Сільченко М.В.

Математичні методи у хеджуванні ризиків на ринку опціонів

Важливою складовою ринкової економіки є розвинений фінансовий ринок. За організацією торгівлі фінансовий ринок поділяється на кредитний та ринок цінних паперів. Останній являє собою особливу форму торгівлі фінансовими ресурсами, яка опосередковується випуском та обігом цінних паперів.

В умовах розвиненого фінансового ринку розрізняють цінні папери трьох порядків. Цінні папери першого порядку використовуються для формування та нарощування фінансових ресурсів, а також для отримання доходу. Ними є акції, облігації, сертифікати та закладні. Цінні папери другого порядку − це похідні інструменти, або деривативи. Вони являють собою договір про майбутню купівлю або продаж певного активу за заздалегідь встановленою ціною. Цей договір має власну ціну, яка формується при його купівлі-продажу на ринку. До деривативів відносять фьючерс, опціон, варант, своп. Цінні папери третього порядку − акредитив, коносамент та вексель − це цінні папери, які обслуговують товарні угоди і товарообіг.

Похідні цінні папери обертаються на ринку, який називається ринком строкових контрактів. В даний час він є однією з центральних ланок ринкової економіки і являє собою добре організовану систему біржової та позабіржової торгівлі. З переходом до ринкової економіки в Україні були також зроблені спроби деякими біржами організувати торгівлю деривативами. На жаль, недостатня розвиненість ринку цінних паперів першого порядку (оскільки саме вони лежать в основі простих типів опціонів та фьючерсів), відсутність достатньої кількості спеціалістів, непропорційна структура головних діючих осіб на строковому ринку − хеджерів та спекулянтів, а також недостатнє розуміння необхідності функціонування такого ринку, призвели до того, що на даний час торгівля похідними цінними паперами на цих біржах практично зупинена.

Проте, з подальшим розвитком ринкової економіки, з розвитком ринку цінних паперів, мають з'явитися всі передумови для ефективної роботи ринку деривативів, який є одним з механізмів, що стабілізує функціонування всієї економіки. Це випливає з головної переваги строкового ринку − він дозволяє його учасникам суттєво знижувати ризик, властивий предмету строкової угоди: виробники та споживачі різної продукції можуть впливати на ціновий ризик реалізації або придбання товарів, експортери та імпортери − на ризик зміни валютних курсів, власники фінансових активів − на ризик падіння курсової вартості, позичальники та кредитори − на ризик зміни процентної ставки тощо.

Однією з задач на даний час є підготовка спеціалістів в цій області, які в подальшому зможуть грамотно проводити операції з деривативами, маючи при цьому за мету або хеджування ризиків, або спекулятивні цілі, або пошук можливості проведення арбітражних угод. Якісні методи визначення стратегії торгівлі на ринку цінних паперів, що засновані на суб'єктивному аналізі стану ринку, в наш час поступаються за значенням кількісним методам. Суть цих методів полягає, по-перше, в побудові економіко-математичної моделі, яка описує ринок в цілому, його інструменти, учасників та процес ціноутворення, і по-друге, в розв'язанні поставлених в моделі задач з використанням того чи іншого математичного апарату. Тому підготовка спеціалістів з ринку цінних паперів має включати в себе оволодіння розробками сучасних вчених в сфері фінансової математики.

В даній статті зупинимось на методах, які використовуються для прогнозування цін одного з найпоширеніших в умовах розвиненого ринку видів деривативів, а саме, опціонів. Опціон передбачає, з одного боку, право, але не зобов'язання, його покупця купити (опціон на купівлю − call option) або продати (опціон на продаж − put option) певну кількість активу, що лежить в основі опціону (underlying asset), за заздалегідь встановленою ціною (ціною виконання − strike price) на протязі певного проміжку часу. З іншого боку, продавець бере на себе зобов'язання продати або купити основний актив за ціною виконання на протязі цього проміжку часу за вимогою покупця.

