# Kansantalouden tilinpidon mallintaminen differenssiyhtälöillä

Pro gradu -tutkielma

Kristian Vepsäläinen
165218
Itä-Suomen yliopisto
Fysiikan ja matematiikan laitos

30. lokakuuta 2014

# Sisältö

# 1 Johdanto

Tämä pro gradu-tutkielma käsittelee kansantalouden tilinpidon mallitamista ja mallin stabiilisuutta. Työssä käydään aluksi läpi matemaattista teoriaa, lähinnä differenssiyhtälöiden kannalta. Sen lisäksi määritellään kansantalouden tilinpito ja muita kansantaloustieteen termejä.

Työn aiheena on rakentaa Suomen kansantalouden tilinpidon aineistoa jäljittelevä simulaatiomalli, jota voidaa käyttää niin talouspolitiikan suunnittelussa kuin myös makrotaloudellisten suureiden ennustamisessa.

Differenssiyhtälöt liittyvät keskeisesti monien fysiikaallisten ongelmien mallintamiseen ja näitä käytetään matematiikan lisäksi muunmuassa insinööritieteissä. Näitä tarvitaan esimerkiksi mallinettaessa taloutta, teollisuusroboteissa ja kontrolloitaessa epidemioiden leviämistä tai laskeuduttaessa Kuuhun.

Kaikki kuvat, joihin viitataan luvun 2 jälkeen, löytyvät liitteestä.

# 2 Taustatietoa

## 2.1 Vektoreista ja matriiseista

Tämä alaluku perustuu lähteisiin [6] ja [4]. Tässä alaluvussa käsitellään erilaisia vektoreihin ja matriiseihin liittyviä perusmääritelmiä ja -tuloksia, joita tarvitaan myöhemmin. Lisäksi sovitaan, että tässä työssä skalaari tarkoittaa kuntaa ja lisäksi kiinnitetään, että tällä tarkoitetaan reaalilukujen kuntaa $\mathbb{R}$, jollei muuta mainita. Aloitetaan määrittelemällä vektoriavaruus:

**Määritelmä 2.1.1.** Vektoriavaruus on joukko $V$, jonka elementtejä ovat vektorit lisättynä kahdella operaatiolla, jotka ovat summa ja skaalarilla kertominen. Eli jos $i$ ja $j$ ovat $V$:n vektoreita, summa on $i + j$ ja skalaarilla kertominen on $i * r$. Näissä $r \in \mathbb{R}$ ja se toteuttaa seuraavat aksioomat:

1. $i + j$=$j + i$, kaikilla $i, j \in V$.
2. $(i + j) + k = i + (j + k)$ kaikilla $i, j, k \in V$.
3. On olemassa yksikäsitteinen vektori 0, jota kutsutaan nollavektoriksi, siten, että $i + 0 = i$ kaikilla $i \in V$.
4. jokaista vektoria $i$ vastaa yksikäsitteinen vektori $-i$ siten, että $i + (-i) = 0$.
5. r(i+j)=ri+rj kaikilla $i, j \in V, r \in \mathbb{R}$.
6. (r+s)i=ri+si kaikilla $i \in V, r, s \in \mathbb{R}$.
7. (rs)i=r(si) kaikilla $i \in V, r, s \in \mathbb{R}$.
8. 1i=i kaikilla $i \in V$.

Seuraavat tärkeät vektoreihin liittyvät käsitteet ovat linaarinen riippuvuus ja riippumattomuus:

**Määritelmä 2.1.2.** Vektorit ovat vektoriavaruuden osajoukossa $E$ lineaarisesti riippumattomia, jos on olemassa erilliset vektorit $v_1, v_2, \ldots, v_k \in E$ ja kertoimet $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{R}$ siten, että yhtälö $z_1 v_1 + z_2 v_2 + \cdots + z_k v_k = 0$ pätee jos ja vain jos kaikki kertoimet $z_i$ ovat nollia. Jos vektorijoukko ei ole lineaarisesti riippumaton, se on lineaarisesti riippuva.

Työssä merkitään matriisia isoilla kirjaimilla ja matriisin alkioita pienillä. Määritellään käsite matriisi ja matriisin osien perusnimityksiä:

**Määritelmä 2.1.3.**

1. Matriisi on $m \times n$-taulukko skalaareja kunnassa $F$, missä $F = \mathbb{R}$ tai $F = \mathbb{C}$.
2. Jos $m = n$ matriisia sanotaan neliömatriisiksi.
3. Joukkoa $m \times n$-matriiseja yli $F$:n merkitään $M_{m,n}(F)$ ja neliömatriisin tapauksessa $M_{n,n}(F) = M_n(F)$.
4. Alimatriisi on tietty alijoukko alkuperäisen matriisin rivejä ja sarakkeita.
5. Matriisin $A$ tiettyä alkiota merkitään $A = (a_{ij})$, missä $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Matriisin transpoosissa matriisin rivit vaihdetaan sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi. Tätä merkitään laittamalla matriisille potenssiksi T-kirjain.

**Määritelmä 2.1.4.** Matriisin $A = (a_{ij})$ transpoosi, jota merkitään $A^T$, on $A^T = (a_{ji})$.

Eräs tapa tutkia matriisin ominaisuuksia on laskea sille determinantti, joka on paljas luku.

**Määritelmä 2.1.5.** Determinantti määritellään induktiivisesti, kun $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ seuraavalla tavalla: Oletetaan, että determinantti on määritelty yli $M_{n-1}(F)$ ja olkoon $A_{ij} \in M_{n-1}(F)$ $A \in M_n(F)$:n alimatriisi, joka on saatu poistamalla rivi $i$ ja sarake $j$. Tällöin matriisin $A$ determinantti, jota merkitään $\det(A)$, on

$$\det(A) = \Sigma_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

missä $i \leq n, j \leq n$.

Kokonaislukujen joukossa $\mathbb{R}$ kertolaskun neutraalialkio on 1. Tätä vastaava neutraalialkio matriisella on yksikkömatriisi.

**Määritelmä 2.1.6.** Yksikkömatriisi, jota merkitään $I$:llä on matriisi, jonka diagonaalilla on ykkösiä ja muualla nollaa eli $I = (i_{ij})$, missä

$$(i_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{jos } i = j \\ 0 & \text{jos } i \neq j. \end{cases}$$

Matriisin (säännöllisyys)astetta kutsutaan rangiksi.

**Määritelmä 2.1.7.** Matriisin $A \in M_n(F)$ rangi on sen lineaarisesti riippumattomien rivien tai sarakkaiden lukumäärä.

**Esimerkki 2.1.8.** Matriisin $A$ rangi on 3, koska kaikki sen sarakkeet ja rivit ovat lineaarisesti riippumattomia.

Käänteislukua vastaa puolestaan käänteismatriisi:

**Määritelmä 2.1.9.** Matriisilla $A \in M_n(F)$ on käänteismatriisi, jota merkitään $A^{-1} \in M_n(F)$, jos $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Tällaista matriisia $A$, jolla on käänteismatriisi sanotaan kääntyväksi matriisiksi.

Aiemmin määritellyn determinantin avulla voidaan määritellä matriisin singulariteetti:

**Määritelmä 2.1.10.** Matriisi $A \in M_n(F)$ on ei-singulaarinen, jos sen determinantti on erisuuri kuin nolla eli $\det(A) \neq 0$. Jos matriisi $A$ ei ole ei-singulaarinen, se on singulaarinen.

Seuraavassa alaluvussa määritellään matriisihajotelmista singulaariarvohajotelma, mutta sen määrittelemiseksi tarvitaan vielä määritellä käsitetteet ominaisarvo ja ominaisvektori:

**Määritelmä 2.1.11.** Luku $\lambda \in \mathbb{C}$ on matriisin $A \in M_n(F)$ ominaisarvo, jos se toteuttaa yhtälön $Ax = \lambda x$, missä x on vektori, $A$ on neliömatriisi ja $x \in \mathbb{C}^n$. Vektoria $x$ kutsutaan matriisin $A$ ominaisvektoriksi.

Seuraavaksi määritellään muutamia erityyppisä matriiseja, joilla on tietty nimitys. Ensimmäisenä määritellään similaarinen matriisi:

**Määritelmä 2.1.12.** Neliömatriisi $A$ on similaarinen neliömatriisin $B$ kanssa, jos on olemassa kääntyvä matriisi $P$, jolle pätee

$$B = P^{-1}AP. \tag{2.1}$$

Tätä merkitään $A \sim B$.

Seuravaksi määritellään Jordanin matriisi. Tämä koostuu Jordanin lohkoista, jotka pitää määritellä ensin.

**Määritelmä 2.1.13.** Jordanin lohko $J_n(\lambda)$ on $n \times n$-yläkolmiomatriisi

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Tämän avulla voidaan määritellä Jordanin matriisi, joka on suora summa Jordanin lohkoista.

**Määritelmä 2.1.14.** Jordanin matriisi on $n \times n$-matriisi

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$.

Näillä määritelmillä voidaan esittää todistamatta seuraava lause:

**Lause 2.1.15.** *Jokainen matriisi $A$ on similaarinen Jordanin matriisin $J = diag(J_1, J_2, \ldots, J_k)$ kanssa.*

Lauseen (2.1.15) antama esitys matriisille $A$ on matriisien $J_i$ järjestystä vaille yksikäsitteinen.

## 2.2 Normista

Tämä alaluku perustuu lähteeseen [2, ss.174-175].

**Määritelmä 2.2.1.** Reaaliarvoista funktiota vektoriavaruudessa $V$ sanotaan normiksi ja merkitään $\|\cdot\|$, jos seuraavat ominaisuudet pätevät:

1. $\|x\| \geq 0$ ja $\|x\| = 0$ vain jos $x = 0$.

2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ kaikilla $x \in V$ ja skalaareilla $\alpha$

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ kaikilla $x, y \in V$.

| Normi | $\|x\|$ | $\|A\|$ | |
|---|---|---|---|
| $l_1$ | $\Sigma_{i=1}^{k}\|x_i\|$ | $\max_{i\leq j\leq k}\Sigma_{j=1}^{k}\|a_{ij}\|$ | Summa yli sarakkeiden |
| $l_\infty$ | $\max_{1\leq i\leq k}\|x_i\|$ | $\max_{1\leq i\leq k}\Sigma_{j=1}^{k}\|a_{ij}\|$ | Summa yli rivien |
| $l_2$ | $\left(\Sigma_{i=1}^{k}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ | $(\rho(A^TA))^{\frac{1}{2}}$ | |

Taulukko 1: Tyypillisimmät normit

Taulukossa 1 on kolme yleisintä normia. Lisäksi taulukossa $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ on } A\text{:n ominaisarvo}\}$. Matriisinormi voidaan määritellä yleisesti seuraavasti: $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Frobenius-normi matriiseille löytyy lähteestä [4, ss. 290-291], jossa tämä normi määritellään neliömatriisille yhtälöllä

$$\|A\|_F = \left(\Sigma_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

**Määritelmä 2.2.2.** Kaksi normia $(\|\|, \|\|')$ ovat ekvivalentteja $\mathbb{R}^k$:ssa, jos on olemassa vakiot $\alpha, \beta > 0$ siten, että

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|' \leq \beta\|x\|.$$

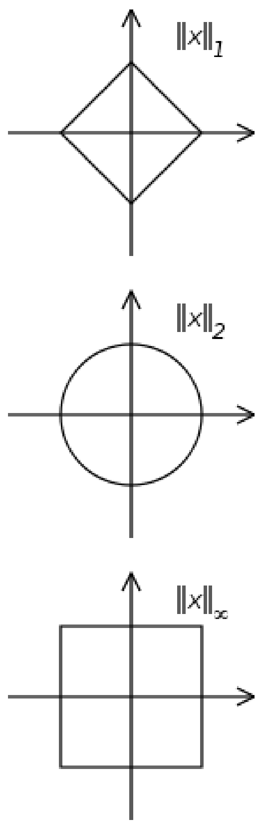
## 2.3 $l^p$-normit ja -avaruudet

Tässä alaluvussa määritellään normiavaruus $l^p$, joka on vektoriavaruus ja tällaisia avaruuksia kutsutaan jonoavaruudeksi. Kaikki $l^p$ avaruudet ovat Banach-avaruuksia.

**Määritelmä 2.3.1.** Yleinen $l^p$ normi määritellään seuraavasti: $l^p(x) = (\Sigma_{i=1}^{\infty}|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

**Määritelmä 2.3.2.** Olkoon $V = \{x|x = (x_0, x_1, \ldots)\}$ avaruus. Yleinen $l^p$-normiavaruus on avaruus $V$ yhdistettynä normiin (2.3.1) eli $l^p(N) = \{x \in V||x_p| < \infty\}$

Tarkemmin voidaan tarkastella normia $l^1, l^2$ ja $l^\infty$, jotka ovat $l^1 = (\Sigma_{i=1}^{n}|x_i|) = (|x_1| + |x_2| + \cdots + x_n), l^2 = (\Sigma_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|}$ ja $l^\infty = \sup\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$. Näistä normeista $l^2$:n normia nimitetään eukleidiseksi normiksi ja $l^\infty$:n normia maksiminormiksi. Näistä normeista maksiminormi on rajoitettu, koska sen arvo ei voi kasvaa tiettyä rajaa korkeammaksi. Kuvassa 1 on esimerkkikuva näistä kolmesta normista.




Kuva 1: $l^1, l^2$ ja $l^\infty$ normien ysikköympyrät graafisesti esittettynä

# 3 Differenssiyhtälöistä

## 3.1 Differenssiyhtälöiden perusteita

Tämä alaluku perustuu lähteeseen [5]

Differenssiyhtälöt ovat yhtälöitä, joiden $n+1$:s arvo riippuu edeltävästä arvosta $n$. Tämä relaatio voidaan ilmaista eksplisiittisesti differenssiyhtälön avulla:

**Määritelmä 3.1.1.** Yleinen differenssiyhtälö on muotoa

$$f(x(n+k), \ldots, x(n)) = 0 \tag{3.1}$$

**Määritelmä 3.1.2.** Vakiokertoiminen k-kertaluvun lineaarinen differenssiyhtälö on muotoa

$$x(n+k) + p_{k-1}x(n+k-1) + \cdots p_0 x(n) = 0, \tag{3.2}$$

missä $p_0, \cdots, p_{k-1}$ ovat vakioita ja $p_0 \neq 0$.

Differenssiyhtälö voidaan määritellä myös normaalimuodossa:

**Määritelmä 3.1.3.** Yhtälö (3.1) normaalimuodossa on

$$x(n+k) + f(x(n), \ldots, x(n+k-1)) = 0. \tag{3.3}$$

Vastaava ensimmäistä kertalukua oleva yhtälö on

$$x(n+1) = f(x(n)). \tag{3.4}$$

Aloitetaan seuraavaksi tutkimaan yhtälön (3.2) ratkaisuja. Tätä varten tarvitaan seuraava määritelmä

**Määritelmä 3.1.4.**

- Polynomia $\lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots p_0$ kutsutaan yhtälön (3.2) karakteristiseksi polynomiksi.
- Yhtälö $\lambda^n + \cdots + p_0 = 0$ on yhtälön (3.2) karakteristinen yhtälö.
- Karakteristisen yhtälön ratkaisut $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ovat karakteristisia juuria.

Olkoon $E$ yhtälön (3.2) siirto-operaattori (englanniksi shift operator). Tällöin vastaava karakterisinen yhtälö on

$$\begin{aligned}(E^k + p_{k-1}E^{k-1} + \cdots + p_0)x(n) &= 0 \\ &\textit{tai} \\ (E-\lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (E-\lambda_r)^{\alpha_r} x(n) &= 0,\end{aligned} \tag{3.5}$$

missä $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = k$ ja kertoimien järjestys on merkityksetön. Jokainen karakteristinen juuri on erisuuri kuin nolla, kun $p_0 \neq 0$.

Ratkaistaan yhtälö

$$(E-\lambda_1)^{\alpha_1} x(n) = 0. \tag{3.6}$$

Jokainen yhtälön (3.6) ratkaisu on myös yhtälön (3.5) ratkaisu. Jos $\alpha_1 = 1$, silloin yhtälö (3.6) on yksinkertaisesti $x(n+1) = \lambda_1 x(n)$, millä on ratkaisu

$x(n) = \lambda_1^n$. Jos $\alpha_1 > 1$ ja olkoon $x(n) = \lambda_1^n v(n)$ yhtälössä (3.6), tällöin saadaan:

$$\begin{aligned}
(E-\lambda_1)^{\alpha_1} x(n) &= (E-\lambda_1)^{\alpha_1} \lambda_1^n v(n) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-\lambda_1)^{\alpha_1 - i} E^i \lambda_1^n v(n) \\
&= \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-\lambda_1)^{\alpha_1 - i} \lambda_1^{n+i} E^i v(n) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1 + n} \sum_{i=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{i} (-1)^{\alpha_1 - i} E^i v(n) \\
&= \lambda_1^{\alpha_1 + n} (E-1)^{\alpha_1} v(n),
\end{aligned}$$

jos $v(n) = 1, n, n^2, \ldots, n^{\alpha_1 - 1}$. Täten yhtälöllä (3.6) on $\alpha_1$ kappaletta ratkaisuja, jotka ovat $\lambda_1^n, n\lambda_1^n, \cdots, n^{\alpha_1 - 1}\lambda_1^n$. Nämä ovat ratkaisuja, koska ovat lineaarisesti riippumattomia.[5, s.71]

Tämä lineaarisesti riippumattomuus tarkastetaan tapauksessa $\alpha_1 = 2$: Tällöin saadaan ratkaisut $\lambda_1^n$ ja $n\lambda_1^n$. Olkoot $c_1$ ja $c_2$ vakioita. Tällöin voidaan kirjoittaa:

$$\begin{aligned}
c_1 \lambda_1^n + c_2 n \lambda_1^n &= 0 \\
\lambda_1^n (c_1 + c_2 n) &= 0
\end{aligned}$$

Tämä pätee vain jos $c_1 = c_2 = 0$ eli ratkaisut ovat lineaarisesti riippumattomat. Esitellään seuraavaksi lause, jolla löydetään ratkaisut yhtälölle (3.2).

