Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXV, págs. 1165-1179 (artículo completo)
Martín I. Idiart, Ana E. Scarabino y Mario A. Storti (Eds.)
La Plata, 7-10 Noviembre 2017

CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS DE HELICOIDES PARA EL DISEÑO DE MECANISMOS TRIDIMENSIONALES Y ROBOTS

Martín A. Pucheta[a,b] **y Alejandro G. Gallardo**[a,b]

[a] *Centro de Investigación en Informática para la Ingeniería (CIII), Facultad Regional Córdoba de la Universidad Tecnológica Nacional, Maestro López esq. Cruz Roja Argentina, X5016ZAA Córdoba, Argentina, {mpucheta,agallardo}@frc.utn.edu.ar, http://ciii.frc.utn.edu.ar*

[b] *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras Clave: Teoría de Helicoides, Sistemas de Helicoides, Grupos de Lie, Álgebra de Lie, Mecanismos espaciales, Robots paralelos

Resumen. El Grupo de Lie SE(3), denominado grupo Especial Euclideano de los desplazamientos tridimensionales, se ha utilizado intensivamente para el análisis de mecanismos, robots y sistemas multicuerpo. En cambio, para la síntesis y el diseño conceptual de mecanismos en tres dimensiones se han utilizado helicoides, que son elementos del álgebra de Lie se(3). Los helicoides son una representación matemática muy utilizada para describir el movimiento tridimensional acoplado en traslación y rotación. En este trabajo se describe una clasificación exhaustiva de sistemas de helicoides infinitesimales disponible en la literatura y se aportan ejemplos de cada sistema y de la intersección de los sistemas con sus espacios recíprocos. En trabajos futuros, estos sistemas se utilizarán como base de datos para el diseño automático de mecanismos y robots.

1. INTRODUCCIÓN

Los helicoides son una representación matemática muy utilizada para describir el movimiento tridimensional acoplado en traslación y rotación (Ball, 1900). Debido a que en parte, los espacios pueden visualizarse como superficies regladas, y tienen muchos fundamentos en común con el álgebra de líneas para el cual existen muchas herramientas computacionales. El álgebra de líneas tiene una variada aplicación, desde la física de sistemas multicuerpos (Merlet, 2006; Murray et al., 1994) hasta el arte y la estética empleada en superficies regladas para construcciones arquitectónicas (Pottmann et al., 2007). Sin embargo, el helicoide es una línea dotada de un paso, el cual es un escalar real que permite aplicar el Teorema de Chasles Angeles (1988) indicando cómo se acopla la traslación y la rotación. El paso agrega un nivel de complejidad a los espacios generados por líneas y merece una atención especial en su estudio.

La Teoría de Helicoides data de más de dos siglos (Ball, 1900). Aún así, por su simplicidad, tiene su auge actual en la aplicación al diseño conceptual de mecanismos espaciales y robots, en la detección de singularidades para su control y en el análisis por fórmulas cerradas (Huang et al., 2013; Gallardo-Alvarado, 2016). Con el mismo propósito, también se han empleado enfoques modernos utilizando el Grupo de Lie $SE(3)$ denominado grupo especial Euclideano de los desplazamientos tridimensionales y sus subgrupos. Los helicoides son elementos del álgebra de Lie $se(3)$ del grupo $SE(3)$ (Selig, 2006; Sonneville et al., 2014; Gallardo-Alvarado, 2016). Cabe mencionar que el efecto de estudiar la física tridimensional de sistemas multicuerpos mediante helicoides es equivalente a aplicar otros métodos como Álgebras de Clifford (Selig, 2006), Álgebra Geométrica (Frankel, 2012), etc. en donde el cálculo está más avanzado.

Los sistemas de helicoides permiten clasificar todos los movimientos que puede tener un cuerpo rígido. Los helicoides de movimientos infinitesimales pueden tratarse como espacios vectoriales de 6 dimensiones. En los criterios de clasificación se utilizan propiedades que son invariantes ante un cambio propio y rígido de coordenadas (rotación y traslación pasiva). Entre los antedentes de clasificaciones de helicoides, se destaca el trabajo inicial de Hunt (1978). Luego, junto con Gibson, considera a los helicoides como puntos en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$ (Gibson y Hunt, 1990a,b). Posteriormente, Rico y Duffy utilizaron una clasificación basada en hallar bases para los espacios ortonormales de los sistemas considerados utilizando una manipulación con álgebra lineal más intuitiva que en los trabajos anteriores (Rico Martínez y Duffy, 1992a,b). Donelan y Gibson (1993) fueron pioneros en utilizar clasificaciones basadas en Geometría Grassmanniana (Merlet, 2006; Selig, 2006). Luego, los sistemas de helicoides se utilizaron intesivamente para caracterizar a mecanismos espaciales (Phillips, 1984, 1990) e incluso para representar el contacto y la manipulación de objetos con robots (Mason, 2001).

Las clasificaciones parecen ser completas y actualmente se las está aplicando en forma práctica. En el área de los mecanismos espaciales se destaca el empleo de helicoides en el trabajo de Kong y Gosselin (2013), quienes enumeran mecanismos paralelos considerando sistemas de helicoides formados exclusivamente por rotaciones y traslaciones puras. Hopkins (2010) también utiliza los sistemas de helicoides para diseñar mecanismos flexibles de precisión.

En la Sección 2 se presenta el marco teórico geométrico del problema. En la Sección 3 se muestra una clasificación basada en el trabajo de (Gibson y Hunt, 1990a) y se complementa con ejemplos e interpretaciones geométricas adicionales en las tablas. Finalmente se describen campos de aplicación y trabajos a futuro.

