

CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Gisela Montiel Espinosa
CICATA del IPN, México
gmontiel@ipn.mx

Campo de Investigación: Socioepistemología; Nivel educativo; Medio Superior

Resumen

La visión que se circunscribe explícitamente al aprendizaje individual hubo de cambiarse por otra centrada en el aprendizaje social. Esta ha sido propia de la teoría del conocimiento y ha influido a las teorías sobre conocimiento científico (filosofía de la ciencia). Si bien se acepta al individuo como agente cognitivo, también se reconoce el carácter situado de tal cognición. Esto constituye nuestro punto de partida para explicar el sentido en el cual la cognición es social. La dimensión social, en nuestro estudio al fenómeno didáctico ligado a la función trigonométrica, toma el carácter de **práctica social**.

Aproximación Socioepistemológica

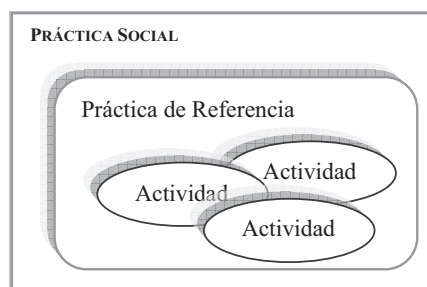
La Aproximación Socioepistemológica a la Investigación en Matemática Educativa se plantea como tarea fundamental el examen del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, caracterizando al conocimiento como el fruto entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002). Esta aproximación retoma la visión sistémica de la *didáctica en la escuela; pero sin escenarios* (Cantoral y Farfán, 2003) e incorpora una componente social a la construcción del conocimiento matemático. Este acercamiento incorpora entonces cuatro componentes, a saber, el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004). La incorporación de la práctica social modifica el centro de atención de la *componente epistemológica*, lo desvía de los conceptos u objetos matemáticos preestablecidos a la identificación de prácticas de referencia y actividades, ubicando a estas en contextos particulares. La *componente cognitiva* asume entonces al conocimiento como una serie de procesos sustentados por mecanismos cognitivos que se han desarrollado socialmente y la *componente didáctica*, finalmente se ocupa de explicar la difusión del conocimiento a través del discurso matemático escolar y examina sus efectos e implicaciones didácticas. La aproximación teórica que incorpora estas componentes en su estudio de los fenómenos didácticos ligados a un conocimiento matemático en particular recibe el nombre de *Socioepistemología*, y es con base en ella que proponemos la construcción social de la función trigonométrica y sus implicaciones didácticas.

El fenómeno didáctico que nos ocupa está ligado a la noción de función trigonométrica, la cual se ha contemplado en investigaciones de corte cognitivo (De Kee, et. al, 1996) y didáctico (Maldonado, 2005), mostrando la estrecha relación de sus resultados con la organización de los programas de estudio, la exposición de los libros de texto y el funcionamiento del discurso matemático escolar. Estos resultados constituyen un fuerte argumento del porqué estudiar esta función en contextos más allá del escolar y del

matemático. Al incorporar una componente social a nuestro análisis epistemológico reconocimos las *prácticas de referencia* que producen conocimiento y el estatus de las *prácticas sociales* en tanto que inducen la construcción de la función trigonométrica en su contexto de origen, aportando así los principios básicos para modificar el enfoque clásico que vive en la escuela y que se usa en la literatura especializada de matemática educativa.

Un modelo para la construcción social de conocimiento matemático

Para el caso particular de la función trigonométrica distinguimos, desde el contexto histórico de origen, a la actividad, la práctica de referencia y la práctica social como los elementos básicos para describir su construcción social. Nuestro modelo implica entonces una *actividad*, aquella observable tanto en los individuos como en los grupos humanos, que en su articulación con otras actividades se asocian a una *práctica de referencia* y son reguladas por una *práctica social*.



