignes de courant [30]. Donc, un écoulement non-visqueux sans présence d'ondes de choc est en effet isentropique et sa vorticité est nulle. Par contre, lorsqu'il y a présence d'ondes de choc, nous avons démontré à la section 2.3, page 20 que si son intensité est élevée, le traitement de l'entropie et de la vorticité deviennent des facteurs importants afin d'obtenir une solution de qualité.

Plusieurs méthodes de correction d'entropie et de vorticité ont été proposées afin d'améliorer la solution lorsque l'onde de choc est de forte intensité [46, 47, 48, 49]. Klopfer et Nixon [50] ont démontré que si deux des trois équations de conservation sont satisfaites et que l'entropie est donnée par une équation de la forme de (3.54), alors le saut donné par la relation de Rankine-Hugoniot est exactement obtenu. De plus, la troisième équation de conservation sera satisfaite.

$$K(s) = \frac{P}{\rho^\gamma} = \exp\left(\frac{\Delta s}{c_v}\right) = \frac{P_2/P_1}{(\rho_2/\rho_1)^\gamma} \quad (3.54)$$

Par les relations de Rankine-Hugoniot, le ratio de densité et de pression à travers une onde de choc peut être donné en fonction du nombre de Mach à l'aval par :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \quad (3.55)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} \quad (3.56)$$

Par ces relations et (3.54), on peut trouver le facteur K :

$$K = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} \left(\frac{(\gamma - 1) M_1^2 + 2}{(\gamma + 1) M_1^2} \right)^\gamma \quad (3.57)$$

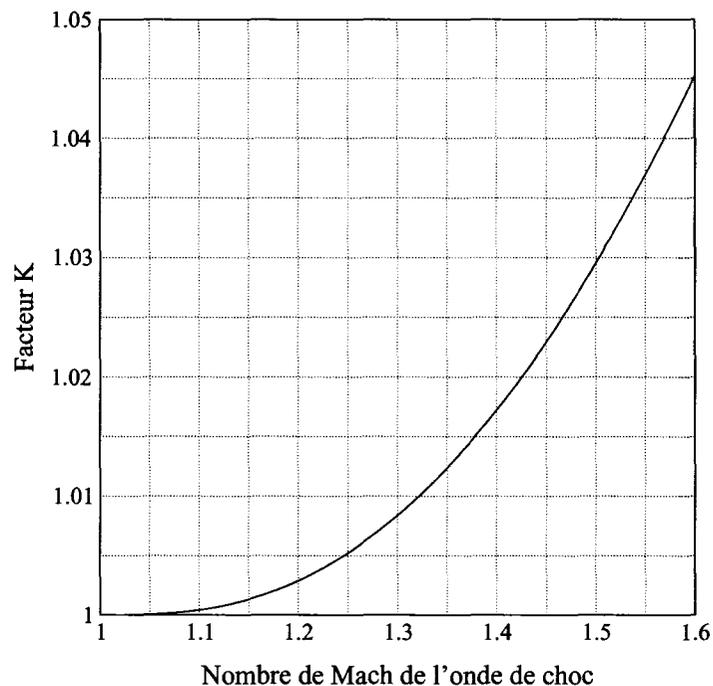


Figure 13 Variation du facteur K en fonction du nombre de Mach de l'onde de choc

On peut observer à la figure 13 que le facteur K est de très faible amplitude. Pour un choc dont la vitesse amont est de Mach 1.3, on trouve un facteur d'environ 1.008. Ceci

correspond à la correction non-isentropique pour rectifier l'erreur de 5% qu'on a obtenu à la section 2.3 pour cette intensité de choc.

Pour obtenir l'équation du potentiel complet non-isentropique, nous devons modifier la relation sur ρ . L'équation d'énergie adimensionnelle (2.1.6, page 16) peut être donnée par :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{\gamma-1}{2} q^2 M_\infty^2 + \sigma \phi_t M_\infty^2 (\gamma-1) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \quad (3.58)$$

En substituant (3.54) pour $\frac{P}{\rho}$, on obtient :

$$\rho^{\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{2} q^2 M_\infty^2 + \sigma \phi_t M_\infty^2 (\gamma-1) = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \quad (3.59)$$

Et finalement,

$$\rho = \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma \phi_t + q^2 - 1)}{K} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \rho_i K^{-\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.60)$$

où ρ_i est la densité isentropique. En substituant cette équation dans (2.62) pour un choc unidimensionnel, on obtient :

$$\left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma \phi_t + u_1^2 - 1)}{K_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} u_1 = \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma \phi_t + u_2^2 - 1)}{K_2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} u_2 \quad (3.61)$$

En résolvant pour $\frac{K_2}{K_1}$:

$$\frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma \phi_t + u_2^2 - 1)}{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma \phi_t + u_1^2 - 1)} \right) \quad (3.62)$$

Par la relation de Prandtl :

$$u_1 u_2 = \hat{a}^2 \quad (3.63)$$

où \hat{a} est la vitesse du son. Celle-ci peut être trouvée en modifiant l'équation (3.58) par :

$$\hat{a}^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{(\gamma + 1) M_\infty^2} = Z \quad (3.64)$$

Avec $u_2 = \frac{Z}{u_1}$, $K_1 = 1$ et $K_2 = K$, on obtient :

$$K = \left(\frac{Z}{u_1^2} \right)^{\gamma-1} \left(\frac{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 \left(2\sigma\phi_t + \left(\frac{Z}{u_1} \right)^2 - 1 \right)}{1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma\phi_t + u_1^2 - 1)} \right) \quad (3.65)$$

On peut calculer le facteur de modification non-isentropique en suivant la procédure telle que spécifiée dans [51] :

- Déterminer la position de l'onde de choc ;
- Calculer la vitesse en amont u_1 ;
- Calculer K par (3.65).

On doit noter que K est constant sur les lignes de courant et change seulement à travers une onde de choc. Puisqu'on utilise un maillage pratiquement conforme aux lignes de courant dans la région près de l'aile et que c'est dans cette région que K a le plus d'influence, on peut considérer le maillage comme étant une approximation acceptable de la position des lignes de courants. Pour appliquer K , on peut modifier l'équation (3.50) par :

$$\tilde{\rho} = \rho_i K^{-\frac{1}{\gamma-1}} - \frac{1}{q} \left(\left(\frac{U}{Q} \Delta \xi \overleftarrow{\partial}_\xi + \frac{V}{Q} \Delta \eta \overleftarrow{\partial}_\eta + \frac{W}{Q} \Delta \zeta \overleftarrow{\partial}_\zeta \right) (\rho q)^- \right) \quad (3.66)$$

De plus, on doit calculer la pression adimensionnelle par :

$$P = \rho_i^\gamma K \quad (3.67)$$

3.9 Conditions aux frontières

La plupart des conditions aux frontières sont appliquées séparément de la résolution du système matriciel. Par contre, la condition sur l'aile peut s'appliquer directement à l'intérieur du système d'équations. Puisque la vitesse contravariante W est orthogonale sur l'aile, on doit être en mesure d'imposer $W = 0$. Pour $k = K$ un point sur la surface de l'aile, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\rho W}{J} \right)_{i,j,K} = \left(\frac{\rho W}{J} \right)_{i,j,K+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\rho W}{J} \right)_{i,j,K-\frac{1}{2}} \simeq 2 \left(\frac{\rho W}{J} \right)_{i,j,K+\frac{1}{2}} \quad (3.68)$$

et

$$W = (\zeta_t + A_{13}\phi_\xi + A_{23}\phi_\eta + A_{33}\phi_\zeta)_{i,j,K} = 0 \quad (3.69)$$

Avec ces deux relations, l'équation (3.30) peut être réécrite pour les noeuds sur l'aile :

$$L_\xi^b L_\eta^b L_\zeta^b \Delta \phi = R^b(\phi_*) \quad (3.70)$$

avec $L_\xi^b = L_\xi$, $L_\eta^b = L_\eta$ et

$$L_\zeta^b = 1 - \frac{2}{\beta} \left(\frac{\tilde{\rho} A_{33}}{J} \partial_\zeta \right)_{i,j,K+\frac{1}{2}} \quad (3.71)$$

et

$$R^b = \frac{1}{\beta \Delta \tau} \left(\left(\frac{\rho}{J} \right)^{n+1} - \left(\frac{\rho}{J} \right)^n \right)_{i,j,K} + \frac{2}{\beta} W_{i,j,K+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\tilde{\rho} U}{J} \right)_{i,j,K} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\tilde{\rho} V}{J} \right)_{i,j,K} \quad (3.72)$$

Pour une aile générant de la portance, il y aura au bord de fuite une différence entre les potentiel supérieur ϕ_u et inférieur ϕ_l . Cette différence de potentiel est en fait la circulation Γ et doit être traitée avec soin afin d'avoir une bonne distribution de pression sur l'aile. On doit faire appel à la condition de Kutta afin de bien résoudre celle-ci. La condition de Kutta stipule qu'un écoulement en régime permanent autour d'une aile à un angle d'attaque donné adopte une valeur particulière de la circulation qui donne un écoulement uniforme au bord de fuite. Donc la condition de Kutta prescrit une pression continue au bord de fuite. De plus, les vitesses \vec{v}_u et \vec{v}_l sont égales en amplitude et en direction dans le cas où le bord de fuite est à angle aigu. Finalement, pour un bord de fuite à angle fini, celui-ci est un point de stagnation $\vec{v}_u = \vec{v}_l = 0$.

Pour l'équation du potentiel, on peut appliquer la condition de Kutta dans le sillage de l'aile en forçant la continuité de la pression entre P_u et P_l :

$$\rho_u^\gamma = \rho_l^\gamma \quad (3.73)$$

et

$$\rho = \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2 (2\sigma\phi_t + q^2 - 1) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (3.74)$$

Donc,

$$2\sigma(\phi_u)_t + (q_u)^2 = 2\sigma(\phi_l)_t + (q_l)^2 \quad (3.75)$$

On peut développer le terme q :

$$2\sigma(\phi_u)_t + (\phi_u)_x^2 + (\phi_u)_y^2 + (\phi_u)_z^2 = 2\sigma(\phi_l)_t + (\phi_l)_x^2 + (\phi_l)_y^2 + (\phi_l)_z^2 \quad (3.76)$$

La vitesse normale au sillage est égale $(\phi_u)_z^2 = (\phi_u)_z^2$ alors on peut simplifier :

$$2\sigma(\phi_u)_t + (\phi_u)_x^2 + (\phi_u)_y^2 = 2\sigma(\phi_l)_t + (\phi_l)_x^2 + (\phi_l)_y^2 \quad (3.77)$$

On peut réécrire cette équation par :

$$2\sigma\left((\phi_u)_t - (\phi_l)_t\right) + (\phi_u)_x^2 - (\phi_l)_x^2 + (\phi_u)_y^2 - (\phi_l)_y^2 = 0 \quad (3.78)$$

Ce qui peut être développé par :

$$\sigma\left(\phi_u - \phi_l\right)_t + \frac{1}{2}\left((\phi_u)_x + (\phi_l)_x\right)\left(\phi_u - \phi_l\right)_x + \frac{1}{2}\left((\phi_u)_y + (\phi_l)_y\right)\left(\phi_u - \phi_l\right)_y = 0 \quad (3.79)$$

Par la définition de la circulation :

$$\Gamma = \phi_u - \phi_l \quad (3.80)$$

on trouve :

$$\sigma\Gamma_t + \frac{1}{2}\left((\phi_u)_x + (\phi_l)_x\right)\Gamma_x + \frac{1}{2}\left((\phi_u)_y + (\phi_l)_y\right)\Gamma_y = 0 \quad (3.81)$$

Le terme $\frac{1}{2}\left((\phi_u)_x + (\phi_l)_x\right)$ représente la moyenne de la vitesse des sillages inférieur et supérieur. Si le maillage du sillage est aligné avec la coordonnée x , cette moyenne peut être remplacée par :

$$U_{avg} = \frac{1}{2}\left(U_u + U_l\right) \quad (3.82)$$

On doit noter qu'on devrait déplacer le sillage en fonction de la position de $W(x, y, z, t) = 0$. Nous avons par contre observé que l'alignement du sillage avec l'axe x a donné des résultats satisfaisants. La condition de Kutta peut donc être réécrite selon la base covariante par :

$$\sigma\Gamma_t + U_{avg}\Gamma_\xi + V_{avg}\Gamma_\eta = 0 \quad (3.83)$$

On peut résoudre cette équation par différence finie en remplaçant respectivement ∂_ξ et ∂_η par des différences finies en amont $\overleftarrow{\partial}_\xi$ et centrale ∂_ζ . On peut linéariser l'équation par :

$$\left(1 + \Delta\tau U^n + \Delta\tau V^n \delta_\eta\right)\Delta\Gamma = -\Delta\tau\left(U^n \overleftarrow{\partial}_\xi + V^n \delta_\eta\right)\Gamma^n + \Delta\tau U^n \Delta\Gamma_{i-1} \quad (3.84)$$

On trouve $\Gamma^{n+1} = \Gamma^n + \Delta\Gamma$ en résolvant un système tridiagonal dans la direction η pour chacun des $\xi = \text{constant}$. Afin de stabiliser et de conserver la symétrie, la correction de Γ sur le potentiel situé dans le sillage ($k = K$) est implémentée par :

$$\begin{aligned} \text{Pour le sillage du bas : } \phi_{i_{bas},j,K} &= \frac{\phi_{i_{bas},j,K} + \phi_{i_{haut},j,K}}{2} - \frac{\Gamma_{i,j}}{2} \\ \text{Pour le sillage du haut : } \phi_{i_{haut},j,K} &= \frac{\phi_{i_{bas},j,K} + \phi_{i_{haut},j,K}}{2} + \frac{\Gamma_{i,j}}{2} \end{aligned} \quad (3.85)$$

On peut implémenter cette condition directement dans le calcul de l'approximation triple. En effet lorsque $\Delta\phi'$ est trouvé, on peut diviser la résolution du système tridiagonal L_ζ en deux sous-domaines. Le premier domaine inclura tout le bloc au dessus de l'aile (i au dessus de l'aile $\forall j, k$) et le deuxième sous-domaine sera constitué du bloc restant. Lors de la résolution du système tridiagonal du premier sous-domaine, on trouve Γ qui pourra être appliqué directement comme condition lors de la résolution du deuxième système tridiagonal. Pour la résolution par la méthode de GMRES, on peut calculer et appliquer dans le sillage cette condition pour chacune des directions de Krylov.

Pour un écoulement en régime permanent sans portance, la frontière extérieure est fixée à $\phi = x$. S'il y a génération de portance, la valeur du potentiel sur la frontière extérieure doit être corrigée en utilisant la solution du vortex compressible [26] selon :

$$\phi_\infty = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad (3.86)$$

ou α est l'angle d'incidence de l'écoulement libre. La correction doit être appliquée par :

$$\phi = \phi_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \left(\sqrt{1 - M_\infty^2} \frac{z}{x} \right) \quad (3.87)$$

La pente $\frac{z}{x}$ est différente selon la position sur la frontière extérieure et sur les sorties inférieure/supérieure. Pour le calcul en régime transitoire, la valeur de Γ sur la frontière doit rester constante et est donnée par la solution initiale [52]. De plus, la densité est

imposée selon :

$$\rho_{\infty} = 1 \quad (3.88)$$

3.10 Calcul parallèle

Un code aéroélastique en potentiel complet est environ un ordre de grandeur plus rapide qu'un code en Euler. Donc en théorie, pour obtenir une solution en Euler dans le même ordre de temps qu'un code potentiel, il faudrait distribuer le calcul sur environ dix processeurs. Puisque le calcul distribué est très présent pour ce genre d'application, il est préférable d'utiliser un algorithme par sous-domaines afin de conserver l'avantage d'une formulation en potentiel complet. De plus, les récentes tendances des fabricants de processeurs de mettre plusieurs coeurs (core) par processeurs obligent les programmeurs à ajouter le parallélisme à leur code afin d'utiliser ces processeurs efficacement.

Le code FP est donc organisé de façon à séparer le problème en plusieurs sous-domaines qui seront calculés en parallèle. Les communications entre ces sous-domaines seront effectuées grâce à la bibliothèque MPI (Message Passing Interface). Puisque l'obtention d'une solution en régime permanent ne requiert pas suffisamment de temps (généralement dans l'ordre de 2-3 minutes pour un maillage de 225k noeuds) pour nécessiter l'implémentation d'un algorithme par sous-domaines, seul le solveur en régime transitoire utilisant la méthode GMRES est parallélisé.

3.10.1 Décomposition du domaine

Il est assez simple de diviser un maillage structuré en plusieurs sous-domaines. Par contre, afin de diminuer la taille des communications, il est préférable de faire cette division dans la direction (ξ, η, ζ) ayant le plus grand nombre de noeuds. Pour un maillage en «C» tel que montré à la figure 9 (page 34), cette direction est ξ . Pour s tâches, on peut séparer la direction ξ en s sous domaines. Lorsque le nombre de noeuds dans la direction ξ est inférieur à la moitié du nombre de noeuds dans la direction ζ , on pourra ajouter une couche

de sous-domaines dans la direction ζ . Dans ce cas, le nombre de sous-domaines doit être un nombre pair (figure 14). La plupart des codes aéroélastiques divisent le problème en

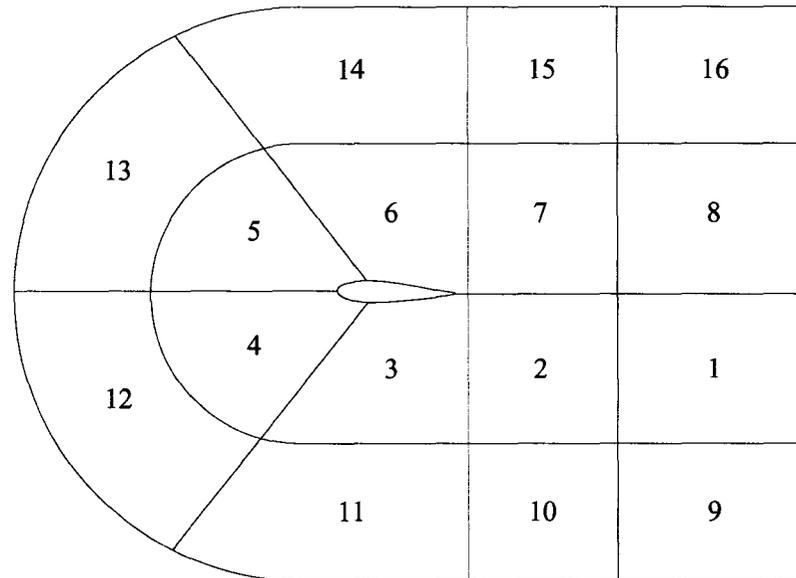


Figure 14 Division du domaine en sous-domaines

plusieurs familles (famille fluide, famille structure et famille maillage). Pour éviter la communication du nouveau maillage à chaque pas de temps et puisque la résolution structurale est très rapide, le code FP utilise une approche sans famille [53]. Ainsi, chacun des sous-domaines calcule le fluide et le maillage à chaque pas de temps, alors que le sous-domaine principal doit en plus effectuer le calcul structural.

3.10.2 Algorithme par sous-domaines

En 1870, Schwarz [54] a proposé de diviser le domaine Ω en plusieurs sous-domaines $\{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n\}$. La procédure consiste à parcourir les sous-domaines Ω_i et de résoudre les systèmes locaux en utilisant le résidu global. La solution est mise à jour à la fin de la boucle sur tous les domaines. Cette méthode est appelée Schwarz additive.

Soit un domaine Ω , la procédure consiste à diviser ce domaine en s sous-domaines Ω_i . Les frontières internes des différents sous-domaines sont notées par Γ_{ij} , qui est la frontière interne au sous-domaine Ω_i avec le sous-domaine Ω_j .

Un pseudo algorithme de la méthode Schwarz additive se présente comme suit :

Algorithme de la méthode Schwarz additive

1 *Convergence* :

Répéter jusqu'à satisfaction du critère de convergence :

Itération : Pour $i = 1, \dots, s$ faire

Résoudre δ_i dans Ω_i par $\delta_i = R_i^T A_i^{-1} R_i (b - Au)$

Fin de boucle

Mettre à jour les valeurs de u sur $\Gamma_{ji} \forall j$

$$u_{\text{nouveau}} = u + \sum_{i=1}^s \delta_i$$

Pour plus de détails sur la méthode voir les références [53, 55].

Cette méthode est utilisée pour le code FP. Le chevauchement (figure 15) requis afin d'obtenir une bonne convergence et surtout afin de permettre de décentrer la différentiation pour les noeuds supersoniques doit être de deux noeuds en plus du noeud partagé à la frontière Γ des deux domaines. Ceci est pénalisant en terme de communication et le «speedup» est diminué puisque le nombre de degrés de liberté du domaine global augmente. Le pourcentage d'augmentation dans le cas où une seule couche de sous-domaines est présente dans la direction ζ est donné par :

$$\frac{5 \times (s - 1)}{nx} \times 100\% \quad (3.89)$$

où nx est le nombre de noeud en x . Donc le nombre de noeuds en x sera un facteur important lors du calcul des courbes de «speedup» et d'efficacité. Plus ce nombre de noeuds sera grand, plus les courbes réelles seront près des courbes idéales (figure 16).

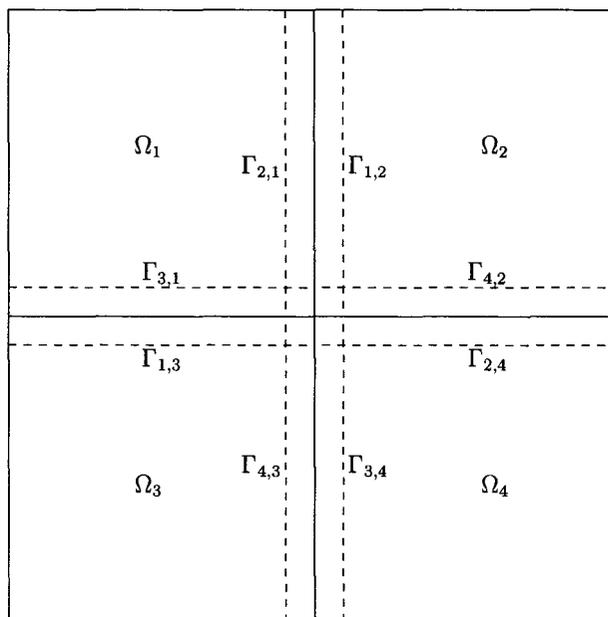


Figure 15 Domaine divisé en quatre sous-domaines avec chevauchement

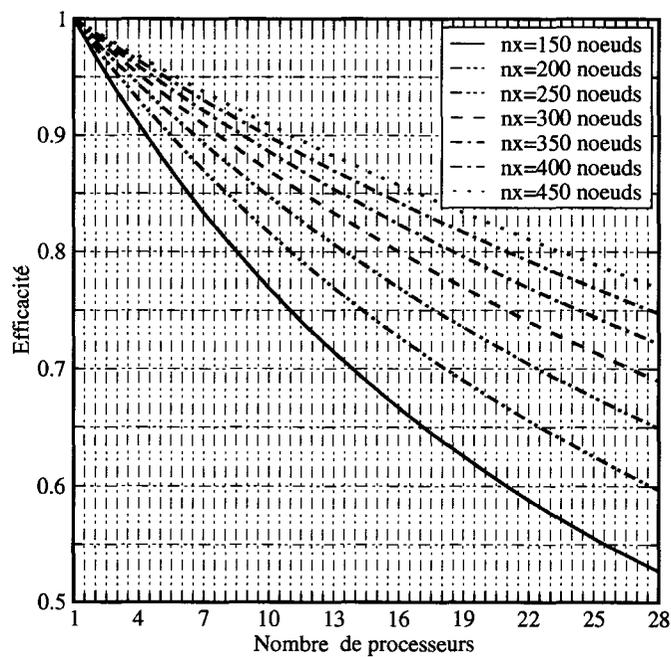


Figure 16 Efficacité prévue

CHAPITRE 4

COUPLAGE FLUIDE-STRUCTURE

L'aéroélasticité est définie par l'interaction mutuelle entre les forces d'inertie, les forces élastiques et les forces aérodynamiques agissant sur des structures exposées à un écoulement. Pour arriver à réaliser un calcul numérique en aéroélasticité, nous devons coupler la résolution d'une structure (CSD) et la résolution d'un écoulement (CFD). On peut généralement classer en deux catégories les approches pour résoudre les problèmes aéroélastiques : couplage fort et couplage faible (fully or loosely coupled).

Le couplage fort exige la résolution du système CFD et CSD en simultané, ce qui rend nécessaire la reformulation des équations de chaque discipline. Le système matriciel résultant de la discrétisation de la combinaison des deux domaines est généralement complexe à résoudre. En effet, le système structural est physiquement beaucoup plus raide que le système fluide et les matrices associées aux structures sont une ordre de grandeur plus raides que celles associées au fluide [56]. Donc la résolution du couplage fort ne présente pas réellement d'avantages par rapport à la résolution d'un couplage faible.

Le couplage faible ou intégré est réalisé en joignant un code CFD et CSD dans un seul et même code et en ajoutant un interface entre ces codes. Bien que les codes soient intégrés, les équations de CFD et de CSD ne sont pas modifiées et elles sont résolues comme un système. Cette dernière approche sera préconisée dans ce travail.

Dans cette section, nous allons en premier lieu présenter le modèle structural utilisé pour représenter la géométrie de l'aile. En deuxième lieu, nous allons formuler la méthode de résolution structurale. Nous allons en troisième lieu développer la méthode de couplage entre les codes CFD et CSD. Et finalement, nous analyserons en détails la méthode de déformation de maillage nécessaire afin d'obtenir la géométrie de l'aile à chaque pas de temps.

