VI. ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ

УДК 519.8

Т. В. Блудова, д-р екон. наук, професор,
О. О. Мельник, канд. фіз.-мат. наук,
старший викладач,
кафедра вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний економічний

ДОСЛІДЖЕННЯ ВИРОБНИЧИХ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

АНОТАЦІЯ. У статті розглядається історичний розвиток комплексних чисел і пропонується дослідження виробничих функцій за допомогою представлення у вигляді функцій комплексних змінних. Для демонстрації деяких прикладів використано пакет програм Mathematica 8. Доведено, що виробничі функції комплексного змінного мають право на існування і значно розширюють інструментальну базу дослідника.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: комплексні числа, Mathematica 8, виробничі функції комплексного змінного.

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается историческое развитие комплексных чисел и предлагается исследование производственных функций с помощью представления в виде функций комплексных переменных. Для демонстрации некоторых примеров используется пакет программ Mathematica 8. Доказано, что производственные функции комплексного переменного имеют право на существование и значительно расширяют инструментальную базу исследователя.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: комплексные числа, Mathematica 8, производственные функции комплексного переменного.

ANNOTATION. The paper considers the historical development of complex numbers and proposed research production functions using the representation in the form of functions of complex variables. To demonstrate some examples will use the software package Mathematica 8. Proved that the production functions of complex variables have a right to exist and significantly expand the instrumental basis of the researcher.

KEY WORDS: complex numbers, Mathematica 8, production functions of complex variables.

Постановка проблеми. Сучасний апарат планування використовує велику кількість методів — балансові методи, методи оптимізації, методи теорії ігор, динамічного моделювання і т. д. особливе місце у ньому займають методи, що базуються на моделюванні виробничих процесів, у першу чергу — виробничі функції, за допомогою яких можливо здійснити багатоваріантні розрахунки з метою пошуку найкращого поєднання виробничих ресурсів.

Виробничий функції відомі вже давно, їх арсенал достатньо широкий, але зі всієї сукупності найчастіше використовують виробничу функцію Кобба—Дугласа. Вирішуючи ряд важливих завдань, вона, все ж таки обмежена в своєму практичному застосуванні. Саме тому економісти адаптують її до різних завдань, намагаються запропонувати її нові модифікації. Очевидно, що такий підхід сприяє розвитку інструментального ряду теорії виробничої функції, але не сприяє її якісному зростанню.

Використання в теорії виробничих функцій комплексних змінних не тільки розширює інструментальну базу теорії виробничих функцій за рахунок застосування нових моделей, але і відкриває нові можливості, оскільки вдається знайти залежність двох пар комплексних змінних один від одного — комплексного результату від комплексних витрат ресурсів, а в області дійсних чисел такого результату добитися не вдасться.

Аналіз основних джерел. Розширення множини дійсних чисел, яке пов'язане з появою комплексних чисел, було обумовлене внутрішньою логікою розвитку математики: в алгебрі у зв'язку з добуванням квадратного кореня з від'ємних чисел та розв'язанням кубічних рівнянь привело у XVI ст. до системи нових чисел вигляду $a+b\sqrt{-1}$; $a,b\in R$ [1].

Л. Ейлер (1707—1783) у книзі: «Вступ до математичного аналізу» (1746) ввів позначення $\sqrt{-1}=i$ та прийняв назву: i — уявна *(i[maginarius]* — уявний) одиниця, запропоновану Р. Декартом. Л. Ейлер розглядає нові уявні числа вигляду $a+bi$; $a,b\in R$, як символи, що не мають ніякого смислу, на які індуктивно поширюються всі правила дій та їх властивостей з дійсними числами.

Минуло майже двісті років після введення уявних чисел в алгебру і як вони дістали широке поширення у математиці та застосуванні. Німецький математик К. Гаусс (1777—1855), наприкінці XVIII ст. створює на евклідовій площині геометричну інтерпретацію уявних чисел у праці «Теорія біквадратних величин» (1799). У своїй праці «Арифметичні теорії комплексних чисел» (1806, 1825, 1831), К. Гаусс, розглядаючи спосіб інтерпретації уявних чисел, назвав їх вперше комплексними числами (лат. complexus — об'єднання) і застосував геометричне тлумачення комплексних чисел до розв'язання проблемних геометричних задач, зокрема, про розв'язність побудови правильних многокутників; що обумовило початок застосування комплексних чисел [2].

