Сільченко М.В.
асистент кафедри інформатики
Київського національного економічного університету

Динамічна стратегія хеджування ризиків опціонної торгівлі

Ринок строкових контрактів в Україні на даний час знаходиться в стадії формування. Проте підготовка в банківських установах (оскільки продаж опціонів здійснюють здебільшого саме банки) фахівців, що володіють сучасними методами аналізу, у т.ч. методами прогнозування цін на строковому ринку, наразі є вкрай актуальною. У даній статті пропонується корекція відомої моделі визначення справедливої ціни опціону Блека-Шоулза, яка враховує операційні витрати.

Головною передумовою досягнення економічного зростання є встановлення макроекономічної стабілізації, на яку впливає багато факторів, як політичного, так і економічного характеру. Одним з визначальних економічних факторів, що зумовлюють стабільне та ефективне функціонування економіки, є розвинений ринок строкових контрактів. У країнах із розвиненою економікою його роль полягає в наступному:

– при розвиненому строковому ринку стабілізується фінансовий стан суб’єктів господарювання, оскільки він дозволяє координувати майбутні плани підприємців;
– строковий ринок впливаючи на співвідношення попиту та пропозиції на спотовому ринку, забезпечує рівновагу на ньому; це випливає з того, що ціни на строковому ринку несуть певну інформацію про майбутню кон’юнктуру, і тому виробники, орієнтуючись на них, можуть визначати обсяги виробництва та кількість товарних запасів, фірми, що займаються експортно-імпортними операціями, визначати зовнішньоторговельну діяльність, а емітенти можуть приймати рішення про випуск нових акцій тощо;
– строковий ринок стимулює розвиток конкуренції на спотовому ринку і, відповідно, обмежує монопольну владу великих фірм за рахунок відкритості

інформації про стан попиту та пропозиції;

– строковий ринок сприяє тому, що спотова ціна стає більш мінливою (волатильною), оскільки учасники ринку отримують більш повну та якісну інформацію;
– строковий ринок сприяє зменшенню амплітуди коливань цін на спотовому ринку, що теж випливає з інформаційної функції строкового ринку;
– строковий ринок сприяє оптимальному розміщенню ресурсів на спотовому ринку, знову ж таки завдяки наявності відповідної інформації;
– строковий ринок сприяє вирівнюванню цін на регіональних ринках.

На підставі цього можна зробити висновок, що основними функціями строкового ринку в розвинутих економіках є стабілізуюча (вона забезпечується за рахунок взаємодії хеджерів та спекулянтів), координуюча та інформативна (вона реалізується на основі взаємодії спекулянтів та арбітражерів у визначенні майбутніх цін та їх вирівнюванні).

Розвинений строковий ринок надійно і різнопланово впливає на стабілізацію ринкової економіки, а тому його становлення в Україні є вкрай актуальною проблемою. За останні роки в Україні були зроблені спроби деякими біржами організувати торгівлю деривативами. На жаль, недостатня розвиненість ринку цінних паперів (оскільки саме вони лежать в основі простих типів опціонів та ф’ючерсів), відсутність необхідної законодавчої бази і досвіду роботи, нестача кваліфікованих фахівців, непропорційна структура головних діючих осіб на строковому ринку − хеджерів та спекулянтів, які визначають ефективність його роботи (в теперішній час на ринку діють переважно спекулянти), призвели до того, що на даний час торгівля похідними фінансовими інструментами практично зупинена. Крім того, негативно на розвитку строкового ринку в Україні позначилась фінансова криза 1998р., яка спричинила фінансові проблеми у банків, які не виконали форвардні контракти.