**Lause 3.1.5.** *Oletetaan, että yhtälöllä* (3.2) *on karakteristiset juuret* $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *kertoimilla* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. *Tällöin yhtälöllä* (3.2) *on* $k$ *riippumatonta ratkaisua, jotka ovat* $\lambda_1^n, \ldots, n^{\alpha_1 - 1}\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, n^{\alpha_2 - 1}\lambda_2^n, \ldots, \lambda_r^n, \ldots, n^{\alpha_r - 1}\lambda_r^n$.

Katsotaan seuraavaksi esimerkki Lauseen (3.2.3) käytöstä.

**Esimerkki 3.1.6.** Etsi kaikki ratkaisut yhtälölle

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Karakteristien yhtälö on

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0,$$

josta saadaan

$$(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0.$$

Tällöin Lause (3.2.3) kertoo, että differenssiyhtälön kolme riippumatonta ratkaisua ovat

$$x_1(n) = 2^n, x_2(n) = n2^n, x_3(n) = 3^n.$$

Yleinen ratkaisu tämän esimerkin differenssiyhtälölle on

$$x(n) = C_1 2^n + C_3 n 2^n + C_3 3^n,$$

missä $C_1, C_2, C_3$ ovat mielivaltaisia vakioita.

## 3.2 Lineaariset differenssiyhtälösysteemit

Tämä alaluku perustuu lähteeseen [2].

Lineaarisissa differenssiyhtälösysteemeissä on useampi kuin yksi differenssiyhtälö, joilla jokaisella kuvataan mallinnettavan ilmiön tiettyä osaa ja ne voidaan täten liittää yhteen. Tällaisissa systeemeissä arvot ilmaistaan vektoreina ja kertoimet matriisina.

**Määritelmä 3.2.1.** Ensimmäisen kertaluvun lineaarinen differenssiyhtälösysteemi, jossa on $k$ yhtälöä, on muotoa

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= a_{11}(n)x_1(n) + a_{12}(n)x_2(n) + \cdots + a_{1k}(n)x_k(n), \qquad (3.7)\\ x_2(n+1) &= a_{21}(n)x_1(n) + a_{22}(n)x_2(n) + \cdots + a_{2k}(n)x_k(n),\\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots\\ x_k(n+1) &= a_{k1}(n)x_1(n) + a_{k2}(n)x_2(n) + \cdots + a_{kk}(n)x_k(n). \end{aligned}$$

Tämä systeemi voidaan kirjoittaa vektorimuodossa

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{3.8}$$

missä $A(n) = (a_{ij}(n))$ on $k \times k$ matriisifunktio. Tällaista systeemiä sanotaan ei-autonomiseksi (eli aikavariantiksi) Mikäli $A$ ei riipu $n$:stä, systeemiä sanotaan vastaavasti autonomiseksi (eli aikainvariantiksi):

$$x(n+1) = Ax(n). \tag{3.9}$$

[2, ss.117-118,125]

**Esimerkki 3.2.2.** Tarkastellaan seuraavaa systeemiä diffrenssiyhtälösysteemin

$$x(n+1)=\begin{pmatrix} 0.0100 & 0.1290 & 0.1130 \\ 0.3140 & 0.0470 & 0.0070 \\ -0.2500 & 0.0470 & 0.0570 \end{pmatrix} x(n)$$

eli yhtälöiden avulla ilmaistuna:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= 0.0100x_1(n)+0.1290x_2(n)+0.1130x_3(n) \\ x_2(n+1) &= 0.3140x_1(n)+0.0470x_2(n)+0.0070x_3(n) \\ x_2(n+1) &= -0.2500x_1(n)+0.0470x_2(n)+0.0570x_3(n). \end{aligned}$$

Tarkastellaan seuraavaksi näiden systeemien ratkaisuja:

**Lause 3.2.3.** *Jokaiselle* (3.8)*:n mukaiselle systeemille ja jokaiselle* $x_0 \in \mathbb{R}^k$ *ja* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu* $x(n, n_0, x_0)$*, kun* $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$.

*Todistus.* Lähtemällä liikkeelle yhtälösysteemistä (3.8), saadaan iteraatiolla:

$$\begin{aligned} x(n_0+1, n_0, x_0) &= A(n_0)x(n_0) = A(n_0)x(n_0) \\ x(n_0+2, n_0, x_0) &= A(n_0+1)x(n_0+1) = A(n_0+1)A(n_0)x(n_0) \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ x(n_0+n, n_0, x_0) &= A(n_0+n-1)x(n_0+n-1) = A(n_0+n-1)\cdots A(n_0)x(n_0) \end{aligned}$$

Vähennetään $n_0$ ja saadaan $x(n, n_0, x_0) = A(n-1)x(n-1) = A(n-1)\cdots A(n_0)x_0$. Edelleen tästä saadaan

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) x_0, \tag{3.10}$$

missä

$$\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i) = \begin{cases} A(n-1)A(n-2)\cdots A(n_0) & \text{jos } n > n_0 \\ I & \text{jos } n = n_0 \end{cases}$$

Kaava (3.10) antaa yksikäsitteisen ratkaisun. □

Jos differenssiyhtälö on autonominen, voidaan ratkaisu esittää myös A:n ominaisarvojen ja -vektoreiden avulla. Tällöin yhtälö (3.8) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(n+1) = Ax(n), x(n) = \lambda^n v, \tag{3.11}$$

missä $\lambda$ on matriisin $A$ ominaisarvot sisältävä matriisi ja $x$ on matriisin $A$ vastaava ominaisvektori.[5, s.152]

**Esimerkki 3.2.4.** Tarkastellaan Esimerkin (3.2.2) systeemin ratkaisua: sKäyttämällä Lausetta (3.2.3) ja merkitsemällä $n = 5, n_0 = 0$ ja $x_0 = (1,2,3)^T$ saadaan

$$\begin{aligned}
x(n, n_0, x_0) &= \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} A(i)\right) x_0 \\
x(5, 0, (1,2,3)^T) &= \left(\prod_{i=0}^{5-1} \begin{pmatrix} 0.0100 & 0.1290 & 0.1130 \\ 0.3140 & 0.0470 & 0.0070 \\ -0.2500 & 0.0470 & 0.0570 \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.0003 & 0.0005 & 0.0004 \\ 0.0008 & 0.0011 & 0.0008 \\ -0.0004 & -0.0005 & -0.0004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.6070 \\ 0.4290 \\ 0.0150 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mikä tahansa kertalukua $k$ oleva differenssiyhtälö voidaan palauttaa ensimmäisen kertaluvun systeemiksi. Tällöin määritellään $k$ kappaletta vektoreita, joista ensimmäisessä on ensimmäisen termin kertoimet, toisessa toisen ja niin edelleen.

**Lause 3.2.5.** *Systeemillä* (3.9) *on täsmälleen $k$ lineaarisesti riippumatonta ratkaisua.*

Olkoon $\Phi(n)k \times k$-matriisi, jonka sarakkeet ovat systeemin (3.9) ratkaisuja. Tällöin

$$\Phi(n) = (x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)).$$

Nyt

$$\begin{aligned}\Phi(n+1) &= (A(n)x_1(n), A(n)x_2(n), \ldots, A(n)x_k(n)) \\ &= A(n)(x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)) \\ &= A(n)\Phi(n)\end{aligned}$$

Tästä ja Lauseesta (3.2.5) seuraa, että $\Phi(n)$ määrittää differenssiyhtälön

$$\Phi(n+1) = A(n)\Phi(n). \tag{3.12}$$

Perusmatriisin, jolla on olennainen merkitys mallin stabiilisuustarkastelujen kannalta, määritelmä on seuraava.

**Määritelmä 3.2.6.** Jos $\Phi(n)$ on matriisi, joka on ei-signulaarinen kaikilla $n \geq n_0$ ja toteuttaa yhtälön (3.12), silloin sitä sanotaan systeemin (3.9) perusmatriisiksi.

Mikätahansa yleinen differenssiyhtälö voidaan palauttaa aina ensimmäisen kertaluvun systeemiksi. Tämä tapahtuu käyttäen muuttujanvaihtoa. Tarkastellaan yhtälöä

$$x(n+k) = f(x(n), \ldots, x(n+k-1)) = 0. \tag{3.13}$$

Tällöin voidaan menetellä seuraavasti: Määritellään funktio $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$. Korvataan

$$\begin{aligned}u_1(n) &= x(n) \\ u_2(n) &= x(n+1) \\ &\vdots \\ u_k(n) &= x(n+k-1)\end{aligned}$$

Tällöin $u = (u_1, u_2, \ldots, u_k)$ on normaalisysteemi

$$\begin{aligned}u_1(n+1) &= x(n+1) = u_2(n) \qquad (3.14)\\ u_2(n+1) &= x(n+2) = u_3(n) \\ &\vdots \\ u_k(n+1) &= x(n+k) \\ &= -f(x(n), x(n+1), \ldots, x(n+k-1)) \\ &= -f(u(n))\end{aligned}$$

Kääntäen, nähdään, että jos jokin funktio $v = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ on systeemin (3.14) ratkaisu, niin

$v_s = v_z$, missä $s = 0, 1, \ldots, k$ ja $z = 1, 2, \ldots, k-1$, ja $v_k = f(v_1, v_2, \ldots, v_k)$

eli $v$ on yhtälön (3.1) ratkaisu. Siten yhtälö (3.1) ja systeemi (3.14) ovat ekvivalentteja siten, että funktio $x$ on yhtälön (3.13) ratkaisu, kun funktio $u = (x, x(n), x(n+k))$ on systeemin (3.14) ratkaisu. Muodossa (3.14) oleva $n$:nnen kertaluvun differenssiyhtälö (3.1) on palautettuna ensimmäisen kertaluvun systeemiksi.

Systeemi (3.14) on vektorimuodossa $u(n+1) = F(n, u(n))$, missä $F(f_1, \ldots, f_k)$ sekä $f_i(n_1, u(n), u(n+1), \ldots, u(n+k)) = u(i+1)$, kun $1 \leq i \leq k-1$, ja $f_k(n, u(n), u(n+1), \ldots, u(n+k)) = f(n, u(n), u(n+1), \ldots, u(n+k))$.

Lineaarinen yhtälö on tämän työn kannalta mielenkiintoisempi tapaus, joten käydään seuraavaksi läpi ineaarisen tapauksen palauttaminen ensimmäisen kertaluvun systeemiksi. Jos yhtälö (3.13) on lineaarinen, niin sitä vastaava systeemi (3.14) on lineaarinen systeemi.

Yhtälö (3.13) on lineaarinen, joten se palautuu ensimmäisen kertaluvun lineaariseksi systeemiksi, missä

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_2 &= u_3 \\ &\vdots \\ u_k &= -(p_0 u_1(n) + p_1 u_2(n+1) + \cdots + p_{k-1} u_k(n-k)) \end{aligned} \tag{3.15}$$

eli vektorimuodossa

$$u(n+1) = A(n)u(n), \tag{3.16}$$

missä

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \cdots & -p_{k-1} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Koska yhtälö (3.13) ja systeemi (3.14) ovat vakiokertoimisia, niin yhtälön (3.2) karakteristinen polynomi on $P(r) = r^k + p_1 r^{k-1} + \cdots + p_{k-1} r + p_k$.

Systeemin (3.17) matriisin $A$ karakteristinen polynomi puolestaan on

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & -\lambda & 1 \\ -p_k & -p_{k-1}\cdots & -p_2 & (-p_1-\lambda) & \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{k+1}(p_k + p_{k-1}\lambda + \cdots + p_1\lambda^{k-1}) \\ &= (-1)^{k+1}P(\lambda),\end{aligned} \tag{3.18}$$

mikä saadaan kehittämällä yllä oleva determinatti alarivinsä suhteen. Tällöin siis yhtälön (3.13) ja systeemin (3.14) matriisin $A$ karakteristiset polynomit ovat merkkiä vaille samat. Erityisesti niillä on samat nollakohdat.

# 4 Stabiilisuudesta

## 4.1 Stabiilisuuden käsite

Tämä alaluku perustuu lähteeseen [2, ss.176-177].

Yhtälön (3.4) sisältämä funktio voi olla jaksollinen:

**Määritelmä 4.1.1.** Määritelmässä (3.4) määriteltyä funktiota $f(n, x(n))$ kutsutaan jaksolliseksi, jos kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ on voimassa $f(n+N, x) = f(n, x)$ jollakin $N \in \mathbb{N}$.

Stabiilisuuden kannalta erittäin olennainen käsite on kiintopiste, joka määritellään seuraavasti.

**Määritelmä 4.1.2.** Pistettä $x^* \in \mathbb{R}^k$ sanotaan yhtälön (3.4) kiintopisteeksi, jos $f(n, x^*) = x^*$ kaikilla $n \geq n_0$. Useimmiten kirjallisuudessa oletetaan, että tämä piste on origo ja sitä kutsutaan nollaratkaisuksi.

Tutkimalla sitä, minkä tyyppinen tämä edellä määritelty kiintopiste on, voidaan sanoa jotain yhtälön stabiilisuudesta:

**Määritelmä 4.1.3.** Yhtälön (3.4) kiintopisteen $x^*$ sanotaan olevan:

1. vakaa (englanniksi stable), jota merkitään S:llä, jos annetuilla $\varepsilon > 0$ ja $n_0 \geq 0$ on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon, n_0)$ siten, että $\|x_0 - x^*\| < \delta$ implikoi $\|x(n, n_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_0$,tasaisesti vakaa (englanniksi uniformly stable), jota merkitään US:llä, jos $\delta$ voidaan valita $n_0$:sta riippumatta, epävakaa, jos se ei ole vakaa.

2. asymptoottisesti vakaa (englanniksi asymptotically stable), jota merkitään AS, jos se on sekä vakaa että täyttää seuraavan ehdon: on olemassa $\mu = \mu(n_0)$ siten, että $\|x_0 - x^*\| < \mu$ implikoi $\lim_{n\to\infty} x(n, n_0, x_0) = x^*$.

3. ratkaisu $x(n, n_0, x_0)$ on rajoitettu, jos jollakin positiivisella vakiolla $M$, $\|x(n, n_0, x_0)\| \leq M$ kaikille $n \geq n_0$, missä $M$ riippuu ratkaisusta.

**Esimerkki 4.1.4.** Tarkastellaan yhtälöä $x(n+1) = \left(\frac{n+1}{2}\right)(x(n))^2$. Tämän yhtälön ratkaisu on

$$x(n, n_0, x_0) = \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\left(\frac{n-2}{2}\right)^4 \cdots \left(\frac{n_0+1}{2}\right)^{2^{n-n_0-1}} (x_0)^{2^{n-n_0}}, x(n_0) = x_0.$$

Jos $|x_0|$ on tarpeeksi pieni, niin $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$ Näin ollen nollaratkaisu on attrakti.

Tarkastetaan seuraavaksi nollaratkaisun stabiilisuus. Valitaan $\varepsilon > 0$ ja $n_0 \geq 0$. Tällöin $\delta = \frac{\varepsilon}{n_0+1}$. Jos $|x_0| < \delta$, niin $|x(n, n_0, x_0| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_0$. Koska $\delta$ riippuu $n_0$:n valinnasta, ratkaisu on vakaa, muttei tasaisesti vakaa.

## 4.2 Lineaaristen systeemien stabiilisuus

Tämä alaluku perustuu lähteeseen [2, ss.184-187]. Tässä alaluvussa tarkastellaan stabiilisuutta lineaaristen differenssiyhtälösysteemien näkökulmasta. Tämän takia tarkastellaan lineaarisia yhtälöitä (3.9) ja (3.8). Näiden systeemien kaikki ratkaisut ovat $\Phi(n)$:n sarakkeiden lineaarikombinaatioita.

**Lause 4.2.1.** *Tarkastellaan systeemiä* (3.9). *Nollaratkaisu on vakaa, jos ja vain jos kaikki ratkaisut ovat rajoitettuja eli ratkaisut kuuluvat avaruuteen* $l^\infty$.

Lauseella (4.2.1) on seurauslause:

**Seuraus 4.2.2.** *Lineaariselle systeemille* (3.8) *pätevät seuraavat väittämät:*

1. *Nollaratkaisu on vakaa jos ja vain jos kaikki ratkaisut ovat rajoitettuja.*

2. *Nollaratkaisu on eksponentiaalisesti vakaa jos ja vain jos se on asymptoottisesti vakaa.*

*Todistus.* Kohta 1 seuraa Lauseen (4.2.1) kohdista 1 ja 2, koska niissä on näytetty, että nollaratkaisu on vakaa jos ja vain jos löytyy jokin positiivinen vakio $M$, jota pienempiä ratkaisut ovat. Koska tällainen vakio $M$ on olemassa, ratkaisut ovat rajoitettuja.