За часом виконання опціону розрізняють опціони американського та європейського типів. Опціон європейського типу надає його покупцеві право продати основний актив лише на дату виконання (expiration date) опціону. Американський опціон може бути реалізований в будь який момент дії опціону. При виписуванні опціону покупець виплачує премію продавцю, що являє собою ціну опціону в початковий момент часу. При подальшому продажу-купівлі цього контракту формується його ціна в кожний момент часу, яка залежить від цілого ряду чинників, головними з яких є ціна базового активу та його волатильність, ціна реалізації, час до закінчення дії опціонної угоди.

В залежності від ситуації, що складається на ринку основних активів, покупець опціону або реалізує, або не реалізує своє право, надане опціонним контрактом. В з'язку з цим для продавця опціону виникає невизначеність, яка зумовлює існування ризику, пов'язаного з продажем опціону. Якщо покупець не реалізує опціон, то продавець отримає чистий доход, що дорівнює його початковій премії. Але якщо склалася така ситуація на ринку, що покупець реалізує опціон, продавець може зазнати значних збитків. При цьому втрати продавця опціону на продаж обмежені поточною ціною основного активу, а втрати продавця опціону на купівлю взагалі нічим не обмежені. Виникає проблема: як запобігти цьому ризику, якої стратегії треба дотримуватись?

Основою побудови стратегії хеджування є прогнозування ціни опціону, і відповідно з нею, визначення структури портфелю цінних паперів. В математиці існує декілька підходів до вирішення цієї проблеми: статистичний, ймовірносний, диференціальних числень.

Суть **статистичних** методів полягає у вивченні попередньої історії ціни на опціон та основні цінні папери і та побудові на їх основі ліній тренду для знаходження значень ціни опціону в наступний час. Одним із недоліків цих методів є те, що ціни на ринку є випадковими величинами, які залежать від багатьох чинників, а не лише від розвитку системи у попередній час. Тому наразі цим методам у фінансовій математиці відводиться другорядне значення і на практиці вони майже не застосовуються.

Інший метод розрахунку справедливої (або реальної) ціни опціону будується на основі **ймовірносного підходу**. Його суть і основні теоретичні результати були викладені у випуску журналу ‘‘Теория вероятностей и ее применение’’, присвяченому проблемі страхування опціонів[1]. Проте оволодіння даним математичним апаратом передбачає неабиякі знання з теорії ймовірностей, і тому з практичної точки зору застосування цього методу в економіці можливо лише вигляді *біноміальної моделі*[2]. В ній при визначенні ціни опціону використовується техніка формування портфелю без ризику. Суть біноміальної моделі полягає у тому, що час дії опціонного контракту поділяють на малі інтервали і, враховуючи ймовірність, будують дерево розподілу ціни основного активу. Визначивши ціну опціона в кінцевий момент часу, послідовним дисконтуванням під ставку без ризику знаходять значення ціни опціона для кожного вузла дерева розподілу, і таким чином розраховують величину премії в початковий момент часу. Якщо під час дії опціону з основного активу виплачуються дивіденди, то ціну акцій в кожному вузлі дерева коректують відповідним чином.

Підхід до проблеми визначення ціни опціону на основі теорії ймовірностей з точки зору *теорії ігор* був запропонований Нагаєвим А.В. у статті ‘‘К вопросу о вычислении справедливой цены опциона’’ в журналі ‘‘Экономика и математические методы’’[3].

