DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Agda Jéssica de Freitas Galletti – Ana Maria Redolfi Gandulfo
aj.mat@hotmail.com – gandulfo@uol.com.br
Universidade de Brasília – UnB – Brasil

Tema: IV.3 - Práctica Profesional del Profesorado de Matemática.
Modalidade: Póster (P)
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palavras chave: geometria; teorema de Pitágoras; materiais didáticos.

Resumo

O teorema de Pitágoras, o mais famoso da geometria plana, tem muitas e variadas demonstrações. O livro The Pythagorean Proposition de Elisha S. Loomis, 2ª edição, 1940, contém 367 demonstrações, cuidadosamente classificadas. As novas perspectivas para a abordagem deste teorema em sala de aula incluem os materiais didáticos manipuláveis que fortalecem a motivação do aluno para a aprendizagem, aumentam a autoconfiança e a concentração e contribuem no desenvolvimento das competências cognitivas e lógicas. O principal objetivo deste trabalho consiste em apresentar o Teorema de Pitágoras, suas demonstrações e algumas de suas generalizações. Esta abordagem dos temas inclui desde demonstrações simples e com grande apelo visual, assim como, as realizadas experimentalmente com o uso de tecnologias, abrangendo desde a antiga demonstração grega até a demonstração de Euclides. O tratamento dinâmico dos temas inclui construções geométricas e a manipulação de modelos matemáticos. Previamente, são apresentados os conceitos geométricos básicos tais como polígonos equivalentes. Também são abordadas extensões do Teorema de Pitágoras. Assim, procura-se incentivar o estudo dos conceitos geométricos, promover o uso de recursos didáticos em sala de aula e que os professores adquiram experiências que os tornem multiplicadores perante os colegas na escola em que ensinam.

Introdução

O Teorema de Pitágoras foi acreditado a este autor que viveu aproximadamente em 500 a.C. e que ele pode ter demonstrado, mas nenhuma demonstração sua chegou aos nossos dias. Pesquisas históricas revelaram que os Babilônios, mais de 1000 anos antes do tempo de Pitágoras, conheciam este teorema também como os diferentes tipos de triângulos retângulos com lados cujo comprimento é um número inteiro. Esse resultado também era conhecido na Mesopotâmia, no Egito Antigo, na China Antiga e na Índia, entretanto, a aplicação desse teorema era puramente pragmática: usava-se esse resultado na resolução de problemas, construções geométricas, cálculo de medidas, decoração e cálculos relacionados com a agrimensura.

Pitágoras foi provavelmente o primeiro a demonstrá-lo e por isso, o teorema leva o seu nome; sua demonstração “ao que parece foi uma demonstração por decomposição.” (EVES, 2004, p. 103). Um antigo manuscrito chinês, *Chou Pei*, do período Han (202 a.C. até 220 d.C.) contém uma bela demonstração representada em um diagrama. Euclides (360 a.C. – 295 a.C., aproximadamente) publicou a primeira demonstração desse teorema conhecida no Ocidente, ela está presente na sua obra *Os Elementos*.

Inúmeras demonstrações distintas do Teorema de Pitágoras foram publicadas por autores famosos e anônimos; podemos citar uma demonstração dinâmica de autoria de Hermann Baravalle publicada em 1945 e o presidente americano James A. Garfield que publicou uma demonstração algébrica em 1876. Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio, USA, colecionou durante 20 anos, de 1907 a 1927, aproximadamente 370 demonstrações desse teorema.

As demonstrações dinâmicas e o uso de modelos e tecnologias em aula têm como referência a abordagem teórica construtivista, o “aprender fazendo”, segundo o qual o processo de ensino centra-se nas experiências e nas descobertas dos alunos, no desenvolvimento de sua criatividade, no uso de materiais didáticos adequados e no trabalho em grupo, onde o aluno é o construtor do conhecimento e o professor é o condutor do processo. Por isso, é importante e necessário criar estratégias que despertem o interesse e o gosto pela matemática. Daí a necessidade de se fazer uso de recursos didáticos, que permitem aumentar a motivação do aluno para a aprendizagem e consequentemente aumentar a autoconfiança, a concentração e o raciocínio lógico-dedutivo.

