EXPLORANDO INDÍCIOS DE CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR MATEMÁTICA COM O MODELO MTSK[1]

Exploring indications of specialised knowledge for mathematics teaching through application of the MTSK model

Jeferson G. Moriel-Junior[a], José Carrillo[b]

[a]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso (Brasil), [b]Universidade de Huelva (Espanha)

Resumen

En este trabajo presentamos una estrategia metodológica que empleamos para gestionar los indicios de conocimiento identificados con el modelo MTSK y discutimos los resultados obtenidos. El análisis finalmente efectuado nos posibilitó identificar más subdominios, y más conocimientos con mayor detalle, que lo obtenido en el análisis previo. Concluimos que investigar los indicios por medio de preguntas elaboradas específicamente para cada uno de ellos, considerando el subdominio MTSK al que está asociado, permite ampliar la comprensión del fenómeno investigado y aporta confianza en los conocimientos identificados. De este modo, no solo se refuerza la importancia de esta etapa (investigar los indicios) cuando se utiliza este modelo para explorar el conocimiento docente, sino que ofrecemos también más elementos sobre cómo puede conducirse dicha etapa.

Palabras clave: *indicios de conocimiento, MTSK, metodología de investigación, futuro profesor de matemáticas.*

Abstract

In this paper we present the methodological approach used to deal with knowledge indications that have been identified through application of the MTSK model, and discuss the results obtained. By applying this approach, we were able to identify both further subdomains, and more knowledge in greater detail than previous analyses had achieved. We conclude that investigating the indications through questions developed specifically for each of them, and considering the subdomain of MTSK with which each is associated, contributes to a wider understanding of the phenomenon under analysis and improves the reliability of the knowledge identified. These results not only reinforce the importance of this step (investigating the indications) when using the model to explore teaching knowledge, but also provide further suggestions as to how it can be conducted.

Keywords: *knowledge indications, MTSK, research methodology, prospective mathematics teacher.*

INTRODUÇÃO

Dentre os diferentes modelos resultantes de investigações sobre o conhecimento de professores de Matemática – como o de Shulman (1986) e de Ball, Thames, & Phelps (2008) – tem sido desenvolvido nos últimos anos o *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* – MTSK (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013). Diversos estudos, incluindo teses doutorais (em finalização), tem utilizado-o como marco teórico e identificado não somente conhecimentos propriamente ditos, como também indícios de que outro(s) pode(m) ter sido colocado(s) em jogo (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior, Wielewski, & Montes, 2013). Neste último caso, pesquisadores podem questionar: como lidar com *indícios de conhecimento* que aparecem

Moriel-Junior, J. G., Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

quando investigamos o conhecimento docente com o MTSK de modo que se convertam em respostas para as perguntas da pesquisa? O trabalho de Flores, Escudero, & Aguilar (2013) iniciou o debate sobre isso ao identificar *oportunidades para estudar* aspectos do conhecimento do professor em diversos contextos de investigação, entretanto não teve como objetivo efetivamente fazer tal *estudo*. Por ser um marco teórico "novo", nosso trabalho pretende avançar nesta linha ao apresentar a estratégia metodológica que utilizamos para lidar com indícios de conhecimentos identificados em nossa pesquisa de doutorado e comparar os resultados produzidos antes e depois da exploração dos indícios em termos de amplitude, profundidade e confiabilidade agregados à pesquisa.

MARCO TEÓRICO

O MTSK é um modelo teórico sobre o conhecimento profissional que é específico de professores de Matemática, cuja constituição considera os avanços de modelos anteriores (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Shulman, 1986) e busca superar as limitações deles (Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013; Escudero, Flores, & Carrillo, 2012; Flores, Escudero, & Carrillo, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, 2013; Montes, Contreras, & Carrillo, 2013). Usamos as siglas originais da língua inglesa para descrever suas partes (Fig. 1). Este modelo possui dois domínios – *Conhecimento matemático* (MK) e *Conhecimento pedagógico do conteúdo* (PCK) – e cada um deles é dividido em três subdomínios. As crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem são incorporadas a ele e permeiam os subdomínios, pois elas dão sentido às suas ações.