Проте справжню революцію в фінансовій математиці зробив вихід у 1973 році статті Ф.Блека та М.Шоулза ‘‘The pricing of option and corporate liabilities’’[4]. В ній була запропонована модель для оцінки опціону у вигляді початково-крайової задачі для **диференціальних рівнянь** другого порядку в частинних похідних і наданий її розв’язок наступного вигляду:

$$C_{BS}(x,\tau) = \frac{1}{2}x\left(1 + erf\left(d_1\right)\right) - \frac{K}{2}e^{-r\tau}\left(1 + erf\left(d_2\right)\right),$$

де $$d_{1,2}(x,\tau) = \frac{\ln\left(x/K\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{2\tau}}, \quad erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\eta^2}d\eta$$

x − ціна базового активу; τ − час, що залишився до закінчення дії опціону; C − ціна опціону; K − ціна реалізації; r −ставка без ризику (наприклад, по безризиковим облігаціям); σ − волатильність ціни на основні цінні папери. Припускається, що відсутня можливість проведення арбітражних угод та що за час дії опціону по акціям не виплачуються ніякі дивіденди. При побудові цієї моделі ціна основного активу розглядалась як випадкова величина з дісперсією σ^2. Проте, сама модель є вільною від ймовірносних величин. Крім того, Ф.Блеком та М.Шоулзом була виведена явна стратегія хеджування опціону на купівлю з точки зору його продавця, а саме: щоб нейтралізувати ризик, властивий продажу опціону на купівлю, необхідно безперервно торгувати так, щоб в кожний момент часу t тримати основний актив на суму $C_x(X_t,t)$ та вкладати в безризикові облігації капітал на суму $C(X_t,t)−X_tC_x(X_t,t)$; X_t − ціна основного активу в момент часу t, $C_x(x,t)$ − похідна функції $C(x,t)$ по змінній x.

Очевидно, що формула Блека-Шоулза є досить простою для використання будь-яким економістом, тому що не вимагає від нього спеціальних математичних знань, має явний вигляд, і отже, може бути легко запрограмована. Крім того, за цією формулою легко визначити стратегію хеджування за зазначеним вище методом. Зазначимо, що Р.Мертоном ці формули були скоректовані для випадку, коли по акціям нерерервно нараховується дивіденд [5].

В більшості економічних видань, присвячених проблемам ринку строкових контрактів, є посилання на цю формулу, як на самий ефективний, простий у застосуванні та наближений до дійсності метод обчислення справедливої ціни опціону. Проте, класичній моделі Блека-Шоулза властиві певні недоліки, які в подальшому були розв'язані в цілому ряді наукових праць, зокрема:

– недолік того, що волатильність ціни основного активу Блеком та Шоулзом розглядалась як стала величина, був усунутий в роботі К.Сиркара и Дж.Папаниколау ''Stochastic volatility, smile and asymptotics''[6];
– врахування при обчисленні ціни опціону виплати операційних витрат було зроблено в роботі Г.Пацеллі, М.К.Реччіоні та Ф.Зіроллі ''A hybrid method for pricing European options based on multiple assets with transaction costs''[7];

– ефект впливу на формування ціни опціону питомої ваги учасників ринку, що ведуть програмну торгівлю, був врахований К.Сіркаром та Дж.Папаніколау в роботі ‘‘General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies’’[9].

Серед цих модифікацій класичної моделі Блека-Шоулза найбільшої уваги заслуговує введення в її параметри елементів програмної торгівлі, яка відображає ефект зворотньої дії. Справа в тому, що коли торгівля опціонами ведеться на основі моделі Блека-Шоулза (чи іншого математичного методу), то сам чинник її застосування стає одним із ціноутворюючих факторів. В сучасних умовах все більша частина торгівців використовує математичні методи, що веде до зростання програмної торгівлі

Модель, що виведена К.Сіркаром та Дж. Папаніколау, яка враховує враховує наявність на ринку програмної торгівлі являє собою узагальнення класичної моделі Блека-Шоулза, але на відміну від неї, є нелінійною:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial C}{\partial \tau}+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1-\rho\dfrac{\partial C}{\partial x}}{1-\rho\dfrac{\partial C}{\partial x}-\rho x\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}}\right]^2\sigma^2 x^2\dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2}+r\left(x\dfrac{\partial C}{\partial x}-C\right)=0, \quad x>0,\ \tau>\varepsilon \\ C(x,\varepsilon)=C_{BS}(x,\varepsilon), \quad x>0 \\ C(0,\tau)=0, \ \tau>\varepsilon \\ \lim\limits_{x\to\infty}\left|C(x,\tau)-(x-Ke^{-r\tau})\right|=0, \ \tau>\varepsilon, \end{cases}$$