4.1 Modèle structural

Les représentations en éléments finis de la géométrie structurale peuvent être classées par ordre décroissant de complexité géométrique :

- Représentation complète détaillée ;
- Représentation par une aile-boîte (wing-box) ;
- Représentation par des plaques et des coques ;
- Représentation par des poutres.

Pour une aile ayant un ratio envergure/surface élevé, il est possible de représenter celle-ci par un élément poutre. Les charges et les moments sont répartis sur la poutre et les déflexions, rotations et flexions sont calculées pour être transférées sur l'aile.

Plusieurs ailes peuvent être représentées par des éléments plaques et coques. Les ailes d'avions de chasse en sont un bon exemple. Les ailes testées en soufflerie sont souvent fabriquées en bois et puisqu'elles sont pleines, on peut facilement utiliser des plaques et des coques pour les modéliser.

L'approche aile-boîte peut représenter la plupart des ailes d'avions commerciaux. On peut modéliser l'aile par différents éléments poutres et coques.

Finalement, un modèle en éléments finis complet peut représenter toutes sortes d'ailes.

Puisque nous allons valider le code aéroélastique avec des résultats obtenus expérimentalement en soufflerie sur une aile pleine en bois (aile Agard 445.6 [57]), la structure sera modélisée par un élément coque.

4.2 Résolution structurale

La résolution structurale peut être directe ou par superposition modale. La méthode directe est efficace lorsque le problème est non linéaire ou si le contenu fréquentiel des forces d'excitation exige la prise en charge d'un nombre élevé de modes propres. Dans le cas contraire, la superposition modale est plus efficace si le système est linéaire et que les

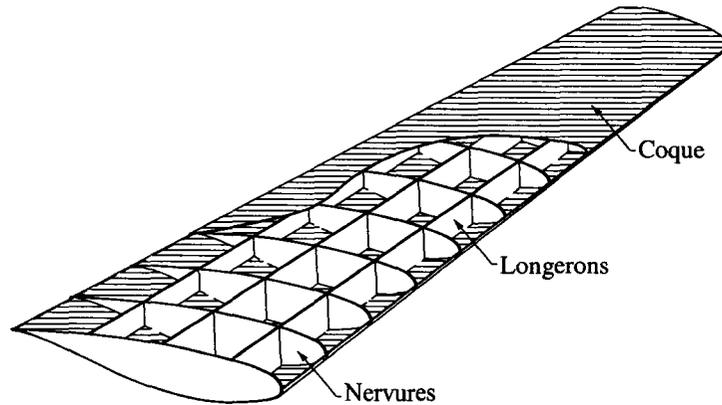


Figure 17 Représentation aile-boîte

modes propres fondamentaux de la structure sont dominants dans la réponse dynamique pour un cas où seuls les premiers modes sont susceptibles d'être excités. Dans ce cas, la superposition modale donne des résultats précis proportionnels au nombre de modes utilisés et elle requiert une puissance de calcul minimale.

Le régime forcé d'une structure est régi par le système matriciel des équations du mouvement ainsi que par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{q}(t) + \mathbf{D} \dot{q}(t) + \mathbf{K} q(t) &= r(t) \\ q(0) &= q_0 \\ \dot{q}(0) &= \dot{q}_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$ et $q(t)$ sont respectivement les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement de la structure et $r(t)$ est le vecteur de force appliqué sur la structure. Les variables \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{K} désignent les matrices spatiales symétriques et définies positives de masse, d'amortissement et de rigidité. La matrice d'amortissement peut être définie par un frottement dit proportionnel (amortissement de Rayleigh) :

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \tag{4.2}$$

où $\alpha = \eta_a/\rho$ et $\beta = \eta_b$. Les constantes η_a et η_b sont les coefficients d'amortissement visqueux et ρ est la masse volumique du solide. En utilisant le changement de variable suivant :

$$q(t) = z_1(t)\mathbf{p}_{01} + z_2(t)\mathbf{p}_{02} + \dots + z_n(t)\mathbf{p}_{0n} = \mathbf{P}_0 z(t) \quad (4.3)$$

où $z = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}^T$ représente le vecteur des n coordonnées modales et $\mathbf{P}_0 = [\mathbf{p}_{01}, \mathbf{p}_{02}, \dots, \mathbf{p}_{0n}]$ est la matrice ($n \times n$) des modes propres. Ces variables sont dans notre cas obtenues à l'aide d'un logiciel commercial d'éléments finis. Et en admettant que la multiplication de cette équation par \mathbf{P}_0^T diagonalise simultanément les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, on trouve avec les propriétés d'orthonormalité [58] :

$$\begin{aligned} z_i(0) &= p_{0i}^T \mathbf{M} q_0 \\ \dot{z}_i(0) &= p_{0i}^T \mathbf{M} \dot{q}_0 \\ \ddot{z}_i(t) &= s_{0i}(t) - 2\eta_i \omega_{0i} \dot{z}_i(t) - \omega_{0i}^2 z_i(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ω_i et η_i sont respectivement la fréquence naturelle et l'amortissement du i^e mode et $s_{0i}(t) = \mathbf{P}_0^T r(t)$ est le vecteur des forces modales appliquées à la structure. Pour intégrer dans le temps cette équation, l'algorithme de Newmark sera utilisé.

Algorithme de Newmark

1 Incrémentation temporelle $t_{(k)} = t_{(k-1)} + \Delta t$

2 Calcul des facteurs de participation modale à l'excitation

$$s_{0i}^{(k)} = \mathbf{p}_{0i}^T \mathbf{r}(t)_{(k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p)$$

3 Détermination des coordonnées modales

$$z_i^{(k)} = \frac{\beta \Delta t^2}{1 + 2\eta_i \omega_{0i} \gamma \Delta t + \omega_{0i}^2 \beta \Delta t^2} \times \left(s_{0i}^{(k)} + 2\eta_i \omega_{0i} \left(\frac{\gamma}{\beta \Delta t} z_i^{(k-1)} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{z}_i^{(k-1)} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{z}_i^{(k-1)} \right) + \frac{1}{\beta \Delta t} \left(\frac{1}{\Delta t} z_i^{(k-1)} + \dot{z}_i^{(k-1)} + \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t \ddot{z}_i^{(k-1)} \right) \right) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p)$$

4 Détermination des vitesses modales

$$\dot{z}_i^{(k)} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (z_i^{(k)} - z_i^{(k-1)}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{z}_i^{(k-1)} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{z}_i^{(k-1)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p)$$

5 Détermination des accélérations modales

$$\ddot{z}_i^{(k)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (z_i^{(k)} - z_i^{(k-1)}) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{z}_i^{(k-1)} + \left(1 - \frac{1}{2\beta} \right) \ddot{z}_i^{(k-1)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, p)$$

6 Évaluation par synthèse modale des rotations et déplacements globaux, ainsi que des vitesses et accélérations correspondantes

$$\mathbf{q}(t_{(k)}) = \sum_{i=1}^p \mathbf{p}_{0i}^T z_i^{(k)}$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t_{(k)}) = \sum_{i=1}^p \mathbf{p}_{0i}^T \dot{z}_i^{(k)}$$

$$\ddot{\mathbf{q}}(t_{(k)}) = \sum_{i=1}^p \mathbf{p}_{0i}^T \ddot{z}_i^{(k)}$$

Pour rester dans la zone inconditionnellement stable de l'algorithme de Newmark les paramètres γ et β sont définis par :

$$\gamma \geq 1/2$$

$$\beta \geq (\gamma + 1/2)^2 / 4$$

Pour avoir la règle de base des trapèzes (aussi appelée méthode de l'accélération moyenne), on prend $\gamma = 1/2$ et $\beta = 1/4$. Les équations cinématiques sont alors données par :

$$\begin{aligned} z_i^{(k)} &= z_i^{(k-1)} + \Delta t \dot{z}_i^{(k-1)} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \left(\ddot{z}_i^{(k-1)} + \ddot{z}_i^{(k)} \right) \\ \dot{z}_i^{(k)} &= \dot{z}_i^{(k-1)} + \frac{1}{2} \Delta t \left(\ddot{z}_i^{(k-1)} + \ddot{z}_i^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ces relations montrent que le modèle repose sur une valeur moyenne de l'accélération modale dans l'intervalle $(t^{(k-1)}, t^k)$:

$$\ddot{z}(\tau) = \frac{\ddot{z}_i^{(k-1)} + \ddot{z}_i^{(k)}}{2} \quad t^{(k-1)} < \tau < t^k \quad (4.6)$$

4.3 Interface fluide-structure

Lorsque l'interface entre le maillage structure et le maillage fluide est identique (chacun des noeuds sur la surface fluide a un équivalent à la même position sur la surface structure), le transfert des pressions et des déplacements est une opération triviale. Cependant, on utilise généralement des maillages distincts pour le fluide et la structure pour permettre l'utilisation d'éléments différents pour le fluide et la structure (triangles, quadrangles, ...) en plus de permettre l'utilisation d'un maillage raffiné différemment. Par conséquent, les problèmes suivants doivent être adressés :

- Les noeuds fluides de l'interface doivent être localisés dans le maillage de la structure et vice-versa ;
- Les discrétisations à l'interface fluide-structure ne coïncident pas, donc elles doivent être couplées.

Pour localiser les noeuds aux interfaces, on peut utiliser l'algorithme défini dans [59]. Pour un noeud p_i ayant les coordonnées \mathbf{x}_{p_i} , on peut trouver s'il appartient à l'élément $\Omega_s^{(e)}$ en trouvant les fonctions de formes \mathbf{N}_k associées à p_i en fonction des n points bornant

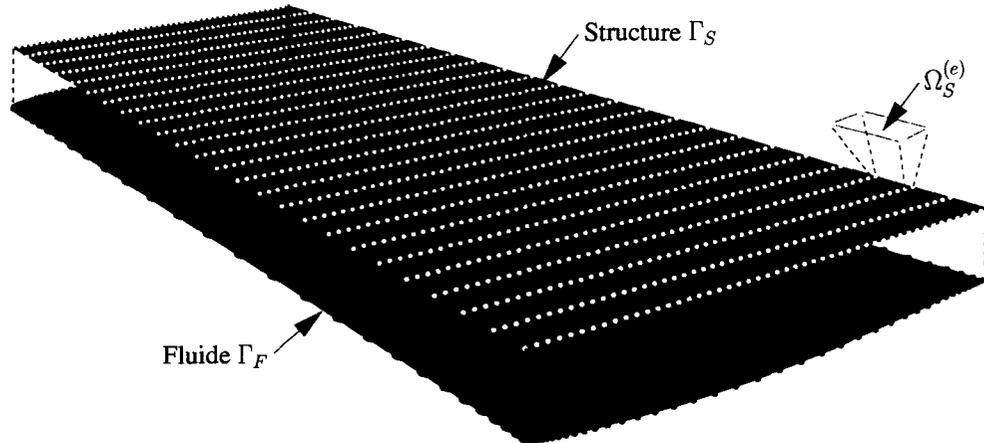


Figure 18 Interfaces non-correspondantes

l'élément $\Omega_s^{(e)}$ par :

$$\mathbf{x}_{p_i} = \sum_k^n \mathbf{N}_k \mathbf{x}_{S_k} \quad (4.7)$$

Avec pour condition :

$$\sum_k^n \mathbf{N}_k = 1 \quad (4.8)$$

On trouve que le point p_i appartient à l'élément $\Omega_s^{(e)}$ si :

$$\min(\mathbf{N}_k, 1 - \mathbf{N}_k) \geq 0, \forall k \quad (4.9)$$

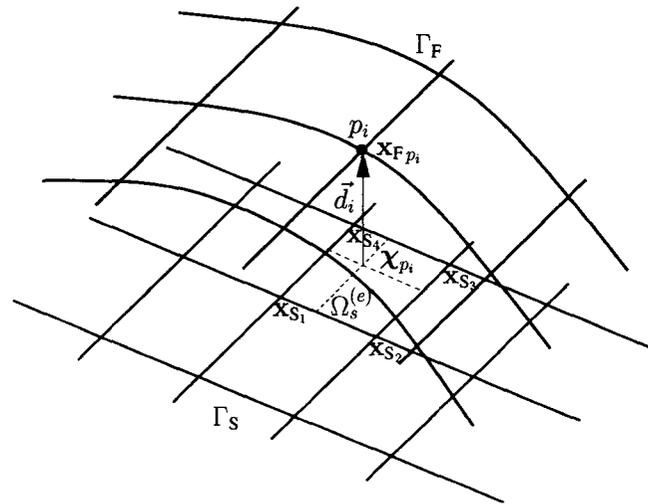


Figure 19 Projection des noeuds fluide

Algorithme de localisation des noeuds

- 1 *Itération* : Pour $i=1$, nombre de noeuds fluide sur Γ_F faire
 - 2 *Itération* : Pour $j=1$, nombre d'éléments de structure $\Omega_s^{(e)} \in \Gamma_S$ faire

Détermination de la coordonnée naturelle $\chi_{p_i} \in \Omega_s^{(e)}$ du noeud fluide p_i sur l'élément structural $\Omega_s^{(e)}$ où sur sa projection

Évaluer $N_k(\chi_{p_i})$

Condition : Si la condition (4.9) est satisfaite, coupler le noeud i à l'élément j

Fin de boucle

Fin de boucle

Pour un élément quadrangle, on doit diviser l'élément en deux triangles pour localiser et coupler les interfaces. Cette localisation est effectuée une seule fois à l'initialisation du calcul et les fonctions d'interpolations sont sauvegardées pour le partage d'informations entre les deux interfaces.

Un algorithme est présenté dans [60] pour transférer les charges induites par le fluide sur la structure. Cet algorithme conserve l'énergie totale et la quantité de mouvement transférées entre les deux interfaces. On peut trouver le flux de pression numérique par :

$$\phi_k = \int_{\Gamma_F} -(P \cdot \vec{n}) \mathbf{D}_k \, ds \quad (4.10)$$

La pression dimensionnelle est donnée par :

$$P = \frac{2qP^*}{\gamma M_\infty^2} = \frac{2q\rho_i^\gamma K}{\gamma M_\infty^2} \quad (4.11)$$

où q est la pression dynamique. Cette pression est calculée au centre des éléments sur Γ_F . Puisque ces éléments peuvent être situés sur une surface bilinéaire, la normale n'est pas nécessairement égale en tout point p_i de la surface. On doit alors calculer la normale et la surface de l'élément par une intégration de Gauss-Legendre.

$$\phi_k = \sum_{i,j} -\alpha_i \alpha_j \left(P \cdot \vec{n}(\xi_i, \eta_j) \right) \mathbf{D}(\xi_i, \eta_j) \det \mathbf{J}(\xi_i, \eta_j) \quad (4.12)$$

où α_i et α_j sont les poids de Gauss-Legendre, ξ_i et η_j sont les points d'intégration et les fonctions d'interpolations sont :

$$D_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.13)$$

$$D_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.14)$$

$$D_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.15)$$

$$D_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.16)$$

La normale est définie par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2\|} \quad (4.17)$$

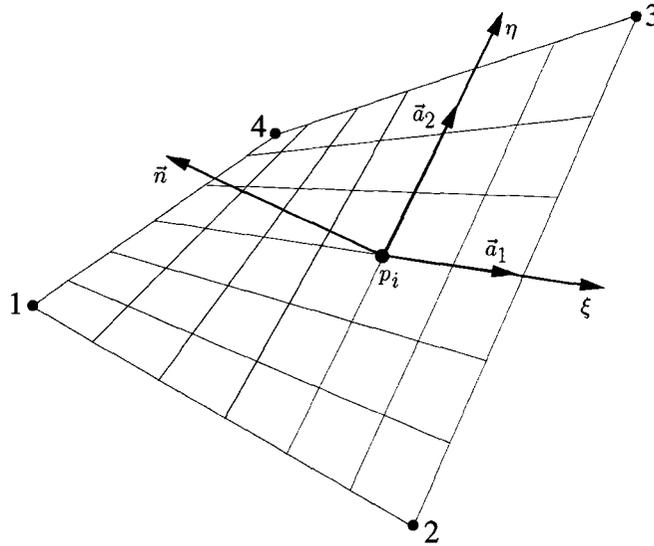


Figure 20 Surface bilinéaire

avec

$$\vec{a}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi} \right\} \quad \text{et} \quad \vec{a}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} \right\} \quad (4.18)$$

et

$$x = \sum_{i=1}^4 \mathbf{D}_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^4 \mathbf{D}_i y_i \quad z = \sum_{i=1}^4 \mathbf{D}_i z_i \quad (4.19)$$

Le déterminant du Jacobien est trouvé par :

$$\det \mathbf{J} = \|\vec{a}_1 \otimes \vec{a}_2\| \quad (4.20)$$

La force sur les noeuds des éléments structure de Γ_s peut être trouvée par :

$$\mathbf{f}_k = \sum_{j=1}^{j=j_f} \phi_j \mathbf{N}_k(\chi_j) \quad (4.21)$$

4.3.1 Pistage de l'interface fluide

Le pistage de l'interface fluide Γ_F doit être ajouté afin que Γ_F suive exactement l'interface de la structure Γ_S . La géométrie de la structure étant représentée par un élément coque, ses noeuds sont situés uniquement sur la surface médiane. Il n'y a donc aucun contact entre les éléments structuraux et les noeuds fluides. Puisque la coque satisfait les hypothèses de Reissner-Midlin, celle-ci reste planaire lors du mouvement de la structure et la distance séparant le noeud fluide p_i de l'élément structure $\Omega_S^{(e)}$ reste constante [61]. La distance entre un noeud fluide et son élément structural associé est calculée par :

$$\vec{d}_{p_i} = \vec{n}_j \cdot \left(\mathbf{x}_{F p_i} - \chi_{p_i} \right) \quad (4.22)$$

où \vec{n}_j est la normale de l'élément structure concerné, $\mathbf{x}_{F p_i}$ est la position du noeud fluide p_i et χ_{p_i} est sa projection sur $\Omega_S^{(e)}$. La nouvelle position d'un noeud fluide p_i est obtenue après la superposition modale par :

$$\chi_{p_i} = \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k \mathbf{x}_{S_k} \Big|_{\in \Gamma_S} \quad (4.23)$$

où \mathbf{x}_{S_k} est la position de la structure et n est le nombre de noeud de l'élément structure $\Omega_S^{(e)}$. La position du noeud p_i sur Γ_F est finalement trouvée par :

$$\mathbf{x}_{F p_i} = \chi_{p_i} + \mathbf{S}_{F p_i} \otimes \vec{d}_{p_i} + \vec{d}_{p_i} \quad (4.24)$$

où

$$\mathbf{S}_{F p_i} = \sum_{k=1}^n \mathbf{N}_k \mathbf{S}_{S_k} \Big|_{\in \Gamma_S} \quad (4.25)$$

où \mathbf{S}_{S_k} est le vecteur rotation dont les composantes sont les rotations de la fibre moyenne obtenues par la superposition modale des moments.

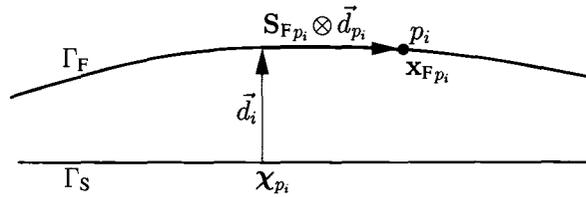


Figure 21 Détail de la projection des noeuds fluide

D'autre part, les moments du noeud p_i sont trouvés par :

$$M_{p_i} = \vec{d}_{p_i} \otimes \phi_{p_i} \quad (4.26)$$

Ces moments sont transférés à la structure par la même procédure que pour les forces (4.21).

4.4 Couplage fluide-structure

L'algorithme de couplage entre les codes CFD et CSD a un impact significatif sur la qualité de la solution ainsi que sur la rapidité de l'analyse. Trois facteurs sont importants à considérer pour diminuer l'erreur lors de la transmission de l'énergie et de la quantité de mouvement entre les deux interfaces :

- La discrétisation du mouvement du maillage ;
- La prédiction du mouvement de la structure ;
- La détermination du champ de pression transmis à la structure.

4.4.1 Algorithme CSS

L'algorithme le plus utilisé est appelé CSS (Conventional Serial Staggered) [62]. Celui-ci peut être utilisé tel que représenté à la figure 22 et résumé par :

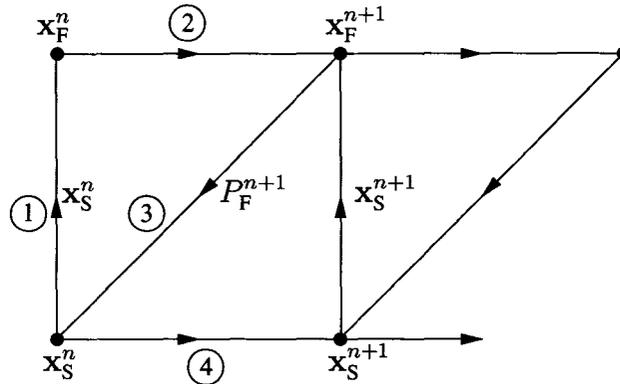


Figure 22 Algorithme CSS

Algorithme de couplage CSS

- a. Transmettre le déplacement structural au fluide $\mathbf{x}_F^{n+1} = \mathbf{x}_S^n$ et déformer l'interface Γ_F pour avoir la même position que Γ_S .

La vitesse du maillage est donnée par :

$$\dot{\mathbf{x}}_F = \frac{\mathbf{x}_F^{n+1} - \mathbf{x}_F^n}{\Delta t_F};$$

- b. Intégrer dans le temps le système fluide de t^n à $t^{n+1} = t^n + \Delta t_F$ où $\Delta t_F = \Delta t_S$.
- c. Transférer la pression $P_S^{n+1} = (P_F^{n+1} + P_F^n)/2$ à la structure et trouver la force correspondante ;
- d. Intégrer dans le temps le système structural de t^n à $t^{n+1} = t^n + \Delta t_S$.

Par les relations cinématiques données par la méthode de Newmark (4.5) avec la règle de base des trapèzes, on peut vérifier si la méthode CSS respecte les deux équations de continuité sur l'interface $\Gamma_{F/S}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_F^{n+1} &= \mathbf{x}_S^{n+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_F^{n+1} &= \dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les coordonnées de la structure sont données par la relation :

$$\mathbf{x}_S^{n+1} = \mathbf{x}_S^n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_S^n + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{x}}_S^n + \ddot{\mathbf{x}}_S^{n+1}) \quad (4.28)$$

Avec $\mathbf{x}_F = \mathbf{x}_S$, on peut trouver la vitesse du maillage à l'interface par :

$$\dot{\mathbf{x}}_F^{n+1} = \frac{\mathbf{x}_S^{n+1} - \mathbf{x}_S^n}{\Delta t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} + \dot{\mathbf{x}}_S^n}{2} \quad (4.29)$$

En substituant (4.28) dans (4.29), on trouve :

$$\dot{\mathbf{x}}_F^{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_S^n + \frac{1}{4} \Delta t (\ddot{\mathbf{x}}_S^n + \ddot{\mathbf{x}}_S^{n+1}) \quad (4.30)$$

Qui n'est pas égale à la vitesse donnée à la relation (4.5) :

$$\dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} = \dot{\mathbf{x}}_S^n + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{\mathbf{x}}_S^n + \ddot{\mathbf{x}}_S^{n+1}) \quad (4.31)$$

Alors, si on respecte $\mathbf{x}_S^{n+1} = \mathbf{x}_F^{n+1}$ et que (4.29) est utilisé afin de calculer la vitesse de la grille, on trouve que $\dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} \neq \dot{\mathbf{x}}_F^{n+1}$. Les deux équations de continuité ne sont donc pas simultanément respectées sur l'interface $\Gamma_{F/S}$.

Afin de respecter les deux équations de continuité, il suffit de redéfinir la vitesse de la grille par la relation de récurrence :

$$\frac{\dot{\mathbf{x}}_F^{n+1} + \dot{\mathbf{x}}_F^n}{2} = \frac{\mathbf{x}_F^{n+1} - \mathbf{x}_F^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{x}_S^{n+1} - \mathbf{x}_S^n}{\Delta t} \quad (4.32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_F^{n+1} = 2 \left(\frac{\mathbf{x}_F^{n+1} - \mathbf{x}_F^n}{\Delta t} \right) - \dot{\mathbf{x}}_F^n \quad (4.33)$$

Cependant, cette définition de la vitesse de la grille viole la GCL. On peut aussi diminuer l'erreur de troncature sur l'énergie et conserver la continuité du mouvement sur $\Gamma_{F/S}$. On

peut remplacer la dernière parenthèse de l'équation (4.28) par :

$$\ddot{\mathbf{x}}_S^{n+1} + \ddot{\mathbf{x}}_S^n = 2 \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_S^n}{\Delta t} \right) \quad (4.34)$$

Dans ce cas on peut conserver le mouvement et la position de la structure est donnée par :

$$\mathbf{x}_S^{n+1} = \mathbf{x}_S^n + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_S^n + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{\mathbf{x}}_S^{n+1} - \dot{\mathbf{x}}_S^n) \quad (4.35)$$

Pour cette variante, l'énergie transmise est de troisième ordre [62]. Nous pouvons aussi en itérant les étapes 1 à 4 de l'algorithme (nous avons remarqué que deux itérations sont normalement suffisantes) reproduire un algorithme prédictor-correcteur. Dans ce cas, l'algorithme est identique à la résolution d'un couplage fort [63]. Cependant, le temps total requis pour le calcul aéroélastique est pratiquement doublé. Cette variante de l'algorithme CSS sera privilégié dans ce mémoire.

