

CAPÍTULO 2

CÁLCULO DE ÁREAS DE POLÍGONOS POR EL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN Y RECOMPOSICIÓN

FEDERMÁN ALFONSO, NORA BENÍTEZ MAJARRÉZ, BELLA EDELMIRA
PERALTA, KAROLINA RAMÍREZ Y ÁNGELA MARÍA RESTREPO

En este capítulo, describimos nuestras actuaciones para el diseño e implementación de la unidad didáctica relacionada con el cálculo de áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición. Inicialmente, efectuamos la formulación del problema, al enfocarlo desde la normativa curricular colombiana, y describimos el proceso de selección del tema y los contextos social, institucional y académico del colegio donde se implementó. Después, explicamos el proceso del diseño basado en el análisis didáctico realizado sobre el tema. Seguidamente, describimos los instrumentos y procedimientos de recolección y análisis de la información. Posteriormente, describimos el diseño que se implementó en la institución seleccionada, detallamos la evaluación realizada al diseño y a la implementación, y mostramos una propuesta de mejora para una futura aplicación. Por último, presentamos conclusiones de aspectos relevantes en el diseño e implementación de la unidad didáctica y listamos las referencias y anexos.

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Antes de centrarnos en el problema, consideramos importante reseñar el proceso de selección del tema de nuestra unidad didáctica. Los cuatro docentes, integrantes del grupo (Bella Peralta, Karolina Ramírez, Nora Benítez y Federmán Alfonso) propusimos como posibles temas de estudio las operaciones con fracciones y el cálculo de áreas y perímetros de polígonos. Los aspectos decisivos para escoger la segunda opción fueron (a) la experiencia docente de los integrantes del grupo, (b) la motivación hacia el tema por parte de los formadores del módulo 1 —uno de ellos, Ángela Restrepo, asumió el rol de tutora y nos acompañó en estos dos años—, y (c) los resultados de las pruebas externas e internas en geometría en las instituciones donde laboramos. Los resultados en las pruebas externas obtenidos por los estudiantes del colegio Kirpalamar (institución seleccionada para implementación) en el año 2012 fueron bajos para las competencias de comunicación, representación, modelación y planteamiento y resolución de problemas relativas al componente geométrico métrico.

Para seleccionar el tema, tuvimos en cuenta las dificultades que presentan los estudiantes al abordar el estudio de la geometría, especialmente en el cálculo de áreas. Ellos tienden a confundirlo con el del perímetro, tal como se concluyó en las pruebas TIMSS (Beaton, 1996, p. 455). Este informe afirma que “los estudiantes colombianos no están familiarizados con la estrategia básica de descomposición de figuras en formas más simples”, y que “confunden conceptos y fórmulas” (p.75).

2. DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO SOCIAL, INSTITUCIONAL Y ACADÉMICO

Para implementar la unidad didáctica, consideramos las instituciones educativas Normal Superior de Pasca, Compartir Suba, Departamental José de San Martín de Tabio y Departamental Kirpalamar de Arbeláez. Seleccionamos esta última por su contexto social, su buen nivel académico y porque el rector de la institución era miembro del grupo. Por lo anterior, ninguno de los miembros del grupo era docente titular del curso seleccionado, lo que nos permitió lograr una mayor objetividad en la evaluación de la experiencia. A continuación, describimos los contextos social, institucional y académico de la institución.

2.1. Contexto social

Las familias de los estudiantes que integran la institución seleccionada pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2, 3 y 4 y se caracterizan por ser en su mayoría de tipo “incompleto”. Es decir, el núcleo familiar está formado por los hijos y uno de los padres o conviven únicamente con sus abuelos. Los padres de familia o acudientes laboran en el campo, las oficinas de la administración municipal, el hospital, negocios particulares o en el mismo colegio. La mayor parte de los estudiantes vive en las veredas y en el área urbana del municipio de Arbeláez. Al menos una cuarta parte de ellos se desplaza desde la ciudad de Fusagasugá.

2.2. Contexto institucional

Kirpalamar pertenece al área rural del municipio de Arbeláez. El colegio es la sede principal de las 17 sedes que conforman la institución educativa. Se encuentra ubicado en la vereda San Roque, a dos kilómetros del casco urbano, en la vía que conduce al municipio de San Bernardo. El colegio fue creado en 1984 por la fundación Germán Duque Mejía y tuvo el carácter de privado hasta el año 2004, cuando la planta física se entregó al departamento en la modalidad de comodato. Los docentes y el personal administrativo pertenecen a la nómina oficial de la secretaría de educación de Cundinamarca.

2.3. Contexto académico

La institución ofrece los niveles de educación preescolar (transición), básica primaria y secundaria y media técnica con especialidad en Agroecología. La sede Colegio Kirpalamar tiene cerca de 400 estudiantes cuyas edades oscilan entre 5 y 19 años. Los resultados de las pruebas saber 11 de los últimos cuatro años lo han destacado como una de las mejores instituciones educativas de la provincia del Sumapaz, obteniendo la clasificación de alto (2010 y 2011) y superior (2012 y 2013). La institución posee convenios con la Universidad de Cundinamarca, la Universidad Abierta y a Distancia (UNAD) y el Servicio Nacional de Aprendizaje (SENA), que contribuyen a mejorar su funcionamiento docente.

El colegio posee una filosofía orientada por los principios promulgados por los maestros de la India, basada en la formación en valores, en la conservación de la salud y del medio ambiente, y en el desarrollo de un alto sentido de espiritualidad. La pedagogía que orienta los procesos académicos está cimentada en el aprendizaje significativo y el enfoque esteineriano. Rodolf Steiner fue el creador de la pedagogía Waldorf, que se fundamenta en la enseñanza aprendizaje por medio de las artes, la lúdica y la recreación.

2. DISEÑO PREVIO

Realizamos el diseño, la implementación y la evaluación de la unidad didáctica con base en el modelo del análisis didáctico. Seguimos sus cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. A continuación, describimos cada uno de estos análisis para nuestro tema.

1. ANÁLISIS DE CONTENIDO

El análisis de contenido provee herramientas para analizar temas de las matemáticas escolares e identificar y organizar su diversidad de significados. Este análisis se realiza a través de tres organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

1.1. Estructura conceptual del tema

Centramos nuestro análisis didáctico en el tema cálculo de áreas de polígonos. Este tema es importante porque se encuentra presente a lo largo del currículo escolar y se enfoca desde las líneas de pensamiento métrico y geométrico.

La medición surge de la comparación entre objetos. Al medir, tenemos en cuenta (a) observar e identificar una propiedad física común, (b) establecer los grados de semejanza y diferencia y (c) determinar el punto de origen y la dirección de cambio. Área es la medida de una superficie. El área puede encontrarse de manera directa, usando un patrón de medida, o de forma indirecta, valiéndose de fórmulas matemáticas.

Para el análisis de la estructura conceptual de la unidad didáctica, enunciamos, desde el campo conceptual, algunos hechos, conceptos y estructuras. Desde el campo procedimental, listamos estrategias, razonamientos y destrezas. Finalmente, presentamos el mapa conceptual con su respectiva explicación, con el fin de focalizar la atención en los aspectos que tuvimos en cuenta para el diseño de las tareas.

Hechos

Los hechos son las unidades más pequeñas de información dentro de un tema matemático. Relacionamos un listado de términos y convenios asociados con los conceptos de área y polígono. A continuación, registramos los términos.

- ◆ Superficie, área, área superficial, porción del plano.
- ◆ Forma, polígono, figura plana, rectángulos, triángulos, entre otras.
- ◆ Equivalente y equidescomponible.
- ◆ Igual, mayor que y menor que.

Ahora, enumeramos los convenios.

- ◆ Todo polígono puede descomponerse en triángulos.
- ◆ Dos polígonos son finitamente equivalentes si cada uno de ellos puede descomponerse en el mismo número finito de triángulos congruentes.
- ◆ Dos figuras equivalentes tienen áreas iguales.
- ◆ Para calcular el área de una figura, se trata de descomponer la figura en un número finito de partes de tal forma que estas partes puedan volver a juntarse para formar una figura más sencilla (cuya área se conozca).
- ◆ La unidad de medida puede ser dividida en partes (fraccionarse) para facilitar la medida de una cantidad.
- ◆ Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo.
- ◆ El área de un polígono es el área de un rectángulo equidescomponible a él.

Conceptos

Debido a la gran cantidad de conceptos relacionados con nuestro tema, solo citaremos los más importantes: medida, estimación, magnitud, magnitudes conmensurables, razones, área, polígonos, superficie, descomposición, recomposición, reconfiguración, iteración, conteo aditivo, unidades convencionales, unidades arbitrarias y complementariedad.

Estructuras

Las estructuras son sistemas de conceptos relacionados entre sí. De manera formal, la medida de la superficie de un polígono, es decir su área, puede inscribirse dentro de las siguientes definiciones.

- ◆ La magnitud superficie se define sobre el conjunto de polígonos, entre los que se establece una relación de equivalencia —tener la misma extensión— y, a cada clase de equivalencia, se le denomina cantidad de superficie.
- ◆ Se dice que la cantidad p es mayor o igual que q si existe una sub-descomposición de un representante cualquiera de p que permite obtener un representante de q . De esta forma, queda la superficie configurada como semigrupo abeliano y ordenado.
- ◆ Una medida de la superficie es una aplicación biyectiva del conjunto de cantidades de superficie en los reales positivos (R^+).

Razonamientos

Los razonamientos se ejecutan sobre los conceptos. Identificamos cuatro tipos de razonamientos para calcular áreas.

- ◆ Deductivo: determinar las propiedades de las figuras que permiten su descomposición.
- ◆ Inductivo: establecer expresiones generales para el cálculo de áreas.

- ◆ Geométrico: tratamiento cualitativo del área.
- ◆ Numérico: tratamiento cuantitativo del área.

Destrezas

Las destrezas se ejecutan procesando hechos. Calcular áreas requiere aplicar destrezas tales como comparar, descomponer, recomponer, iterar, contar, usar algoritmos, estimar, superponer, recortar y pegar, reconfigurar, aplicar el método de complementariedad, seleccionar unidades bidimensionales, realizar aproximaciones sucesivas, multiplicar unidades unidimensionales, y convertir de una unidad de medición a otra, entre otras.

Estrategias

Las estrategias se ejecutan sobre las estructuras conceptuales. A continuación, mencionamos las estrategias más usuales para determinar el área de un polígono.

- ◆ Reconocer la equivalencia de superficies por transformaciones del tipo cortar, mover, pegar.
- ◆ Concebir una superficie como ensamblado de otras.
- ◆ Transformar una superficie en otra equivalente pero de distinta forma.
- ◆ Cubrir una superficie con otra, de la forma más conveniente para no dejar huecos y sin que las piezas se superpongan.
- ◆ Fraccionar la unidad de medida para aquellos espacios en los que la unidad de medida entera no cabe.
- ◆ Estudiar el área de polígonos en contextos geométricos y analizar los elementos de los que depende.
- ◆ Encontrar formas geométricas que permitan calcular el área de un polígono por complementariedad.
- ◆ Estudiar el carácter bidimensional de las fórmulas del área.
- ◆ Resolver problemas geométricos, geométrico-numéricos y numéricos relacionados con áreas de figuras.

1.2. Mapa Conceptual del tema

Presentamos el mapa conceptual para nuestro tema en la figura 1.

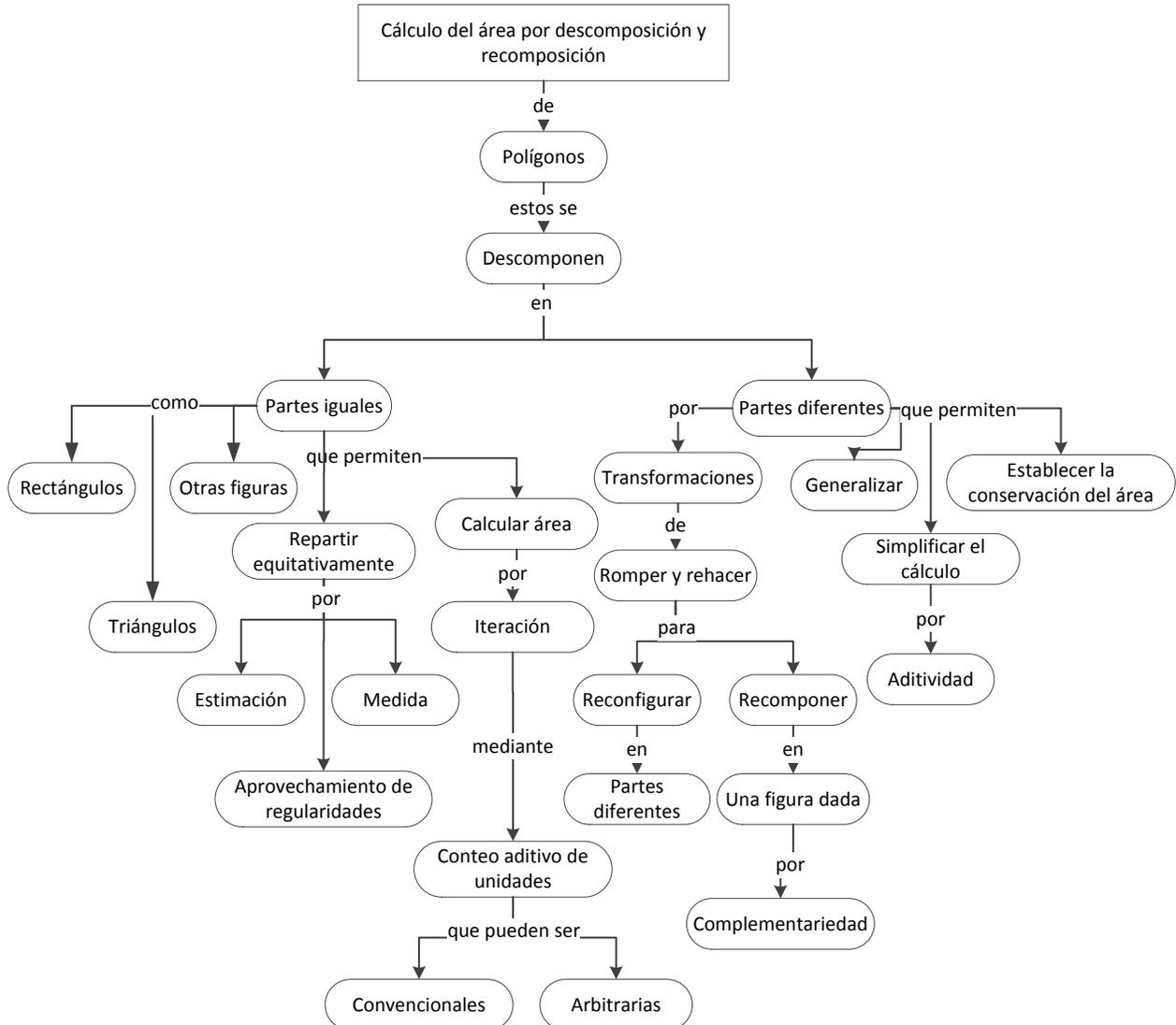


Figura 1. Mapa conceptual del tema

Como puede apreciarse en el mapa conceptual, partimos del cálculo del área por descomposición y recomposición de polígonos. Así, delimitamos nuestro campo de acción a estas figuras y a un método en particular. Para comenzar, vemos que un polígono puede descomponerse en partes iguales o en partes diferentes. Se descompone en partes iguales cuando se trazan líneas que dividen su superficie de tal manera que se observan formas congruentes entre sí (por ejemplo, triángulos, cuadrados o rectángulos). Esto permite repartir equitativamente y/o calcular el área del polígono. La repartición puede implicar acciones tales como estimar, medir y/o aprovechar regularidades observadas en el polígono (por ejemplo, paralelismo, perpendicularidad o congruencia entre lados del polígono).

Para calcular el área del polígono, se estima el área de una de las partes en que se descompone y, en relación con ella, se estima la totalidad. En tal situación, se dice que las regiones son

conmensurables y el área puede expresarse en términos de un patrón común (unidad de medida que puede ser convencional o arbitraria). De otra parte, en el mapa conceptual mostramos que es posible descomponer un polígono en partes diferentes mediante transformaciones de romper y rehacer para reconfigurar o recomponer. Este proceso permite establecer la conservación del área, simplificar el cálculo del área por la adición de las divisiones del polígono o establecer generalizaciones. La reconfiguración es un procedimiento mediante el que se reorganizan una o varias figuras en que se descompone un polígono y se arma una figura con diferente contorno, sin dejar huecos.

Recomponer una figura dada por el método de complementariedad consiste en realizar arreglos usando el polígono al que se le va a calcular el área y otras formas complementarias al mismo, con el fin de visualizar geoméricamente la situación. Luego, se descomponen internamente las formas complementarias y, a partir de estas, se realiza un procedimiento aritmético para calcular el área del polígono inicial. En algunos casos, al descomponer un polígono en partes diferentes se aplica una nueva descomposición de dichas divisiones en partes iguales.

