

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À  
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE  
À L'OBTENTION DE MAÎTRISE EN GÉNIE

M.Ing.

PAR  
HASSAN GHARBI

UTILISATION DE LA RÉPONSE DIÉLECTRIQUE POUR LE DIAGNOSTIC DES  
TRANSFORMATEURS DE PUISSANCE

MONTRÉAL, LE 31 JUILLET 2006

© droits réservés de Hassan Gharbi

**CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ**

**PAR UN JURY COMPOSÉ DE :**

**M. Éric David, directeur de mémoire  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure**

**M. Bernard Noirhomme, membre du jury  
Chercheur à l'IREQ**

**M. Bruno de Kelper, président du jury  
Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure**

**M Louis Lamarche, membre du jury  
Département de génie mécanique à l'École de technologie supérieure**

**IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC  
LE 29 JUIN 2006  
À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE**

# UTILISATION DE LA RÉPONSE DIÉLECTRIQUE POUR LE DIAGNOSTIC DES TRANSFORMATEURS DE PUISSANCE

Hassan Gharbi

## SOMMAIRE

Les transformateurs jouent un grand rôle pour assurer la continuité de la distribution de l'énergie électrique. La plupart d'entre eux ont été construits aux débuts des années 1960 et arrivent à la limite de la période pour laquelle ils ont été prévus, soit une cinquantaine d'années. Il est devenu nécessaire de pouvoir anticiper les défaillances par un diagnostic adéquat. Le papier du système d'isolation constitue le maillon faible d'un transformateur et connaître son état c'est connaître celui du transformateur. Il est difficile de prélever des échantillons de l'isolation. Par contre, on sait que la réponse diélectrique à un champ électrostatique dépend fortement des caractéristiques physiques du matériau. Ce mémoire porte sur l'utilisation de cette réponse pour le diagnostic des transformateurs de puissance.

À partir de la réponse diélectrique de 8 maquettes qui constituent notre ensemble d'apprentissage, on a cherché dans un premier temps à trouver la relation existant entre le degré de polymérisation DP, indicateur de l'état du papier, et la réponse diélectrique. En second lieu, on s'est attelé à la tâche d'exprimer cette relation indépendamment des facteurs variables. Ensuite, on a utilisé la modélisation de l'interaction entre les constituants du transformateur pour en déduire la réponse diélectrique du papier. Finalement, la phase de validation a consisté à comparer les résultats obtenus par la modélisation avec les mesures effectuées sur les échantillons et à vérifier la linéarité en comparant les mesures fréquentielles avec la transformée de Fourier des mesures temporelles.

Toutes les données expérimentales sont consignées dans une base de données relationnelle. La méthode utilisée pour ajuster les données expérimentales aux relations paramétriques fait appel à régression linéaire. Quand cela est nécessaire on utilise la régression non linéaire pour un ajustement plus précis.

Les résultats obtenus montrent qu'en l'absence d'humidité excessive, il existe une relation entre la réponse diélectrique et l'état de l'isolation. La phase de validation montre que pour les cuves non humides, les hypothèses de linéarité sont légitimes.

# **USE OF DIELECTRIC RESPONSE FOR THE DIAGNOSIS OF POWER TRANSFORMERS**

Hassan Gharbi

## **ABSTRACT**

The transformers play a key role to ensure the continuity of the electricity supply. The majorities of them were built at the early 1960, and have arrived at the limit of the period for which they were designed, which is about fifty years. It becomes necessary to anticipate the failures by an adequate diagnosis. The paper of the insulation constitutes the weak part of a transformer, and knowing its state is knowing the transformer's state. It is very difficult to collect samples about internal state of a transformer. However it is known that dielectric response to an electrostatic field rely strongly on the physical properties of the material. This dissertation explains how we can use this response to establish a diagnosis for the power transformers.

From the dielectric response of 8 experimental tanks, which constitute our training set, we will look for an existing correlation between the dielectric response and the degree of polymerisation, which is the best indicator for the paper's ageing. The second task was to express the correlation independently of various factors such as temperature and moisture. After that, by modeling the interaction between transformer's components, we extract the paper's dielectric properties. Finally the last task was to compare the result issued by our models with the experimental data. We verify the linearity by comparing experimental results with those obtained with the Fourier transform of the time domain responses.

All experimental data were stored in a relational database. A linear regression helped to fit the experimental data with a parametrical model. When necessary, a nonlinear regression can be used for a more efficient fitting.

The results obtained showed that there is a relation between the dielectric response and the insulation's state in the absence of excessive moisture. Also the phase of validation showed that for the dry tanks, the assumption of linearity was correct

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier l'équipe pluridisciplinaire qui m'a encadré et orienté pendant toute la durée de mon stage. En la personne du professeur Éric David, mon directeur de mémoire, j'ai trouvé un arsenal théorique des plus diversifiés et une grande capacité de travail. En la personne de Monsieur Bernard Noirhomme, j'ai pu bénéficier de la vision et des conseils d'un homme de terrain aux intuitions très pertinentes. L'étroite collaboration entre ces deux personnes a donné lieu à un encadrement et un suivi que je souhaite à tous les étudiants.

Je remercie aussi Hydro-Québec, qui montre ainsi son engagement pour promouvoir la recherche scientifique en fournissant toute la logistique, l'infrastructure et le support financier nécessaire. En plus des conseils prodigués, cette équipe a toujours su m'intégrer et m'associer dans tous ses travaux et réunions. L'organisation du travail, les réunions de suivi régulières, la diligence faite pour résoudre tout problème ainsi que la flexibilité sont autant de facteurs qui m'ont poussé à donner le meilleur de moi-même pour me montrer à la hauteur de la tâche.

Ce travail est dédié à toutes les personnes qui m'ont encadré, encouragé de près ou de loin.

## TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE .....	III
ABSTRACT .....	IV
REMERCIEMENTS.....	V
LISTE DES TABLEAUX.....	IX
LISTE DES FIGURES .....	X
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES.....	XIII
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 BASES THÉORIQUES .....	3
1.1    Électrostatique.....	3
1.1.1    Loi de Coulomb .....	3
1.1.2    Champ et potentiel électrique .....	3
1.1.3    Induction électrique .....	4
1.1.4    Flux électrostatique.....	4
1.1.5    Théorème de Gauss.....	5
1.1.6    Équations de Maxwell.....	5
1.2    Diélectrique.....	6
1.2.1    Permittivité relative.....	6
1.2.2    Polarisation .....	6
1.2.3    Capacité.....	8
1.2.4    Mécanismes de polarisation.....	8
1.3    Expression analytique de la densité de courant .....	10
CHAPITRE 2 REVUE DE LA LITTÉRATURE.....	14
2.1    Modèle linéaire .....	14
2.1.1    Méthode PDC (Polarization and Depolarization current) "Courant de polarisation et dépolarisation" .....	16
2.1.2    FDS (Frequency Domain Spectroscopy ) .....	17
2.1.3    Permittivité complexe .....	19
2.2    Circuits équivalents.....	20
2.2.1    Circuit R.(R//C).....	22
2.2.2    Circuits RC en parallèle.....	25
2.2.3    Modèle XY.....	27
2.3    Modèles physiques.....	29
2.3.1    Le modèle de Debye .....	29
2.3.2    Formule de Cole Cole "Dérivée non entière" .....	32
2.3.3    Formule de Cole-Davidson .....	34

2.3.4	Formule de Havriliak Nagami .....	35
2.3.5	Formule de Kirkwood .....	36
2.3.6	Approche par la distribution des temps de relaxation.....	36
2.3.7	Formule de Curie-Von Schweidler .....	37
2.4	Comportement asymptotique .....	38
2.5	Récapitulatif.....	39
2.6	La température .....	40
2.7	L'humidité.....	42
2.7.1	Courbe isothermes .....	42
2.8	La géométrie .....	44
2.9	Équivalence domaine fréquentielle et domaine temporelle.....	44
2.10	Précautions à observer lors des mesures.....	49
2.11	Démarche .....	50
<b>CHAPITRE 3 ANALYSE DES RÉSULTATS ET MODÉLISATION .....</b>		<b>54</b>
3.1	Méthodes de mesure .....	54
3.1.1	Courant de polarisation dépolariation "PDC" .....	55
3.1.2	Mesure en fréquence "FDS" .....	55
3.2	Résultats expérimentaux des cuves.....	56
3.2.1	Sensibilité au vieillissement.....	56
3.2.2	Sensibilité à l'humidité .....	62
3.3	Résultats expérimentaux des échantillons de papier des cuves .....	66
3.3.1	Analyse .....	68
3.4	Résultats expérimentaux des échantillons d'huiles neuves et usées....	69
3.4.1	Analyse .....	70
3.5	Corrélation .....	70
3.5.1	Corrélation entre le courant de polarisation et le DP du papier.....	71
3.5.2	Corrélation entre la tangente de l'angle des pertes et le DP du papier.....	72
3.5.3	Corrélation entre le courant de polarisation et le facteur de puissance de l'huile.....	74
3.5.4	Corrélation entre Tangente de l'angle des pertes et le facteur de puissance de l'huile.....	75
3.6	Normalisation de la température.....	77
3.6.1	Recherche de la relation entre le déplacement en fréquence et la température .....	78
3.6.2	Exploitation de la relation.....	82
3.7	Évaluation de l'influence de l'humidité.....	83
3.8	Modèles.....	85
3.8.1	Circuits R en série avec (G//C).....	85
3.8.2	Circuits RC en parallèle "régression par morceaux" .....	93
3.8.3	Circuits RC en parallèle "Ajustement « Gauss Newton".....	95
3.8.4	Modèle XY.....	96

3.9	Validité de la transformée de Fourier obtenue analytiquement .....	103
3.9.1	Courbe paramétrique en exponentielles décroissantes .....	104
3.9.2	Transformée de Hamon.....	105
3.9.3	Mesures fréquentielles .....	105
3.9.4	Comparaison avec la capacité complexe .....	106
3.9.5	Comparaison avec la capacité réelle .....	109
3.9.6	Analyse .....	109
3.10	Résultats.....	110
3.10.1	Réalisation des objectifs .....	110
3.10.2	Modèles.....	113
3.10.3	Équivalence mesures temporelles et fréquentielles .....	114
3.11	Conclusion et perspectives.....	114
3.11.1	Les cuves sèches .....	114
3.11.2	Les cuves humides .....	115
3.11.3	Les Facteurs externes.....	115
3.11.4	Les perspectives.....	115
CHAPITRE 4	ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE ET OUTIL DE CORRÉLATION .....	117
4.1	Environnement informatique .....	117
4.2	Périmètre à automatiser.....	117
4.3	Modèle conceptuel des données "MCD" .....	118
4.3.1	Implémentation du MCD .....	121
4.4	Organisation des traitements.....	123
4.4.1	Chargement de la base de données .....	123
4.4.2	Traitement de l'information.....	123
4.4.3	Analyse de corrélation .....	124
4.5	Régression.....	125
4.5.1	Formulation générale du problème .....	125
4.5.2	Régression par une fonction paramétrique linéaire .....	126
4.5.3	Régression par la fonction paramétrique $Y = b.e^{a.X}$ .....	127
4.5.4	Régression par la fonction paramétrique $y = At^n$ .....	127
4.5.5	Régression non linéaire.....	128
ANNEXE 1	IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DE GAUSS NEWTON .....	132
ANNEXE 2	MATHÉMATIQUES.....	139
BIBLIOGRAPHIE	.....	142



## LISTE DES TABLEAUX

	Page
Tableau I	Distribution des temps de relaxation ..... 37
Tableau II	Comportement asymptotique des formules paramétriques ..... 38
Tableau III	Récapitulatif des formules paramétriques ..... 39
Tableau IV	Conditions de vieillissement ..... 54
Tableau V	Corrélation à 4 500 secondes entre I pol et DP ..... 72
Tableau VI	Corrélation à 0.003 Hz entre la tangente de l'angle de perte et le DP du papier ..... 73
Tableau VII	Corrélation à 2400 secondes entre courant de polarisation et le facteur de puissance de l'huile ..... 75
Tableau VIII	Tableau corrélation tangente à 0.003 Hz et le facteur de puissance de l'huile..... 76
Tableau IX	Déplacement en fréquence par rapport à la courbe maitresse à 25°C..... 80
Tableau X	Tableau récapitulatif de la corrélation..... 81

## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1	Les différents types de mécanismes de polarisation [1]..... 9
Figure 2	Courant de polarisation et dépolarisation avant et après un changement d'huile [3]..... 17
Figure 3	Résistance R en // avec la capacité C ..... 20
Figure 4	Schéma équivalent d'un transformateur ..... 22
Figure 5	Capacité imaginaire versus fréquence ..... 24
Figure 6	Capacité réelle versus fréquence ..... 24
Figure 7	Circuit équivalent [6]..... 26
Figure 8	Cellule unitaire [5]..... 27
Figure 9	Relaxation de Debye pour une constante de temps de 10 ..... 31
Figure 10	Relaxation de Cole Cole pour différentes valeurs de $\alpha$ ..... 33
Figure 11	Relaxation de Cole Davidson pour différentes valeurs de $\beta$ ..... 34
Figure 12	Relaxation de Havriliak Nagami pour différentes valeurs de $\beta$ et $\alpha$ ..... 35
Figure 13	Déplacement en fréquence de la courbe maîtresse à 25 °C..... 41
Figure 14	Extrait des courbes iso thermes [15] ..... 43
Figure 15	Évolution de $\omega t_1$ vs n..... 46
Figure 16	$C''$ versus Fréquence..... 48
Figure 17	Synoptique de la démarche..... 51
Figure 18	Courant de charge(a) et décharge(b) pour différents temps de vieillissement en heures pour la cuve#12 (0.75 % d'humidité) ..... 57
Figure 19	Courant de charge(a) et décharge(b) pour différents temps de vieillissement en heures pour la cuve#08 (3.48 % d'humidité) ..... 58
Figure 20	Tangente $\delta$ vs fréquence pour la cuve #12 (sèche) à différents temps de vieillissement ..... 59
Figure 21	Tangente $\delta$ vs fréquence pour la cuve #08 (humide) à différents temps de vieillissement ..... 59
Figure 22	$C''$ vs fréquence pour la cuve #12 (cuve sèche) à différents temps de vieillissement..... 60

Figure 23	$C''$ vs fréquence pour la cuve #08 (cuve humide) à différents temps de vieillissement.....	60
Figure 24	Courant de charge a) et décharge b) vs temps au début de vieillissement pour différentes cuves .....	63
Figure 25	Courant de charge a) et décharge b) vs temps en fin de vieillissement pour différentes cuves .....	64
Figure 26	$C''$ vs fréquence début vieillissement .....	65
Figure 27	$C''$ vs fréquence fin vieillissement.....	65
Figure 28	Chambre environnementale.....	67
Figure 29	Système d'acquisition des mesures .....	67
Figure 30	Tangente vs fréquence pour les échantillons de papier imprégné.....	68
Figure 31	Courant de charge des échantillons d'huile.....	69
Figure 32	$C''$ des échantillons d'huile obtenue par transformée de Hamon du courant de charge.....	69
Figure 33	Évolution de la corrélation (Courant de polarisation/DP) en fonction du temps de mesure .....	71
Figure 34	Évolution de la corrélation (Tangente $\delta$ /DP) avec la fréquence.....	73
Figure 35	Évolution de la corrélation (Courant de polarisation/Facteur de puissance de l'huile) avec le temps .....	74
Figure 36	Évolution de la corrélation (Tangente $\delta$ /Facteur de puissance de l'huile) avec la fréquence .....	76
Figure 37	Capacité imaginaire versus fréquence pour différentes températures pour du papier neuf.....	77
Figure 38	Mise en œuvre de l'ajustement en fréquence .....	79
Figure 39	$1000/(T+273)$ vs $\ln(\text{déplacement})$ pour # cuves.....	81
Figure 40	Déplacement en fréquence de la capacité vs fréquence cuve#09.....	83
Figure 41	Courbe isothermes $Q_t$ eau dans papier vs $Q_t$ eau dans huile.....	84
Figure 42	Évolution $C''$ fonction de $R_p$ .....	86
Figure 43	Évolution $C''$ fonction de $R_h$ .....	87
Figure 44	Évolution $C''$ fonction de $C_p$ .....	87
Figure 45	Évolution $C'$ fonction de $R_p$ .....	88
Figure 46	Évolution $C'$ fonction de $R_h$ .....	88
Figure 47	Évolution $C'$ fonction de $C_p$ .....	89

Figure 48	Évolution du courant en fonction de $R_p$ .....	90
Figure 49	Évolution du courant en fonction de $R_h$ .....	91
Figure 50	Évolution du courant en fonction de $C_p$ .....	91
Figure 51	Distribution de l'erreur .....	95
Figure 52	Ajustement par plusieurs exponentielles .....	96
Figure 53	Évolution de $C_0$ en fonction de l'humidité des cuves .....	99
Figure 54	$\varepsilon_p''$ calculée au début du vieillissement .....	100
Figure 55	$\varepsilon_p''$ calculée en fin de vieillissement .....	101
Figure 56	Comparaison de la tangente $\delta$ calculée par le modèle XY et celle mesurée. L'échantillon provient d'une cuve sèche .....	102
Figure 57	Comparaison de la tangente $\delta$ calculée par le modèle XY et celle mesurée. L'échantillon provient d'une cuve humide .....	103
Figure 58	$C''$ en début de vieillissement pour une cuve sèche .....	107
Figure 59	$C''$ en fin de vieillissement pour une cuve sèche .....	107
Figure 60	$C''$ en début de vieillissement pour une cuve humide .....	108
Figure 61	$C''$ en fin de vieillissement pour une cuve humide .....	108
Figure 62	$C'$ expérimentale et analytique pour une cuve sèche .....	109
Figure 63	Corrélation entre le degré de polymérisation et a) le courant de charge à 2 500 s et b) Tangente $\delta$ à 0.003 Hz .....	111
Figure 64	Fichier articles .....	119
Figure 65	Modèle relationnel .....	122
Figure 66	Minimum local .....	129

## LISTE DES ABRÉVIATIONS ET DES SIGLES

$\epsilon_0$	Permittivité diélectrique du vide, Farad/mètre, $10^{-9} / (36\pi)$
$\epsilon_\infty$	Permittivité diélectrique réponse instantanée
$\sigma$	Conductivité S/m
$\rho$	Densité volumique de charge $C/m^3$
$\delta$	Angle des pertes
$C^*$	Capacité complexe
$C'$	Capacité réelle
$C''$	Capacité imaginaire
$\vec{E}$	Vecteur Champ électrostatique Volt/m
FDS	Balayage de fréquence
k	Constante de Boltzmann, Joule/Kelvin, $1,3806505 \cdot 10^{-23}$
MCD	Modèle conceptuel des données
PDC	Courant de polarisation/dépolarisation
OIL PF	Facteur de puissance de l'huile
rms	Valeur efficace
$R_1//R_2$	$R_1$ en parallèle avec $R_2$
°C	Degré Celsius
KVA	Mesure de puissance apparente Volt Ampère $10^3$
A	Ampère
C	Coulomb
F	Farad
m	Mètre
S	Siemens
V	Potentiel électrostatique Volt

$\mathfrak{F}$	Transformée de Fourier
$\ln$	Logarithme naturel
$\nabla$	Opérateur symbolique nabla.
$\wedge$	Produit vectoriel.

## INTRODUCTION

Les diélectriques tels que le papier et l'huile dans un transformateur, sont des matériaux isolants, c'est-à-dire ne possédant peu ou pas de charges libres. En présence d'un champ électrique, ces matériaux répondent par une légère modification de leur distribution de charge, qui donne lieu à un appel de courant constituant la réponse diélectrique. Plusieurs travaux et méthodes utilisent la réponse diélectrique pour extraire le taux d'humidité mais aucune d'elle ne prend en compte la dégradation du papier. Partant de ce constat, l'IREQ a initié une série d'expériences afin d'explicitier une relation qui tienne compte du vieillissement du diélectrique. Dans le cadre de ce mémoire mon mandat était de voir comment à partir des réponses obtenues pour des maquettes, on pouvait trouver une relation intrinsèque entre les données expérimentales et l'état de l'isolation.

Dans le premier chapitre, on présente succinctement les notions théoriques essentielles ainsi que la relation théorique fondamentale existant entre la réponse diélectrique et le papier. Le second chapitre part de la relation fondamentale obtenue et de l'hypothèse de linéarité pour introduire les mesures diélectriques les plus utilisées ainsi que les modèles basés sur les circuits équivalents. D'autres modèles obtenues par les travaux de physiciens sont proposées et comparés à ceux issues de l'approche linéaire. Toujours dans ce même chapitre on expose les techniques en vigueur pour s'affranchir de la température, de la géométrie et de l'humidité. Le troisième chapitre a pour but d'utiliser les résultats expérimentaux pour explicitier la relation entre la réponse diélectrique et l'état de l'isolation. On y voit aussi la mise en application des théories et techniques pour s'affranchir de la température, de la géométrie et de l'humidité. Deux modèles y sont implémentés dont l'un servant à extraire une donnée diélectrique du papier à partir de la réponse fréquentielle. En fin de ce chapitre on procédera à la validation des résultats calculés avec les mesures réelles effectuées sur les échantillons, à la vérification de l'hypothèse de linéarité et finalement à un récapitulatif des résultats et

recommandations. Le quatrième chapitre a été écrit pour rester le plus indépendant du reste de ce mémoire. Il présente la logistique utilisée pour la mise au point du système d'information ainsi que les outils utilisés pour effectuer toutes sortes de régression dont la régression non linéaire construite autour d'une méthode d'optimisation quadratique.



## CHAPITRE 1

### BASES THÉORIQUES

#### 1.1 Électrostatique

Bien que la connaissance des phénomènes électrostatiques ait été connue dès l'antiquité, il a fallu attendre la fin du 18<sup>ième</sup> siècle pour avoir une quantification des phénomènes.

##### 1.1.1 Loi de Coulomb

Entre 1785 et 1791, Charles-Augustin de Coulomb établit la loi pour calculer la force électrostatique existant entre deux charges  $q$  et  $q'$  :

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{u} \quad (1.1)$$

où  $\vec{F}$  désigne le vecteur force en Newton,  $q$  et  $q'$  deux charges en Coulomb,  $r$  la distance entre les charges en mètre,  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé d'une charge vers une autre et  $\epsilon$  est la permittivité du milieu en Farad/mètre.

##### 1.1.2 Champ et potentiel électrique

De l'équation (1.1), naissent les notions de champ et potentiel électrique. Le champ électrique pour une charge ponctuelle  $q$ , en un point  $M$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{u} \quad (1.2)$$

Le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  en un point  $M$  est exprimé en Volt/mètre,  $r$  est la distance entre la charge et le point  $M$  et  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigé de la charge vers le point  $M$ .

Le potentiel est le champ scalaire  $V$  sous jacent au champ électrique tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (1.3)$$

Le potentiel électrique  $V$  est une grandeur scalaire exprimée en Volt.

### 1.1.3 Induction électrique

Si l'on place un matériau diélectrique dans un milieu où existe un champ électrique, il en résultera un changement de celui-ci. Pour obtenir une grandeur qui ne dépende plus que de la charge et de la position, on définit le vecteur "induction électrique" comme suit :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{q}{4.\pi.r^2} .\vec{u} \quad (1.4)$$

où  $\vec{D}$  s'exprime en  $C/m^2$ .

### 1.1.4 Flux électrostatique

Par définition, le flux induit par un champ de vecteur  $\vec{D}$  à travers une surface  $S$  est donné par la relation suivante :

$$\varphi_s = \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} \quad (1.5)$$

où  $\vec{dS}$  est le vecteur normal à l'élément de surface  $S$  au point courant.

Prenons le cas d'une charge  $q$  placée au centre d'une sphère de surface  $S$  et calculons le flux du vecteur induction électrique. La charge étant au centre et à égale distance de chaque point de la surface  $S$  de la sphère, il s'ensuit que le vecteur induction électrique est constant sur la surface et de même direction que la normale  $\vec{dS}$  d'où :

$$\begin{aligned} \vec{E} \text{ et } d\vec{S} \text{ de même direction} &\Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{S} = \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| \\ \varphi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \oiint_S \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \underbrace{4 \cdot \pi \cdot r^2}_{\text{Surf Sphère}} = q \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le flux électrostatique total induit est indépendant du rayon de la sphère.

### 1.1.5 Théorème de Gauss

Le résultat (1.6) a été étendu par Gauss, qui stipule que le flux du vecteur induction électrique  $\vec{D}$  à travers une surface fermée  $S$ , est égal à la somme des charges intérieures.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_S q \quad (1.7)$$

Cette relation simplifie le calcul du champ électrique car elle permet de tenir compte de la symétrie existante dans certains problèmes. Si on fait tendre la surface  $S$  vers 0 alors on obtient la forme locale du théorème de Gauss, soit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.8)$$

où  $\rho$  désigne la densité de charge volumique en  $C/m^3$ .

### 1.1.6 Équations de Maxwell

Au 19<sup>ième</sup> siècle, Maxwell regroupe les lois trouvées par ses prédécesseurs et les exprime sous forme différentielle. Nous en énoncerons deux. La première loi est l'expression locale du théorème de Gauss. Quant à la seconde elle exprime la conservation de la charge. Ces deux expressions, dans le vide, sont données par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \text{div}(\vec{J}(t)) + \frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} \quad (1.10)$$

où  $\vec{J}$  désigne le vecteur densité de courant en  $A/m^2$ ,  $\rho_{\text{libre}}$  la densité surfacique de charge libres en  $A/m^2$  et  $\rho$  désigne la densité volumique de charge en  $C/m^3$  et  $\vec{H}$  le vecteur champ magnétique en l'absence de matériau.

## 1.2 Diélectrique

### 1.2.1 Permittivité relative

Dans l'expression de la force électrostatique donnée en (1.1), celle-ci dépendait de  $\epsilon$  qui est définie comme une propriété du milieu, et sa valeur dépend du système d'unités. Pour éviter cette dépendance, on exprime généralement la permittivité d'un matériau par rapport à la permittivité du vide. De cette façon la permittivité d'un matériau s'exprime comme suit :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.11)$$

Le terme  $\epsilon_0$  désigne la permittivité du vide en  $F/m$  et  $\epsilon_r$  est la permittivité relative, une quantité sans dimension. Comme la permittivité relative ne dépend pas du système d'unités, elle est plus pratique à utiliser. En général on parle de permittivité en faisant allusion à la permittivité relative, mais aucune confusion n'est possible sachant que l'ordre de grandeur de  $\epsilon$  est de  $10^{-10}$  F/m, alors que celui de  $\epsilon_r$  est supérieur à 1.

### 1.2.2 Polarisation

Lorsque soumis à un champ électrique, les électrons et atomes ont tendance à se déplacer légèrement de leur position d'équilibre, donnant lieu à une situation où des charges de signes opposées ( $-q$  et  $+q$ ) sont séparées par une petite distance  $d$ .

On définit le moment dipolaire comme suit :

$$\vec{p} = qd\vec{u} \quad (1.12)$$

où  $q$  est la charge,  $d$  la distance entre les charges de signes opposées,  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé d'une charge vers l'autre et  $\vec{p}$  le moment dipolaire ou de polarisation.

Au niveau macroscopique la polarisation  $\vec{P}$  volumique, est vue comme étant la contribution des dipôles élémentaires par unité de volume.

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p} \quad (1.13)$$

où  $\vec{p}$  représente le moment dipolaire moyen et  $N$  la densité moléculaire.

Dorénavant on parlera de la polarisation, pour désigner la polarisation volumique.

Lorsque le matériau est linéaire et isotrope, ce qui revient à dire que la polarisation est proportionnelle au champ et indépendante de la direction de celui ci, on a la relation locale suivante :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.14)$$

où  $\chi$  est une quantité sans dimension appelée susceptibilité électrique. Elle informe sur la capacité du matériau à se polariser.

L'induction diélectrique dans le diélectrique est donné par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (1.15)$$

où  $\epsilon_r$  désigne la permittivité électrique relative.

### 1.2.3 Capacité

On définit la capacité  $C$  d'un diélectrique comme le rapport entre la charge  $Q$  accumulée entre les électrodes et la différence de potentiel  $U$  entre les électrodes.

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.16)$$

$C$  s'exprime en F

La valeur de la capacité lorsque le diélectrique est remplacé par du vide est appelée capacité géométrique ou capacité sous vide. La relation entre la permittivité relative et la capacité est donnée par l'expression suivante :

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (1.17)$$

où  $C_0$  désigne la capacité géométrique en F/m.

### 1.2.4 Mécanismes de polarisation

La matière est composée de molécules qui sont des arrangements d'atomes. Ceux ci sont à leur tour composés de protons entourés d'un nuage d'électrons. Lors de l'application d'un champ électrique, la polarisation résulte de la superposition de trois mécanismes, tel qu'illustré dans la figure 1 [1].

Polarisation électronique. Elle est le résultat de la déformation du nuage électronique, résultante de l'équilibre entre la force électrostatique que subissent les électrons en présence du champ électrique et les forces de liaison. Ce type de polarisation se produit presque instantanément et de ce fait épouse parfaitement toute variation du champ électrique.

Polarisation moléculaire. Lorsque les molécules qui composent le matériau sollicité ne présentent pas de symétrie au niveau de leur structure moléculaire, c'est-à-dire que le barycentre des charges positives et des charges négatives ne coïncident pas, on observe un couple de force qui tendra à aligner le dipôle ainsi formé dans une situation d'équilibre où il minimise son énergie potentielle. Ce type de polarisation est plus lent que la polarisation électronique et possède une constante de temps caractéristique qui dépend du matériau considéré.

Polarisation interfaciale. Lorsque deux matériaux de permittivité et conductivité différentes sont en contact, les charges libres se concentrent aux interfaces. Dans le cas du transformateur, la contribution la plus importante est celle provenant de l'accumulation des porteurs de charge libres de l'huile aux interfaces avec le papier, sous l'effet du champ électrique.

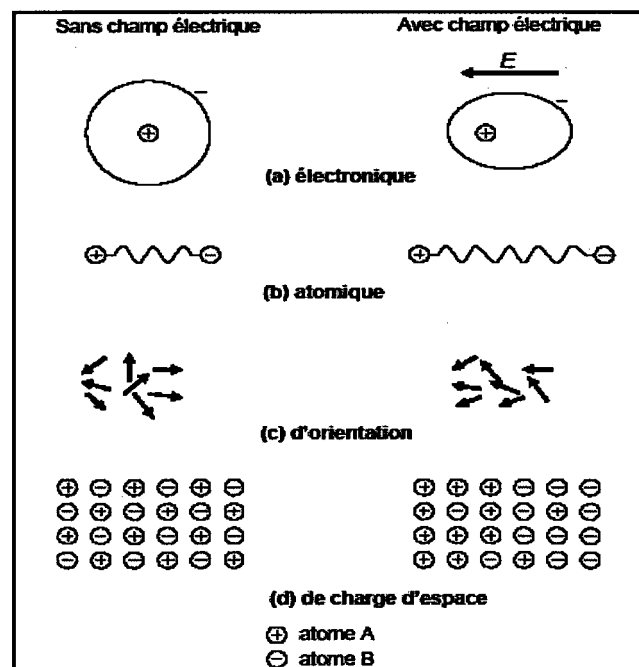


Figure 1 Les différents types de mécanismes de polarisation [1]

On retiendra, que de tous les phénomènes ci-dessus, la polarisation interfaciale et la polarisation d'orientation restent les plus intéressants à étudier car ils se produisent sur une grande plage de fréquence et sont influencés par l'arrangement de la matière dans le matériau.

### 1.3 Expression analytique de la densité de courant

Auparavant, nous rappellerons deux résultats d'analyse vectorielle.

En premier lieu, nous énoncerons l'une des formules de Leibniz pour les produits.

$$\operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} + \vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{P} \quad (1.18)$$

En second lieu, nous énoncerons le théorème de la divergence.

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{P}) d\Omega = \iint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (1.19)$$

où  $\Gamma$  est la surface limitant le volume  $\Omega$  et le vecteur  $d\vec{S}$ , est le vecteur normale à la surface  $\Gamma$ .

Le potentiel  $dV$  créé par un petit volume de dipôles  $dv$  en un point  $M$  s'écrit :

$$dV_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} dv \quad (1.20)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur dirigé du centre du volume  $dv$  vers le point  $M$ ,  $r$  la distance entre le centre du dipôle et le point  $M$  et  $\vec{P}$  la polarisation.

Soit un volume  $\Omega$  délimité par une surface fermée  $\Gamma$ . La contribution de tous les dipôles du volume  $\Omega$  en un point  $M$  de sa surface  $\Gamma$  est donnée par :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} dv \quad (1.21)$$



où  $\vec{P}$  est le vecteur polarisation volumique tel que défini par (1.14),  $r$  la distance entre le point d'intégration courant et le point  $M$  et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé du point d'intégration courant vers le point  $M$ . D'après les formules de calcul différentiel on a :

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}}{r^2} \quad (1.22)$$

D'après (1.22), on peut écrire (1.21) sous la forme :

$$V_M = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} dv \quad (1.23)$$

En utilisant la relation (1.18), on peut écrire que :

$$\vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} \quad (1.24)$$

En remplaçant le résultat de (1.24) dans (1.23), on obtient :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} dv \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \operatorname{div}(\vec{P}) dv \quad (1.25)$$

En utilisant le résultat (1.19) pour l'expression entre crochets, dans (1.25), on obtient :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Gamma} \frac{1}{r} (\vec{P} \cdot d\vec{S}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} (\operatorname{div}(\vec{P})) dv \quad (1.26)$$

Le potentiel de la distribution volumique de dipôles est équivalente au potentiel créé par :

- La surface  $\Gamma$  entourant le volume  $\Omega$ , chargée avec  $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ .
- Le volume  $\Omega$  chargé avec  $-\operatorname{div}(\vec{P})$ .

Appliquons la loi de Gauss locale à la surface  $\Gamma$  enveloppant  $\Omega$ , qui se trouve être l'interface entre le diélectrique et les électrodes. On obtiendrait comme résultat que la densité volumique de charge due à la polarisation et au champ électrique est égale à la densité volumique de charge sur l'électrode. Ce qui se traduit par la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{P}) = \rho_{\text{électrode}} \quad (1.27)$$

Comme les électrodes sont un élément conducteur, le champ électrique à l'intérieur est nul. Il s'ensuit que la densité de charge volumique des électrodes se résume à la densité surfacique de charge libre sur l'électrode. Nous obtenons alors :

$$\rho_{\text{électrodes}} = \rho_{\text{libre}} \quad (1.28)$$

En combinant les relations (1.27) et (1.28), nous obtenons :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \quad (1.29)$$

Nous avons ainsi établi une première relation entre la polarisation, propriété du matériau, et la densité de charge libre qui est lié à la notion de courant. Relation que nous allons expliciter par la suite.

Appliquons la relation de Maxwell (1.9) avec (1.29) on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{J}) = -\frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}] \quad (1.30)$$

Pour déduire la densité de courant totale, on doit tenir compte aussi de la densité de courant reliée aux charges mobiles dans le diélectrique. Si nous la supposons proportionnelle au champ électrique cela se traduit par la relation suivante :

$$\vec{J}_{\text{mobile}}(t) = \sigma \vec{E}(t) \quad (1.31)$$

où  $\sigma$  désigne la conductivité en S/m.

En additionnant les contributions de (1.30) et (1.31) on a :

$$\vec{J}_{\text{totale}}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t)] \quad (1.32)$$

On obtient donc une relation liant les caractéristiques du diélectrique à la densité de courant. Dans le cas où l'électrode entoure complètement le diélectrique à travers une surface S on peut écrire :

$$i = \oiint_{\text{Surface}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.33)$$

où  $i$  est le courant électrique en A

Les équations (1.32) et (1.33) donnent alors :

$$i = \oiint_{\text{Surface}} \left( \sigma \vec{E}(t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t)] \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.34)$$

Cette relation sert comme point de départ à une multitude de théories et de modèles. Dans ce qui suit nous abordons le modèle linéaire à cause de ses implications pratiques pour notre projet et son grand champ d'application.

## CHAPITRE 2

### REVUE DE LA LITTÉRATURE

#### 2.1 Modèle linéaire

En électricité, le principe de superposition des effets est un principe bien établi et maintes fois vérifié. C'est le procédé le plus populaire pour modéliser la relation entre la cause et l'effet. Il repose sur la supposition de linéarité entre la fonction de réponse locale et le champ d'excitation. Soit  $f(t)$ , la fonction de réponse diélectrique du système au champ électrostatique  $\vec{E}$ . Si cette fonction de réponse est invariante dans le temps, alors la relation entre le champ électrostatique  $\vec{E}$  et le champ de polarisation  $\vec{P}$  est donnée par l'opérateur convolution  $\otimes$  défini comme suit :

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 (f \otimes \vec{E})(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} f(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

En injectant l'expression  $\vec{P}$  de la relation (2.1) dans (1.32) on obtient :

$$\vec{J}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \vec{E}(t) + \int_0^{\infty} f(t-\tau) \vec{E}(\tau) d\tau \right] \quad (2.2)$$

Comme on s'intéresse plus aux processus des temps longs, les auteurs dans [2] montrent que l'on peut décomposer la fonction de réponse donnée par (2.1) en une fonction de réponse instantanée et une fonction de réponse pour les temps plus grands. Les auteurs montrent qu'on aboutit alors à la relation suivante :

$$\vec{J}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon_{\infty} \vec{E}(t) + \int_0^{\infty} f_s(\tau) \vec{E}(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.3)$$

où  $\varepsilon_\infty$  représente la permittivité aux temps très courts et  $f_s$  représente la fonction de réponse pour les temps plus grands.

En utilisant les relations (1.33) et (2.3), on obtient :

$$i(t) = \sigma \iint_S \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon_\infty \iint_S \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} + \int_0^\infty f_s(\tau) \left[ \iint_S \vec{E}(t-\tau) \cdot d\vec{S} \right] d\tau \right] \quad (2.4)$$

où  $i(t)$  est le courant électrique.

En utilisant la loi de Gauss on peut écrire :

$$\iint_S \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2.5)$$

où  $Q$  désigne la charge totale des électrodes en Coulomb.

Finalement en utilisant la relation(1.16) on obtient :

$$\iint_S \vec{E}(t) \cdot d\vec{S} = \frac{C_0 U(t)}{\varepsilon_0} \quad (2.6)$$

où  $C_0$  désigne la capacité géométrique en Farad et  $U$  la tension entre les électrodes en Volts.

La relation (2.6) permet d'écrire (2.4) comme suit :

$$i(t) = \sigma \frac{C_0 U(t)}{\varepsilon_0} + C_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \varepsilon_\infty U(t) + \int_0^\infty f_s(\tau) U(t-\tau) d\tau \right] \quad (2.7)$$

Dans la relation précédente, la tension  $U$  constitue la variable indépendante et son choix judicieux peut renseigner sur la fonction de réponse, et ainsi donner lieu à différents protocoles expérimentaux comme on le verra ci-après. Dorénavant nous utiliserons le terme fonction réponse pour désigner la fonction de réponse lente.

### 2.1.1 Méthode PDC (Polarization and Depolarization current) "Courant de polarisation et dépolarisation"

Lorsque  $U(t)$  est un échelon de tension, on a alors :

$$\frac{\partial U(t-a)}{\partial t} = \delta(t-a)U(a) \quad (2.8)$$

En remplaçant (2.8) dans (2.7) avec  $a = 0$ , il vient :

$$i(t) = C_0 U \left[ \frac{\sigma}{\varepsilon_0} + \varepsilon_\infty \delta(t) + f_s(t) \right] \quad (2.9)$$

La méthode consistant à appliquer un échelon de tension porte le nom de PDC (Polarization Depolarization Current). Elle consiste à soumettre un échantillon du diélectrique à analyser à un échelon de tension pendant un temps suffisamment long, et à mesurer le courant de charge. Le courant observé contient en plus du courant de conduction tous les courants de polarisation à savoir la réponse instantanée et la réponse lente, le tout pondérée par la capacité géométrique. L'avantage de cette méthode est que les effets de chacun des composants huile et papier se manifestent à des plages temporelles différentes. Ainsi dans la figure 2 [3], on peut voir, à titre d'exemple, que l'effet du changement de l'huile d'un transformateur, influe sur la valeur du courant de charge aux temps courts. De la même façon, la modification des caractéristiques du papier modifiera la valeur du courant de charge aux temps longs.