Найбільш важливим інструментом з точки зору впливу на стабілізацію фінансового ринку є опціони. Коли учасники ринку впевнені в своїх прогнозах, вони укладають ф’ючерсну угоду. Але, щоб її укласти, контрагент за угодою має бути теж упевнений в своїх прогнозах. При цьому прогнози одного точно протилежні прогнозам іншого. Оскільки в умовах нестабільності на ринку бути впевненим в своїх прогнозах неможливо, хеджери частіше надають перевагу опціонам, завдяки тому, що останні дають право обирати в залежності від ситуації, що складається на спотовому ринку, реалізувати чи не реалізувати угоду. За будь-яких умов втрати покупця опціону (найчастіше це хеджер) обмежені розміром премії, яку він заплатив продавцю, проте розміри прибутку можуть бути взагалі необмеженими. Тобто для хеджерів саме опціони є найбільш привабливим типом деривативу. При цьому основний ризик перекладається на продавця опціону. Втрати продавця опціону на продаж дорівнюють різниці між ціною виконання *K* та спотовою ціною *X* базового активу. В найгіршому випадку спотова ціна активу дорівнює нулю, тобто ці втрати обмежені ціною виконання:

$$\max_{X \in [0;+\infty)} (K - X) = K$$

Втрати продавця опціону на купівлю не обмежені, оскільки вони дорівнюють різниці між спотовою ціною та ціною виконання базового активу, а за час дії угоди спотова ціна може зрости до будь-якої величини:

$$\max_{X \in [0;+\infty)} (X - K) = +\infty$$

Проте економісти вже давно розробили багато типів стратегій, яких слід дотримуватись при торгівлі деривативами та цінними паперами, щоб хеджувати ризики, властиві продажу опціону. Тому, не зважаючи на високу ризикованість продажу опціону, опціонні контракти є більш популярними на ринку і тому вони найприйнятніші як інструменти хеджування.

В основі майже всіх стратегій торгівлі фінансовими інструментами, розроблених для продавців опціонів з метою зниження або нейтралізації ризику, на який вони наражаються, лежить розрахунок „справедливої” (реальної) ціни опціону, тобто такої ціни, яка реально відображає ризик продажу опціону. В сучасних умовах багатовекторної та багатофакторної ситуації на ринку без застосування математичних методів та відповідного програмного забезпечення вирішити проблему знаходження „справедливої” ціни опціону неможливо.

Найбільш ефективним і найвідомим методом хеджування ризиків, властивих торгівлі опціонами, є динамічні стратегії хеджування. Їх суть полягає в неперервній торгівлі певними активами з метою формування такого портфелю (він називається хедж-портфелем), вартість якого наприкінці дії опціонного контракту була б не меншою, ніж виплати за опціоном. Припустимо, що:

- ✓ на ринку обертаються акції з ціновим процесом $\{X_t,\ t\geq 0\}$, який підпорядковується рівнянню $dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dW_t$ і для якого початкова ціна $X_0>0$, де t − це час, що пройшов з моменту укладання угоди;
- ✓ під час дії опціонного контракту (тобто при $0 \leq t \leq \mathrm{T}$) дивіденди за акціями не виплачуються;
- ✓ у банку в момент часу t =0 можна отримати довільну кількість кредитів на суму $B_0>0$ кожний під безризикову ставку r, яка неперервно нараховується і що є сталою величиною;
- ✓ позичену суму разом з нарахованими відсотками необхідно повернути наприкінці дії опціоного контракту;
- ✓ заборгованість в момент часу t обчислюється за формулою $B_t = B_0 e^{rt}$, тобто має місце наступне співвідношення $dB_t = rB_t\, dt$.

Нехай в момент часу t=0 укладається опціонний контракт європейського типу на купівлю однієї акції з ціною реалізації K та строком дії T; при цьому покупцем опціону виплачується премія C_0, що становить вартість опціону в початковий момент часу. Продавець опціону бере β_0 кредитів на суму B_0 кожний і інвестує отримані за кредитом кошти і премію за опціоном в γ_0 акцій. Таким чином, в початковий момент часу формується портфель $\pi_0 = (\beta_0,\ \gamma_0)$, такий, що його вартість становить $\Pi_0 = \gamma_0 X_0 - \beta_0 B_0$ і дорівнює C_0. За умов самофінансованості портфелю (тобто зміни у кількості кредитів можуть відбуватись лише за рахунок зміни кількості акцій) і відсутності можливості укладання арбітражних угод можна отримати наступні формули визначення „справедливої” ціни опціону та динамічних стратегій хеджування (цей результат отримали Ф.Блек та М.Шоулз[1]). Ціна опціону европейського типу на купівлю однієї акції в кожний момент часу t дорівнює $C_{BS}\,(X_t, t)$, де X_t − це спот ціна активу і