2. GENERALIDADES GEOMÉTRICAS

Una línea se puede representar por dos puntos en $\mathbb{R}^3$. También se puede representar por dos vectores, el vector dirección de la línea $\boldsymbol{u}$ y un vector arbitrario $\boldsymbol{r}$ desde el origen de coordenadas a la línea

$$\boldsymbol{l} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v}_0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

La familia de vectores que se pueden elegir desde el origen a la línea se pueden representar convenientemente por el producto vectorial de cualquier vector $\boldsymbol{r}$ y el vector dirección de la línea. El vector secundario, $\boldsymbol{v}_0$, es también llamado momento de la línea y es claramente perpendicular a su dirección, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0$. En un helicoide general esta perpendicularidad no se cumple y a la parte secundaria se le agrega una componente vectorial $h\boldsymbol{u}$.

$$\$ = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{u} + h\boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{v}$ es la parte secundaria del helicoide. Dado un helicoide $\$ = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^T$, la línea se puede obtener como $\boldsymbol{l} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - h\boldsymbol{u})^T$, en donde el paso se obtiene a partir de las componentes primaria y secundaria del helicoide como

$$h = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} \tag{3}$$

Un helicoide $\$ = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v})^T$, cuya parte primaria es nula representa una línea en el infinito de dirección $\boldsymbol{v}$. Un helicoide $\$ = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0})^T$ es una línea que pasa a través del origen.

Físicamente, el helicoide puede interpretarse como la combinación de una rotación acoplada con una traslación y representa un movimiento infinitesimal, el helicoide finito tiene una construcción ligeramente diferente.

2.1. El helicoide como elemento de *se*(3)

Un grupo es un par compuesto de un conjunto de elementos G y una operación binaria (o regla de composición) $\bullet$ sobre el conjunto $G \times G \mapsto G$ satisfaciendo cuatro aximoas:

1. *Clausura*: La composición de dos elementos del conjunto $\forall g_1, g_2 \in G$ es otro elemento en el conjunto $g_1 \bullet g_2 = g_3 \in G$.

2. *Asociatividad*: $g_1 \bullet (g_2 \bullet g_3) = (g_1 \bullet g_2) \bullet g_3$

3. *Elemento neutro*: Existe un elemento $I \in G$ que satisface $g \bullet I = I \bullet g = g$, para todo $g \in G$;

4. *Elemento inverso*: Para cada $g \in G$ existe un elemento $g^{-1} \in G$ tal que $g^{-1} \bullet g = g \bullet g^{-1} = I$.

La *conmutatividad*, $g_1 \bullet g_2 = g_2 \bullet g_1$, no es un requerimiento (por ejemplo, los grupos *SO*(3) y *SE*(3) no son conmutativos.

Un grupo de Lie es un grupo continuo en la cual la regla de composición y la inversa son suaves. Por ejemplo, los elementos del grupo pueden ser las matrices 4×4 de la forma

$$\boldsymbol{H} = H(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

y la operación binaria o composición es el producto matricial con elementos de la forma $(\boldsymbol{q}, 1)^T$ en el subespacio afín de $\mathbb{R}^4$, con $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$. El elemento $\boldsymbol{R}$ pertenece al grupo Ortogonal Especial SO(3) constituido por matrices ortogonales ($\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$) propias (con determinante 1), y $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ es un vector de traslación. Este par de elemento y producto matricial satisface los axiomas de grupo, ya que $H(\boldsymbol{R}_2, \boldsymbol{t}_2)H(\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{t}_1) = H(\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{t}_2) \in SE(3)$, el producto matricial es asociativo, el elemento neutro es $\boldsymbol{I}_{4\times4}$, y el inverso de $H(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t})$ es

$$\boldsymbol{H}^{-1} = H(\boldsymbol{R}^T, -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

El producto matricial y su inversa son operaciones suaves; además, el producto no es conmutativo. Luego, la acción de un elemento $H(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t})$ del grupo Especial Euclideano de desplazamientos *SE*(3), transforma a un punto de un cuerpo rígido $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ como $\boldsymbol{q}' = \boldsymbol{R}\boldsymbol{q} + \boldsymbol{t}$, produciéndole un movimiento finito. La acción sobre puntos distintos de un cuerpo rígido preserva distancia y orientación por lo que se las denomina trasformaciones rígidas.

Los elementos del álgebra de Lie *se*(3) del grupo *SE*(3) pueden "verse" como elementos infinitesimales de un grupo, cercanos a la identidad (Selig, 2006, Cap. 4), más precisamente, son vectores en el espacio tangente al grupo en la identidad. Para obtener los vectores tangentes en la identidad, se propone un mapeo o variedad diferenciable suave $\gamma(t)$

$$\gamma : t \mapsto \boldsymbol{H}(t) = H(\boldsymbol{R}(t), \boldsymbol{t}(t)) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}(t) & \boldsymbol{t}(t) \\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Realizando la derivada del mapeo con respecto a t y evaluando en el origen ($t = 0$), se obtiene el elemento del álgebra de Lie

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

donde, mediante el mapeo $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{vec}(\boldsymbol{\Omega})$ se obtiene un isomorfismo de matrices 4×4 a vectores en $\mathbb{R}^6$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{0}_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \in se(3) \tag{8}$$

El helicoide tiene una parte primaria o dirección $\boldsymbol{\omega} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})^T \in \mathbb{R}^3$ y una parte secundaria o momento $\boldsymbol{v} = (p_{23}, p_{31}, p_{12})^T \in \mathbb{R}^3$, que se conocen como coordenadas homegéneas de Plücker, normalizadas por la magnitud de la parte primaria. Un elemento del álgebra *se*(3) bajo una acción del elemento $H(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t})$ del grupo SE(3), se transforma multiplicándolo por una matriz que es la representación adjunta del grupo

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}' \\ \boldsymbol{v}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t} \end{bmatrix} \tag{9}$$

donde $\boldsymbol{R} \in SO(3)$ es una matriz ortogonal propia, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ es un vector de traslación cuyo producto vectorial con cualquier vector arbitrario $\boldsymbol{x}$ es representada por el producto con su matriz antisimétrica $\boldsymbol{T} = \mathrm{ad}(\boldsymbol{t})$, es decir, $\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}$.

