МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»

(25–28 апреля 2017 г.)

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2017

Исследование клеточных автоматов с помощью системы Mathematica

Жуматаев А. М., Зюзьков В. М.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: anarbek130896@gmail.com

Аннотация

Рассматриваются клеточные автоматы, как альтернатива примения дифференциальных уравнений в частных производных для моделирования динамических систем. Используя язык Wolfram, программируются двумерные клеточные автоматы для реализации следующих моделей: игра Жизнь, распространение пожара и вирусная эпидемия.

Ключевые слова: Клеточные автоматы, разностные схемы, дискретные модели, игра “жизнь”, распространение пожара, эпидемия вируса.

Клеточный автомат есть частный случай дискретной динамической системы. Пространство, время и состояние этой системы дискретны. Каждая точка в регулярной пространственной решетке, называемая клеткой, может иметь какое-нибудь состояние (выбранное из конечного множества). Состояния клеток в решетке изменяются в соответствии с некоторым локальным правилом: состояние клетки в данный момент времени зависит только от её собственного состояния и состояний ее соседей (в некотором смысле) в предыдущий момент времени. Состояние всех клеток в решетке меняется синхронно, поэтому состояние всей решетки меняется в дискретные моменты времени.

Для определения клеточного автомата (CA, cellular avtomata) надо задать следующее. Во-первых, положительное целое число n, которое является размерностью клеточного автомата. Потом нужно определить конечное множество состояний S, имеющее, по крайней мере, два члена. Состояние для самого CA задается присваиванием какого-нибудь элемента S каждой точке n-мерной решетки Zn (где Z есть множество целых чисел). Точки Zn обычно называются клетками. С клеточным автоматом связано также понятие окрестности. Окрестность N для 0 есть некоторое конечное (непустое) подмножество Zn. Окрестность для любой другой клетки $x \epsilon Zn$ получается очевидным сдвигом (линейным переносом)$x + N$. Наконец, должна быть задана функция $f : S^N \to S$ (т. е. каждому возможному состоянию окрестности клетки с помощью правила перехода ставится в соответствие некоторое состояние этой клетки). Состояние СА эволюционирует в дискретном времени, состояние каждой клетки во время t + 1 определяется состоянием ее окрестности во время t в соответствии с правилом перехода.

Подчеркнем, что изменения состояний клетки происходят: 1) параллельно, 2) локально и 3) однородно.

Клеточные автоматы были введены в конце 40-х годов С. Уламом (1909-1984) и Д. фон Нейманом (1903-1957). Фон Нейман пытался решить следующую задачу: может ли машина или «автомат» создать самою (или самого) себя. Улам предложил использовать для решения абстрактное понятие «множество клеток». В середине пятидесятых годов фон Нейман доказал существование клеточного автомата, который моделирует работу универсальной машины Тьюринга и способен построить любую конфигурацию в пустых клетках пространства, в том числе и точную копию самого себя [1]. Двумерный автомат фон Неймана состоит приблизительно из 200000 клеток; каждая клетка может находиться в 29 состояниях и имеет 4 соседних клетки (примыкающих к данной по горизонтали и вертикали).

Одномерные клеточные автоматы. В данном случае рассматривается конечная линейная последовательность (строка) клеток, каждая из которых имеет некоторое состояние (значение). Эволюция одномерного автомата обычно начинается со строки, состоящей либо из одной клетки с ненулевым значением, расположенной в центре строки, либо из последовательности клеток, состояния которых заданы случайно. Клеточный автомат «эволюционирует» дискретно во времени, на каждом шаге переходя к новой строке клеток. Состояние каждой клетки в новой строке определяется применением конкретного правила к значению клетки в предыдущей строке, лежащей непосредственно выше новой клетки. Правило изотропно – это означает, что одно и то же правило определяет значение каждой новой клетки; и правило локально, т.е. в правиле используются значения только соседних клеток. Правило применяется ко всем клеткам в строке одновременно. Исследуя клеточные автоматы, С. Вольфрам выяснил, что эволюция одномерных клеточных автоматов может быть отнесена к одному из следующих четырех общих классов [2] (в скобках приводится аналогия с физическими

и вычислительными системами):
1) однородные (стабильные) состояния (предельные точки);
2) периодические структуры (предельные циклы);
3) хаотическая структура (странные аттракторы);
4) сложные локализованные структуры (возможная аналогия с универсальными вычисле-ниями).

