

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMME EXIGENCE PARTIELLE
À L'OBTENTION DU
DOCTORAT EN GÉNIE
Ph.D.

PAR
KARIM KHAYATI

COMMANDE DES SYSTÈMES SOUS FROTTEMENT UTILISANT LE
FORMALISME LMI: APPLICATION AUX SYSTÈMES ROBOTIQUES AVEC
CONTACT ET AUX ACTIONNEURS PNEUMATIQUES

MONTREAL, LE 19 DÉCEMBRE 2006

CETTE THÈSE A ÉTÉ ÉVALUÉE

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Pascal Bigras, directeur de thèse

Département de génie de la production automatisée à l'École de technologie supérieure

M. Louis-A. Dessaint, codirecteur

Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Saad Maarouf, président du jury

Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

M. Camille A. Rabbath, examinateur externe

Defence Research & Development Canada - Valcartier

Mme Ouassima Akhrif, membre du jury

Département de génie électrique à l'École de technologie supérieure

ELLE A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 21 NOVEMBRE 2006

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE

COMMANDE DES SYSTÈMES SOUS FROTTEMENT UTILISANT LE FORMALISME LMI: APPLICATION AUX SYSTÈMES ROBOTIQUES AVEC CONTACT ET AUX ACTIONNEURS PNEUMATIQUES

Karim Khayati

SOMMAIRE

« Ceux qui sont férus de pratique sans posséder la Science sont comme le pilote qui s'embarquerait sans timon ni boussole et ne saurait jamais avec certitude où il va. »

Léonard de Vinci (1452 – 1519)

Le frottement présente systématiquement un risque accablant dans l'altération des performances de mouvement des systèmes mécaniques. La mise-en-place d'un système de contrôle efficace pour dissiper ce genre d'anomalie constitue encore un sujet d'actualité dans les domaines de la recherche et de l'ingénierie. Les mécaniciens, les tribologues, spécialistes de la théorie de frottement, et les automaticiens œuvrent pour l'étude de ce phénomène des points de vue : caractérisation, modélisation et compensation. Une revue assez exhaustive de ces travaux est présentée dans le chapitre 1.

Dans le présent travail de thèse, nous proposons un schéma général de contrôle des systèmes sous frottement que nous pouvons utiliser dans plusieurs applications. En respectant les paradigmes standards de stabilité, de robustesse et d'optimisation (de types H_2 , H_∞ , *etc.*), ce schéma est basé sur l'estimation en boucle fermée du frottement dynamique, selon le modèle de *LuGre*, et la structure dynamique de contrôle linéaire par retour de sortie. La synthèse de cette commande repose sur les outils numériques des inégalités matricielles linéaires¹. En plus, pour tenir compte de la variété des structures dynamiques de mouvement et aussi de force dans les différents dispositifs en question, le schéma de la commande que nous proposons peut comprendre des termes d'actions statiques (ou) dynamiques, linéaires (ou) non linéaires et éventuellement robustes. Une illustration simple de la commande de mouvement d'une masse, sur une surface sous frottement, est exposée dans le chapitre 2. Il s'agit d'une généralisation du principe de commande stabilisante par rétroaction statique introduit par Canudas *et al.* (1995).

Ensuite, nous appliquons notre schéma dans des cas plus complexes (non linéarités, incertitudes et couplages de force/position non négligeables). Pour ce faire, nous proposons dans le chapitre 3 l'étude de la commande hybride de position/force du robot manipulateur dont l'élément final est en contact sous frottement avec une surface donnée. Dans le chapitre 4, nous développons le schéma de contrôle de force (*i.e.* de pression) de l'action-

¹ En anglais, *linear matrix inequalities* (LMIs).

neur pneumatique. Et dans le chapitre 5, nous présentons le schéma détaillé de contrôle de position de ce type d'installation qui renferme plusieurs points de contact avec frottement. Des résultats expérimentaux sont présentés pour valider notre approche de commande et aussi la comparer à d'autres schémas de commande et/ou de compensation de frottement.

Pour conclure ce travail, nous recommandons, en particulier, l'extension de l'approche proposée en utilisant un modèle de frottement encore plus générale comme celui de glissement généralisé de *Maxwell* (GMS) dans une suite logique et aussi ambitieuse de ce travail.

CONTROLLER DESIGN FOR SYSTEMS UNDER FRICTION USING LMI FORMULATION: APPLICATION TO ROBOTIC SYSTEMS WITH CONTACT AND TO PNEUMATIC ACTUATORS

Karim Khayati

ABSTRACT

« Least said, soonest mended. »

Proverbe anglais

In nearly all machines with moving parts, problems such as non-negligible tracking errors, limit cycles and undesirable stick-slip motions are encountered which are not only inconvenient, but also unavoidable. Several strategies have been investigated in the literature to address this issue. We first present a historical review of the modeling and control strategies that have been developed for various frictional servo-systems.

We then propose our control scheme in a general and abstract form. The main component of this scheme is based on a dynamic output linear controller design and a LuGre friction observer dynamics, as the behavior of the LuGre model estimator is rich in terms of friction compensation and positioning-tracking, especially at zero crossings of the velocity. Our full-order dynamic output feedback controller is composed of two components : one that deals with the tracking problem and another that serves as a correction term in the observer for position and velocity errors. The analysis of the whole feedback dynamics is based on the following three features : interconnection, passivity and optimization. The subsequent linear state space controller matrices are found by using the Linear Matrix Inequality (LMI) approach. For purposes of simplification, we address the output feedback positioning-tracking of a simple mass moving with friction. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed compensator.

In an initial complex application, a design for a motion/force controller for a constrained servo-robot, based on a common modeling structure, is proposed. Since the contact between the end-effector and the environment is subject to friction, the control plant is based on the LuGre friction closed-loop observer. We therefore propose new nonlinear position and force input transforms, which are slightly different from classical computed torques, combined with a change of variable. The performances are validated experimentally on a 2R robot manipulator acting on a horizontal worktable with friction.

In a second application, we deal with the dynamic pneumatic actuators that are characterized by their complexity and their hard system control achievements. In the first step, we develop an accurate closed-loop force control technique for a pneumatic actuator, as this is an essential stage in the implementation of any positioning-control strategy. Since

an analytical nonlinear structure, which is dependently affine on parameter uncertainties, generically characterizes pneumatic plants, a feedback linearization design is proposed to cancel out most of the resulting nonlinearities. We then propose a linear state feedback control and an additive nonlinear action to robustly bound the force-error dynamics. These devices are required to handle the further parametric uncertainties and exogenous unbounded disturbances that will arise on the deduced structure. The linear control gains are designed within robust closed-loop pole clustering using an LMI approach. In the second step, we deal with a high-friction pneumatic actuator positioning technique based on a LuGre friction closed-loop observer dynamics. The inner force control loop described above is regarded here as a complementary feature of the proposed technique. Our main goal is to establish the stability condition by using the passivity of interconnected linear and nonlinear sub-plants to deal with the varying and uncertain parameterization of friction modeling and exogenous bounded inputs resulting from the force-loop dynamics.

Various experimental results illustrate the validity of the components of our approach in different hard systems.

AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS

« La cessation du mouvement est due à la force d'opposition. S'il n'y aucune force d'opposition, le mouvement ne s'arrêtera jamais. C'est aussi vrai qu'un bœuf n'est pas un cheval. »

Les Mohists (400 av. J.-C.)
Mo Ching

« No one could say why a thing once set in motion should stop anywhere ; for why should it stop there rather than here ? So that a thing will either be at rest or must be moved ad infinitum, unless something more powerful get in its way. »

Aristote (350 av. J.-C.)
La Physique

Le frottement : un phénomène palliatif

“Le frottement est l'un des plus vieux problèmes de l'humanité” [1]. Oui, da ! Mais, avant toute spéculation par rapport à ce sujet, imaginons nous un monde sans frottement ? Plus de nœud de cravate, ni ceinture pour serrer la taille, ni lacet pour les chaussures ..., et d'ailleurs, inutiles car nous ne pouvons plus marcher, ni s'appuyer sur le mur pour nous tenir debout (*sic*). Bref, “un monde sans frottement serait encore plus invivable”, nous dit-on. Et, là encore, une petite pensée à l'*Homo Erectus*¹ qui a produit le feu par friction² il y a très .. très longtemps. Enfin, les exemples ne manquent pas.

¹ Homo Erectus est l'homme préhistorique, dont ses restes ont été retrouvé sur une période qui remonte au Paléolithique et va de moins 2 000 000 années à moins 250 000 ans av. J.-C. (d'après www.wikipedia.org).

² À partir de la chaleur produite par le frottement d'un morceau de bois tendre sur un bois dur.

Alors, dire que le frottement est ‘LE problème universel’ que doit résoudre l’homme; c’est simplement enfreindre à la *Natura Rerum*³. D’un autre côté, il faut reconnaître que nous devons faire face aussi à l’adhérence⁴ lorsqu’elle atteint un niveau exagéré qui, contre tout désir, empêche de mouvoir les objets mobiles ou use les surfaces entretenues, par exemple. À ce niveau donc, le frottement est considéré comme une anomalie (même dans le corps humain⁵, et dans l’eau⁶ aussi) qui doit être traitée avec intransigeance. Ceci est, plus que jamais, vrai dans les domaines industriels et les technologies de pointe.

La lutte au *frottement* : un éternel recommencement

Éviter le frottement était vraisemblablement un souci économique et énergétique depuis l’antiquité.

1880 av. J.-C. Sur le bas-relief égyptien de la figure 1, une armée d’hommes tirent un fardeau et un compagnon à l’avant verse un liquide (corps gras) entre le colosse posé et les planches (*i.e.* les glissières) pour réduire le frottement [2].

³ Signifiant nature, monde, univers et matière.

⁴ Partie de frottement ou carrément le frottement.

⁵ Le corps humain compte 206 os dont la majorité est dotée d’une cavité synoviale recouverte d’une membrane qui sécrète un fluide onctueux (une sorte de gel) pour empêcher le frottement lors de mouvement impliquant les articulations.

⁶ Par exemple, une torpille, qui se déplace dans l’eau, fait l’objet de forces de frottement qui s’opposent à son mouvement. La vitesse maximale d’une torpille ordinaire est de 60 km/h, à peu près. Par contre, la *Shkval* (Ce qui veut dire requin en russe) est une torpille extraordinaire, qui peut atteindre des vitesses extrêmement élevées (à 500 km/h), grâce à la technique de la supercavitation (formation d’une enveloppe de gaz autour de la torpille pour minimiser les frottements avec l’eau).



Figure 1 Transport d'un colosse égyptien, Tombe de Tehuti-Hetep, El-Bersheh (1880 av. J.-C.), image reprographiée à partir de [2]

200 av. J.-C. Sur une maquette⁷ [...] en bois de Sycomore, trouvé dans un tombeau près de Saqqara en Égypte, une structure d'un supercargo, fait pour voler à l'économie et sans gaspillage d'énergie due au frottement, est remarquablement dessinée.

1452-1519 L.D. Vinci s'intéressa à la friction entre les corps, dans ses nombreux croquis et expériences. Des lois fondamentales sur le frottement furent découvertes par L.D. Vinci. Complètement oubliées pendant un siècle et demi, elles furent redécouvertes plus tard par Amontons, Bélidor, Euler et Coulomb [1, 2, 3].

XVIII^e Avec le développement de la métallurgie, il y a eu l'apparition des premiers pa-
liers lisses qui réduisent véritablement les frottements et résistent bien aux charges.

⁷ Voir dans *Magazine, Monde Inconnu (Le)*, N°84, 06/1987, Technologies avancées dans les temps reculés, M. Granger (d'après www.infomysteres.com).

XX^e C'est seulement à la fin du XX^e siècle que les *forces de frottement* sont réellement *étudiées* et que la *théorie de commande* est impliquée dans la *compensation* de ces forces.

Aujourd'hui L'histoire continue..

Le problème de *frottement* : une question de performance

Aujourd'hui, dans presque tous les domaines, nous entendons accréditer systématiquement les mêmes valeurs : PRODUCTIVITÉ, QUALITÉ et COÛT, pour avoir un produit compétitif sur le marché. Et alors, ce n'est qu'à partir de ces valeurs que le développement technologique et l'épanouissement des outils numériques soient mis en exergue; pour exiger davantage plus de succès dans l'exécution d'un travail mécanique (de mouvement et/ou de force) de haute précision et avec une allure de vitesse (rapide ou lente) escomptée selon l'application. À titre indicatif, voici une liste de ces domaines d'applications (dont le point commun entre eux reste la précision, la qualité et la protection du produit contre tout dommage) :

- la robotique et la téléopération [4, 5],
- les servo-moteurs électriques [6, 7, 8],
- les actionneurs pneumatiques et hydrauliques [9, 10, 11],
- les systèmes d'entraînement des machines à outils [12],
- les systèmes de positionnement dans le secteur d'automatisation d'usine [6],
- les systèmes de traction-freinage d'automobile (système ABS, interaction pneu-route) [13, 14, 15],

- l’emballage dans l’industrie des semi-conducteurs [16],
- l’industrie de l’informatique et de la micro-électronique (processus de servo-contrôle des disques durs, applications de gravure et systèmes d’inspection de fils de circuits intégrés) [6, 17].

La plupart de ces applications exigent des mouvements de hautes précisions, de dizaines de centimètres à quelques micromètres [16]. Elles préconisent, en effet, des comportements dépourvus de toutes formes de perturbations ou incertitudes; dont le *frottement est considéré comme une source principale de perturbation et une part importante de l’énergie*⁸ consommée dans le système mécanique *se perd par frottement* [2]. Ainsi, l’investigation du phénomène de frottement (ses aspects, ses caractéristiques et ses incertitudes) se trouve au cœur de toutes les études qui traitent l’analyse, le développement et la commande des dispositifs mécaniques [18, 19, 20].

Le *frottement* et les systèmes robotiques avec contact

En pratique, les exigences industrielles (en termes de dextérité, puissance, souplesse, répétabilité et économie) assignent les conditions du contrôle robotique, pour réaliser des tâches complexes dévolues aux dispositifs robotiques. Les objectifs de ce contrôle sont liés, dans plusieurs applications, à la coordination de la force et la position dans les milieux contraints et sous frottement. Parmi les procédés industriels, qui exigent un contact permanent entre l’effecteur d’un robot manipulateur et son milieu physique de travail, nous

⁸ Le mouvement relatif de deux solides en contact crée une énergie qui se transforme en chaleur. Cette chaleur se dissipe à partir de la zone de contact [2].

citons : l'usinage des objets, le traitement des surfaces (ébavurage, ébarbage, meulage et polissage), le nettoyage des parois, la peinture, le traçage, l'assemblage, le soudage et la manipulation des objets (manutention et fixation).

Le frottement et les systèmes d'actionneurs pneumatiques

Les actionneurs pneumatiques sont des dispositifs qui permettent de réaliser un travail mécanique de mouvement et de force par l'intermédiaire de l'air comprimé. Ce type de fluide est systématiquement distribué dans la plupart des ateliers à des pressions généralement inférieures à 10 bars. L'installation des actionneurs pneumatiques est simple et se fait au moyen de canalisations souples et de composantes (vérins et distributeurs) d'encombrement réduit. Leur puissance massique est intermédiaire entre celles des actionneurs électriques et hydrauliques. Cependant, le mouvement d'un actionneur pneumatique dépend de la charge, à cause de la compressibilité (sensibilité de pression vs volume) de l'air [21]. En plus, il est souvent perturbé à cause du coefficient de frottement élevé dans ce cas (l'air reste un mauvais lubrifiant). Il est donc difficile de l'asservir en position avec des charges variables. Ceci explique pourquoi les actionneurs pneumatiques se cantonnent pratiquement aux manipulateurs séquentiels (comme les systèmes robotiques de type '*pick and place*'); pour lesquels la précision (relativement faible) n'est pas obtenue par une boucle d'asservissement mais plutôt par des butées mécaniques.

Notre sujet : Étude de la commande des systèmes sous *frottement*

Dans le cadre de la présente thèse, nous étudions d'abord les techniques de représentation (modélisation) et de compensation de frottement dans les différents systèmes en mouvement (*état de l'art*). Nous proposons ensuite une (*approche générale*) de commande de ces systèmes basée sur la compensation de frottement. Enfin, nous appliquons cette approche dans les cas de *système robotique avec contact* et de *système d'actionneur pneumatique*. Des phases d'expérimentation sont menées au laboratoire sur ces deux types d'installations pour valider la réalisabilité et l'efficacité des outils de commandes proposés dans ce travail.

Notre contribution rentre dans le cadre d'un travail d'équipe qui mène une étude élargie sur le développement des techniques d'identification, de commande et d'observation des systèmes sous frottement. Et, pour appuyer ce travail, un certain nombre de publications (articles parus ou soumis dans des journaux avec comité de lecture et papiers présentés dans des conférences internationales d'envergure) sont produits en rapport avec notre sujet de thèse :

- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2006). A Multi-stage Position/Force Control for Constrained Robotic Systems with Friction : Joint-space Decomposition, Linearization and Multi-objective Observer/Controller Synthesis using LMI Formalism. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(5), 1698–1712.

- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2006). LuGre Model-based Friction Compensation and Positioning Control for a Pneumatic Actuator. *ASME Transactions on Mechatronics (en révision)*.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2006). Force Control Loop Affected by Bounded Uncertainties and Unbounded Inputs for Pneumatic Actuator Systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control (en révision)*.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2001). Nonlinear Control of Pneumatic Actuators. *International Conference on Computers and Industrial Engineering (ICC & IE)*, 214–218, Montreal, QC, Canada.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2002). Retaining or Neglecting Valve Spool Dynamics in Tracking Controller Strategies for Pneumatic Systems. *IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 1213–1218, Szczecin, Poland.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2002). A Robust Pole Clustering Design of Pneumatic Systems using LMI Approach. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 4, 274–279, Hammamet, Tunisia.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2003). On Modelization and Robust Controller Synthesis of Pneumatic Actuator Plants using LMI Approach. *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA & IMACS-IEEE/ SMC)*, S1-R-00-0304, Lille, France.

- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2004). A Multi-objective Output-Feedback Controller for System with Friction. *IFAC Symposium on Cost Oriented Automation*, 103–108, Gatineau/Ottawa, Canada.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2004). A Dynamic Feedback Tracking Design for Systems with Friction using the LMI Formulation. *IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 819–824, Taipei, Taiwan.
- Madi, M.S., **Khayati, K.**, Bigras, P. (2004). Parameter Estimation for the LuGre Friction Model using Interval Analysis and Set Inversion. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1, 428–433, La Haye, Hollande.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2004). A Robust Feedback Linearization Force Control of a Pneumatic Actuator. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 6113–6119, La Haye, Hollande.
- **Khayati, K.**, Bigras, P., Dessaint, L.-A. (2006). On Force Control of Pneumatic Actuator Subject to a Position Tracking and a Friction Estimation Based on LuGre Model, *Rapport technique*, ETS-RT-2006-001, ETS, Montréal, QC.

Finalement, je m'adresse en mon humble personne, auteur de cette thèse présentée dans le but de l'obtention du doctorat en génie (Ph.D.) :

Que Professeur P. Bigras trouve l'expression de mes remerciements les plus sincères pour la confiance qu'il m'accorde en dirigeant ma thèse, pour sa constante disponibilité et pour ses conseils persuasifs.

Je tiens à témoigner ma vive reconnaissance au Professeur L.-A. Dessaint pour avoir accepté de codiriger ma thèse, pour ses encouragements, et pour son aide inestimable.

Que ce rapport reste pour eux un humble témoignage de ma gratitude !

En même temps, je dédis ce travail à toutes les personnes qui m'ont supporté, encouragé et réconforté pendant toutes mes années d'études, surtout pendant les moments difficiles; en particulier, mes très chers parents *baba* MOHAMED & *mama* SOUAD, ma très chère épouse (et *nounou*) SALMA, mon frère et ma sœur, mes beaux parents, mes beaux frères, mes belles soeurs, mes neveux, ma nièce, mes amis et, sans oublier, tous mes professeurs et enseignants qui m'ont appris à lire, écrire et raisonner.

Que ce rapport puisse témoigner de ma reconnaissance et mon admiration pour tout ce beau monde qui m'entoure !

Que Dieu soit avec nous tous ! Et, nous accorde tous miséricorde, prospérité et succès.

« [...] Tout cela a été le fruit du besoin, de l'effort et de l'expérience; l'esprit l'a peu à peu enseigné aux hommes dans une lente marche du progrès. C'est ainsi que le temps donne naissance pas à pas aux différentes découvertes qu'ensuite l'industrie humaine porte en pleine lumière. Les hommes voyaient en effet les arts éclairés d'âge en âge par des génies nouveaux, puis atteindre un jour leur plus haute perfection. »

Titus Lucretius Carus (98 – 55 av. J.-C.)
De Natura Rerum

TABLE DES MATIÈRES

	Page
SOMMAIRE.....	i
ABSTRACT.....	iii
AVANT-PROPOS ET REMERCIEMENTS.....	v
TABLE DES MATIÈRES	xv
LISTE DES TABLEAUX.....	xx
LISTE DES FIGURES	xxii
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES	xxvi
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 ÉTAT DE L'ART.....	12
1.1 Introduction	12
1.2 Étude du frottement	13
1.2.1 Modélisation du frottement.....	13
1.2.1.1 Modélisation du frottement basée sur la physique.....	14
1.2.1.2 Techniques de modélisation du frottement	17
1.2.1.3 Modèles de frottement.....	19
1.2.2 Commande des systèmes sous frottement	26
1.2.2.1 Méthodes de compensation de frottement 'sans modèle explicite'	28
1.2.2.2 Méthodes de compensation de frottement 'basées sur des modèles fixes'	31
1.2.2.3 Méthodes de compensation de frottement 'basées sur des modèles inexacts ou incomplets'	32
1.2.3 Conclusion	38
1.3 Étude des systèmes robotiques	38
1.3.1 Généralités	38
1.3.2 Stratégies de commande des systèmes robotiques en position et force.....	40
1.3.3 Commande hybride	41
1.3.3.1 Définition	41

1.3.3.2	Principe et objectif	42
1.3.3.3	Méthodologies.....	42
1.3.3.4	Effet de frottement de contact	43
1.4	Étude des systèmes pneumatiques.....	45
1.4.1	Motivation de la commande des systèmes pneumatiques.....	45
1.4.2	Description des stratégies de commandes des systèmes pneumatiques.....	46
1.4.2.1	Commandes linéaires	46
1.4.2.2	Commandes linéarisantes.....	47
1.4.2.3	Commandes adaptatives.....	48
1.4.2.4	Commandes robustes	48
1.4.2.5	Commandes 'sans modèle'	49
1.5	Conclusion	50
CHAPITRE 2	ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION	51
2.1	Introduction	51
2.2	Modélisation du servo-système 'généralisé' de mouvement	53
2.2.1	Modélisation du système d'action (ou de force)	54
2.2.2	Modélisation du système de mouvement	56
2.2.3	Modélisation du système de frottement	57
2.2.3.1	Généralisation	57
2.2.3.2	Modèle de <i>LuGre</i>	58
2.3	Commande du système mécanique sous frottement.....	64
2.3.1	Éléments de commande de force.....	64
2.3.1.1	Cas d'un couplage simple	65
2.3.1.2	Cas d'un couplage complexe.....	65
2.3.2	Éléments de commande de position et compensation de frottement.....	66
2.4	Exemple d'illustration : Cas d'une masse simple sous frottement	71
2.4.1	Modélisation du système.....	71
2.4.2	Contrôle de position et compensation de frottement	73
2.4.3	Formulation LMI du problème	78
2.4.3.1	Condition de stabilité	78
2.4.3.2	Conception à multi-objectifs.....	80
2.4.3.3	Synthèse du retour de sortie.....	86
2.4.4	Application numérique et simulation	88
2.4.4.1	Données	88
2.4.4.2	Résultats	89
2.4.4.3	Commentaires et discussions	90

2.5	Conclusion	92
CHAPITRE 3	APPLICATION 1 : SYSTÈME ROBOTIQUE AVEC CONTACT SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION.....	94
3.1	Introduction	94
3.2	Modélisation d'un système robotique sous frottement de contact	95
3.2.1	Modélisation du robot sous contrainte de contact.....	96
3.2.2	Modélisation de frottement.....	99
3.3	Stratégie de commande hybride d'un système robotique sous frottement de contact.....	100
3.3.1	Estimation de frottement.....	102
3.3.2	Commande de position sous contrainte	104
3.3.2.1	Réduction du sous-espace de mouvement sous frottement	104
3.3.2.2	Commande linéaire de position	106
3.3.2.3	Condition de stabilité et stabilité exponentielle	108
3.3.3	Formulation LMI du problème	111
3.3.3.1	Conception à multi-objectifs	111
3.3.3.2	Synthèse du retour de sortie.....	113
3.3.4	Commande de force normale de contact	116
3.3.4.1	Réduction du sous-espace de force normale de contact	116
3.3.4.2	Commande linéaire de force	117
3.4	Exemple d'illustration expérimentale.....	118
3.4.1	Dispositif expérimental.....	118
3.4.2	Description du robot de contact sous frottement et du système de contrôle.....	119
3.4.3	Résultats expérimentaux et interprétation	122
3.5	Conclusion	125
CHAPITRE 4	APPLICATION 2 : SYSTÈME D'ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (PREMIÈRE PARTIE : CONTRÔLE DE FORCE)	127
4.1	Introduction	127
4.2	Modélisation des systèmes pneumatiques	128
4.2.1	Généralités	128
4.2.2	Modélisation mathématique d'un système d'actionneur pneumatique	129
4.3	Commande des systèmes pneumatiques	132
4.4	Commande de force d'un actionneur pneumatique.....	133
4.4.1	Préliminaire	133

4.4.2	Commande robuste de force - stratégie 1	135
4.4.2.1	Conception du contrôleur	136
4.4.2.2	Synthèse LMI.....	137
4.4.2.3	Conclusion	145
4.4.3	Commande robuste de force - stratégie 2	145
4.4.3.1	Linéarisation partielle.....	147
4.4.3.2	Synthèse LMI du retour d'état PI.....	149
4.4.3.3	Commande résultante : PI + compensation non linéaire	150
4.4.3.4	Conclusion	153
4.5	Étude expérimentale	154
4.5.1	Contrôle de force - stratégie 1	156
4.5.2	Contrôle de force - stratégie 2	159
4.6	Conclusion	160
CHAPITRE 5	APPLICATION 2 : SYSTÈME D'ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (DEUXIÈME PARTIE : CONTRÔLE DE POSITION)	162
5.1	Introduction	162
5.2	Modélisation de la partie mécanique d'un actionneur pneumatique.....	163
5.3	Commande de position d'un système d'actionneur pneumatique	165
5.3.1	Compensation de frottement	166
5.3.2	Commande de position	171
5.3.3	Condition de stabilité	175
5.3.4	Conception à multi-objectifs.....	178
5.3.4.1	Marge de stabilité exponentielle et placement de pôles	179
5.3.4.2	Stabilité exponentielle	179
5.3.4.3	Contrainte sur la région de stabilité	180
5.3.4.4	Rejet de perturbation et optimisation H_∞	180
5.3.4.5	Optimisation de multi-objectifs	182
5.3.5	Synthèse du retour de sortie.....	182
5.4	Étude expérimentale	187
5.4.1	Autres méthodes de contrôle de position utilisant des modèles statiques d'estimation de frottement	187
5.4.1.1	Mode 2 : {contrôleur PD + estimateur non linéaire adaptatif de <i>Coulomb</i> }.....	187
5.4.1.2	Mode 3 : {contrôleur PD + estimateur de frottement statique à paramètres fixes}	188
5.4.2	Description du dispositif expérimental	189
5.4.3	Résultats et discussion.....	191

5.5	Conclusion	197
	CONCLUSION	198
	BIBLIOGRAPHIE	202

LISTE DES TABLEAUX

		Page
Tableau I	Exemples de servo-systèmes de mouvement avec frottement.....	54
Tableau II	Paramètres du solide (S) et du frottement de <i>LuGre</i>	89
Tableau III	Applications numériques des paramètres	121
Tableau IV	Comparaison des performances d'erreurs statiques selon les modèles d'estimation de frottement de <i>LuGre</i> et de <i>Karnopp</i>	124
Tableau V	Valeurs numériques des paramètres de l'actionneur pneumatique	155
Tableau VI	Performances de multi-objectifs H_∞ et gain crête-à-crête, et gains du contrôleur linéaire	156
Tableau VII	Performances de multi-objectifs H_∞ et gain crête-à-crête en fonction de la fréquence de la force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N	158
Tableau VIII	Paramètres du système expérimental.....	191
Tableau IX	Gains des contrôleurs PD	192
Tableau X	Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = { <i>feed-back</i> de sortie + estimateur de <i>LuGre</i> }, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de <i>Coulomb</i> } et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée linéaires à portions quadratiques pour parcourir des distances variées durant un temps de 3 sec	194
Tableau XI	Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = { <i>feed-back</i> de sortie + estimateur de <i>LuGre</i> }, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de <i>Coulomb</i> } et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir des distances variées (fréquence de 0.25 Hz)	196
Tableau XII	Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = { <i>feed-back</i> de sortie + estimateur de <i>LuGre</i> }, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de <i>Coulomb</i> } et Mode	

3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir une distance fixe de 80 mm avec des fréquences variées 196

LISTE DES FIGURES

		Page
Figure 1	Transport d'un colosse égyptien, Tombe de Tehuti-Hetep, El-Bersheh (1880 av. J.-C.), image reprographiée à partir de [2].....	vii
Figure 2	Représentation schématique d'un servo-système de mouvement	53
Figure 3	Interface de frottement entre surfaces de contact présentée comme contact entre lames. Pour simplifier, les lames de la partie supérieure sont considérées élastiques et celles de la partie inférieure rigides (représentation tirée et adaptée à partir de [20]).....	58
Figure 4	Mouvement bidimensionnel sous frottement	63
Figure 5	Schéma de base de contrôle de servo-système sous frottement	65
Figure 6	Éléments de contrôle de force	67
Figure 7	Éléments de contrôle de position	68
Figure 8	Schéma général de commande linéaire de système de mouvement	69
Figure 9	Schéma général détaillé de commande linéaire de système de mouvement et de compensation de frottement	70
Figure 10	Schéma de base de système de masse simple sous frottement.....	71
Figure 11	Solide en déplacement sur une surface sous frottement.....	71
Figure 12	Schéma de base de contrôle de position d'une masse sous frottement ...	72
Figure 13	Schéma-bloc de système de compensation de frottement d'une masse ..	74
Figure 14	Schéma-bloc de systèmes inter-connectés (cas d'une masse simple)	76
Figure 15	Région de stabilité.....	82
Figure 16	Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_2(s)$	83
Figure 17	Performances de contrôle de position du solide (S) sous frottement.....	90

Figure 18	Performances de contrôleur de Canudas <i>et al.</i> de position du solide (S) sous frottement.....	91
Figure 19	Robot en mouvement sur une surface avec frottement	95
Figure 20	Schéma de base de système robotique avec contrainte sous frottement..	96
Figure 21	Schéma de base de contrôle hybride de position/force de robot avec contrainte sous frottement	101
Figure 22	Schéma-bloc de la commande hybride classique de position/force d'un robot avec contact	101
Figure 23	Schéma-bloc de la commande hybride modifiée de mouvement/force d'un robot avec contrainte sous frottement.....	103
Figure 24	Schéma-bloc des dynamiques d'erreurs d'estimation et de suivi de trajectoire.....	107
Figure 25	Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$	111
Figure 26	Schéma-bloc de dynamique d'erreur de force normale	118
Figure 27	Robot manipulateur à deux articulations rotatives en contact avec une surface horizontale sous frottement, implémenté par la technique <i>hardware-in-the-loop</i>	119
Figure 28	Performance de position et d'estimation de frottement	122
Figure 29	Performance d'erreur de position.....	123
Figure 30	Performance de force normale et couples appliquées.....	124
Figure 31	Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement.....	128
Figure 32	Description schématique d'un système pneumatique.....	130
Figure 33	Schéma de base de boucle contrôle de système d'actionneur pneumatique sous frottement	132
Figure 34	Schéma de base de contrôle de force-stratégie 1	134
Figure 35	Schéma de système d'actionneur pneumatique	135

Figure 36	Schéma-bloc de la stratégie 1 de contrôle de force d'un actionneur pneumatique	136
Figure 37	Schéma-bloc du système de force en boucle fermée	138
Figure 38	Région de stabilité \mathcal{D}	140
Figure 39	Plan de répartition des variations de π	142
Figure 40	Schéma de système d'actionneur pneumatique sous frottement	146
Figure 41	Schéma de base de contrôle de force-stratégie 2	146
Figure 42	Schéma de base de contrôle de force, vu comme une partie intégrante du contrôle de position d'un actionneur pneumatique	147
Figure 43	Schéma-bloc de la stratégie 2 de commande de force d'un actionneur pneumatique	151
Figure 44	Schéma du dispositif expérimental	154
Figure 45	Force appliquée sur le piston, erreur de force et effort de commande, utilisant les performances H_{∞} et gain crête-à-crête, dans le cas d'une force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N et de fréquence $f = 1$ Hz...	157
Figure 46	Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence sinusoïdale	159
Figure 47	Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence triangulaire	160
Figure 48	Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence trapézoïdale	161
Figure 49	Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement.....	162
Figure 50	Description schématique d'un système pneumatique.....	164
Figure 51	Schéma de base de contrôle de position.....	165
Figure 52	Schéma de base contrôle de position, utilisant une boucle interne de contrôle de force	166

Figure 53	Schéma-bloc de la stratégie proposée de contrôle de position d'un actionneur pneumatique.....	167
Figure 54	Systèmes inter-connectés des dynamiques d'erreurs de position et d'estimation de frottement	173
Figure 55	Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$	181
Figure 56	Banc expérimental.....	190
Figure 57	Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = { <i>feed-back</i> de sortie + estimateur de <i>LuGre</i> }, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de <i>Coulomb</i> } et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée linéaire à portions quadratiques pour parcourir une distance totale de 2 cm.....	193
Figure 58	Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = { <i>feed-back</i> de sortie + estimateur de <i>LuGre</i> }, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de <i>Coulomb</i> } et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée sinusoïdale pour parcourir une distance totale de 4 cm.....	195

LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SIGLES

arg	Fonction argument d'une fonction d'optimisation
BMI(s)	Inégalité(s) matricielle(s) bilinéaire(s), en anglais, <i>bilinear matrix inequality(ies)</i>
\mathbb{C}	Ensemble complexe
<i>Cf.</i>	Conférer
C_d	Coefficient de décharge de la valve
C_1, C_2	Constantes de débit réduit
cos	Fonction (trigonométrique) cosinus
DNLDI	Système différentiel linéaire à inclusion diagonale de norme bornée, en anglais, <i>diagonal norm-bound linear differential inclusion</i>
ddl	Degré de liberté
$\frac{d}{dt}$	Fonction dérivée par rapport au temps
exp(\cdot)	Fonction exponentielle
F	Force d'action, N
f	Fréquence, Hz
f_c	Amplitude de frottement de <i>Coulomb</i> , N
f_f	Force de frottement, N
f_s	Amplitude de frottement statique, N
GMS	Modèle de frottement de glissement généralisé de <i>Maxwell</i> , en anglais, <i>generalized Maxwell-slip</i>
$g(\cdot)$	Fonction de <i>Stribeck</i>
g	Accélération de la pesanteur, m/s ²

IFToMM	Fondation <i>International Federation on Theory of Machines and Mechanisms</i>
ISO	Organisation Internationale de Normalisation
<i>i.e.</i>	C'est-à-dire
j	Nombre complexe imaginaire pur, <i>i.e.</i> $j^2 = -1$
LQG	Optimisation linéaire quadratique <i>Gaussienne</i> , en anglais, <i>linear quadratic Gaussian</i>
KFM	Modèle cinétique de frottement, en anglais, <i>kinetic friction model</i>
LMI(s)	inégalité(s) matricielle(s) linéaire(s), en anglais, <i>linear matrix inequality(ies)</i>
ln	Fonction logarithme <i>Népérien</i>
MRAC	Commande adaptative avec modèle de référence, en anglais, <i>model-reference adaptive control</i>
m	Masse, kg
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels
NN	Réseaux de neurones, en anglais, <i>neural network</i>
P	Pression, bar
PD	Compensateur proportionnel-dérivée
PDS	Système à paramètres dépendants affines, en anglais, <i>parameter-dependent system</i>
PI	Compensateur proportionnel-intégrateur
PID	Compensateur proportionnel-intégrateur-dérivée
p_{cr}	Rapport critique de pressions
QFT	Théorie quantitative de <i>feed-back</i> , en anglais, <i>quantitative feedback theory</i>

R	Constante universelle des gaz parfaits, Nm/kgK
\mathbb{R}	Ensemble réel
RMS	Racine des moindres carrées, en anglais, <i>root-mean-square</i> ou simplement moyenne quadratique
S	Aire de section, m ²
SMC	Commande par mode de glissement, en anglais, <i>sliding mode control</i>
STC	Méthode d'ajustage autonome, en anglais, <i>self-tuning controller</i>
SPR	Strictement réel positive, en anglais, <i>strictly positive real</i>
s	Opérateur de différentiation (<i>i.e.</i> de Laplace)
$\text{sgn}(\cdot)$	Fonction signe
\sin	Fonction (trigonométrique) sinus
\cdot^T	Transposée d'une matrice
T_a	Température ambiante absolue du milieu, K (Kelvin)
TCP/IP	Protocole de contrôle de communication, en anglais, <i>Transmission Control Protocol/Internet Protocol</i>
$\text{Tr}(\cdot)$	Trace d'une matrice carrée
t	Variable temporelle, s
\tan	Fonction (trigonométrique) tangente
V	Volume, m ³
VSC	Commandes à structure variable, en anglais, <i>variable structure control</i>
W	Constante (de proportionnalité) d'ouverture de la valve à tiroir, m
x	Position, m
$\dot{x} \triangleq v$	Vitesse, m/s
$\dot{x}_s \triangleq v_s$	Vitesse constante de <i>Stribeck</i> , m/s

$\bar{\delta}$	Conjugué du nombre complexe z
σ_0	Coefficient de rigidité interne de frottement, N/m
σ_1	Coefficient d'amortissement interne de frottement, Ns/m
σ_v	Coefficient de frottement visqueux, Ns/m
ζ	Rapport de chaleur spécifique
$\ \cdot \ _1$	Gain de <i>crête-à-crête</i> ou norme d'amplitude
$\ \cdot \ _2, H_2$	Norme sur l'espace de <i>HARDY</i> , des matrices de transfert propres et stables, associée à l'optimisation LQG
$\ \cdot \ _\infty, H_\infty$	Norme sur l'espace de <i>HARDY</i> , des matrices de transfert propres et stables, associée à l'optimisation de l'énergie du signal de sortie ou son RMS
$ \cdot $	Fonction valeur absolue
$\int \cdot$	Fonction intégrale
\otimes	Produit de <i>Kronecker</i>
■	Symbole de fin de démonstration
*	Symbole qui remplace les blocs qui sont référés par symétrie dans une LMI

INTRODUCTION

« Si on commence avec des certitudes, on finit avec des doutes. Si on commence avec des doutes, on finit avec des certitudes. »

Francis Bacon (1561 – 1626)

Problématique

La présence de frottement dans les servo-mécanismes (de mouvement et de force), comme par exemple les robots et les machines à outils, peut compromettre sévèrement leurs performances. Quelques problèmes de contrôle liés au frottement sont [22, 23, 24] :

- des erreurs en régime permanent,
- des retards,
- des mouvements saccadés,
- ou carrément une instabilité du système.

Il existe déjà plusieurs façons pour résoudre ces problèmes; comme par exemple développer des matériaux¹ à faibles coefficients de frottement ou assurer une lubrification permanente et efficace. Mais, il y a aussi l'approche faisant appel au service de l'Automatique et qui reste plus accessible dans ce genre de situations. En pratique, l'ingénieur/chercheur automatique est tenu à choisir convenablement des outils de commandes spécifiques qui permettent de compenser les effets de frottement. Or, ces outils peuvent s'avérer inefficaces, s'ils ne sont pas combinés avec une étude exhaustive des caractéristiques (comportement et paramètres imposants) de frottement; pour en savoir, justement, davantage sur la manière d'annuler son effet.

¹ Comme les alliages métalliques quasicristallins.

Mandat de la thèse

Notre travail, présenté dans le cadre de cette thèse, est consacré à l'étude de la *commande des systèmes soumis au frottement*. Certes, notre but n'est pas de trouver des mécanismes dépourvus de frottement (un tel travail est sans doute le rôle des ingénieurs et chercheurs mécaniciens); mais plutôt, de faire en sorte que le frottement soit anéanti artificiellement. Puis, nous créons ainsi un système asservi d'une meilleure qualité (précision et performance).

Notre mandat consiste ainsi à élaborer une démarche générale de *compensation de frottement* par un système de contrôle de force et de position et d'observation de frottement en boucle fermée. Nous suggérons que cette compensation soit basée sur un modèle explicite qui reproduit les caractéristiques de frottement avec précision.

D'abord, la technique de compensation de frottement par un observateur en boucle fermée permet : (a) d'annuler l'effet de perturbation due au frottement pour stabiliser le système mécanique vis-à-vis de cet effet, et améliorer ses conditions (oscillation, retard et temps de montée) pendant l'opération; (b) de rendre le comportement du système plus robuste vis-à-vis des variations de cette perturbation de frottement. Ensuite, le contrôle de position combiné avec la technique de compensation de frottement permet de mettre en place des systèmes de mouvement précis et sans lacune (ou sans distorsion). En fait, ces deux outils de commande représentent ensemble le point culminant dans notre travail.

Finalement, le contrôle de force, que nous introduisons ici, vise à rendre le dispositif mécanique suffisamment qualifié pour assurer des opérations (ou des ordres) de forces précises, rapides et efficaces; lorsqu'il est mis à l'épreuve d'une compensation de frottement et d'un asservissement de position.

Ainsi, nous proposons tous ces éléments de contrôle ensemble pour restituer les valeurs ‘sacrées’ (de qualité et de coût) aux systèmes mécaniques utilisés dans les différentes applications industrielles et, au meilleur des cas, dans les technologies de pointe.

Justification

Évidemment, il existe déjà plusieurs travaux qui étudient l’aspect de compensation de frottement dans un contexte de contrôle de servo-système sous frottement. Les méthodes utilisées diffèrent énormément, et les résultats aussi. Il y a les méthodes simples qui utilisent les notions de la commande linéaire et les modèles statiques de frottement (ayant un nombre de paramètres réduits). Ces méthodes sont effectivement les plus utilisées puisqu’elles sont faciles à réaliser. Néanmoins, le niveau de précision dans ce cas reste relativement bas. Par contre, l’emploi des méthodes complexes, de commande adaptative ou de commande non linéaire robuste par exemple, et des modèles de frottement plus complets (par exemple, les modèles dynamiques) est opposé à des contraintes de réalisation plus sévères, et exige des conditions de stabilisation plus difficiles à justifier (et donc, plus difficiles à trouver analytiquement ou numériquement).

Ce que nous proposons dans la présente thèse peut être classé adroitement entre les deux situations que nous décrivons ci-dessus. Plus précisément, nous élaborons une approche de contrôle

- a. plus facile à réaliser (*i.e.* sans complication numérique majeure);
- b. qui utilise un modèle dynamique non linéaire de compensation de frottement très populaire (le moins que nous puissions dire);
- c. dont la preuve de stabilisation et le calcul des gains du compensateur sont fondés sur un principe clair et facile à résoudre numériquement.

Méthodologie : Élément 1 - Choix de modèle de frottement

Tout bien considéré, il est difficile de soutenir si un modèle mathématique constitue un modèle de frottement *bona fide*²; à cause de son caractère non linéaire et chaotique qui reste difficile à décrire analytiquement. Désormais, parmi les multiples modèles de frottement élaborés dans la littérature et exploités dans les différentes applications de commande, nous choisissons le *modèle de frottement de LuGre*³. Il s'agit d'un modèle *dynamique*⁴ *intégré*⁵ à six paramètres⁶ introduit par Canudas *et al.* [20]. Pourtant, ce modèle qui appartient à la famille des approches heuristiques ou empiriques n'est pas forcément le plus complet (comparé à d'autres que nous citons plus loin dans le chapitre 1). Mais, il est effectivement très populaire et très utile, pour sa simplicité relative et son caractère intégré. Faut-il croire, une fois de plus, qu'

« Une théorie n'a pas besoin d'être juste, pourvu qu'elle soit utile. »

Henri Poincaré (1854 – 1912)

pour justifier, dans notre cas, que la technique de modélisation de *LuGre* n'a pas besoin d'être exacte ni complète pour qu'elle soit encore utile aujourd'hui ? Nous estimons que la réponse à cette interrogation est simplement VRAIE !

Méthodologie : Élément 2 - Compensation de frottement par *feed-back*

Étant considéré la force de frottement comme une grandeur non mesurable, le schéma de compensation de frottement, que nous adoptons, est basé sur le modèle de *LuGre* et le

² C'est une locution d'origine latine ayant la valeur d'un adjectif au sens d'authentique.

³ Terminologie construite à partir des mots Lund et Grenoble, les noms des villes dans lesquelles se trouvent les deux laboratoires impliqués dans les travaux de recherche en rapport avec ce modèle de frottement.

⁴ C'est un modèle décrit par une équation d'état (*i.e.* équation différentielle de premier ordre) et une équation de sortie.

⁵ C'est un modèle qui intègre plusieurs propriétés et caractéristiques liées au frottement dans une formulation unique et explicite.

⁶ Ce sont les paramètres qui caractérisent ce modèle. Ils sont associés aux différents aspects du frottement (*Cf.* chapitres 1 et 2).

principe de *feed-back* appliqué sur les variables mesurables du système de mouvement (déplacement et vitesse). Cet élément de *feed-back* appliqué sur l'observateur, est supposé apporter une correction de robustesse à cette dynamique d'observation, par l'entremise d'un contrôleur dynamique linéaire judicieusement choisi (comme nous le verrons plus loin dans cette section).

Méthodologie : Élément 3 - Contrôle de position - retour de sortie dynamique

Du moment que la dynamique de position dans un servo-système quelconque peut être contenu dans une structure fortement non linéaire (comme la structure dynamique d'un robot par exemple), nous prévoyons éventuellement inclure des transformations (comme la commande linéarisante par exemple) pour simplifier (*i.e.* linéariser le plus possible) cette structure. Cette étape n'est pas forcément nécessaire si la structure du système de mouvement en question est relativement simple (ou simplement linéaire).

Toutefois, le contrôleur de position dans tous les cas est basé sur le principe de retour de sortie dynamique appliqué sur les variables mesurables (position et vitesse). Ce contrôleur est mis en place pour assurer :

- la stabilité du système en boucle fermée, y compris la dynamique d'observation de la force de frottement.
- la robustesse par rapport à l'ensemble des variations des incertitudes et des perturbations qui se produisent dans le système asservi (nous verrons leurs origines en détails dans le développement).

L'outil (mathématique) démonstratif proposé pour atteindre ces objectifs est assemblé autour des notions de base suivantes : ***interconnexion, dissipativité et optimisation***. La dynamique des erreurs en boucle fermée est modélisée par des sous-systèmes inter-connectés et caractérisés par des inégalités sur les signaux d'entrée et de sortie en terme d'énergie; dites de dissipativité. L'effet des perturbations sur la dynamique du système en boucle fermée est traité par des critères d'optimisation (par exemple, de type H_2 ou H_∞).

Outre sa simplicité, nous mettons en relief la performance de la commande linéaire par retour de sortie dynamique qui peut être associée avec un contexte multi-critère appelé, dans la littérature, problème de *synthèse multi-objective de commande (linéaire) par retour de sortie dynamique*.

Méthodologie : Élément 4 - Notion d'inégalité matricielle linéaire

Ces différents problèmes de stabilité, de robustesse, d'optimisation et de synthèse de retour de sortie (propres à la théorie de commande des systèmes) peuvent être réduits simplement à un ensemble de *problèmes standards convexes* [25] exprimés par des inégalités matricielles linéaires ou LMIs⁷ [26, 27]. La résolution de ces problèmes s'appuie sur une classe d'algorithmes, dite *du point intérieur*, extrêmement efficaces.

Méthodologie : Élément 5 - Contrôle de force

La boucle de contrôle de force constitue un artifice (*i.e.* un aspect secondaire ou complémentaire, mais qui n'est pas sans importance) dans le système asservi pour ajuster convenablement le servo-système total. En effet, un tel dispositif est, en général, asservi en position par une grandeur électrique de commande via une force mécanique. Et, si cette dernière n'est pas bien contrôlée (*i.e.* n'est pas précise), la force requise pour le mouvement désiré, dans ce cas, n'est pas sensiblement égale (comme il est souhaité généralement) à la force réelle appliquée (voir dans un système pneumatique, par exemple, où la dynamique de pression autonome et jugée lente par rapport à la dynamique de déplacement du piston dans le cylindre). La stratégie de contrôle de force comprend, dans

⁷ Une *inégalité matricielle linéaire*, ou simplement LMI, est une expression de la forme [26] :

$$\mathbf{F}(\Theta) = \mathbf{F}_0 + \Theta_1 \mathbf{F}_1 + \dots + \Theta_m \mathbf{F}_m > 0$$

où $\Theta \triangleq (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ est un vecteur de m nombres réels appelés *variables de décision*, $\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_m$ sont des matrices réelles symétriques, *i.e.*, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$; pour $n \in \mathbb{N}$. L'inégalité ' > 0 ' signifie 'définie positive', *i.e.* $\mathbf{u}^T \mathbf{F}(\Theta) \mathbf{u} > 0$ pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq 0$. Autrement dit, la plus petite valeur propre de $\mathbf{F}(\Theta)$ est positive.

ce cas, des éléments de commande non linéaire et de compensation linéaire pour assurer une dynamique suffisamment stable et robuste aussi. Par contre, cette question ne se pose pas dans le cas contraire; c'est-à-dire lorsque la dynamique de force est négligeable devant celle de position ou lorsque le contrôle se fait directement dans l'espace de mouvement (par exemple, dans le cas d'un robot équipé par un ensemble d'actionneurs électriques).

Méthodologie : Élément 6 - Applications

L'exposition de la démarche générale, que nous proposons, est argumentée par l'étude de deux cas distincts de commande de système robotique et de commande de système d'actionneur pneumatique. Mais, au lieu d'étaler de but en blanc tout le rouage de cette technique dans ces cas complexes, nous la soumettons d'abord à l'examen dans le cas simple de contrôle de mouvement d'une masse sur une surface sous frottement. Cet exemple permet d'illustrer, en effet, le maillon principal dans cette étude (*Cf.* interconnexion, dissipativité et optimisation).

Système robotique avec contact Un *système robotique* est caractérisé, en général, par une dynamique non linéaire (termes d'inertie, de force centrifuge et de force de *Coriolis* variables). En plus, l'impact de frottement vient s'ajouter dans la série de difficultés associées à l'asservissement efficace et sans complication de tel système.

Système d'actionneur pneumatique Un *système pneumatique* est caractérisé par :

- une dynamique de {force (*i.e.* pression) + position} d'ordre élevé,
- en particulier, une dynamique de pression fortement non linéaire et non stationnaire,
- une bande passante limitée,
- une faible rigidité.

En plus, cette structure dynamique est souvent perturbée par :

- la présence de frottement important,

- la variation de la pression d'alimentation,
- la variation des états thermodynamiques (comme la température).

Les conséquences de tels aspects, à défaut de stratégie de commande efficace, peuvent être observées à plus d'un niveau; par exemple [28] :

- un mauvais régime transitoire (retard et temps de réponse élevés),
- des oscillations (transitoires et permanentes),
- une dégradation de la précision,
- une instabilité imminente, et donc
- des applications très restreintes et dépourvues de grande précision.

Plan de thèse, originalité et contributions

La contribution générale dans ce travail de thèse se situe dans l'application de la commande de position et la compensation de frottement en utilisant le modèle de *LuGre* et la loi de commande linéaire par retour de sortie dynamique. En plus, nous proposons la synthèse des paramètres de la commande linéaire dynamique par l'entremise du formalisme LMI. Pour plus de détails, cette thèse se décompose en cinq parties principales :

Chapitre premier Description exhaustive des différents résultats présentés dans la littérature en rapport avec les modèles de frottement, les commandes des systèmes sous frottement, les commandes des systèmes robotiques avec contact et les commandes des actionneurs pneumatiques.

En fait, nous proposons une description élargie des principes de modélisation de frottement et une évaluation critique de ses modèles; afin de justifier le choix du modèle que nous adoptons dans notre approche. Puis, nous présentons les différentes techniques de compensation de frottement en fonction de la catégorie à laquelle appartient la commande

(de position) utilisée; pour déterminer les avantages et les inconvénients de ces techniques et ainsi argumenter la stratégie de commande que nous élaborons dans notre travail.

Chapitre deuxième Exposition des éléments de l'approche de commande des systèmes sous frottement proposée dans le cadre de cette thèse, avec une étude de cas simple de commande de mouvement d'une masse sous frottement.

Nous montrons dans ce cas l'apport de la commande linéaire par retour de sortie dynamique comparé à celui de la commande linéaire de type proportionnel-intégral (PI) (utilisé, par exemple dans [20]); en augmentant la flexibilité⁸ de l'action de commande. Cette qualité permet de résoudre plus aisément et simultanément plusieurs problèmes (comme la stabilité, la performance de la réponse transitoire et la robustesse) des systèmes asservis. En plus, nous apportons une contribution supplémentaire par rapport au problème initial en formulant la synthèse de la loi de commande par l'entremise des LMIs assurément plus efficaces et qui remplacent une résolution analytique souvent difficile à établir (ou à résoudre). Cette étude est validée par des résultats de simulation.

Chapitre troisième Étude de l'application de la commande hybride de position/force d'un système robotique de contact avec une compensation de frottement.

Nous proposons un schéma de commande hybride modifiée qui tient compte de la compensation de frottement par le modèle de *LuGre*. D'abord, nous développons dans l'étape de linéarisation une nouvelle expression de couple pré-calculé en utilisant un changement de variable inspiré de celui utilisé dans la commande adaptative indirecte des robots (introduite par Li et Slotine [29]). Ensuite, nous adaptons le système résultant (*i.e.* la dynamique de position et de compensation de frottement dans l'espace réduit de mouvement) à la formulation générale du problème, introduite dans le chapitre 2, selon le principe d'interconnexion. La formulation LMI des problèmes (de stabilisation, de robustesse et

⁸ Qui s'attribue au nombre de degré de liberté (ddl).

d'optimisation) de ces systèmes robotiques avec contact, présentée dans ce chapitre, est considérée aussi comme une nouvelle contribution. L'approche discutée dans ce chapitre est validée par des résultats expérimentaux.

Chapitre quatrième Étude de l'application de la commande de force d'un système d'actionneur pneumatique.

La technique de résolution de la commande de force des systèmes pneumatiques est basée sur une modélisation globale (*i.e.* complète et renfermant quasiment tous les aspects et caractéristiques) de ces systèmes que nous avons déjà élaborée dans des travaux préliminaires [30, 31, 32, 33]. Encore une fois, nous faisons appel, d'une manière originale, au formalisme LMI pour accomplir cette étape de contrôle des systèmes pneumatiques. En plus, nous proposons un terme de compensation non linéaire atténuante pour réduire l'effet de certaines perturbations d'amplitudes non bornées *a priori*; qui sont inévitables, en particulier, dans le schéma de contrôle de position d'un actionneur pneumatique (discuté dans le chapitre 5). L'approche discutée dans ce chapitre est validée par des résultats expérimentaux.

Chapitre cinquième Étude de l'application de la commande de position d'un système d'actionneur pneumatique avec compensation de frottement.

En respectant le schéma unifié de la commande de position et de la compensation de frottement par l'observateur dynamique de *LuGre*, nous considérons le cas complexe de système de frottement incertain (variation des paramètres de frottement de *LuGre*) et de perturbations exogènes liées à la dynamique de force non négligeable dans ce cas. Nous élaborons une technique de résolution qui respecte les principes intrinsèques de stabilisation et de robustesse (*i.e.* interconnexion, dissipativité et optimisation) annoncés dans le chapitre 2, en dépit de la complexité accrue du problème dans ce cas. Nous proposons en effet une formulation LMI qui permet de résoudre le problème d'une manière

aussi efficace. L'approche discutée dans ce chapitre est validée par des résultats expérimentaux. Nous soulignons donc que l'originalité globale de ce travail se situe au niveau de cette transformation du problème initial de commande de système sous frottement; en particulier, des problèmes de stabilisation et de limitations numériques soulevées dans la littérature, dans des cas de systèmes beaucoup moins complexe [20, 34], en un problème (algébrique) de résolution numérique multi-objective et convexe par le biais de LMI.

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART

« Que ton cœur ne soit pas vaniteux à cause de ce que tu connais; prends conseil auprès de l'ignorant comme auprès du savant, car on n'atteint pas les limites de l'art, et il n'existe pas d'artisan qui ait acquis la perfection. Une parole parfaite est plus cachée que la pierre verte; on la trouve pourtant au près des servantes qui travaillent sur la meule. »

L'Enseignement de Ptahhotep (2400 av. J.-C.)

1.1 Introduction

Dans le cadre de cette thèse, nous avons l'occasion d'étudier l'avancement dans la recherche et l'état de l'art lié à l'étude de *frottement*¹ de point de vue modélisation et commande des systèmes mécaniques sous frottement. Le choix du modèle de frottement, qui fait l'objet du développement dans l'observateur de frottement associé au schéma de contrôle, est justifié en fait par une étude critique d'un ensemble assez vaste de modèles de frottement présentés dans la littérature et aussi de leurs applications dans le domaine de la commande.

Les domaines auxiliaires des applications que nous discutons pour développer notre approche de commande des servo-systèmes et de compensation du frottement présentent une diversification volontairement choisie; pour décortiquer les différents aspects du frottement dans différentes situations (ou scénarios) et accommoder le principe de la commande proposée dans ces cas, selon :

- la complexité de la structure mécanique (Cf. cas de l'application des systèmes robotiques étudié dans le chapitre 3);

¹ Ou, quasi-synonyme, *friction*. Résistance qui freine (frottement en marche) ou empêche (frottement au repos) le mouvement relatif de rotation ou de translation de deux corps en contact. Le frottement est dû surtout aux irrégularités des surfaces en contact (d'après www.granddictionnaire.com).

- la variation et l'incertitude du comportement de frottement (*Cf.* cas de l'application des actionneurs pneumatiques étudié dans les chapitres 4 et 5).

Une évaluation des travaux liés à ces domaines d'applications, en rapport avec les techniques de commande, est aussi discutée dans ce chapitre.

1.2 Étude du frottement

D'emblée, nous notons que la problématique de la commande de systèmes soumis au frottement est liée à celle de la conception du modèle de frottement. Pourtant, cette technique de compensation peut être réalisée aussi sans² utiliser de modèle de frottement.

1.2.1 Modélisation du frottement

La modélisation du frottement présente une étape crucialement importante dans l'étude (analyse, réalisation et amélioration) des servo-systèmes de précision; car une représentation mathématique (*i.e.* modélisation) précise du frottement garantit une meilleure prédiction et un meilleur choix de design des systèmes mécaniques (choix de matériaux et de lubrifiant) pour faciliter la compensation du frottement [35].

Pour répertorier les différentes méthodes de modélisation de frottement, deux différentes approches ont été proposées, par Al-Bender *et al.*, selon [23] :

- la motivation de la modélisation (ou le domaine d'application);
- les techniques (ou les moyens) utilisées et leur conception.

Nous distinguons aussi d'autres manières pour classer les techniques de modélisation selon :

- la chronologie de publication des travaux (c'est la méthode de classification la plus courante);

² Contrôler des servo-systèmes soumis au frottement avec des méthodes non-basées sur un modèle; par exemple, le contrôle à gain élevé (*Cf.* sous-section §1.2.2.1 dans ce chapitre).

- la nature des corps mis en contact :
 - contact solide-solide;
 - frottement entre un fluide (liquide ou gaz) et un solide;
 - frottement dans les fluides (liquide ou gaz).

Dans notre cas, et pour agir de concert avec le contexte de la présente thèse qui est consacrée à l'étude des servo-systèmes soumis au frottement, nous excluons, dans la suite, le cas de frottement dans les fluides. Et, nous combinerons les deux premières approches de classification avec le facteur chronologique pour décrire les différents modèles de frottement.

1.2.1.1 Modélisation du frottement basée sur la physique

Berger [3] a présenté une revue de littérature assez exhaustive, sur la modélisation de frottement des systèmes dynamiques à travers une large gamme de disciplines scientifiques et d'ingénieries comprenant la mécanique des contacts, la dynamique des systèmes, le contrôle des systèmes, l'aéromécanique, la géo-mécanique et la dynamique des structures [23, 36]. Selon cette approche, nous distinguons :

Classe de modèles à l'échelle atomique et moléculaire

« [...] Les deux corps subissent des déformations, généralement très petites, qui les mettent en contact suivant une petite portion de surface : ces déformations, permanentes si les corps sont en équilibre, sont variables quand les corps glissent les uns sur les autres; il se produit alors des vibrations moléculaires et il se développe également de la chaleur ou de l'électricité, dont la production absorbe une partie du travail des forces motrices. »

Paul Appell (1855 – 1930)
Traité de mécanique rationnelle

Cette classe est développée grâce à la nano-technologie [23]. Les modèles moléculaires et atomiques sont décrits dans bon nombre de contributions; dont nous citons par exemple [37, 38].

Classe de modèles à l'échelle des plaques tectoniques

Elle est liée à la géo-mécanique et la géophysique [23]. Selon la revue présentée par Al-Bender *et al.* [23, 36] il a été conclu que les tremblements de terre peuvent être causés par des instabilités de *broutage*³ dues aux mouvements relatifs intermittents des plaques tectoniques [43]. Nous citons, entre autre, les modèles de Burridge et Knopoff [44] et de Rice et Ruina [45].