Equicomposição e decomposição

Duas figuras são equicompostas (ou equidecomponíveis) se é possível decompor uma das figuras num número finito de partes, e por meio de um rearranjo dessas partes, compor a outra figura. (BOLTIANSKI, 1996, p. 1)

Polígonos equivalentes

Polígonos equivalentes são polígonos com a mesma área.

Os seguintes teoremas foram enunciados por Euclides, no livro 1:

Teorema 35 - *Os paralelogramos de base comum com lados opostos numa mesma paralela têm a mesma área.*

Teorema 36 - *Paralelogramos com bases congruentes numa mesma reta e com lados opostos numa mesma reta paralela têm áreas iguais.*

(I) (II)

Figura 1

Os modelos pedagógicos representado na Figura 1 não constituem uma demonstração desses teoremas de Euclides, mas contribuem para sua efetiva compreensão.

A demonstração do teorema 35 usa os seguintes postulados de área:

i) figuras congruentes têm a mesma área;

ii) se uma figura é decomposta em duas figuras sem superposição que não seja mais que nos pontos da borda, então a área da figura original é a soma das áreas das duas figuras da decomposição.

O modelo dinâmico (II) da Figura 1 propicia a discussão da demonstração do teorema 36. Esse recurso favorece a constatação de que a diagonal de um paralelogramo determina no quadrilátero dois triângulos congruentes, argumento usado para estender os dois teoremas anteriores a resultados similares para triângulos. Esses resultados foram obtidos sem efetuar nenhuma medição ou cálculo de áreas.

O Teorema de Pitágoras

A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

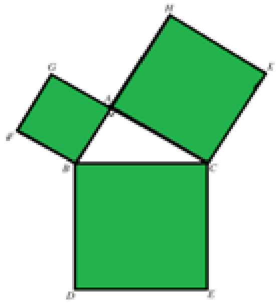


Figura 2

Demonstrações dinâmicas através de modelos de laboratório

Os modelos concretos e dinâmicos são "recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade." (PCN, 1998, p. 45)

Antiga demonstração grega

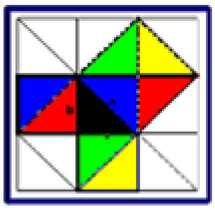


Figura 3

Esta demonstração de um caso particular do teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo isósceles é de forte apelo visual e de grande valor pedagógico na introdução do tema.

Demonstração atribuída a Pitágoras

A partir da manipulação de quatro triângulos retângulos congruentes é possível obter um quadrado de lado igual à hipotenusa e área A, ilustrado em (I) da Figura 4, remanejando os triângulos, obtemos dois quadrados de lados iguais aos catetos e áreas B e C, respectivamente, em (II) da Figura 4. Logo, A=B+C.