2.2. Producto recíproco

Dados dos helicoides $\$_1$ y $\$_2$ su producto recíproco es

$$\$_1 \circ \$_2 \equiv \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 \tag{10}$$

Para dos helicoides generales con pasos distintos, h_a y h_b, y ejes separados una distancia d orientados con un ángulo incluido ϕ, el producto recíproco es

$$\$_1 \circ \$_2 \equiv (h_a + h_b) \cdot \cos(\phi) - d \cdot \operatorname{sen}(\phi) \tag{11}$$

Cuando dicho producto es cero, se dice que $\$_1$ y $\$_2$ son recíprocos. Si el ángulo entre los helicoides es nulo (colineales o paralelos a una distancia d), también pueden ser recíprocos si sus pasos son iguales y opuestos. Si los pasos son ambos nulos se tienen dos helicoides de línea, en la Ec. (11) se anula el primer término y el producto recíproco expresa el momento mutuo entre las líneas, proporcional a d y al $\operatorname{sen}(\phi)$, anulándose si las líneas son concurrentes, con $d = 0$, o si el ángulo entre ellas es $\pi/2$.

2.3. Sistemas de helicoides

Un n-sistema, $\mathcal{S}$, es una combinación lineal de n helicoides independientes y tiene dimensión n. A través del producto recíproco se puede definir el espacio complementario denotado como $\mathcal{S}^{\perp}$ constituido de helicoides base que son recíprocos al sistema $\mathcal{S}$. El sistema $\mathcal{S}$ y su complementario $\mathcal{S}^{\perp}$ no son necesariamente disjuntos, es decir, hay elementos en $\mathcal{S}$ que también pueden pertenecer a $\mathcal{S}^{\perp}$.

2.3.1. El helicoide como punto en un espacio proyectivo

Considerando al helicoide como un punto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$, un 1-sistema es la combinación lineal de un punto. Un 2-sistema se obtiene de combinar linealmente dos puntos, o sea, que es una línea en el espacio proyectivo. Finalmente, combinando linealmente un 2-sistema y otro punto o tres puntos no coincidentes, se obtiene un plano en el espacio proyectivo. En adelante, se asocia indistintamente un helicoide $\$$ en $\mathbb{R}^6$ con un punto en $\mathbb{P}^5$.

2.3.2. Formas cuadráticas y bilineales en P5

Las formas cuadráticas en las coordenadas de los helicoides son polinomios homogéneos de grado 2 en dichas coordenadas y son invariantes ante un cambio lineal de coordenadas.

Dada una línea $\$ = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{u} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})^T$ y $\boldsymbol{v} = (p_{23}, p_{31}, p_{12})^T$, toda línea satisface la identidad cuadrática

$$Q_0(\$) \equiv \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0, \tag{12}$$

que es una ecuación homogénea de grado 2 en las 6 coordenadas homogéneas, también llamada forma cuádrica de Klein. Los helicoides de paso finito no nulo o de paso infinito no la satisfacen. Entonces sus soluciones están sobre una hipersupeficie cuadrática de dimensión 4 (ó hipercuadrática) en $\mathbb{P}^5$. No todo punto en $\mathbb{P}^5$ representa una línea; para un helicoide general $\$ = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ o punto en $\mathbb{P}^5$ que no cumple esta ecuación se dice que $\$$ no está en Q_0.

Esta forma lineal es invariante ante la acción del grupo *SE*(3). Tomando los elementos de un helicoide antes y después de la acción del grupo (cambio rígido de coordenadas) mostrados en la Ec. (9), se verifica Q_0

$$\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{v}' = (\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}) \cdot (\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{R}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{13}$$

entonces las transformaciones rígidas preservan la cuadrica de Klein. Además, comparando con la Ec. (10) es inmediato ver que la forma se satisface cuando el producto recíproco de dos helicoides es cero.

La forma cuadrática de Klein tiene una forma bilineal asociada, también invariante, que se obtiene realizando el producto matricial o escalar como

$$\begin{aligned} Q_0(\$_1,\$_2) \equiv \$_1^T \boldsymbol{Q}_0 \$_2 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T & \boldsymbol{v}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

donde el helicoide es un vector columna, la matriz $\boldsymbol{Q}_0$ es simétrica 6×6, $\boldsymbol{I}_3$ es una matriz identidad 3×3, y $\boldsymbol{0}_3$ es una matriz nula 3×3. Entonces, dado $\$_1$ la expresión es lineal en las componentes de los puntos $\$_2$, dichos puntos que satisfacen esta forma bilineal forman el hiperplano polar a $\$_1$ con respecto a Q_0. Un concepto más abstracto que no se va a detallar aquí es que existen dos familias de planos generadores de Q_0, uno denominado plano α, que son todas líneas concurrentes a un punto, y un plano β que son todas líneas en un mismo plano. Dos planos α de Q_0 intersectan en su línea común. Dos planos β de Q_0 intersectan también en su línea común.