1.3. Sistemas de representación

Los sistemas de representación permiten “identificar los modos en que el concepto se presenta” (Gómez, 2007). Se pueden considerar los sistemas de representación numérico, simbólico, tabular, gráfico, geométrico, pictórico, verbal, manipulativo, tabular y ejecutable. En la figura 2, presentamos la organización de los sistemas de representación que son relevantes para nuestro tema.

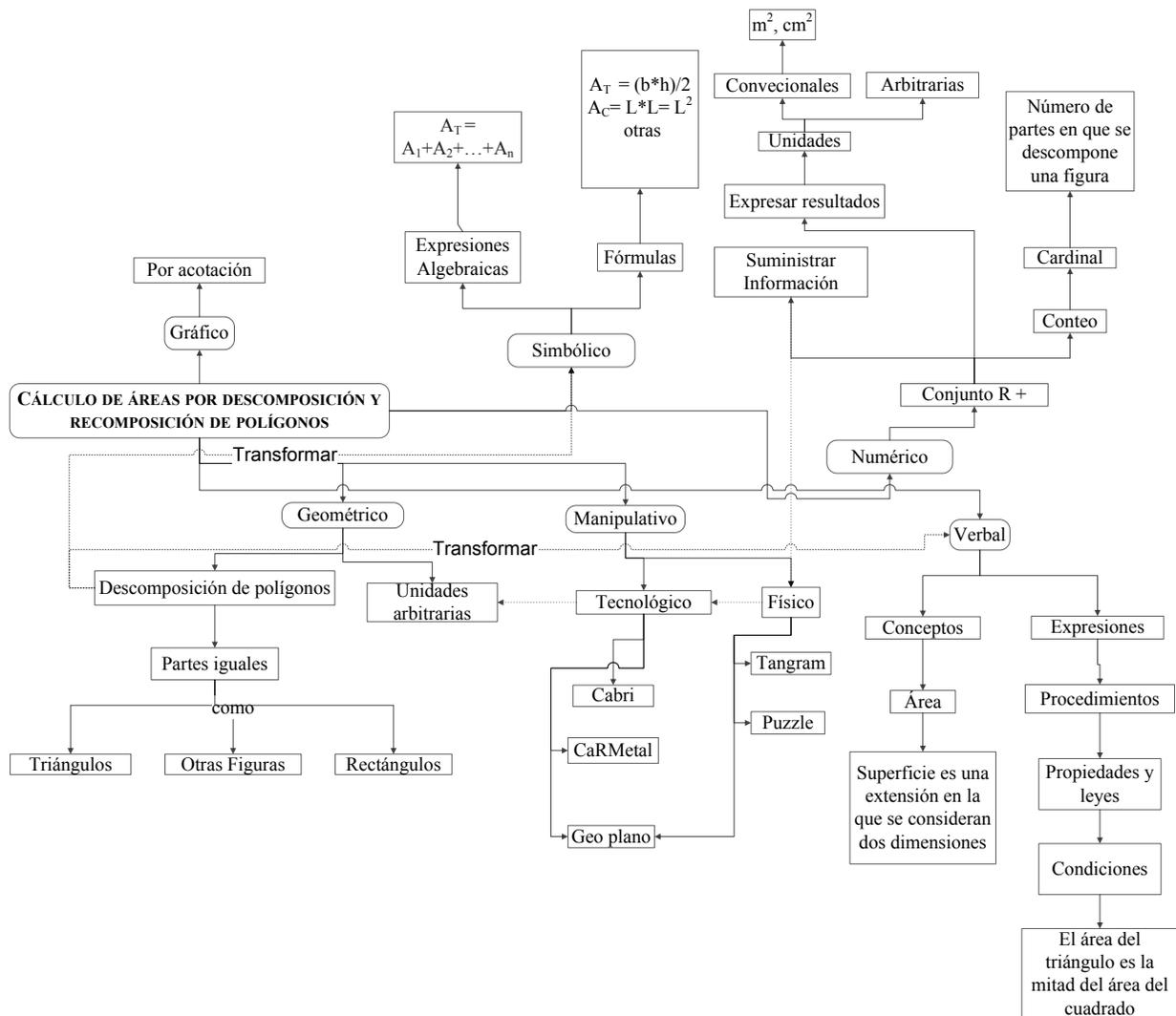


Figura 2. Sistemas de representación relevantes para el tema

Identificamos los siguientes sistemas de representación: geométrico, numérico, simbólico, manipulativo, gráfico y verbal. El sistema geométrico permite visualizar el proceso efectuado para, por ejemplo, la descomposición de los polígonos, el trazado de líneas y elementos auxiliares y las posibles reconfiguraciones. A través del sistema de representación numérico, se expresa el conteo de las unidades o suma de áreas, en valores del conjunto de los reales positivos. El sistema de representación simbólico permite plantear las fórmulas para el cálculo indirecto del área de polígonos y escribir otras expresiones algebraicas como, por ejemplo, $A_T = A_1 + A_2 + \dots + A_n$. El sistema de representación manipulativo se muestra a través de elementos físicos como el Tangram, geoplanos y rompecabezas, o, por medios tecnológicos, como los programas Cabri y CarMetal. El sistema de representación gráfico es empleado en los fenómenos que requieren de métodos por acotación, como es el caso del cálculo del área bajo la curva, que es la base para definir

el concepto de integral. El sistema de representación verbal se utiliza en los conceptos, términos y convenios sobre el área de polígonos, en los enunciados de los problemas, en la justificación de los procesos y en la explicación de resultados.

Relaciones entre los sistemas de representación

En este apartado describimos las siguientes relaciones entre los sistemas de representación para el cálculo de áreas de polígonos por descomposición.

Sustitución. La sustitución se realiza cuando le damos un valor numérico a las variables presentes en el sistema de representación simbólico.

Lectura literal de expresiones algebraicas. Esta relación tiene lugar al leer las expresiones del sistema de representación simbólico y estar en capacidad de expresar literalmente el contenido de las mismas.

Representación geométrica de expresiones verbales. Cuando se nombra verbalmente una característica o una propiedad, podemos realizar una representación geométrica de la misma (por ejemplo, la mitad de un rectángulo es un triángulo).

Traducciones y transformaciones entre los sistemas de representación

Hemos identificado algunas transformaciones sintácticas invariantes —como es el caso de la fórmula para el cálculo del área de los cuadrados que se puede expresar como $A = l \times l$ o bien $A = l^2$ —. Estos son signos de expresiones algebraicas dentro del sistema de representación simbólico. En el sistema de representación geométrico, se observa una transformación sintáctica invariante, cuando se establecen diversas formas de descomposición de un polígono, dado que el área de la figura no varía con respecto al número de partes en que se divida.

1.4. Fenomenología

El cálculo de áreas por el método de descomposición y recomposición es de gran utilidad en múltiples actividades. Por esta razón, su análisis fenomenológico es extenso. Freudenthal (1983) señala que el concepto de área es uno de los más básicos y profundos del discurso matemático. Pero, al situarse en un nivel cognoscitivo muy superior, se requieren procesos sofisticados para su formación y propone algunas aproximaciones a dicho concepto a través de técnicas que consideran aspectos cualitativos y cuantitativos de las figuras.

Presentamos un listado de fenómenos que dan sentido al tema y los organizamos teniendo en cuenta las características estructurales que comparten, de acuerdo con unos contextos que se refieren al modo en que se usan los conceptos en una situación dada.

Contexto medir

Los siguientes fenómenos se refieren al problema ¿cuánto mide?

- ◆ Material necesario para cubrir o construir una superficie plana de forma poligonal.
- ◆ Cubrimiento de las áreas de un campo deportivo con cuadriláteros de grama.
- ◆ Área bajo la curva en una función.

Contexto repartir

Los siguientes fenómenos se refieren al problema ¿cómo repartir el espacio en zonas iguales?

- ◆ Parcelación de un terreno o lote para sembrados.
- ◆ Cantidad de estudiantes que se pueden asignar a un aula dependiendo de la relación área-estudiante, de acuerdo con la normatividad vigente.
- ◆ Repartición de una chocolatina en tabletas.

Contexto transformar

Los siguientes fenómenos se refieren al problema ¿cómo aprovechar al máximo el área que tengo?

- ◆ Optimización de la tela necesaria para la elaboración de un vestido empleando patrones.
- ◆ Cantidad y costo mínimos de pintura necesaria para cubrir una superficie.
- ◆ Construcción de mosaicos y teselados.
- ◆ Composición de figuras dadas con Puzzles o Tangram.

Contextos y subestructuras

La tabla 1 contempla las subestructuras relacionadas con los contextos establecidos para el cálculo del área. Entendemos las subestructuras como partes de la estructura conceptual que tienen identidad propia y que surgen de la acción a realizar (medir, repartir o transformar).

Tabla 1

Relación entre contextos y subestructuras

Contexto	Subestructuras
Medir	Relaciones geométricas
Repartir	Aditividad
Transformar	Romper y rehacer

Las siguientes son algunas de las relaciones entre los contextos y las subestructuras: medir por medio de relaciones geométricas generales a partir de dimensiones lineales (distribuir una finca entre los herederos, midiendo los linderos); repartir utilizando un patrón de medida de superficie que puede subdividirse hasta recubrir el área en su totalidad (cubrir un campo de fútbol utilizando piezas iguales de grama); repartir dividiendo en partes iguales (diseñar el plano de un conjunto residencial, repartiendo un lote en áreas de construcción con las mismas características); repartir valorando la superficie y prescindiendo de instrumentos de medida (estimar cuántos árboles puedo sembrar en una parcela); y transformar rompiendo y rehaciendo (armar figuras diferentes con piezas de un Tangram).

Situaciones

El estudio PISA clasifica las situaciones en personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005). Presentamos, en la tabla 2, un esquema que relaciona los fenómenos del cálculo de áreas, con su contexto, sus subestructuras matemáticas y sus situaciones.

Tabla 2
Relaciones entre contextos, subestructuras, situaciones y fenómenos

Contexto	Subestructura	Situaciones				Fenómenos
		P	E	PU	C	
Medir	Relaciones geométricas			✓		Repartir una finca entre los herederos.
					✓	Determinar el área frontal de un vehículo de fórmula uno para mejorar su aerodinámica.
		✓				Embaldosar la superficie de una habitación rectangular.
Repartir	Aditividad		✓			Repartir una chocolatina por tabletas.
				✓		Ubicar estudiantes dentro del salón según normativa de espacios.
Transformar	Repartir y rehacer		✓			Componer figuras con Tangram.

Nota: P = personales; E = educativas o laborales; PU = públicas; C = científicas

2. ANÁLISIS COGNITIVO

Gómez (2007) caracteriza el análisis cognitivo como un procedimiento mediante el cual “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (p. 56). Estas hipótesis son posibles trayectorias que el estudiante puede seguir en su construcción de conocimiento y se pueden establecer a distintos niveles. En este apartado, describiremos, analizaremos y organizaremos las expectativas de aprendizaje en dos niveles: objetivos y capacidades. También, mostraremos un estudio de errores y dificultades en los que pueden incurrir los escolares y que podría constituirse en una limitante en su proceso de aprendizaje.

2.1. Objetivos

“Un objetivo de aprendizaje expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación y los fenómenos que organiza” (Gómez, González y Romero, 2014 p. 325). Para el planteamiento de nuestros objetivos, tuvimos en cuenta los referentes curriculares nacionales y los referentes internacionales. Los referentes curriculares colombianos que orientan la planificación de los docentes son los estándares básicos de competencias y nuestro tema se sitúa en el desarrollo del estándar “cálculo de áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos”, correspondiente al

nivel de los grados sexto a séptimo (Ministerio de Educación Nacional (MEN), 2006 p. 84). Además de referentes nacionales, tuvimos en cuenta las siguientes competencias PISA propuestas por la OCDE (2003, pp. 41-42): pensar y razonar, argumentar, comunicar, plantear y resolver problemas, representar, y el uso de herramientas y recursos. Luego del análisis de los estándares y las competencias, planteamos los siguientes tres objetivos.

Objetivo 1. Descomponer y recomponer polígonos en partes diferentes mediante transformaciones de romper y rehacer que permita simplificar el cálculo del área por aditividad.

Objetivo 2. Diseñar estrategias que involucren el reconocimiento de regularidades para calcular el área de polígonos por descomposición y recomposición.

Objetivo 3. Calcular áreas de figuras usando el método geométrico de descomposición y reconfiguración por complementariedad.

2.2. Tareas

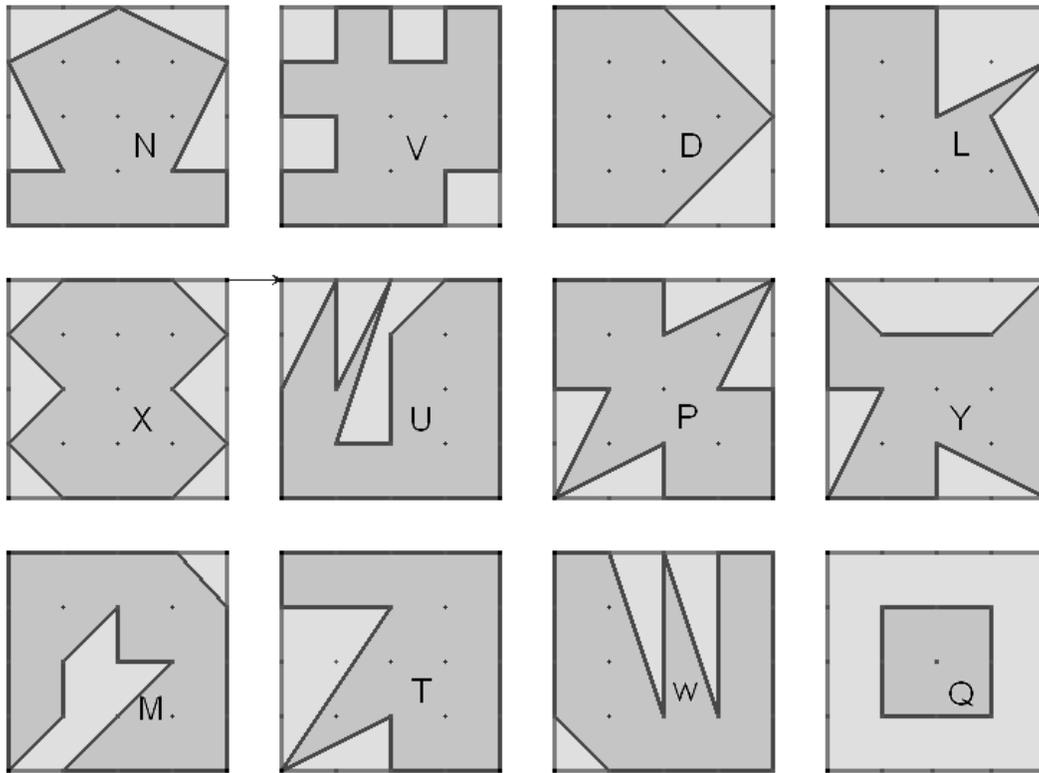
Para caracterizar los objetivos, diseñamos la tarea El tangram para el objetivo 1, las tareas La herencia y El paralelogramo para el objetivo 2 y la tarea El cultivo para el objetivo 3. Ejemplificaremos el diseño por medio de la tarea El cultivo. Las demás tareas se encuentran en el anexo 1.

Tarea El cultivo (primera parte)

Analicen la siguiente situación y respondan las preguntas a partir de la figura asignada a su grupo por el maestro (tiempo máximo: 10 minutos).

Don Pedro tiene un terreno de forma cuadrada y quiere sembrar papa. Sin embargo, encontró que una zona no es cultivable porque es muy pedregosa.

Si la zona fértil corresponde a tres cuartos ($\frac{3}{4}$) del área total y posee una cerca construida en forma de polígono, debe establecerse cuáles de los siguientes dibujos podrían corresponder al terreno del agricultor.



Dibujen en el espacio correspondiente la figura que les fue asignada y decidan si la figura podría ser un plano del terreno de Don Pedro. Justifiquen su respuesta.

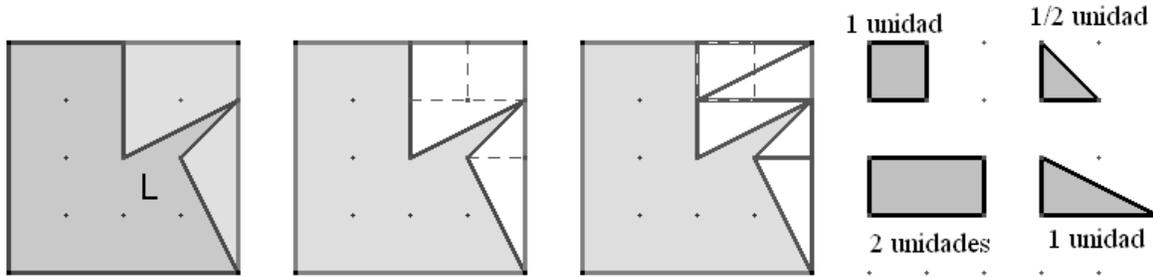
Figura analizada	Justificación

Cuando el profesor lo indique, expliquen ante todos sus compañeros lo que lograron analizar sobre la figura. En caso de no poder llegar a la respuesta, indiquen qué dificultades encontraron.