Classe de modèles à l'échelle des aspérités

Notons d'abord que les dimensions de cette classe se situent entre les deux échelles précédentes (celle des atomes et celle des plaques tectoniques). Cette classe de modèles est utilisée largement dans les domaines du contrôle et de la *tribologie*⁴ [23]. Cette classe de modèles a connue une évolution significative au fil des années; à partir de la *théorie des*

³ Appelé aussi cycle limite de broutement, en anglais, *stick-slip motion* ou *chatter*. Il s'agit d'une forme de vibration élastique associée à la formation transitoire puis la rupture (ou séparation) transitoire du contact des jonctions inter-faciales à l'échelle microscopique. Il est vu aussi comme une alternance de glissements relatifs et de repos relatifs ou de pointes et de réactions de vitesses de glissement relatives intervenant de façon spontanée pendant un processus de frottement dynamique (d'après www.granddictionnaire.com). Ce comportement vibratoire est causé par le fait que le frottement est plus important à l'arrêt que pendant le mouvement [20]. Autrement, le broutement ne se produit pas, si le frottement statique est égal ou inférieur au coefficient de frottement cinétique. Ce comportement dépend de la nature des surfaces de contact, de la dynamique du système (*i.e.* caractéristiques élastiques : inertie, rigidité et amortissement) et de la vitesse de glissement [23, 36]. Notons que les premiers travaux portant sur cette caractéristique remontent à ceux de Den Hartog [39]. Aussi, les contributions de Pfeiffer *et al.* [40, 41] ont joué un rôle important dans le développement des formulations analytiques des oscillations de broutage dans le frottement. Finalement, dans les travaux de Karnopp [42], nous retrouvons les premières tentatives de simulation numérique de frottement en mode de broutage dans les systèmes dynamiques.

⁴ Ce mot, construit étymologiquement à partir des racines grecques '*tribein*' (frotter) et '*logos*' (discours, étude), signifie science de frottement (son origine et ses effets) [23]. Proposé en 1968 par G. Salomon, il désigne la science qui étudie les phénomènes susceptibles de se produire lorsque deux corps en contact sont animés en mouvement relatif. Cette science, qui est relativement jeune, a connu des transformations fondamentales dans ses outils descriptifs et ses notions conceptuelles. Dans la littérature, nous distinguons essentiellement la *tribologie des surfaces* et la *tribologie des interfaces* (d'après www.wikipedia.org, site encyclopédique interactif).

*sphères*⁵ de Bélidor [2] jusqu'à la *théorie synthétique*⁶ de Kragelski [2]. Coulomb⁷ [46] a constaté que toutes les surfaces, même parmi les plus lisses, présentent une certaine rugosité, à la limite qui doit être microscopique; autrement dissimulent des irrégularités et des aspérités⁸ de différentes formes et dimensions. Il a aussi conclu que c'est l'interposition des aspérités qui est à l'origine des forces de frottement [46]. Plus tard, en se basant sur cette idée de la présence d'irrégularités dans les surfaces de contact et de forces interfaciales, Bowden et Tabor ont proposé un modèle qui permet d'interpréter bon nombre d'effets et de propriétés physiques tels que [1, 2, 47] :

- l'*adhésion*⁹;
- la formation et le cisaillement des micro-jonctions adhésives;
- le labourage des surfaces par les aspérités;
- la différence entre la surface réelle de contact et la surface apparente;

« Les surfaces impliquées dans un contact mécanique présentent une rugosité microscopique. Leurs contacts effectifs des surfaces impliquées mettent en jeu une population clairsemée de micro-contacts entre les aspérités des surfaces, dont l'aire totale réelle ne représente qu'une faible fraction de l'aire apparente. »

Jean-Marie Georges (2000)

Frottement, usure et lubrification : La tribologie ou science des surfaces

- et la relation entre la force de frottement et la charge.

⁵ Selon Bernard Forest de Bélidor (1693 – 1761), les surfaces sont formées d'aspérités hémisphériques régulières, celles d'une surface devant être franchies par celles de l'autre (d'après www.encyclopedie-enligne.com).

⁶ Selon Kragelski, I. V. (1908 – 1989), le frottement a une double nature, mécanico-moléculaire. Il est déterminé par la déformation en volume du matériau et par le fait de surmonter les liens adhésifs (jonctions soudées) développés entre les parties de surfaces frottantes au contact (d'après www.encyclopedie-enligne.com).

⁷ Charles-Augustin de Coulomb (1736 – 1806) n'est guère le premier chercheur mais probablement le plus célèbre dans l'histoire, parmi les anciens, qui a étudié le frottement à l'échelle des aspérités.

⁸ Ce sont les irrégularités dues à la rugosité des surfaces en contact.

⁹ Ou collage, en anglais, *stiction* (d'après www.granddictionnaire.com). Il s'agit d'un aspect de frottement au démarrage. En dehors des interactions de type mécanique, ils existent des interactions de type moléculaire. Le rapprochement des atomes de deux solides, favorisé par une déformation plastique des micro-contacts, permet à des forces d'attraction moléculaire d'agir à travers l'interface; contribuant à la cohésion des solides et la création de jonctions adhésives [48]. Bien que l'adhérence résulte essentiellement de forces moléculaires limitées à l'interface, les propriétés mécaniques du matériau influence le coefficient d'adhérence.

Pour récapituler, le frottement est représenté par le paradigme physique suivant : une paire de surfaces face à face ayant des brins (ou lamelles) élastiques, considérés comme des ressorts. Le frottement se manifeste au niveau des contacts de ces brins [49]; selon les scénarios suivants :

- Lorsque des forces tangentielles sont appliquées, les brins se déforment.
- Lorsque la déformation des brins est suffisamment grande, les brins commencent à glisser [49].

En se basant sur cette idée, Haessig et Friedland ont développé un modèle de *brin*¹⁰ pour simuler le frottement en *pré-glisserment*¹¹ et en *glissement*¹² [50].

1.2.1.2 Techniques de modélisation du frottement

Al-Bender *et al.* ont distingué deux méthodes de modélisation : l'approche théorique et l'approche expérimentale [23].

¹⁰ Appelé aussi modèle de lame, en anglais, *bristle model*. Il s'agit d'un modèle décrivant statistiquement le comportement des brins, à l'échelle microscopique, au niveau des surfaces de contact; la distance entre les brins est définie par une variable aléatoire [50].

¹¹ Pendant le régime des déplacements microscopiques, ou encore micro-glisserment, en anglais, *pre-sliding regime*, les forces adhésives (ou de stiction) au niveau des contacts des aspérités sont dominantes [23, 36, 51]. La force résultante de frottement apparaît comme une fonction du déplacement et non pas de la vitesse. En effet, les jonctions des aspérités se déforment 'élasto-plastiquement' en fonction de leur charge individuelle et se comportent ainsi comme des ressorts non linéaires [52]. Lorsque la vitesse passe par zéro, la direction du mouvement est inversée et toutes les aspérités actives sont relaxées et rechargées dans la nouvelle direction de mouvement [23]. D'une autre manière, le micro-glisserment peut être vu comme une distribution aléatoire des contacts des aspérités dont chacun d'entre eux obéit aux lois de frottement de *Coulomb* [53, 54].

¹² Pendant la phase de micro-glisserment, la force de frottement augmente jusqu'à atteindre une valeur maximale; dite *force de décrochage*. Les déformations des lames augmentent de plus en plus; dont les jonctions finissent par se détacher; donnant naissance ainsi au régime des macro-déplacements, ou simplement de glissement, en anglais, *sliding regime* [23, 36, 51]. Cette phase est caractérisée par un processus continu de formation et de détachement complet des jonctions. La force de frottement dépend abondamment de la vitesse de glissement, aussi de la topographie des surfaces et des propriétés dynamiques (comme la rigidité tangentielle) des aspérités [23].

Approche théorique ou exacte

Par cette approche, le concepteur entend proposer une description microscopique des phénomènes physiques ‘internes’ liés aux forces d’interaction des aspérités; quoique, les modèles, qui y sont déduits, soient faits pour étudier (simuler et analyser) le phénomène de frottement d’une manière macroscopique [23]. Or, le comportement macroscopique du modèle peut varier qualitativement selon le choix des paramètres du micro-processus [23]. Nous signalons, tout de même, que l’utilisation de cette approche reste populaire dans les domaines de la tribologie [36, 55], de frottement atomique [37, 38] et aussi de la géo-mécanique [43, 44].

Approche heuristique ou empirique

Elle étudie le phénomène ‘à partir de rien’, ou à la limite, à partir des considérations ‘externes’ du système [23]. En fait, l’idée est de déterminer quel modèle peut correspondre au comportement macroscopique du frottement.

« Le frottement à l’échelle macroscopique est [...] un phénomène complexe, jamais assimilable à un processus simple ou à une succession de processus simples, même en se bornant à des corps physiquement et chimiquement mieux définis que les matériaux industriels. Il doit être considéré comme le résultat statistique de divers phénomènes thermodynamiques élémentaires agissant simultanément en de nombreux points des couches superficielles ou sub-superficielles. »

D’après www.wikipedia.org

Le but dans ces modèles est de représenter possiblement le plus de propriétés de frottement dans une formulation simple, réduite, complète et avec un minimum de paramètres facilement identifiables [23]. Il existe aussi des modèles complexes qui peuvent atteindre le niveau de pouvoir de prédiction des modèles théoriques exacts, mais qui restent tout de même heuristiques de point de vue conception. Cette approche est appropriée pour mettre en place des modèles de simulations rapides [22, 23] et pour des fins de contrôle [3, 24].

1.2.1.3 Modèles de frottement

La quasi-totalité des modèles construits pour des fins de contrôle sont empiriques et obtenus par des techniques heuristiques. Ils sont très nombreux et sont généralement choisis pour être pertinents une fois utilisés en temps réel. Les modèles les plus classiques sont ceux des frottements élémentaires décrivant la force de frottement comme une fonction de la vitesse (par exemple, le modèle de *Coulomb*¹³, le modèle de frottement *visqueux*¹⁴, *etc.*). Par contre, pendant les dernières décennies, la caractérisation du frottement et sa modélisation ont connu une nette progression en combinant plusieurs propriétés dans un même modèle [20, 22]. Nous décomposons l'ensemble des modèles décrits dans cette partie selon leurs caractéristiques temporelles, pour obtenir :

- les modèles statiques et quasi-statiques,
- les modèles dynamiques.

Modèles statiques et quasi-statiques

Les premiers modèles classiques de frottement sont décrits par des fonctions statiques dissipatives entre la vitesse et la force de frottement et qui dépendent du signe de la vitesse. Parmi lesquels, nous retrouvons le frottement statique¹⁵, le frottement de *Coulomb* [24, 39] et le frottement visqueux [50]. Un autre modèle consiste en la superposition de ces frottements élémentaires. Il y a lieu de noter aussi le modèle de *Karnopp* [42] et le *modèle de commutation*¹⁶ [56].

Toutefois, plusieurs propriétés, qui sont observées dans les systèmes sous frottement, ne peuvent pas être décrites par des modèles (macroscopiques) statiques. En réalité, le frot-

¹³ Ou frottement solide, en anglais, *dry friction*.

¹⁴ Ou frottement fluide pur ou parfait, ou encore frottement hydrodynamique, en anglais, *viscous friction* [1, 2]; c'est une forme de frottement assimilé au freinage visqueux ou rhéologique d'un fluide (d'après www.granddictionnaire.com).

¹⁵ Force tangentielle seuil nécessaire à la mise en glissement d'un solide sur une surface [3].

¹⁶ En anglais, *switching model*; il s'agit d'une variante du modèle de *Karnopp*.

tement n'est pas une réponse instantanée qui peut être représentée simplement sous forme de changement de vitesse. Outre cela, le frottement est caractérisé par une dynamique interne, qui fait l'objet [22, 57], entre autre :

- de l'effet de *Stribeck*¹⁷,
- du mouvement de broutage,
- du déplacement de pré-glissement,
- de l'effet de *Dahl*¹⁸,
- de l'*hystérésis*¹⁹.

En plus, la plupart des compensations de frottement basées sur des fonctions statiques échouent à vitesse réduite. Par exemple, le modèle de frottement de *Coulomb* est discontinu et peut causer des problèmes dans certaines applications; dont le signal de commande devient discontinu et des effets de vibrations apparaissent à vitesse réduite. Pour toutes

¹⁷ Ou, simplement, effet *Stribeck*; c'est une situation transitoire dans laquelle le frottement diminue à partir de la force statique pour atteindre le niveau de frottement de *Coulomb*, pour des vitesses réduites et croissantes; selon une courbe particulière généralement de type exponentielle (dite, en anglais, *downward bend*). À leur rupture, les jonctions des aspérités se comportent comme un ressort de raideur négative [58]. Aussi dans le cas de frottement lubrifié, cet effet est dû à l'établissement de pression hydrodynamique pendant l'affaiblissement de la vitesse [23, 36]. Cette relation particulière du frottement en fonction de la vitesse dépend des propriétés des matériaux, de la température et de l'usure des surfaces de contact [1, 2, 36]. Cette situation peut avoir un effet déstabilisant à vitesses très réduites. En boucle fermée, des gains extrêmement négatifs (proportionnels à la vitesse) sont nécessaires pour stabiliser localement le système à vitesse proche de zéro; par contre des gains positifs réduits suffisent pour stabiliser le système. Historiquement, la découverte de cette caractéristique n'est pas tout-à-fait récente. Elle a été détectée dans les expériences de Mc Kee [59] et a été exprimée par la formule exponentielle empirique de Buckingham dans [59].

¹⁸ L'effet *Dahl* est référé au micro-mouvement observé entre les surfaces de contact pendant le décrochage. Il s'agit d'une description microscopique du comportement élastique pendant les changements de signe de la vitesse [60].

¹⁹ Nous distinguons deux types d'hystérésis :

- Hystérésis (ou mémoire) de frottement en fonction de la vitesse, en anglais, *frictional lag*, *time lag* ou encore *frictional memory*; liée au frottement lubrifié [61]. Elle définit le temps de réaction (entre la vitesse et la force de frottement) requis pour modifier l'épaisseur du film lubrifiant [23]. Le même effet est observé dans les expériences de frottement sec [55]. La force de frottement est plus élevée pendant l'accélération que la décélération.
- Hystérésis de force de frottement en fonction du déplacement; c'est une caractéristique du frottement sec en pré-glissement déterminé par la rupture des contacts adhésifs [23]. La forme de la fonction d'hystérésis, dans ce cas, est déterminée par la distribution des hauteurs des aspérités, la rigidité tangentielle et la rigidité normale.

ces raisons, ce modèle reste peu efficace et assez souvent critiqué dans les approches de commande des systèmes.

Un modèle plus élaboré, présenté dans [24], considère l'effet *Stribeck* en utilisant une approximation à vitesse réduite. Mais, la force de frottement est toujours exprimée par une fonction discontinue à l'origine laissant échapper ainsi la description du régime de pré-glisserment. Par contre, certains chercheurs ont étudié exclusivement le comportement de pré-glisserment caractérisé par de faibles amplitudes de glissement²⁰ et de roulement²¹, comme dans [19]. Ils ont décrit le comportement de frottement dans un régime de pré-glisserment quasi-statique. Et, parmi ces extensions de modèles, nous retrouvons le *modèle cinétique* de frottement²² qui tient compte de l'effet *Stribeck* et du broutage [49]. Il est aussi important de noter, dans ce cadre, les travaux qui ont porté particulièrement sur la représentation mathématique de l'hystérésis en utilisant des modèles appropriés comme celui de *Preisach* [62].

Dans une tentative approchant la description dynamique des différents aspects de frottement, Armstrong-Hélouvry *et al.* ont proposé un modèle de frottement à sept paramètres [22, 24] pour des applications de contrôle. Ce modèle est présenté comme une combinaison du frottement de glissement et des composantes temporelles pour les frottements de *stiction* et de *Stribeck*. L'ensemble est exprimé par des équations séparées et une fonction de commutation. Cette description inclut le frottement de *Coulomb*, le frottement visqueux, le frottement de *Stribeck* avec une fonction mémoire et le frottement d'adhésion variant dans le temps; mais pas le pré-glisserment. En plus, la commutation entre les deux régimes (d'adhésion et de glissement) est physiquement inappropriée et présente des obstacles insurmontables lors de l'implémentation [51]. Étant donné le grand nombre de

²⁰ Frottement de glissement ou résistance au glissement, en anglais, *sliding friction*, force résistant au mouvement de glissement, naissant entre les surfaces de deux corps en contact (d'après www.granddictionnaire.com).

²¹ Frottement de roulement ou résistance au roulement, en anglais, *rolling friction*, force résistant au mouvement de roulement, naissant entre les surfaces de deux corps en contact (d'après www.granddictionnaire.com).

²² En anglais, *kinetic friction model* (KFM).

paramètres et la non linéarité du système, l'autre inconvénient dans l'utilisation de ce modèle réside au niveau de la difficulté d'assurer une procédure d'identification efficace de ses paramètres [3].

Modèles dynamiques de frottement

Notons d'abord que le comportement dynamique²³ de frottement est une conséquence directe du caractère non stationnaire des vitesses, des variations de la force de *décrochage*²⁴, du broutement et du mouvement de pré-glissement [20, 22]. Cette dynamique est généralement présentée comme une combinaison d'effets distincts, comme l'effet *Dahl*, l'effet *Stribeck* et le comportement d'hystérésis qui se manifestent à vitesse réduite [3, 20, 22]. Voici une description des modèles dynamiques présentés dans l'ordre chronologique.

Premiers modèles dynamiques Selon la revue de littérature présentée dans [3], il faut remonter jusqu'aux années 1940 et par la suite attendre la fin des années 1950 pour déceler les premières tentatives qui mettent en œuvre le rôle de l'aspect dynamique dans le frottement, respectivement dans les travaux de Sampson *et al.* [66] et de Rabinowicz [67]. Dans ces modèles, le frottement n'est pas seulement décrit en fonction de la vitesse mais aussi en fonction de l'accélération apparente. Parmi les propriétés les plus connues, qui sont attribuées dans ces modèles, nous retrouvons celle de la pente négative de la courbe de frottement (*i.e.* effet *Stribeck*). Ensuite, Hunt *et al.* [68] ont conclu, par des expériences spécifiques, que la vitesse n'est pas le seul facteur qui justifie tous les effets observés sur le frottement.

²³ Frottement dynamique ou, quasi-synonyme, frottement cinétique; c'est le frottement entre deux surfaces en mouvement relatif, ou la force requise pour maintenir le solide en mouvement [3].

²⁴ Ou force de décollement, en anglais, *break-away*; c'est la force critique requise pour vaincre la force statique et initier un mouvement. Elle varie en fonction du déplacement microscopique [63] et diminue avec l'accroissement de la force externe appliquée [64, 65]. Lorsque la force tangentielle appliquée est inférieure à cette force critique, un déplacement microscopique proportionnel à la force appliquée se produit, dû à la déformation des aspérités qui sont considérées comme des ressorts. Une fois, la force atteint et dépasse le point critique de décrochage, les jonctions des aspérités se détachent et le régime de glissement commence. Le déplacement de décollement dépend des caractéristiques du contact et de la texture de la surface (topographie, dureté et métallurgie de la couche externe) [51].

À la fin des années 1960, Dahl a proposé un modèle²⁵ dynamique inspiré du comportement d'un ressort lorsque la vitesse relative des surfaces en contact passe par zéro [19]. Ce modèle, présenté comme une approximation du comportement de pré-glissement, est formé essentiellement du frottement de *Coulomb* associé à une hystérèse décrite au voisinage de la vitesse nulle (*i.e.* lorsque le mouvement change de direction). Il s'agit d'une régularisation du frottement de *Coulomb* à vitesse réduite [19]. Des critiques, qui s'imposent par rapport à ce modèle, concernent par exemple l'existence et l'unicité de la solution et la présence de l'effet d'hystérésis [69]. Aussi, le modèle de *Dahl* n'inclut pas l'effet *Striebeck* ni l'effet de *stiction*. Bliman et Sorine ont développé une structure dynamique de frottement connue sous le nom de modèle de *Bliman-Sorine* [70, 71] et représentée par un modèle d'état de *Dahl* d'ordre 2 incluant l'adhésion. Cette formulation revêt malheureusement un aspect oscillatoire incohérent. Aussi, l'effet *Striebeck* dans ce modèle est uniquement transitoire (*i.e.* qui apparaît juste après le changement de signe de la vitesse et puis il disparaît de la caractéristique de frottement à l'équilibre). Finalement, il faut noter que le modèle de *Sorine* ne reproduit pas la propriété de temps de réaction de frottement [60].

Vers le milieu des années 1990, les travaux se sont multipliés impliquant des regroupements de chercheurs, académiciens et ingénieurs. Leur but est de trouver des modèles de plus en plus généralisés mettant en exergue plus de propriétés et de caractéristiques liées au frottement. De Velde et Baets ont développé une approche mathématique et numérique qui modélise en particulier le broutement pendant la décélération du mouvement [72]. Ils ont montré que cet aspect est possible uniquement pour les systèmes ayant une rigidité élevée [72]. Néanmoins, cette conclusion se contrarie à celle obtenue par Dupont dans [73].

Nous tenons à préciser que tous ces modèles sont souvent désignés comme des modèles '*intégrés*', car ils intègrent simplement plusieurs phénomènes de frottement dans une seule

²⁵ Le modèle de *Dahl* a été utilisé initialement comme modèle standard de simulation des systèmes à friction dans l'industrie aérospatiale.

formulation [23]. Dans la partie suivante, nous évaluerons un autre modèle dynamique intégré de frottement; connu sous le nom de modèle de *LuGre* [20]. D'une part, ce modèle est apparu, sous sa propre forme²⁶ très connue aujourd'hui, (chronologiquement) après tous les autres modèles cités ci-haut. D'autre part, ces derniers sont des particularités vis-à-vis du modèle de *LuGre*; chacun d'entre eux peut être vu comme un *pistillum* incontournable dans la construction de ce modèle (ou en d'autres mots, comme un 'embryon vital dans l'arbre généalogique²⁷ du modèle de *LuGre*'). De cette manière, oserions-nous qualifier tous ces modèles de 'pré-*LuGre*' ?

Modèle de *LuGre* (Lund-Grenoble) Suite à une collaboration entre l'Institut de Technologie de Lund en Suède et le Laboratoire d'Automatique de Grenoble en France, Canudas *et al.* ont établi un modèle basé sur l'interprétation des brins²⁸ pour des applications de contrôle [20, 49]. Dans ce modèle, la force de frottement macroscopique est interprétée comme la résultante de toutes les forces de frottement microscopiques agissant individuellement sur les micro-contacts (*i.e.* les micro-jonctions des aspérités) [48]. La résistance au glissement a pour origine les interactions entre les aspérités où se produisent des phénomènes de dissipation d'énergie pendant les différents stades de la formation et de la séparation des micro-contacts. Le modèle de *LuGre* ressemble à celui de *Dahl* de premier ordre en régime de pré-glissement, et est considéré comme une extension de ce dernier incluant des effets particuliers comme celui de *Stribeck* en régime de glissement [35]. En tout, ce modèle exhibe un ensemble de comportements variés de frottement; comme la dépendance de la vitesse et de l'accélération, l'effet d'hystérésis ou temps de réaction, l'effet de *stiction*, les oscillations de cycles limites²⁹, le déplacement de pré-glissement et

²⁶ Il s'agit d'une représentation dynamique d'un mono-état (*i.e.* équation différentielle de premier ordre) augmentée d'une équation statique de sortie (*Cf.* sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2).

²⁷ Dans un langage emprunté à la science de l'hérédité (ou génétique).

²⁸ Il appartient donc à la classe de modèles à l'échelle des aspérités.

²⁹ Le comportement oscillatoire persistant lié au frottement est dû à une combinaison de la différence dans le frottement statique et le frottement de *Coulomb* et de l'action intégrale dans une boucle de contrôle [74, 75]. Ce phénomène est aussi couplé avec l'effet de pompage.

la force variable de décrochage; qui sont largement validés dans plusieurs expériences et travaux publiés [3, 20].

Le modèle de *LuGre* est caractérisé par six paramètres, *i.e.* un de moins que celui d'*Armstrong* introduit dans [24], et n'utilise aucune fonction de commutation, comme c'est le cas dans le modèle d'*Armstrong*. Donc, il est relativement plus facile à identifier et à implémenter. En effet, il est très populaire et considéré parmi les modèles microscopiques les plus sollicités pour des fins de servo-contrôle [49]. L'investigation (d'analyse et d'utilisation) méticuleuse de ce modèle est constatée dans plusieurs publications; dont nous citons, à titre indicatif, [13, 49, 76].

Modèles de 'post-*LuGre*' Nous proposons ce qualificatif pour désigner les modèles dynamiques développés (chronologiquement) après le modèle de *LuGre*. Comme tout autre représentation numérique, le modèle de *LuGre* présente quelques lacunes dans la description de certaines spécifications du frottement. La forme d'hystérésis dans la courbe de transition de la force de frottement en fonction du déplacement, obtenue avec le modèle de *LuGre*, ne correspond pas au vrai comportement transitoire de cette caractéristique [51]. En réalité, le modèle de *LuGre* y dispose encore de peu de degrés de liberté par rapport au nombre de propriétés physiques distinctes à modéliser [77]. Une étude exhaustive qui montre une critique de la modélisation de *LuGre* est donnée dans [3].

Récemment, d'autres modèles plus élaborés sont proposés dans la littérature [23, 36], pour couvrir les caractéristiques de frottement d'une manière plus complète et incorporer les phénomènes complexes de la phase de pré-glissement comme la *stiction* et l'hystérésis dans toutes ses formes. Ils généralisent, presque tous, le modèle de *LuGre*. Nous citons :

- le modèle élasto-plastique [35],
- le modèle de *Leuven* [51, 78],
- le modèle de frottement de glissement généralisé de *Maxwell*³⁰ [54, 78].

³⁰ En anglais, *generalized Maxwell-slip* (GMS), il représente un modèle multi-états, référant au nombre de variables d'états internes caractérisant le modèle.

Néanmoins, tout ceci ne nous empêche guère de consentir que le modèle de *LuGre* reste d'un 'bon' niveau de 'fidélité' et de complémentarité pour tenir compte des propriétés du frottement. Il représente en effet un potentiel de taille grâce à son approche unifiée lorsqu'il est combiné avec un schéma de contrôle dans un modèle dynamique. Nous y ajoutons, en outre, sa simplicité (facilité d'implémentation) comparativement aux modèles cités ci-dessus; c'est une qualité à partir de laquelle il tire encore sa popularité accrue dans le domaine du contrôle.

1.2.2 Commande des systèmes sous frottement

La présence de frottement dans les systèmes mécaniques rend souvent les systèmes de commande incapables de réaliser des performances de poursuite raisonnables. Ces dernières peuvent être parfois catastrophiques, avec des erreurs de suivi très élevées, des retards non négligeables et des limitations forcées de la bande passante en boucle fermée pour éviter les cycles induits dans le broutement [3, 20, 22]. Pour améliorer ces aspects, le système de contrôle doit générer un signal supplémentaire pour compenser les effets de frottement entre les surfaces en contact; d'où l'importance du rôle que peut jouer la surveillance du frottement dans le comportement dynamique des dispositifs, qu'ils soient simples ou complexes [6, 17, 79]. Et, pour mettre en place une technique de compensation de frottement réalisable dans un dispositif de servo-contrôle souvent exigeant, il faut tenir compte, en général, de certaines considérations [80] :

- La technique utilisée doit être stable.
- Elle doit être facile à utiliser dans le dispositif de commande existant; y compris la procédure d'identification des paramètres dans le cas des approches basées sur un modèle.
- Les coûts numériques (*i.e.* la capacité de mémoire numérique nécessaire pour l'implémentation) doivent être faibles le plus possible.

- La précision de la compensation doit être garantie et évidemment meilleure que celle du système non compensé.

Notons, toutefois, que les techniques de contrôle des systèmes sous frottement, qui respectent *grosso modo* ces critères, sont nombreuses et assez variées. Généralement, elles sont réparties en deux grandes catégories; les stratégies basées explicitement sur des modèles de frottement et celles non basées sur ces modèles de frottement.

Approche de compensation de frottement ‘sans modèle explicite’ Cette méthode est sollicitée lorsqu’un modèle de frottement exact ne peut pas être construit ou lorsqu’une grande précision n’est pas nécessaire. Les procédures d’identification des paramètres de frottement sont ainsi omises. Et, la structure du contrôleur est relativement simple.

Approche de compensation de frottement ‘basée sur un modèle explicite’ Elle comprend les stratégies qui sont basées sur le principe d’estimation du frottement (*i.e.* prédire le frottement réel et appliquer une action de contrôle opposée pour éliminer son effet). Nous parlons d’une annulation directe³¹ de la force de frottement. Ces techniques requièrent donc des modèles de frottement convenablement choisis (réalistes et faciles à utiliser). Elles permettent d’assurer souvent la stabilité de la réponse [73, 81] et d’améliorer aussi ses performances [24]. Néanmoins, leur succès dépend de la connaissance de la structure du modèle, de ses paramètres et de son observabilité [20].

À titre indicatif, Armstrong-Hélouvry *et al.* [22] ont proposé une revue générale de la littérature sur la tribologie et aussi la théorie de commande des systèmes sous frottement. Ils ont étudié particulièrement les options de contrôle des servo-systèmes à vitesse réduite (là où le dispositif est plus sensible aux effets de frottement) et les problèmes de vibrations dus au frottement. Ils ont pu constater l’importance des investigations des modèles empiriques et des considérations de lubrification [3].

³¹ En anglais, *feedforward cancellation*.

Nous rappelons qu'en général le frottement reste un phénomène très complexe et influencé par plusieurs facteurs; comme la température dans le milieu de contact, la durée de contact, la charge et la distance d'opération [2, 3]. Par conséquent, les méthodes de compensation 'basées sur des modèles' peuvent être biaisées :

- si le modèle de frottement choisi ne correspond pas vraiment à la situation réelle du frottement; ou
- si l'identification des paramètres de ce modèle n'est pas complètement garantie ou, à la limite, réalisée avec un taux de précision faible.

Nous pouvons distinguer ainsi les méthodes de compensation 'basées sur des modèles fixes ou exacts' et les méthodes 'basées sur des modèles inexacts ou incomplets'.

Une revue exhaustive des différentes méthodes de contrôle des systèmes soumis au frottement a été présentée dans [82]. Dans la suite, nous proposons notre propre lecture de ces travaux selon leur approche de conception (sans et avec modèle exact ou inexact).

1.2.2.1 Méthodes de compensation de frottement 'sans modèle explicite'

Sous cette catégorie se regroupent les types de contrôleurs suivants :

Commandes d'actions rapides

Elles couvrent l'ensemble des lois de commandes de hautes fréquences, non linéaires et discontinues, dont nous citons :

Action de titillement Une des méthodes les plus anciennes, utilisée pour éviter les oscillations et améliorer la précision des servo-systèmes [83, 84], consiste en l'ajout d'un

signal biaisé de haute fréquence, dit bruit de titillement³², au signal de commande [86]. Les bruits des mesures dans les systèmes peuvent servir dans ce cas comme un bruit *dither*. Ce type de signaux permet de compenser les effets de frottement de *Coulomb*, les zones mortes et les effets d'hystérésis [87].

Commande impulsive Les impulsions³³ appliquées sont des forces d'amplitudes plus grandes que celle du frottement statique [24, 88].

Commande à structure variable Les méthodes de commandes à structure variable³⁴ conventionnelles utilisées sans modèle de frottement ont souvent des performances de suivi affaiblies dans les applications de haute précision parce qu'elles ne permettent pas de compenser complètement les effets de frottement [93, 94]. En outre, l'inconvénient majeur dans l'utilisation de ce type de contrôle est lié principalement aux dommages excessifs qui peuvent être causés au niveau des actionneurs tenus en mouvement rapide et soutenu.

Commandes linéaires 'classiques'

Nous citons les contrôleurs par *feed-back* à gain élevé³⁵ qui sont considérés parmi les techniques les plus anciennes [73, 95, 96]. En particulier, dans le contrôleur PID, l'action

³² Ou signal de superposition ou effet du bruit *dither*, en anglais, *dither*; c'est un signal périodique de faible amplitude et de fréquence relativement élevée superposé au signal d'entrée du servo-système pour améliorer la résolution du système (d'après www.granddictionnaire.com) et 'lisser' les effets discontinus (par exemple ceux du frottement à vitesse réduite [84]) présents dans un processus. D'une manière générale, l'introduction d'un signal externe dans une non linéarité permet d'agir sur la fonction décrivant la non linéarité et, par conséquent, modifier le comportement oscillatoire du système [85]. La fréquence de la force de titillement est choisie suffisamment loin de la bande passante du système; tels que les effets secondaires sur la sortie du système soient minimales. Sinon, ces oscillations peuvent être supprimées par d'autres oscillations de haute fréquences [85].

³³ Action de commande impulsionnelle, d'amplitude donnée et appliquée pendant une courte durée.

³⁴ La méthodologie de commande à structure variable, en anglais, *variable structure control* (VSC), en particulier par mode de glissement, constitue une approche de commande non linéaire simple, robuste et capable de traiter les problèmes à caractère non linéaire avec des incertitudes d'implantation (dites incertitudes structurées ou paramétriques à paramètres de modèle inconnus) ou des représentations simplifiées et réduites de la dynamique du système (nous parlons, dans ce cas, d'incertitudes non structurées). Cette méthode est introduite initialement par Utkin-Drazenovic [89, 90] et généralisée par la suite dans [91, 92] selon les concepts de la stabilité au sens de *Lyapunov*.

³⁵ En anglais, *high-gain feedback*.

intégrale est souvent impliquée dans l'apparition des cycles limites indésirables de pompage³⁶ [22, 74]. Armstrong-Hélouvry [24, 81] a examiné l'impact de la rigidité du système et le contrôle PD sur la stabilité de glissement, en particulier, à vitesse réduite. Le résultat sur le niveau de précision de tels servo-contrôles reste toutefois peu reluisant.

Commandes 'non conventionnelles'

Nous distinguons deux catégories de lois de commandes relativement récentes; qui sont utilisées sans modèle paramétrique de frottement; à savoir :

Commande de réseaux de neurones Du et Nair [97] ont utilisé l'approche de réseaux de neurones³⁷ pour démêler les effets parasites du frottement. Cette technique exige cependant un volume important de calcul numérique pour l'identification et la compensation du frottement.

Commande floue L'approche de commande floue³⁸ convient parfaitement aux scénarios où aucune connaissance a priori n'est disponible au sujet des effets de frottement au niveau des joints et des contacts. Une commande linéaire, de type PID, a été conçue pour contrôler la position et compenser les frottements en utilisant un modèle de logique floue³⁹

³⁶ Terme recommandé par un organisme international, en anglais, *hunting*. État de fonctionnement d'une machine, caractérisé par une fluctuation de sa vitesse autour d'une vitesse d'équilibre correspondant à un régime permanent (d'après www.granddictionnaire.com).

³⁷ En anglais, *neural network* (NN), les réseaux de neurones artificiels offrent des solutions efficaces pour appréhender trois sources principales de difficultés en contrôle de procédés : complexité, non-linéarité et incertitude. La mise au point d'un système de commande neuronal nécessite deux phases, une phase préalable d'apprentissage au cours de laquelle sont estimés les coefficients du réseau correcteur, et une phase d'utilisation, où le correcteur, dont les coefficients sont fixés, est mis en œuvre avec le processus [98, 99].

³⁸ En anglais, *fuzzy control*. La logique floue (en anglais, *fuzzy logic*) est une technique utilisée en intelligence artificielle. Elle a été formalisée par Zadeh, L. A. (scientifique Azerbaïdjanais connu pour ses travaux en informatique et en automatique) en 1965 et a été utilisée dans des domaines aussi variés que l'automatisme et la robotique. De par sa théorie, la logique floue permet de traiter l'imprécision liée à la nécessaire caractérisation d'un procédé en vue de sa commande. Elle constitue un domaines de recherche pour palier au manque de modèles de connaissance satisfaisants utilisables en commande [100, 101].

³⁹ En anglais, *fuzzy model*.

dans [102]. Ce genre de contrôle conçu pour traiter les incertitudes causées par les effets inconnus de frottement repose sur une conception intuitive en général.

1.2.2.2 Méthodes de compensation de frottement ‘basées sur des modèles fixes’

Nous notons, d’abord, qu’il n’est pas très ingénieux d’utiliser les modèles statiques pour compenser le frottement avec des gains élevés, à cause du comportement oscillatoire inévitable dans ces cas [85]. Dans ce sens, plusieurs stratégies d’analyse et de commande de servo-systèmes sous frottement sont investies, pour atteindre des degrés de précision assez élevés sans nécessairement utiliser des gains intégrateurs excessifs ni des techniques intuitives dépourvues de preuve directe ou exacte [103]. Nous élaborons ici les modèles paramétriques connus (*i.e.* à paramètres fixes et connus) basés sur l’identification exacte de ses paramètres. Ces méthodes sont généralement précédés par une étape d’identification hors-ligne des paramètres du modèle de frottement utilisé [76]. Les résultats de cette étape dépendent *a priori* des conditions expérimentales au niveau des contacts puisque le comportement du frottement peut varier sensiblement avec ces conditions. Par conséquent, les résultats de telles techniques de compensation sont conditionnés par la phase d’identification *a priori*.

Commande linéaire Parmi l’arsenal des stratégies présentées sous le thème de compensation avec des modèles fixes, nous retenons le cas de la commande linéaire combinée avec l’observateur de *LuGre*⁴⁰ pour la compensation de frottement [13, 20, 104]. Cette méthode se distingue par rapport à toutes les autres approches, pour les raisons suivantes :

- la simplicité du contrôleur linéaire,
- les qualités⁴¹ du modèle de compensation utilisé dans ce cas.

Dans [20, 34], des contrôleurs linéaires classiques (par exemple, PD et PID filtré) sont choisis telle que la fonction de transfert, entre l’erreur d’estimation de frottement et l’er-

⁴⁰ *i.e.* utilisant un observateur basé sur le modèle de *LuGre*.

⁴¹ Voir les avantages du modèle de *LuGre* présentés dans la sous-section §1.2.1.3 dans ce chapitre.

reur de position, soit strictement réelle positive⁴², assurant ainsi la stabilité des erreurs de suivi et d'observation. La réponse obtenue, dans ce cas, est vraisemblablement précise, mais reste très lente à cause de l'atténuation excessive dans le système.

Commande non linéaire En utilisant aussi un observateur basé sur le modèle de *LuGre* pour compenser le frottement, Hirschorn et Miller [105] ont proposé un contrôleur dynamique continu développé pour une classe de système non linéaire et basé sur l'approche de *Lyapunov*, pour assurer des conditions suffisantes de stabilisation globale. Hormis, le choix des paramètres de ce contrôleur qui n'est pas *a priori* facile à réaliser (ni à justifier parfois !), cette méthode reste intéressante pour la qualité de la compensation de *LuGre* qui lui est associée.

Néanmoins, l'utilisation de l'ensemble de ces méthodes doit être, à chaque fois, combinée avec

- un choix judicieux du modèle de compensation de frottement, et aussi
- une identification précise des paramètres de ce modèle, qui peuvent désormais varier dans le temps.

Une prédiction juste du frottement, basée sur les propriétés des surfaces et des lubrifiants, représente ainsi un challenge stratégique pour ces méthodes [51].

1.2.2.3 Méthodes de compensation de frottement 'basées sur des modèles inexacts ou incomplets'

Il a été prouvé dans plusieurs travaux que les paramètres de frottement peuvent varier avec les propriétés des matériaux, les conditions de contacts (la température, la vitesse relative et la force de contact) et les conditions de lubrification [15, 34, 51, 85, 106, 107]. Par conséquent, l'identification exacte de tels paramètres n'est point facile [57]. Il faut accommoder les techniques d'identification pour évaluer efficacement le frottement. Cette

⁴² En anglais, *strictly positive real* (SPR).

évaluation est souvent difficile à entretenir; à cause du phénomène même de frottement qui est non mesurable en général. Donc, l'emploi d'une approche de compensation avec un modèle de frottement à paramètres fixes reste très perplexe et peut induire des performances assez disparates et qui varient avec la situation (conditions de mouvement et de contact). En effet, des variations paramétriques lentes dans le temps (dues, par exemple, au changement de la température) présentent un scénario idéal pour utiliser une commande adaptative [34, 108]. Par contre, des variations rapides (dues, par exemple, aux forces de contact) sont mieux compensées par une commande robuste [16, 94].

En outre, les incertitudes ne sont pas seulement dans les paramètres mais aussi dans la structure du modèle de frottement. Cette imperfection est référée à l'efficacité du modèle à interpréter les propriétés et les caractéristiques de frottement⁴³. La force de frottement estimée ne peut pas être 'exactement' égale à la force réelle. Ces différences sont nettement plus importantes dans le cas de modèles de frottement statiques discontinus que dans le cas de modèles dynamiques représentés par des équations différentielles [85].

Approche des commandes adaptatives

Cette approche est basée sur une adaptation⁴⁴ de la loi de commande et d'observation du frottement en ligne [109, 110]. Dans la littérature, cette idée est exploitée de différentes manières et sous différentes conditions; *i.e.*

⁴³ Nous rappelons ici le point qui a été amplement discuté dans ce chapitre (*Cf.* sous-section §1.2.1.2); à savoir que les modèles théoriques pouvant décrire 'avec une grande fidélité' presque tous les aspects de frottement sont très compliqués et difficiles à utiliser (formulation complexe et paramétrisation non identifiable), du moins, expérimentalement. Par contre, les modèles empiriques sont relativement plus faciles à implémenter dans un contexte de contrôle en-ligne. Mais, leurs formulations simplifiées manquent plus ou moins de 'fidélité' et n'aspirent pas malheureusement à la mise-à-nu de toutes les caractéristiques du phénomène de frottement.

⁴⁴ Il s'agit d'une approche traitant les incertitudes des modèles à paramètres constants ou lentement variant dans le temps. La commande adaptative est caractérisée par une structure de contrôle mise à jour plusieurs fois pendant l'opération, en se basant sur les mesures [92]. Nous parlons d'une commande avec estimation de paramètres en temps réel. Dans la littérature, nous distinguons deux techniques principales pour construire des commandes adaptatives : la méthode de commande adaptative avec modèle de référence (en anglais, *model-reference adaptive control* (MRAC)) et la méthode d'ajustage autonome (en anglais, *self-tuning controller* (STC)).

- utilisant les différents modèles de frottement, comme
 - l'estimation du frottement statique [111],
 - l'estimation du frottement dynamique [109];
- et utilisant les différents types de commande de position qui y sont associées, comme
 - la commande linéaire [95, 112],
 - la commande non linéaire [109, 111].

En particulier, l'usage de la commande adaptative combinée avec la modélisation dynamique de *LuGre* est discuté dans plusieurs travaux (voir, par exemple, dans [15, 104]).

Nous distinguons différentes lois d'adaptation

- soit, pour estimer uniquement un seul paramètre [14, 34, 110], comme :
 - le frottement statique dans [34],
 - le coefficient d'amortissement interne⁴⁵ dans [110];
- soit, pour estimer l'ensemble des paramètres exprimés linéairement par rapport au modèle [15, 104].

Les inconvénients de ces méthodes sont décrits dans les points suivants :

- Les conditions de stabilité du système asservi, basées sur la condition SPR dans [20, 34], sont très restrictives et difficiles à réaliser sans user, *a priori*, dans des gains élevés de la commande linéaire.
- L'usage de cette approche est souvent limité au cas de la paramétrisation linéaire du modèle.
- Les incertitudes, dues aux effets non compensés par les lois d'adaptation (voir dans [34, 104]), sont considérées comme des perturbations dans le système. Ces perturbations peuvent éventuellement déstabiliser l'algorithme d'adaptation [58].
- Les performances de la réponse transitoire peuvent être dégradées [14, 58] et aussi conditionnées par la rangeabilité⁴⁶ des paramètres [104].

⁴⁵ Noté σ_1 dans le modèle de *LuGre* (Cf. sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2).

⁴⁶ *i.e.* la précision avec laquelle la mesure d'une grandeur (ou d'un paramètre) est effectué peut varier [113].

- Il y a une explosion du nombre de conditions nécessaires (parfois trop sévères), pour garantir le succès de l'approche (*i.e.* la convergence de l'estimation) [15, 104]. Dans [15], l'absence de bruit compromet sévèrement le processus d'identification. L'extension de cette approche pour estimer les paramètres exprimés non linéairement dans le modèle de *LuGre* (par le biais de l'algorithme *min-max* [114]) n'arrange point la situation avec l'augmentation des conditions supplémentaires requises dans ce cas.
- L'intuition et le manque de preuve analytique des solutions sont souvent de mise [104].
- Sachant qu'une amélioration de la réponse du système peut être obtenue, en général, avec une meilleure initialisation de la loi adaptative et en augmentant le gain d'adaptation dans l'estimation de frottement [57]; une adaptation rapide et un grand gain d'adaptation rendent l'équation d'adaptation de frottement très raide; ce qui nécessiterait une période d'échantillonnage très petite. Or, une telle condition induit un schéma d'adaptation sensible au bruit et aux erreurs d'adaptation [115].
- La réalisation de l'approche adaptative est souvent compliquée et s'applique difficilement aux systèmes de grande accélération (mouvement rapide) [16].

Approche des commandes robustes

Cette catégorie peut se présenter comme une bonne alternative qui s'applique aisément aux processus rapides. En outre, les paramètres du modèle de frottement sont évalués simplement hors-ligne dans ce cas [16, 94]. Mais, ceci ne se fait pas à fortiori (et toujours) sans dégât. Par exemple, dans [16], un observateur de perturbation est utilisé pour éliminer les perturbations dues essentiellement aux erreurs d'estimation des paramètres dans le modèle de *LuGre*. Cet observateur comprend un filtre passe-bas, faisant en sorte que le bruit de haute fréquence est pratiquement déplacé vers le système; impliquant une détérioration de l'exécution.

La famille des commandes robustes à structure variable est illustrée dans plusieurs applications d'asservissement de mouvement et de compensation de frottement. Elle comprend :

- la commande par mode de glissement⁴⁷ [116, 117], avec ces deux versions : discontinue (formule initiale) et continue (forme équivalente),
- la commande de commutation⁴⁸ [117].

L'inconvénient majeur de l'utilisation de la commande SMC est lié au fait que les commutations rapides dans une réalisation réelle de tels contrôleurs peuvent exciter les dynamiques de hautes fréquences non modelées du système; chose qui peut altérer sévèrement les performances [117]. En effet, la commande SMC reste décidément non appropriée parce qu'elle induit beaucoup d'oscillations⁴⁹ [116], et une amplitude de signal de commande excessive est souvent nécessaire même dans le cas de la commande continue équivalente.

Approche des commandes 'heuristiques'

Elle comprend la commande floue, la commande par apprentissage et la commande neuronale qui bénéficient d'une connaissance *a priori* du modèle de frottement. Ces outils de commande suscitent plus d'intérêt comparativement à ceux utilisés sans la moindre connaissance des effets de frottement [118]. Néanmoins, avec l'amélioration des outils mathématiques de modélisation et des techniques d'estimation des paramètres des modèles de frottement, l'usage de telles approches heuristiques devient moins persuasif, d'autant plus que les résultats peuvent dépendre de plusieurs facteurs peu communs. Par exemple, pour établir une commande par apprentissage, comme dans [118], il est nécessaire d'exécuter différentes épreuves de cette commande pour chacune des trajectoires désirées. Ces trajectoires doivent être toujours périodiques. La vitesse de convergence peut être très lente parce que chaque mise à jour se produit seulement après que le système en

⁴⁷ En anglais, *sliding mode control* (SMC).

⁴⁸ En anglais, *switching control*.

⁴⁹ En anglais, *chattering*.

boucle fermée ait atteint presque l'état d'équilibre [118]. En plus, la présence de bruit dans les signaux n'arrange pas le bon usage de ces méthodes. En général, leur performance est réduite comparée à celle des commandes adaptatives ou robustes.

Combinaison des différents types de commandes

Il s'agit de l'ensemble des techniques qui utilisent plusieurs types de commandes dans le même schéma de contrôle des servo-systèmes, comme par exemple :

- la commande adaptative + la commande robuste [16, 58],
- la commande neuronale + la commande adaptative robuste [57, 119].

Cette stratégie permet d'exploiter les qualités de chaque type de commande. En particulier, elle permet d'alléger la condition de robustesse et d'atténuer éventuellement la dynamique de la commande (surtout dans le cas d'une structure variable) [57, 103]. Récemment, ce genre de technique devient de plus en plus utilisé; grâce aux progrès des outils numériques de calcul.

La loi d'adaptation est souvent utilisée pour estimer les paramètres exprimés linéairement par rapport au modèle de frottement, comme les coefficients de *Coulomb*, visqueux et statique [57, 58]. Misovec et Annaswamy [58] ont utilisé une version modifiée du modèle de *LuGre* [20] pour mettre en place un compensateur adaptatif, qui estime en plus le paramètre de *Stribeck*. Les effets de frottements dynamiques sont considérés comme une perturbation compensée par un observateur robuste de perturbation, en ajoutant une excitation persistante dans la trajectoire désirée et en considérant que les paramètres soient strictement constants [57, 58]. Cette dernière hypothèse peut avoir une conséquence négative sur le résultat, si les effets des variations de ces paramètres ne sont pas inclus dans la conception de l'observateur robuste. En plus, ce genre de technique peut exhiber des problèmes de stabilité difficiles à résoudre analytiquement. Garagic et Srinivasan [57] ont utilisé intuitivement une zone morte modifiant la loi d'adaptation pour éliminer les problèmes d'instabilité observés dans le système asservi.

1.2.3 Conclusion

Nous venons d'étudier les différents aspects de frottement qui représente une source de dégradation des servo-systèmes. Nous avons analysé dans les sections §1.2.1 et §1.2.2 les différents outils de modélisation et de compensation de cet effet. Plusieurs méthodes sont déjà développées dans la littérature. Nous avons essayé de classer toutes ces approches selon leurs caractéristiques qui les distinguent les unes des autres. Et, leur évaluation (critique) est ainsi établie dans le cadre de cette classification. Le résultat de cette évaluation descriptive représente le point de départ dans le développement des travaux de la présente thèse; de point de vue

- choix du modèle de frottement, pour l'annulation de cet effet, et aussi
- choix du schéma de la commande des servo-systèmes.

Dans la suite, nous allons élaborer particulièrement l'état de l'art de la commande des systèmes robotiques et de la commande des systèmes d'actionneurs pneumatiques; en rapport avec la compensation de frottement. Ces deux systèmes mécaniques font l'objet, en effet, de deux études spécifiques (d'asservissement et de compensation de frottement) dans le cadre de cette thèse.

1.3 Étude des systèmes robotiques

1.3.1 Généralités

L'usage des systèmes robotiques connaît aujourd'hui une affluence accrue dans presque tous les domaines industriels⁵⁰; permettant d'améliorer la qualité des produits et la perfor-

⁵⁰ En réalité, la robotisation, de nos jours, s'ouvre à toutes les activités humaines rudimentaires ou complexes (domestiques, médicales, agricoles et autres).

mance des services. De point de vue opérationnel, le type d'action d'un robot⁵¹ peut être divisé en deux catégories, à savoir [120] :

Action de mouvement libre Le robot, en particulier son effecteur (appelé aussi segment terminal, outils et préhenseur), évolue dans un espace de travail libre dépourvu de tout obstacle ou force d'action externe. Le comportement dynamique d'un tel système est abondamment étudié dans la littérature (voir, par exemple, [112, 121]).

Action de mouvement sous contrainte L'élément final du manipulateur⁵² évolue dans un milieu de contrainte⁵³ muni d'un ensemble de forces de réaction (incluant la force de frottement). En général, étant donnée une surface rigide de contact, la contrainte est décrite par une équation algébrique [122, 123]. Tout autrement, le milieu de travail peut subir une déformation sous l'influence des forces et couples appliqués. L'étude dans ce cas doit tenir compte de cette propriété par l'entremise d'une équation de couplage [124]. Cette surface de contact peut être aussi stationnaire [124, 125] ou mobile [124, 126].

Pendant un exercice quelconque du bras de robot, le basculement de la phase de mouvement libre à la phase de mouvement sous contrainte s'effectue en général en passant par des phases successives d'*approche* et de *collision* [124]. Dans toutes ces phases, l'aspect de frottement peut jouer un rôle plus ou moins dominant. D'une part, nous distinguons le frottement dans les articulations et l'ensemble des actionneurs qui régissent leurs mouvements. Cette forme de résistance a été longuement discutée dans la littérature utilisant

⁵¹ Du mot *robota* (en tchèque et dans les langues slaves), travail forcé, corvée ou travail de serf, d'esclave. En polonais *Robotnik*, le travail (d'après www.wikipedia.org). Définition de l'*International Federation on Theory of Machines and Mechanisms* (IFTOMM) dans *Terminologie pour la théorie des machines et mécanismes* (1991) : Un mécanisme piloté par une unité de commande qui réalise automatiquement des tâches telles que la manipulation, l'inspection ou l'usinage.

⁵² Définition de l'Organisation Internationale de Normalisation (ISO) dans la norme ISO 8373 (1994) intitulée *Robots manipulateurs industriels - Vocabulaire* : Une machine, un mécanisme constitué normalement d'une série de segments qui sont reliés par un joint assurant une rotation ou une translation relative entre segments, dont le but est de prendre et déplacer des objets (pièces ou outils) avec plusieurs degrés de liberté. Il peut être commandé par un opérateur, une unité de commande électronique ou un système logique (dispositif à cames, relais, câbles, etc.).

⁵³ Par opposition à un espace de travail libre, il désigne toute surface de contact, table, plate-forme, etc.

les différentes formes de modélisation et de compensation de frottement [104, 127, 128]. D'autre part, lorsqu'il y a un contact entre l'effecteur et une surface quelconque, le phénomène de frottement, dans ce cas, peut outrageusement dégrader la qualité des opérations de force et de mouvement de contact. Dans le présent travail, nous limitons notre axe de recherche à l'étude (de la commande) de mouvement et de force des systèmes robotiques en contact avec des surfaces rigides sous frottement.

1.3.2 Stratégies de commande des systèmes robotiques en position et force

À l'exception de suivi de trajectoire dans l'espace libre (dans lequel un contrôle de position du manipulateur est suffisant), il est souvent nécessaire d'assurer en plus un contrôle de force d'interaction (surtout en cas de contact effecteur-surface rigide) [121, 122, 129]. Or, ces deux types de contrôles (de force et de position) antagonistes diffèrent manifestement avec la rigidité du contact. En effet, l'opération de contrôle strict en position ou en force s'effectue aux deux extrémités du spectre de rigidité. Autrement, un servo-contrôle idéal de position représente un système infiniment rigide qui rejette toutes les perturbations de force subie. Par contre, un servo-contrôle de force exhibe une rigidité nulle et maintient une application de force désirée sans perturbation de position. Entre ces deux extrémités, un servo-contrôle combiné devient plus approprié [121].

Les premiers travaux, motivés par cette idée cruciale de modélisation et de commande de position et de force, ont été présentés dans [130, 131]. Et au fil des années, plusieurs approches ont émergé pour résoudre ce problème. Nous citons :

Commande par retour d'effort explicite Le robot est commandé en position et la mesure de force est utilisée pour corriger le signal d'entrée [132, 133].

Commande d'impédance Pour interpréter la compatibilité physique entre le robot et son milieu de contact, il est advenu de présenter le robot comme une impédance mécanique

et son environnement de contrainte comme une admittance mécanique [134, 135, 136]. Ce type de commande ne peut contrôler la force et la position qu'une à la fois (ou, autrement, ne peut pas contrôler séparément ces deux variables) [137, 134].

Commande hybride Initialement introduite par Raibert et Craig [123], cette commande a retenu l'attention de plusieurs chercheurs [120, 138, 139]. Une revue exhaustive est présentée dans [140] décrivant les débuts et l'évolution de cette approche. Elle s'approprie parfaitement au type de contact rigide entre l'effecteur et l'environnement [123]. Elle nécessite une connaissance détaillée du modèle géométrique du lieu de contact. L'idée principale de cette approche est de partitionner l'espace (articulaire⁵⁴ ou cartésien⁵⁵) en deux sous-espaces complémentaires : (a) un sous-espace associé aux degrés de libertés (*i.e.* articulations) commandés en position (*i.e.* génération des trajectoires de l'effecteur); (b) un sous-espace associé aux degrés de libertés pilotés en force (*i.e.* modulation des efforts dans les directions des contraintes) [121, 123].

Dans la suite, nous élaborons la technique de conception de système d'asservissement hybride de position/force d'un manipulateur robotique en contact avec un milieu rigide.

1.3.3 Commande hybride

1.3.3.1 Définition

Méthode où une commande exerce un contrôle exclusif sur certains degrés de liberté d'un robot, soit en position, soit en force [121, 135, 141].

⁵⁴ Espace des articulation ou espace des coordonnées généralisées.

⁵⁵ Espace de travail de l'effecteur ou espace opérationnel.

1.3.3.2 Principe et objectif

Pour contrebalancer les contraintes physiques subies par l'organe terminal, la commande hybride impose des contraintes artificielles duales au système robotique choisies de façon à obtenir [121] :

- une trajectoire (*i.e.* position de l'effecteur) désirée dans les directions libres de mouvement;
- un effort (*i.e.* force appliquée par l'effecteur) désiré dans la direction de contrainte réelle de position.

Ces deux modes de contrôles antagonistes sont subtilisés dans le même schéma regroupant l'ensemble des degrés de liberté du système. Sachant qu'un même actionneur peut agir sur plusieurs degrés de liberté, le principe de la commande hybride consiste à envoyer simultanément aux actionneurs les ordres nécessaires, émanant des contributions en position et en force [135, 139].

1.3.3.3 Méthodologies

L'expression de la commande hybride est donnée par la combinaison de deux termes [142, 143, 144, 145] :

- Le premier terme, qui répond aux exigences du mouvement, est déterminé en fonction de la projection de l'écart de position/orientation dans le sous-espace des vitesses (compatible avec le sous-espace de mouvement libre).
- Le deuxième terme, qui correspond aux spécifications de la force de contact, est déterminé en fonction de la projection de l'écart de force/couple de contact dans le sous-espace des forces/couples admissibles (compatible avec le sous-espace de contrainte).

Mills et Goldenberg [122, 138] ont développé cette approche sur un manipulateur maintenu en mouvement quasi-statique (*i.e.* les amplitudes des coordonnées généralisées et

leurs dérivées varient tant soit peu au voisinage d'un point nominal stationnaire) sous contrainte d'une surface rigide. Le système asservi est stable uniquement localement, et le découplage (entre les dynamiques de suivis en position et en force) reste, dans ce cas, approximatif. Lorsque le manipulateur opère assez loin du point de linéarisation, ses performances sont forcément dégradées.

Mais, l'approche la plus sollicitée est celle basée sur la méthode du couple pré-calculé⁵⁶ [121] et l'orthogonalisation⁵⁷ des sous-espaces de position et de force admissibles. Des commandes découplées (une dans chaque sous-espace) sont développées pour assurer la stabilité globale de l'ensemble [141]. L'approche proposée par DeSantis dans [141] convient, néanmoins, au contexte idéal de contact parfait (*i.e.* sans frottement). La stabilité n'est pas forcément garantie dans le cas de contact sous frottement.

Dans une autre perspective, les chercheurs ont développé des algorithmes de commande hybride à structure variable [139, 147]. La procédure d'ajustement des gains du contrôleur reste très difficile, à cause de la nature non linéaire du système en boucle fermée. En plus, la structure discontinue de ce type de commande compromet réellement son application [148, 149].

1.3.3.4 Effet de frottement de contact

Le frottement de contact représente un aspect physique incontournable. Il s'agit d'une forme de résistance qui provoque une force tangentielle proportionnelle à la force normale et qui agit en tant que perturbation sur la dynamique de position. Dans ce cas, les structures

⁵⁶ En anglais, *computed-torque*, commande linéarisante qui transforme l'équation différentielle généralisée du manipulateur de l'espace dynamique non linéaire dans un espace dynamique linéaire. Elle est désignée comme une approche de linéarisation globale [146]; par opposition à la linéarisation locale définie autour (*i.e.* au voisinage) d'un point de fonctionnement.

⁵⁷ Ou projection orthogonale, action de projeter l'ensemble des équations dynamiques (du manipulateur) et statiques (des contraintes) dans deux sous-espaces orthogonaux : un sous-espace commandable en position et l'autre commandable en force.

de commande qui assument habituellement un contact sans frottement sont sérieusement compromises et le système asservi devient entièrement couplé [124, 150, 151].

Pour simplifier les méthodes de la commande hybride, dans certaines applications, les auteurs supposent que les forces de frottement sont carrément négligeables;

- en se basant sur une évaluation de la quantité réelle de perturbation liée au frottement de contact comparée par rapport aux efforts nominaux développés au niveau des actionneurs [150] ou, à la limite,
- en considérant que le total des forces tangentielles appliquées au point de contact reste toujours plus grand que l'amplitude des forces de frottement statique [152, 153].

Donc, ce sont des hypothèses et des justifications expérimentales restreintes aux dispositifs utilisés et qui manquent de généralité.

En tout évidence, pour faire face à ce problème d'une façon directe, il faut justement compenser ces forces tangentielles non mesurables par l'entremise d'un estimateur approprié [124, 125, 154]. La stabilité du système en boucle fermée est, dans ce cas, sensiblement affectée par cette procédure de modélisation et compensation du frottement [151, 155]. Par exemple, dans l'analyse du comportement du dispositif mécanique soumis au frottement de *Karnopp*, nous constatons un problème d'instabilité numérique au cours de la phase d'adhésion [156]. Les gains de *feed-back* utilisés avec le modèle de frottement de *Coulomb* auraient été plus élevés [155] que ceux calculés avec un autre modèle plus complet que celui de *Coulomb* [151, 156]. En outre, les algorithmes adaptatifs peuvent offrir une meilleure performance, mais, au détriment d'une implémentation complexe [151]. Finalement, nous constatons que l'utilisation des modèles dynamiques de frottement de contact dans la modélisation et la commande des systèmes robotiques représente un challenge imposant pour améliorer l'efficacité de tels dispositifs [124].