До середини XIX ст. установився реальний зміст про комплексні числа і з'явилось намагання подальшого їх узагальнення на тривимірний простір.

Ірландський математик У. Р. Гамільтон (1805—1865) розглядає систему чисел *а* з чотирма одиницями: одна дійсна $i_0 = 1$ і три уявних $i, j, к$, яка визначається упорядкованою четвіркою дійсних чисел — $a_0, a_1, a_2, a_3 \in R$: $a = a_0 i_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, і назвав її кватерніонами (лат. quatern — чотири). Відкриття кватерніонів явилось імпульсом для створення ряду важливих розділів сучасної математики, зокрема, теорії матриць, багатовимірної геометрії та ін. Числова система — числення кватерніонів — знайшла широке застосування в геометрії, механіці, теоретичній фізиці. Достатньо вказати, що шотландський фізик і математик Дж. К. Максвелл (1831—1879) в кватерніонах записав (1860—1865) свої відомі рівняння (рівняння Максвелла), які явились основою теорії електромагнетизму.

Усередині XIX ст. почали розглядатися числові системи чисел а з (*n* + 1)-єю одиницями: $i_0 = 1$ та $i_1, ..., i_n$ — уявні одиниці, які записуються за допомогою упорядкованих дійсних чисел $a_0, a_1, a_2 ..., a_n$ у вигляді $a = a_0 i_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + ... + a_n i_n$, їх назвали гіперкомплексними (*n* + 1)-го рангу; за цим означенням, зокрема, комплексні числа і кватерніони є гіперкомплексними числами відповідно 2-го і 4-го рангу.

З розвитком теорії комплексних чисел почала розвиватись теорія функцій комплексної змінної, основи її закладено у XVII ст. в основному працями Л. Ейлера. Подальший її розвиток зв'язаний з працями О. Коші, Б. Рімана (1826—1866), К. Вейєрштрасса [3].

Теорія функції комплексної змінної знаходить численні застосування в аеро-, гідромеханіці, теорії пружності, електротехніці, атомній фізиці, у різних розділах теоретичної математики таких, як аналітична теорія чисел, диференціальні рівняння та ін.

Постановка задачі. У роботі пропонується дослідження виробничих функцій за допомогою представлення у вигляді функції комплексних змінних наступним чином:

$$z = G + iG = a(K + iL)^b\,, \tag{1}$$

де *C* — витрати виробництва, а *G* — валовий прибуток від виробництва. Виробничі ресурси представлені витратами капітальних ресурсів *K* і витратами трудових ресурсів *L*, *a* — комплексний коефіцієнт пропорційності, *b* — комплексний показник степеня.

Потрібно зауважити, що всі складові комплексних змінних витрат виробництва і валового прибутку повинні бути приведені до одних і тих же одиницях виміру. Для цього можна скористатися різними формулами нормалізації змінних, що приведе до їх обезрозмірювання [4].

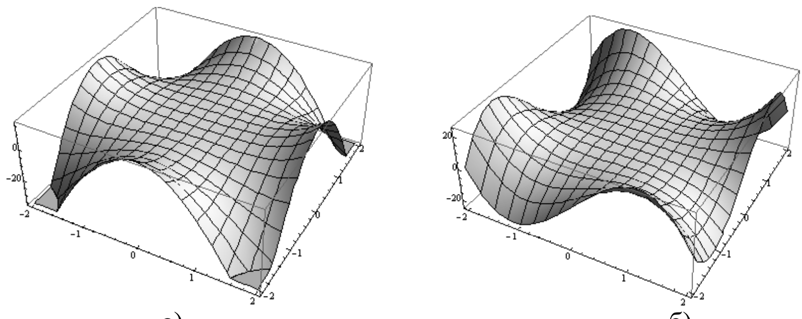
Для демонстрації деяких прикладів будемо використовувати пакет програм Mathematica 8, що має потужну й точну систему обробки зображень і створення інтерактивних інструментів для швидкого вивчення нових ідей. Дана програма вводить повний набір функцій для художньої обробки та аналізу зображень, складання цифрового зображення, сегментації, перетворення узгодження, і відновлення зображень. Обробка зображень відрізняється великою функціональністю, наприклад, автоматичне розпізнавання зображень функцій, включаючи ключові точки, лінії, кути, ребра і текстури [5].