[1] Black F. and Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities. // Journal of Political Economics, 1973, **81**, no.3, pp.637-654.

$$C_{BS}(x,t;\sigma) = \frac{1}{2}x\left(1+erf\left(d_1 \big/ \sqrt{2}\right)\right) - \frac{K}{2}e^{-r(T-t)}\left(1+erf\left(d_2 \big/ \sqrt{2}\right)\right),$$

$$d_{1,2}(x,t;\sigma) = \frac{\ln\left(x \big/ K\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}d\eta$$

Динамічна стратегія хеджування є наступною: в кожний момент часу t хедж-портфель має складатись з $\gamma_{BS}(X_t, t)$ акцій та $\beta_{BS}(X_t, t)$ кредитів (X_t − це спот ціна активу), де функції γ_{BS} та β_{BS} визначаються за формулами:

$$\gamma_{BS} = \frac{1}{2}\left(1+erf\left(d_1 \big/ \sqrt{2}\right)\right) \qquad \beta_{BS} = \frac{KB_0e^{-rT}}{2}\left(1+erf\left(d_2 \big/ \sqrt{2}\right)\right)$$

Проте, на нашу думку, ця модель має ряд недоліків[2], зокрема вона не враховує операційні витрати, які має сплачувати продавець опціону при виконанні хедж-стратегій. Серед всіх операційних витрат (маржа, податки, комісійні тощо) найбільший вплив спричиняють саме комісійні виплати, що має сплачувати продавець опціону при торгівлі базовим активом у відповідності з динамічними стратегіями хеджування. Тому нами була побудована модель, що їх враховує, а також знайдений розв'язок цієї моделі.

Припустимо, що в кожний момент часу t відбувається відток капіталу A_t у вигляді операційних витрат і dA_t − операційні витрати, що сплачуються при торгівельній операції будь-якого типу (або купівлі, або продажу активу) на суму $d\gamma_t$. Припустимо, що операційні витрати є пропорційними кількості проданого або купленого базового активу (з економічної точки зору саме така ситуація більш відповідає дійсності), тобто існує деяка стала $\lambda > 0$:

$$dA_t = \lambda X_t \left| d\gamma_t \right| (dt)^{1/2}$$

Ми отримали наступну кінцево-крайову задачу для обчислення ціни європейського опціону на продаж, коли сплачуються операційні витрати:

[2] Див. Сільченко М.В. Математичні методи у хеджуванні ризиків на ринку опціонів. //Фінанси України, 2000, №11, с.100-106., Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время. // Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т.39.Вып.1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + r\left(x\dfrac{\partial C}{\partial x} - C\right) + \lambda\sigma x^2 \left|\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right| = 0, \quad x > 0, t < T \\ C(x,T) = f(x), \quad x > 0 \\ C(0,t) = 0, \quad t < T \\ \lim\limits_{x\to\infty} \left|C(x,t) - (x - Ke^{-r(T-t)})\right| = 0, \quad t < T \end{cases}$$

та її розв’язок і динамічну стратегію хеджування: ціна опціону европейського типу на купівлю в кожний момент часу t дорівнює

$$C^\lambda(x,t) = C_{BS}(x,t;\sqrt{\sigma^2 + 2\lambda\sigma})$$

$$\gamma^\lambda = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(d_1^\lambda \big/ \sqrt{2}\right)\right) \qquad \beta^\lambda = \frac{KB_0 e^{-rt}}{2}\left(1 + erf\left(d_2^\lambda \big/ \sqrt{2}\right)\right) \qquad d_{1,2}^\lambda = d_{1,2}(x,t;\sqrt{\sigma^2 + 2\lambda\sigma})$$

Зауважимо, що за відсутності операційних витрат ($\lambda = 0$) розв’язок цієї задачі співпадає з функцією Блека-Шоулза. Досліджуючи отриману модель, ми прийшли до висновку, що вплив операційних витрат на формування ціни опціону є таким, що їм не можна нехтувати. Майбутні витрати, пов’язані з виконанням стратегій хеджування, мають бути „закладені” у опціонну премію. Вплив різних чинників (волатильності ціни базового активу, безризикової ставки, ціни виконання, часу дії опціону) відбувається по різному, але у сукупності різниця між справедливою ціною опціону, розрахованою за нашою моделлю, і ціною, розрахованою за класичною моделлю Блека-Шоулза, є відчутною. Щоб проілюструвати це, у якості прикладу розглянемо опціон на купівлю европейського типу на одну акцію з наступними параметрами: K = 5, T = 0.5, σ = 0.4, r = 0.04 (дані обрані для можливості порівняння з класичною моделлю Блека-Шоулза).