4.4.2 Algorithme ISS

L'algorithme ISS (Improved Serial Staggered) [64] a été développé dans le but de pallier aux lacunes de l'algorithme CSS. L'algorithme est basé sur un schéma saute-mouton («leap-frog») où le domaine fluide est calculé aux pas de temps intermédiaires ($\dots, t^{n-1/2}, t^{n+1/2}, t^{n+3/2}, \dots$) et le domaine structure est calculé aux pas de temps complets ($\dots, t^{n-1}, t^n, t^{n+1}, \dots$). Celui-ci peut être utilisé tel que représenté à la figure 23 et résumé par :

Algorithme de couplage ISS

- a. Transmettre la prédiction du déplacement structural à $t^{n+1/2}$ au fluide et déformer l'interface Γ_F pour avoir la position qu'aurait Γ_S s'il était déplacé selon cette prédiction :

$$\mathbf{x}_F^{n+1/2P} = \mathbf{x}_S^n + \frac{\Delta t_S}{2} \dot{\mathbf{x}}_S^n;$$

- b. Intégrer dans le temps le système fluide de $t^{n-1/2}$ à $t^{n+1/2} = t^{n-1/2} + \Delta t_F$ où $\Delta t_F = \Delta t_S$;

- c. Transférer la pression $P_S^{n+1} = (P_F^{n+1/2} + P_F^{n-1/2}) - P_S^n$ à la structure et trouver la force correspondante ;

- d. Intégrer dans le temps le système structural de t^n à $t^{n+1} = t^n + \Delta t_S$.

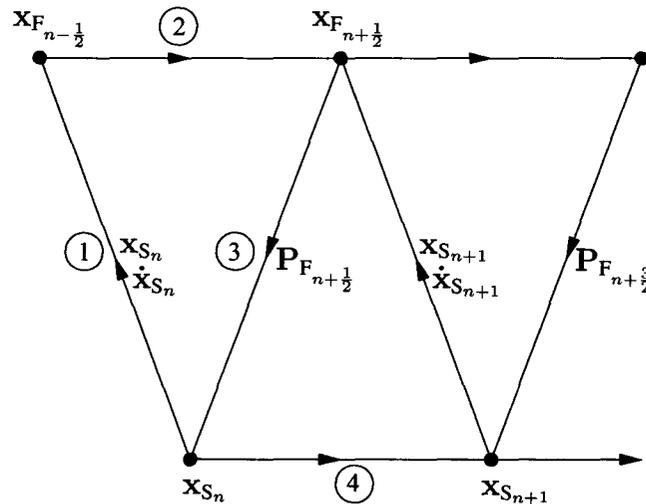


Figure 23 Algorithme ISS

En prenant $P_F^{n+1/2} = (P_F^{n-1/2} + P_F^{n+1/2})/2$ et $P_S^{n+1} = 2P_F^{n+1/2} - P_S^n$ la continuité du mouvement est conservée à l'interface $\Gamma_{F/S}$ et l'énergie transmise est du troisième ordre.

4.5 Déformation de maillage

Plusieurs méthodes ont été développées afin de régénérer un maillage déformé. Nous pouvons séparer ces méthodes en deux classes : les méthodes itératives et les méthodes algébriques. Les méthodes itératives, telles la résolution d'une équation elliptique ou encore l'analogie des ressorts sont des méthodes très robustes. Par contre, le temps de calcul requis pour arriver à résoudre ce type de méthodes rend la régénération et la déformation de maillage inefficaces pour un maillage structuré. Une méthode algébrique robuste est plus efficace en temps de calcul et est généralement simple à implémenter.

La plupart des méthodes algébriques de régénération et de déformation de maillage structuré sont basées sur la méthode de l'interpolation transfinie (TFI) [65]. Cette méthode est très robuste lorsqu'elle est employée avec des fonctions de propagations bien définies. L'algorithme de Jones et Samareh [66] utilise les fonctions de propagations basées sur la longueur d'arc proposée par Soni [67].

On peut effectuer la propagation par cet algorithme en quatre étapes :

- Paramétriser les noeuds du maillage basé sur la longueur d'arc,
- Calculer la déformation des segments et des surfaces bornant le domaine,
- Appliquer la propagation en une, deux et trois dimensions,
- Calculer la déformation sur le maillage original pour obtenir le maillage final.

On peut paramétrer les longueurs d'arc dans les directions i , j et k pour tous les noeuds du maillage en gardant deux indices constants et en variant le troisième. Par exemple pour calculer la longueur d'arc dans la direction i , on fixe les indices j et k et on calcule pour

i :

$$s_{1,j,k} = 0$$

Pour $i = 2, i_{\max}$ faire

$$s_{i,j,k} = s_{i-1,j,k} + \sqrt{(x_{i,j,k} - x_{i-1,j,k})^2 + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j,k})^2 + (z_{i,j,k} - z_{i-1,j,k})^2} \quad (4.36)$$

Fin

Ensuite, on normalise la longueur d'arc pour le segment :

$$F_{i,j,k} = \frac{s_{i,j,k}}{s_{i_{\max},j,k}} \quad (4.37)$$

On repère cette opération pour les segments dans les directions j et k . On conserve respectivement les longueurs d'arc pour ces segments dans les variables G et H . L'algorithme de Jones et Samareh propose de modifier les longueurs d'arc normalisées à chacun des appels de la fonction de déformation de maillage. Pour accélérer le processus et simplifier son implémentation en parallèle, nous allons uniquement calculer et conserver les longueurs d'arc normalisées du maillage original.

L'étape suivante nous permet de calculer la déformation des segments et des surfaces bornant le domaine. Nous allons procéder par l'application de la TFI en une et deux dimensions pour arriver à cette fin. Pour les segments, on applique la TFI en une dimension selon :

$$\Delta E_{i,j,k} = (1 - H_{i,j,k}) \Delta P_{i,j} \Big|_{k=1} + H_{i,j,k} \Delta P_{i,j} \Big|_{k=\max} \quad (4.38)$$

où ΔE représente la déformation sur l'indice k d'un segment et ΔP représente la déformation des noeuds sur les surfaces. On dénote par $\Big|_{k=1}$ la surface formée par le sillage et l'aile et par $\Big|_{k=\max}$ la surface formée par la frontière extérieure (voir figure 9 P-34).

Les surfaces peuvent être déformées par l'application de la TFI en deux dimensions :

$$\begin{aligned} \Delta S_{i,j,k} = & A_{i,j,k} \Delta E_{i,j,1} + B_{i,j,k} \Delta E_{i,j,k_{\max}} + C_{i,j,k} \Delta E_{i,1,k} + D_{i,j,k} \Delta E_{i,j_{\max},k} \\ & - A_{i,j,k} C_{i,j,k} \Delta P_{i,1} \Big|_{k=1} - A_{i,j,k} D_{i,j,k} \Delta P_{i,j_{\max}} \Big|_{k=1} \\ & - B_{i,j,k} C_{i,j,k} \Delta P_{i,1} \Big|_{k=\max} - B_{i,j,k} D_{i,j,k} \Delta P_{i,j_{\max}} \Big|_{k=\max} \end{aligned} \quad (4.39)$$

où ΔP , ΔE et ΔS sont respectivement les déformations des noeuds, segments et surfaces bornant le domaine. Les coefficients A , B , C et D sont les fonctions de propagation de Soni :

$$\begin{aligned} A_{i,j,k} = 1 - \eta_{i,j,k} & \quad B_{i,j,k} = \eta_{i,j,k} \\ C_{i,j,k} = 1 - \xi_{i,j,k} & \quad D_{i,j,k} = \xi_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.40)$$

avec

$$\begin{aligned} P_{i,j,k} &= 1 - (G_{i,j,k_{\max}} - G_{i,j,1}) (H_{i,j_{\max},k} - H_{i,1,k}) \\ \xi_{i,j,k} &= \left(G_{i,j,1} + H_{i,1,k} (G_{i,j,k_{\max}} - G_{i,j,1}) \right) / P_{i,j,k} \\ \eta_{i,j,k} &= \left(H_{i,1,k} + G_{i,j,1} (H_{i,j_{\max},k} - H_{i,1,k}) \right) / P_{i,j,k} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Le volume peut être déformé par l'application de la TFI en trois dimensions :

$$\Delta V_{i,j,k} = V_1 + V_2 + V_3 - V_{12} - V_{13} - V_{23} + V_{123} \quad (4.42)$$

avec

$$\begin{aligned} V_1 &= (1 - F_{i,j,k}) \Delta S_{1,j,k} + F_{i,j,k} \Delta S_{i_{\max},j,k} \\ V_2 &= (1 - G_{i,j,k}) \Delta S_{i,1,k} + G_{i,j,k} \Delta S_{i,j_{\max},k} \\ V_3 &= (1 - H_{i,j,k}) \Delta S_{i,j,1} + H_{i,j,k} \Delta S_{i,j,k_{\max}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= (1 - F_{i,j,k})(1 - G_{i,j,k})\Delta E_{1,1,k} + (1 - F_{i,j,k})G_{i,j,k}\Delta E_{1,j_{\max},k} \\
&\quad + F_{i,j,k}(1 - G_{i,j,k})\Delta E_{i_{\max},1,k} + F_{i,j,k}G_{i,j,k}\Delta E_{i_{\max},j_{\max},k} \\
V_{13} &= (1 - F_{i,j,k})(1 - H_{i,j,k})\Delta E_{1,j,1} + (1 - F_{i,j,k})H_{i,j,k}\Delta E_{1,j,k_{\max}} \\
&\quad + F_{i,j,k}(1 - H_{i,j,k})\Delta E_{i_{\max},j,1} + F_{i,j,k}H_{i,j,k}\Delta E_{i_{\max},j,k_{\max}} \\
V_{23} &= (1 - G_{i,j,k})(1 - H_{i,j,k})\Delta E_{i,1,1} + (1 - G_{i,j,k})H_{i,j,k}\Delta E_{i,1,k_{\max}} \\
&\quad + G_{i,j,k}(1 - H_{i,j,k})\Delta E_{i,j_{\max},1} + G_{i,j,k}H_{i,j,k}\Delta E_{i,j_{\max},k_{\max}}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}
V_{123} &= (1 - F_{i,j,k})(1 - G_{i,j,k})(1 - H_{i,j,k})\Delta P_{1,1} \Big|_{k=1} \\
&\quad + (1 - F_{i,j,k})(1 - G_{i,j,k})H_{i,j,k}\Delta P_{1,1} \Big|_{k=\max} \\
&\quad + (1 - F_{i,j,k})G_{i,j,k}(1 - H_{i,j,k})\Delta P_{1,j_{\max}} \Big|_{k=1} \\
&\quad + (1 - F_{i,j,k})G_{i,j,k}H_{i,j,k}\Delta P_{1,j_{\max}} \Big|_{k=\max} \\
&\quad + F_{i,j,k}(1 - G_{i,j,k})(1 - H_{i,j,k})\Delta P_{i_{\max},1} \Big|_{k=1} \\
&\quad + F_{i,j,k}(1 - G_{i,j,k})H_{i,j,k}\Delta P_{i_{\max},1} \Big|_{k=\max} \\
&\quad + F_{i,j,k}G_{i,j,k}(1 - H_{i,j,k})\Delta P_{i_{\max},j_{\max}} \Big|_{k=1} \\
&\quad + F_{i,j,k}G_{i,j,k}H_{i,j,k}\Delta P_{i_{\max},j_{\max}} \Big|_{k=\max}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

4.5.1 Orientation des frontières

Les méthodes présentées précédemment basent la déformation du domaine sur la translation de ses frontières sans égard à l'orientation (angle de rotation) de celles-ci. Plusieurs formulations demandent l'orthogonalité du maillage sur les frontières afin d'améliorer le résultat. Liou et Jeng [68] ont appliqué une fonction de propagation de type Soni-Hermite en utilisant plusieurs points de contrôle en deçà de la frontière pour améliorer l'orthogonalité du maillage. Morton, Melville et Visbal [69] ont proposé un algorithme bidimensionnel basé sur les angles d'Euler pour interpoler la déformation des frontières ainsi que le changement d'orientation. Pour appliquer cet algorithme en trois dimensions,

les angles d'Euler ne sont pas efficaces. En effet, un phénomène appelé «gimbal lock», bien connu en animation tridimensionnelle a été observé. Le «gimbal lock» est provoqué par l'alignement de deux des trois cardans ensemble de sorte qu'une des références de rotation (lacet/roulis/tangage) soit annulée. Pour éviter ce phénomène en animation tridimensionnelle, l'algèbre des quaternions est utilisée. Samareh [70] a suggéré un algorithme tridimensionnel basé sur les quaternions pour des maillages structurés et non-structurés.

Un quaternion peut être défini comme un quadruplet de nombres réels, le premier élément étant un «scalaire», et les trois éléments restants formant un «vecteur».

$$Q = q_0 + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k} = [s, \vec{v}] \text{ où } s = q_0 \text{ et } \vec{v} = [q_1, q_2, q_3] \quad (4.46)$$

Le vecteur \vec{v} représente l'axe de rotation et le scalaire s représente l'amplitude de la rotation.

4.5.2 Algorithme de déformation par l'algèbre des quaternions

Pour un vecteur de déformation autour du noeud i définit par :

$$\vec{\delta}_i = \vec{r}_i^d - \vec{r}_i^u \quad (4.47)$$



Figure 24 Maillage non-déformé et déformé

On peut déformer le maillage par l'algorithme de Samareh en trois étapes. Premièrement, pour tous les noeuds i de la frontière non déformée \vec{r}_i^u et de la frontière déformée \vec{r}_i^d , on

translate les noeuds voisins à l'origine selon :

$$\vec{r}^{u1} = \vec{r}^u - \vec{r}_i^u, \quad \vec{r}^{d1} = \vec{r}^d - \vec{r}_i^d \quad (4.48)$$

Ensuite, \vec{r}^{u1} est pivoté pour que la normale unitaire du corps non déformé \vec{n}_u soit alignée avec la normale unitaire du corps déformé \vec{n}_d . Cette rotation est effectuée à l'aide d'un quaternion. On définit l'amplitude de la rotation par l'angle entre les vecteurs \vec{n}_d et \vec{n}_u par :

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{n}_u \odot \vec{n}_d}{\|\vec{n}_u\| \cdot \|\vec{n}_d\|} \right) \quad (4.49)$$

L'axe de rotation est défini par la normale d'un plan partagé par les deux vecteurs normaux \vec{n}_u et \vec{n}_d . Le quaternion peut donc être défini par :

$$Q_1 = \left[\cos \frac{\alpha}{2}, \vec{n}_u \otimes \vec{n}_d \sin \frac{\alpha}{2} \right] \quad (4.50)$$

Les noeuds \vec{r}^{u1} sont pivotés par ce quaternion pour trouver \vec{r}^{u2} :

$$\vec{r}^{u2} = Q_1 [0, \vec{r}^{u1}] Q_1^{-1} \quad (4.51)$$

Pour effectuer les opérations de multiplication de l'équation (4.51), nous devons définir certaines propriétés des quaternions :

- Conjugé d'un quaternion $Q^* = q_0 - q_1\vec{i} - q_2\vec{j} - q_3\vec{k}$
- Norme d'un quaternion $\|Q\| = \sqrt{QQ^*} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$
- Quaternion unitaire $\|Q\| = 1$
- Inverse d'un quaternion $Q^{-1} = Q^*/(QQ^*)$
- Inverse d'un quaternion unitaire $Q^{-1} = Q^*$:

De plus, le produit de deux quaternion Q_1 et Q_2 est :

$$\text{avec } \begin{cases} Q_1 = a + b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k} \\ Q_2 = a' + b'\vec{i} + c'\vec{j} + d'\vec{k} \end{cases} \quad (4.52)$$

$$Q_1 \cdot Q_2 = aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + ba' + cd' - dc')\vec{i} \\ + (ac' + ca' + db' - bd')\vec{j} + (ad' + da' + bc' - cb')\vec{k}$$

Finalement, on trouve l'angle de rotation moyen entre \vec{r}^{u_2} et \vec{r}^d par :

$$\theta = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \cos^{-1} \left(\frac{\vec{r}_i^{u_2} \odot \vec{r}_i^d}{\|\vec{r}_i^{u_2}\| \cdot \|\vec{r}_i^d\|} \right) \quad (4.53)$$

Un deuxième quaternion correspondant à la rotation de la normale de la frontière déformée pour réduire au minimum l'angle entre ses noeuds voisins, peut être formé par :

$$Q_2 = \left[\cos \frac{\theta}{2}, \vec{n}^d \sin \frac{\theta}{2} \right] \quad (4.54)$$

Les deux quaternions sont combinés pour former le changement d'orientation de la frontière par :

$$Q_i = Q_1 Q_2 \quad (4.55)$$

Le vecteur de translation peut être trouvé par :

$$\Delta_i = \vec{r}_i^d - \vec{d}_i \quad (4.56)$$

avec

$$[0, \vec{d}_i] = Q_i [0, \vec{r}_i^u] Q_i^{-1} \quad (4.57)$$

Le quaternion Q_i et le vecteur translation Δ_i doivent être propagés à tous les noeuds du maillage. Pour un maillage non-structuré, l'analogie des ressorts est appropriée alors que dans le cas de maillage structuré, on peut utiliser la méthode de TFI. Une fois la

propagation effectuée, on trouve les coordonnées des noeuds :

$$\vec{R}_{\text{maillage}}^d = \Delta_{\text{maillage}} + Q_{\text{maillage}} \left[0, \vec{R}_{\text{maillage}}^u \right] Q_{\text{maillage}}^{-1} \quad (4.58)$$

4.5.3 Implémentation de l'algorithme de déformation de maillage

On peut avoir un algorithme de déformation de maillage robuste et efficace en combinant le contrôle de l'orthogonalité près des frontières par les quaternions et en propageant la déformation par l'interpolation transfinie. L'algorithme proposé contrôle un nombre $k = n$ de noeuds en deçà des frontières en appliquant l'algèbre des quaternions. Pour les $k_{\text{max}} - n$ noeuds restants, une simple propagation par la TFI des déformations obtenues en $k = n$ est appliquée.

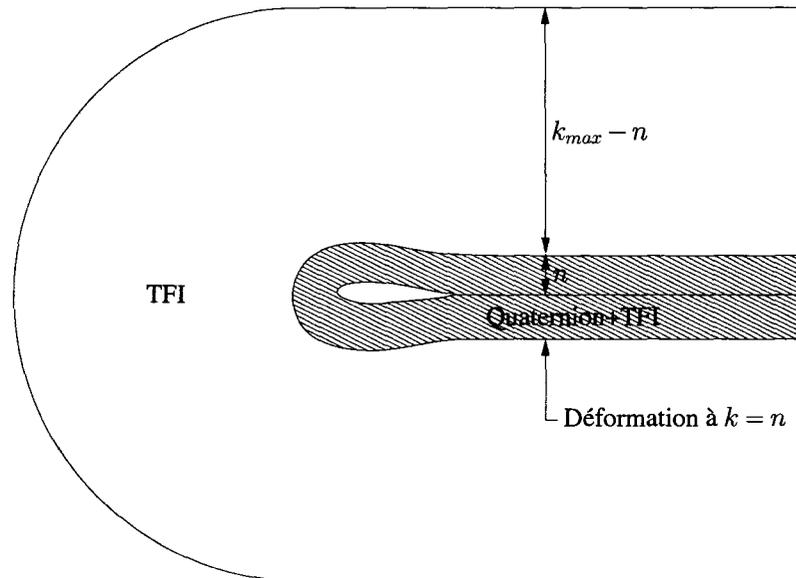


Figure 25 Domaines de propagation des déformations

En prenant un nombre n restreint de points contrôlés, on diminue fortement le temps de calcul. En effet, la propagation des quaternions nécessite 7 appels de la fonction de

propagation TFI (4 pour le quaternion Q_i et 3 pour le vecteur de translation Δ_i). Pour optimiser le temps de calcul, on prend généralement $n \simeq 5$.

Puisque deux zones de propagation sont nécessaires, on doit avoir deux longueurs d'arc normalisées par direction ($F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2$). Ces longueurs d'arc sont calculées en fonction des domaines respectifs de propagation selon :

- Propagation des quaternions ($k \leq n$) : F_1, G_1, H_1 calculés de $k = 1$ à $k = k_{max}$
- Propagation des déformations ($k \geq n$) : F_2, G_2, H_2 calculés de $k = n$ à $k = k_{max}$

Tel que spécifié dans la section 4.5, ces variables sont calculées une seule fois avec le maillage original. On peut avoir un chevauchement de la propagation dans la région autour de $k = n$ pour assurer une meilleure transition. La coordonnée résultante dans cette région sera alors trouvée par :

$$x_{i,j,k} = (\omega)x_{i,j,k}^{\text{tfi+quaternions}} + (1 - \omega)x_{i,j,k}^{\text{tfi}} \quad (4.59)$$

où ω varie de $[0, 1]$ pour $k = n - \frac{\text{chevauchement}}{2}$ à $k = n + \frac{\text{chevauchement}}{2}$.

Les figures 27 et 28 présentent respectivement la déformation de maillage obtenue avec un algorithme utilisant uniquement la propagation TFI avec la déformation de maillage obtenue avec l'algorithme proposé, c'est à dire en utilisant une combinaison de la méthode TFI et l'algèbre des quaternions.

4.5.4 Implémentation de l'algorithme de déformation de maillage en calcul distribué

La déformation de maillage en calcul distribué par une propagation TFI peut être facilement implémentée si on calcule les longueurs d'arc normalisées sur le maillage initial seulement. Le noeud maître les calcule et les communique aux autres noeuds une seule fois dans l'initialisation du calcul. Par la suite, seules les déformations sur la surface $k = 1$ sont communiquées. Ainsi, peu importe où est situé le sous-domaine, les longueurs d'arc

normalisées donneront une propagation des déformations de surface identique à celle d'un calcul séquentiel.

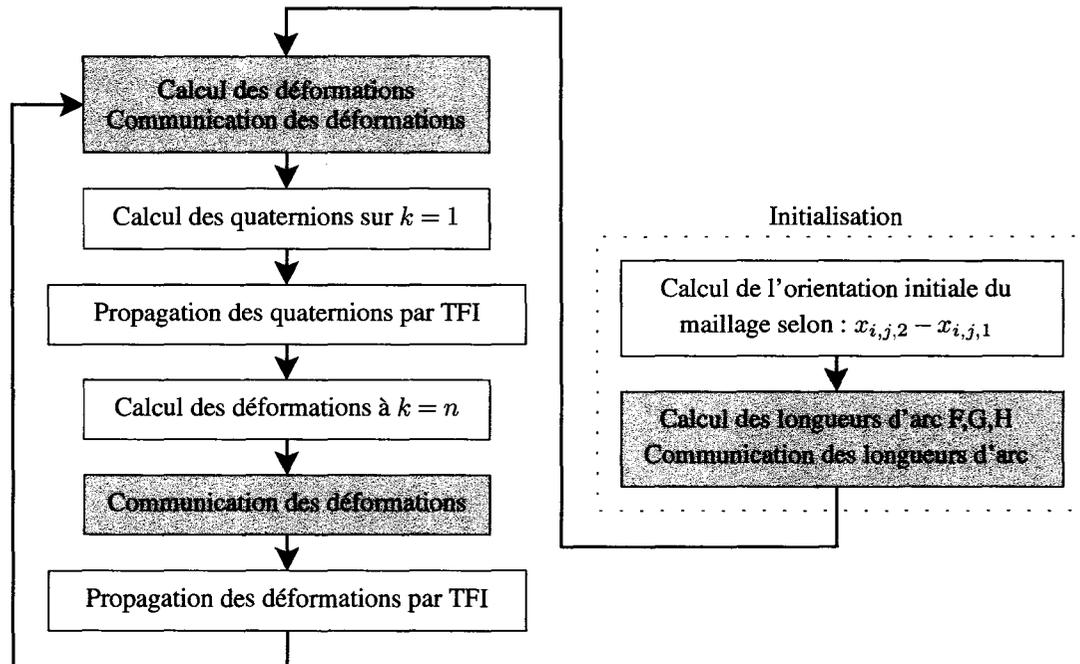


Figure 26 Algorithme de déformation

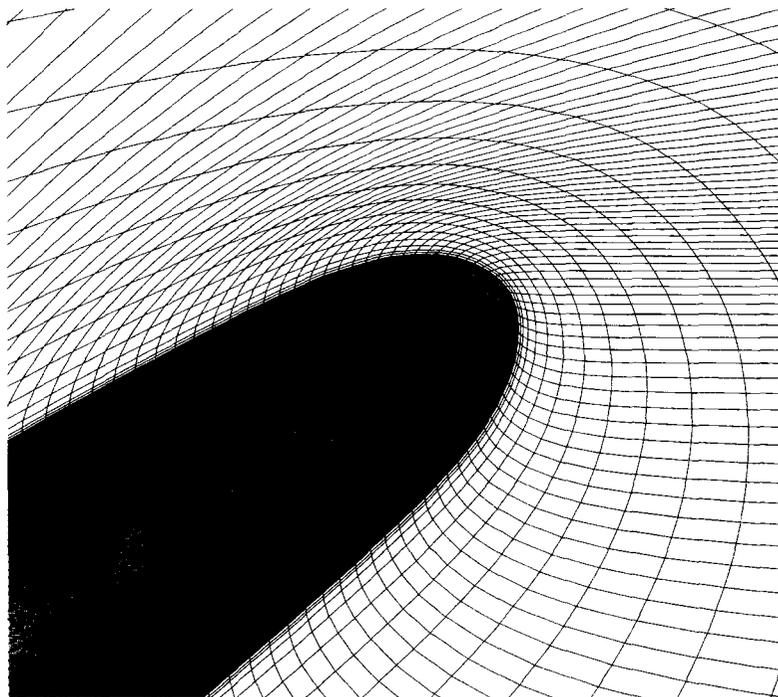


Figure 27 Déformation TFI

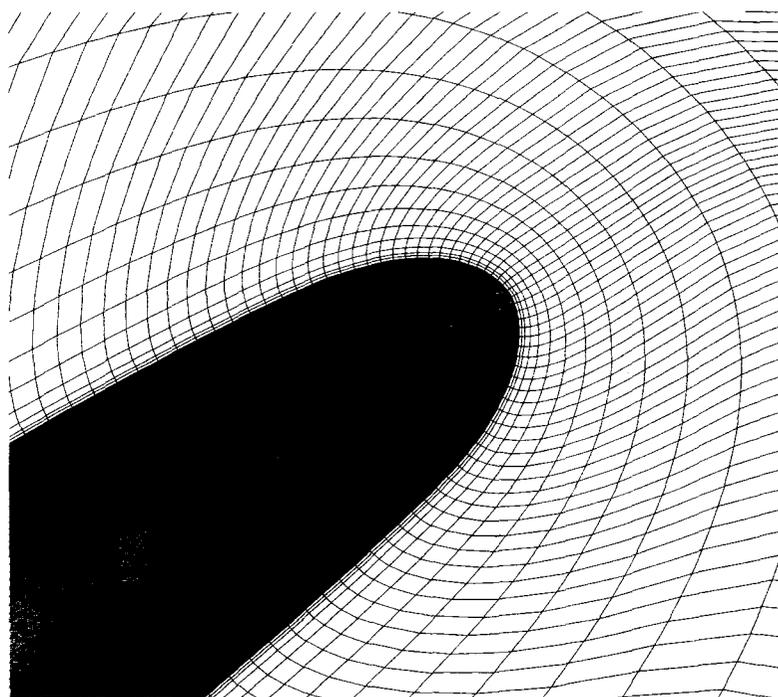


Figure 28 Déformation Quaternion-TFI

CHAPITRE 5

RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Dans cette section, nous allons présenter les résultats numériques obtenus avec le code potentiel complet réalisé lors de ce projet. Dans un premier temps, nous allons donner des résultats numériques obtenus en régime permanent sur l'aile Onera-M6. Par la suite, les résultats obtenus, toujours en régime permanent, sur l'aile AGARD-445.6 seront démontrés. Pour cette même aile, nous allons faire une analyse en régime transitoire afin de trouver les points de flottement. Certaines comparaisons des résultats obtenus avec les algorithmes ISS et CSS ainsi que l'effet de la formulation consistante seront ajoutés à cette section. Finalement, les performances de la parallélisation du calcul seront rapportées.