1.4 Étude des systèmes pneumatiques

1.4.1 Motivation de la commande des systèmes pneumatiques

En général, l'actionneur⁵⁸ est utilisé comme un convertisseur d'énergie (électrique, pneumatique ou hydraulique) en force mécanique ou en effet cinétique (déplacement et vitesse). En particulier, les actionneurs pneumatiques⁵⁹ présentent certaines qualités inestimables qui peuvent être exploitées en robotique, en téléopération, et dans les milieux rigides [157]. Par contre, l'usage de ces dispositifs ne connaît pas autant de succès lorsqu'ils s'agissent des applications de grandes précisions ou des opérations très rapides; en raison des multiples difficultés liées à la physique (mécanique et thermodynamique) de ce type d'installation (dynamique fortement non linéaire, incertitude et couplage de force/position) [158, 159, 160]. En plus, le frottement est considéré comme un aspect omniprésent dans les actionneurs pneumatiques. La lubrification des différents points de contact piston-tige-charge-cylindre peut déjà affecter le niveau des pressions dans les chambres; contrairement aux dispositifs hydrauliques par exemple (dans lesquels le fluide joue un rôle important dans l'auto-lubrification des différents contacts mécaniques). Ainsi, pour accroître les possibilités de l'emploi des systèmes pneumatiques dans des applications plus exigeantes (en terme de précision et de rapidité), il faut améliorer les performances transitoires, les conditions de stabilité et la robustesse de ce type de servo-systèmes en force et en position. D'où, il est nécessaire de planifier des stratégies de commande de force (pression) et de position [161, 162, 163]. Nous avons étudié plusieurs travaux, dans la littérature, en rapport avec ce sujet particulier de contrôle des systèmes pneumatiques. Les performances des résultats présentés varient selon les classes de modèles et de commandes mises en jeu [164, 165, 166].

⁵⁸ Un dispositif mécanique, électrique, pneumatique ou hydraulique permettant d'agir sur une machine, un système, pour modifier son fonctionnement ou son état.

⁵⁹ Organe de puissance utilisant l'air comprimé comme source d'énergie (d'après www.granddictionneure.com).

1.4.2 Description des stratégies de commandes des systèmes pneumatiques

Dans cette section, nous passons en revue les principales classes de commandes appliquées aux servo-systèmes pneumatiques.

1.4.2.1 Commandes linéaires

Depuis le développement des premiers modèles mathématiques des systèmes pneumatiques [28, 167], nous pouvons déjà constater le caractère dynamique et non linéaire de ces systèmes [168, 169]. Mais, les premières techniques de commandes se basent sur le principe de linéarisation locale ou ponctuelle de ces systèmes autour du point de fonctionnement, pour utiliser des outils de commandes linéaires par *feed-back* [170, 171]. L'emploi de cette approche simpliste est répété dans plusieurs applications [172, 173, 174]. Elle est aussi combinée avec des techniques (de réglage et de modification) intuitives, pour améliorer la réponse; telles que :

- L'ajustement des gains du contrôleur linéaire (en particulier le gain intégrateur) [175], pour éliminer progressivement les cycles limites liés au broutement (effet d'oscillation dû au frottement). Or, l'erreur du système en régime permanent dépend manifestement de cette action d'ajustement.
- L'utilisation d'un *feed-back* d'accélération avec la commande PID, pour améliorer les conditions de stabilité du servo-système pneumatique [176].
- L'ajout de termes spécifiques, comme le retard, pour améliorer la robustesse vis-à-vis des signaux de bruit, en particulier, pendant les déplacements de la charge à vitesse réduite (force de frottement statique).

L'implémentation de ces modifications heuristiques reste une étape archaïque (basée sur le principe d'essai-erreur) [177].

1.4.2.2 Commandes linéarisantes

Plusieurs chercheurs ont utilisé cette technique dans la réalisation de la commande des systèmes pneumatiques, pour réduire leur complexité et annuler les non-linéarités fixes (ou parfaitement connues) [160, 178, 179]. En général, l'application de la commande linéarisante est conditionnée, au moins, par la connaissance complète du modèle mathématique du système. L'emploi de cette commande dans le cas des systèmes pneumatiques est donc contraint à certaines simplifications dans le modèle dynamique [160, 180]. Cette technique reste donc insuffisante. En effet, il faut tenir compte des incertitudes et des perturbations; dues aux variations des paramètres et aux dynamiques indéterminées du système [21, 170, 181]. Kimura *et al.* [178, 182] ont proposé une technique de linéarisation par *feed-back* avec une action de rejet de perturbation. La force de frottement peut être estimée par un observateur de frottement statique [108] ou dynamique [180, 183]. Dans [108], la dynamique d'erreur d'observation non linéaire reste localement asymptotiquement stable pourvu que la vitesse reste bornée [184]. L'autre problème à surveiller dans l'application de ce genre d'approche est la complexité du couplage force/position; qui ne peut pas être réduit aussi simplement (par hypothèse ou par le biais de la théorie des perturbations singulières comme c'est le cas avec les actionneurs électriques par exemple) [160, 176, 180]. En effet,

- la dynamique de pression est relativement lente (elle ne peut pas être négligée devant celle de la position);
- la perturbation causée par le mouvement de la partie mécanique n'est pas forcément bornée.

Dans des travaux plus récents, Xiang et Wikander [180, 183] ont proposé une méthodologie structurée, basée sur la théorie des blocs, pour représenter les multiples aspects des servo-systèmes pneumatiques. En particulier, ils ont implémenté le comportement de frottement utilisant le modèle de *LuGre* à paramètres fixes. Ces contributions ont considéré alors une modélisation dynamique de frottement qui ne tient pas compte de la variation de

ses paramètres [183]. La méthodologie de la commande proposée dans ces travaux a été basée sur le principe de la théorie quantitative de *feed-back*⁶⁰ [161]. Les performances de cette technique approchée dépendent de la précision des modèles des blocs et des résidus (ou erreurs) de linéarisation utilisées [161]. Ces résidus de linéarisations sont dus aux limitations des incertitudes du dispositif pneumatique de positionnement. Aussi, l'analyse de stabilité de l'ensemble des systèmes (dynamiques) inter-connectés reste difficile à établir dans ce cas [183].

1.4.2.3 Commandes adaptatives

Dans le même ordre d'idée, le développement de la technique de commande adaptative est assuré par le biais d'une réduction (ou approximation) de la dynamique du système [185, 186]. Le principe de cette transformation est de linéariser cette dynamique par rapport à un ensemble de paramètres (non-linéarités et incertitudes) variant dans le temps [187, 188, 189]. Le résultat de cette méthode dépend, en général, du niveau d'approximation appliquée.

1.4.2.4 Commandes robustes

La description scrupuleuse d'un système d'actionneur pneumatique assume, en général, un modèle non linéaire muni de deux types d'incertitudes [164, 190] :

- des incertitudes paramétriques (variations des états thermodynamiques, échanges thermiques, variation des conditions d'écoulement et caractéristiques dynamiques variables du frottement);
- des incertitudes non structurées ou, à la limite, sans modèle (réduction de l'ordre du système, simplification ou omission du modèle de frottement).

⁶⁰ En anglais, *quantitative feedback theory* (QFT).

Toutes ces caractéristiques font de la commande robuste le champ d'application le plus sollicité dans ce cas. En effet, plusieurs types de commandes robustes sont appliquées dans plusieurs travaux :

- commande linéaire à gains élevés [191, 192];
- contrôle de pression avec un observateur de bruit pour compenser l'influence des forces de frottement et des variations des paramètres [193, 194];
- commande rapide de *Bang Bang* [195];
- commande non linéaire, basée sur l'analyse de *Lyapunov* [196];
- commande VSC ou SMC [162, 163].

Notamment, la plupart de ces schémas de commandes usent dans des structures rapides (de hautes fréquences) à gains élevés (*i.e.* efforts excessivement élevés dans la valve). Or, les dispositifs pneumatiques sont typiquement caractérisés par des bandes passantes réduites qui limitent l'action des gains élevés [197]. En outre, les oscillations de hautes fréquences du signal de commande (*i.e.* vibrations du tiroir de la servo-valve) induisent [163, 190] :

- des problèmes de saturation; ce qui implique des signes de fatigue prématurée et de dysfonctionnement de la structure mécanique surtout dans la valve;
- des fluctuations de la pression;
- des erreurs de suivi en régime permanent.

1.4.2.5 Commandes 'sans modèle'

Une manière pour contourner majoritairement les difficultés, liées aux modèles de systèmes pneumatiques (non-linéarités et incertitudes), est de concevoir des lois de commandes qui ne nécessitent pas de connaissance du modèle explicite du système à contrôler; par exemple :

- la commande floue [198, 199],
- la commande par réseau de neurone [200].

Ce type de commande peut être aussi combiné partiellement avec les outils de commandes usuelles (commande linéaire, commande adaptative, *etc.*), pour contrebalancer certains effets non mesurables, comme le frottement [108, 201]. Néanmoins, les résultats de ce genre de méthodes n'aspirent pas à une grande amélioration de la qualité (vu l'absence totale ou partielle d'information sur le modèle du procédé); surtout dans le cas des applications de hautes précisions.

1.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude exhaustive sur les points suivants :

- la modélisation et les techniques de compensation de frottement;
- la commande des systèmes robotiques opérant sur des surfaces de contact sous frottement;
- la commande des systèmes d'actionneurs pneumatiques reconnus pour leur prépondérance du facteur frottement.

L'évaluation des différentes classes de commandes de ces systèmes est dédiée, dans l'ensemble, à un choix dominant, qui nous permet de justifier le principe de la commande que nous proposons dans le cadre de la présente thèse (voir dans les chapitres 2, 3, 4 et 5). L'objectif de notre choix répond essentiellement aux critères suivants : PRÉCISION, ROBUSTESSE et SIMPLICITÉ (le plus possible !) ..

CHAPITRE 2

ÉTUDE GÉNÉRALE DE LA COMMANDE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION

« The role of control theory, which researchers should keep in their minds, is to show what performance we can realize by control, for what kind of a dynamic object, under what situation or condition, with what kind of available information, and how we should utilize information. Control theory also indicates us what performance we cannot achieve. »

Masao Ikeda (2004)

« The control theoreticians' role may be viewed as one of developing methods that allow the control engineer to make assumptions which seem relatively natural and physically motivated. The ultimate question of the applicability of any mathematical technique to a specific physical problem will always require a "leap of faith" on the part of the engineer and the theoretician can only hope to make this leap smaller. »

John Doyle (1987)

2.1 Introduction

Les imperfections dans les servo-systèmes sont souvent causées par la présence de frottement dans les moteurs, les liaisons mécaniques, les engrenages, *etc.* Les applications industrielles dans lesquelles les problèmes de frottement sont impliqués, sont très nombreuses. Nous citons, entre autres, les robots et les actionneurs pneumatiques. Dans le domaine de la théorie de commande des systèmes, nous pouvons résumer ces problèmes typiquement liés au frottement essentiellement (et non exclusivement) dans les points suivants [3, 20, 22, 202] :

- erreurs statiques,
- retard de suivi¹,
- très fortes non linéarités dans les conditions de glissement et de collage,

¹ En anglais, *tracking lag*.

– comportement oscillatoire et parfois chaotique.

Par exemple, à vitesse réduite, le mouvement d'un dispositif sous frottement devient intermittent sous l'effet de broutement; ce qui peut induire un dépassement et un cycle limite de position ou de force d'amplitude importante. Ces inconvénients impliquent souvent des difficultés d'ordre technique et aussi économique, et justifient donc l'intérêt manifesté pour la conception de systèmes de contrôles techniquement de plus en plus efficaces et économiquement plus compétitifs pour compenser les aspects de frottement.

En effet, comme cela a été largement discuté dans le chapitre 1, les techniques de compensation doivent être basées sur un modèle de connaissance convenablement choisi qui estime les frottements généralement non mesurables et actionne la commande nécessaire pour anéantir leurs effets. En particulier, ce modèle doit, non seulement, évaluer l'impact des effets statiques du frottement (frottement sec, frottement visqueux, *etc.*), mais en plus, estimer le comportement dynamique interne du frottement [20, 203, 204].

Dans le présent chapitre, nous allons développer une démarche complète pour la compensation de frottement et la commande des servo-systèmes mécaniques en général soumis aux contraintes de frottement dynamique dans leurs milieux de contact. Pour justifier le choix de la technique de contrôle proposée dans ce travail, nous allons établir d'abord des concepts généraux et des schémas de base; qui permettront de transformer le problème initial (celui de la commande des systèmes sous frottement) sous forme de problèmes de stabilisation, de robustesse et d'optimisation dans un contexte numérique plus familier et relativement plus facile à résoudre.

Pour ce faire, nous allons d'abord modéliser les différentes parties prenantes du système (voir figure 2) par un ensemble d'équations explicites et continues. Des discussions vont compléter cette description pour évoquer les particularités des modèles de certains systèmes et la manière de les traiter. En particulier, pour l'étude du frottement, nous allons choisir le modèle dynamique et continu de *LuGre* pour les raisons que nous avons déjà

discutées dans le chapitre 1. Puis, nous allons rappeler les propriétés et les caractéristiques de ce modèle. Ensuite, nous allons présenter les éléments de commande des différentes parties des servo-systèmes; dont l'objectif principal est lié à la compensation de frottement et l'amélioration de la performance (stabilité et précision) de ces servo-systèmes. Finalement, pour illustrer les concepts mis en exergue, nous allons étudier le cas simple d'une masse en mouvement sur une surface avec frottement.

2.2 Modélisation du servo-système 'généralisé' de mouvement

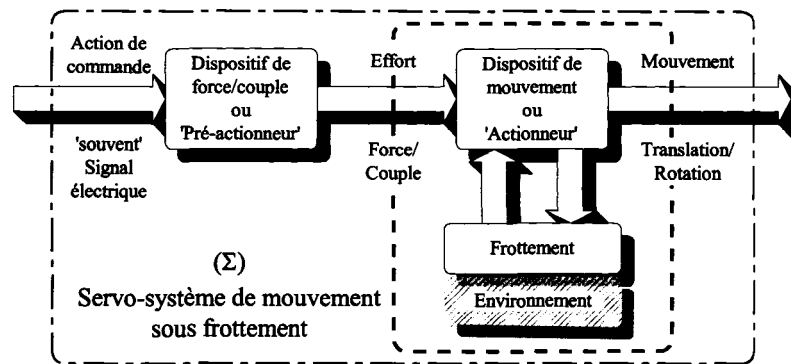


Figure 2 Représentation schématique d'un servo-système de mouvement

La représentation générale d'un servo-système dynamique de mouvement peut être décomposée en trois entités fondamentales (voir figure 2); à savoir le *pré-actionneur*, l'*actionneur* et le *milieu d'action* (ou support de mouvement) [11, 113, 205]. L'actionneur permet de convertir une action (de force/couple) en un travail cinétique de mouvement (déplacement et vitesse). Le pré-actionneur, excité par l'ordre d'une commande (qui est souvent une grandeur électrique, par exemple, une tension), fournit l'effort nécessaire pour cette action. Cet élément de force peut être, par exemple, un moteur électrique ou un distributeur pneumatique (voir tableau I). Le mouvement du dispositif mécanique se fait, en général, le long d'une ou de plusieurs surface(s) de contact; donnant naissance à des forces résistantes d'interaction ou forces de frottement. Comme exemples de servo-systèmes dy-

namiques, nous citons (voir tableau I) les systèmes robotiques, les servo-moteurs électriques, les actionneurs pneumatiques et les roues de véhicules.

Tableau I

Exemples de servo-systèmes de mouvement avec frottement

Système (Σ)			Signal (ou variable)	
Système de force	Système de mouvement	Lieu de frottement	Force/couple	Mouvement
Moteur	Robot	Surface de contrainte, articulation	τ : couple	q, \dot{q} : coordonnées généralisées
Valve/cylindre	Vérin/charge	Surface d'appui, parois du cylindre, joints	F : force	x, \dot{x} : déplacement, vitesse
Moteur/transmission	Roue de véhicule	Route	τ : couple	θ, ω : angle, vitesse d'Euler

2.2.1 Modélisation du système d'action (ou de force)

Le comportement dynamique du dispositif de force (voir figure 2) est exprimé en général par la formulation suivante :

$$(\Sigma_{\text{act.}}) : \dot{F} = \mathcal{F}_{\text{act.}}(F, u, t) \quad (2.1)$$

F désigne le vecteur des couples/forces actifs(ves) qui génèrent le mouvement, \dot{F} sa dérivée par rapport au temps, u le vecteur de commande appliquée sur le système de force et t la variable temporelle. $\mathcal{F}_{\text{act.}}$ est, en général, une fonction vectorielle explicite continue par rapport à ces variables. Le comportement temporel des systèmes de force peut varier d'un dispositif à un autre. En fait, pour distinguer ces systèmes entre eux, il importe de les caractériser en fonction de leur capacité de couplage avec la dynamique du dispositif de mouvement (voir tableau I). Ce couplage peut être :

- soit, simple ou direct; par exemple dans le cas des moteurs à courant continu;

- soit, complexe (non linéaire et non stationnaire); par exemple dans le cas des actionneurs pneumatiques.

Dans l'ensemble, nous pouvons distinguer trois grandes familles de ces systèmes :

- i/ les systèmes statiques ou quasi-statiques;
- ii/ les systèmes dynamiques nominaux ou fixes (*i.e.* à paramètres fixes);
- iii/ les systèmes dynamiques incertains ou variant dans le temps (*i.e.* à paramètres incertains).

Les systèmes regroupés sous la première catégorie sont caractérisés par des relations d'entrées-sorties algébriques constantes, linéaires ou encore non linéaires. Pour illustrer cette classe de systèmes, nous citons le cas d'un moteur à courant continu ayant en général une caractéristique dynamique de la partie électrique suffisamment rapide pour qu'elle soit considérée simplement négligeable par rapport au modèle dynamique du robot par exemple [206].

Les autres catégories de systèmes de force/couple sont caractérisées par des relations d'entrées-sorties linéaires ou non linéaires non négligeables; dont la caractéristique temporelle est de même ordre de grandeur que celle du mouvement. Nous citons, par exemple, le cas de système pneumatique [207]. Ce dernier est caractérisé (*Cf.* chapitres 4 et 5) par une dynamique de pression non linéaire et lente (ou dominante). En outre, en considérant des hypothèses très restrictives, la relation dynamique de ce système peut être assimilée, d'une manière approximative (dans un contexte idéal) à un modèle dynamique nominal [159, 178, 180]. Dans le cas contraire, ces conditions doivent être relaxées pour représenter le modèle explicitement en fonction des incertitudes et des perturbations (bornées et/ou non bornées *a priori*) et pour exprimer les différentes propriétés et caractéristiques du dispositif mis en place. En effet, comme nous le verrons dans le chapitre 4, les servosystèmes pneumatiques sont décrits par des modèles non linéaires à paramètres incertains, à cause de leurs propriétés intrinsèques (compressibilité de l'air et caractéristiques de la valve).

2.2.2 Modélisation du système de mouvement

Considérons $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{pmatrix}^T$ le vecteur des grandeurs cinétiques d'un dispositif mécanique de mouvement sur une ou plusieurs surfaces de contact; *i.e.* x le vecteur des déplacements (positions/orientations) et \dot{x} le vecteur des vitesses (linéaires/angulaires). Alors, nous décrivons son modèle de mouvement par l'ensemble des équations suivantes :

$$(\Sigma_{\text{mvt.}}) : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_{\text{lib.}}(\mathbf{x}, F, f_f, t) \\ 0 = \mathcal{G}_{\text{ctr.}}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où F désigne le vecteur des couples/forces actifs(ves) qui génèrent le mouvement, f_f désigne le vecteur des forces de frottement et t la variable temporelle. $\mathcal{F}_{\text{lib.}}$ et $\mathcal{G}_{\text{ctr.}}$ sont, en général, des fonctions vectorielles explicites continues par rapport à leurs variables respectives. Dans cette représentation, $\mathcal{F}_{\text{lib.}}$ correspond à l'ensemble des équations dynamiques de mouvement libre du système, et $\mathcal{G}_{\text{ctr.}}$ (*i.e.* un ensemble d'équations algébriques) décrit l'ensemble des contraintes qui lient les parties mobiles du dispositif mécanique aux surfaces de contact.

Dans certains cas (comme dans le mouvement d'un robot avec contact, *Cf.* chapitre 3), nous admettons que le système de mouvement (2.2) peut être réduit, en utilisant une transformation appropriée (qui dépend de l'équation de contrainte et de la nature du mouvement sur les surfaces de contact), en un seul type d'équations dynamiques exprimées exclusivement dans l'espace de mouvement selon :

$$(\Sigma_{\text{mvt.}}) : \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_{\text{mvt.}}(\mathbf{x}, F, f_f, t) \quad (2.3)$$

2.2.3 Modélisation du système de frottement

2.2.3.1 Généralisation

L'ensemble des forces de frottement dynamique et statique mises en jeu sont, en général, régies par la représentation d'état suivante [23] :

$$(\Sigma_{\text{frc.}}) : \begin{cases} \dot{z} = \mathcal{F}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) \\ f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (2.4)$$

où z représente le vecteur d'état des variables internes de frottement et $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^T & \dot{x}^T \end{pmatrix}^T$ le vecteur des positions et vitesses du dispositif. $\mathcal{F}_{\text{frc.}}$ et $\mathcal{G}_{\text{frc.}}$ correspondent respectivement à l'équation d'état interne et l'équation de sortie du modèle de frottement.

Pour compléter cette modélisation générale de frottement, il faut trouver les expressions convenables des fonctions généralisées $\mathcal{F}_{\text{frc.}}$ et $\mathcal{G}_{\text{frc.}}$ qui tiennent compte des propriétés intrinsèques du frottement. Cette modélisation doit respecter, en général, deux critères essentiels [23] :

- 1°. À vitesse constante (*i.e.* en régime de glissement permanent), les forces de frottement sont seulement fonction de la vitesse; *i.e.* si $\mathcal{F}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = 0$ et $\dot{x} = cte$, alors

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_s(\dot{x}) \quad (2.5)$$

- 2°. En régime de pré-glissement et pour des déplacements suffisamment petits, les forces de frottement sont réduites à une fonction mémoire de la position; *i.e.*

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{frc.}}(z, \mathbf{x}) = \mathcal{G}_{ps}(x) \quad (2.6)$$

Dans la suite, nous allons établir le modèle de *LuGre* qui appartient à la famille des modèles dynamiques de frottement décrits par le système (2.4) et respectant les conditions (2.5) et (2.6).

2.2.3.2 Modèle de *LuGre*

Fort de sa popularité dans la littérature, surtout dans le domaine de la commande des servo-systèmes, le modèle de *LuGre* se hisse parmi les modèles empiriques les plus complets qui tiennent compte, à la fois, des aspects statiques et dynamiques du frottement. Il fournit aussi une perception assez microscopique de ce phénomène (voir figure 3). En effet, à l'échelle microscopique, les surfaces de contact en mouvement relatif présentent bon nombre d'aspérités [20, 22, 203]. Ces dernières caractérisent, en effet, la rugosité et l'état des surfaces de contact [50]. Elles sont représentées ainsi comme deux corps rigides en contact à travers des lames (appelées aussi brins ou fibres) élastiques [50]. Lorsque des forces tangentielles sont appliquées aux objets en contact, ces lames subissent des déformations (ou déviations) comme dans un ressort, donnant lieu aux forces de frottement (voir figure 3); qui représentent simplement la moyenne des forces de déformation des ressorts élastiques équivalents.

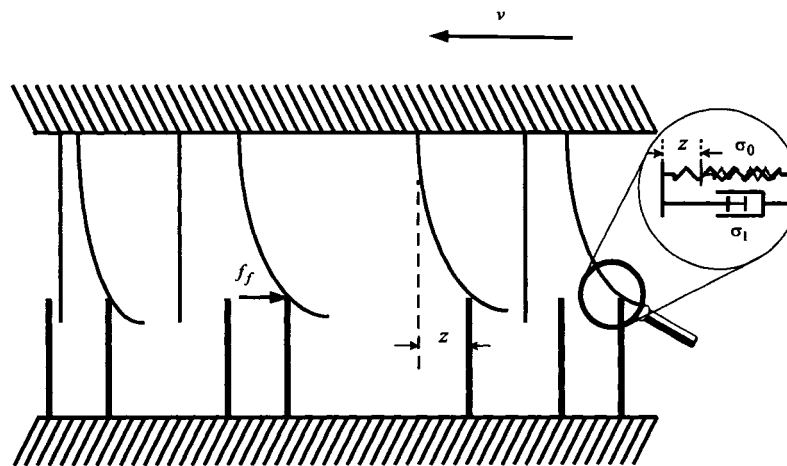


Figure 3 Interface de frottement entre surfaces de contact présentée comme contact entre lames. Pour simplifier, les lames de la partie supérieure sont considérées élastiques et celles de la partie inférieure rigides (représentation tirée et adaptée à partir de [20]).

Lorsque ces déviations deviennent suffisamment grandes, les aspérités commencent à glisser. Le système est considéré alors à l'état d'équilibre de glissement et la déviation moyenne est alors une fonction de la vitesse. En particulier, pour des vitesses réduites, associées à l'état d'équilibre de déformation, la force de frottement décroît avec la vitesse; il s'agit de l'effet *Stribeck*.

Modèle mono-variable de *LuGre*

Pour exprimer la force de frottement appliquée dans une seule direction entre deux surfaces de contact (voir figure 3), nous considérons la formulation suivante, appelée modèle de *LuGre* ou encore *paramétrisation standard* de frottement. Elle permet de décrire la variation de la force de frottement f_f en fonction de la vitesse $v \triangleq \dot{x}$ et de l'état interne de frottement z non mesurable, comme suit [20] :

$$\dot{z} = \mathcal{F}_{\text{fr.}}(z, v) = -\frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z + v \quad (2.7)$$

et :

$$f_f = \mathcal{G}_{\text{fr.}}(z, v) = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v v \quad (2.8)$$

l'état interne z correspond physiquement à la déviation moyenne des lames durant la phase de stiction (voir figure 3). σ_0 , σ_1 et σ_v sont les paramètres du modèle de frottement qui désignent respectivement la rigidité des lames, le coefficient d'amortissement (ou d'atténuation) des lames et le coefficient de frottement visqueux. $g(v)$ est une fonction non linéaire, bornée et positive utilisée, en général, pour décrire différents effets de frottement. En particulier, elle est paramétrisée pour décrire l'effet *Stribeck* [208] :

$$g(v) = f_c + (f_s - f_c) \exp\left(-\frac{v^\iota}{v_s^\iota}\right) \quad (2.9)$$

où f_c et f_s représentent l'amplitude de frottement de *Coulomb* et celle de frottement statique et v_s la vitesse constante de *Stribeck*. L'exposant ι dans la fonction exponentielle vaut, en général, 2 [3, 20] ou 0.5 [3, 209].

Caractéristiques du modèle de *LuGre*

C2.1 Dans les équations (2.7) – (2.9), la force de frottement est présentée comme une fonction continue de ces variables d'état et d'entrée.

C2.2 Chaque terme et paramètre joue un rôle différent pour déterminer la réponse du système dans les différentes phases de frottement [3]. Le premier terme (non linéaire) de l'équation (2.7) signifie que la déviation z approche la valeur [20]

$$z_{ss} = \frac{g(v)}{\sigma_0} \frac{v}{|v|} = \frac{g(v)}{\sigma_0} \text{sgn}(v) \quad (2.10)$$

à l'équilibre (*i.e.* lorsque v est constante). Le deuxième terme montre que la déviation est proportionnelle à l'intégrale de la vitesse relative (*i.e.* position relative).

C2.3 Le coefficient de rigidité des lames σ_0 est souvent très élevé. Il est important de garder le coefficient d'amortissement $\sigma_1 \neq 0$ pour avoir un mouvement suffisamment amorti; sachant que le coefficient de frottement visqueux σ_v est généralement pas suffisamment grand pour assurer un bon amortissement [3, 20].

C2.4 Les paramètres du modèle peuvent être calibrés expérimentalement [52, 76, 106]. Ils sont, en général, astreints à des incertitudes et des variations dues aux [51, 106, 210, 211] :

- variations des forces normales appliquées²;
- variations de température;
- variations des vitesses;
- caractéristiques du matériau de revêtement;
- conditions de lubrification.

C2.5 La variation de la force de frottement f_f avec l'amplitude de la force normale de contact, notée f_n , peut être décrite simplement par une relation de proportionnalité;

² Gray et Johnson [212] ont examiné les effets de la rugosité de surface sur les vibrations normales pendant le contact (*i.e.* rôle du couplage normal-tangentiel). Aussi, Godfrey [213] a démontré une réduction apparente du frottement due aux vibrations normales (voir aussi plus récemment dans [214, 215]).

i.e.

$$f_f = \mu f_n \quad (2.11)$$

où le coefficient de frottement μ représente, dans ce cas, la variable de sortie du modèle dynamique de *LuGre* donné par l'équation (2.8). Les paramètres du modèle sont appelées, dans ce cas, *paramètres normalisés standards* du modèle de *LuGre* [3, 13].

C2.6 Dans les équations (2.7) – (2.9), aucun terme ne dépend explicitement de la position. En réalité, il peut exister des applications où $g(v)$ dépend aussi de la position actuelle ou encore d'une combinaison complexe de la position et la vitesse [208]. Par conséquent, les paramètres de la fonction monotone $g(v)$ peuvent faire éventuellement l'objet de variation d'incertitudes.

Propriétés du modèle de *LuGre*

Propriété 2.1 La fonction de *Stribeck* définie dans (2.9) est bornée positive [20]. En effet, d'après (2.9), nous avons :

$$0 < f_c \leq g(v) \leq f_s$$

Propriété 2.2 La déviation interne z est une grandeur finie; *i.e.* supposons $0 < a \leq \frac{g(v)}{\sigma_0} \leq b$, si $|z(0)| \leq b$, alors $|z(t)| \leq b \forall t$ [20]. En effet, si nous considérons la fonction candidate de *Lyapunov* $V = \frac{1}{2}z^2$, alors la dérivée totale par rapport au temps de V , évaluée tout au long de la trajectoire (2.7), s'écrit [20]

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z \left(-\frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z + v \right) \\ &= -|v| |z| \left(-\text{sgn}(v) \text{sgn}(z) + \frac{\sigma_0 |z|}{g(v)} \right) \end{aligned}$$

La fonction \dot{V} est négative si $|z| > \frac{g(v)}{\sigma_0}$. Et, comme $0 < \frac{g(v)}{\sigma_0} \leq b$, alors nous pouvons constater que l'ensemble $\{z \mid z \text{ vérifie (2.7) et } |z| \leq b\}$ est invariant; *i.e.* pour toute solution z de (2.7) telle que $|z(0)| \leq b$, nous avons $|z(t)| \leq b, \forall t$.

Propriété 2.3 Intuitivement, le frottement est caractérisé par une dissipation d'énergie. En fait, le modèle dynamique de *LuGre* présente des phases où le frottement emmagasine l'énergie et d'autres où il dégage cette énergie [20]. Nous montrons que l'application $\varphi : v \mapsto z$ associée au modèle (2.7) est *dissipative*³ avec une *fonction de stockage*⁴ $V(t) = \frac{1}{2}z^2(t)$. En effet, il suit à partir de (2.7)

$$\begin{aligned} zv &= z\dot{z} + \frac{\sigma_0|v|}{g(v)}z^2 \\ &\geq z\dot{z} \end{aligned}$$

D'où [20] :

$$\int_0^t z(\tau)v(\tau)d\tau \geq \int_0^t z(\tau)\frac{dz}{d\tau}(\tau)d\tau \geq V(t) - V(0)$$

Modèle bidimensionnel de *LuGre*

Dans le cas de déplacement d'un servo-système en changeant de direction sur une surface de dimension 2 (voir figure 4), la force de frottement associée au mouvement suit la direction de déplacement (dans le sens contraire à celui de la vitesse). Pour étudier le mouvement d'un tel système, il faut décomposer son équation dynamique dans un système orthonormé, noté (x, y) , lié à la surface de mouvement (voir figure 4). La force de frottement, étant aussi projetée dans ce système, peut être décrite par le modèle de *LuGre* bidimensionnel énoncé comme suit [217] :

$$\dot{z} = -\frac{\|F_c^2 v\|}{g(v)} F_c^{-2} \Sigma_0 z + v \quad (2.12)$$

et

$$f_f = \Sigma_0 z + \Sigma_1 \dot{z} + \Sigma_v v \quad (2.13)$$

³ Par définition, un système dissipatif est un système qui consomme plus d'énergie/travail qu'il n'en fournit. Le terme zv , appelé *fonction d'alimentation* (en anglais, *supply function*), est interprété comme la quantité d'énergie délivrée au système. Dans l'intervalle de temps $[0, t]$, le travail est appliqué sur le système lorsque $\int_0^t zvd\tau$ est positive; par contre, le travail est effectué par le système lorsque cette intégrale est négative. Pour un système dissipatif, l'inégalité $\int_0^t zvd\tau \geq V(t) - V(0)$ signifie que la variation de la fonction de stockage interne (*i.e.* $V(t) - V(0)$) pendant l'intervalle $[0, t]$ ne dépasse point la quantité de travail appliqué sur (ou énergie consommée par) le système [26, 216]. Autrement, une partie de ce qui est fourni au système est stockée, pendant que le reste est dissipé ou perdu.

⁴ En anglais, *storage function*.

avec

$$g(v) = \frac{\|F_c^2 v\|}{\|F_c v\|} + \left(\frac{\|F_s^2 v\|}{\|F_s v\|} - \frac{\|F_c^2 v\|}{\|F_c v\|} \right) \exp\left(-\frac{\|v\|^2}{v_s^2}\right) \quad (2.14)$$

où $z = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}^T$ désigne le vecteur déformation interne des lames projeté dans les directions x et y , $v = \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix}^T \triangleq \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \end{pmatrix}^T$ le vecteur vitesse tangentielle du mobile projeté dans les directions x et y et $f_f = \begin{pmatrix} f_{fx} & f_{fy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur frottement projeté dans les directions x et y . $\Sigma_0 = \text{diag}(\sigma_{0x}, \sigma_{0y})$, $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_{1x}, \sigma_{1y})$, $\Sigma_v = \text{diag}(\sigma_{vx}, \sigma_{vy})$, $F_c = \text{diag}(f_{cx}, f_{cy})$, $F_s = \text{diag}(f_{sx}, f_{sy})$ et v_s sont les paramètres de frottement de *LuGre* dans les directions x et y . Les notations F_c^2 et F_s^2 sont utilisées pour décrire simplement les produits matricielles $F_c \cdot F_c$ et $F_s \cdot F_s$.

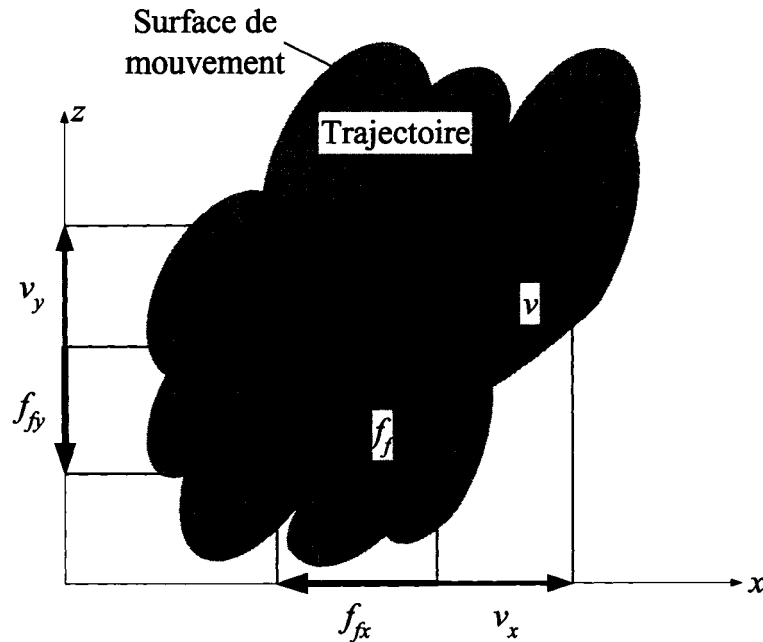


Figure 4 Mouvement bidimensionnel sous frottement

En particulier, lorsque l'état de surface et les conditions de frottement sont uniformément répartis dans toutes les directions (ce qui se traduit par un comportement de frottement

complètement symétrique), les paramètres du modèle de *LuGre*, associés à la même caractéristique dans les deux directions, peuvent être identiques; *i.e.* [217]

$$\sigma_{0x} = \sigma_{0y}, \sigma_{1x} = \sigma_{1y}, \sigma_{vx} = \sigma_{vy}, f_{cx} = f_{cy} \text{ et } f_{sx} = f_{sy}$$

2.3 Commande du système mécanique sous frottement

Comme nous l'avons déjà présenté dans la section §2.2 de ce chapitre, le schéma général d'un système mécanique est composé essentiellement de trois éléments (voir figure 2 et tableau I) :

- un sous-système de force,
- un sous-système de position,
- un sous-système de frottement;

partiellement ou fortement couplés. Ce degré de couplage relatif varie en réalité d'un procédé à un autre et d'une application à une autre. Pour atteindre l'objectif d'un asservissement efficace des différentes grandeurs d'un tel système, il faut tenir compte de ce degré de couplage entre les différentes parties. D'une manière générale, le système de contrôle (voir figure 5) doit contenir des éléments de compensation de force et de position (incluant la compensation de frottement). En effet, la boucle de contrôle de force représente un élément auxiliaire qui est placée dans la structure interne (voir figure 5) de contrôle de mouvement (position et vitesse), pour améliorer la performane de l'ensemble. Dans la suite, nous allons décortiquer les éléments de l'ensemble du système de contrôle (K).

2.3.1 Éléments de commande de force

Les éléments de commande de force dépendent principalement de la propriété de couplage qui peut lier le système d'action au système de mouvement.

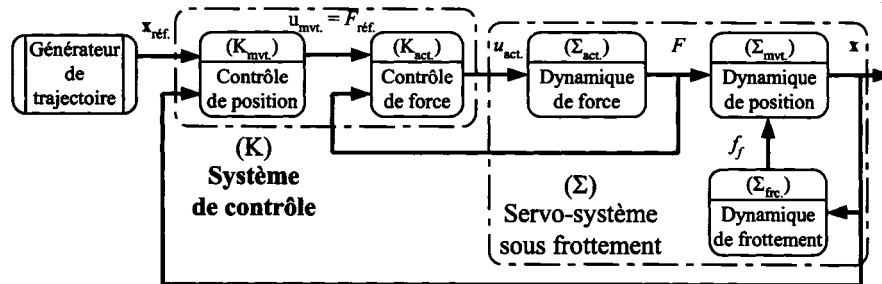


Figure 5 Schéma de base de contrôle de servo-système sous frottement

2.3.1.1 Cas d'un couplage simple

Il est caractérisé par une relation directe entre la commande et la force/couple. Dans ce cas, nous n'avons pas forcément besoin d'un contrôle explicite de force. Et parfois, un changement de variable (gain ou transformation statique) peut être jugé nécessaire. Par contre, la structure de l'ensemble du servo-système reste inchangée. La commande et la force sont considérées comme deux grandeurs équivalentes. Par exemple, si nous reprenons le cas de système articulaire actionné par un dispositif de moteurs à courant continu (voir tableau I), dont les caractéristiques dynamiques sont considérées négligeables devant celle du manipulateur [206], alors il est toujours facile à justifier que la relation entre la commande u et la position articulaire q est équivalente à celle entre le couple τ et la position q [206]. Nous disons que l'espace de variable de commande u est équivalent à celui de couple τ (*i.e.* $u \sim \tau$). Et, par souci de simplicité, seulement l'une des deux relations est maintenue, l'autre est omise [206].

2.3.1.2 Cas d'un couplage complexe

La structure de force/couple est caractérisée par un comportement dynamique varié :

- linéaire ou non linéaire,
- nominal ou incertain ou encore perturbée.

Le contrôle de position du servo-système doit être alors anticipé par un contrôle de force/couple approprié pour :

- assurer la stabilité de la réponse de force/couple;
- ajuster le comportement transitoire (rapidité et atténuation);
- réduire l'effet des incertitudes et/ou perturbations sur les performances de suivi.

Dans ce cas, le schéma de contrôle de force peut inclure, inclusivement ou exclusivement, selon la structure de la dynamique de force (voir figure 6) :

- des termes de commande simplement linéaire pour stabiliser les systèmes linéaires à dynamique dominante et fixer les performances transitoires;
- des termes non linéaires (comme la commande linéarisante) pour anéantir les aspects non linéaires connus dans les systèmes (non linéaires) à dynamique dominante;
- des termes de commande robuste (linéaire et/ou non linéaire) pour minimiser l'effet des perturbations et des incertitudes bornées ou non bornées constatées dans les systèmes dynamiques (variant dans le temps, incertains et/ou perturbés).

En général, la combinaison de ces différentes techniques de compensation (voir figure 6) dépend de la complexité et la nature du dispositif dynamique en question. À titre d'exemple, nous citons le cas de système pneumatique; dont la dynamique de force reste suffisamment complexe et non négligeable. Le contrôle d'un tel système utilise presque tous les outils de commande cités ci-haut (voir figure 6 et Cf. chapitres 4 et 5).

2.3.2 Éléments de commande de position et compensation de frottement

La structure du système de contrôle dédié à la position/orientation doit tenir compte à son tour de la structure de l'ensemble du servo-système (type de couplage force/position, non linéarité, incertitude et perturbation) et du type de modèle de frottement utilisé.

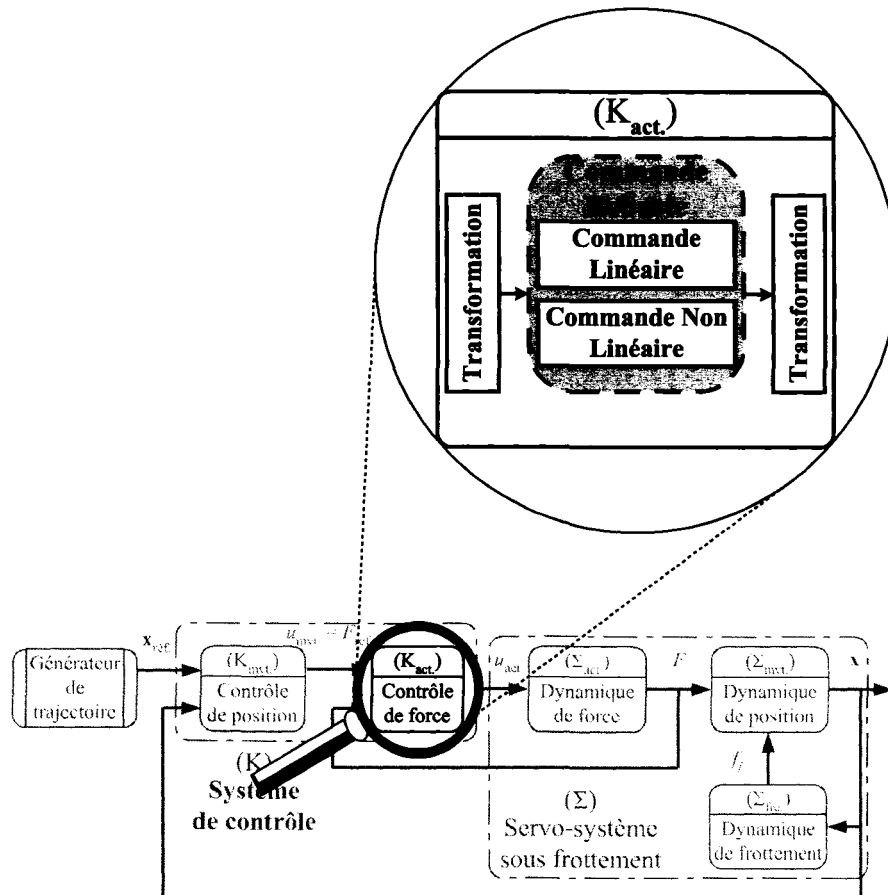


Figure 6 Éléments de contrôle de force

Dans ce travail, nous proposons un système de contrôle (voir figure 7) basé sur le principe du retour de sortie dynamique linéaire. Il incorpore une estimation par *feed-back* du frottement basée sur le modèle dynamique de *LuGre* [203]. Dans son ensemble, la conception globale de ce contrôleur est menée autour des notions fondamentales suivantes : interconnexion, passivité⁵ et optimisation. Plus précisément, nous mettons en place ce contrôleur pour assurer la stabilisation du système en boucle fermée et le rejet des perturbations issues des effets résiduels exogènes (éventuellement de la dynamique de force) et des variations des paramètres (incertitudes) et/ou des modèles (voir figure 8). Mais d'abord,

⁵ Quoique la passivité est présentée comme un cas particulier de la notion de dissipativité (selon [216]), dans ce manuscrit, nous confondons les deux terminologies, par abus de notation (comme c'est le cas dans [26] d'ailleurs).

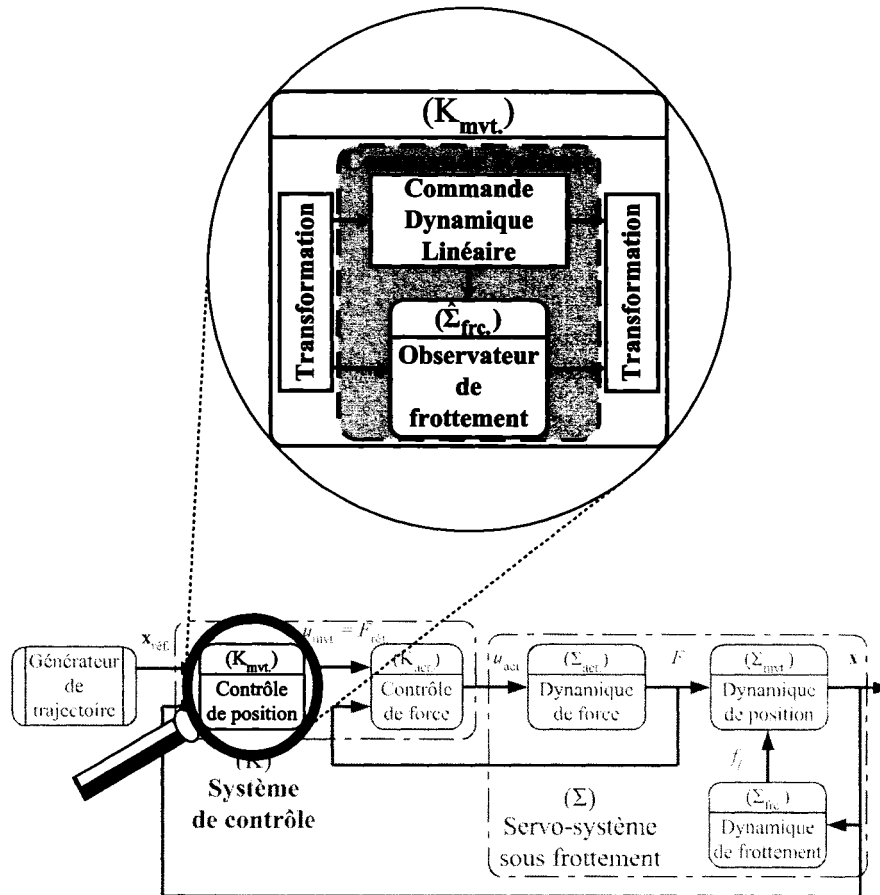


Figure 7 Éléments de contrôle de position

un ensemble de transformations (éléments de commandes linéarisantes et non linéaires) peuvent être appliquées en sus, au besoin, pour réduire l'espace du système de mouvement en un autre qui décrit les équations dans l'espace de contact et de frottement (voir figure 7). Ce nouvel espace réduit de mouvement contraint sous frottement, exprimé dans le domaine des variables d'écart, peut être structuré principalement en deux parties (voir figure 9); dont l'une correspond à une dynamique linéaire de position et l'autre constitue la dynamique non linéaire de frottement. Le bloc diagonal $q \mapsto p$ et l'ensemble des signaux exogènes $e = \left(e_1^T \ e_2^T \ e_3^T \right)^T$ dans le schéma de la figure 9 comptent toutes les formes d'incertitudes et de perturbations (dynamiques négligées, non linéarités, incertitudes des paramètres, etc.) mises en jeu.

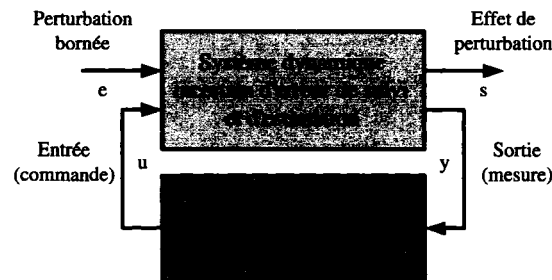


Figure 8 Schéma général de commande linéaire de système de mouvement

L'inclusion du contrôleur dynamique linéaire (voir figure 8) permet de corriger ainsi les dynamiques d'erreurs de suivi de trajectoire et d'estimation de frottement. Étant donné la propriété de passivité du modèle de frottement (Cf. propriété 2.3), la conception du contrôleur linéaire est fondée sur la passivité de la partition non linéaire (*i.e.* dynamique d'estimation) et le théorème de passivité⁶ [216] pour trouver la (ou les) condition(s) de stabilisation des systèmes inter-connectés (voir figure 9). En effet, grâce à cette formulation, la résolution du problème de stabilisation du système global (non linéaire) sera développée simplement à partir du sous-système linéaire perturbé; puisque toutes les autres parties seront considérées, par définition, robustement stables ou à effets réduits de perturbation. Cette technique proposée constitue une généralisation du principe utilisé dans [20] qui construit le schéma de stabilisation à partir de la condition SPR⁷ du sous-système dynamique linéaire.

Dans notre cas, cette condition SPR peut être étendue pour inclure la condition de marge de stabilité exponentielle de l'ensemble du système dynamique en boucle fermée. Nous proposons, en plus, un placement de pôles de la partition linéaire en boucle fermée dans une certaine région de stabilité d'une façon robuste pour limiter la rapidité de la dynamique du contrôleur et améliorer la réponse transitoire de positionnement; en particulier, l'amplitude substantielle de la bande passante, critiquée dans [34] (vis-à-vis des résultats obtenus

⁶ Cf. théorème 6.1 dans [216]; *i.e.* la connexion par *feed-back* de deux systèmes passifs est passive aussi.

⁷ Un système linéaire, de fonction de transfert $G(s)$, est SPR si et seulement si, $G(j\omega) + G^*(j\omega) > 0$, $\forall \omega \in \mathbb{R}$ [146].

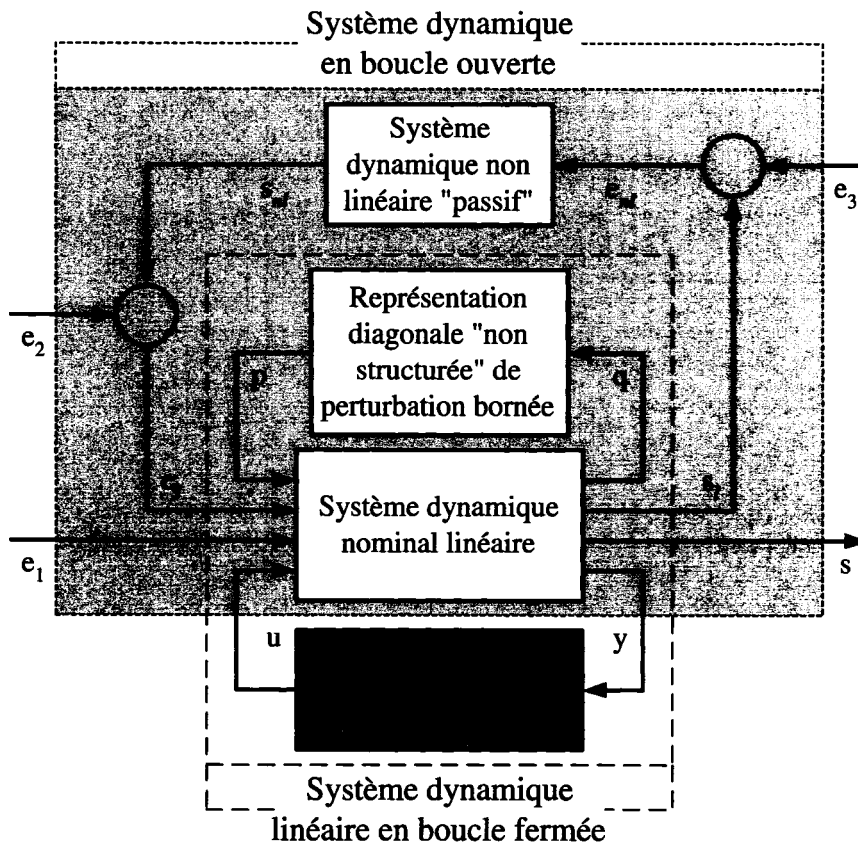


Figure 9 Schéma général détaillé de commande linéaire de système de mouvement et de compensation de frottement

dans [20, 34]). La procédure de calcul des gains du contrôleur linéaire proposé sera présentée comme un problème de synthèse de retour de sortie à multi-objectifs mettant en œuvre les inégalités matricielles linéaires ou LMIs [218, 219, 220], dans une formulation originale de ce type de problème.

Pour illustrer cette approche de commande de position et de compensation de frottement présentée dans la figure 9, nous proposons, dans la section suivante, l'étude d'un cas simple de mouvement unidirectionnel d'un solide sous frottement.

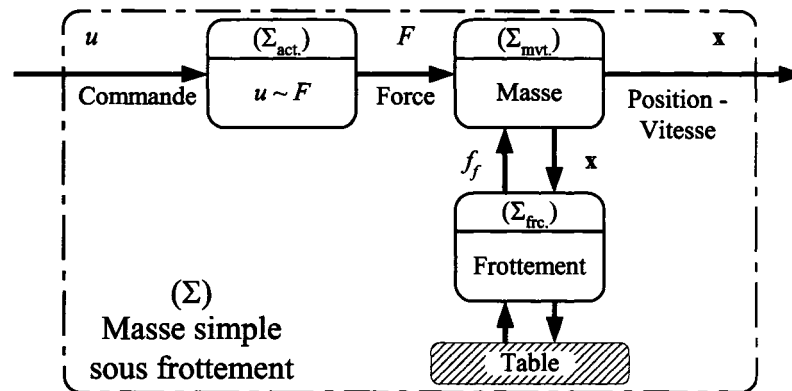


Figure 10 Schéma de base de système de masse simple sous frottement

2.4 Exemple d'illustration : Cas d'une masse simple sous frottement

Nous allons d'abord présenter les modèles dynamiques de mouvement et de frottement du système (voir figure 10) et l'ensemble des hypothèses et caractéristiques choisies pour illustrer cet exemple. Puis, nous aborderons le schéma de contrôle proposé dans ce cas. Ensuite, nous établirons les conditions de stabilité et de robustesse du système en boucle fermée, et la procédure de synthèse du contrôleur linéaire construite par le biais du formalisme LMI [203, 204]. Finalement, nous validerons cette démarche avec des résultats de simulation.

2.4.1 Modélisation du système

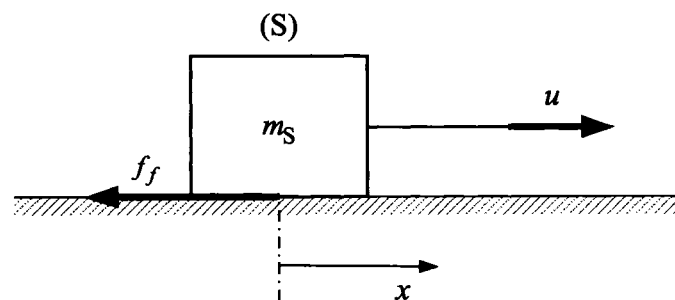


Figure 11 Solide en déplacement sur une surface sous frottement

Nous considérons un solide (S) de masse m_S à la position x en mouvement sous l'effet d'une force de commande u sur une surface sous frottement dynamique f_f (voir figure 11). L'équation dynamique standard de *Newton* s'écrit :

$$m_S \ddot{x} + f_f = u \quad (2.15)$$

Pour décrire la force de frottement, nous réécrivons le modèle dynamique de *LuGre* tel que présenté dans la sous-section §2.2.3.2 [20] :

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} z + \dot{x} \quad (2.16)$$

et

$$f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v \dot{x} \quad (2.17)$$

où z représente la variable d'état interne de frottement, \dot{x} est la vitesse de déplacement relatif du solide (S). σ_0 , σ_1 et σ_v désignent respectivement le coefficient de rigidité, le coefficient d'amortissement et le coefficient de viscosité. $g(\dot{x})$ est la fonction bornée de *Stribeck*, donnée par [20] :

$$g(\dot{x}) = f_c + (f_s - f_c) \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}} \quad (2.18)$$

f_c et f_s désignent les amplitudes de frottement de *Coulomb* et statique, \dot{x}_s la vitesse relative constante de *Stribeck*.

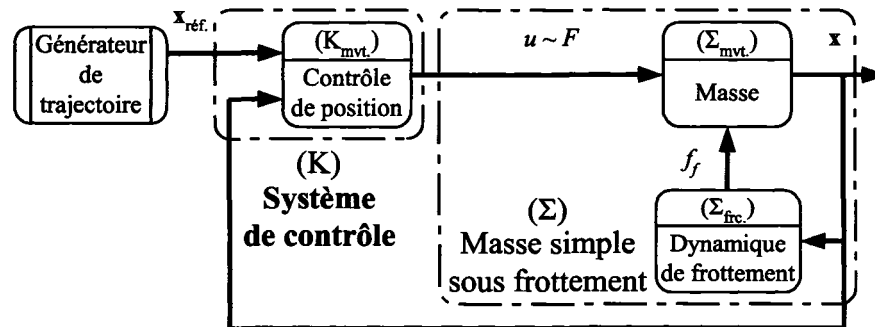


Figure 12 Schéma de base de contrôle de position d'une masse sous frottement

Nous proposons la réalisation d'une loi de commande selon le schéma de la figure 12 qui permet d'assurer un suivi de trajectoire stable avec des performances prescrites. Pour ce faire, nous considérons les hypothèses suivantes [203] :

H2.1 La trajectoire désirée x_d est suffisamment lisse (ou lisse⁸ d'ordre 2).

H2.2 La position x et la vitesse \dot{x} sont supposées mesurables.

H2.3 La déformation des lames z est une grandeur physique non mesurable.

H2.4 Les paramètres du modèle de *LuGre* sont supposés fixes et connus *a priori*.

2.4.2 Contrôle de position et compensation de frottement

Le système de contrôle (K) que nous proposons selon le schéma de la figure 12 comprend principalement :

- une compensation de frottement par *feed-back* basée sur un observateur dynamique qui s'apparente au modèle de *LuGre*,
- une commande dynamique linéaire (voir figure 13) par retour des variables mesurées (Cf. hypothèse H2.2).

D'abord, la force de frottement est reconstruite à partir du modèle mathématique de *LuGre* et des mesures du système par le biais d'une correction de la variable interne (*i.e.* déviation des lames) estimée. En effet, en utilisant les hypothèses H2.3 et H2.4, nous décrivons le schéma d'observation de frottement comme suit :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_0|\dot{x}|}{g(\dot{x})}\hat{z} + \dot{x} - u_z \quad (2.19)$$

et

$$\hat{f}_f = \sigma_0\hat{z} + \sigma_1\dot{\hat{z}} + \sigma_v\dot{x} \quad (2.20)$$

⁸ Une fonction ou une trajectoire x_d est dite lisse d'ordre 2, si sa dérivée seconde existe et est continue, *i.e.* $x_d \in \mathcal{C}_2$ où \mathcal{C}_2 désigne l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et dont la dérivée seconde est continue.

où \hat{z} est l'estimé de l'état interne, \hat{f}_f la force estimée de frottement, u_z le terme de *feedback* introduit dans l'équation dynamique de l'observateur et $g(\dot{x})$ la fonction de *Stribeck* donnée par (2.18).

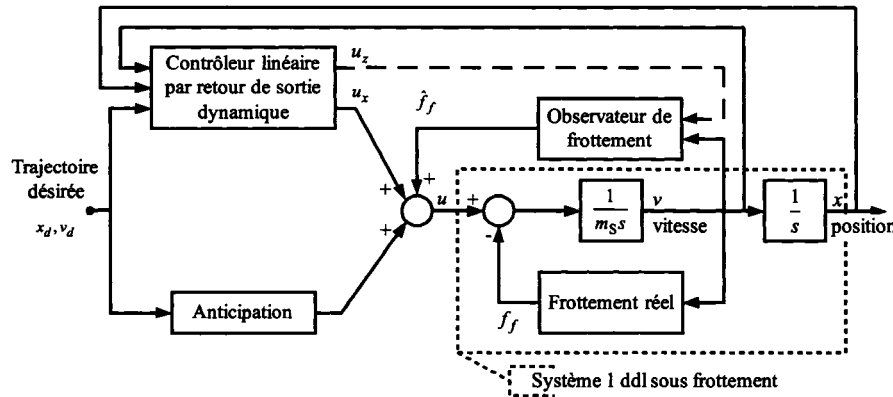


Figure 13 Schéma-bloc de système de compensation de frottement d'une masse

Ensuite, nous exprimons la loi de commande de mouvement du solide (S) qui tient compte de la compensation de son inertie et de la force de frottement (voir figure 13), comme suit :

$$u = m_S \ddot{x}_d + \hat{f}_f + u_x \quad (2.21)$$

où \ddot{x}_d désigne l'accélération désirée et u_x l'action de commande linéaire directe appliquée sur le solide (S). Dans la suite, nous introduisons les erreurs de suivi de trajectoire et d'observation données respectivement par :

$$\tilde{x} = x - x_d, \tilde{z} = z - \hat{z} \text{ et } \tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f \quad (2.22)$$

D'après les équations (2.7), (2.8), (2.19), (2.20) et (2.22), nous décrivons les erreurs d'estimation \tilde{z} et \tilde{f}_f selon :

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z} + u_z \quad (2.23)$$

et

$$\dot{\tilde{f}}_f = \sigma_0 \tilde{z} + \sigma_1 \dot{\tilde{z}} \quad (2.24)$$

Remarque 2.1 : Nous notons ici que la propriété 2.3 (de dissipativité), énoncée dans la sous-section §2.2.3.2, peut être appliquée de la même façon au système non linéaire entre u_z et \tilde{z} (donné par la relation (2.23)). Cette propriété sera très utile dans la suite pour la réalisation de la loi de commande.

D'après les équations (2.15), (2.21) et (2.22), nous décrivons l'erreur de suivi \tilde{x} selon :

$$m_S \ddot{\tilde{x}} = -\tilde{f}_f + u_x \quad (2.25)$$

Notons respectivement par $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix}^T$ et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$ le vecteur d'état mesurable des erreurs de suivi et le vecteur de commande. La représentation d'état associée à l'équation dynamique linéaire (2.25) est donnée par :

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_f(-\tilde{f}_f) \quad (2.26)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_S} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_S} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Le vecteur de commande \mathbf{u} représente la sortie d'un contrôleur dynamique linéaire d'ordre plein décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (2.28)$$

où ξ représente un vecteur d'état de \mathbb{R}^2 . $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ désigne la matrice d'évolution du contrôleur dynamique linéaire, $\mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice d'entrée, $\mathbf{C}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice de sortie et $\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ la matrice directe.