$$C(x,\tau)=C_{BS}(x,\tau) \quad \text{при } 0\le\tau\le\varepsilon, \ x>0$$

де: $\boldsymbol{\rho}$ відображає, грубо кажучи, питому вагу програмної торгівлі на ринку, $\varepsilon>0$ − параметр зглажування, який вводиться певним чином, щоб згладити вплив зворотнього зв’язку, спричиненого надчутливістю динамічної стратегії хеджування Блека-Шоулза до цінових коливань в околі точки $x=K$ при $t\to T$. Зауважимо, що при $\rho=0$ ця модель являє собою класичну модель Блека-Шоулза.

У зв’язку з нелінійністю даної моделі, вона не може мати точного розв’язку. К.Сіркар та Дж. Папаніколау вирішували її на основі чисельних методів та при припущунні, що питома вага програмних торгівців на ринку досить мала. Однак, як засвідчила криза на фондовому ринку США в 1989 році, питома вага таких торгівців може бути досить відчутною, що суттєво впливає на ціноутворення. Тому, оскільки аналітичний розв’язок цієї задачі неможливо знайти, для знаходження наближеного аналітичного розв’язку нами запропонований метод, який є комбінацією методу Роте, методу нелінійних варіаційних параметрів та методу Бубнова-Гальоркіна. Суть його полягає у тому, що вводиться рівномірна сітка по τ: $\{\tau_i,\ i\in\{1\ldots n\}\}$, похідна по часу замінюється кінцевою різницею, і отже, розв’язання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться до послідовного розв’язання на кожному часовому шарі τ_i крайової задачі для звичайного диференціального рівняння. Це рівняння не має точного розв’язку, тому наближений розв’язок в момент часу τ_i шукався у вигляді:

$$\widetilde{c}_i(x) = L_{BS}(x,\tau_i) + A_i(1 - erf^2(x - Ke^{-r\tau_i})),$$

де

$$L_{BS}(x,\tau) = \frac{1}{2}x\bigl(1+erf(l_1)\bigr) - \frac{Ke^{-r\tau}}{2}e^{-r\varepsilon}\bigl(1+erf(l_2)\bigr), \qquad l_{1,2}(x,\tau) = \frac{\ln\left(\dfrac{x}{Ke^{-r\tau}}\right) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\varepsilon}{\sigma\sqrt{2\varepsilon}}$$

Варіаційні параметри A_i знаходились за методом Бубнова-Гальоркіна, в результаті чого були отримані рекурентні формули досить простого вигляду для знаходження значень параметрів A_i в кожний момент часу τ_i. Стратегія хеджування даного опціону визначається наступним чином: в кожний момент часу τ_i необхідно тримати основний актив на суму S_1 та вкладати в облігації капітал на суму S_2, де

$$S_1 = C_x(X_{\tau_i},\tau_i) = \\ = \frac{1}{2}\bigl(1 + erf(l_1(X_{\tau_i},\tau_i)\bigr) - \frac{4A_i}{\sqrt{\pi}} erf(X_{\tau_i} - Ke^{-r\tau_i})e^{-(X_{\tau_i} - Ke^{-r\tau_i})^2}$$

$$S_2 = C(X_{\tau_i},\tau_i) - X_{\tau_i}C_x(X_{\tau_i},\tau_i) = \\ = L_{BS}(X_{\tau_i},\tau_i) + A_i(1 - erf^2(X_{\tau_i} - Ke^{-r\tau_i})) - S_1 X_{\tau_i}$$

Цей метод знаходження наближеного аналітичного розв'язку нелінійної задачі Блека-Шоулза з урахуванням впливу програмной торгівлі був реалізований на компьютері за допомогою математичного редактора *Mathematica 3.0* для опціону на купівлю з ціною реалізації K=5, волатильністю основного активу σ=0,4, процентна ставка по безризиковим облігаціям r=0,04, питома вага програмної торгівлі на ринку ρ=0,05. Були отримані графіки залежності ціни опціона $C(x,\tau)$ від ціни основного активу x і часу τ (рис.1) та стратегії хеджування опціона − функції $S_1(x,\tau)$ (рис.2).