La figure 29 donne le cheminement d'une analyse aéroélastique. En premier lieu, la solution en régime permanent doit être obtenue. Cette solution sera perturbée pour débiter le calcul en régime transitoire. La perturbation appliquée est détaillée à la section 5.2.

5.1 Résultats en régime permanent

5.1.1 Aile Onera-M6

L'aile Onera-M6 présente un champ de pression assez complexe lorsqu'un angle d'attaque est donné. En effet, l'apparition d'un choc λ est la caractéristique principale que l'on devrait observer (figures 32 à 34). Les résultats présentés dans ces figures sont obtenus à un nombre de Mach de 0.8395 et à un angle d'attaque de 3.06 degrés.

Deux maillages (figures 30 et 31) ont été calculés afin de comparer la qualité du choc obtenu. Le maillage grossier est constitué de 259 050 noeuds dont 157 dans la direction de l'écoulement (ξ), 55 dans la direction de l'envergure de l'aile (η) et 30 dans la direction

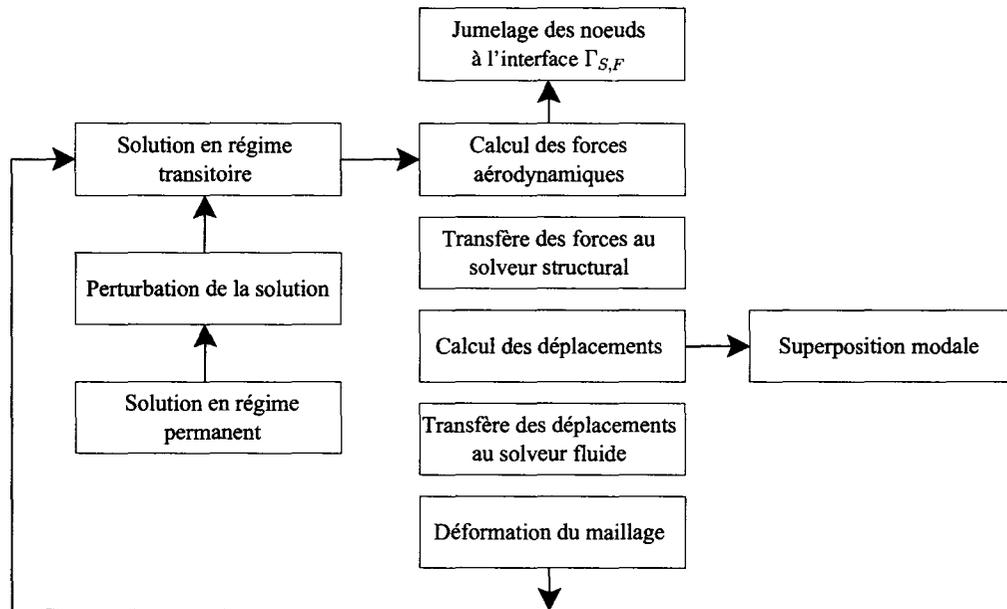


Figure 29 Aile Agard 445.6 à Mach 0.96

normale (ζ) ($157 \times 55 \times 30$). Le maillage fin est composé de 732 450 noeuds répartis respectivement selon $257 \times 95 \times 30$.

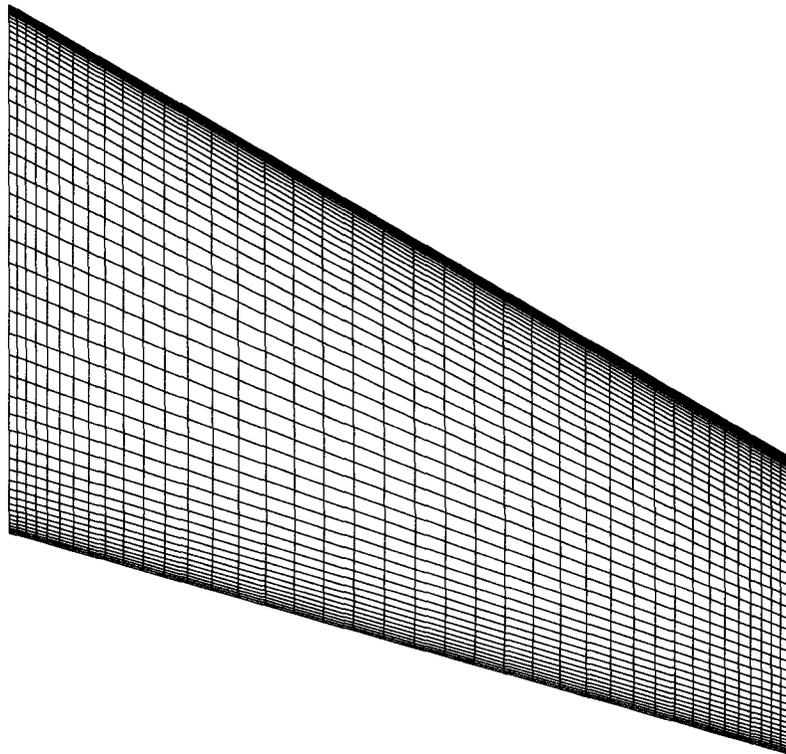


Figure 30 Maillage grossier aile Onera-M6

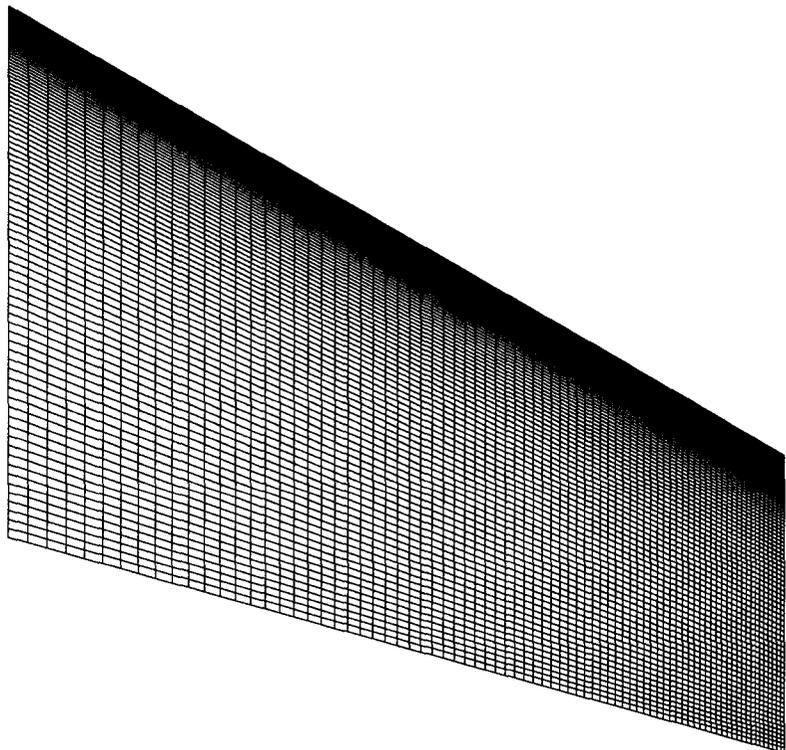


Figure 31 Maillage fin aile Onera-M6

En faisant une comparaison qualitative entre les résultats obtenus avec le maillage grossier (figure 33) et le maillage fin (figure 34), on peut observer une intensité et une position de l'onde de choc s'apparentant aux résultats expérimentaux. Les résultats présentés sur ces figures sont obtenus avec la correction non-isentropique.

Les coefficients de portance et de traînée sont comparés avec les résultats de plusieurs auteurs pour les maillages grossier et fin¹. On remarque un écart notable entre les résultats isentropiques et non-isentropiques pour le coefficient de portance alors que cette correction a pratiquement aucun effet sur le coefficient de traînée. À noter que les résultats présentés avec des symboles pleins sont obtenus avec des maillages structurés alors que les autres sont obtenus avec des maillages non-structurés.

¹Ces résultats sont tirés de la référence [71]