La dynamique des erreurs se divise alors en deux parties (voir figure 14) :

- une partie non linéaire décrite par la relation (2.23),
- une partie linéaire décrite par les relations (2.24), (2.26) et (2.27).

Ces deux parties sont inter-connectées par l'entremise des variables \tilde{z} et u_z et en utilisant le contrôleur dynamique (2.28).

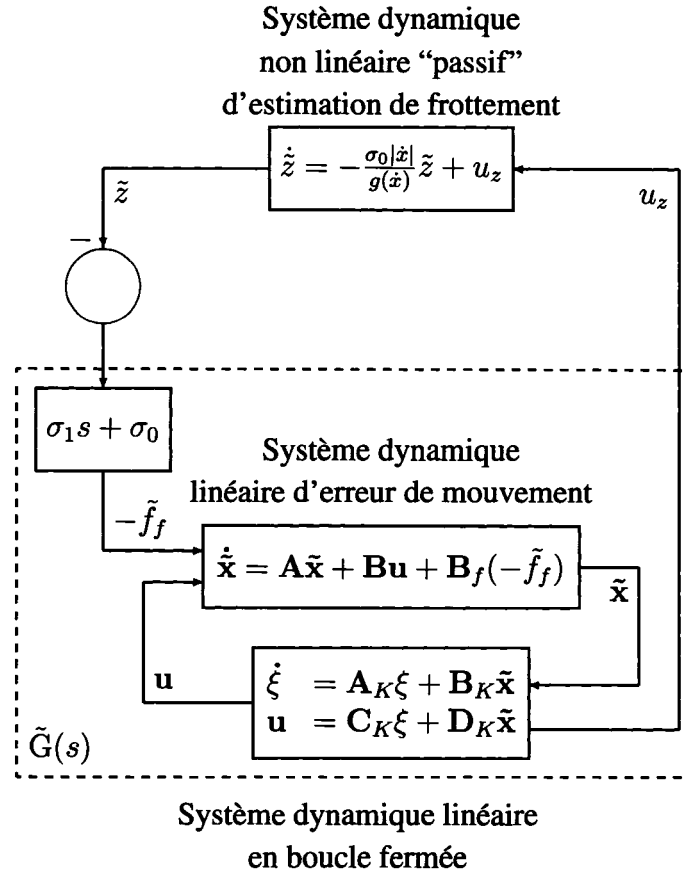


Figure 14 Schéma-bloc de systèmes inter-connectés (cas d'une masse simple)

Proposition 2.1 : Étant donné $\tilde{G}(s)$ la fonction de transfert, de la partie linéaire de la boucle fermée, entre $-\tilde{z}$ et u_z (voir figure 14). $\tilde{G}(s)$ est un système propre qui peut être représenté par la réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{d})$ donnée par [203, 204] :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} A + BD_K & BC_K \\ B_K & A_K \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_z + BD_K D_z \\ B_K D_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} D_{uz} D_K & D_{uz} C_K \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{d} = D_{uz} D_K D_z \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec $B_z = \sigma_0 B_f + \sigma_1 A B_f$, $D_z = \sigma_1 B_f$ et $D_{uz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration : Nous considérons le vecteur d'état

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - D_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix} \text{ i.e. } \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} D_z(-\tilde{z}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant (2.24), (2.26) et (2.28), nous avons :

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathbf{B}_f \\ 0 \end{pmatrix} (-\tilde{z}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \begin{pmatrix} \sigma_0 \mathbf{B}_f + \sigma_1 \mathbf{A}\mathbf{B}_f + \mathbf{B}\mathbf{D}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f \\ \mathbf{B}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f \end{pmatrix} (-\tilde{z})\end{aligned}$$

Et, nous écrivons :

$$\begin{aligned}u_z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{D}_{uz} \begin{pmatrix} \mathbf{D}_K & \mathbf{C}_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{uz} \mathbf{D}_K & \mathbf{D}_{uz} \mathbf{C}_K \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} + \mathbf{D}_{uz} \mathbf{D}_K \sigma_1 \mathbf{B}_f (-\tilde{z})\end{aligned}$$

pour ainsi trouver la réalisation (2.29). ■

Le principe de la partition du système en boucle fermée en deux sous-systèmes passifs (voir figure 14) est interprété comme suit :

- Le sous-système non linéaire représente une application d'entrée/sortie passive de u_z dans \tilde{z} .
- L'ensemble du sous-système linéaire et du contrôleur dynamique linéaire doivent respecter la propriété SPR pour assurer la stabilité du système total en boucle fermée.

En effet, grâce à la passivité du bloc non linéaire et en utilisant la théorie de passivité [216], nous obtiendrons les conditions nécessaires sur le contrôleur dynamique (2.28) pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

La commande de mouvement d'une masse par le contrôleur dynamique linéaire d'ordre plein (2.28) présente une généralisation de l'approche introduite dans [20]. En effet, le contrôleur proposé dans [20] est limité à un *feed-back* statique de type PD sur la dynamique de position et à une correction statique proportionnelle à l'erreur de position (*i.e.* $-k\tilde{x}$) sur l'observateur pour assurer la condition de stabilité. Si nous choisissons

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{B}_K = \mathbf{C}_K = \emptyset \text{ (i.e. des éléments de l'ensemble vide) et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} -k_p & -k_d \\ -k & 0 \end{pmatrix},$$

nous retrouvons les conditions introduites par Canudas *et al.* [20] :

$$k > 0, k_p > 0 \text{ et } k_d > \frac{\sigma_0 m_S}{\sigma_1}$$

qui garantissent la condition SPR sur $\tilde{G}(s)$.

Par contre, dans le contexte plus général introduit ici avec l'utilisation du contrôleur par retour de sortie d'ordre plein (2.28), cette condition de passivité devient *a priori* plus difficile à établir analytiquement. Dans la suite, nous présenterons cette condition générale comme un sujet de faisabilité d'un problème convexe exprimé par un ensemble de contraintes d'inégalités matricielles linéaires. Dans ce nouvel espace de contraintes, il devient aussi plus plausible d'introduire des conditions supplémentaires de placement de pôles et d'optimisation de certains critères comme H_2 ou H_∞ .

2.4.3 Formulation LMI du problème

2.4.3.1 Condition de stabilité

Considérons le système de déplacement sous frottement (2.15) – (2.18). Étant donné l'observateur de frottement dynamique (2.19) et (2.20), la loi de commande par *feed-back* (2.21) et la représentation d'état du contrôleur dynamique (2.28), avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$. Nous avons (voir figure 14) [203] :

Proposition 2.2 : Les erreurs de suivi (en particulier \tilde{x}) et d'observation \tilde{z} sont globalement exponentiellement stables et \tilde{f} converge vers zéro s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [203] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

où ϵ est une constante positive de conditionnement. \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous reprenons la définition du vecteur d'état $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$

introduite dans la démonstration de la proposition 2.1. Soit $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \end{pmatrix}$ le vecteur d'état du système total en boucle fermée (voir figure 14). Nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} + \frac{\tilde{z}^2}{\epsilon^2}$$

alors, la dérivée totale de V , par rapport au temps t le long des trajectoires du système, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\tilde{z})) + \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{z} \left(-\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z} + u_z \right) \\ &= \tilde{\mathbf{X}}^T (\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{B}}(-\tilde{z}) + (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \tilde{z}^2 - \\ &\quad \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T (-\tilde{z}) - \frac{1}{\epsilon^2} (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \tilde{z}^2 \\ &\leq \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}}^T & (-\tilde{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ (-\tilde{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons ici que $\tilde{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}$. Cette inégalité est vraie grâce à la propriété 2.1 (*i.e.* $g(\dot{x}) > 0$). Si le membre de droite dans cette inégalité est défini négatif, alors \dot{V} est définie négative. Par conséquent, les variables internes du système en boucle fermée sont bornées, \tilde{x} et \tilde{z} convergent exponentiellement vers zéro [146, 216] et \tilde{f}_f converge vers zéro. ■

Remarque 2.2 : L'amplitude de la variable interne z , qui correspond à la déformation des lames formant les aspérités des surfaces en contact (voir figure 3), est manifestement très petite comparée au déplacement du solide x . Ainsi, le coefficient ϵ est choisi suffisamment petit pour garantir un bon conditionnement de la matrice symétrique donnée dans (2.30). Cette condition est souvent nécessaire pour la résolution numérique des LMIs.

Remarque 2.3 : En particulier, si $\mathbf{D}_K = 0$ (*i.e.* $\tilde{\mathbf{d}} = 0$), \dot{V} peut seulement être définie semi-négative, alors il faut combiner la condition SPR avec le lemme de *Barbalat*⁹ pour

⁹ Cf. lemme 8.2 dans [216].

prouver la convergence de \tilde{x} et \tilde{z} vers zéro. Les détails de cette étude sont amplement discutées dans [221].

2.4.3.2 Conception à multi-objectifs

En plus de la condition SPR, donnée par (2.30), la détermination des composantes du contrôleur (2.28) peut être discutée en ajoutant des conditions supplémentaires de placement de pôles de la fonction de transfert $\tilde{G}(s)$ [203] et/ou d'optimisation convexe d'un critère de performance, par exemple, de type H_2 [204, 219]. En effet, les contraintes supplémentaires sur le placement des pôles peuvent être introduites pour fixer les spécifications transitoires de la réponse comme la marge de stabilité et le temps de réponse. Le critère d'optimisation, quand à lui, peut être sollicité pour limiter éventuellement une fonction coût en rapport avec le système en boucle fermée.

Stabilité exponentielle

Pour ajuster la marge de stabilité du système total en boucle fermée, nous établissons la condition de stabilité exponentielle suivante qui remplace la condition SPR (2.30) [203]. Considérons le système de déplacement sous frottement (2.15) – (2.18). Étant donné l'observateur de frottement dynamique (2.19) et (2.20), la loi de commande par *feed-back* (2.21) et la structure dynamique du contrôleur linéaire (2.28), avec $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$. Nous avons [203] :

Proposition 2.3 : Soit $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$. Les erreurs de suivi et d'observation convergent exponentiellement vers zéro, avec un taux de décroissement α , s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [203] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \end{pmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Considérons les changements de variables suivants : $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$, $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$ et $\bar{u}_z = e^{\alpha t} u_z$. Nous avons :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} = (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z}) \\ \dot{\bar{z}} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{u}_z \end{cases}$$

et

$$\bar{u}_z = \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}(-\bar{z})$$

avec \mathbf{I} la matrice identité d'ordre 4. Si nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{\bar{z}^2}{\epsilon^2}$$

alors, la dérivée totale de V , par rapport au temps t le long des trajectoires du système, s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s ((\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z})) + \frac{2}{\epsilon^2} \bar{z} \left(-\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{u}_z \right) \\ &= \bar{\mathbf{X}}^T ((\tilde{\mathbf{A}}^T + \alpha \mathbf{I}) \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I})) \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{B}}(-\bar{z}) + (-\bar{z}) \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} - \\ &\quad \frac{2}{\epsilon^2} \frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} \bar{z}^2 + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \bar{z}^2 - \frac{1}{\epsilon^2} \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T (-\bar{z}) - \frac{1}{\epsilon^2} (-\bar{z}) \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} - \frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} \bar{z}^2 \\ &\leq \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}}^T & (-\bar{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{d}} + \frac{2}{\epsilon^2} \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ (-\bar{z}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si le membre de droite dans cette inégalité est défini négatif, alors \dot{V} est définie négative. Par conséquent, $\bar{\mathbf{X}}$ et \bar{z} sont globalement quadratiquement stables. Ensuite, $\bar{\mathbf{X}} = e^{-\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$ et $\bar{z} = e^{-\alpha t} \tilde{z}$ convergent vers zéro, au moins, exponentiellement avec un taux de décroissance α [146, 216]. ■

Contrainte sur la région de stabilité

Pour prévenir contre les dynamiques de hautes fréquences du contrôleur associées aux fréquences des modes oscillatoires du système; nous rajoutons des conditions de placement des pôles de la partie linéaire $\tilde{G}(s)$ à l'intérieur d'un disque de rayon r centré à l'ori-

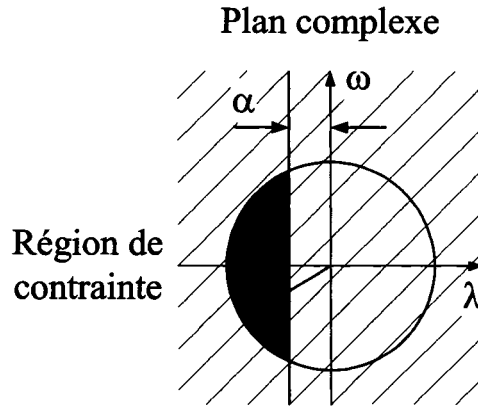


Figure 15 Région de stabilité

gine du plan complexe (voir figure 15). La caractérisation LMI associée à cette *région de stabilité*¹⁰ est exprimée comme suit [203, 219] :

Problème 2.1 : Trouver $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$ une matrice de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, telle que

$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & * \\ \tilde{\mathbf{P}}_r\tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

La résolution de ce problème constitue une contribution supplémentaire dans la mise au point des conditions (en fréquence, par exemple) de la réponse en boucle fermée. Cet aspect représente en effet une entrave à la solution présentée dans [20, 34].

¹⁰ Une région de stabilité, ou simplement région LMI, est tout sous-ensemble \mathcal{D} du demi-plan complexe gauche défini selon [222] :

$$\mathcal{D} \triangleq \{z \in \mathbb{C}; L + zM + \bar{z}M^T < 0\}$$

où $L = L^T$ et M deux matrices réelles. \bar{z} désigne le *conjugué* de z . Étant donné un système dynamique $\dot{x} = \mathbf{A}x$, \mathbf{A} est dite \mathcal{D} -stable, *i.e.* tous les pôles de \mathbf{A} se trouvent dans \mathcal{D} si et seulement si, il existe une matrice \mathbf{P} symétrique et définie positive, telle que [223, 224] :

$$\mathbf{M}_{\mathcal{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P}) = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{P}\mathbf{A}) + \mathbf{M}^T \otimes (\mathbf{A}^T\mathbf{P}) < 0$$

Le symbole \otimes désigne le *produit de Kronecker* défini par [225] :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq (A_{ij}\mathbf{B})_{ij}$$

Optimisation H_2

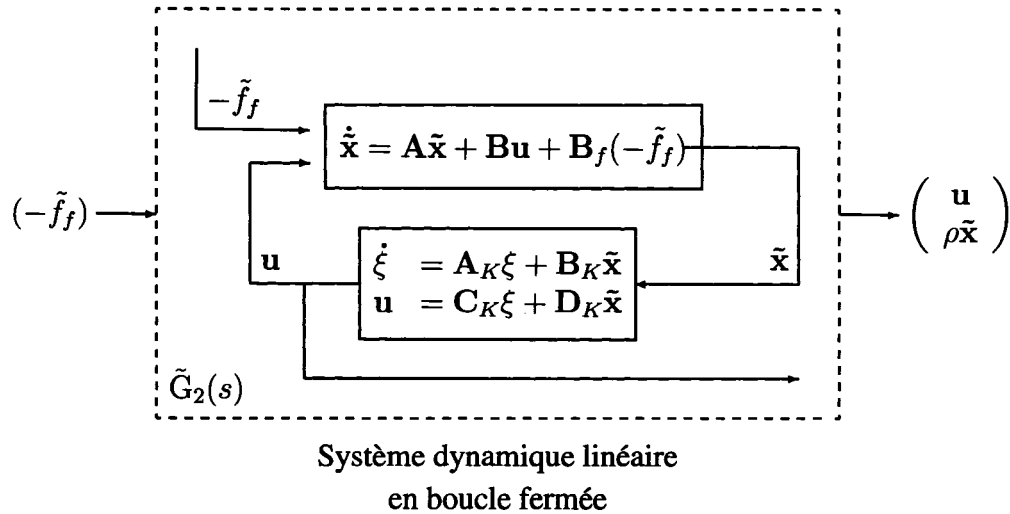


Figure 16 Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_2(s)$

D'une part, les stratégies de commande optimale classique (LQG) sont développées en général pour atteindre un plus haut niveau de précision à un coût d'énergie plus faible (*i.e.* sans utiliser des contrôleurs très énergiques comme les contrôleurs à gain intégrateur élevé). D'autre part, la force de frottement constitue une grandeur non mesurable. Son estimation qui est basée sur le modèle de *LuGre* à paramètres fixes aurait des valeurs résiduelles inévitables. Pour minimiser la sensibilité du coût de la commande u et celle de l'erreur de suivi \tilde{x} par rapport à l'erreur d'estimation de la force de frottement \tilde{f}_f (*i.e.* limiter simultanément les énergies d'erreur de suivi et de signal de commande), nous proposons le critère d'optimisation¹¹ H_2 [228] associé à la matrice de transfert (voir figure

¹¹ La norme H_2 , définie par [226, 227] :

$$\|H(s)\|_2^2 \triangleq \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} h_{ij}^2(t) dt$$

où $[h_{ij}(t)]$ est la matrice des réponses impulsionnelles associées au transfert $H(s)$, mesure l'énergie des écarts engendrés par des impulsions attaquant les processus générateurs des signaux exogènes [226, 228].

16) définie de $(-\tilde{f}_f)$ dans $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho\tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$. Dans la proposition suivante, nous établissons la caractérisation LMI associée à ce critère d'optimisation.

Proposition 2.4 : Soit $\tilde{G}_2(s)$ la matrice-colonne de transfert du système en boucle fermée entre $(-\tilde{f}_f)$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho\tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$. Alors, $\tilde{G}_2(s)$ est une fonction vectorielle strictement propre qui peut être représentée par la réalisation $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_f \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_2\mathbf{C}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

avec $\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \rho\mathbf{I}_2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, où \mathbf{I}_2 désigne la matrice identité d'ordre 2. En plus, $\|\tilde{G}_2\|_2^2 < \gamma$ si et seulement si, $\exists \tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_2^T > 0$ et $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ deux matrices de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$ telles que [204] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_2 + \tilde{\mathbf{P}}_2 \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T \tilde{\mathbf{P}}_2 & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_2 & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_2 & \mathbf{T} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.35)$$

et

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) < \gamma \quad (2.36)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité d'ordre 4. $\text{Tr}(\cdot)$ désigne la trace d'une matrice carrée.

Démonstration : Nous trouvons la formulation LMI d'optimisation H_2 dans plusieurs références comme [26, 204, 219] par exemple. ■

Le coefficient de pondération ρ est utilisé pour déterminer un compromis entre l'effort de commande et la performance de rejet de perturbation [204].

Optimisation de multi-objectifs

Le problème de synthèse de la commande linéaire (2.28), assujetti à la compensation de frottement (2.19) et (2.20) et la loi de *feed-back* (2.21) du solide (S) sous frottement (2.15) – (2.18), peut être ainsi assimilé à l'ensemble des conditions de stabilité (stabilité exponentielle et région de stabilité) et de performance (optimisation H_2) discutées précédemment. Nous rassemblons donc ces contraintes selon [203, 204] :

Problème 2.2 : Trouver (minimiser) $\gamma > 0$ sujet à

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_2 = \tilde{\mathbf{P}}_2^T > 0$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ des matrices de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, telles que les réalisations $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{d}})$ et $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ données respectivement par (2.29) et (2.33) satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36).

En général, dans ce genre de problème de faisabilité (ou d'optimisation) convexe de multi-objectifs, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lya-punov* $\tilde{\mathbf{P}}$ [218, 219]. Dans la suite, nous nous restreignons à la formulation *conservative*¹² suivante [203, 204] :

Problème 2.3 : Minimiser $\gamma > 0$ sujet à

$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ des matrices de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, telles que les réalisations $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{d}})$ et $(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}_2, \tilde{\mathbf{C}}_2)$ données respectivement par (2.29) et (2.33) satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36) avec

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_2 \quad (2.37)$$

Remarque 2.4 : La restriction supplémentaire (2.37) est ajoutée pour garantir la propriété de convexité du problème de minimisation à multi-objectifs 2.3 [218, 219]. Le critère H_2 calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème. Cependant, cette contrainte n'est trop pas restrictive (conservatrice) [219].

¹² La traduction exacte en français de ce terme; conservateur, trice; est rarement utilisée.

2.4.3.3 Synthèse du retour de sortie

Notons que les conditions que nous venons d'établir pour la conception du contrôleur (2.28) restent tout de même bilinéaires par rapport aux variables $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K . Il n'existe pas aujourd'hui de méthode directe pour résoudre ce genre de problèmes mais des méthodes itératives qui sont relativement difficiles à mettre en œuvre (de point de vue numérique). Par contre, si nous utilisons le changement de variable introduit dans [219], nous pouvons transformer ces inégalités matricielles bilinéaires¹³ en LMIs. Partitionnons $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ et telles que les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (2.39)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous proposons le résultat suivant [203, 204] :

Proposition 2.5 : Il existe une loi de commande linéaire par retour de sortie d'ordre plein (2.28), une matrice $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ symétrique et définie positive et une matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ symétrique qui satisfont (2.31), (2.32) et (2.34) – (2.36) si et seulement si, il existe des

¹³ En anglais, *bilinear matrix inequalities* (BMIs). Une *inégalité matricielle bilinéaire*, ou simplement BMI, est une expression de la forme [229, 230] :

$$\mathbf{F}(\Theta) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \Theta_i \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \Theta_j \Theta_k \mathbf{F}_{jk} \geq 0$$

où $\Theta \triangleq (\Theta_1, \dots, \Theta_m)$ est le vecteur des *variables de décision* et; pour tout $i \in \{0, 1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in \{1, \dots, m\}$; \mathbf{F}_i et \mathbf{F}_{jk} sont des matrices réelles symétriques dans $\mathbb{R}^{n \times n}$; avec $n \in \mathbb{N}$.

matrices $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ qui satisfont les LMIs suivantes [203, 204] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star \\ a_{31} & a_{32} & -\frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{D}_{uz}^T + \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.42)$$

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & \star & \star & \star \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & \star & \star \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & \star \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.43)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star \\ a_{21} & a_{22} & \star \\ \mathbf{B}_f^T & \mathbf{B}_f^T\mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} & \star \\ \mathbf{C}_2\mathbf{Q} + \mathbf{D}_2\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_2\hat{\mathbf{D}} & \mathbf{T} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.45)$$

et

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) < \gamma \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T \\ a_{21} &= \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T \\ a_{31} &= \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{B}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{C}} \\ a_{22} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{32} &= \mathbf{B}_z^T\mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{B}}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{D}} \end{aligned}$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous considérons la matrice de rang plein $\tilde{\Pi}$ suivante [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} Q & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix}$$

En multipliant la matrice \tilde{P} à gauche et à droite respectivement par $\tilde{\Pi}^T$ et $\tilde{\Pi}$ et en utilisant (2.39), la condition $\tilde{P} > 0$ devient (2.41). L'inégalité (2.42) est obtenue en multipliant (2.31) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, 1)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, 1)$ et en utilisant les changements des variables (2.40). L'inégalité (2.43) est obtenue en multipliant (2.32) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$. L'inégalité (2.44) est obtenue en multipliant (2.34) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, I)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, I)$. Et, l'inégalité (2.45) est obtenue en multipliant (2.35) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, I)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, I)$, en utilisant, à chaque fois, les changements des variables (2.40). ■

Les matrices A_K , B_K , C_K et D_K sont obtenues à partir de (2.40). Les LMIs (2.41) – (2.46) peuvent être résolues en utilisant la méthode d'optimisation du point intérieur [231] implémenté avec l'outil *LMI control toolbox* qui se trouve dans le logiciel MATLAB[®] [232].

2.4.4 Application numérique et simulation

Pour illustrer notre démarche, nous proposons l'exemple numérique suivant [105, 203] :

2.4.4.1 Données

Les valeurs numériques des paramètres du solide (S) sous frottement (voir figure 11) sont données dans le tableau II. La trajectoire désirée est donnée par $x_d = 0.1 \cos(0.32\pi t)$. Pour la synthèse du contrôleur dynamique, nous choisissons une marge de stabilité exponentielle d'amplitude $\alpha = 5$ et un disque de rayon $r = 50$ centré à l'origine [203]. Le paramètre de conditionnement ϵ est fixé à 10^{-3} .

Tableau II

Paramètres du solide (S) et du frottement de *LuGre*

Désignation	Valeur	Unité
m_S	1.62	kg
σ_0	10^5	N/m
σ_1	495.	Ns/m
σ_v	4.6	Ns/m
f_c	2.0	N
f_s	2.15	N
v_s	$5 \cdot 10^{-3}$	m/s

2.4.4.2 Résultats

Les matrices d'état du contrôleur dynamique linéaire sont données par :

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} -19.26 & 1.11 \\ -4.66 & -37.55 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} 51.82 & 2.51 \\ -64.85 & -6.03 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} -79.32 & 3.15 \\ -0.06 & -0.04 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} -73.51 & -45.53 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix}$$

La simulation est effectuée par l'entremise de l'algorithme `ode23` en utilisant le logiciel *Simulink* dans MATLAB[®]. Les résultats de simulation sont regroupés dans la figure 17, montrant respectivement (a) la position, (b) l'erreur de position transitoire, (c) la force de commande et la force de frottement, (d) la déformation interne du frottement et (e) les forces de commande et de frottement transitoires du solide (S) en mouvement. En plus, pour évaluer la qualité des résultats de notre approche, nous proposons de les comparer à ceux obtenus par la méthode de Canudas *et al.* [20]. Nous choisissons les mêmes gains proposés dans [105] et testés avec les mêmes paramètres de frottement (*i.e.* $k_p = 350$, $k_d = 450$ et $k = 0.001$). Les résultats de cette méthode sont regroupés dans la figure 18.

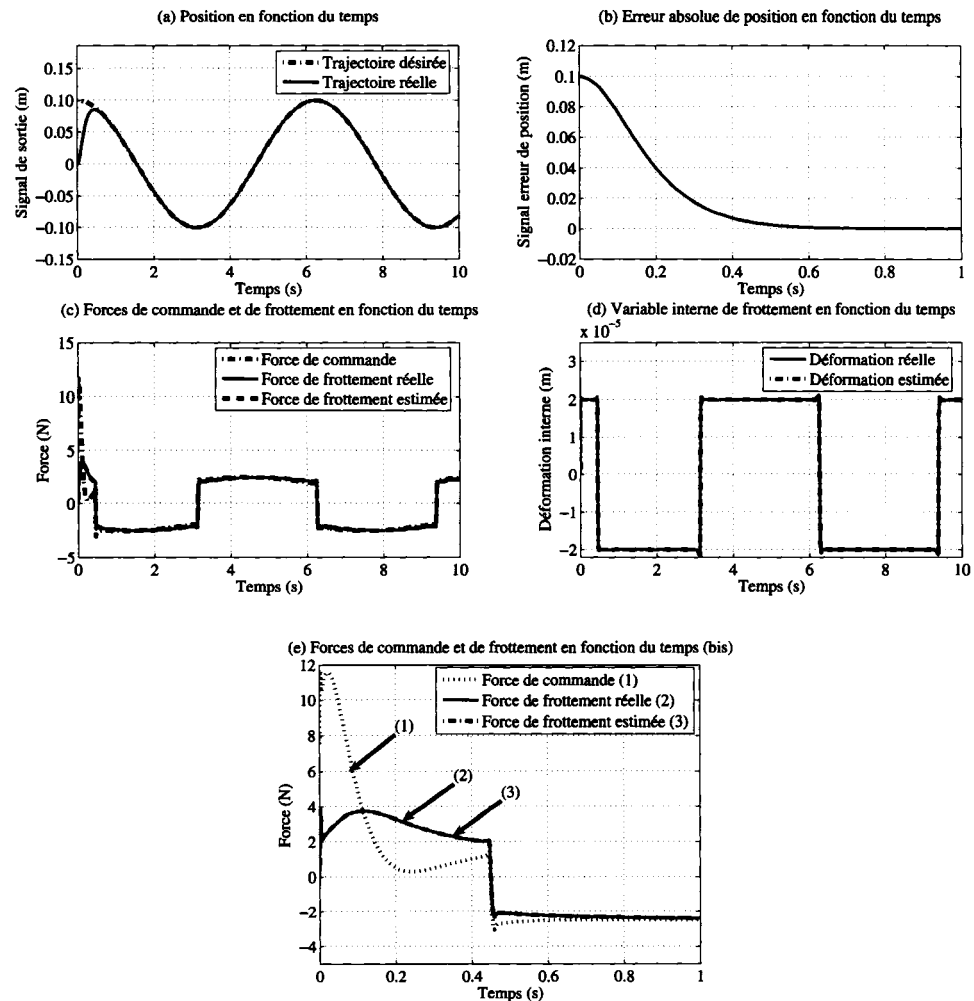


Figure 17 Performances de contrôle de position du solide (S) sous frottement

2.4.4.3 Commentaires et discussions

Nous constatons d'abord la convergence de la solution. Le dispositif de retour de sortie proposé ici permet de prédire efficacement l'évolution des états du système (estimation de la force de frottement et suivi de trajectoire de position), au profit d'un effort de commande raisonnable (*i.e.* pas trop élevé).

Le problème de faisabilité mis en œuvre par l'entremise de la méthode énoncée dans ce chapitre est résolu ainsi dans un contexte de multi-objectifs (*i.e.* à plusieurs contraintes)

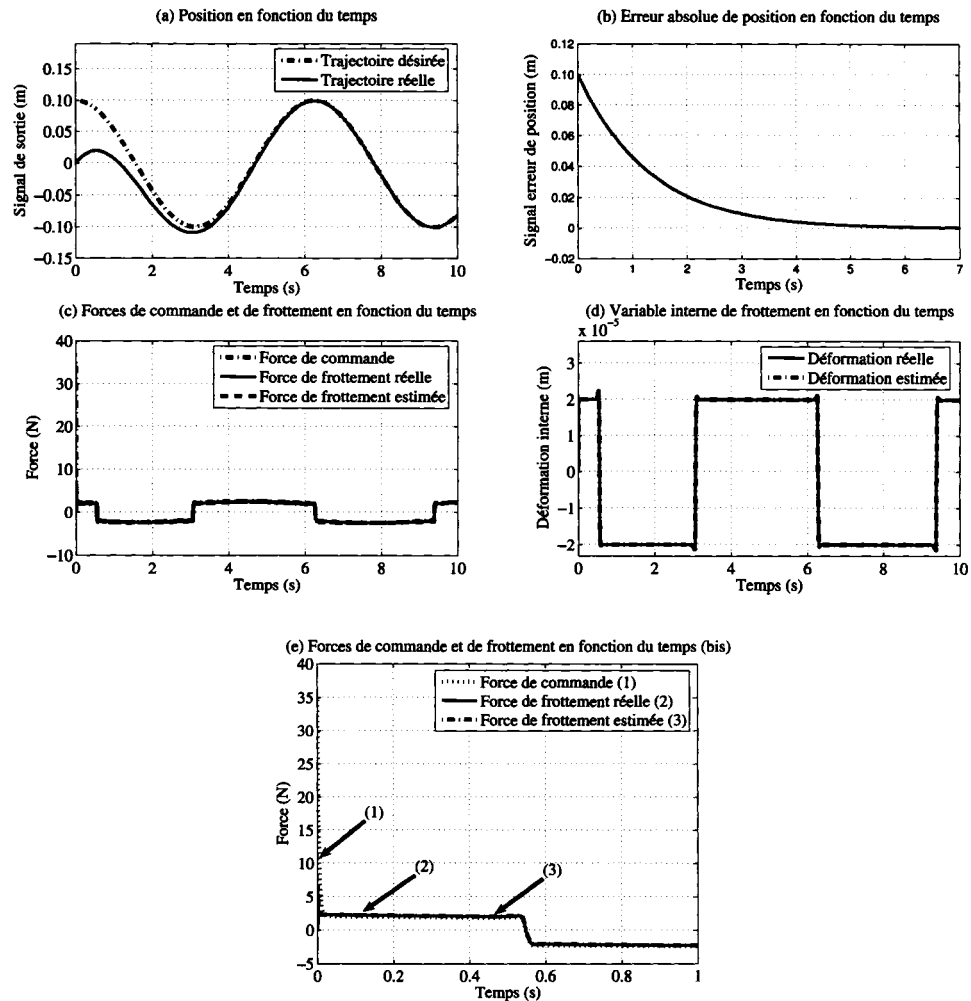


Figure 18 Performances de contrôleur de Canudas *et al.* de position du solide (S) sous frottement

grâce essentiellement à la flexibilité du type de contrôle linéaire proposé. Le retour de sortie dynamique offre plus de ddl comparé par exemple à la commande statique de retour d'état. En particulier, ce résultat peut être facilement étendu pour inclure une optimisation de type H_2 par exemple [204]. Grâce à cette technique de résolution de problème de commande de système sous frottement et cette structure dynamique du contrôleur, il est possible de spécifier, avec plus de rigueur, les conditions de la réponse; en particulier, la caractéristique de la bande passante en boucle fermée. Cette dernière constitue le maillon

faible dans la formule de contrôle statique (PD et PID filtré) discutée dans [20, 34]. Il faut noter, en plus, que l'utilisation de cette technique (commande linéaire par retour de sortie et résolution de problème à multi-objectifs) est rendue possible grâce au formalisme LMI; qui offre un outil puissant de résolution numérique, au moment où la solution analytique est difficile à avoir. Finalement, nous constatons l'amélioration de la réponse obtenue avec notre approche comparativement à celle obtenue avec le compensateur par retour d'état statique proposé par Canudas *et al.* [20]. Il est important de noter aussi que malgré un temps de réponse nettement plus court obtenu en utilisant notre méthode, la méthode de Canudas *et al.* exige un effort de commande beaucoup plus important.

2.5 Conclusion

Le travail présenté dans ce chapitre est dédié au développement d'une technique de commande stabilisante robuste des servo-systèmes mécaniques sous frottement. L'objectif principal est lié à :

- la résolution du problème de contrôle de mouvement avec une compensation de frottement basée sur le modèle de *LuGre*, jugé suffisamment complet et dont l'implémentation est relativement facile.
- l'utilisation de la commande linéaire par *feed-back* de sortie qui offre une extension par rapport aux modèles de commande statique par retour d'état. Cette extension permet d'augmenter la flexibilité de la technique et aussi les conditions de résolution du problème grâce au formalisme LMI qui lui est associé dans ce cas.

L'exemple illustratif que nous avons développé dans ce chapitre permet d'élucider le principe de la stratégie proposée dans un contexte simplifié. Des situations plus complexes et/ou plus complètes seront discutées dans les chapitres suivants. Il faut noter que l'étape de commande de force/couple constitue un artifice de moindre importance dans notre sujet. La stratégie adoptée dans cette étape diffère d'une application à une autre avec le niveau de couplage force/position et sa complexité. Le but reste, tout de même, de trouver une

solution à ce sous-problème qui s'adhère avec le schéma de principe mis en place pour la commande de position.

CHAPITRE 3

APPLICATION 1 : SYSTÈME ROBOTIQUE AVEC CONTACT SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION

« L'observation recueille les faits; la réflexion les combine; l'expérience vérifie le résultat de la combinaison. »

Denis Diderot (1713 – 1784)

3.1 Introduction

L'usage des robots en contact avec toute sorte de surface (table, mur, objet, *etc.*) est dédié à plusieurs types d'applications industrielles; de traitement de surface, de nettoyage, de traçage et de manipulation d'objet [12, 233, 234]. Et, dans la plupart de ces activités, le facteur précision de mouvement et aussi de force est déterminant. Or, cet objectif est souvent biaisé par la manifestation de frottement entre l'effecteur du robot et la surface de contact. Ainsi, l'énoncé de la réalisation d'un système robotique de mouvement et de force efficace se présente d'une manière analogue à celui du chapitre 2. En fait, il s'agit de la commande de système mécanique composé d'un ensemble de corps rigides (*i.e.* robot) assujettis à des contraintes de contact sous frottement (voir figures 19 et 20). La conception de la loi de commande est basée sur le modèle dynamique du robot, l'ensemble des équations des contraintes et le modèle dynamique de frottement (de *LuGre*). Nous allons proposer une stratégie de commande hybride qui utilise un ensemble de transformations non linéaires pour décomposer le système dynamique total en un sous-système dynamique de position sous frottement dans l'espace libre de mouvement et un autre de force dans l'espace de contrainte (voir figure 20). En particulier, dans la première transformation (de dynamique de position), nous proposons une nouvelle expression (comparativement à l'expression classique connue dans la littérature); qui utilise un changement de variable inspiré de celui introduit dans la commande adaptative indirecte des robots par Li et Slotine [29] pour tenir compte du modèle dynamique de *LuGre* dans la compensation de frottement. Dans ce premier sous-système, nous allons, en effet, développer un schéma

de contrôle de position de l'effecteur sur la surface de contact avec une compensation de frottement; selon le principe introduit dans le chapitre 2. Cette commande, conçue ainsi autour de la notion de passivité de la dynamique en boucle fermée, est basée sur un retour de sortie (l'ensemble des états mesurables du système) dynamique linéaire. La notion de stabilité de la dynamique de position en boucle fermée sera, ensuite, discutée et formulée dans un contexte de multi-objectifs par des LMIs; grâce auxquelles, nous allons pouvoir réaliser la synthèse de la commande linéaire par *feed-back* de sortie. Notons, quand-même, que pour compléter la commande hybride, nous allons établir le schéma de commande de la force normale appliquée sur la surface de contact pendant le mouvement. Finalement, des résultats expérimentaux vont permettre de valider notre approche.

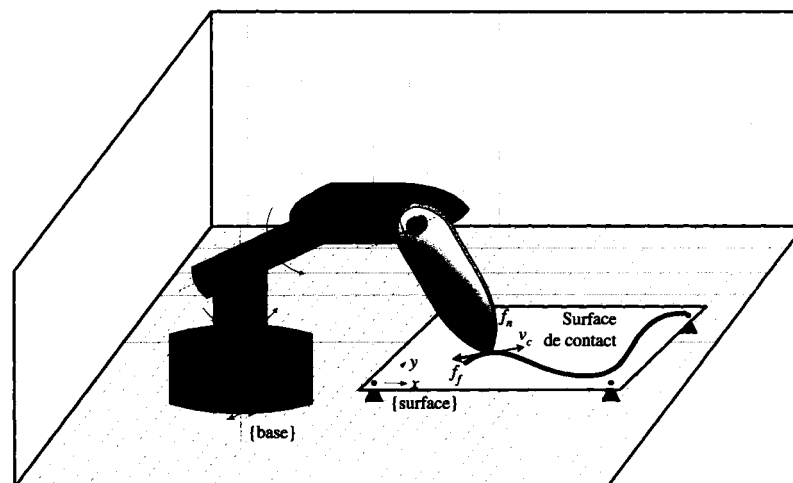


Figure 19 Robot en mouvement sur une surface avec frottement

3.2 Modélisation d'un système robotique sous frottement de contact

Dans cette section, nous introduisons le modèle dynamique du robot, l'ensemble des équations algébriques de contraintes et le modèle dynamique de frottement dans l'espace libre de mouvement (voir figure 20). En plus, nous considérons que le robot est équipé par un ensemble d'actionneurs électriques dont les dynamiques sont suffisamment rapides par

rapport à celles des articulations du robot; autrement le couple au niveau de chaque arbre moteur est supposé équivalent à celui au niveau de l'articulation (voir figure 20).

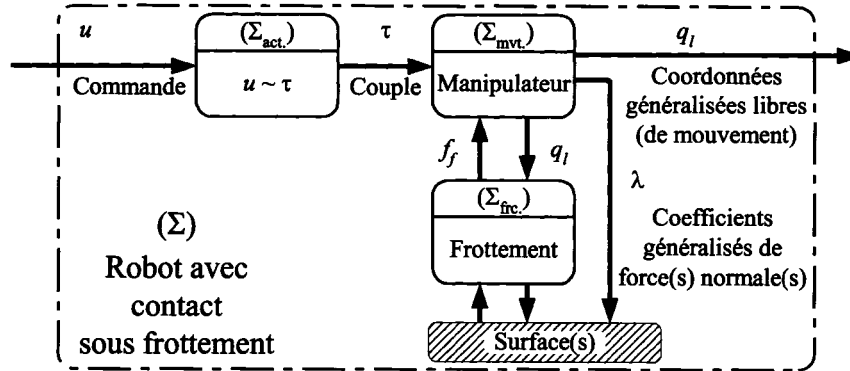


Figure 20 Schéma de base de système robotique avec contrainte sous frottement

3.2.1 Modélisation du robot sous contrainte de contact

Considérons un robot non redondant, de n articulations rigides, soumis aux contraintes de contact au niveau de l'effecteur avec un milieu rigide (voir figure 19). Le modèle dynamique de mouvement peut être décrit par l'équation de *Lagrange*, dans l'espace articulaire [125, 235] :

$$\tau = B\Gamma = M(q)\ddot{q} + H(\dot{q}, q) + J_e(q)^T(f_n + f_t) \quad (3.1)$$

où $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coordonnées généralisées, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'inertie, $H(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples centrifuges, de *Coriolis* et de gravité, $J_e(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice *Jacobienne* non singulière du système, $f_n \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de force normale de contact exprimée dans l'espace cartésien, $f_t \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de force tangentielle de contact exprimée dans l'espace cartésien, $\tau \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples articulaires appliqués, $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples appliqués au niveau des actionneurs et $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice d'entrée non singulière modélisant les réducteurs de vitesse et les modules de couplage. En outre, pour simplifier la modélisation, nous admettons que nous disposons d'un actionneur pour chaque articulation.

En considérant la rigidité du contact avec le milieu, les contraintes holonomiques¹ du robot peuvent être exprimées par le système d'équations algébriques d'ordre m décrit dans l'espace des vitesses [141] :

$$D(q) \cdot \dot{X} = D(q)J_e(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (3.2)$$

où X et \dot{X} , des vecteurs de \mathbb{R}^n , représentent respectivement le vecteur position/orientation et le vecteur vitesse de l'élément final exprimés dans l'espace cartésien et $D(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang plein. En général, la matrice D^T spécifie la direction normale (*i.e.* orthogonale) de la (ou les) surface(s) de contrainte(s); *i.e.* la force normale de contact f_n peut être exprimée par [236, 237] :

$$f_n = D(q)^T \cdot \lambda \quad (3.3)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur des multiplicateurs de *Lagrange* [124, 126]. Si les colonnes de D^T sont unitaires, alors λ représente le vecteur des amplitudes des forces normales appliquées sur les surfaces de contact [124, 138].

La force tangentielle de contact f_t représente l'ensemble des forces de frottement et est définie par [124, 126] :

$$f_t = G(q)^T \cdot f_f \quad (3.4)$$

où $f_f \in \mathbb{R}^l$, $l = n - m$, représente la décomposition de la force de frottement dans le sous-espace (ou surface(s)) de mouvement au niveau du point de contact.

En plus, nous avons

$$v_c = G(q) \cdot \dot{X} = G(q)J_e(q) \cdot \dot{q} \quad (3.5)$$

$v_c \in \mathbb{R}^l$ définit le vecteur vitesse de déplacement de l'effecteur sur la surface de contact.

¹ Une contrainte holonomique est une contrainte de position/orientation qui induit la présence de contrainte de vitesse (contrainte intégrable) obtenue par dérivation de la contrainte de position. Par contre, une contrainte non holonomique est une contrainte de vitesse non intégrable indépendante de la présence d'une contrainte holonome (de position/orientation).

Alors, $G \in \mathbb{R}^{l \times n}$ satisfait :

$$D(q) \cdot G(q)^T = 0 \quad (3.6)$$

i.e. les colonnes de G^T engendrent l'espace nul de D qui constitue le sous-espace tangent à la surface de contrainte au niveau du point de contact [141]. Sans perte de généralité et en utilisant des permutations appropriées des colonnes, nous partitionnons la matrice $D_e = D \cdot J_e$ comme suit :

$$D_e(q) = D(q) \cdot J_e(q) = \left(\underbrace{d_{e_1} \mid d_{e_2} \mid \dots \mid d_{e_l}}_{D_{ml}} \mid \underbrace{d_{e_{l+1}} \mid \dots \mid d_{e_{l+m}}}_{D_m} \right) \quad (3.7)$$

avec $D_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice non singulière et $D_{ml} \in \mathbb{R}^{m \times l}$.

À partir de (3.2) et (3.7), nous proposons la partition du vecteur des coordonnées généralisées q comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} q_l \\ q_m \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

avec $q_l \in \mathbb{R}^l$ et $q_m \in \mathbb{R}^m$. Alors, nous avons :

$$D_{ml}\dot{q}_l + D_m\dot{q}_m = 0 \quad (3.9)$$

Pendant le déplacement sous contrainte, l'espace articulaire du robot possède seulement l variables indépendantes [141]. Dans ce cas, nous écrivons

$$\dot{q} = J_l(q)\dot{q}_l \quad (3.10)$$

et

$$\ddot{q} = \dot{J}_l\dot{q}_l + J_l\ddot{q}_l \quad (3.11)$$

où la matrice $J_l \in \mathbb{R}^{n \times l}$ est donnée par :

$$J_l = \begin{pmatrix} I_l \\ -D_m^{-1}D_{ml} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

I_l est la matrice identité d'ordre l . D'après la relation (3.10), les colonnes de la matrice J_l engendrent le sous-espace articulaire des vitesses du manipulateur compatible avec les contraintes de contact (3.2) [141]. À partir de (3.7) et (3.12), il suit :

$$J_l^T \cdot D_e^T = 0 \quad (3.13)$$

Ensuite, d'après (3.6), (3.7) et (3.13), la matrice G peut être choisie comme suit :

$$G = (J_e J_l)^T \quad (3.14)$$

3.2.2 Modélisation de frottement

La force (ou la résultante des forces) de frottement f_f (voir figure 19); qui existe(nt) entre l'élément final du manipulateur et la surface (ou l'ensemble des surfaces) de contact; introduite dans la relation (3.4) sera exprimée en fonction de la force normale f_n , donnée par la relation (3.3). En effet, nous supposons que la force de frottement est directement proportionnelle à la force normale de contact pendant le glissement [235]. En plus, les différentes amplitudes de cette force de frottement sont intégrées à partir du modèle de *LuGre*. Dans le cas d'une seule surface de contact (*i.e.* $m = 1$), et sans perte de généralité, nous décrivons le modèle dynamique de frottement associé au mouvement de l'effecteur sur une surface² de dimension 2 par [235] :

$$f_f = \lambda \mu \quad (3.15)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ désigne l'amplitude de la force normale de contact telle qu'introduite dans (3.3) sous sa forme générale, et $\mu = \begin{pmatrix} \mu_x & \mu_y \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ désigne le vecteur coefficient normalisé de la force de frottement dans les directions perpendiculaires³ x et y qui engendrent le sous-espace de mouvement [217].

Dans la même perspective de l'approche introduite par Kankaanranta et Koivo [154], nous exprimons la force de frottement de l'effecteur sur la surface de contact à partir de la

² Cf. paragraphe 2.2.3.2 dans le chapitre 2.

³ Cf. paragraphe 2.2.3.2 dans le chapitre 2.

relation (3.4) comme suit :

$$f_t = G_\mu^T \cdot \lambda = G^T \cdot \mu \lambda \quad (3.16)$$

où $G_\mu \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice coefficient de frottement (en particulier, ici, G_μ est une matrice-ligne de \mathbb{R}^2).

Dans la suite, nous rappelons le modèle bidimensionnel de *LuGre* [217] introduit dans le chapitre 2. Soit $z = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}^T$ le vecteur déformation interne des lames au point de contact décomposé dans les directions respectives x et y et $v_c = \begin{pmatrix} v_{cx} & v_{cy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur vitesse tangentielle de l'effecteur sur la surface de contact, tel que présenté dans (3.5). Le modèle bidimensionnel de frottement de *LuGre* s'écrit comme suit [217] :

$$\dot{z} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 z + v_c \quad (3.17)$$

et

$$\mu = \Sigma_0 z + \Sigma_1 \dot{z} + \Sigma_v v_c \quad (3.18)$$

avec

$$g(v_c) = \frac{\|M_c^2 v_c\|}{\|M_c v_c\|} + \left(\frac{\|M_s^2 v_c\|}{\|M_s v_c\|} - \frac{\|M_c^2 v_c\|}{\|M_c v_c\|} \right) e^{-\frac{\|v_c\|^2}{v_s^2}} \quad (3.19)$$

où $\Sigma_0 = \mathbf{diag}(\sigma_{0x}, \sigma_{0y})$, $\Sigma_1 = \mathbf{diag}(\sigma_{1x}, \sigma_{1y})$, $\Sigma_v = \mathbf{diag}(\sigma_{vx}, \sigma_{vy})$, $M_c = \mathbf{diag}(\mu_{cx}, \mu_{cy})$, $M_s = \mathbf{diag}(\mu_{sx}, \mu_{sy})$ et v_s sont les paramètres de frottement de *LuGre* dans les directions x et y . Et, nous considérons les hypothèses suivantes [20, 76, 238] :

H3.1 Le vecteur déformation interne des lames z est non mesurable.

H3.2 Les paramètres du modèle de *LuGre* sont supposés fixes et connus *a priori*.

3.3 Stratégie de commande hybride d'un système robotique sous frottement de contact

En considérant la référence de position et vitesse exprimée dans l'espace cartésien opérationnel, nous procédons au préalable à une transformation de ces trajectoires dans l'espace

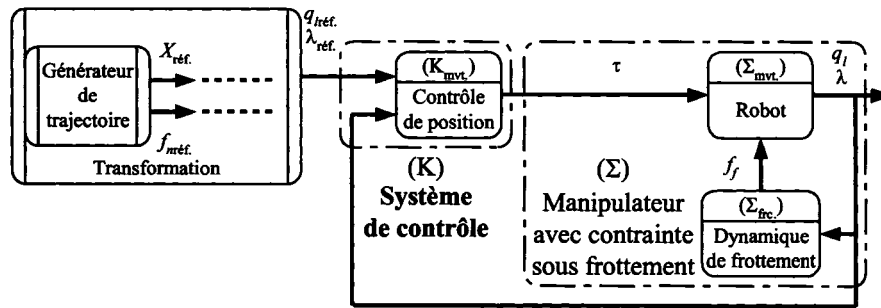


Figure 21 Schéma de base de contrôle hybride de position/force de robot avec contrainte sous frottement

articulaire par l'intermédiaire des modèles, géométrique et cinématique, inverses (voir figure 21). L'approche de contrôle que nous allons développer est basée sur le principe général de dualité de commande de position et de force et celui d'orthogonalité des sous-espaces respectifs de déplacement et de force de réaction du robot en contact avec le milieu de contrainte [238].

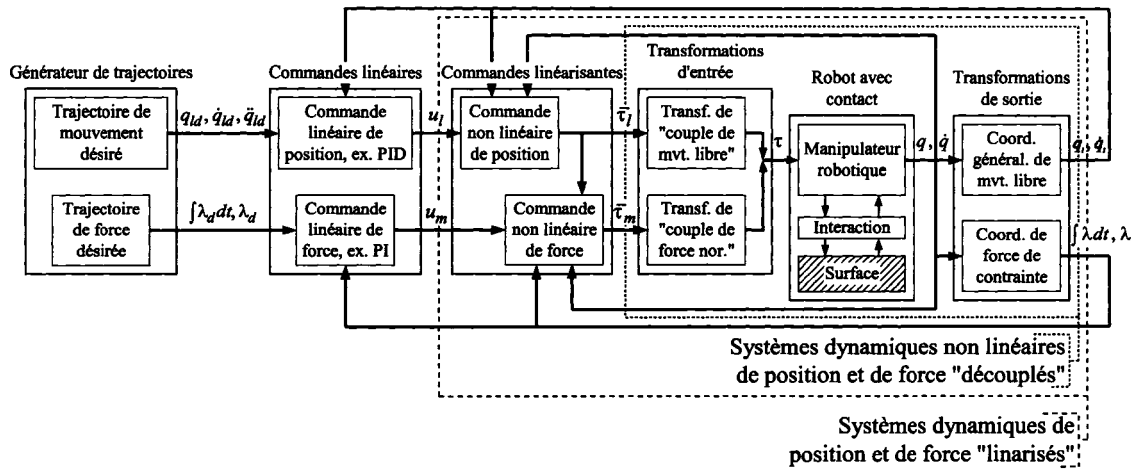


Figure 22 Schéma-bloc de la commande hybride classique de position/force d'un robot avec contact

Considérons un système de n coordonnées généralisées soumis à m contraintes holonomiques. Il y a $(n - m)$ coordonnées généralisées linéairement indépendantes (voir figure 22); qui sont utilisées pour projeter la dynamique du système dans le sous-espace arti-

culaire réduit de mouvement [141]. La technique de couple pré-calculé (linéarisation par *feed-back*) peut être ainsi établie pour linéariser le sous-système de mouvement. Ensuite, un contrôle de force vient compléter la stratégie.

Dans le cas de contact sans frottement entre le manipulateur et le milieu de contact, la stratégie de contrôle hybride, basée essentiellement sur la technique de couple pré-calculé classique (voir figure 22) permet d'atteindre la convergence globale de suivi [138, 141]. Par contre, pour tenir compte des aspects de frottement impliqués dans le contact effecteur/surface, il est indispensable de modifier la technique de contrôle (voir figure 23) pour trouver la solution et garantir la convergence de l'erreur de suivi (*i.e.* la stabilité du système); en particulier si le frottement est régi par le modèle dynamique de *LuGre*. Nous proposons une nouvelle forme de linéarisation judicieusement choisie pour transformer les dynamiques respectives de position et de force (voir figure 23) en tenant compte du modèle dynamique de frottement de *LuGre* [238]. Dans le présent travail, nous supposons que le modèle dynamique est parfaitement connu (ou exact) et nous ne traitons pas le cas des perturbations éventuelles des termes dynamiques (d'inertie, de *Coriolis*, de gravité ou encore de la matrice *Jacobienne*). Par la suite, nous procédons selon le schéma général introduit dans le chapitre 2 pour développer un contrôle de mouvement dans l'espace réduit de contact et une compensation dynamique de frottement par *feed-back*. L'ensemble est basé sur une loi de commande dynamique par retour de sortie linéaire. La synthèse de ce contrôleur sera effectuée par l'entremise d'une formulation LMI. Finalement, une action intégrale linéaire classique est proposée pour réguler la dynamique de force (voir figure 23).

3.3.1 Estimation de frottement

Admettons les hypothèses H3.1 et H3.2 citées dans la section précédente. Nous proposons l'estimateur de frottement suivant, basé sur le modèle bidimensionnel de *LuGre* [238]

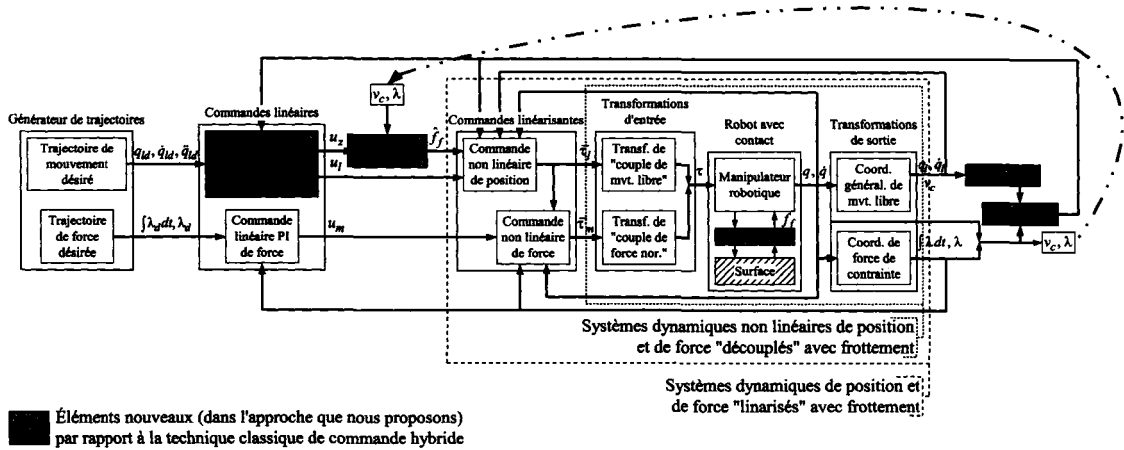


Figure 23 Schéma-bloc de la commande hybride modifiée de mouvement/force d'un robot avec contrainte sous frottement

introduit dans la section §3.2.2 :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 \hat{z} + v_c - u_z \quad (3.20)$$

et

$$\hat{f}_f = \lambda \hat{\mu} = \lambda (\Sigma_0 \hat{z} + \Sigma_1 \dot{\hat{z}} + \Sigma_v v_c) \quad (3.21)$$

où $g(v_c)$ est donnée par (3.19). $\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_x & \hat{z}_y \end{pmatrix}^T$ désigne le vecteur d'état interne estimé, $\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_x & \hat{\mu}_y \end{pmatrix}^T$ le vecteur coefficient de frottement estimé, $\hat{f}_f = \begin{pmatrix} \hat{f}_{fx} & \hat{f}_{fy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur force de frottement estimé et $u_z = \begin{pmatrix} u_{zx} & u_{zy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur correction de la déformation des lames. Cette correction représente un retour de sortie dynamique sur l'observateur à partir de l'ensemble des états mesurables du système de mouvement. La structure de cet observateur est basée, dans l'ensemble, sur le principe présenté dans [203, 217]; qui définit un *feed-back* direct sur l'observateur pour maintenir une évolution dynamique robuste de ce dernier vis-à-vis de la dynamique de mouvement. D'une part, cette structure d'observation en boucle fermée permet de mieux exploiter la propriété de passivité du modèle de frottement [203]. D'autre part, un observateur en boucle fermée reste plus robuste que celui de la même forme mais qui est introduit en boucle ouverte [239]. En principe, il permet d'agir d'une meilleure façon vis-à-vis des performances en régime transitoire.

Notons $\tilde{z} = z - \hat{z}$, $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$ et $\tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f$ les erreurs d'estimations respectives du modèle de frottement. En utilisant (3.15), (3.17), (3.18), (3.20) et (3.21), il convient d'écrire les équations d'erreurs d'estimation comme suit :

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 \tilde{z} + u_z \quad (3.22)$$

et

$$\tilde{f}_f = \lambda \tilde{\mu} = \lambda(\Sigma_0 \tilde{z} + \Sigma_1 \dot{\tilde{z}}) \quad (3.23)$$

Remarque 3.1 : L'application définie de u_z dans \tilde{z} , selon la relation (3.22), est dissipative en considérant la fonction de stockage $V(t) = \tilde{z}^T \tilde{z}$ [20, 238] (Cf. propriété 2.3 énoncé dans le chapitre 2 dans le cas de frottement unidimensionnel).

Nous verrons dans la suite l'utilité de cette propriété dans la réalisation de la stratégie de commande stabilisante.

3.3.2 Commande de position sous contrainte

3.3.2.1 Réduction du sous-espace de mouvement sous frottement

Dans cette section, nous appliquons un changement de variable [238] dans l'équation dynamique du robot sous contrainte pour : (a) scinder la dynamique de mouvement dans le sous-espace libre de celle de force normale appliquée sur la surface de contact; (b) linéariser les nouvelles structures réduites. Nous pré-multiplions⁴ la relation (3.1) par J_l^T , donnée par (3.12). En utilisant (3.3), (3.4), (3.10), (3.11) et (3.13) – (3.15), nous transformons la dynamique complète du robot libre en une autre réduite sous contrainte selon [141] :

$$\bar{\tau}_l = \bar{B}_l(q)\Gamma = \bar{M}_l(q)\ddot{q}_l + \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) + \bar{G}_l(q)\lambda\mu \quad (3.24)$$

⁴ Il s'agit d'une multiplication matricielle à gauche.

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_l = J_l^T \tau \\ \bar{B}_l(q) = J_l^T B \\ \bar{M}_l(q) = J_l^T M(q) J_l \\ \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) = J_l^T (M(q) \dot{J}_l \dot{q}_l + H(\dot{q}_l, q)) \\ \bar{G}_l(q) = G J_e J_l = G G^T \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$\bar{G}_l(q)$ est une matrice symétrique et définie positive, si J_e est non singulière.

Dans la suite, étant donné $q_{ld}(t)$, $\dot{q}_{ld}(t)$ et $\ddot{q}_{ld}(t)$ respectivement la trajectoire désirée et ses dérivées première et deuxième exprimées dans l'espace articulaire réduit de mouvement. Notons $\tilde{q}_l = q_l - q_{ld}$ l'erreur de suivi. Nous supposons que la force de contact est non nulle (*i.e.* $\lambda \neq 0$). Soit $\nu > 0$. Et, nous posons le terme non stationnaire $\beta(t, q)$ et la variable dynamique χ selon :

$$\beta(t, q) = \frac{1}{\lambda(t)} \bar{G}_l^{-1}(q) \bar{M}_l(q) \text{ et } \chi = \dot{\tilde{q}}_l + \nu \tilde{q}_l \quad (3.26)$$

Nous proposons l'expression de couple pré-calculé suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_l = & \bar{M}_l(q) (\ddot{q}_{ld} - \nu \dot{\tilde{q}}_l + \beta^{-1}(t, q) (u_l - \dot{\beta}(t, q) \chi + \nu \beta(t, q) \chi)) + \\ & \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) + \bar{G}_l(q) \lambda(t) \hat{\mu} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le terme u_l désigne l'action directe du contrôleur dynamique de mouvement obtenu par retour de sortie (appliqué sur les états mesurables du système de mouvement). L'expression (3.27) représente (voir figure 23) une version modifiée de celle de couple pré-calculé classique (voir figure 22) présentée dans la littérature [138, 141, 237]. Cette transformation est inspirée, intuitivement, de l'idée *célébrissime* de commande adaptative indirecte des robots introduite par Li et Slotine [29]. Dans cette nouvelle expression, nous tenons compte, en effet, de l'aspect d'estimation qui pourrait modifier le contexte de stabilisation de l'erreur de suivi de trajectoire. La différence majeure entre la loi de commande (3.27) et l'expression originale d'une commande de couple pré-calculé [138] réside dans le premier terme du membre de droite (*i.e.* celui qui multiplie $\bar{M}_l(q)$). Ce terme est introduit pour anéantir la plupart des termes non linéaires et non stationnaires du système

réduit de mouvement sous contrainte. En plus, il permet de compenser éventuellement les imprécisions dans l'estimation de la force de frottement.