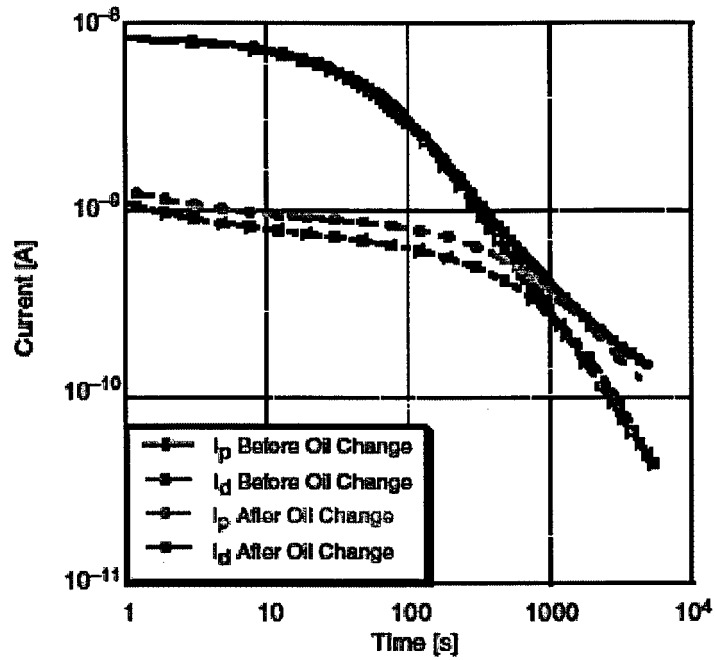


Figure 2 Courant de polarisation et dépolarisation avant et après un changement d'huile [3]

### 2.1.2 FDS (Frequency Domain Spectroscopy )

Effectuons la transformée de Fourier de (2.7). On obtient :

$$\mathfrak{I}(i) = \frac{\sigma C_0}{\varepsilon_0} \mathfrak{I}(U) + \hat{j}\omega C_0 \left[ \varepsilon_\infty \mathfrak{I}(U) + \mathfrak{I} \left( \int_0^\infty f_s(\tau) U(t-\tau) d\tau \right) \right] \quad (2.10)$$

Sachant que la transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier, (2.10) devient :

$$\mathfrak{I}(i) = \hat{j}\omega C_0 \mathfrak{I}(U) \left[ \frac{\sigma}{\hat{j}\omega \varepsilon_0} + \varepsilon_\infty + \mathfrak{I}(f_s) \right] \quad (2.11)$$

Finalement, en remarquant que  $\frac{1}{\hat{j}} = -\hat{j}$ , on obtient :

$$\mathbf{I} = \hat{j}\omega C_0 \mathbf{U} \left( \underbrace{[\varepsilon_\infty + \mathbf{F}] - \hat{j} \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}}_{\mathcal{E}^*_{totale}} \right) \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{I}$  désigne le phaseur courant,  $\mathbf{U}$  celui de la tension  $U$  et  $\mathbf{F}$  la transformée de Fourier de la fonction de réponse lente  $f_s(t)$ . Cette méthode appelée FDS (Frequency domain spectroscopy), consiste à soumettre un système d'isolation à des tensions sinusoïdales à différentes fréquences et à mesurer pour chacune d'elle le module du courant et le déphasage entre le courant et la tension.

À titre d'exemple supposons que la fonction de réponse s'écrit  $f(t) = \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$ , alors sa transformée de Fourier  $F$  est donnée par :

$$\mathbf{F}(\omega) = \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} - \hat{j} \frac{\tau^2 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad (2.13)$$

En reportant (2.13) dans (2.12) on obtient :

$$\mathbf{I} = \hat{j}\omega C_0 \mathbf{U} \left[ \varepsilon_\infty + \frac{\tau}{1 + \tau^2 \omega^2} - \hat{j} \left( \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} + \frac{\tau^2 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \right) \right] \quad (2.14)$$

L'équation ci-dessus décrit un mécanisme de dispersion de Debye. Ce mécanisme a été explicité pour la première fois par Paul Debye [4]. Ceci lui a valu le prix Nobel de la chimie en 1936. Nous décrirons ce type de dispersion plus tard dans le texte.



Dans [5], Gäfvert montre que la méthode FDS est facile à interpréter, peu sensible au bruit et ne nécessite qu'une source de tension peu élevée. De plus, les méthodes de mesure des données fréquentielles telles que la tangente de l'angle des pertes (2.16) et la capacité sont connues et investiguées depuis longtemps.

### 2.1.3 Permittivité complexe

Dans la relation (2.12), le terme entre crochets contient des caractéristiques qui ne dépendent que du matériau. La permittivité complexe peut être définie par :

$$\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (2.15)$$

où la quantité  $\varepsilon''$  exprime la composante du courant en phase avec la tension.

Le terme  $\varepsilon''$  est responsable des pertes diélectriques.  $\varepsilon'$  exprime la composante du courant en avance de  $90^\circ$  sur la tension. On caractérise aussi le diélectrique par la tangente de l'angle des pertes,  $\delta$ , tel que :

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \quad (2.16)$$

La quantité  $\varepsilon''_{totale}$  contient tous les mécanismes de perte incluant ceux reliés à la conductivité. Ce qui se traduit par la relation suivante :

$$\varepsilon''_{totale} = \varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \quad (2.17)$$

Finalement, la relation (2.12) devient :

$$\mathbf{I} = j\omega C_0 \mathbf{U} \left( \varepsilon' - j\varepsilon''_{totale} \right) \quad (2.18)$$

Gäfvvert dans [5], explique qu'en réalité la permittivité dépend non seulement de la fréquence mais également de la température et de l'humidité. Ainsi pour un niveau d'humidité donnée (2.15) s'écrit :

$$\varepsilon^*(\omega, T) = \varepsilon'(\omega, T) - j\hat{\varepsilon}''(\omega, T) \quad (2.19)$$

## 2.2 Circuits équivalents

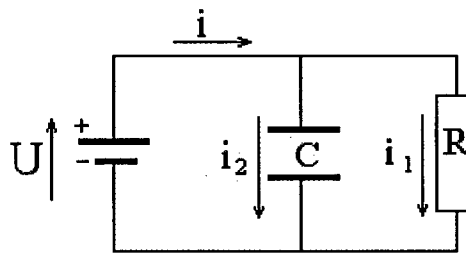


Figure 3 Résistance R en // avec la capacité C

Dans le circuit de la figure 3, d'après la loi des nœuds, on peut déduire que :

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{I}, \mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  désignent respectivement les phaseurs des courant  $i, i_1$  et  $i_2$ .

Les lois usuelles donnent les relations suivantes pour l'expression des phaseurs de courants individuels.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{U}}{R} \\ \mathbf{I}_2 &= \hat{j}C\omega\mathbf{U} \end{aligned} \quad (2.21)$$

En remplaçant dans (2.20) les courants par leur expression donnée par (2.21), on obtient :

$$\mathbf{I} = \mathbf{U} \left( \frac{1}{R} + \hat{j}C\omega \right) \Leftrightarrow \mathbf{I} = \hat{j}\omega C_0 \mathbf{U} \left( \frac{C}{C_0} - \hat{j} \frac{1}{RC_0\omega} \right) \quad (2.22)$$

Si on fait l'analogie avec (2.18) on obtient que :

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \frac{C}{C_0} \Leftrightarrow C = \varepsilon' C_0 \\ \varepsilon'' &= \frac{1}{RC_0\omega} \Leftrightarrow R = \frac{1}{\varepsilon'' C_0\omega} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ce qui montre qu'on peut assimiler la polarisation comme la mise en parallèle d'une résistance idéale de valeur  $\frac{1}{\varepsilon'' C_0\omega}$  et d'une capacité idéale de valeur  $\varepsilon' C_0$ .

De façon générale, lorsqu'on a une idée de l'arrangement des circuits passifs qui composent un système diélectrique, on peut calculer le rapport  $\mathbf{Y}$  entre le phaseur du courant  $\mathbf{I}$  et le celui de tension  $\mathbf{U}$ . Alors en utilisant la relation (2.18), on peut exprimer la permittivité complexe en fonction de ce rapport par le biais de la relation suivante :

$$\mathbf{I} = \hat{j}\omega C_0 \mathbf{U} \varepsilon_r^* \Leftrightarrow \varepsilon_r^* = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{U}} \frac{1}{\hat{j}\omega C_0} = \frac{\mathbf{Y}}{\hat{j}\omega C_0} \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{Y}$  désigne l'admittance (inverse de l'impédance) du circuit modélisant.

Dans le cas où l'on n'a pas une idée précise de la capacité géométrique  $C_0$ , ce qui est généralement le cas, on remplace la permittivité par la capacité complexe définie par :

$$\left. \begin{aligned} C_0 \varepsilon_r^* &= \frac{\mathbf{Y}}{\hat{j}\omega} \\ C^* &= C_0 \varepsilon_r^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow C^* = \frac{\mathbf{Y}}{\hat{j}\omega} = \frac{1}{\hat{j}\omega \mathbf{Z}} = C' - \hat{j}C'' \quad (2.25)$$

La relation (2.24) exprime que l'on peut retrouver la permittivité d'un système lorsqu'on connaît son circuit équivalent.

### 2.2.1 Circuit R.(R//C)

Appliquons cette technique de modélisation à un transformateur. En première estimation, celui-ci peut être vu comme une barrière de papier en série avec de l'huile. L'huile est modélisée par une résistance. Quant au papier, il peut être vu comme une résistance en parallèle avec une capacité pour tenir compte respectivement de la conductivité et de l'effet capacitif. Ceci aboutit au circuit électrique de la figure 4.

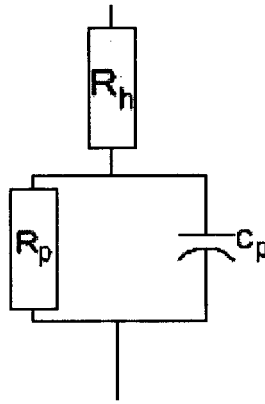


Figure 4 Schéma équivalent d'un transformateur

$R_h$  désigne la résistance de l'huile,  $C_p$  et  $R_p$  désignant respectivement la capacité et la résistance du papier. Les règles de composition élémentaire des éléments passifs donne une impédance de :

$$Z = \frac{R_p}{(C_p R_p)^2 \omega^2 + 1} + R_h - j \frac{C_p R_p^2 \omega}{(C_p R_p)^2 \omega^2 + 1} \quad (2.26)$$

En utilisant la formule (2.25) on obtient que :

$$C' = \frac{C_p R_p^2}{(C_p R_h)^2 R_p^2 \omega^2 + (R_h + R_p)^2} \quad (2.27)$$

$$C'' = \left( \frac{C_p^2 R_h R_p^2 \omega^2 + R_h + R_p}{\omega ((C_p R_h)^2 R_p^2 \omega^2 + (R_h + R_p)^2)} \right) \quad (2.28)$$

où  $C'$  et  $C''$  désignent respectivement la partie réelle et imaginaire de la capacité complexe.

Normalement, la résistante de l'huile est très inférieure devant celle du papier, ce qui se traduit par  $R_h \ll R_p$ . (2.27) devient :

$$C' \approx \frac{C_p}{1 + (C_p R_h)^2 \omega^2} \quad (2.29)$$

L'équation (2.28) quant à elle devient :

$$C'' \approx \left( \frac{1}{\omega R_p} \frac{1 + \frac{(C_p R_h)^2 R_p}{R_h} \omega^2 + 1}{(C_p R_h)^2 \omega^2 + 1} \right) \quad (2.30)$$

En posant  $\tau = C_p R_h$ ,  $G = \frac{1}{R_p}$  et  $b = \frac{R_h}{R_p}$ , (2.29) et (2.30) deviennent respectivement :

$$C' \approx \frac{\tau G}{b} \frac{1}{(1 + \tau^2 \omega^2)} \quad (2.31)$$

$$C'' \approx G \frac{\left( 1 + \frac{\tau^2}{b} \omega^2 \right)}{\omega (1 + \tau^2 \omega^2)} \quad (2.32)$$

Les figures 5 et 6, donnent l'allure générale des deux courbes. Comme le montre la figure 5,  $C''$  présente un pic de relaxation.

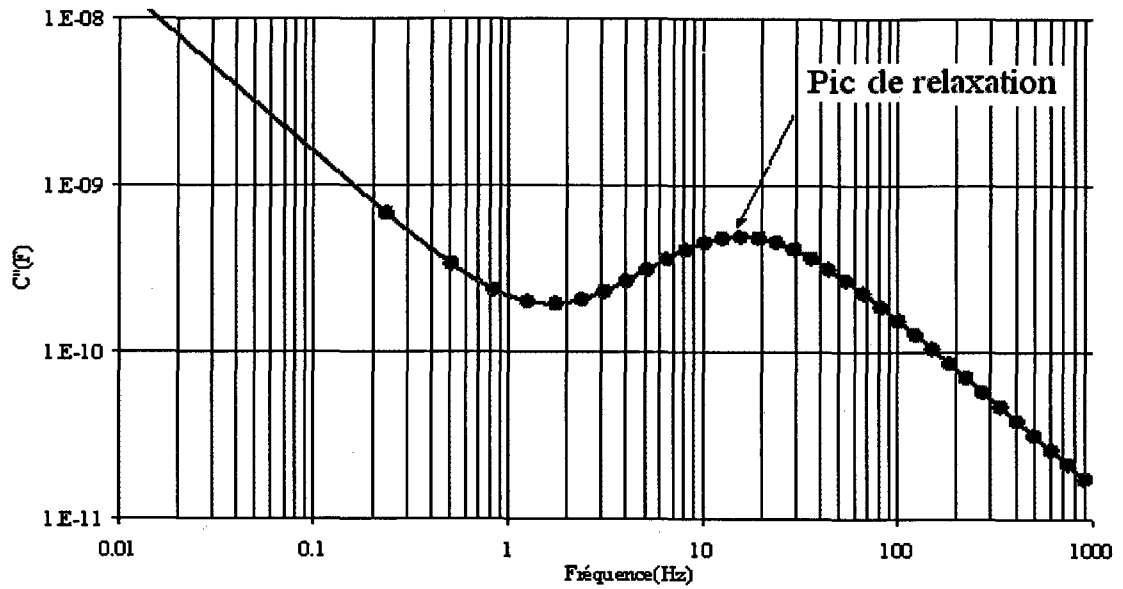


Figure 5 Capacité imaginaire versus fréquence

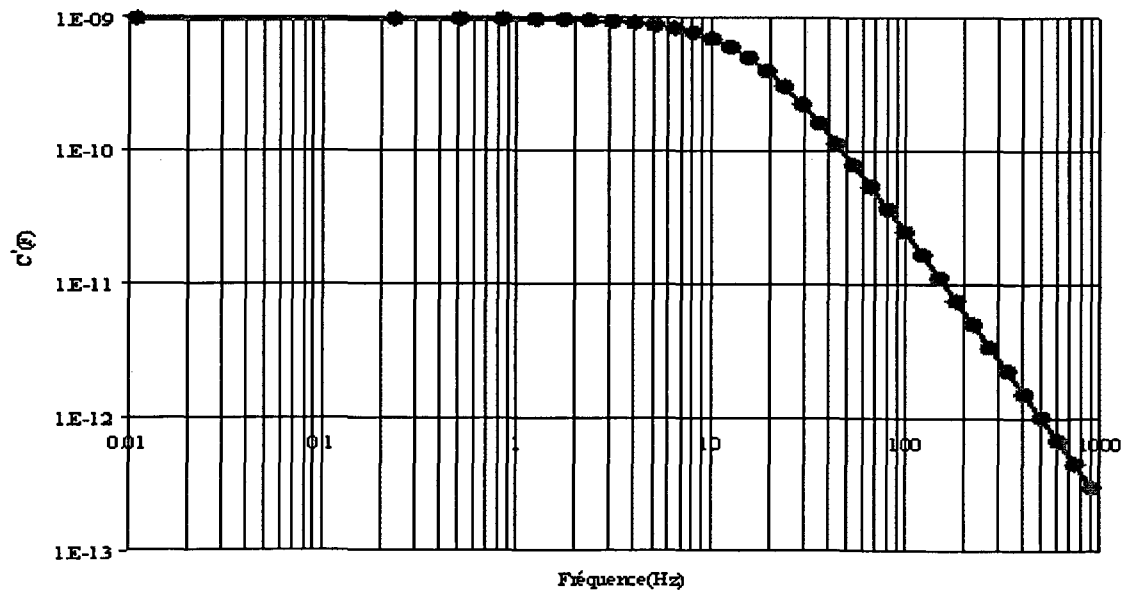


Figure 6 Capacité réelle versus fréquence

Les paramètres du modèle  $R_h$ ,  $R_p$  et  $C_p$  sont déterminés par ajustement des courbes induites par (2.31) et (2.32) avec les courbes expérimentales. Si l'on connaît la capacité géométrique de l'huile et du papier, alors on peut obtenir la conductivité de l'huile et du papier via les deux relations suivantes :

$$\sigma_h = \frac{\varepsilon_0}{R_h \cdot C_{0h}} \quad (2.33)$$

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_0}{R_p \cdot C_{0p}} \quad (2.34)$$

où  $C_{0h}$  et  $C_{0p}$ , désigne respectivement les capacités géométriques de l'huile et du papier.

### 2.2.2 Circuits RC en parallèle

Revenons à l'équation (2.12). On y distingue trois termes: une réponse immédiate que l'on peut modéliser par une capacité pure  $C$ , un courant de conduction que l'on peut modéliser par une résistance  $R_0$ , et une fonction de réponse dans laquelle l'on suppose que plusieurs constantes de temps participent, ce qui se traduit par des circuits  $R_i C_i$  en parallèle. Il s'ensuit que le transformateur en tant que diélectrique peut être représenté par le schéma de la figure 7 [6].

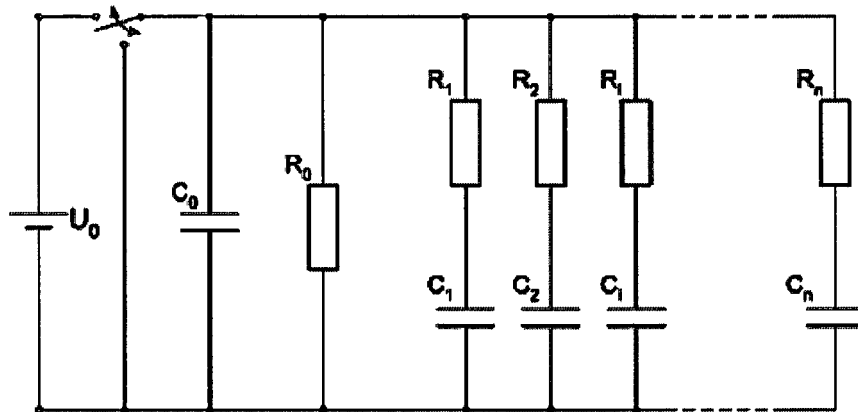


Figure 7 Circuit équivalent [6]

Toujours d'après [6] les auteurs montrent que  $C_0$  et  $R_0$  sont obtenus à travers les mesures temporelles et fréquentielles, tandis que les valeurs  $R_i C_i$  peuvent être déduites en ajustant le courant de polarisation de la façon qui suit. Si  $\tau_i = R_i C_i$  et  $A_i = U \left( 1 - e^{(-t_p/\tau_i)} \right) / R_i$  alors il faut ajuster la courbe analytique suivante avec la courbe expérimentale.

$$i_p = \sum_{i=1}^n A_i e^{(-t/\tau_i)} \quad (2.35)$$

Dans [6] l'auteur procède comme suit. Après soustraction du courant de conduction, il suppose que le courant aux temps longs est dû uniquement au circuit ayant la constante de temps la plus élevée. Après ajustement, le courant induit par cette branche est soustrait de la courbe expérimentale et le processus reprend avec la nouvelle courbe. Ce processus est itéré jusqu'à atteindre les temps courts. Toujours dans [6], Saha estime que le nombre de circuits en parallèle nécessaire pour modéliser les résultats expérimentaux varie entre 6 et 10.



### 2.2.3 Modèle XY

Dans [3], Gubanski explique que la réponse diélectrique du composé papier-huile ne dépend pas seulement de la réponse de chacun des composants mais aussi de la façon dont ils seront combinés. En particulier lorsque ces deux médias sont mis ensemble il y a accumulation de charges aux interfaces. Cet effet porte le nom de polarisation interfaciale ou effet Maxwell-Wagner. Dans [5], Gäfvert commence par modéliser cette géométrie comme dans la figure 8. Les paramètres X et Y expriment respectivement la quantité relative de séparateur et de barrière. Pour notre modèle, X et Y étaient de 12 % et 20 %, respectivement.

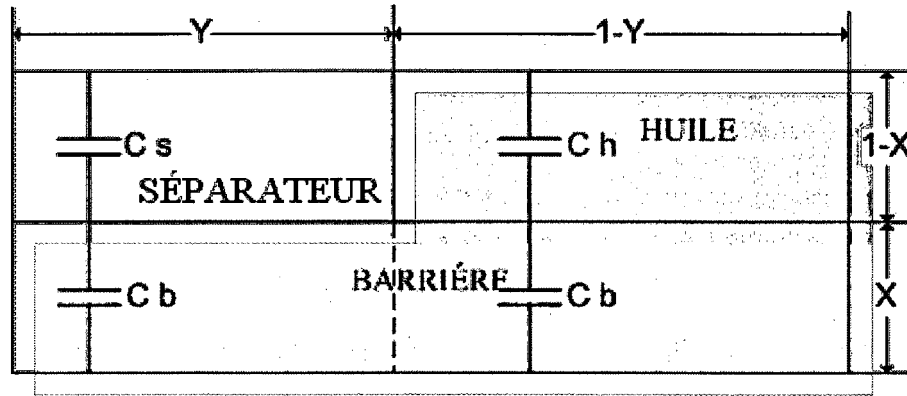


Figure 8 Cellule unitaire [5]

Puis en utilisant les règles de combinaison de capacité en série et en parallèle, on obtient l'expression suivante [5] :

$$\varepsilon^*(\omega, T) = \frac{Y}{\frac{1-X}{\varepsilon_{spacer}^*} + \frac{X}{\varepsilon_{barrier}^*}} + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{\varepsilon_{Oil}^*} + \frac{X}{\varepsilon_{barrier}^*}} \quad (2.36)$$

Comme en général les matériaux constituant le séparateur et la barrière sont assez semblables, on peut supposer l'égalité de leur permittivité complexe. La relation (2.36) se simplifie alors en :

$$\varepsilon^*(\omega, T) = Y\varepsilon_{\text{papier}}^* + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{\varepsilon_{\text{Oil}}^*} + \frac{X}{\varepsilon_{\text{papier}}^*}} \quad (2.37)$$

En général, les mesures FDS donnent la capacité plutôt que la permittivité, ce qui est à  $C_0$  près la même chose. Exprimée en termes de capacité (2.37) devient :

$$C^*(\omega, T) = C_0 \left( Y\varepsilon_{\text{papier}}^* + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{\varepsilon_{\text{Oil}}^*} + \frac{X}{\varepsilon_{\text{papier}}^*}} \right) \quad (2.38)$$

Pour prédire les courbes expérimentales de  $C^*$  en fonction de la fréquence, il est nécessaire de procéder à la modélisation de la permittivité de chacun des matériaux utilisés. Concernant l'huile, dans les fréquences où se font les mesures, la partie réelle de la permittivité est essentiellement constante et égale à 2.2. Quant à la partie imaginaire, elle est largement dominée par la conductivité [5]. En vertu de quoi, et conformément à la relation (2.17) qui explicite la contribution de la conductivité à la permittivité complexe, on obtient :

$$\varepsilon_h = 2.2 - j \frac{\hat{\sigma}_h}{\varepsilon_0 \omega} \quad (2.39)$$

où  $\sigma_h$  désigne la conductivité électrique de l'huile en S/m.

Concernant le composé papier imprégné d'huile, sa dépendance vis-à-vis de la fréquence étant plus difficile à obtenir, Gäfvert procède comme suit [5]. À partir de mesures expérimentales, il obtient la permittivité relative pour différentes valeurs d'humidité et sauvegarde les résultats sous forme de vecteurs. La dépendance en température est

résolue par des translations en fréquence appropriée, l'énergie d'activation se situant aux alentours de 0.9 eV. Nous parlerons plus en détail de cette technique plus loin dans le texte. Pour les valeurs intermédiaires d'humidité, l'interpolation permet de déduire les valeurs de la permittivité complexe.

Dans l'équation (2.38), les inconnues sont la permittivité du papier et de l'huile, ainsi que la capacité géométrique  $C_0$ . Uno Gäfvert dans [5] procède en ajustant les propriétés des matériaux jusqu'à ce qu'il y ait une bonne adéquation entre la courbe expérimentale et la courbe analytique. L'ajustement peut se faire manuellement comme il pourrait se faire avec la méthode de régression linéaire que nous expliquerons et implémenterons pour un autre modèle analytique.

## 2.3 Modèles physiques

Les modèles électriques précédents permettent de trouver les caractéristiques diélectriques du matériau à l'étude. Les modèles physiques quant à eux, se basent sur la recherche de fonctions paramétriques qui s'ajustent au mieux avec la courbe expérimentale. Les fonctions paramétriques peuvent être obtenues soit à travers une modélisation des phénomènes physiques comme c'est le cas dans le modèle de Debye, soit par le biais de fonctions empiriques. Dans ce dernier cas, les paramètres obtenus n'ont aucune interprétation physique. Leur seul intérêt, réside dans la possibilité d'effectuer le traitement analytique des courbes expérimentales.

### 2.3.1 Le modèle de Debye

Supposons que l'interaction entre les dipôles soit négligeable, qu'il existe une polarisation instantanée  $P_\infty$  et que la vitesse de changement de la polarisation soit proportionnelle, à la distance la séparant de la polarisation d'équilibre, on peut alors écrire l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{(P_s - P)}{\tau} \text{ avec } \{P(0_+) = P_\infty\} \quad (2.40)$$

Cette équation admet comme solution temporelle :

$$P(t) = [P_\infty + (P_s - P_\infty)(1 - e^{-t/\tau})] \quad (2.41)$$

Supposons en outre que :

$$P_\infty = \varepsilon_\infty E; P_s = \varepsilon_s E \quad (2.42)$$

où  $\varepsilon_\infty$  et  $\varepsilon_s$  désignent respectivement la permittivité aux hautes fréquences et la permittivité statique. La quantité  $\tau$  désigne la constante de temps de relaxation.

En remplaçant (2.42) dans (2.41) on obtient :

$$\frac{P(t)}{E} = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)(1 - e^{-t/\tau}) \quad (2.43)$$

L'équivalent fréquentiel de (2.43) est :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + i\omega\tau} \quad (2.44)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (2.46)$$

La relation (2.44) a été établie par Peter Debye vers les années 1930 pour les liquides polaires. Elle peut s'énoncer comme suit "En présence d'une population de dipôles n'interagissant pas entre eux, la permittivité et le temps de relaxation sont reliés par la relation (2.44).

La loi de Debye n'est pas valide pour les diélectriques réels particulièrement les diélectriques solides. En effet, dans un solide, les dipôles interagissent entre eux et donc une des suppositions fondamentales de Debye n'est pas vérifiée. On notera l'analogie de la paire d'équations (2.45) , (2.46) avec la paire d'équation (2.31), (2.32) obtenus pour le circuit R(R//C).

La figure 9 représente les permittivités réelle et imaginaire telles que données respectivement par (2.45) et (2.46). La représentation est faite en échelle semi log, c'est à dire que seul l'axe des abscisses "X" est gradué en logarithme, l'axe des ordonnées "Y" conserve la graduation décimale. Ce choix permet d'obtenir des courbes similaires à celles proposées par la littérature.

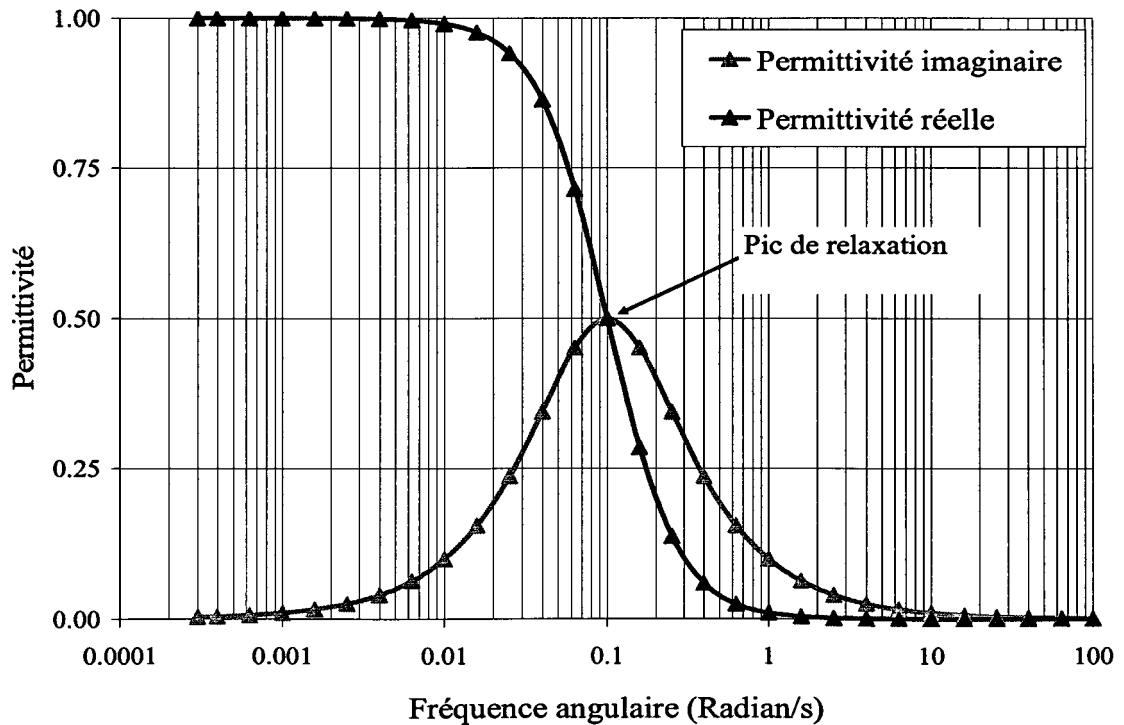


Figure 9 Relaxation de Debye pour une constante de temps de 10

On peut voir que la permittivité imaginaire  $\varepsilon''$  possède un pic de relaxation à la fréquence angulaire 0.1 Radian/s et que la permittivité réelle et imaginaire se coupe à la fréquence angulaire 0.1 Radian/s avec une valeur de 0.5. Au vue de cette figure, on remarque que la permittivité imaginaire présente un pic de relaxation quand la fréquence angulaire a une valeur égale à l'inverse de la constante de temps.

### 2.3.2 Formule de Cole Cole "Dérivée non entière"

Lorsque le comportement est linéaire, le rapport de la transformée de Fourier de la sortie et de la transformée de Fourier de l'entrée, donne une fonction de transfert  $H$  rationnelle. L'équivalent temporel est alors donné par la relation suivante :

$$H = p^{-n} = Y/U \Leftrightarrow \frac{d^n}{dt^n} y(t) - u(t) = 0 \quad (2.47)$$

où  $n$  est un entier naturel.

Supposons que la fonction de transfert  $H$  soit non rationnelle c'est-à-dire de la forme  $H = p^{-\alpha}$  où cette fois  $\alpha$  est un réel entre 0 et 1. On peut définir par analogie un équivalent temporel comme suit :

$$H = p^{-\alpha} = Y/U \Leftrightarrow \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} y(t) - u(t) = 0 \quad (2.48)$$

La dérivée d'ordre non entière n'est pas une bizarrerie mathématique, elle est définie par la formule de Reimann-Liouville citée en annexe. La notion de dérivée non entière permet de retrouver l'équivalent de la formule de Cole Cole [7] :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + (j\tau\omega)^\alpha} \quad (2.49)$$

Le paramètre  $\alpha$  est compris entre 0 et 1.

La figure 10 montre l'influence du paramètre  $\alpha$ . Plus celui-ci tend vers 1, plus le pic de relaxation devient aigü. La fréquence de relaxation reste inchangée.

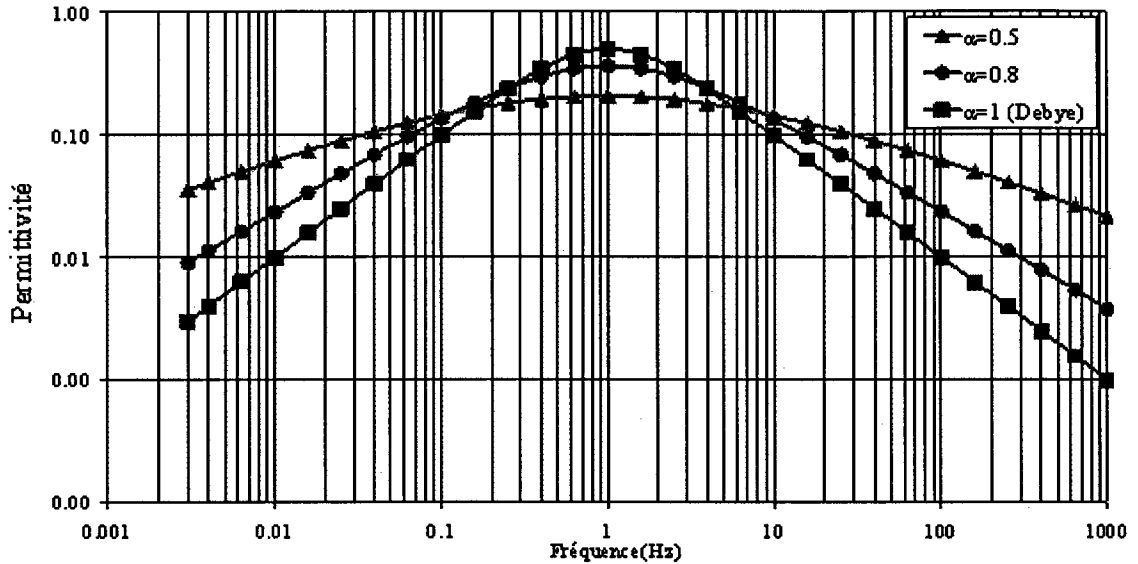


Figure 10 Relaxation de Cole Cole pour différentes valeurs de  $\alpha$

La notion de dérivée non entière veut dire courbe à mi chemin entre une courbe continue non dérivable et une courbe dérivable. Ce sont des courbes à discontinuités régulières se répétant partout et de façon récursive. Cela indique que le phénomène physique n'est pas lisse et dérivable. La branche qui s'intéresse à ces courbes porte le nom de géométrie fractale. Le lecteur intéressé trouvera de plus amples renseignements dans le livre de Mandelbrot, benoit [8].

### 2.3.3 Formule de Cole-Davidson

La formule de Cole-Davidson s'énonce comme suit [9] :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + j\tau\omega)^\beta} \quad (2.50)$$

Le paramètre  $\beta$  est compris entre 0 et 1.

La figure 11, montre que plus la valeur du paramètre  $\beta$  diminue plus le pic de relaxation devient large et asymétrique. De plus, on note une augmentation de la fréquence de relaxation.

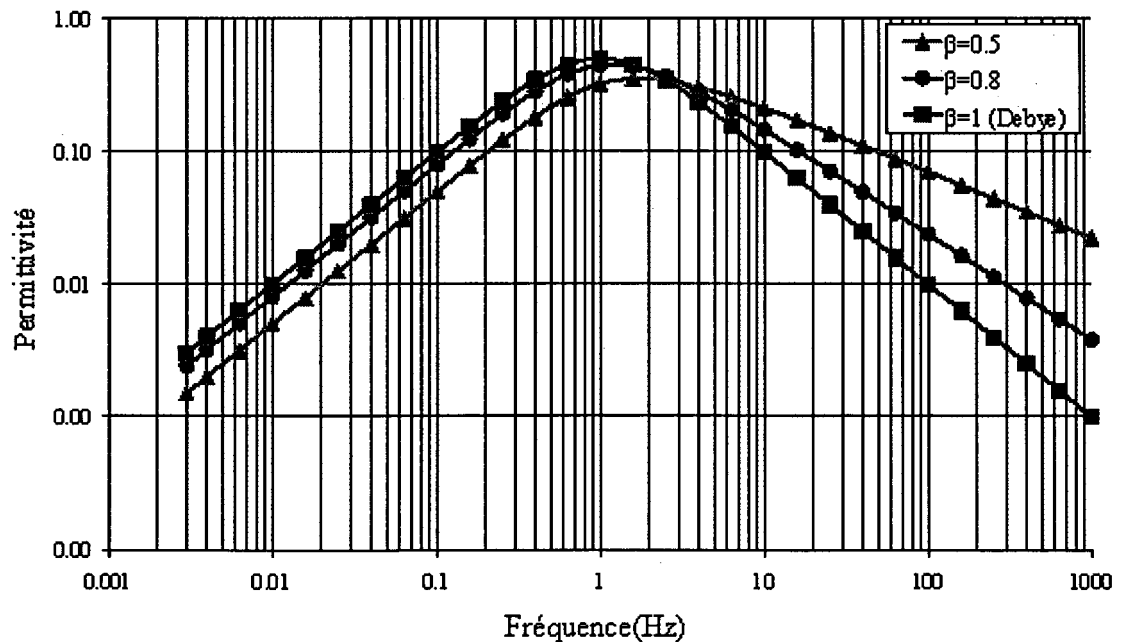


Figure 11 Relaxation de Cole Davidson pour différentes valeurs de  $\beta$



### 2.3.4 Formule de Havriliak Nagami

En combinant les équations (2.49) et (2.50), on peut en déduire la relation empirique de Havriliak Nagami [10] :

$$\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + (j\tau\omega)^\alpha)^\beta} \quad (2.51)$$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont compris entre 0 et 1.

La figure 12 montre l'influence des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

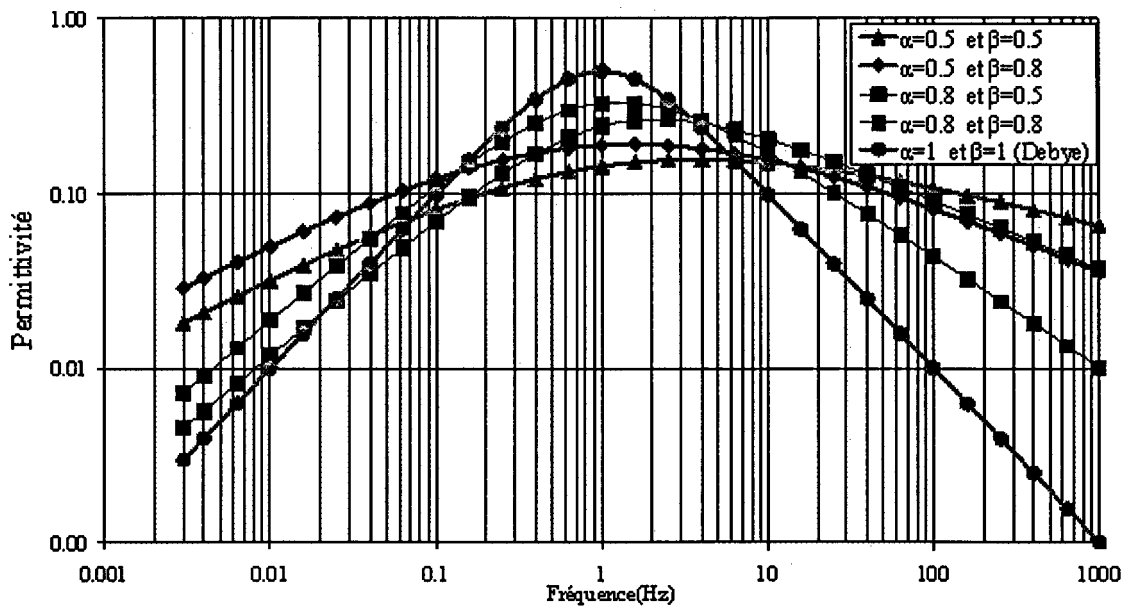


Figure 12 Relaxation de Havriliak Nagami pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $\alpha$

### 2.3.5 Formule de Kirkwood

La transformée de Laplace du modèle induit par le modèle RC en // est donnée par :

$$\varepsilon^*(p) = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \sum_i \frac{A_i}{p + \tau_i} \quad (2.52)$$

Si nous passons à un système continu de cellules RC en // (2.52) devient :

$$\varepsilon^*(p) = (\varepsilon_s - \varepsilon_\infty) \int_0^\infty \frac{\nu(\tau)}{p + \tau} d\tau \quad (2.53)$$

On obtient la formule de J. Kirkwood établie en 1941 qui peut être interprétée comme une infinité de circuits RC en //, ou encore comme une distribution continue de temps de relaxation, où chaque temps de relaxation élémentaire obéit au modèle de Debye.