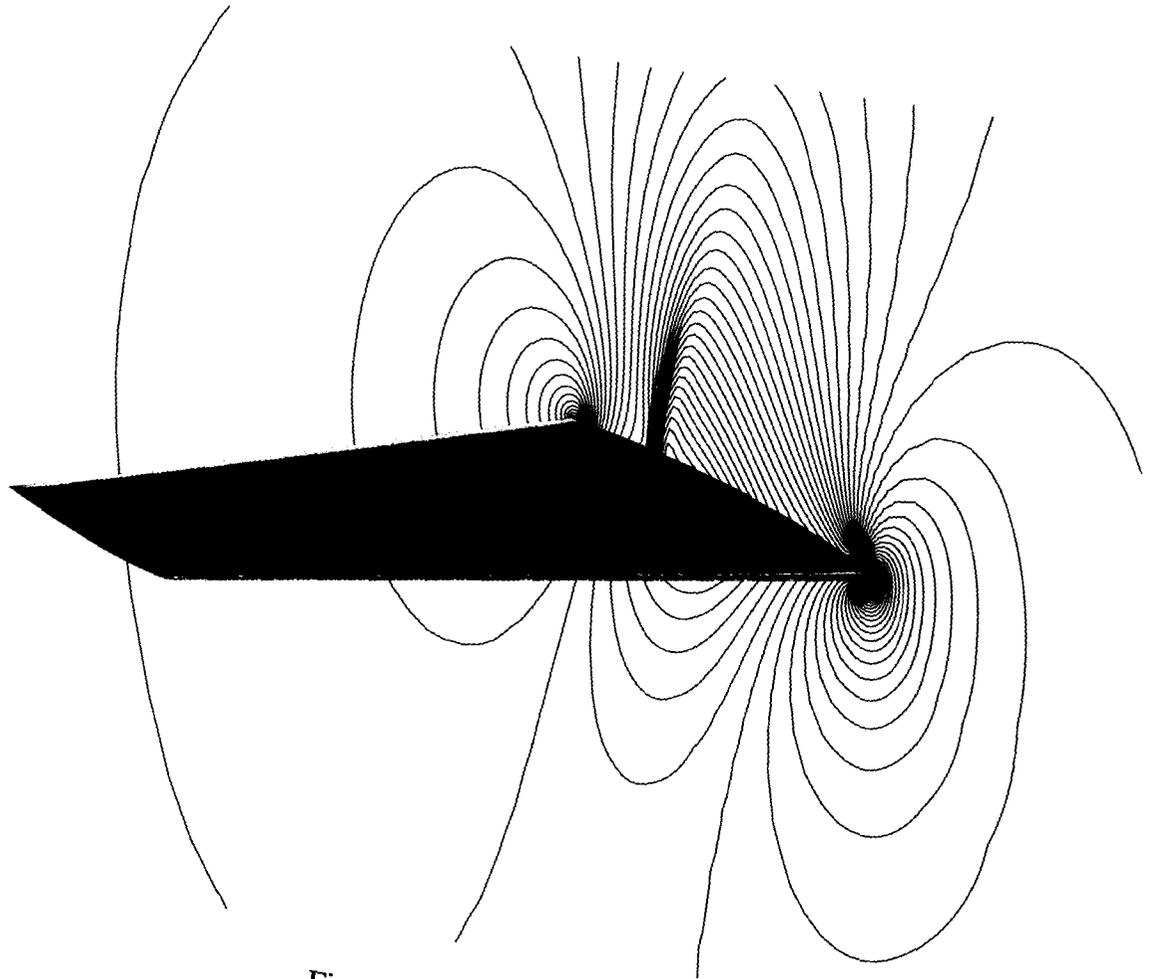


Figure 32 Aile Onera-M6

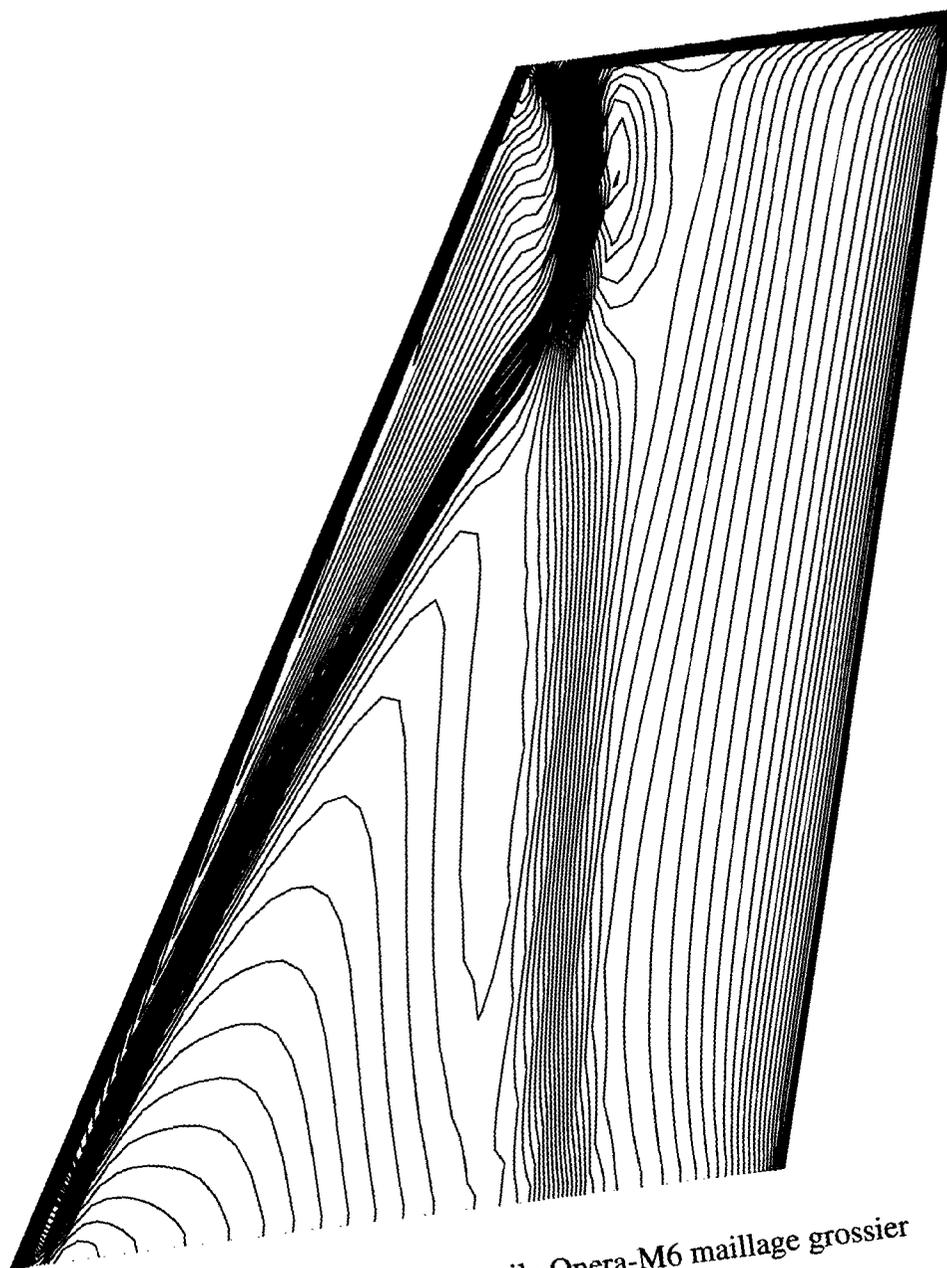


Figure 33 Choc λ aile Onera-M6 maillage grossier

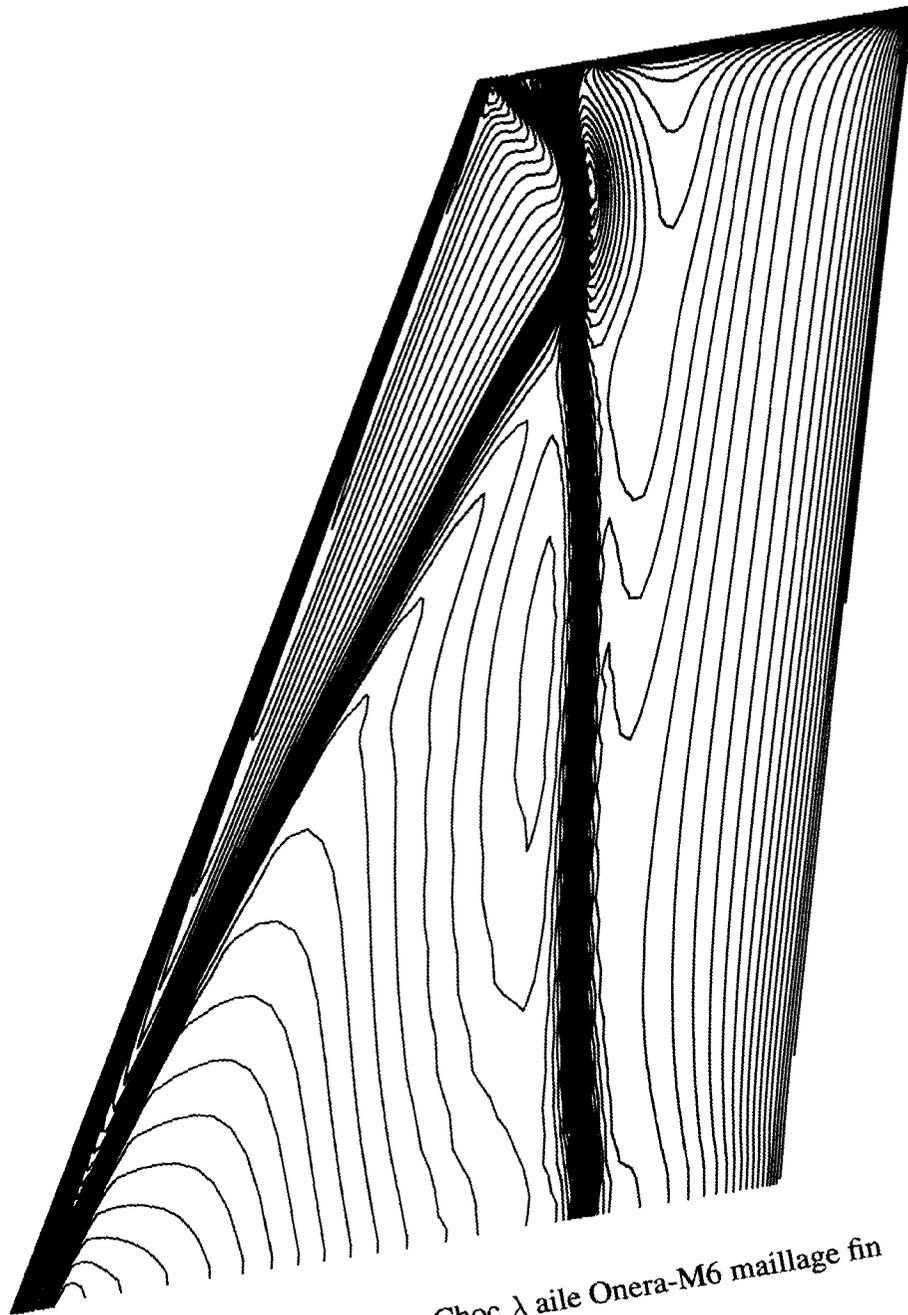


Figure 34 Choc λ aile Onera-M6 maillage fin

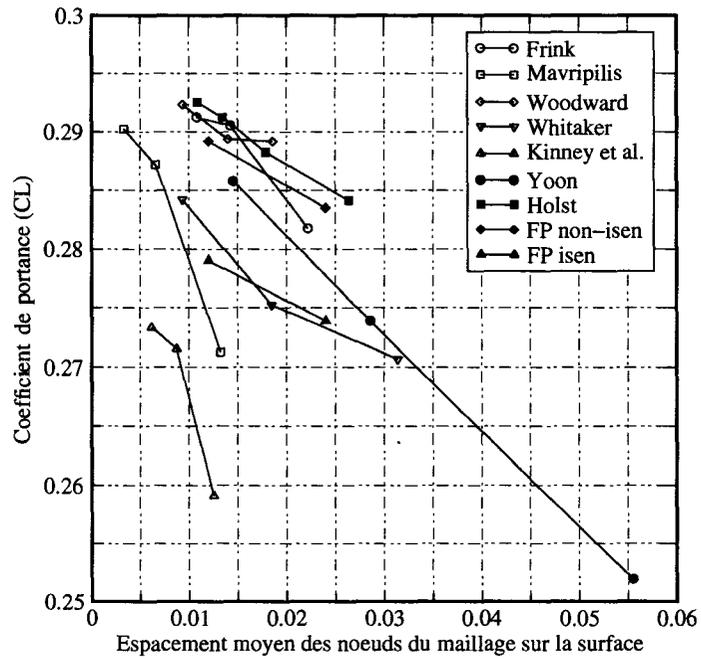


Figure 35 Coefficient de portance aile Onera-M6

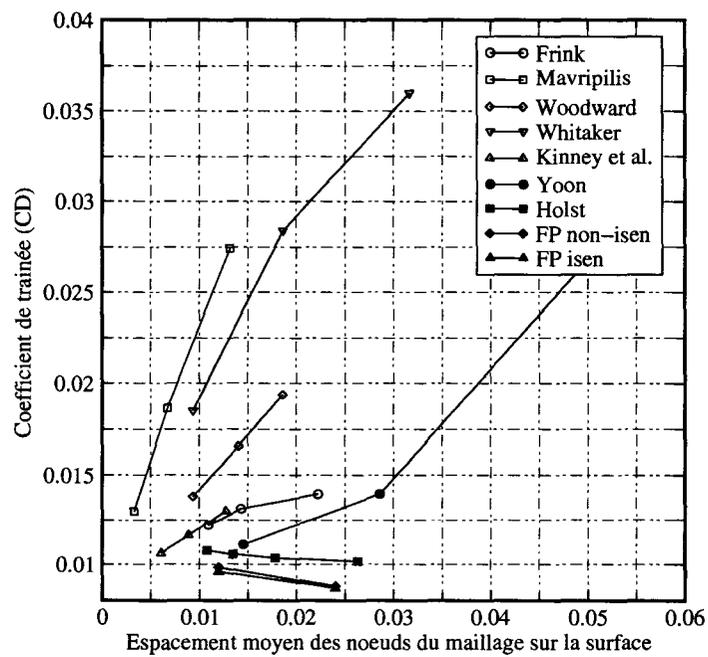
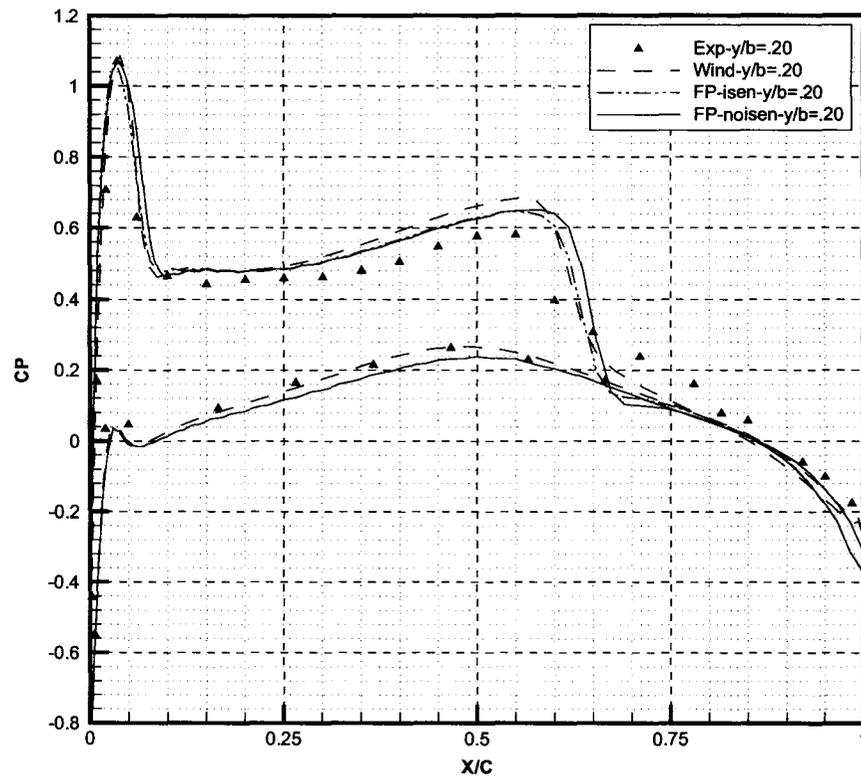
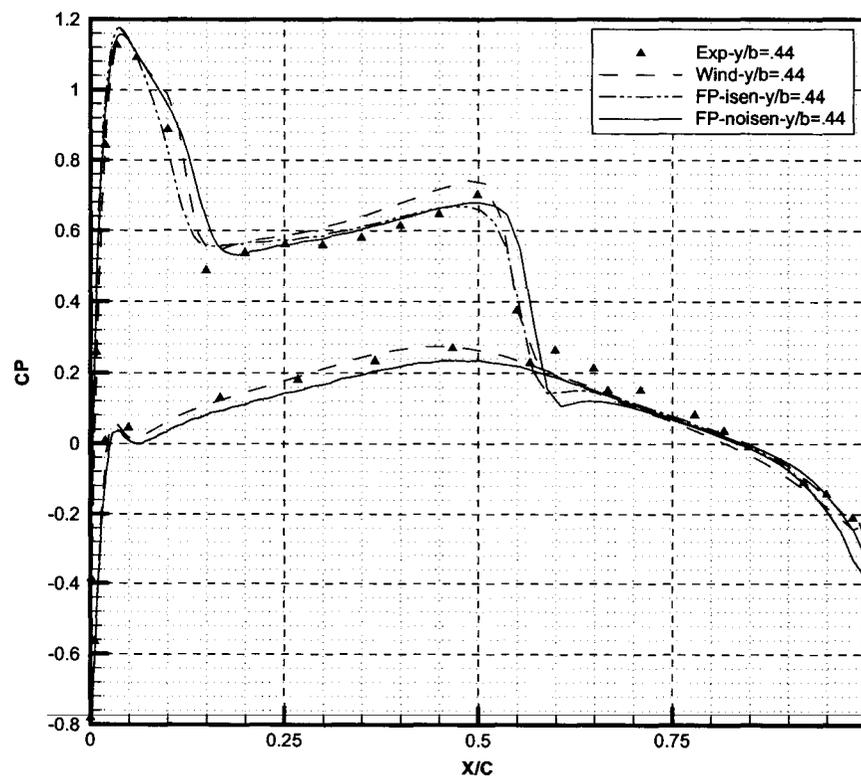
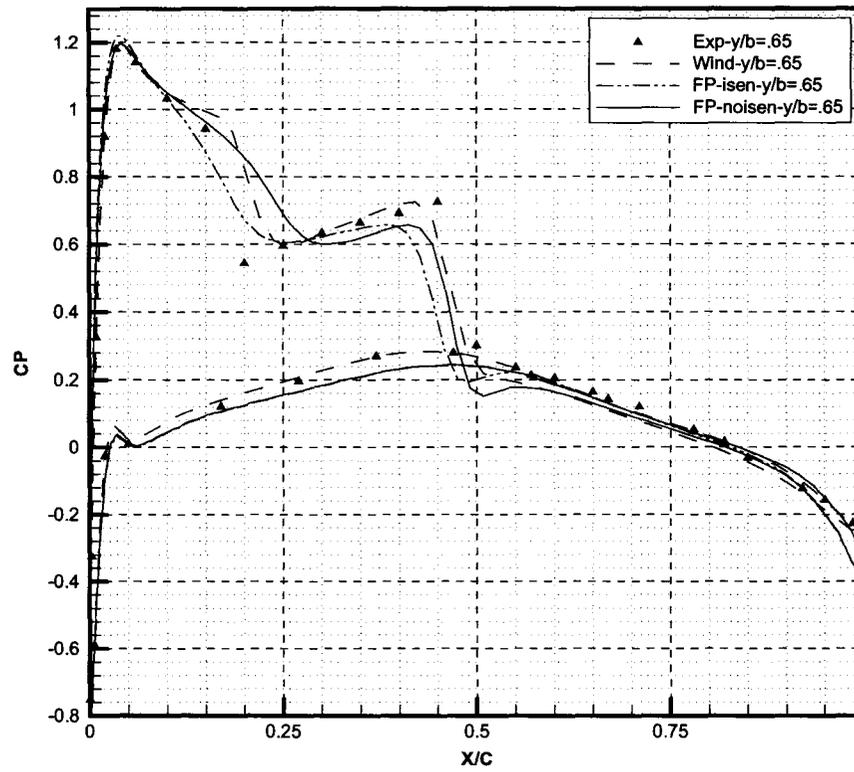
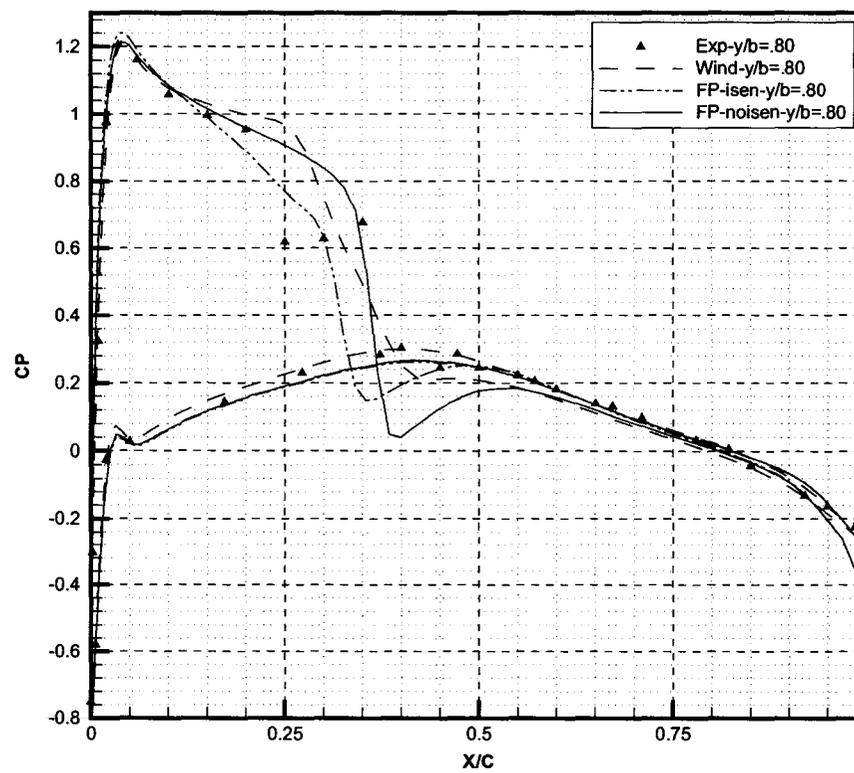


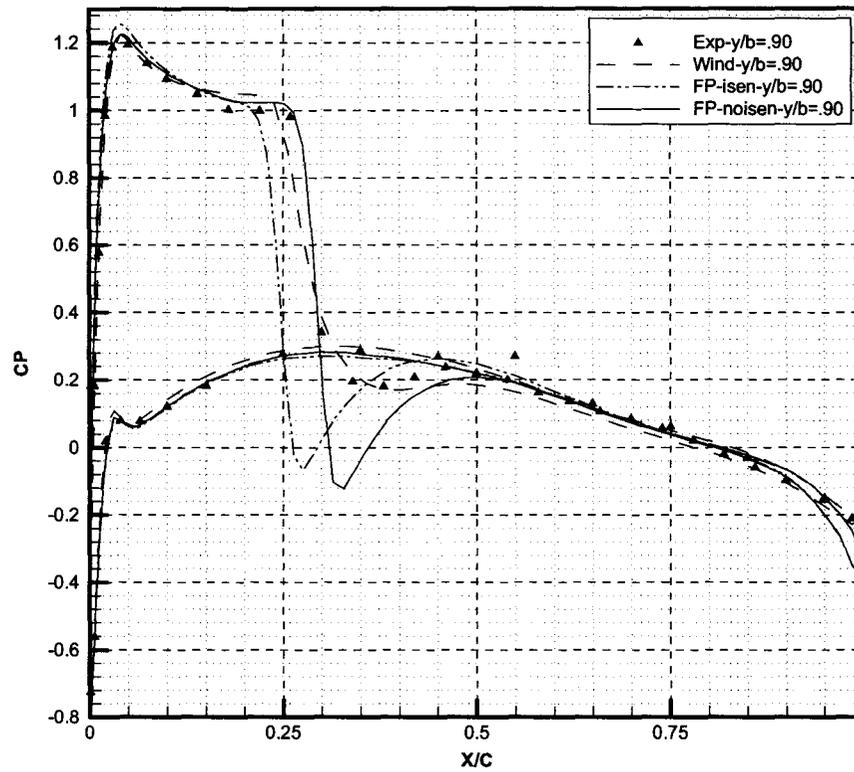
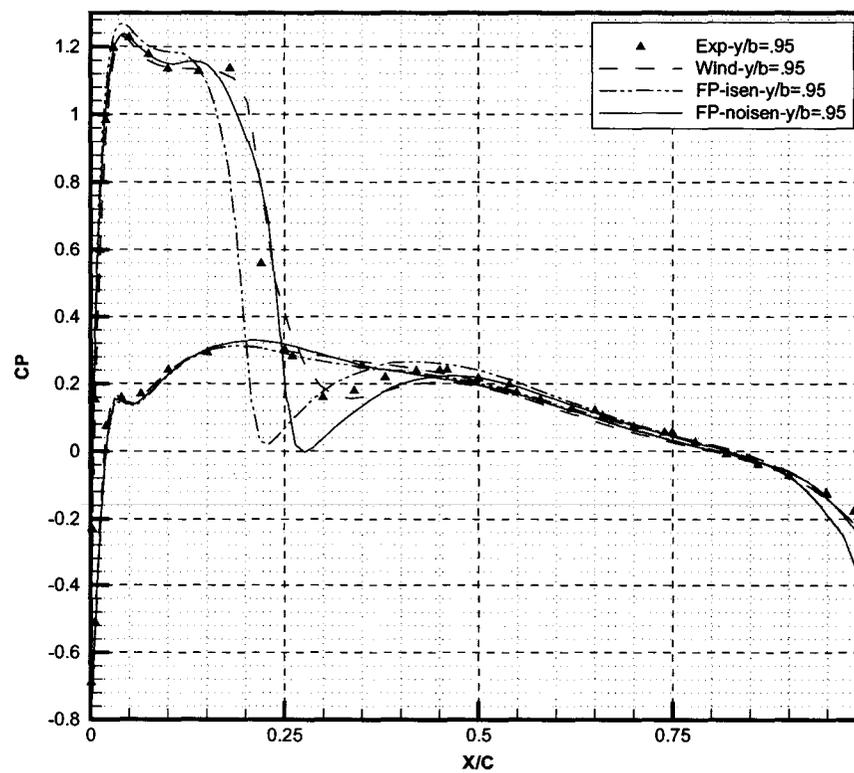
Figure 36 Coefficient de traînée aile Onera-M6

Pour valider quantitativement l'intensité et la position du choc, les coefficients de pression obtenus avec le maillage fin sont montrés aux figures 37 à 43. À titre de comparaison, les résultats expérimentaux ainsi que les résultats obtenus avec le code WIND [72] (Code Navier-Stokes et turbulence par Spalart-Allmaras) sont ajoutés à ces figures. De plus, les résultats obtenus par le code potentiel complet avec et sans correction isentropique sont comparés.

La position et l'intensité du choc obtenu avec le code non-isentropique sont nettement plus près des valeurs expérimentales. Ceci est particulièrement le cas dans la région près du saumon de l'aile. Nous pouvons constater une bonne correspondance entre les résultats du code WIND et ceux du code FP avec les corrections non-isentropique. À l'aval de l'onde de choc, on observe cependant que le coefficient de pression diverge des résultats obtenus par le code WIND pour revenir approximativement aux mêmes valeurs. Ceci est une caractéristique que l'on observe régulièrement pour les codes non-visqueux. En effet, l'onde de choc obtenue pour ces formulations (Euler et FP) est généralement de plus forte intensité et sa position est en général légèrement en aval par rapport aux résultats obtenus en visqueux.

Figure 37 Aile Onera-M6 à $y/b=0.20$ Figure 38 Aile Onera-M6 à $y/b=0.44$

Figure 39 Aile Onera-M6 à $y/b=0.65$ Figure 40 Aile Onera-M6 à $y/b=0.80$

Figure 41 Aile Onera-M6 à $y/b=0.90$ Figure 42 Aile Onera-M6 à $y/b=0.95$

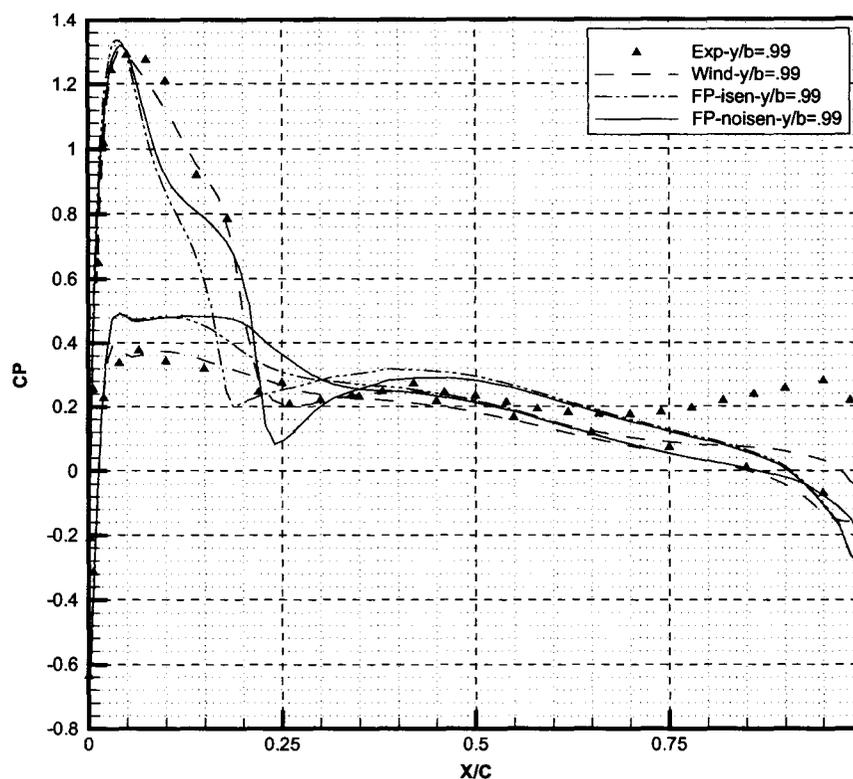


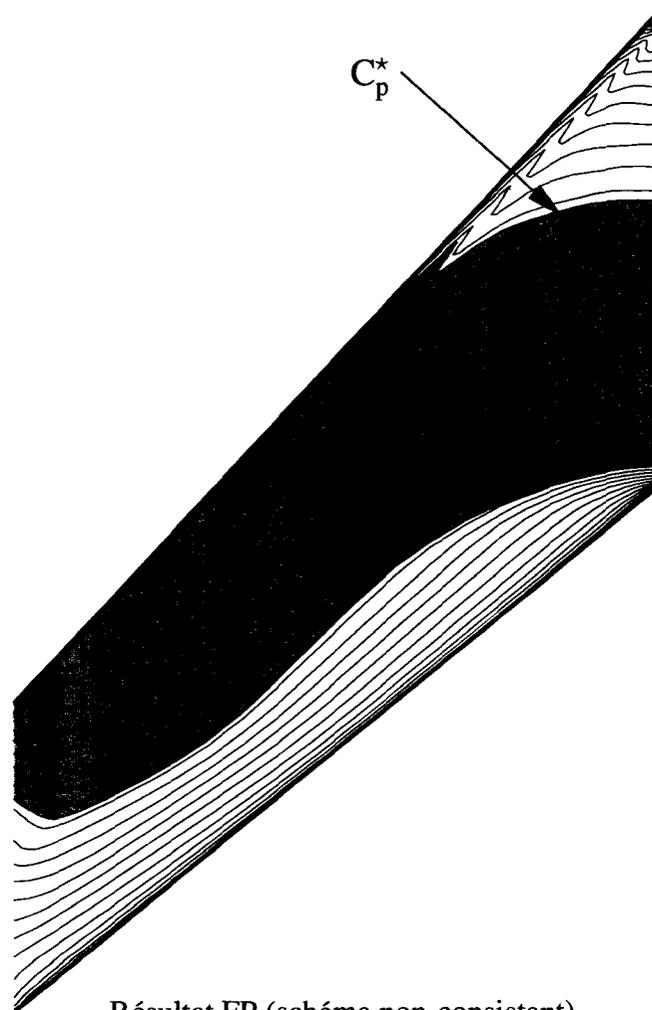
Figure 43 Aile Onera-M6 à $y/b=0.99$

5.1.2 Aile Agard 445.6

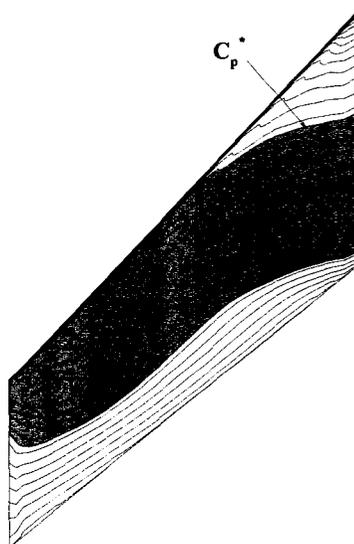
L'aile Agard 445.6 ne représente pas réellement de difficulté aérodynamique en régime permanent. Cependant, ce cas est très bien documenté pour une analyse aéroélastique. C'est pour cette raison qu'il reste un cas très important pour valider un code. Étant donné la minceur du profil aérodynamique, un faible choc à un nombre de Mach de 0.960 apparaît. Ce nombre de Mach représente aussi le point où on retrouve le «transonic dip».

Aux figures 44 et 45, nous comparons qualitativement les coefficients de pression obtenus avec le code FP avec les résultats obtenus dans [73]. À la figure 44, les résultats du code discrétisé sans tenir compte de la condition de consistance sont présentés (la densité, les métriques et les flux sont calculés au centre des cellules). Nous remarquons une onde de choc de forte intensité et les résultats sont comparables à ceux de la référence obtenus en Euler. À la figure 45, on présente les résultats du code respectant la condition de consis-

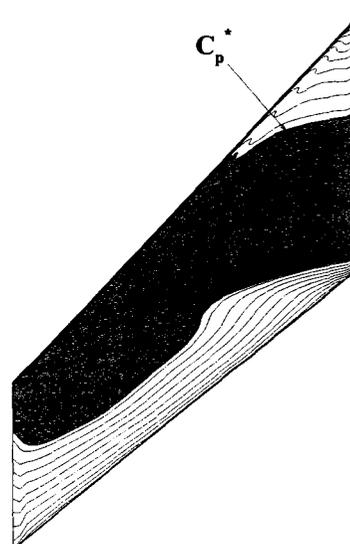
tance. On remarque un choc de plus faible intensité et ces résultats se rapprochent de ceux de la référence obtenus en Navier-Stokes. Le maillage utilisé pour ce calcul est composé de 211 950 noeuds disposés respectivement selon $157 \times 45 \times 30$. À noter que cette comparaison n'a pas été effectuée pour l'aile Onera-M6 puisque le code ne respectant pas la condition de consistance est incapable de converger suffisamment.



Résultat FP (schéma non-consistant)



Batina Lee-Raush - Navier-Stokes

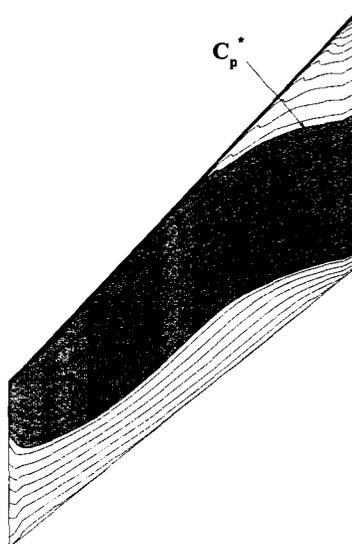


Batina Lee-Raush - Euler

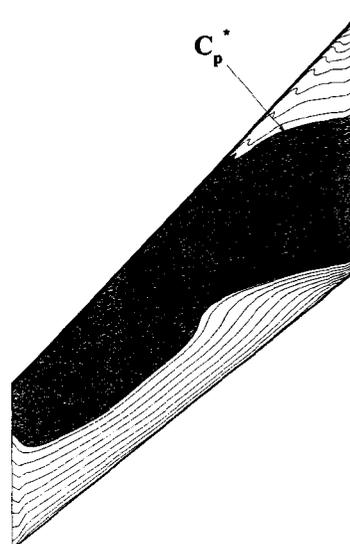
Figure 44 Aile Agard 445.6 à Mach 0.96



Résultat FP (schéma consistant)



Batina Lee-Raush - Navier-Stokes



Batina Lee-Raush - Euler

Figure 45 Aile Agard 445.6 à Mach 0.96

5.2 Résultats en régime transitoire

Le résultat obtenu précédemment est utilisé comme condition initiale à l'analyse en régime transitoire. La perturbation appliquée au point de stagnation au saumon de l'aile est définie à la figure 46. Selon l'amplitude désirée et le nombre de Mach de l'écoulement, les facteurs F_{max} et T_{max} seront définis pour chacun des résultats présentés.

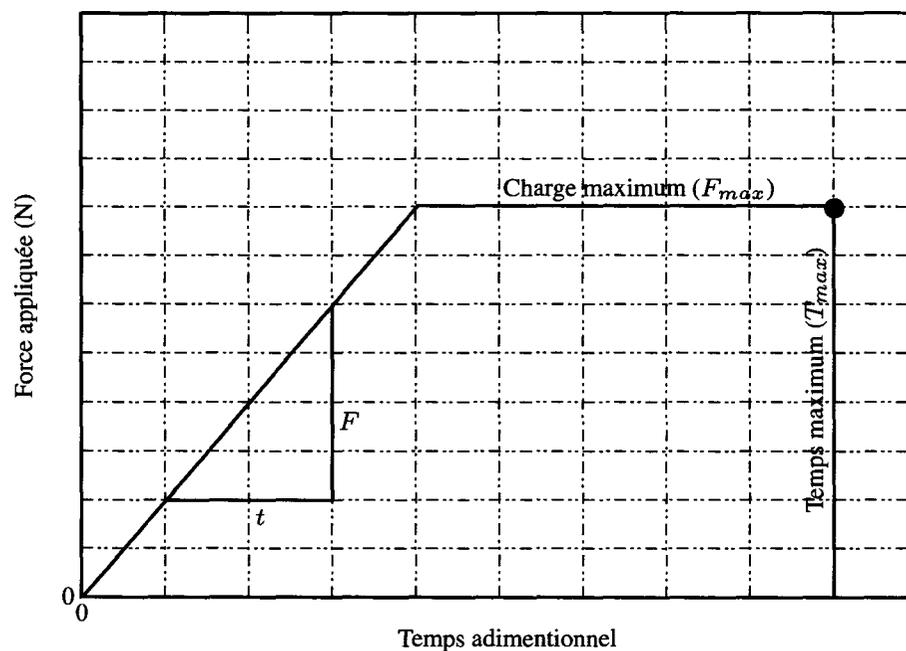


Figure 46 Perturbation appliquée

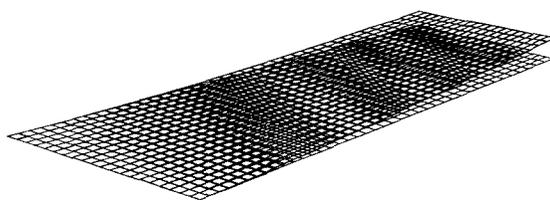
Dans cette section, nous allons présenter les résultats de l'analyse aéroélastique effectuée sur l'aile Agard 445.6. Les résultats expérimentaux obtenus pour cette aile proviennent de la référence [57]. Les points de flottement pour la structure affaiblie sont retranscrits au tableau I. De plus, les cinq premiers modes utilisés pour la superposition modale proviennent de cette même référence et sont exposés à la figure 47. Ces modes représentent la première flexion, la première torsion, la deuxième flexion, la deuxième torsion et la combinaison torsion/flexion de l'aile.