Tarea El cultivo (segunda parte, verificación)

Lean y analicen el ejemplo dado a continuación y luego intenten aplicar un procedimiento similar para verificar los resultados obtenidos para su figura (tiempo: 40 minutos).

Sebastián tiene la razón cuando dice que la figura L no podría ser el terreno de Don Pedro. Para justificarlo hizo varios dibujos y lo explicó por escrito.



Tracé tres líneas auxiliares para descomponer en partes diferentes una zona.

Me di cuenta que hay cuatro triángulos congruentes y uno más pequeño.

Fijé una unidad cuadrada de medida para calcular áreas.

Vi que un triángulo cabe dos veces en el rectángulo.

Calculé el área de la zona menor, que es de cuatro unidades y media (4,5 unidades cuadradas).

Para calcular el área de la zona fértil, usé el método de complementariedad de las formas.

Conclusión: el terreno pedregoso no es un cuarto del total.

2. A partir de lo encontrado por Sebastián respondan a las siguientes preguntas.

- ¿Cuántas unidades cuadradas tiene el terreno total de Don Pedro?
- ¿Cuántas unidades cuadradas tiene la zona cultivable en la figura L?
- ¿Cómo comprobar que la razón entre el área fértil y la total no son de $\frac{3}{4}$?

3. De forma similar a la utilizada por Sebastián, expliquen en la siguiente tabla el procedimiento que utilizaron para calcular el área de la zona fértil.

Figura analizada	Explicación

4. Dibujen, en la trama ampliada de puntos dada por el profesor, la descomposición realizada para resolver la figura. Péguenla en el tablero y, cuando corresponda, el expositor explicará (en 2 minutos) ante todos sus compañeros la verificación realizada.

Las cuatro tareas siguen un mismo formato, cuyo encabezado se puede ver en el anexo 1. Los estudiantes deben conformar grupos de 3 integrantes y asumir diferentes roles en el desarrollo de cada tarea. De esta forma, pretendemos favorecer el trabajo cooperativo. En la guía también encontramos la descripción de las funciones de cada rol, los materiales a utilizar y la instrucción que la guía debe ser devuelta al finalizar la clase. Las guías también cuentan con espacios para el desarrollo de los procesos y para escribir las respuestas.

2.3. Capacidades

Gómez et al. (2014) definen capacidad como una expectativa del profesor sobre el conjunto de conocimientos elementales y de procedimientos rutinarios que los estudiantes tienen que aprender sobre un tema de las matemáticas escolares. Las capacidades corresponden al nivel cognitivo más bajo. Una capacidad aislada se manifiesta mediante la conducta observable de un estudiante cuando ejecuta una tarea rutinaria asociada a un tema matemático (p. 3). Para alcanzar un objetivo, un estudiante debe activar y desarrollar un cierto número de capacidades que listamos y clasificamos. Como ejemplo, en la tabla 3, relacionamos el listado de capacidades asociadas a la primera parte de la tarea El Cultivo.

Tabla 3
Listado de capacidades primera parte de la tarea El cultivo

C	Descripción
Para visualizar	
C1	Reconoce información codificada en la representación geométrica de un polígono (como marcas, ángulos especiales, congruencia o desigualdad en sus lados, entre otros)
C4	Identifica diferencias entre figuras en cuanto a su forma y propiedades, usando diversos materiales y recursos
C5	Identifica diversas maneras en que se puede descomponer un polígono
C8	Reconoce figuras poligonales congruentes en distintas posiciones
Para comunicar	
C11	Lee e interpreta correctamente el enunciado del problema y discrimina los datos que le son útiles para calcular área de polígonos
C12	Comunica correctamente los procedimientos usados para rotar o trasladar figuras geométricas
C13	Traduce del lenguaje matemático al lenguaje verbal la solución del problema
C14	Registra las características principales de una descomposición realizada
C16	Expresa ante el gran grupo conjeturas que parten de la visualización preliminar de una figura
Para razonar	
C21	Determina el área de un polígono a partir de su descomposición en otros polígonos
C22	Establece una relación parte-todo entre un polígono y las partes en que se descompone para expresar su área mediante una fracción
Para realizar procedimientos	
C27	Cuadrícula o triangula polígonos usando tramas de puntos, isométricas o cuadradas
C31	Determina el valor del área del polígono inicial a través del cálculo del área del nuevo polígono obtenido
C34	Representa en el Geoplano físico o virtual figuras geométricas
C35	Reconfigura por complementariedad las formas en que se ha descompuesto un polígono

Nota: C = capacidad

2.4. Dificultades

Para González y Gómez (2013), las dificultades se asocian a los conocimientos parciales que impiden o entorpecen el aprendizaje. Para la identificación de dificultades, tomaremos las dos primeras categorías de las cinco propuestas en este documento, por estar directamente relacionadas con el contenido matemático.

Dificultades asociadas con la complejidad de los objetos matemáticos

Teniendo como referente el cálculo de áreas de polígonos, las dificultades que encontramos se asocian con la comprensión, utilización y comunicación de los objetos matemáticos. En cuanto a la comprensión, se observa que las magnitudes espaciales, tales como la superficie, constituyen un campo conceptual propio, cuya particularidad reside en el hecho de que participa tanto de la geometría como de las estructuras aditivas y multiplicativas (Chamorro y Belmonte, 1991). Así mismo, el concepto de área requiere de procesos sofisticados para su formación, por la variedad de enfoques para la constitución del objeto mental. Para nuestra unidad didáctica, las dificultades identificadas D2, D4 y D6, de la tabla 4, pertenecen a esta categoría.

Dificultades asociadas con los procesos propios del pensamiento matemático

Las dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica de la matemática y en las rupturas entre el aspecto deductivo formal y la capacidad para seguir un argumento lógico. El cálculo del área de polígonos es un proceso en el que deben considerarse la percepción, la identificación de propiedades geométricas en las figuras y las transformaciones que lo dejan invariante. El proceso de descomponer y recomponer es una transformación que se aplica para calcular el área de una región. Los problemas de reconfiguración pueden resolverse empleando argumentos lógicos variados que se derivan de factores que minimizan o aumentan la complejidad de ver sobre una figura. Entre ellos están los que menciona (Marmolejo, 2010).

Que el fraccionamiento sea dado sobre la figura al inicio o que deba ser encontrado, que el reagrupamiento de las partes en que ha sido dividida la figura forme una configuración convexa o no-convexa, el número de rotaciones o traslaciones de las subfiguras claves para lograr una adecuada colocación, que una misma parte de una figura deba entrar simultáneamente en dos reagrupamientos intermedarios a comparar, que sólo se deba tener en cuenta las características del contorno de la figura a reconfigurar y que las partes en que está dividida la figura a reconfigurar deban ser desplazadas al interior de la figura de inicio, o al contrario que algunas deban salir fuera de él y la existencia o no de una diferencia entre tono y grosor presente en las unidades de dimensión 1 que constituyen una figura y las líneas que conforman el fondo cuadrícula sobre el cual es representada (p. 16).

Las dificultades D1, D3, D5 y D7 de la tabla 4 pertenecen a esta categoría.

2.5. Errores

En la tabla 4, presentamos los posibles errores en los que pueden incurrir los escolares y que asociamos a las capacidades y dificultades descritas anteriormente. Las organizamos de acuerdo con la clasificación de Hoffer (1981).

Tabla 4

Dificultades y errores relacionados con la primera parte de la tarea El cultivo

Error	Descripción	Clasificación Hoffer
D1. Dificultad para reconocer un polígono como unidad patrón de medida para calcular áreas		
E3	Relaciona de modo incorrecto el proceso geométrico con el numérico para calcular el área total de un polígono	SP
D2. Dificultad para interpretar y usar el lenguaje y los términos técnicos del problema		
E8	Traduce incorrectamente del lenguaje verbal al lenguaje matemático problemas del cálculo de áreas de polígonos	C
E9	Interpreta incorrectamente un resultado al pasar del lenguaje matemático al verbal	C
D7. Dificultad para manipular y/o aplicar transformaciones a los polígonos y/o a las partes en que se descomponen		
E20	Asume que no puede realizar modificaciones posicionales de las partes en que se descompone un polígono para luego recomponerlo	R
E24	Realiza una comprobación del problema pero se equivoca en los argumentos para justificar el resultado	
E28	Registra parcialmente los procesos realizados o deja preguntas de la guía sin resolver	

Nota: E = Error, = comunicar, V = visualizar, R = representar, RP = resolver problemas, SP = realizar procedimientos.

2.6. Caminos de aprendizaje

Teniendo en cuenta las capacidades y los errores, se diseñan hipótesis de las rutas que puede seguir un estudiante en la consecución del objetivo. Esa ruta se denomina camino de aprendizaje de una tarea y es una sucesión de capacidades que el profesor prevé que sus estudiantes activarán al resolver la tarea, junto con los errores en los que pueden incurrir. Diseñamos estos caminos de aprendizaje con base en las tareas. Los ejemplificamos en la figura 3 con la tarea El cultivo.

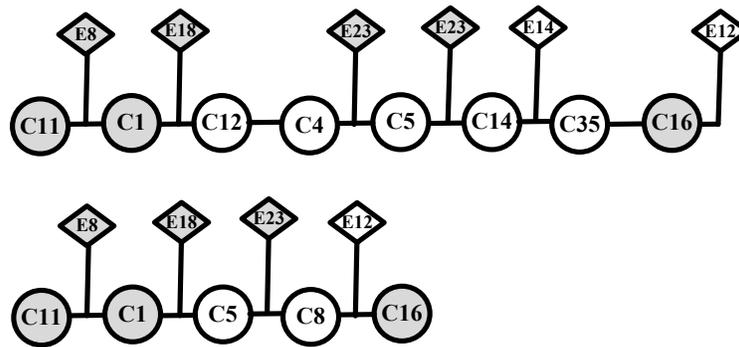


Figura 3. Caminos de aprendizaje de la primera parte de la tarea El cultivo

Como mostramos en la figura 3, los círculos contienen las capacidades listadas tabla 3 y los rombos presentan los errores de la tabla 4 asociados al desarrollo de la tarea.

Para construir el siguiente grafo de secuencias de capacidades, tuvimos en cuenta los posibles caminos de aprendizaje que podían seguir los estudiantes para alcanzar el objetivo propuesto. Una secuencia de capacidades hace referencia a un procedimiento concreto dentro del proceso de resolución de una tarea que es posible distinguir y caracterizar. Asimismo, puede tener asociados ciertos errores propios del procedimiento al que se refiere (figura 4).

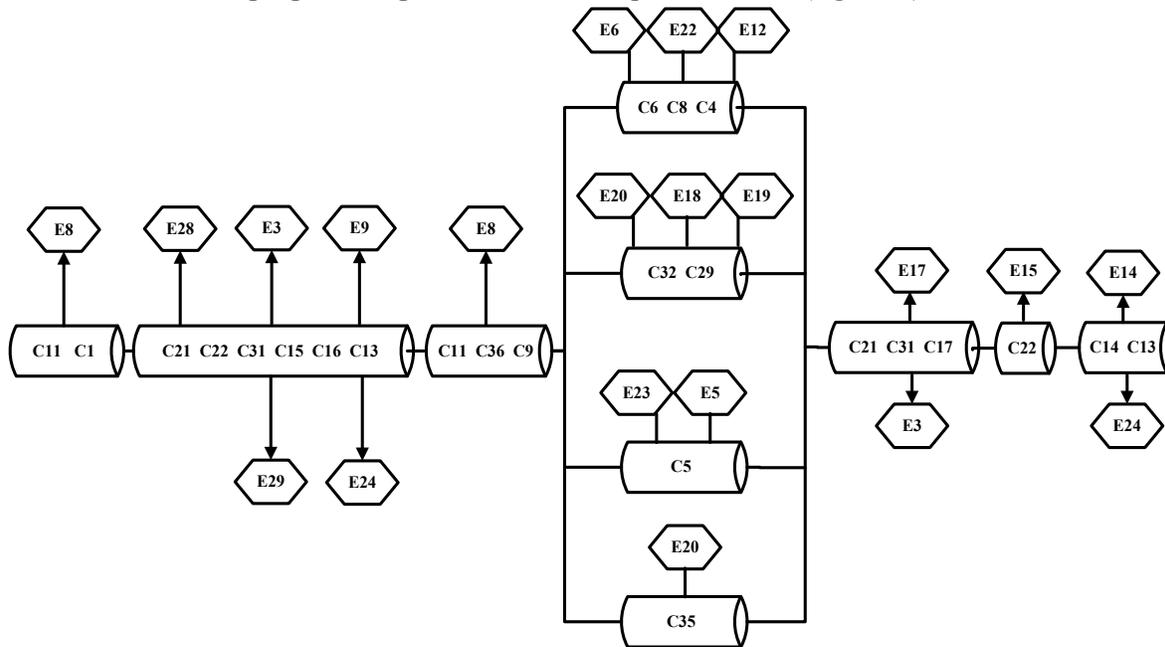


Figura 4. Secuencias de capacidades tarea El cultivo

En la figura 4, de izquierda a derecha, la primera secuencia de capacidades (representada en un cilindro) corresponde a la relación que puede encontrar el estudiante entre los datos del enunciado y los elementos de la figura geométrica dada. La segunda secuencia de capacidades concierne a la posible solución que proponen los estudiantes. La tercera secuencia de capacidades está rela-

cionada con la identificación de propiedades de las figuras y su posible descomposición. La cuarta secuencia de capacidades hace referencia al cálculo de áreas por complementariedad y otros métodos. En la quinta secuencia de capacidades los estudiantes deben establecer una razón entre las áreas calculadas. La última secuencia de capacidades implica llegar a acuerdos y socializar resultados.

3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. En este apartado, describimos los materiales que usamos en las tareas, la configuración de las sesiones de clase, las fases y los componentes de las tareas, y ejemplificamos el análisis de una tarea.

3.1. Materiales en las tareas

Descomponer y recomponer una figura geométrica en sus partes constituyentes son operaciones características de la visualización. Arcavi describe la visualización como

la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (2003, p. 52)

Así, resulta importante trabajar con diversidad de materiales y recursos para un tema tan complejo como el área. Esto facilita a los estudiantes encontrar significado a tan diversos procedimientos para su cálculo. Decidimos utilizar cuatro tipos de materiales a partir de un listado de posibles aplicaciones de recursos para nuestras tareas.

Applets. Los applets son aplicaciones digitales interactivas, que le dan un atractivo y valor añadido a los materiales geométricos. El applet utilizado en la actividad es un geoplano inteligente.

Tramas en papel. Las tramas de papel son un recurso económico y de interés didáctico para trabajar aspectos geométricos. Están compuestas por tramas (o mallas) de puntos isométricas, ortométricas, circulares o hexagonales.

Geoplano. Existen de tres tipos de geoplanos: ortométrico, circular, e isométrico o de trama triangular. Su interés didáctico (sean dibujados, analógicos o digitales) reside en que son modelos con una geometría finita.

Tangram. El tangram es un rompecabezas formado por piezas poligonales que se obtienen al diseccionar una figura plana. Su finalidad es la disposición de las piezas para formar diferentes siluetas o tangramas.

3.2. Sesiones

Plantemos siete sesiones para el diseño previo de nuestra unidad didáctica, que describimos a continuación.

Primera sesión. En la primera sesión, explicamos a los escolares la forma cómo se iba a desarrollar la unidad didáctica, dimos a conocer los criterios de logro y el matematógrafo (que explicamos más adelante) y los instruimos en el diligenciamiento de estos instrumentos. Luego realizamos el test diagnóstico. Con base en los resultados de este test, iniciamos el proceso de realimentación que comprendía la proyección de un video y la realización de un concurso relacionado con la definición, clasificación y propiedades de los polígonos.

Segunda sesión. Iniciamos la segunda sesión con la presentación y explicación del sistema de evaluación continuando con el desarrollo de la tarea El tangram, asociada al objetivo 1.

Tercera sesión. En la tercera sesión, realizamos la realimentación de la tarea El tangram y aplicamos la tarea La herencia, que, junto con la tarea El paralelogramo, buscan contribuir al logro del objetivo 2.

Cuarta sesión. En la cuarta sesión, iniciamos con la realimentación de la tarea La herencia y desarrollamos la tarea El paralelogramo. Consideramos esta tarea como especial, por contribuir al proceso evaluativo y de realimentación, puesto que las actividades planeadas involucran aspectos de descomposición y recomposición en partes iguales y diferentes, que se habían contemplado en las dos tareas anteriores. Finalizamos con la aplicación de la evaluación parcial.

Quinta sesión. Empezamos la quinta sesión con la realimentación de la tarea El paralelogramo y de la evaluación parcial. Luego, proyectamos una presentación explicativa del método de complementariedad y finalizamos con el desarrollo de la tarea El cultivo que busca contribuir al logro del objetivo 3.