Игра «Жизнь». Игра «Жизнь» была изобретена в 1970 г. Джоном Хортоном Конуэем, молодым математиком из Кембриджа, и эта игра широко распространилась по миру не без помощи двух заметок Мартина Гарднера в Sientific American (октябрь 1970 и февраль 1971). Конуэй предположил, что клеточный автомат с универсальными вычислительными возможностями мог бы быть более простым, чем универсальный клеточный конструктор фон Неймана. Клетка должна иметь только два состояния: быть "заполненной"или "пустой"живой"или "мертвой". Конуэй тщательно подбирал "генетические законы управляющие рождением, гибелью и выживанием клеток.
Генетические законы Конуэя удивительно просты.
1) Каждая живая клетка, у которой два или три соседа, живет и сохраняется до следующего поколения.
2) Клетка погибает, если у нее более чем три соседа (от недостатка места), совсем нет соседей или только один сосед (от одиночества).
3) Когда рядом с какой-нибудь мертвой (пустой) клеткой есть три живые соседние клетки, то эта клетка становится живой.
4) Клетки погибают и рождаются одновременно. Они образуют одно поколение. За один ход в игре осуществляется переход от одного поколения к другому.
Правила Конуэя имеют богатство следствий. Простые начальные конфигурации, которые в течение значительного промежутка времени растут, претерпевают разнообразные изменения и заканчивают свою эволюцию одним из четырех способов: 1) полностью исчезают (либо из-за перенаселенности, т.е. слишком большой плотности живых клеток, либо, наоборот, из разреженности живых клеток, образующих конфигурацию); 2) переходят в устойчивую конфигурацию и перестают изменяться вообще; 3) выходят на колебательный режим, при котором они совершают некий бесконечный цикл превращений с определенным периодом и, наконец, 4) существуют конфигурации, которые бесконечно распространяются на плоскости. На рис. 1 конфигурация «глайдерное ружье» выпускает

бесконечную последовательность движущих объектов – глайдеров; можно увидеть два глайдера, (каждый из пяти клеток), которые двигаются вниз игрового поля.
Создавая игру «Жизнь», Д. Конуэй ставил перед собой цель показать существование клеточного автомата-универсального компьютера с более простыми правилами, чем универсальный автомат фон Неймана. Независимо друг от друга Д. Конуэй и У. Госпер доказали, что игра «Жизнь» может моделировать машину Тьюринга[3]. Универсальность игры «Жизнь» означает, что в принципе, мы можем использовать движущиеся конфигурации для выполнения любых вычислений, на которые способны компьютеры.

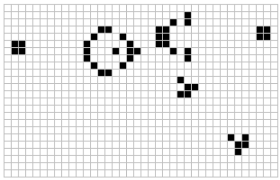

Рис. 1. «Глайдерное ружье»

Распространение пожара. Двумерная решётка представляет клетки с различными видами растительности. Состояние одной клетки описывается в виде пары (s,t). Величина t-время, прошедшее с тех пор, как на этой клетке был огонь, или, если огня никогда не было, то t-время, прошедшее с момента запуска клеточного автомата. Значение s есть один из следующих символов : e-«огонь», b-«выгоревшая земля», g-«трава», w-«редкий лес», f-«густой лес».

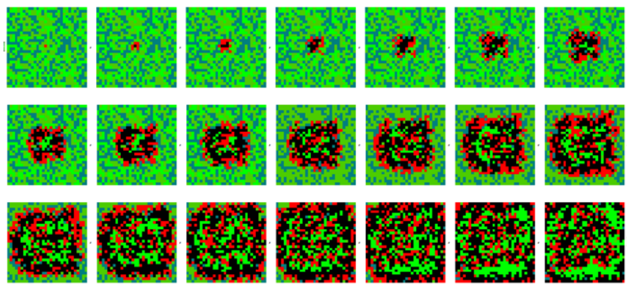

Рис. 2. «Распространение пожара»

Правила перехода:
(s,t) $\to$ (e,0), если горит соседняя клетка, и s-не выжженная земля (переход совершается с некоторой вероятностью, заданной как параметр);
иначе
(e,0) $\to$ (b,1),
(b,4) $\to$ (g,5),
(g,9) $\to$ (w,10),
(w,49) $\to$ (f,50),
иначе
(s,t) $\to$ (s,t+1).
На рис. 2 показано несколько шагов модели «распространения пожара», сделанных в системе Mathematica.