De la ecuación del paso Ec. (3) se deduce una forma homogénea general denominada *hiper-cuadrática de paso* en $\mathbb{P}^5$

$$Q_h(\$) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} - h(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) = 0 \tag{15}$$

si $h = 0$ coincide con Q_0 de la Ec. (12) y si $h = \infty$ se tiene

$$Q_\infty(\$) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = p_{01}^2 + p_{02}^2 + p_{03}^2 = 0 \tag{16}$$

de este modo, Q_0 y Q_∞ generan a todas las hipercuádricas

$$Q_h(\$) = \lambda Q_0(\$) + \mu Q_\infty(\$) = 0 \tag{17}$$

el helicoide general requiere $h = -\mu/\lambda$, con $\mu = 0$ se tiene la Ec. (12) y con $\lambda = 0$ se tiene la Ec. (16).

La forma bilineal asociada a Q_h es

$$Q_h(\$_1,\$_2) \equiv \$_1^T \boldsymbol{Q}_h \$_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 - h(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) \tag{18}$$

La forma bilineal asociada a Q_0 es

$$Q_0(\$_1,\$_2) \equiv \$_1^T \boldsymbol{Q}_0 \$_2 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 \tag{19}$$

Dos helicoides son recíprocos si $Q_0(\$_1,\$_2) = 0$.

La forma bilineal asociada a Q_∞ se denomina forma de Killing y es, hasta una constante multiplicativa k, Selig (2006) utiliza $k = -2$, definida como

$$Q_\infty(\$_1,\$_2) \equiv \$_1^T \boldsymbol{Q}_\infty \$_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1^T & \boldsymbol{v}_1^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \\ \boldsymbol{0}_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = k(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2) \tag{20}$$

Dos helicoides tienen ejes perpendiculares si $Q_\infty(\$_1,\$_2) = 0$.

Nótese que la Ec. (18) es combinación lineal de las formas bilineales dadas por las Ecs. (19) y (20), de modo que la matriz simétrica asociada es

$$Q_h(\$_1,\$_2) \equiv \begin{bmatrix} -2\boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{I}_3 \\ \boldsymbol{I}_3 & \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Los movimientos en $\mathbb{P}^5$ preservan formas bilineales simétricas Q_h. Dados dos helicoides $\$_1$ y $\$_2$, un mapeo que produzca un movimiento $f : \mathbb{P}^5 \mapsto \mathbb{P}^5$ para cualquier elección de h finito o infinito, tienen imágenes $\$_1^*$ y $\$_2^*$, de modo que

$$Q_h(\$_1,\$_2) = Q_h(\$_1^*,\$_2^*) \tag{22}$$

esto también se puede probar mediante rotaciones y traslaciones en $\mathbb{R}^3$.

3. CLASIFICACIÓN

Siguiendo a Gibson y Hunt (1990a,b), los sistemas se clasifican tomando todas las combinaciones posibles de generar espacios mediante helicoides de paso finito, nulo e infinito, analizando cómo es la intersección con la cuádrica de pitch Q_h, que es la más general, y analizando también cómo es la intersección entre el sistema y su espacio recíproco $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp}$, ya que no son necesariamente disjuntos. En este trabajo se generan tablas con 33 sistemas, en el orden que los presentan Gibson y Hunt (1990b) y se utiliza una notación con ejemplos que facilita su interpretación geométrica y da una idea más general de las combinaciones de movimientos. En esta nomenclatura, $H_x a$ denota un helicoide con eje orientado según el eje x y de paso finito a; R_x es un helicoide de rotación pura orientado según el eje x, con momento nulo y paso nulo; T_x es un helicoide de traslación pura en dirección del eje x, con parte primaria nula y paso infinito. Por último, la notación $T_{x \triangleleft y}$ describe a una traslación pura en el plano xy que forma un ángulo con el eje x. Esto permite ilustrar e identificar mejor las intersecciones. Los sistemas se identifican con un índice que va de 1 al 33 y además se incorpora el tipo definido por Hunt (1978), ya ampliamente aceptado en la comunidad de mecanismos y robótica. El 0-Sistema consistiría de un helicoide nulo que no está definido, ya que la componente primaria y secundaria del helicoide no pueden ser ambas nulas por definición. Por lo tanto, la enumeración comienza con el 1-sistema.

3.1. 1-Sistema

Un sistema de dimensión 1 resulta de combinar linealmente un único helicoide, por lo que el espacio generado está definido sobre la línea del helicoide base o en líneas paralelas al mismo.

$$\$ = \lambda \$_1, \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{23}$$

Un helicoide $\$_h$ puede tener paso finito no nulo y en ese caso no es autorecíproco, por lo que no tiene intersección posible con su espacio recíproco. Si tiene paso finito y nulo $\$_0$ o infinito $\$_\infty$ es autorecíproco. En términos de velocidades, el sistema $\mathcal{S}_1$ son todos los movimientos finitos helicoidales alrededor de una misma línea $\lambda(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{v})$. El $\mathcal{S}_2$ son todas las rotaciones alrededor del mismo eje, $\lambda(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{0})$. El $\mathcal{S}_3$ son todos los vectores libres que expresan la velocidad de traslación $\lambda(\mathbf{0}, \boldsymbol{v})$, con dirección paralela a la dirección de $\boldsymbol{v}$. Estos casos son los tres posibles tipos de punto en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^5$.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp}$	Condiciones
1	Paso finito	$\$_h = (1, 0, 0; h_a, 0, 0) = H_{xa}$	$\emptyset$	$h_a \neq 0 \neq \infty$
2	Paso finito	$\$_0 = (1, 0, 0; 0, 0, 0) = R_x$	Completa	$h_a = 0$
3	Paso infinito	$\$_\infty = (0, 0, 0; 1, 0, 0) = T_x$	Completa	$h_a = \infty$

Tabla 1: Clasificación de 1-sistemas.