### 2.3.6 Approche par la distribution des temps de relaxation

La relation (2.53), introduit la notion de distribution de temps de relaxation. En choisissant une distribution  $\nu(\tau)$  adéquate, il est possible de retrouver la plupart des formules présentées précédemment. Les distributions  $\nu(\tau)$ , telles que présentées dans [11], sont résumées dans le tableau I.

Tableau I  
Distribution des temps de relaxation

Formule	Distribution
Cole Cole	$\frac{\sin(\alpha\pi)}{2\pi \cosh[(1-\alpha) \ln(\tau/\tau_0)] - \cos(\alpha\pi)}$
Davidson-Cole	$\frac{\sin(\beta\pi)}{\pi} \left( \frac{\tau}{\tau_0 - \tau} \right)^\beta, \tau < \tau_0$

[11]

### 2.3.7 Formule de Curie-Von Schweidler

Le courant de polarisation dans le cas du modèle de Debye a une décroissance exponentielle. Mais de nombreux résultats publiés pour un ensemble de matériaux allant des polymères aux céramiques, font apparaître une décroissance du courant en puissance du temps. En 1907, Curie-Von Schweidler [13], après l'observation de la réponse temporelle d'une large gamme de diélectrique va émettre une première loi de comportement. Le courant de dépolariation après la mise en court-circuit brusque d'un diélectrique sur lequel était appliqué un champ constant, suit la loi :

$$i(t) = kt^{-n} \tag{2.54}$$

La valeur de n est entre 0 et 1 pour la plupart des diélectriques. Comme on le verra plus loin, l'approximation de Hamon se base sur cette assumption.

## 2.4 Comportement asymptotique

Pour trouver les paramètres des diverses relations ci-dessus, nous pourrions utiliser la régression non linéaire qui ajuste au mieux la courbe expérimentale avec la courbe paramétrique. Cependant comme la plage d'action de chacun des paramètres ne se recouvre que légèrement, on peut utiliser le comportement asymptotique pour calculer les différents paramètres.

Le tableau II, extrait de [13], illustre le comportement asymptotique des relations vues précédemment.

Tableau II

Comportement asymptotique des formules paramétriques

Formule	$\varepsilon^*(p)$	Graduation décimale		Graduation logarithmique	
		$\omega \tau \ll 1$	$\omega \tau \gg 1$	$\omega \tau \ll 1$	$\omega \tau \gg 1$
Debye	$\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + j\omega\tau}$	$\omega$	$\omega^{-1}$	1	-1
Cole-Cole	$\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + (j\tau\omega)^\alpha}$	$\omega^\alpha$	$\omega^{-\alpha}$	$\alpha$	$-\alpha$
Cole-Davidson	$\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + j\tau\omega)^\beta}$	$\omega$	$\omega^{-\beta}$	1	$-\beta$
Havriliak Nagami	$\varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + j\tau\omega^\alpha)^\beta}$	$\omega^\alpha$	$\omega^{-\alpha\beta}$	$\alpha$	$-\alpha\beta$

[9]

Pour toutes les relations ci-dessus, la pente de la représentation logarithmique de la permittivité peut nous renseigner sur la valeur des paramètres.

## 2.5 Récapitulatif

Tableau III

Récapitulatif des formules paramétriques

An	Formule/Modèles	$\varepsilon^*(p)$	Circuit Équivalent
1907	Curie-Von Schweidler	$\Gamma(\alpha + 1) \cdot p^{-\alpha-1}$	
1930	Debye	$\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + \tau p}$	RC
1939	Kirkwood	$\int_0^\infty \frac{\nu(\tau)}{p + \tau} d\tau$	Infinité de RC en //
1941	Cole-Cole	$\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{1 + (\tau p)^\alpha}$	
1951	Cole-Davidson	$\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + \tau p)^\beta}$	
1966	Havriliak-Nagami	$\frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)}{(1 + (\tau p)^\alpha)^\beta}$	

Le tableau III est un récapitulatif des modèles physiques les plus utilisés pour l'analyse des courbes expérimentales. Lorsque les paramètres de ces modèles ont un sens physique, il faut pouvoir les exprimer indépendamment de la température, de l'humidité et de la géométrie. Ci après nous exposons les techniques les plus utilisées.

## 2.6 La température

Dans le modèle d'Arrhenius, le temps de relaxation est fonction de la température. Il obéit à la loi ci-dessous :

$$\tau_T = A e^{\frac{E}{kT}} \quad (2.55)$$

Avec T température absolue exprimée en Kelvin, E l'énergie d'activation, k la constante de Boltzman et A une constante.

Avec un seul temps de relaxation, dans le domaine fréquentiel, l'équation de la permittivité (2.44) est gouvernée par la valeur  $\omega\tau_0$  à la température  $T_0$ . Supposons que la température soit égale à  $T_1$ , la permittivité est gouvernée par  $\omega\tau_1$ . D'après (2.55) on a donc :

$$\tau_{T_1} = A e^{\frac{E}{kT_1}} \quad (2.56)$$

On peut ajouter et retrancher le terme  $\frac{E}{kT_0}$  pour faire apparaître la constante de temps à la température  $T_0$ . Il vient :

$$\tau_{T_1} = A e^{\frac{E}{kT_1} + \frac{E}{kT_0} - \frac{E}{kT_0}} = \tau_{T_0} e^{\left(\frac{E}{kT_1} - \frac{E}{kT_0}\right)} \quad (2.57)$$

En multipliant des deux cotés par  $\omega$  (2.57) devient :

$$\omega\tau_{T_1} = \underbrace{\left( \omega e^{\frac{E}{kT_1} - \frac{E}{kT_0}} \right)}_{\omega'} \tau_{T_0} \quad (2.58)$$

À la température  $T_1$ , la mesure à une fréquence  $\omega$  donnée, est donc égale à la valeur à la température  $T_0$ , mesurée à la fréquence  $\omega$  multipliée d'un déplacement. Le déplacement dépend uniquement de  $T_1$  et de  $T_0$ . On en tire comme conséquence qu'on peut toujours déduire à partir d'une courbe mesurée à une température  $T_1$ , la courbe à la température  $T_0$ , si la relation (2.55) est satisfaite par la constante de relaxation. C'est ce que l'on appelle le principe de superposition temps-température.

Lorsque plusieurs constantes de relaxation existent, c'est le déplacement lié au temps de relaxation dominant qui gouverne la réponse diélectrique.

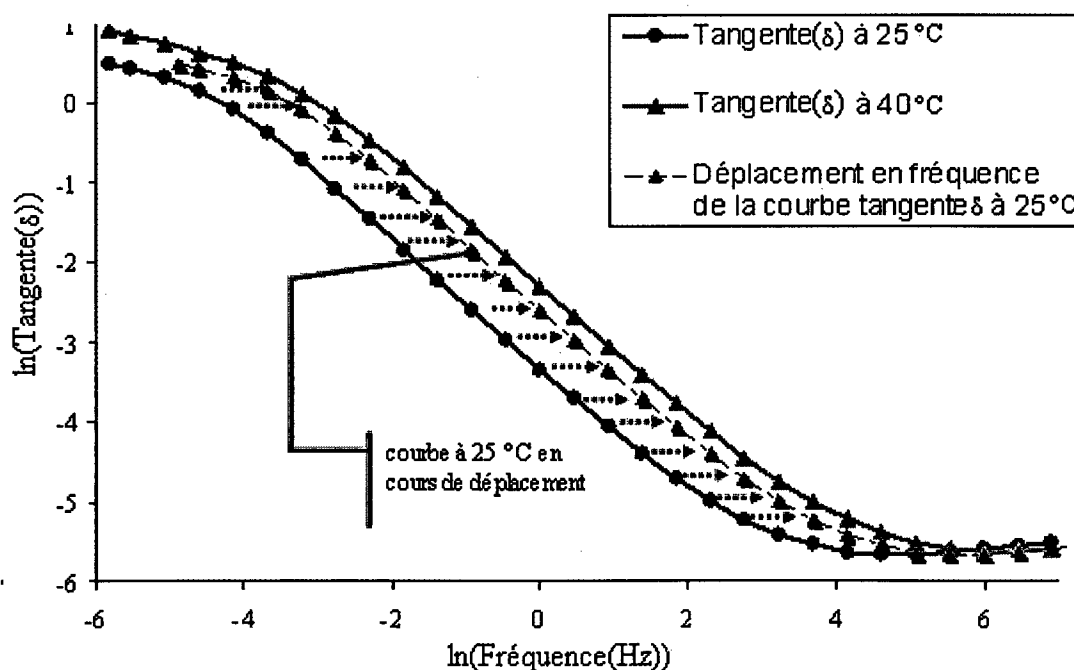


Figure 13 Déplacement en fréquence de la courbe maîtresse à 25 °C

La figure 13 illustre le principe de superposition. La courbe en pointillé est obtenue par translation horizontale de la courbe à 25 °C, ce qui correspond à un déplacement en fréquence. Le déplacement est effectuée jusqu'à ce qu'il y ait ajustement entre la courbe à 25 °C déplacée et la courbe à 40 °C. Ce processus est itéré pour toutes les

températures. L'ajustement par une courbe exponentielle entre les déplacements et l'inverse des températures permet d'obtenir une relation les liant. Ainsi à chaque nouvelle courbe à une température donnée, on peut trouver la courbe par rapport à une température de référence. Nous verrons plus en détail cette technique dans la partie expérimentation.

## **2.7 L'humidité**

Une certaine quantité d'humidité peut être présente dans le système d'isolation d'un transformateur. À basse température, l'eau n'est pas soluble dans l'huile et se retrouve au niveau du papier dans des proportions pouvant aller jusqu'à 4 % massique. L'eau est aussi produite par le processus de vieillissement conséquence des réactions chimiques et des cassures de la molécule de cellulose.

Au niveau de la réponse diélectrique, l'humidité joue à deux niveaux. Elle augmente la permittivité de l'ensemble car la permittivité de la molécule d'eau est de 80 comparée à 4.5 pour celle du papier. Elle augmente aussi la conductivité. Par conséquent, il est difficile de dissocier la contribution du vieillissement de celle de l'humidité.

Dans [14], Saha se basant sur la différence entre l'huile et le papier, explique que plus la température augmente, plus l'humidité migrera du papier vers l'huile. Ainsi à moins que le transformateur ne soit à l'équilibre thermique, toute mesure électrique basée sur un prélèvement d'huile ne reflétera pas le vrai niveau d'humidité du papier.

### **2.7.1 Courbe isothermes**

Lorsque le transformateur est en équilibre thermique, on peut déduire l'humidité du papier à partir de celle de l'huile, en utilisant une famille de courbes isothermes. Les premières courbes iso thermiques datent des années 1960 avec les courbes de Fabre



Pichon. Par la suite, vinrent les courbes d'Oommen. En 1983, dans [15], les auteurs proposent des courbes isothermes qui permettent de déduire l'humidité du papier à partir de celle de l'huile même pour des taux aussi bas que 1 %. La figure 14 [15] montre les courbes iso thermes obtenues.

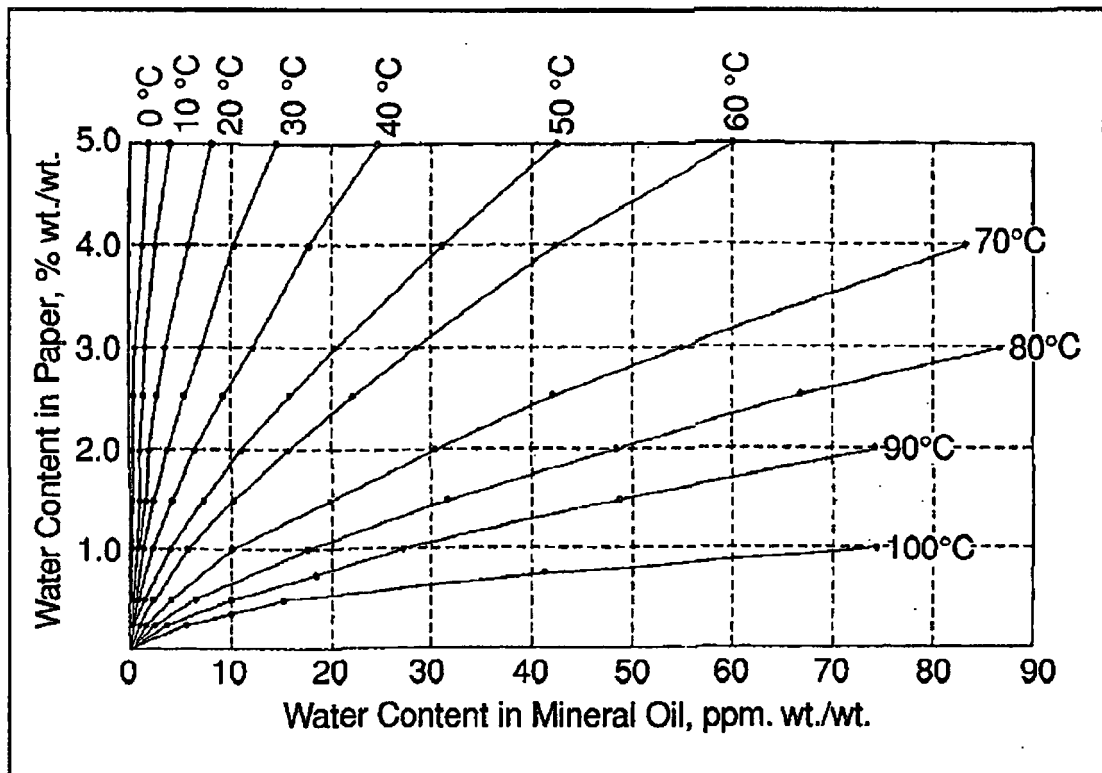


Figure 14 Extrait des courbes iso thermes [15]

Une fois le taux d'humidité du papier déterminé, on peut déduire sa permittivité en appliquant la loi des mélanges appelée aussi la limite supérieure Wiener [16]. On obtient :

$$\varepsilon_{\text{papier\_humide}} = \varepsilon_{\text{papier\_sec}}(1 - Tx\_h) + \varepsilon_{\text{eau}} \cdot Tx\_h \quad (2.59)$$

où  $Tx\_h$  est la fraction volumique d'eau.

## 2.8 La géométrie

Les mesures expérimentales donnent généralement la valeur de la capacité complexe. La formule (2.38) permet de retrouver la capacité géométrique moyennant la connaissance de  $\varepsilon^*$ . Or, la formule (2.37) nous dit que si nous connaissons la permittivité relative de chacun des constituants on peut retrouver la permittivité relative de l'ensemble. Si nous supposons en outre que la température et l'humidité sont connues alors la formule (2.39) donne la permittivité de l'huile. La permittivité du papier peut être donnée soit par (2.59) ou par une banque de données complétée, si nécessaire, d'une interpolation. Finalement la formule (2.58) permet de retrouver la permittivité à une température de référence. Pour calculer la capacité géométrique, remarquons qu'à hautes fréquences  $\varepsilon^*$  est à peu de chose près égale à sa partie réelle. Ceci est confirmé par (2.45), (2.46) et par les observations expérimentales. Si on admet que 1 000 Hz est une fréquence suffisamment élevée alors :

$$C_0 = \frac{C^*}{\varepsilon^*} \approx \frac{C'_{1000Hz}}{\varepsilon'(1000Hz)} \quad (2.60)$$

## 2.9 Équivalence domaine fréquentielle et domaine temporelle

La plupart des modèles ci-dessus porte sur la réponse fréquentielle. Celle-ci présente plusieurs avantages. Citons en premier la possibilité d'avoir des mesures qui ne dépendent pas de la géométrie. En effet la tangente de l'angle des pertes est indépendante du facteur géométrique. En second lieu, la technique qui permet d'avoir la courbe maîtresse, à partir d'une mesure fréquentielle, à une température donnée est facile à implémenter et se ramène à un simple déplacement en fréquence comme on le verra plus loin dans le texte. Les relations de Fourier permettent de passer du domaine temporel vers le domaine fréquentiel et vice versa, mais ceci se fait via des intégrales coûteuses. C'est vers 1950 que Hamon en se basant sur la relation (2.54), va mettre au

point une formule de passage rapide entre le domaine temporel et fréquentiel et vice versa [17]. Cette méthode se révélera comme une excellente approximation comme en témoignent les expériences menées dans l'Institut de recherche d'Hydro Québec.

En admettant le principe de superposition, la relation temps-fréquence est donnée par l'analyse de Fourier via les deux intégrales suivantes :

$$\chi'(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos(\omega t) dt \quad (2.61)$$

$$\chi''(\omega) = \int_0^{\infty} \varphi(t) \sin(\omega t) dt \quad (2.62)$$

On peut donc passer du temporel au fréquentiel via les transformées de Fourier, mais pour chaque  $\omega$ , il faut faire des intégrations numériques coûteuses.

Lorsque  $\Phi(t) = At^{-n}$ ,  $\chi''$  est donnée par la relation suivante [18] :

$$\chi''(\omega) = A\omega^{n-1}\Gamma(1-n)\cos(n\pi/2) \quad (2.63)$$

Nous pouvons transformer cette relation de façon à faire apparaître  $\Phi(t) = At^{-n}$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \chi''(\omega) &= \frac{1}{\omega} A \left[ \frac{(\Gamma(1-n)\cos(n\pi/2))^{-1/n}}{\omega} \right]^{-n} \\ &= \frac{\varphi \left( \frac{(\Gamma(1-n)\cos(n\pi/2))^{-1/n}}{\omega} \right)}{\omega} \end{aligned} \quad (2.64)$$

La fonction obtenue en (2.64) fait apparaître explicitement la fonction  $\Phi(t)$ , comme le montre la relation suivante donnée en [18] :

$$\chi''(\omega) = \frac{\varphi(t_1)}{\omega} \text{ avec } \omega t_1 = \left[ \Gamma(1-n) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right]^{-\frac{1}{n}} \quad (2.65)$$

La relation "temps-fréquence" est simple pour la courbe idéale  $\Phi(t) = At^n$ , à condition de connaître le paramètre  $n$ .

Hamon va remarquer que l'expression entre crochets de la formule (2.65) est pratiquement indépendante de  $n$  pour des valeurs de  $n$  comprises entre 0.3 et 0.8. La moyenne du terme en crochet se situe à 0.63.

Cette affirmation est confirmée par la figure 15 obtenue à partir de l'implémentation de la dite fonction sous Matlab.

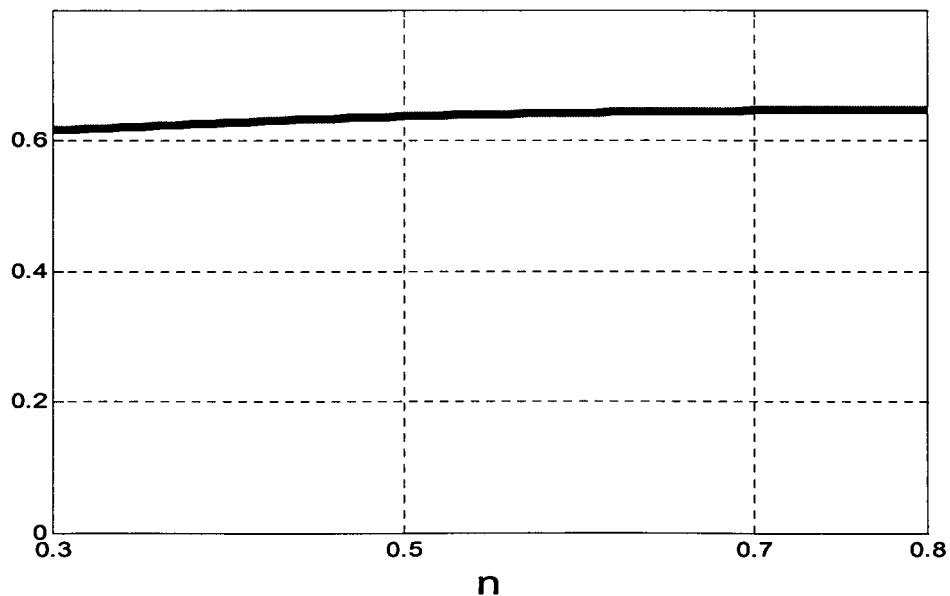


Figure 15 Évolution de  $\omega t_1$  vs  $n$

La moyenne obtenue pour des valeurs de  $n$  variant entre 0.3 et 0.8 est de 0.6369 avec une variance de  $8.3748e-005$ . Ce résultat permet de justifier l'utilisation de l'approximation. En remplaçant  $\omega$  par  $2\pi f$ , la relation (2.65) devient :

$$\begin{aligned}\chi''(\omega) &= \frac{\varphi(t_1)}{2\pi f} \text{ avec } t_1 = \frac{0.63}{2\pi f} = \frac{0.1}{f} \\ \chi''(\omega) &= \frac{\varphi(0.1/f)}{2\pi f}\end{aligned}\tag{2.66}$$

L'expression obtenue est plus simple est surtout indépendante de  $n$ .

Lorsque les données expérimentales sont des courants de charge, les courants peuvent être généralement approximée par  $Ae^{-n}$ , ce qui rend légitime l'approximation de Hamon d'où :

$$C^*(\omega) = \frac{i(0.1/f)}{2\pi fU}\tag{2.67}$$

Les avantages numériques de la transformée de Hamon sont indéniables. Par exemple si l'on utilise la méthode explicite de Forward Euler pour approcher l'intégration, et que notre réponse temporelle contient  $n$  points, alors pour une réponse fréquentielle de  $n$  fréquences, la complexité est de  $2.n^2$  pour l'intégrale numérique versus une complexité de  $n$  pour l'approximation de Hamon. Un autre avantage de la transformée de Hamon est qu'elle permet d'obtenir des résultats une "décade vers le bas" (voir équation (2.66)).

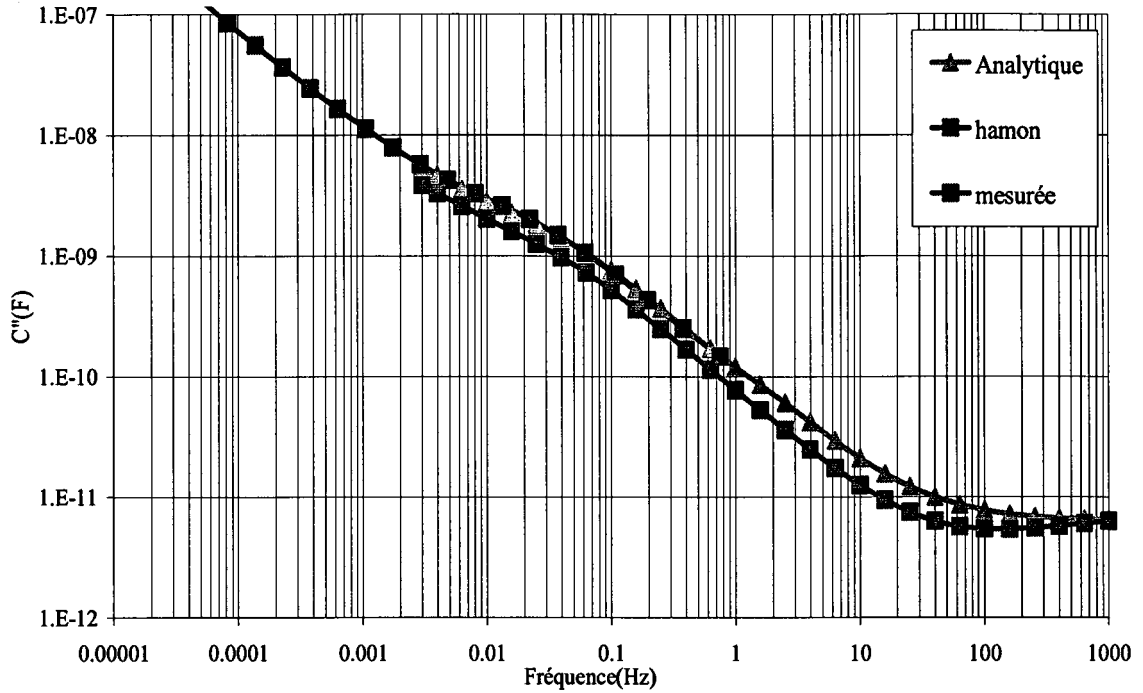


Figure 16  $C''$  versus Fréquence

La figure 16 montre la comparaison entre la courbe de Hamon, la transformée de Fourier et la courbe expérimentale fréquentielle. Dans cet exemple les courbes temporelles et fréquentielles ont été obtenues pour la même cuve et au même moment. La transformée de Hamon est obtenue par la formule (2.67) appliquée aux mesures temporelles. Quant à la transformée de Fourier, elle est obtenue analytiquement à partir de la courbe paramétrique qui s'ajuste au mieux à la courbe temporelle. L'expression de la courbe paramétrique est le fruit d'une régression non linéaire avec un taux d'erreur voisin de 2 %. On peut voir que la transformée de Hamon, la transformée de Fourier et la courbe expérimentale sont assez proches.

## 2.10 Précautions à observer lors des mesures

Saha dans [14], énonce quelques précautions à observer pour garantir une interprétation correcte des résultats. Pour les mesures PDC la source de tension doit être sans bruit et stable durant l'état transitoire. Le transformateur doit être en équilibre thermique et ce pendant toute la durée de la mesure, car un gradient de température peut influencer au niveau de la conductivité du papier et de l'huile, et sur la migration de l'eau du papier vers l'huile et vice versa. Ces deux facteurs combinés changent le résultat de la mesure PDC. De plus, une tension d'excitation peu élevée peut engendrer des courants peu significatifs. D'un autre côté si celle-ci est très élevée, elle peut engendrer un comportement non linéaire, et fausser toutes les interprétations. Il est donc nécessaire d'avoir une tension suffisamment haute pour avoir des courants significatifs et suffisamment basse pour rester dans la partie de comportement linéaire du diélectrique. La dernière précaution concerne les temps de charge et de décharge. Il est nécessaire d'observer des temps de charge suffisamment long pour supprimer l'effet mémoire sur le courant de décharge. Cette condition est à observer particulièrement pour les nouveaux transformateurs où les courants mesurés sont très faibles et donc très sensibles à toute erreur. Dans [3], Gubanski met l'accent sur la conductivité de l'huile qui va être anormalement élevée pour un transformateur neuf. En effet, l'humidité contenue dans l'huile sera absorbée progressivement par le papier et la situation d'équilibre ne sera atteinte qu'après un certain temps.

À noter que sur le terrain la condition de stabilité de la température est impossible à respecter surtout lorsque le temps de mesure est de quelques heures. Dans [3], Gubanski montre par diverses mesures expérimentales le changement notable dans le courant de polarisation pour des gradients de la température ambiante. Il évoque aussi que des travaux sont en cours pour correctement interpréter les résultats de mesure même en présence de variations de la température.

## 2.11 Démarche

Après ce tour d'horizon des modèles et méthodes existantes, on peut tirer les enseignements suivants. La mesure du courant de polarisation et la spectroscopie fréquentielle sont les méthodes les plus populaires pour obtenir la réponse diélectrique. Plusieurs modèles permettent de modéliser les courbes expérimentales. Les modèles physiques basés sur des fonctions paramétriques, représentent un intérêt pour le calcul et l'ajustement. Par contre, les modèles électriques permettent d'estimer des paramètres réels tels que la conductivité et la permittivité. Les paramètres diélectriques obtenus, dépendent de la géométrie, de l'humidité et de la température. Concernant la géométrie, Gäfvert dans [5] expose une méthode pour prendre en compte la géométrie spécifique à un transformateur donné, à condition de connaître le taux d'humidité dans l'isolation. Le taux d'humidité de l'isolation peut être obtenu à partir du taux d'humidité de l'huile. Quand à l'effet de la température, la théorie d'Arrhenius permet de se ramener à une température de référence.

L'impact que peut avoir le gradient de température au cours de l'acquisition des données est loin d'être négligeable. Comme il est impossible d'avoir une température constante en environnement réel, il est nécessaire d'inclure la dynamique des changements dans l'interprétation des résultats. Dans [14], Saha nous informe que les travaux sont toujours cours pour la prise en compte de cette dynamique.

Quelque soit les méthodes, à notre connaissance, peu de méthodes ont intégré le facteur de vieillissement du papier dans leur méthodologie. Le fait que les effets de l'humidité et du vieillissement se manifestent dans les mêmes plages temporelles, font que ce dernier est souvent assimilé à de l'humidité et vice versa.



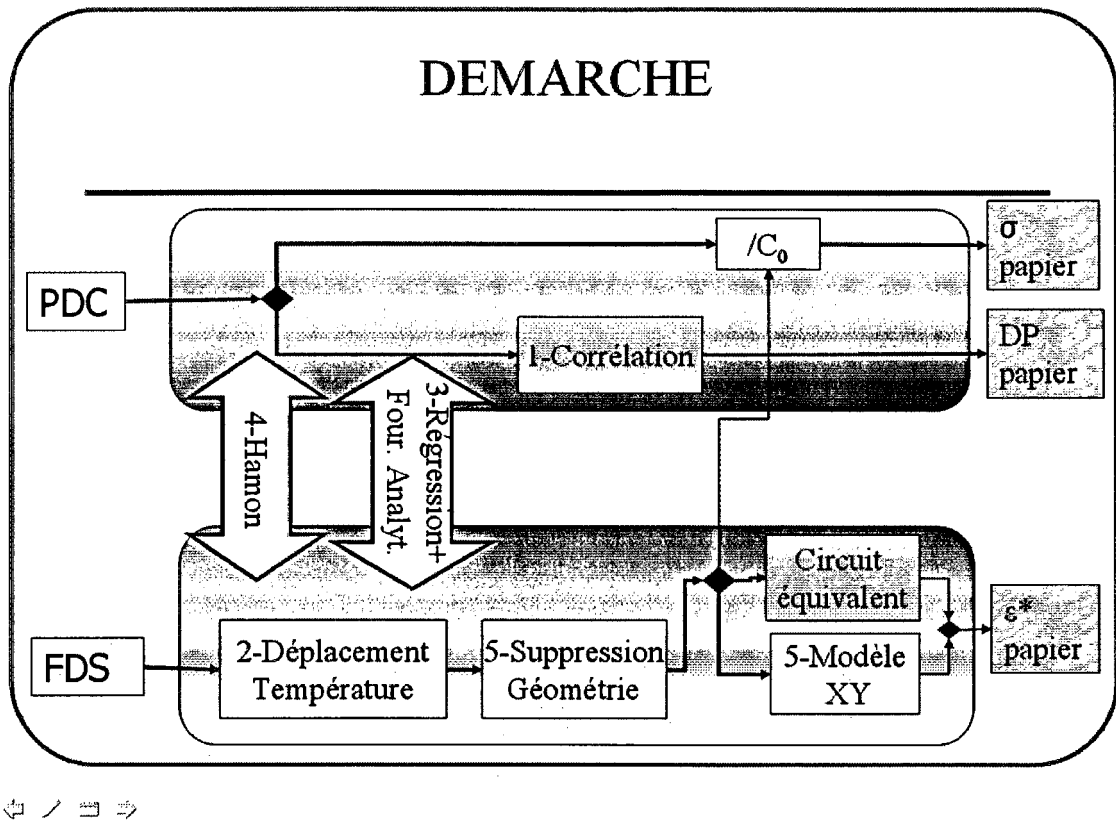


Figure 17 Synoptique de la démarche

La figure 17 illustre l'articulation qui existe entre les méthodes de mesure et les différents outils et modèles. On peut y voir le processus qui permet d'obtenir à partir des mesures expérimentales à gauche, la valeur des caractéristiques diélectriques et chimiques du papier à droite. Notre démarche va consister à rechercher la corrélation et à implémenter les outils et les modèles de la figure 17.

Dans un premier temps, on se propose de chercher une corrélation entre les propriétés diélectriques mesurées à différents temps ou fréquences et le degré de polymérisation (DP) qui est un bon indicateur du vieillissement. Parmi les mesures électriques candidates, nous examinerons le courant de charge et la tangente de l'angle des pertes mesurés respectivement à un temps choisi et une fréquence donnée.

Dans un deuxième temps, on s'intéressera à la technique de déplacement en fréquence permettant de déduire à partir des mesures faites à une température quelconque, les mesures telles qu'elles auraient été à une température de référence.

La technique de déplacement en fréquence, ne pouvant être faites facilement que pour des mesures fréquentielles, on s'intéressera à implémenter et vérifier la transformée de Hamon. Celle-ci constituera notre première passerelle entre les domaines temporel et fréquentiel.

Par la suite nous utiliserons plusieurs techniques de régression pour ajuster les mesures expérimentales à une courbe paramétrique issue de la modélisation par circuits équivalents. Cela nous permettra de construire, un modèle basé sur les circuits équivalents et notre deuxième passerelle entre les domaines temporel et fréquentiel.

La dernière étape va consister en la mise en œuvre du modèle XY. Cela permettra de valider simultanément la formule pour évaluer l'impact de l'humidité et la méthode utilisée pour estimer le facteur géométrique.

Pour établir la corrélation, nous disposons des données expérimentales et du degré de polymérisation (DP) de différentes cuves, soumises à un vieillissement contrôlé, sous humidité et température constante. L'outil de la régression linéaire est utilisé pour découvrir au travers de toutes les courbes expérimentales à quel temps et à quelle fréquence se situe la corrélation optimale.

Pour la technique du déplacement en fréquence, nous nous basons sur le modèle d'Arrhenius. Nous disposons des mesures expérimentales portant sur des cuves soumises à différentes températures. L'outil de régression linéaire est encore une fois mis à contribution pour trouver la relation entre la température et le déplacement en fréquence.

Notre premier modèle est le fruit de l'ajustement des courbes expérimentales temporelles à la courbe paramétrique issue de la modélisation en circuit équivalent. Pour réaliser l'ajustement, nous utiliserons deux méthodes. La première méthode fait appel à la régression linéaire par morceaux. La deuxième méthode utilise la régression non linéaire, et met en œuvre une technique d'optimisation quadratique.

Notre deuxième modèle, fait appel à la modélisation XY faite en [15]. Le facteur géométrique est déduit en utilisant la procédure décrite dans [5] qui suppose la connaissance du taux d'humidité. On choisira aussi une modélisation simple pour l'huile. Il ne restera plus qu'à extraire la permittivité diélectrique du papier à partir des courbes expérimentales.

Enfin ce vaste champ de données expérimentales, est l'occasion propice pour confronter les résultats obtenus par le modèle XY et les mesures faites sur les échantillons et pour juger de l'efficacité des deux passerelles entre les domaines temporel et fréquentiel.

## CHAPITRE 3

### ANALYSE DES RÉSULTATS ET MODÉLISATION

#### 3.1 Méthodes de mesure

Le protocole expérimental est décrit dans [19] : Nous en rappelons les principaux éléments. Les maquettes ont été construites en utilisant la cuve et le noyau d'un transformateur de 100 kVA. Du papier Kraft isole les spires des enroulements primaires et secondaires. Ces maquettes ont été traitées pour obtenir quatre niveaux d'humidité différents entre 1 et 4% massique dans le papier. Quant à l'huile d'isolation elle est de type Nynas 10CX.

Huit maquettes ont été vieillies à deux températures différentes. Quatre d'entre elles l'ont été à 125 °C, les quatre restantes à 135 °C. Le tableau IV, ci-dessous, résume les conditions de vieillissement de chacune des huit cuves.

Tableau IV

#### Conditions de vieillissement

Référence	Groupe	Température de Vieillissement	Taux D'humidité
cuve#01	G1	125	1.70 %
cuve#07	G1	125	2.30 %
cuve#09	G1	125	3.30 %
cuve#11	G1	125	1.30 %
cuve#04	G2	135	1.12 %
cuve#06	G2	135	1.97 %
cuve#08	G2	135	3.48 %
cuve#12	G2	135	0.75 %

Régulièrement, des mesures diélectriques ont été prises à la température constante de 25 °C. À chaque séance de mesure, des échantillons d'huile et de papier sont prélevés pour une analyse complète en laboratoire après deux jours de conditionnement à 55 °C.

Le degré de polymérisation est mesuré par viscosimétrie d'une solution de cupryéthylène diamine. Le taux d'humidité est mesuré par une extraction à l'alcool méthylique anhydrique suivi d'une titration de Karl-Fisher.

Le facteur de puissance de l'huile a été mesuré suivant la norme ASTM D924 à 100 °C.

### **3.1.1 Courant de polarisation dépolariation "PDC"**

Des mesures de courant de polarisation/dépolariation, avec une électrode active ont été réalisées sous une tension continue de 1000 V appliquée à l'enroulement haute tension. L'enroulement basse tension et la cuve ont été mis à la terre. De cette façon, les isolations entre les deux enroulements d'une part et entre l'enroulement haute tension et la cuve d'autre part sont testés simultanément. Cependant, en général la première contribution (des deux enroulements) est dominante. L'équipement est bâti autour de l'appareil source-mesure Keithley 237. Les durées de charge et de décharge sont respectivement de 5000 et 2500 secondes.

### **3.1.2 Mesure en fréquence "FDS"**

Les mesures fréquentielles ont été faites en utilisant l'appareil General Electric Programma IDA 200 sous une tension de 200 V rms. Elles sont faites sous deux configurations à une ou deux électrodes actives. La plage de fréquence balayée se situe entre 0.003 et 1000 Hz avec 5 points de mesure par décade.