Kohta 2 seuraa Lauseen (4.2.1) kohdasta 4 lisäämällä kummallekin puolelle $|x_0 - x^*\|$. $\square$

Tapa, jolla tässä työssä on tarkasteltu seuraavassa luvussa esiteltävän mallin stabiilisuutta, esitellään Lauseessa (4.2.3). Olkoon $|\lambda| = 1$, ja olkoon sen (algebrallinen) kertaluku $k$. Tätä ominaisarvoa vastaavat ratkaisut ovat stabiileja, jos löytyy $k$ kpl lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria (sanotaan, että tällöin ominaisarvon geometrinen kertaluku on myös $k$)

**Lause 4.2.3.** *Systeemille* (3.9) *pätevät seuraavat väittämät:*

1. *Systeemin* (3.9) *nollaratkaisu on vakaa jos ja vain jos* $\rho(A) \leq 1$.

2. *Systeemin* (3.9) *nollaratkaisu on asymptoottisesti vakaa jos ja vain jos* $\rho(A) < 1$.

*Todistus.* Pitää siis osoittaaa, että systeemin algebraalinen ja geometrinen kantaluku ovat samat.

Nyt matriisille $A$ voidaan löytää yksikäsitteinen esitys Lauseen (2.1.15) Jordanin matriisin avulla eli $A = PJP^{-1}$. Tällöin Jordanin matriisissa on systeemin ominaisarvot $\lambda_j = e^{i\theta_j i}$ diagonaalilla ja niiden perässä Jordanin lohkoja, jotka voivat olla mitätahansa eli

$$\begin{aligned} J &= \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_n \end{pmatrix} \qquad (4.1) \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\theta_1 i} & & & & & & 0 \\ & e^{i\theta_2 i} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & e^{i\theta_l i} & & & \\ & & & & J(\lambda_1) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & J(\lambda_r), \end{pmatrix} \end{aligned}$$

missä $|\lambda_j| < 1$. Koska tässä matriisissa ovat sarakkeet lineaarisesti riippumattomia, ovat tämän matriisin algebraalinen ja geometrinen kantaluku samat.

□

# 5 Kansantalouden tilinpito

## 5.1 Yleinen periaate

Tässä luvussa esitellään kansantalouden tilinpitoa, jotta mallinnus tulee ymmärrettäväksi.

Kansantalouden tilinpito on laaja tilastojärjestelmä, jonka tehtävänä on kuvata kansantalouden tilaa. Kansantalouden tilinpidossa kuvataan sen eri osien rahassa mitattavaa toimintaa. [8]

Kansantalouden tilinpito on haettu Tilastokeskuksen internetsivuilta [7]. Mallissa on käytetty datana kansantalouden tilinpitoa vuosilta 1975 – 2012. Mallissa on käytetty dataa vain "pääsektoreiden osalta"eli S11=Yritykset, S12=Rahoitus- ja vakuutuslaitokset, S13=Julkisyhteisöt,
S14=S14+S15=Kotitaloudet+kotitalouksia palvelevat voittoa tavoittelemattomat yhteisöt ja S2=ulkomaat. Näiden alasektoreita ei ole mukana erillisinä osina.

Estolan ja Dannenbergin artikkelissa [3, s.17] kansantalouden tilinpidosta esitetään virtauskaavio, josta nähdään lohkot ja niiden väliset suhteet. Tämä artikkeli, kuten mallikin, käsittelee vain reaalitilinpitoa eli sitä osaa, jossa on mukana tuotanto. Se ei ota kantaa rahoitustilinpitoon.

Kansantalouden tilinpito perustuu seuraaviin periaatteisiin. Ensin määritellään tarkasteltavan kansantalouden kaikkien markkinoilla toimivien tuotantoyksiköiden lopputuotannon arvot tarkasteltavalla ajanjaksolla (esim. tässä työssä vuosi). Tämän jälkeen tuotantotekijöiden arvoista vähennetään välituotteiden käytöt, jolloin saadaan jokaisen tuotantoyksikön oma arvonlisäys, eli tuotannon arvo. Tämä tuotanto joko myydään markkinoilla tai se jää varastoon kasvattamaan varaston arvoa. Tätä toimintaa kuvataan kansantalouden tilinpidon ensimmäisellä tilillä, joka on tulonmuodostustili (lyhenne GIA, joka tulee sanoista Generation of Income Account).

Tilillä GIA myyntituloista suoritetaan maksut tuotannontekijöille, kuten palkat + sote-maksut sekä maksetaan tuotannon ja tuonnin verot ja siihen lisätään tuotantotuet. Tilin tasapainottavana eränä saadaan toimintaylijäämä, joka kuvaa tuotantoyksikön kannattavuutta.

Toimintaylijäämä siirretään ASUA-tilin avaavaksi tilieräksi, ja ASUA-tilille kirjataan omaisuuden tulot ja menot sekä erilaiset tulonsiirrot, kuten tuloverot. ASUA-tilin tasapainottava tilierä on säästöt, joka siirretään CA-tilin avaavaksi tilieräksi. CA-tilille kirjataan investoinnit ja niiden rahoitusvarat, ja tilin tasapainottava erä on nettovelkaantuminen. Lisäksi mukana on

FA-tili, jonne menee tililtä CA muuttujan $Y$ rahavirta eli nettolainananto/-lainanotto. Tästä tilistä voitaisiin halutessa laajentaa yhteys rahoitustilinpitoon.

## 5.2 Yleisen periaatteen soveltaminen simulaatiomalliin

Tässä työssä tehty mallintaminen kuvaa tässä mainittujen tilierien mallintamisen kaikkien viiden pääsektorin osalta.Ulkomaat mukaanlukien yhtenä sektorina kotimaan tilinpito on suljettu systeemi.Koska nettovelkaantuminen näiden viiden sektorin osalta on nollasummasysteemi, mallinnuksen kohteena oleva systeemi on suljettu ja päättyy nettovelkaantumiseen. Kuvassa 2 nähdään viiden sektorin oma sisäinen rahaliikenne tilien GIA, ASUA, CA ja FA välillä, sekä näiden sektorien väliset tilierät toisten sektorien vastaavien tilien välillä. Tässä työssä FA-tiliä ei käsitellä lainkaan.

Tilinpito alkaa GIA-tilistä, josta syntyneet tulot jaetaan eteenpäin ja niitä korjataan tulonsiirtotileillä.

Otetaan esimerkiksi kotitaloudet. Kotitalouksilla, kuten muillakin sektoreilla on kaksi tiliä, ASUA ja CA tili GIA lisäksi, joka on yhteinen kaikille kotimaisille sektoreille. Näille tileille tulee rahaa muiden sektoreiden vastaavilta tileiltä ja niiltä lähtee lähtee rahaa muiden sektoreiden vastaaville tileille. Kuva 3 esittää Kotitalouksien osalta tätä kyseistä rakennetta. Muuttujien merkitykset löytyvät taulukoista 2, 3 ja 4, joissa on lueteltu mallissa oleva muuttujan nimi, sen vastine kansantalouden tilinpidossa sekä merkitys.

Vastaava rakenne löytyy kaikilta muilta sektoreilta. Tämän lisäksi mallissa on mukana tuotantolohko eli Kotimaan GIA, joka on saatu sulauttamalla yhteen yritysten, pankkien, kotitalouksien ja julkishallinnon GIA-tilit. Tämä GIA-tili on siis yhteinen kaikille kotimaisille sektoreille. Lisäksi mukana on useita Markkinat-lohkoja, joiden kautta kaikki sektorit maksavat toisilleen tuloeriä. Näiden tulovirtojen erillinen kuvaaminen tekisi kaaviosta varsin sekavan, joten Markkinat-lohkojen määritteleminen yksinkertaistaa kuvaa 2 olennaisesti. Kuvassa 4 on verrattu tilannetta, jossa Markkinat-lohkoa ei ole tai sellainen on. Lisäksi on syytä huomata, että tässä työssä on käytetty nettorahavirtoja eli rahavirtoja ei tarvita kahteen suuntaan lainkaan, vaan yksi suunta riittää.

Kuvassa 2 on koko kansantalouden virtauskaavio. Kuvasta näkee nämä tilit ja niiden suhteet toisiinsa. Tätä voi verrata luvussa 6 esitettävään malliin. Näissä on pyritty mahdollisimman suureen samankaltaisuuteen.

| Muuttuja | Sektori | Vastaavuus | Merkitys |
|---|---|---|---|
| $B_{CNn}$ | Yritykset | D9 | Pääomansiirrot |
| $N_{Nn}$ | Yritykset | D7 | Muut tulonsiirrot |
| $P_N$ | Yritykset | K1K | Kiinteän pääoman kuluminen |
| $I_{ON}$ | Yritykset | P5K | Pääoman bruttomuodostus |
| $S_N$ | Yritykset | B8nt | Säästö |
| $Y_N$ | Yritykset | B9tn | Nettoluotonanto (+) / nettoluotonotto (-) |
| $N_{AN}$ | Yritykset | K2K | Maan ja muiden valmistamattomien varojen nettohankinta |
| $T_{SNn}$ | Yritykset | D12 | Työnantajan sosiaaliturvamaksut |
| $O_N$ | Yritykset | B13nt | Toimintaylijää- mä + sekatulo, netto |
| $T_{IN}$ | Yritykset | D5K | Maksetut tulo-, varallisuus-, ym. välittömät verot |
| $B_{CFn}$ | Pankit | D9 | Pääomansiirrot |
| $N_{Fn}$ | Pankit | D7 | Muut tulonsiirrot |
| $P_F$ | Pankit | K1K | Kiinteän pääoman kuluminen |
| $I_{OF}$ | Pankit | P5K | Pääoman bruttomuodostus |
| $S_F$ | Pankit | B8nt | Säästö |
| $Y_F$ | Pankit | B9tn | Nettoluotonanto (+) / nettoluotonotto (-) |
| $N_{AF}$ | Pankit | K2K | Maan ja muiden valmistamattomien varojen nettohankinta |
| $T_{SFn}$ | Pankit | D12 | Työnantajan sosiaaliturvamaksut |
| $O_F$ | Pankit | B13nt | Toimintaylijää-mä + sekatulo, netto |
| $T_{IF}$ | Pankit | D5K | Maksetut tulo-, varallisuus-, ym. välittömät verot |
| $B_{CGn}$ | Julkishallinto | D9 | Pääomansiirrot |
| $N_{Gn}$ | Julkishallinto | D7 | Muut tulonsiirrot |
| $P_G$ | Julkishallinto | K1K | Kiinteän pääoman kuluminen |
| $I_{OG}$ | Julkishallinto | P5K | Pääoman bruttomuodostus |
| $S_G$ | Julkishallinto | B8nt | Säästö |

Taulukko 2: Kohta muuttuja tarkoittaa muuttujan nimeä mallissa ja kohta vastaavuus sen nimeä kansantalouden tilinpidossa.

| Muuttuja | Sektori | Vastaavuus | Merkitys |
|---|---|---|---|
| $Y_G$ | Julkishallinto | B9tn | Nettoluotonanto (+) / nettoluotonotto (-) |
| $N_{AG}$ | Julkishallinto | K2K | Maan ja muiden valmistamattomien varojen nettohankinta |
| $T_{SGn}$ | Julkishallinto | D12 | Työnantajan sosiaaliturvamaksut |
| $O_G$ | Julkishallinto | B13nt | Toimintaylijää-mä + sekatulo, netto |
| $C_2$ | Julkishallinto | P31 | Yksilölliset kulutusmenot |
| $G$ | Julkishallinto | P32 | Kollektiiviset kulutusmenot |
| $W_G$ | Julkishallinto | D11 | Palkat ja palkkiot |
| $B_{SGn}$ | Julkishallinto | D6 | Sosiaalietuudet |
| $T_{IGn}$ | Julkishallinto | D5KR | Saadut tulo-, varllisuus ym. välittömät verot |
| $B_{CHn}$ | Kotitaloudet | D9 | Pääomansiirrot |
| $N_{Hn}$ | Kotitaloudet | D7 | Muut tulonsiirrot |
| $P_H$ | Kotitaloudet | K1K | Kiinteän pääoman kuluminen |
| $I_{OH}$ | Kotitaloudet | P5K | Pääoman bruttomuodostus |
| $S_H$ | Kotitaloudet | B8nt | Säästö |
| $Y_H$ | Kotitaloudet | B9tn | Nettoluotonanto (+) / nettoluotonotto (-) |
| $N_{AH}$ | Kotitaloudet | K2K | Maan ja muiden valmistamattomien varojen nettohankinta |
| $T_{SHn}$ | Kotitaloudet | D12 | Työnantajan sosiaaliturvamaksut |
| $O_H$ | Kotitaloudet | B13nt | Toimintaylijää-mä + sekatulo, netto |
| $C_1$ | Kotitaloudet | P3K | Kulutusmenot |
| $W_H$ | Kotitaloudet | D11 | Palkat ja palkkiot |
| $B_{SHn}$ | Kotitaloudet | D6 | Sosiaalietuudet |
| $T_{IH}$ | Kotitaloudet | D5K | Maksetut tulo-, varallisuus-, ym. välittömät verot |
| $B_{CRn}$ | Ulkomaat | D9 | Pääomansiirrot |
| $N_{Rn}$ | Ulkomaat | D7 | Muut tulonsiirrot |
| $P_R$ | Ulkomaat | K1K | Kiinteän pääoman kuluminen |

Taulukko 3: Kohta muuttuja tarkoittaa muuttujan nimeä mallissa ja kohta vastaavuus sen nimeä kansantalouden tilinpidossa.

| Muuttuja | Sektori | Vastaavuus | Merkitys |
|---|---|---|---|
| $I_{OR}$ | Ulkomaat | P5K | Pääoman bruttomuodostus |
| $S_R$ | Ulkomaat | B8nt | Säästö |
| $Y_R$ | Ulkomaat | B9tn | Nettoluotonanto (+) / nettoluotonotto (-) |
| $N_{AR}$ | Ulkomaat | K2K | Maan ja muiden valmistamattomien varojen nettohankinta |
| $M - X$ | Ulkomaat | P7-P6 | Tavaroiden ja palveluiden tuonti-vienti |
| $BP$ | Ulkomaat | B12T | Vaihtotase |
| $W_{Rn}$ | Ulkomaat | D11 | Palkat ja palkkiot |
| $T_{SRn}$ | Ulkomaat | D12 | Työnantajan sosiaaliturvamaksut |
| $T_{PR}$ | Ulkomaat | D2 | Tuotannon ja tuonnin verot |

Taulukko 4: Kohta muuttuja tarkoittaa muuttujan nimeä mallissa ja kohta vastaavuus sen nimeä kansantalouden tilinpidossa.

# 6 Mallinnus

Tässä luvussa esitellään Matlabin Simulink-työkalulla tehty malli, joka kuvaa rahan virtausta kansantaloudessa. Mallissa ovat erillisinä sektoreina kotitaloudet, julkishallinto, yritykset ja pankkisektori sekä ulkomaat-sektori. Kotitalouksia palvelevat voittoa tavoittelemattomat järjestöt (ns. kolmas sektori) on rinnastettu kotitalouteen. Malli on koodattu Matbille kuvan 2 mallin mukaan. Kaikki mallissa esiintyvät luvut ovat nettoarvoja eli tuloista on vähennetty menot.

Malli on rakennettu ja testattu sektori kerrallaan ja jokainen sektori erikseen. Sektorit on yhdistetty ja testattu taas kuvitteellisella datalla. Testaamisessa on käytetty datana antamalla pieniä kokonaislukuja $(1 - 10)$ dataksi ja tekemällä datan käsittelyä yhteen- ja jakolaskuilla.

Lopullisessa mallissa kaikki varsinainen datan käsittely tehdään Matlab-tiedostoissa, jotka ovat Simulinkissa. Tämä mahdollistaa laskentatavan helpon muuntamisen, koska varsinaiseen mallin rakenteeseen ei tarvitse kajota.

Malli on rakennettu monitasoisesti, jotta mallin muuttaminen tulevaisuudessa on helppoa. Mallissa on yhteensä kolme eri tasoa, joista kahdessa ylimmässä data vain "virtaa läpi"ja alimmalla tapahtuu kaikki laskenta. Ylimmällä tasolla (katso kuva 19) rahavirrat siirtyvät eri sektorien, Markkinat-lohkon ja Tuotanto-lohkon (eli kotimaan GIA-lohkon) välillä. Keskimmäisellä tasolla rahavirrat siirtyvät sektorien sisällä ASUA- ja CA-tilien välillä (katso kuva 5). Alin taso on näiden tilien sisäinen taso (katso kuvat 6 ja 7).

Mallissa käytetään indekstointia siten, että vuosi $1975 = 0, 1976 = 1$ ja niin edelleen. Mallin nuolia ei ole nimetty, mutta lähtöpäässä ja maalipäässä on sama nimi muuttujalla. Lisäksi mallissa on käytetty värjäystä ylimmällä tasolla nuolien seuraamisen helpottamiseksi.

## 6.1 Mallin tarkka kuvaus

Tässä alaluvussa muuttujalla $n$ viitataan diskreettiin aikaan. Aika siirtyy eteenpäin yhden yksikön joka vuoden alussa.

Tässä alaluvussa kuvataan tarkasti Simulinkilla rakennuttu malli ja kuvaus tehdään käyttäen yhtä lohkoa esimerkkinä. Muut lohkot ovat rakenteeltaan identtiset, vain muuttujien nimet eroavat.