Tableau I

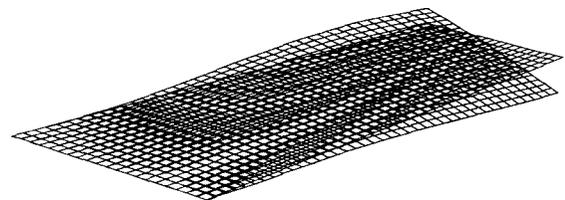
Indices de flottement expérimentaux de l'aile Agard 445.6

Mach	ρ_f (sl/ft ³)	μ_f (Hz)	V_f (ft/s)	q_f (psf)	IF ^a
0.499	.000830	33.465	565.8	133.1	.4459
0.678	.000404	68.753	759.1	115.7	.4174
0.901	.000193	143.92	973.4	89.3	.3700
0.960	.000123	225.82	1013.8	61.3	.3076

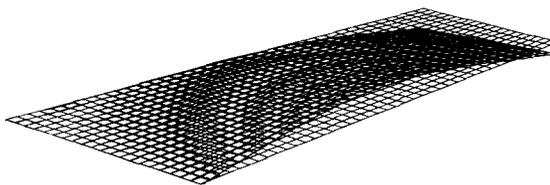
^aIF représente l'indice de flottement qui peut être calculé par $IF = \left(\frac{V_f}{219.32 \sqrt{\mu_f}} \right)$



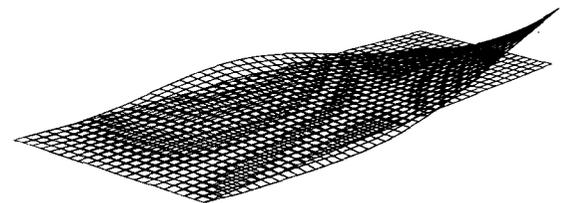
Mode 1 : Fréquence 9.5992 Hz



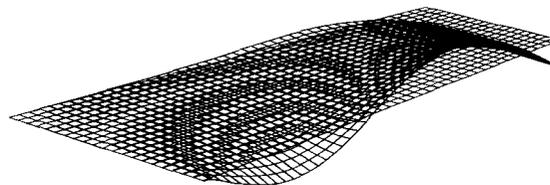
Mode 2 : Fréquence 38.1650 Hz



Mode 3 : Fréquence 48.3482 Hz



Mode 4 : Fréquence 91.5448 Hz



Mode 5 : Fréquence 118.1132 Hz

Figure 47 Modes de déformation de l'aile Agard 445.6

Dans un premier temps, nous allons faire une comparaison entre les algorithmes de couplage CSS et ISS. Dans un deuxième temps, nous allons démontrer l'importance de la discrétisation consistante et l'effet de celle-ci sur les résultats aéroélastiques. Et dans un troisième temps, nous allons vérifier si l'utilisation des cinq premiers modes est suffisante pour d'obtenir une solution fidèle aux résultats expérimentaux. Finalement, la robustesse

du code est démontrée pour une analyse aéroélastique en ayant un mouvement de grande amplitude.

5.3 Comparaison des méthodes de couplage

5.3.1 Algorithme CSS

Tel que spécifié à la section 4.4.1 (page 87) l'algorithme CSS ne conserve pas l'énergie à l'interface fluide-structure. Nous présentons aux figures 48 et 49 la différence des déplacements généralisés pour un cas subsonique et un cas transsonique dans le cas où l'algorithme CSS est itéré une fois pour reproduire un algorithme prédicteur-correcteur et dans le cas où l'algorithme n'est pas itéré. Ces résultats sont en fait la comparaison du déplacement généralisé pour l'indice de flottement obtenu avec l'algorithme prédicteur-correcteur. De plus, la perturbation appliquée est $F = t$, $F_{max} = 2$ et $t_{max} = 5$. Le pas de temps adimensionnel pour le cas subsonique est de $\Delta t_F = 0.1$ ce qui correspond à un pas de temps dimensionnel de $\Delta t_S = 3.21 \times 10^{-4}$. Pour le cas transsonique $\Delta t_F = 0.1$ et $\Delta t_S = 1.86 \times 10^{-4}$. Par la suite, tous les résultats présentés ont un pas de temps adimensionnel de $\Delta t_F = 0.1$ et Δt_S est donné par :

$$\Delta t_S = \frac{\Delta t_F L_r}{\sqrt{\frac{2q}{\rho}}} \quad (5.1)$$

où L_r est la longueur de référence, q la pression dynamique et ρ la densité du fluide. Dans le cas subsonique, nous avons observé que l'effet de l'itération est négligeable puisque le système peut être considéré linéaire alors que pour le cas transsonique, les non-linéarités ont un effet considérable. Ceci n'est pas nécessairement visible sur les figures puisqu'une petite différence de l'indice de flottement pour un cas subsonique fait varier rapidement le déplacement généralisé, ce qui n'est pas le cas en transsonique. Par contre, si on compare l'indice de flottement obtenu, on peut remarquer en subsonique que celui-ci est similaire

pour les deux méthodes puisque l'écart relatif entre les indices de flottement est de 1.2%. Par contre en transsonique, cet écart est de 6.5%. Ceci confirme la nécessité d'itérer pour capter les non-linéarités. Si on compare les pressions dynamiques ces écarts sont doublés. Nous pouvons donc conclure que la méthode de couplage CSS doit être itérée afin d'avoir un résultat précis.

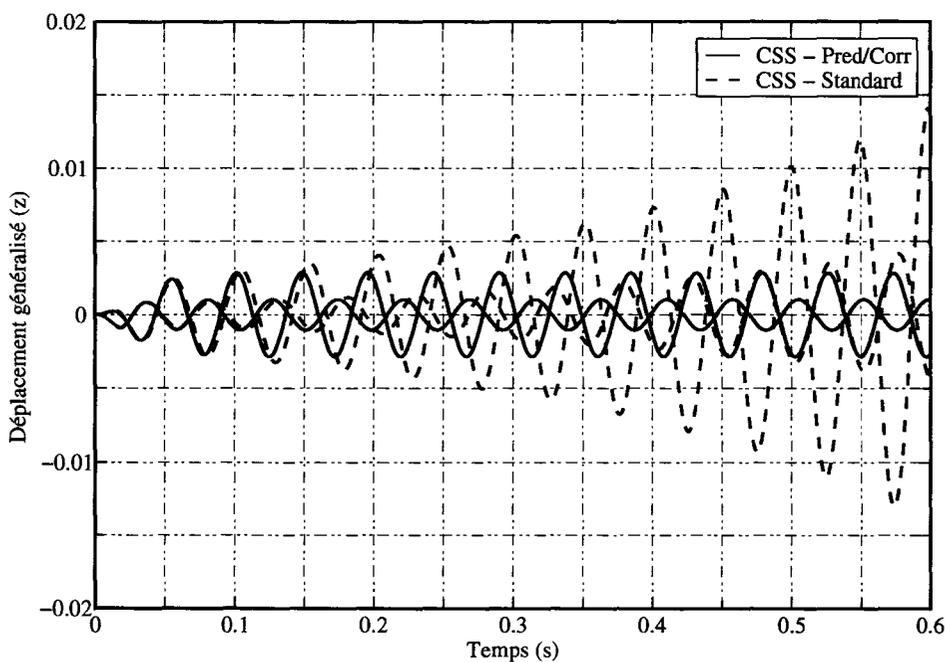


Figure 48 Comparaison algorithme CSS à Mach 0.499 et $P=135$ psf pour les 2 premiers modes

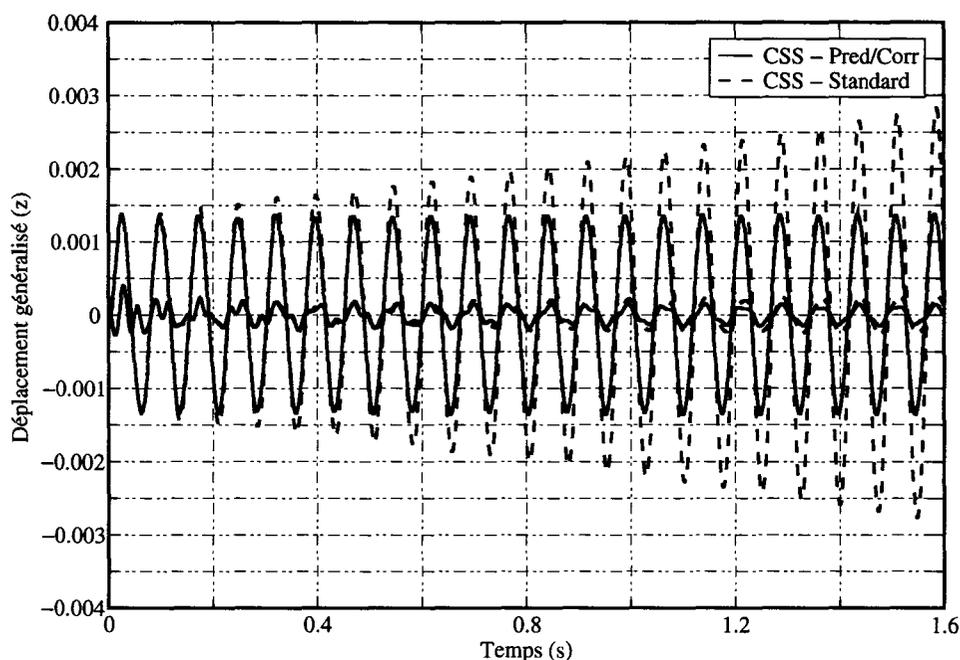


Figure 49 Comparaison algorithme CSS à Mach 0.960 et P=60 psf pour les 2 premiers modes

5.3.2 Comparaison entre ISS et CSS

Les indices de flottement obtenus avec le couplage ISS et le couplage CSS prédicteur-correcteur sont similaires (tableau II). Nous observons un écart maximal de 1.24%, ce qui nous permet d'affirmer qu'au niveau du résultat, les deux méthodes sont pratiquement équivalentes. Par contre, la différence notable est observable sur le temps de calcul (tableau III). En effet, on obtient un ratio moyen de 1.75 fois le temps de calcul de la méthode ISS pour trouver la solution avec la méthode CSS. La méthode ISS doit donc être privilégiée afin d'effectuer un calcul aéroélastique de façon efficace. Tous les résultats sont obtenus avec 12 processeurs AMD 248 sur un réseau Infiniband et un maillage de 211 950 noeuds répartis respectivement selon $157 \times 45 \times 30$.

5.4 Effet de la discrétisation

À la figure 50, nous comparons les résultats obtenus avec une discrétisation qui ne tient pas compte des conditions de consistance (la densité, les métriques et les flux sont calculés

Tableau II

Comparaison des résultats entre les couplages ISS et CSS

Nombre de Mach	Pressions dynamiques			Indice de flottement		
	CSS	ISS	Écart	CSS	ISS	Écart
0.499	135.000	135.317	0.23%	0.4495	0.4501	0.12%
0.678	121.709	122.861	0.94%	0.4268	0.4289	0.47%
0.901	85.680	87.840	2.46%	0.3581	0.3626	1.24%
0.960	59.760	60.624	1.43%	0.2991	0.3013	0.72%

Tableau III

Comparaison du temps de calcul entre les couplages ISS et CSS

Nombre de Mach	Nombre de pas de temps	Temps de calcul CSS	Temps de calcul ISS	Ratio CSS/ISS
0.499	2000	0:35:01.4	0:19:26.4	1.80
0.678	3000	0:50:24.2	0:27:32.1	1.83
0.901	6000	1:42:27.3	1:00:52.4	1.68
0.960	10000	2:58:50.4	1:45:12.4	1.70

au centre des cellules) avec ceux obtenus pour une discrétisation consistante. Nous pouvons observer que la présence de puits a potentiellement affecté le résultat puisque pour la pression de flottement, la discrétisation non consistante donne un résultat divergent alors qu'il devrait être neutre. Le respect des trois conditions de consistance est donc une condition essentielle à l'obtention d'une solution précise. De plus, nous confirmons que malgré la violation de la GCL, le respect des conditions de consistance ainsi que l'utilisation d'un pas de temps fluide relativement petit ($\Delta t = 0.1$) donne un résultat en accord avec les valeurs expérimentales.

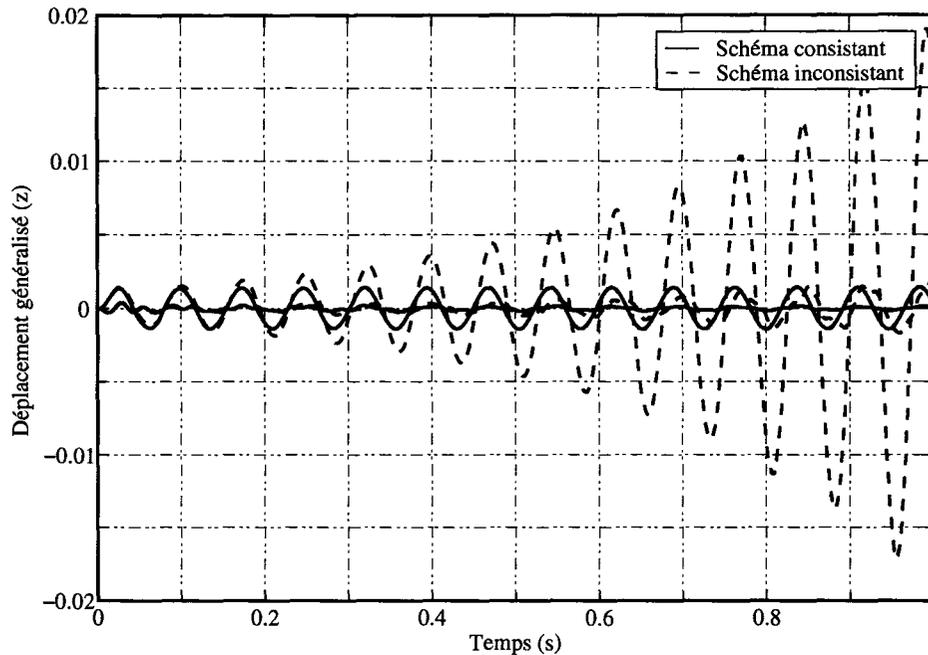


Figure 50 Comparaison entre la discrétisation consistante et non-consistante Mach 0.960 et $P=60.6$ psf pour les 2 premiers modes

5.5 Résolution structurale

Le nombre de modes propres fondamentaux devant être utilisés afin de trouver la réponse dynamique de la structure est un paramètre difficile à déterminer. Afin de vérifier si l'utilisation des cinq premiers modes est suffisante pour trouver la réponse dynamique de l'aile Agard 445.6, nous comparons aux figures 51 et 52 les déplacements généralisés obtenus pour l'utilisation de un à cinq modes pour un cas subsonique et un cas transsonique.

À Mach 0.499, nous constatons que lorsque quatre et cinq modes sont utilisés, le résultat est pratiquement identique. Ceci nous permet de conclure que pour ce cas, l'utilisation de quatre modes est suffisante. Pour un nombre de Mach de 0.960, on peut observer que les déplacements obtenus pour trois, quatre et cinq modes sont presque égaux. Avec trois modes, la solution est légèrement amortie. La solution avec quatre modes est en flottement pour la même pression que la solution avec cinq modes. On peut alors conclure que l'utilisation de quatre modes est suffisante pour représenter la réponse dynamique de l'aile Agard 445.6.

Nous pouvons conclure que pour l'aile Agard 445.6, les modes à fréquences élevées ont une influence plus importante sur les cas subsoniques que sur les cas transsoniques. Ceci peut être expliqué par le fait que la réponse dynamique en subsonique a une fréquence plus élevée qu'en transsonique. Donc le calcul des modes structuraux doit être en mesure d'obtenir une bonne précision pour les modes ayant des fréquences relativement élevées même si de façon générale, le flottement est causé par l'interaction du premier mode de torsion et du premier mode de flexion.

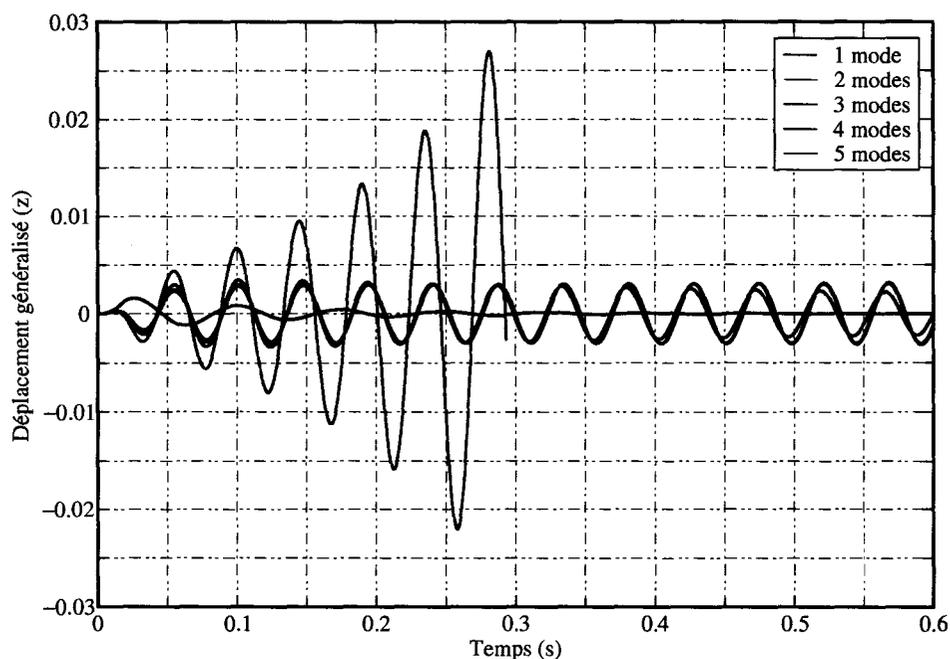


Figure 51 Comparaison entre la résolution modale à Mach 0.499 et P=135.3 psf pour le premier mode

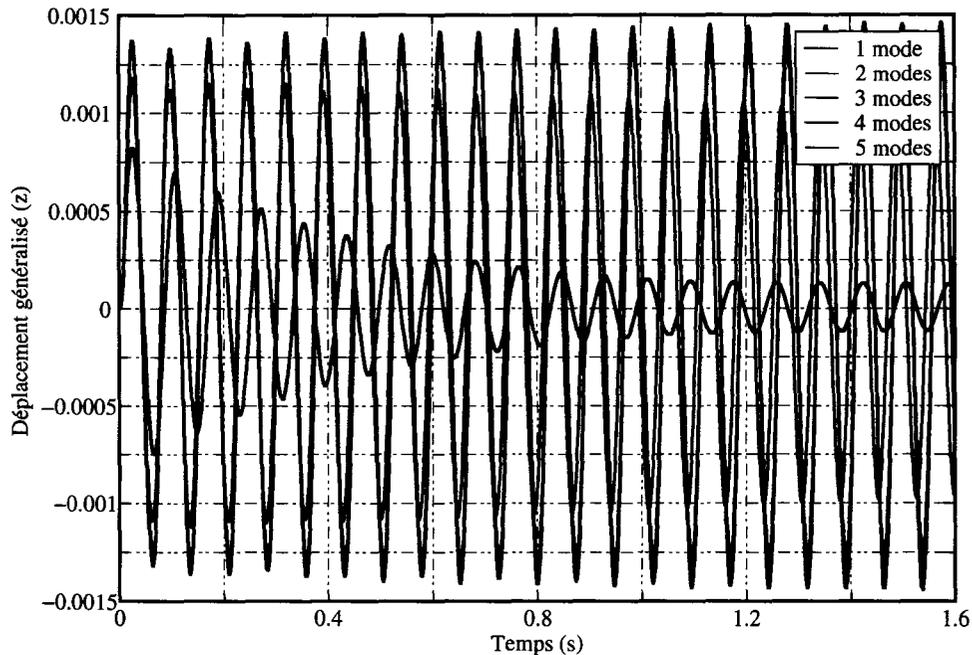


Figure 52 Comparaison entre la résolution modale à Mach 0.960 et $P=60.6$ psf pour le premier mode

5.6 Robustesse du code

L'amplitude des déplacements montrés jusqu'à maintenant est relativement faible. Bien que celle-ci soit suffisante pour trouver l'indice de flottement, nous démontrons dans cette section que le code est suffisamment stable pour converger dans le cas où l'amplitude du déplacement est cinq à dix fois plus grande. Pour un nombre de Mach de 0.499 (figures 53 à 55), la perturbation appliquée est de $F = 5t$, $F_{max} = 5$ et $t_{max} = 5$ alors que pour un nombre de Mach de 0.960 (figures 56 à 58), la perturbation appliquée est de $F = 25t$, $F_{max} = 25$ et $t_{max} = 5$. Ceci donne une force de portance d'environ 10 livres lorsque l'aile est au point maximum du déplacement généralisé. L'accélération généralisée est aussi montrée puisqu'elle limite l'amplitude de déformation maximale applicable pour que le calcul converge suffisamment. De plus, deux ou trois itérations de Newton sur le fluide doivent être effectuées pour améliorer la convergence.