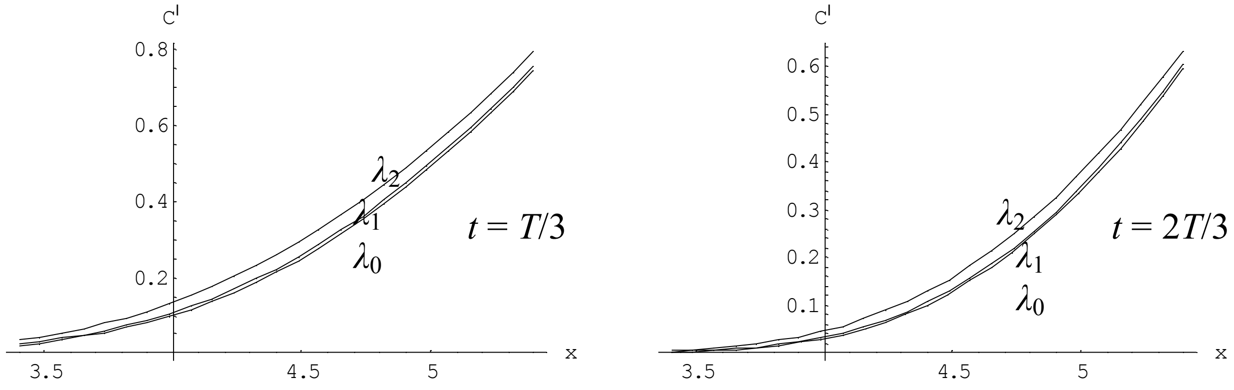

Рис.1. Графіки функцій C^λ при $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 0.01$, $\lambda_2 = 0.05$ при $t = T/3$, $t = 2T/3$

На рис.1 відображено, що графіки ціни опціону, які враховують операційні витрати, лежать вище за графік функції Блека-Шоулза, і різниця між цими графіками є співставимою з ціною опціону. Тому при великих обсягах торгівлі, торговець при продажу опціону може зазнати значних збитків, якщо він не буде враховувати операційні витрати, пов'язані з динамічними стратегіями. В загальному випадку ситуація є тією ж самою.

В результаті проведеного нами аналізу можна зробити висновок, що така корекція моделі Блека-Шоулза та стратегій хеджування є важливою, оскільки дозволяє продавцю опціону передбачити витрати і врахувати їх при визначенні ціни опціону.

Наприкінці зазначимо, що моделі, які дозволяють досить вірогідно визначити справедливу ціну опціону[3], розроблені для розвинених економік. Параметри, що входять до цих моделей, зокрема волатильність базового активу та безризикова ставка, для цих моделей або є близькими до сталих величин, або їх можна оцінити у рамках теорії випадкових процесів. В нашій країні, де на стан фондового ринку крім економічних факторів, впливають соціально-політичні, важко прогнозувати майбутні ціни на базовий актив та значення вказаних параметрів, тому на сучасному етапі можливості використання цих моделей досить обмежені. Проте, з розвитком економіки країни в цілому, і ринку строкових контрактів зокрема, використання математичних методів при визначенні стратегій торгівлі є, як показує досвід розвинених країн, вкрай необхідним.

[3] див Буренин А.Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов: Учебное пособие. − М: Издательство 1-й Федеративной Книготорговой Компании, 1998.−352 с., Теоретико-ймовірносні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці: Учбовий посібник для студ. екон. та мат. спец. ун-тів / М.М.Леоненко, Ю.С.Мішура, В.М.Пархоменко, М.Й.Ядренко. − К.: Інформтехніка, 1995. – 380с., Sircar, K. and Papanicolaou, G. General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. // Applied Mathematical Finance, 1998, **5**, pp.45-82.