Sexta sesión. Empleamos la sexta sesión para realizar una reflexión sobre lo aprendido; efectuamos una realimentación acorde con las dificultades detectadas; y preparamos a los estudiantes para la presentación del examen final que aplicamos seguidamente. Finalizamos la sesión con el diligenciamiento del cuestionario final de evaluación.

Séptima sesión. La séptima sesión fue de evaluación de la unidad didáctica con los escolares. En ella, socializamos los resultados del examen y cuestionario final.

Los escolares diligenciaron sus diarios en los últimos 15 o 20 minutos de cada sesión de tarea. Esta información fue recogida para ser analizada. Diligenciamos el diario del docente al finalizar cada sesión. Describimos estos dos instrumentos más adelante. A los estudiantes que no alcanzaron el nivel básico de desempeño, les asignamos trabajos complementarios de refuerzo y nivelación con ayuda del video de la página web Aula 365.

3.3. Fases de las tareas

Diseñamos cada tarea para ser ejecutada por partes, que denominamos fases. En la tabla 5, a manera de ejemplo, describimos la fase 1 de la tarea El cultivo. En esta fase, se realiza la realimentación de la tarea y de la evaluación parcial. Las demás fases de cada una de las tareas se encuentran en el anexo 8.

Tabla 5
Fase 1 de la tarea El cultivo

Componentes	Descripción
Actividades de aprendizaje	Lectura de dos diarios de los estudiantes. Entrega de resultados de la evaluación parcial. Revisión procedimientos cálculo de áreas.
Reacción que se espera de los estudiantes	Valoración por el diligenciamiento de sus diarios al ver que sus opiniones y expectativas afectivas son tenidos en cuenta. Participación en el proceso de resolver dudas e inquietudes.
Enseñanza y orientación del profesor	Escuchar y responder las inquietudes de los estudiantes. Explicación de preguntas que tuvieron mayor índice de dificultad en los estudiantes.
Tiempo Estimado	15 minutos.
Materiales y Recursos	Diarios de los estudiantes, hojas de evaluación corregidas, tablero y marcador.
Contenido matemático	Cálculo de áreas por descomposición en partes iguales o diferentes y posterior recomposición.
Agrupamiento e interacción	Dos estudiantes seleccionados por el docente pasan a leer su diario. Seguidamente el docente se dirige al gran grupo para resolver inquietudes sobre la evaluación parcial.

3.4. Componentes de una tarea

Para mostrar los componentes de las tareas, tomaremos como ejemplo la tarea El cultivo.

Formulación

La tarea El cultivo tiene tres apartados. En el primer apartado, planteamos un interrogante que introduce el análisis del problema central: establecer cuáles de las figuras podrían representar un cultivo dadas ciertas condiciones (hay varias posibles soluciones). Para este fin, se asignan las figuras de tal manera que cada grupo tenga que analizar una diferente en los primeros 15 minutos, pero se aclara que el propósito es establecer conjeturas sobre lo que observan y aventurarse a decir si creen o no que el terreno cumple la condición dada.

En el segundo apartado, los escolares tendrán la oportunidad de verificar sus conjeturas y las de sus compañeros, al tener que dar cuenta de ellas. Allí presentamos el razonamiento de un niño (Sebastián), con el que se pretende dar pistas sobre el procedimiento a seguir. Los estudiantes deben leer, analizar las figuras, descomponerlas, probar soluciones, justificar y tabular datos.

En el tercer apartado, los estudiantes confrontan ideas con otros equipos, argumentan, proponen nuevas alternativas, concluyen y elaboran un informe. La actividad del profesor es presentar la tarea, hacer seguimiento, propiciar la discusión sobre resultados, dar pistas y evaluar.

Metas

Esperamos que los escolares sean capaces de visualizar, calcular áreas de dos zonas en cada figura mediante descomposición, usar estrategias de conteo y reconfiguración por complementariedad, comparar áreas, explicar procedimientos, representar geoméricamente, calcular razones, ordenar las áreas de los terrenos, tabular datos, y proponer nuevas alternativas.

Otros componentes

Los materiales y recursos empleados fueron guías de trabajo, tramas cuadradas, geoplanos, bandas elásticas, lápiz, colores, papel, regla, y modelos de las figuras en formato grande o diapositivas. El contenido matemático trata de la descomposición de polígonos, cálculo de áreas, razón entre magnitudes. La tarea pone en juego los siguientes sistemas de representación: geométrico, numérico, simbólico, tabular, verbal y manipulativo. La situación de aprendizaje se ubica en el contexto transformar y es de tipo pública.

Proponemos agrupar a los estudiantes en pequeños grupos. Planteamos que interactúen de forma bilateral con el profesor y con el gran grupo. En el intercambio entre equipos, previmos que algunos estudiantes hicieran propuestas que no cumplen todas las condiciones como, por ejemplo, que la figura que representa el área cultivable no tenga el área dada o no sea un polígono. El intercambiar soluciones puede ayudar a debatir al respecto.

3.5. Análisis de una tarea

En el análisis de una tarea, se debe tener en cuenta la coherencia entre los análisis previos, que se justifica por medio de las previsiones. El análisis de la tarea también incluye establecer su complejidad y su significatividad. A continuación, presentamos el análisis de la tarea El cultivo que presentamos anteriormente.

Previsiones

Al imaginar la actuación de los estudiantes, establecimos los conocimientos y procedimientos que la tarea requería. Con esa información, redactamos un listado de capacidades y diseñamos unos posibles caminos de aprendizaje para la tarea. Por último, establecimos las secuencias de capacidades correspondientes. Describiremos todos estos elementos más adelante.

Complejidad

La tarea El cultivo se ubica en el nivel de conexión de la competencia de representación PISA. Analizar algunas de las figuras demandará decodificar, codificar e interpretar formas de representación familiares, como es el caso de las figuras V y Q. En un nivel de reflexión de la competencia PISA de formulación y resolución de problemas, se requiere una comprensión que conlleve a encontrar diversas soluciones, diseñar estrategias y encontrar procedimientos sencillos que aporten a la solución, dependiendo de las características de la figura.

Significatividad

La tarea El cultivo es significativa porque parte de situaciones conocidas (terrenos de cultivos) en las que es razonable emplear el contenido matemático que se requiere; plantea un reto que los motiva a actuar y a aprender (asignación de imágenes diferentes a cada grupo); requiere usar sa-

beres previos y permite reconocer si la solución aportada es o no adecuada (en la verificación realizada por los grupos).

4. DESCRIPCIÓN DEL ANÁLISIS PREVIO

En este apartado, explicamos cómo modificamos las tareas desde su concepción inicial hasta la implementación y justificamos esas modificaciones. El primer borrador de las tareas contenía tres tareas que clasificamos como mostramos en la tabla 6.

Tabla 6
Clasificación de las tareas

Criterio	Tarea	Enunciado
Dividir en partes iguales	Desafíos matemáticos	En cada una de las siguientes figuras, trazar las líneas que sean necesarias para que se divida dicha figura en partes exactamente iguales (en forma y tamaño) según se indique para cada caso.
Dividir en partes iguales por aprovechamiento de regularidades	La herencia	Un padre desea dividir equitativamente dos terrenos entre sus cuatro hijos, de manera que a cada uno le toque un terreno de igual forma y tamaño. ¿Cómo podría hacerlo? A partir de los planos de los terrenos se ha identificado la forma de los mismos, que se ilustran a continuación.
Romper y rehacer	El tangram	Utiliza el triángulo más pequeño del tangram como unidad de medida (figura 1) para calcular el área de las figuras 2 y 3. ¿Qué puedes decir de las áreas de estas figuras? Registra los pasos y procesos que seguiste para armar las figuras 2 y 3. Diseña tu propia figura y prepárate a explicar su elaboración a tus compañeros.

En la tabla 6, mostramos la formulación inicial de las tareas. El diseño de las tareas evolucionó gracias al análisis didáctico. El primer cambio surgió del análisis de la estructura conceptual y la necesidad de alcanzar, con las tareas, los tres objetivos propuestos. Encontramos que no estábamos logrando el objetivo 3 (método de complementariedad) y que las tareas El tangram y La herencia apuntaban a las mismas expectativas de aprendizaje (aprovechamiento de regularidades).

Cuando iniciamos el diseño de los posibles caminos de aprendizaje, evidenciamos que algunas capacidades no se activaban. Hicimos modificaciones al listado de capacidades y de errores. Ubicamos en desafíos matemáticos la tarea Hexágono, pero, al analizarla, evidenciamos que continuaba la falencia, por lo que la descartamos. Finalmente, diseñamos la tarea El cultivo y realizamos su grafo de secuencias de capacidades, en el que constatamos que sí cumplía con nuestro requerimiento y activaba las secuencias de capacidades asociadas al objetivo 3.

A partir de allí, las tareas que seleccionamos son las que relacionamos en el numeral 2.2 de este apartado. Las tareas evolucionaron constantemente como consecuencia de la unificación del formato, del mejoramiento de la redacción, de los ajustes de los tiempos de implementación y del trabajo cooperativo, de la inclusión de materiales, así como de los cambios en los caminos de aprendizaje.

5. JUSTIFICACIÓN DEL DISEÑO PREVIO

Para la justificación de nuestro diseño previo, seguiremos referenciando la tarea El cultivo para ejemplificar cómo se hace el análisis de los aportes de las tareas a los objetivos, a los errores y al nivel de complejidad.

5.1. Contribución de las tareas a los objetivos

Iniciamos el análisis de la contribución de las tareas a los objetivos con el análisis de los caminos de aprendizaje y el diseño de un grafo de objetivos como el que mostramos en la figura 5. Esto nos permitió evidenciar el número de capacidades que se ponían en juego y si realmente se lograba el objetivo.

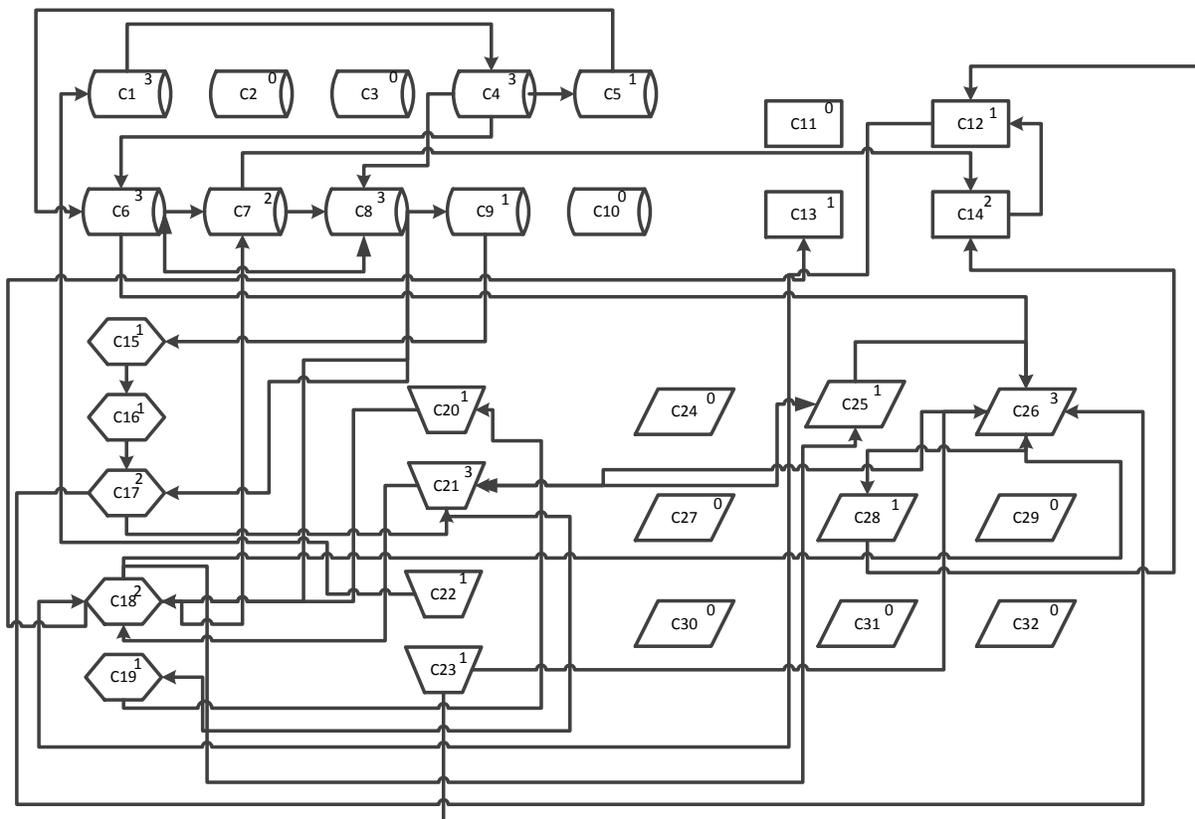


Figura 5. Grafo de secuencias de capacidades del objetivo 3 asociado a la tarea El cultivo

Según la clasificación que realizamos al listado de capacidades, en la figura 5, las capacidades representadas con la figura del cilindro corresponden al grupo de visualizar, las representadas con el rectángulo corresponden al grupo de comunicar, las del hexágono al grupo de razonar, las del trapecio al grupo de resolver problemas y las del paralelogramo al grupo de realizar procedimientos.

Observamos en la figura 5 que las capacidades relacionadas con la meta de la tarea (C1, C11, C16, C21, C22, C31, C34, C35) se repiten con mayor frecuencia, por cuanto pretenden que el estudiante use diferentes métodos para calcular áreas de polígonos activando conocimientos previos. Las capacidades que específicamente se asocian con el cálculo de área por complementariedad son C1, C22, C31 y C35. Su activación redundante en la consecución del objetivo 3. Finalmente, comparamos las capacidades con las competencias planteadas por PISA. Como puede observarse, algunas competencias son transversales a varias capacidades, por lo que se mencionan en varias oportunidades. Presentamos la relación entre capacidades y competencias en la tabla 7.

Tabla 7
Relación entre capacidades y competencias PISA

Capacidades	Competencias
C1 a C10	Representar
C11 a C14	Comunicar
C11, C13	Representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
C12	Argumentar
C10, C15 a C19	Pensar y razonar
C19	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
C20, C22 y C23	Plantear y resolver problemas
C23	Argumentar
C21 y C24 a C32	Plantear y resolver problemas
C28, C30	Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones

Con base en el anterior análisis de la relación entre las capacidades y las competencias PISA para cada una de las tareas y al observar que el número de capacidades empleadas en la solución de cada una de las tareas es significativamente alto (cercano al 70%), podemos concluir que las tareas contribuyen en gran medida al desarrollo de las competencias. Destacamos que las que más aparecen son representar y comunicar.

5.2. Contribución de las tareas a la superación de los errores

En el desarrollo de las tareas, consideramos que los estudiantes pueden incurrir en algunos errores, como presentamos en la tabla 8, para la tarea El cultivo. Hemos agrupado los errores en dos

categorías (de diagnóstico y de superación de dificultades) y los hemos asociado a las competencias PISA.

Tabla 8

Contribución de la tarea a los errores

Errores	E3	E8	E9	E15	E23	E19	E24	E29	E25	E28	E34
Diagnóstico	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Superación	✓	✓	✓	✓		✓		✓		✓	
Competencias PISA	EO	C	C	FRP	PR	R	C	PR	EO	EO	EO

Nota: PR = pensar y razonar, C: comunicación, FRP = formulación y resolución de problemas, R = representación, EO = empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico formal y técnico.

Se deduce que, en el desarrollo de la tarea, se prevé diagnosticar y superar la mayoría de los errores. Esto implica que los estudiantes deberán corregirlos para continuar con la actividad.

La importancia del diseño previo radica en el hecho de ser el punto de partida de la unidad didáctica. Este diseño previo dio lugar al análisis e implementación de las tareas. La descripción detallada de las tareas se encuentra en los anexos 1 y 10.

3. ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

Según Romero y Gómez (2013), el interés del análisis de actuación se centra en la planificación del seguimiento del aprendizaje de los escolares y del propio proceso de enseñanza durante la implementación de lo planificado en el análisis de instrucción, con objeto de comparar las previsiones que han hecho en dicha planificación con lo que sucederá cuando esta se lleve a cabo en el aula” (p. 1). A continuación, describimos los instrumentos y procedimientos que diseñamos para la evaluación, al tomar como base los principios de la evaluación formativa.

1. INSTRUMENTOS Y PROCEDIMIENTOS DE EVALUACIÓN

Los instrumentos y procedimientos que describimos a continuación nos permitieron organizar la información obtenida sobre el aprendizaje de los escolares y la enseñanza del profesor.

1.1. Evaluación del aprendizaje de los escolares

La enseñanza basada en los fundamentos del constructivismo requiere que evaluemos permanentemente el proceso de aprendizaje de los estudiantes, al involucrarlos activamente y compartir con ellos, desde el inicio, las metas y criterios de evaluación. El diseño de instrumentos que les permita expresar libremente sus opiniones contribuye en gran medida al análisis de su aprendizaje y al desarrollo de actividades de realimentación.