Aloitetaan kuitenkin Kotimaan GIA-lohkosta. Tässä lohkossa syntyy jokaisen kierroksen (eli jokaisen vuoden) aluksi tuotanto (katso kuva 9, jossa vaalean sinisellä merkityssä Matlab-lohkossa syntyy tuotanto). Lisäksi kuvissa 10, 11, 12 ja 13 on tarkemmat kuvat tästä lohkosta, koska yhdessä kuvassa ei pysty esittämään yksityiskohtia tarpeeksi tarkasti. Nämä GIA-lohkossa tuotannosta syntyvät tulot jaetaan kuten edellisessä luvussa esitin. Tuotannon kasvua kuvaa yhtälö $y_n = 6878.194 + 1.0147 * y_{n-1}$, missä $y_n$ on tämän vuoden bruttokansantuotteen arvo ja $y_{n-1}$ bruttokansantuotteen arvo edellisenä vuotena. Kotimaan sektorien tuotanto yhteenlaskettuna vastaa bruttokansantuotetta.

Siirrytään tämän jälkeen käymään läpi eri sektoreita ja tarkastellaan esimerkkinä Kotitaloudet-lohkoa.

Kun avataan Kotitaloudet-lohko, joka on toteutettu Simulinkissa alijärjestelmänä (englanniksi subsystem), siellä on kuvan 5 mukainen järjestelmä, joka sisältää kaksi alijärjestelmää, jotka ovat ASUA-tili ja CA-tili. Täällä on pelkästään sisäänmenoja ja ulostuloja, jotka johtavat dataa ylemmältä tasolta näille kahdelle tilille. Tämä vastaa kansantalouden tilinpidon kuvaa 3.

ASUA-tilin sisältö on kuvattuna kuvassa 6. Täällä on jokaiselle muuttujalle oma alijärjestelmä, jossa suoritetaan kyseiseen muuttujaan liittyvä laskenta. Lisäksi siellä summataan kaikkien sisään tulevien muuttujen arvot yhteen. Tämän jälkeen summa jaetaan ulos meneville rahavirroille siten, että ensiksi suurimman selitysasteen omaava ottaa itsellensä rahat, sitten seuraavaksi suurimman selitysasteen omaava ja niin edelleen. Huonoimman selitysasteen omaava saa itselleen residuaalina sen, mitä rahaa on jäänyt jäljelle. Näin ollen kaikki raha tulee jaetuksi eteenpäin, eli rahaa ei häviä mihinkään.

Lohkossa on To Workspace-lohko, johon kootaan kaikkien muuttujien signaalit ja se siirretään Matlabin puolelle, josta ohjelma edelleen kirjoittaa ne Kotitaloudet_ASUA-nimiseen Excel-tiedostoon myöhemmin esiteltävän funktion avulla. Muuttujien signaalit ovat aina samassa järjestyksessä: aluksi sisään tulevat numerojärjestyksessä ja tämän jälkeen ulos menevät numerojärjestyksessä.

Tarkastellaan seuraavaksi mallin alinta tasoa ja valitaan Kotitaloudet-lohkon ASUA-tilien muuttuja $O_H$, jonka alijärjestelmä on kuvassa 8. Kyseinen lohko sisältää kolme viivettä eli viiveet $n_1, n_2$ ja $n_3$, jossa $n$ kuvaa diskreettiä aikaa. Matlab-lohkossa on siis kolmannen asteen autoregressiivinen malli. Se sisältää lohkon digital clock, joka tuottaa aikasignaalin, jonka arvo muuttuu portaittain aina kokonaislukujen kohdalla. Lohkossa on muuttujan sisääntulo ja ulosmeno sekä Scope, joka piirtää kuvaajan. Tätä on käytetty mallin testaamiseen, joten Scopen voisi myös poistaa ilman, että se vaikuttaa ohjelman toiminnallisuuteen.

Matlab-lohkon sisältö on esitetty kuvassa 14.Tämä Matlab-lohko sisältää varsinaisen laskennan eli täällä on määritelty autoregressiivinen funktio, joka on muotoa $y_n = a + b * y_{n-1} + c * y_{n-3}$, missä $y_{n-1}$ on muuttujan arvo viiveellä 1 ja $y_{n-3}$ vastaavasti viiveellä 3, missä $n$ edustaa diskreettiä aikaa. Tämän autoregressiofunktion perään on lisätty aikamuuttuja $ti$ kerrottuna aikariippuvalla vakiolla $kerroin$. Osassa muuttujista on mukana erillinen termi $poly$, joka on muuttujasta riippuen astetta $2-5$ oleva ajan polynomifunktio, jonka kertoimet on laskettu Matlabin komennolla "polyfit". Polynomisovitukseen tarvittava data on saatu Tilastokekuksen sivuilta Kansantalouden tilinpidosta kyseisen muuttujan arvoista vuosilta $1975-2012$. Matlab-lohkon sisältö ja muuttujien nimet ovat ainoat asiat, jotka mallissa vaihtelevat lohkosta toiseen; muuten eri lohkot vastaavat rakenteeltaan edelläkuvattua.

Lohkoista seuraavana on Kaikki Y:t-niminen lohko, jonka sisältö on esitetty Kuvassa 15. Tähän lohkoon tulevat rahavirrat $Y$-muuttujista, joilla merkitään mallissa nettoluotonantoa (+)/nettoluotonottoa (-). Lohkosta voidaan kytkeä yhteys nyt mallinnetusta reaalitilinpidosta rahoitustilinpitoon. Tässä mallissa lohko sisältää vain muuttujien summauksen ja sen tuomiseen kuvaajaan sekä muuttujien kirjoittamisen Matlabin kautta Exceliin samoin kuin muissakin lohkoissa.

Lohko Markkinat, jolle tulee suuri määrä sisään- ja ulostuloja, sisältää kokoelman eri lohkoja, joilla ei ole keskenään suoraa yhteyttä. Ne on kasattu sinne siksi, etteivät ne olisi ylätasolla mutkistamassa mallia. Nämä markkina-lohkot ovat sellaisia, että näihin joko tulee dataa, jolloin ne vertautuvat edellä kuvattuun Kaikki Y:t-lohkoon, tai niistä vastaavasti lähtee dataa. Ne markkinat, joissa on läpivirtauksia, vertautuvat mallin ASUA- ja CA-tilien lohkoihin. Kuva 16 selventää tilannetta.

Tarkastellaan vielä esimerkkinä vain ulostuloja sisältävästä lohkosta lohkoa $B_{CM}$ eli muuttujan $B_C$-markkinalohkoa. Se on Kuvassa 17. Tässä lohkossa data generoidaan käyttäen Digital lock -lohkoa, josta aikasignaali annetaan Matlab-lohkoihin. Näiden data johdetaan edelleen ulos lohkoista muiden lohkojen käyttöön. Kuvassa 18 on esimerkki tavasta, jolla dataa tuotetaan eli dataa saadaan aikaiseksi polynomisovituksella, joka on tehty jo aiemmin kuvatulla tavalla.

Yhdessä edellä kuvatut lohkot muodostavat ohjelman ylimmän tason, joka on kuvattu Kuvassa 19. Tämä kuva vastaa kansantalouden tilinpidon Kuvaa 2. Tässä näkyvät kaikki lohkot (julkishallinto, yritykset, kotitaloudet, ulkomaat ja rahoituslaitokset). Esimerkkinä käytetty lohko kotitaloudet on tässä kuvassa kirkkaan vihreillä kehyksillä varustettu.

Mallin tarkka tekninen dokumentaatio löytyy osoitteesta `lchawk.arkku.net/GRADU.html`. Tämä dokumentaatio on tuotettu Simulinkin omalla raportointityökalulla.

Simulinkistä Matlabiin to Workspace-lohkolla siirrettyjen tuosten kirjoittaminen Exceliin tehdään seuraavan Matlab-koodin avulla:

```
function kirjoitus2(polku, kirjoitettava)
if exist('G:\GRADU\Tulokset')
    asema = 'G:\GRADU\Tulokset';
else
    asema = 'E:\GRADU\Tulokset';
end
tayspolku=[asema polku];
[kork,lev]=size(kirjoitettava);
kirjoitettava=kirjoitettava(1:2:kork,1:lev);
xlswrite(tayspolku,kirjoitettava,'Sheet1','A2');
end
```

Tulokset kirjoitetaan siis Excel-tiedoston ensimmäiselle välilehdelle. Näissä Excel-tiedostoissa on lisäksi jokaiselle muuttujalle oma välilehti, jossa on muuttujan alkuperäinen Tilastokeskuksen internetsivuilta saatu data nimellä

Alkuper. Sen viereen on kopioitu ensimmäiseltä välilehdeltä kyseistä muuttujaa vastaava mallin laskema data nimellä Mallinnus. Kuvassa 20 on esimerkki tällaisen tiedoston ensimmäisestä välilehdestä. Kuvassa 21 on puolestaan samaisen Excel-tiedoston $S_N$-muuttujan välilehti, josta näkyy kyseisten välilehtien rakenne.

## 6.2 Laitteistovaatimukset

Ohjelma on ajettu Matlabin 2012a- ja 2013 -versioilla ja toimivuus on taattu vain niillä. Koneessa tulee tämän lisäksi olla jokin Matlabin kanssa yhteensopivista C-kielen kääntäjistä, kuten Microsoft Visual Studio tai vastaava. Mallin tiedostomuoto on mdl, mutta eri vaiheissa mallia tehtäessä on käytetty tallennusmuotona myös Matlab 2013-version omaa slx-tiedostomuotoa.

Ohjelma on testattu sekä palvelimella olevalla Matlabilla että paikallisesti asennetulla Matlabilla ja se toimii kummallakin.

# 7 Mallin stabiilisuus

## 7.1 Matriisin luominen

Edellisessä luvussa esitelty malli voidaan muuntaa yhtälön (3.9) mukaiseksi malliksi ja selvittää siitä matriisi $A$, jonka stabiilisuutta voidaan tarkastella luvun 4 menetelmin. Tarkoituksena oli siis selvittää, kuinka stabiili kyseinen malli on.

Matriisi luotiin käyttämällä Simulinkin Linear Analysis Toolia lähteestä [9] löytyvän ohjeen mukaisesti. Työkalua käytettiin seuraavalla tavalla:Ennen työkalun käyttämistä tuli merkitä ne muuttujat, jotka halutaan mukaan tarkasteluun. Se tehdään klikkaamalla nuolta ja valitsemalla kuvan 22 valikosta kyseiseen tilanteeseen sopiva vaihtoehto.Ensimmäisenä valittiin kuvan 25 mukaisesta valikosta Linear Analysis Tool.

Tämän jälkeen avautui kuvan 26 mukainen näkymä, jossa Linear Analysis Tool ladattiin. Itse työkalu on kuvattuna kuvassa 23. Tästä valikosta voidaan käynnistää laskenta painamalla vihreää nuolta, jonka alla lukee Linearize. Tällöin saadaan kuvan 24 mukainen ruutu, ja laskenta on tällöin käynnissä.

Matriisi, joka mallista saadaan, on $37 \times 37$-matriisi. Matriisi löytyy kokonaisuudessaan osoitteesta [1]. Koska matriisi ei ole edellä esitetyllä tavalla esitettynä kovinkaan havainnollinen, on matriisi Kuvassa 27 muunnettu visuaalliseen muotoon ja matriisin alkioiden arvoja on kuvattu liukuvärillä.

Kuten kuvasta 27 ja matriisin alkioiden listauksesta nähdään, kyseinen matriisi sisältää rivejä ja sarakkeita, joiden arvo on nolla. Tästä johtuen matriisin determinantti on nolla ja matriisi on singulaarinen. Merkitään tätä matriisia $A$:lla. Tarkastellaan tämän matriisin stabiilisuutta käyttäen Lausetta (4.2.3).

Tätä varten tarvitaan kyseisen matriisin ominaisarvoja. Lauseen (4.2.3) soveltaminen on nyt siis mahdollista. Sen mukaisesti täytyy ottaa näistä ominaisarvoista itseisarvo ja niistä maksimi. Matriisin $A$ nollasta eroavat ominaisarvot ovat kuvassa 28. Tällöin saadaan, että $\rho(A) = 0.5096$. Koska $\rho(A) < 1$, matriisi ja täten myös systeemi on vakaa.

# 8 Tulokset

Tämä luku käsittelee mallinnuksesta saatavia tuloksia. Ensinnäkin voidaan todeta, että mallinnus on vakaa luvussa 7 esitetyn perusteella. Tämä vakaus tarkoittaa sitä, että mallinnusta pystyy pyörittämään ilman pelkoa, että se "räjähtää" äärettömyyteen tai miinusäärettömyyteen.

Kuvissa 29 ja 30 on tulokset pankkisektorilta. Esimerkkinä on käytetty pankkisektoria, koska siellä on eniten voimakkaasti heilahtelevia muuttujia. Mallinnuksessa ei ole pyritty maksimaalliseen tarkkuuteen, vaan lähinnä pyritty osoittamaan, että tällainen malli on mahdollista tehdä ja että se toimii järkevällä tarkkuudella sekä että se on vakaa. Mallin tarkkuutta saadaan parannettua helpohkosti paljon.

# 9 Loppupäätelmät

Tässä työssä rakennettiin kansantalouden tilinpidoa simuloiva malli, joka laskee kansantaloudessa toimivien viiden keskeisen sektorin (kotitaloudet, yritykset, pankit, julkishallinto ja ulkomaat) keskeisten muuttujien arvot ajanjaksolle $1975 - 2012$.

Malli kalibroitiin sellaiseksi, että ”riittävä” tarkkuus saatiin aikaan kaikkien keskeisten muuttujien osalta. Suurimmat mallinnusongelmat olivat pankkisektorilla, jonka eri muuttujat heilahtelevat hyvin voimakkaasti ja jokaisen sektorin säästöt-muuttujan kanssa, jossa mallin selitysaste oli yleensä huono.

Rakennettua mallia voidaan käyttää talouspolitiikan suunnittelussa esimerkiksi siten, että muutetaan jonkin muuttujan sovitetta halutulla tavalla ja katsotaan, miten tämä muutos vaikuttaa koko systeemin käyttäytymiseen. Toinen mallin käyttötapa on tehdä ennusteita mallissa oleville muuttujille haluttu vuosimäärä eteenpäin.

# Viitteet


[1] http://lchawk.arkku.net/gradu/Matriisi.txt.

[2] S. Elaydi. *An Indroduction to Difference equations.* Springer, 3 edition, 2004.

[3] M. Estola and A. Dannenberg. National accounts as a stock-flow consistent syhstem part 1: A real accounts. *julkaisematon*, 2013.

[4] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, 1 edition, 1988.

[5] W.G. Kelley and A.C. Peterson. *Difference Equations:An Introduction withApplications.* Academic Press, Inc., 1991.

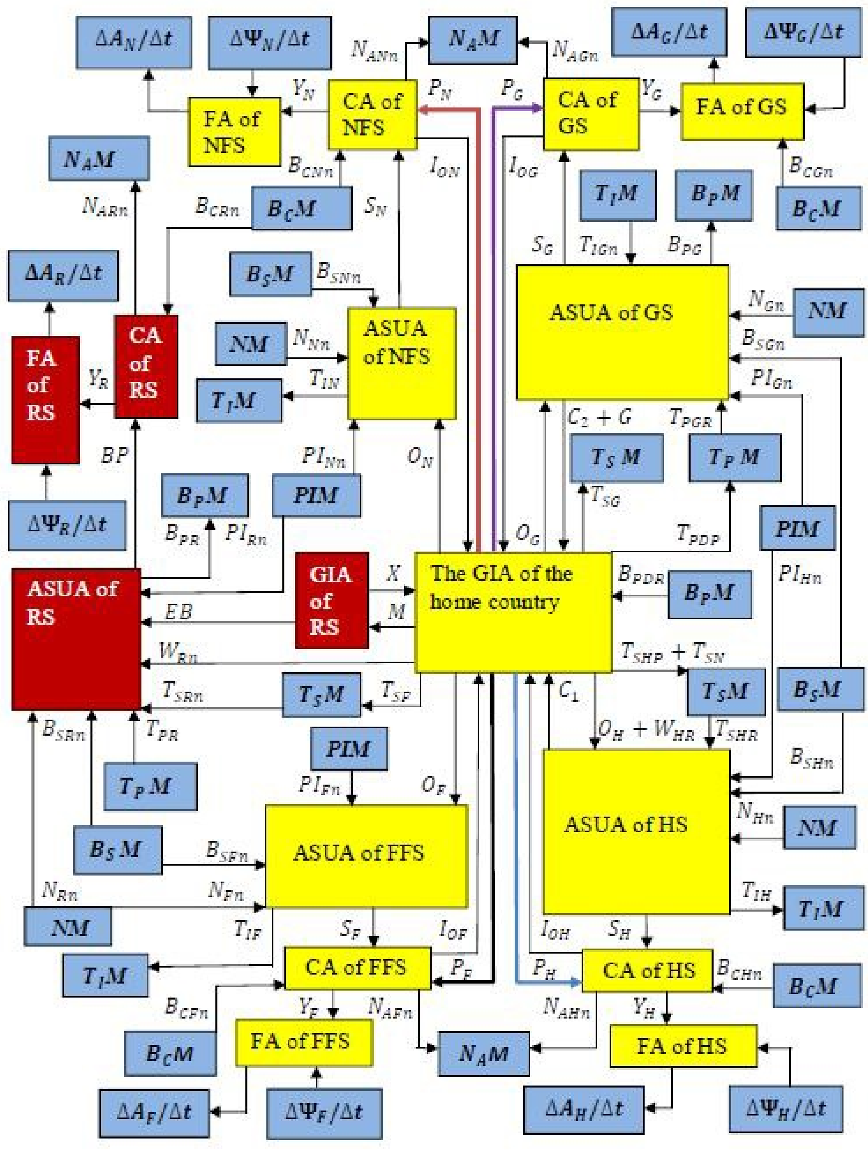
[6] L. Smith. *Linear Algebra.* 2 edition, 1985.