3.2. 2-Sistemas

Un sistema de dimensión 2 resulta de combinar linealmente dos sistemas de dimensión 1 mediante dos reales, λ_1 y λ_2, que no pueden ser ambos nulos simultaneamente,

$$\$ = \lambda_1 \$_1 + \lambda_2 \$_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \tag{24}$$

En el espacio proyectivo, el sistema puede verse como la combinación lineal de dos puntos, es decir, es una línea en $\mathbb{P}^5$. Hunt propuso clasificar el modo en que el sistema de helicoide resultante $\mathcal{S}$ se encuentra con la forma hipercuádrica real Q_h del siguiente modo. Si el paso es finito:

I: $\mathcal{S}$ no está completamente contenida en algún Q_h;

II: $\mathcal{S}$ está completamente contenida en algún Q_h.

Para los casos en que el paso es infinito, propone 3 subdivisiones adicionales relacionadas a cómo pertenece el sistema a Q_∞:

A: $\mathcal{S}$ no se encuentra en Q_∞;

B: $\mathcal{S}$ se encuentra con Q_∞ sólo en un punto;

C: $\mathcal{S}$ está completamente contenida en Q_∞.

Para el caso I, el sistema $\mathcal{S}$, la hipercuádrica intersecta a la línea en 2 puntos (en $\mathbb{P}^5$), es decir, aparecen dos soluciones posibles para h cuando el discriminante resultante de expandir $Q_h(\$,\$) = Q_h(\lambda_1\$_1 + \lambda_2\$_2, \lambda_1\$_1 + \lambda_2\$_2) = 0$ se anule.

En la Tabla 2 se describen los 2-sistemas tipo I.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp$	Condiciones
4	IA$_1$ General	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_a \neq h_a \neq 0 \neq \infty$
5	IA$_2$ Sub-tipo	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \end{cases}$	R_y	$h_b = 0$ (ó $h_a = 0$)
6	IB$_1$ 4º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;p_{23},p_{31},0) = T_{x\triangleleft y} \end{cases}$	$\emptyset$	$p_{23} \neq 0, p_{31} \neq 0$
7	IB$_2$ 5º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;1,0,0) = T_x \end{cases}$	$\emptyset$	$p_{23} \neq 0, p_{31} = 0$

Tabla 2: Clasificación de 2-sistemas tipo I.

El 2-sistema $\mathcal{S}_4$ corresponde al espacio generado por dos helicoides base de paso finito no nulos y distintos, $h_a > h_b$, y cuyos ejes son perpendiculares entre sí en $\mathbb{R}^3$. Este espacio no tiene intersección alguna con su espacio recíproco y se puede graficar como una superficie reglada conocida como el *cilindroide* y los helicoides base son los *helicoides principales*. Si en el sistema anterior se hace que uno de los helicoides tenga paso nulo, se obtiene como subcaso el sistema $\mathcal{S}_5$ que es la combinación de un helicoide de paso finito no nulo con una rotación pura (con momento nulo); siendo este último autorecíproco y recíproco al primero, la interesección con su espacio autorecíproco es dicha rotación pura.

El 2-sistema $\mathcal{S}_6$ es el espacio generado por una rotación pura y una traslación, donde sus ejes forman un ángulo $\phi = \mathrm{atan}(p_{31}/p_{23})$. El 2-sistema $\mathcal{S}_7$ es similar al anterior con el segundo helicoide coaxial con el primero.

En la Tabla 3 se describen los 2-sistemas tipo II, que están completamente contenidos en Q_h, es decir, son los casos en que los ejes de los helicoides forman un lápiz de líneas a través de un punto fijo. En las todas las formas normales se verá que un helicoide tendrá dirección x y el otro dirección en y. El 2-sistema $\mathcal{S}_8$ difiere con el $\mathcal{S}_4$ en que los pasos son iguales finitos y no nulos, y en el 2-sistema $\mathcal{S}_9$ el paso en común es nulo, por lo que es autorecíproco. Es último sistema tiene una intersección completamente contenida dentro del espacio recíproco el cual es de mayor dimensión, es decir, $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp \in \mathcal{S}^\perp$. En ambos sistemas, la superficie generada por el eje de \$ es un lápiz de líneas en un plano.

En el 2-sistema $\mathcal{S}_{10}$, el primer helicoide base (idéntico al de $\mathcal{S}_8$) se combina con una traslación pura o helicoide de paso infinito $\$_\infty$ al cual son perpendicualres (y recíprocos) todos los helicoides del sistema. La intersección con su espacio recíproco es dicho helicoide de traslación. En el 2-sistema $\mathcal{S}_{11}$, es la combinación lineal de una rotación pura y una traslación pura ortogonal a la primera y se obtiene como subcaso de hacer nulo el paso en el primer helicoide base de $\mathcal{S}_{10}$. El último 2-sistema, $\mathcal{S}_{12}$, consiste de dos helicoides de traslación pura ortogonales; su espacio es autorecíproco y está contenido completamente dentro del espacio recíproco $\mathcal{S}^\perp$. La superficie del eje \$ es un lápiz de líneas en un plano en el infinito.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp$	Condiciones
8	IIA$_1$ 1^o Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_a,0) = H_{ya} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_a = h_b \neq 0$
9	IIA$_2$ Sub-tipo	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \end{cases}$	Completa	$h_a = h_b = 0$
10	IIB$_1$ 2^o Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \end{cases}$	T_y	$h_a \neq 0$
11	IIB$_2$ Sub-tipo	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \end{cases}$	Completa	$h_a = 0$
12	IIC 3^o Especial	$\begin{cases} \$_1 = (0,0,0;1,0,0) = T_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \end{cases}$	Completa	$h_a = h_b = \infty$

Tabla 3: Clasificación de 2-sistemas tipo II.