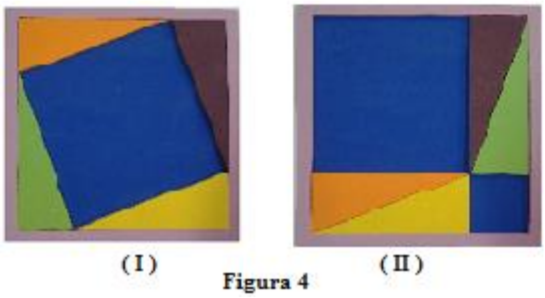


Figura 4

Demonstração de Henry Perigal

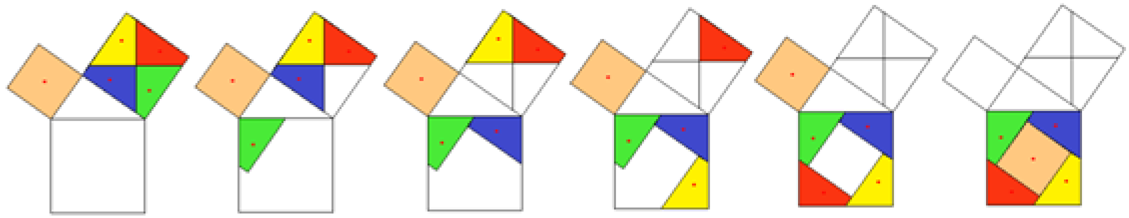


Figura 5

A prova de Henry Perigal partiu de uma decomposição do maior dos dois quadrados construídos sobre os catetos do triângulo retângulo em quatro partes congruentes, tal que, estas peças congruentes juntamente com o menor quadrado de lado igual ao menor cateto equicompõem o quadrado construído sobre a hipotenusa.

Demonstração de Hermann Baravalle

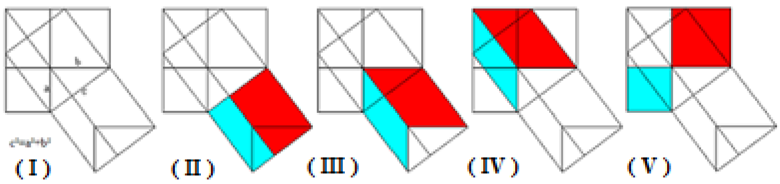


Figura 6

A prova dinâmica inventada pelo matemático Hermann Baravalle é baseada na equivalência de polígonos. A partir de um quadrado de lado $a+b$, divide-se em dois polígonos menores, em que a cada estágio, a área sombreada é a mesma. O único passo no que se pode ter um pouco de dificuldade é na transição (IV) para a (V) da Figura 6. Nesse caso, o paralelogramo é deslizado de tal forma que preserve a base e a altura, portanto a área permanece a mesma.

Demonstração de Euclides

Através desse recurso de simples manipulação é possível verificar os seguintes passos:

i)Os triângulos ΔACG e ΔBCG são equivalentes e área [BFGC] = 2 área [ΔACG];

ii) ΔACG e ΔBCH são triângulos congruentes e ΔBCH e ΔCHK são equivalentes;

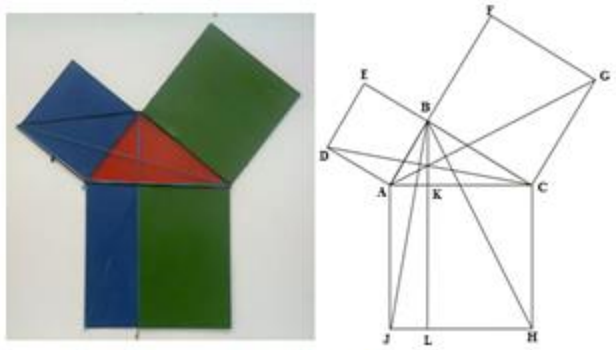


Figura 7

iii) área [CHLK] = 2 área [ΔCHK], em consequência, área [BFGC] = área [CHLK];

iv) Similarmente, área [ADBE] = área [AKLJ];

v) Portanto, área [ACHJ] = área [ADBE] + área [BFGC];

vi) Se AB = a, BC = b e CD = c, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração de Leonardo da Vinci

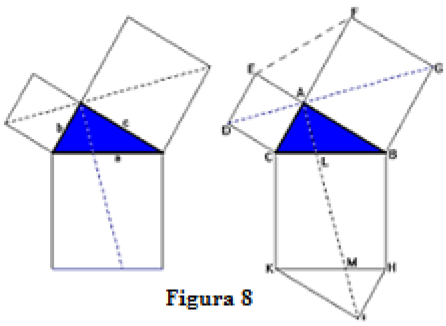


Figura 8

Passos da demonstração:

i. Os triângulos ΔAEF, ΔABC e ΔHJK são congruentes.

ii. Os quadriláteros ABHI, IKCA, GFED e GBCD são congruentes.

iii. Os hexágonos BCDEFG e KCABHI são congruentes, e, portanto equivalentes.

iv. A área do quadrado CBHK é igual à soma das áreas dos quadrados ACDE e AFGB.