Виклад основного матеріалу. Розглянемо випадок, коли функція (1) після статистичної обробки інформації представляється у вигляді:

$$z = G + iC = (K + iL)^4\,,\ K \in [-2{,}2],\ L \in [-2{,}2]. \tag{2}$$

Зауважимо, що знак мінус виражає для витрат виробництва ту ситуацію, коли витрати перевищують можливі і потребують залучення допоміжних інвестицій, наприклад кредитування [5]. В той же час знак мінус для витрат трудових ресурсів означає нестачу їх на виробництві і ситуацію необхідності залучення вільних робітників з інших фірм на умовах аутстафінгу [6].

На рис. 1 зображено поверхні: а) дійсної частини (витрат виробництва) та уявної частини (витрат трудових ресурсів), що дає можливість проаналізувати окремо ці дві частини складової виробничої функції.



а) б)

Рис. 1. Поверхні:

а) $\mathrm{Re} = \left\{(K + iL)^4\right\},\ K \in [-2{,}2],\ L \in [-2{,}2]$ та

б) $\mathrm{Im} = \left\{(K + iL)^4\right\},\ K \in [-2{,}2],\ L \in [-2{,}2]$ виробничої функції (2) комплексної змінної

Інтерес представляє дослідження аргументу комплексної виробничої функції (рис. 2) [4]:

$$Argz = Arg(K + iL)^4,\ K \in [-2{,}2], L \in [-2{,}2]. \tag{3}$$

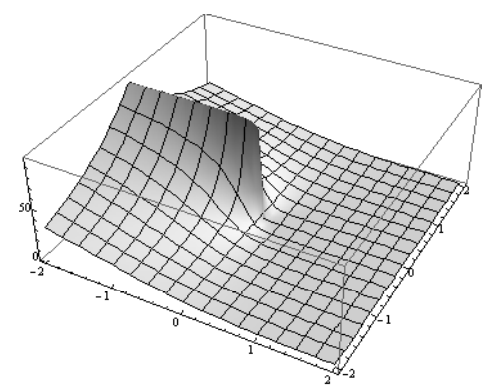
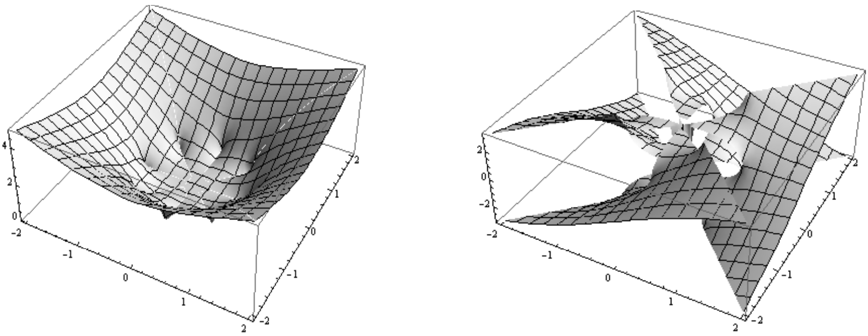


Рис. 2. Поверхня аргументу виробничої функції (2) комплексної змінної

Виробничі функції можуть бути представлені більш складними аналітичними виразами, наприклад (рис. 3):

$$z = G + iC = \arccos(K + iL)^4 , \ K \in [-2,2], L \in [-2,2], \qquad (3)$$



а) б)