Ensuite, nous proposons

$$\bar{q} = \beta(t, q)\chi \quad (3.28)$$

le nouveau vecteur d'état pour exprimer la dynamique d'erreur de position. Si nous substituons (3.27) dans (3.24), puis, nous dérivons l'expression (3.28), alors nous obtenons :

$$\dot{\bar{q}} = -\nu\bar{q} + u_l - \tilde{\mu} \quad (3.29)$$

où $\tilde{\mu}$ est l'erreur d'estimation du coefficient de frottement introduite dans (3.23).

Le changement de variable donné par (3.26) et (3.28) et la nouvelle expression du couple pré-calculé donnée par (3.27) permettent de formuler le problème par un ensemble de deux sous-systèmes inter-connectés passifs, respectivement linéaire et non linéaire (voir figure 24), grâce aux équations d'états (3.22), (3.23) et (3.29). Ainsi, par l'entremise de la propriété de passivité de la partie dynamique non linéaire, la stabilité de la partition linéaire est assurée par la propriété SPR en utilisant le théorème de passivité. Cette propriété sera par la suite étendue et traitée pour établir la synthèse des différents termes du contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique proposé; en utilisant les outils des LMIs.

3.3.2.2 Commande linéaire de position

Considérons l'ensemble des dynamiques d'erreurs d'estimation de frottement (3.22) et (3.23) et de suivi de trajectoire de déplacement (3.29). Nous supposons le nouveau vecteur d'état dynamique \bar{q} mesurable, défini par les relations (3.26) et (3.28). Notons $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_l^T & u_z^T \end{pmatrix}^T$ le vecteur de commande où u_l et u_z sont respectivement introduits dans (3.27) et (3.20). La partition linéaire du système total; qui correspond à la dynamique d'erreur de mouvement; peut être exprimée par la représentation d'état suivante [238] :

$$\dot{\bar{q}} = \mathbf{A}\bar{q} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_\mu(-\tilde{\mu}) \quad (3.30)$$

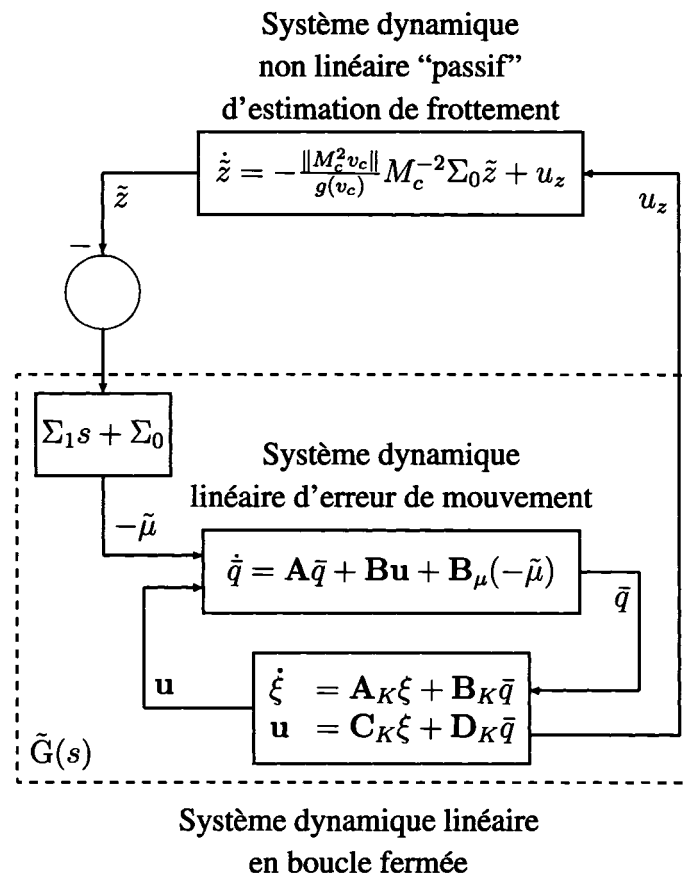


Figure 24 Schéma-bloc des dynamiques d'erreurs d'estimation et de suivi de trajectoire

avec

$$\mathbf{A} = -\nu \mathbf{I}_l, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_l & \mathbf{0}_l \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_\mu = \mathbf{I}_l \quad (3.31)$$

ν est le gain introduit (3.26). \mathbf{I}_l et $\mathbf{0}_l$ représentent respectivement la matrice identité et la matrice carrée nulle d'ordre l . Le vecteur de commande \mathbf{u} représente la sortie d'un contrôleur dynamique linéaire de rang plein (voir figure 24) représenté par les équations d'état et de sortie suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \bar{q} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \bar{q} \end{cases} \quad (3.32)$$

où ξ désigne le vecteur d'état interne du contrôleur dynamique de dimension l et \bar{q} le vecteur d'état d'erreur mesurable donné par (3.26) et (3.28). \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K des matrices de $\mathbb{R}^{l \times l}$, \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2l \times l}$.

La structure dynamique en boucle fermée, de l'erreur de position et de l'erreur d'estimation de frottement, est illustrée dans la figure 24. Dans la proposition suivante, nous établissons la représentation de cette structure pour déduire ensuite la condition de stabilité et sa preuve d'existence [238].

Proposition 3.1 : Étant donné $\tilde{G}(s)$ la matrice de transfert de la boucle fermée entre $-\tilde{z}$ et u_z (voir figure 24). $\tilde{G}(s)$ est un système propre qui peut être représenté par la réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ donnée par [238] :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_z + \mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{uz}\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_{uz}\mathbf{C}_K \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{D} = \mathbf{D}_{uz}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec $\mathbf{B}_z = \mathbf{B}_\mu\Sigma_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}_\mu\Sigma_1$, $\mathbf{D}_z = \mathbf{B}_\mu\Sigma_1$ et $\mathbf{D}_{uz} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_l & \mathbf{I}_l \end{pmatrix}$.

Démonstration : Notons $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ le vecteur d'état en boucle fermée associé à la réalisation (3.33). En utilisant l'expression de $\tilde{\mu}$ dans (3.23), puis (3.30) et (3.32), nous obtenons (3.33) (Cf. démonstration de la proposition 2.1 présentée dans le chapitre 2). ■

Remarque 3.2 : Le lien direct entre $-\tilde{z}$ et u_z (i.e. la matrice directe \tilde{D}) est obtenu grâce au changement de variable (3.28). Ce terme sera très utile pour assurer la stabilité exponentielle du système asservi.

Dans la suite, nous allons utiliser le théorème de passivité et aussi la propriété de passivité du modèle de *LuGre* pour déduire la condition sur le contrôleur qui garantit la stabilité du système en boucle fermée. Cette condition sera donnée par la propriété SPR de la partition linéaire du système asservi et traitée ensuite par une formulation LMI.

3.3.2.3 Condition de stabilité et stabilité exponentielle

Considérons la partition linéaire de la dynamique d'erreur de position, donnée par la réalisation (3.33), et admettons que l'estimation de coefficient de frottement est donnée par

(3.22) et (3.23). Le système total est représenté par la figure 24, dont les conditions de stabilité sont discutées dans la proposition suivante [238] :

Proposition 3.2 : Les erreurs de suivi et d'estimation sont globalement exponentiellement stables s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [219, 238] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{1}{\epsilon^2} (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

où ϵ est une constante positive de conditionnement. \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous reprenons la définition du vecteur d'état $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ associé à la réalisation (3.33). Soit $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \end{pmatrix}$ le vecteur d'état du système total en boucle fermée. Et, nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} + \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{z}^T \tilde{z}$$

En suivant le même raisonnement appliqué dans la démonstration de la proposition 2.2 dans le chapitre 2 et sachant que $g(v_c) > 0$ et $M_c^{-2} \Sigma_0 > 0$ (*i.e.* définie positive), nous constatons que la dérivée totale de V , par rapport au temps t , le long des trajectoires du système est définie négative si la condition (3.34) est vraie. Par conséquent, les variables internes du système bouclé $\tilde{\mathbf{X}}$ et \tilde{z} sont bornées et convergent exponentiellement vers zéro [146]. Or, d'après la définition de $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$, \bar{q} tend vers zéro. Notons que les erreurs dynamiques $\tilde{\mathbf{X}}$ et \tilde{q}_i , données par (3.22), (3.23), (3.26), (3.28), (3.29) et (3.32), peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = f_1(\tilde{\mathbf{X}}) \\ \dot{\tilde{q}}_i = f_2(t, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{q}_i) = -\nu \tilde{q}_i + \beta(t, q)^{-1} \bar{q} \end{cases}$$

avec f_1 et f_2 des fonctions continues et différentiables, telles que $f_1(t, 0) = f_2(t, 0, 0) = 0, \forall t \geq 0$. Notons que leurs dérivées par rapport à leurs variables respectives sont bornées. Par conséquent, $\dot{\tilde{q}}_l = f_2(t, 0, \tilde{q}_l) = -\nu\tilde{q}_l$ est exponentiellement stable. Donc, le système total donné par f_1 et f_2 est exponentiellement stable (voir Théorème⁵ 103 dans [146]), *i.e.* \tilde{q}_l tend exponentiellement vers zéro. Finalement, \tilde{f}_f converge vers zéro [146], puisque \tilde{f}_f est donnée par (3.22) et (3.23). ■

Remarque 3.3 : Le coefficient ϵ (*Cf.* remarque 2.2 notée dans le chapitre 2) est choisi suffisamment petit pour garantir un bon conditionnement de la matrice donnée dans l'inégalité (3.34).

Néanmoins, l'inconvénient de cette condition de stabilité est lié à la vitesse de convergence du vecteur des erreurs vers zéro; qui reste mal posée. Pour garantir, en effet, une stabilité exponentielle de l'ensemble du système en boucle fermée (voir figure 24); *i.e.* (3.22), (3.23) et (3.33); nous remplaçons la condition SPR donnée dans (3.34) par le résultat suivant :

Proposition 3.3 : Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \alpha < \nu$ (ν est le gain introduit dans (3.29)). Les erreurs de suivi et d'estimation convergent exponentiellement vers zéro, avec un taux de décroissance α , s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [238] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{1}{\epsilon^2} (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}^T) + 2\frac{\alpha}{\epsilon^2} \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous considérons les changements de variables suivants : $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$, $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$ et $\bar{u}_z = e^{\alpha t} u_z$. Et, nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{1}{\epsilon^2} \bar{z}^T \bar{z}$$

⁵ *Cf.* théorème de stabilité des systèmes hiérarchiques dans [146].

En suivant le même raisonnement appliqué dans la démonstration de la proposition 2.3, nous constatons que la dérivée totale de V , par rapport au temps t , le long des trajectoires du système, est définie négative, si (3.35) est vraie. Par conséquent, $\bar{\mathbf{X}}$ et $\bar{\mathbf{z}}$ sont globalement quadratiquement stables. Ensuite, $\tilde{\mathbf{X}} = e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{X}}$ et $\tilde{\mathbf{z}} = e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{z}}$ convergent vers zéro, au moins, exponentiellement avec un taux de décroissance α [146, 216]. La suite de la démonstration est similaire à celle de la proposition 3.2. ■

Nous traiterons le problème de synthèse du contrôleur linéaire par les outils LMI.

3.3.3 Formulation LMI du problème

3.3.3.1 Conception à multi-objectifs

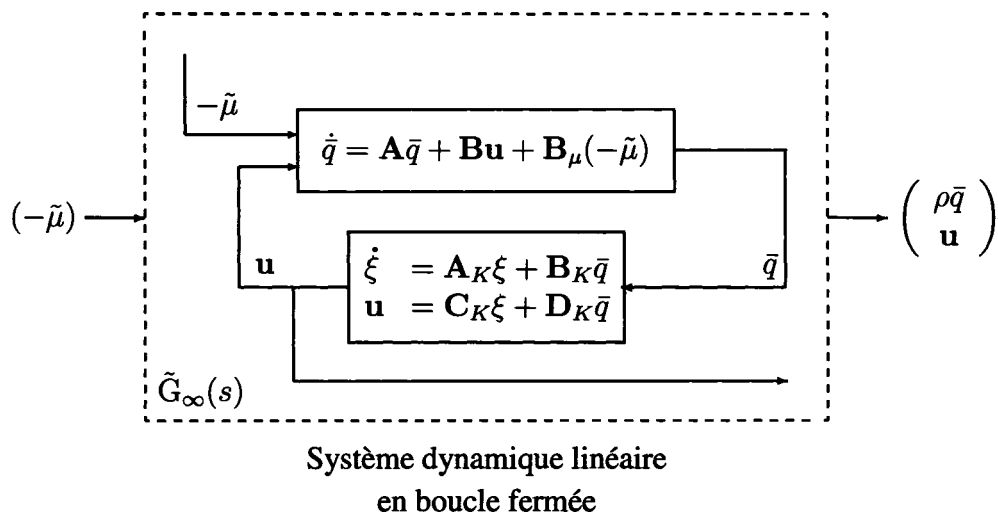


Figure 25 Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$

Considérons la partition linéaire $\tilde{G}(s)$ donné dans la proposition 3.1 (voir figure 24). Nous appliquons la conception du contrôleur dynamique par retour de sortie de rang plein (3.32) qui assure la condition exponentielle (3.35). En plus, nous choisissons d'assigner les pôles du système de transfert en boucle fermée $\tilde{G}(s)$ dans une région de stabilité réduite [219]. Ces contraintes supplémentaires sont introduites pour fixer, en particulier, les

performances de la réponse transitoire comme le temps de réponse, le dépassement et les limites de la réponse en fréquence de $\tilde{G}(s)$. Outre cela, un critère de performance⁶ de type H_∞ est mis à l'épreuve. Il est associé avec les aspects du système dans le domaine fréquentiel et offre une certaine maîtrise du comportement transitoire et de l'énergie d'effort de commande fourni (voir figure 25). Nous allons fixer simultanément le critère de performance H_∞ et les spécifications transitoires de la réponse de la partition linéaire et les combiner avec la condition de stabilité exponentielle du système complet. En particulier, pour prévenir contre les dynamiques rapides (*i.e.* modes de fréquences oscillatoires) du contrôleur [218], nous considérons le placement des pôles de la boucle fermée $\tilde{G}(s)$ dans un disque de rayon r centré à l'origine⁷. Et, nous suggérons de minimiser la norme H_∞ du système de transfert en boucle fermée $\tilde{G}_\infty(s)$ entre $(-\tilde{\mu})$ et $\begin{pmatrix} \rho\bar{q} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$. Cette optimisation peut être interprétée comme étant un compromis entre la performance de rejet de perturbation et la minimisation de l'effort de commande. La caractérisation complète de l'ensemble de ces critères multi-objectifs peut être exprimée comme suit [238] :

Problème 3.1 : Minimiser γ sujet à $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_\infty = \tilde{\mathbf{P}}_\infty^T > 0$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K qui satisfont respectivement (3.35) et [219, 238]

$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & \star \\ \tilde{\mathbf{P}}_r\tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{P}}_\infty + \tilde{\mathbf{P}}_\infty\tilde{\mathbf{A}} & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_\infty^T\tilde{\mathbf{P}}_\infty & -\gamma\mathbf{I} & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_\infty & 0 & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

⁶ Dans le cas scalaire, la norme H_∞ est la valeur maximale du gain en fréquence, *i.e.*

$\|H(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega |H(j\omega)|$. Concrètement, si la puissance du signal d'entrée est bornée, $\|H\|_\infty$ correspond au pire cas; où toute la puissance du signal d'entrée est concentrée à la fréquence où le gain $|H(j\omega)|$ est maximal, d'où un écart (*i.e.* signal de sortie) d'amplitude maximale. Dans le cas multi-variable, $\|H(s)\|_\infty^2$ correspond à la puissance maximale observable sur le vecteur de sortie, dans le pire des cas, à la fréquence la plus défavorable et la répartition la plus défavorable d'une puissance totale unité sur les différentes composantes du signal d'entrée. Une optimisation H_∞ correspond donc à la recherche du minimum d'un maximum (minimax) [240, 241]; qui correspond à l'optimisation de la moyenne du carré du signal de sortie connue, en anglais, sous le nom de *root-mean-square* (RMS).

⁷ Cf. figure 15 dans la sous-section §2.4.3.2 dans le chapitre 2.

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\mu \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \tilde{\mathbf{C}}_\infty &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty + \mathbf{D}_\infty\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_\infty\mathbf{D}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

désignent les éléments de la réalisation de la boucle de transfert $\tilde{\mathbf{G}}_\infty(s)$; avec $\mathbf{C}_\infty = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{I}_l \\ \mathbf{0}_{2l,l} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{l,2l} \\ \mathbf{I}_{2l} \end{pmatrix}$. * remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Nous pouvons facilement trouver la formulation LMI d'optimisation H_∞ dans [26, 218, 231], par exemple. En général, dans ce genre de problème d'optimisation convexe de multi-objectifs, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lyapunov* $\tilde{\mathbf{P}}$ [218, 219]. Nous nous restreignons donc à la formulation *conservative* suivante [219, 238] :

Problème 3.2 : Minimiser γ sujet à $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K , tels que les systèmes en boucle fermée (3.33) et (3.38) satisfont (3.35) – (3.37), avec

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_\infty \quad (3.39)$$

Remarque 3.4 : Cette contrainte⁸ est ajoutée pour assurer à nouveau la propriété de convexité du problème de minimisation à multi-objectifs 3.2 [218, 219]. Le critère H_∞ calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème (*Cf.* remarque 2.4).

3.3.3.2 Synthèse du retour de sortie

Les conditions de réalisation du contrôleur linéaire de position (3.32), données dans le problème 3.2, sont bilinéaires par rapport aux variables $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K . Nous utilisons le changement de variable introduit dans [219] pour transformer ces BMIs⁹ en

⁸ La restriction supplémentaire (3.39) reste relativement peu sévère dans la résolution de ce type de problème [219]; comme cela a été souligné dans dans le chapitre 2 (*Cf.* remarque 2.4).

⁹ *Cf.* sous-section §2.4.3.3 dans le chapitre 2.

LMI. Comme dans le chapitre 2, partitionnons $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ et telles que les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (3.41)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (3.42)$$

À partir de [219], nous déduisons le résultat suivant [238] :

Proposition 3.4 : Il existe un contrôleur dynamique linéaire par retour de sortie (3.32) et une matrice $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive, (i.e. $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$), qui satisfont (3.35) – (3.37) et (3.39) si et seulement si, il existe des matrices $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ qui satisfont les LMIs suivantes [238] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.43)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star \\ \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{B}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{C}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & \star & \star & \star \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & \star & \star \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & \star \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * & * \\ \mathbf{B}_\mu^T & \mathbf{B}_\mu^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}_\infty \mathbf{Q} + \mathbf{D}_\infty \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_\infty + \mathbf{D}_\infty \hat{\mathbf{D}} & 0 & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T \\ a_{21} &= \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T \\ a_{22} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{32} &= \mathbf{B}_z^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{B}}^T - \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_{uz} \hat{\mathbf{D}} \\ a_{33} &= -\frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_{uz} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{uz} + \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \mathbf{I} \end{aligned}$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Comme dans la démonstration de la proposition 2.5 dans le chapitre 2, nous considérons la matrice de rang plein $\tilde{\Pi}$ suivante [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En multipliant la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ à gauche et à droite respectivement par $\tilde{\Pi}^T$ et $\tilde{\Pi}$ et en utilisant (3.41), la condition $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ devient (3.43). L'inégalité (3.44) est obtenue en multipliant (3.35) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I})$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I})$ et en utilisant les changements des variables (3.42). L'inégalité (3.45) est obtenue en multipliant (3.36) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$. Et, L'inégalité (3.46) est obtenue en multipliant (3.37) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$, en utilisant, à chaque fois, les changements des variables (3.42). ■

Les matrices \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont obtenues à partir de (3.42). Les LMIs (3.43) – (3.46) peuvent être résolues en utilisant la méthode d'optimisation du point intérieur [231] implémenté avec l'outil *LMI control toolbox* dans le logiciel MATLAB[©] [232].

3.3.4 Commande de force normale de contact

3.3.4.1 Réduction du sous-espace de force normale de contact

Dans cette section, nous proposons une autre transformation pour établir un couple pré-calculé (*i.e.* une commande) de force. En pré-multipliant (3.1) par $J_m^T = (DD^T)^{-1}DJ_e^{-T}$, nous obtenons [238] :

$$\bar{\tau}_m = \bar{B}_m(q)\Gamma = \bar{M}_m(q)\ddot{q}_l + \bar{H}_m(\dot{q}_l, q) + \lambda \quad (3.47)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\tau}_m & = J_m^T \tau \\ \bar{B}_m(q) & = J_m^T B \\ \bar{M}_m(q) & = J_m^T M(q) J_l \\ \bar{H}_m(\dot{q}_l, q) & = J_m^T (M(q) \dot{J}_l \dot{q}_l + H(\dot{q}_l, q)) \end{cases} \quad (3.48)$$

En utilisant la première égalité de (3.24), nous écrivons :

$$\Gamma = \bar{B}_l^I(q)\bar{\tau}_l + B^{-1}D_e^T \varsigma \quad (3.49)$$

où \bar{B}_l^I est la matrice pseudo-inverse de \bar{B}_l , ς caractérise l'ensemble des forces internes produites [235], pour tout vecteur $\varsigma \in \mathbb{R}^l$ du sous-espace réduit de force normale de contact, $B^{-1}D_e^T \varsigma$ est dans l'espace nul de \bar{B}_l et il n'affecte point le système de mouvement, et $\bar{\tau}_l$ est le couple pré-calculé modifié, donné par (3.27), appliqué dans la dynamique de position. En outre, notons que les colonnes $\bar{B}_m(q)B^{-1}(q)D_e^T$ engendrent le sous-espace réduit des forces normales de contact, et nous avons $\bar{B}_m(q)B^{-1}(q)D_e^T \varsigma = \varsigma$. Alors, en combinant la première égalité de (3.47) et (3.49), nous obtenons :

$$\bar{\tau}_m = \bar{B}_m(q)\bar{B}_l^I(q)\bar{\tau}_l + \varsigma \quad (3.50)$$

En tenant compte des équations (3.47) et (3.50), nous constatons que la force normale réduite de contact ς satisfait

$$\varsigma = \bar{M}_m(q)\ddot{q}_l + \bar{H}_m(\dot{q}_l, q) - \bar{B}_m(q)\bar{B}_l^I(q)\bar{\tau}_l + \lambda \quad (3.51)$$

D'où, nous proposons la commande de couple pré-calculé de force suivante :

$$\varsigma = \bar{M}_m(q)\ddot{q}_l + \bar{H}_m(\dot{q}_l, q) - \bar{B}_m(q)\bar{B}_l^I(q)\bar{\tau}_l + u_m \quad (3.52)$$

Dans (3.52), \ddot{q}_l est *a priori* calculée algébriquement à partir de (3.24) dans le cas d'absence de frottement (ou si nous négligeons éventuellement son effet); ce qui ne doit pas être le cas ici. Et, pour ce faire, nous remplaçons \ddot{q}_l par \ddot{q}_{ld} dans (3.52), *i.e.* [238] :

$$\varsigma = \bar{M}_m(q)\ddot{q}_{ld} + \bar{H}_m(\dot{q}_l, q) - \bar{B}_m(q)\bar{B}_l^I(q)\bar{\tau}_l + u_m \quad (3.53)$$

Si nous substituons cette expression dans (3.51), alors nous obtenons :

$$\lambda = u_m - \bar{M}_m(q)\ddot{\tilde{q}}_l \quad (3.54)$$

où u_m représente l'action du contrôleur linéaire de force liée aux états mesurables de système de force. Une variable d'état d'intégrale de force sera utilisée dans la suite pour réguler la boucle de force réduite et garantir une erreur statique nulle [242]. En outre, ce type d'action permet d'assurer une robustesse en performance vis-à-vis des problèmes pratiques de mesure (comme les retards de mesure) [238, 242].

3.3.4.2 Commande linéaire de force

Pour compléter la loi de commande non linéaire (3.53), nous proposons ici la détermination de la fonction u_m qui garantit la régulation de la dynamique de force (3.54). Étant donné λ_d la force normale désirée, notons $\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_d$ l'erreur de force. Nous proposons la loi de commande linéaire suivante :

$$u_m = \lambda_d - K_I \int_0^t \tilde{\lambda} dt \quad (3.55)$$

À partir de (3.54) et (3.55), il suit :

$$\tilde{\lambda} + K_I \int_0^t \tilde{\lambda} dt + \bar{M}_m(q)\ddot{\tilde{q}}_l = 0 \quad (3.56)$$

D'après la proposition 3.3 et en utilisant (3.28) et (3.29), nous avons déjà prouvé que $\ddot{\tilde{q}}_l$ tend vers zéro. Et par conséquent, pour un gain $K_I > 0$ donné, la boucle fermée de dynamique d'erreur de force normale (3.56) peut être stabilisée (voir figure 26).

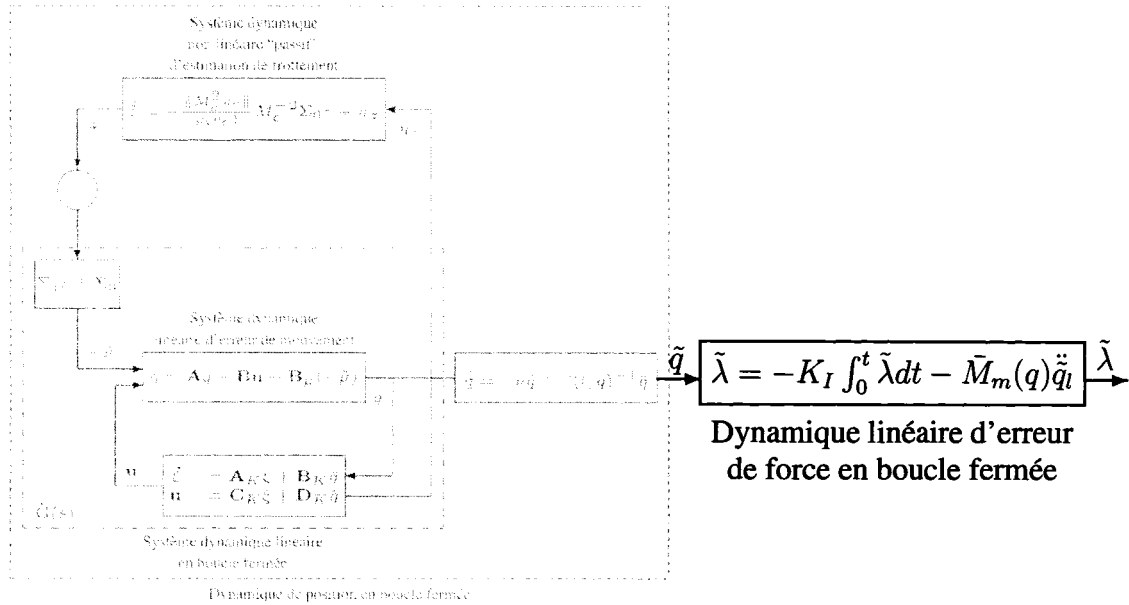


Figure 26 Schéma-bloc de dynamique d'erreur de force normale

3.4 Exemple d'illustration expérimentale

3.4.1 Dispositif expérimental

Le système expérimental développé ici est basé sur une technique combinatoire de matériel et d'outils de simulation¹⁰ [238]. Un système dynamique d'un robot manipulateur à deux articulations rotatives est simulé en temps réel avec un dispositif physique qui génère le frottement réel sur une surface de contact caoutchouc-acier. Ce dispositif consiste en un vérin électrique actionné par un moteur à courant continu (voir figure 27). La position du vérin est mesurée par un encodeur de position (*Rotalec*, NV-D205B-12-MP2-FE2-EM). Un capteur de force (*Superlogics*, ICP-208C02) est utilisé pour mesurer l'amplitude de la force de frottement. Le système de contrôle et l'implémentation de la dynamique de robot sont réalisés avec les logiciels *Simulink*, *XPC-Target* et *Real-Time-Workshop* de ©MATLAB. Les blocs *Simulink* sont transformés en code C, par le biais d'un ordinateur hôte équipé de *Windows-OS* et *Simulink*. Finalement, un dispositif exécutable est compilé,

¹⁰ Il s'agit d'une implémentation partielle de simulation juxtaposée avec des données expérimentales et réelles obtenues en ligne; connue, en anglais, sous le nom de *hardware-in-the-loop*

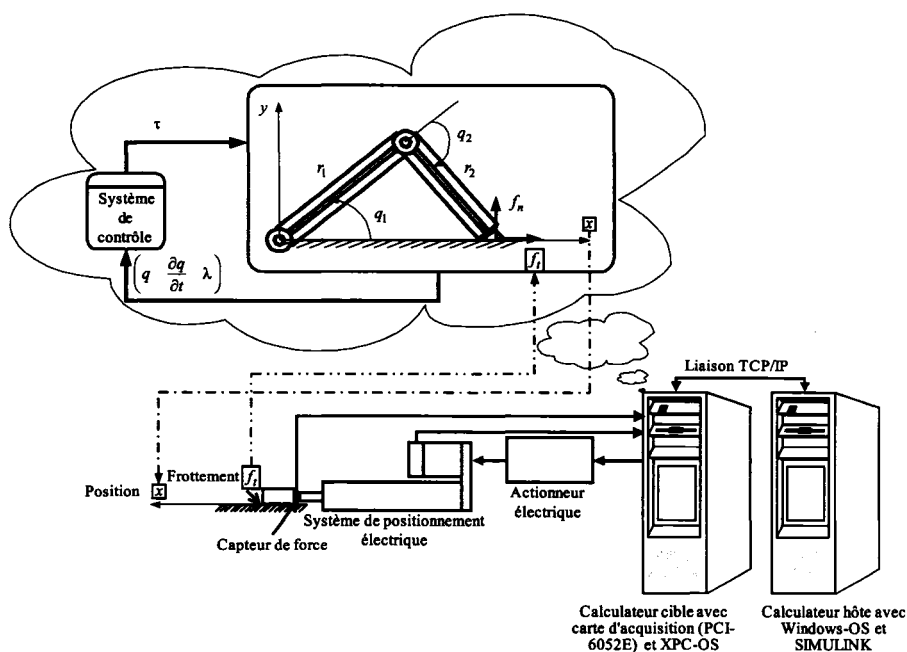


Figure 27 Robot manipulateur à deux articulations rotatives en contact avec une surface horizontale sous frottement, implémenté par la technique *hardware-in-the-loop*

et un noyau d'exécution en temps réel¹¹ est utilisé sur un ordinateur cible avec une carte d'acquisition (*National Instruments*, PCI-6052E) et *XPC-OS* (voir figure 27). Les ordinateurs hôte et cible communiquent par l'entremise d'une liaison de type *TCP/IP*. La période d'échantillonnage est fixée à $200 \mu s$.

3.4.2 Description du robot de contact sous frottement et du système de contrôle

Les paramètres donnés dans le tableau III correspondent à ceux d'un robot qui peut être utilisé dans des tâches de mouvement et de force. La matrice cinématique (de transforma-

¹¹ En anglais, *real-time kernel*.

tion) du manipulateur est donnée par [243] :

$${}^0T_2 = \begin{pmatrix} c_{22} & -s_{22} & 0 & r_2 \cdot c_{12} + r_1 \cdot c_1 \\ s_{22} & c_{22} & 0 & r_2 \cdot s_{12} + r_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $s_i = \sin(q_i)$, $c_i = \cos(q_i)$, $s_{ij} = \sin(q_i + q_j)$ et $c_{ij} = \cos(q_i + q_j)$. Les matrices de l'équation dynamique du robot (3.1) sont données par [243] :

$$M(q) = \begin{pmatrix} J_1 + J_2 + (m_1 + m_2)r_1^2 + m_2r_2^2 + 2m_2r_1r_2c_2 & J_2 + m_2r_2^2 + m_2r_1r_2c_2 \\ J_2 + m_2r_2^2 + m_2r_1r_2c_2 & J_2 + m_2r_2^2 \end{pmatrix}$$

et

$$H(\dot{q}, q) = \begin{pmatrix} -2m_2r_1r_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cdot s_2 - m_2r_1r_2\dot{q}_2^2 \cdot s_2 + (m_1 + m_2)g r_1 \cdot c_1 + m_2g r_2 \cdot c_{12} \\ m_2r_2(r_1\dot{q}_1^2 \cdot s_2 + g \cdot c_{12}) \end{pmatrix}$$

où $s_{ii} = \sin(2q_i)$ et $c_{ii} = \cos(2q_i)$. La matrice *Jacobienne* est donnée par [243] :

$$J(q) = \begin{pmatrix} -r_2 \cdot s_{12} - r_1 \cdot s_1 & -r_2 \cdot s_{12} \\ r_2 \cdot c_{12} + r_1 \cdot c_1 & r_2 \cdot c_{12} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées généralisées indépendantes $\begin{pmatrix} q_1 & q_2 \end{pmatrix}^T$ sont sélectionnées telles que :

$$J_l = \begin{pmatrix} 1 & -(\frac{r_1 \cdot c_1}{r_2 \cdot c_{12}} + 1) \end{pmatrix}$$

Les matrices de transformation normale et tangentielle D et G sont exprimées comme suit :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } G = \begin{pmatrix} \frac{r_1 \cdot s_2}{c_{12}} & 0 \end{pmatrix}$$

Les paramètres du modèle de frottement sont donnés dans le tableau III. Ils ont été identifiés sur le système d'actionneur électrique dans une étape préalable (*i.e.* hors-ligne) utilisant des techniques très répandues dans la littérature pour déterminer les différents aspects de frottement [76, 244]. La trajectoire de position de référence est un signal de mouvement

Tableau III

Applications numériques des paramètres

Paramètres du robot			Paramètres de frottement		
Paramètre	Valeur	Unité	Paramètre	Valeur	Unité
r_1	0.25	m	σ_0	28797.0	m^{-1}
r_2	0.25	m	σ_1	51.30	sm^{-1}
$m_i, i = 1, 2$	1.00	kg	σ_v	12.56	sm^{-1}
$J_i, i = 1, 2$	0.25	kgm^{-2}	μ_c	2.39	-
g	9.81	ms^{-2}	μ_s	2.95	-
-	-	-	v_s	0.005	ms^{-1}

répétitif sur une table de travail horizontale. La force normale désirée appliquée sur cette surface est d'amplitude 50 N. Pour cette fin, nous proposons un retour de sortie de rang plein qui assure une condition de stabilité exponentielle sur $\tilde{G}(s)$. De plus, nous ajoutons une condition de placement de pôles en boucle fermée à l'intérieur d'un disque de rayon $r = 8$ centré à l'origine, pour éviter les modes oscillatoires dans la réponse en boucle fermée et aussi pour limiter les amplitudes (*i.e.* gains) de la commande appliquée. Encore, pour limiter, éventuellement, les couples articulaires et les puissances des moteurs pendant le fonctionnement, nous proposons la minimisation de la norme H_∞ entre $(-\tilde{\mu})$ et $\left(0.2\bar{q} \quad \mathbf{u}^T \right)^T$. La borne supérieure de la marge de stabilité exponentielle α est fixée à 2. Nous choisissons $\nu = 40 \gg \alpha$ et $\epsilon = 10^{-4}$. Les matrices du contrôleur dynamique linéaire sont données par :

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} -5.55 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} 52.36 \end{pmatrix}, \mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} -0.02 \\ 4 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} 31.56 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$u_l = \frac{31.56s + 173.94}{s + 5.55} [\bar{q}] \text{ et } u_z = \frac{0.04s + 0.24}{s + 5.55} [\bar{q}]$$

Par convention, les termes entre les crochets $[\cdot]$ représentent l'entrée de la loi de transfert en s qui est notée devant les crochets. Le gain intégrateur de force est choisi $K_I = 1.2$.

3.4.3 Résultats expérimentaux et interprétation

Pour justifier le choix de schéma d'observation en boucle fermée basée sur le modèle de *LuGre*, nous proposons la comparaison de ce modèle avec celui de *Karnopp* exprimé par une fonction statique simple [151, 245]. La trajectoire de position répétitive désirée que nous considérons comprend des phase d'arrêt, d'accélération et de décélération (voir figures 28 (a) et (b)). Les trajectoires réelle et désirée de position de l'effecteur sont montrées dans les figures 28 (a) et (b). La figure 29 montre la performance de l'erreur de suivi dans l'espace cartésien.

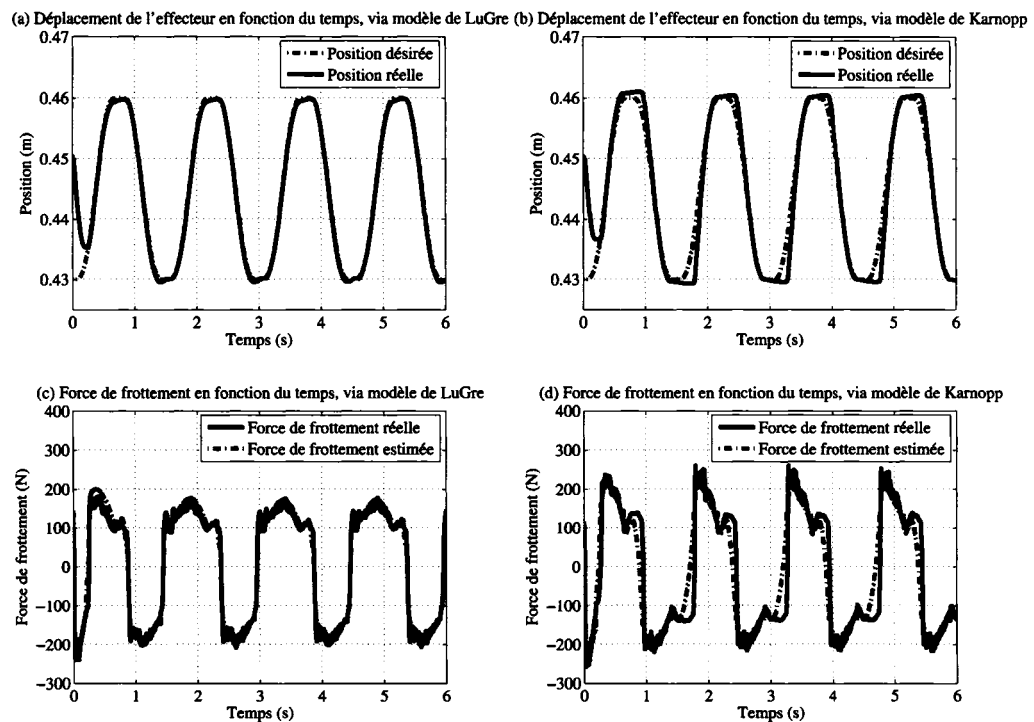


Figure 28 Performance de position et d'estimation de frottement

Les figures 28 (c) et (d) montrent les mesures et les estimations de la force de frottement, avec les deux méthodes d'observation. Elles montrent l'importance et l'efficacité de l'approche que nous proposons dans la prédiction du comportement de frottement. No-

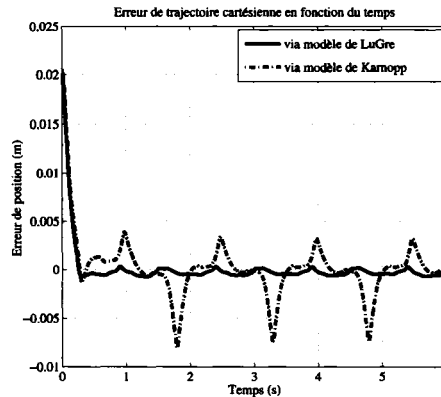


Figure 29 Performance d'erreur de position

tons que le modèle d'estimation de *LuGre* manifeste toute la richesse dans l'évolution du frottement dans ses multiples phénomènes et caractéristiques (de pré-glisement, de glissement, dynamique et statique). Par contre, le modèle de *Karnopp* reste limité à cause de la problématique de son estimation de frottement appauvrie, surtout à vitesse réduite (*i.e.* au voisinage de zéro).

Les réponses de la force normale, obtenues par le modèle dynamique de *LuGre* et le modèle statique de *Karnopp*, sont respectivement représentées dans les figures 30 (a) et (b). Dans les figures 30 (c) et (d), nous montrons la différence de registre entre les couples articulaires appliqués avec les deux techniques d'observation de frottement.

Nous signalons qu'en dépit de la performance acceptable de suivi de trajectoire obtenue avec le modèle d'estimation de *Karnopp*, des erreurs significatives restent apparentes, surtout, lorsque la vitesse passe par zéro (voir tableau IV). La structure dynamique et les termes de *feed-back* utilisés dans le modèle de *LuGre* permettent d'avoir une amélioration de l'estimation de la force de frottement (voir figures 28 (c) et (d)) et, par conséquent, celle de la performance de suivi de trajectoire (voir figures 28 (a), (b) et 29) sans nécessairement user de gains excessifs (voir figures 30 (c) et (d)).

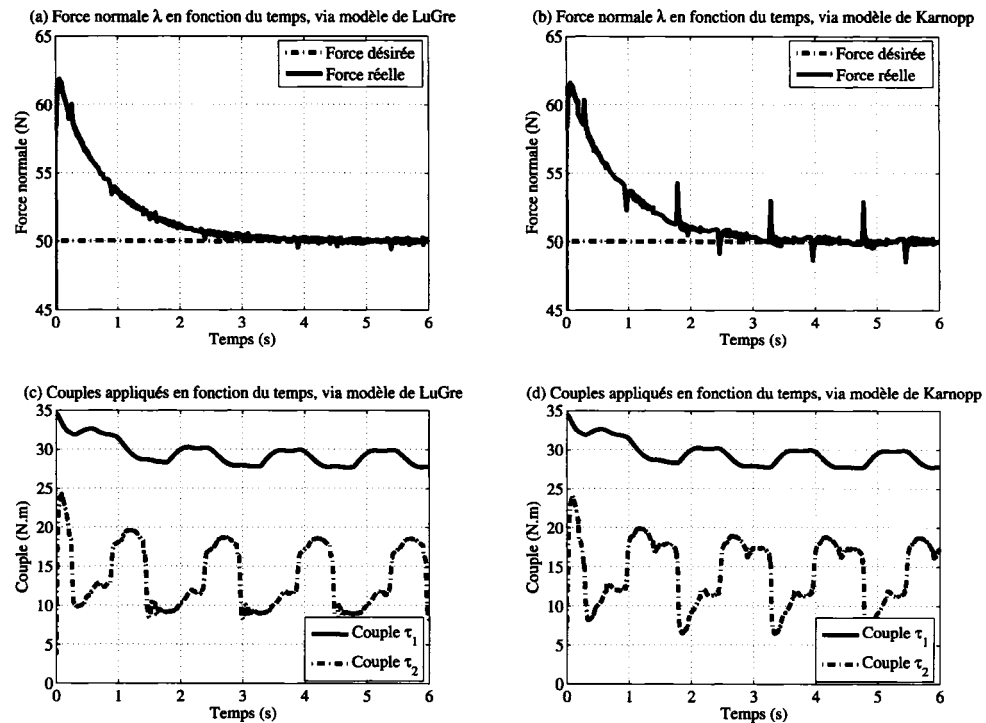


Figure 30 Performance de force normale et couples appliquées

Tableau IV

Comparaison des performances d'erreurs statiques selon les modèles d'estimation de frottement de *LuGre* et de *Karnopp*

Modèle d'estimation de frottement	Estimation de LuGre	Estimation de Karnopp
RMS de l'erreur de force norm. (N)	10.4964	25.8626
Max. de l'erreur de force norm. (N)	0.5732 ou 1.15 % de 50 N	2.9963 ou 5.99 % de 50 N
RMS de l'erreur de position (m)	0.0639	0.3481
Max. de l'erreur de position (m)	0.0007 ou 2.33 % de 3 cm	0.0081 ou 27.0 % de 3 cm

En outre, nous avons montré la possibilité d'assurer la faisabilité de la méthode proposée sous plusieurs contraintes et critères multi-objectifs, grâce à la bonne flexibilité du contrôleur dynamique linéaire. En effet, d'autres performances d'optimisation H_∞ et/ou

H_2 peuvent être ajoutées dans la conception de ce contrôleur. En d'autres termes, cette structure de retour de sortie dynamique est capable d'améliorer davantage les tâches prescrites des servo-systèmes sous frottement, comparée à d'autres classes de commandes proposées dans la littérature. Cette qualité de trouver un contrôleur, dont la structure dynamique linéaire est relativement simple, qui répond à plusieurs critères multi-objectifs est rendue possible grâce au formalisme LMI. Ce dernier offre en effet une meilleure flexibilité qui reste très utile dans les techniques de conception de contrôleurs assujettis à plus d'un critère de performance.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons un paradigme de structure de contrôle hybride basé sur l'observateur de frottement de *LuGre* dans le cas d'un robot de contact soumis à l'influence de frottement. Cette structure de contrôle hybride est basée sur le principe de décomposition/séparation entre la dynamique de position et celle de force par l'entremise de la technique de projection orthogonale dans les différents sous-espaces articulaires respectifs. Des expressions adéquates de couples pré-calculés sont appliquées dans chaque sous-espace en tenant compte du modèle dynamique de *LuGre* dans la compensation de frottement. En particulier, nous proposons dans l'étape de linéarisation de la dynamique de position une nouvelle expression (comparativement à l'expression classique connue dans la littérature) de couple pré-calculé; qui utilise un changement de variable inspiré de celui introduit dans la commande adaptative indirecte des robots par Li et Slotine [29].

Afin de compléter le contrôle de position, nous avons proposé une synthèse d'un retour de sortie dynamique sujet aux performances de stabilité exponentielle, de placement de pôle et de minimisation H_∞ . En particulier, dans le contexte discuté dans ce chapitre, nous avons assuré la stabilité de la dynamique d'erreur de position des articulations réelles par l'entremise de la notion de stabilité des systèmes hiérarchiques.

Les éléments de contrôle de force normale introduits dans ce chapitre représentent simplement un complément au sujet de la commande hybride des systèmes robotiques.

Intuitivement, la formulation de passivité initialement présentée dans [20] et adoptée dans la procédure générale introduite dans le chapitre 2 [203, 238] est proposée ici dans un contexte mettant en œuvre une structure mécanique complexe (robot manipulateur avec contact) et une structure de contrôleur dynamique plus flexible pour atteindre simultanément plusieurs objectifs.

Les résultats expérimentaux présentent un bon argument qui met en exergue l'efficacité de notre approche et la qualité du compensateur dynamique de frottement de *LuGre*.

CHAPITRE 4

APPLICATION 2 : SYSTÈME D'ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (PREMIÈRE PARTIE : CONTRÔLE DE FORCE)

« C'est par l'expérience que la science et l'art font leur progrès chez les hommes. »

Aristote (384 av. J-C. – 322 av. J-C.)
La Métaphysique

4.1 Introduction

Dans la deuxième application 'industrielle' (ou 'de laboratoire') proposée dans le cadre de cette thèse, nous élaborons l'étude complète de contrôle des systèmes d'actionneurs pneumatiques; qui sont caractérisés souvent par un facteur de frottement très élevé (ayant pour cause l'air qui est considéré comme un 'très mauvais' lubrifiant). La complexité du couplage de force/position de tel système rend l'étape de contrôle de force cruciale et non négligeable. Ayant pour but de résoudre le problème de contrôle de position et de compensation de frottement de ces dispositifs, nous avons scindé les différentes parties du problème en deux volets; dont

- la procédure de contrôle de force est discutée dans ce chapitre,
- et la technique de contrôle de position sera présentée dans le chapitre suivant (*Cf.* chapitre 5).

Dans le présent chapitre, nous allons développer respectivement deux techniques (complémentaires) de commande de force; en considérant d'abord la dynamique d'erreur du système en boucle fermée affectée par des signaux exogènes de perturbations bornées, puis en considérant le cas où les limites (ou les bornes) des perturbations sont inconnues. Dans les deux cas, nous appliquons une approche de commande linéarisante pour annuler toutes les non-linéarités connues. Nous procédons ensuite par la synthèse d'un retour d'état linéaire pour réaliser un schéma de contrôle de force dans l'espace linéaire réduit

de dynamique d'erreur de force. Dans cette étape, nous proposons une nouvelle contribution qui s'identifie à l'application de la formulation LMI pour la synthèse de la commande linéaire des systèmes pneumatiques. Finalement, une expression originale *ad hoc*¹ de compensation atténuante non linéaire est développée dans la deuxième stratégie pour réduire l'effet des termes non linéaires d'amplitudes non bornées *a priori*. L'ensemble permet de garantir une solution bornée de la dynamique de force. Des résultats expérimentaux vont permettre d'illustrer ces démarches de contrôle de force.

4.2 Modélisation des systèmes pneumatiques

4.2.1 Généralités

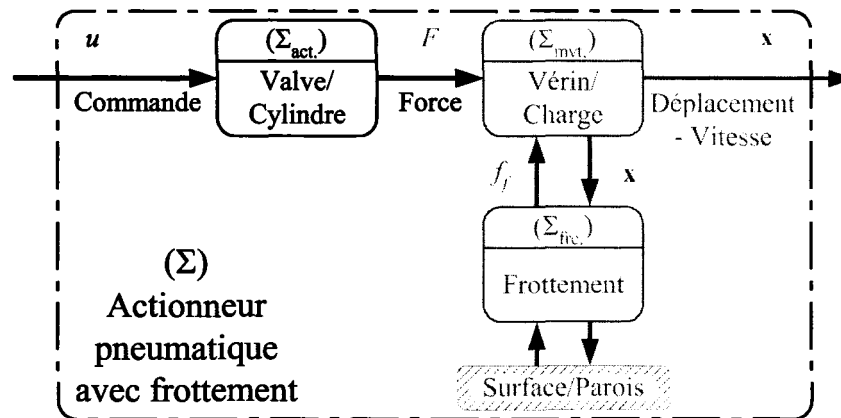


Figure 31 Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement

La construction du système de contrôle d'un procédé physique basé sur le principe de *rétroaction* nécessite, en général, une analyse préalable et une modélisation 'fidèle' de son comportement [246]. Cette dualité de modélisation/commande est très importante; d'autant plus qu'un processus simple pourrait être représenté par un modèle aussi simple (par exemple, un système linéaire) et, ainsi, asservi avec une loi de commande linéaire. Par contre, pour un système complexe, l'utilisation d'un modèle de connaissance simplifié ou

¹ Expression d'origine latine, elle signifie 'propre à' ou 'créé pour la circonstance'.

approximé qui permettrait d'établir un asservissement simple et facile à implanter s'avère, en général, peu efficace et aux performances *mi-figue-mi-raisin*². Les systèmes pneumatiques ne dérogent pas à cette règle. En effet, leur utilisation dans les processus industriels de haute précision a été longtemps limitée à cause de leur structure de modèle complexe :

- Dynamique fortement non linéaire caractérisée par [33, 163] :
 - des variations thermodynamiques du gaz (compressibilité de l'air);
 - des frottements mécaniques variables.
- Absence de modèle due aux [187] :
 - structures (géométrique, mécanique et thermodynamique) très perplexes des vannes;
 - incertitudes (variations thermodynamiques) des modèles non linéaires de ces systèmes.

Grosso modo, l'actionneur pneumatique est caractérisé par deux dynamiques associées (voir figure 31); à savoir la dynamique de pression (ou de force) et la structure mécanique (de déplacement) du système. Une représentation schématique de l'actionneur pneumatique est donnée dans la figure 32. Nous distinguons le cylindre à volume variable dont la pression permet de manipuler le piston amovible en force et/ou position. Une valve à tiroir proportionnelle est utilisée pour contrôler l'écoulement d'air et, par conséquent, la pression dans les chambres du cylindre. Dans [31, 32, 33], nous avons déjà élaboré une étude exhaustive (caractéristiques, propriétés, conditions et modélisations) de ces dispositifs.

4.2.2 Modélisation mathématique d'un système d'actionneur pneumatique

Dans cette section, nous introduisons les équations mathématiques; qui modélisent la dynamique de force d'un actionneur pneumatique; obtenues par la procédure développée dans [32, 33].

² Une expression qui daterait du XIV^{ème} siècle, qui signifie "mêlé de bon et de mauvais".

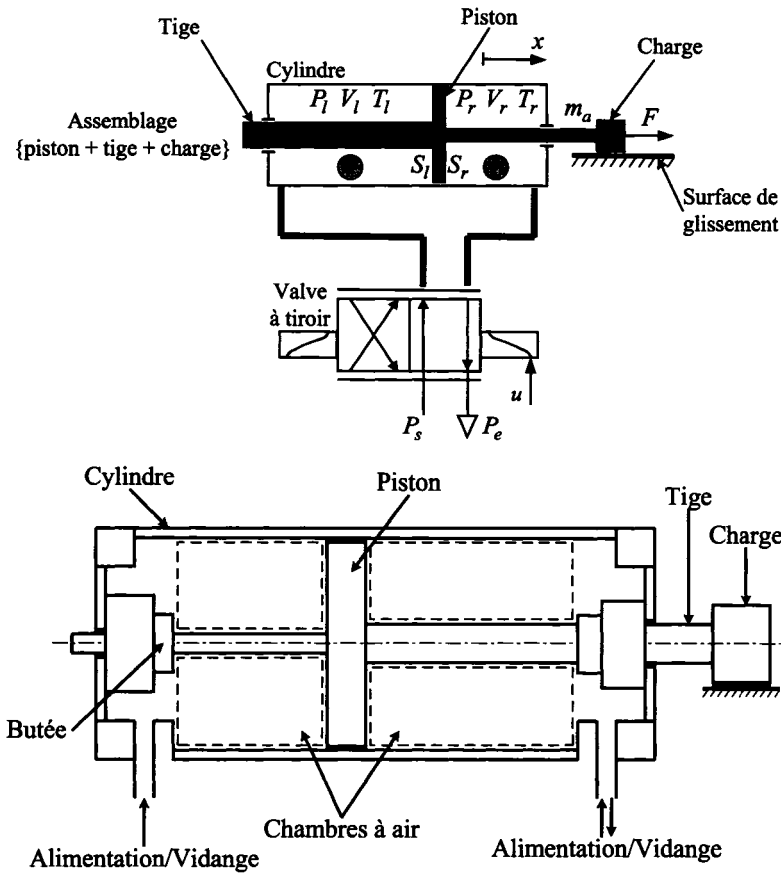


Figure 32 Description schématique d'un système pneumatique

Le système que nous considérons (voir figure 32) consiste en un cylindre pneumatique alimenté en air comprimé par l'intermédiaire d'une servo-valve. La force motrice appliquée sur l'assemblage {piston + tige + charge}, sous l'effet des pressions d'air que subit le piston de chaque côté, est exprimée par le modèle dynamique suivant [32, 33, 247, 248] :

$$\dot{F} = -\beta_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \beta_2(t)h_2(t, P_l, P_r, x)u \quad (4.1)$$

u est le signal d'entrée, qui correspond à la position du tiroir (*i.e.* la proportion d'ouverture de l'orifice). Elle est proportionnelle à la tension d'excitation de la servo-valve. P_l et P_r sont les pressions absolues dans les chambres gauche et droite du vérin, x et \dot{x} , respectivement, la position et la vitesse du piston, et t la variable temporelle. $\beta_1(t)$ désigne le coefficient de chaleur; qui dépend du type de transfert thermique durant le processus

[33, 249]. $\beta_1(t)$ varie selon :

$$\underline{\beta}_1 = 1 \leq \beta_1 \leq \bar{\beta}_1 = \zeta \quad (4.2)$$

où ζ désigne le rapport de chaleur spécifique. $\beta_2(t)$ est un paramètre défini pour caractériser la combinaison des incertitudes du coefficient de chaleur $\beta_1(t)$, du coefficient de décharge $C_d(t)$ de la valve et de la variation de température $\tau(t)$ [33, 248]. $\beta_2(t)$ est génériquement exprimé par la relation suivante [33, 248] :

$$\beta_2(t) = \beta_1(t)C_d(t)\sqrt{\tau(t)} \quad (4.3)$$

et varie selon :

$$0 < \underline{\beta}_2 \leq \beta_2 \leq \bar{\beta}_2 \quad (4.4)$$

Les fonctions non linéaires et variant dans le temps $h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})$ et $h_2(t, P_l, P_r, x)$ sont connues et données respectivement par [247, 250] :

$$h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) = \frac{P_l \dot{V}_l(\dot{x})}{V_l(x)} S_l - \frac{P_r \dot{V}_r(\dot{x})}{V_r(x)} S_r \quad (4.5)$$

et

$$h_2(t, P_l, P_r, x) = W \sqrt{RT_a} \operatorname{sgn}(u) \left(\frac{f(P_l)}{V_l(x)} S_l - \frac{f(P_r)}{V_r(x)} S_r \right) \quad (4.6)$$

avec

$$f(P) = \begin{cases} -P \bar{f}\left(\frac{P_o}{P}\right) & | P > P_o \\ P_o \bar{f}\left(\frac{P}{P_o}\right) & | P \leq P_o \end{cases} ; o = e, s \quad (4.7)$$

où P_e et P_s représentent respectivement la pression extérieure ambiante et la pression d'alimentation (voir figure 32), S_l et S_r les aires de sections de piston en contact avec l'air dans les chambres gauche et droite du cylindre, T_a la température ambiante absolue du milieu, V_l et V_r les volumes actifs dans les chambres gauche et droite, R la constante universelle des gaz parfaits, W la constante (de proportionnalité) d'ouverture de la valve à tiroir. Pour tenir compte des différentes phases de débit³ régulier (ou variant) et critique (ou

³ Connues, en anglais, par *sonic and subsonic flux*.

constant), nous décrivons la fonction continue de débit réduit $\bar{f}(p)$ comme suit [33, 157] :

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} C_1 & \text{si } p \leq p_{cr} \\ C_2 p^{\frac{1}{\zeta}} \sqrt{1 - p^{\frac{\zeta-1}{\zeta}}} & \text{si } p > p_{cr} \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$C_1 = \sqrt{\frac{\zeta}{R} \left(\frac{2}{\zeta+1}\right)^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}}, C_2 = \sqrt{\frac{2\zeta}{R(\zeta-1)}} \text{ et } p_{cr} = \left(\frac{2}{\zeta+1}\right)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}} \quad (4.9)$$

respectivement des constantes de débit réduit et le rapport critique de pression.

4.3 Commande des systèmes pneumatiques

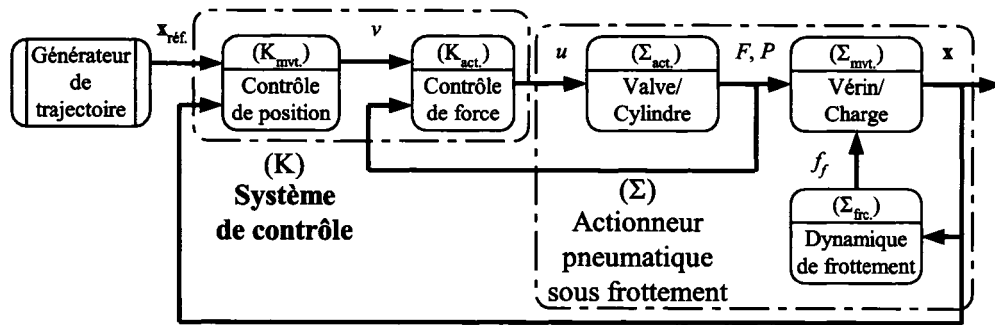


Figure 33 Schéma de base de boucle contrôle de système d'actionneur pneumatique sous frottement

Les actionneurs pneumatiques sont considérés comme des convertisseurs d'énergie pneumatique en effet cinétique (position et vitesse) et en travail mécanique (de force). Ils sont souvent abandonnés lorsqu'ils sont soumis à des commandes rapides et précises; contrairement aux actionneurs électriques et hydrauliques. Nous constatons, en général, un *imbroglio* de facteurs qui affectent la performance des servo-systèmes pneumatiques; en terme de précision (erreur de poursuite) et de rapidité (temps de réponse, cycle limite, etc.). En effet, la dynamique de force et les grandeurs cinétiques (comme la vitesse) de ces dispositifs sont affectées par la charge externe et aussi sont sensibles à la compressibilité de l'air et aux forces de frottement non linéaires dans les parties mécaniques. Une manière

rudimentaire pour réduire l'influence de la compressibilité du gaz est d'augmenter la pression [21, 251]. Cette solution reste très onéreuse. Elle entraîne une augmentation des coûts d'installation et de maintenance. En effet, il faudrait re-dimensionner toute l'installation (ajout de compresseur, extension dans les conduites de transmission, *etc.*).

Dans le cadre de la présente thèse, nous proposons une démarche complète de contrôle des systèmes pneumatiques, selon le schéma de la figure 33. L'objectif principal de ce système de contrôle demeure l'asservissement de la position de ces dispositifs. Pourtant, nous allons commencer, dans ce chapitre, par le développement de la stratégie de commande de force. Faut-il mentionner, une fois de plus, qu'il s'agit d'une étape indispensable; à cause de la complexité du couplage⁴ qui se trouve entre la dynamique de force et celle de position dans ce cas ?

4.4 Commande de force d'un actionneur pneumatique

4.4.1 Préliminaire

La position du tiroir de la valve u (grandeur mécanique de la valve) est supposée proportionnelle à la tension d'excitation (grandeur électrique). Nous supposons, *a priori*, que la dynamique de la structure mécanique de la valve est négligeable devant la constante de temps de l'ensemble du système [32, 247]. Nous rappelons que, dans la littérature, la structure mécanique de la valve est approximée parfois par des systèmes de premier ordre et de second ordre suffisamment amorti [162, 193].

En fait, nous avons préalablement étudié le comportement du système en tenant compte d'un modèle dynamique de la valve. Dans [30], nous avons développé une loi de commande par *feed-back* linéarisant combiné avec une action de commande linéaire du courant d'enroulement dans l'électro-valve; pour faire un contrôle de pression dans un réservoir à volume constant. En analysant les résultats de simulation obtenus, nous avons constaté

⁴ Cf. respectivement sections §2.2.1 et §2.3.1.2.