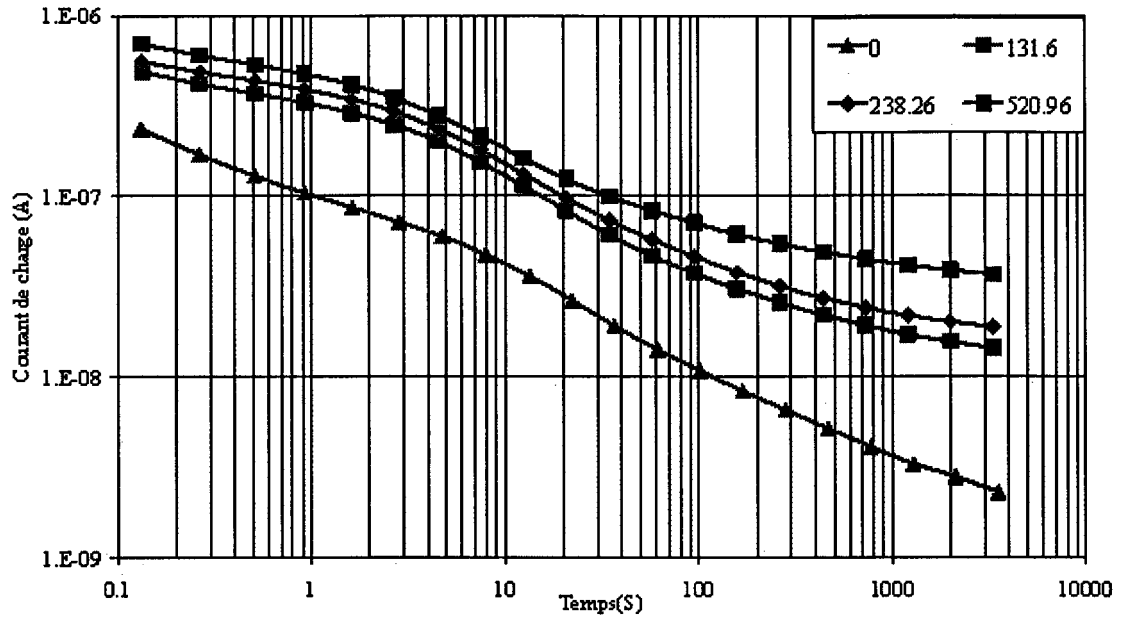
## **3.2 Résultats expérimentaux des cuves**

### **3.2.1 Sensibilité au vieillissement**

#### **3.2.1.1 Résultats temporels "PDC"**

Les figures 18 et 19, illustrent le courant de charge et de décharge respectivement pour une cuve sèche (cuve #12) et une cuve humide (cuve #08) pour différents temps de vieillissement en heures.

a)



b)

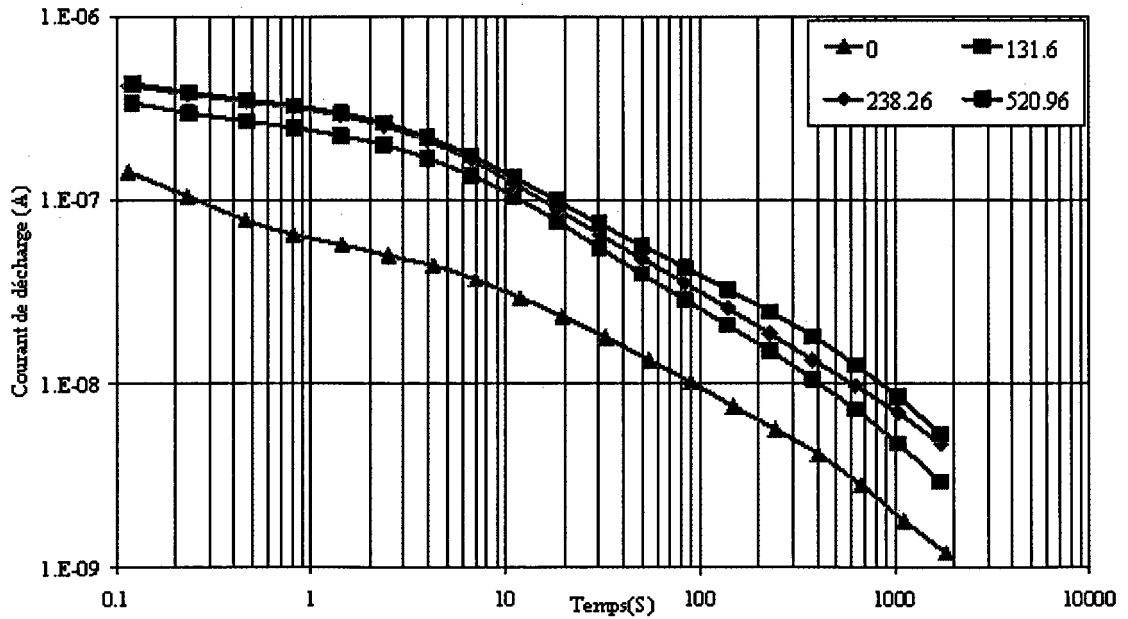


Figure 18 Courant de charge(a) et décharge(b) pour différents temps de vieillissement en heures pour la cuve#12 (0.75 % d'humidité)

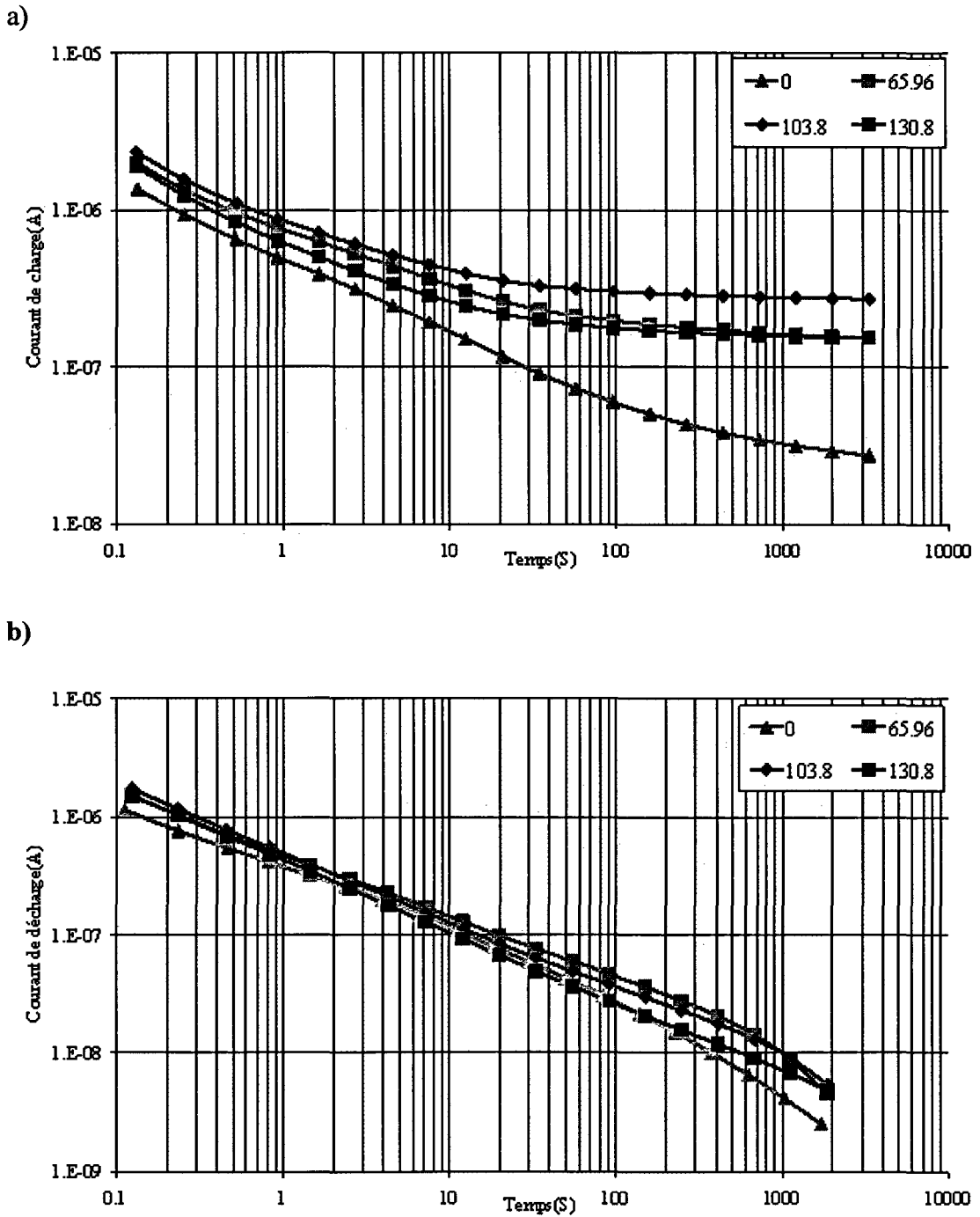


Figure 19 Courant de charge(a) et décharge(b) pour différents temps de vieillissement en heures pour la cuve#08 (3.48 % d'humidité)



3.2.1.2 Résultats fréquentiels "FDS"

Les figures 20 et 21, montrent la tangente de l'angle de perte pour une cuve sèche (cuve #12) et une cuve humide (cuve #08).

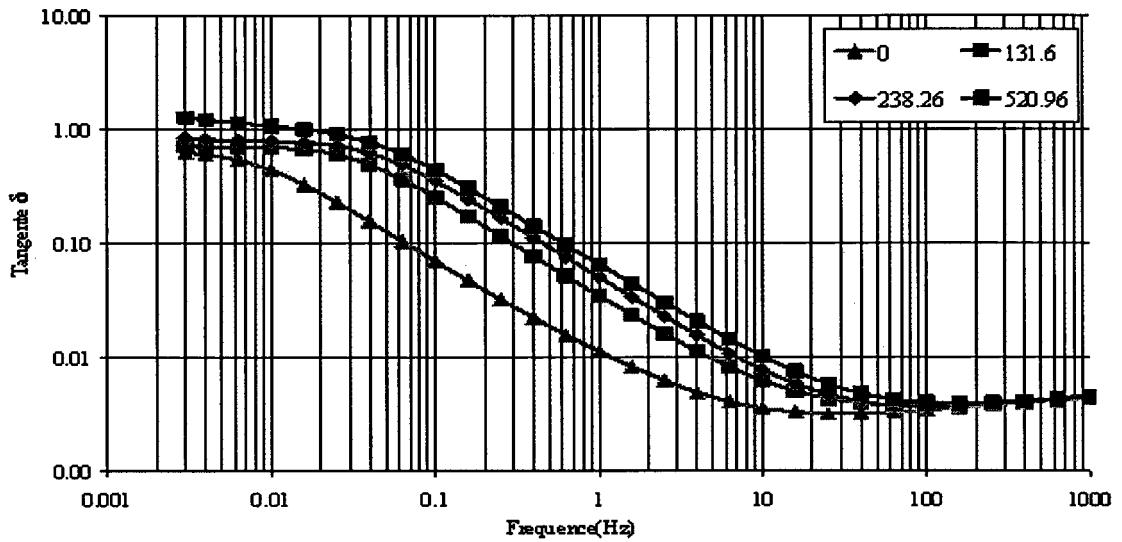


Figure 20 Tangente  $\delta$  vs fréquence pour la cuve #12 (sèche) à différents temps de vieillissement

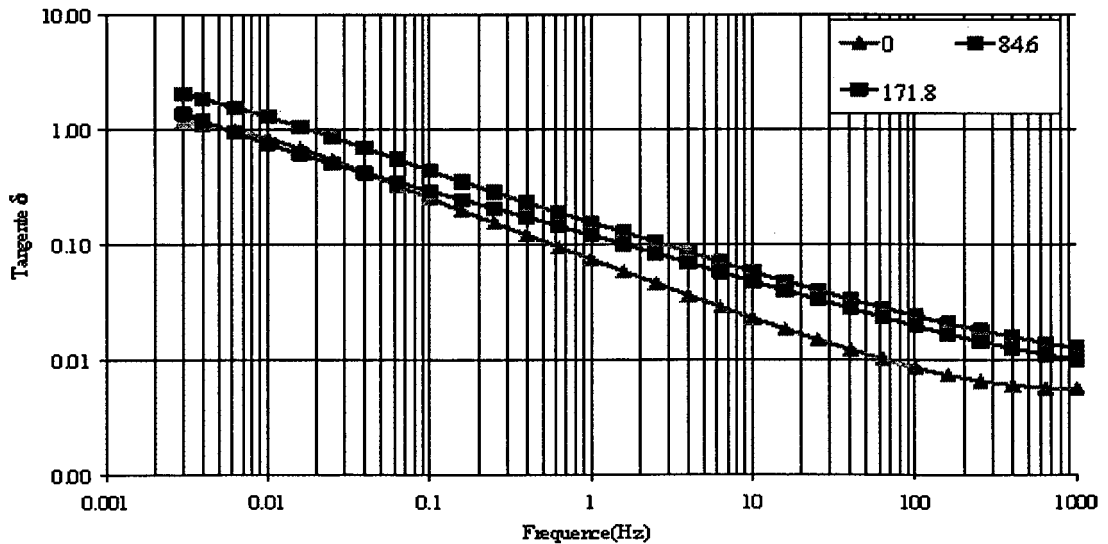


Figure 21 Tangente  $\delta$  vs fréquence pour la cuve #08 (humide) à différents temps de vieillissement

Les figures 22 et 23, quant à elles, montrent la capacité imaginaire pour une cuve sèche (cuve #12) et une cuve humide (cuve #08).

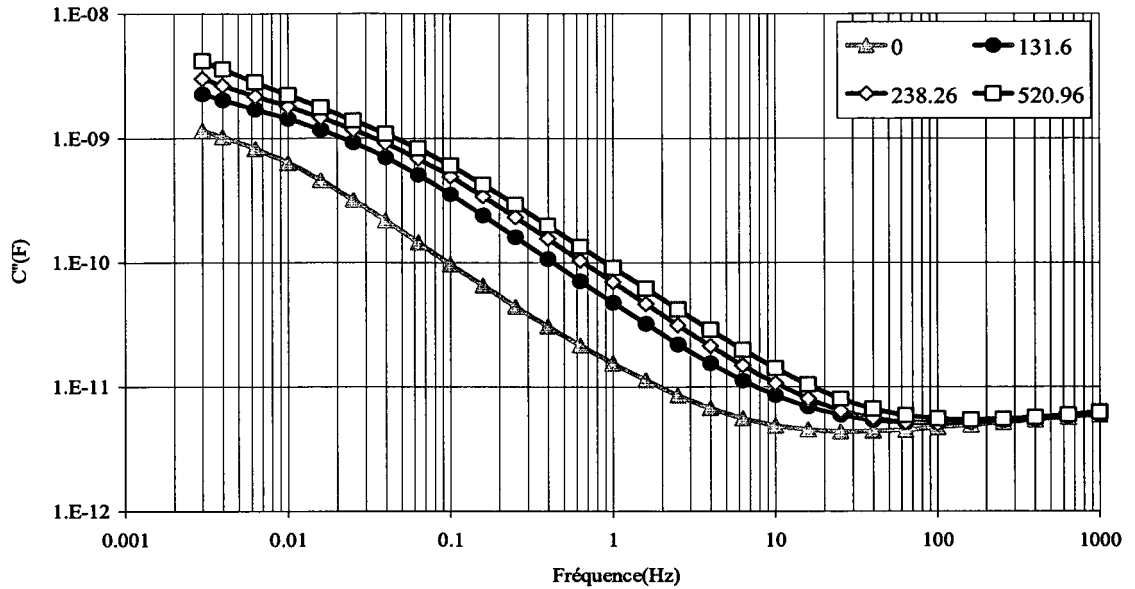


Figure 22  $C''$  vs fréquence pour la cuve #12 (cuve sèche) à différents temps de vieillissement

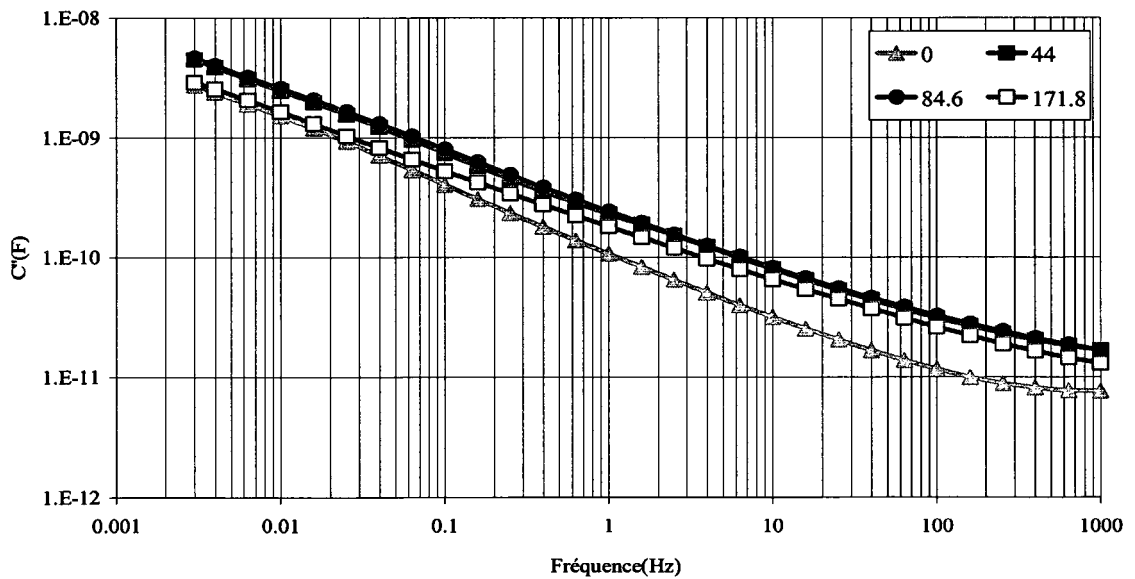


Figure 23  $C''$  vs fréquence pour la cuve #08 (cuve humide) à différents temps de vieillissement

### 3.2.1.3 Analyse

Pour la cuve sèche après seulement 130 heures de vieillissement, les figures 18 a) et 18 b) montrent que les courbes de charge et décharge ont grandement changé. Pour le reste du vieillissement, les variations sont moins prononcées. Ces mêmes figures, laissent voir que les variations aux temps courts sont minimales comparativement à celles aux temps longs. Ce qui revient à dire que la conductivité de l'huile varie peu comparativement à celle du papier. La figure 20 montre que les mêmes remarques peuvent s'appliquer à la tangente de l'angle des pertes, en tenant compte toutefois qu'aux temps longs correspondent les basses fréquences et aux temps courts correspondent les hautes fréquences.

Au niveau de la représentation graphique des résultats fréquentiels, on avait le choix entre la représentation de la capacité imaginaire, la capacité réelle ou la tangente de l'angle des pertes. Concernant la tangente de l'angle des pertes, si elle est indépendante de la géométrie, il n'en demeure pas moins qu'elle masque les variations quand elles se font dans le même sens. En effet, prenons le cas de la cuve 12. La figure 22 montre que la valeur de la capacité imaginaire aux basses fréquences a doublé après environ 130 heures de vieillissement. D'autre part, la figure 20 montre que la valeur de la tangente pour les basses fréquences a peu changé après la même durée de vieillissement. On en déduirait en se basant sur la figure 20, qu'aucune modification de la permittivité n'a eu lieu. Ce qui représente une conclusion erronée au vu de la figure 22. La capacité réelle, quant à elle offre une courbe moins riche. Seule la capacité imaginaire renferme une variation pertinente. Sur la figure 22, on constate que pour la cuve sèche 12, la valeur de la capacité imaginaire aux basses fréquences a doublé après 130 heures de vieillissement. Les variations se font de manière plus graduelle pour la suite du vieillissement. Pour les hautes fréquences, les figures 20 et 22 nous apprennent que pour la cuve sèche 12, il n'y a pas de changement notable.

Pour la cuve humide, le courant de polarisation aux temps longs et courts change de façon erratique. Sa valeur est supérieure à la valeur d'une cuve sèche dans un rapport de dix. Au niveau de la mesure fréquentielle, les courbes de la figure 21 et figure 23, se présentent comme des droites dans un diagramme log-log. On en déduit donc que  $C'' = af^\alpha$ .

En résumé pour les cuves sèches, le courant de polarisation aux temps longs est le meilleur indicateur du vieillissement du papier. La capacité imaginaire peut éventuellement renseigner sur le taux d'humidité, puisque pour une cuve humide la courbe semble obéir à une loi de type Curie-von Schweidler.

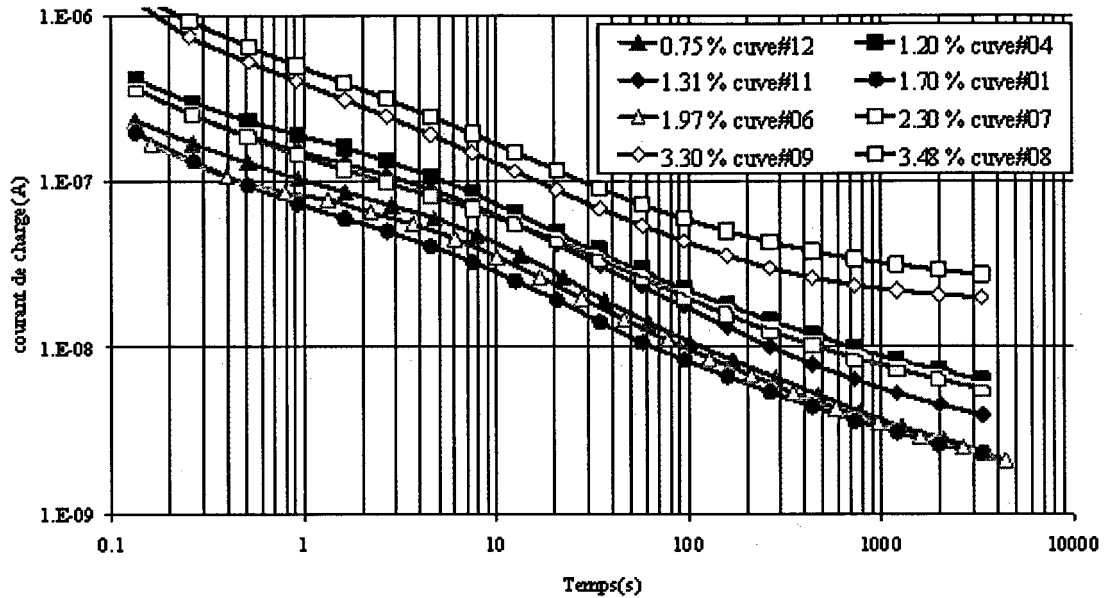
### **3.2.2 Sensibilité à l'humidité**

#### **3.2.2.1 Résultats temporels "PDC"**

Les figures 24 a) et 24 b), montrent les courants de charge et de décharge au tout début du vieillissement pour différentes cuves. Ces figures permettent de mettre en évidence le rôle que joue l'humidité sur la réponse diélectrique du complexe papier-huile. L'humidité contribue à une augmentation notable du courant de charge et de décharge. Cette augmentation trouve son origine à deux niveaux. D'une part la grande polarisabilité de la molécule d'eau contribue à augmenter la capacité et donc le courant de charge et de décharge. D'autre part l'eau étant conductrice, elle augmente la conduction directe. Cette augmentation de la conduction se voit aussi dans le courant de charge aux temps longs. En effet après un temps de charge suffisamment long, le courant de conduction directe domine le courant d'absorption. La figure 24 b), montre qu'en début du vieillissement, le courant de décharge des différentes cuves convergent aux temps longs. Par contre, la figure 25 b), montre qu'en fin de vieillissement, le courant de décharge des différentes cuves ne converge plus. On en tire comme

enseignement que les propriétés du papier pour les différentes cuves ont changé différemment en fonction du taux d'humidité de la cuve.

a)



b)

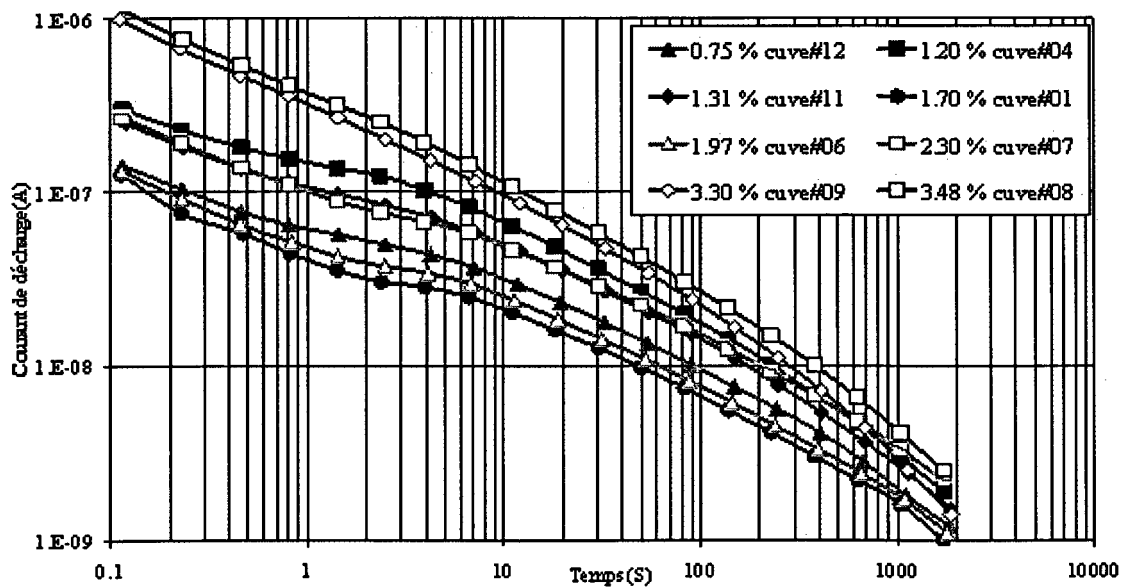


Figure 24 Courant de charge a) et décharge b) vs temps au début de vieillissement pour différentes cuves

Les figures 25 a) et 25 b) ci-dessous, illustrent le courant de charge et de décharge à la fin du vieillissement pour les différentes cuves. Ces figures permettent de mettre en évidence le rôle de l'humidité dans le processus de vieillissement du papier. Les courbes des cuves humides ont vu leur courant de charge augmenter beaucoup plus significativement, signe d'une dégradation plus marquée.

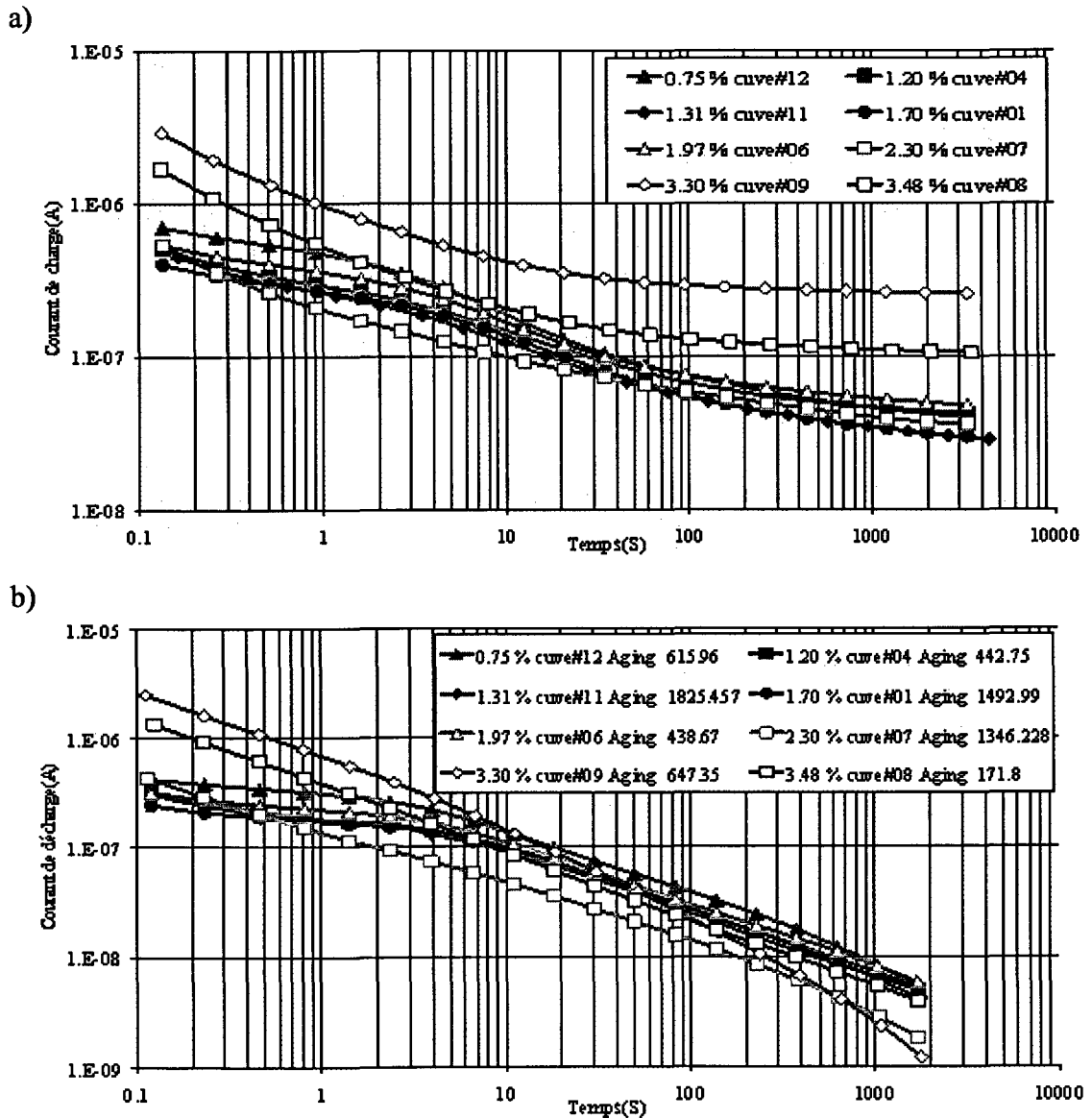


Figure 25 Courant de charge a) et décharge b) vs temps en fin de vieillissement pour différentes cuves

### 3.2.2.2 Résultats fréquentiels "FDS"

Les figures 26 et 27 illustrent respectivement l'effet de l'humidité et son action sur la modification des paramètres diélectriques du papier.

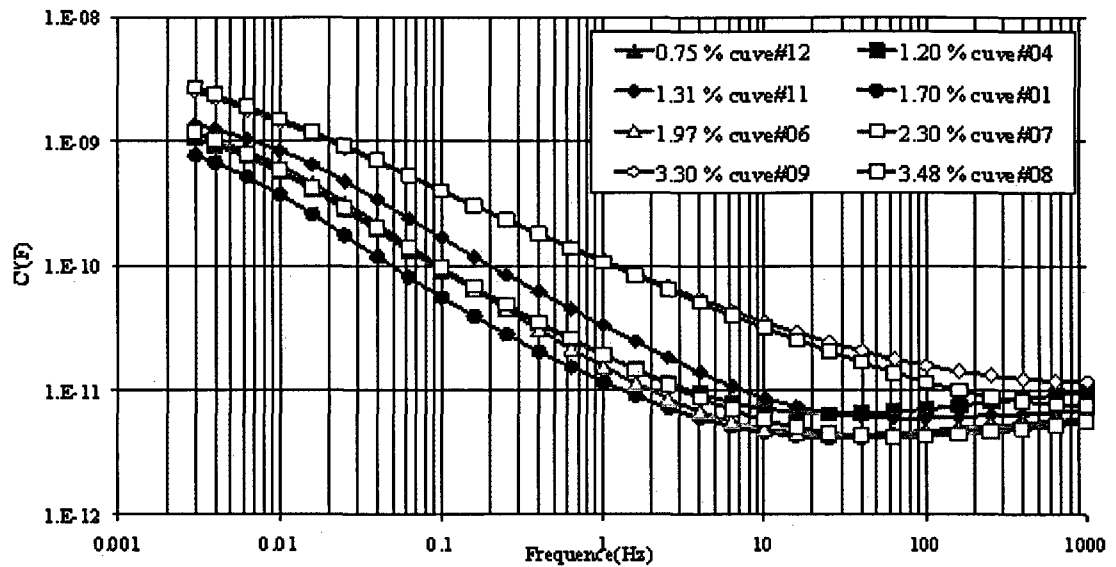


Figure 26  $C''$  vs fréquence début vieillissement

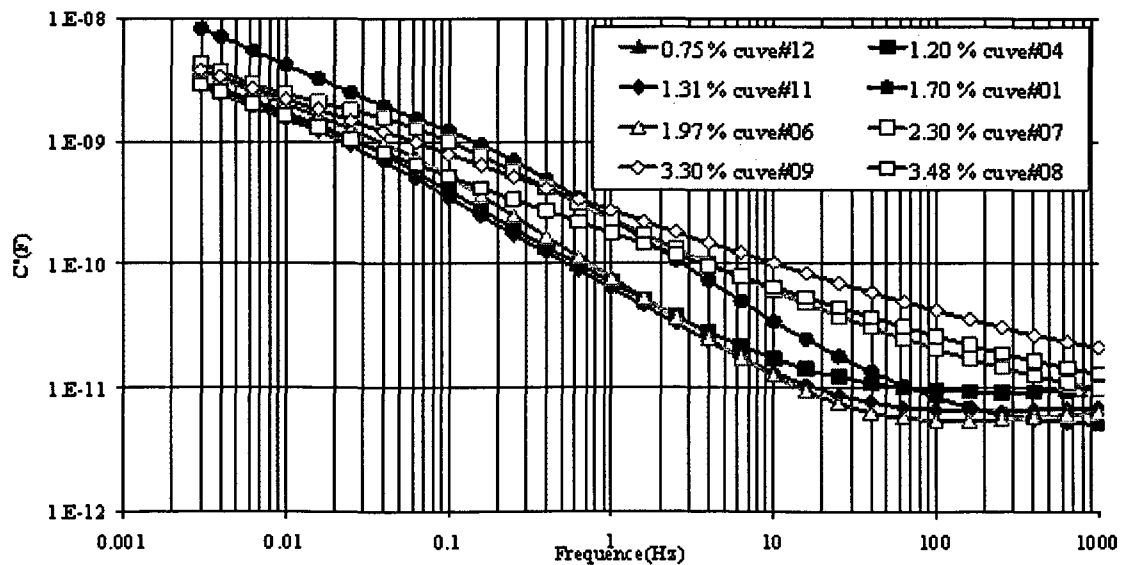


Figure 27  $C''$  vs fréquence fin vieillissement

### 3.2.2.3 Analyse

Initialement, avant le vieillissement, on distingue dans la figure 24 a), de façon subtile la présence de deux groupes. Le groupe des cuves humides, dont le taux d'humidité est supérieur à 3 %, et celui des cuves sèches dont le taux d'humidité est inférieur à 3 %. Le groupe des cuves humides présente un courant de polarisation plus élevé que ce soit aux temps longs ou aux temps courts. Ce qui indique que la conductivité augmente significativement avec l'humidité. La figure 25 a), montre qu'à la fin du vieillissement, les deux groupes se sont nettement séparés. Ainsi, si dans le groupe des cuves sèches, les courbes restent groupées, dans le groupe des cuves humides, les écarts se sont amplifiés.

On tire comme conclusion que l'humidité augmente la conductivité du papier notamment grâce à la présence de l'eau dans le papier mais aussi structurellement avec le temps car si en début de vieillissement, le papier asséché retrouve sa conductivité d'origine, il en est tout autrement à la fin du vieillissement comme il sera démontré dans la seconde expérience qui suit.

### 3.3 Résultats expérimentaux des échantillons de papier des cuves

Ces mesures fréquentielles, ont eu lieu à l'École de Technologie Supérieure dans le laboratoire prévu à cet effet. Les échantillons de papier extraits des différentes cuves, ont été mis dans une chambre climatique à humidité contrôlée. Les conditions atmosphériques de la chambre climatique étaient de  $23\text{ °C} \pm 0.5\text{ °C}$  pour la température et de 5% à  $\pm 0.5\%$  HR d'humidité relative. Pour garantir des conditions de température constante, on a utilisé un contrôle avec boucle PID (Labview). Sous ces conditions, les essais permettent d'apprécier l'état réel du papier à humidité constante.



La figure 28 montre la chambre climatique à humidité contrôlée. Quant à la figure 29, elle nous montre le système de contrôle avec boucle PID (Labview), ainsi que le système d'acquisition des mesures (Keithley 237) à 250 V.

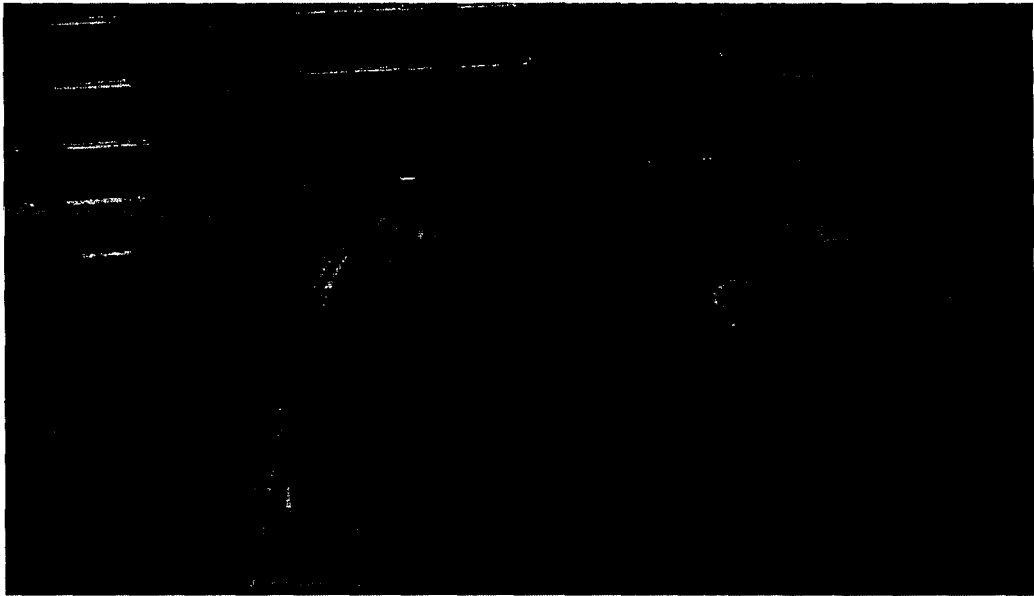


Figure 28      Chambre environnementale

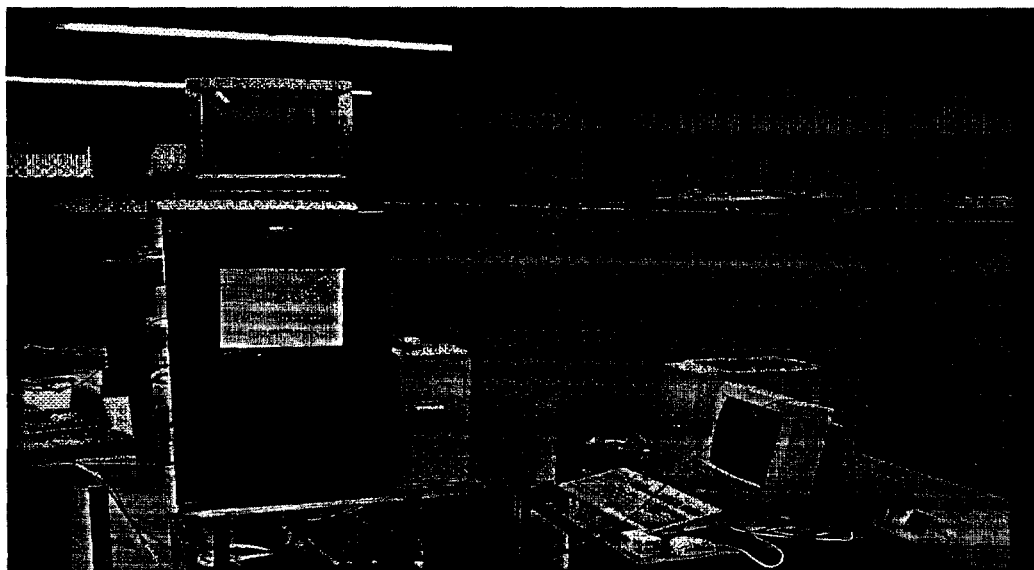


Figure 29      Système d'acquisition des mesures

Les mesures ont été effectuées le 16 avril 2005. La figure 30 illustre les résultats fréquentielles obtenus.

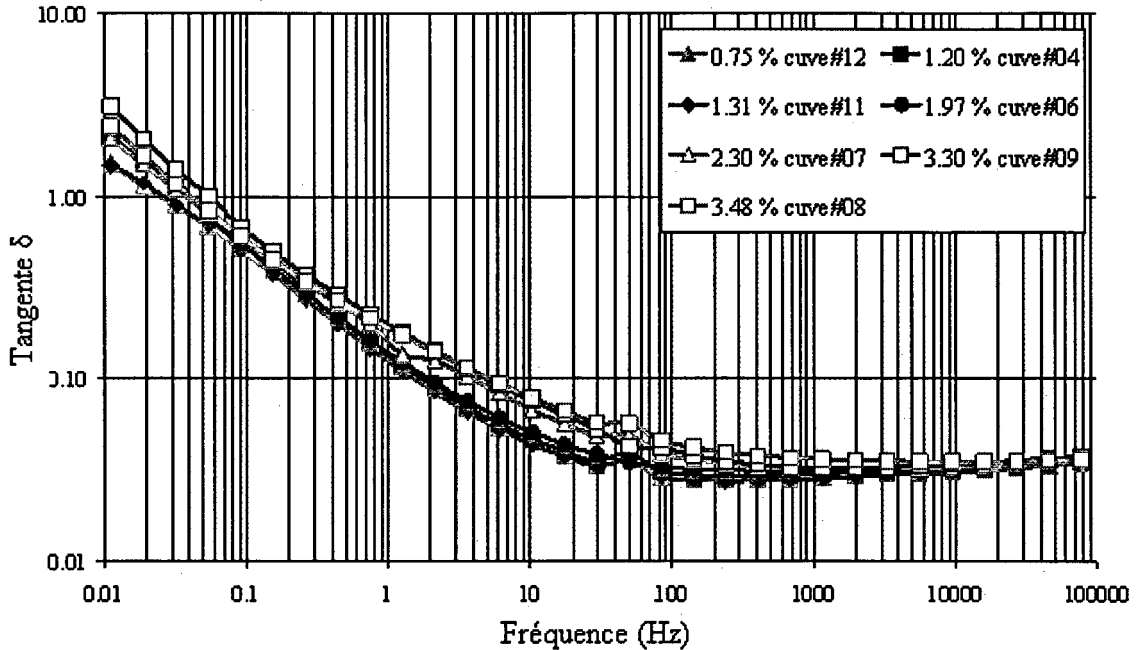


Figure 30 Tangente vs fréquence pour les échantillons de papier imprégné

### 3.3.1 Analyse

La tangente de l'angle des pertes est une donnée fréquentielle indépendante de la géométrie. D'autre part les échantillons de papier sont sous les mêmes conditions expérimentales. On en déduit que les différences observées proviennent des changements des caractéristiques diélectriques du papier. Ainsi l'on voit sur la figure 30, que la tangente de l'angle des pertes aux basses fréquences, est plus élevée pour les échantillons des cuves humides. Aux hautes fréquences, il n'y a pratiquement différence. Ce qui laisse à croire que la tangente de l'angle des pertes mesurée aux basses fréquences, est un bon indicateur du vieillissement du papier.