[7] Tilastokeskus. Kansantalouden tilinpidon sektoritilit. http://pxweb2.stat.fi/Dialog/varval.asp?ma=140_vtp_tau_140&ti=Sektoritilit+1975-2012&path=../Database/StatFin/kan/vtp/&lang=3&multilang=fi.

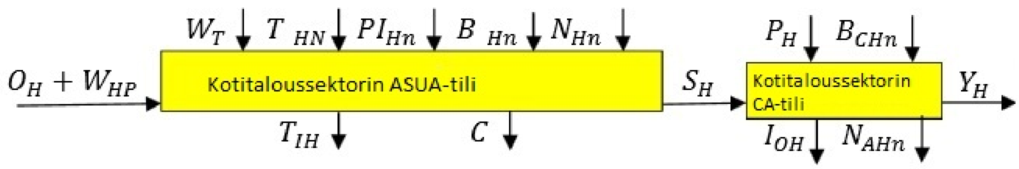
[8] Tilastokeskus. Laatuseloste: Kansantalouden tilinpito. http://www.stat.fi/til/vtp/2012/vtp_2012_2014-01-31_laa_001_fi.html, 2014.

[9] Carnigie Mellon Univesity ja University of Detroid Mercy University of Michigan. Control tutorials for matlab and simulink. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?aux=Extras_Imatlab#8.

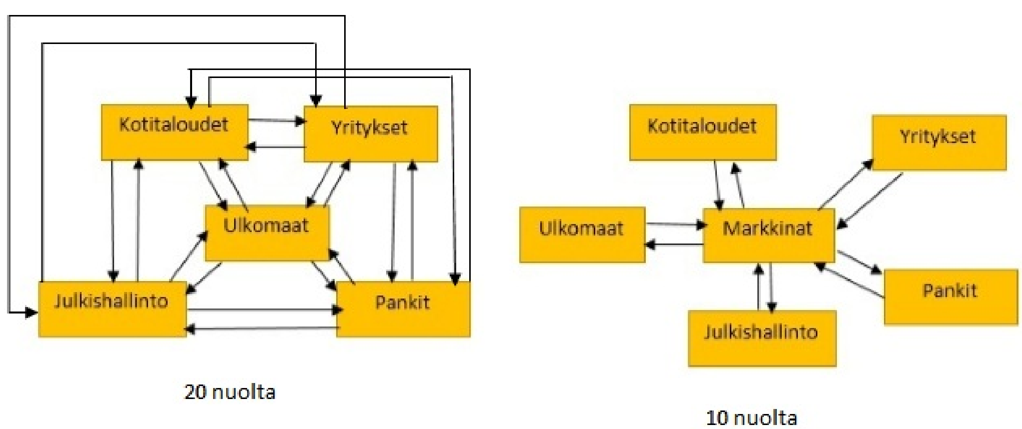
# 10 Liite: Kuvat



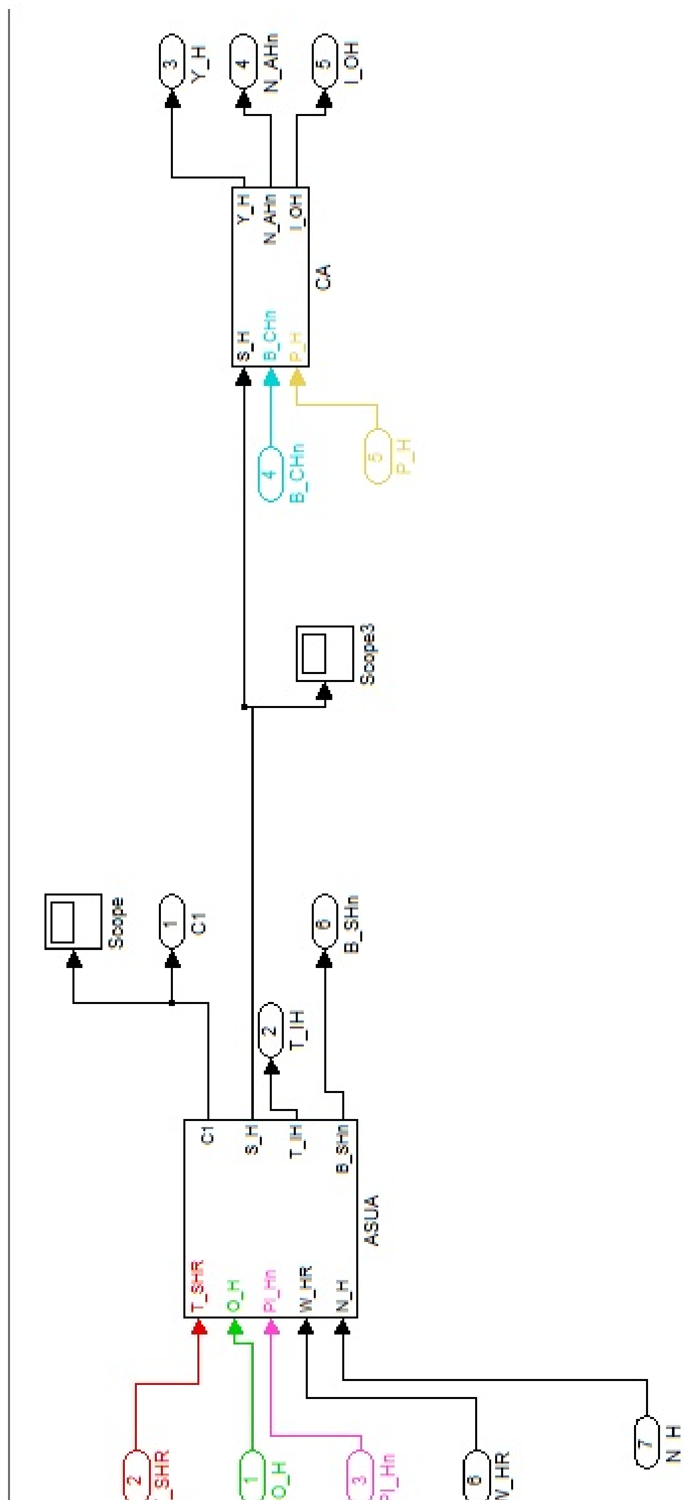

Kuva 2: Kansantalouden reaalitilinpidon kokonaisuus.




Kuva 3: ASUA- ja CA-tilit

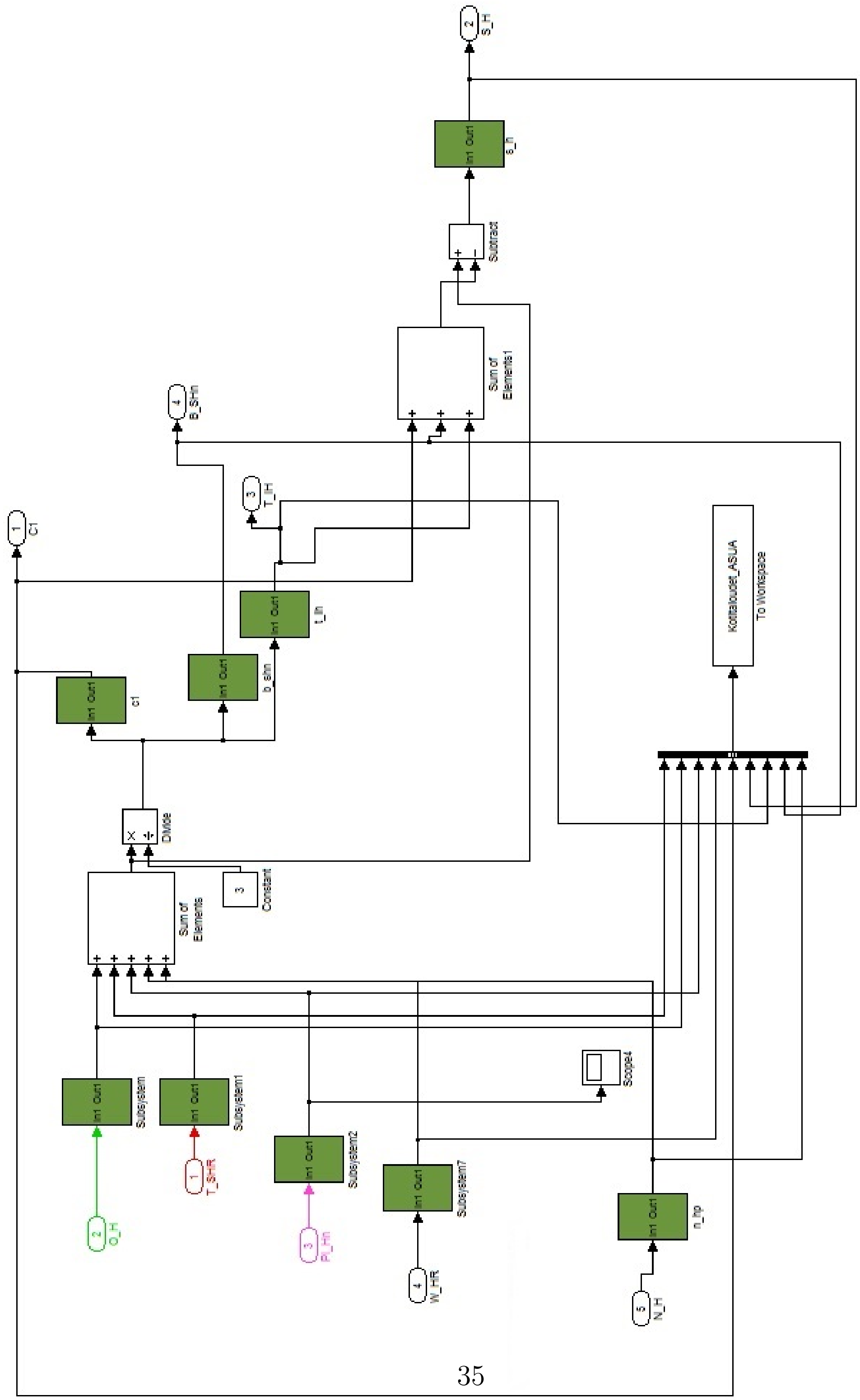



Kuva 4: Vasemmalla on tilanne, jossa Markkinat-lohkoa ei ole ja oikealla tilanne, jossa se on. Kuten kuvia vertailemalla nähdään, Markkinat-lohko vähentää tarvittavien rahavirtojen tarvetta.