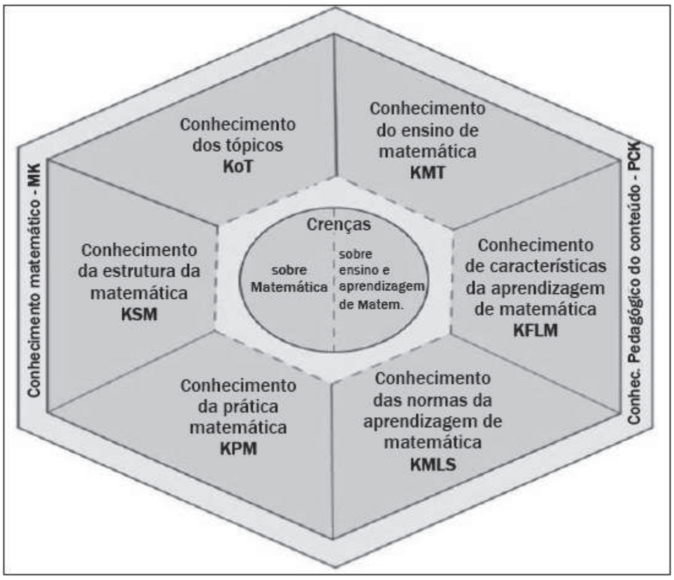

Figura 1. Domínios e subdomínios do MTSK (Carrillo et al., 2013, pp. 5, tradução nossa).

Iniciamos descrevendo os subdomínios do *Conhecimento matemático*. O *conhecimento de tópicos* (KoT) inclui conteúdos matemáticos a serem ensinados (incluindo uma fundamentação conceitual profunda) e seus diferentes aspectos (incluindo definições, interpretações e propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico específico, justificativas para procedimentos algorítmicos, exemplos e contraexemplos, modelos realísticos, situações de aplicação e usos extra matemáticos). No *conhecimento da estrutura matemática* (KSM) está conexões entre tópicos (avançados⇔elementares, prévios⇔futuros, de diferentes áreas matemáticas, etc., exceto as de fundamentação previstas em KoT) que permitem reconhecer certas estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados. Um exemplo deste tipo de conexão é saber que se pode utilizar a ideia de limite de funções para justificar que a divisão 0/0 é indeterminada (Lima, 1982). O *conhecimento da prática matemática* (KPM) inclui maneiras de proceder em Matemática, incluindo modos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, elementos que estruturam uma demonstração, modos de definir e usar definições, de selecionar representações, de argumentar, de generalizar, explorar e, ainda, de como as relações de KSM são estabelecidas.

Passamos à descrição dos subdomínios do *Conhecimento pedagógico do conteúdo*. O *conhecimento do ensino de matemática* (KMT) diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas respectivas características (limitações/potencialidades existentes em si mesmos) que permitam ao professor optar por uma estratégia para ensinar determinado conteúdo (incluindo organizar uma série de exemplos ou criar analogias e metáforas). Por exemplo, conhecer a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular, por exemplo) ou um modelo (como pizzas ou chocolates) e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo (Moreira & Ferreira, 2008). Também inclui o conhecimento (formal ou informal) de elementos teóricos sobre o ensino de Matemática, por exemplo, sobre a resolução de problemas. *Conhecimento das características de aprendizagem de Matemática* (KFLM) inclui como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou informais), as características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos aprendizes ao lidar com cada conceito. Por exemplo, conhecer a teoria APOS para descrever como ocorre o desenvolvimento cognitivo de um estudante em aprendizagem Matemática. O *conhecimento das normas da aprendizagem de Matemática* (KMLS) se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemático nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, materiais convencionais de apoio, objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos.

Os seis subdomínios descrevem como entender o conhecimento específico de um professor de Matemática e servem como "categorias" de análise em investigações. Por isso, o MTSK também pode ser considerado uma ferramenta metodológica para exploração analítica deste conhecimento.

METODOLOGIA

Os dados aqui utilizados provem da análise realizada em nossa tese doutoral (em desenvolvimento pelo primeiro autor deste texto, sob coorientação do segundo) que tem como uma de suas etapas investigar conhecimentos de professores e futuros professores de Matemática por meio do modelo MTSK. Trata-se de uma pesquisa qualitativa (Bogdan & Biklen, 1991) desenvolvida em quatro fases, as quais apresentamos a seguir com o respectivo recorte feito para este artigo.