### 3.4 Résultats expérimentaux des échantillons d'huiles neuves et usées

Les figures 31 et 32, montrent respectivement les courants de charge et la capacité imaginaire calculée par la transformée de Hamon du courant de charge.

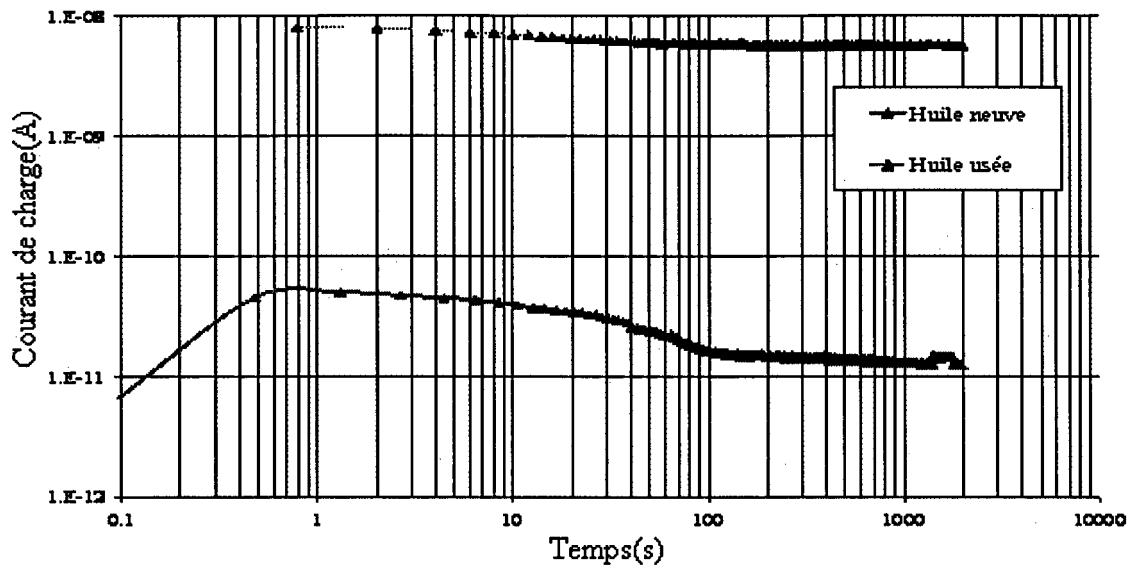


Figure 31 Courant de charge des échantillons d'huile

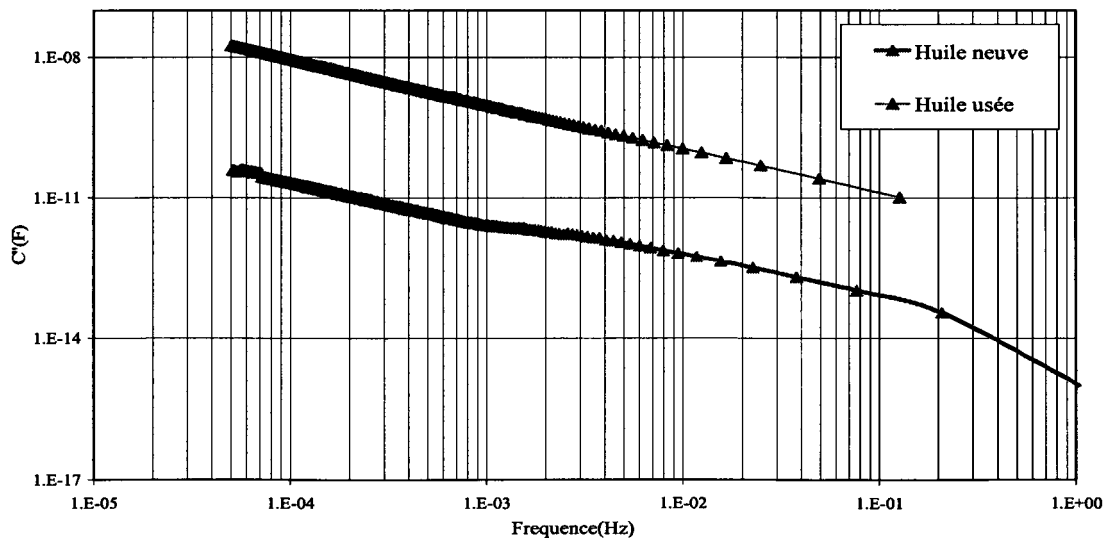


Figure 32  $C''$  des échantillons d'huile obtenue par transformée de Hamon du courant de charge

### 3.4.1 Analyse

La figure 31, montre que le courant de charge de l'huile neuve et de l'huile usée est dominé par la conductivité de l'huile. On remarque aussi que la conductivité de l'huile usée a augmentée de façon notable. Cela est sans doute dû aux groupes chimiques polaires qui se forment lors de l'oxydation de l'huile. Autre fait intéressant, pour l'huile neuve, le courant au tout début de la polarisation augmente pendant un certain temps. On peut expliquer en partie ceci, par la présence d'impuretés ioniques qui pendant un certain temps vont se déplacer vers les électrodes. Ce n'est qu'une fois la grande majorité des ions accumulés sur les électrodes, que la contribution du courant électronique reprend son cours normal. La figure 32 donne les capacités imaginaires obtenues à partir des courbes de la figure 31. Comme toutes les modélisations retenues pour l'huile ne mettent en avant que son effet résistif, on en déduit que les résultats des modèles seront assez proches de la réalité.

### 3.5 Corrélation

L'un de nos grands soucis sera de voir l'évolution de la corrélation entre une courbe expérimentale et le DP du papier dans le temps ou dans les fréquences, et ce pour différentes cuves. Pour donner un caractère plus universel à notre analyse, les résultats à analyser se présentent suivant 4 colonnes, la première contient le temps ou la fréquence, la seconde les cuves, la troisième la variable indépendante et la dernière la variable dépendante à modéliser. Le tri doit se faire suivant la première colonne, suivi de la deuxième et finalement de la troisième colonne. Dans notre architecture les colonnes sont générées par le langage SQL de notre base de données. Quant au traitement, il se fait par Excel étant donné ses grandes fonctionnalités graphiques

### 3.5.1 Corrélation entre le courant de polarisation et le DP du papier

L'étude vise à rechercher la corrélation entre le courant de polarisation et le DP du papier à un temps de mesure donné. Les temps choisis sont 10, 20, 40, 50, 100, 500, 1000 et 4500 secondes. Comme ces temps ne figurent pas nécessairement dans la courbe expérimentale la première tâche a été de faire une interpolation linéaire entre les deux plus proches valeurs voisines pour en déduire les valeurs désirées. Grâce à notre système d'information ce travail a été fait par une macro sous VBA. Ensuite en utilisant le langage d'interrogation de base de données SQL, on a présenté les informations sous forme de quatre colonnes. La première colonne contient le temps puisque nous souhaitons voir l'évolution de la corrélation pour différents temps. La deuxième colonne identifie la cuve. Enfin les deux dernières colonnes contiennent la variable indépendante et la variable à modéliser. Notre analyseur de corrélation sous Excel, se chargera de générer les graphiques en conséquence. La figure 33 ainsi que le tableau V illustrent les résultats obtenus.

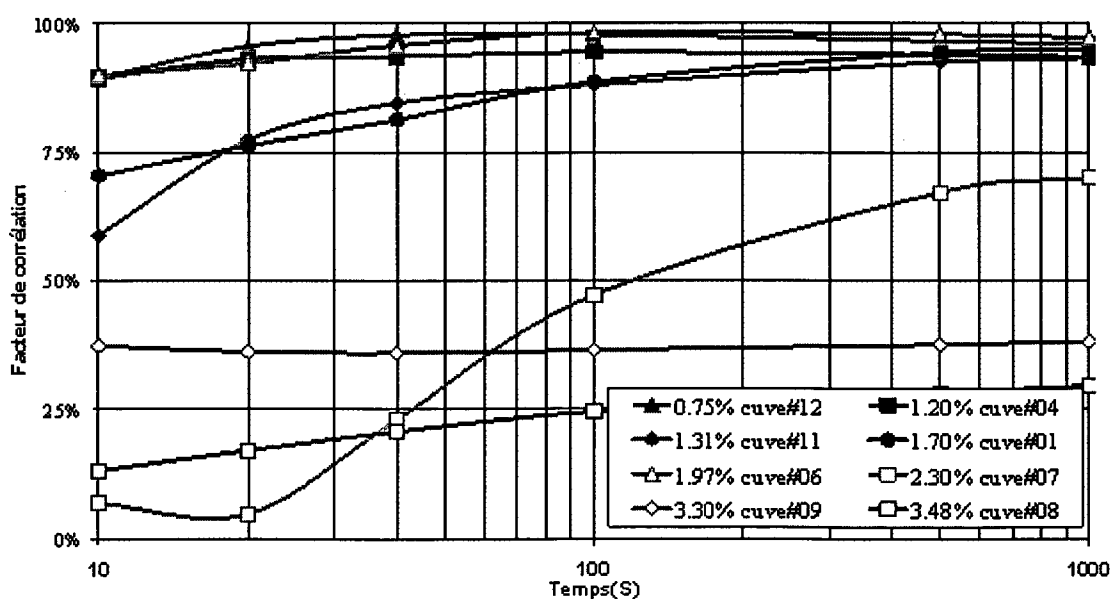


Figure 33 Évolution de la corrélation (Courant de polarisation/DP) en fonction du temps de mesure

Tableau V

Corrélation à 4 500 secondes entre I pol et DP

Référence	Groupe	Taux d'humidité	Coéf. corrélation	Pente de régression (DP/A)	Constante de régression (DP)
cuve#01	G1	1.70 %	94.85 %	$-19 \times 10^9$	1 026
cuve#07	G1	2.30 %	74.22 %	$-11 \times 10^9$	954
cuve#09	G1	3.30 %	38.62 %	$-36 \times 10^7$	646
cuve#11	G1	1.31 %	93.99 %	$-24 \times 10^9$	1 241
cuve#04	G2	1.20 %	93.42 %	$-14 \times 10^9$	1 088
cuve#06	G2	1.97 %	96.56 %	$-14 \times 10^9$	1 027
cuve#08	G2	3.48 %	30.11 %	$-72 \times 10^7$	707
cuve#12	G2	0.75 %	95.86 %	$-15 \times 10^9$	1 060

La figure 33, montre que pour les temps longs supérieurs à 100 secondes une corrélation raisonnable peut être trouvée entre le courant mesuré à cet instant et le DP, exception faite des cuves pour lesquelles l'humidité dépasse 2.3 %.

### 3.5.2 Corrélation entre la tangente de l'angle des pertes et le DP du papier

De façon semblable, on va rechercher la corrélation entre la tangente de l'angle des pertes et le DP du papier à une fréquence donnée. La majorité des fréquences de mesure ont été retenues pour construire l'évolution de la corrélation en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus sont consignés dans la figure 34 et le tableau VI.

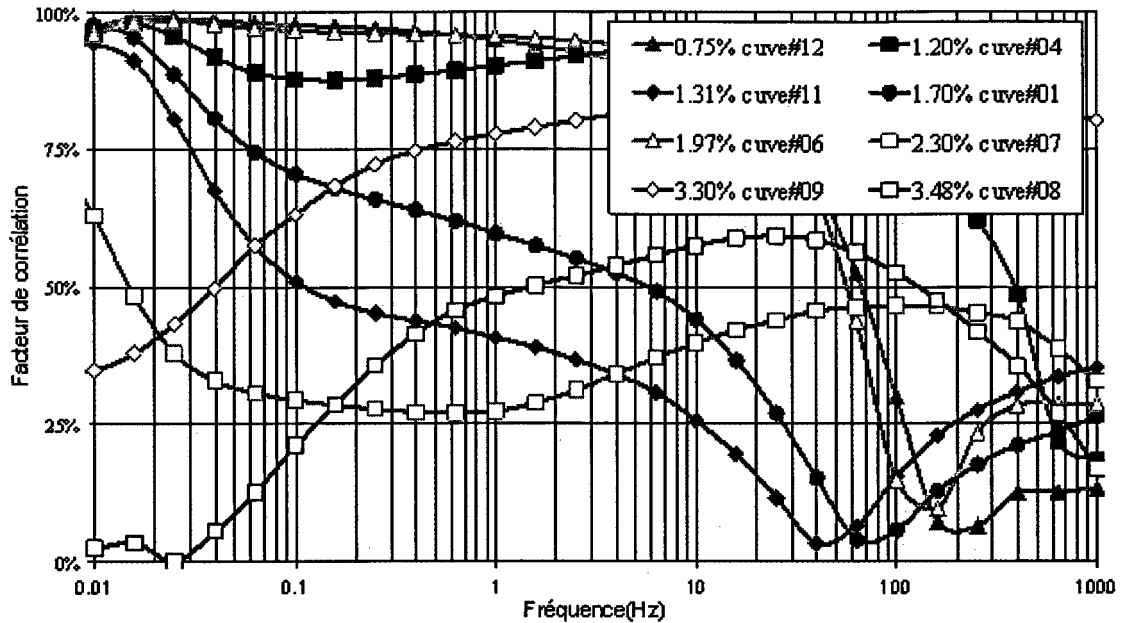


Figure 34 Évolution de la corrélation (Tangente  $\delta/DP$ ) avec la fréquence

Tableau VI

Corrélation à 0.003 Hz entre la tangente de l'angle de perte et le DP du papier

Référence	Groupe	Taux d'humidité	Coéf. corrélation	Pente de régression (DP)	Constante de régression (DP)
cuve#01	G1	1.70 %	85.69 %	-573	1 206
cuve#07	G1	2.30 %	72.21 %	-381	1 089
cuve#09	G1	3.30 %	26.97 %	-147	754
cuve#11	G1	1.31 %	95.72 %	-881	1 535
cuve#04	G2	1.20 %	92.40 %	-453	1 196
cuve#06	G2	1.97 %	90.42 %	-633	1 295
cuve#08	G2	3.48 %	10.34 %	-63	696
cuve#12	G2	0.75 %	89.24 %	-640	1 344

La figure 34, montre que pour les fréquences inférieures à 0.1 Hz, une corrélation raisonnable peut être trouvée entre la tangente de l'angle de perte et le DP du papier,

excepté pour les cuves pour lesquelles l'humidité dépasse 2.3 %. Ce résultat identique qualitativement à celui obtenu dans le domaine temporel, montre la dualité existant entre le domaine temporel et fréquentiel. On en déduit que le modèle qui suppose l'existence d'une équation linéaire entre la cause et l'effet est valable qualitativement.

### 3.5.3 Corrélation entre le courant de polarisation et le facteur de puissance de l'huile

Quoique d'importance moindre, la recherche d'une relation entre le courant de polarisation et le facteur de puissance de l'huile a fait l'objet d'une étude. La figure 35 et le tableau VII illustrent les résultats obtenus pour des temps d'échantillonnage de 10, 20, 40, 50, 100, 500, 1000 et 4500 secondes.

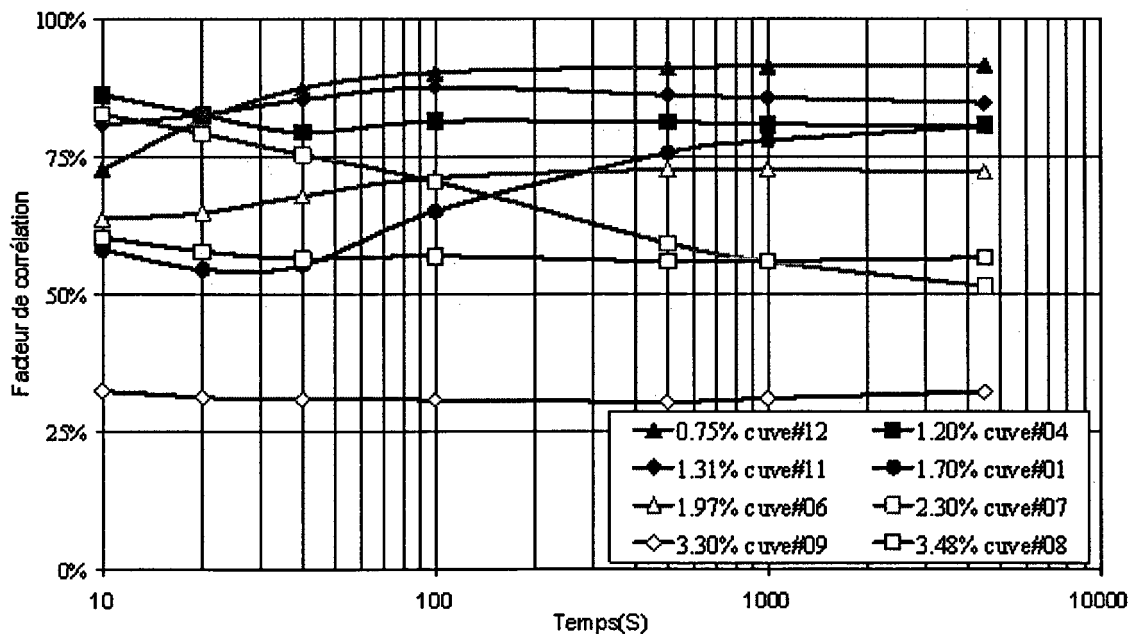


Figure 35 Évolution de la corrélation (Courant de polarisation/Facteur de puissance de l'huile) avec le temps



Tableau VII

Corrélation à 2400 secondes entre courant de polarisation et le facteur de puissance de l'huile

Référence	Groupe	Taux d'humidité	Coéf Corrélation	Pente de Régr. (1/A)	Constante régression
cuve#01	G1	1.70 %	80.50 %	$78 \times 10^6$	0.36
cuve#07	G1	2.30 %	63.67 %	$18 \times 10^6$	-0.68
cuve#09	G1	3.30 %	64.80 %	$26 \times 10^6$	-0.69
cuve#11	G1	1.31 %	67.85 %	$34 \times 10^6$	-0.59
cuve#04	G2	1.20 %	72.61 %	$49 \times 10^6$	0.09
cuve#06	G2	1.97 %	72.62 %	$52 \times 10^6$	0.21
cuve#08	G2	3.48 %	72.17 %	$56 \times 10^6$	0.36
Cuve412	G2	0.75 %	82.72 %	$9 \times 10^6$	-0.09

La figure 35, montre que le facteur de corrélation varie très peu en fonction du temps. La corrélation entre le courant de charge et le facteur de puissance de l'huile semble être meilleure pour les cuves sèches aux temps longs. Néanmoins, cette corrélation est moins prononcée que celle obtenue entre le courant de polarisation et le DP du papier. La corrélation est moindre. On y décèle que les modifications intervenus dans les propriétés du papier ont une influence sur le facteur de puissance de l'huile.

#### 3.5.4 Corrélation entre Tangente de l'angle des pertes et le facteur de puissance de l'huile

De façon semblable, on va rechercher la corrélation entre la tangente de l'angle des pertes et le facteur de puissance de l'huile. La majorité des fréquences de mesure ont été retenues pour construire l'évolution de la corrélation en fonction de la fréquence. La figure 36 et le tableau VIII reprennent l'essentiel des résultats obtenus.

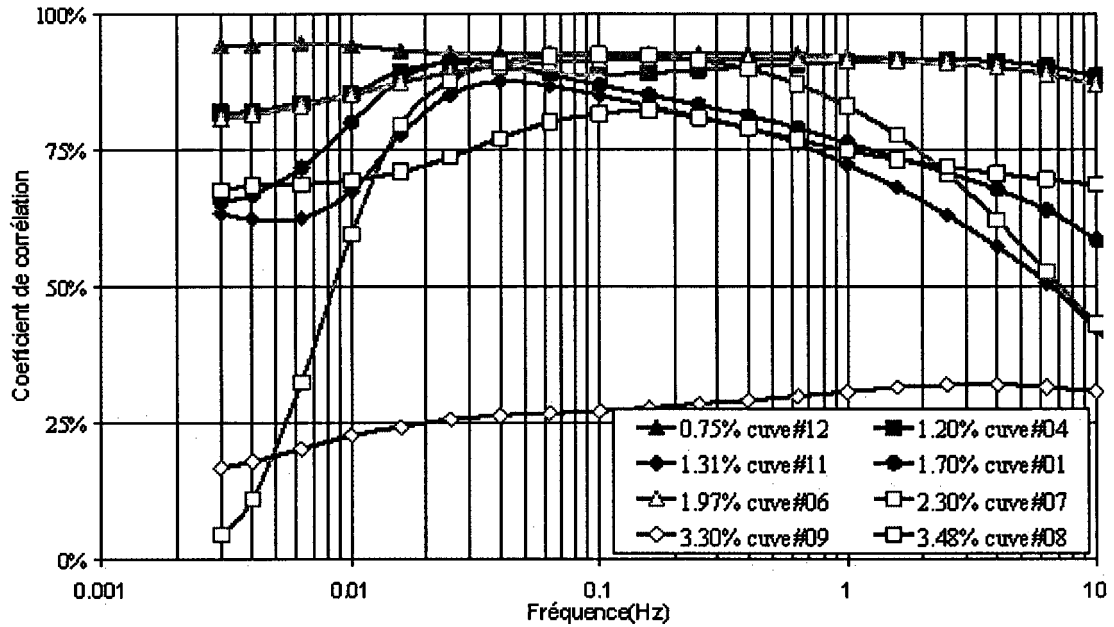


Figure 36 Évolution de la corrélation (Tangente  $\delta$ /Facteur de puissance de l'huile) avec la fréquence

Tableau VIII

Tableau corrélation tangente à 0.003 Hz et le facteur de puissance de l'huile

Référence	Groupe	Taux d'humidité	Coéf de corrélation	Pente de régression	Constante régression
cuve#01	G1	1.70 %	65.53%	2.31	-0.42
cuve#07	G1	2.30 %	4.42%	0.06	1.10
cuve#09	G1	3.30 %	16.71%	0.02	0.19
cuve#11	G1	1.31 %	63.28%	3.95	-0.87
cuve#04	G2	1.20 %	81.80%	1.66	-0.29
cuve#06	G2	1.97 %	80.60%	3.42	-1.36
cuve#08	G2	3.48 %	67.61%	0.35	-0.08
cuve#12	G2	0.75 %	94.06%	4.67	-2.24

La figure 36, montre que le facteur de corrélation est meilleur aux basses fréquences surtout pour les cuves sèches. Cette corrélation est moins prononcée que celle obtenue entre le courant de polarisation et le DP du papier.

### 3.6 Normalisation de la température

Des échantillons de papier sec ont fait l'objet d'essais en température à l'ETS. Pour chaque température la courbe expérimentale FDS est enregistrée. La cuve 09 était soumise à la même expérimentation à l'IREQ. Plus tard suivront d'autres expériences sur les cuves 07 et 01. La figure 37, illustre les résultats expérimentaux obtenus pour le papier neuf.

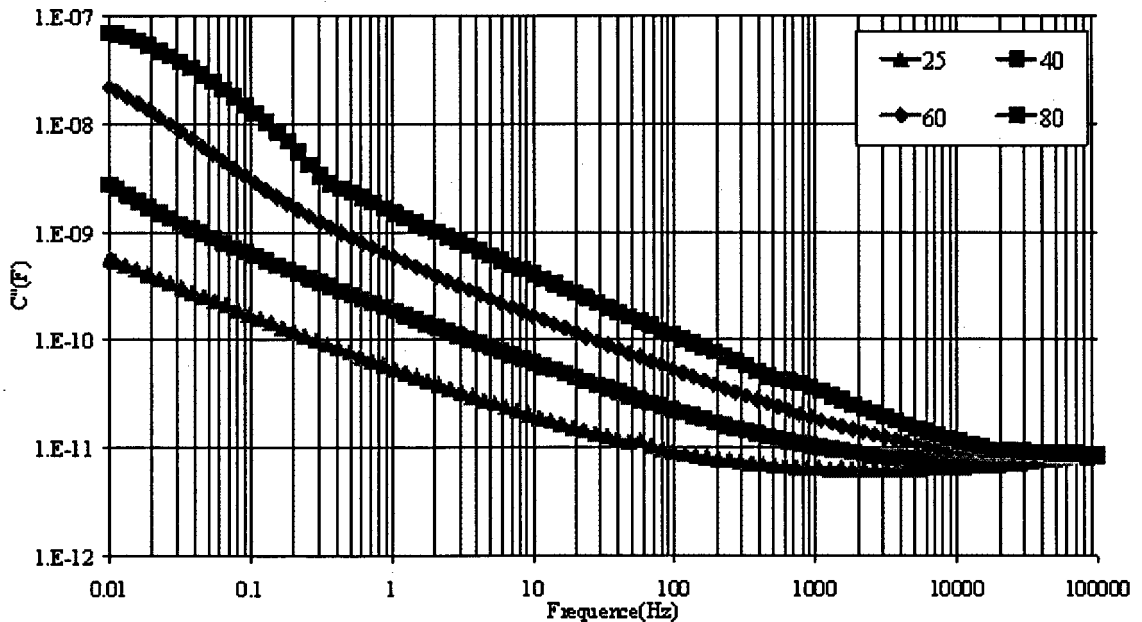


Figure 37 Capacité imaginaire versus fréquence pour différentes températures pour du papier neuf

Dans la figure 37, on constate que l'augmentation de température translate horizontalement la courbe de la capacité imaginaire versus la fréquence. Dans ce qui

suit, on verra la procédure pour obtenir la valeur du facteur de translation pour différentes températures. Dans un second temps, on cherchera à trouver la relation existant entre cette translation et la température.

### **3.6.1 Recherche de la relation entre le déplacement en fréquence et la température**

Nous allons ici décrire la procédure qui permet d'obtenir la relation entre la valeur du facteur de déplacement en fréquence et la tangente de l'angle des pertes. Dans cette expérience la cuve 09 a été portée aux températures 25, 30, 40 et 50 °C. Pour chacune de ces températures, la tangente de l'angle des pertes a été mesurée à différentes fréquences. La figure 38 reprend l'ensemble des résultats. Si l'on choisit 25 °C comme température de référence, alors la courbe expérimentale faite à cette température est appelée courbe maîtresse. La recherche de la relation entre le facteur de déplacement et la température se fera en deux temps. Dans un premier temps, on recherche la valeur du facteur de déplacement pour chacune des températures. Dans un deuxième temps, comme le suggère la théorie, on recherchera une relation exponentielle entre le facteur de déplacement et l'inverse de la température.

#### **3.6.1.1 Recherche du facteur de déplacement en fréquence**

Pour effectuer la translation horizontale d'une courbe, il suffit d'ajouter une valeur fixe à la variable indépendante sans changer la valeur de la variable dépendante. Dans notre cas cela revient à ajouter la même valeur fixe à toutes les fréquences sans changer la valeur de la tangente de l'angle des pertes. Pour trouver la valeur du facteur de déplacement, on translate horizontalement la courbe à une température donnée jusqu'à la faire coïncider avec la courbe maîtresse. La figure 38 représente la courbe expérimentale de la tangente de l'angle des pertes à différentes températures pour la cuve 09. On peut ainsi voir la courbe de la tangente de l'angle des pertes à 50 °C traduite

horizontalement, alors qu'elle est sur le point de coïncider avec la courbe maîtresse à 25 °C. On continue ainsi pour chacune des températures.

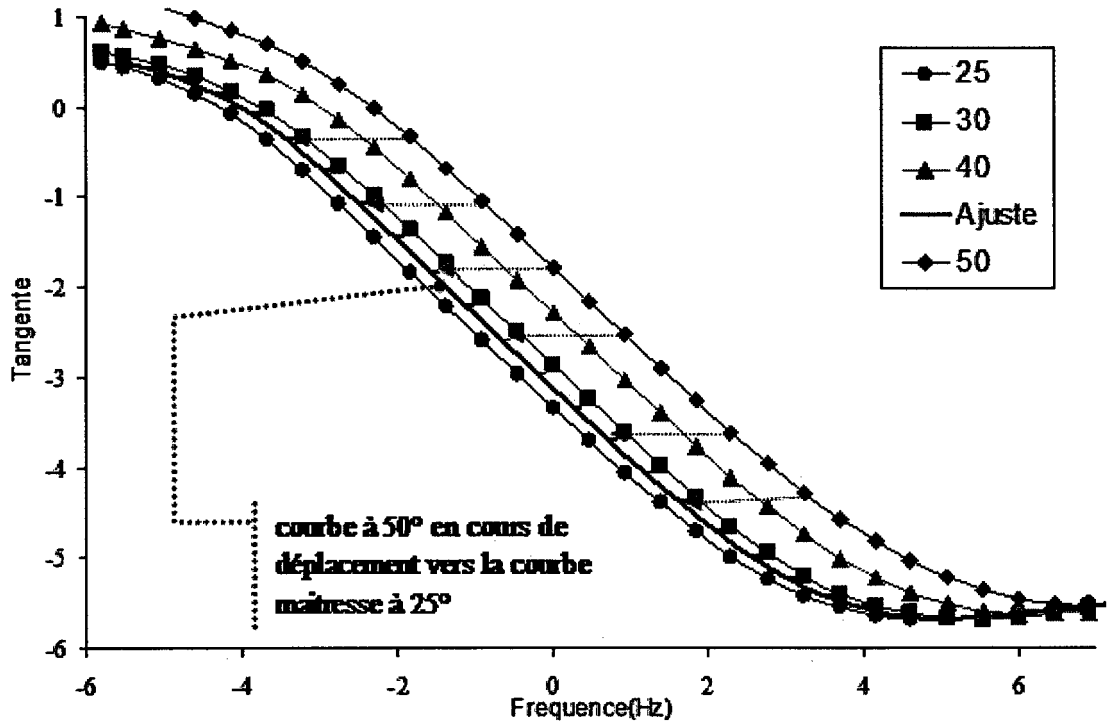


Figure 38 Mise en œuvre de l'ajustement en fréquence

Le tableau IX ci-dessous donne les valeurs des déplacements obtenus pour les trois cuves soumises à l'étude ainsi que pour l'échantillon de papier neuf.

Tableau IX

Déplacement en fréquence par rapport à la courbe maitresse à 25°C

Cuve	Température(C)	$1000/(T+273)$ (1/Kelvin)	Ln(déplacement) (Hz)
Papier neuf	25	3.36	0.00
	40	3.19	5.70
	60	3.00	10.60
	80	2.83	14.29
Cuve#09	25	3.36	0.00
	30	3.30	0.80
	40	3.19	1.99
	50	3.10	3.15
Cuve#01	25	3.36	0.00
	30	3.30	0.47
	40	3.19	1.13
	50	3.10	1.79
Cuve#07	25	3.36	0.00
	30	3.30	0.47
	40	3.19	1.55
	50	3.10	2.58

### 3.6.1.2 Recherche de la relation entre le déplacement en fréquence et la température

On s'attend, d'après la théorie, à trouver une relation exponentielle entre le déplacement et l'inverse de la température exprimée en Kelvin. Cela revient à rechercher une relation linéaire entre le logarithme de ces deux grandeurs. Dans la figure 39, on a représenté la relation entre le logarithme du déplacement et le logarithme de  $1000/T$  pour les cuves 01,07, 09 et l'échantillon de papier.

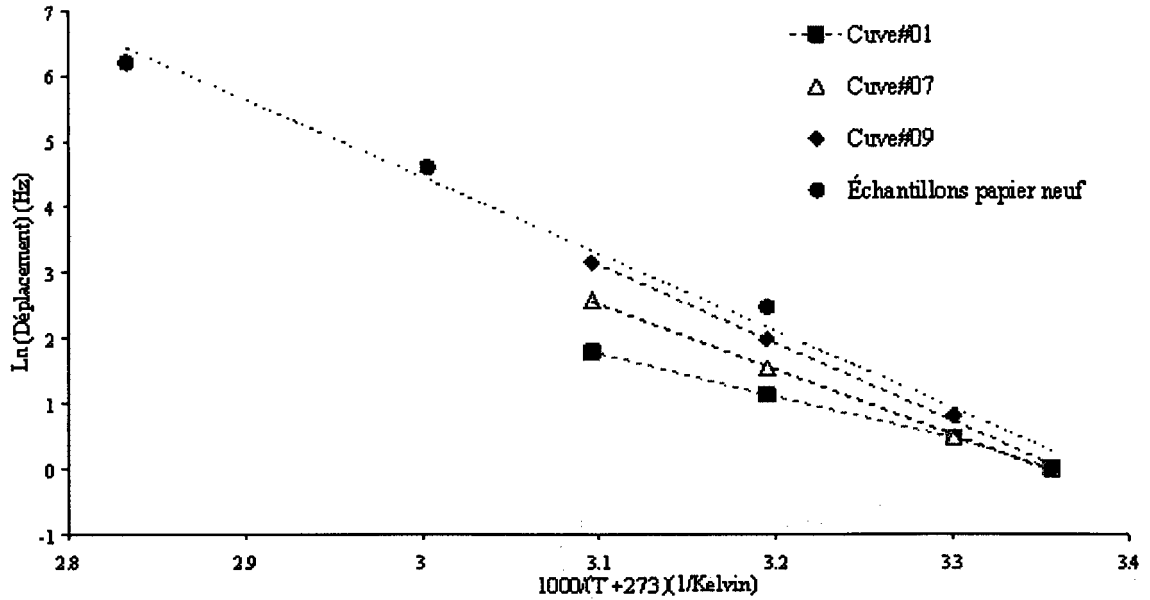


Figure 39  $1000/(T+273)$  vs  $\ln(\text{déplacement})$  pour # cuves

On voit clairement l'existence de la relation exponentielle entre l'inverse de la température et le déplacement. Hormis la cuve 01, la relation semble être pratiquement identique pour le restant des cuves et l'échantillon de papier neuf. Le tableau X ci-dessous, illustre les coefficients de régression obtenus.

Tableau X

Tableau récapitulatif de la corrélation

Référence	Groupe	Taux Humidité	Coef Corrélation	Pente de régression (Kelvin)	Constante de régression (Hz)
Cuve#01	G1	1.7 %	99 %	-6.78	22.80
Cuve#07	G1	2.3 %	99 %	-10.01	33.55
Cuve#09	G1	3.3 %	98 %	-11.98	40
Papier neuf		3.3 %	99 %	-11.76	40

Comme confirmé par le tableau X, la relation est identique pour le papier neuf et les cuves 07 et 09. On en tire comme première conclusion que le facteur de déplacement en fréquence est indépendant de la géométrie. On peut aussi avancer que parmi tous les matériaux constituant la cuve, le papier reste l'élément dominant dans la détermination de la valeur du déplacement.

### 3.6.2 Exploitation de la relation

Si nous choisissons les coefficients de la cuve 09 comme déplacement, et la température de 25 °C comme température de référence. Alors le déplacement en fréquence pour se ramener d'une courbe mesurée à la température T à la courbe maîtresse de 25 °C est donnée par :

$$\ln(\text{déplac}(T)) = \frac{11\,980}{T+273} - 40 \quad (3.1)$$

À partir d'une courbe obtenue à T °C , la courbe maîtresse est obtenue par translation horizontale. Cela revient à laisser inchangée la valeur de la donnée mesurée, et à ajouter au logarithme de la fréquence le logarithme du déplacement telle que calculée par (3.1) pour la température T °C.

La figure 40, regroupe sur un même schéma la capacité mesurée à différentes températures ainsi que la courbe obtenue par le déplacement en fréquence. On voit clairement que les courbes issues du déplacement pour chaque température sont proches de la courbe maîtresse.



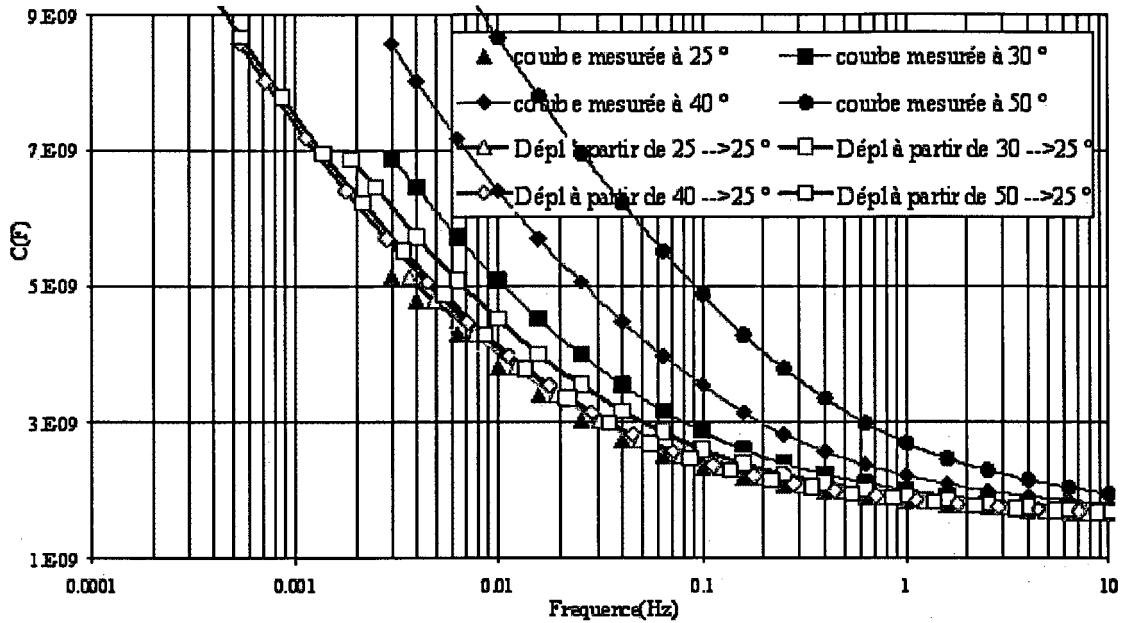


Figure 40 Déplacement en fréquence de la capacité vs fréquence cuve#09

### 3.7 Évaluation de l'influence de l'humidité

La figure 41, donne les courbes isothermes extraites des courbes isothermes de P.J. Griffin et J.D. Christie, et le relevé expérimental de la quantité d'eau dans l'huile pour différents taux d'humidité.

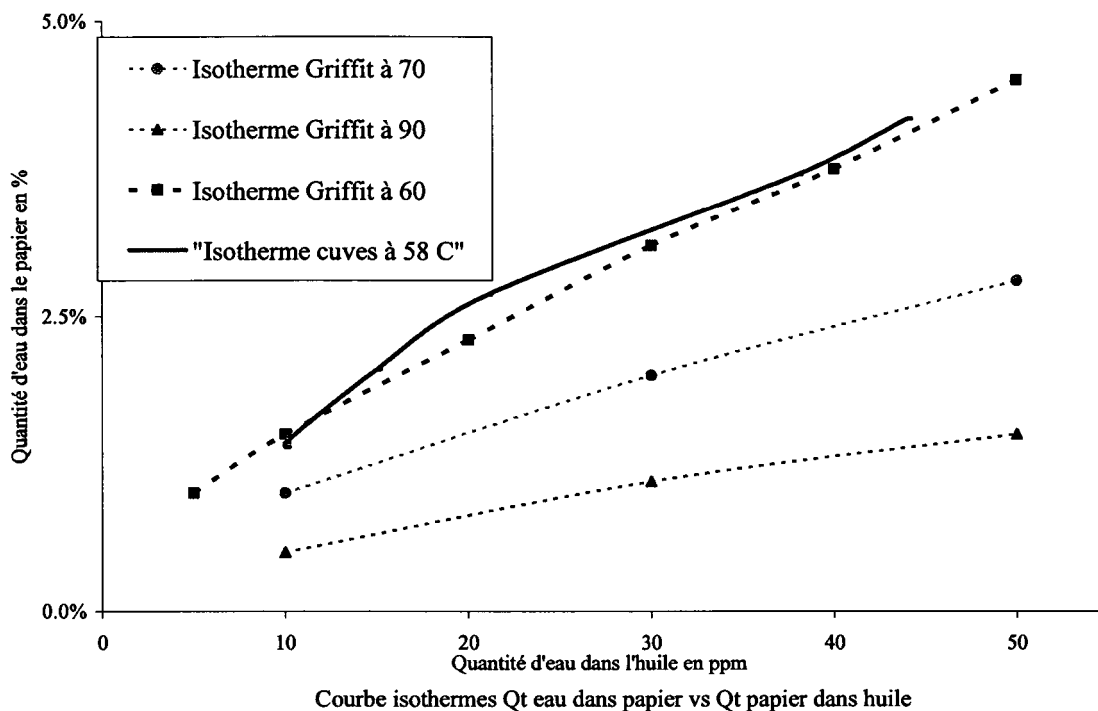


Figure 41 Courbe isothermes Qt eau dans papier vs Qt eau dans huile

L'on constate que la courbe issue des expériences s'approche de la courbe isotherme de P.J. Griffin et J.D. Christie à 60 °C, tout en restant supérieur ce qui laisse supposer que les mesures d'eau dans l'huile ont été faites à une température légèrement inférieure à 60 °C. Effectivement, la température à laquelle le contenu d'eau dans l'huile a été mesuré est de 58 °C. En conséquence lorsqu'on est à l'équilibre thermique, les courbes isothermes permettent de quantifier la relation existant entre la quantité d'eau dans le papier et celle contenue de l'huile. Les courbes isothermes de P.J. Griffin et J.D. Christie semblent donner de bons résultats.