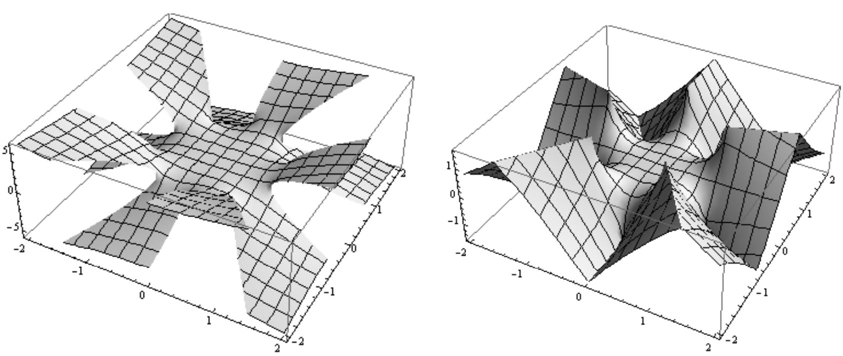
Рис. 3. Поверхні:

а) $z = \mathrm{Re}\{\arccos(K + iL)^4\}$, $K \in [-2,2], L \in [-2,2]$ та

б) $z = \mathrm{Im}\{\arccos(K + iL)^5\}$, $K \in [-2,2], L \in [-2,2]$ виробничої функції (3) комплексної змінної,

або у вигляді (рис. 4):

$$z = G + iC = \arcsin(K + iL)^5 , \ K \in [-2,2], L \in [-2,2]. \qquad (4)$$



а) б)

Рис. 4. Поверхні:

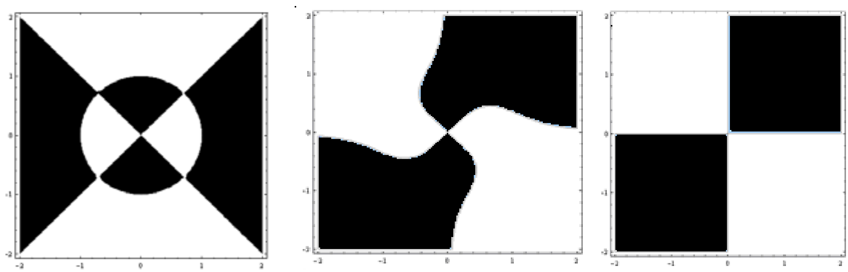
а) $z = \mathrm{Re}\{\arcsin(K + iL)^5\}$, $K \in [-2,2], L \in [-2,2]$ та б) $z = \mathrm{Im}\left\{\arcsin(K + iL)^5\right\}$, $K \in [-2,2], L \in [-2,2]$ виробничої функції (4).

Також можна досліджувати області визначення для поверхонь виробничих функцій у вигляді нерівностей, як наприклад (рис. 5 а), б), в)):

$$\mathrm{Re}\left\{(K+iL)^2\right\} > \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(K+iL)^2}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2]; \qquad (5)$$

$$\mathrm{Im}\left\{(K+iL)^2\right\} > \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(K+iL)^2}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2]; \qquad (6)$$

$$\mathrm{Im}\left\{(K+iL)^2\right\} > \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(K+iL)^2}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2], \qquad (7)$$



а) б) в)

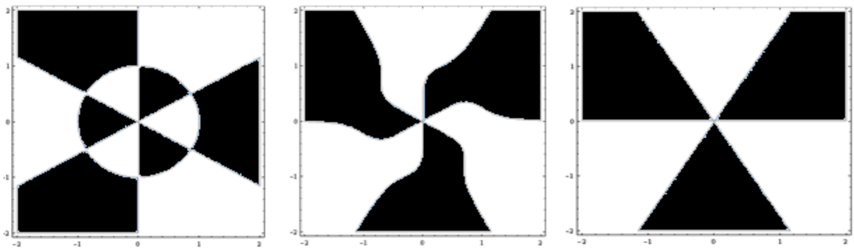
Рис. 5. Області визначення для поверхонь виробничих функцій:
а) для формули (5); б) для формули (6); в) для формули (7)