A Fase 1 foi destinada à coleta de dados por meio de gravação audiovisual (e posterior transcrição) de uma Oficina realizada com professores e futuros professores no Projeto "Observatório da Educação" (OBEDUC - Brasil) onde se discute possibilidades de resposta para um *por que matemático* sobre divisão de frações, a saber: Por que na divisão de frações multiplica-se o numerador pelo inverso do denominador? A dinâmica da Oficina envolveu o debate sobre seis possibilidades de resposta encontradas na literatura, baseadas nos seguintes conceitos-chave: PR1 – Regra; PR2 – Inverso multiplicativo e equivalência; PR3 – Analogia à divisão de números inteiros; PR4 – Empacotamento; PR5 – Geometria; PR6 – Indução (Moriel Junior & Wielewski, 2013). Embora esta questão esteja formulada em termos matemáticos e os conceito-chave das PR sejam predominantemente matemáticos, trata-se de uma questão que professores podem enfrentar quando vão preparar aulas ou ensinar. Por isso o fio condutor da Oficina foi a indagação: O que você responderia a um aluno que fizesse esta pergunta? Desta forma, tanto o domínio do conhecimento matemático (MK), quanto o pedagógico do conteúdo (PCK) são contemplados.

A Fase 2 foi destinada à análise, por meio do MTSK, de conhecimentos mobilizados pelos participantes da Oficina, bem como, para identificação de indícios de conhecimento. Utilizamos a técnica de "análise de conteúdo" (Bardin, 1977) dos trechos transcritos para obter elementos que nos permitam realizar a análise por meio de comparações sistemáticas com as definições dos subdomínios do MTSK e, assim, explorar analiticamente os conhecimentos em questão.

A Fase 3 foi destinada à coleta de dados por meio de gravação em áudio (e posterior transcrição) de entrevista semiestruturada (no caso, com um Licenciando em Matemática três meses após a Oficina) para refinar as análises anteriores, dirimido eventuais dúvidas e aprofundando os resultados obtidos na Fase 2. Utilizamos etapas e procedimentos de *entrevista reflexiva* (Szymanski, Almeida, & Pradini, 2011) com questões baseadas nas interações durante a Oficina. Neste tipo de entrevista, perguntas complementares – de esclarecimento, focalizadoras ou de aprofundamento – também podem ser utilizadas, como: *O que isto significa para você?*; *Aqui você mencionou que...*; *Fale mais sobre...*; *Por que você pensa que...* (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Desta forma, obtivemos dados para investigar os indícios de conhecimento do sujeito selecionado encontrados na fase anterior.

Na Fase 4 usamos o modelo MTSK para analisar (cf. técnica descrita na Fase 2) os dados obtidos na Fase 3. Com isso buscamos compreender se e como os indícios se converteriam em conhecimentos.

Considerando que o objetivo deste artigo focaliza o desenvolvimento das Fases 3 e 4, apresentamos brevemente na próxima seção os dados obtidos na Fases 1 e 2 e, em seguida, descrevemos em detalhes a análise realizada para investigar os indícios de conhecimentos.

ANÁLISE DE DADOS

No Episódio a seguir (extraído dos dados da Fase 1), o Licenciando em Matemática (L) faz um comentário durante a Oficina sobre a PR2 (baseada no conceito de inverso multiplicativo e de equivalência) quando questionado pelo investigador (I) da seguinte forma:

I: O que você pode dizer sobre as diversas possibilidades de respostas que vimos nesta oficina?

L: Eu já tinha uma noção que ia ter que resolver por esse caminho [expresso na PR 2] só que eu tinha esquecido do inverso multiplicativo. [...] Isso aí eu sei, eu uso isso na faculdade sempre. [...] Quando a gente está falando de criança, a gente fica com a ideia muito fechada. Se eu tivesse lembrado que o conjunto dos racionais é um corpo e todo corpo tem um inverso multiplicativo, [a resposta ao por que] teria que sair de alguma forma desse jeito.

A análise deste Episódio, realizada na Fase 2 com o modelo MTSK, revelou conhecimentos expressos pelo Licenciando (L) e também indicou que outros conhecimentos podem ter sido mobilizados, algo que chamamos de "indícios" no sentido de que configuram oportunidades de formularmos perguntas para indagar a amplitude e profundidade de tal conhecimento. Em relação aos conhecimentos, detectamos que ele conhece (i) os termos matemáticos "inverso multiplicativo", "conjunto dos números racionais" e "corpo" – pertencente ao KoT; (ii) uma propriedade do conjunto de números racionais ("racionais é um corpo") – pertencente ao KoT; (iii) uma propriedade de corpo ("todo corpo tem inverso multiplicativo") – pertencente ao KoT.

Esses conhecimentos, juntamente com o contexto no qual eles foram mencionados fornecem indícios de que outros conhecimentos especializados para ensinar Matemática podem ter sido mobilizados pelo Licenciando. Vejamos isto a seguir.