Demonstrações a partir de quebra-cabeças

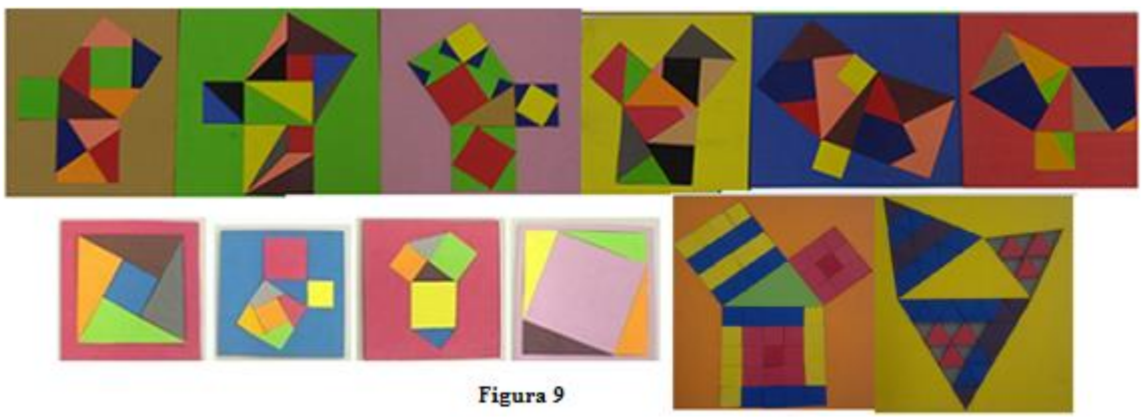


Figura 9

De acordo com Alsina deve-se buscar uma aprendizagem baseada na ação, na reflexão e na comunicação, associada com a realidade e a intenção de que os conhecimentos sejam aplicados de maneira crítica e flexível e que se promova a interação entre os alunos e entre alunos e professores.

O material ilustrado acima são tangrams, ou quebra-cabeças, que tem como objetivo a assimilação e a verificação do Teorema de Pitágoras, a partir da manipulação das peças, com o intuito de decompor os quadrados construídos sobre os catetos e depois equicompor em um quadrado de lado igual à hipotenusa. Assim de forma lúdica e dinâmica, os alunos poderão comprovar que a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa.

Generalização

Sejam A, B e C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de lados a, b e c, respectivamente. Assim, temos A = B + C.

Demonstração de Polya

Sejam A, B e C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de lados a, b e c, respectivamente. Se os lados do triângulo são a, b e c, usando a propriedade da razão entre as áreas de figuras semelhantes, então temos a seguinte relação:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{A}{B}=\dfrac{a^2}{b^2}\Rightarrow\dfrac{A}{a^2}=\dfrac{B}{b^2} \\ \dfrac{A}{C}=\dfrac{a^2}{c^2}\Rightarrow\dfrac{A}{a^2}=\dfrac{C}{c^2} \end{array}\right\}\dfrac{A}{a^2}=\dfrac{B}{b^2}=\dfrac{C}{c^2}\Rightarrow\dfrac{B+C}{b^2+c^2}=\dfrac{A}{a^2}\Rightarrow A=B+C.$$