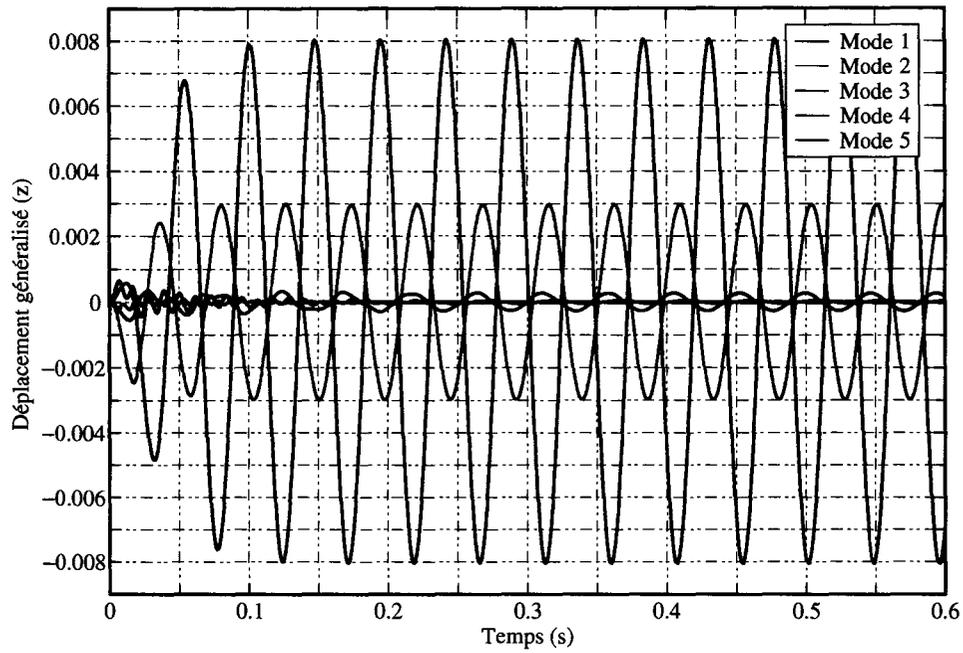


Figure 53 Déplacement généralisé pour une vitesse de Mach 0.499

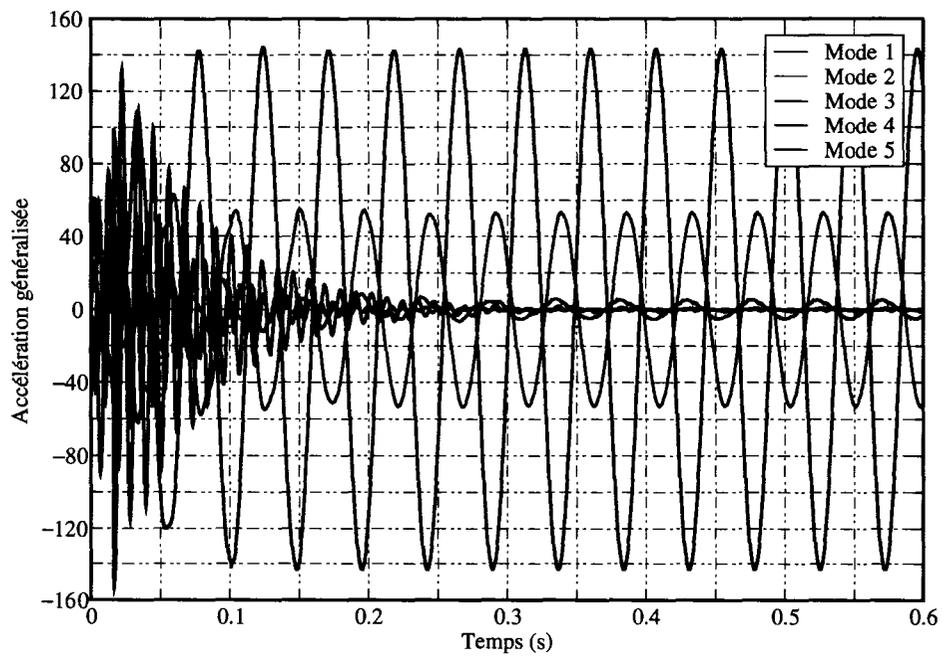


Figure 54 Accélération généralisée pour une vitesse de Mach 0.499

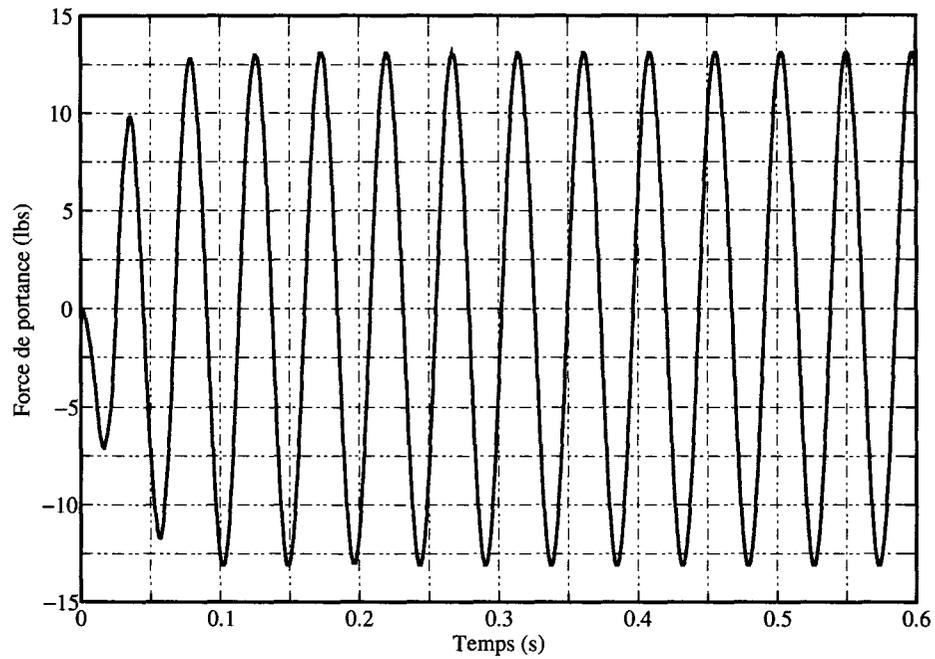


Figure 55 Force de portance pour une vitesse de Mach 0.499

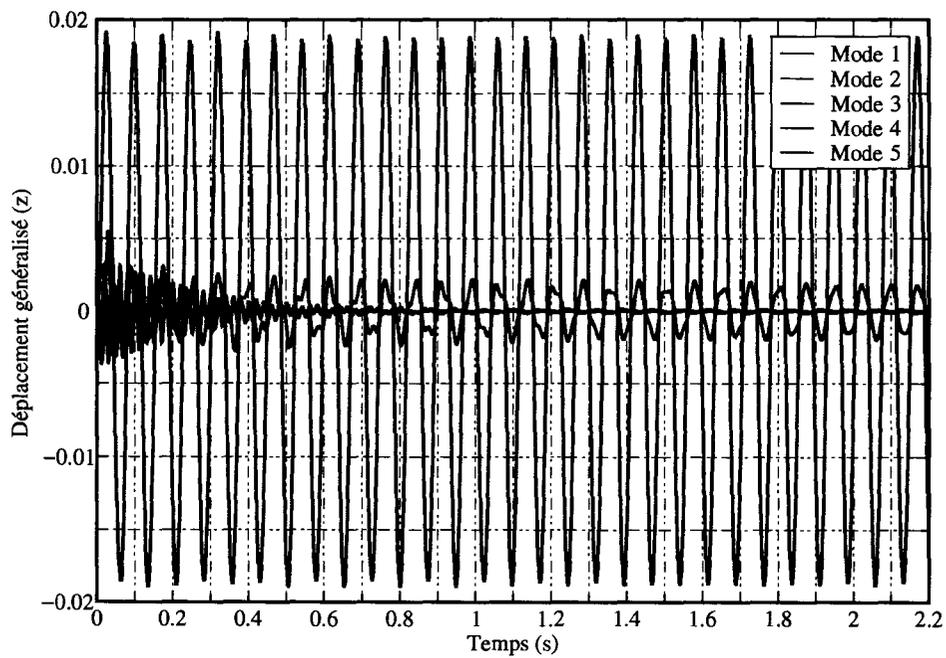


Figure 56 Déplacement généralisé pour une vitesse de Mach 0.960

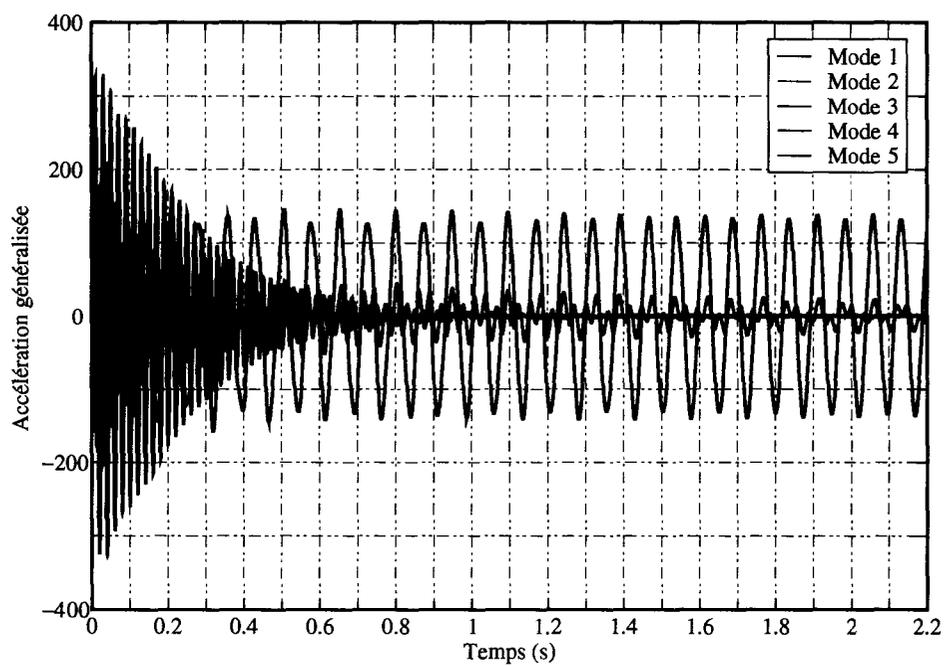


Figure 57 Accélération généralisée pour une vitesse de Mach 0.960

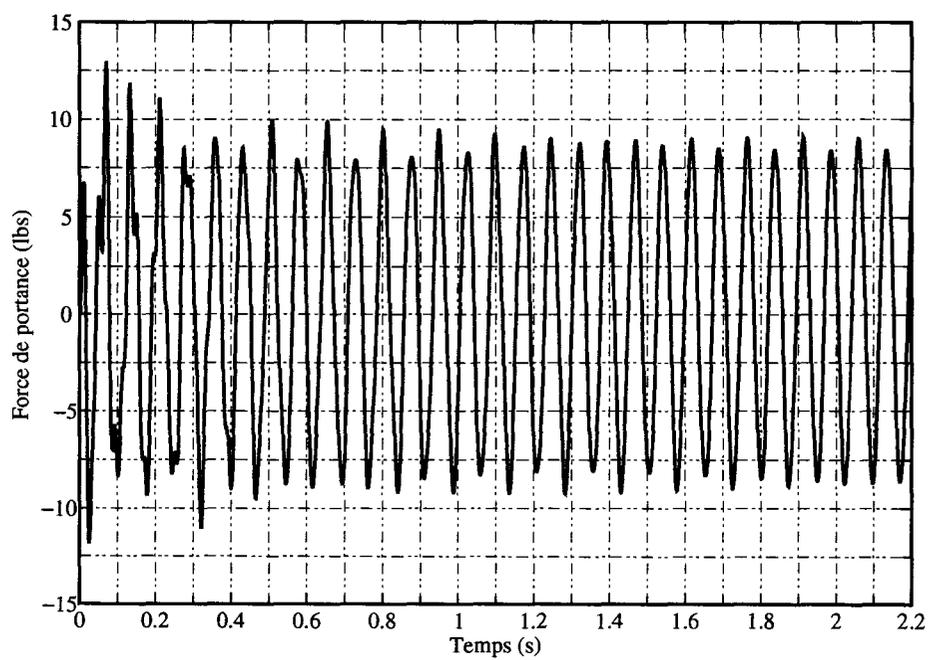


Figure 58 Force de portance pour une vitesse de Mach 0.960

5.7 Courbe d'indices de flottement

Les indices de flottement calculés avec le code FP (figure 59) sont comparés avec les résultats obtenus par [73, 74, 63]. En subsonique, les indices de flottement sont légèrement surestimés alors qu'en transsonique, on constate l'inverse. Les résultats obtenus par [73, 63] ont une tendance similaire en supersonique. Par contre, les résultats subsoniques pour ces mêmes références sont légèrement plus près des valeurs expérimentales que ceux obtenus avec le code FP. Ces résultats sont obtenus avec l'algorithme de couplage ISS.

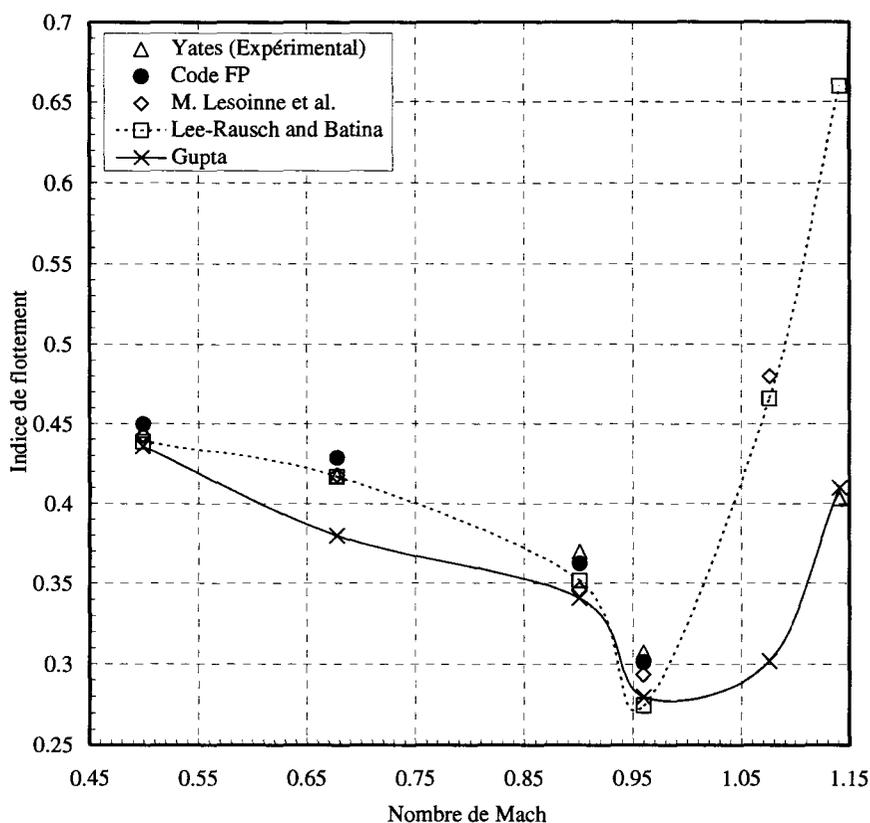


Figure 59 Indice de flottement de l'aile Agard 445.6

5.8 Performance du calcul distribué

Plusieurs tests de performance ont été réalisés afin de mettre en évidence l'importance du parallélisme pour un calcul aéroélastique. De plus, ces tests permettent d'évaluer le «speedup» et l'efficacité du code pour un nombre de processeurs donnés. On peut calculer le «speedup» par :

$$\text{speedup} = \frac{T_{\text{séquentiel}}}{T_{\text{réel}}} \quad (5.2)$$

et l'efficacité par :

$$\text{efficacité} = \frac{\text{speedup}}{N_{\text{processeurs}}} \quad (5.3)$$

Tel que mentionné à la section 3.10.2 (page 73), ces paramètres dépendent du nombre de noeuds dans la direction ξ (n_x). Nous donnons donc aux figures 60 à 62 les résultats pour un maillage de taille moyenne de 223882 noeuds avec $n_x=157$ et aux figures 63 à 65 les résultats pour un maillage fin de 685162 noeuds avec $n_x=257$. Ces résultats sont obtenus avec l'algorithme de couplage ISS pour 2000 pas de temps.

Nous pouvons observer que le temps de calcul pour un maillage de taille moyenne est réduit à 12 minutes lorsque 28 processeurs sont utilisés. Calculer la réponse dynamique d'une aile en 12 minutes, lors de la phase de conception, rend possible l'optimisation de plusieurs paramètres associés à la structure ou encore à la géométrie de l'aile. Cependant, nous observons que l'efficacité pour l'utilisation de 28 processeurs n'est que de 47%. Puisque la taille du problème est petite, ce pourcentage d'efficacité est normal. De plus, on observe que l'efficacité est environ 6% inférieure à l'efficacité prévue. Pour cette taille de problème, un nombre de 8 processeurs serait optimal pour un pourcentage d'efficacité de près de 78%.

Pour un maillage fin, la réponse dynamique est obtenue en 40 minutes lorsque le calcul est distribué sur 24 processeurs. Nous observons que jusqu'à ce nombre de processeurs, l'efficacité est supérieure à celle prévue par l'équation 3.89. De plus, pour cette taille

de problème, l'utilisation de 16 processeurs donne une efficacité supérieure à 80%, ce qui est acceptable. On peut aussi constater que l'efficacité est supérieure à 100% jusqu'à 4 processeurs. Ceci peut, entre autre, être expliqué par un meilleur conditionnement du système matriciel suite au partitionnement du domaine en plusieurs sous-domaines.

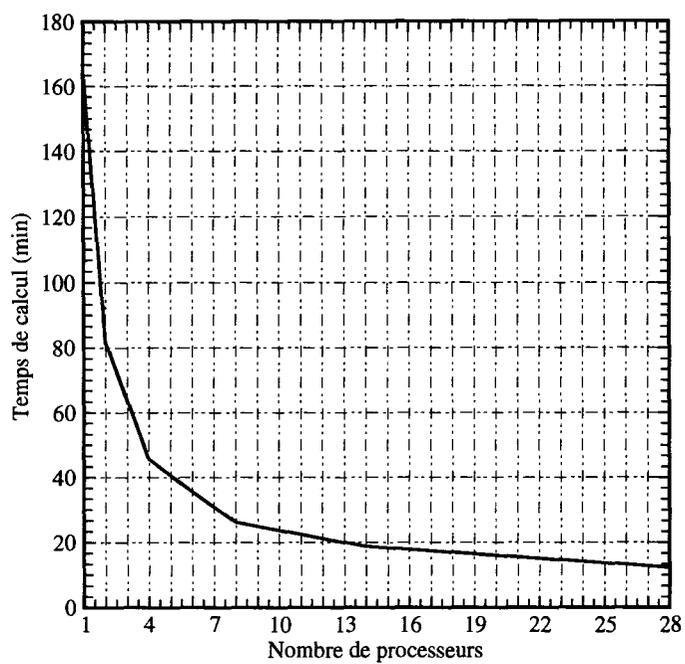


Figure 60 Temps de calcul pour le maillage moyen

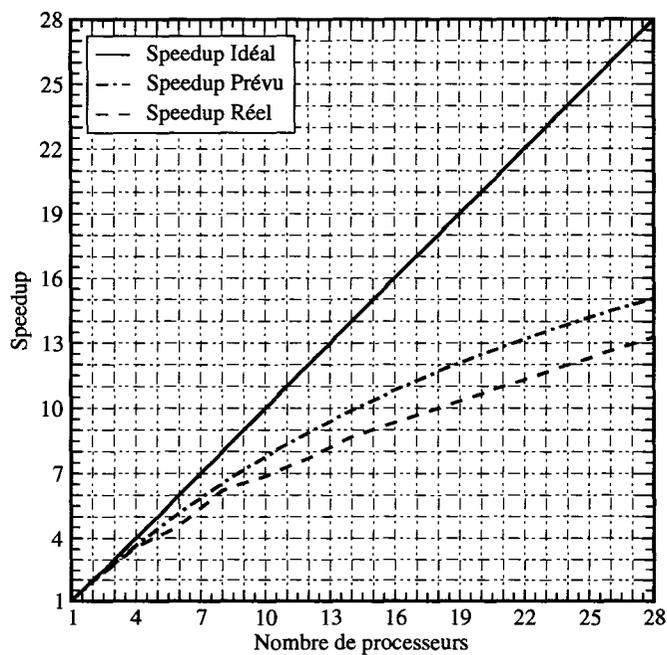


Figure 61 «Speedup» pour le maillage moyen

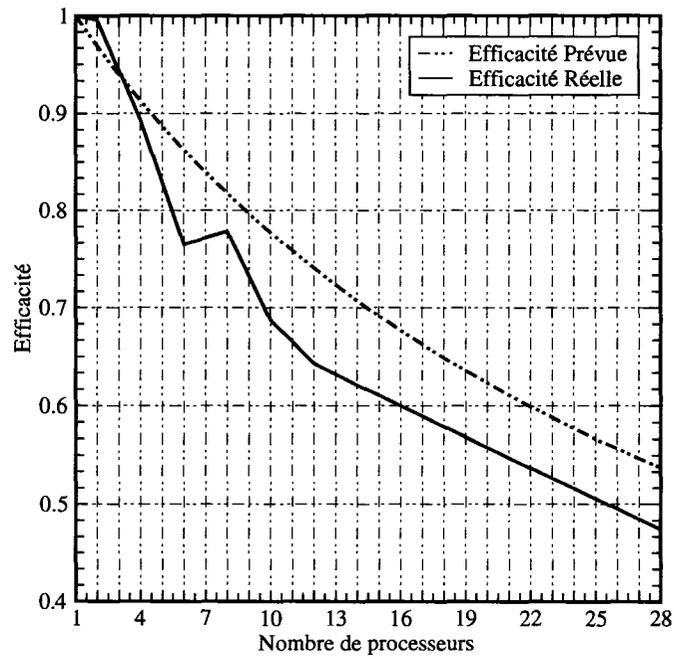


Figure 62 Efficacité pour le maillage moyen

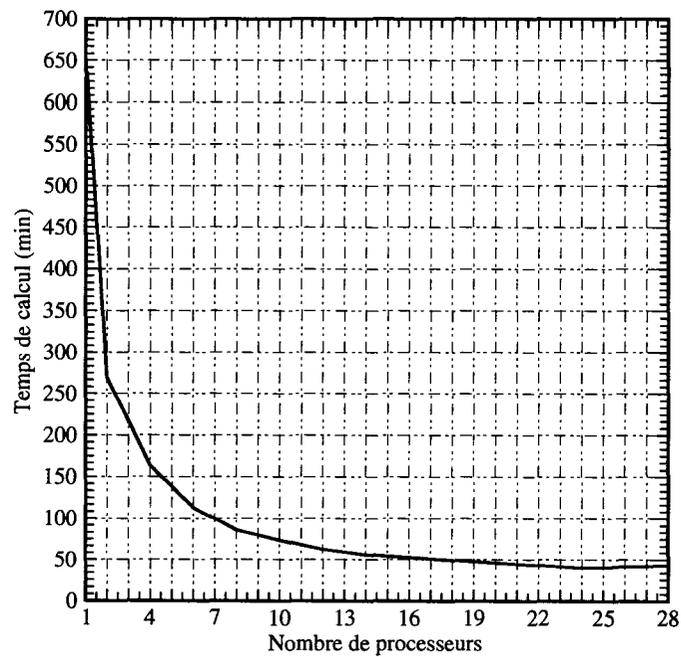


Figure 63 Temps de calcul pour le maillage fin

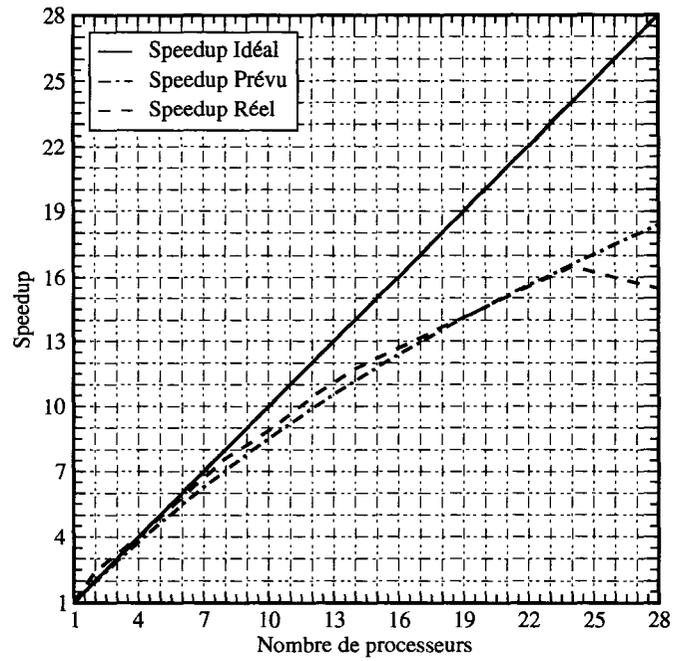


Figure 64 «Speedup» pour le maillage fin

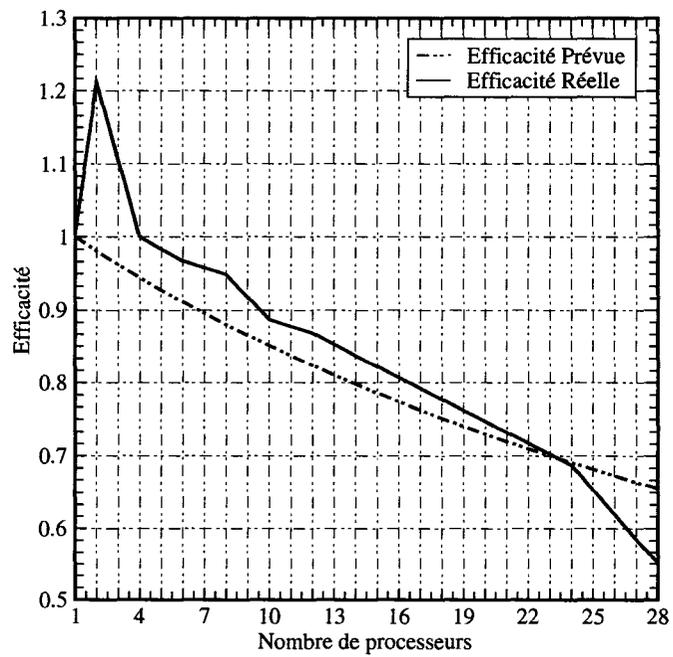


Figure 65 Efficacité pour le maillage fin

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était le développement d'un outil de calcul capable de trouver la réponse aéroélastique d'une aile dans un délai assez court pour être en mesure d'optimiser sa structure ou sa géométrie. Puisqu'un code aéroélastique en potentiel complet est environ un ordre de grandeur plus rapide qu'un code en Euler, cette approche a été privilégiée. Un code aéroélastique utilisant l'équation du potentiel complet discrétisée en différences finies a donc été développé.

Pour le solveur fluide, nous avons remarqué que la consistance de la discrétisation spatiale était un facteur déterminant pour obtenir une solution précise et pour garantir la stabilité du code. De plus, nous avons remarqué que la convergence d'une résolution par triple factorisations des matrices tridiagonales du Jacobien était insuffisante pour résoudre un problème aéroélastique. Un solveur GMRES préconditionné par une factorisation incomplète de la matrice Jacobienne a donc été implémenté.

Nous avons effectué la résolution structurale par une superposition modale. Ces modes ont préalablement été calculés dans un logiciel d'éléments finis commercial. Nous avons montré que l'utilisation des quatre ou cinq premiers modes est suffisante pour représenter la réponse dynamique de l'aile AGARD 445.6. Les algorithmes de couplage CSS (Conventional Serial Staggered) et ISS (Improved Serial Staggered) ont été comparés. L'algorithme CSS doit être itéré afin de bien représenter les non-linéarités lorsque l'écoulement est transsonique. L'algorithme ISS est basé sur un schéma saute-mouton («leap-frog») où le domaine fluide est calculé aux pas de temps intermédiaires et le domaine structure aux pas de temps complets. Les données transmises bidirectionnellement entre le fluide et la structure sont prédites en fonction de l'historique des pas de temps précédents. Bien que les résultats du couplage CSS avec un prédicteur-correcteur et les résultats du couplage ISS sont pratiquement identiques, le temps de calcul de la méthode CSS fut approxima-

tivement 1.75 fois plus important. C'est pour cette raison que l'algorithme ISS doit être privilégié.

Une méthode algébrique est plus efficace en temps de calcul pour régénérer un maillage structuré. Donc, une des méthodes algébriques les plus utilisées, l'interpolation transfinie (TFI), a été implémentée. L'utilisation de quaternions dans la couche près de l'aile nous a permis de conserver l'orthogonalité du maillage.

Le code a été parallélisé afin de réduire le temps de calcul à son minimum. Pour éviter la communication du nouveau maillage à chaque pas de temps et puisque la résolution structurale est très rapide, chacun des sous-domaines calcule le fluide et le maillage à chaque pas de temps. Le sous-domaine principal doit en plus effectuer le calcul structural. Le code est en mesure d'effectuer 10000 pas de temps par heure en distribuant le calcul sur 24 processeurs pour un maillage d'environ 225000 noeuds. Étant donné le chevauchement des domaines, l'efficacité du parallélisme dépend de la taille du problème. Pour un problème de taille moyenne, l'efficacité reste supérieure à 80% jusqu'à 8 processeurs alors que pour un problème de grande taille, l'efficacité reste supérieure à 80% jusqu'à 16 processeurs.

Les indices de flottement calculés sur l'aile AGARD 445.6 sont très proches des valeurs expérimentales, ce qui nous permet de conclure que le présent code est très rapide, robuste et assez précis pour atteindre l'objectif de ce travail.

Contribution: La principale contribution de ce mémoire est le développement d'un code aéroélastique parallèle utilisant la méthode du potentiel complet ayant des performances en temps de calcul remarquables. D'après notre connaissance, ce code est parmi les seuls pouvant calculer la réponse aéroélastique d'une aile avec le couplage d'un code CFD utilisant l'équation du potentiel complet et d'un code CSD.

Développements: Les principaux développements qui pourraient être apportés au code sont :

- L'implémentation d'une des méthodes proposées pour respecter la forme discrète de la GCL afin de permettre des pas de temps plus grands ;
- L'amélioration du parallélisme en optimisant les communications et en diminuant le chevauchement entre les sous-domaines ;
- L'ajout d'un module d'optimisation afin de modifier les paramètres structuraux d'une aile en fonction de sa réponse dynamique ;
- L'intégration du fuselage de l'avion afin d'ajouter l'interaction aile/fuselage.