O primeiro item mostra que o futuro professor conhece certos termos matemáticos e pela forma como foram utilizados (ou seja, o contexto em que são mencionados e aplicados) nos sugere que seu conhecimento sobre os conceitos envolvidos pode ir além de simplesmente "conhecer termos", dizer seus "nomes". É possível que ele conheça particularmente a definição de cada um, podendo também incluir propriedades, aplicações ou modos de utiliza-los, etc. (enquadrados em KoT).

Os dois últimos itens evidenciam que o Licenciando parece conhecer conexões entre conceitos matemáticos (conjunto de números racionais, inverso multiplicativo e corpo algébrico) que lhe permitem não só conhecer as respectivas propriedades, como também saber o papel que elas tem para explicar o *por que matemático* (como feito na PR2 usando inverso multiplicativo). Isto sugere indícios de conhecimento de conexões intraconceituais (KoT) ou interconceituais (KSM).

Por fim, a análise do referido trecho indica que o futuro professor parece ter uma ideia intuitiva de como se realiza esta demonstração, em relação à lógica da mesma, embora não recordasse o uso da propriedade específica envolvida (inverso multiplicativo). Isto nos sugere que ele pode ter conhecimento sobre como proceder para fazer uma demonstração, incluindo elementos que a estruturam e são necessários em seu esquema argumentativo (KPM). Por este indício, ou pelo fato do Licenciando ter mencionado a PR2, acreditamos também que ele conhece ao menos uma demonstração dentre as várias possíveis para justificar o *por quê matemático*, pertencentes ao KoT.

A análise brevemente apresentada até aqui (Fase 2) com os dados obtidos na Oficina (Fase 1) não é suficiente para esclarecer se o sujeito conhece uma demonstração (KoT) ou se (também) sabe como faze-la (KPM). Tampouco, ajuda a elucidar os outros indícios levantados. Diante disso, sentimos a necessidade de continuarmos investigando e ver se tais indícios se converteriam (ou não) nos respectivos conhecimentos ou, ainda, se revelariam outros. Portanto, este Episódio configura um cenário que nos brinda com algumas oportunidades “de indagar acerca do conhecimento que utiliza o [futuro] professor de Matemática neste contexto” (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013).

No quadro a seguir, sintetizamos os indícios apresentados e as respectivas perguntas que realizamos para investiga-los na entrevista (Fase 3). Para uma melhor organização, a numeração respeita a ordem cronológica em que apareceram na entrevista.

Quadro 1. Indícios de conhecimentos, subdomínios do MTSK e respectivas perguntas feitas para o Licenciando na entrevista.

INDÍCIOS DE CONHECIMENTO (SUBDOMÍNIO MTSK) ***Indício de que ele conhece...***	**PERGUNTA**
1. uma demonstração de “*por que inverter e multiplicar para dividir frações?*” que utiliza o inverso multiplicativo (KoT). 2. como utilizar o inverso multiplicativo para explicar “*por que inverter e multiplicar para dividir frações?*”, ou seja, os elementos argumentativos necessários para demonstrar (KPM).	1. [...] você quer tentar fazer (essa demonstração)? Veja se você consegue fazer.
3. o conceito de inverso multiplicativo (KoT). 4. o conceito de corpo (KoT).	2. Como você explica o “inverso multiplicativo”? 3. Você consegue definir o que é um corpo?
5. alguma conexão intraconceitual entre conjunto de números racionais, inverso multiplicativo e corpo (KoT). 6. alguma conexão interconceitual (envolvendo números racionais, inverso multiplicativo e corpo) que o permite responder ao “por que” (utilizando inverso multiplicativo) (KSM).	(*) 4. Além dessa conexão, você viu mais alguma?

**Observação*: Não foi necessário fazer a pergunta que tínhamos elaborado para investigar o Indício 5 porque na pergunta 3 já foi possível obter as informações necessárias. Caso necessário, pediríamos explicação sobre esta conexão.

Nas próximas subseções apresentamos a pergunta que fizemos na entrevista (I) com a resposta do Licenciando (L) e analisamos os conhecimentos que mobilizados usando o modelo MTSK para, então, tirarmos conclusões sobre os indícios descritos (obtidos na Fase 2).

Investigando os Indícios de conhecimento 1 e 2

Na primeira e na última frase do Episódio, percebemos evidências de que o Licenciando parece ter uma ideia intuitiva de como se realiza “aquela” demonstração, em relação à lógica da mesma, embora não recordasse o uso da propriedade específica envolvida (inverso multiplicativo). Isto sugere que ele não só conhece uma demonstração (Indício 1), mas também conhece os elementos argumentativos necessários para desenvolve-la (Indício 2).