3.3. 3-Sistemas

Los 3-sistemas consisten de combinar un 2-sistema con un punto (helicoide de paso finito, de paso nulo o de paso infinito). Entonces el sistema es la combinación lineal de 3 helicoides base (no colineales en $\mathbb{PR}^5$)

$$\$ = \lambda_1\$_1 + \lambda_2\$_2 + \lambda_3\$_3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \tag{25}$$

que forman un plano en $\mathbb{PR}^5$ y pueden tener diversas intersecciones con la cuádrica de paso Q_h, que Hunt clasifica como:

I: $\mathcal{S}$ no está completamente contenida en algún Q_h;

II: $\mathcal{S}$ está completamente contenida en algún Q_h (es un α-plano o un β-plano).

Para los casos en que el paso es infinito, propone Hunt 3 subdivisiones adicionales relacionadas a cómo pertenece el sistema a Q_∞:

A: $\mathcal{S}$ no se encuentra con Q_∞;

B: $\mathcal{S}$ se encuentra con Q_∞ sólo en un punto (un helicoide);

C: $\mathcal{S}$ se encuentra con Q_∞ en una línea (un 2-sistema);

D: $\mathcal{S}$ está completamente contenida y coincide con Q_∞, de modo que es un β-plano.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp$	Condiciones
13	IA$_{11}$ General	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,h_c) = H_{zc} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_a > h_b > h_c$ (no nulos)
14	Sub-tipo IA$_{12}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,h_c) = H_{zc} \end{cases}$	R_y	$h_a > h_c$ (no nulos) $h_b = 0$
15	Sub-tipo IA$_{13}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,0) = R_z \end{cases}$	R_z	$h_a > h_b$ (no nulos) $h_c = 0$
16	IA$_{21}$ 1º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,h_b) = H_{zb} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_c = h_b$ (o $\quad h_a = h_b$)
17	Sub-tipo IA$_{22}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,0) = R_z \end{cases}$	$\mathcal{S}_9$	$h_b = h_c = 0$ h_a (no nulo)
18	Sub-tipo IA$_{23}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,h_b) = H_{zb} \end{cases}$	R_x	$h_c = h_b$ (no nulos) $h_a = 0$

Tabla 4: Clasificación de 3-sistemas tipo IA.

El 3-sistema general, $\mathcal{S}_{13}$, corresponde al espacio generado por tres helicoides base de paso finito no nulos y cuyos ejes son mutuamente ortogonales, perpendiculares y concurrentes en $\mathbb{R}^3$. Este espacio no tiene intersección alguna con su espacio recíproco. Los helicoides base se denominan *helicoides principales* y dados los pasos $h_a > h_b > h_c$, se determina que h_a es el autovalor máximo y h_c el mínimo de la una cónica expresada matricialmente por la matriz

$$[Q_h(\$_i, \$_j)]_{3\times 3}\,. \tag{26}$$

Si se normalizan los 3 helicoides base mutuamente perpendiculares $Q_\infty(\$_i, \$_j) = 1$, $i = 1, 2, 3$, esta matriz toma una forma tal que se pueden calcular sus autovalores como

$$[Q_0(\$_i, \$_j) - \delta_{ij} h]_{3\times 3} \tag{27}$$

luego, un sistema IA tiene a los sumo 3 valores reales h_1, h_2, h_3 de h para los cuales $\mathcal{S}$ es tangente a Q_h.

Si en el sistema anterior se hace que uno de los helicoides tenga paso nulo, se obtiene como subcaso del anterior el sistema $\mathcal{S}_{14}$ ó el $\mathcal{S}_{15}$ que es la combinación de dos helicoides de paso finito y no nulos con una rotación pura (con momento nulo); siendo este último autorecíproco, la interesección con su espacio autorecíproco es dicha rotación pura.

El 3-sistema $\mathcal{S}_{16}$ es similar al $\mathcal{S}_{13}$ pero posee dos helicoides base con igual paso. No tiene intersección alguna con su espacio recíproco. Si en el sistema anterior se hace que los helicoides de igual paso tengan paso nulo se obtiene el sistema $\mathcal{S}_{17}$ como subcaso, en donde la intersección con el espacio recíproco es el espacio generado por las dos rotaciones puras ortogonales; en el ejemplo, sería $\mathcal{S}_9 = \mathrm{span}(R_y, R_z)$. El subcaso $\mathcal{S}_{18}$ proviene de hacer que en $\mathcal{S}_{16}$ se mantengan los helicoides de igual paso y se utilice una rotación pura como tercer elemento base, siendo éste la intersección con el espacio recíproco.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp}$	Condiciones
19	IB$_{11}$ 7º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,1;p_{23},0,p_{12}) = H_{x\lhd z} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_b \neq 0$ $p_{23} \neq 0, p_{12} \neq 0$
20	Sub-tipo IB$_{12}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,1;p_{23},0,p_{12}) = H_{x\lhd z} \end{cases}$	$\mathcal{S}_9$	$h_b = 0$ $p_{23} \neq 0, p_{12} \neq 0$
21	IB$_{21}$ 8º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,0;1,0,0) = T_x \end{cases}$	$\emptyset$	$h_b \neq 0$ $p_{23} \neq 0, p_{12} = 0$
22	Sub-tipo IB$_{22}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	T_y	$h_b = 0$ $p_{23} = 0, p_{12} \neq 0$
23	IB$_{31}$ 3º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_b,0) = H_{yb} \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	T_z	$h_a \neq 0, h_b \neq 0$ $p_{23} = 0, p_{12} = 0$
24	Sub-tipo IB$_{32}$	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	$\mathcal{S}_{11}$	$h_a \neq 0, h_b = 0$ $p_{23} = 0, p_{12} \neq 0$
25	IC$_1$ 9º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \\ \$_3 = (0,0,0;p_{23},0,p_{12}) = T_{x\lhd z} \end{cases}$	T_y	$p_{23} \neq 0, p_{12} \neq 0$
26	IC$_2$ 10º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \\ \$_3 = (0,0,0;1,0,0) = T_z \end{cases}$	R_x	$p_{23} \neq 0, p_{12} = 0$