[31] qu'il soit plus judicieux de négliger effectivement cette dynamique pour le type de valve que nous utilisons caractérisé généralement par des fréquences relativement élevées ($\gtrsim 100\text{Hz}$). Autrement, ceci est vrai si l'on suppose que le temps de réponse de la servo-valve est faible devant le temps de remplissage ou de vidange de la chambre et devant le temps de réponse du vérin. Cette étape préliminaire de contrôle de pression de tel système représentait un préambule pour discuter de l'efficacité de l'actionneur pneumatique en positionnement et/ou force d'action [31, 30].

Dans la suite, nous abordons d'abord la question de contrôle de force d'un actionneur pneumatique, selon le schéma de la figure 34, dans un contexte particulier dont l'évolution des grandeurs cinétiques (position et vitesse) est considérée simplement bornée. Puis, nous modifions cette loi de commande pour tenir compte d'une situation plus générale qui comprend des grandeurs physiques non forcément bornées. Nous verrons plus tard que cette deuxième technique de commande de force basée aussi sur la première stratégie sera, en effet, accommodée pour le développement de la commande de position et de la compensation de frottement du système d'actionneur pneumatique (voir figure 42 plus loin).

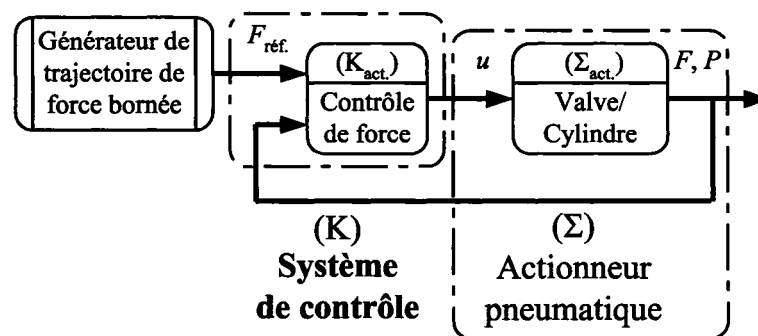


Figure 34 Schéma de base de contrôle de force-stratégie 1

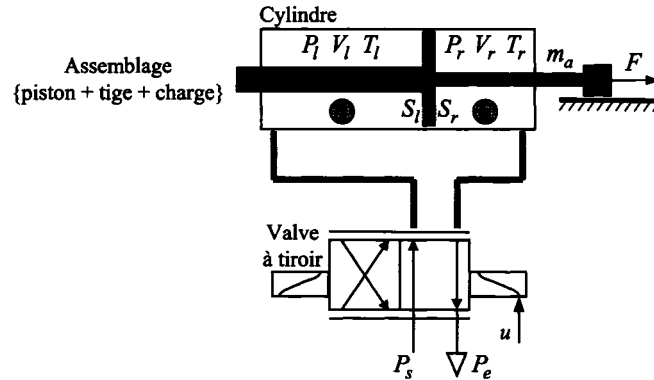


Figure 35 Schéma de système d'actionneur pneumatique

4.4.2 Commande robuste de force - stratégie 1

Étant donné le système (de force) pneumatique représenté par la figure 35. Dans cette section, nous considérons les hypothèses suivantes [32, 247] :

H4.1 Le volume dans le cylindre; qui est une grandeur mesurable, est considéré variant dans un intervalle fini. Physiquement, le déplacement du piston est délimité par les butées de début et fin de course (voir figure 32).

H4.2 Les termes $\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$, donnés par (4.2) – (4.4), sont deux fonctions paramétriques réelles; qui satisfont respectivement :

$$\beta_1(t) \triangleq \beta_{1n} + \tilde{\beta}_1 \text{ et } \beta_2(t) \triangleq \beta_{2n} \tilde{\beta}_2 \quad (4.10)$$

pour des valeurs nominales β_{1n} et β_{2n} connues et des perturbations $\tilde{\beta}_1$ et $\tilde{\beta}_2$ bornées, *i.e.*

$$\underline{\tilde{\beta}}_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \overline{\tilde{\beta}}_1 \text{ et } \underline{\tilde{\beta}}_2 \leq \tilde{\beta}_2 \leq \overline{\tilde{\beta}}_2 \quad (4.11)$$

Nous notons que la formulation du système de force, donnée par (4.1), (4.5) – (4.7), (4.10) et (4.11), englobe une classe assez large de modèles d'actionneurs pneumatiques. Autrement, toutes les variations possibles des caractéristiques des-dits systèmes sont dédiées aux fonctions paramétriques β_1 et β_2 .

4.4.2.1 Conception du contrôleur

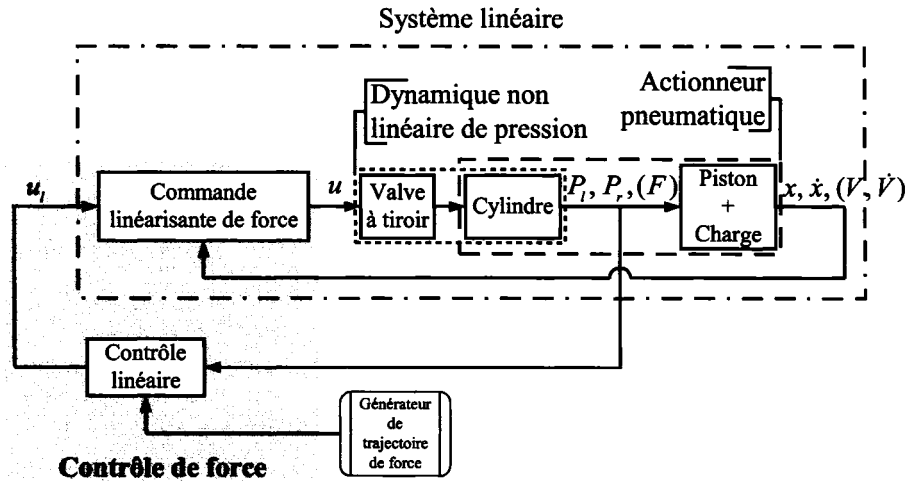


Figure 36 Schéma-bloc de la stratégie 1 de contrôle de force d'un actionneur pneumatique

Il existe des méthodes de *feed-back* linéarisant pour les systèmes avec des perturbations paramétriques. Mais ces méthodes supposent que les paramètres ne varient pas pour des fins d'adaptation; ce qui n'est pas le cas ici. Dans le but d'appliquer adéquatement une loi de commande linéaire sur la dynamique de force pneumatique F , nous proposons d'abord le compensateur par *feed-back* linéarisant suivant [247] :

$$u = \frac{u_l + \beta_{1n} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})}{\beta_{2n} h_2(t, P_l, P_r, x)} \quad (4.12)$$

Ce changement de variable est basé sur le modèle nominal du système. Le problème de commande est d'assurer un suivi de force de pression F par rapport à une force variable et, *a priori*, bornée F_d . Nous notons

$$\tilde{F} = F - F_d \quad (4.13)$$

l'erreur de suivi de force. Ensuite, nous choisissons la loi de commande linéaire Proportionnelle Intégrale selon :

$$u_l = \dot{F}_d - K_P \tilde{F} - K_I \int \tilde{F} dt \quad (4.14)$$

Nous considérons le vecteur paramètre d'incertitude $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T$ un élément de l'hyper-cube

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T \triangleq \begin{pmatrix} -\beta_1 + \beta_{1n}\tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2 - 1 \end{pmatrix}^T \mid \beta_1, \beta_{1n} \text{ et } \tilde{\beta}_2 \text{ vérifiant (4.2), (4.10) et (4.11)} \right\} \quad (4.15)$$

La substitution de (4.12) et par la suite (4.14) dans (4.1) implique l'équation d'état dynamique de l'erreur de suivi (voir figure 36) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} + \mathbf{B}_w(\pi)\mathbf{w} \\ \tilde{F} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_w(\pi) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_1 + \beta_{1n}\tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2 - 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_I & K_P \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \int \tilde{F} dt \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) \\ \dot{F}_d \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Le modèle donné par (4.16) représente un système à *paramètres dépendants affines*⁵ par rapport au vecteur paramètre d'incertitude π .

4.4.2.2 Synthèse LMI

Soit $T(s)$ la matrice (vecteur-ligne de dimension 2) de transfert en boucle fermée de (4.16), entre \mathbf{w} et \tilde{F} , soumis au retour d'état par *feed-back* $-\mathbf{K}\mathbf{X}$ (voir figure 37). La synthèse de cette loi de commande répond aux spécifications désirées et aux performances de robustesse du système en boucle fermée suivantes :

⁵ En anglais, *parameter-dependent system* (PDS).

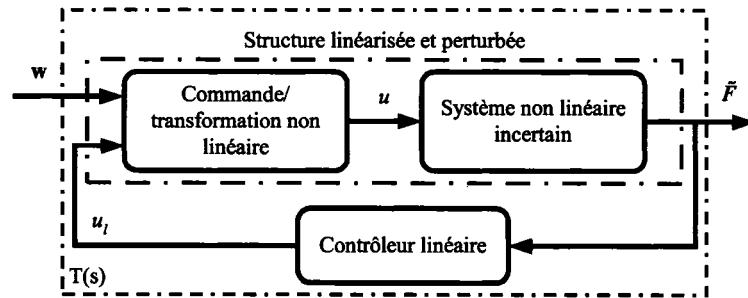


Figure 37 Schéma-bloc du système de force en boucle fermée

S4.1 Assurer un placement de pôle dans une région de stabilité qui correspond à certaines conditions spécifiques et appropriées en terme de temps de réponse, d'amortissement et de mode (ou réponse) en fréquence, sur le système PDS (4.16) [220].

S4.2 Minimiser la performance de type H_∞ du transfert $T(s)$, noté $\|T(s)\|_\infty$, sujet aux contraintes S4.1; autrement pour minimiser l'effet de perturbation w sur l'énergie de l'erreur de force \tilde{F} [252].

S4.3 Minimiser la performance de type gain de *crête-à-crête*⁶ du transfert $T(s)$, noté $\|T(s)\|_1$, sujet aux contraintes S4.1; autrement pour minimiser l'effet de perturbation w sur la valeur maximale de l'erreur de force \tilde{F} [254].

L'originalité dans le travail qui suit est attribuée à la méthode de conception du contrôleur. Cette dernière sera présentée comme un problème d'optimisation de multi-objectifs mettant en œuvre des LMIs. D'abord, nous allons présenter la synthèse du contrôleur li-

⁶ Appelé aussi norme d'amplitude, performance L_1 ou encore norme H_∞ -induite et, en anglais, *peak-to-peak gain* et noté $\|H\|_1$ (ou $\|H\|_{i\infty}$). Ce critère est défini par [253] :

$$\|H(s)\|_1 \triangleq \sup_{\|w\|_\infty \leq 1} \|Hw\|$$

i.e. mesure le maximum de la norme de la sortie associée aux signaux d'entrée $w(t)$ dont l'amplitude est inférieure à 1. Cette norme représente une mesure naturelle du signal physique utile (par exemple, pour exprimer des spécifications strictes requises sur l'amplitude d'erreur de suivi de trajectoire). Dans le cas scalaire, cette grandeur représente le rapport d'amplitude maximale (crête) du signal de sortie sur celle du signal d'entrée. Par contre, il n'existe pas de méthodes explicites pour déterminer la valeur optimale exacte de cette norme. Et, les méthodes d'estimation connues (exploitables) restent particulièrement conservatives, surtout lorsque le système possède des modes lents ou légèrement amortis [26, 253].

néaire répondant au critère H_∞ , donné par S4.2, et en respectant la condition de placement de pôle dans une région de stabilité \mathcal{D} (voir figure 38), selon S4.1. L'objectif H_∞ a pour but de minimiser la pire valeur de l'erreur moyenne quadratique ou RMS de l'erreur \tilde{F} (ou simplement erreur RMS); autrement, il affecte sensiblement l'énergie de l'erreur et probablement l'amplitude de cette erreur (d'une manière indirecte). Par contre, cette dernière peut être directement affectée par le biais du critère de gain crête-à-crête. Pour ce faire, nous allons proposer dans un autre registre (*i.e.* en parallèle) le critère de minimisation donné par S4.3, pour développer le contrôleur de rejet de perturbation qui minimise éventuellement l'amplitude de l'erreur, toujours en concurrence avec la spécification S4.1. Une comparaison entre ces deux critères de performance sera discutée plus tard dans cette partie de ce chapitre. Le résultat de cette étape constitue une nouvelle contribution liée à la formulation LMI pour la détermination de la commande linéaire de force des systèmes pneumatiques.

Cas d'optimisation H_∞ sous contrainte de placement de pôle

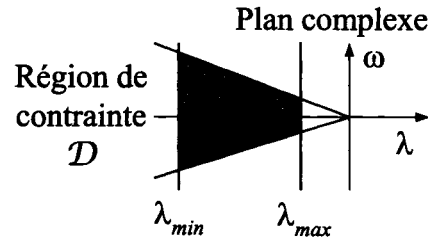
D'abord, nous assignons les deux pôles de la dynamique linéaire d'erreur en boucle fermée (4.16) dans \mathcal{D} , une sous-région du demi-plan complexe (voir figure 38), selon [222, 32, 247] :

$$\mathcal{D}(\lambda_{min}, \lambda_{max}, \theta) = \{\lambda + j\omega \in \mathbb{C} \mid \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \text{ et } \tan \theta \cdot \lambda < -|\omega|\} \quad (4.19)$$

pour λ_{min} , λ_{max} et θ des scalaires donnés. En fait, la fixation des pôles du système asservi dans cette région de stabilité réduite permet de limiter respectivement le temps de réponse, la fréquence des modes oscillatoires (en considérant les limites verticales) et le dépassement maximum (en considérant le secteur conique).

Étant donné les opérateurs matriciels \mathcal{L}^+ et \mathcal{L}^- définis comme suit :

$$\mathcal{L}^+(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = (X_1 Y_1 + Y_1^T X_1^T) - (X_2 Y_2 + Y_2^T X_2^T) \quad (4.20)$$

Figure 38 Région de stabilité \mathcal{D}

et

$$\mathcal{L}^-(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = (X_1 Y_1 - Y_1^T X_1^T) - (X_2 Y_2 - Y_2^T X_2^T) \quad (4.21)$$

En utilisant la notion des régions LMI présentée dans [218], le problème de synthèse à multi-objectifs H_∞ peut être réduit aux inégalités matricielles selon :

Problème 4.1 : Trouver une matrice $\mathbf{P}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive telles que :
 $\forall \pi \in \Pi$,

$$\mathbf{P}_p > 0 \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) - 2\lambda_{min}\mathbf{P}_p > 0 \quad (4.23)$$

$$\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) - 2\lambda_{max}\mathbf{P}_p < 0 \quad (4.24)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) & \star \\ -\cos \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^-(\mathbf{P}_p) & \sin \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

avec $\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) = \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_p, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_p)$, $\mathcal{L}_\pi^-(\mathbf{P}_p) = \mathcal{L}^-(\mathbf{A}, \mathbf{P}_p, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_p)$ et \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Il y a plusieurs références qui élaborent la formulation LMI de ce problème de région de stabilité (voir par exemple dans [222, 223, 224]).

Ensuite, nous formulons le critère RMS (confondu souvent avec la norme H_∞) de la boucle fermée entre w et \tilde{F} , selon :

Proposition 4.1 : La norme $\|T(s)\|_\infty$ ne doit pas excéder $\gamma > 0$ si et seulement si, il existe une matrice $\mathbf{P}_\infty \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive telles que [218] : $\forall \pi \in \Pi$,

$$\mathbf{P}_\infty > 0 \quad (4.26)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_\infty, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_\infty) & \star & \star \\ \mathbf{B}_w^T(\pi) & -\gamma\mathbf{I} & \star \\ \mathbf{C}\mathbf{P}_\infty & 0 & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Voir la formulation LMI d'optimisation H_∞ dans [218, 26, 231], par exemple. ■

Les variables respectives du problème 4.1 et de la proposition 4.1 sont les matrices symétriques de *Lyapunov* \mathbf{P}_p et \mathbf{P}_∞ et la matrice gain \mathbf{K} .

En général, pour résoudre simultanément ces problèmes de faisabilité et de multi-objectifs convexes, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lyapunov* \mathbf{P} dans (4.22) – (4.27). Nous nous limitons ainsi à la solution (formulation) sous-optimale de multi-objectifs H_∞ avec placement de pôle dans la région \mathcal{D} , suivante :

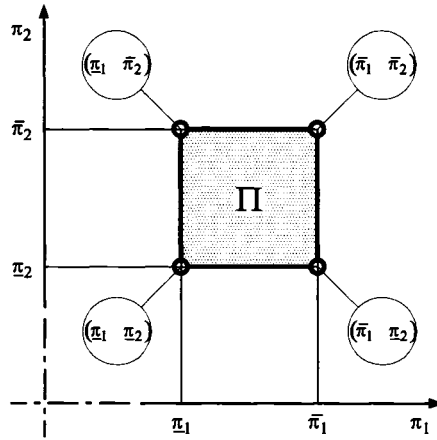
Problème 4.2 : Minimiser $\gamma > 0$; sujet à

$\mathbf{P} > 0$ et symétrique et \mathbf{K} qui satisfont (4.22) – (4.27) avec

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p = \mathbf{P}_\infty \quad (4.28)$$

Comme les expressions des inégalités (4.22) – (4.27) comprennent des termes non linéaires de la forme \mathbf{BKP} , le problème de faisabilité résultant est non linéaire. Alors, pour restituer la formulation LMI équivalente à (4.22) – (4.28), nous définissons la nouvelle variable auxiliaire $\mathbf{Q} = \mathbf{KP}$ [231]. Les LMIs des nouvelles expressions des contraintes sont donc affines par rapport aux variables \mathbf{P} et \mathbf{Q} .

En outre, nous notons que le système PDS en boucle fermée (4.16) est affine par rapport à π , inclus dans l'ensemble convexe Π et donné par (4.15). En se basant sur la propriété

Figure 39 Plan de répartition des variations de π

de convexité du problème dans son intégralité (contraintes convexes, fonction objective convexe et hyper-cube des paramètres convexe aussi), les LMIs seront dupliquées afin de trouver l'ensemble des solutions du problème d'optimisation qui vérifient tous les éléments de l'hyper-cube convexe Π , en considérant uniquement ceux des extrémités dans cet hyper-cube [255], comme suit : pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$;

$$\mathbf{P} > 0 \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) - 2\lambda_{\min} \mathbf{P} > 0 \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) - 2\lambda_{\max} \mathbf{P} < 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \star \\ -\cos \theta \cdot \mathcal{L}^-(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \sin \theta \cdot \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \star & \star \\ \mathbf{B}_{\mathbf{w}_{ij}}^T & -\gamma \mathbf{I} & \star \\ \mathbf{C}\mathbf{P} & 0 & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.33)$$

\mathbf{B}_i et $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_{ij}}$ sont données par (4.17) en considérant les valeurs limites de π dans l'hyper-cube Π (voir figure 39). \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Donc, le problème de synthèse de retour d'état de multi-objectifs H_∞ , avec contrainte de placement de pôle, est établi comme suit :

Problème 4.3 : Minimiser $\gamma > 0$; sujet à

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive et $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ qui satisfont (4.29) – (4.33).

Cas d'optimisation du gain crête-à-crête sous contrainte de placement de pôle

Dans le but de limiter directement la 'pire' amplitude de \tilde{F} , nous considérons le critère de gain crête-à-crête de $T(s)$ (voir figure 37). Ce critère est utilisé pour mesurer l'amplitude du signal de sortie [254]. Comme dans le paragraphe précédent, nous utilisons l'approche LMI pour formuler le problème de synthèse du retour d'état de multi-objectifs lié à la performance de la norme d'amplitude. En effet,

Proposition 4.2 : Le gain crête-à-crête du système (4.16), noté $\|T(s)\|_1$, est plus petit que $\gamma > 0$ s'il existe une matrice $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive, des scalaires $\nu > 0$ et $\mu > 0$ telles que [26] : $\forall \pi \in \Pi$,

$$\mathbf{P}_1 > 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_1, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_1) + \nu\mathbf{P}_1 & * \\ \mathbf{B}_w^T(\pi) & -\mu\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

et

$$\begin{pmatrix} \nu\mathbf{P}_1 & * & * \\ 0 & (\gamma - \mu)\mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}\mathbf{P}_1 & 0 & \gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.36)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Voir la formulation LMI d'optimisation de la norme d'amplitude dans [26, 219, 254], par exemple. ■

Notons que les contraintes (4.34) – (4.36) donnent une condition suffisante de la borne supérieure du gain crête-à-crête $\|T(s)\|_1$ du système (4.16) [219]. D'où, la valeur minimale

de γ , pour laquelle il existe \mathbf{P}_1 , μ et ν qui satisfont (4.34) – (4.36), présente *a priori* une borne supérieure du ‘vrai’ gain crête-à-crête du système. Par conséquent, La synthèse du contrôleur, dans ce cas, est considérée plus *conservative*.

D’après [26], pour évaluer ce *conservatisme*, il convient d’évaluer la longueur de l’intervalle $[\gamma_\infty, \gamma_1]$; où γ_∞ et γ_1 désignent respectivement la norme H_∞ minimale atteinte et la norme d’amplitude. si cette longueur est petite, alors nous jugeons l’estimation du gain crête-à-crête optimal, par l’entremise de la synthèse de commande proposée, ‘bonne’. Inversement, si cet intervalle est large, alors cette estimation est considérée ‘mauvaise’ ou ‘faible’.

Dans la suite, nous fixons la contrainte supplémentaire sur la matrice de *Lyapunov*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p = \mathbf{P}_1 \quad (4.37)$$

Alors, en considérant le changement de variable $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{P}$, le problème d’optimisation, associé à la norme d’amplitude $\|\mathbf{T}(s)\|_1$ avec la contrainte de placement de pôle, est établi comme suit :

Problème 4.4 : Minimiser $\gamma > 0$, sujet à

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive et $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ et des scalaires $\nu > 0$ et $\mu > 0$ qui satisfont (4.29) – (4.32) et; pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$

$$\mathbf{P} > 0 \quad (4.38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) + \nu\mathbf{P} & * \\ \mathbf{B}_{w_{ij}}^T & -\mu\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{pmatrix} \nu\mathbf{P} & * & * \\ 0 & (\gamma - \mu)\mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}\mathbf{P} & 0 & \gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.40)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Les inégalités (4.38) – (4.40) sont encore non linéaires par rapport à P et ν . En pratique, pour trouver la ‘meilleure’ borne supérieure du gain crête-à-crête, nous proposons de minimiser $\gamma(\nu)$ par rapport à ν . Ce dernier problème est présenté comme un sujet de minimisation unidimensionnelle ajouté au problème d’optimisation LMI introduit ci-haut (Cf. problème 4.4).

4.4.2.3 Conclusion

Nous avons appliqué une technique de commande linéarisante et de synthèse de retour d’état linéaire pour réaliser un schéma de contrôle de force d’un actionneur pneumatique. La dynamique d’erreur du système en boucle fermée est affectée dans ce cas, par des signaux exogènes de perturbations bornées (voir figure 37).

En tenant compte des incertitudes des paramètres, nous avons utilisé un placement de pôle robuste dans une région de stabilité \mathcal{D} spécifique en concurrence avec une performance de rejet de perturbation optimale. Cette optimisation a été discutée en utilisant deux critères distincts de H_∞ et de gain crête-à-crête. Nous allons comparer, plus tard dans ce chapitre⁷, les deux performances avec des résultats expérimentaux. Finalement, la technique de commande de force que nous avons étudiée, dans cette section, demeure très utile pour la suite de la conception de système pneumatique de force suffisamment précis pour un éventuel contrôle de position de ces actionneurs pneumatiques.

4.4.3 Commande robuste de force - stratégie 2

Étant donné le système de force pneumatique représenté par la figure 40. Dans cette section, nous proposons un contrôle de force qui tient compte de l’aspect non borné des entrées exogènes de la dynamique de force (voir figure 41), en particulier, dans le cas d’un système de positionnement libre (non contrôlé) d’un actionneur pneumatique et sou-

⁷ Cf. section §4.5.1 dans ce chapitre.

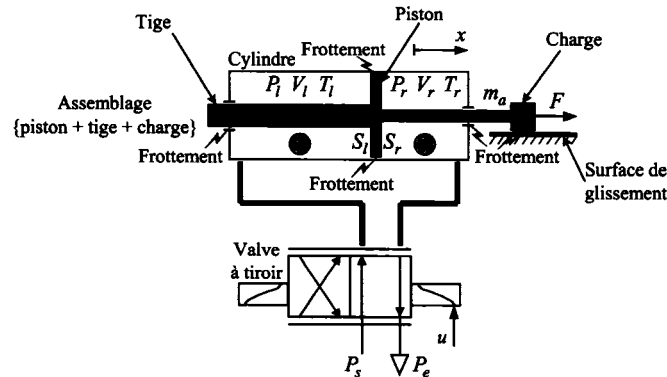


Figure 40 Schéma de système d'actionneur pneumatique sous frottement

mis au frottement (voir figure 40). En effet, la dynamique de contrôle de pression dans les chambres du vérin est considérée indépendante de celle de position du piston et de la charge (voir figure 40). L'ensemble des perturbations causées par le mouvement de la partie mécanique ne peuvent pas être considérées bornées *a priori*.

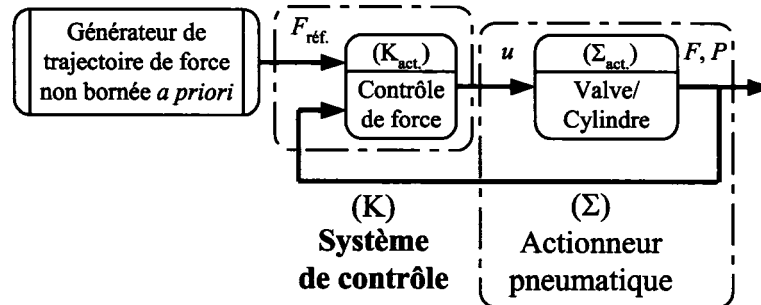


Figure 41 Schéma de base de contrôle de force-stratégie 2

Nous développons la conception de contrôle de force en utilisant l'expression analytique du modèle dynamique non linéaire de force à paramètres incertains (4.1) – (4.9) introduite dans la section §4.2.2 [247]. Nous procédons d'abord par une annulation de la plupart des non linéarités et des termes non bornés connus du système (comme dans la sous-section §4.4.2). Ensuite, nous développons une combinaison d'un contrôleur linéaire de type PI [247] et d'un compensateur non linéaire *atténuant*⁸, selon le schéma présenté dans

⁸ En anglais, *nonlinear damping* [216].

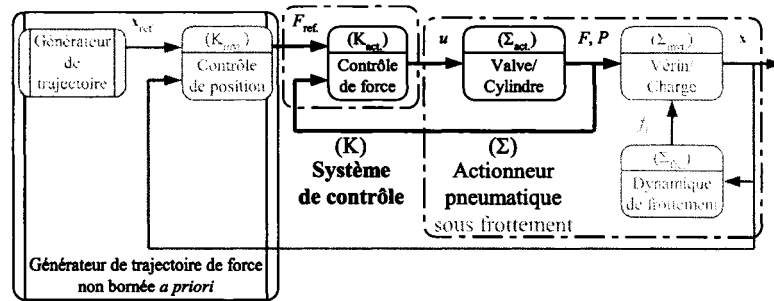


Figure 42 Schéma de base de contrôle de force, vu comme une partie intégrante du contrôle de position d'un actionneur pneumatique

[216], pour stabiliser la dynamique d'erreur de force en boucle fermée et limiter l'effet des perturbations dont les limites des variations sont *a priori* inconnues ou non forcément bornées. Comme dans [32, 247], la synthèse des gains de la commande linéaire est basée sur un placement de pôle approprié, exprimé en termes de LMIs. La combinaison de la technique de commande atténuante avec la formulation LMI du sous-problème linéaire constitue une autre contribution dans le présent travail.

4.4.3.1 Linéarisation partielle

Nous considérons la dynamique de force (4.1). Nous introduisons la même technique de linéarisation par *feed-back* utilisée dans la stratégie de contrôle de force 1 (Cf. sous-section §4.4.2) selon [247, 250, 256] :

$$u = \frac{u_c + \beta_{1n} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})}{\beta_{2n} h_2(t, P_l, P_r, x)} \quad (4.41)$$

où β_{1n} et $\beta_{2n} > 0$ (voir relation 4.4) sont les valeurs nominales introduites dans (4.10). D'où, nous débarrassons le système (4.1) de la plupart des dynamiques non linéaires connues en remplaçant (4.41) dans (4.1) :

$$\dot{F}(t) = \pi_1(t) h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \tilde{\beta}_2(t) u_c \quad (4.42)$$

où $\pi_1(t)$ et $\tilde{\beta}_2(t) = \pi_2(t) + 1$ sont les paramètres incertains de Π , définis dans (4.15). Le terme h_1 , donné par (4.5), est une fonction des variables connues des pressions P_l et

P_r , qui sont bornées, de la position x et en particulier de la vitesse \dot{x} , qui ne sont pas bornées *a priori*. Par conséquent, l'usage d'un critère d'optimisation [247], comme dans la section précédente, n'est pas approprié ici, et la dynamique de force (4.42) ne peut pas être traitée seulement par un compensateur linéaire. Dans la suite, nous développons le terme u_c nécessaire pour compléter le schéma de contrôle de force.

L'objectif de la commande proposée est d'assurer un suivi de trajectoire de la force pneumatique F ; qui tient non seulement compte des incertitudes paramétriques, mais également des termes non bornés. Admettons en outre que, dans le contexte de positionnement du vérin pneumatique sous frottement, la force de référence est (par définition) une fonction variable de la vitesse et est une combinaison de la force de frottement estimée⁹ [256]. En particulier, si nous notons par $F_d(t, \dot{x})$ la force de référence, alors en accord avec la modélisation de la force de frottement et son estimation qui seront introduites dans le chapitre 5, nous pouvons écrire la fonction dérivée du signal de référence $\dot{F}_d(t, \dot{x})$ comme une combinaison de termes continus et discontinus [256], selon :

$$\dot{F}_d(t, \dot{x}) = F'_d(t, \dot{x}) - \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}) \quad (4.43)$$

où $F'_d(t, \dot{x})$ représente une fonction d'approximation continue de la dérivée du signal de référence, et $\pi_3(t)\varphi(t, \dot{x})$ son erreur d'approximation. $\varphi(t, \dot{x})$ est une fonction continue et $\pi_3(t)$ un paramètre incertain, qui inclut l'aspect de discontinuité de la force de frottement au voisinage de la vitesse nulle (voir dans [256]). En particulier, si nous appliquons une compensation de frottement basée sur le modèle de *LuGre*, nous retrouvons ce type de discontinuité dans l'expression de la dérivée de la force de frottement sous forme de fonction $\text{sgn}(\cdot)$. Et, pour éviter cette discontinuité dans le terme d'anticipation de la commande de force (assujettie à une boucle externe de contrôle de position), nous suggérons son remplacement (ou approximation) par la fonction continue $\text{sat}(\cdot)$ selon la formule générale proposée dans (4.43).

⁹ Voir section §5.3.2 de contrôle de position d'un actionneur pneumatique, dans le chapitre 5.

Dans la suite, nous notons par $\tilde{F} = F - F_d$ l'erreur de suivi. Le modèle de suivi de trajectoire de force pneumatique est exprimé, dans ce cas, par la représentation d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\pi)u_c + \mathbf{B}_w w(t) \quad (4.44)$$

avec

$$\mathbf{X} = \left(\int \tilde{F} dt \quad \tilde{F} \right)^T \text{ et } w(t) = \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) - \dot{F}_d(t, \dot{x}) \quad (4.45)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Les termes $h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})$, $\pi_1(t)$ et $\dot{F}_d(t, \dot{x})$ sont exprimés respectivement dans les relations (4.5), (4.15) et (4.43).

4.4.3.2 Synthèse LMI du retour d'état PI

Le système dynamique d'erreur de force (4.44) est la résultante d'une partie linéaire et d'un terme non linéaire et non forcément borné (*i.e.* $\mathbf{B}_w w(t)$). La commande u_c , que nous allons proposer, sera, en effet, une combinaison de deux lois de compensation destinées aux dits termes.

D'abord, considérons le sous-système linéaire PDS, par rapport à l'incertitude π , suivant :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\pi)u_c \quad (4.47)$$

Si nous posons $u_c = -\mathbf{K}\mathbf{X}$, alors le système linéaire en boucle fermée

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} \quad (4.48)$$

peut être uniformément asymptotiquement stable pour un vecteur-ligne-gain \mathbf{K} soigneusement choisi dans \mathbb{R}^2 ; *i.e.* il existe une matrice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive, telle que : $\forall \pi \in \Pi$,

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}) < 0 \quad (4.49)$$

L'opérateur \mathcal{L}^+ est défini dans (4.20). En plus, nous accordons à ce système de multi-objectifs une synthèse de commande robuste (pour tenir compte de l'incertitude structurée et bornée) semblable à celle développée dans la section précédente. Le retour d'état linéaire $-KX$ permet de fixer respectivement la marge de stabilité exponentielle (*i.e.* temps de réponse) et l'amortissement (*i.e.* dépassement maximum), et de limiter la dynamique (*i.e.* fréquence du mode oscillatoire) du contrôleur [219, 220]. La synthèse de cette action linéaire peut être, en fait, présentée sous forme d'un problème de faisabilité de placement de pôle robuste dans une région de stabilité \mathcal{D} . Dans la suite, nous remplaçons la condition de stabilité (4.49) par la région de stabilité \mathcal{D} donnée par (4.19) et élaborée dans la stratégie 1 de commande de force¹⁰. La procédure de synthèse LMI associée à ce problème a été longuement discutée dans la sous-section §4.4.2.2. Seulement, nous ne tenons pas compte ici des critères d'optimisation (H_∞ et norme d'amplitude) pour trouver les matrices P et K (*i.e.* la variable auxiliaire $Q = KP$).

Proposition 4.3 : Le système dynamique linéaire en boucle fermée (4.48) est uniformément asymptotiquement stable et l'ensemble de ses pôles balayent la région stable de \mathcal{D} , donnée par (4.19) si et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ qui satisfont (4.29) – (4.32), pour tout $i = 1, 2$ [250, 256].

Démonstration : Voir, par exemple, dans [218, 220, 222]. ■

En utilisant le résultat de la proposition 4.3, la relation (4.49) implique qu'il existe une matrice $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive, telle que :

$$(A - B(\pi)K)P + P(A - B(\pi)K)^T = -W \quad (4.50)$$

4.4.3.3 Commande résultante : PI + compensation non linéaire

Dans la suite, la conception de la loi de commande u_c est basée sur la synthèse du contrôleur linéaire, discuté dans la proposition 4.3 et l'approche de commande non linéaire at-

¹⁰ Cf. section §4.4.2.

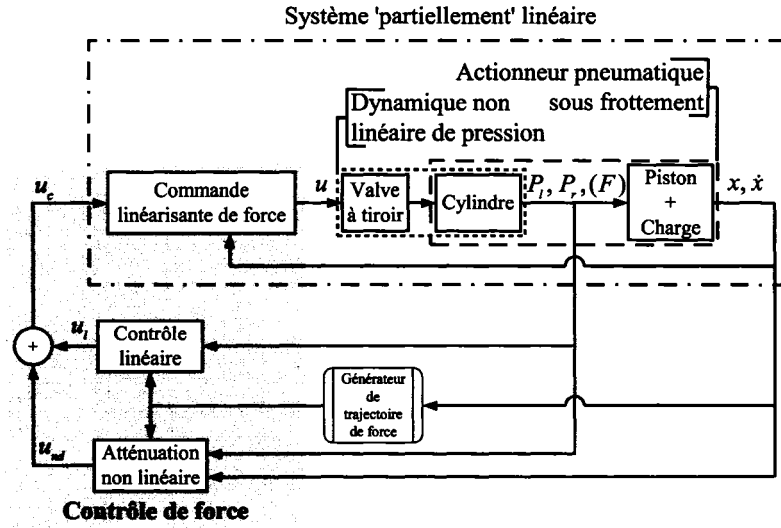


Figure 43 Schéma-bloc de la stratégie 2 de commande de force d'un actionneur pneumatique

ténuante présentée dans [216] dans une version légèrement modifiée pour garantir la robustesse de cette commande par rapport au paramètre multiplicatif incertain $\tilde{\beta}_2$ (dans la matrice $\mathbf{B}(\pi)$ de l'équation (4.44)) selon :

Proposition 4.4 : Considérons le système (4.42). Si l'action de commande u_c est définie par la combinaison suivante (voir figure 43) :

$$u_c = u_l + u_{nd} \quad (4.51)$$

où

$$u_l = F'_d(t, \dot{x}) - \mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.52)$$

et

$$u_{nd} = -\frac{K_{nd}}{\underline{\tilde{\beta}}_2} (h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})^2 + F'_d(t, \dot{x})^2 + \varphi(t, \dot{x})^2) \mathbf{B}_w^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \quad (4.53)$$

avec $\underline{\tilde{\beta}}_2$ la borne inférieure du paramètre incertain $\tilde{\beta}_2(t)$, décrit par (4.10) et (4.11), et $K_{nd} > 0$. Supposons qu'il existe une matrice $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, symétrique et définie positive et une matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ qui satisfont (4.29) – (4.32). Alors, nous calculons $\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$, et

la dynamique du système en boucle fermée, donnée par (4.44) – (4.43) et (4.51) – (4.53), est uniformément bornée.

Démonstration : La substitution de l'expression de $w(t)$, donnée dans (4.45), (4.43) et (4.51), et par la suite (4.52), dans (4.44) conduit à la dynamique d'erreur suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} + \mathbf{B}_w(\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \pi_2(t)F'_d(t, \dot{x}) + \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}))$$

avec $\pi_2(t) = \tilde{\beta}_2(t) - 1$, déjà introduite dans (4.15).

Choisissons la fonction candidate de *Lyapunov* $V = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$. Alors, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction V , tout au long de la trajectoire du système, s'écrit :

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})^T\mathbf{P}^{-1})\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w(\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \pi_2(t)F'_d(t, \dot{x}) + \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}))$$

En utilisant (4.50), nous avons

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \bar{\pi}_1|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_wh_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| + \bar{\pi}_2|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_wF'_d(t, \dot{x})| + \bar{\pi}_3|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w\varphi(t, \dot{x})|$$

avec $\bar{\pi}_1 = \max(|\pi_1|) > |\pi_1|$, $\bar{\pi}_2 = \max(|\pi_2|) > |\pi_2|$ et $\bar{\pi}_3 = \max(|\pi_3|) > |\pi_3|$. Ensuite, si nous posons le terme u_{nd} suivant

$$u_{nd} = -\frac{1}{\tilde{\beta}_2}(K_1h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})^2 + K_2F'_d(t, \dot{x})^2 + K_3\varphi(t, \dot{x})^2)\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} - K_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}| \\ & |h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| - K_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|F'_d(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})| \\ & - K_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|\varphi(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||\varphi(t, \dot{x})| \end{aligned}$$

Le terme $-K_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|$ a un maximum de $\frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1}$ à $|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_1}{2K_1}$. Le terme $-K_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|F'_d(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})|$ a un maximum de $\frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2}$ à $|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_2}{2K_2}$. Et, finalement, le terme $-K_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|\varphi(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||\varphi(t, \dot{x})|$ a un maximum de $\frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$

à $|\mathbf{B}_w^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}| |\varphi(t, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_3}{2K_3}$. Donc,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} + \frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1} + \frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2} + \frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$$

D'où, \dot{V} est négative à l'extérieur d'une boule donnée (*i.e.* $\exists \delta > 0$, telle que $\dot{V} < 0$, $\forall \|\mathbf{X}\|$) [216]. D'après le théorème 4.18 dans [216], il suit que pour tout vecteur d'état initial $\mathbf{X}(t_0)$, la solution du système en boucle fermée est uniformément bornée. Finalement, nous posons K_{nd} tel que (par exemple) $\frac{1}{K_{nd}} = \frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1} + \frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2} + \frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$. ■

u_l , donné par 4.52, est le terme linéaire par rapport au vecteur erreur et l'approximation continue de la dérivée de la force désirée $F'_d(t, \dot{x})$ et u_{nd} , donné par 4.53, est le terme non linéaire, continu pour atténuer ou compenser l'effet des termes exogènes qui agissent sur la dynamique d'erreur de force en boucle fermée.

4.4.3.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé une conception complète d'un contrôleur de force d'un actionneur pneumatique, qui tient compte des incertitudes de paramètres structurées et des aspects (signaux exogènes) non bornées. Le résultat de ce schéma adéquatement choisi servira dans le traitement du problème de contrôle de mouvement de l'actionneur sous frottement. Cette deuxième stratégie de contrôle de force est construite à partir d'une linéarisation par *feed-back* pour annuler la plupart des non linéarités connues. Ensuite, une action de retour d'état linéaire robuste et une autre compensation atténuante non linéaire sont développées pour réduire l'effet des termes non linéaires d'amplitudes non bornées *a priori*. L'ensemble permet de garantir une solution bornée de la dynamique de force. Des résultats expérimentaux vont permettre d'illustrer, en particulier, cette démarche de contrôle de force.

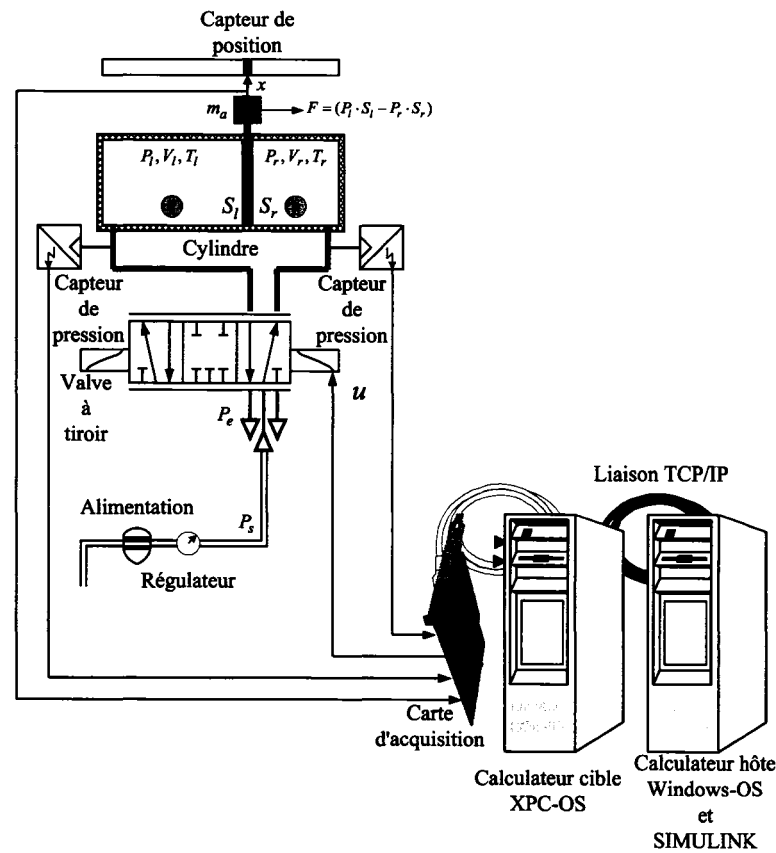


Figure 44 Schéma du dispositif expérimental

4.5 Étude expérimentale

Un *experimentum*¹¹ est développé pour illustrer séparément l'efficacité de chaque stratégie de contrôle de force étudiée dans ce chapitre. Le système que nous considérons (voir figure 44) consiste en un vérin sans tige (*FESTO*, DGP-25-500) actionné par une électro-valve à 5 voies (*FESTO*, MPYE-5-1/8LF-010B). L'alimentation d'air comprimé est véhiculée via un régulateur (*FESTO*, LFR-M2-G1/4-C10RG). Les capteurs de pression (*FESTO*, SDE-10) sont utilisés pour mesurer la pression différentielle, équivalente à la force pneumatique appliquée sur le piston, à travers des ports non restrictifs. Le déplacement du piston est mesuré avec un capteur de position (*FESTO*, MLD-POT-500-TLF). La vitesse

¹¹ Du latin, il signifie expérience artificielle (au laboratoire).

est obtenue par une dérivation numérique des mesures de position. Le signal d'entrée, *i.e.* le déplacement du tiroir de la valve qui est proportionnel à la tension d'excitation de la valve, et les différentes mesures (*i.e.* les signaux de sortie) sont respectivement envoyés et acquis par un ordinateur via une carte d'acquisition (*National Instruments*, PCI-6052E). L'algorithme de contrôle est implémenté en utilisant les logiciels *Simulink*, *XPC-Target* et *Real-Time-Workshop* qui se trouvent dans *MATLAB*®. La période d'échantillonnage est fixée à 100 μ s. Le schéma-bloc implémenté dans *Simulink* est transformé en code *C*, sur un ordinateur hôte équipé avec *Windows-OS* et *Simulink*. Un dispositif exécutable est ensuite construit, et un noyau de type *real-time kernel* est utilisé pour exécuter le code sur un ordinateur cible équipé de *XPC-OS* (voir figure 44). Les deux ordinateurs hôte et cible utilisent une communication *TCP/IP*. Les valeurs numériques des paramètres du système pneumatique sont données dans le tableau V. La synthèse des différentes LMIs sont résolues dans *LMI Control Toolbox* de *MATLAB*® [232].

Tableau V

Valeurs numériques des paramètres de l'actionneur pneumatique

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur nominale
m_a (kg)	-	-	0.326
u_{max} (m)	-	-	0.002
P_e (bar)	-	-	1.01
P_s (bar)	-	-	6.08
R (Nm/kgK)	-	-	287.
$S_l = S_r$ (m ²)	-	-	$4.9 \cdot 10^{-4}$
T_a (K)	-	-	295.
$V_{l_{max}} = V_{r_{max}}$ (m ³)	-	-	$2.45 \cdot 10^{-4}$
W (m)	-	-	0.005
β_1	1.0	1.3997	1.1999
β_2	0.075	1.3297	0.7023
ζ	-	-	1.3997

4.5.1 Contrôle de force - stratégie 1

La trajectoire de la force désirée est donnée par $F_d(t) = -75 \cos 2\pi ft$ (exprimée en Newton), pour différentes valeurs de la fréquence f . Le vecteur paramètre d'incertitudes π est inclus dans l'hyper-cube $\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T \mid -1.2719 \leq \pi_1 \leq 1.2719 \text{ et } -0.8932 \leq \pi_2 \leq 0.8932 \right\}$. Ces limites sont calculées par une procédure d'identification préliminaire [33, 248]. Les paramètres limites de la région de stabilité \mathcal{D} de la partie linéaire incertaine sont choisies comme suit : $\lambda_{min} = -300$, $\lambda_{max} = -5$ et $\theta = \arccos 0.7$. Ces valeurs sont fixées dans le but de réaliser un compromis entre le temps de réponse, les fréquences admissibles des modes oscillatoires, le dépassement maximum et la limitation de l'amplitude de l'effort de commande.

Tableau VI

Performances de multi-objectifs H_∞ et gain crête-à-crête, et gains du contrôleur linéaire

critère d'entrée/sortie	γ	K_P	K_I
H_∞	0.1382	161.1	1089.3
gain crête-à-crête	0.1765	161.1	942.7

Les gains du contrôleur ainsi que l'estimation des bornes supérieures des normes (H_∞ et crête-à-crête) sont donnés dans le tableau VI. Le tableau VII montre les performances de rejet de perturbation du contrôleur de la stratégie 1. Il illustre respectivement l'amplitude maximale approximée de l'erreur et son RMS obtenues pour différentes fréquences f de la force sinusoïdale désirée. Ces approximations sont calculées pendant l'intervalle de temps entre 2 et 10 secondes, qui est *a priori* suffisamment loin du régime transitoire. Évidemment, les valeurs maximales de l'erreur de force sont censées d'être meilleures (*i.e.* plus petites) par le critère de gain crête-à-crête comparées à celles obtenues par le critère H_∞ . Aussi, nous constatons que les meilleures erreurs RMS sont celles obtenues par le biais du critère H_∞ . Dans l'ensemble, cette erreur reste bornée et faible.

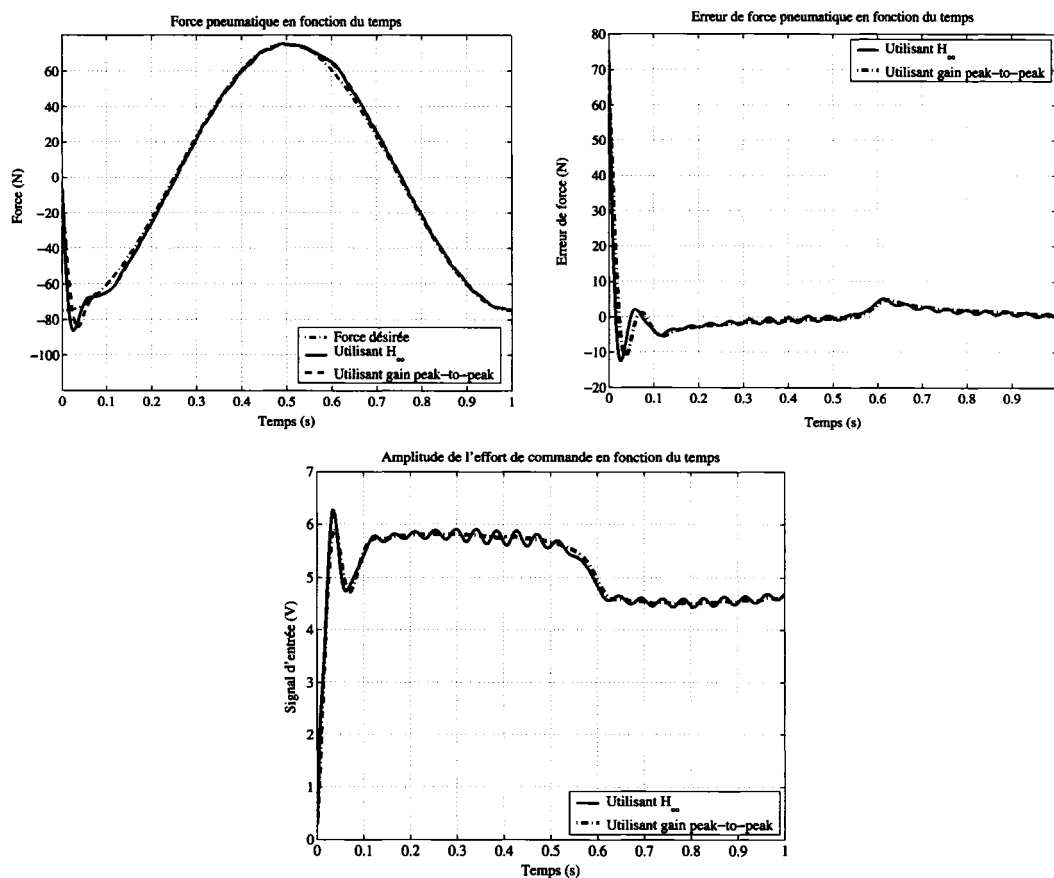


Figure 45 Force appliquée sur le piston, erreur de force et effort de commande, utilisant les performances H_∞ et gain crête-à-crête, dans le cas d'une force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N et de fréquence $f = 1$ Hz

La figure 45 montrent respectivement la force réelle appliquée, l'erreur de force et l'effort de commande, pendant une période de 1 s, pour une trajectoire sinusoïdale de force désirée d'amplitude 75 N et de fréquence $f = 1$ Hz. En effet, la force mesurée tend rapidement vers la force désirée grâce à la contrainte de placement de pôle. L'usage de chacun des deux critères de performance proposées améliore manifestement la qualité de la réponse. L'effort de commande est acceptable même en présence d'incertitude de paramètres parfois variant brutalement. Nous constatons une oscillation relative de la valve dans le cas de la commande obtenue par le critère H_∞ .

Tableau VII

Performances de multi-objectifs H_∞ et gain crête-à-crête en fonction de la fréquence de la force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N

Fréquence f (Hz)	Valeur maximale de l'amplitude d'erreur de force (N)	
	Utilisant H_∞	Utilisant H_1
0.1	1.6968	2.7440
0.5	4.7559	5.0703
0.9	5.7608	5.7235
<u>1.0</u>	5.9510	<u>5.4825</u>
1.2	6.0825	6.0290
1.3	6.2133	6.1468
1.5	5.9117	5.9895

Fréquence f (Hz)	Valeur maximale de RMS de l'erreur de force (N)	
	Utilisant H_∞	Utilisant H_1
0.1	0.3295	0.4817
0.5	1.5879	1.7048
0.9	2.1953	2.2844
<u>1.0</u>	<u>2.2978</u>	2.3896
1.2	2.4046	2.5191
1.3	2.5626	2.6277
1.5	2.5374	2.6394

Finalement, il a été montré qu'une bonne estimation de la norme H_1 par les outils LMI peut être considérée comme un critère de performance approprié pour limiter l'effet des perturbations sur l'amplitude de l'erreur de suivi, comparativement au critère RMS. Néanmoins, cette performance n'est possible que dans le cas d'une estimation garantie, par l'entremise des outils LMI, de la solution de gain crête-à-crête; ce qui n'est pas toujours le cas, à cause de l'aspect conservateur de la formulation LMI dans ce cas.

Nous pouvons conclure aussi que la synthèse du contrôleur suivant le critère de performance H_∞ peut être retenue (*i.e.* utilisée exclusivement) pour atténuer l'effet des perturbations, même en amplitude, en dépit de son caractère qui est défini plutôt par rapport à la minimisation de l'énergie de l'erreur.

4.5.2 Contrôle de force - stratégie 2

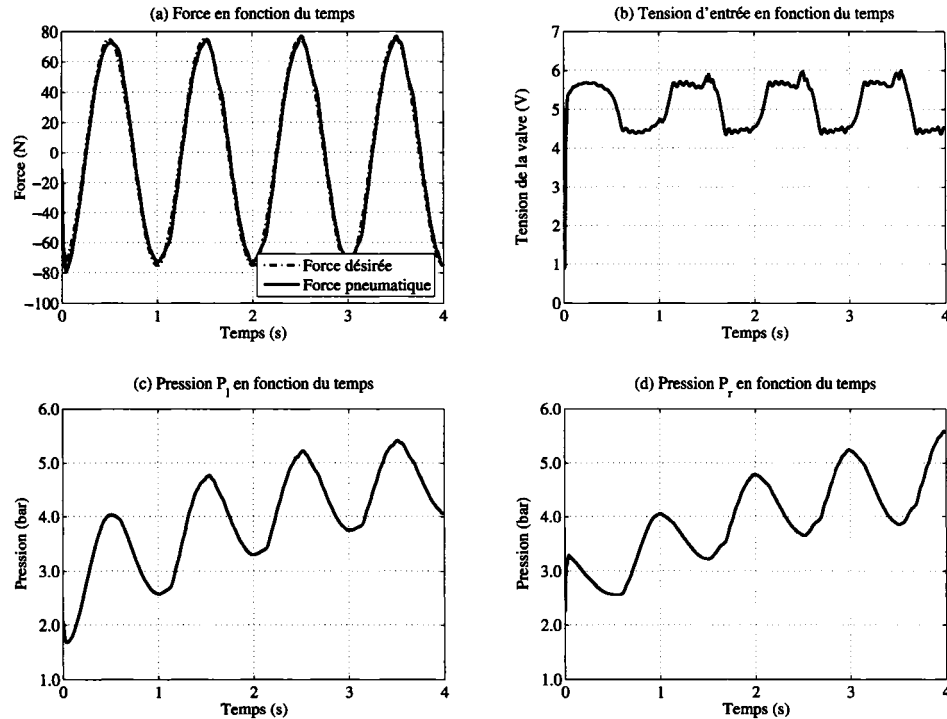


Figure 46 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence sinusoïdale

Les paramètres limites de la région de stabilité \mathcal{D} de la partie linéaire incertaine sont choisies, dans ce cas, selon : $\lambda_{min} = -120$, $\lambda_{max} = -2$ et $\theta = \arccos 0.7$. Les gains du contrôleur PI sont donnés par $\mathbf{K} = (177.8 \ 74.9)$. Le gain peut être choisi à $K_{nd} = 0.01$.

Les figures 46 (a), 47 (a) et 48 (a) montrent la force réelle mesurée et la force désirée pour différentes formes de signal de référence. L'erreur de force reste infiniment bornée. Les efforts de commande associés à ces différentes réponses sont représentés dans les figures 46 (b), 47 (b) et 48 (b). Nous montrons que l'excitation de la valve dans ces cas ne dépasse point la valeur maximale de 10 V (qui est équivalente à l'ouverture maximale du tiroir u_{max}). Finalement, les figures 46 (c), 46 (d), 47 (c), 47 (d), 48 (c) et 48 (d) montrent les niveaux des pressions dans les deux chambres du cylindre. Dans [250] (papier, présenté

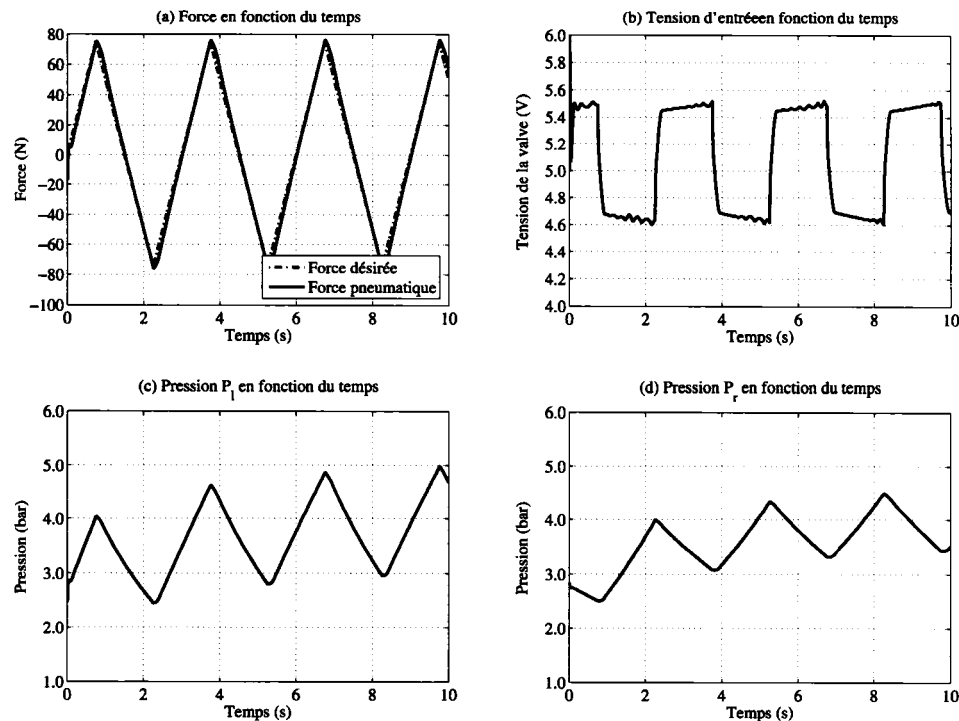


Figure 47 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence triangulaire

dans un journal, est actuellement en révision), nous présentons plusieurs résultats qui permettent de comparer notre approche avec une autre loi de commande linéaire robuste de type PD.

4.6 Conclusion

Nous avons discuté dans ce chapitre la technique de contrôle de force d'un système d'actionneur pneumatique, par le biais du formalisme LMI en tenant compte de plusieurs aspects d'incertitudes et de perturbations liés à ces installations. En effet, l'application de cette technique (Cf. LMI) dans la synthèse de la commande des systèmes pneumatiques constitue une nouvelle contribution (*i.e.* une originalité qui n'a été présentée nulle part dans la littérature à notre connaissance). En outre, le complément de la commande dis-

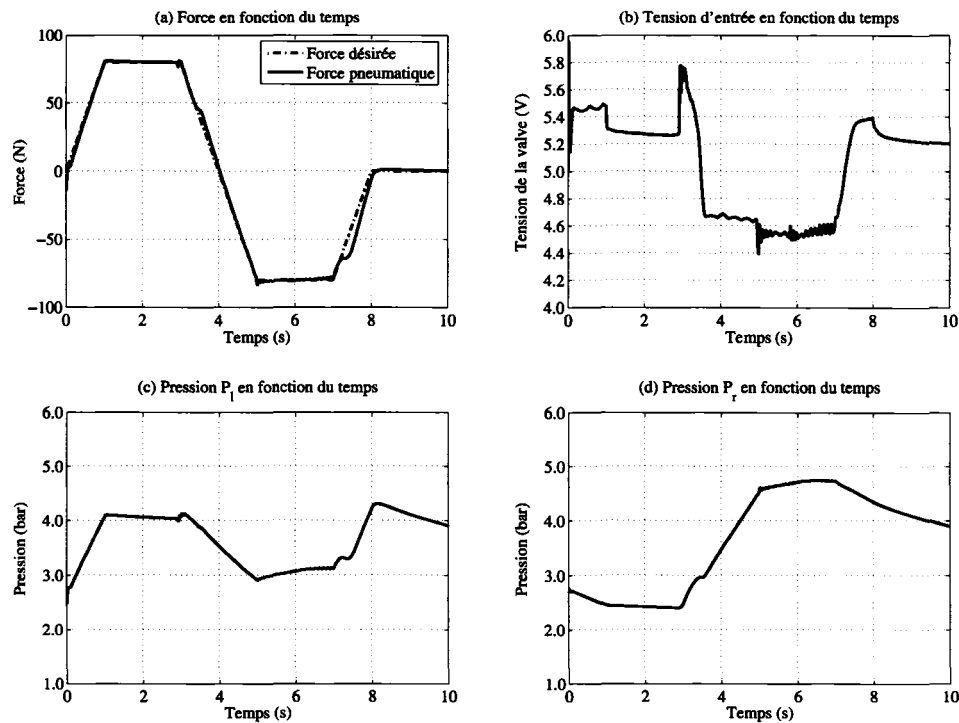


Figure 48 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence trapézoïdale

cutée dans la stratégie 2 (*Cf.* commande atténuante) représente une nouvelle proposition dans le traitement de la commande des systèmes pneumatiques; qui est décrite selon une lecture spécifique de ce qui caractérise le type de couplage de position/force (complexe et non négligeable) qui existe dans ces installations.

Le résultat de cette étape est destiné à la mise en place d'un système performant de contrôle de position par l'entremise d'une boucle interne de force. Il s'agit d'un travail intermédiaire dans la stratégie générale de contrôle des systèmes pneumatiques étudiée dans cette deuxième application. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment nous allons établir le module de contrôle de position basé sur les performances aménagées et obtenues dans ce chapitre.