No início da entrevista o Licenciando diz que durante a Oficina nós realizamos uma "demonstração, [...] primeiro com números e depois algebricamente", por meio da PR2. Entretanto, a parte algébrica não foi feita. Com isso, aproveitamos para investigar os Indícios 1 e 2 como segue:

I: Não fiz, mas você quer tentar fazer [essa demonstração]? Veja se você consegue fazer. [Deixei livre para que ele olhasse a PR2].

L: Não, não preciso nem olhar. [Começa escrever] Se você tem um *a* sobre *b*, divido por um *c* sobre *d* [parte I da Figura 2]. Então para você fazer isso aqui virar *1* [aponta para o denonimador *c/d* da parte I], tem simplesmente que multiplicar esse aqui [aponta para o numerador *a/b* da parte I] por *d/c* e aqui também [aponta para o denominador *c/d* da parte I]. Para não mudar a fração, o valor numérico, então você tem que fazer a mesma conta em cima e embaixo. Continuando... Simplifica [parte II]. Fica *1* [no denominador e], fica *a* sobre *b* vezes *d* sobre *c* [no numerador da parte III]. Então fazendo essa conta, isso vai ficar *a* vezes *d*, sobre *b* vezes *c* [parte IV]. Que é igual a *a/b* vezes *d/c* [parte V].

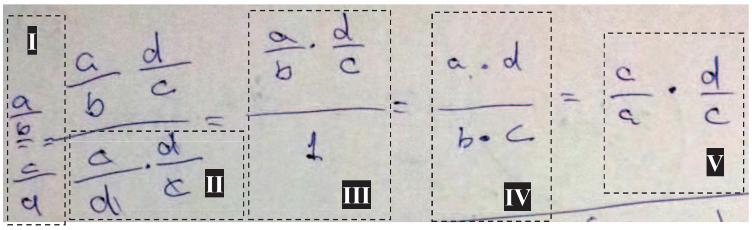

Figura 2. Demonstração da regra de divisão de frações escrita pelo Licenciando*.

Então, saímos daqui [parte I] e chegamos aqui [parte V]. Aí você fez essa conta aqui [se referindo a PR2 abordada na Oficina] e agora substituindo algebricamente a gente percebe a regra. **Observação:* Embora o Licenciando tenha verbalizado todo o processo por meio do qual obteve *a/b* vezes *d/c* [parte V], por um lapso ele não escreveu adequadamente *a/b*.

A demonstração realizada pelo Licenciando tem argumentação similar à da PR2 (feita com um exemplo numérico). Ambas justificam o procedimento de "inverter e multiplicar" se apoiando no princípio da equivalência de frações para multiplicar tanto numerador, quanto denominador pelo inverso multiplicativo do numerador, cuja finalidade é transformar o denominador em 1 e obter a expressão desejada no numerador (parte V da Figura 2). Isto mostra que o futuro professor conhece os elementos constituintes da demonstração e os utiliza para fazer sua generalização (embora fosse possível ter mais rigor), a qual valida o procedimento de divisão para quaisquer duas frações. Trata-se de um conhecimento sintático (pertencente ao KPM) que confirma o Indício 2. Como consequência, o futuro professor mostrou conhecer uma, dentre as diversas demonstrações existentes baseadas no inverso multiplicativo para justificar a regra da divisão de frações (Lopes, 2008; Silva & Almouloud, 2008). Conhece-las pertence ao KoT e isto confirma o Indício 1.

Resumindo, os Indícios 1 e 2 foram confirmados.

Investigando o Indício de conhecimento 3

Na entrevista relembramos o Licenciando de que ele afirmara na Oficina que "tinha uma noção" de que o "por que matemático" podia ser respondido utilizando o caminho apresentado na PR2, mas que tinha "esquecido o inverso multiplicativo". Em seguida, aproveitamos para questionar:

I: Como você explica o inverso multiplicativo?

L: [...] Nos reais, nos racionais e até mesmo nos números complexos tem o "um" (é o *1+0.i*). Então, inverso multiplicativo é aquele pelo qual a gente multiplica e dá o "um" daquele corpo, daquele anel. Ou seja, é aquele pelo qual a gente consegue multiplicar e dar "um", chegar no [elemento] neutro.

As duas últimas frases confirmam o Indício 3 de que o Licenciando conhece uma definição de inverso multiplicativo (KoT). Também conhece o inverso multiplicativo do conjunto dos números complexos ($1+0.i$), pertencente ao KoT. Ficou evidente ainda o conhecimento de uma similaridade existente entre três conjuntos numéricos (reais, racionais e complexos), a saber, todos eles possuem inverso multiplicativo (o "um"). Este tipo de relação interconceitual está no KSM.