Diseñamos los siguientes instrumentos de evaluación para nuestra unidad didáctica: (a) evaluación diagnóstica, (b) evaluación diaria, (c) evaluación parcial, (d) tarea especial y (e) examen final. Para la evaluación diagnóstica, programamos una sesión de dos horas para desarrollar en cinco fases. En la primera fase presentamos, el mapa conceptual; en la segunda, aplicamos el test diagnóstico; en la tercera, proyectamos videos para afianzar los conceptos previos; en la cuarta, ejecutamos un concurso para continuar con el refuerzo de propiedades de los polígonos; para finalizar, realizamos la realimentación y enseñamos a diligenciar la ficha del diario del estudiante.

Realizamos una evaluación diaria del desempeño de los estudiantes y del desarrollo de la clase, teniendo en cuenta criterios que consignamos en el diario del profesor, que describimos más adelante.

En la última fase de la sesión de la tarea especial (El paralelogramo), aplicamos la evaluación parcial para verificar el alcance de los objetivos uno y dos. Socializamos los resultados obtenidos al inicio de la siguiente sesión y, de acuerdo con las dificultades detectadas, efectuamos el respectivo proceso de realimentación. En la tarea especial, diseñamos una ficha de observación que presentamos en el anexo 4.

Después de implementar la tarea El cultivo, dedicamos una sesión a la evaluación final, para la que realizamos previamente una realimentación de los conceptos y procesos en los que detectamos dificultades en los escolares. La realimentación a los escolares fue permanente. Buscamos que los estudiantes superaran sus dificultades y comprendieran el método de descomposición y recomposición de polígonos para calcular el área.

Pasamos ahora a describir el diario del profesor, del estudiante y el cuestionario final. El diario del profesor es un instrumento en el que consignamos los aspectos que debemos tener en cuenta para desarrollar la tarea (ficha de previsiones), los que se detectan en la realización de la misma y los ajustes que se deben realizar para una futura aplicación (ficha de observación de la clase). Mostramos los diarios diligenciados para cada una de las tareas en el anexo 4.

El diario del estudiante permite que ellos autoevalúen su aprendizaje. Se compone de dos instrumentos: el esquema de los semáforos (figura 6) y el matematógrafo (figura 7).

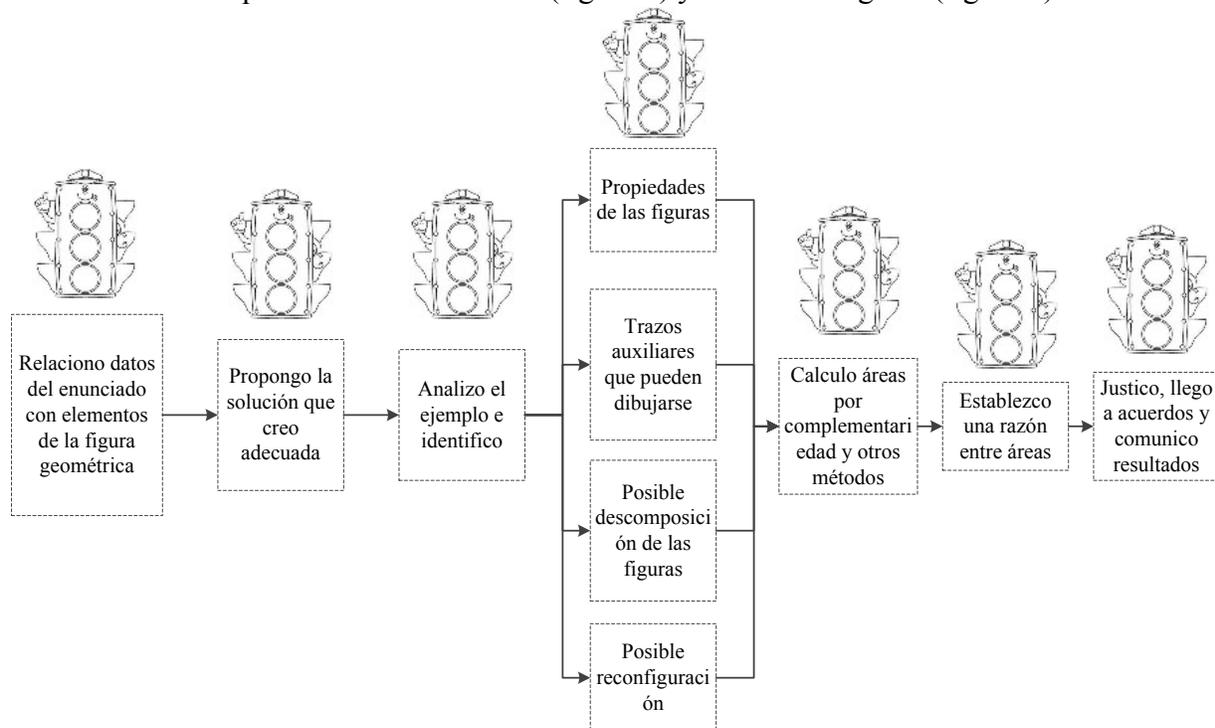


Figura 6. Esquema de los semáforos para el objetivo 3

En el esquema de los semáforos, presentamos a los escolares un grafo de criterios de logro para cada objetivo de aprendizaje. Estos criterios de logro surgen del grafo de secuencias de capacidades del objetivo de aprendizaje. Encima de cada criterio de logro, ubicamos un semáforo que el estudiante debe colorear con rojo, amarillo o verde de acuerdo con su percepción del logro del

criterio. El estudiante colorea con verde cuando considera que logró realizar con éxito lo que le indica el criterio, pinta con amarillo cuando realizó parte de lo que indica el criterio y con rojo cuando no logró realizarlo. En la figura 7, presentamos el matematógrafo.

	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
El tema de la tarea me pareció cercano y familiar	La tarea me pedía que usara conocimientos que ya tenía	Comprendí lo que la tarea me pedía	La tarea me pareció un reto y me sentí motivado para resolverla	Me fue posible reconocer que tan buena fue mi respuesta a la tarea	

Figura 7. Matematógrafo

En el matematógrafo, presentamos cinco aspectos afectivos que el escolar debe señalar con una X o rellenar el círculo, de acuerdo con una escala presentada con íconos que expresan diferentes grados de satisfacción. En este diario, anexamos dos preguntas abiertas: ¿qué fue lo que más te gustó? y ¿qué aspectos se deben cambiar para que la actividad sea mejor?

Para complementar la autoevaluación del escolar, diseñamos un cuestionario final que permite al estudiante expresar su grado de satisfacción con cada una de las afirmaciones relacionadas con su trabajo individual y grupal. En la tabla 9, presentamos el formato que establecimos para ello.

Tabla 9
Cuestionario final

	Indicador	TA	PA	PD	TD
1	Me gusta esta forma de aprender y me gustaría que se repitiera				
2	Tuve cuidado al dividir los polígonos para calcular el área				
3	Propuse formas diferentes para descomponer y recomponer un polígono				
4	Me dispongo siempre a aportarle mis conocimientos a mis compañeros				
5	Escuché a mis compañeros y acepté sus ideas o las rechacé diciéndoles la razón por la que lo hacía				
6	Trabajar en grupo me permite aprender mejor				
7	Comprendí el tema cuando fue socializado ante todo el grado				
8	Logré entender las orientaciones dadas en la guía y expresar mi opinión a mis compañeros				
9	El solucionar una guía con los compañeros y con los recursos dados por el profesor me permite aprender mejor				
10	El grupo pudo llegar a la respuesta con facilidad				
11	El grupo consiguió la respuesta correcta pero no fue fácil				
12	Insistí varias veces hasta encontrar la respuesta correcta				
13	El grupo no pudo encontrar la respuesta correcta				
14	Fui responsable con la función que me correspondió				
15	Fui colaborador con mi grupo de trabajo				

Nota: TA = totalmente de acuerdo, PA = Parcialmente de acuerdo, PD = Parcialmente en desacuerdo, TD = totalmente en desacuerdo.

Aplicamos el cuestionario final en la última sesión. La rúbrica de la evaluación final nos permitió integrar las valoraciones hechas al final de la unidad con los requerimientos de la institución en este aspecto, como lo presentamos en la tabla 10.

Tabla 10
Rúbrica de desempeño de la evaluación final

Desempeño	Indicador	Valor
Superior	Calcula áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición, al emplear procesos de: romper en partes iguales y rehacer, romper en partes diferentes y rehacer, aprovechamiento de regularidades y por complementariedad de las formas.	4.6 – 5.0
Alto	Calcula áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición, al emplear por lo menos tres de los procesos anteriores.	4.0 – 4.5
Básico	Calcula áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición, al emplear por lo menos dos de los procesos anteriores.	3.5 – 3.9
Bajo	Calcula áreas de polígonos por el método de descomposición y recomposición, al emplear uno de los procesos anteriores o no logra calcular el área.	1.0 – 3.4

Los valores cuantitativos expresados en la tabla 10 corresponden a los asignados por el colegio Kirpalamar dentro de su sistema de evaluación de estudiantes.

1.2. Evaluación del diseño e implementación de la unidad didáctica

Para evaluar tanto el diseño como la implementación de la unidad didáctica, consideramos lo que debíamos hacer con respecto al cumplimiento de las fases de cada una de las sesiones. A continuación, mostramos, a manera de ejemplo, la secuencia instructiva para la tarea El cultivo. Presentamos las otras sesiones en el anexo 15.

Contenido. La sesión aborda los siguientes contenidos: descomposición de polígonos, cálculo de áreas por el método de complementariedad de las formas y razón entre magnitudes.

Relación con las sesiones anteriores y posteriores. Esta sesión busca establecer relación con todas las anteriores ya que los estudiantes exploran y comprenden el método de cálculo del área por complementariedad, aplican los demás métodos estudiados, y establecen cuál es el más sencillo o práctico para resolver una figura dada.

Rol del docente. El docente organiza los grupos de trabajo y explica la tarea en general. Luego, asesora los equipos para ayudarlos a encontrar caminos mediante preguntas orientadoras. Procura que el momento de socialización sea propicio para la discusión y analiza junto con los estudiantes la pertinencia de los procedimientos y de las respuestas. Finalmente, promueve en los estudiantes el desarrollo de la creatividad y competencias propositivas, al diseñar otras posibilidades geométricas de distribuir el terreno de don Pedro, según las condiciones planteadas en la tarea.

2. PROCEDIMIENTOS DE ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

A continuación, describiremos los procedimientos que empleamos para el procesamiento y posterior análisis de la información recolectada con los instrumentos de evaluación propuestos.

2.1. Tareas y evaluaciones

Cada una de las tareas y evaluaciones estaban orientadas al alcance de un objetivo en especial. Con esas tareas y evaluaciones, recogimos información de tipo cognitivo al tener evidencias sobre la activación de capacidades, ocurrencia de errores y presentación de dificultades en los escolares. Determinamos la activación total, activación parcial o no activación de las secuencias de capacidades de acuerdo con la rúbrica diseñada. Luego, por conteo y promedios, obtuvimos un porcentaje de activación de cada secuencia de capacidades. Ejemplificamos los criterios de activación con la secuencia de capacidades 1 (Interpreto y conjeturo. Relaciono datos del enunciado con elementos de la figura geométrica. Propongo la solución que creo adecuada) del objetivo 3. Consideramos que el escolar activa totalmente esa secuencia de capacidades si lee, mira las figuras dadas, dibuja la que le correspondió y conjetura si cumple o no la condición dada. La activa parcialmente, si lee, mira las figuras dadas, dibuja la que le correspondió y pregunta al docente para clarificar lo que debe hacer. Y, consideramos que no la activa, si no entiende lo que lee e inicia el trabajo por imitación de lo que hacen los niños de otros grupos.

2.2. Diario del profesor

La información que obtuvimos con el diario del profesor fue de tipo cualitativo. Por tal razón, solo incluimos dentro del análisis las anotaciones que realizamos en cada sesión y no hicimos un conteo sobre la aparición de estas anotaciones.

2.3. Diario de los escolares

Procesamos el esquema de los semáforos, por conteo de los colores que los estudiantes usaron para indicar su percepción frente a cada criterio de logro, para luego sacar promedios y porcentajes de percepción. Con el matematógrafo, pretendimos obtener información de tipo motivacional sobre cinco variables, que presentamos anteriormente en la figura 7. El procesamiento de los datos obtenidos se realizó en tres pasos.

Paso 1. Asignamos un valor de respuesta a cada ícono gestual en una escala de 0 a 5, como se muestra en la tabla 11.

Tabla 11
Valor de cada iconos gestual

Icono gestual	Valor
	0
	1
	3
	5

Paso 2. Obtuvimos la frecuencia absoluta por cada ícono gestual en cada una de las variables. A modo de ejemplo, la tabla 12 contiene las frecuencias absolutas de una de las variables del matematógrafo y la columna total que corresponde al número de estudiantes que respondieron a las preguntas de este instrumento.

Tabla 12
Ejemplo de procesamiento de una variable del matematrografo

Objetivo	Tarea					Total
1	El Tangram	23	11	1	0	35
2	La herencia	17	16	3	0	36
2	El paralelogramo	24	9	2	0	35
3	El cultivo	17	6	5	1	29

Paso 3. A partir de los valores asignados a cada ícono gestual de la tabla 11 y las frecuencias absolutas de la tabla 12, obtuvimos los promedios ponderados de cada variable incluida en el matematógrafo. Calculamos los valores mostrados en la tabla 13 mediante el promedio ponderado del número de respuestas de acuerdo con el valor asignado a cada ícono (Lupiáñez y Gómez, 2014 p. 11). Por ejemplo, calculamos el promedio ponderado de la variable motivación de la tarea El cultivo de la tabla 14 de acuerdo con la fórmula $\frac{(5 \times 17) + (3 \times 6) + (1 \times 5) + (0 \times 1)}{29} = 3,7$.

Tabla 14
Ejemplo de promedios ponderados de la variable motivación

Objetivo	Tarea	Variable motivación
1	El tangram	4,3
2	La herencia	3,8
2	El paralelogramo	4,3
3	El cultivo	3,7

Se observa que El tangram y El paralelogramo fueron las tareas que generaron mayor motivación en los escolares, mientras que El cultivo fue la tarea que generó la menor motivación.

2.4. Audios

Durante la sesión de la tarea especial, escogimos al azar un grupo de tres estudiantes para tener un registro de audio de las interacciones del grupo al momento de abordar y proponer soluciones a la tarea El paralelogramo. Transcribimos parcialmente este audio, y obtuvimos información sobre la meta, las ayudas, los materiales y recursos, el agrupamiento, la complejidad, la significatividad, el cumplimiento del objetivo y los posibles ajustes para próximas implementaciones.

Para los instrumentos, tareas, evaluaciones y diarios de los escolares, diligenciamos hojas de cálculo para el procesamiento de la información, como el ejemplo que mostramos en la figura 8. Marcamos 1 en la casilla correspondiente, si el estudiante activaba total, parcial o no una secuencia de capacidades o si incurría en un error. Presentamos el análisis de estos resultados en el apartado de evaluación de la implementación.

Grupo	Objetivo 1 Alumnos	SC1				SC2						
		Activación		Errores		Activación		Errores				
		AT	AP	NA	E8	AT	AP	NA	E6	E12	19	E22
G1	Cristian (No asistió)											
	Jenny	1				1						
	Liz	1				1						
G2	Liz	1					1					
	Da	1					1					
	Carlos	1					1					
G3	Ana María		1			1						
	Laura	1				1						
	Daniela	1					1					
G4	Valentina		1				1					
	Dayana	1				1						
	Yarleny	1				1						
G5	Dayana		1					1				
	Lina	1				1						
	Sebastián	1				1						
	Total Estudiantes	27	7	0	0	0	20	13	1	0	0	0

Figura 8. Ejemplo de hoja de cálculo para el procesamiento de la información

4. DESCRIPCIÓN DEL DISEÑO IMPLEMENTADO

En este apartado, presentamos el proceso de implementación y comparamos esa implementación con la planificación hecha en el diseño previo.

1. DIFERENCIAS ENTRE EL DISEÑO PREVIO Y EL IMPLEMENTADO

En este apartado, describimos las diferencias entre el diseño implementado y el diseño previo. Consideramos los materiales y recursos, las componentes de las tareas, el análisis de las tareas y las sesiones de la unidad didáctica.

1.1. Materiales y recursos

Identificamos las siguientes diferencias entre el diseño previo y el diseño implementado en relación con los materiales y recursos. En la tarea El tangram, usamos computadores, además de los otros recursos previstos. En la tarea La herencia, usamos geoplanos virtuales cuadrados, a cambio de geoplanos físicos. En la tarea El paralelogramo, usamos geoplanos virtuales, a cambio de las transparencias y el proyector de acetatos. Finalmente, en la tarea El cultivo, no contamos con geoplanos físicos, ni bandas elásticas. A cambio, trabajamos con tramas cuadradas en papel. También llevamos una presentación con diapositivas, por lo que requerimos video beam y un computador.