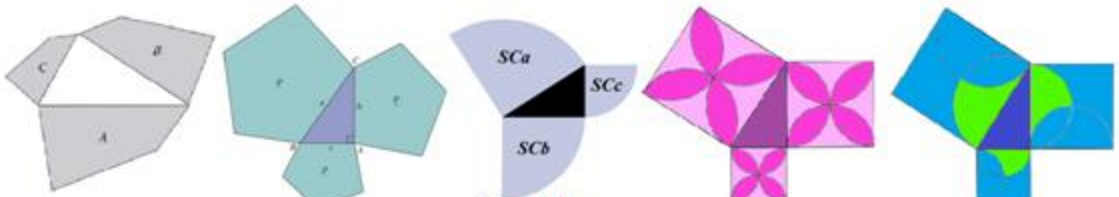


Figura 10

Considerações Finais

É importante que os professores conheçam porque se deve ensinar geometria na escola (Sherard, 1981), com quais conceitos deve-se trabalhar em cada nível (Hoffer, 1983) e as formas adequadas de ajudar as crianças a aprender para assim contribuir no desenvolvimento das competências cognitivas e lógicas e na promoção das “bases para um pensamento avançado” (Alsina, 1998).

Um dos objetivos principais proposto é a utilização, por meio de experimentação, de tecnologias e modelos para a demonstração do teorema de Pitágoras. Isso porque modelos concretos, “jogos e brincadeiras são elementos muito valiosos no processo de apropriação do conhecimento. Permitem o desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação, das relações interpessoais, da liderança e do trabalho em equipe, utilizando a relação entre cooperação e competição em um contexto formativo.” E ainda, “mostrando-lhes uma nova maneira, lúdica e prazerosa e participativa, de relacionar-se com o conteúdo escolar, levando a uma maior apropriação dos conhecimentos envolvidos.” (PCN, 2006, p.28)

Referências Bibliográficas

Alsina,C., Burguês, C., Fortuny, J., Gimenez, J. e Torra, M. (1998). *Enseñar Matemática*. Barcelona: Editora Grão.

Barbosa, R.M. (1993). *Descobrindo padrões pitagóricos: geométrico e numérico.* São Paulo: Atual.

Boltianski, V. G. (1996). *Figuras equivalentes e equicompostas.* Coordenação Nilson José Machado. São Paulo: Atual.

Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática.* Campinas: Editora UNICAMP.

Hoffer, A. (1981). *Geometry is More than Proof*. The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A.: Nacional Counsil of Teacher of Mathematics.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC /SEF, 1998.

Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2)

Sherard, W. (1981). *Why is Geometry a Basic Skill?* The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A.: Nacional Counsil of Teacher of Mathematics.

VII CIBEM VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS COMO RECURSO PARA O ENSINO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

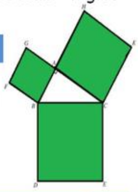
Agda Jéssica de Freitas Galletti, Ana Maria Redolfi Gandulfo
e-mail: aj.mat@hotmail.com, gandulfo@uol.com.br

INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras é o teorema mais famoso, um dos mais antigos e o mais indispensável da geometria plana. Engenhosas formas de demonstração foram publicadas, no livro The Pythagorean Proposition de Elisha S. Loomis, 2ª edição, 1940, são listadas 367 demonstrações diferentes.

As demonstrações dinâmicas e o uso de modelos e tecnologias em aula têm como referência a abordagem teórica construtivista, o "aprender fazendo", segundo o qual o processo de ensino centra-se nas experiências e nas descobertas dos alunos, no desenvolvimento de sua criatividade, no uso de materiais didáticos adequados e no trabalho em grupo, onde o aluno é o construtor do conhecimento e o professor é o condutor do processo. Por isso, é importante e necessário criar estratégias que despertem o interesse e o gosto pela matemática. Daí a necessidade de se fazer uso de materiais concretos, que permitem aumentar a motivação do aluno para a aprendizagem e consequentemente aumentar a autoconfiança, a concentração e o raciocínio lógico-dedutivo.

O TEOREMA DE PITÁGORAS



A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.