Resumindo, o Indício 3 foi confirmado e outros conhecimentos foram colocados em jogo: (i) conhece o inverso multiplicativo do conjunto dos números complexos (KoT) e (ii) conhece uma similaridade entre três conjuntos numéricos – todos eles possuem inverso multiplicativo – (KSM).

Investigando o Indício de conhecimento 4

No Episódio o Licenciando mencionou o termo "corpo" algébrico e estabeleceu conexões entre outros conceitos (inverso multiplicativo e conjunto dos números racionais). Isso nos sugeriu, em primeiro lugar, o indício de que ele conhece o conceito de corpo (KoT), por isso investigamos se e como ele o definia.

I: Você consegue definir o que é um corpo?

L: Corpo é uma estrutura algébrica que tem as propriedades... Pra começar a definir um corpo, primeiro eu tenho que ter um anel. Esse anel tem que ser [começa a escrever – figura abaixo]. Definida as operações ele tem que ser um anel pra soma e pra multiplicação. E na soma ele é abeliano, ou seja, valem todas as propriedades (associatividade, comutatividade, tem o zero que é o elemento neutro da adição e tem o inverso aditivo, ou seja, possui inverso aditivo – para todo a, existe um $-a$ tal que $a + (-a)$ é igual a elemento neutro. Pra soma ele é completo e pra multiplicação ele tem que ser... Esse anel tem que ser um domínio de integridade. O que é domínio de integridade? É um anel comutativo, aonde a comutatividade é da multiplicação, possui o 1 que é o elemento neutro da multiplicação e não possui divisor de zero, ou seja, $a.b$ para ser zero, $a=0$ ou $b=0$. Os dois não pode. Pra ser igual a zero um ou outro tem que ser zero. Ou seja, não consigo ter como no Z_p onde 2 vezes 3 é 6 e no Z_6, 2 vezes 3 (os dois são diferentes de zero) e dá zero. Lembra? E pra completar, pra chegar na estrutura do corpo (vou chamar o anel de R), para todo a pertencente a R existe a^{-1} tal que a operado com a^{-1} é igual a 1. Que é o inverso multiplicativo.

O Licenciando mostra conhecer a definição de que corpo é uma estrutura algébrica que possui certas propriedades, as quais ele se recorda de todas, algo pertencente ao KoT. Isto confirma o Indício 4. Durante a explicação ele também mobiliza_outros termos, conceitos, propriedades, exemplos e contraexemplos matemáticos pertencentes ao KoT (anel, anel abeliano, associatividade e comutatividade, elemento neutro, inverso aditivo, domínio de integridade, anel comutativo, "divisor de zero", conjunto Z_p, contraexemplo de "divisor de zero", inverso multiplicativo). Vale destacar que foi apresentada uma definição de inverso multiplicativo mais rigorosa do que a anterior, reforçando nossa conclusão sobre o Indício 3.

A definição de corpo apresentada usa uma rede de distintas estruturas algébricas (como anel, domínio de integridade, propriedades, etc) e isto indica conhecimento da estrutura matemática (KSM).

Resumindo, o Indício 4 foi confirmado e outros conhecimentos foram colocados em jogo, a saber: (i) termos, conceitos, propriedades, exemplos e contraexemplos matemáticos (KoT) e (i) conexões entre estruturas algébricas para construir a definição de corpo (KSM). O conhecimento do conceito de inverso multiplicativo (associado ao Indício 3) foi reforçado.

Investigando o Indício de conhecimento 5

No Episódio o Licenciando afirma que *o conjunto dos racionais é um corpo* e ao definir o que é um corpo (na resposta à pergunta 3) entendemos que ele reconhece que o conjunto dos racionais (focalizado na Oficina) tem a estrutura algébrica necessária para ser corpo. Com isso confirmamos o Indício 5 de que ele conhece uma propriedade deste conjunto que é mais “profunda” do que se vê habitualmente na Educação Básica (trata-se de uma conexão intraconceitual enquadrada no KoT).

A pergunta sobre corpo forneceu informações suficientes para investigarmos o indício em questão e, por isso, nenhuma outra foi necessária. Além disso, se olharmos particularmente a primeira e a última frases de sua resposta, veremos que ele não só conhece que (todo) *corpo tem inverso multiplicativo*, como também sabe que é uma de suas propriedades. Isto reforça a existência do conhecimento que havíamos detectado análise do Episódio da Oficina (item 3 obtido na Fase 2).