1.2. Componentes de las tareas

Hicimos los siguientes pequeños ajustes en los componentes de algunas tareas. En la tarea La herencia, cambiamos la redacción de algunos apartados y las figuras. Sin embargo, se mantuvo un error en una de las figuras, por lo que, durante la implementación, realizamos la corrección para que los estudiantes logaran encontrar la solución al problema. En la tarea El paralelogramo, hicimos los cambios durante la implementación, al explicar a los alumnos que podían usar tramas cuadradas o isométricas para el planteamiento de un nuevo problema. En la tarea El cultivo, modificamos la estructura de la guía, para que el estudiante registrara paso a paso los procedimientos utilizados para resolver los puntos de la misma.

1.3. Análisis de las tareas (previsiones, complejidad y significatividad)

En la tarea El cultivo, observamos que no todos los estudiantes alcanzaron el nivel de reflexión, por lo que quedó como inquietud realizar una tarea previa a esta para mejorar los resultados. No habíamos previsto el alto grado de dificultad que representó para algunos de ellos. Los estudiantes plantearon creativamente nuevos problemas en la resolución de la tarea El paralelogramo, lo que resultó muy interesante porque nos permitió constatar el grado de significatividad de la tarea.

1.4. Sesiones de la unidad didáctica

Las fechas de implementación de la unidad didáctica cambiaron porque las horas de clase escogidas estaban después de una clase de educación física y divididas por el descanso de los estudiantes, lo que retrasó el inicio puntual de las actividades.

5. EVALUACIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN

En este apartado, resumimos los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica. Para ello, establecemos, con base en la activación de las secuencias de capacidades y en la percepción de los estudiantes, el logro de objetivos de aprendizaje.

1. SECUENCIAS DE CAPACIDADES

Uno de los aspectos que utilizamos para determinar el logro de un objetivo fue la activación de las secuencias de capacidades. Asignamos rúbricas (criterios) a cada tarea y secuencia de capacidades, para ponderar su importancia en relación con el logro del objetivo. En la tabla 14, presentamos las secuencias de capacidades más notables para cada objetivo, e indicamos su porcentaje de activación total, parcial o no activación.

Tabla 14
Activación de secuencias de capacidades y errores más frecuentes

Tarea	SC	AT	AP	NA	EF	
					E	%
Objetivo 1						
El Tangram	3	66,7%	16,7%	16,7%	3	25%
	2	91,7%	8,3%	0%	12	100%
La herencia	5	91,7%	8,3%	0%	5	100%
Objetivo 2						
					23	34,3%
El paralelogramo	3	51,4%	48,6%	0%	18	22,9%
	4	34,3%	65,7%	0%	17	40%

Tabla 14
Activación de secuencias de capacidades y errores más frecuentes

Tarea	SC	AT	AP	NA	EF	
					E	%
Objetivo 3						
El cultivo					8	9,1%
	2	36,4%	45,5%	18,2%	14	9,1%
					24	18,2%
	3	41,7%	33,3%	25,0%	29	25%

Nota: SC = secuencia de capacidades, AT = activación total, AP = activación parcial, AN = no activación, EF = errores más frecuentes, E = error.

A partir de los porcentajes de activación de las secuencias de capacidades más relevantes presentados en la tabla 14, analizamos a continuación los resultados del logro de aprendizaje para cada objetivo.

Objetivo 1

Para el objetivo 1, consideramos cuatro secuencias de capacidades. Sin embargo, para su análisis, establecimos la secuencia de capacidades 3 como la de mayor peso, debido a que consiste en calcular el área de las figuras dadas por el método de descomposición y recomposición. Como presentamos en la tabla 14, el 83,4% de los estudiantes logró activar la secuencia de capacidades 3 ya sea parcial o totalmente, con lo que podemos considerar el alcance del objetivo. Los estudiantes calcularon el área del polígono dado tomando una unidad no convencional como patrón de medida.

Objetivo 2

Con el objetivo dos, pretendíamos que los escolares analizaran las formas de los polígonos y diseñaran estrategias que involucraran el aprovechamiento de regularidades. Diseñamos dos tareas para este objetivo. La tarea La herencia desarrolla la estrategia de aprovechamiento de regularidades y la tarea El paralelogramo el trazo de líneas auxiliares para descomponer una figura. Presentamos los resultados de activación de secuencias de capacidades por tarea.

La herencia. En esta tarea, las secuencias de capacidades 2 y 5 son las que tienen mayor peso. Resaltamos que estas secuencias de capacidades presentaron los mismos porcentajes de activación: 91,7% total, 8,3% parcial y 0% de no activación. En la secuencia de capacidades 2, pretendemos que los escolares reconozcan propiedades y relaciones de igualdad. En la secuencia de capacidades 5, pretendemos que utilicen las herramientas de triangulación y cuadriculación para encontrar regularidades en el cálculo de áreas.

El Paralelogramo. En esta tarea, las secuencias de capacidades 3 y 4 son las que tienen mayor peso. La secuencia de capacidades 3 presentó un 51,4% de activación total. Es decir, los escolares lograron descomponer y recomponer la figura al identificar las regularidades presentes en ella. Un 48,6% de los estudiantes realizaron una activación parcial. Esto significa que ellos realizaron la descomposición y recomposición sin identificar las regularidades presentes en ella. La secuencia de capacidades 4 obtuvo un 34,3% de activación total. Los estudiantes calcularon el área en la situación propuesta y en la situación diseñada por ellos. Un 65,7% de los estudiantes activaron parcialmente la secuencia de capacidades, debido a que solo solucionaron la primera parte (plantearon una nueva pero no le calcularon el área). Al igual que en la secuencia de capacidades 3, no se presentaron casos de no activación.

Para el análisis del objetivo 2, fusionamos las secuencias de capacidades de ambas tareas y establecimos que las secuencias de capacidades 3 y 4 son las de mayor peso. El 100% de los estudiantes las activaron total o parcialmente. Por lo tanto, cumplieron con el logro del objetivo.

Objetivo 3

En el objetivo 3, consideramos que las secuencias de capacidades 2 y 3 eran las que tenían mayor peso. La secuencia de capacidades 2 fue activada totalmente en un 34,6%, parcialmente en un 45,5% y no activada en un 18,8%. Esto fue consecuencia de que algunos escolares no explicaron por escrito en qué consistía el método de complementariedad, aunque lo utilizaron correctamente. La secuencia de capacidades 3 fue activada totalmente en un 41,7%, parcialmente en un 33,3% y un 25% no la activó. Estos datos indican que no lograron calcular el área. En conclusión, aunque un 75% los estudiantes lograron el objetivo 3, algunos lo alcanzaron a un nivel de desempeño básico. Por consiguiente, consideramos importante realizar algunas actividades de mejoramiento en la comprensión del método de complementariedad.

2. ERRORES MÁS FRECUENTES

A continuación, identificamos los errores más frecuentes en los que los estudiantes incurrieron durante la implementación de las tareas.

Tarea El tangram. Los estudiantes incurrieron en los siguientes errores previstos: E3 (relaciona de modo incorrecto el proceso geométrico con el numérico para calcular el área total de un polígono), E8 (traduce incorrectamente del lenguaje verbal al lenguaje matemático problemas del cálculo de áreas de polígonos) y E9 (interpreta incorrectamente un resultado al pasar del lenguaje matemático al verbal). Constatamos dos errores que no teníamos previstos: E27 (no logra representar geoméricamente la recomposición propuesta) y E14 (registra en desorden los pasos ejecutados).

Tarea La herencia. Los estudiantes incurrieron en el error E5 al querer cuadrricular el terreno 1. Este error se supera por medio de sencillos interrogantes de reflexión por parte del docente sobre las propiedades y relaciones de igualdad de las figuras de los terrenos. Otros errores que se activaron fueron el E12, que tiene que ver con propiedades asociadas al concepto de congruencia, y el E14, que se refiere al registro desordenado de los procesos.

Tarea El paralelogramo. El E23 fue el error previsto más frecuente (encontrar formas de descomponer que no contribuyen a la solución del problema). Identificamos dos errores que no teníamos previstos: E17 (expresa resultados sin tener en cuenta el uso de las unidades) y E18 (usa inadecuadamente elementos auxiliares en una figura para descomponerla).

Tarea el cultivo. Los estudiantes incurrieron en los errores previstos E8 (traduce incorrectamente del lenguaje verbal al lenguaje matemático problemas del cálculo de áreas de polígonos), E14 (registra en desorden los pasos ejecutados) y E24 (realiza una comprobación del problema pero se equivoca en los argumentos para justificar el resultado). Identificamos un error no previsto: E29 (registra parcialmente los procesos realizados o deja preguntas de la guía sin resolver).

3. ESQUEMAS DE SEMÁFOROS

Los esquemas de los semáforos permitieron que los escolares autoevaluaran su proceso de aprendizaje. En la tabla 15, presentamos los resultados de esa autoevaluación en términos de la percepción del nivel de logro de los criterios propuestos en el grafo de los semáforos. El estudiante marcaba verde cuando lograba realizar con éxito lo que indicaba el criterio, amarillo cuando realizaba parte de lo que indica el criterio y rojo cuando no lograba realizarlo.

Tabla 15

Percepción de los estudiantes de los criterios de logro del esquema de los semáforos

Tarea	Criterio	Percepción estudiantes		
		Verde	Amarillo	Rojo
	Objetivo 1			
El Tangram	1	71,4%	28,6%	0,0%
	2	65,7%	31,4%	2,9%
	3	68,6%	31,4%	0,0%
	4	57,1%	34,3%	8,6%
	Objetivo 2			
La herencia	1	77,8%	19,4%	2,8%
	2	43,2%	56,8%	0,0%
	3	55,6%	36,1%	8,3%
	4	77,8%	16,7%	5,6%
	5	55,6%	36,1%	8,3%
El paralelogramo	1	79,4%	20,6%	0,0%
	2	58,8%	38,2%	2,9%
	3	64,7%	32,4%	2,9%

Tabla 15

Percepción de los estudiantes de los criterios de logro del esquema de los semáforos

Tarea	Criterio	Percepción estudiantes		
		Verde	Amarillo	Rojo
	4	79,4%	20,6%	0,0%
	Objetivo 3			
	1	57,1%	39,3%	3,6%
	2	42,9%	53,6%	3,6%
El cultivo	3	50,0%	46,4%	3,6%
	4	64,3%	28,6%	7,1%

A continuación, describimos los resultados de los esquemas de los semáforos de la tabla 15 para cada una de las tareas.

El tangram

En la tarea El tangram, para el criterio de logro 1, el 71,4% de los estudiantes marcó con verde en el semáforo, lo que indica que comprendieron la guía y el video que proponían diversas soluciones. En el criterio de logro 2, el 65,7% de los estudiantes marco verde, lo que indica que lograron armar las figuras dadas, mientras que el 33% marcó amarillo, al incurrir en errores al armarlas. Los criterios de logro 3 y 4 arrojaron resultados similares en la percepción de los escolares. En el primero, expresaron haber calculado el área de los polígonos y, para el segundo, lograron expresar ante sus compañeros los resultados obtenidos.

La herencia

En la tarea La herencia, los criterios de mayor peso son el 2 y el 5. Observamos que, para el criterio de logro 2, el 43,2 % de los escolares que marcó verde expresó haber utilizado las propiedades de los polígonos en la solución del problema, mientras que un 56,8% de los escolares, que marcó amarillo, expresó no lograrlo en su totalidad. Para el criterio de logro 5, el 55,6% de los escolares expresó utilizar la herramienta triangulación o cuadrícula y un 36,1% expresó no lograrlo en su totalidad. Un bajo porcentaje marcó en rojo (8,3%). Estos fueron estudiantes que subvaloraron su trabajo en todas las actividades.

El paralelogramo

Para la tarea El paralelogramo, el 79,4% de los escolares marcaron verde en el criterio de logro 1. Esto quiere decir que realizaron interpretaciones y traducciones entre el lenguaje verbal y el matemático, sin presentar activaciones nulas. Para el criterio de logro 2, los escolares manifestaron dificultades en cuanto al reconocimiento de las propiedades de los polígonos. Como consecuencia de lo anterior, solo un 58,8% de ellos marcó verde y un 38,2% marcó amarillo. En el cri-

terio de logro 3, la mayoría de los escolares logró descomponer la figura inicial, pero se les dificultó plantear y descomponer una nueva figura para dar solución al problema. Finalmente, en el criterio de logro 4, el 79,4% manifestó haber resuelto el problema planteado y propuso un nuevo problema con características similares, mientras que el 20,6% solo realizó la primera parte.

El cultivo

En la tarea El cultivo, los criterios de logro de mayor peso son el 2 y el 3. Los escolares, para el criterio 2, marcaron verde el 42,9 %, amarillo el 53,6% y rojo el 3,6 %. Para el criterio 3, el 50% de los estudiantes marcó verde, el 46,4% amarillo y el 3,6% rojo. Por tanto, ellos reconocieron que no estaban totalmente seguros de sus resultados. Lo anterior se evidencia principalmente en el criterio 2, que tiene que ver con explicar en qué consiste el método de complementariedad de las formas a partir del modelo dado.

4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE LOGROS Y ESQUEMAS DE SEMÁFOROS

Al comparar los resultados de las activaciones de secuencias y las percepciones de los escolares, encontramos algunas semejanzas y diferencias que presentamos en la tabla 16 y que describimos por tarea.

Tabla 16

Percepción de los escolares vs profesor

Tarea	SC	Percepción Estudiantes			Profesor		
		Verde	Amarillo	Rojo	AT	AP	NA
Objetivo 1							
El tangram	1	71,4%	28,6%	0,0%	41,7%	58,3%	0,0%
	2	65,7%	31,4%	2,9%	33,3%	66,7%	0,0%
	3	68,6%	31,4%	0,0%	66,7%	16,7%	16,7%
	4	57,1%	34,3%	8,6%	58,3%	25,0%	16,7%
Objetivo 2							
La herencia	1	77,8%	19,4%	2,8%	91,7%	8,3%	0,0%
	2	43,2%	56,8%	0,0%	91,7%	8,3%	0,0%
	3	55,6%	36,1%	8,3%	50,0%	50,0%	0,0%
	4	77,8%	16,7%	5,6%	100,0%	0,0%	0,0%
	5	55,6%	36,1%	8,3%	91,7%	8,3%	0,0%

Tabla 16
Percepción de los escolares vs profesor

Tarea	SC	Percepción Estudiantes			Profesor		
		Verde	Amarillo	Rojo	AT	AP	NA
El paralelogramo	1	79,4%	20,6%	0,0%	91,4%	8,6%	0,0%
	2	58,8%	38,2%	2,9%	100,0%	0,0%	0,0%
	3	64,7%	32,4%	2,9%	51,4%	48,6%	0,0%
	4	79,4%	20,6%	0,0%	34,3%	65,7%	0,0%
Objetivo 3							
El cultivo	1	57,1%	39,3%	3,6%	33,3%	58,3%	8,3%
	2	42,9%	53,6%	3,6%	36,4%	45,5%	18,2%
	3	50,0%	46,4%	3,6%	41,7%	33,3%	25,0%
	4	64,3%	28,6%	7,1%	33,3%	33,3%	33,3%

Nota: AT = activación total; AP = activación parcial; NA = no activación

El tangram

Las diferencias entre las percepciones de los escolares y las del profesor se presentaron en las secuencias 1 y 2. Los estudiantes manifestaron comprender la guía y lograr armar las figuras. Sin embargo, los resultados muestran que tuvieron dificultades para dibujarlas. Es probable que la falta de coordinación y colaboración entre los miembros del grupo al momento de registrar los procedimientos y el proceso de reconfigurar las figuras sea la causa de estas diferencias en los resultados. Las secuencias de capacidades 3 y 4 coinciden en los resultados. Contribuyen de forma significativa al logro del objetivo, puesto que los estudiantes logran calcular correctamente el área del polígono.

La herencia

La percepción de docentes y estudiantes en cuanto a las secuencias 1 y 2 no varía significativamente. Los porcentajes evidencian que comprendieron el enunciado, pero reconocen sus dificultades en el trabajo colaborativo. En la secuencia de capacidades 3, se presentaron diferencias. Conjeturamos que los estudiantes utilizaron las propiedades de las figuras pero no las reconocieron. Para la secuencia de capacidades 4, el 8,3% de los estudiantes expresó no utilizar adecuadamente el Geoplano en la solución del problema. Las grandes diferencias de porcentaje en la secuencia de capacidades 5, que trata sobre triangular y cuadrricular para encontrar regularidades, se debe a que ellos cuadrricularon inicialmente ambas figuras, pero no era posible usar esta herramienta para una de ellas, error en el que incurrió el 100% de los estudiantes. El error fue superado con la ayuda del Geoplano virtual.

El paralelogramo

Las diferencias más notables entre la percepción del estudiante y del docente se dieron en las secuencias 2 y 4. La secuencia de capacidades 2 se activó en un 100% para el docente, mientras que el 58,8% de los estudiantes marcó verde y un 38,2% marcó amarillo. Los estudiantes identificaron las formas de las figuras pero no fueron conscientes del uso de las propiedades. Al revisar los trabajos e interactuar con ellos, identificamos este fenómeno y supusimos la activación total de la secuencia de capacidades 2.