### 3.8 Modèles

#### 3.8.1 Circuits R en série avec (G//C)

La modélisation "Circuits R en série avec (G//C)", se rencontre lorsqu'on schématise le transformateur par une barrière d'huile de résistance  $R_h$  en série avec l'ensemble papier imprégné d'huile représenté par une résistance  $R_p$  en parallèle avec une capacité  $C_p$ . Comme montré au chapitre précédent, il faut alors calculer le rapport :

$$C^* = \frac{Y}{i\omega} \quad (3.2)$$

Désignons par  $C'$  la partie réelle de  $C^*$  et par  $C''$  sa partie imaginaire et posons que  $\tau = R_h C_0$ ;  $G = \frac{1}{R_p}$ ;  $b = \frac{R_h}{R_p}$ . On obtient, comme énoncé au chapitre précédent, les

relations suivantes dans le domaine fréquentiel :

$$C' = C_p \frac{1}{(1 + \tau^2 \omega^2)} \quad (3.3)$$

$$C'' = G \frac{\left(1 + \frac{\tau^2}{b} \omega^2\right)}{\omega(\tau^2 \omega^2 + 1)} \quad (3.4)$$

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{C''}{C'} = \frac{G}{C_p} \frac{\left(1 + \frac{\tau^2}{b} \omega^2\right)}{\omega} \quad (3.5)$$

Pour implémenter ces relations nous allons écrire directement la formule (3.2) dans le logiciel mathématique MATLAB.

### 3.8.1.1 Sensibilité de la capacité imaginaire

Les trois figures 42, 43 et 44, illustrent le comportement de la capacité imaginaire lorsque la résistivité du papier, la résistivité de l'huile et la capacité du papier varient.

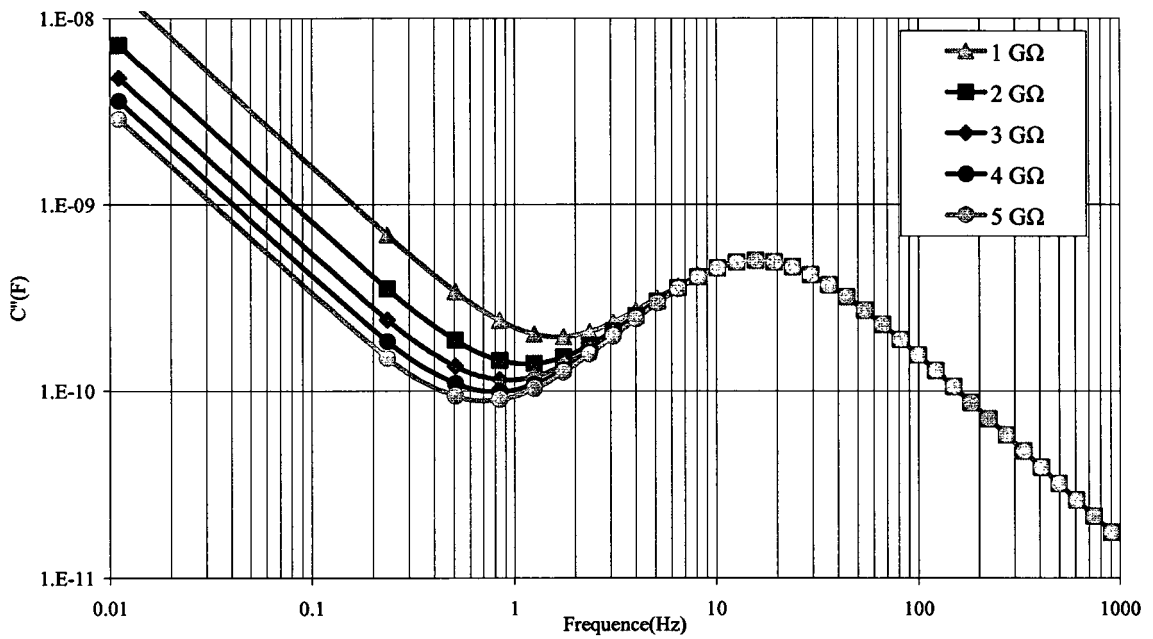
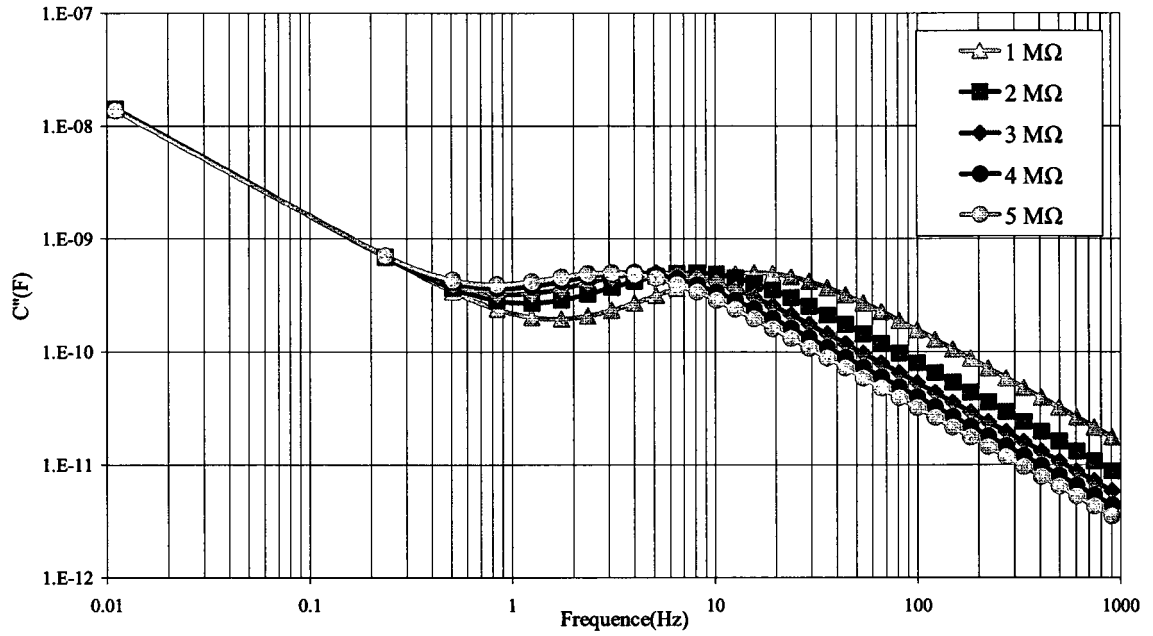
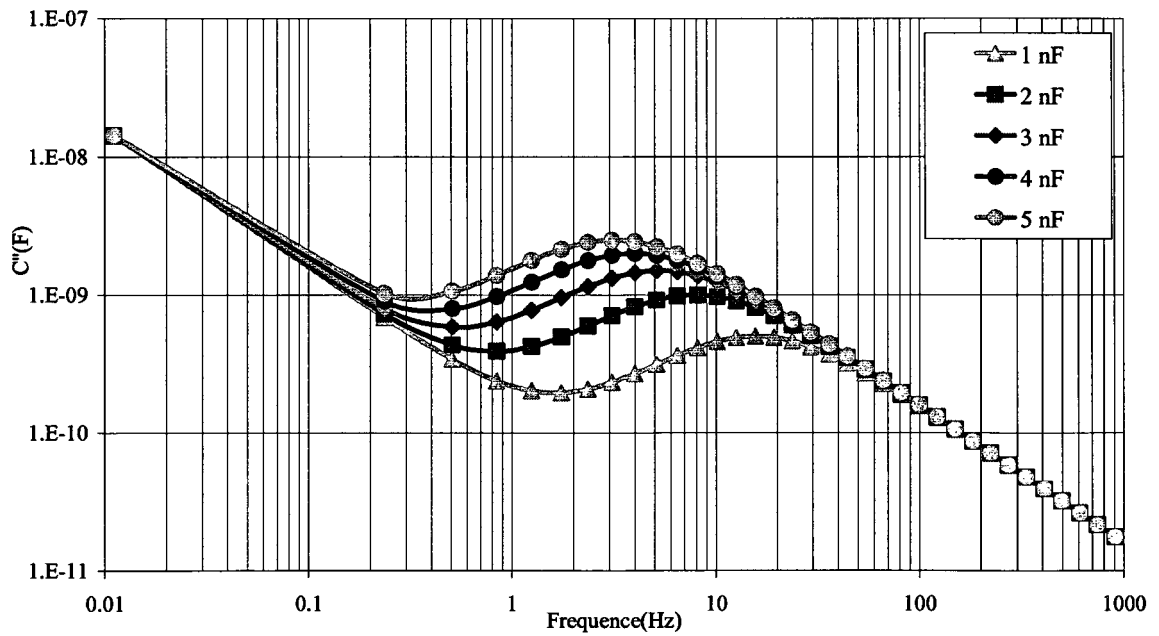


Figure 42 Évolution  $C''$  fonction de  $R_p$

Figure 43 Évolution  $C''$  fonction de  $R_h$ Figure 44 Évolution  $C''$  fonction de  $C_p$

### 3.8.1.2 Sensibilité de la capacité réelle

De façon similaire, les trois figures 45, 46 et 47, illustrent le comportement de la capacité réelle lorsque la résistivité du papier, de l'huile et la capacité du papier varient.

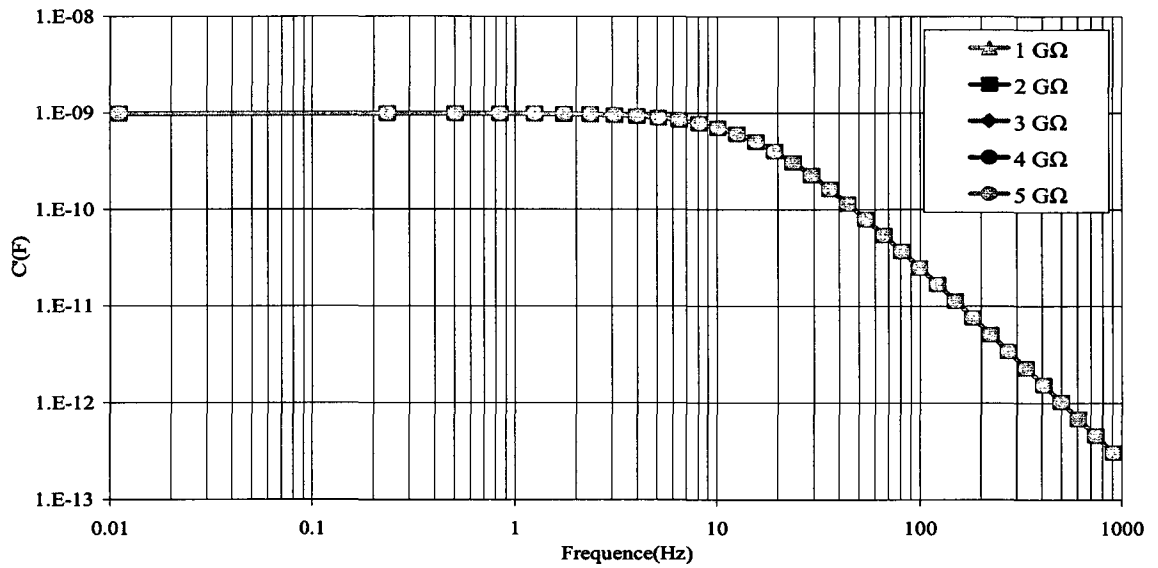


Figure 45 Évolution  $C'$  fonction de  $R_p$

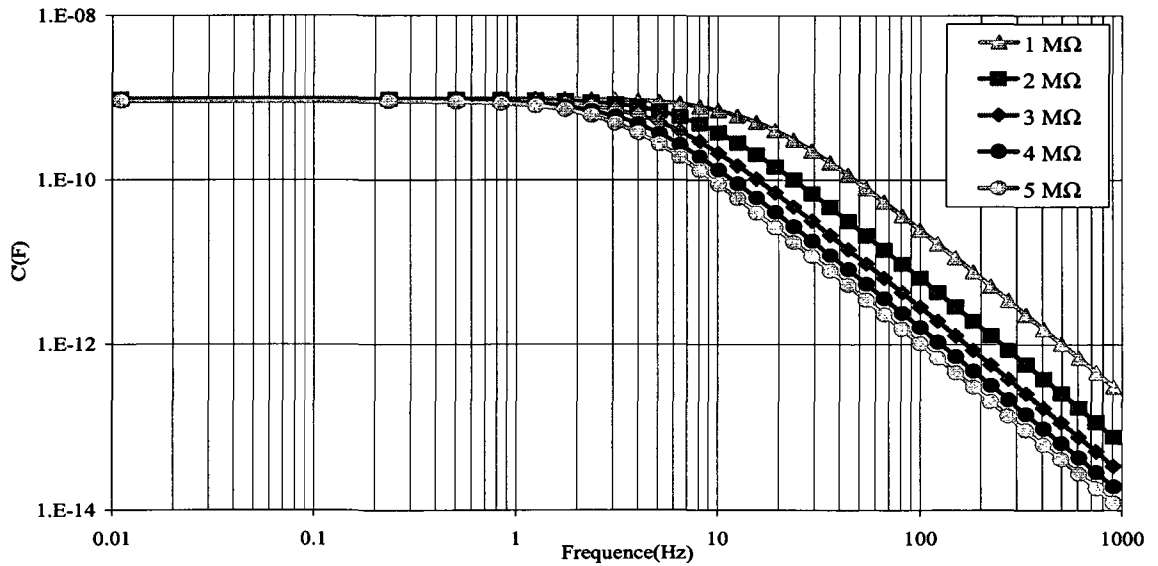


Figure 46 Évolution  $C'$  fonction de  $R_h$

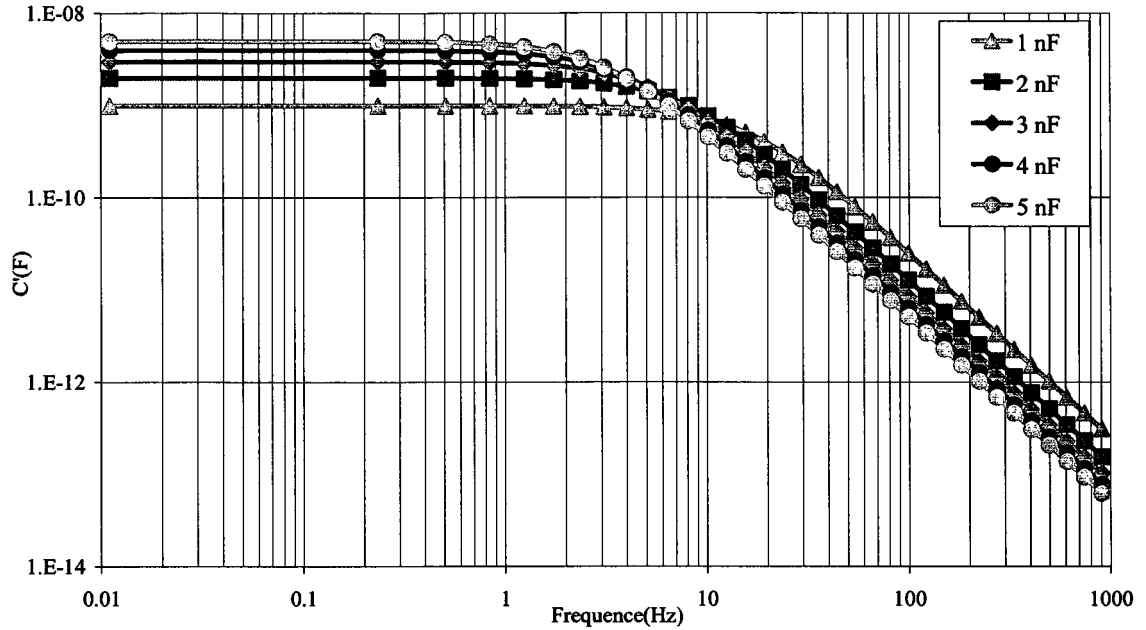


Figure 47 Évolution  $C^*$  fonction de  $C_p$

### 3.8.1.3 Sensibilité du courant

Le phaseur du courant de polarisation  $I$ , obéit à la relation suivante dans le domaine des fréquences :

$$I = \hat{j}\omega C^* U \quad (3.6)$$

où  $I, U, C^*$  désignent respectivement le phaseur courant, le phaseur tension et la capacité complexe.

Pour se ramener au domaine temporel à peu de frais, on peut utiliser la relation de Hamon (2 65) :

$$C^*(f) = \frac{i(0.1/f)}{2\pi fU} \quad (3.7)$$

où  $i$  désigne le courant dans le domaine du temps.

Posons que  $t = 0.1/f$ , il s'ensuit que :

$$i(t) = C^* (0.1/t) \omega U \quad (3.8)$$

Les trois figures 48, 49 et 50, dévoilent le comportement du courant lorsque la résistivité du papier, la résistivité de l'huile et la capacité du papier varient.

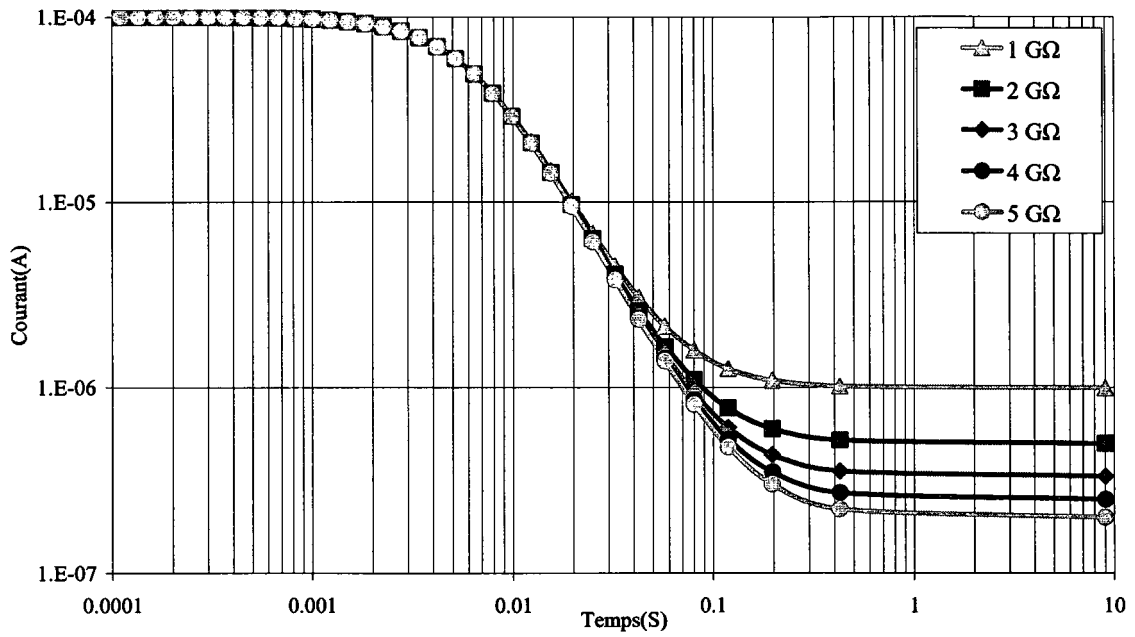


Figure 48 Évolution du courant en fonction de  $R_p$



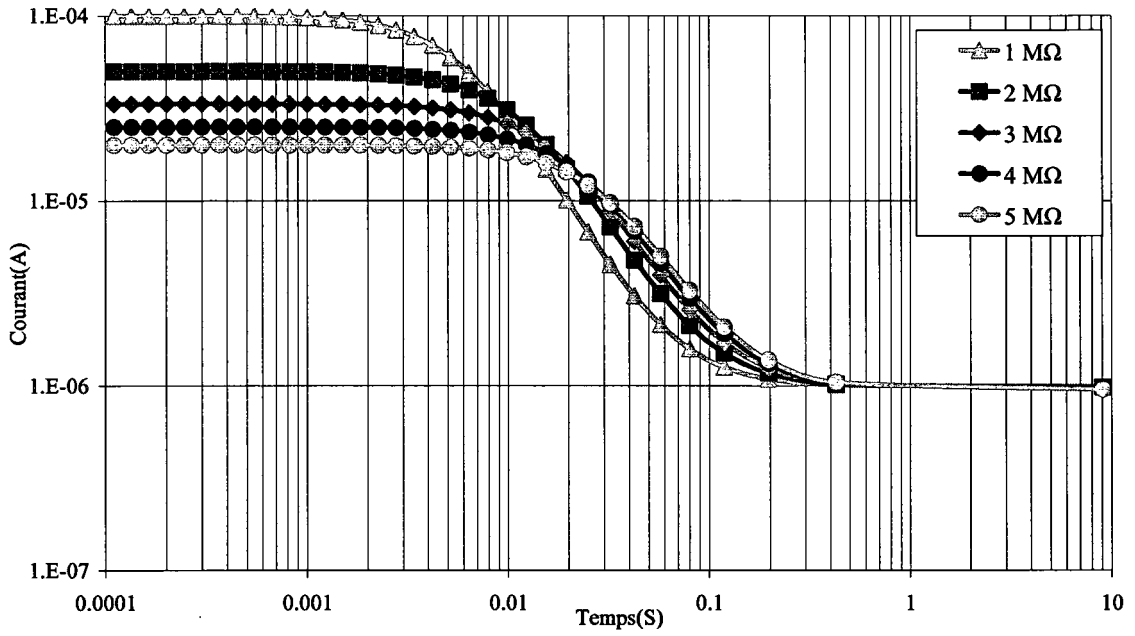


Figure 49 Évolution du courant en fonction de  $R_h$

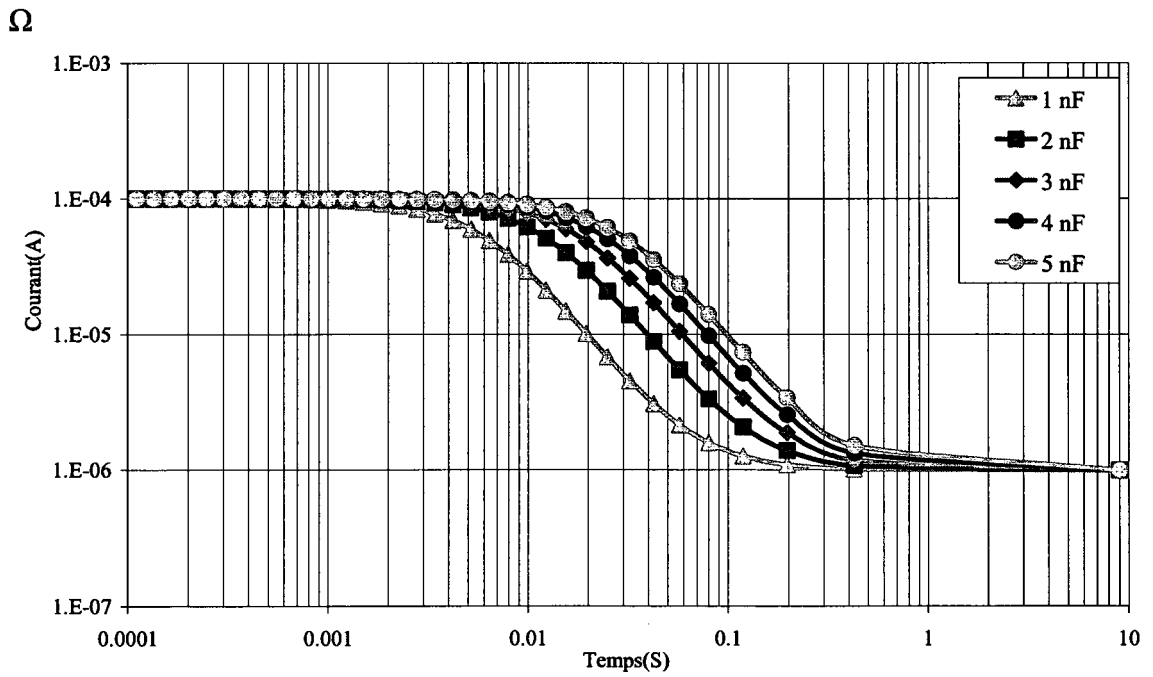


Figure 50 Évolution du courant en fonction de  $C_p$

### 3.8.1.4 Analyse des résultats

Un tel modèle est loin de reproduire la réalité. Son principal intérêt réside dans les enseignements qualitatifs que nous pouvons en tirer. Commençons par analyser l'influence des paramètres  $R_h$ ,  $R_p$  et  $C$  sur le courant. La figure 48, montre que la variation du paramètre  $R_p$  modifie la valeur du courant pour les temps longs. Alors que dans la figure 49, la variation du paramètre  $R_h$  a des répercussions sur la valeur du courant pour les temps courts et une légère modification pour les temps moyens, tandis que la figure 50 informe que la variation du paramètre  $C$  a une influence sur le courant pour les temps moyens. Ceci montre que l'un des intérêts de la méthode temporelle est que les modifications de la conductivité du papier, de celle de l'huile et de la capacité du papier se manifestent à des plages temporelles différentes. Les figures 42, 43 et 44 montrent respectivement la sensibilité de la capacité imaginaire aux variations des paramètres  $R_h$ ,  $R_p$  et  $C$ . On aboutit aux mêmes conclusions que précédemment en tenant compte qu'aux temps longs correspondent les basses fréquences et aux temps courts correspondent les hautes fréquences. On remarque aussi dans la figure 43 que la variation du paramètre  $R_h$  modifie la fréquence où se produit le pic de relaxation sans changer la valeur de  $C$ . Il en va tout autrement dans la figure 44 où la modification du paramètre  $C$  a pour effet de modifier la fréquence où se produit la relaxation et la valeur de  $C$ . La figure 45 montre que la capacité réelle est insensible aux variations du paramètre  $R_p$ . La figure 46 montre que la variation du paramètre  $R_h$  influe aux hautes fréquences.

Pour résumer, on peut avancer que les changements du courant aux temps courts sont dûs aux changements de la résistivité de l'huile. Les changements de la courbe de courant aux temps longs sont dus au changement de la résistivité du papier. Quand aux changements dans la capacité du papier, ils se manifestent aux temps médians, avec en prime un changement notable dans la position et l'amplitude du pic de relaxation dans les mesures fréquentielles.

### 3.8.2 Circuits RC en parallèle "régression par morceaux"

Le modèle revient à faire une régression de la courbe expérimentale avec une somme finie d'exponentielles décroissantes. Cette régression est non linéaire et l'on doit utiliser un algorithme d'optimisation pour déterminer les paramètres qui permettent la meilleure correspondance entre la courbe expérimentale et la courbe paramétrique. Cependant on peut remarquer que les exponentielles ayant des constantes assez différentes, elles ne peuvent que très peu se chevaucher. Ainsi dans chaque portion de la courbe expérimentale une seule exponentielle est active, ce qui nous permet de faire une régression linéaire par morceaux sur chaque partie de la courbe. L'algorithme que nous avons développé fait une régression à reculons et opère comme décrit ci-dessous.

On commence par obtenir le courant de conduction en faisant la différence entre le courant de charge et le courant de décharge. Le courant de conduction est donné par la valeur de cette différence aux temps longs. En considérant la relation entre le logarithme du courant au logarithme du temps, on se ramène à un problème de régression linéaire. On soustrait le courant de conduction tel qu'obtenu précédemment. On cherche un intervalle de temps tel que sa borne supérieure soit la borne inférieure de l'intervalle précédent et tel que sa borne inférieure soit celle pour laquelle le coefficient de corrélation pour une régression linéaire est maximum. Ce faisant on peut déterminer les coefficients de l'exponentielle. L'expression de la régression obtenue est alors déduite de la courbe. Le processus reprend avec l'intervalle suivant et ainsi de proche en proche, on remonte vers les temps courts. À cause de la particularité de "chevauchement minime" des exponentielles décroissantes, l'ajustement fait à une étape donnée n'influencera pas beaucoup les ajustements antérieurs. Les résultats obtenus sont très prometteurs.

L'autre intérêt de cet ajustement est la possibilité de trouver la réponse fréquentielle à partir d'un simple calcul analytique. En vertu de la linéarité de l'intégrale, le problème revient à trouver la réponse fréquentielle de chaque exponentielle et à en faire la somme. La partie réelle de la transformée de Fourier est donnée par :

$$C'(\omega) = \int_0^{\infty} b \exp(at) \cos(\omega t) dt = b \frac{a}{a^2 + \omega^2} \quad (3.9)$$

La partie imaginaire est donnée elle par :

$$C''(\omega) = \int_0^{\infty} b \exp(at) \sin(\omega t) dt = b \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \quad (3.10)$$

Ce qui donne la relation suivante :

$$C'(\omega) = \left( \sum_{i=1}^6 b_i \frac{a}{a_i^2 + \omega^2} \right) + C'_{1000\text{hz}} \quad (3.11)$$

$$C''(\omega) = \left( \sum_{i=1}^6 b_i \frac{\omega}{a_i^2 + \omega^2} \right) \quad (3.12)$$

Nous avons ajouté C à 1000 Hz pour approcher la valeur C à l'infini du modèle. Pour avoir une idée de l'erreur entre la courbe paramétrique et la courbe expérimentale, on a calculé celle-ci pour chacune des 87 expériences par la formule suivante :

$$Erreur = \frac{\sum_t |CP(t) - M(t)|}{\sum_t |M(t)|} \quad (3.13)$$

CP(t) désigne la courbe paramétrique, M(t) désigne la courbe mesurée et t désigne le temps de mesure ou de calcul.

Pour segmenter l'erreur, on a compté le nombre d'expériences pour lesquelles l'erreur était de 1%, 2%,.... . Le résultat de cette classification est consigné sur la figure 51.

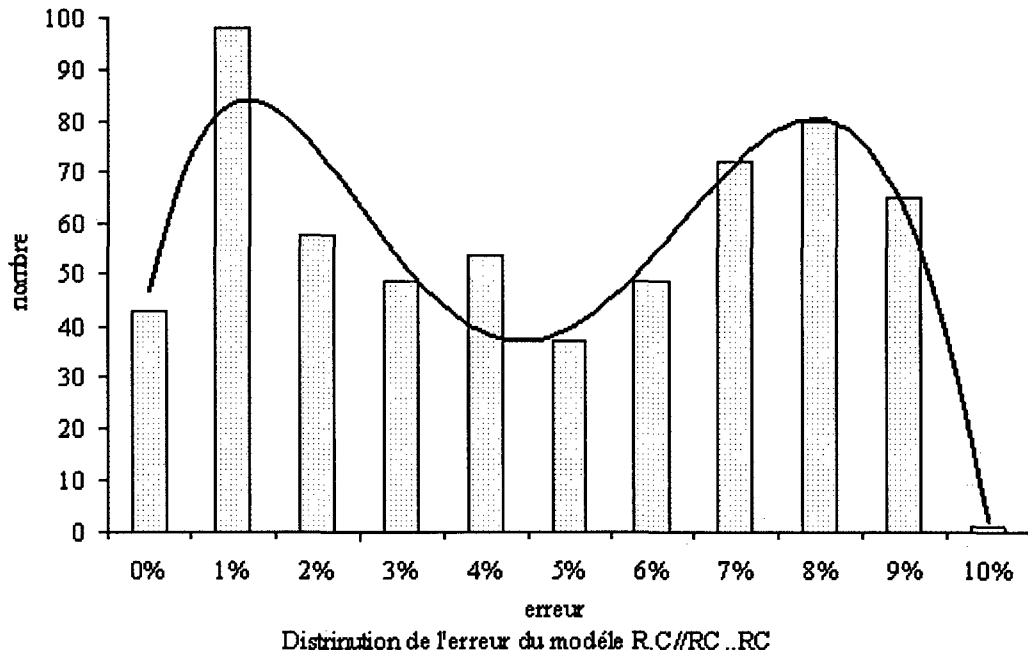


Figure 51 Distribution de l'erreur

Les résultats montrent que l'erreur moyenne se situe aux alentours de 9 % avec un écart type de 7 %.

### 3.8.3 Circuits RC en parallèle "Ajustement Gauss Newton"

Cette partie consistait à implémenter l'algorithme de Gauss Newton. À cause de la quantité de calculs symboliques et numériques, on a utilisé Matlab. L'absence d'interface entre Matlab et le logiciel de base de données Access, a fait qu'on n'a pu développer une solution intégrée. On a du opérer en trois étapes. La première a été l'importation des données dans un fichier de travail de Matlab. Ensuite le programme d'optimisation a été lancé avec comme paramètre le nombre d'itérations maximum et la précision souhaitée. En dernier lieu la matrice des résultats est intégrée dans notre base de données. Comme on peut le voir sur la figure 52, la courbe analytique est identique à

la courbe expérimentale. Ceci montre que l'ajustement est excellent et il peut atteindre une précision de 1 %. On se gardera cependant de rechercher une telle précision, car elle serait sûrement inférieure au pourcentage d'erreur commis par les conditions d'expérimentation. Le programme d'ajustement a été lancé avec une précision cible de 2 %, et 98 % des courbes on pu être modélisées avec cette précision.

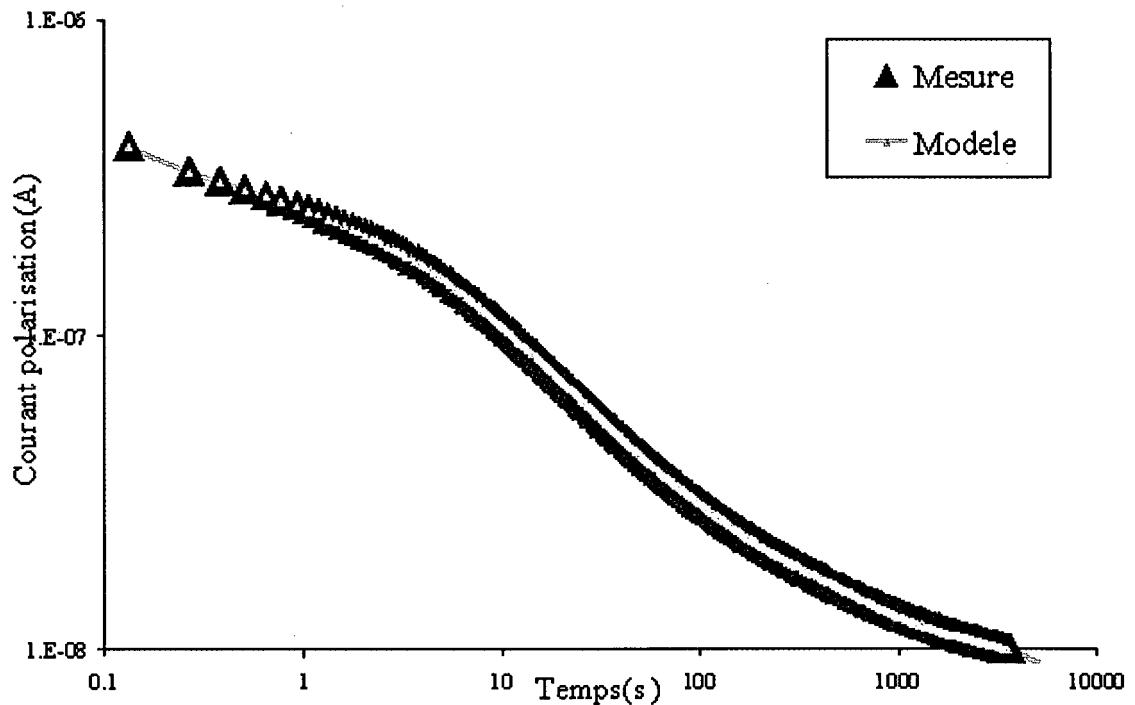


Figure 52 Ajustement par plusieurs exponentielles

#### 3.8.4 Modèle XY

Le modèle a été mise en œuvre pour calculer la permittivité du papier au tout début du vieillissement et à sa fin et ce pour toutes les cuves, soit les 28 courbes expérimentales. Pour chacune des 29 fréquences présentes dans une courbe, il est nécessaire de résoudre une équation du second degré pour trouver la permittivité du papier. Ce qui donne un total de 800 équations à résoudre (28 x 29). Étant donné ce grand nombre d'équations à

résoudre, il était plus judicieux d'utiliser un outil de résolution approprié tel que Matlab. Pour le transfert des données entre Matlab et notre base de données et Excel on a tout simplement utilisé l'outil "couper coller". Les résultats du modèle sont sauvegardés dans l'espace de travail de Matlab.

Le modèle XY peut être schématisé en trois grandes étapes

- Évaluer la permittivité relative de l'ensemble du composé huile papier
- Calculer la capacité géométrique
- Déduire la permittivité du papier.

### 3.8.4.1 Permittivité relative de l'ensemble

Dans un premier temps, on utilise la loi des mélanges appelée aussi limite supérieure Wiener [16], pour calculer la permittivité du papier :

$$\varepsilon^*_{papier} = \varepsilon^*_{papier\_sec} (1 - Tx\_h) + \varepsilon^*_{eau} .Tx\_h \quad (3.14)$$

En remplaçant les permittivités du papier sec et de l'eau par leurs valeurs respectives 4.5 et 80 on obtient après simplification :

$$\varepsilon'_{papier} (1000 \text{ Hz}) \square 4.5 + 74.5.Tx\_h \quad (3.15)$$

où  $Tx\_h$  est la fraction volumique d'eau.

Dans un deuxième temps on utilise la formule suivante :

$$\varepsilon^*(\omega, T) = Y\varepsilon^*_{papier} + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{\varepsilon^*_{Oil}} + \frac{X}{\varepsilon^*_{papier}}} \quad (3.16)$$

Dans laquelle X et Y expriment respectivement la quantité relative de séparateur et de barrière. Pour notre modèle, X et Y se situait à 12 et 20 % respectivement.

Comme les mesures expérimentales le confirment, à hautes fréquences la permittivité complexe de chaque matériau est égale à peu de chose près à sa partie réelle. Pour le papier la permittivité est donnée par (3.15), celle de l'huile est de 2,2. On obtient alors à partir des relations (3.15) et (3.16), les équations suivantes :

$$\varepsilon'_{\text{papier}}(1000 \text{ Hz}) = \varepsilon^*_{\text{papier}}(1000 \text{ Hz}) = 4.5 + 74.5t_{\text{hum}} \quad (3.17)$$

$$\varepsilon'(1000 \text{ Hz}) = \varepsilon^*(1000 \text{ Hz}) = 0.2\varepsilon'_{\text{papier}}(1000 \text{ Hz}) + \frac{0.8}{\frac{0.88}{2.2} + \frac{0.12}{\varepsilon'_{\text{papier}}(1000 \text{ Hz})}} \quad (3.18)$$

Il s'ensuit que la seule connaissance du taux d'humidité devrait donner la permittivité relative de l'ensemble à fréquence élevée.

### 3.8.4.2 Capacité géométrique

La capacité géométrique  $C_0$  est donnée par la formule suivante :

$$C_0 = \frac{C}{\varepsilon_r} \quad (3.19)$$

où  $\varepsilon_r$  désigne la permittivité relative.

Si nous considérons la fréquence 1000 Hertz comme étant une haute fréquence, alors les relations (3.17) et (3.18) donnent la permittivité relative de l'ensemble. On déduit la capacité géométrique exprimée par la relation suivante :

$$C_0 = \frac{C_{1000\text{Hz}}}{\varepsilon'} \quad (3.20)$$

Si l'on envisage de généraliser la relation (3.20) pour les transformateurs réels, il est important que ce calcul se fasse dès la mise en service du transformateur, une fois que la migration d'humidité du papier vers l'huile ait cessé. On invoquera deux raisons à cela.



En premier lieu, c'est lors de la mise en service du transformateur que le papier et l'huile sont les plus conformes au modèle idéal. En second lieu, tous les transformateurs sont mis en service dans les mêmes conditions, ce qui confère une certaine consistance à la méthode. Les capacités géométriques obtenues devraient en toute logique être les mêmes pour toutes les cuves, mais comme le montre le graphe 52, on note une certaine dispersion.