Tabla 5: Clasificación de 3-sistemas tipo IB y IC.

Los sistemas tipo IB, IC de las Tabla 5 y los sistemas II y ID de la Tabla 6, se analizan de un modo similar a lo visto para los 2 sistemas, tomando todas las posibles combinaciones de valores para lo pasos finitos e incorporando sucesivamente helicoides de paso infinito. En la Tabla 6 se obtienen 3-sistemas que son autorecíprocos, es decir que $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}^{\perp}$.

$\mathcal{S}_i$	Tipo	Forma normal | Ejemplo	$\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^{\perp}$	Condiciones
27	IIA_1 2º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_a,0) = H_{ya} \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,h_a) = H_{za} \end{cases}$	$\emptyset$	$h_a \neq 0$ plano α
28	Sub-tipo IIA_2	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,1;0,0,0) = R_z \end{cases}$	Auto	$h_a = 0$ plano α
29	IIB_1 4º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,1,0;0,h_a,0) = H_{ya} \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	T_z	$h_a \neq 0$ plano β
30	Sub-tipo IIB_2	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,1,0;0,0,0) = R_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	Auto	$h_a = 0$ plano β
31	IIC_1 5º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;h_a,0,0) = H_{xa} \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	$\mathcal{S}_{12}$	$h_a \neq 0$ plano α
32	Sub-tipo IIC_2	$\begin{cases} \$_1 = (1,0,0;0,0,0) = R_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	Auto	$h_a = 0$ plano α
33	ID 6º Especial	$\begin{cases} \$_1 = (0,0,0;1,0,0) = T_x \\ \$_2 = (0,0,0;0,1,0) = T_y \\ \$_3 = (0,0,0;0,0,1) = T_z \end{cases}$	Auto	$h_c = h_b = h_a = \infty$ plano $\beta(Q_\infty)$

Tabla 6: Clasificación de 3-sistemas tipo II y ID.

3.4. Discusión

El enfoque de Gibson y Hunt (1990a,b) requiere de un grado de abstracción matemática poco usal para los ingenieros para interpretar las operaciones geométricas en el espacio proyectivo, pero permite realizar demostraciones de porqué las bases y formas normales propuestas forman un conjunto completo y exhaustivo. Los sistemas de órdenes superiores a 3, es decir, 4, 5, y 6, generalemente no son clasificados en la literatura debido a que sus espacios son recíprocos respectivamente a los sistemas de órdenes 2, 1 y 0. El de orden 6 es trivialmente el movimiento de un cuerpo rígido provisto de todas las libertades. Sin embargo, los órdenes de dimensión 4 y 5 se estudiarán en trabajos futuros para evaluar la posibilidad de diseñar nuevos mecanismos.

Hunt comenta que la subclase *general*, sólo formada por helicoides de paso finito, es poco utilizada en mecanismos y robótica, ya que para implementarse físicamente requiere de pares cinemáticos de helicoides, y asevera que en la práctica se utilizan los *especiales*. Sin embargo, hay un resurgido interés en utilizar toda la clasificación en problemas de diseño. Recientemente, Hopkins et al. (2014) han utilizado restricciones con paso finito no nulo para generar mecanismos flexibles paralelos de precisión construyendo a las superficies regladas complejas mediante impresión 3D.

3.5. Otras aplicaciones de espacios de líneas y helocides

En una configuración singular de un mecanismo o robot, el sistema de helicoides de fuerza (ó de velocidades) pierde una o más dimensiones y el rango del Jacobiano de la transformación a sus parámetros de control puede quedar indeterminado, resultando en ninguna, múltiples o infinitas soluciones (Merlet, 1988). Las singularidades en plataformas paralelas fueron clasificadas por Merlet (2006) mediante Geometría Grassmanniana y luego McCarthy y Soh (2002, Cap. 16) lo extendieron utilizando helicoides de fuerzas puras. Entonces, es relevante diseñar mecanismos de robots en los cuales el espacio de trabajo esté ausente de posibles singularidades o puedan resolverse adecuadamente en un tiempo admisible.

Los espacios generados por líneas independientes y el modelo matemático de las situaciones las pueden llevar a que exista depedencia entre los elementos base de sus subespacios es de interés común en áreas muy diversas de la robótica, desde el diseño conceptual hasta la determinación de singularidades y condicionamiento de Jacobianos (Donelan, 2007). Otro problema de interés es generar sistemas de helicoides ampliando un espacio en forma incremental de modo de que cada helicoide que se agregue sea independiente de los anteriores pero ortogonal a helicoides dados, donde la ortogonalidad está dada por un valor nulo del producto recíproco. Esto es análogo a un proceso algebraico de Gram-Schmidt para el producto recíproco en vez del producto interno y bajo restricciones geométricas.