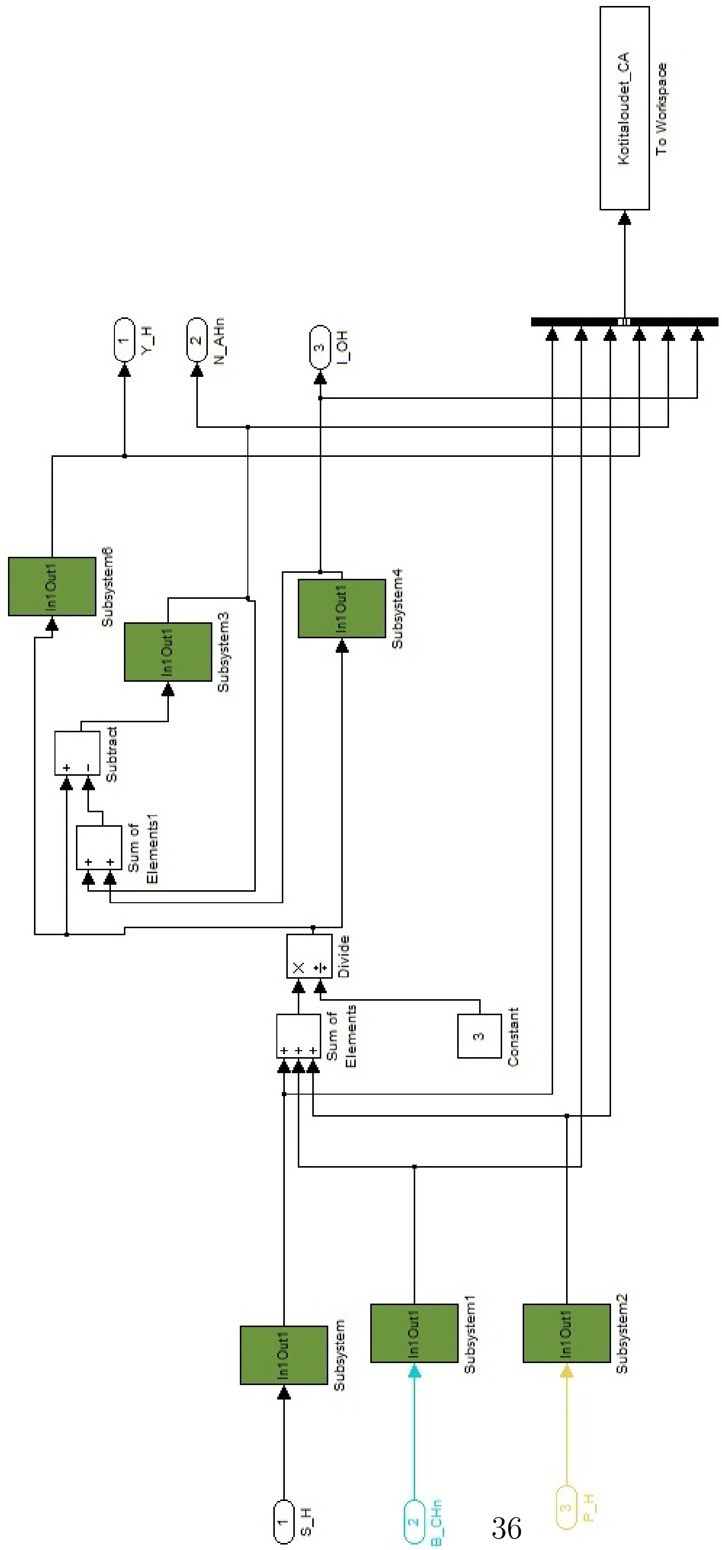



Kuva 5: Kotitaloudet-lohko



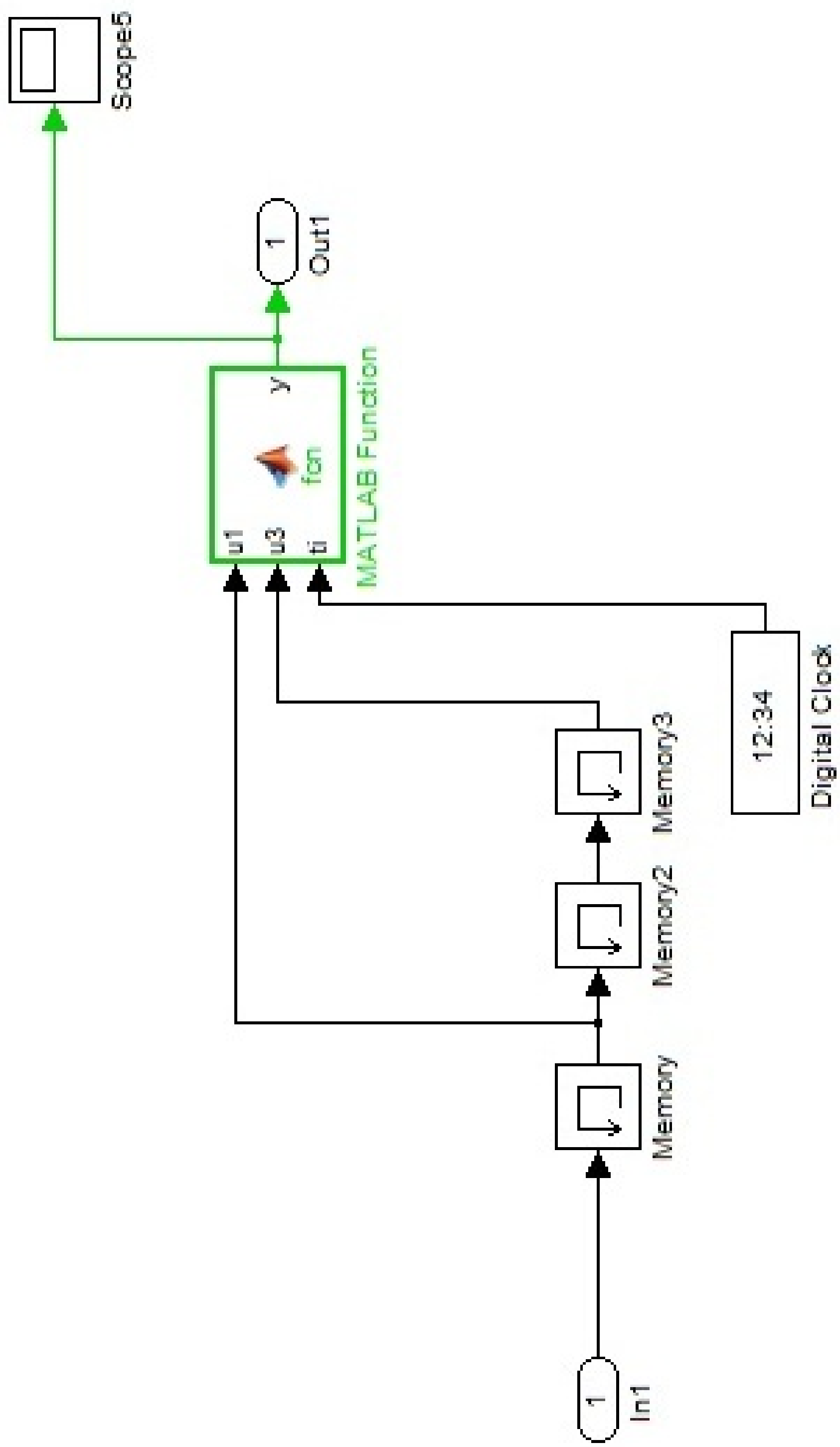



Kuva 6: Kotitaloudet-lohkon ASUA-tili



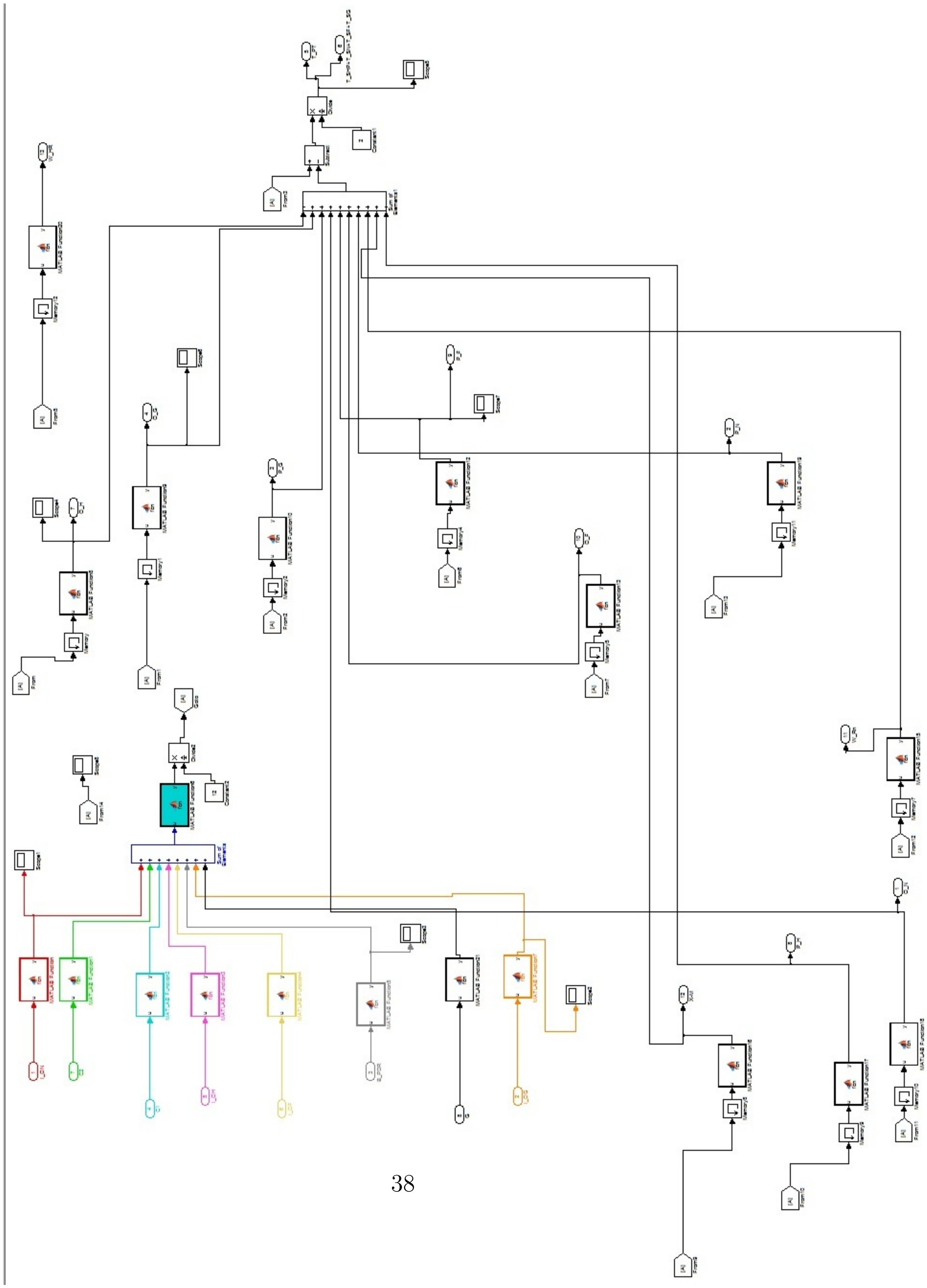



Kuva 7: Kotitaloudet-lohkon CA-tili

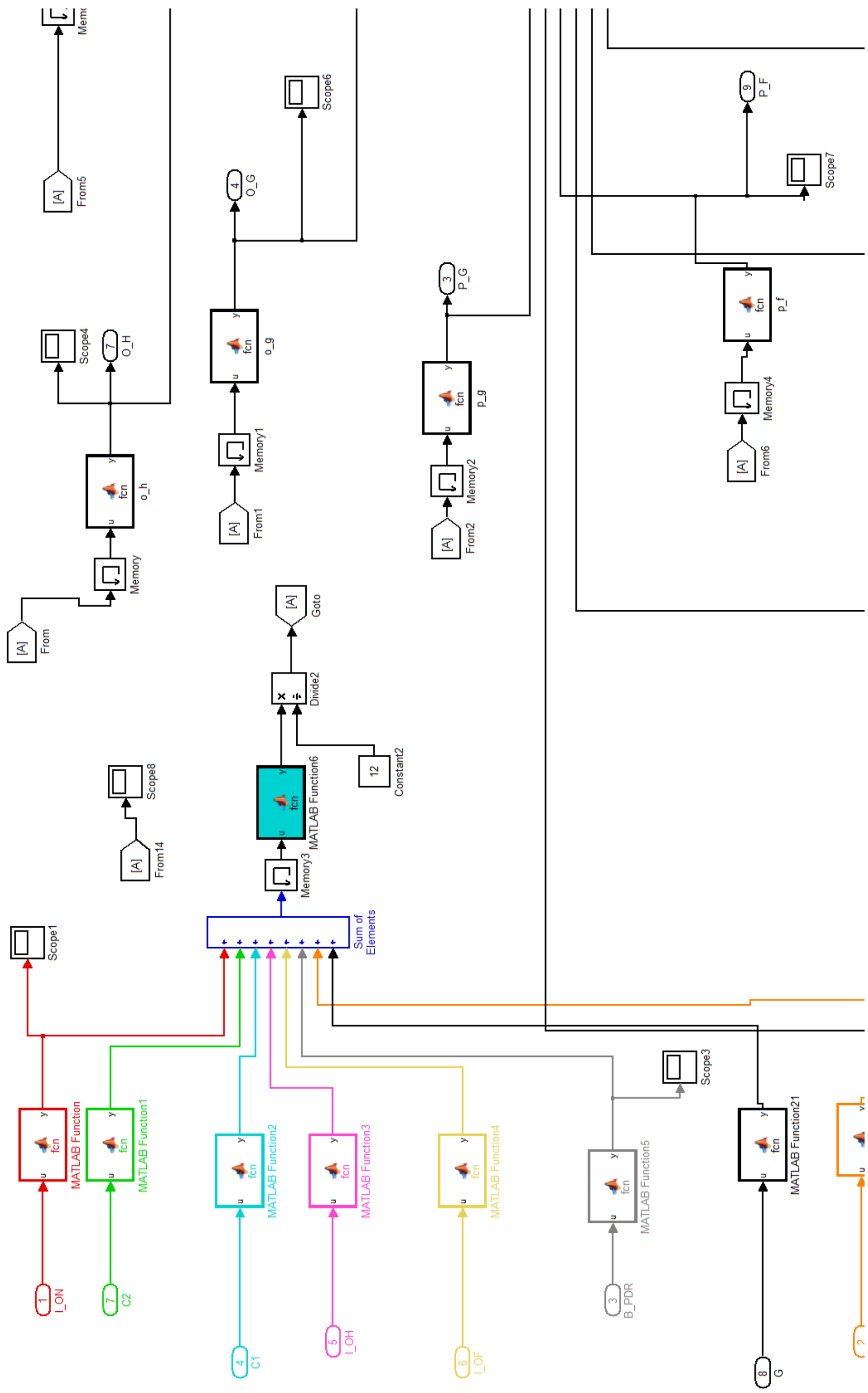





Kuva 8: Kotitaloudet-lohkon ASUA-tilin muuttuja $O_H$

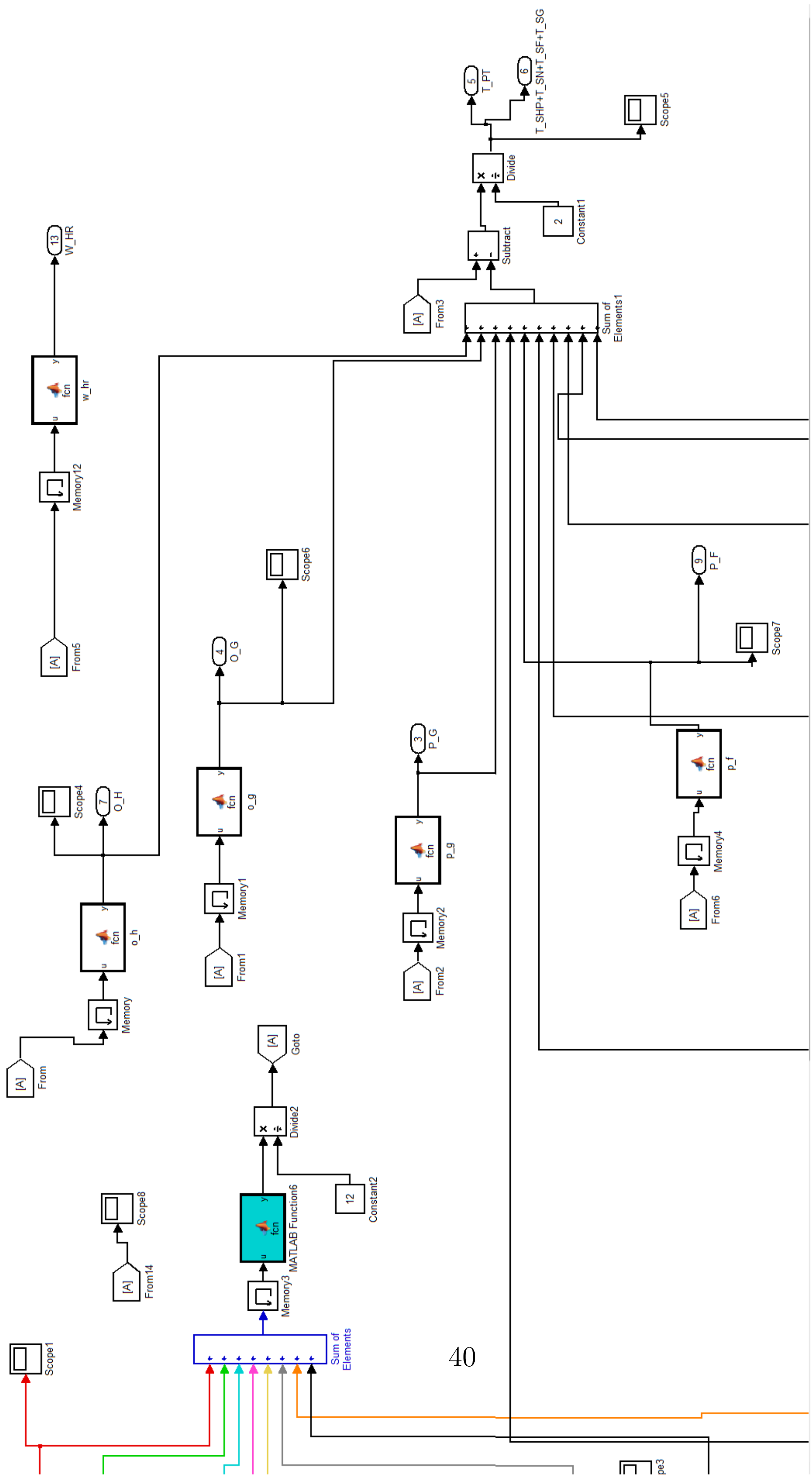


Kuva 9: Kotimaan GIA-lohko