En la secuencia de capacidades 4, los escolares describieron y argumentaron los procedimientos de la situación propuesta por el docente y no lo hicieron para la situación diseñada por ellos. Consideraron que con sólo haber hecho la primera parte podían marcar verde, pero, para el profesor, ellos debían realizar las dos cosas para activar totalmente la secuencia. Por tal razón, existen diferencias entre las activaciones totales y parciales. Los estudiantes marcaron en un 79,4% verde y un 20,6% amarillo, mientras que para el profesor el 34,3% logró activación total y el 65,7% activación parcial.

El cultivo

Como puede apreciarse en la tabla 16, tanto en la percepción del estudiante como la del profesor, las secuencias de capacidades 1 y 2 fueron activadas parcial o totalmente, mientras que en las secuencias 3 y 4 se presentaron diferencias notables puesto que, para el profesor, el 25% y el 33,3 % respectivamente tuvo activación nula, mientras que para los estudiantes apenas esto se da con el 3,6% y el 7,1%. Estas diferencias pueden deberse a que los estudiantes manifestaron en su mayoría haber comprendido lo que tenían que hacer en la actividad, pero no conocían sus resultados al momento de llenar el diario, ni los errores en los que incurrieron durante el cálculo de áreas y la formulación de las razones entre los valores encontrados. Además, en la primera parte de la sesión de clase, se mostraron medianamente seguros sobre los ejemplos trabajados en la presentación inicial. Algunos estudiantes creyeron que, al realizar descomposiciones internas de la figura, cumplían con el propósito de la tarea. No obstante, desconocieron que este método no proporciona una respuesta exacta del problema y que, por tanto, debía aplicarse el método de complementariedad para llegar a la solución esperada.

5. MATEMATÓGRAFO

En la tabla 17, presentamos los resultados de las cinco variables que planteamos para el matematógrafo. Los valores están dados en una escala de 0 a 5 que obtuvimos mediante la fórmula de promedios ponderados explicada en el apartado de procedimientos de análisis de la información.

Tabla 17
Resultados de las variables del matematógrafo

Objetivo	Tarea	Cercano	Conocimiento	Comprensión	Motivación	Respuesta
1	El Tangram	4,8	4,1	4,1	4,3	4,0
2	La herencia	4,1	3,4	3,9	3,8	3,6
2	El paralelogramo	4,1	4,0	4,4	4,3	4,3
3	El cultivo	3,8	3,4	4,0	3,7	4,0

A continuación, describimos los resultados del matematógrafo, variable por variable.

El tema le pareció cercano y familiar. La tarea El cultivo presentó el valor más bajo (3,8) de las cuatro tareas. Esto se debe a que el tema de complementariedad no es muy conocido por los estudiantes. En las otras tres tareas, el uso del tangram y los geoplanos hizo que el tema fuera más cercano y familiar.

La tarea me pedía que usara conocimientos que ya tenía. Las tareas que presentaron bajos valores fueron La herencia y El cultivo. En estas tareas, los escolares no lograron reconocer propiedades y nombres de las figuras y, por consiguiente, no utilizaron sus conocimientos previos.

Comprendí lo que la tarea me pedía. En este aspecto, no hubo diferencias significativas entre las tareas. Los estudiantes comprendieron y siguieron las instrucciones de las guías. La tarea El paralelogramo fue la que presentó el valor más alto (4,4).

La tarea me pareció un reto y me sentí motivado para resolverla. Las tareas que resultaron más motivantes fueron El tangram y El paralelogramo, mientras que las de menor acogida fueron, en su orden, La herencia y El cultivo.

Me fue posible reconocer qué tan buena fue mi respuesta a la tarea. Para esta variable, La herencia fue la tarea que obtuvo el promedio más bajo, con un valor de 3,6. Esto se debió a que, por falta de tiempo, algunos escolares no alcanzaron a verificar y socializar sus respuestas.

6. LOGRO DE EXPECTATIVAS AFECTIVAS

Uno de los aspectos analizados después de la implementación de la unidad didáctica fue el logro de expectativas afectivas y la contribución que realizó cada una de las tareas para este propósito. Describimos estos resultados a continuación.

La tarea El tangram contribuyó de manera significativa al componente afectivo. Los escolares se sintieron motivados, la actividad fue dinámica, los materiales y recursos fueron de su agrado, lograron manipular adecuadamente el tangram físico y virtual, y, a pesar de que los grupos fueron seleccionados al azar, la mayoría de ellos consiguió entenderse y trabajar de manera colaborativa.

En la tarea La herencia, los niveles de motivación bajaron. Un error de la guía y la falta de organización previa del espacio físico desmotivó a los estudiantes. No obstante, al hacer el análisis

sis de los matematógrafos, nos encontramos con que la actividad agradó a los estudiantes y ellos no cambiarían nada de ella. Ellos destacaron el uso del Geoplano como el aspecto que más les motivó.

En la tarea El paralelogramo, el hecho de que cada grupo creara su propia figura fue motivante. La tarea fomentó en ellos capacidades innovadoras, así como un cambio conceptual. Ellos constataron que no todos los geoplanos son iguales y que deben tener ciertas características para poder trabajar con ellos.

En la tarea El cultivo, el 16% de los escolares afirmó que lo que más le gustó fueron las nuevas figuras exploradas y el 13% afirmó que todo le gustó. El resto de estudiantes manifestó que le pareció bien el orden. El 52% de los escolares sugirió que nada debe cambiarse, el 6% sugirió ampliar el tiempo y otro 6% opinó que debe ampliarse la explicación del tema. Otras observaciones sectorizadas realizadas por los estudiantes sugieren que sería mejor trabajar con tabletas, ampliar el espacio, hacer la guía más corta y clara, y, por último, hacer actividades más divertidas.

7. LOGROS DE OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

En la tabla 18, relacionamos los resultados de los niveles de desempeño en términos de porcentajes. Diseñamos una tarea para los objetivos 1 y 3 y dos tareas para el objetivo 2.

Tabla 18

Resultados de logro de objetivos de aprendizaje por niveles de desempeño

Objetivo	Nivel de desempeño			
	Superior	Alto	Básico	Bajo
1	33,30%	33,30%	16,70%	16,70%
2	50,00%	25,50%	25,50%	0,00%
3	27,30%	18,20%	36,40%	18,20%

A continuación, analizamos los porcentajes obtenidos, agrupados por niveles de desempeños en superior y alto o básico y bajo.

Objetivo 1. El 67% de los estudiantes obtuvo desempeños alto o superior. Estos datos nos llevan a considerar que la tarea contribuyó al logro del objetivo.

Objetivo 2. El 75% de los estudiantes mostró desempeños de nivel alto y superior. No se presentaron casos de estudiantes con desempeño bajo.

Objetivo 3. El 45,5% de los estudiantes se ubicó en un desempeño alto y superior y el 55,5% obtuvo un desempeño básico o bajo. Estos datos indican que la tarea no contribuyó suficientemente al logro del objetivo y es necesario revisar las dificultades que se presentaron.

6. ANÁLISIS DE LA IMPLEMENTACIÓN

Empleamos la matriz DAFO para determinar las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades de la unidad didáctica. Debido a su extensión, presentamos este análisis detallado en el anexo 14. En este apartado, incluimos los aspectos más relevantes del análisis de la implementación.

1. DEBILIDADES

A continuación, describimos las debilidades más relevantes de nuestra unidad didáctica. Nosotros no conocíamos a los estudiantes que fueron seleccionados para implementar la unidad didáctica. Esto nos impidió establecer de antemano los conocimientos previos que los estudiantes tenían sobre el tema del cálculo de áreas de polígonos por el método de descomposición. El diseño de las evaluaciones parcial y final, al ser de selección múltiple con única respuesta, no permitió extraer suficiente información sobre los procesos y errores en los que incurren los escolares. Además, algunos estudiantes prefirieron contestar al azar, sin realizar una lectura juiciosa de los enunciados. Faltó claridad en la conceptualización del método de complementariedad para el cálculo de áreas. Esto dificultó el desarrollo de la tarea El cultivo. Detectamos este hecho al corregir las guías, ya que ningún estudiante desarrolló el cuarto punto.

2. AMENAZAS

Desde el punto de vista cultural, los computadores son percibidos como herramientas de diversión, juegos y redes sociales, usos que priman sobre fines educativos o herramientas de estudio. Por esto, al entregar computadores a los niños, inmediatamente quieren ir a sus sitios de interés y el docente debe estar muy vigilante y motivarlos para que hagan uso adecuado de los mismos. Algunos grupos dejaron preguntas sin resolver. Esto no permitió realizar un buen análisis cognitivo, ni detectar dificultades en los procesos.

3. FORTALEZAS

Entre las fortalezas que identificamos, relacionamos las siguientes. Como seleccionamos un curso con el que los integrantes del grupo no habíamos tenido contacto, evitamos hacer juicios de valor sobre ellos. De esta forma, favorecimos en los estudiantes actitudes de confianza y seguridad. Es así como la docente titular expresó estar sorprendida por la participación de algunos estudiantes que usualmente eran apáticos (ver el diario del profesor). Se logró una buena motivación con el uso de los recursos y materiales físicos y virtuales. El diseño de las guías fue novedoso y motivó la participación de los escolares. La secuenciación de las tareas y de los objetivos dentro de la unidad didáctica fue la correcta. Evidenciamos que la mayoría de los estudiantes activó los conocimientos adquiridos en las tareas anteriores.

4. OPORTUNIDADES

Enunciamos las dos oportunidades más relevantes. La unidad didáctica se implementó en la I.E.D. Kirpalamar, institución que tiene en cuenta los referentes de calidad emitidos por el Ministerio de Educación Nacional para el diseño de los planeadores de clase. Nuestra unidad didáctica busca favorecer el desarrollo de esas competencias. La institución no tiene grandes problemas de convivencia (uso de sustancias psicoactivas, embarazos o pandillismo), lo que favoreció el trabajo cooperativo.

5. PROPUESTAS DE MEJORA

Una vez analizamos la implementación de la unidad didáctica por medio de la matriz DAFO, propusimos algunas modificaciones que deben contribuir a mejorar su diseño e implementación. Detallamos los cambios más importantes para cada tarea. En la tarea El Tangram, proponemos que dos grupos, preferiblemente antagónicos, realicen la socialización de los resultados. Observamos que la mayoría de los grupos encontraron fácilmente la respuesta y que únicamente la exposición efectuada por los primeros relatores aportó conclusiones significativas al tema. En la tarea La Herencia, corregimos el error en la figura del terreno 2. En la tarea Paralelogramo, eliminamos de la guía las indicaciones que tienen que ver con el uso del proyector de acetatos. Además, debemos agregar una pregunta abierta en el diario de los escolares donde los estudiantes puedan manifestar sus percepciones sobre el cuarto punto de la tarea. Finalmente, en la tarea El cultivo, se deben eliminar los puntos cuatro y cinco y reemplazarlos por una sesión previa explicativa del método de complementariedad de las formas. Para ello, se puede presentar un video del tema, un rompecabezas propuesto por el grupo uno y permitir que los estudiantes solucionen ante el gran grupo algunos ejemplos, ya que el método requiere una buena explicación para garantizar una mejor comprensión.

Proponemos otros cambios con respecto al formato y redacción de las guías de las tareas. Se deben ampliar los espacios en las guías para que los estudiantes puedan registrar sus procesos y percepciones con respecto a cada pregunta, donde sea necesario. Es necesario aclarar a los escolares que, en el último punto de todas las guías, deben realizar una síntesis de lo aprendido, espe-

cificando que son conclusiones de los procesos realizados en la descomposición, recomposición y planteamiento de la nueva situación y no en aspectos afectivos.

7. DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL NUEVO DISEÑO

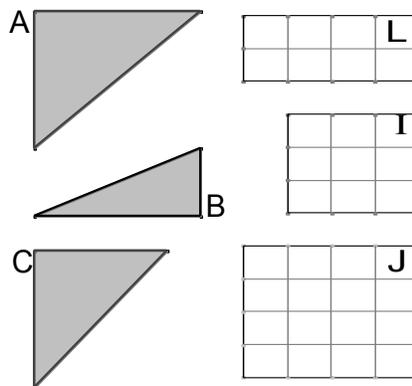
En este apartado, presentamos las modificaciones realizadas a las tareas para producir el diseño definitivo. Describimos los cambios realizados a la tarea El cultivo. Describimos los cambios en las demás tareas en los anexos 2, 3, 6, 8, 9, 11 y 12.

1. TAREAS

Las guías de las tareas sufrieron modificaciones en los espacios asignados para registrar los procedimientos geométricos y analíticos. También cambiamos la redacción del último punto de algunas tareas para que los estudiantes realicen síntesis sobre conceptos y procedimientos aprendidos, ya que las respuestas en la implementación fueron de tipo emocional. Ejemplificamos el nuevo diseño por medio de la tarea El cultivo. La primera parte es nueva y, en la segunda, modificamos el formato.

Guía de trabajo el cultivo (primera parte)

Materiales: Guía de trabajo, kit de fichas triangulares y rectangulares, útiles escolares.



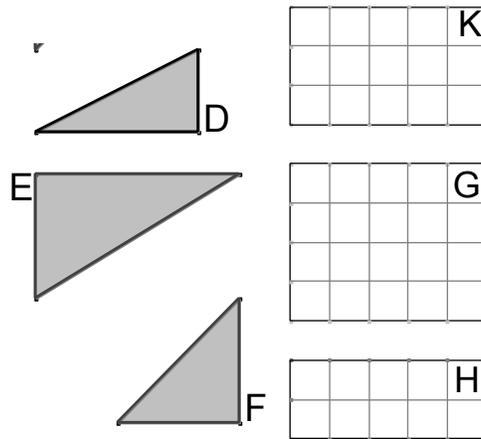


Figura A. Kit de fichas triangulares y rectangulares

1) Determina el área de cada ficha rectangular a partir de su descomposición interna. Completa la tabla indicando cuántas unidades cuadradas contiene cada ficha. Observa el ejemplo dado en la tabla.

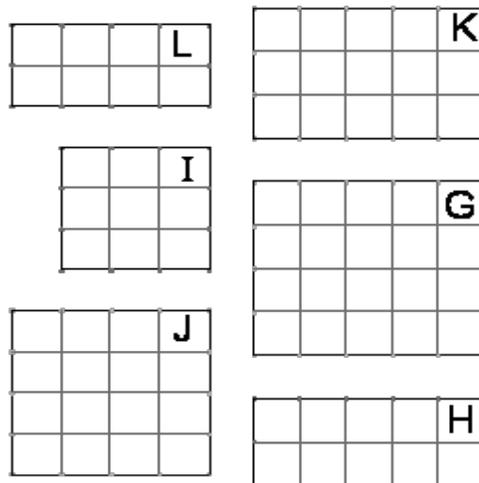


Figura B. Fichas rectangulares

Rectángulo	L	I	J	K	G	H
Área (u^2)				15 u^2		

2) Encuentra pares de fichas con dos lados que coincidan (de igual longitud). Observa en la figura C que al sobreponer la ficha E sobre la K, dos de sus lados coinciden.

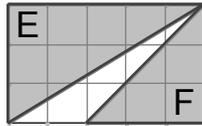


Figura C. Par de fichas con lados coincidentes

3) Relaciona con una flecha cada ficha triangular de la columna izquierda con una ficha rectangular de la derecha. Usa las fichas del kit para hacer coincidir dos de sus lados.

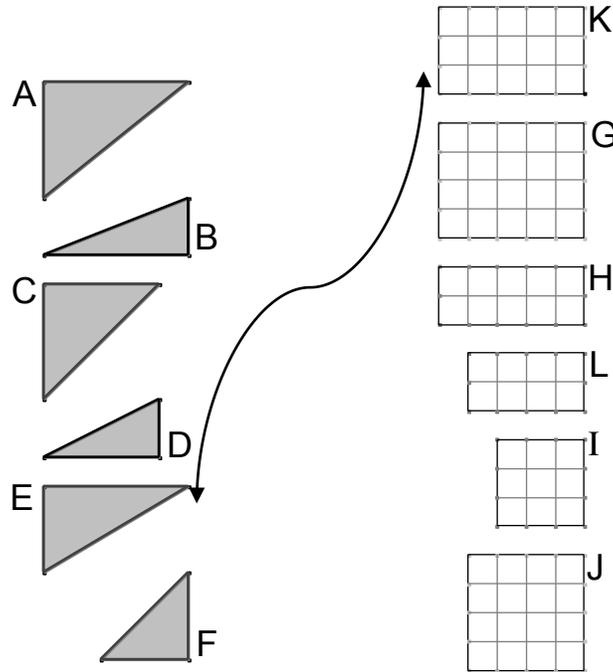


Figura D. Pares de fichas con un par de lados iguales

4) Al sobreponer el triángulo E sobre el rectángulo K, como se muestra en la figura C, podemos observar que el área del rectángulo K es el doble del área del triángulo E, pues el rectángulo K puede cubrirse con exactamente 2 fichas triangulares iguales a la E.

Encuentra pares de fichas en las que se cumple lo mismo. Observa el ejemplo y completa la tabla.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Rectángulo					K	

5) Establece cuál es el área de cada ficha triangular, usando la información de los puntos anteriores. Observa el ejemplo y completa los datos que hacen falta en la tabla.