4. CONCLUSIONES

Se iniciaron estudios de sistemas de helicoides utilizados en la literatura para diseñar mecanismos espaciales. Se ha presentado la conexión entre grupos del Lie $SE(3)$ y su álgebra $se(3)$, cuyos elementos son representados por helicoides. En este trabajo se estudió una enumeración exhautiva de sistemas de helicoides general provista por Gibson y Hunt a la cual se le incorporaron ejemplos para las formas normales y para las intersecciones de los sistemas con los espacios recíprocos. Desde el punto de vista de que estos sistemas son todas las formas posibles de combinar linealmente a los helicoides, la clasificación tiene valor práctico tanto para la enumeración de mecanismos para determinados movimientos (síntesis) como en la identificación de posibles configuraciones singulares (análisis) en mecanismos paralelos y robots.

En trabajos a futuro, se aplicará el álgebra de helicoides y el análisis de los sistemas para estudiar: (i) el análisis dinámico analítico y numérico de mecanismos espaciales, manipuladores paralelos y su control; (ii) el cambio de sistema de helicoides en múltiples modos de vuelo controlado en cuatrirotores, y (iii) la tolerancia a fallo de vehículos aéreos con múltiples rotores (Giribet et al., 2016).

A largo plazo, se pretende utilizar estos sistemas como base de datos par aplicar técnicas computacionales basadas en combinatoria, métodos numéricos y técnicas de optimización en el diseño automático mecanismos, robots y sistemas multicuerpo.

5. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de la *Universidad Tecnológica Nacional (UTN)* a través del proyecto PID-UTN 3935, de la *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* PICT-2013-2894, y del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* PIP 1105; todas instituciones de Argentina.

REFERENCIAS

Angeles J. *Rational Kinematics*. Springer Tracts in Natural Philosophy 34. Springer-Verlag, New York, 1 edición, 1988.

Ball R.S. *A Treatise on the Theory of Screws*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2 edición, 1900.

Donelan P.S. Singularity-theoretic methods in robot kinematics. *Robotica*, 25(6):641–659, 2007.

Donelan P.S. y Gibson C.G. On the hierarchy of screw systems. *Acta Applicandae Mathematicae*, 32(9):267–296, 1993.

Frankel T. *The Geometry of Physics: An introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3 edición, 2012.

Gallardo-Alvarado J. *Kinematic analysis of parallel manipulators by algebraic screw theory*. Springer International Publishing, Switzerland, 2016.

Gibson C.G. y Hunt K.H. Geometry of screw systems - 1 Screws: Genesis and Geometry. *Mech. Mach. Theory*, 25(1):1–10, 1990a.

Gibson C.G. y Hunt K.H. Geometry of screw systems - 2 Classification of Screw Systems. *Mech. Mach. Theory*, 25(1):11–27, 1990b.

Giribet J.I., Sánchez Peña R., y Ghersin S. Analysis and design of a tilted rotor hexacopter for fault tolerance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 52(4):1555–1567, 2016.

Hopkins J. *Design of Flexure-based Motion Stages for Mechatronic Systems via Freedom, Actuation and Constraints Topologies (FACT)*. Tesis de Doctorado, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, U.S.A., 2010.

Hopkins J., Vericella J.J., y Harvey C. Modeling and generating parallel flexure elements. *Precision Engineering*, 38(23):525–537, 2014. doi:10.1016/j.precisioneng.2014.02.001.

Huang Z., Li Q., y Ding H. *Theory of Parallel Mechanisms*. Mechanism and Machine Science Vol. 6. Springer, Dordretch, 2013.

Hunt K.H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford University Press, New York, 1978.

Kong X. y Gosselin C. *Type Synthesis of Parallel Mechanisms*. Springer Tracts in Advanced Robotics, Vol. 33. Springer, Berlin, 2013.

Mason M. *Mechanics of Robot Manipulation*. The MIT Press, 2001.

McCarthy J.M. y Soh G.S. *Geometric Design of Linkages*. Vol. 11 of Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer, New York, 2 edición, 2002.

Merlet J.P. Singular configurations of parallel manipulators and grassmann geometry. En J.D. Boissonnat y J.P. Laumond, editores, *Proceedings of the Geometry and Robotics Workshop*, volumen 391 de *Lecture Notes in Computer Science*. Toulouse, France, 1988.

Merlet J.P. *Parallel Robots*, volumen 2. Springer, Netherlands, 2006.

Murray R.M., Li Z.X., y Sastry S.S. *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. CRC press, Boca Raton, FL, 1994.

Phillips J. *Freedom in Machinery Vol. 1: Introducing Screw Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1984.

Phillips J. *Freedom in Machinery Vol. 2: Screw Theory Exemplified*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1990.

Pottmann H., Asperl A., Hofer M., y Kilian A. *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press, 2007.

Rico Martínez J.M. y Duffy J. Classification of screw systems I. One- and two-systems. *Mech.*

Mach. Theory, 27(4):549–470, 1992a.

Rico Martínez J.M. y Duffy J. Classification of screw systems II. Three-systems. *Mech. Mach. Theory*, 27(4):471–490, 1992b.

Selig J. *Geometric Fundamentals of Robotics*. Springer, New York, 2 edición, 2006.

Sonneville V., Cardona A., y Bruls O. Geometric interpretation of a non-linear beam finite element on the Lie group SE(3). *Archive of Mechanical Engineering*, 61(2):305–329, 2014.