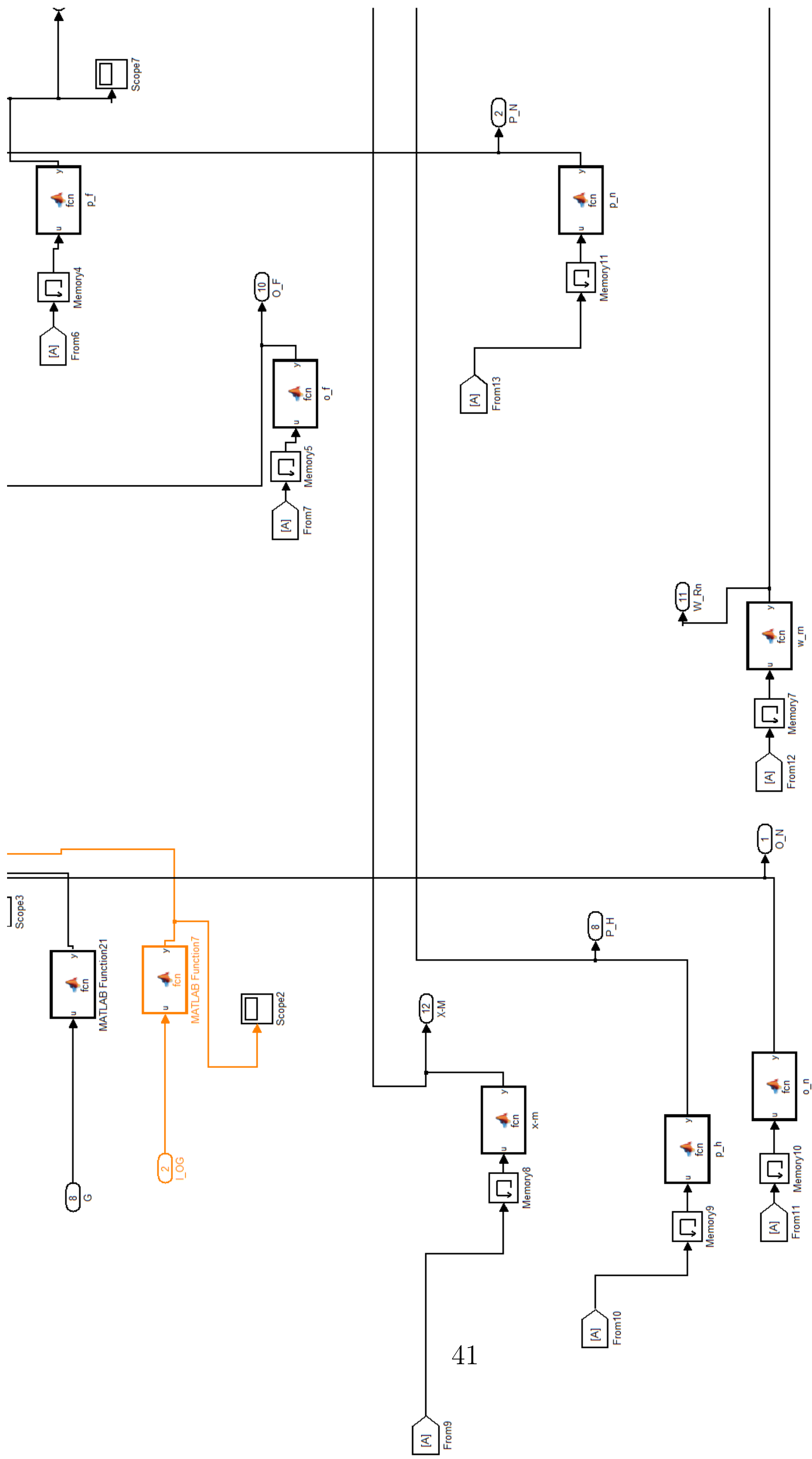



Kuva 10: Kotimaan GIA-lohkon vasen yläkulma



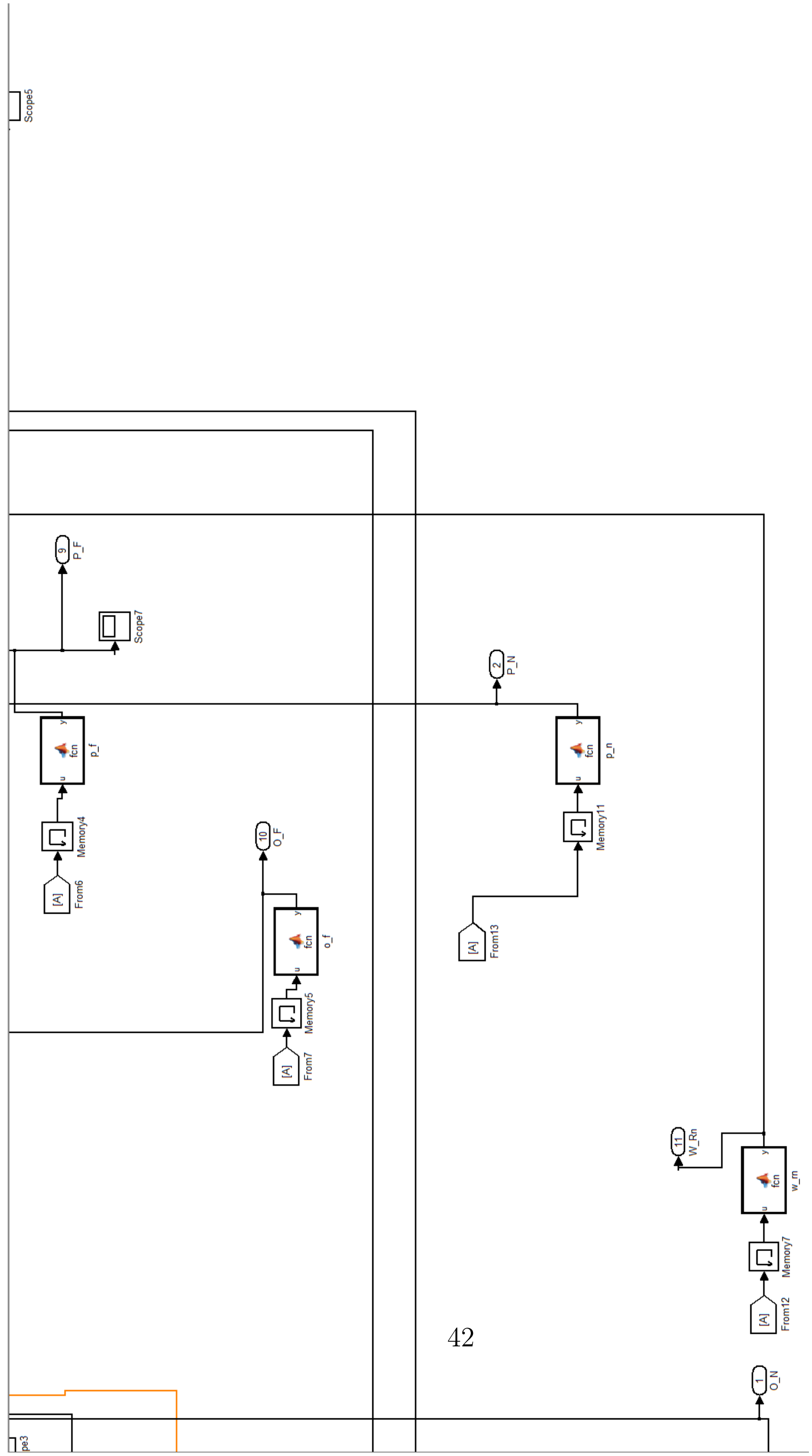



Kuva 11: Kotimaan GIA-lohkon oikea yläkulma

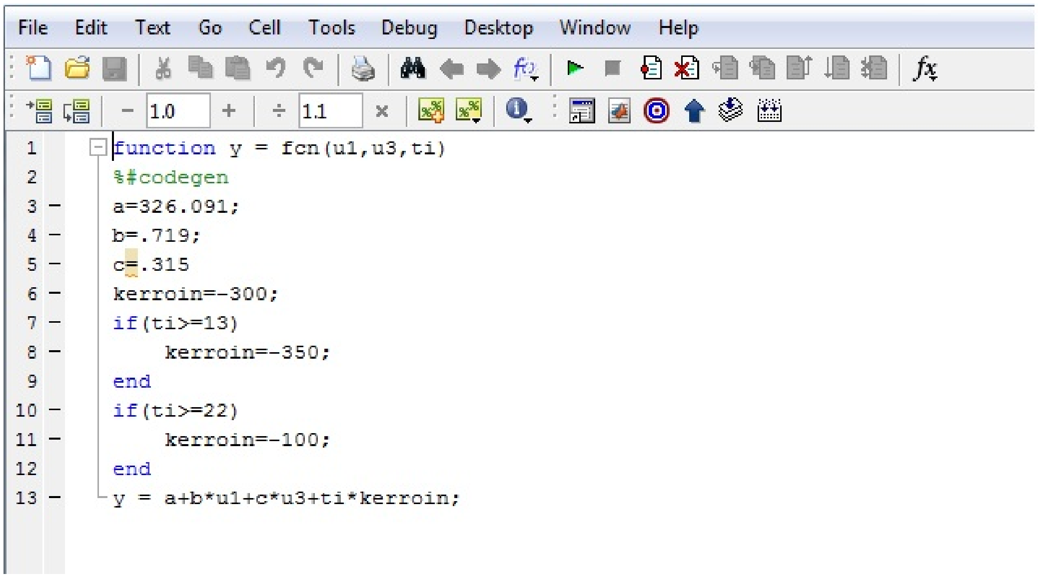




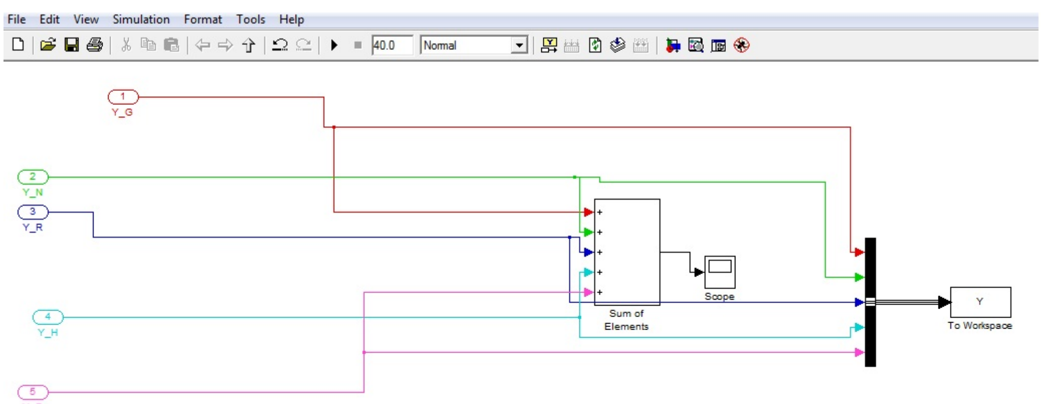

Kuva 12: Kotimaan GIA-lohkon vasen alakulma



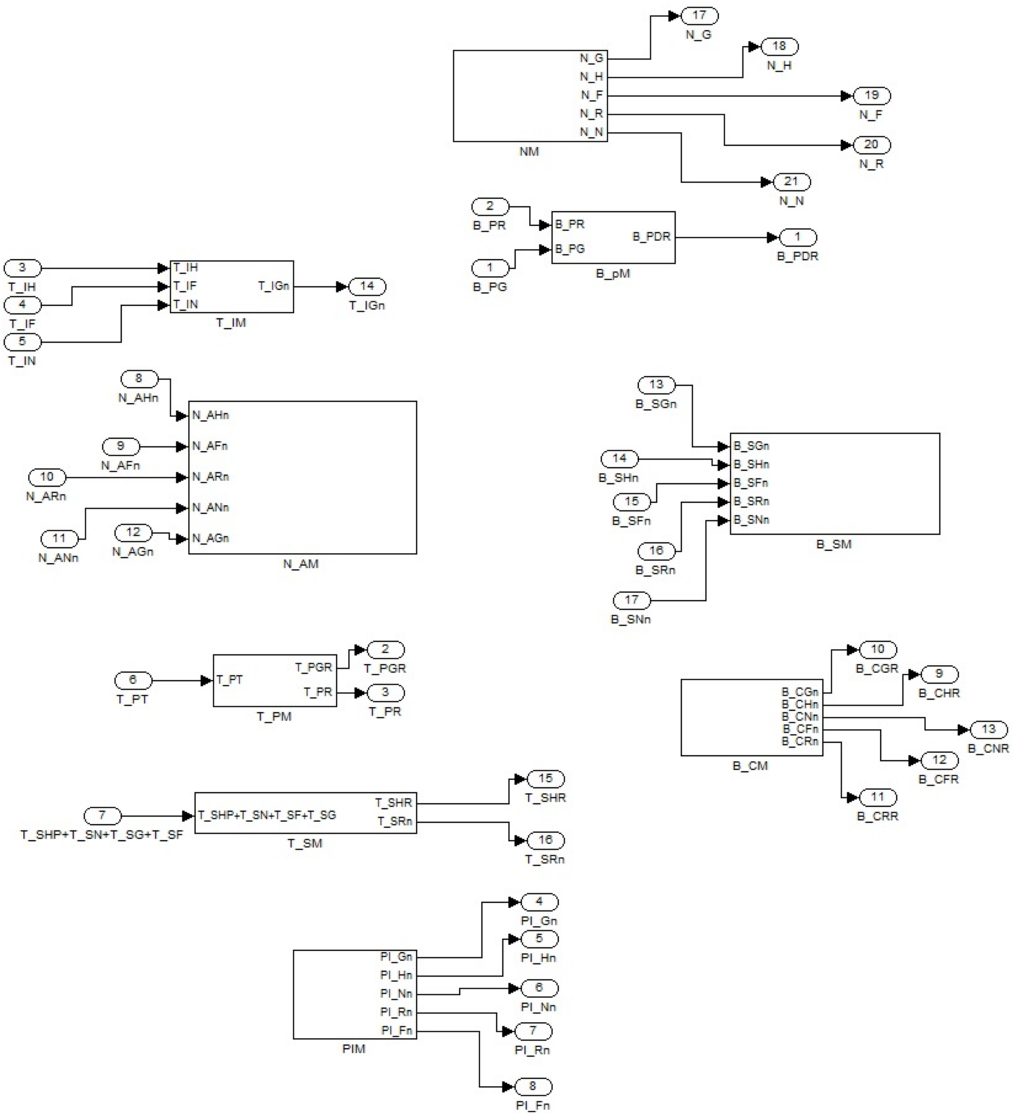
Kuva 13: Kotimaan GIA-lohkon oikea alakulma