Triángulo	A	B	C	D	E	F
Área (u^2)					$7,5 u^2$	

6) Arma las composiciones de la figura D usando dos fichas triangulares sobrepuestas a una ficha rectangular. Calcula el área de la zona triangular blanca. Pista: toma como referencia las áreas calculadas anteriormente para las fichas triangulares y rectangulares. Completa la tabla.

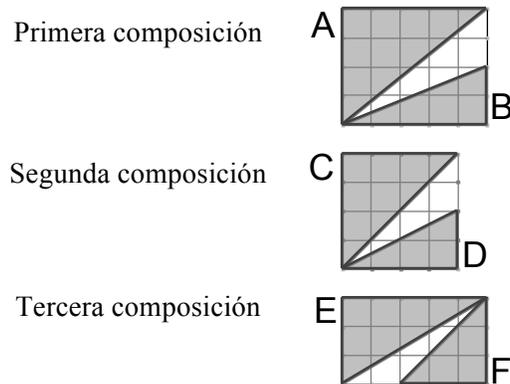


Figura E. Composiciones con tres fichas

Completa los datos que faltan en la tabla. Analiza el ejemplo dado.

Composición	Fichas utilizadas	Área de la ficha rectangular	Suma de las áreas de las fichas triangulares	Área de la zona triangular blanca
Primera				
Segunda				
Tercera	K, E y F	15 u^2	$7,5 \text{ u}^2 + 4,5 \text{ u}^2 = 12 \text{ u}^2$	3 u^2

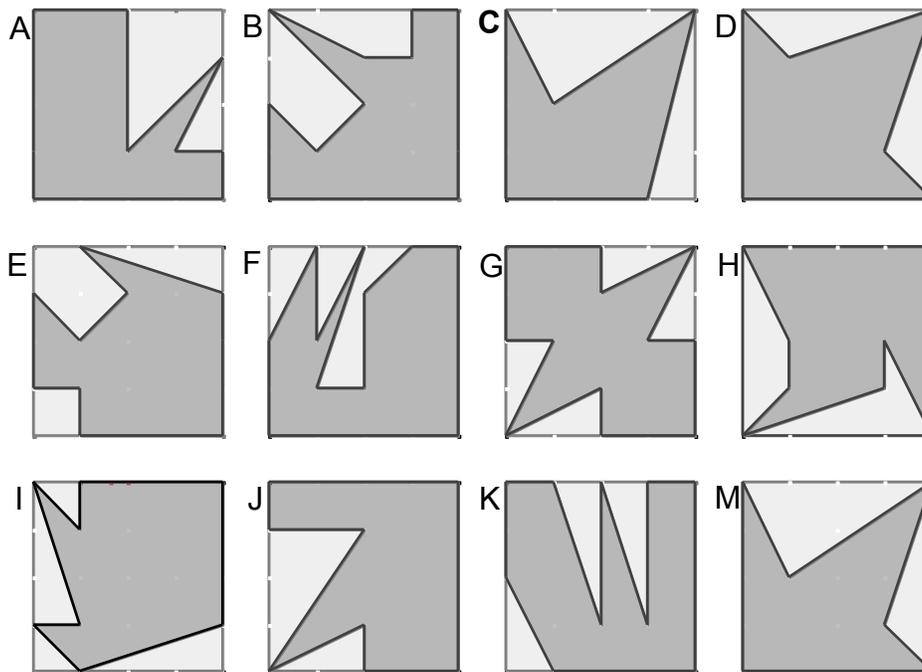
7) Explica con tus palabras el procedimiento que utilizaste para calcular el área de la zona triangular blanca.

Guía de trabajo el cultivo. Segunda parte

Materiales y recursos: guía de trabajo, útiles escolares (regla, lápiz, borrador, marcadores, colores) y tramas cuadradas.

Orientaciones: analicen la siguiente situación y respondan las preguntas a partir de la figura asignada a su grupo por el profesor.

Don Pedro tiene un terreno de forma cuadrada y quiere sembrar papa. Sin embargo, encontró que una zona no es cultivable porque es muy pedregosa. Si la zona fértil posee una cerca construida en forma de polígono y su área corresponde a tres cuartas partes del terreno, debe establecerse cuáles de los siguientes dibujos podrían corresponder al terreno del agricultor.



Nota. La franja más oscura en los dibujos corresponde a la zona fértil.

Presentamos la versión completa de la tarea El cultivo en el anexo 2.

2. SESIONES

Agregamos una sesión, para un total de ocho, debido a que es necesario explicar el método de complementariedad de las formas. Para esto, planteamos una primera parte de la tarea El cultivo, que puede observarse en el apartado anterior. Proponemos que se implemente en una hora y que, como apoyo y para su comprensión, se use una presentación en Power-Point que aparece en el anexo 11.

También diseñamos una presentación en Power-Point titulada Introducción El cultivo, para ser utilizada al comenzar la segunda parte de la tarea. Esta presentación se encuentra en el anexo 12. Finalmente, en el anexo 9, describimos todas las sesiones para futuras implementaciones de la unidad didáctica.

3. DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DETALLADO DE UNA TAREA MODIFICADA

Consideramos que la tarea El cultivo es representativa de la unidad didáctica, porque, para su ejecución, se requiere aplicar lo aprendido en las primeras tareas y, por tanto, haber logrado previamente los objetivos 1 y 2.

Modificamos esta tarea en tres oportunidades, dos de ellas, antes de su implementación. La versión final incluye dos partes. La primera surge del análisis de resultados de la implementación, ya que evidenciamos la necesidad de comprender el método de complementariedad con ejercicios sencillos y que permitieran comprender visualmente el proceso geométrico seguido para solucionar las situaciones dadas.

La segunda parte mantiene su esencia, pero suprimimos el modelo dado para el análisis grupal, que proponemos trabajar en gran grupo dirigido por el docente. También cambiamos algunos espacios de registro para dar más libertad a los estudiantes en la manera de explicar sus razonamientos. En la tabla 19, presentamos las secuencias de capacidades para la nueva versión de la tarea El cultivo.

Tabla 19
Secuencias de capacidades de la tarea El cultivo

SC	Descripción	Apartados de la tarea
1	Interpreto y conjeturo. Uso el método de complementariedad para calcular el área de figuras sencillas. Relaciono datos del enunciado con elementos de la figura en el terreno asignado. Propongo la solución que creo adecuada.	Primera parte 1 a 5. Segunda parte 1
2	Visualizo y represento. Identifico cómo aplicar geoméricamente el método de complementariedad al terreno asignado: uso propiedades, trazos auxiliares, realizo descomposición y reconfiguración de las figuras complementarias.	Segunda parte: 2. b, e y h.
3	Resuelvo. Calculo áreas por complementariedad de las formas y otros métodos. Establezco relación entre las áreas.	Segunda parte: 2. c, f, i, a, d y g.
4	Comunico. Justifico, llego a acuerdos y comunico resultados.	3 y 4

Nota. SC = secuencia de capacidades.

4. DESCRIPCIÓN DE ESQUEMAS METODOLÓGICOS

Describimos la planificación de la segunda fase de la tarea El cultivo en la tabla 20. Las demás fases sufrieron modificaciones menores y se encuentran en el anexo 8.

Tabla 20
Fase 2 de la tarea El Cultivo: inducción al tema de cálculo de área por complementariedad

Componente	Descripción
Actividades de aprendizaje	Presentación de diapositivas y explicación del método. Actividades con fichas triangulares y rectangulares.
Reacción que se espera de los estudiantes	Preguntas sobre los ejemplos mostrados, curiosidad e interés al manipular las fichas y hacer comparaciones.

Tabla 20

Fase 2 de la tarea El Cultivo: inducción al tema de cálculo de área por complementariedad

Componente	Descripción
Enseñanza y orientación del profesor	Presentar ejemplos del método de complementariedad. Estar atento a inquietudes de los estudiantes. Revisar las tablas de registro para verificar si se ha entendido el método usando las fichas entregadas.
Tiempo estimado	40 minutos.
Materiales y recursos	Video beam, computador, diapositivas, fichas, guías de trabajo.
Contenido matemático	Cálculo de áreas de polígonos por descomposición y reconfiguración por complementariedad de las formas.
Agrupamiento e interacción	Conformación de grupos de tres estudiantes, cada uno con un rol. Interacción entre los integrantes de cada grupo de trabajo.

8. CONCLUSIONES

Al diseñar la unidad didáctica alrededor del cálculo de áreas de polígonos por descomposición y recomposición, quisimos mostrar una manera de estudiar este tema en contextos geométricos, para que los estudiantes se familiarizaran con la idea del área como cantidad del plano. Usando procedimientos geométrico-numéricos, tales como la descomposición de polígonos en partes de igual o diferente forma y tamaño, y la recomposición por complementariedad de formas de las partes en la que se ha dividido el polígono, pretendimos facilitar la comprensión de la conservación del área de una superficie. Esta idea juega un papel importante en el aprendizaje de este concepto. Pensamos que, de este modo, resultará más sencillo avanzar hacia los procedimientos de naturaleza simbólica y, en el futuro, el estudiante podrá llegar a generalizar las fórmulas para realizar cálculos. Resultó muy valioso trabajar con el método de complementariedad para calcular áreas, ya que este procedimiento potencia capacidades de visualización y permite al estudiante poner a prueba competencias de razonamiento en el nivel de reflexión.

Los instrumentos de recolección de información diseñados nos permitieron obtener información detallada de ciertos procedimientos de descomposición y recomposición. Nos faltó asignar espacios y tramas de puntos en las guías de trabajo y en las evaluaciones parcial y final, para que los estudiantes registraran procedimientos y respuestas. Lo anterior generó dificultades para determinar la activación o no de una secuencia de capacidades, al no tener evidencias de todos los desarrollos de los estudiantes.

Los instrumentos usados —esquemas de semáforos y matematógrafo— fueron novedosos tanto para los estudiantes, como para nosotros. Los estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer las metas de su proceso de aprendizaje y autoevaluarse cognitivamente y motivacionalmente. A nosotros, nos permitió reconocer falencias conceptuales y procedimentales.

En cuanto a los procedimientos, consideramos que los valores asignados a los tipos de respuestas para el procesamiento de los datos en las hojas Excel fueron adecuados, lo que, al analizar los datos obtenidos, permitió presentarlos en términos de frecuencias absolutas y porcentajes.

Al implementar las tareas, logramos encadenarlas adecuadamente. Esto permitió a los estudiantes aplicar lo aprendido en las siguientes tareas. Fue necesario agregar una nueva sesión, debido a la dificultad de algunos grupos para lograr el objetivo 3. Antes de las tareas, implementamos un test diagnóstico que permitió realimentar los conocimientos previos de los estudiantes, evidenciando que esta actividad es clave para el posterior logro de los objetivos.

El sistema de evaluación de la unidad didáctica fue articulado correctamente con el de la institución donde se implementó. La evaluación fue integral y cumplió con el requerimiento de ser formativa, lo que se evidencia en las rúbricas utilizadas para la revisión de las tareas. En términos de niveles de desempeño básico, alto y superior de toda la unidad didáctica, obtuvimos un 88,4% de aprobación y solo un 11,6% de desempeños en el nivel bajo.

En el nuevo diseño, planteamos incorporar en la unidad didáctica una nueva sesión para explicar el método de complementariedad de las formas, previo a la aplicación de la tarea El cultivo. Esto debe facilitar el logro del objetivo 3. En esta explicación, proponemos que se use como apoyo un video explicativo, un juego de rompecabezas y la solución de algunos ejercicios por parte de los estudiantes ante el gran grupo. Cambiamos la redacción de los objetivos para facilitar su comprensión. No obstante, esto no afectó el listado de secuencias de capacidades, que permaneció invariante.

El análisis didáctico nos permitió, en la planificación, implementación y rediseño de la unidad didáctica, contemplar aspectos que no conocíamos antes de ser estudiantes de esta maestría. Por ejemplo, aprendimos a ubicar nuestras tareas según su nivel de complejidad o a caracterizar sus componentes. Cuando diseñamos una tarea, sin atender a su significado y al proceso de elaboración de una unidad didáctica, estamos elaborando simples actividades carentes de significatividad y que no son pertinentes en relación con el objetivo planteado. Cuando se inicia el análisis, el grupo de tareas cambia constante y sustancialmente. Empezamos a tener claridad de los objetivos que perseguimos, analizamos los caminos de aprendizaje que conducen a ellos, los posibles errores que dificultan su consecución y las ayudas y materiales que facilitan el alcance de las metas propuestas. Como docentes, teníamos falencias en cuanto al diseño de unidades didácticas, porque desconocíamos cómo elaborar un buen proceso de planeación. Sin embargo, esta experiencia nos permitió comprender el proceso y mejorar nuestras prácticas pedagógicas tanto en el diseño, como en la evaluación de nuevas unidades didácticas.

9. ANEXOS

A continuación presentamos el listado de anexos de la unidad didáctica.

Anexo 1. Tarea implementadas. En el anexo 1, presentamos las guías de trabajo de las cuatro tareas implementadas

Anexo 2. Tareas para futuras implementaciones. En el anexo 2, presentamos las cuatro tareas modificadas para futuras implementaciones.

Anexo 3. Instrumentos de recolección de información estudiantes. En el anexo 3, incluimos los grafos de indicadores de logro de los esquemas de los semáforos de tres tareas, el matemátografo y ejemplos diligenciados por los estudiantes.

Anexo 4. Instrumentos de recolección de información profesores. En el anexo 4, presentamos los formatos y ejemplos diligenciados del diario del profesor y de la ficha de recolección de información de la tarea especial.

Anexo 5. Instrumentos de evaluación. En el anexo 5, incluimos los formatos de los instrumentos de evaluación que se aplicaron a los escolares: test diagnóstico, evaluación parcial, evaluación final, cuestionario final de evaluación y evaluación de roles.

Anexo 6. Instrumentos de evaluación para futuras implementaciones. En el anexo 6, presentamos los formatos de instrumentos de evaluación que fueron modificados para futuras implementaciones: evaluación parcial y evaluación final.

Anexo 7. Rúbricas de las tareas y evaluación final. En el anexo 7, incluimos las rúbricas utilizadas para las correcciones de las tareas y la evaluación final.

Anexo 8. Ficha de fases de las sesiones de las tareas. En el anexo 8, presentamos las fichas de fases de las cuatro tareas diseñadas para la unidad didáctica.

Anexo 9. Descripción de las sesiones de la unidad didáctica. En el anexo 9, incluimos las descripciones de las sesiones de la unidad didáctica implementada y una tabla que las resume.

Anexo 10. Listados de capacidades, errores y expectativas afectivas. En el anexo 10, presentamos el listado completo de capacidades, errores y expectativas afectivas.

Anexo 11. Explicación complementariedad. El anexo 11 corresponde a una presentación en Power-Point de una explicación del método de complementariedad para la primera parte de la tarea El cultivo.

Anexo 12. Introducción el cultivo. El anexo 12 corresponde a una presentación en Power-Point de la explicación del modelo de Sebastián de la segunda parte de la tarea El cultivo.

Componentes de las tareas. En el anexo 13 se encuentran descritas las tareas El tangram, La herencia y El paralelogramo de acuerdo con sus componentes.

Matriz dafo. En este anexo, presentamos el listado de dificultades, amenazas, fortalezas y oportunidades que hacen parte del balance estratégico de la unidad didáctica.

Anexo 15. Secuencia instructiva de las tareas. En el anexo 15, incluimos las secuencias instructivas de las tareas El tangram, La herencia y El paralelogramo.

Anexo 16. Planillas de registro de datos. En el anexo 16, presentamos las planillas de registro de datos que se utilizaron para procesar la información.

10. REFERENCIAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.
- Beaton, A. E. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years. IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Champion Hall 323, Chestnut Hill, MA: Boston College, Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy. Disponible en <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED406419.pdf>
- Chamorro, C. y Belmonte, J. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Kluwer.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/444/>
- Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado*, 18(3), 319-338. Disponible en <http://www.ugr.es/%7Erecfpro/rev183COL7.pdf>
- González, M. J. y Gómez, P. (2013). *Apuntes sobre análisis cognitivo. Módulo 3 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://tinyurl.com/n4zgncc>
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.
- Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2014). *Apuntes sobre evaluación de la planificación. Módulo 6 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*, 10(2), 10-26. Disponible en <http://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCEQFjAA&url=http%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F3714823.pdf&ei=wcqzVJ2RNMGINrXRgZAC&usq=AFQjCNE7MGqSxq9thfAQIjqy-9nwt8-xvQ&sig2=qXRbfgGmrLpYziKEbQJ0Jg>

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor. Disponible en <http://is.gd/kqjT0a>
- OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas*. París: OCDE. Disponible en <http://tinyurl.com/9wmr4ct>
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid, España: Santillana. Disponible en <http://tinyurl.com/8c3w873>
- Romero, I. y Gómez, P. (2013). *Apuntes sobre análisis de actuación. Módulo 5 de MAD*. Documento no publicado. Bogotá: Universidad de los Andes. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/2107/>