Вирусная эпидемия. Мы будем рассматривать двухмерный клеточный автомат, в котором каждая клетка имеет 8 соседей. Клетка представляет одну особь в популяции и может быть "здоровой "больной"и "здоровой с иммунитетом". Предполагаются следующие правила распространения эпидемий[2]:
здоровый организм может с некоторой вероятностью заболеть при больном соседе;
больной организм по истечении некоторого времени выздоравливает и приобретает иммунитет;
организм с иммунитетом заболеть не может;
иммунитет с течением времени с некоторой вероятностью ослабляется вплоть до полного исчезновения.
В исходную полностью здоровую популяцию помещается один больной организм. Будем изучать распространение болезни при таких начальных условиях.
Состояние клетки задается целым числом s. Предлагается следующая интерпретация значения s:
$s = 0$ - здоровый организм, не имеет иммунитета;
$s < 0$ - организм здоровый и имеет иммунитет (степень иммунитета прямо пропорциональна абсолютному значению s);
$s > 0$ - больной организм (величина s указывает продолжительность болезни).
Пусть болезнь определяется следующими параметрами:
p - вероятность заболеть при больном соседе;
q - вероятность ослабления иммунитета за единицу времени;
ti - длительность болезни (у всех организмов болезнь продолжается

одинаковое время);
tv - длительность иммунитета в единицах времени.
Законы изменения состояния:
1) $s = 0 \to s := 0$ - если нет больных соседей (здоровый организм остается здоровым при здоровых соседях);
2) $s = 0 \to s := 1$ с вероятностью p - если есть больной сосед (здоровый организм без иммунитета может заболеть при больном соседе);
3) $0 < s < ti \to s := s+1$ - больной продолжает болеть определенное время;
4) $s = ti \to s := -tv$ - если больной достаточно долго проболел, то он выздоравливает и приобретает иммунитет;
5) $s < 0 \to s := s+1$ с вероятностью q - иммунитет со временем может ослабнуть. Будем предполагать, что популяция является замкнутой, но неограниченной системой. Для начала, устраним границы поля: соединим любые два противоположных края поля, затем концы полученного цилиндра. Тем самым исходное поле рассматривается как тор. Определим начальную конфигурацию - все клетки «здоровы», за исключением центральной «больной» клетки. На рис. 3 показано развитие эпидемии.
Для изучения динамики эволюции модели полезно получить следующие численные характеристики (рассматриваемые как функции времени):
процентное содержание больных особей в популяции;
процентное содержание здоровых особей;
процентное содержание особей с иммунитетом.
Пусть в популяции $625 = 25\times25$ организмов и параметры болезни суть $p = 0{,}2$, $q = 0{,}5$, $ti = 5$, $tv = 5$. Тогда изменение количества больных организмов за 200 единиц времени изображено на рис. 4a. На рис. 4b показана динамика изменения здоровых без иммунитета организмов.

а) б)

Рис. 4. a) динамика изменения численности больных организмов; b) динамика изменения здоровых без иммунитета организмов.

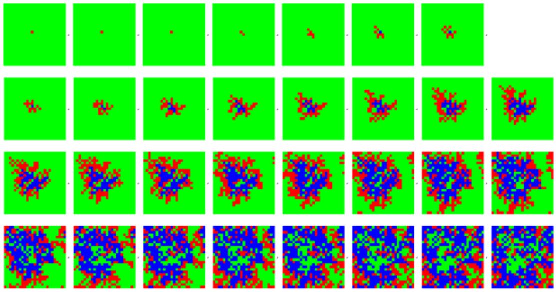

Рис. 3. Реализация в Mathematica распространения эпидемии

Литература

1. Neumann J. The Theory of Self-Reproducing Automata. Illinois: University of Illinois Press, 1966.

2. S. Wolfram. A New Kind of Science. Wolfram Media. 2002, 1197 p.

3. Berlecamp E.R., Conway J. H. and Guy R K. Winning Ways for your Mathematical Plays, volume 2. Academic Press, ISBN 0-12-091152-3, 1982. Chapter 25.

4. Зюзьков В. М. Моделирование эпидемий с помощью клеточных автоматов // Интеллектуальные автоматизированные системы проектирования, управления и обучения; Под ред. В. П. Тарасенко. Томск, изд-во ТГУ, 2000. С. 231-239.