або (рис. 6):

$$\mathrm{Re}\left\{(K+iL)^3\right\} > \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(K+iL)^3}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2]; \qquad (8)$$

$$\mathrm{Im}\left\{(K+iL)^3\right\} > \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{(K+iL)^3}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2]; \qquad (9)$$

$$\mathrm{Im}\left\{(K+iL)^3\right\} > \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(K+iL)^3}\right\},\ K \in [-2,2], L \in [-2,2]. \qquad (10)$$



а) б) в)

Рис. 6. Області визначення для поверхонь виробничих функцій:
а) для формули (8); б) для формули (9); в) для формули (10)

Різноманіття можливих виробничих функцій комплексних змінних зовсім не обмежується приведеними вище прикладами, адже існують і інші види функцій комплексних змінних: показникова, логарифмічна, тригонометрична та ін. Крім того, цікавим видається дослідження класифікуючих виробничих функцій, наприклад, функції Кобба—Дугласа [7, 8]:

$$G + iC = \left(a_0 + ia_1\right)\left(K + iK_n\right)^{\alpha}\left(L + iL_n\right)^{1-\alpha}, \tag{11}$$

де K — витрати власного капітала, Kn — витрати позикового капитала, L — витрати праці основного персонала, L_n — витрати праці інших зайнятих на виробництві.

У будь-якому випадку можна стверджувати, що використання елементів теорії функцій комплексного змінного в економіці не лише можливо, але і настійно необхідно, оскільки істотно розширює можливості економіко-математичного моделювання.

Висновки. Безумовно, широке застосування теорії функції комплексної змінної зумовлюється виключним значенням комплексних чисел у математиці.

Зауважимо, що виробнича функція комплексного змінного (1) дозволяє моделювати циклічні і коливальні процеси на виробництві — коли лінійне збільшення капітальних або трудових ресурсів призводить до нелінійного зміни результату виробництва.

Виробничі функції комплексного змінного мають право на існування і значно розширюють інструментальну базу дослідника, даючи нові результати, досягти яких, застосовуючи виробничі функції дійсних змінних дуже складно.

Зауважимо, що пакет програм Mathematica 8 також полегшує використання аналітичних рішень для вивчення зв’язків між елементами дизайну і дає цінну інформацію про поведінку складних систем управління в економіці. З будь-якої точністю чисел, автоматичним вибором алгоритму, і передовою візуалізацією, Mathematica 8 ідеально підходить для побудови та аналізу систем управління в економічних дослідженнях.

Література

1. *Бородин А.И., Бугай А. С.* Выдающиеся математики: Биогр. слов. справ. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Рад.школа, 1987. — 656 с.
2. *Андронов И.К.* Математика действительных и комплексных чисел. — М.: Просвещение, 1975. — 158 с.
3. *А. Нивен*. Числа рациональные и иррациональные. —М.: Мир, 1966. — 196 с.
4. *Блудова Т.В., Мартиненко В.С.* Теорія функцій комплексного змінного. — К.: Просвіта, 2000. — 472 с.
5. http://www.wolfram.com/mathematica/
6. http://www.wolframalpha.com/
7. *Светуньков И.С.* Использование комплексных переменных в теории производственных функций / Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов. — 2007. — № 4. — С. 127—129.
8. *Светуньков С.Г., Светуньков И.С.* Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 136 с.

Статтю подано до редакції 06.03.12 р.

УДК 330.322.54; 519.86

О. В. Піскунова, канд. техн. наук,
доцент кафедри ЕММ,
ДВНЗ «Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

ВПЛИВ ЯКОСТІ ПРОДУКЦІЇ, ЩО ВИРОБЛЯЄТЬСЯ НА РОЗВИТОК МАЛОГО ПІДПРИЄМСТВА

АНОТАЦІЯ. Розроблено модель динаміки малого підприємства у дискретному часі. Модель дозволяє досліджувати вплив на розвиток підприємства якості продукції, що виробляється від якої залежить рівень цін на продукцію підприємства. Розглянуто випадки