ANNEXE I

Condition de consistance 1

On définit :

$$a_{11} := \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$$

$$a_{12} := \xi_x \cdot \eta_x + \xi_y \cdot \eta_y + \xi_z \cdot \eta_z$$

$$a_{13} := \xi_x \cdot \zeta_x + \xi_y \cdot \zeta_y + \xi_z \cdot \zeta_z$$

$$a_{22} := \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2$$

$$a_{23} := \zeta_x \cdot \eta_x + \zeta_y \cdot \eta_y + \zeta_z \cdot \eta_z$$

$$a_{33} := \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2$$

$$J := (x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi))^{-1}$$

On définit ξ_x par :

$$\xi_x := (J) \cdot (y_\eta \cdot z_\zeta - z_\eta \cdot y_\zeta)$$

$$\xi_x := \frac{y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ξ_y par :

$$\xi_y := (J) \cdot (-x_\eta \cdot z_\zeta + x_\zeta \cdot z_\eta)$$

$$\xi_y := \frac{-x_\eta z_\zeta + x_\zeta z_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ξ_z par :

$$\xi_z := (J) \cdot (x_\eta \cdot y_\zeta - x_\zeta \cdot y_\eta)$$

$$\xi_z := \frac{x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_x par :

$$\eta_x := (J) \cdot (z_\xi \cdot y_\zeta - y_\xi \cdot z_\zeta)$$

$$\eta_x := \frac{y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_y par :

$$\eta_y := (J) \cdot (-z_\xi \cdot x_\zeta + x_\xi \cdot z_\zeta)$$

$$\eta_y := \frac{-z_\xi x_\zeta + x_\xi z_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_z par :

$$\eta_z := (J) \cdot (y_\xi \cdot x_\zeta - x_\xi \cdot y_\zeta)$$

$$\eta_z := \frac{y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_x par :

$$\zeta_x := (J) \cdot (-z_\xi \cdot y_\eta + y_\xi \cdot z_\eta)$$

$$\zeta_x := \frac{y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_y par :

$$\zeta_y := (J) \cdot (z_\xi \cdot x_\eta - x_\xi \cdot z_\eta)$$

$$\zeta_y := \frac{z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_z par :

$$\zeta_z := (J) \cdot (-y_\xi \cdot x_\eta + x_\xi \cdot y_\eta)$$

$$\zeta_z := \frac{-y_\xi x_\eta + x_\xi y_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On discrétise les termes :

$$x_\xi := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i+1,j,k} - x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$x_\eta := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i,j+1,k} - x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$x_\zeta := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i,j,k+1} - x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k} - x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$y_\xi := \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k} + y_{i+1,j,k+1} + y_{i+1,j,k} - y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}}{4}$$

$$\begin{aligned}
y_\eta &:= \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k} + y_{i,j+1,k+1} + y_{i,j+1,k} - y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}}{4} \\
y_\zeta &:= \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j,k+1} + y_{i,j+1,k+1} + y_{i,j,k+1} - y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k} - y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}}{4} \\
z_\xi &:= \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j,k+1} + z_{i+1,j,k} - z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}}{4} \\
z_\eta &:= \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i,j+1,k+1} + z_{i,j+1,k} - z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}}{4} \\
z_\zeta &:= \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j,k+1} + z_{i,j+1,k+1} + z_{i,j,k+1} - z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k} - z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}}{4} \\
\phi_\xi &:= \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j+1,k+1} - \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{4} \\
\phi_\eta &:= \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i,j+1,k+1} + \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i+1,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{4} \\
\phi_\zeta &:= \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i,j+1,k+1} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{4}
\end{aligned}$$

$$\phi_{i+1,j+1,k+1} := u_\infty \cdot x_{i+1,j+1,k+1} + v_\infty \cdot y_{i+1,j+1,k+1} + w_\infty \cdot z_{i+1,j+1,k+1}$$

$$\phi_{i+1,j,k+1} := u_\infty \cdot x_{i+1,j,k+1} + v_\infty \cdot y_{i+1,j,k+1} + w_\infty \cdot z_{i+1,j,k+1}$$

$$\phi_{i+1,j,k} := u_\infty \cdot x_{i+1,j,k} + v_\infty \cdot y_{i+1,j,k} + w_\infty \cdot z_{i+1,j,k}$$

$$\phi_{i+1,j+1,k} := u_\infty \cdot x_{i+1,j+1,k} + v_\infty \cdot y_{i+1,j+1,k} + w_\infty \cdot z_{i+1,j+1,k}$$

$$\phi_{i,j+1,k+1} := u_\infty \cdot x_{i,j+1,k+1} + v_\infty \cdot y_{i,j+1,k+1} + w_\infty \cdot z_{i,j+1,k+1}$$

$$\phi_{i,j,k+1} := u_\infty \cdot x_{i,j,k+1} + v_\infty \cdot y_{i,j,k+1} + w_\infty \cdot z_{i,j,k+1}$$

$$\phi_{i,j+1,k} := u_\infty \cdot x_{i,j+1,k} + v_\infty \cdot y_{i,j+1,k} + w_\infty \cdot z_{i,j+1,k}$$

$$\phi_{i,j,k} := u_\infty \cdot x_{i,j,k} + v_\infty \cdot y_{i,j,k} + w_\infty \cdot z_{i,j,k}$$

Finalemont on simplifie :

$$\text{simplify} \left((a_{11} \cdot \phi_\xi^2 + a_{22} \cdot \phi_\eta^2 + a_{33} \cdot \phi_\zeta^2 + 2 \cdot (a_{12} \cdot \phi_\xi \cdot \phi_\eta + a_{13} \cdot \phi_\xi \cdot \phi_\zeta + a_{23} \cdot \phi_\eta \cdot \phi_\zeta)) \right)$$

Ce qui donne effectivement :

$$u_{\infty}^2 + w_{\infty}^2 + v_{\infty}^2$$

ANNEXE II

Condition de consistance 2

On définit :

$$a_{11} := \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2$$

$$a_{12} := \xi_x \cdot \eta_x + \xi_y \cdot \eta_y + \xi_z \cdot \eta_z$$

$$a_{13} := \xi_x \cdot \zeta_x + \xi_y \cdot \zeta_y + \xi_z \cdot \zeta_z$$

$$a_{22} := \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2$$

$$a_{23} := \zeta_x \cdot \eta_x + \zeta_y \cdot \eta_y + \zeta_z \cdot \eta_z$$

$$a_{33} := \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2$$

$$J := (x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi))^{-1}$$

On définit ξ_x par :

$$\xi_x := (J) \cdot (y_\eta \cdot z_\zeta - z_\eta \cdot y_\zeta)$$

$$\xi_x := \frac{y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ξ_y par :

$$\xi_y := (J) \cdot (-x_\eta \cdot z_\zeta + x_\zeta \cdot z_\eta)$$

$$\xi_y := \frac{-x_\eta z_\zeta + x_\zeta z_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ξ_z par :

$$\xi_z := (J) \cdot (x_\eta \cdot y_\zeta - x_\zeta \cdot y_\eta)$$

$$\xi_z := \frac{x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_x par :

$$\eta_x := (J) \cdot (z_\xi \cdot y_\zeta - y_\xi \cdot z_\zeta)$$

$$\eta_x := \frac{y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_y par :

$$\eta_y := (J) \cdot (-z_\xi \cdot x_\zeta + x_\xi \cdot z_\zeta)$$

$$\eta_y := \frac{-z_\xi x_\zeta + x_\xi z_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit η_z par :

$$\eta_z := (J) \cdot (y_\xi \cdot x_\zeta - x_\xi \cdot y_\zeta)$$

$$\eta_z := \frac{y_\xi x_\zeta - x_\xi y_\zeta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_x par :

$$\zeta_x := (J) \cdot (-z_\xi \cdot y_\eta + y_\xi \cdot z_\eta)$$

$$\zeta_x := \frac{y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_y par :

$$\zeta_y := (J) \cdot (z_\xi \cdot x_\eta - x_\xi \cdot z_\eta)$$

$$\zeta_y := \frac{z_\xi x_\eta - x_\xi z_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On définit ζ_z par :

$$\zeta_z := (J) \cdot (-y_\xi \cdot x_\eta + x_\xi \cdot y_\eta)$$

$$\zeta_z := \frac{-y_\xi x_\eta + x_\xi y_\eta}{x_\xi (y_\eta z_\zeta - z_\eta y_\zeta) - x_\eta (y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)}$$

On discrétise les termes :

$$x_\xi := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i+1,j,k} - x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$x_\eta := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j+1,k} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i,j+1,k} - x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$x_\zeta := \frac{x_{i+1,j+1,k+1} + x_{i+1,j,k+1} + x_{i,j+1,k+1} + x_{i,j,k+1} - x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k} - x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k}}{4}$$

$$y_\xi := \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k} + y_{i+1,j,k+1} + y_{i+1,j,k} - y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}}{4}$$

$$y_\eta := \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j+1,k} + y_{i,j+1,k+1} + y_{i,j+1,k} - y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k}}{4}$$

$$y_\zeta := \frac{y_{i+1,j+1,k+1} + y_{i+1,j,k+1} + y_{i,j+1,k+1} + y_{i,j,k+1} - y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k} - y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k}}{4}$$

$$z_\xi := \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i+1,j,k+1} + z_{i+1,j,k} - z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}}{4}$$

$$z_\eta := \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j+1,k} + z_{i,j+1,k+1} + z_{i,j+1,k} - z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k}}{4}$$

$$z_\zeta := \frac{z_{i+1,j+1,k+1} + z_{i+1,j,k+1} + z_{i,j+1,k+1} + z_{i,j,k+1} - z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k} - z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k}}{4}$$

$$\phi_\xi := \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j+1,k+1} - \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{4}$$

$$\phi_\eta := \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i,j+1,k+1} + \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i+1,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k}}{4}$$

$$\phi_\zeta := \frac{\phi_{i+1,j+1,k+1} + \phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i,j+1,k+1} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j+1,k} - \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j,k}}{4}$$

$$\phi_{i+1,j+1,k+1} := u_\infty \cdot x_{i+1,j+1,k+1} + v_\infty \cdot y_{i+1,j+1,k+1} + w_\infty \cdot z_{i+1,j+1,k+1}$$

$$\phi_{i+1,j,k+1} := u_\infty \cdot x_{i+1,j,k+1} + v_\infty \cdot y_{i+1,j,k+1} + w_\infty \cdot z_{i+1,j,k+1}$$

$$\phi_{i+1,j,k} := u_\infty \cdot x_{i+1,j,k} + v_\infty \cdot y_{i+1,j,k} + w_\infty \cdot z_{i+1,j,k}$$

$$\phi_{i+1,j+1,k} := u_\infty \cdot x_{i+1,j+1,k} + v_\infty \cdot y_{i+1,j+1,k} + w_\infty \cdot z_{i+1,j+1,k}$$

$$\phi_{i,j+1,k+1} := u_\infty \cdot x_{i,j+1,k+1} + v_\infty \cdot y_{i,j+1,k+1} + w_\infty \cdot z_{i,j+1,k+1}$$

$$\phi_{i,j,k+1} := u_\infty \cdot x_{i,j,k+1} + v_\infty \cdot y_{i,j,k+1} + w_\infty \cdot z_{i,j,k+1}$$

$$\phi_{i,j+1,k} := u_\infty \cdot x_{i,j+1,k} + v_\infty \cdot y_{i,j+1,k} + w_\infty \cdot z_{i,j+1,k}$$

$$\phi_{i,j,k} := u_\infty \cdot x_{i,j,k} + v_\infty \cdot y_{i,j,k} + w_\infty \cdot z_{i,j,k}$$

On vérifie u_∞ :

$$\text{simplify} \left(\xi_x \cdot \phi_\xi + \eta_x \cdot \phi_\eta + \zeta_x \cdot \phi_\zeta \right)$$

Ce qui donne effectivement :

$$u_{\infty}$$

On vérifie v_{∞} :

$$\text{simplify}(\xi_y \cdot \phi_{\xi} + \eta_y \cdot \phi_{\eta} + \zeta_y \cdot \phi_{\zeta})$$

Ce qui donne effectivement :

$$v_{\infty}$$

On vérifie w_{∞} :

$$\text{simplify}(\xi_z \cdot \phi_{\xi} + \eta_z \cdot \phi_{\eta} + \zeta_z \cdot \phi_{\zeta})$$

Ce qui donne effectivement :

$$w_{\infty}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.L. Steger and B.S. Baldwin, "Shock waves and drag in the numerical calculation of compressible, irrotational transonic flow," *AIAA Journal*, vol. 11, no. 7, pp. 903 – 4, 1973/07/.
- [2] Daniel P. Raymer, *Aircraft Design : A Conceptual Approach*, AIAA Education Series. AIAA, 4th edition edition, 2006.
- [3] E. Murman and J.D. Cole, "Calculation of plane steady transonic flows," *AIAA Journal*, vol. 9, no. 1, pp. 114 – 21, 1971.
- [4] J. L. Steger and H. Lomax, "Transonic Flow About Two-Dimensional Airfoils By Relaxation Procedures," *AIAA Journal*, vol. 10, no. 1, pp. 49 – 54, 1972.
- [5] P.R. Garabedian and D. Korn, "Analysis of Transonic Airfoils," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 24, pp. 841–851, 1971.
- [6] Murman E., "Analysis of Embedded Shock Waves Calculated by Relaxation Methods," July 1973, Proceedings First AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.
- [7] F. Bauer, P. Garabedian, and D. Korn, *A Theory of Supercritical Wing Sections : With Computer Programs and Examples*, Springer-Verlag, 1972.
- [8] A Jameson, "Iterative solution of transonic flows over airfoils and wings, including flows at Mach 1," *Communications on pure and applied mathematics*, vol. 27, pp. 283–309, 1974.
- [9] E. Murman, "Analysis Of Embedded Shock Waves Calculated By Relaxation Methods.," *AIAA Journal*, vol. 12, no. 5, pp. 626 – 633, 1974.
- [10] A. Jameson, "Transonic Potential Flow Calculations Using Conservation Form," June 1975, Proceedings of Second AIAA Computational Fluid Dynamics Conference.
- [11] M. Hafez, J. South, and Murman E., "Artificial Compressibility Methods for Numerical Solutions of Transonic Full Potential Equation," *AIAA Journal*, vol. 17, no. 8, August 1979.
- [12] J. Steinhoff and A. Jameson, "Multiple solutions of the transonic potential flow equation," *AIAA Journal*, vol. 20, no. 11, pp. 1521 – 5, Nov. 1982.
- [13] Kevin McGrattan, "Comparison of transonic flow models," *AIAA Journal*, vol. 30, no. 9, pp. 2340 – 2343, 1992.

- [14] Terry L. Holst, "Multizone chimera algorithm for solving the full-potential equation," *Journal of Aircraft*, vol. 35, no. 3, pp. 412 – 421, 1998.
- [15] *Advances in Computational Transonics*, vol. 4, Pineridge Press, 1985.
- [16] Terry L. Holst, "Transonic flow computations using nonlinear potential methods," *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 36, no. 1, pp. 1 – 61, 2000.
- [17] R. E Neel, *Advances in Computational Fluid Dynamics : Turbulent Separated Flows and Transonic Potential Flows*, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, August 1997.
- [18] G.P. Guruswamy, "Interaction of fluids and structures for aircraft applications," *Computers and Structures*, 1988.
- [19] G. P. Guruswamy and P.M. Goorjian, "Unsteady transonic aerodynamic and aeroelastic calculations about airfoils and wings," Tech. Rep. TM 85986, NASA, 1984.
- [20] John W. Edwards, "Applications Of Potential Theory Computations To Transonic Aeroelasticity," *Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, vol. 2, pp. 1225 – 1242, 1986.
- [21] J.T. Batina, R.M. Bennett, D.A. Seidel, H.J. Cunningham, and S.R. Bland, "Recent advances in transonic computational aeroelasticity," *Computers and Structures*, vol. 30, no. 1-2, pp. 29 – 37, 1988.
- [22] Walter A. Silva and Robert M. Bennett, "Application of transonic small disturbance theory to the active flexible wing model," *Journal of Aircraft*, vol. 32, no. 1, pp. 16 – 22, 1995.
- [23] V. Shankar ; H. Ide ; J. Gorski ; S. Osher, "A Fast, Time-Accurate, Unsteady Full Potential Scheme," *AIAA Journal*, vol. 25, no. 2, pp. 230–38, July 1985.
- [24] K. Isogai, "Calculation of unsteady transonic flow over oscillating airfoils using the full potential equation," *AIAA Paper 77-448*, 1977.
- [25] S. Obayashi ; G.P. Guruswamy ; P.M. Goorjian, "Streamwise upwind algorithm for computing unsteady transonic flows past oscillating wings," *AIAA Journal*, vol. 29, no. 10, pp. 1668–77, October 1991.
- [26] J.B. Malone and N.L. Sankar, "Numerical simulation of two-dimensional unsteady transonic flows using the full-potential equation," *AIAA Journal*, vol. 22, no. 8, pp. 1035 – 41, 1984.
- [27] V. Shankar ; H. Ide, "Treatment of Steady and Unsteady Flows Using a Fast, Time-Accurate Full Potential Scheme," *AIAA Paper 85-4060*, October 1985.

- [28] K. Isogai and K. Suetsugu, "Numerical calculation of unsteady transonic potential flow over three-dimensional wings with oscillating control surfaces," *AIAA Journal*, vol. 22, no. 4, pp. 478 – 85, 1984.
- [29] L. Zhiliang ; R. Voss, "DLR FP+VII Code Improvements and Computation of Unsteady Transonic Flows," Tech. Rep. DLR IB 232-96J03, German Aerospace Research Establishment (DLR), April 1996.
- [30] Crocco L, "Eine neue Stromfunktion fur die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation," *Z.A.M.M*, vol. 1, no. 17, 1937.
- [31] "Equations, tables, and charts for compressible flow," Tech. Rep. 1135, NACA, 1953.
- [32] Soulaïmani A., *Contribution a la resolution numerique des problemes hydrodynamiques a surface libre*, Ph.D. thesis, Universite Laval, 1987.
- [33] Donea J. and Huerta A., *Finite Element Methods for Flow Problems*, Wiley, June 2003.
- [34] Saad Y. and Schultz M.H., "GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM Journal on scientific and statistical computing*, , no. 7, pp. 856–869, 1996.
- [35] Pulliam T.H. and Steger J.L, "Implicit finite-difference simulation of three-dimensional compressible flow," *AIAA Journal*, vol. 18, pp. 157–167, 1980.
- [36] Thomas P. and Lombard C., "The Geometric conservation law - A link between finite-difference and finite-volume methods of flow computation on moving grids," *AIAA Paper 78-1208*, 1978.
- [37] Flores J., Holst T.L, Kwak D., and Batiste D.M., "A New Consistent Spatial Differencing Scheme for the Transonic Full-Potential Equation," *AIAA Journal*, vol. 22, no. 8, pp. 1027–1034, 1984.
- [38] Thomas. S. D. and Holst T.L, "A Consistent Spatial Differencing Scheme for the Transonic Full-Potential Equation in Three Dimensions," Tech. Rep. TM-86716, NASA, December 1985.
- [39] H. Guillard and C. Farhat, "On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 11-12, pp. 1467 – 82, 2000/12/08.
- [40] Michel Lesoinne and Charbel Farhat, "Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 134, no. 1-2, pp. 71 – 90, 1996.

- [41] Charbel Farhat and Philippe Geuzaine, "Design and analysis of robust ALE time-integrators for the solution of unsteady flow problems on moving grids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 193, no. 39-41 SPEC ISS, pp. 4073 – 4095, 2004.
- [42] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont, "The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids," *Journal of Computational Physics*, vol. 174, no. 2, pp. 669 – 94, 2001/12/10.
- [43] A. Jameson and D.A. Caughey, "A finite-volume method for transonic potential flow calculations," 1977, Third AIAA CFD Conference, pp. 35–54.
- [44] M.M. Hafez ; S. Osher ; Whitlow, "Improved Finite Difference Schemes for Transonic Potential Calculations," *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting*, , no. AIAA-84-0092, pp. 28, January 1984.
- [45] V. Shankar, H. Ide, and J. Gorski, "Relaxation And Approximate Factorization Methods For The Unsteady Full Potential Equation," *Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences*, vol. 2, pp. 591 – 599, 1984.
- [46] M. Hafez and D. Lovell, "Entropy and vorticity corrections for transonic flows," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 8, no. 1, pp. 31–53, January 1988.
- [47] T.Q. Dang and Lee-Tzong Chen, "Euler correction method for two- and three-dimensional transonic flows," *AIAA Journal*, vol. 27, no. 10, pp. 1377 – 86, Oct. 1989.
- [48] John T. Batina, "Unsteady transonic small-disturbance theory including entropy and vorticity effects," *Journal of Aircraft*, vol. 26, no. 6, pp. 531 – 538, 1989.
- [49] W. Jr. Whitlow, M. Hafez, and S.J Osher, "An Entropy Correction Method for Unsteady Full Potential Flows with Strong Shocks," *Journal of Fluids and Structures*, vol. 1, pp. 401–414, 1987.
- [50] Goetz H. Klopfer and David Nixon, "Nonisentropic Potential Formulation For Transonic Flows.," *AIAA Journal*, vol. 22, no. 6, pp. 770 – 776, 1984.
- [51] H.S. Murty, *Nonlinear Aspects of Transonic Aeroelasticity*, Ph.D. thesis, University of Toronto, 1992.
- [52] Bridgeman J.O., Steger J.L, and Caradonna F.X., "A conservative finite difference algorithm for the unsteady transonic potential equation in generalized coordinates," in *AIAA 9th Atmospheric Flight Mechanics Conference*, 1982, vol. AIAA-1982-1388.

- [53] A. Haj Ali, “Calcul distribué pour des problèmes multiphysiques,” M.S. thesis, École de technologie supérieure, 2002.
- [54] H.A. Schwarz, *Gesammelte Matchematische Abhandlungen*, vol. 2, Springer, Berlin, 1890, Publié en premier dans *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, volume 15, 1870, p-272-286.
- [55] Soulaïmani A., A. Forest, Z. Feng, A. Haj Ali, and Y. Azami, “A distributed computing-based methodology for computational nonlinear aeroelasticity,” in *CASI 48th annual Conference*, 2001, pp. 123–135.
- [56] G.P. Guruswamy, “A review of numerical fluids/structures interface methods for computations using high-fidelity equations,” *Computers and Structures*, vol. 80, no. 1, pp. 31–41, January 2002.
- [57] E. C. Yates, “AGARD Standard Aeroelastic Configuration for Dynamics Response, Candidat Configuration I.-Wing 445.6,” *NASA TM 100492*, 1987.
- [58] T. Gmür, *Dynamique des structures, analyse modale numérique*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
- [59] R. Lohner, “Robust, vectorized search algorithms for interpolation on unstructured grids,” *Journal of Computational Physics*, vol. 118, no. 2, pp. 380 – 7, May 1995.
- [60] C. Farhat ; M. Lesoinne ; P. LeTallec, “Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 157, no. 1-2, pp. 95–114, April 1998.
- [61] Z. Feng, *A Nonlinear Computational Aeroelasticity Model For Aircraft Wings*, Ph.D. thesis, École de technologie supérieure, 2005.
- [62] C. Farhat and M. Lesoinne, “On the accuracy, stability, and performance of the solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems by partitioned procedures,” *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, vol. 1, pp. 629 –641, 1996.
- [63] C. Farhat and M. Lesoinne, “Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 182, no. 3-4, pp. 499 – 515, 2000.
- [64] S. Piperno and C. Farhat, “Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems. II. Energy transfer analysis and three-dimensional applications,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 24-25, pp. 3147 – 70, 2001/03/02.

- [65] W. J. Gordon and C. A. Hall, "Construction of Curvilinear Co-Ordinate Systems And Applications to Mesh Generation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 461–477, 1973.
- [66] J. A. Samareh and W. T. Jones, "A Grid Generation System for Multidisciplinary Design Optimization," *AIAA*, , no. 95-1689, 1995.
- [67] B.K. Soni, "Two and Three-Dimensional Grid Generation for Internal Flow Applications of Computational Fluid Dynamics," *AIAA*, , no. 85-1526, 1985.
- [68] Y. C. Liou and Y. N. Jeng, "A Transfinite Interpolation Method of Grid Generation Based on Multipoints," *Journal of Scientific Computing*, pp. 105–114, 1998.
- [69] S. A. Morton, R. B. Melville, and M. R. Visbal, "Accuracy and Coupling Issues of Aeroelastic Navier-Stokes Solutions on Deforming Meshes," *Journal of Aircraft*, vol. 35, no. 5, pp. 798–805, 1998.
- [70] J. A. Samareh, "Application of Quaternions for Mesh Deformation," Tech. Rep. TM-2002-211646, NASA, 2002.
- [71] Terry L. Holst, "Approximate-Factorization Schemes For Solving The Transonic Full-Potential Equation," Tech. Rep. 110435, NASA, February 1997.
- [72] J.W. Slater, "CFD verification and validation," <http://www.grc.nasa.gov/WWW/wind/valid/homepage.html>.
- [73] E.M. Lee-Rausch and J. T. Batina, "Calculation of AGARD wing 445.6 flutter using Navier-Stokes aerodynamics," August 1993, vol. AIAA Paper No. 93-3476 of *AIAA 11th Applied Aerodynamics Conference*.
- [74] K.K. Gupta, "Development and application of an integrated multidisciplinary analysis capability," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, no. 3, pp. 533 – 550, 1997.