DEMONSTRAÇÕES DINÂMICAS ATRAVÉS DE MODELOS DE LABORATÓRIO

Os modelos concretos e dinâmicos são "recursos que funcionam como ferramentas de visualização, ou seja, imagens que por si mesmas permitem compreensão ou demonstração de uma relação, regularidade ou propriedade." (PCN, 1998, p. 45)

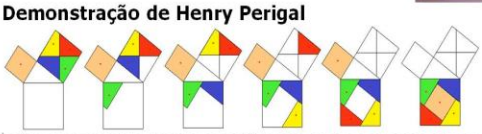
Antiga demonstração grega

Esta demonstração de um caso particular do teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo isósceles é de forte apelo visual e de grande valor pedagógico na introdução do tema.

Demonstração atribuída a Pitágoras

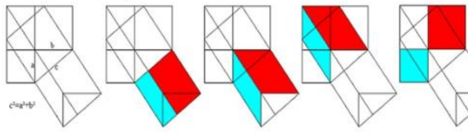
A partir da manipulação de quatro triângulos retângulos congruentes é possível obter um quadrado de lado igual à hipotenusa e área A, remanejando os triângulos, obtemos dois quadrados de lados iguais aos catetos e áreas B e C, respectivamente. Logo, A=B+C.

Demonstração de Henry Perigal

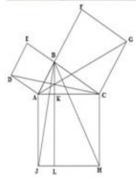


Polígonos equivalentes: polígonos com a mesma área.
O modelo pedagógico representado abaixo constitui uma alternativa didática para conceituar a equivalência de polígonos.

Demonstração de Hermann Baravalle

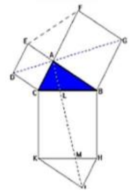


Demonstração de Euclides



Através do recurso de simples manipulação é possível verificar os seguintes passos:
i)Os triângulos ΔACG e ΔBCG são equivalentes e área [BFGC] = 2 área [ΔACG];
ii) ΔACG e ΔBCH são triângulos congruentes e ΔBCH e ΔCHK são equivalentes;
iii) área [CHLK] = 2 área [ΔCHK], em consequência, área [BFGC] = área [CHLK];
iv) Similarmente, área [ADBE] = área [AKLJ];
v) Portanto, área [ACHJ] = área [ADBE] + área [BFGC];
vi) Se AB = a, BC = b e CD = c, então $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração de Leonardo da Vinci

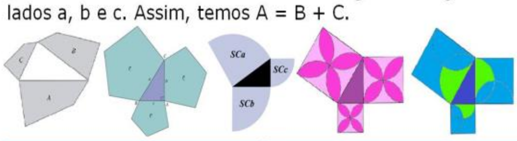


Passos da demonstração:
i. Os triângulos ΔAEF, ΔABC e ΔHJK são congruentes.
ii. Os quadriláteros ABHI, IKCA, GFED e GBCD são congruentes.
iii. Os hexágonos BCDEFG e KCABHI são congruentes, e, portanto equivalentes.
iv. A área do quadrado CBHK é igual à soma das áreas dos quadrados ACDE e AFGB.

Demonstrações a partir de quebra-cabeças

GENERALIZAÇÃO

Sejam A, B e C as áreas de figuras semelhantes construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de lados a, b e c. Assim, temos A = B + C.



REFERÊNCIAS

[1]Alsina,C., Burguês, C., Fortuny, J., Gimenez, J. e Torra, M.(1998). *Enseñar Matemática*. Barcelona: Editora Grao. 227 p.
[2]Barbosa, R.M.(1993). *Descobrindo padrões pitagóricos: geométrico e numérico*. São Paulo: Atual. 126 p.
[3]Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora UNICAMP. 843 p.
[4]Hoffer, A. (1981). *Geometry is More than Proof*. The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A.: Nacional Counsil of Teacher of Mathematics.
[5]Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p.
[6]Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, SEB, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2).
[7]Sherard, W. (1981). *Why is Geometry a Basic Skill?* The Mathematic Teacher, vol 74, Nº 1. U.S.A.: Nacional Counsil of Teacher of Mathematics.

Universidade de Brasília - UnB
Departamento de Matemática
Decanato de Ensino de Graduação
Decanato de Extensão
LEMat