Resumindo, o Indício 5 (conexão intraconceitual em KoT) foi confirmado a partir da pergunta anterior (Indício 4). Também foi possível reforçar um conhecimento detectado na Fase 2 (“todo corpo tem inverso multiplicativo”).

Investigando o Indício de conhecimento 6

No Episódio o Licenciando afirma que *“Se eu tivesse lembrado que o conjunto dos racionais é um corpo e todo corpo tem um inverso multiplicativo, [então a resposta ao por que] teria que sair de alguma forma desse jeito”*. Com isso ele parece estabelecer alguma conexão entre (i) uma propriedade de um conceito de matemática acadêmica (“todo corpo tem inverso multiplicativo”) e (ii) uma propriedade avançada de um conceito da Educação Básica (“conjunto dos racionais é corpo”) para, então, justificar o uso do inverso multiplicativo na solução do *por que matemático*. Isto nos deu indícios de que ele conhece conexões interconceituais (pertentences ao KSM). Para investigar isso perguntamos:

I: Além dessa conexão [entre corpo e racionais referente ao Indício 5], você viu mais alguma?

L: Eu lembrei da estrutura de corpo porque a gente faz essas contas lá no universo dos reais, dos racionais (a fração tá lá nos racionais). O conjunto dos racionais é corpo, então pra gente conseguir chegar no 1 [se referindo à parte III da Figura 2] precisa do inverso multiplicativo. Era uma coisa que a gente trabalha tanto aqui (na universidade) que lá na hora, na aula... Parece que é tão difícil de resolver, e não é. Na verdade é fácil. O problema é só encaixar os contextos das coisas e saber que a estrutura exige o inverso.

Nesta resposta há uma manifestação da aplicação de seu conhecimento de estrutura algébrica para resolver um problema de Matemática elementar a respeito da divisão de frações. O Licenciando faz a leitura da situação por meio de um conceito avançado (estrutura de corpo) e isto o permite dizer que se é preciso conseguir o “um” (da PR2 e da sua demonstração), então tem-se que aplicar o inverso multiplicativo (porque todo corpo tem inverso multiplicativo). Neste caso o conjunto dos racionais é o corpo, entretanto, sua estratégia de usar o inverso multiplicativo para obter o “um” seria a mesma usada em todo e qualquer outro *corpo C*. Isto é reforçado por afirmações anteriores:

Indício 3: Nos reais, nos racionais e até mesmo nos números complexos tem o “um” (é o $1+0.i$). [...]

Indício 4: [...] pra chegar na estrutura do corpo (vou chamar o anel de R), para todo a pertencente a R existe a^{-1} tal que a operado com a^{-1} é igual a 1, que é o inverso multiplicativo.

Entendemos que o futuro professor abordou um conteúdo de Matemática elementar a partir de uma perspectiva avançada, algo pertencente ao KSM. Com isso, o Indício 6 foi confirmado indicando o conhecimento de uma conexão entre o conceito de corpo e inverso multiplicativo para justificar o procedimento de divisão de frações (no conjunto dos números racionais).

CONCLUSÕES

Este artigo mostra como realizamos e quais foram os resultados da investigação dos *indícios de conhecimento* de um Licenciando em Matemática, identificados por meio do modelo MTSK no Episódio extraído de uma Oficina de formação sobre um *por que matemático*.

O ponto de partida deste processo foi a primeira análise, *antes da exploração dos indícios*, na qual encontramos o conhecimento de três termos matemáticos e de duas propriedades (ambos KoT). A *exploração dos indícios*, por meio de perguntas específicas em entrevista considerando seus respectivos subdomínios do MTSK (cf. Quadro 1), mostrou que o sujeito de fato possuía os referidos conhecimentos – associados a definição de conceitos (KoT), conexões intra (KoT) e interconceituais (conhecimento da estrutura matemática – KSM), de e sobre uma demonstração/generalização (conhecimento da prática matemática – KPM) – e evidenciou outros, incluindo conhecimento de termos, conceitos, propriedades exemplos e contraexemplos (KoT) e de conexões interconceituais (KSM) (cf. resultados dos Indícios 3 e 4). Com isso, obtivemos tanto um ganho significativo na amplitude dos resultados (aumento na quantidade de conhecimentos detectados), quanto em profundidade, pois inicialmente detectamos conhecimentos superficiais (como conhecer "nome de termos") que se converteram em algo mais rico, consistente e relevante para a prática docente como é o caso do conhecimento dos respectivos conceitos, definições, propriedades, demonstrações e suas conexões.