Una socioepistemología de la función trigonométrica

Delineamos los tres momentos en la construcción social de la función trigonométrica donde se ubican una práctica social normativa, una práctica de referencia asociada a la actividad, un contexto y los objetos matemáticos que sirven como herramienta a la actividad:

	Práctica Social		
	Anticipación	Predicción	Formalización
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización de la Física	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Objeto Matemático Asociado	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	$sen\theta$ θ ángulo (grados) $sen\theta$ longitud	$sen x$ x tiempo (radian-real) $sen x$ distancia	$sen t$ t tiempo (real) $sen t$ temperatura

Principios Básicos para la Construcción Social de la Función Trigonométrica

Implicaciones didácticas

El discurso escolar es el conjunto de interacciones entre profesor y estudiantes, dirigidas por la exposición coherente de los saberes escolares. Esta coherencia se establece respecto de exposiciones previas y futuras, pero también respecto de los conceptos matemáticos asociados. Por su parte, el *discurso matemático escolar* es el conjunto de restricciones, implícitas o explícitas, que *norman* la actividad áulica y al discurso escolar mismo. Una de sus características más importantes es la de alcanzar hegemonía en el contexto escolar. Por ejemplo, el discurso matemático escolar asociado a la noción de función trigonométrica contempla tanto su definición a partir de razones trigonométricas, ilustradas invariablemente con un triángulo rectángulo; mediante el uso del círculo trigonométrico para definir la función y la graficación, al menos de las funciones básicas o primitivas, a fin de ilustrar la periodicidad. El discurso matemático escolar se ha organizado durante años (siglos), *para responder a cuestionamientos de orden teórico e ideológico que muestren la coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales* (Cantoral y Farfán, 2004). Probablemente esta sea la razón por la que no encontraremos, o al menos no hemos encontrado hasta ahora, un texto o un programa de estudios, o una exposición de aula que abandone el recurso usual de emplear el círculo trigonométrico como medio de introducción a las funciones trigonométricas.

Llevar al aula una propuesta basada en la *construcción social* de la función trigonométrica presupone entonces la modificación del discurso escolar, discurso que inicia con el estudio de los principios trigonométricos (tercer año de secundaria en el SEM¹) hasta el estudio de las series trigonométricas (segundo o tercer año del programa de ciencias o ingeniería en el SEM). Con la revisión realizada en los planos histórico - epistemológico, didáctico, cognitivo y social reportada en (Montiel, 2005) se establecieron los principios básicos para cada momento en lo específico de la construcción de la función trigonométrica, dando pie a una primera experiencia exploratoria.

Una primera experiencia fuera del aula

En la pasada Relme² 19, celebrada en Montevideo, Uruguay, llevamos a cabo una experiencia didáctica no controlada con la participación de colegas profesores de varios países de Latinoamérica en donde exploramos sus concepciones ligadas a ciertas nociones trigonométricas. La secuencia no fue registrada, dado el escenario donde se presentaba, pero nos dio luz sobre algunas relaciones que se establecen entre el tipo de problemas y la herramienta matemática elegida por los profesores. Iniciamos con actividades exploratorias cuya finalidad era distinguir cómo percibían la relación entre variables, su dependencia y la proporcionalidad en juego. En seguida, planteamos dos problemas que involucraban la longitud de la circunferencia en dos contextos: (1) las vueltas de la llanta de una bicicleta en el tiempo y (2) el recorrido de un minuterero. Sin embargo, dos problemas posteriores

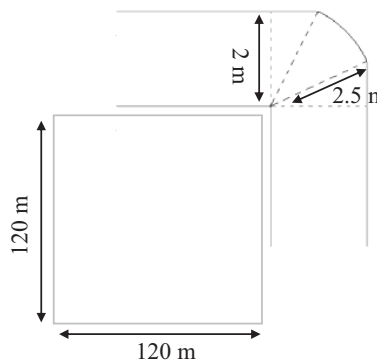
¹ Sistema Educativo Mexicano

² Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

llamaron nuestra atención, ya que están íntimamente ligados a nuestro planteamiento sobre la construcción de la función trigonométrica con base en la práctica social.

Se propone el siguiente problema:

Se planea la reconstrucción de la banqueta que rodea a un conjunto de cabañas. Para saber la cantidad de mezcla a usar es necesario calcular el área de la banqueta. Cada esquina se puede aproximar a un sector de circunferencia y dos triángulos rectángulos. ¿Cuál sería el área de cada esquina?, ¿cuál es el área de toda la banqueta?



Los profesores participantes en la experiencia iniciaron por calcular las áreas más sencillas, cuatro rectángulos de 120 m de largo x 2m de ancho, 1 cuadrado de 120 m de lado y 8 triángulos de 2 m de base y $\sqrt{2.25}$ m de altura. Esta última medida se debe calcular a partir de los datos proporcionados. El último cálculo es el área de los 4 sectores circulares.