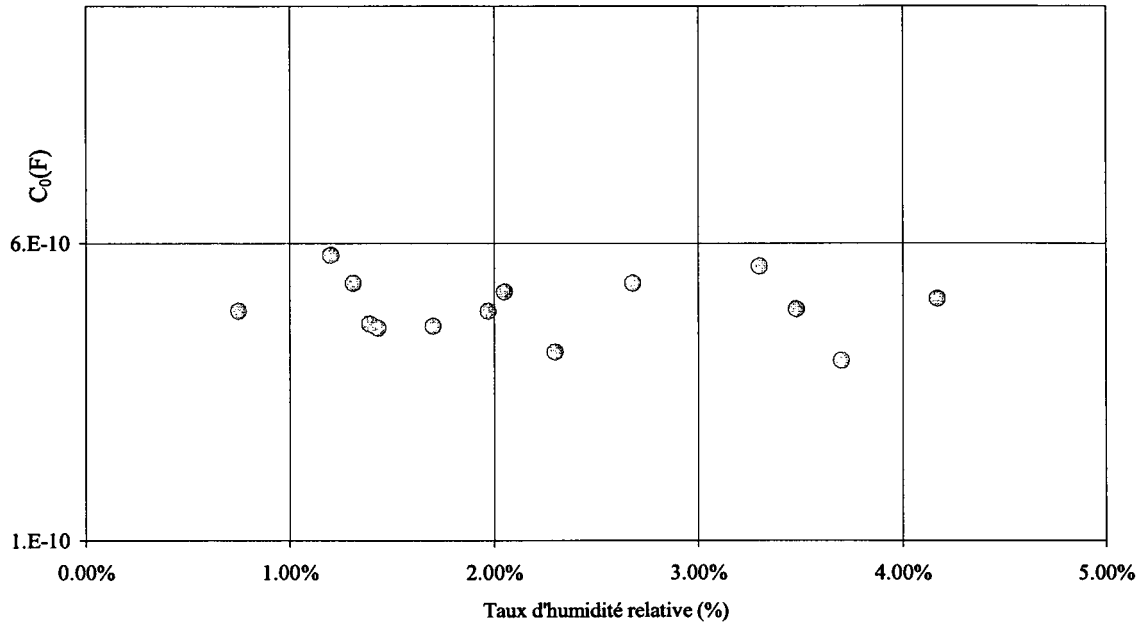


Figure 53 Évolution de  $C_0$  en fonction de l'humidité des cuves

### 3.8.4.3 Permittivité du papier

Rappelons d'abord la formule pour le calcul de  $\varepsilon^*$ .

$$\varepsilon^* = Y\varepsilon_{\text{papier}}^* + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{\varepsilon_{\text{oil}}^*} + \frac{X}{\varepsilon_{\text{papier}}^*}} \quad (3.21)$$

Connaissant  $C_0$ ,  $\varepsilon^*$  est déduit de la courbe expérimentale fréquentielle par division par  $C_0$ . Nous connaissons aussi le modèle qui donne la permittivité de l'huile. On peut déduire à partir de (3.21) la permittivité du papier. Après calcul et simplification il vient que :

$$Y(1-X)\varepsilon_p^{*2} + ((YX+1-Y)\varepsilon_h^* - (1-X)\varepsilon^*)\varepsilon_p^* - X\varepsilon_h^*\varepsilon^* = 0 \quad (3.22)$$

Il s'agit d'une équation du second ordre en  $\varepsilon_p^*$ . Les paramètres X et Y sont à définir par l'utilisateur.  $\varepsilon_h^*$  est donnée par un modèle connu. Quant à  $\varepsilon^*$ , elle est obtenue à partir de la courbe expérimentale. Pour que les résultats ne soient pas biaisés, il faut mesurer le taux d'humidité par une méthode indépendante.

Les figures 54 et 55, illustrent la permittivité imaginaire du papier issue de la méthode ci-dessus respectivement en début et en fin de vieillissement.

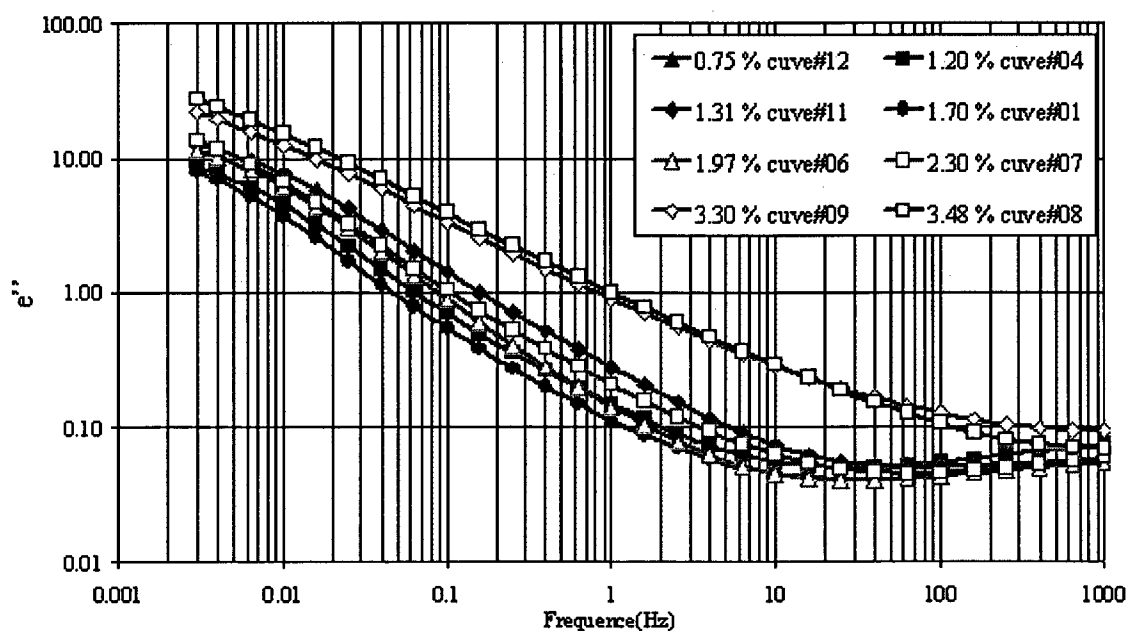


Figure 54  $\varepsilon_p''$  calculée au début du vieillissement

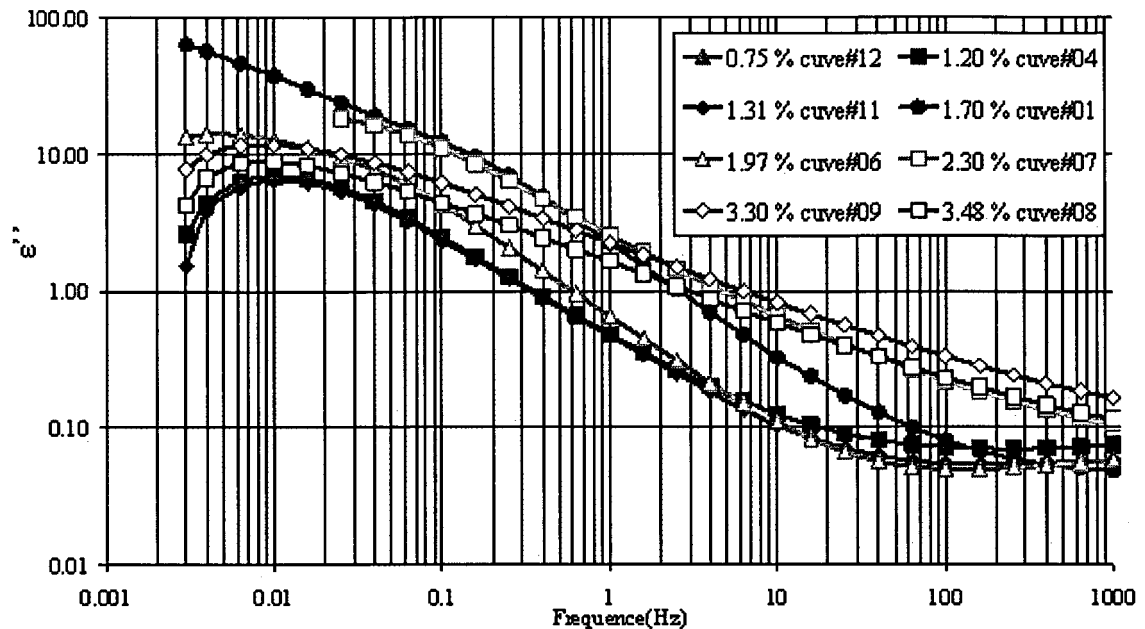


Figure 55  $\epsilon_p''$  calculée en fin de vieillissement

À la figure 54, on est en début de vieillissement. Seul l'effet de l'humidité des cuves entre en jeu, et l'on voit nettement se détacher les courbes des cuves 08 et 09 du reste des cuves. Les courbes de la figure 55 sont plus difficiles à analyser. Toutes les cuves n'ont pas accumulé les mêmes temps de vieillissement et ne sont pas soumises à la même température de vieillissement. Néanmoins, on voit encore une fois se détacher les cuves 08 et 09 auxquelles vient s'ajouter la cuve 07. Le restant des autres cuves exhibe un pic de relaxation aux alentours de la fréquence 0.01 Hz. La seule exception est la cuve 01 qui malgré son taux d'humidité bas, se comporte comme une cuve humide.

#### 3.8.4.4 Validation des résultats

Nous disposons des mesures fréquentielles effectuées sous humidité constante sur les échantillons de papier extraits des cuves. On peut donc effectuer la comparaison entre la courbe expérimentale, sur ces échantillons avec celles du papier telles que déduites par la procédure ci-dessus. En toute logique les deux courbes devraient être assez proches.

Les figures 56 et 57 illustrent cette comparaison qui à première vue semble raisonnablement satisfaisante. Ceci permet de valider les approximations faites pour le calcul de la permittivité relative et de la capacité géométrique des cuves ainsi que celles faites pour le calcul de la permittivité relative du papier.

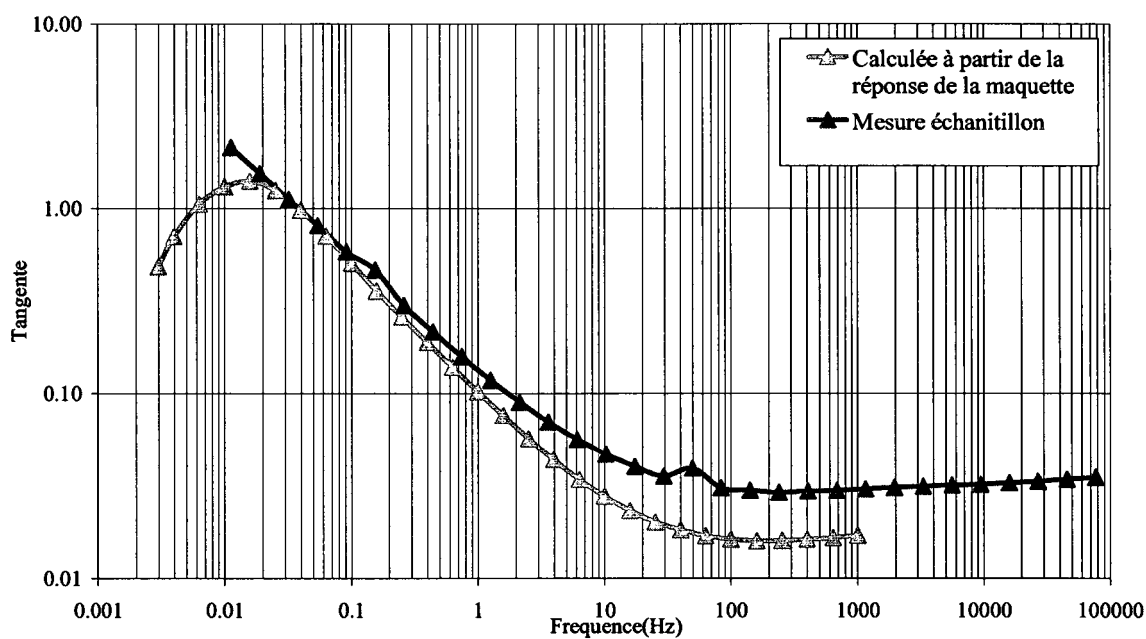


Figure 56 Comparaison de la tangente  $\delta$  calculée par le modèle XY et celle mesurée. L'échantillon provient d'une cuve sèche

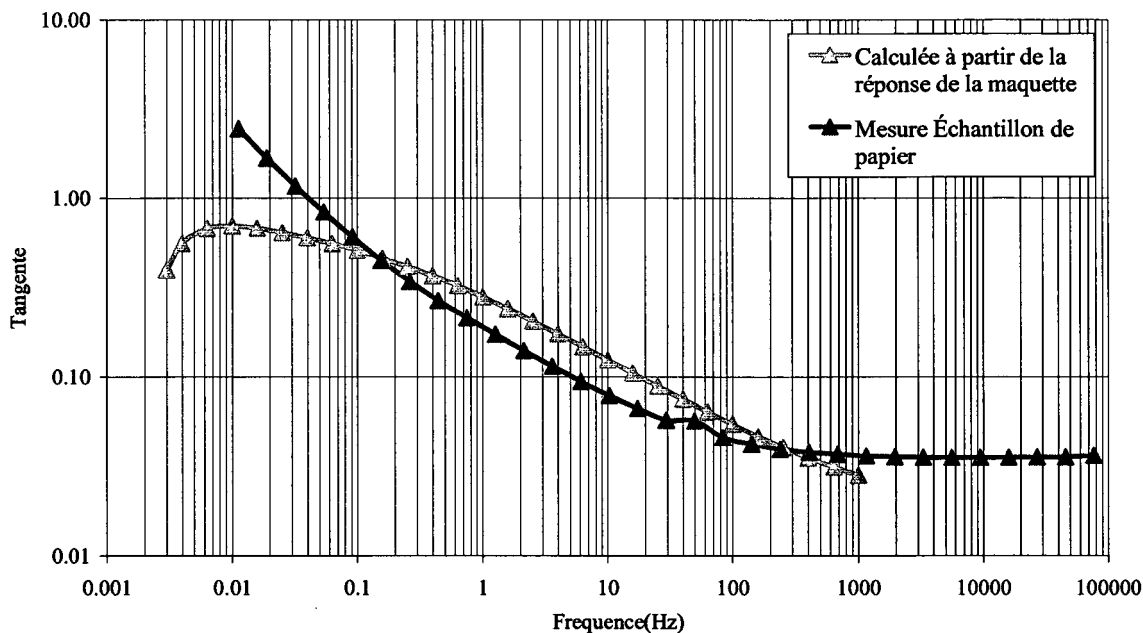


Figure 57 Comparaison de la tangente  $\delta$  calculée par le modèle XY et celle mesurée. L'échantillon provient d'une cuve humide

Le choix de la tangente de l'angle des pertes comme critère de comparaison vient de la difficulté à obtenir la capacité géométrique des échantillons de papier. En effet, la tangente de l'angle des pertes a ceci de particulier que le caractère géométrique est présent à peu près de la même façon dans la capacité imaginaire et la capacité réelle et conséquemment se simplifie lors du rapport de ces deux grandeurs.

### 3.9 Validité de la transformée de Fourier obtenue analytiquement

Pour définir la capacité imaginaire, nous disposons de deux méthodes analytiques qui sont :

- La transformée de Fourier de la courbe paramétrique en exponentielles décroissantes des données temporelles.
- La transformée de Hamon des données temporelles.

Nous disposons aussi des mesures expérimentales fréquentielles comme critère de comparaison. Dans ce qui suit, nous allons voir successivement comment obtenir la capacité imaginaire et réelle pour chacune des deux méthodes analytiques ci dessus. Les mesures fréquentielles donnent comme résultat le module de la capacité complexe et la tangente de l'angle des pertes. Il est nécessaire d'avoir recours à quelques relations trigonométriques pour en déduire la capacité réelle et la capacité imaginaire.

### 3.9.1 Courbe paramétrique en exponentielles décroissantes

Les capacités imaginaire et réelle sont données par la transformé de Fourier de la courbe paramétrique. Celle-ci étant la somme d'exponentielles décroissantes, il suffit de calculer la transformée de Fourier pour la forme générique suivante :

$$I(t) = \exp(-a \cdot x + b) \quad (3.23)$$

où a et b sont des constantes réelles positives et t désigne la variable temps en secondes.

Par définition de la transformée de Fourier, les partie réelle et imaginaire sont données respectivement par :

$$I'(\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-a \cdot x + b) \cos(\omega t) dt = \frac{a \exp(-b)}{a^2 + \omega^2} \quad (3.24)$$

$$I''(\omega) = \int_0^{\infty} \exp(-a \cdot x + b) \sin(\omega t) dt = \frac{\omega \exp(-b)}{a^2 + \omega^2} \quad (3.25)$$

où a et b sont des constantes réelles positives et f désigne la fréquence en Hertz.

L'expression analytique pour une somme d'exponentielles décroissantes est donnée par :

$$I(t) = \sum_{i=1}^n \exp(-a_i \cdot x + b_i) \quad (3.26)$$

Par linéarité de la transformée de Fourier et en tenant compte de la capacité à l'infini on obtient :

$$C'(\omega) = \frac{1}{U} \sum_i \frac{a_i \exp(-b_i)}{a_i^2 + \omega^2} + C'_{\text{inf}} \quad (3.27)$$

$$C''(\omega) = \frac{1}{U} \sum_i \frac{\omega a_i \exp(-b_i)}{a_i^2 + \omega^2} \quad (3.28)$$

où a et b sont des réels positifs et U désigne la tension.  $C'_{\text{inf}}$  désigne la capacité réelle aux hautes fréquences.

### 3.9.2 Transformée de Hamon

Comme explicité dans le chapitre précédent, la transformée de Hamon permet de calculer la capacité complexe à partir des données temporelles via la formule suivante :

$$C^*(\omega) = \frac{i(0.1/t)}{2\pi fU} \quad (3.29)$$

où  $C^*$  désigne la capacité complexe,  $I(t)$  le courant et U la tension.

La transformée de Hamon ne permet pas de calculer la capacité réelle.

### 3.9.3 Mesures fréquentielles

L'appareil de mesure était configuré de telle sorte à ce qu'il génère un fichier donnant le module de la capacité complexe et la tangente de l'angle des pertes en fonction de la fréquence. Pour déduire les capacités réelle et imaginaire à partir des deux mesures précédentes, nous opérons comme suit :

On cherchera à travers les formules trigonométriques usuelles à exprimer le cosinus et le sinus en fonction de la tangente.

$$\begin{aligned} \cos(\delta)^2 + \sin(\delta)^2 = 1 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\cos(\delta)^2}{\cos(\delta)^2}}_1 + \underbrace{\frac{\sin(\delta)^2}{\cos(\delta)^2}}_{\text{tg}(\delta)^2} = \frac{1}{\cos(\delta)^2} \\ \cos(\delta) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}(\delta)^2}} \\ \sin(\delta) = \text{tg}(\delta) \cos(\delta) &= \frac{\text{tg}(\delta)}{\sqrt{1 + \text{tg}(\delta)^2}} \end{aligned} \quad (3.30)$$

En utilisant les résultats trigonométriques de (3.30) ainsi que les définitions de la capacité réelle et imaginaire on obtient :

$$\begin{aligned} C' = C \cos(\delta) &= C \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}(\delta)^2}} \\ C'' = C \sin(\delta) &= C \frac{\text{tg}(\delta)}{\sqrt{1 + \text{tg}(\delta)^2}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

### 3.9.4 Comparaison avec la capacité complexe

Grâce à notre module d'automatisation, on a pu effectuer une comparaison exhaustive des deux méthodes analytiques avec les mesures réelles pour les 87 courbes fréquentielles et temporelles. Nous limiterons les résultats à deux cuves, une sèche et une humide, au début et à la fin du vieillissement.

Les figures 58 et 59 donnent les courbes de la capacité imaginaire pour une cuve sèche pour chacune des trois méthodes en début et en fin de vieillissement. On peut constater que la courbe analytique est très proche de la courbe expérimentale en fin de vieillissement. Les figures 60 et 61 donnent les mêmes informations pour une cuve humide. Cependant pour la cuve humide, on remarque les oscillations de l'approximation analytique, signe d'une insuffisance au niveau de la modélisation pour les cuves humides.



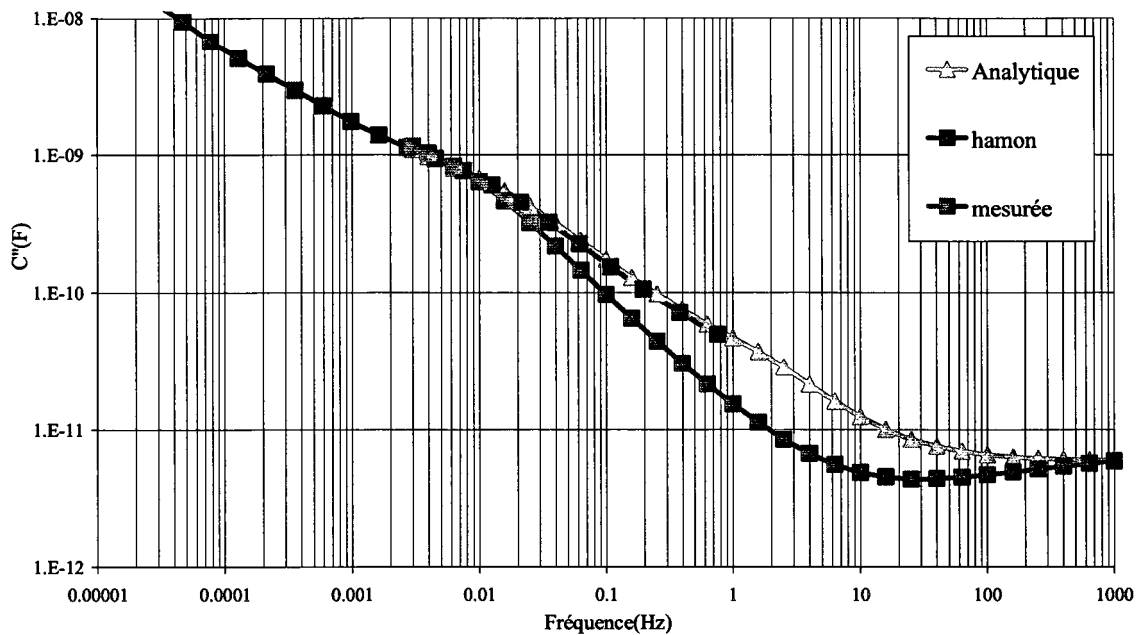


Figure 58  $C''$  en début de vieillissement pour une cuve sèche

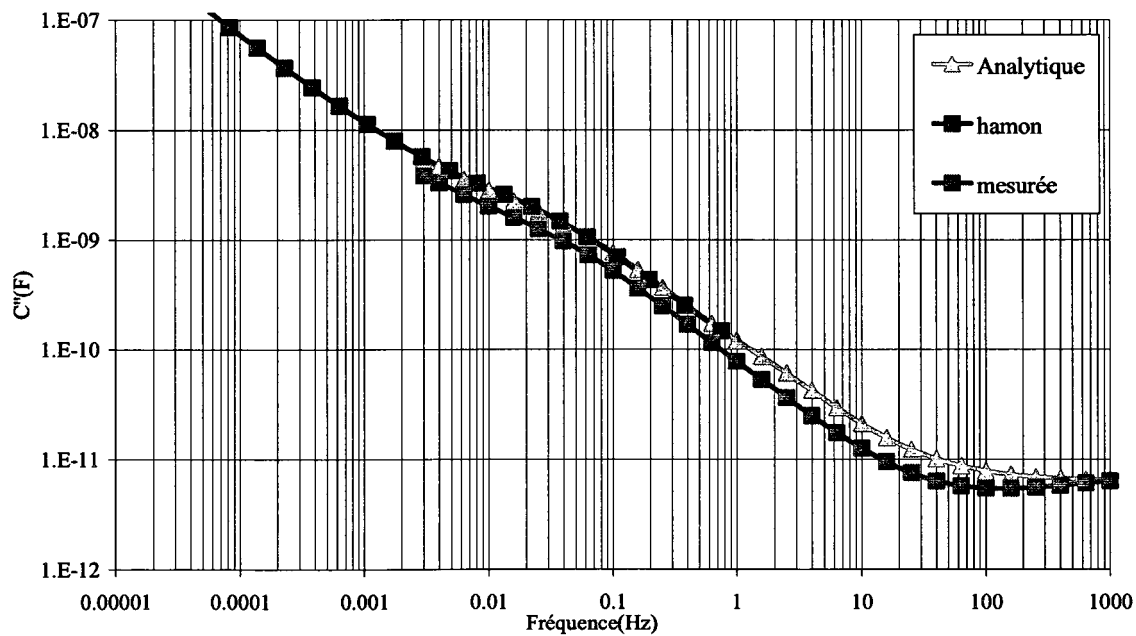


Figure 59  $C''$  en fin de vieillissement pour une cuve sèche

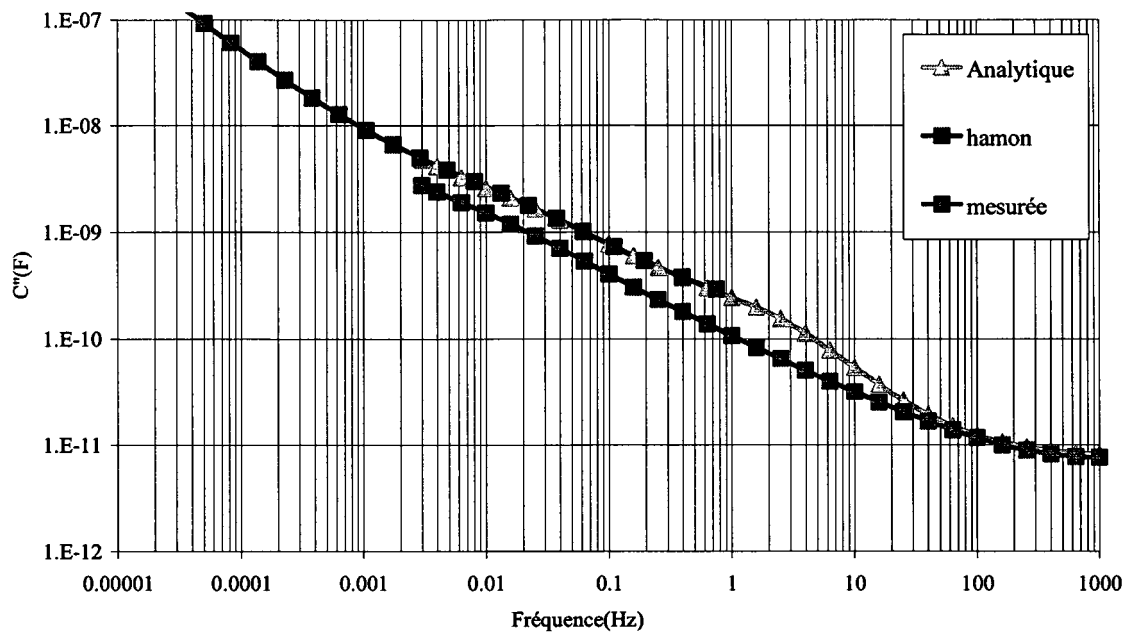


Figure 60  $C''$  en début de vieillissement pour une cuve humide

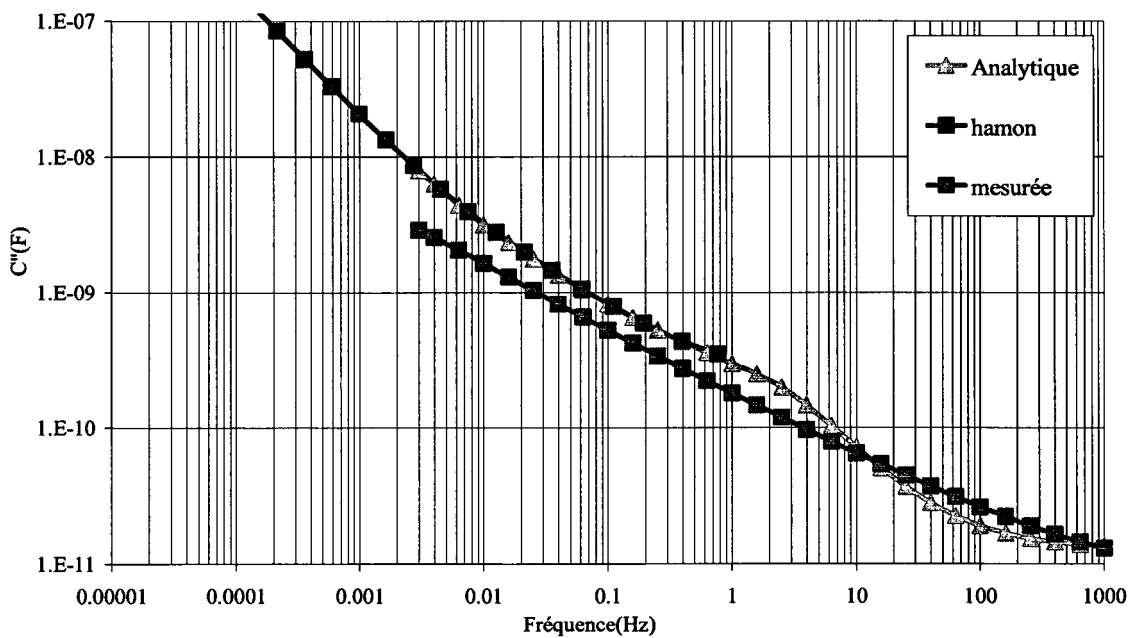


Figure 61  $C''$  en fin de vieillissement pour une cuve humide

### 3.9.5 Comparaison avec la capacité réelle

Le même travail de comparaison peut être fait pour la capacité réelle. La capacité réelle pour la courbe paramétrique est donnée par l'équation (3.27). Alors que l'on ne dispose pas d'un analogue de la formule de Hamon pour le calcul de la capacité réelle. Nous nous limitons donc à la comparaison des mesures expérimentales à la formule paramétrique. La figure 62 est un exemple du résultat de la comparaison.

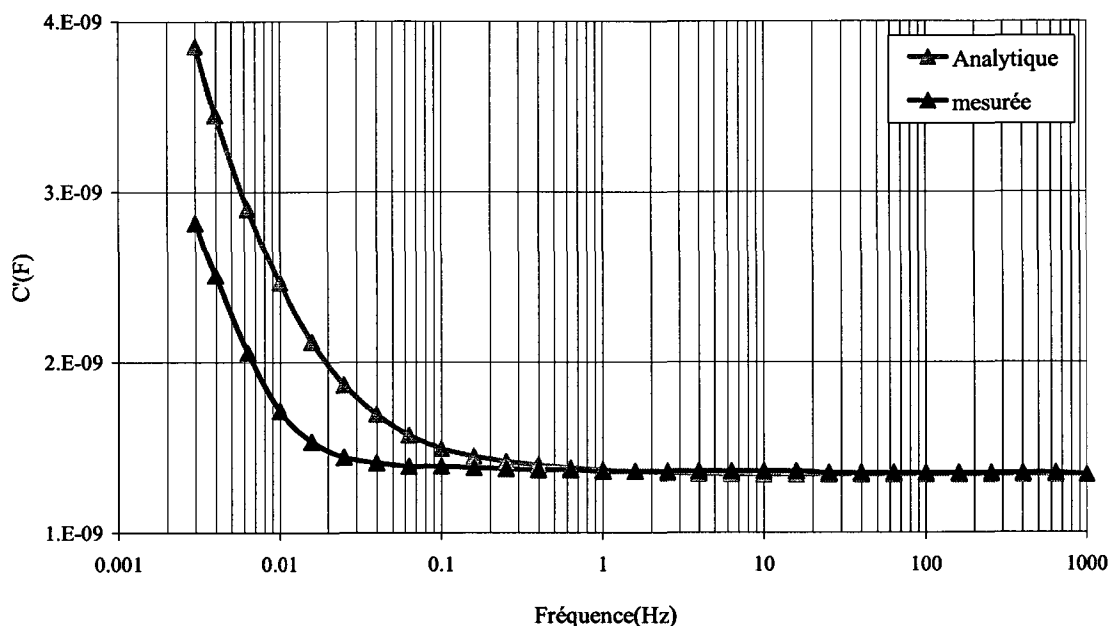


Figure 62 C' expérimentale et analytique pour une cuve sèche

### 3.9.6 Analyse

On peut voir au travers de cette comparaison que la transformée de Fourier de la courbe paramétrique est très semblable à la transformée de Hamon dans la plage de validité de cette dernière. De plus, elle offre une bonne approximation pour toutes les autres fréquences. Elle permet en outre de trouver aussi bien la capacité complexe que réelle. Ce qui nous porte à dire que la méthode analytique remplace avantageusement la

transformée de Hamon, lorsqu'on peut approcher la courbe expérimentale temporelle par une somme d'exponentielles décroissantes.

### **3.10 Résultats**

#### **3.10.1 Réalisation des objectifs**

##### **3.10.1.1 Relation entre vieillissement et la mesure diélectrique**

Ce premier objectif a été atteint dans une certaine mesure. La figure 63 a) montrent la corrélation entre le degré de polymérisation et le courant de charge à 2 500 secondes. Une corrélation raisonnable existe, excepté pour les cuves humides (07, 08 et 09). Pour des raisons de clarté seulement quatre cuves ont été représentées. Une corrélation moindre existe aussi entre le degré de polymérisation et la tangente de l'angle des pertes mesuré à 0.003 Hz. Les tableaux V et VI donnent les coefficients de la corrélation obtenue et il apparaît clairement que les coefficients de régression dépendent de la cuve ce qui diminue la portée universelle de la relation.

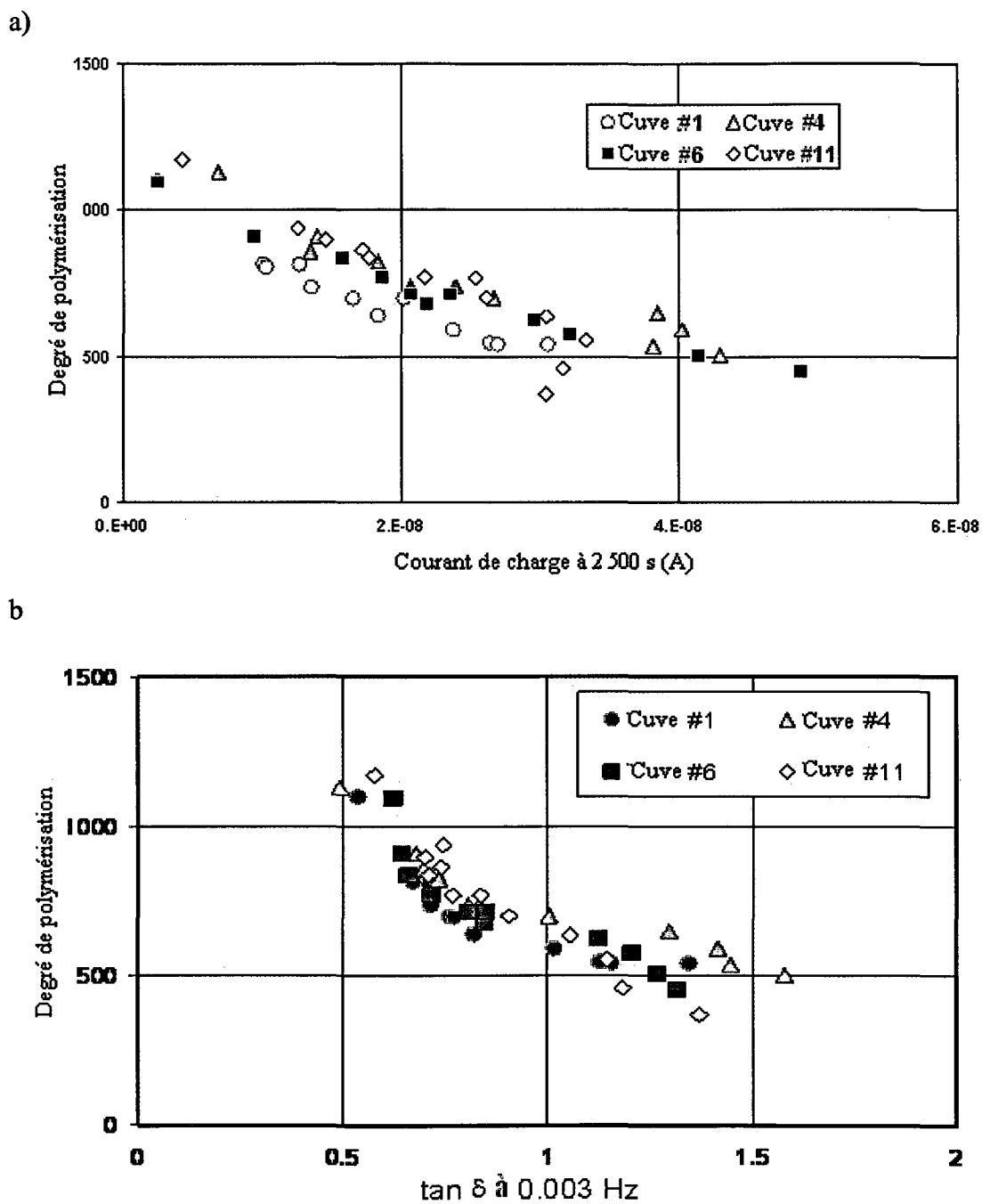


Figure 63 Corrélation entre le degré de polymérisation et a) le courant de charge à 2 500 s et b) Tangente  $\delta$  à 0.003 Hz.

### 3.10.1.2 Indépendance vis-à-vis de la température

À partir des essais effectués à différentes températures, on a montré que les courbes fréquentielles obéissent à un comportement de type Arrhenius. Et de ce fait, la courbe maîtresse à une température de 25 °C, est déduite de la courbe mesurée à une température T par un déplacement en fréquence. Les expériences ont permis de lier le déplacement à la température via la relation suivante :

$$\ln(\text{deplac}) = \frac{11\,980}{T+273} - 40 \quad (3.32)$$

Les constantes 11.980 et 40 sont les constantes de régression pour la cuve 09 tirées du tableau X. La variable T désigne la température en degrés Celsius.

### 3.10.1.3 Indépendance vis-à-vis de l'humidité

La courbe isotherme à 58 °C mettant en relation l'humidité dans le papier versus l'humidité dans l'huile se rapproche de la courbe isotherme établie par Griffit et Christie. On a donc un moyen de déduire l'humidité du papier à partir de celle de l'huile lorsqu'on est à l'équilibre thermique.

### 3.10.1.4 Indépendance vis-à-vis de la géométrie

La capacité géométrique  $C_0$  d'une cuve est obtenue par les relations suivantes :

$$\varepsilon'_{\text{papier}}(hf) = \varepsilon^*_{\text{papier}}(hf) = 4.5 + 75.5t_{\text{hum}} \quad (3.33)$$

$$\varepsilon'(hf) = \varepsilon^*(hf) = \frac{Y}{\varepsilon'_{\text{papier}}} + \frac{1-Y}{\frac{1-X}{2.2} + \frac{X}{\varepsilon'_{\text{papier}}}} \quad (3.34)$$

$$C_0 = \frac{C_{1000 \text{ Hz}}}{\varepsilon'} \quad (3.35)$$

où  $\varepsilon'$ , désigne le taux d'humidité de la cuve et  $C_{1000 \text{ Hz}}$  désigne la capacité mesurée à 1 000 Hertz.

On recommande de calculer la capacité géométrique avant la mise en service du transformateur et après la phase d'absorption de l'humidité de l'huile lors de la première mise en service.

### 3.10.2 Modèles

#### 3.10.2.1 Circuits R en série avec (G//C)

Les courbes obtenues sont loin de décrire la réalité et ne permettent pas de modéliser adéquatement les mesures temporelles et fréquentielles. Néanmoins, un tel modèle permet de comprendre et d'analyser le comportement qualitatif de l'ensemble d'un transformateur au fur et à mesure que ses caractéristiques diélectriques changent.

#### 3.10.2.2 Circuits RC en parallèle

Ce modèle s'est avéré d'un point de vue analytique pleinement adapté aux courbes expérimentales temporelles. Son taux d'ajustement peut atteindre des niveaux d'erreur aussi bas que 1.5 % et ce pour 98 % des courbes en notre possession soit environ 80 courbes. La procédure d'ajustement basée sur les techniques d'optimisation est facile à implémenter avec les outils dont nous disposons. La transformée de Fourier peut être obtenue analytiquement, et ce pour toute fréquence ce qui fait de cette méthode un excellent substitut à l'approximation de Hamon, lorsque les moyens techniques le

permettent. Ajoutons en outre que l'on peut ainsi obtenir la capacité réelle à partir des mesures temporelles.