Identificar mais subdomínios e conhecimentos, assim como obtê-los com mais detalhes possibilita uma maior confiabilidade nos dados. Neste sentido, também vimos que alguns achados foram validados por outros ao longo da análise de indícios, a saber: (i) o conhecimento do Indício 3 é reforçado pela discussão do Indício 4; (ii) o do Indício 6 é reforçado pela discussão do Indício 3 e 4; (iii) o conhecimento de que *todo corpo tem inverso multiplicativo* (Fase 2) é reforçado pela discussão do Indício 5.

Avançamos em relação a outros estudos de episódios envolvendo conhecimentos de professores de Matemática com o MTSK (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior, Wielewski, & Montes, 2013; Montes, Contreras, & Carrillo, 2013) por analisarmos os resultados de um percurso completo de investigação, incluindo uma primeira análise (Fase 2) e uma segunda análise com foco nos *indícios de conhecimento* (Fase 4). Esta estratégia se configurou numa "triangulação metodológica" (Denzin, 1989), por meio da qual obtivemos elementos que mostram ser possível ampliar a compreensão sobre o fenômeno investigado (extraído de episódio, cenário, trecho, etc.) por meio de perguntas elaboradas especificamente para cada indício, considerando o subdomínio MTSK ao qual está associado. A análise de outras estratégias metodológicas, particularmente as empregadas nas teses que usam o MTSK (em andamento), fornecerão mais elementos para confirmar e fornecer mais detalhes sobre a relevância e necessidade da exploração de indícios de conhecimento especializado de (futuros) professores de Matemática.

Por fim, destacamos dois pontos importantes sobre este processo de investigação de indícios. O primeiro é que nem sempre haverá uma correspondência entre o número de indícios e de perguntas, pois uma mesma pergunta pode gerar informações necessárias ou suficientes para analisar diferentes indícios (cf. visto entre a pergunta 1 e os Indícios 1 e 2 e também entre pergunta 3 e os Indícios 4, 5 e 6). O segundo é que embora os indícios identificados no Episódio estejam todos nos subdomínios de conhecimento matemático (MK), também são encontrados indícios relacionados aos subdomínios de conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) em teses e artigos (Flores, Escudero, & Aguilar, 2013; Moriel Junior et al., 2013).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389-407.

Bardin, L. (1977). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Ediçoes 70.

Bogdan, R, & Biklen, S. (1991). *Investigação qualitativa em educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Carrillo, J, Climent, N, Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 2985-2994). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Denzin, N. (1989). *The Research Act (3rd edn)*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall. [Vol. I: 185]

Escudero, D. I, Flores, E., & Carrillo, J. (2012). El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas. *Actas de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (15. ed., pp. 35-42). México.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., pp. 275-282). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D. I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialised content Knowledge. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 3055-3064). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230.

Lima, E. L. (1982). Alguns porquês. *Revista do Professor de Matemática, 1*(1).

Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 1-22.

Montes, M. A., Aguilar, A, Carrillo, J, & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MTSK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (8. ed., pp. 3185-3194). Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara.

Montes, M. A., Contreras, L. C., & Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. In A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (17. ed., pp. 403-410). Bilbao, Espanha: SEIEM.

Moreira, P. C., & Ferreira, M. C. C. (2008). A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 103-127.

Moriel Junior, J. G., & Wielewski, G. D. (2013). *Seis possibilidades de resposta para o por quê matemático sobre divisão de frações.* Paper presented at the Seminario Educação (SEMIEDU 2013), Cuiabá.

Moriel Junior, J. G., Wielewski, G. D., & Montes, M. A. (2013). *Conhecimentos mobilizados durante uma formação docente sobre por quês matemáticos: o caso da divisão de frações.* Paper presented at the VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM), Canoas, Brasil.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher, 15*(2), 4-14. doi: http://www.jstor.org/stable/1175860

Silva, M. J. F., & Almouloud, S. A. (2008). As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 21*(31), 55-78.

Szymanski, H., Almeida, L. R., & Pradini, R. C. A. R. (2011). *A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva* (4 ed.). Brasília: Liber Livro.

[1] Este trabalho de Doutorado pela Rede Amazônica de Ensino de Ciências e Educação Matemática (REAMEC) contou com apoio do Programa de Doutorado Sanduíche no Exterior (Bolsista da CAPES – Processo nº 1219-61-3) e da FAPEMAT (Processo nº 121639/2013).