Sólo 4 de 18 profesores obtuvieron el área a partir de la relación proporcional

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\text{área del sector}}{\text{área total}}$$

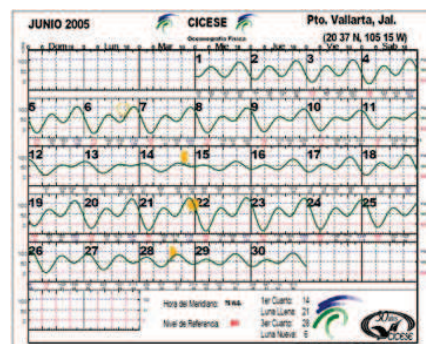
(el ángulo del sector es al ángulo completo, lo que el área del sector al

área de todo el círculo). Lo más significativo de dicha resolución es que sólo estos cuatro profesores usaron el ángulo sólo en radianes, mientras que el resto obtuvo el ángulo en radianes y lo convirtió a grados, a partir de ese dato ya no continuaron con el ejercicio. Sabemos que es necesaria más investigación sobre esta secuencia y sobre las interacciones que provoca entre los participantes, sin embargo, queremos señalar que dentro del debate que se sostuvo con y entre los profesores no se proporcionaron argumentos que sustentaran la elección del uso del ángulo en grados.

Esta actividad puede pensarse como aquella donde Newton obtiene la serie infinita del seno, pero carece del elemento primordial: el movimiento. Además, introduce en el esquema triángulos carentes de medida en uno de sus catetos, por lo que la alusión a la razón trigonométrica es inmediata. En este contexto es mucho más natural el uso del grado que del radián.

En la última actividad se les proporcionó un calendario con los datos que registra el Departamento de Oceanografía Física del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, para discutir sobre la factibilidad de construir un modelo matemático que represente el comportamiento de la marea en Puerto Vallarta, Jalisco, del 1ero al 30 de junio de 2005. Surgieron ideas como:

- recortar cada semana y pegarlas en forma continua (como un electrocardiograma) para ver su comportamiento general,
- definir el modelo en cuatro intervalos para cada periodo (1er cuarto, luna llena, 3er cuarto y luna nueva)
- Determinar el máximo y el mínimo alcanzado en cada periodo, para conocer un posible parámetro de *amplitud* de la función trigonométrica que lo modele.



Al preguntar a los profesores sobre las unidades de medida sólo hubo una respuesta: *tiempo* (variable independiente) y *distancia* (variable dependiente). No hubo siquiera mención de ángulos, todo se centró en el movimiento y las alturas de la marea. El abandono del contexto matemático escolar se logró gracias a las condiciones en las que llevamos a cabo esta experiencia, el objetivo no era la resolución en sí misma de los problemas, sino el debate y los consensos. Gracias a esto los profesores tuvieron más libertad de expresar ideas para resolver los problemas, éstas fueron tan variadas como colores en una pintura y nos permitieron entrar más allá de sus concepciones, a sus ideas y creencias. No recreamos la medición de la marea, pero hicimos un ejercicio de análisis sobre fenómenos dinámicos periódicos que matizaron la actividad con discusiones, argumentos, explicaciones, y no sólo con conceptos.

Conclusiones

Con base en la construcción social de la función trigonométrica apuntamos hacia *el desarrollo del pensamiento matemático y la construcción de conocimiento científico*, mientras que el enfoque clásico trata sólo con el aprendizaje de las razones trigonométricas (ecuaciones e identidades), de las funciones trigonométricas y de las series trigonométricas desvinculadas. Nuestro enfoque atiende a la construcción de conocimiento con base en la experiencia, en el planteamiento de ciertas situaciones – problema, en la identificación de regularidades, en la argumentación, en los consensos, en las explicaciones, entre otras. Ninguna de éstas es exclusiva del ámbito matemático, por el contrario viven en otras áreas de conocimiento y en la vida cotidiana de los estudiantes, lo cual pudimos corroborar en la exploración de las actividades previas.

Referencias

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo 1, pp. 35 - 42). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2003) *Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6(1), 27 – 40.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). La sensibilité a la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2.3), 137 – 168.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México