Рисунок 1

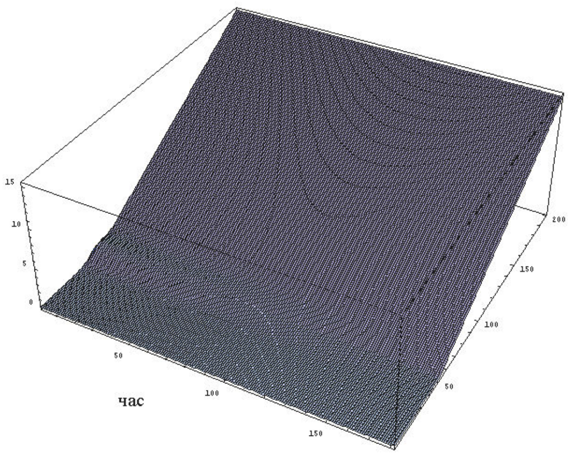
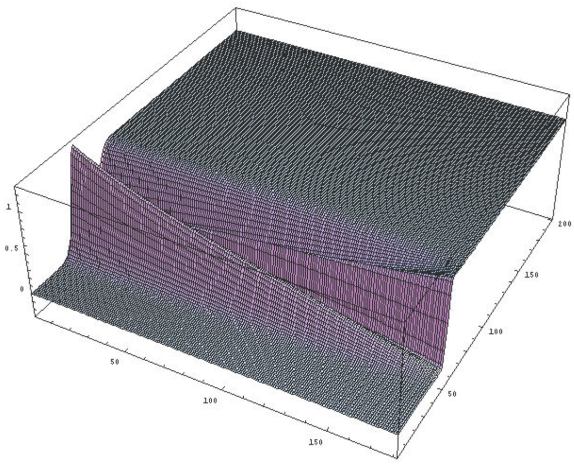


Рисунок 2



Запропонований метод розв'язання цієї задачі у порівнянні з методом, що застосовувався К.Сіркаром та Дж.Папаніколау є більш простим та ефективним для використання, процес знаходження наближеного розв'язку на кожному кроці можна легко запрограмувати, а тому, на наш погляд, цей метод є більш прийнятним з точки зору економістів.

* *
*

Автор висловлює щиру подяку за надані консультації з проблем застосування теорії диференціальних числень при вирішенні фінансових задач доктору фізико-математичних наук, професору Березовському Арнольду Анатолієвичу.

Література.

1. Ширяев А.Н. О некоторых понятиях и стохастических моделях финансовой математики. // Теория вероятностей и ее применение. 1994. Т.39.Вып.1. с.5-22.
2. Буренин А.Н. Фьючерсные, форвардные и опционные рынки.− М.: Тривола, 1995. .-240 с.
3. Нагаев А.В. К вопросу о вычислении справедливой цены опциона.// Экономика и математические методы. 1998. Т.34. Вып.1. с.166-171.
4. Black, F. and Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economics*, **81**,637-659
5. Merton, R.C. (1973) Theory of rational optional pricing, *Bell Jornal of Economics* **4**, 141-183.
6. Sircar, K. and Papanicolaou, G. (1999) Stochastic volatility, smile and asymptotics. *Applied Mathematical Finance* **6**, 107-145.
7. Pacelli, G., Recchioni, M.C., Zirolli, F. (1999) A hybrid method for pricing European options based on multiple assets with transaction costs. *Applied Mathematical Finance* **6**, 61-85.
8. Sircar, K. and Papanicolaou, G. (1998) General Black-Scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies. *Applied Mathematical Finance* **5**, 45-82.