CHAPITRE 5

APPLICATION 2 : SYSTÈME D'ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (DEUXIÈME PARTIE : CONTRÔLE DE POSITION)

« On peut sur les vérités de fait, se passer de la démonstration si l'on sait se servir de l'expérience. »

Roger Bacon (1214 – 1294)
Opus Majus

5.1 Introduction

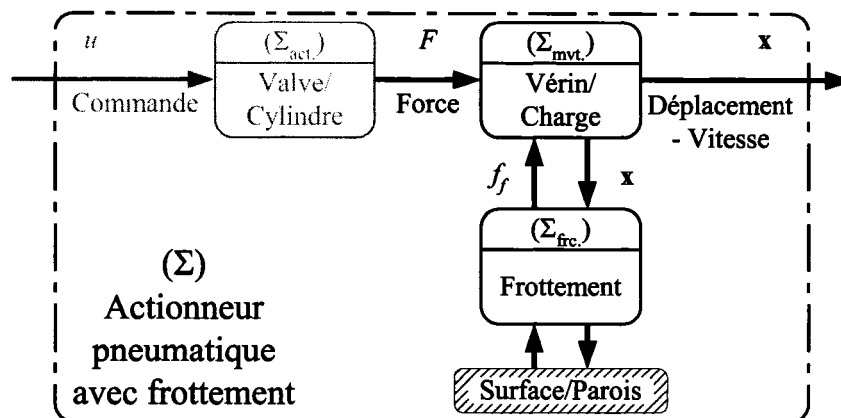


Figure 49 Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement

Dans ce chapitre, nous développons la stratégie de contrôle de position de l'actionneur pneumatique (voir figure 49), tout en supposant que la dynamique de force (*i.e.* de pression) est bien entretenue comme nous avons pu le réaliser dans le chapitre précédent (*Cf.* chapitre 4). La performance minimale escomptée de la boucle interne de contrôle de force est la limitation de l'erreur de force dans un intervalle fini (*i.e.* erreur de force bornée). Bien évidemment, plus l'amplitude de cette erreur est petite, plus la réponse de la dynamique de position en boucle fermée est meilleure. Un autre facteur, qui sera nouveau dans la démarche développée dans ce chapitre, est l'effet de variation des paramètres de frottement.

En tout, nous allons présenter un schéma de contrôle de position et de compensation de frottement analogue à celui utilisé dans les chapitres 2 et 3 qui tient compte de ces aspects supplémentaires mentionnées ci-haut (effet de dynamique de force et effet de variation des paramètres de frottement). Nous verrons que ce schéma complexe renferme ceux de cas d'une masse simple ou d'un robot de contact. En effet, le schéma descriptif de la solution du problème, comme nous le verrons, sera conforme au schéma-bloc général détaillé de commande de système de mouvement et de compensation de frottement introduit dans la figure 9 dans le chapitre 2. Notre contribution dans ce chapitre est ainsi liée à la formulation du problème de contrôle de position de l'actionneur pneumatique et de compensation de frottement sous forme d'un problème de passivité de systèmes inter-connectés en utilisant un contrôleur linéaire ayant une structure dynamique flexible. Ce dernier est choisi pour résoudre simultanément le problème de stabilité, de placement de pôles et de robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes (dus essentiellement aux variations des paramètres de frottement) qui caractérisent ce genre de système en général. En outre, cette synthèse de commande des systèmes pneumatiques est élaborée principalement par l'entremise du formalisme LMI.

5.2 Modélisation de la partie mécanique d'un actionneur pneumatique

Le système que nous considérons (voir figures 49 et 50) consiste en un cylindre pneumatique alimenté en air comprimé par l'intermédiaire d'une servo-valve. Si nous notons par x , \dot{x} et \ddot{x} respectivement la position, la vitesse et l'accélération du piston, alors nous décrivons la dynamique de déplacement de l'assemblage {piston + tige + charge} sous l'influence du frottement dynamique f_f par [159, 257] :

$$m_a \ddot{x} = F - f_f \quad (5.1)$$

où m_a désigne la masse de l'assemblage {piston + tige + charge}, F la force produite par l'actionneur pneumatique, *i.e.* $F = P_l S_l - P_r S_r$ (voir figure 50). F est obtenue par l'équation d'état, non linéaire et non stationnaire, à contrôle affine et incertitudes structurées,

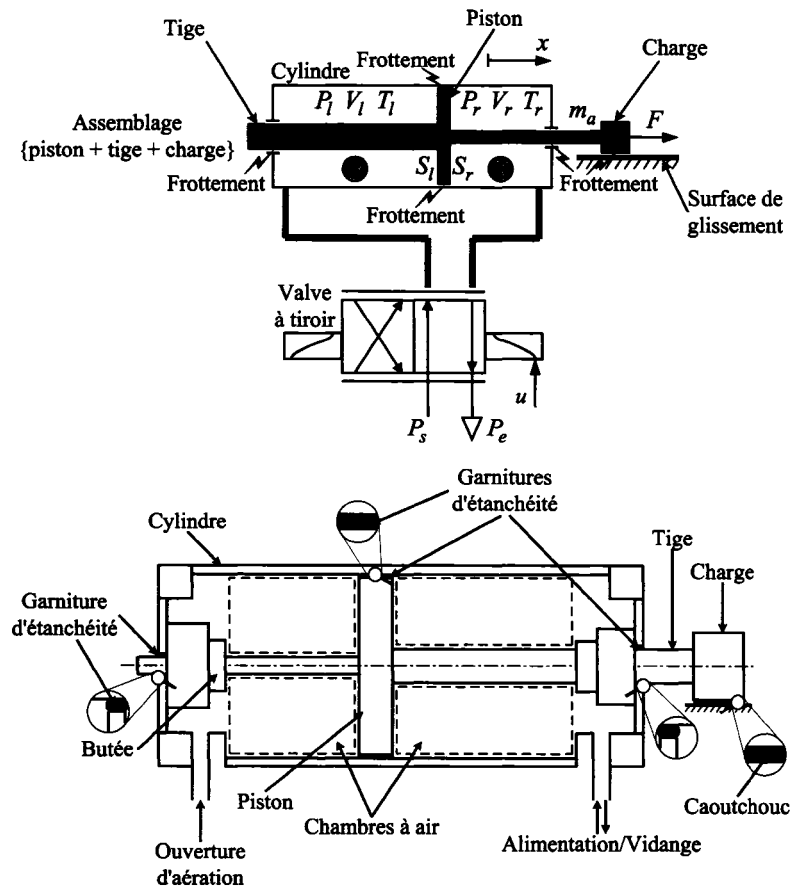


Figure 50 Description schématique d'un système pneumatique

donnée par (4.1) – (4.8) (Cf. chapitre 4) [32, 33, 247, 248]. En respectant le schéma de contrôle de force présenté dans le chapitre 4, nous représentons les variations de la force de frottement, citée dans l'équation (5.1), par le modèle de frottement de *LuGre*¹, selon [20, 257] :

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} z + \dot{x} \quad (5.2)$$

et

$$f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v \dot{x} \quad (5.3)$$

où la variable d'état interne de frottement z décrit la déformation relative des aspérités des surfaces de contact piston-garniture d'étanchéité-cylindre, tige-garniture d'étanchéité-

¹ Voir sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

cylindre et charge-surface de glissement (voir figure 50). Le paramètre σ_0 décrit la rigidité interne, σ_1 le coefficient d'amortissement interne et σ_v le coefficient de frottement visqueux. Le terme $g(\dot{x})$ représente la fonction finie de *Stribeck*, donnée par [20] :

$$g(\dot{x}) = f_c + (f_s - f_c) \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}} \quad (5.4)$$

Les termes f_c et f_s correspondent respectivement aux forces de frottement de *Coulomb* et de frottement statique, \dot{x}_s la vitesse relative de *Stribeck*. Dans la suite, nous assumons l'hypothèse suivante :

H5.1 Tous les paramètres dynamiques et statiques de ce modèle de frottement sont assujettis à des incertitudes et des variations; en raison de la variation de la vitesse relative, des états thermodynamiques (température, pression, *etc.*), de l'état de surface du matériau, des conditions de lubrification et d'étanchéité, et des forces normales entre les surfaces de contact [34, 106]. Par hypothèse, chaque paramètre est déterminé dans un intervalle fini, *i.e.*

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 \leq \sigma_0 \leq \bar{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1 \leq \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_1, \underline{\sigma}_v \leq \sigma_v \leq \bar{\sigma}_v, \\ \underline{f}_c \leq f_c \leq \bar{f}_c, \underline{f}_s \leq f_s \leq \bar{f}_s \text{ et } \underline{\dot{x}_s} \leq \dot{x}_s \leq \bar{\dot{x}_s} \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.3 Commande de position d'un système d'actionneur pneumatique

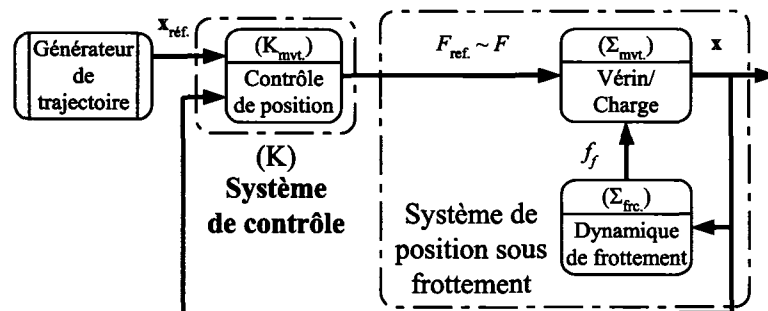


Figure 51 Schéma de base de contrôle de position

Dans cette section, nous introduisons le schéma de contrôle de position de l'actionneur pneumatique opérant sous frottement (voir figure 51). La technique de compensation de

frottement, développée ici, tient compte des variations (*i.e.* incertitudes) des paramètres de frottement. Nous établissons dans ce cas le dispositif de stabilisation et ses conditions qui représentent le maillon principal de la conception à multi-objectifs du contrôleur. Nous allons déduire le schéma de synthèse d'un retour de sortie dynamique et linéaire par le formalisme LMI, comme dans les chapitres 2 et 3. La démarche proposée repose sur les résultats de la commande de force présentés dans le chapitre précédent (voir figure 52) [32, 247, 250, 256]². Pour ce faire, nous considérons l'hypothèse suivante :

H5.2 La trajectoire désirée de position, noté x_d , est suffisamment lisse³ et bornée.

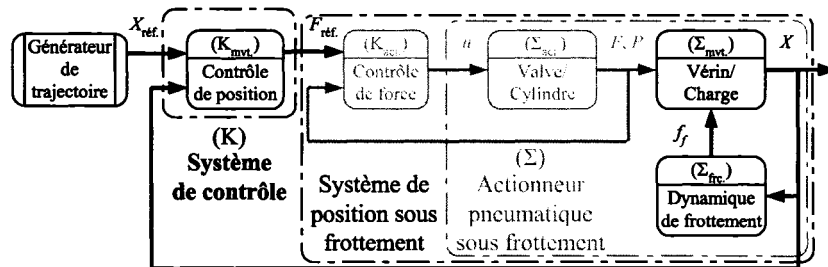


Figure 52 Schéma de base contrôle de position, utilisant une boucle interne de contrôle de force

5.3.1 Compensation de frottement

L'objectif de la commande est de concevoir un contrôleur de suivi de trajectoire de mouvement sous frottement (voir figures 52 et 53), qui permet d'assurer un meilleur compromis entre les conditions de stabilité et les performances transitoires et de rejet des perturbations. Admettons que les paramètres du modèle de frottement varient⁴ dans des intervalles finis, *i.e.* (5.5), dont les limites sont connues *a priori*.

² Ces contributions sont soit publiées soit soumises pour la révision et la publication au moment de la rédaction de cette thèse.

³ Cf. hypothèse H2.1 dans le chapitre 2.

⁴ Cf. caractéristique C2.4 dans la sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

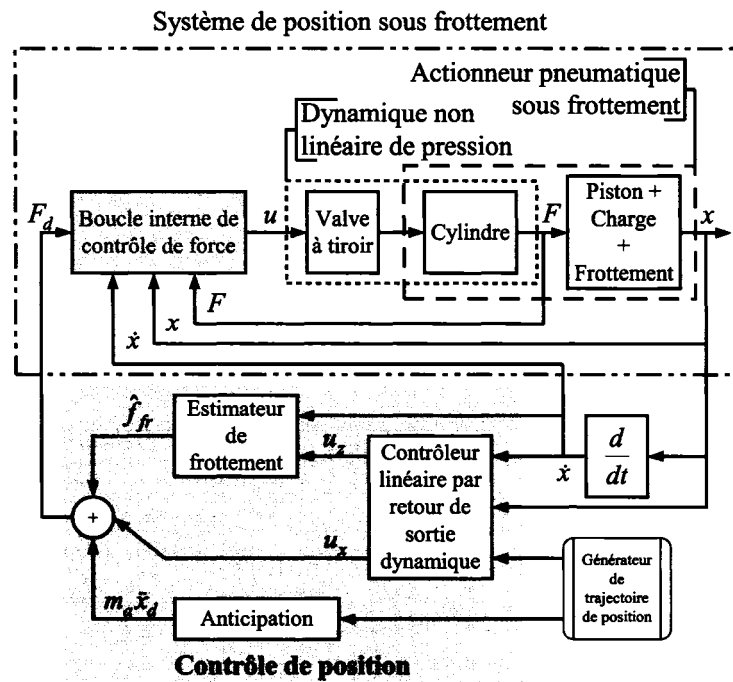


Figure 53 Schéma-bloc de la stratégie proposée de contrôle de position d'un actionneur pneumatique

Pour compenser l'effet de frottement, nous utilisons un observateur dynamique de frottement par *feed-back* basé sur le modèle nominal et approximatif de *LuGre*, selon :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_{0n}|\dot{x}|}{g_n(\dot{x})}\hat{z} + \dot{x} - u_z \quad (5.6)$$

et

$$\hat{f}_{fr} = \sigma_{0n}\hat{z} + \sigma_{1n}\dot{\hat{z}} + \sigma_{vn}\dot{x} \quad (5.7)$$

avec

$$g_n(\dot{x}) = f_{cn} + (f_{sn} - f_{cn}) \cdot e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}_{sn}^2}} \quad (5.8)$$

Le choix des valeurs nominales des paramètres de LuGre sera discuté plus loin dans cette section. u_z est le terme de *feed-back* introduit dans l'observateur dynamique de frottement et calculé en fonction des états mesurables du système. Par la suite, nous introduisons respectivement les erreurs de suivi de trajectoire $\tilde{x} = x - x_d$, où x_d la trajectoire désirée

du piston, et d'estimation de frottement $\tilde{z} = z - \hat{z}$ et $\tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f$. D'après (5.2) et (5.6), il convient

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_{0n}|\dot{x}|}{g_n(\dot{x})}\tilde{z} + \tilde{y} + \tilde{y}_o \quad (5.9)$$

où \tilde{y} et \tilde{y}_o sont définies, par convention, pour établir le schéma de contrôle de position qui sera formulé dans la section suivante, selon :

$$\tilde{y} = u_z + \delta_1 \dot{\tilde{x}} \quad (5.10)$$

et

$$\tilde{y}_o = \delta_1 \dot{x}_d \quad (5.11)$$

où

$$\delta_1 = -\left(\frac{\sigma_0}{g(\dot{x})} - \frac{\sigma_{0n}}{g_n(\dot{x})}\right) \cdot \text{sgn}(\dot{x})z \quad (5.12)$$

est une incertitude bornée, puisque la fonction de *Stribeck* et l'état interne z du modèle de *LuGre* sont bornés⁵ [20]. Dans l'équation (5.9), nous représentons la dynamique d'erreur d'estimation en fonction de l'erreur de suivi. En fait, l'entrée \tilde{y} dans (5.9), définie dans (5.10), est issue du système linéaire qui décrit essentiellement la dynamique d'erreur de position; comme nous le verrons dans la section suivante. En outre, le terme \tilde{y}_o sera considéré comme une entrée exogène bornée d'après l'hypothèse H5.2. Cette formulation est judicieusement choisie pour assurer la propriété de dissipativité de la loi de transfert entre $\tilde{y} + \tilde{y}_o$ et \tilde{z} , donné par (5.9), en respectant la fonction de stockage $V(t) = \tilde{z}^2$ [257]. Cette propriété sera fondamentale pour établir la condition de stabilité du système asservi plus tard.

Notons par s l'opérateur de différentiation (*i.e.* de *Laplace*). Ainsi, nous décrivons l'erreur d'estimation de la force de frottement avec la différence entre (5.3) et (5.7) :

$$\tilde{f}_f = -(\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s)[\tilde{z}_o - \tilde{z}] + \delta_2 \dot{\tilde{x}} \quad (5.13)$$

⁵ Cf. propriétés 2.1 et 2.2 dans le chapitre 2.

où $\delta_2 = \tilde{\sigma}_v$ est une incertitude bornée, et

$$\tilde{z}_o = -\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_0 z + \tilde{\sigma}_v \dot{x}_d] - \frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 \dot{z}] \quad (5.14)$$

est un terme exogène, avec

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 - \sigma_{0n}, \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_{1n} \text{ et } \tilde{\sigma}_v = \sigma_v - \sigma_{vn} \quad (5.15)$$

Par convention, les termes entre les crochets $[\cdot]$ représentent l'entrée du filtre qui est noté devant les crochets (donné ici par $\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s}$).

H5.3 En particulier, nous supposons que l'accroissement du paramètre $\tilde{\sigma}_1$ (*i.e.* $\dot{\tilde{\sigma}}_1$) est borné.

Comme z et \dot{x}_d sont supposées bornées, le premier terme de \tilde{z}_o dans (5.14) est bornée. En outre, en dépit du fait que \dot{z} n'est pas nécessairement bornée *a priori*, le second terme de \tilde{z}_o peut être présenté comme une résultante bornée de termes filtrés, puisque :

$$\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 \dot{z}] = \frac{s}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 z] - \frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\dot{\tilde{\sigma}}_1 z] \quad (5.16)$$

en utilisant H5.3. La caractérisation des erreurs d'estimation de frottement proposée selon (5.9) – (5.14) nous permettra, dans la suite, d'établir la condition de stabilité de la dynamique complète de position en utilisant la passivité des systèmes linéaire et non linéaire inter-connectés. En fait, dans un premier temps, les signaux exogènes bornés \tilde{y}_o et \tilde{z}_o de ces systèmes seront considérés nuls, en particulier aux valeurs nominales des paramètres incertains $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_v, f_c, f_s$ et \dot{x}_s ; *i.e.*, d'après (5.12) et (5.14), $\tilde{y}_o = 0$ et $\tilde{z}_o = 0$ si $\tilde{\sigma}_0 = 0$, $\tilde{\sigma}_1 = 0$, $\tilde{\sigma}_v = 0$, $f_c = f_{cn}$, $f_s = f_{sn}$ et $\dot{x}_s = \dot{x}_{sn}$. Ensuite, nous allons investir une optimisation de type H_∞ pour atténuer les effets de ces signaux exogènes sur la performance de suivi.

Paramétrisation des valeurs limites et nominales des incertitudes Dans cette partie, nous justifions le choix des paramètres nominaux du modèle de *LuGre* que nous utilisons dans le schéma de compensation de frottement, pour ainsi définir les limites des variations

des incertitudes associées à ces paramètres. Ce choix est basé essentiellement sur l'optimisation des variations des incertitudes suivant leur utilisation dans les modèles dynamiques en boucle fermée tout en respectant les conditions physiques que doit respecter le modèle de frottement (par exemple, l'amplitude de la force statique doit être naturellement plus grande que celle de la force de *Coulomb*).

P5.1 Supposons que $|z(0)| \leq \frac{f_s}{\sigma_0} \leq \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0}$, alors $|z(t)| \leq \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0}$ [20]. En utilisant la propriété⁶ 2.1 et la relation (5.12), nous avons

$$\underline{\delta}_1 = \left(\frac{\underline{\sigma}_0}{\bar{f}_s} - \frac{\sigma_{0n}}{f_{cn}} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \leq \delta_1 \leq \bar{\delta}_1 = \left(\frac{\sigma_{0n}}{f_{cn}} - \frac{\underline{\sigma}_0}{\bar{f}_s} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \quad (5.17)$$

ou

$$\underline{\delta}_1 = \left(\frac{\sigma_{0n}}{f_{sn}} - \frac{\bar{\sigma}_0}{\underline{f}_c} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \leq \delta_1 \leq \bar{\delta}_1 = \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\underline{f}_c} - \frac{\sigma_{0n}}{f_{sn}} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \quad (5.18)$$

Notons que $\underline{\delta}_1 = -\bar{\delta}_1$.

P5.2 Pour réduire l'amplitude de la variation symétrique de l'incertitude δ_1 , nous considérons le problème de minimisation suivant, en fonction des valeurs nominales σ_{0n} , f_{cn} et f_{sn} :

Problème 5.1 : Minimiser $\bar{\delta}_1$; sujet aux expressions de $\bar{\delta}_1$ dans (5.17), (5.18),

$$\underline{f}_c \leq f_{cn} \leq f_{sn} \leq \bar{f}_s \quad (5.19)$$

et

$$0 < \underline{\sigma}_0 \leq \sigma_{0n} \leq \bar{\sigma}_0 \quad (5.20)$$

P5.3 Nous choisissons $\sigma_{vn} = \frac{\underline{\sigma}_v + \bar{\sigma}_v}{2}$. Alors, nous avons

$$\underline{\delta}_2 = -\bar{\delta}_2 \leq \delta_2 \leq \bar{\delta}_2 = \bar{\sigma}_v - \sigma_{vn} \quad (5.21)$$

P5.4 Nous choisissons librement $\sigma_{1n} \neq 0$.

P5.5 Pour normaliser les bornes des incertitudes δ_k ; $k = 1, 2$; nous considérons $\tilde{\delta}_k = \frac{\delta_k}{\bar{\delta}_k}$, i.e. $-1 \leq \tilde{\delta}_k \leq 1$. Notons par $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$ la matrice diagonale des paramètres incertains normalisés.

⁶ Voir dans sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

5.3.2 Commande de position

Étant donné (5.1) le système dynamique de position d'un actionneur pneumatique avec frottement, conformément à la conception de la boucle interne de contrôle de force ⁷ [250, 256], nous supposons ici qu'il existe une commande robuste (de force) telle que la force appliquée soit exprimée par

$$F = m_a \ddot{x}_d + \hat{f}_f + u_x + \tilde{F} \quad (5.22)$$

où m_a désigne la masse totale de l'assemblage {piston + tige + charge}, \ddot{x}_d la dérivée seconde de la trajectoire désirée, \hat{f}_f l'estimée de la force de frottement, exprimée par (5.6) – (5.8), u_x le terme de contrôle dynamique par *feed-back* des états mesurables du système de position, et \tilde{F} l'erreur de force qui est bornée, selon le résultat de la proposition 4.4 dans le chapitre précédent.

En substituant (5.22) dans (5.1), nous obtenons

$$m_a \ddot{\tilde{x}} = -\tilde{f}_f + u_x + \tilde{F} \quad (5.23)$$

Soit $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix}^T$ le vecteur d'état des erreurs mesurables et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$ le vecteur d'entrée. Si nous substituons (5.13) dans (5.23), en utilisant (5.10) et P5.5 et en incluant la dynamique d'erreur d'observation (5.9), alors le système total peut être exprimé, dans ce cas, par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_p \mathbf{p} + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{D}_z s)[\tilde{z}_o - \tilde{z}] + \mathbf{B}_F \tilde{F} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_{0n} |\dot{\tilde{x}}|}{g_n(\tilde{x})} \tilde{z} + \tilde{y} + \tilde{y}_o \\ \tilde{y} = \mathbf{D}_{yp} \mathbf{p} + \mathbf{D}_y \mathbf{u} \\ \mathbf{q} = \mathbf{C}_q \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Delta}} \mathbf{q}; \tilde{\mathbf{\Delta}} \text{ diagonale et } \|\tilde{\mathbf{\Delta}}\| \leq 1 \end{cases} \quad (5.24)$$

⁷ Cf. stratégie 2 détaillée dans le chapitre 4.

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_a} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_a} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{0n}}{m_a} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_p &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_{p2} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{q1} \\ \mathbf{C}_{q2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_{yp} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{yp} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{1n}}{m_a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

et

$$\mathbf{B}_{p2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\bar{\delta}_2}{m_a} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{qk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1, 2 \text{ et } \mathbf{d}_{yp} = \bar{\delta}_1 \quad (5.26)$$

Déjà, le système complet (5.24) est formulé comme un ensemble de sous-systèmes interconnectés; dont un est linéaire et l'autre est non linéaire et passif. Ainsi, le lien direct entre l'entrée et la sortie de la partition linéaire sera traité par la propriété de passivité. Cette dernière sera investie pour établir la synthèse d'un contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique par le biais du formalisme LMI. En effet, en se basant sur la propriété intrinsèque de passivité du modèle de *LuGre*, nous proposons de partitionner le système dynamique en boucle fermée en un sous-système linéaire et un autre non linéaire, selon l'idée établie à l'origine par Canudas *et al.* dans [20]. Cette idée a été limitée justement au cas d'un système, de masse simple, contrôlé par un *feed-back* statique PD et dont les paramètres de frottement sont fixes (sans oublier aussi l'extension du contrôleur au cas d'un retour de sortie dynamique [203] discutée dans le chapitre 2).

Notons que l'état interne de l'erreur d'estimation \tilde{z} est non mesurable⁸. Nous considérons le vecteur de commande \mathbf{u} comme étant la sortie d'un système de compensation dynamique par retour de sortie d'ordre plein (voir figure 53), représenté dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.27)$$

⁸ Cf. hypothèse H2.3 dans la section §2.4.1 dans le chapitre 2.

où ξ représente un vecteur d'état bidimensionnel du contrôleur dynamique et \tilde{x} le vecteur d'état mesurable de (5.24). \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

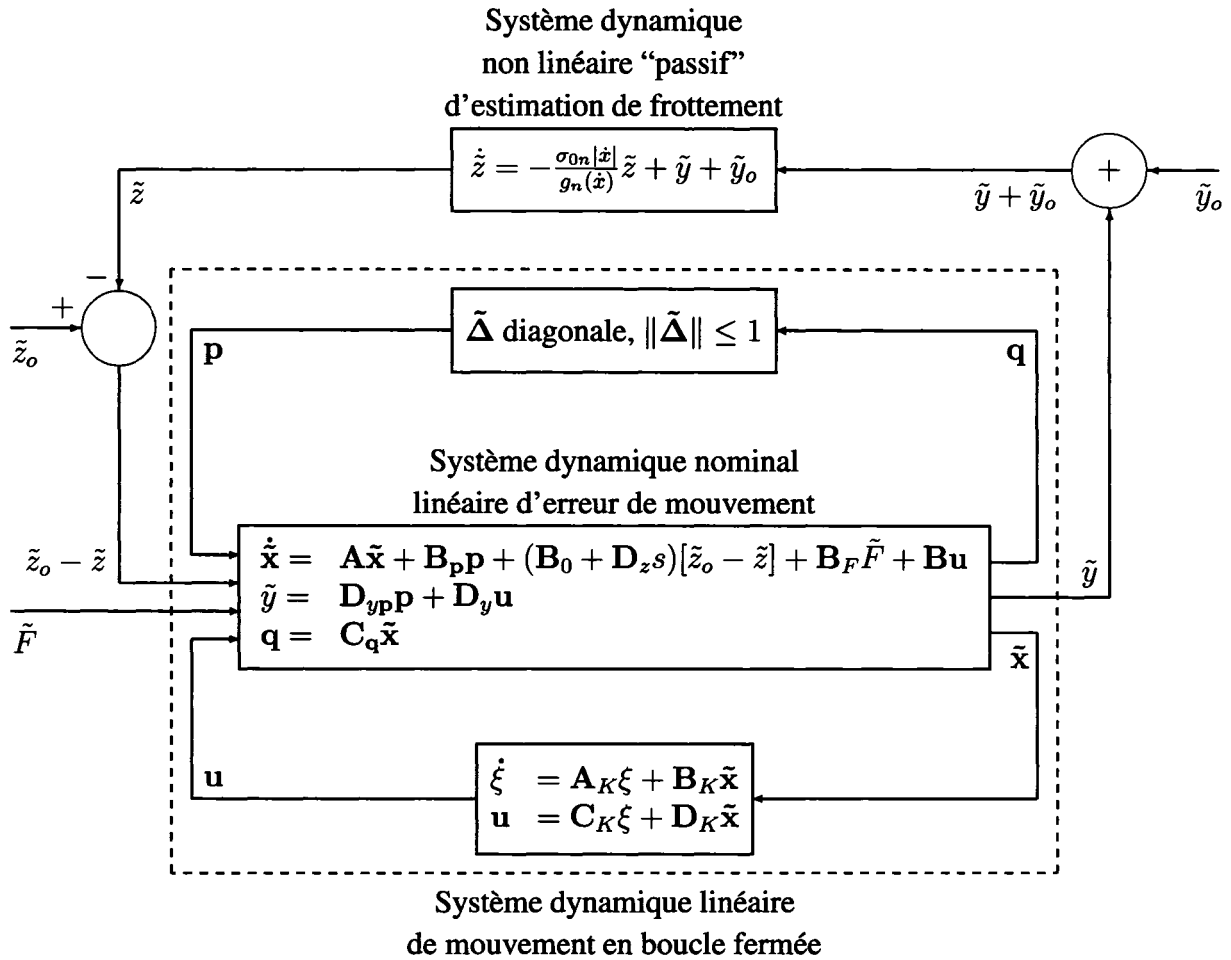


Figure 54 Systèmes inter-connectés des dynamiques d'erreurs de position et d'estimation de frottement

La structure de *feed-back* de la dynamique d'erreur de mouvement avec la dynamique non linéaire d'estimation de frottement est donnée par la figure 54. Dans la proposition suivante, nous proposons la représentation d'état de la partie dynamique linéaire. L'objectif de cette représentation (voir figure 54 et Cf. proposition 5.1) est d'établir la condition de stabilité de l'ensemble du système en boucle fermée en se basant sur les principes d'in-

terconnexion (entre la partie linéaire que nous représentons dans cette proposition et le sous-système non linéaire donné par (5.9)) et de passivité [257] :

Proposition 5.1 : La partition linéaire du système en boucle fermée (5.24) – (5.27) (voir figure 54) peut être représentée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{B}}_z(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F\tilde{F} \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{C}}_q\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \tilde{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{p}} \end{cases} \quad (5.28)$$

avec

$$|\tilde{p}_k| \leq |\tilde{q}_k|; k = 1, 2 \quad (5.29)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_z + \mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_p &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{p_2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_y\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_y\mathbf{C}_K \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_q &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{q_1} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{q_2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{d}}_{yz} = \mathbf{D}_y\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \text{ et } \tilde{\mathbf{D}}_{qz} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{q_1z} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{q_2z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{p_2} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{p_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_z = \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}\mathbf{D}_z, \tilde{\mathbf{C}}_{q_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{q_k} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ &\tilde{\mathbf{d}}_{q_kz} = \mathbf{C}_{q_k}\mathbf{D}_z \end{aligned} \quad (5.31)$$

Démonstration : Soit $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} - \frac{\sigma_{1n}}{m_a}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_z(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ le vecteur

d'état du système en boucle fermée (5.24) – (5.27). Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}_q)\tilde{\mathbf{X}} + (\tilde{\mathbf{B}}_z + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}_{qz})(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F\tilde{F} \\ \tilde{y} &= (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}_q)\tilde{\mathbf{X}} + (\tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}_{qz})(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \end{cases}$$

Soit

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{C}}_q\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \text{ et } \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{q}}$$

avec $\|\tilde{\Delta}\| \leq 1$, $\tilde{\Delta}$ diagonale. ■

Ici (pour accommoder les notations), nous remplaçons simplement D_{yp} par \tilde{D}_{yp} et d_{yp} par \tilde{d}_{yp} . Et par abus de notation aussi, nous remplaçons, dans la suite, B_{p_2} par B_p , \tilde{B}_{p_2} par \tilde{B}_p , C_{q_k} par C_q , \tilde{C}_{q_k} par \tilde{C}_q et $\tilde{d}_{q_k z}$ par \tilde{d}_{qz} .

Remarque 5.1 : Le système (5.28) et (5.29) est couramment appelé système différentiel linéaire à inclusion diagonale de norme bornée [231], si la traduction⁹ le permet.

Dans la section suivante, nous allons mettre en place la condition de stabilité du système complet en boucle fermée et discuter sa preuve d'existence. Cette condition est essentiellement basée sur la passivité de la dynamique non linéaire (5.9), le théorème de passivité [216] et, aussi, l'examen de la structure quadratique de la contrainte paramétrique des incertitudes bornées (5.29) [231]. Le résultat sera, en effet, élaboré par une formulation LMI.

5.3.3 Condition de stabilité

Considérons le système en boucle fermée (5.9) et (5.28) et la contrainte quadratique (5.29). Soit \tilde{F} l'erreur de force introduite dans (5.22), \tilde{y}_o et \tilde{z}_o , données respectivement par (5.11) et (5.14), des signaux exogènes bornés appliqués sur la structure des systèmes inter-connectés (voir figure 54). Dans la suite, nous discutons la condition de stabilité du système en boucle fermée en supposant respectivement $\tilde{F} = 0$, $\tilde{y}_o = 0$ et $\tilde{z}_o = 0$.

Proposition 5.2 : Les erreurs de suivi de position et d'observation de frottement (en particulier, \tilde{x} et \tilde{z}) sont quadratiquement stables et \tilde{f} converge vers zéro s'il existe une matrice

⁹ En anglais, *diagonal norm-bound linear differential inclusion* (DNLDI).

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ dans \mathbb{R}^4 et des scalaires $\lambda > \nu > 0$, telles que [257]

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s & \star & \star & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_q \lambda & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 0 \quad (5.32)$$

où ϵ désigne une constante positive de conditionnement. \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Considérons le système (5.9) et (5.28). Soit $V(t) = \frac{\tilde{z}^2}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}}$ une fonction candidate de *Lyapunov* pour une matrice symétrique $\tilde{\mathbf{P}}_s > 0$ donnée et une matrice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} &= \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} \left(-\frac{\sigma_{0n} |\dot{\tilde{x}}|}{g_n(\tilde{x})} \tilde{z} + \tilde{y} \right) + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \\ &\quad \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z}))^T \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} \tilde{y} + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \\ &\quad (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z}))^T \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} (\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz} (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp} \tilde{\mathbf{p}}) + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}_q^T + (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T) \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \\ &\quad \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité est défini négatif pour une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T$ donnée si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{C}}_q^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{D}}_{qz} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}_{yp}^T & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix} < 0$$

pour tout vecteur $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$ non nul. D'où

$$\dot{V}(t) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} < 0$$

À partir de (5.29), il suit

$$\tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} < \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$$

pour toute matrice diagonale $\Lambda \geq 0$. Donc, $\dot{V}(t) < 0$. Par conséquent, toutes les variables

d'état internes $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ et aussi \tilde{x} sont quadratiquement stables et \tilde{f}_f converge vers zéro,

car $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} - \frac{\sigma_{1n}}{m_a}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ (Cf. définition de $\tilde{\mathbf{X}}$ dans la démonstration de la proposition 5.1) et \tilde{f}_f est donnée par (5.13) avec \tilde{F} , \tilde{y}_o et \tilde{z}_o nulles par hypothèse.

Donc, le système est stable s'il existe $\tilde{\mathbf{P}}_s > 0$ et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ telle que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{C}}_q^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{D}}_{qz} & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}_{yp}^T & -\Lambda \end{pmatrix} < 0$$

Notons, à partir de cette dernière inégalité, que $\Lambda > 0$. Ensuite, nous remplaçons $\tilde{\mathbf{B}}_p$, $\tilde{\mathbf{C}}_q$, $\tilde{\mathbf{D}}_{qz}$ et $\tilde{\mathbf{D}}_{yp}$ par leurs expressions respectives données par (5.30) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{C}}_q^T \tilde{\mathbf{C}}_q & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{d}}_{qz}^2 & * & * \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -\lambda_1 & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} < 0$$

Posons $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\nu = \lambda_2$, et utilisons deux fois le *complément de Schur*¹⁰ pour avoir

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s & * & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & * \\ \tilde{\mathbf{C}}_q & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix} < 0$$

Enfin, en multipliant cette inégalité à gauche et à droite par $\text{diag}(\mathbf{I}, 1, 1, 1, \lambda)$, nous obtenons (5.32). ■

Remarque 5.2 : Nous imposons le coefficient générique ϵ (Cf. remarque 2.2 notée dans le chapitre 2) pour ajuster le conditionnement de la matrice dans (5.32).

Dans la section suivante, nous allons développer une conception à multi-objectifs pour la synthèse du retour de sortie dynamique (5.27) en utilisant le formalisme LMI.

5.3.4 Conception à multi-objectifs

D'abord, nous notons que la condition de stabilité (5.32) reste limitée au point de vue vitesse de convergence, vers zéro, des états des erreurs. Pour fixer cette spécification, nous proposons de remplacer cette condition par une structure modifiée de stabilité exponentielle. D'autre part, pour minimiser l'effet des perturbations liées aux signaux d'entrées exogènes (voir figure 54) sur le comportement de suivi de trajectoire, nous proposons un compromis entre les différentes conditions de stabilité et de robustesse en établissant la synthèse du retour de sortie par une minimisation de multi-objectifs de type H_∞ .

¹⁰ *Complément de Schur* est défini comme suit [26, 231] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) \end{pmatrix} > 0 \iff \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) > 0 \text{ et } \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Theta}) > 0$$

où $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Theta})$, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\Theta})$ et $\mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta})$ des matrices affines en $\boldsymbol{\Theta}$.

5.3.4.1 Marge de stabilité exponentielle et placement de pôles

Le but de la conception du contrôleur dynamique linéaire (5.27) est de garantir, d'abord, la condition donnée par (5.32). En plus, pour assigner les pôles du sous-système linéaire en boucle fermée (5.28) dans une région LMI réduite du demi-plan complexe gauche (*i.e.* de stabilité), nous introduisons des contraintes supplémentaires; en rapport avec la marge de stabilité exponentielle du système total en boucle fermée (*i.e.* (5.9), (5.28) et (5.29)), le dépassement et les modes oscillatoires en fréquences de la partition linéaire.

5.3.4.2 Stabilité exponentielle

Pour fixer la borne supérieure de la marge de stabilité de la boucle fermée, nous proposons la condition de stabilité exponentielle, qui remplace la condition (5.32), selon [257] :

Proposition 5.3 : Les erreurs de suivi de position et d'observation de frottement convergent exponentiellement vers zéro avec une vitesse α , si, pour tout $\alpha > 0$, il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ de \mathbb{R}^4 et des scalaires $\lambda > \nu > 0$, telles que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & * & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \frac{2\alpha}{\epsilon} & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & * \\ \tilde{\mathbf{C}}_q \lambda & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 0 \quad (5.33)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Considérons les changements de variables suivants $\bar{\mathbf{p}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{q}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$, $\bar{y} = e^{\alpha t} \tilde{y}$, $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$, $\bar{z}_o = e^{\alpha t} \tilde{z}_o$ et $\bar{F} = e^{\alpha t} \tilde{F}$. Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_p \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (\bar{z}_o - \bar{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F \bar{F} \\ \dot{\bar{z}} &= -\frac{\sigma_{0n} |\dot{\bar{x}}|}{g_n(\bar{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{y} \\ \bar{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{C}}_q \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (\bar{z}_o - \bar{z}) \\ \bar{y} &= \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz} (\bar{z}_o - \bar{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp} \bar{\mathbf{p}} \end{cases}$$

avec la contrainte

$$|\bar{p}_k| \leq |\bar{q}_k|, k = 1, 2$$

I est la matrice identité d'ordre 4. Considérons $V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{\bar{z}^2}{\epsilon^2}$ une fonction candidate *Lyapunov*. Nous appliquons le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 5.2 et en utilisant (5.33), nous prouvons que le système contraint en boucle fermée ci-haut, exprimé en fonction du nouveau vecteur d'état $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$, est quadratiquement stable. Donc, $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{X}} \\ e^{-\alpha t} \bar{z} \end{pmatrix}$ converge exponentiellement vers zéro, au moins, avec une vitesse α . ■

5.3.4.3 Contrainte sur la région de stabilité

Pour prévenir contre les dynamiques rapides (*i.e.* gains et fréquences élevés) du contrôleur, entraînant des modes oscillatoires [218], nous proposons de limiter le placement des pôles de la partie linéaire de la boucle fermée à l'intérieur d'un disque de rayon r centré à l'origine¹¹. La caractérisation LMI de cette région de stabilité est exprimée comme suit :

Problème 5.2 : Trouver $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$ dans \mathbb{R}^4 , telle que [219]

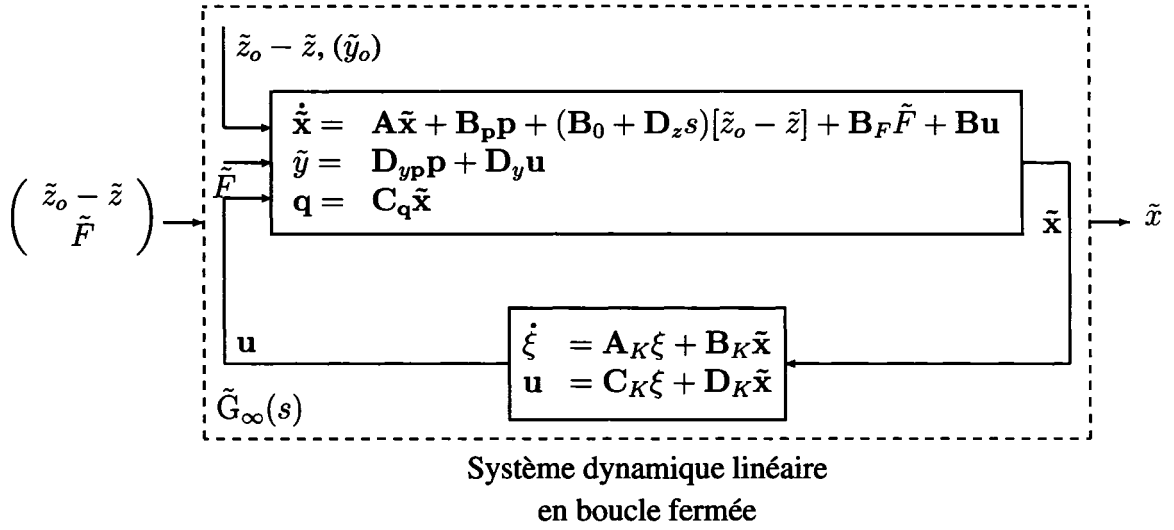
$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & \star \\ \tilde{\mathbf{P}}_r \tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (5.34)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

5.3.4.4 Rejet de perturbation et optimisation H_∞

Considérons la partie linéaire du système dynamique en boucle fermée (5.28). Notons par $\tilde{\mathbf{G}}_\infty(s)$ la matrice-ligne de transfert, du vecteur d'entrée des signaux de perturba-

¹¹ Cf. figure 15 dans la sous-section §2.4.3.2 dans le chapitre 2.

Figure 55 Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$

tion $\begin{pmatrix} \tilde{z}_o - \tilde{z} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}$ vers la sortie \tilde{x} se référant à l'erreur de déplacement du piston (voir figure 55). Nous proposons la condition $\|\tilde{G}_\infty(s)\|_\infty < \gamma$ pour établir la stabilité robuste du système dynamique en boucle fermée (5.28) en minimisant l'effet des perturbations $\begin{pmatrix} \tilde{z}_o - \tilde{z} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}$ sur l'énergie de l'erreur de position [219]. En particulier, l'illustration de la performance d'entrée/sortie entre $-\tilde{z}$ et \tilde{x} permet de réduire l'effet de la dynamique non linéaire sur la partie linéaire.

Proposition 5.4 : La norme H_∞ de $\tilde{G}_\infty(s)$ est plus petite que γ si et seulement si, il existe une matrice symétrique $\tilde{P}_\infty > 0$, telle que [219, 257]

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_\infty \tilde{A} + \tilde{A}^T \tilde{P}_\infty & * & * \\ \tilde{B}_\infty^T \tilde{P}_\infty & -\gamma \mathbf{I} & * \\ \tilde{C}_\infty & 0 & -\gamma \end{pmatrix} < 0 \quad (5.35)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K & \mathbf{B} \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{B}_\infty = \begin{pmatrix} \tilde{B}_z & \tilde{B}_F \end{pmatrix} \text{ et} \quad (5.36)$$

$$\tilde{C}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où $C_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration : Nous trouvons la formulation LMI d'optimisation H_∞ dans plusieurs références, par exemple [26, 218, 231]. ■

5.3.4.5 Optimisation de multi-objectifs

Nous rassemblons l'ensemble des conditions de stabilité exponentielle, de placement de pôles et de robustesse H_∞ dans le problème suivant [257] :

Problème 5.3 : Minimiser $\gamma > 0$, sujet à

$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$ une matrice de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, telles que les systèmes en boucle fermée (5.28) et (5.36) satisfont les conditions (5.33) – (5.35) avec, en plus,

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_\infty \quad (5.37)$$

Remarque 5.3 : Notons que le problème d'optimisation 5.3 est rendu plus conservateur¹² avec la contrainte supplémentaire (5.37). Comme dans les problèmes de synthèse 2.4 et 3.2, énoncés respectivement dans les chapitres 2 et 3, cette contrainte est ajoutée pour retrouver la propriété de convexité dans le problème de minimisation de multi-objectifs 5.3 [218, 219]. Le critère H_∞ calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème.

Dans la section suivante, nous allons développer la synthèse du contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique en utilisant le formalisme LMI.

5.3.5 Synthèse du retour de sortie

En regardant les détails des conditions de conception du contrôleur, données par (5.33) – (5.35) et (5.37) et utilisant (5.30) et (5.36), nous constatons qu'elles sont bilinéaires par

¹² Cette restriction supplémentaire reste relativement peu sévère dans la résolution de ce type de problème [219]; comme cela a été souligné dans dans le chapitre 2 (Cf. remarque 2.4).

rapport aux variables $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K . Alors, comme dans les parties analogues dans les chapitres 2 et 3, nous utilisons le changement de variable linéarisant introduit dans [219], pour convertir ces BMIs¹³ en LMIs. Partitionnons $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ et telles que les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (5.39)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (5.40)$$

Nous proposons le résultat suivant [257] :

Proposition 5.5 : Il existe un contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique (5.27), une matrice symétrique $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ partitionnée comme dans (5.38) et des scalaires $\kappa > 0$, $\nu > 0$ et $\gamma > 0$ qui satisfont (5.33) – (5.35) et (5.37) si et seulement si, les matrices \mathbf{P} , \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ existent et satisfont les LMIs suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (5.41)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star & \star & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star & \star & \star & \star \\ a_{31} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{C}} & a_{32} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{D}} & a_{33} & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{d}_{yp}\kappa & f(\kappa, \nu) & \star & \star \\ \mathbf{B}_p^T & \mathbf{B}_p^T\mathbf{P} & 0 & 0 & -\nu & \star \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q} & \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_q\mathbf{D}_z & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix} < 0 \quad (5.42)$$

¹³ Cf. sous-section §2.4.3.3 dans le chapitre 2.

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & * & * & * \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & * & * \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & * \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.43)$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & -\gamma & * & * \\ \mathbf{B}_F^T & \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} & 0 & -\gamma & * \\ \mathbf{C}_\infty \mathbf{Q} & \mathbf{C}_\infty & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} < 0 \quad (5.44)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T \\ a_{21} &= \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T \\ a_{22} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{31} &= \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}^T \\ a_{32} &= \mathbf{B}_z^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{33} &= -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}_y \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_y^T + \frac{2\alpha}{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.45)$$

et

$$f(\kappa, \nu) = -(\kappa - \kappa^2 \nu) \quad (5.46)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous considérons la matrice de rang plein $\tilde{\Pi}$ selon [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

D'abord, en multipliant la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ à gauche et à droite respectivement par $\tilde{\Pi}^T$ et $\tilde{\Pi}$ et en utilisant (5.39), la contrainte $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ devient (5.41). Puis, multiplions (5.33) à gauche et à droite respectivement par les matrices diagonales par bloc $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, 1, 1, 1, 1)$ et

$\text{diag}(\tilde{\Pi}, 1, 1, 1, 1)$. En utilisant les changements des variables (5.40), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & * & * & * & * & * \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & * & * & * & * \\ a_{31} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{C}} & a_{32} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{D}} & a_{33} & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{d}_{yp} & -(\lambda - \nu) & * & * \\ \mathbf{B}_p^T & \mathbf{B}_p^T\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu & * \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q}\lambda & \mathbf{C}_q\lambda & \mathbf{C}_q\mathbf{D}_z\lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} < 0$$

Cette contrainte n'est pas convexe, à cause du produit $\mathbf{Q}\lambda$ qui se trouve dans cette inégalité.

Posons $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. En multipliant cette inégalité à gauche et à droite par $\text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, 1, \kappa, 1, \kappa)$, nous obtenons (5.42). Ensuite, la condition LMI (5.43) est dérivée à partir de (5.34) en multipliant celle-ci à gauche et à droite respectivement par les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$. Finalement, la relation LMI (5.44) peut être déduite à partir de (5.35) en multipliant celle-ci à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I}, 1)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I}, 1)$, en utilisant à chaque fois les changements des variables (5.40). ■

Les matrices \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont obtenues à partir de (5.40) en calculant les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfaisant (5.39). Notons que la variable auxiliaire κ implique encore un terme non linéaire, *i.e.* $f(\kappa, \nu)$ dans (5.42) et exprimé par (5.46). Ce type de problème est similaire à la synthèse de la borne supérieure de la norme crête-à-crête dans le cas d'un retour de sortie dynamique [219, 254].

Malgré la contrainte (5.37) et le changement de variable de la proposition 5.5, le problème de faisabilité (minimisation) sujet aux contraintes (5.41) – (5.44) (énoncé dans la proposition 5.5) n'est toujours pas convexe. En effet, l'inégalité (5.42) renferme un élément non linéaire et aussi non convexe (*Cf.* terme $f(\kappa, \nu)$ exprimé dans (5.46)). Par contre, pour une valeur de κ fixe, le problème d'optimisation ainsi formulé devient parfaitement convexe.

Donc, notre objectif est de trouver le compensateur linéaire par retour de sortie dynamique (5.27) pour assurer la stabilité exponentielle globale du système DNLDI (5.28) et (5.29),

placer les pôles de la partie linéaire de la boucle fermée dans un disque prescrit et maintenir la norme H_∞ de $\tilde{G}_\infty(s)$ sous une certaine valeur optimale γ (en minimisant $\|\tilde{G}_\infty(s)\|_\infty$). En outre, en se basant sur une étude préliminaire liée à la synthèse de ce contrôleur, nous proposons un critère additionnel, pour réduire plus efficacement les gains du compensateur dynamique (5.27), selon [257] :

Problème 5.4 : Si nous notons par $\Theta \triangleq \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \nu, \gamma\}$ l'ensemble des variables de décision pour une valeur de κ choisie, alors nous définissons le problème convexe suivant :

$$\Theta^*(\kappa) = \arg \min_{\Theta} \text{Tr}(\mathbf{P}) + \text{Tr}(\mathbf{Q}) \quad (5.47)$$

sujet aux contraintes (5.41) – (5.44). $\text{Tr}(\cdot)$ désigne la trace d'une matrice carrée.

Nous proposons d'établir le problème 5.4 afin de contourner des problèmes concrets de conditionnement des LMIs dus aux intervalles relativement grands des paramètres du modèle de *LuGre* de frottement. Le problème d'optimisation linéaire (5.47), sujet aux LMIs (5.41) – (5.44), peut être résolu en Θ en utilisant un algorithme d'optimisation convexe implémenté dans le logiciel MATLAB[®] et qui utilise *LMI control toolbox* [232]. Ensuite, nous appliquons la minimisation unidimensionnel (*i.e.* mono-variable) de $\gamma^*(\kappa)$; qui est un élément de la solution convexe optimale $\Theta^*(\kappa)$; pour $\kappa > 0$, *i.e.*

$$\min_{\kappa} \gamma^* \quad (5.48)$$

Pour récapituler ainsi, l'algorithme que nous proposons pour résoudre le problème de synthèse du contrôleur linéaire dynamique (5.27) est composé de deux étapes en cascade; dont la première correspond à la minimisation convexe du critère (5.47) puis dans la deuxième étape nous appliquons le critère (5.48) pour trouver une solution H_∞ sous-optimale du problème. Ce dernier problème d'optimisation (*Cf.* (5.48)) est résolu en utilisant une technique d'optimisation mono-variable locale.

5.4 Étude expérimentale

5.4.1 Autres méthodes de contrôle de position utilisant des modèles statiques d'estimation de frottement

Pour montrer l'efficacité de notre approche, nous proposons dans le cadre de l'étude expérimentale une comparaison avec des lois de contrôle et de compensation de frottement très connues dans la littérature. Ces techniques sont basées sur l'usage de contrôleur statique PD de position avec un compensateur de frottement statique aussi. Deux types de modèles de frottement sont choisis ici :

- Un observateur adaptatif non linéaire de frottement, basé sur l'hypothèse d'un frottement d'amplitude *a priori* constante, mais qui peut suivre l'évolution du frottement. En effet, Cette amplitude peut dépendre de la vitesse [108].
- Et, un modèle de frottement statique fixe et complet, caractérisé par une application mathématique simple [151, 245].

L'inconvénient majeur de ces modèles de frottement (théoriquement) est qu'il ne présente pas parfaitement le comportement de stiction à vitesse nulle ni encore le comportement dynamique du frottement, tels que le mouvement de broutement et le pré-glissement (totalement absents dans ce genre de modèles¹⁴).

Dans la suite, pour simplifier la notation, nous référons les différents modes de commande comme suit : Mode 1 pour le *feed-back* de sortie avec un estimateur de *LuGre* (*i.e.* notre approche), Mode 2 pour le contrôleur PD avec un estimateur adaptatif de *Coulomb* et, finalement, Mode 3 pour le contrôleur PD avec un estimateur de frottement statique fixe.

5.4.1.1 Mode 2 : {contrôleur PD + estimateur non linéaire adaptatif de *Coulomb*}

Nous considérons un contrôleur PD de position avec une compensation de frottement utilisant un observateur non linéaire adaptatif d'ordre réduit. En fait, nous modélisons les

¹⁴ Cf. sous-section §1.2.1.3 dans la chapitre 1

variations de la force de frottement en utilisant la représentation de *Coulomb*, comme suit [22] :

$$\hat{f}_f(\dot{x}, \hat{f}_c) = \hat{f}_c \cdot \text{sgn}(\dot{x})$$

où \hat{f}_c représente l'amplitude de frottement. Pour estimer le paramètre \hat{f}_c dans le modèle de frottement, nous considérons l'observateur non linéaire d'ordre réduit suivant [160, 184] :

$$\dot{z} = \rho(|\dot{x}|) \cdot \text{sgn}(\dot{x})$$

et

$$\dot{z} = \rho'(|\dot{x}|) \left(\frac{F - \hat{f}_f(\dot{x}, \hat{f}_c)}{m} \right) \cdot \text{sgn}(\dot{x})$$

où $\rho'(|\dot{x}|)$ dénote la dérivée de $\rho(|\dot{x}|)$ par rapport à $|\dot{x}|$ et F la force appliquée sur le piston de l'actionneur. Une fonction possible de $\rho(|\dot{x}|)$, qui a été utilisée dans littérature, est donnée par :

$$\rho(|\dot{x}|) = K \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + \exp(-\eta \cdot |\dot{x}|)}\right)$$

où K et η , les paramètres de modèle, sont choisis pour fixer les performances de la réponse transitoire (voir tableau VIII). Dans [160], les auteurs ont utilisé cette forme d'estimation pour compenser le frottement dans le système pneumatique. Finalement, un contrôle PD de position est utilisé comme dans [160].

5.4.1.2 Mode 3 : {contrôleur PD + estimateur de frottement statique à paramètres fixes}

Nous modélisons les variations de force de frottement utilisant le modèle de frottement statique complet [22, 244] :

$$\hat{f}_f = \begin{cases} (f_{sn}^0 + f_{sn}^1 |\dot{x}|) \text{sgn}(\dot{x}) & \text{si } |\dot{x}| \leq \dot{x}_0 \\ (f_{cn} + \sigma_{vn} |\dot{x}|) \text{sgn}(\dot{x}) & \text{si } |\dot{x}| > \dot{x}_0 \end{cases}$$

avec

$$f_{sn}^0 = f_{sn} \text{ et } f_{sn}^1 = \frac{f_{cn} - f_{sn}}{\dot{x}_0}$$

où σ_{vn} représente le coefficient de frottement visqueux nominal, f_{cn} est le coefficient de frottement de *Coulomb* nominal et f_{sn} est le coefficient de frottement statique nominal. La vitesse absolue \dot{x}_0 est choisie telle que la pente de \hat{f}_f soit négative pour $|\dot{x}| < \dot{x}_0$, ce qui implique $\dot{x}_0 \leq \dot{x}_m$ avec \dot{x}_m la vitesse à laquelle \hat{f}_f atteint sa valeur minimale [151]. Les paramètres f_{cn} , f_{sn}^0 et f_{sn}^1 sont telle que \hat{f}_f soit une fonction continue. Cette modélisation de frottement est très utilisée en pratique car elle tient compte des trois composantes principales : *stiction*, frottement de *Coulomb* et frottement visqueux, et supporte une fonction linéaire de la vitesse dans la région de *stiction* avec une pente négative [244]. Tous les paramètres sont supposés fixes. Cet estimateur de frottement est combiné avec un contrôleur linéaire PD.

5.4.2 Description du dispositif expérimental

L'*experimentum*, que nous proposons, est réalisé sur le dispositif pneumatique (voir figure 56) pour illustrer notre approche et la comparer par rapport au deux autres techniques de compensation de frottement à usage commun dans la littérature et qui sont introduites dans la sous-section précédente. Il s'agit d'un actionneur pneumatique sans tige, ayant un taux de frottement élevé (*FESTO*, DGP-25-500) actionné par une électro-valve à 5 voies (*FESTO*, MPYE-5-1/8LF-010B). L'alimentation en air comprimé est véhiculée dans le conduit via un régulateur (*FESTO*, LFR-M2-G1/4-C10RG). Les capteurs de pression (*FESTO*, SDE-10) sont utilisés pour mesurer la différence de pression, équivalente à la force pneumatique appliquée sur le piston, à travers des ports non restrictifs. Le déplacement du piston est mesuré avec un capteur de position (*FESTO*, MLD-POT-500-TLF). La vitesse est obtenue par une dérivation numérique des mesures de position. Le signal d'entrée (*i.e.* le déplacement du tiroir de la valve qui est proportionnel à la tension d'excitation de la valve) et les différentes mesures (les signaux de sortie) sont respectivement envoyés et acquis par un ordinateur via une carte d'acquisition (*National Instruments*, PCI-6052E). L'algorithme de contrôle est implémenté en utilisant les logiciels *Simulink*, *XPC-Target* et

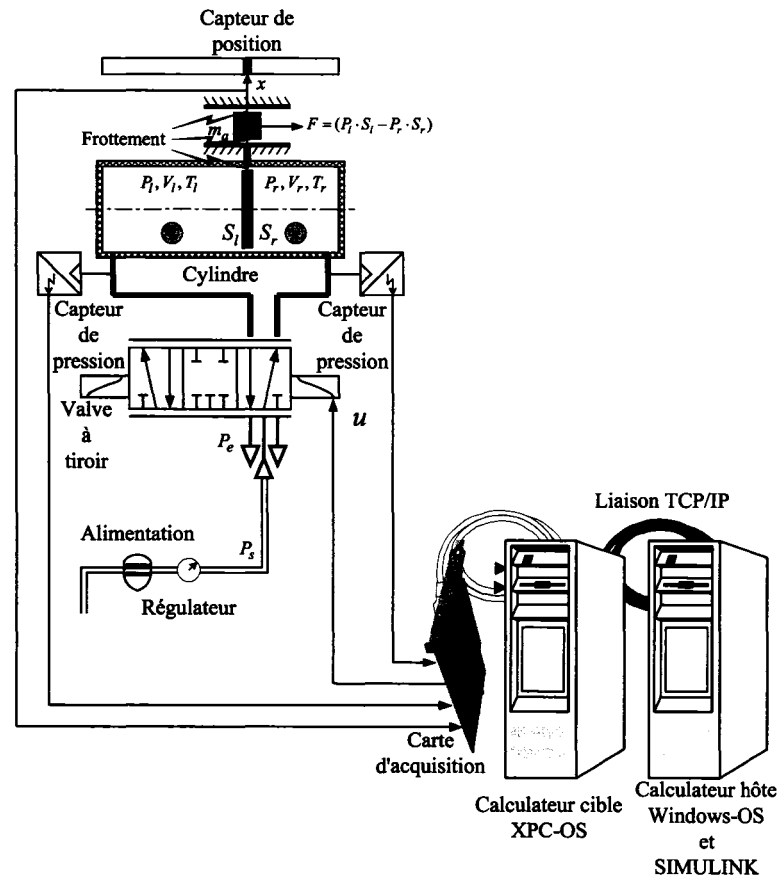


Figure 56 Banc expérimental

Real-Time-Workshop dans MATLAB[®]. Le schéma-bloc implémenté dans *Simulink* est transformé en code C, sur un ordinateur hôte équipé avec *Windows-OS* et *Simulink*. Un dispositif exécutable est ensuite construit, et un noyau de type *real-time kernel* est utilisé pour exécuter le code sur un ordinateur cible équipé de *XPC-OS* (voir figure 56). Les deux ordinateurs hôte et cible utilisent une communication *TCP/IP*. La période d'échantillonnage est fixée à $100 \mu s$. Les valeurs numériques des paramètres du système pneumatique sont données dans le tableau VIII.