### **3.10.2.3 Modèle XY**

Dans ce modèle, les équations pour prendre en compte l'humidité et celles permettant le calcul de la capacité géométrique sont utilisées. La validation montre que les courbes issues du modèle et les courbes expérimentales sont assez proches. On en déduit aussi que les approximations et relations pour le calcul de l'influence de l'humidité sur le papier et le calcul de la capacité géométrique sont conséquentes.

### **3.10.3 Équivalence mesures temporelles et fréquentielles**

La procédure a consisté à comparer la transformée de Hamon, la transformée de Fourier obtenues par calcul analytique et la courbe expérimentale. Cette approche a été étendue de manière exhaustive sur la totalité des mesures. Les figures 58, 59, 60 et 61 illustrent la qualité des résultats obtenus. On y voit clairement que la courbe analytique épouse parfaitement la courbe de la Transformée de Hamon et reste assez proche de la courbe expérimentale. Cette équivalence est une condition nécessaire pour affirmer le comportement linéaire des cuves.

## **3.11 Conclusion et perspectives**

### **3.11.1 Les cuves sèches**

De façon générale ces cuves se prêtent bien à la modélisation aussi bien analytique que par les modèles orientés physique. Les grandes lois qui régissent la température et la diffusion de l'humidité sont respectées dans leur ensemble. Quant à la corrélation entre



le degré de polymérisation et les grandeurs diélectriques, elle est claire. Cependant on note que toutes les relations obtenues dépendent de la cuve d'une façon que nous n'avons pu jusqu'ici élucider étant donné le peu de cuves dont nous disposions. La détermination de l'humidité reste une grande préoccupation, car elle intervient dans bon nombre de relations fondamentales.

### **3.11.2 Les cuves humides**

Ces cuves présentent un côté erratique et aléatoire. Mis à part la loi sur la température, toutes les autres corrélations et relations ne sont pas vérifiées. En plus de cacher la plupart des indicateurs, l'humidité introduit une non linéarité décelable à travers la mauvaise adéquation de la transformation des données temporelles et des courbes fréquentielles. Cependant l'humidité excessive ne devrait pas poser de problème puisqu'un transformateur humide représente un potentiel immédiat d'incident et doit, de toute façon être l'objet d'une intervention.

### **3.11.3 Les Facteurs externes**

Concernant la température, la loi d'Arrhenius permet de se ramener à une température de référence. La détermination et la prise en compte de l'humidité se font respectivement via l'utilisation des courbes isothermes et la loi des mélanges.

### **3.11.4 Les perspectives**

Il ressort de la réalisation des objectifs, que pour les cuves sèches, on a pu établir une corrélation claire entre le vieillissement et les mesures diélectriques. Cette corrélation peut s'exprimer indépendamment de la température et de la géométrie. En transposant ces résultats pour des transformateurs réels, on aurait un moyen relativement simple pour obtenir une information quantitative assez fiable sur le degré de vieillissement de

l'isolation et la durée de vie résiduelle du transformateur. Cela peut constituer un élément important dans la prise de décision.

Cependant, les résultats obtenus souffrent de deux problèmes majeurs, leur non universalité et leur aspect statique. En effet, la relation entre le vieillissement et la réponse diélectrique est claire mais dépend de la cuve. De plus, il est nécessaire que le transformateur soit en équilibre thermique pendant toute la durée de la mesure qui peut durer quelques heures. D'où les deux axes d'amélioration suivants :

Le premier axe consiste à stabiliser les relations et résultats obtenus. Les actions à entreprendre à ce niveau sont :

- La poursuite des expériences de vieillissement dans l'optique d'obtenir des relations plus universelles.
- Étendre les expériences sur la température à d'autres cuves, pour valider de façon définitive la relation obtenue.
- Faire le relevé systématique de la quantité d'eau contenue dans l'huile pour vérifier le bien fondé de la méthode des courbes isothermes pour déduire l'humidité dans le papier.

Dans une seconde phase on s'intéressera à l'aspect dynamique pour se mettre dans les conditions existant réellement sur le terrain. En particulier, il s'agira de modéliser l'impact de la variation de température sur les mesures diélectriques.

Au niveau des modèles, le modèle XY représente un bon potentiel de diagnostic, malgré une modélisation très simple de la réponse diélectrique de l'huile et de l'interaction entre les différents constituants du transformateur.

## **CHAPITRE 4**

### **ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE ET OUTIL DE CORRÉLATION**

#### **4.1 Environnement informatique**

Le nombre d'essais pour les 8 cuves à différentes dates est de 87, générant à chaque fois 500 points ce qui donne environ 50 000 points de mesure si l'on compte les mesures fréquentielles. Un tel nombre de point ne peut être pris en charge que par un système d'information bien structuré. Pour ce faire on a opté pour la méthodologie Entité relation pour bâtir notre système d'information. La méthodologie Entité Relation a été fondée en 1970 par E.F.CODD. Elle consiste à modéliser le monde réel par des objets liés entre eux par des relations. Chaque objet se voit affecter un ensemble d'attributs dont au moins un servant à le référencer de façon unique et constituant sa clé. Les relations lient les objets via leur clé, elles peuvent aussi avoir des attributs lorsqu'elles sont porteuses d'information.

La mise en œuvre passe par :

1. La délimitation du périmètre à automatiser.
2. La construction du modèle conceptuel des données
3. l'implémentation

#### **4.2 Périmètre à automatiser**

À chaque essai les informations suivantes sont générées :

1. Le temps de vieillissement cumulé
2. Les mesures temporelles (courant de charge et de décharge vs temps)

3. Les mesures fréquentielles (tangente et capacité vs fréquence)
4. L'état des constituants (OIL PF, DP)

Elles constituent le périmètre à automatiser.

#### **4.3 Modèle conceptuel des données "MCD"**

Les entités recensées sont :

1. Les cuves
2. Les mesures temporelles
3. Les mesures fréquentielles

Les trois entités sont mises en relation via la relation expérience.

L'affectation des attributs ne se fait pas au hasard. Il est d'usage que le système construit respecte les trois premières formes normales suivantes. Pour illustrer de manière concrète ces principes, nous nous servons de l'exemple classique suivant.

Prenons le cas d'un système de gestion de stock simple, où l'on veut consigner pour chaque article en plus de sa description, le nom et l'adresse de son fournisseur. Une approche naturelle serait de consigner toutes les informations dans une table Excel tel qu'illustré dans la figure 64.

Code Article	Description	Fournisseur	Adresse du fournisseur
KIT-A	Rouleaux thermiques	Comptoir du rouleau	180 - Bld lac Saint Jean Montral
KIT-B	Rouleaux INTERAC	Comptoir du rouleau	180 - Bld lac Saint Jean Montral
CE3	Cartouche d'encre	Comptoir des cartouches	116 - Bld Saguenay Montral
AN-10	Cartes auto nettoyantes	Comptoir des cartes	116 - Rue de Montral Iles de la Madelaine

Figure 64 Fichier articles

La première forme normale "atomicité" :

Sur la colonne "Adresse du fournisseur", on voit que la ville figure dans l'adresse et ne fait pas l'objet d'une colonne à part. Ainsi, on ne peut extraire de façon simple les fournisseurs d'une ville donnée. Cette insuffisance vient du fait que l'information adresse peut être encore décomposée.

Une relation est en première forme normale si tout attribut contient une valeur indécomposable.

La deuxième forme normale :

La colonne adresse est répétée pour le même fournisseur dans la ligne 1 et 2 de la figure 64. Cela va entraîner les trois anomalies suivantes :

- 1) Anomalie de stockage. Comme l'adresse est répétée plusieurs fois pour le fournisseur, de l'espace est occupé par une information redondante.

- 2) Anomalie de création. Si un nouveau produit fourni par le fournisseur "comptoir du rouleau", venait à être ajouté, il faudrait en plus du nom du fournisseur, ajouter même son adresse. Ce qui représente une saisie supplémentaire inutile.
- 3) Anomalie de mise à jour. Si le fournisseur "comptoir du rouleau", venait à changer d'adresse, il faudrait mettre à jour toutes les lignes des articles commercialisés par ce fournisseur alors qu'il ne devrait y avoir qu'une seule mise à jour.
- 4) Anomalie de suppression. Si le produit de la ligne 4 venait à ne plus être commercialisé, on supprimerait la ligne 4. Mais en même temps on supprimerait une information importante à savoir l'adresse de ce fournisseur.

Si l'on suppose qu'un article peut être fourni par plusieurs fournisseurs et qu'un fournisseur peut fournir plusieurs articles. Alors la clé qui va identifier de façon unique une ligne c'est le couple (Code article, Fournisseur). L'adresse ne dépend que d'une partie de la clé à savoir la colonne "Fournisseur". Cette dépendance partielle est à l'origine de toutes les anomalies ci-dessus. D'où la règle suivante qui porte le nom de deuxième forme normale.

Une relation est en deuxième forme normale si elle est en première forme normale et si chaque attribut dépend de la totalité de la clé.

La troisième forme normale :

Supposons maintenant que chaque article ne puisse être livré que par un fournisseur unique. Alors la clé qui va identifier de façon unique une ligne c'est la colonne Code article. La colonne adresse dépend de la colonne fournisseur qui ne fait pas partie de la clé. Cette dépendance d'un attribut ne faisant pas partie de la

clé, va générer les mêmes anomalies que précédemment. D'où la règle suivante qui porte le nom de troisième forme normale.

Une relation est en troisième forme normale si elle est en deuxième forme normale et si tout attribut ne dépend pas d'un attribut autre que la clé.

Un système d'information qui respecte la troisième forme normale ne présentera pas d'incohérence liée à la redondance des informations. De plus ce système ne présentera aucune anomalie de stockage, de création, de mise à jour et de suppression.

#### **4.3.1 Implémentation du MCD**

Pour l'implémentation, le choix s'est porté sur le logiciel de gestion des données Access pour les raisons suivantes :

- Le schéma relationnel obtenu par le MCD peut y être implémenté très facilement
- Une compatibilité avec MS Excel avec qui il partage le langage de programmation VBA
- La base de données obtenue est indépendante de MS ACCESS
- Le standard SQL pour l'interrogation des bases de données y est implémenté.

La figure 65, illustre le schéma relationnel issu de la modélisation de notre système d'information.

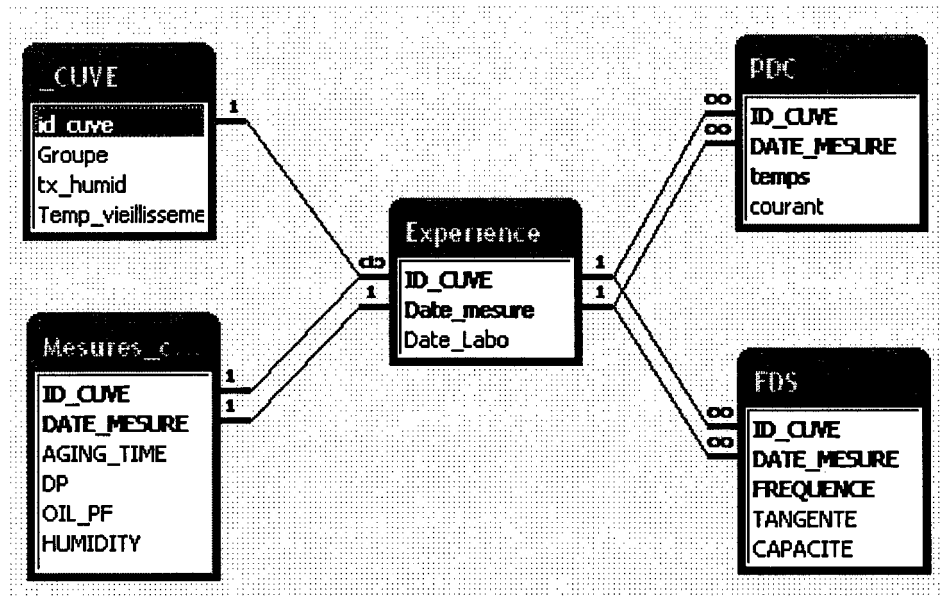


Figure 65 Modèle relationnel

On y voit clairement les entités suivantes :

- L'entité Cuve, qui contient toutes les informations propres à chaque cuve telles que le groupe de vieillissement, le taux d'humidité ainsi qu'un champ servant à référencer de façon unique chaque cuve.
- L'entité Mesures qui contient toutes les informations chimiques relevées à chaque expérience. On y retrouve l'identifiant de la cuve sur laquelle porte l'expérience, ainsi que les paramètres chimiques tels que le taux d'humidité, le degré de polymérisation. Chaque expérience est référencée par l'identifiant de la cuve correspondante ainsi que la date.
- L'entité PDC, contient les mesures du courant de charge et décharge recueillies au cours d'une expérience. Chaque mesure unitaire est référencée par l'identifiant de la cuve et la date de l'expérience ainsi que le temps où l'information est prise.



- L'entité FDS, est l'équivalent fréquentiel de l'entité PDC. Elle est en tout point identique à PDC sauf en ce qui concerne l'attribut temps qui est remplacé par celui de fréquence. Les mesures relevées sont la capacité et la tangente de l'angle des pertes.
- La relation Expérience, met en relation toutes les entités précédentes. À la lumière du schéma relationnel, on peut dire : « Une expérience c'est des données chimiques, une courbe temporelle et une courbe fréquentielle pour une cuve et à une date donnée ».

#### **4.4 Organisation des traitements**

Les traitements effectués sur notre base de données sont de deux sortes.

##### **4.4.1 Chargement de la base de données**

Les appareils de mesure génèrent leur sortie sous forme de fichier texte. Ces fichiers sont mis dans un répertoire. Une macro écrite sous VBA analyse le nom de chaque fichier, et charge son contenu dans la table appropriée.

##### **4.4.2 Traitement de l'information**

Pour la représentation graphique des données on a opté pour Excel. L'interfaçage entre la base de données se faisant soit via l'outil "couper coller", ou en intégrant un lien externe entre une requête et une plage de données sous Excel. Comme Access et Excel sont du même éditeur de logiciels, ils supportent tous les deux le langage de programmation VBA, ce qui donne une souplesse permettant de piloter la base de données à travers Excel ou vice versa.

#### 4.4.3 Analyse de corrélation

Nous sommes ramené à écrire un programme de traitement classique à deux niveaux de rupture, qui va nous permettre de :

1. Afficher le nuage de points DP vs courant de charge à un temps donné pour toutes les cuves
2. Construire le tableau récapitulatif (temps, cuve, coefficient de corrélation).
3. Afficher le graphe montrant l'évolution de la corrélation en fonction du temps et ce pour chacune des cuves.

Concrètement la macro écrite attend en entrée :

- Une colonne contenant le premier niveau de hiérarchisation
- Une colonne contenant le second niveau hiérarchisation
- La colonne des valeurs de la variable indépendante X
- La colonne des valeurs de la variable dépendante Y

En sortie on obtient :

- Un graphe pour chaque valeur du premier niveau de hiérarchisation.
- Une courbe pour chaque valeur du second niveau de hiérarchisation.
- Un graphe montrant l'évolution de la corrélation pour chaque valeur du second niveau de hiérarchisation.

#### **4.4.3.1 Ajustement par exponentielles décroissantes**

Dans le but de rechercher d'autres corrélations, cette méthode a été appliquée sur toutes les courbes expérimentales soit un total de 87 courbes avec un total de plus de 50 000 points de mesure. Une telle opération ne peut être faite manuellement.

Comme on le verra toutes les courbes se trouvent dans une base de données relationnelle, qu'il est possible de piloter via Excel. Grâce à un lien dynamique on peut faire correspondre à une feuille de calcul une requête Access, ce qui veut dire que toutes les opérations que nous faisons sur la feuille se font en réalité sur la requête. Ainsi le module VBA sous Excel choisit la cuve et la date, rafraichit le lien dynamique entre Excel et Access et lance le module d'ajustement, les résultats obtenus sont inscrits au fur et à mesure par le module de régression sous Excel dans une table Access. Le processus continue ainsi jusqu'à épuisement des 87 mesures.

### **4.5 Régression**

#### **4.5.1 Formulation générale du problème**

Le problème de régression peut s'énoncer comme suit. Connaissant la courbe expérimentale, et ayant choisi une relation paramétrique, il faut trouver les paramètres qui minimisent la distance entre la courbe expérimentale et la courbe calculée. La distance choisie est la distance euclidienne. Si nous appelons  $X$  le vecteur des valeurs de la variable indépendante et  $Y$  le vecteur des variables dépendantes et  $f$  la relation paramétrique, alors le problème de régression linéaire revient à chercher la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \min & (f(a_1, a_2, \dots, a_p X) - Y)' \cdot (f(a_1, a_2, \dots, a_p X) - Y) \\ \text{où } & (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \quad (4.1)$$

où X désigne le vecteur des valeurs de la variable indépendante, Y le vecteur des valeurs de la variable dépendante et f la fonction paramétrique ayant  $(a_1 \dots a_p)$  comme paramètres réels.

#### 4.5.2 Régression par une fonction paramétrique linéaire

Le problème devient :

$$\begin{aligned} \min & (aX + b - Y)' \cdot (aX - b - Y) \\ \text{où } & (a, b) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Les valeurs minimales  $a_0$  et  $b_0$  vérifie :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial}{\partial a} \varphi(a, b) \right|_{(a_0, b_0)} = 0 \\ \left. \frac{\partial}{\partial b} \varphi(a, b) \right|_{(a_0, b_0)} = 0 \\ \varphi(a, b) = (aX + b - Y)' \cdot (aX - b - Y) \end{cases} \quad (4.3)$$

Après dérivation on obtient que :

$$\begin{cases} a \cdot X \cdot (aX + b - Y) = 0 \\ (aX + b - Y) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La résolution de (4.4) donne :

$$b = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sum (x_i - \bar{X})^2}$$

$$a = \bar{Y} - B.\bar{X} \quad (4.5)$$

Pour mesurer la qualité de l'alignement ou de la corrélation, on utilise le coefficient  $r$  donné par :

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{X})^2 \sum (y_i - \bar{Y})^2}} \quad (4.6)$$

#### 4.5.3 Régression par la fonction paramétrique $Y = b.e^{a.X}$

On peut effectuer la transformation suivante :

$$Y = b.e^{a.X} \Leftrightarrow \ln(Y) = aX + \underbrace{\ln(b)}_{b'} \quad (4.7)$$

On est ramené à rechercher une régression linéaire entre  $\ln(Y)$  et  $X$ .

Les coefficients  $a$  'et  $b$ ' sont déduit de la régression linéaire. On en déduit que :

$$a = a' \quad \text{et} \quad b = e^{b'} \quad (4.8)$$

L'opération faite en (4.7) est rendu possible car la fonction logarithme est strictement croissante et conserve la propriété d'optimalité.

#### 4.5.4 Régression par la fonction paramétrique $y = At^{-n}$

$$Y = aX^{-n} \Leftrightarrow \ln(Y) = \underbrace{\ln(a)}_{a'} + \underbrace{-n}_{n'} \ln(X) \quad (4.9)$$

On est ramené à rechercher une régression linéaire entre  $\ln(Y)$  et  $\ln(X)$ .

Les coefficients  $a'$  et  $n'$  étant trouvés, les valeurs des paramètres sont :

$$a = e^{a'} ; n = -n' \quad (4.10)$$

#### 4.5.5 Régression non linéaire

Lorsque la fonction paramètre  $f$  est une fonction non linéaire, ses paramètres ne peuvent être trouvés analytiquement comme dans le cas linéaire. La recherche du minimum se fait de manière itérative en utilisant les nombreux algorithmes d'optimisation disponibles. Parmi les algorithmes les plus populaires, notons la descente du gradient, la matrice Hessienne et la méthode combinée de Marquardt.

##### 4.5.5.1 Méthode du gradient «plus grande pente »

Cette méthode s'appuie sur la constatation simple qu'en un point donné, le gradient donne la direction de plus grande pente. Ce qui donne le schéma d'optimisation suivant [20] :

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \eta \nabla f^T \quad (4.11)$$

Cette méthode a comme inconvénient que le pas de descente  $\eta$  est empirique. S'il est trop petit la convergence est trop lente, si la valeur est grande on peut tomber dans des oscillations. Le deuxième inconvénient est illustré sur la figure 66. On peut trouver un minimum qui est local. On peut cependant résoudre ce problème en choisissant avec soin la valeur initiale. Le choix de la valeur initiale peut être déterminé par la spécificité et la connaissance que l'on a du problème.

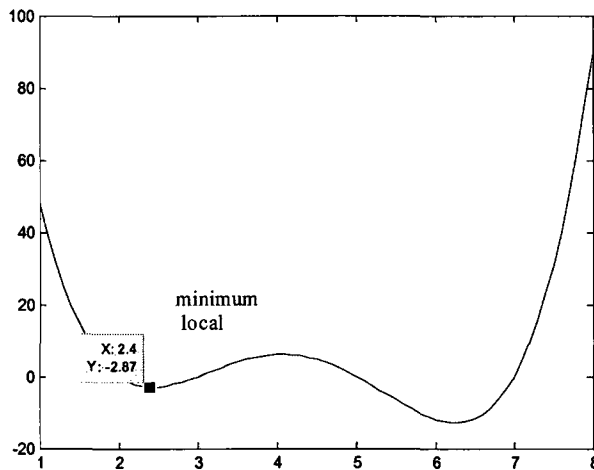


Figure 66 Minimum local

#### 4.5.5.2 Méthode de la matrice Hessienne

Une condition nécessaire d'optimalité est que la dérivée s'annule au point optimum. Cela revient à résoudre le problème de la recherche de zéro d'une fonction.

Soit la fonction  $g$  de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}^n$ , on cherche un  $x$  tel que  $g(x) = O_{\mathbb{R}^n}$ . Le développement de Taylor à l'ordre 1 de  $g$  donne :

$$\vec{g}(x_0 + h) \approx \vec{g}(x) + \nabla g(x)\vec{h} \quad (4.12)$$

Si on veut que ce terme s'annule on doit avoir :

$$\vec{h} \approx -\nabla g(x)^{-1} \vec{g}(x) \quad (4.13)$$

Ce qui donne le schéma suivant :

$$\vec{x}_{n+1} \approx \vec{x}_n - \nabla g(x_n)^{-1} \vec{g}(x_n) \quad (4.14)$$

En remplaçant  $g$  par la dérivée, on obtient le schéma d'optimisation suivant [21] :

$$\bar{x}_{n+1} \approx \bar{x}_n - \underbrace{\nabla^2 f(x_n)^{-1}}_H \nabla^T f(x_n) \quad (4.15)$$

La matrice  $H$  est appelée matrice Hessienne. Cette méthode présente une erreur quadratique et une grande vitesse de convergence. Cependant, il faut calculer un inverse de matrice à chaque itération, sachant que la matrice  $H$  peut ne pas être inversible.

#### 4.5.5.3 Méthode de Gauss Newton

La distance euclidienne entre la courbe expérimentale et la courbe paramétrique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}^n &\mapsto \mathbb{R} \\ \bar{a} &\mapsto d(\bar{a}) = \sum_1^p (fp(\bar{a})_i - fe_i)^2 \\ (x_1, \dots, x_p) &: \text{points de mesure} \\ fe_i &= fe(x_i), fp_i = fp(x_i) \end{aligned} \quad (4.16)$$

où  $p$  désigne le nombre de points de mesure,  $n$  le nombre de paramètres,  $fe$  et  $fp$  désignent respectivement la courbe expérimentale et la courbe paramétrique.

En appliquant les règles de dérivation sur les puissances on obtient :

$$\nabla(d(a)) = \sum_1^m \nabla fp_i(\bar{a}) \cdot (fp(\bar{a})_i - fe_i) \quad (4.17)$$

En appliquant les règles de dérivation d'un produit de fonction on aura :

$$\nabla^2(d(a)) = \sum_1^m \left[ \nabla fp_i(\bar{a}) \cdot \nabla fp_i(\bar{a})^T + \underbrace{\nabla^2 fp_i(\bar{a}) \cdot (fp(\bar{a})_i - fe_i)}_{\approx 0} \right] \quad (4.18)$$



En tenant compte qu'au voisinage de la solution optimale  $f(X)$  est nulle on obtient :

$$H(a) = \nabla^2 (d(a)) \square \sum_1^m \nabla f p_i(a) \cdot \nabla f p_i(a)^T \quad (4.19)$$

En plus de la simplicité du calcul, la matrice qui approche la Matrice Hessienne H est symétrique et définie positive ce qui garantit l'existence de son inverse. On obtient le schéma d'optimisation suivant [22] :

$$\begin{aligned} G &= \nabla f \\ x_{n+1} &= x_n - \eta (G^T G)^{-1} G^T \end{aligned} \quad (4.20)$$

## **ANNEXE 1**

### **IMPLÉMENTATION DE LA MÉTHODE DE GAUSS NEWTON**

### Mise en œuvre

Nous rappelons le schéma d'optimisation issue de la méthode de Gauss Newton.

$$G = \nabla f$$

$$\vec{a}_{n+1} = \vec{a}_n - \eta (G^T G)^{-1} G^T$$

où  $\vec{G}$  désigne le gradient de la fonction paramétrique par rapport à ses paramètres. Les vecteurs  $\vec{a}_n$  et  $\vec{a}_{n+1}$  désignent respectivement le vecteur paramètre avant et après l'application du schéma ci-dessus.

Prenons le cas, où l'on désire approcher une courbe expérimentale par la fonction paramétrique  $y(t) = e^{-(at+b)}$  où a et b sont les paramètres. Pour garder une portée général au programme qui implémente la méthode, on convient de mettre tous les paramètres dans un vecteur  $\vec{p}$ . Il est ensuite de la responsabilité des fonctions qui implémentent la fonction paramétrique et son gradient d'en extraire la sémantique.

### Implémentation de la fonction paramétrique

Dans notre cas le code suivant implémente la fonction paramétrique :

```
%*****
function y = F(x,p)
a = p(1);
b = p(2);
y = exp(-(a.*x + b));
%*****
```

Le vecteur  $\vec{x}$  contient les valeurs de la variable indépendante, le vecteur  $\vec{p}$  contient les paramètres de la courbe paramétrique. Le vecteur  $\vec{y}$  contient les valeurs de la courbe paramétrique évalué au vecteur  $\vec{x}$  avec le vecteur paramètre  $\vec{p}$ .

### Implémentation du gradient de la fonction paramétrique

Pour déterminer la dérivée par rapport aux paramètres  $a$  et  $b$ , on peut utiliser les possibilités de calcul symbolique Matlab via les instructions suivantes :

```
%*****
syms x a b positive % déclare des variables symboliques positives
p = [a b]          % p vecteur des paramètres
jacobian(exp(-(a*x+b)),p) % Calcul du vecteur des dérivées partielles/aux paramètres p
%*****
```

Le résultat retourné par Matlab est  $\text{an} = [-x \cdot \exp(-a \cdot x - b), -\exp(-a \cdot x - b)]$ . Il suffit de faire un copier coller dans la fonction d'évaluation du gradient. On peut dès lors écrire le code de la fonction DF qui calcule le vecteur gradient :

```
%*****
function y = DF(x,p)
a = p(1);
b = p(2);
y = [-x.*exp(-a*x-b), -exp(-a*x-b)];
%*****
```

Les vecteurs  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{p}$  sont définis comme précédemment.

### Implémentation du module d'ajustement

L'algorithme commence par initialiser les variables courantes avec des valeurs convenables. Ensuite, on calcule le gradient pour les paramètres courants suivi du calcul de l'approximation de la matrice Hessienne. On est alors en mesure de trouver la direction dans laquelle doivent évoluer les paramètres pour atteindre l'optimum. Les nouveaux paramètres sont alors ajustés dans cette direction, et le processus reprend au niveau du calcul du gradient. Ce processus est itéré jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte ou que le nombre maximum d'itérations soit dépassé.

```

function [fopt,popt,err] = fit_exp(x,y,p_depart,pas,Iter_max,seuil)
% -----
% GHAH07036002 Hassan Gharbi hassan.gharbi.1@ens.etsmtl.ca
% -----
% Appel : [fopt,popt,err] = fit_exp(x,y,p_depart,pas,Iter_max,seuil)
% Entrée x      : Vecteur variable indépendante
%      y      : Vecteur variable à modéliser
%      p_depart : Paramètres de départ
%      pas     : Pas de variation des paramètres dans la courbure choisie
%      Iter_max : Nombre maximum d'itérations
%      pas     : Pas de descente dans la direction de la matrice Hessienne
%      seuil   : Pourcentage de tolérance
% Sortie fopt   : Vecteur solution analytique
%      popt    : Paramètres optimaux de la courbe paramétrique
%      err     : Erreur relative
% -----
% Variables
% p      : Vecteur paramètre courant
% f      : Évaluation du vecteur x, par la courbe paramétrique de paramètres p
% m_carre : Distance euclidienne entre le vecteur de la courbe analytique courant
%          et le vecteur à modéliser
% D      : Vecteur gradient de la courbe paramétrique courante
%          estimé pour la variable indépendante x en entrée
% G      : Vecteur gradient de la distance euclidienne entre la courbe paramétrique
%          courante et la variable à modéliser
% H      : Estimation de la matrice Hessienne
% -----
% Algorithme
% Intialiation
% Tant que (itérations maximum non atteinte) et (précision insuffisante)
%   Calcul du vecteur gradient de la courbe paramétrique
%   Calcul du gradient de la distance courbes paramétrique/courbe à modéliser G
%   Approximation de la Hessienne H
%   Application du schéma d'optimisation  $p = p + pas \cdot inv(H) \cdot G$ 
%   Évaluation de la courbe paramétrique en x pour les nouveaux paramètres p
% Fin tant que
% -----

close all
% ** Initialisation ****
f=feval(@F,x,p_depart);
p = p_depart;

```

```

fopt = f;
popt=p;
residu =(y-f);
m_carre =residu'*residu;
n_Y = y'*y;
i = 1;
err = m_carre^0.5/n_Y^0.5;
erreur =[];

while (i< Iter_max) & (err>seuil/100)
  D=feval(@dF,x,popt); % *** Pour estimer le gradient
  residu =(y-fopt);
  m_carre = residu'*residu;
  G = D'*residu; % *** estimation du gradient
  H = D'*D; % *** estimation de la hessienne
  % save singulier H D residu x popt

  ppopt = reshape(popt',size(popt,1)*size(popt,2),1);
  ppopt = ppopt + (0.01*H^-1*G);
  popt = reshape(ppopt',size(popt,2),size(popt,1),1);
  fopt = feval(@F,x,popt); % *** on calcule les nouvelles valeurs
  err = m_carre^0.5/n_Y^0.5;
  % erreur(i) = err;
  i = i + 1;
end;

```

### Implémentation du script d'appel

Il ne reste plus qu'à écrire le script pour mettre en œuvre l'ajustement. On commence par charger en mémoire l'espace de travail contenant le vecteur des valeurs de la variable indépendante  $x$  et le vecteur des valeurs de la variable à modéliser. On choisit ensuite les paramètres logistiques de la méthode comme le nombre maximum d'itérations et la précision recherchée, le vecteur des paramètres de départ et le pas de descente. Il ne reste plus qu'à appeler le module d'ajustement.

Exemple d'appel :

```

%*****
% p_depart : paramètre de départ
% Iter_max : Itération maximums
% pas      : Pas de déplacement dans la direction de l'optimum
% Tolérance : Précision recherchée en pourcentage
%
% fopt     : Vecteur solution analytique
% popt     : Paramètres optimaux
%*****

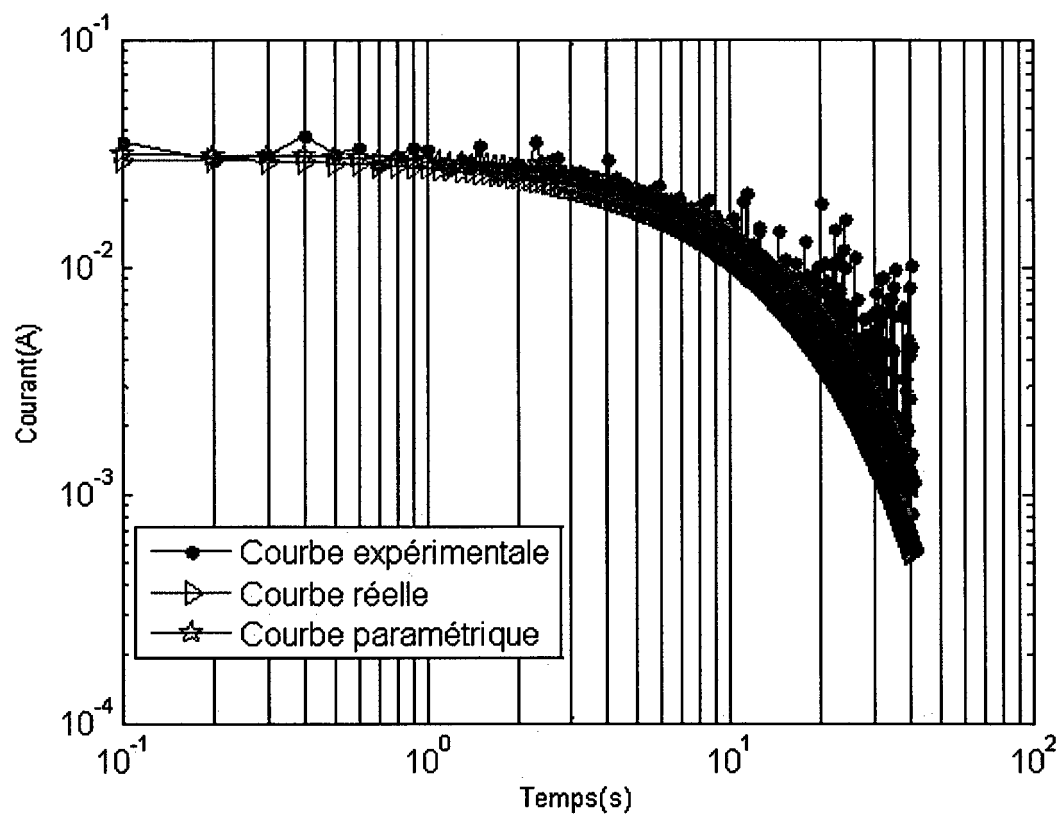
p_depart=[ 18.772150  0.0000688 ];
Iter_max=1500;
tolerance = 5;
pas = 0.00001;

% **** appel de la fonction de fitting AVEC plusieurs exponentielles
[fopt,popt,erreur]=fit_exp(x,y,p_depart,pas,Iter_max,tolerance);

```

## Résultats

Dans la figure suivante, on a représenté la courbe théorique réelle, la courbe expérimentale bruitée et la courbe paramétrique optimum. On voit bien que l'ajustement obtenu est très satisfaisant. Le code a été pensé de façon à ce que la fonction qui implémente l'ajustement soit indépendante de l'expression analytique de la fonction paramétrique. Il s'ensuit que pour une nouvelle fonction paramétrique, il suffit de changer la fonction d'évaluation de la fonction, la fonction qui évalue le gradient et les paramètres. Il faudra veiller à modifier les paramètres d'appel dans le script d'appel.





**ANNEXE 2**

**MATHÉMATIQUES**

### Fonction Gamma

La fonction gamma est définie dans  $\mathbb{R}^{*+}$  par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

La fonction gamma vérifie la relation suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

La fonction Gamma est le prolongement de la fonction factorielle définie pour les entiers naturels aux réels strictement positifs.

### Dérivée non entière

Si  $n$  est un entier naturel et  $f$  une fonction, on définit la primitive nième par :

$$I^n [f(x)] = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

La définition suivante continue d'avoir un sens même lorsque  $n$  est un réel strictement positif. Il suffit de remplacer la factorielle par la fonction Gamma qui vérifie pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

On obtient ainsi une définition de la primitive d'ordre réel positif  $\alpha$  et d'origine  $a$  de la fonction  $f$ .

$$I^\alpha [f](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

Cette formule est appelée "formule de Riemann-Liouville".

La manière la plus simple d'obtenir une dérivée non entière, et de calculer l'intégrale non entière en utilisant la formule de Riemann-Liouville et la faire suivre d'une ou plusieurs dérivations. À titre d'exemple si l'on cherche la dérivée non entière d'ordre 0.8 d'une fonction intégrable  $f$ , il suffit de calculer la dérivée à l'ordre 1 de la primitive d'ordre 0.2.

$$\mathbf{D}^{0.8}[f](x) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\Gamma(0.2)} \int_a^x f(t)(x-t)^{-0.8} dt \right)$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. C. Dubois, Techniques de l'ingénieur Paris (1998). *Propriétés diélectriques des polymères*.
- [2] David, E. and L. Lamarre (2006). *Low-Frequency Dielectric Response of Epoxy-Mica Insulated Generator Bars During Multi-Stress Aging*. To be published.
- [3] Gubanski, S. M., P. Boss, et al. (2003). *Dielectric response methods for diagnostics of power transformers*. IEEE Electrical Insulation Magazine 19(3): 12-18.
- [4] A. Schönhals *Dielectric Spectroscopy on the Dynamic of Amorphous Polymeric systems* NOVOCONTROL Application note dielectrics 1.
- [5] Gafvert, U., L. Adeen, et al. (2000). *Dielectric spectroscopy in time and frequency domain applied to diagnostics of power transformers*. Proceedings of the 6th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials, 21-26 June 2000, Xi'an, China, IEEE.
- [6] Saha, T. K., P. Purkait, et al. (2005). *Deriving an equivalent circuit of transformers insulation for understanding the dielectric response measurements*. IEEE Transactions on Power Delivery 20(1): 149-57.
- [7] R. Coelho B. Aladenize Hermes (1993). *Les diélectriques : Propriétés diélectriques des matériaux isolants* page 140.
- [8] B. Mandelbrot Flammarion (1989). *LES OBJETS FRACTALS Forme, hazard et dimension*.
- [9] R. Coelho B. Aladenize Hermes (1993). *Les diélectriques : Propriétés diélectriques des matériaux isolants* page 141.
- [10] R. Coelho B. Aladenize Hermes (1993). *Les diélectriques : Propriétés diélectriques des matériaux isolants* page 142.
- [11] Raju, G. R. G. (2000). *Analytical evaluation of distribution of relaxation time*. *Electrical Insulation and Dielectric Phenomena*, 2000 Annual Report Conference on.

- [12] Laudebat, L (2003). *L'Approche des phénomènes de relaxation diélectrique par Réalisation Diffusive* 6ième Conférences des Jeunes Chercheurs en Génie Electrique, 5-6 juin Saint-Nazaire.
- [13] Laudebat, L., P. Bidan, et al. (2004). *Modeling and optimal identification of pseudodifferential electrical dynamics by means of diffusive representation-part I: modeling*. Circuits and Systems I: Regular Papers, IEEE Transactions on [see also Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on] 51(9): 1801-1813.
- [14] Saha, T. K. and P. Purkait (2003). *Some precautions for the field users of PDC measurement for transformer insulation condition assessment*. 2003 IEEE Power Engineering Society General Meeting, 13-17 July 2003, Toronto, Ont., Canada, IEEE.
- [15] Du, Y., M. Zahn, et al. (1999). *Moisture equilibrium in transformer paper-oil systems*. Electrical Insulation Magazine, IEEE 15(1): 11-20.
- [16] Eric David, A. D., Isabelle Dubreuil, Jacques Masounave (2005). *Time and frequency domain dielectric measurements used as non-destructive evaluation technique for the characterization of micro-size particle reinforced polymeric matrix composites*, conference on Mesomechanics, pp 87-95.
- [17] Hamon, B. V. (1952); *An approximate method for deducing dielectric loss factor from dielectric current measurements*, Insulation Monograph. No. 27.
- [18] BAIRD, M. E. (1968). *Determination of Dielectric Behavior at Low Frequencies from Measurements of Anomalous Charging and Discharging Currents*. Modern physics 40 ,number 1.
- [19] Noirhomme, B., E. David, et al. (2005). *Application of dielectric response techniques for the condition assessment of power transformers*. Electrical Insulation and Dielectric Phenomena, 2005. CEIDP '05. 2005 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena.
- [20] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe Cambridge (2004). *Convex optimisation*. Page 466.
- [21] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe Cambridge (2004). *Convex optimisation*. Page 487.
- [22] Edwin K.P. Chong and Stanislaw H. Zak Wilwy-Interscience Publication (2001). *An Introduction to Optimisation*. Page 148.