Tableau VIII

Paramètres du système expérimental

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur nominale
m_a (kg)	-	-	0.326
\dot{x}_0 (m/s)	-	-	0.005
u_{max} (m)	-	-	0.002
K	-	-	50
P_e (kPa)	-	-	101.0
P_s (kPa)	-	-	608.0
R (Nm/kgK)	-	-	287.0
$S_l = S_r$ (m ²)	-	-	$4.9 \cdot 10^{-4}$
T_a (K)	-	-	295.0
$V_{l_{max}} = V_{r_{max}}$ (m ³)	-	-	$2.45 \cdot 10^{-4}$
W (m)	-	-	0.005
ζ	-	-	1.3997
η	-	-	1.5
f_c (N)	30.0	38.0	34.0
f_s (N)	50.0	55.0	52.5
σ_0 (N/m)	$1.0159 \cdot 10^5$	$1.6506 \cdot 10^5$	$1.3780 \cdot 10^5$
σ_1 (Ns/m)	0.0	140.6	70.3
σ_v (Ns/m)	119.9	220.1	170.0
\dot{x}_s (m/s)	0.001	0.1	0.05

5.4.3 Résultats et discussion

Il faut noter, d'abord, que les intervalles des paramètres incertains de frottement sont estimés en utilisant une approche d'estimation à erreur bornée qui repose sur l'analyse des intervalles et la théorie d'inversion des ensembles, présentée dans [106]. En dépit de l'efficacité de cette approche dans l'estimation des paramètres incertains dans un modèle non linéaire, cette méthode d'identification reste biaisée à cause du temps consommé pendant l'implémentation de l'algorithme d'estimation. Pour réduire ce temps d'implémentation, la précision admissible de cet algorithme a été relaxée. Ainsi, les intervalles de certains paramètres ont souffert d'amplitudes excessives, en particulier le paramètre de frottement visqueux. Alors, nous avons ré-estimé ce coefficient séparément (voir tableau VIII). Notons que le niveau de frottement dans cette installation est très élevé.

Nous avons calculé un contrôleur dynamique linéaire qui assure une marge de stabilité exponentielle de $\alpha = 30$, et qui place les pôles de la partie linéaire du système en boucle fermée dans un disque de rayon $r = 500$ centré à l'origine, pour prévenir contre les modes oscillatoires de la réponse et limiter les amplitudes de commande. Le paramètre de conditionnement ϵ étant fixé à $2 \cdot 10^{-4}$, les matrices gains du contrôleur sont calculées numériquement en utilisant *LMI Control Toolbox* de MATLAB[®] [232] et sont données par :

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} 386.49 & -70.28 \\ 14627.60 & -1515.56 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} -11.06 \cdot 10^5 & -3150.36 \\ -13.31 \cdot 10^6 & 33415.68 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} 9.33 & -0.43 \\ 0.04 & -3.22 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0.49 \end{pmatrix}$$

Les différentes composantes des PD utilisés dans les méthodes alternatives sont données dans le tableau IX. Ces gains sont convenablement choisis pour minimiser les erreurs de suivi de trajectoire, et aussi pour éviter les oscillations importantes le plus possible durant les expériences.

Tableau IX

Gains des contrôleurs PD

Controller gain	P	D
Contrôle de position PD (avec Mode 2)	3257.1	206.0
Contrôle de position PD (avec Mode 3)	5089.3	257.5

Plusieurs expériences ont été développées pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée et la comparer avec les deux autres alternatives initialement introduites dans cette section. Nous avons utilisé des trajectoires suffisamment lisses à portions quadratiques et d'autres sinusoïdales, avec différentes distances à parcourir et des fréquences de variation du si-

gnal désiré aussi différentes, pour montrer les performances dans différentes situations, en particulier à vitesses réduites et élevées de mouvement.

La figure 57 montre les performances de suivi et les tensions d'excitation de la valve avec les trois modes de contrôles discutés ci-haut, pour un signal de référence lisse à portions quadratiques, parcourant une distance totale de 2 cm. Des résultats plus complets, qui donnent les erreurs maxima (ou crêtes des erreurs) et les RMS des erreurs, avec la même forme de trajectoire désirée sont résumés dans le tableau X.

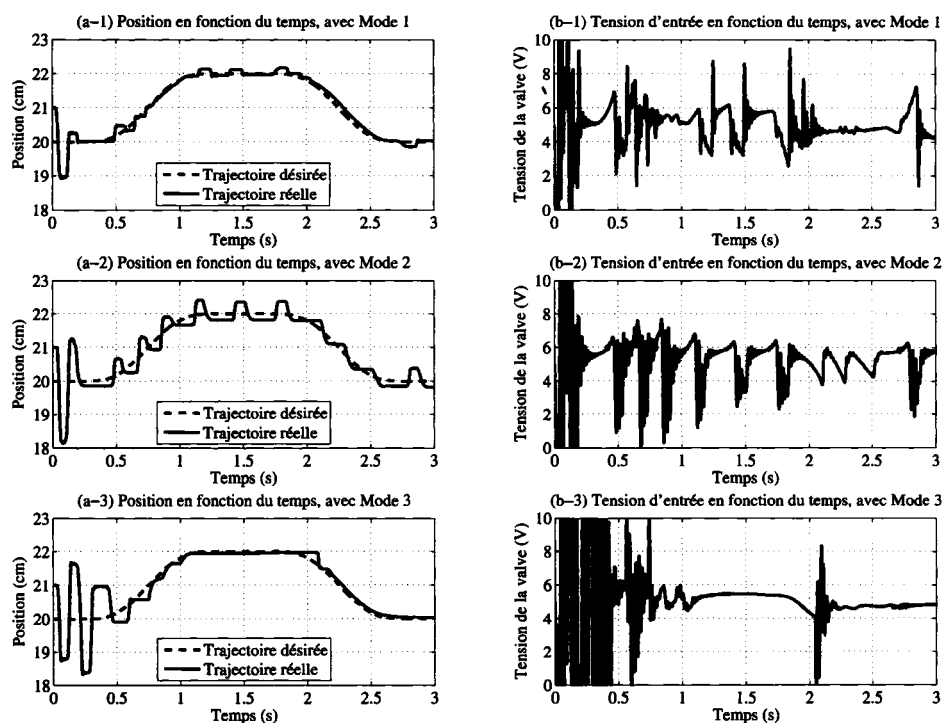


Figure 57 Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = $\{feed-back$ de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = $\{PD$ + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = $\{PD$ + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée linéaire à portions quadratiques pour parcourir une distance totale de 2 cm

La figure 58 montre les performances de suivi et les tensions d'excitation de la valve avec les trois modes de contrôles discutés ci-haut, pour un signal de référence sinusoïdal,

Tableau X

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée linéaires à portions quadratiques pour parcourir des distances variées durant un temps de 3 sec

Distance (mm)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
20	1.8	6.2	4.6	0.9	2.2	1.0
40	3.4	7.1	41.8	1.5	2.3	22.5
80	4.3	6.1	8.1	1.8	1.6	1.5
120	12.7	9.5	40.2	3.9	1.7	7.2
140	16.4	6.5	34.0	4.2	1.6	3.8

parcourant une distance totale de 4 cm. Des résultats plus complets, qui donnent les erreurs maxima et les erreurs RMS, avec la même forme de trajectoire désirée sont résumés dans les tableaux XI et XII.

En dépit du fait que l'erreur de suivi reste bornée dans presque tous les cas, la performance du Mode 1 {*feed-back* sortie + estimation de frottement de *LuGre*} reste la plus significative parmi les trois modes, en particulier dans le cas de mouvement à vitesses réduites. Par contre, les deux autres modes peuvent rivaliser dans le cas de mouvement à grandes vitesses. Dans tous les cas, le maximum d'amplitude d'erreur, avec le Mode 1, reste sous le seuil de 12 % de la distance parcourue, à quelques exceptions près. Par contre, les maxima d'amplitudes d'erreur, avec les Modes 2 et 3, atteignent des niveaux qui dépassent 20 %, ou encore, à plus de 100 % de la distance parcourue. D'une manière similaire, les RMS des erreurs (indiquant le niveau d'énergie de l'erreur) ne dépassent pas 7 % avec le Mode 1. Par contre, cette RMS de l'erreur est relativement plus élevée avec les deux autres modes atteignant 10 % à 15 % et plus des distances parcourues. Ces résultats démontrent l'efficacité du Mode 1 en général. En fait, avec une meilleure estimation des intervalles des paramètres incertains, ces résultats peuvent être encore plus performants. En effet, ces in-

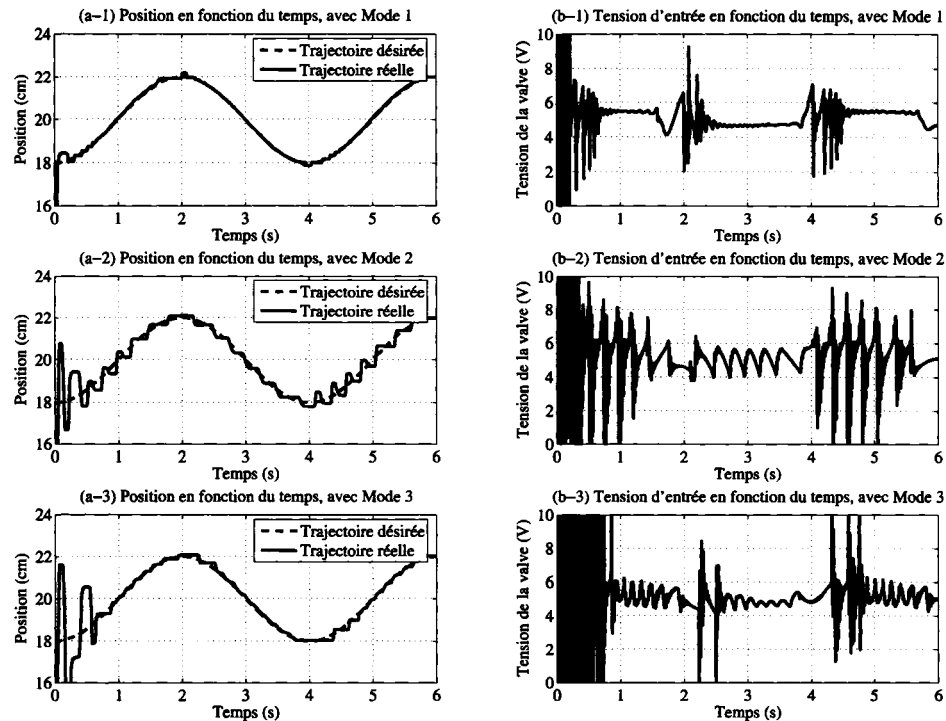


Figure 58 Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = $\{feed-back$ de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = $\{PD$ + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = $\{PD$ + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée sinusoïdale pour parcourir une distance totale de 4 cm

tervalles ont un effet limitatif sur l'efficacité de notre approche robuste. Il faut signaler aussi que, d'après les tableaux X, XI et XII, les résultats restent aussi disparates; ce qui est dû au comportement chaotique du frottement, qui n'est pas uniforme d'une expérience à une autre. En outre, nous notons que les niveaux des oscillations constatés sont plus importants avec les Modes 2 et 3, en particulier à vitesses réduites. Il est important de noter qu'en pratique, la qualité des mesures est affectée par la résolution et le bruit des capteurs utilisés [151].

Finalement, nous avons montré, une fois de plus, la flexibilité du contrôleur dynamique linéaire pour tenir compte des critères de stabilité, de robustesse et d'optimisation. Cette

Tableau XI

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir des distances variées (fréquence de 0.25 Hz)

Amplitude (mm)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
10	1.7	7.1	2.3	0.6	1.9	0.8
20	2.0	5.5	3.0	0.4	1.8	0.9
30	2.1	6.6	5.8	0.7	1.6	1.2
40	2.4	10.5	8.0	1.2	2.2	1.9
50	4.1	5.1	3.1	1.5	1.3	0.9
60	4.0	2.6	10.9	1.8	1.1	1.5
70	5.4	4.6	4.2	2.0	1.3	1.2
80	5.0	14.9	7.2	2.2	3.1	1.5
90	5.4	7.1	9.4	2.2	1.8	3.0
100	6.2	6.3	46.9	2.7	1.8	8.0

Tableau XII

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir une distance fixe de 80 mm avec des fréquences variées

Frequency (Hz)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
1/12	1.9	5.1	2.8	0.8	1.5	0.7
2/12	3.3	3.1	19.1	1.6	1.0	2.5
3/12	5.0	14.9	7.2	2.2	3.1	1.5
4/12	9.0	47.2	85.1	3.8	10.9	14.6
5/12	14.8	33.4	17.8	5.7	11.2	2.9

qualité, combinée avec une structure de commande relativement simple, est résolue en effet avec succès grâce essentiellement au formalisme LMI.

5.5 Conclusion

Par l'entremise de la formulation de passivité introduite dans [20], nous avons proposé un schéma de contrôle pour atteindre des performances raisonnables dans des applications plus complexes des systèmes d'actionneurs pneumatiques avec des niveaux de frottements importants caractérisés par un comportement variant et donc des paramètres variant dans le temps et/ou incertains. Ici, nous avons focalisé notre effort sur le développement du contrôle de position et de la compensation de frottement basée sur le modèle dynamique de *LuGre*. Nous avons offert une synthèse de *feed-back* de sortie à multi-objectifs pour améliorer la robustesse du suivi de trajectoire et de compensation de frottement par rapport aux variations des paramètres incertains et des erreurs résiduelles de la boucle de force.

CONCLUSION

« La fin du discours importe plus que le commencement. »

Francis Bacon (1561 – 1626)

Nous admettons que le frottement représente une source principale de perturbation, dans l'asservissement des servo-systèmes de mouvement, qui implique des vices de performances (oscillations, retards et erreurs permanentes), surtout lorsque la tâche à réaliser exige une grande précision. Le contrôle de tels systèmes constitue en effet un souci de longue date. Nous contribuons conséquemment par le biais de ce travail à l'ornement de la longue liste des méthodes de contrôle des systèmes sous frottement par une de plus; mais certainement, pas sans intérêt ni sans pertinence. En effet, dans le but de situer notre contribution, nous établissons d'abord une bibliographie exhaustive des techniques existantes en en répertoriant les avantages et les inconvénients. Dans cette étude, nous critiquons les résultats présentés dans le cadre de la modélisation et de la commande des systèmes sous frottement. En particulier, nous décortiquons les qualités et les limites des techniques de commandes des systèmes robotiques avec contact et des commandes des systèmes pneumatiques qui font l'objet des applications associées à notre travail de recherche.

Suite à l'évaluation de ces différentes techniques, nous prenons en considération les arguments qui appuient notre approche. Ainsi, dans l'optique de conférer un mouvement **précis** au système asservi et une solution de commande robuste relativement **simple** (qui ne nécessite pas de loi d'adaptation complexe) et **efficace**, nous développons une stratégie complète de commande des servo-systèmes mécaniques avec une **compensation de frottement par *feed-back***. Cette technique d'annulation est basée sur le **modèle dynamique de LuGre**; car ce modèle **intègre** plusieurs propriétés intrinsèques au frottement dans une structure relativement **simple** et **facile** à réaliser du point de vue numérique. L'action de *feed-back* appliquée dans la compensation de frottement permet de renforcer le caractère **robuste** de l'observateur.

Assurément, l'approche de commande de position avec ce compensateur de frottement que nous proposons constitue une **généralisation** du principe SPR discuté auparavant dans [20]. En outre, la structure de cette commande est conçue autour d'un système de **contrôle linéaire de retour de sortie dynamique**; pour profiter de sa **simplicité** et exploiter sa **flexibilité** (garantie par le comportement dynamique et le nombre de degrés de liberté élevé de cette structure). Ceci permet de résoudre aisément le problème de commande de tels systèmes dans un contexte à **multi-objectifs de stabilisation, de rejet de perturbation et de placement de pôles**. Cette conception est développée à partir de la propriété de **passivité** (caractéristique propre au frottement et associée aussi au modèle dynamique de compensation de frottement utilisé), de la notion d'**interconnexion** des systèmes dynamiques et de l'**optimisation** par rapport aux effets de perturbations et d'incertitudes mis à l'épreuve dans ces systèmes dynamiques. Toutes ces questions sont transformées sous forme de **problèmes algébriques convexes** résolus à leur tour par des outils numériques d'**optimisation et de faisabilité** de LMIs.

En outre, lorsqu'il est nécessaire, un contrôle de force est proposé pour compléter le schéma général de commande (*i.e.* de stabilisation) des servo-systèmes mécaniques, en utilisant des éléments de commandes linéarisantes et de commandes robustes éventuellement.

Par souci de simplicité, nous exposons, dans un premier temps, notre approche de commande dans le cas réduit d'une masse en mouvement sur une surface avec frottement. L'assimilation du schéma de commande et de la technique de synthèse des gains du contrôleur dans ce cas simple permet d'élucider le maillon principal dans notre approche. Par la suite, chaque cas (celui de la commande du système robotique avec contact et celui de la commande du système d'actionneur pneumatique), étudié à part entière, ajoute un certain degré de complexité dans la position du problème, et par conséquent, des éléments supplémentaires dans le schéma de synthèse du contrôleur. Tous ces modèles de contrôle

regroupés ensemble correspondent en effet au schéma de base (ou général) proposé dans le cadre de la présente thèse comme ‘LA solution au problème’.

Et, nous osons conclure que l’expérimentation de notre approche menée au laboratoire sur deux types d’installations différentes confirme son statut de méthode réalisable et efficace en plus de son caractère théorique ‘prouvable’.

Notre apport dans les différentes parties de ce sujet est appuyée par plusieurs publications (articles parus ou soumis dans des journaux avec comité de révision et papiers présentés dans des conférences internationales d’envergure).

Finalement, le travail présenté dans ce mémoire rentre dans le cadre d’une étude élargie au sein du laboratoire et menée sur le développement des techniques d’identification, de commande et d’observation des systèmes sous frottement. Une suite au présent travail, qui peut être réalisée de concert avec les autres modules élaborés par nos chercheurs au laboratoire, serait :

- d’appliquer le même principe de commande développée ici en utilisant un modèle de frottement encore plus complet, le GMS¹ [54], par exemple. Ce dernier constitue un modèle encore peu connu, et par conséquent, peu élaboré; mais, qui présente des atouts (propriétés et caractéristiques) complémentaires, par rapport au modèle de *LuGre*. Fort par son caractère de modèle ‘plus généralisé’ (plus que le modèle de *LuGre*), l’adaptation de l’approche de commande élaborée dans ce travail constituerait un défi grandissime. Les difficultés majeures qu’il faudrait gérer avec ce type de modèle se situeraient au niveau de l’identification de ses paramètres.
- de concilier le principe d’adaptation avec le schéma de commande élaboré dans le présent travail; pour nous donner un aspect à la fois robuste et adaptatif qui permettrait de mieux exploiter les performances de chacune de ces deux techniques de commande. En se référant à l’aspect, à la fois, variable et incertain du comporte-

¹ Cf. modèles de ‘post-*LuGre*’ dans la sous-section §1.2.1.3 du chapitre 1.

ment, et du même coup, de la paramétrisation du frottement, il serait certainement plus apprécié de combiner ces deux approches pour un résultat qui se résumerait ainsi par : une 'meilleure précision' et une 'exploitation optimale' des outils numériques de commande.

« Chaque progrès donne un nouvel espoir, suspendu à la solution d'une difficulté. Le dossier n'est jamais clos. »

Claude Lévi-Strauss (1908 – ..)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Caubet, J.-J. (1964). *Théorie et Pratique Industrielle du Frottement*. Dunod-Technip, Collection Mécanique des surfaces, Paris, France.
- [2] Georges, J. (2000). *Frottement, Usure et Lubrification - La Tribologie ou Science des Surfaces*. Sciences et techniques d'ingénieur, Paris, France, Éditions Eyrolles et CNRS Éditions edition.
- [3] Berger, E. (2002). Friction Modeling for Dynamic System Simulation. *Applied Mechanics Reviews*, 55(6), 535–577.
- [4] Vertut, J. et Coiffet, P. (1984). *Les Robots - Téléopération : Evolution des Technologies*. Hermès, Paris, France.
- [5] Pruski, A. (1988). *Robotique Générale*. Éllipses Édition, Paris, France.
- [6] Low, K.-S. et Keck, M.-T. (2003). Advanced Precision Linear Stage for Industrial Automation Applications. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 52(3), 785–789.
- [7] Lacroux, G. (1985). *Les Actionneurs Électriques pour la Robotique et les Asservissements*. Technique et documentation - Lavoisier, Paris, France.
- [8] Lecoufle, J.-C. (1987). *Actionneurs Électriques Industriels*. Senlis, Centre technique des industries mécaniques, France.
- [9] Fraissandier, J. (1970). *Mécanismes Hydrauliques et Electrohydrauliques*. Dunod, Paris, France.
- [10] Fraissandier, J. (1987). *Mécanismes Oléo-Hydrauliques*. Dunod, Paris, France.
- [11] André, P., Kauffmann, J.-M., Lhote, F. et Taillard, J.-P. (1983). *Les Robots - Constituants Technologiques*. Hermès, Paris, France.
- [12] Iwasaki, M., Shibata, T. et Matsui, N. (1999). Disturbance-Observer-Based Nonlinear Friction Compensation in Table Drive System. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 4(1), 3–8.
- [13] Canudas, C., Tsiotras, P., Velenis, E., Basset, M. et Gissinger, G. (2003). Dynamic Friction Models for Road/Tire Longitudinal Interaction. *Vehicle System Dynamics*, 39(3), 189–226.

- [14] Alvarez, L., Horowitz, R. et Claeys, X. (2003). Emergency Braking Control with an Observed-Based Dynamic Tire-Road Friction Model and Wheel Angular Velocity Measurements. *Vehicle System Dynamics*, 39(2), 81–97.
- [15] Alvarez, L., Yi, J., Horowitz, R. et Oimos, L. (2005). Dynamic Friction Model-Based Tire-Road Friction Estimation and Emergency Braking Control. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 127(1), 22–32.
- [16] Wang, Y., Xiong, Z., Ding, H. et Zhu, X. (2004). Nonlinear Friction Compensation and Disturbance Observer for a High-Speed Motion Platform. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4515–4520.
- [17] Yan, T. et Lin, R. (2003). Experimental Modeling and Compensation of Pivot Nonlinearity in Hard Disk Drives. *IEEE Transactions on Magnetics*, 39(2), 1064–1069.
- [18] Lischinsky, P., Canudas, C. et Morel, G. (1999). Friction Compensation for an Industrial Hydraulic Robot. *IEEE Control Systems Magazine*, 19(1), 25–32.
- [19] Dahl, P. (1968). A Solid Friction Model. Rapport technique TOR-158, The Aerospace Corporation, CA.
- [20] Canudas, C., Olsson, H., Åström, K. et Lischinsky, P. (1995). A New Model for Control of Systems with Friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3), 419–425.
- [21] Kain, J. et Wartelle, C. (1973). *Dynamique des Vérins Pneumatiques*. 17. Les mémoires techniques du CETIM.
- [22] H elouvry, B., Dupont, P. et Canudas, C. (1994). A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction. *Automatica*, 30(7), 1083–1138.
- [23] Al-Bender, F., Lampaert, V. et Swevers, J. (2004). Modeling of Dry Sliding Friction Dynamics : from Heuristic Models to Physically Motivated Models and Back. *Chaos*, 14(2), 446–460.
- [24] H elouvry, B. (1991). *Control of Machines with Friction*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Boston, MA.
- [25] Hoang, T. (1998). *Convex Analysis and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Hollande.

- [26] Scherer, C. et Wieland, S. (2000). Linear Matrix Inequalities in Control.
- [27] Boyd, S., Balakrishnan, V., Feron, E. et El-Ghaoui, L. (1993). Control System Analysis and Synthesis via Linear Matrix Inequalities. *American Control Conference*, 2147–2154.
- [28] Shearer, J. (1956). Study of Pneumatic Processes in the Continuous Control of Motion with Compressed Air - I, II. *Transactions of the ASME*, 122(3), 233–249.
- [29] Li, W. et Slotine, J.-J. (1989). An Indirect Adaptive Robot Controller. *Systems & Control Letters*, 12(3), 259–266.
- [30] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2001). Nonlinear Control of Pneumatic Actuators. *International Conference on Computers and Industrial Engineering*, 214–218, Montreal, QC, Canada.
- [31] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2002). Retaining or Neglecting Valve Spool Dynamics in Tracking Controller Strategies for Pneumatic Systems. *IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 1213–1218, Szczecin, Pologne.
- [32] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2002). A Robust Pole Clustering Design of Pneumatic Systems using LMI Approach. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 4, 274–279, Hammamet, Tunisie.
- [33] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2003). On Modelization and Robust Controller Synthesis of Pneumatic Actuator Plants using LMI Approach. *Multiconference on Computational Engineering in Systems Applications (CESA & IMACS-IEEE/SMC)*, S1-R-00-0304, Lille, France.
- [34] Canudas, C. et Lischinsky, P. (1997). Adaptive Friction Compensation with a Partially Known Dynamic Friction Model. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 11(1), 65–80.
- [35] Dupont, P., Hayward, V., Hérouvry, B. et Altpeter, F. (2002). Single State Elastoplastic Friction Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5), 787–792.
- [36] Al-Bender, F., Lampaert, V. et Swevers, J. (2004). A Novel Generic Model at Asperity Level for Dry Friction Force Dynamics. *Tribology Letters*, 16(1-2), 81–93.
- [37] Gnecco, E., Bennewitz, R., Gyalog, T. et Meyer, E. (2001). Friction Experiments on the Nanometre Scale. *Journal of Physics Condensed Matter*, 13(31), 619–642.

- [38] Persson, B., Albohr, O., Tartaglino, U., Volokitin, A. et Tosatti, E. (2005). On the Nature of Surface Roughness with Application to Contact Mechanics, Sealing, Rubber Friction and Adhesion. *Journal of Physics Condensed Matter*, 17(1), 1–62.
- [39] Den Hartog, J. (1931). Forced Vibrations with combined Coulomb and Viscous Damping. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 53(9), 107–115.
- [40] Pfeiffer, F. et Glocker, C. (1996). *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. Wiley Series in Nonlinear Science. John Wiley and Sons, NY.
- [41] Guran, A., Pfeiffer, F. et Popp, K. (1996). *Dynamics with Friction-Modeling, Analysis and Experiment, Part I*. World Sc., Singapore.
- [42] Karnopp, D. (1985). Computer Simulation of Stick-Slip Friction in Mechanical Dynamic Systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107(1), 100–103.
- [43] Feeny, B., Guran, A., Hinrichs, N. et Popp, K. (1998). Historical Review on Dry Friction and Stick-Slip Phenomena. *Applied Mechanics Reviews*, 51(5), 321–341.
- [44] Burridge, R. et Knopoff, L. (1967). Model and Theoretical Seismicity. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 57(3), 341–371.
- [45] Rice, J. et Ruina, A. (1983). Stability of Steady Frictional Slipping. *Transactions ASME Journal of Applied Mechanics*, 50(2), 343–349.
- [46] Coulomb, C. (1785). *Théorie des Machines Simples*. Mémoires de Mathématiques et de Physique de l'Académie Royale. Moutard, Paris, France.
- [47] Bowden, F. et Tabor, D. (1964). *The Friction and Lubrication of Solids, Part II*. Clarendon, Oxford, Royaume Uni.
- [48] François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1995). *Comportement Mécanique des Matériaux : Viscoplasticité, Endommagement, Mécanique de la Rupture, Mécanique du Contact*. Hermès, Paris, France.
- [49] Chatterjee, S., Singha, T. et Karmakar, S. (2004). Effect of High-Frequency Excitation on a Class of Mechanical Systems with Dynamic Friction. *Journal of Sound and Vibration*, 269(1-2), 61–89.
- [50] Haessig, D. et Friedland, B. (1991). On the Modeling and Simulation of Friction. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 113(3), 354–362.

- [51] Swevers, J., Al-Bender, F., Ganseman, C. et Prajogo, T. (2000). An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(4), 675–686.
- [52] Parlitz, U., Hornstein, A., Engster, D., Al-Bender, F., Lampaert, V., Tjahjowidodo, T., Fassois, S. D., Rizos, D., Wong, C. X., Worden, K. et Manson, G. (2004). Identification of Pre-sliding Friction Dynamics. *Chaos*, 14(2), 420–30.
- [53] Björklund, S. (1997). A Random Model for Micro-slip between Nominally Flat Surfaces. *ASME Journal of Tribology*, 119, 726–732.
- [54] Rizos, D. et Fassois, S. (2004). Presliding Friction Identification based upon the Maxwell Slip Model Structure. *Chaos*, 14(2), 431–45.
- [55] Baumberger, T. (1996). *Physics of Sliding Friction*. Kluwer Academic, Dordrecht, Hollande.
- [56] Leine, R. (2001). *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*. Ph.d. thesis, Eindhoven University of Technology, Hollande.
- [57] Garagic, D. et Srinivasan, K. (2004). Adaptive Friction Compensation for Precision Machine Tool Drive. *Control Engineering Practice*, 12(11), 1451–1464.
- [58] Misovec, K. et Annaswamy, A. (1999). Friction Compensation using Adaptive Non-Linear Control with Persistent Excitation. *International Journal of Control*, 72(5), 457–479.
- [59] Hersey, M. (1966). *Theory and Research in Lubrication*. John Wiley, NY.
- [60] Gäfvert, M. (1997). Comparisons of Two Dynamic Friction Models. *IEEE International Conference on Control Applications*, 386–391, Hartford, CT.
- [61] Hess, D. et Soom, A. (1990). Friction at a Lubricated Line Contact Operating at Oscillating Sliding Velocities. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, 112(1), 147–152.
- [62] Gorbet, R. et Morris, K. (2003). Closed-Loop Position Control of Preisach hystereses. *Journal of Intelligent Material Systems and Structure*, 14(8), 483–495.
- [63] Rabinowicz, E. (1951). The Nature of the Static Kinetic Coefficients of Friction. *Journal of Applied Physics*, 22(11), 1373–1379.
- [64] Richardson, R. et Nolle, H. (1976). Surface Friction under Time-Dependent Loads. *Wear*, 37(1), 87–101.

- [65] Johannes, V., Green, M. et C.A., B. (1973). The Role of the Rate of application of the Tangential Force in Determining the Static Friction Coefficient. *Wear*, 24, 381–385.
- [66] Sampson, J., Morgan, F., Reed, D. et Muskat, M. (1943). Studies in Lubrication : XII. Friction Behavior During the Slip Portion of the Stick-Slip Process. *Journal of Applied Physics*, 14(12), 689–700.
- [67] Rabinowicz, E. (1958). The Intrinsic Variables Affecting the Stick-Slip Process. *Proceedings of the Royal Society of London*, 71(4), 668–675.
- [68] Hunt, J., Torbe, I. et Spencer, G. (1965). The Phase-Plane Analysis of Sliding Motion. *Wear-Usure-Verschleiss*, 8(6), 455–465.
- [69] Bliman, P.-A. (1992). Mathematical Study of the Dahl's Friction Model. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 11(6), 835–848.
- [70] Bliman, P.-A. et Sorine, M. (1993). A System-Theoretic Approach of Systems with Hysteresis. Application to Friction Modelling and Compensation. *European Control Conference*, 1844–1849, Rome, Italie.
- [71] Bliman, P.-A. et Sorine, M. (1995). Easy-To-Use Realistic Dry Friction Models for automatic Control. *European Control Conference*, 3788–3794, Rome, Italie.
- [72] Velde, F. et Baets, P. (1996). Mathematical Approach of the Influencing Factors on Stick-Slip Induced by Decelerative Motion. *Wear*, 201(1-2), 80–93.
- [73] Dupont, P. (1994). Avoiding Stick-Slip Through PD Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5), 1094–1097.
- [74] Hensen, R., Van De Molengraft, M. et Steinbuch, M. (2003). Friction Induced Hunting Limit Cycles : A Comparison Between the LuGre and Switch Friction Model. *Automatica*, 39(12), 2131–2137.
- [75] H elouvry, B. et Bimal, A. (1996). PID Control in the Presence of Static Friction : A Comparison of Algebraic and Describing Function Analysis. *Automatica*, 32(5), 679–692.
- [76] Hensen, R., van de Molengraft, M. et Steinbuch, M. (2002). Frequency Domain Identification of Dynamic Friction Model Parameters. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(2), 191–196.
- [77] H elouvry, B. (1995). Challenges to Systematically Engineered Friction Compensation. *IFAC Workshop Motion Control*, 21–30, Munich, Allemagne.

- [78] Lampaert, V., Swevers, J. et Al-Bender, F. (2002). Modification of the Leuven Integrated Friction Model Structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(4), 683–687.
- [79] Sato, K., Nakamoto, K. et Shimokohbe, A. (2004). Practical Control of Precision Positioning Mechanism with Friction. *Precision Engineering*, 28(4), 426–434.
- [80] Lampaert, V., Swevers, J. et Al-Bender, F. (2004). Comparison of Model and Non-Model based Friction Compensation Techniques in the Neighbourhood of Pre-sliding Friction. *American Control Conference*, 2, 1121–1126.
- [81] Helouvy, B. (1993). Stick-Slip and Control in Low-Speed Motion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(10), 1483–1496.
- [82] Shih, Y.-T. et Lee, A.-C. (2003). Survey on Modeling and Control for Motion System with Friction. *Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers*, 24(4), 337–352.
- [83] Bentsman, J. (1990). Oscillations-Induced Transitions and their Application in Control of Dynamical Systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 112(3), 313–319.
- [84] Pervozvanski, A. et Canudas, C. (2002). Asymptotic Analysis of the Dither Effect in Systems with Friction. *Automatica*, 38(1), 105–113.
- [85] Canudas, C. (1993). Robust Control for Servo-Mechanisms under Inexact Friction Compensation. *Automatica*, 29(3), 757–761.
- [86] Oldenberger, R. et Boyer, R. (1962). Effect of Extra Sinusoidal Inputs to Nonlinear Systems. *Transactions of the ASME Journal Basic Engineering*, D-84, 559–570.
- [87] Atherton, D. (1975). *Nonlinear Control Engineering - Describing Function Analysis and Design*. Van Nostrand Reinhold Company, Londre, Royaume Uni.
- [88] Yang, S. et Tomizuka, M. (1988). Adaptive Pulse Width Control for Precise Positioning under the Influence of Stiction and Coulomb Friction. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110(3), 221–227.
- [89] Utkin, V. (1977). Variable Structure Systems with Sliding Modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(2), 212–222.
- [90] Utkin, V. (1983). Variable Structure Systems - Present and Future. *Automatic Remote Control*, 44(9), 1105–1120.

- [91] Zak, S. et MacCarley, C. (1986). State Feedback Control of Nonlinear Systems. *International Journal of Control*, 43(5), 1497–1514.
- [92] Slotine, J.-J. et Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, NJ.
- [93] Ha, Q., Bonchis, A., Rye, D. et Durrant, H.-W. (2000). Variable Structure Systems Approach to Friction Estimation and Compensation. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4, 3543–3548, San Francisco, CA.
- [94] Han, S.-I. (2002). The Position Tracking Control of Precise Servo Systems with Nonlinear Dynamic Friction using Variable Structure Control and Friction Observer. *JSME International Journal, Series C : Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, 45(3), 784–793.
- [95] Canudas, C., Å ström, K. et Braun, K. (1987). Adaptive Friction Compensation in DC-Motor Drives. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, RA-3(6), 681–685.
- [96] Canudas, C., Noel, P., Aubin, A. et Brogliato, B. (1991). Adaptive Friction Compensation in Robot Manipulators : Low-Velocities. *International Journal of Robotics Research*, 10(3), 189–199.
- [97] Du, H. et Nair, S. (1999). Modeling and Compensation of Low-Velocity Friction with Bounds. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(1), 110–121.
- [98] White, D. et Sofge, D. (1992). *Handbook of Intelligent Control : Neural, Fuzzy and Adaptive Approaches*. Van Nostrand Reinhold, NY.
- [99] Urbani, D., Roussel, P.-R., Personnaz, L. et G., D. (1994). The Selection of Neural Models of Nonlinear Dynamical Systems by Statistical Tests. *IEEE Workshop Neural Networks for Signal Processing*, 229–237.
- [100] Borne, P., Rozeinoer, J., Dieulot, J. et Dubois, L. (1998). *Introduction à la Commande Floue*. Edition Technip, Paris, France.
- [101] Bandemer, H. et Gottwald, S. (1995). *Fuzzy Sets Fuzzy Logic Fuzzy Methods with Applications*. Edition Wiley, Royaume Uni.
- [102] Chen, J., Chen, K., Lai, Z. et Huang, Y. (2003). Friction Characterization and Compensation of a Linear-Motor Rolling-Guide Stage. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 43(9), 905–915.

- [103] Song, G., Cai, L., Wang, Y. et Longman, R. (1998). A Sliding-Mode based Smooth Adaptive Robust Controller for Friction Compensation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(8), 725–739.
- [104] Vedagarbha, P., Dawson, D. et Feemster, M. (1999). Tracking Control of Mechanical Systems in the Presence of Nonlinear Dynamic Friction Effects. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(4), 446–456.
- [105] Hirschorn, R. et Miller, G. (1999). Control of Nonlinear Systems with Friction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 7(5), 588–595.
- [106] Madi, M., Khayati, K. et Bigras, P. (2004). Parameter Estimation for the LuGre Friction Model using Interval Analysis and Set Inversion. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1, 428–433, La Haye, Hollande.
- [107] Sato, K., Mishima, Y., Tsuruta, K. et Murata, K. (2004). Adaptive H_∞ Control for Linear Slider with Friction Compensation. *IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 794–799.
- [108] Friedland, B. et Park, Y.-J. (1992). On Adaptive Friction Compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(10), 1609–1612.
- [109] Tan, Y., Chang, J. et Tan, H. (2003). Adaptive Backstepping Control and Friction Compensation for AC Servo with Inertia and Load Uncertainties. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 50(5), 944–952.
- [110] Santosuosso, G. et Tomei, P. (2002). Global Adaptive Output Feedback Controllers with Application to Non-Linear Friction Compensation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(9), 619–634.
- [111] Tan, Y. et Kanellakopoulos, I. (1999). Adaptive Nonlinear Friction Compensation with Parametric Uncertainties. *American Control Conference*, 4, 2511–2515, San Diego, CA.
- [112] Craig, J., Hsu, P. et Sastry, S. (1987). Adaptive Control of Mechanical Manipulators. *International Journal of Robotics research*, 6(2), 16–28.
- [113] Bsata, A. (1987). *Instrumentation et Automation dans le Contrôle des Procédés*. Le Griffon d'argile, QC, Canada.
- [114] Annaswamy, A., Skantze, F. et Loh, A. (1998). Adaptive Control of of Continuous Time Systems with Convex/Concave Parametrization. *Automatica*, 34(1), 33–49.

- [115] Ioannou, P. et Sun, J. (1998). *Robust Adaptive Control*. Engewood Cliffs : Prentice Hall Inc., NJ.
- [116] Guglielminno, E., Edge, K. et Ghigliazza, R. (2004). On the Control of the Friction Force. *Meccanica*, 39, 395–406.
- [117] Orlov, Y., Aguilar, L. et Cadiou, J. (2003). Switched Chattering Control vs. Backlash/Friction Phenomena in Electrical Servo-Motors. *International Journal of Control*, 76(9-10), 959–967.
- [118] Cho, S.-I. et Ha, I.-J. (2000). Learning Approach to Tracking in Mechanical Systems with Friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(1), 111–116.
- [119] Huang, S., Tan, K. et Lee, T. (2002). Adaptive Motion Control using Neural Network Approximations. *Automatica*, 38(2), 227–233.
- [120] Wang, S.-P. et Kuo, C. (1988). Nonlinear Robust Hybrid Control of Robot Manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2, 1204–1209, Philadelphia, PA.
- [121] Craig, J. (1989). *Introduction to Robotics Mechanics and Control*. Robotic Systems. Addison-Wesley Publishing Company, silma inc. edition.
- [122] Mills, J. et Goldenberg, A. (1994). Constrained Motion Task Control of Robotic Manipulators. *Journal Mechanism and Machine Theory*, 29(1), 95–114.
- [123] Raibert, M. et Craig, J. (1981). Hybrid Position/Force Control of Manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103(2), 126–133.
- [124] Vukobratović, M. et Potkonjak, V. (1999). Dynamics of Contact Tasks in Robotics, Parts I - II. *Journal Mechanism and Machine Theory*, 34(6), 923–972.
- [125] Doulgeri, Z., Fahantidis, N. et Konstantinidis, A. (1998). On the Decoupling of Position and Force Controllers in Constrained Robotic Tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 15(6), 323–340.
- [126] Vukobratović, M., Stojic, R. et Ekalo, Y. (1998). Contribution to the Position/Force Control of Manipulation Robots Interacting with Dynamic Environment - A Generalization. *Automatica*, 34(10), 1219–1226.
- [127] Zhu, Y. et Pagilla, P. (2002). Static and Dynamic Friction Compensation in Trajectory Tracking Control of Robots. *IEEE International Conference Robotics and Automation*, 3, 2644–2649.

- [128] Aguilar, L., Orlov, Y. et Acho, L. (2003). Nonlinear Control of Nonsmooth Time-Varying Systems with Application to Friction Mechanical Manipulators. *Automatica*, 39(9), 1531–1542.
- [129] Siciliano, B. et Villani, L. (1997). An Output Feedback Parallel Force/Position Regulator for a Robot Manipulator in Contact with a Compliant Environment. *Systems & Control Letters*, 29(5), 295–300.
- [130] Hemami, H. et Wyman, B. (1979). Modeling and Control of Constrained Dynamic Systems with Application to Biped Locomotion in the Frontal Plane. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4), 526–535.
- [131] Vukobratović, M. et Potkonjak, V. (1985). *Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots*. Springer, Berlin, Allemagne.
- [132] Nevins, J. et Whitney, D. (1980). Assembly research. *Industrial Robot*, 7(1), 27–43.
- [133] Whitney, D. (1987). Historical Perspective and State of the Art in Robot Force Control. *International Journal of Robotics Research*, 6(1), 3–14.
- [134] Kazerooni, H., Houpt, P. et Sheridan, T. (1986). Robust Compliant Motion for Manipulators, Parts I - II. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2(2), 83–105.
- [135] Park, J. et Chung, H. (2000). Hybrid Control of Biped Robots to Increase Stability in Locomotion. *Journal of Robotic Systems*, 17(4), 187–197.
- [136] Love, L. et Book, W. (2004). Force Reflecting Teleoperation with Adaptive Impedance Control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 34(1), 159–165.
- [137] Hogan, N. (1985). Impedance Control : An Approach to Manipulation, Parts I - III. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107(1), 1–24.
- [138] Mills, J. et Goldenberg, A. (1989). Force and Position Control of Manipulators During Constrained Motion Tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(1), 30–46.
- [139] Parra, V., Rodríguez, A. et Hirzinger, G. (2001). Perfect Position/Force Tracking of Robots with Dynamical Terminal Sliding Mode Control. *Journal of Robotic Systems*, 18(9), 517–532.

- [140] Vukobratović, M. et Radoslav, S. (1995). Historical Perspective of Hybrid Control in Robotics : Beginnings, Evolution, Criticism and Trends. *Journal Mechanism and Machine Theory*, 30(4), 519–532.
- [141] DeSantis, R. (1996). Motion/Force Control of Robotic Manipulators. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118, 386–389.
- [142] Faessler, H. (1990). Manipulators Constrained by Stiff Contact - Dynamics, Control and Experiments. *International Journal of Robotics Research*, 9(4), 40–58.
- [143] Mc Clamroch, H. et Wang, D. (1990). Linear Feedback Control of Position and Contact Force for a Nonlinear Constrained Mechanism. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 112(4), 640–645.
- [144] Wang, D. et Mc-Clamroch, H. (1993). Position and Force Control for Constrained Manipulator Motion : Lyapunov's Direct Approach. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 9(2), 308–313.
- [145] Wilfinger, L., Wen, J. et Murphy, S. (1994). Integral Force Control with Robustness Enhancement. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(1), 31–40.
- [146] Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, NJ.
- [147] Azenha, A. et Machado, J. (1997). Dynamic Analysis in Variable Structure Position/Force Hybrid Control of Manipulators. *IEEE International Conference Systems Man and Cybernetics on Computational Cybernetics and Simulation*, 5, 4309–4314, Orlando, FL.
- [148] Chiaverini, S., Siciliano, B. et Villani, L. (1998). Force and Position Tracking : Parallel Control with Stiffness Adaptation. *IEEE Control Systems Magazine*, 18(1), 27–33.
- [149] Ferretti, G., Magnani, G. et Rocco, P. (1995). On the Stability of Integral Force Control in Case of Contact with Stiff Surfaces. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117(4), 547–553.
- [150] Ferretti, G., Magnani, G. et Rocco, P. (1997). Toward the Implementation of Hybrid Position/Force Control in Industrial Robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 13(6), 838–845.

- [151] Bona, B. et Indri, M. (1995). Friction Compensation and Robustness Issues in Force/Position Controlled Manipulators. *Proceedings IEE Control Theory and Applications*, 142(6), 569–574.
- [152] Cai, L. et Goldenberg, A. (1989). An Approach to Force and Position Control of Rrobot Manipulators. *IEEE International Conference Robotics and Automation*, 1, 86–91, Scottsdale, AZ.
- [153] Cai, L. et Goldenberg, A. (1989). A New Approach to Force and Position Control of Robot Manipulators. *IEEE International Conference on Control Applications*, 740–746.
- [154] Kankaanranta, R. et Koivo, H. (1988). Dynamics and Simulation of Compliant Motion of a Manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 4(2), 163–173.
- [155] Yabuta, T. (1992). Nonlinear Basic Stability Concept of the Hybrid Position/Froce Control Scheme for Robot Manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5), 663–670.
- [156] Sepehri, N., Sassini, F., Lawrence, P. et Ghasempour, A. (1996). Simulation and Experimental Studies of Gear Backlash and Stick-Slip Friction in Hydraulic Excavator Swing Motion. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 118, 463–467.
- [157] Kazerooni, H. (2005). Design and Analysis of Pneumatic Force Generators for Mobile Robotic Systems. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 10(4), 411–418.
- [158] Wang, J., Pu, J. et Moore, P. (1999). Accurate Position Control of Servo Pneumatic Actuator Systems - An Application to Food Packaging. *Control Engineering Practice*, 7(6), 699–706.
- [159] Richer, E. et Hurmuzlu, Y. (2000). A High Performance Pneumatic Force Actuator System : Part I - Nonlinear Mathematical Model. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 122(3), 416–425.
- [160] Lee, H., Choi, G. et Choi, G. (2002). A Study on Tracking Position Control of Pneumatic Actuators. *ASME Transactions on Mechatronics*, 12(6), 813–831.
- [161] Xiang, F. et Wikander, J. (2003). QFT Control Design for an Approximately Linearized Pneumatic Positioning System. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13(7), 675–688.

- [162] Richer, E. et Hurmuzlu, Y. (2000). A High Performance Pneumatic Force Actuator System : Part II - Nonlinear Controller Design. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 122(3), 426–434.
- [163] Ilchmann, A., Sawodny, O. et Trenn, S. (2006). Pneumatic Cylinders : Modelling and Feedback Force Control. *International Journal of Control*, 1–12.
- [164] Song, J. et Ishida, Y. (1997). A Robust Sliding Mode Control for Pneumatic Servo Systems. *International Journal of Engineering Science*, 35(8), 711–723.
- [165] Outbib, R. et Richard, E. (2000). State Feedback Stabilization of an Electropneumatic System. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 122(3), 410–415.
- [166] Chillari, S., Guccione, S. et Muscato, G. (2001). An Experimental Comparison between Several Pneumatic Position Control Methods. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2, 1168–1173.
- [167] Andersen, B. (1967). *The Analysis and Design of Pneumatic Systems*. Wiley, NY.
- [168] Vaughan, D. (1965). Hot-Gas Actuator : Some Limits on the Response Speed. *Transaction of the ASME Journal of Basic Engineering*, 113–119.
- [169] Thomasset, D., Richard, E., Scavarda, S., Lin, X., Sesmat, S. et Bouhal, A. (1993). Control of an Electropneumatic Servodrive : A State Affine or a Sliding. *IFAC World Congress*, 458–466.
- [170] Liu, S. et Bobrow, J. (1988). An Analysis of a Pneumatic Servo System and its Application to a Computer-Controlled Robot. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 110(3), 228–235.
- [171] Cho, D. et Hedrick, J. (1985). Pneumatic Actuators for Vehicle Active Suspension Applications. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 107, 67–72.
- [172] Burrows, C. et Webb, C. (1966). Use of Root Loci in Design of Pneumatic Servo-Motors. *Control*, 423–427.
- [173] Taft, C. et Herrick, B. (1981). A Proportional Piezoelectric Electro-Fluidic Pneumatic Valve Design. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 103, 361–365.

- [174] French, I. et Cox, C. (1990). Modelling, Design and Control of a Modern Electropneumatic Actuator. *IEE Proceedings - Part D : Control Theory and Applications*, 137(3), 145–155.
- [175] Hamiti, K., Besancon, V.-B. et Buisson, R.-H. (1996). Position Control of a Pneumatic Actuator under the Influence of Stiction. *Control Engineering Practice*, 4(8), 1079–1088.
- [176] Wang, J., Pu, J. et Moore, P. (1999). A Practical Control Strategy for Servopneumatic Actuator Systems. *Control Engineering Practice*, 7(12), 1483–1488.
- [177] Kawakami, Y., Akao, J., Kawai, S. et Machiyama, T. (1988). Some Considerations on the Dynamic Characteristics of Pneumatic Cylinders. *Journal of Fluid Control*, 19(2), 22–36.
- [178] Kimura, T., Hara, S., Fujita, T. et Kagawa, T. (1997). Feedback Linearization for Pneumatic Actuator Systems with Static Friction. *Control Engineering Practice*, 5(10), 1385–1394.
- [179] Hauser, J., Sastry, S. et Kokotovich, P. (1992). Nonlinear Control via Approximate Input-Output Linearization : The Ball and Beam Example. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(3), 392–398.
- [180] Xiang, F. et Wikander, J. (2004). Block-Oriented Approximate Feedback Linearization for Control of Pneumatic Actuator System. *Control Engineering Practice*, 12(4), 387–399.
- [181] Henry, P., Hollerbach, J. et Nahvi, A. (1998). An Analytical and Experimental Investigation of a Jet Pipe Controlled Electropneumatic Actuator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14, 601–611.
- [182] Kimura, T., Hara, S., Fujita, T. et Kagawa, T. (1995). Control for Pneumatic Actuator Systems using Feedback Linearization with Disturbance Rejection. *American Control Conference*, WMII-2(35), 825–829.
- [183] Xiang, F. (2001). *Block-Oriented Nonlinear Control of Pneumatic Actuator Systems*. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology.
- [184] Liao, T.-L. et Chien, T.-I. (2000). An Exponentially Stable Adaptive Friction Compensator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(5), 977–980.
- [185] McDonnell, B. et Burrows, J. (1988). Adaptive tracking control of an air powered robot actuator. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(3), 427–433.

- [186] Richardson, R., Plummer, A. et Brown, M. (2001). Self-Tuning Control of a Low-Friction Pneumatic Actuator under the Influence of Gravity. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 9(2), 330–334.
- [187] Bobrow, J. et Jabbari, F. (1991). Adaptive Pneumatic Force Actuation and Position Control. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 113(2), 267–272.
- [188] McDonnell, B. et Bobrow, J. (1993). Adaptive Tracking Control of an Air Powered Robot Actuator. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 115(3), 427–433.
- [189] Tanaka, K., Shimizu, A. et Sakata, K. (1994). Adaptive Pole-Placement Control for Pneumatic Servo Systems with Constant Disturbances. *Transactions on Society of Instruments and Control Engineers*, 30, 1069–1076.
- [190] Pandian, S., Takemura, F., Hayakawa, Y. et Kawamura, S. (2002). Pressure Observer-Controller Design for Pneumatic Cylinder Actuators. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 7(4), 490–499.
- [191] Qu, Z. (1992). Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties. *System & Control Letters*, 18(3), 301–307.
- [192] Verma, M. (1988). Coprime Fractional Representations and Stability of Nonlinear Feedback Systems. *International Journal of Control Letters*, 48, 897–918.
- [193] Shen, T., Tamura, K., Henmi, N. et Nakazawa, T. (1998). Robust Model Following Controller Applied to Positioning of Pneumatic Control Valve with Friction. *IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 512–516, Trieste, Italie.
- [194] Song, J. et Ishida, Y. (1997). Robust Tracking Controller Design for Pneumatic Servo System. *International Journal of Engineering Science*, 35(10 & 11), 905–920.
- [195] Puchhammer, G. et Jörgl, H. (1994). Pressure Control for Servopneumatic Actuators : A Bang Bang Like Approach and Signal Smoothing by CSMC. *IEEE International Conference on Control Applications*, 787–791.
- [196] Wang, J., Wang, D., Moore, P. et Pu, J. (2001). Modelling Study, Analysis and Robust Servo Control of Pneumatic Cylinder Actuator Systems. *Proceedings IEE Control Theory and Applications*, 148(1), 35–42.
- [197] Acarman, T., Hatipoğlu, C. et Özgüner, U. (2001). A Robust Nonlinear Controller Design for a Pneumatic Actuator. *American Control Conference*, 6, 4490–4495.

- [198] Rachkov, M., Crisostomo, M., Marques, L. et De Almeida, A. (2002). Positional Control of Pneumatic Manipulators for Construction Tasks. *Automation in Construction*, 11(6), 655–665.
- [199] Schulte, H. et Hahn, H. (2004). Fuzzy State Feedback Gain Scheduling Control of Servo-pneumatic Actuators. *Control Engineering Practice*, 12(5), 639–650.
- [200] Choi, G., Lee, H. et Choi, G. (1998). A Study on Tracking Position Control of Pneumatic Actuators using Neural Network. *Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 3, 1749–1753, Aachen, Allemagne.
- [201] Kaitwanidvilai, S. et Parnichkun, M. (2005). Force Control in a Pneumatic System using Hybrid Adaptive Neuro-Fuzzy Model Reference Control. *ASME Transactions on Mechatronics*, 15(1), 23–41.
- [202] Dupont, P. (1993). The Effect of Friction on the Forward Dynamics Problem. *International Journal of Robotics Research*, 12(2), 164–179.
- [203] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2004). A Dynamic Feedback Tracking Design for Systems with Friction using the LMI Formulation. *IEEE International Conference on Control Applications*, 1, 819–824, Taipei, Taiwan.
- [204] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2004). A Multi-objective Output-feedback Controller for System with Friction. *IFAC Symposium on Cost Oriented Automation*, 103–108, Gatineau/Ottawa, Canada.
- [205] Mayé, P. (2000). *Moteurs Électriques pour la Robotique*. Dunod, Paris, France.
- [206] Khalil, W. (2002). *Commande des Robots Manipulateurs*. Hermès Sciences, Paris, France.
- [207] Berdal, P. (2004). *L'Essor des Automatismes Électro-pneumatiques*. Cépaduès-éditions, Toulouse, France.
- [208] Canudas, C. et Ge, S. (1997). Adaptive Friction Compensation for Systems with Generalized Velocity/Position Friction Dependency. *IEEE Conference on Decision and Control*, 2465–2470.
- [209] Canudas, C. et Panagiotis, T. (1999). Dynamic Tire Friction Models for Vehicle Traction Control. *IEEE Conference on Decision and Control*, 4, 3746–3751, Phoenix, AZ.
- [210] Cazand, R. (1955). *Le Frottement et L'Usure des Matériaux, Les Anti-Frictions*. Dunod, Paris, France.

- [211] Berger, E., Krousgrill, C. et Sadeghi, F. (1997). Stability of Sliding in a System Excited by a Rough Moving Surface. *American Society of Mechanical Engineers, J. Tribol*, 119(4), 672–680.
- [212] Gray, G. et Johnson, K. (1972). The dynamic Response of Elastic Bodies in Rolling Contact to Random Roughness of their Surfaces. *Journal of Sound and Vibration*, 22(3), 323–342.
- [213] Godfrey, D. (1967). Vibration Reduces Metal to Metal Contact and Causes Apparent Reduction in Friction. *Transactions of the ASLE*, 10(2), 183–192.
- [214] Polycarpou, A. et Soom, A. (1995). Boundary and Mixed Friction in the Presence of Dynamic Normal Loads : Part I - System Model. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, 117(2), 255–260.
- [215] Polycarpou, A. et Soom, A. (1995). Boundary and Mixed Friction in the Presence of Dynamic Normal Loads : Part II - Friction Transients. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, 117(2), 261–266.
- [216] Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, NY.
- [217] Velenis, E., Tsiotras, P. et Canudas, C. (2002). Extension of the LuGre Dynamic Tire Friction Model to 2D Motion. *Mediterranean Conference on Control and Automation*, THA 5–3, Lisbonne, Portugal.
- [218] Chilali, M. et Gahinet, P. (1996). H_∞ Design with Pole Placement Constraints : An LMI Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), 358–367.
- [219] Scherer, C., Gahinet, P. et Chilali, M. (1997). Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7), 896–911.
- [220] Chilali, M., Gahinet, P. et Apkarian, P. (1999). Robust Pole Placement in LMI Regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12), 2257–2270.
- [221] Canudas, C. (1998). Comments on A New Model for Control of Systems with Friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(8), 1189–1190.
- [222] Chilali, M., Gahinet, P. et Apkarian, P. (1997). Robust Pole Placement in LMI Regions. *IEEE Conference on Decision and Control*, 1291–1296.
- [223] Ling, B. (2001). State-Feedback Regional Pole Placement via LMI Optimization. *American Control Conference*, 3475–3480.

- [224] Wang, S. et Chow, J. (2001). Regional Pole Placement via Low-order Controllers with Extensions to Simultaneous Stabilization. *American Control Conference*, 1663–1668.
- [225] Graham, A. (1981). *Kronecker Product and Matrix Calculus with Applications*. Ellis Horwood, Chichester, Royaume Uni.
- [226] Larminat, P.-. (1996). *Automatique : Commande des Systèmes Linéaires*. Hermès, Paris, France.
- [227] Desoer, C. et Vidyasagar, M. (1975). *Feedback systems : Input-Output Properties*. Academic Press Inc., Orlando.
- [228] Zhou, K., Doyle, J. et Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall.
- [229] Goh, C., Turan, L., Safonov, M. et Papavassilopoulos, G. (1994). Biaffine Matrix Inequalities Properties and Computational Methods. *American Control Conference*, 1, 850–855, Baltimore, EU.
- [230] Mesbahi, M., Safonov, M. et Papavassilopoulos, G. (2000). *Bilinearity and Complementarity in Robust Control*. Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control, SIAM. El Ghaoui, L. and Niculescu, S. ediktors, Philadelphia, PA.
- [231] Boyd, S., El-Ghaoui, L., Feron, E. et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, 15 of *SIAM Studies in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- [232] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. et Chilali, M. (1995). *MATLAB LMI Control Toolbox*. The MathWorks Inc., MA.
- [233] Gillespie, L. K. et King, R. (1987). *Robotic Deburring Handbook*. Society of Manufacturing Engineers, Dearborn, MI.
- [234] Mason, M. (2001). *Mechanics of Robotic Manipulation*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [235] Yao, B. et Tomizuka, M. (1995). Adaptive Control of Robot Manipulators in Constrained Motion - Controller Design. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 117(3), 320–328.
- [236] Goldstein, H. (1950). *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Pub. Co, Cambridge, MA.

- [237] Mills, J. (1988). Constrained Manipulator Dynamic Models and Hybrid Control. *IEEE International Symposium on Intelligent Control*, 424–429, Arlington, VA.
- [238] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2006). A Multi-stage Position/Force Control for Constrained Robotic Systems with Friction : Joint-space Decomposition, Linearization and Multi-objective Observer/Controller Synthesis using LMI Formalism. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 53(5), 1698–1712.
- [239] Gäfvert, M. (1999). Dynamic model based friction compensation on the furuta pendulum. *IEEE International Conference on Control Applications and IEEE International Symposium on Computer Aided Control System Design*, 2, 1260–1265.
- [240] Weinmann, A. (1991). *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag, NY.
- [241] Francis, B. (1987). *A Course in H_∞ Control Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Allemagne.
- [242] Siciliano, B. et Villani, L. (1996). A Passivity-Based Approach to Force Regulation and Motion Control of Robot Manipulators. *Automatica*, 32(3), 443–447.
- [243] Murray, R., Li, Z. et Sastry, S. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC Press LLC, Boca Raton, FL.
- [244] Hensen, R. (2002). *Controlled Mechanical Systems with Friction*. Ph.D., Technische Universiteit Eindhoven, Hollande.
- [245] Dupont, P. et Yamajako, S. (1997). Stability of Frictional Contact in Constrained Rigid-Body Dynamics. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 13(2), 230–236.
- [246] Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J., Rotella, F. et Zambettakis, I. (1993). *Automatique : Analyse et Régulation des Processus Industriels : Régulation Continue*. Technip, Paris, France.
- [247] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2004). A Robust Feedback Linearization Force Control of a Pneumatic Actuator. *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 6113–6119, La Haye, Hollande.
- [248] Bigras, P. (2005). Sliding-Mode Observer as a Time-Variant Estimator for Control of Pneumatic Systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 127, 499–502.

- [249] Al-Ibrahim, A. et Otis, D. (1992). Transient Air Temperature and Pressure Measurements During the Charging and Discharging Processes of an Actuating Pneumatic Cylinder. *National Conference on Fluid Power*, 233–238.
- [250] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2006). Force Control Loop Affected by Bounded Uncertainties and Unbounded Inputs for Pneumatic Actuator Systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control (en révision)*.
- [251] Mc-Cloy, D. et Martin, H. (1973). *The Control of Fluid Power*. Longman, Londre, Royaume Uni.
- [252] Doyle, J., Francis, B. et Tannenbaum, A. (1992). *Feedback Control Theory*. MacMillan Coll Div, NY.
- [253] Bobillo, D. et Dahleh, M. (1993). Minimization of the Maximum Peak-to-Peak Gain : The General Multiblock Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38, 1459–1482.
- [254] Abedor, J., Nagpal, K. et Poolla, K. (1996). Linear Matrix Inequality Approach to Peak-to-Peak Gain Minimization. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6(9-10), 899–927.
- [255] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. et Chilali, M. (1995). *MATLAB LMI Control Toolbox*. The MathWorks Inc., MA.
- [256] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2006). On Force Control of Pneumatic Actuator Subject to a Position Tracking and a Friction Estimation Based on LuGre Model. Rapport technique ETS-RT-2006-001, École de Technologie Supérieure, Montréal, Canada.
- [257] Khayati, K., Bigras, P. et Dessaint, L.-A. (2006). LuGre Model-based Friction Compensation and Positioning Control for a Pneumatic Actuator. *ASME Transactions on Mechatronics (en révision)*.