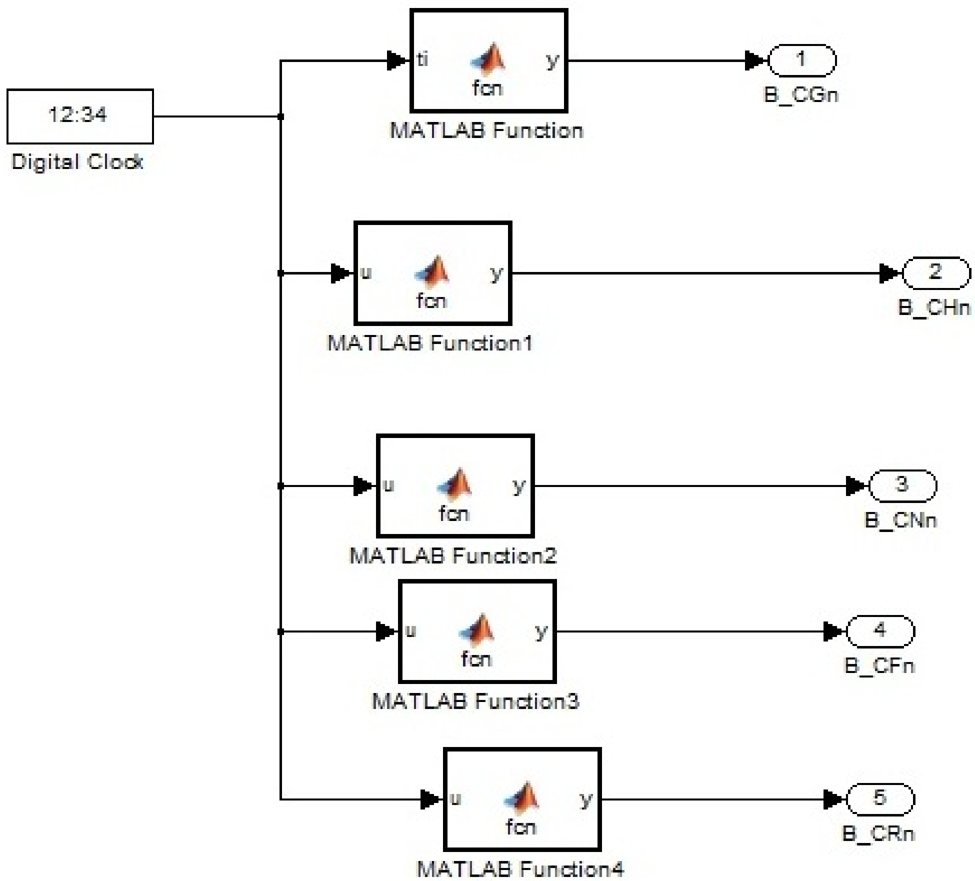

Kuva 14: Kotitaloudet-lohkon ASUA-tilin muuttujan $O_H$ Matlab-lohko



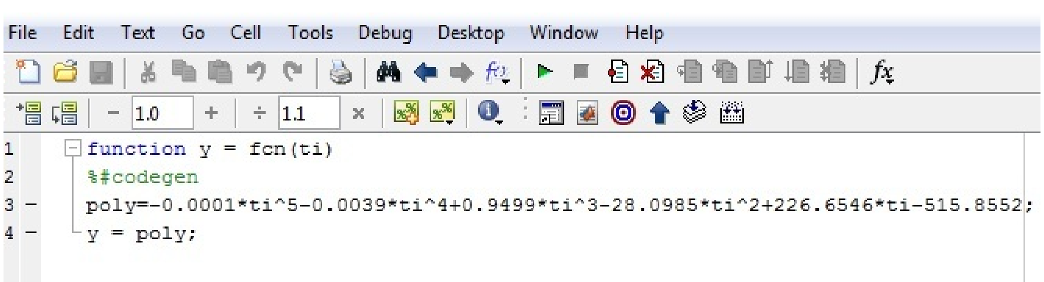

Kuva 15: Kaikki Y:t-lohko



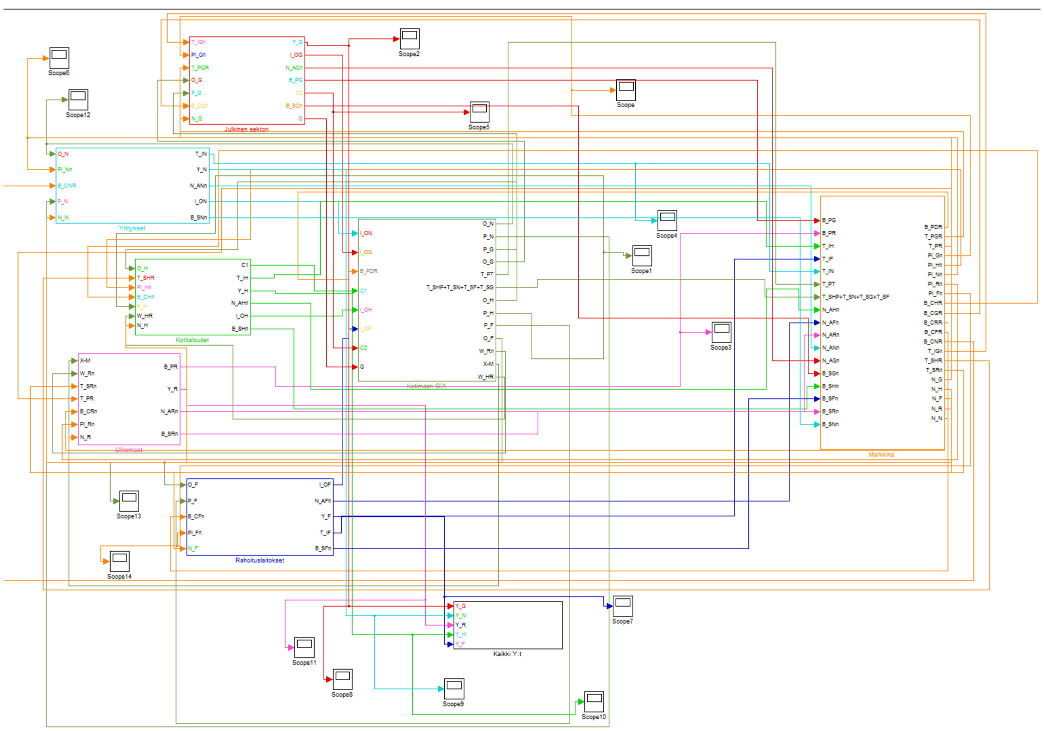

Kuva 16: Erilaiset Markkinat lohkot




Kuva 17: $B_C$-markkinat-lohko




Kuva 18: $B_C$-markkinat -lohkosta esimerkki Matlab-funktion sisällöstä

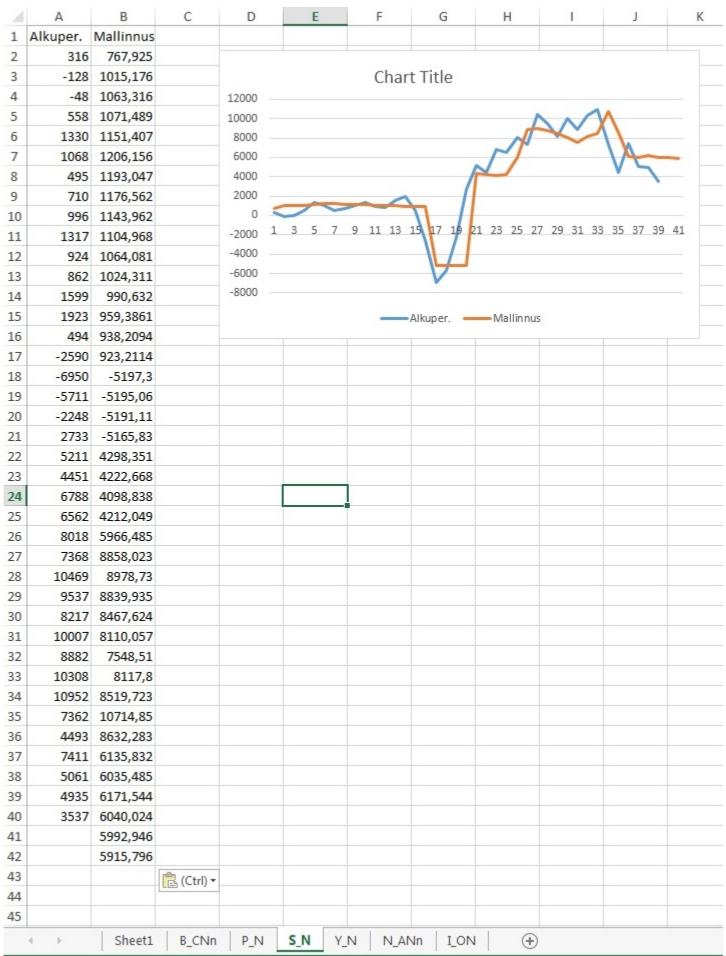


Kuva 19: Ylin taso mallissa

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | B_CNn | P_N | S_N | Y_N | N_Ann | I_ON | |
| 2 | 115,252 | 1285,821 | 767,925 | -1031,88 | 13,693 | 4381,794 | |
| 3 | 85,077 | -1383,39 | 1015,176 | 461,2246 | 155,6951 | 838,2461 | |
| 4 | 68,352 | -1068,44 | 1063,316 | 357,6791 | 163,5569 | 4055,352 | |
| 5 | 68,987 | -2072,94 | 1071,489 | -20,3883 | 33,1888 | 5395,442 | |
| 6 | 69,622 | -3072,65 | 1151,407 | -167,89 | 18,91759 | 5794,483 | |
| 7 | 70,257 | -3445,44 | 1206,156 | -313,326 | 5,685983 | 5971,192 | |
| 8 | 70,892 | -3949,34 | 1193,047 | -412,913 | 15,54126 | 6275,271 | |
| 9 | 71,527 | -4360,86 | 1176,562 | -530,763 | 16,20015 | 6495,723 | |
| 10 | 72,162 | -4751,69 | 1143,962 | -647,531 | 17,40381 | 6771,366 | |
| 11 | 72,797 | -5134,15 | 1104,968 | -761,724 | 19,90439 | 7040,475 | |
| 12 | 73,432 | -5509,02 | 1064,081 | -878,834 | 20,93622 | 7315,966 | |
| 13 | 74,067 | -5909,72 | 1024,311 | -1001,21 | 19,31409 | 7612,109 | |
| 14 | 74,702 | -6266,64 | 990,632 | -1121,2 | 18,89606 | 7896,448 | |
| 15 | 75,337 | -6662,35 | 959,3861 | -3076,37 | 23,8375 | 8169,42 | |
| 16 | 75,972 | -7039,28 | 938,2094 | -3366,99 | 25,30361 | 8434,826 | |
| 17 | 76,607 | -7407,9 | 923,2114 | -3651,28 | 28,04368 | 8712,968 | |
| 18 | 77,242 | -7816,63 | -5197,3 | -7788,1 | 54,84056 | 13389,24 | |
| 19 | 579,6262 | -8171,29 | -5195,06 | -8543,34 | 12,72568 | 13217,03 | |
| 20 | 597,1286 | -8745,5 | -5191,11 | -8692,09 | 92,76565 | 13778,57 | |
| 21 | 606,9906 | -8371,98 | -5165,83 | 5025,56 | 266,4433 | 13243,17 | |
| 22 | 609,1774 | -8759,07 | 4298,351 | 1511,577 | -43,9608 | 6602,407 | |
| 23 | 145,8523 | -8992,55 | 4222,668 | 4057,131 | 84,87795 | 12435,35 | |
| 24 | 144,8718 | -8886,99 | 4098,838 | 4361,835 | 84,19253 | 12062,45 | |
| 25 | 143,1025 | -9264,85 | 4212,049 | 5669,852 | -17,5326 | 12866,11 | |
| 26 | 140,6623 | -9694,69 | 5966,485 | 5290,954 | 50,62474 | 12817,88 | |
| 27 | 137,7001 | -10432 | 8858,023 | 4000,323 | 210,5989 | 12571,8 | |
| 28 | 134,3949 | -10957,6 | 8978,73 | 5802,561 | -217,368 | 14399,35 | |
| 29 | 130,9567 | -11452,6 | 8839,935 | 6663,484 | 235,9323 | 14021,55 | |
| 30 | 127,6258 | -12289,5 | 8467,624 | 7614,062 | 160,2035 | 14474,36 | |
| 31 | 124,6735 | -12893,1 | 8110,057 | 9025,653 | 38,04802 | 14960,59 | |
| 32 | 122,4012 | -13388,6 | 7548,51 | 10387,37 | -79,0845 | 15625,71 | |
| 33 | 224,264 | -19187,7 | 8117,8 | 19201,13 | -636,682 | 20489,11 | |
| 34 | 222,8201 | -19857,5 | 8519,723 | 12275,83 | -412,794 | 19080,21 | |
| 35 | 228,4508 | -23572,1 | 10714,85 | 18810,03 | -1040,83 | 22273,73 | |
| 36 | 242,8523 | -16461,5 | 8632,283 | 4376,341 | 442,7317 | 14800,88 | |
| 37 | 267,8432 | -17310,4 | 6135,832 | 5256,1 | -409,845 | 18856,64 | |
| 38 | 305,3645 | -17137,8 | 6035,485 | 5170,246 | -358,23 | 19194,73 | |
| 39 | 357,4796 | -17064,8 | 6171,544 | 5294,151 | -359,425 | 19372,45 | |
| 40 | 426,3743 | -17658,5 | 6040,024 | 5587,147 | -403,191 | 19970,3 | |
| 41 | 514,3568 | -17711,3 | 5992,946 | 5718,82 | -406,342 | 20032,64 | |
| 42 | 623,8577 | -17812,9 | 5915,796 | 5813,062 | -400,069 | 20233,1 | |
| 43 | | | | | | | |
| 44 | | | | | | | |
| 45 | | | | | | | |

Sheet1 | B_CNn | P_N | S_N | Y_N | N_ANn | I_ON

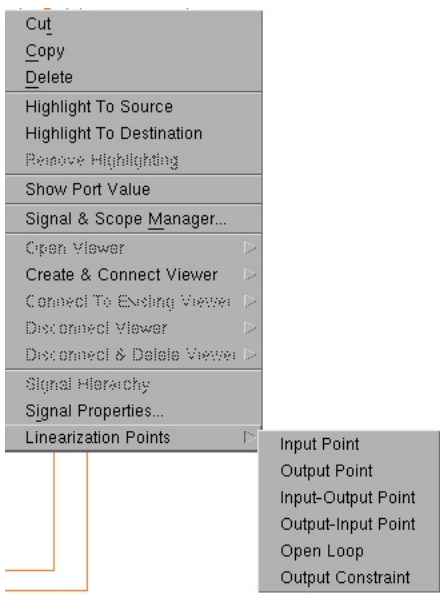
Kuva 20: Esimerkki Yrityssektorin CA-tilin tuloksia sisältävän Excelin ensimmäiseltä välilehdeltä



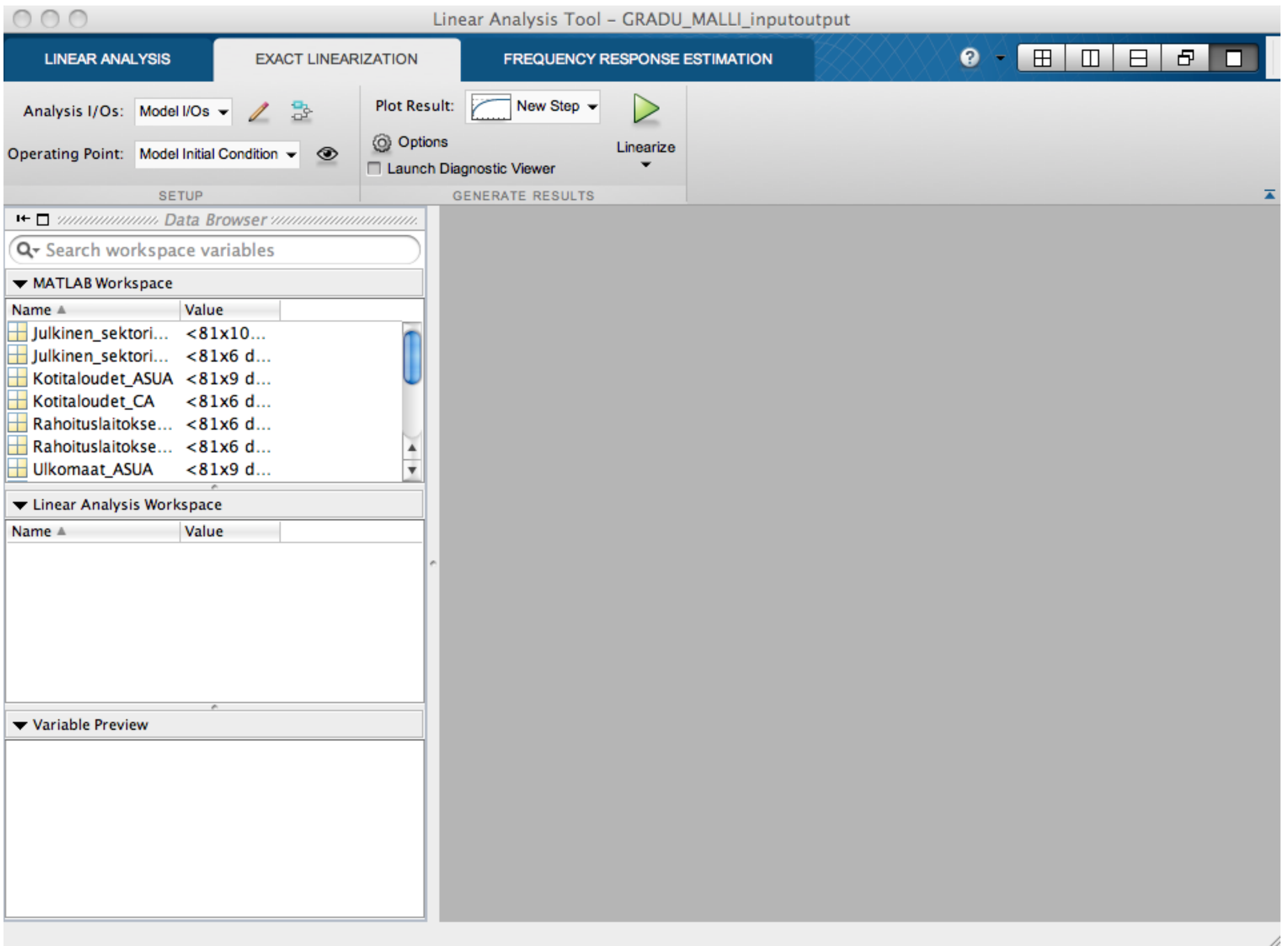
| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Alkuper. | Mallinnus |
| 2 | 316 | 767,925 |
| 3 | -128 | 1015,176 |
| 4 | -48 | 1063,316 |
| 5 | 558 | 1071,489 |
| 6 | 1330 | 1151,407 |
| 7 | 1068 | 1206,156 |
| 8 | 495 | 1193,047 |
| 9 | 710 | 1176,562 |
| 10 | 996 | 1143,962 |
| 11 | 1317 | 1104,968 |
| 12 | 924 | 1064,081 |
| 13 | 862 | 1024,311 |
| 14 | 1599 | 990,632 |
| 15 | 1923 | 959,3861 |
| 16 | 494 | 938,2094 |
| 17 | -2590 | 923,2114 |
| 18 | -6950 | -5197,3 |
| 19 | -5711 | -5195,06 |
| 20 | -2248 | -5191,11 |
| 21 | 2733 | -5165,83 |
| 22 | 5211 | 4298,351 |
| 23 | 4451 | 4222,668 |
| 24 | 6788 | 4098,838 |
| 25 | 6562 | 4212,049 |
| 26 | 8018 | 5966,485 |
| 27 | 7368 | 8858,023 |
| 28 | 10469 | 8978,73 |
| 29 | 9537 | 8839,935 |
| 30 | 8217 | 8467,624 |
| 31 | 10007 | 8110,057 |
| 32 | 8882 | 7548,51 |
| 33 | 10308 | 8117,8 |
| 34 | 10952 | 8519,723 |
| 35 | 7362 | 10714,85 |
| 36 | 4493 | 8632,283 |
| 37 | 7411 | 6135,832 |
| 38 | 5061 | 6035,485 |
| 39 | 4935 | 6171,544 |
| 40 | 3537 | 6040,024 |
| 41 | | 5992,946 |
| 42 | | 5915,796 |



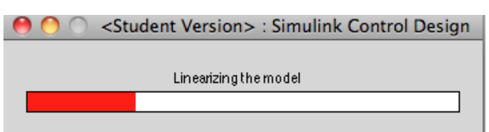
Kuva 21: Esimerkki Yrityssektorin CA-tilin tuloksia sisältävän Excelin $S_N$-muuttujan välilehdestä



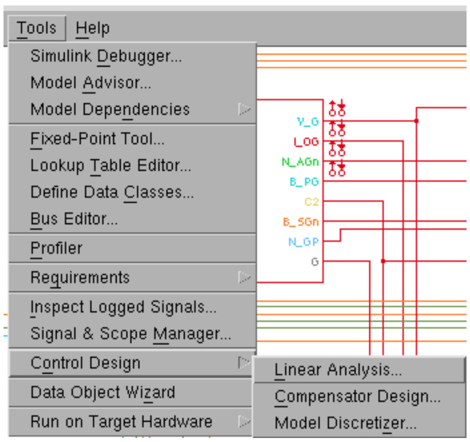

Kuva 22: Valikko, josta valitaan sopiva vaihtoehto



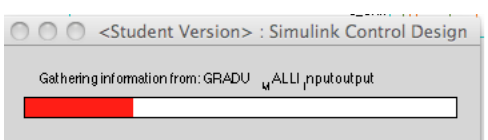

Kuva 23: Linear Analysis Tool-työkalu



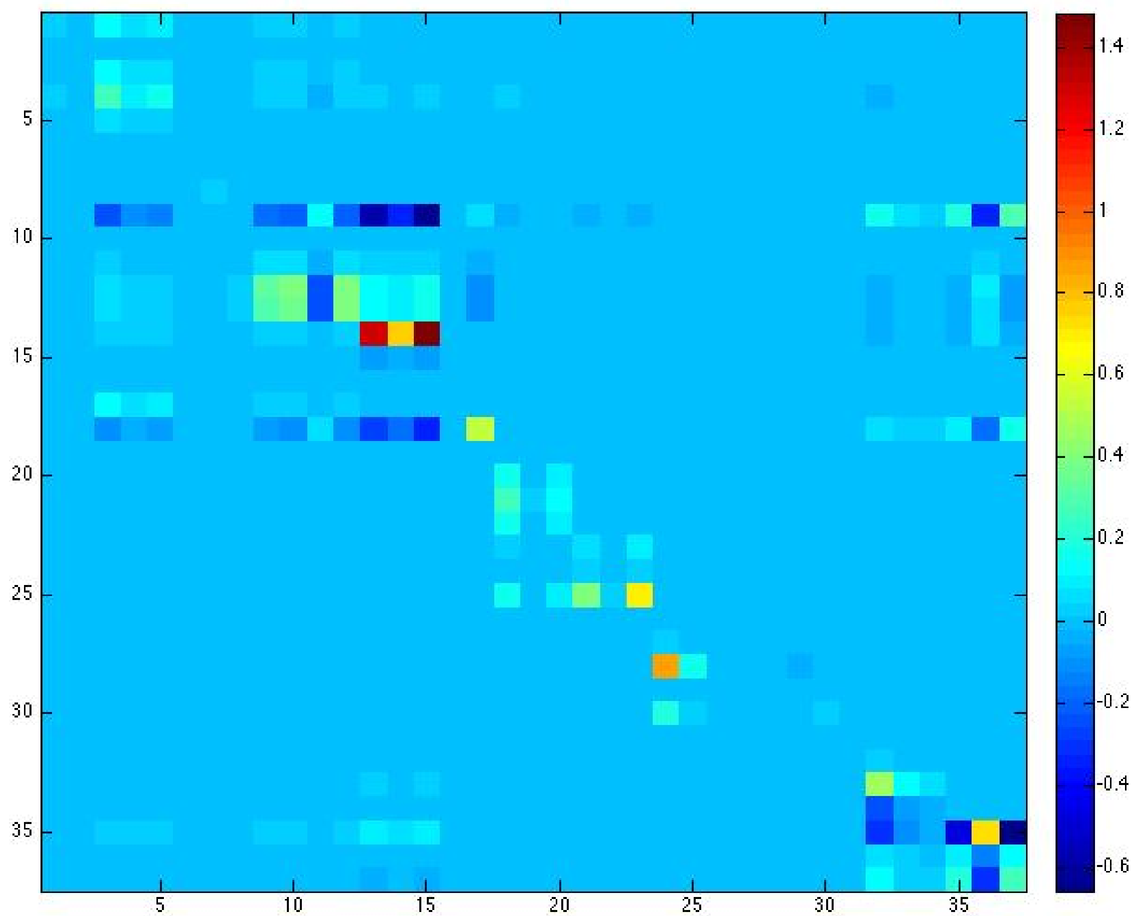

Kuva 24: Laskenta käynnissä



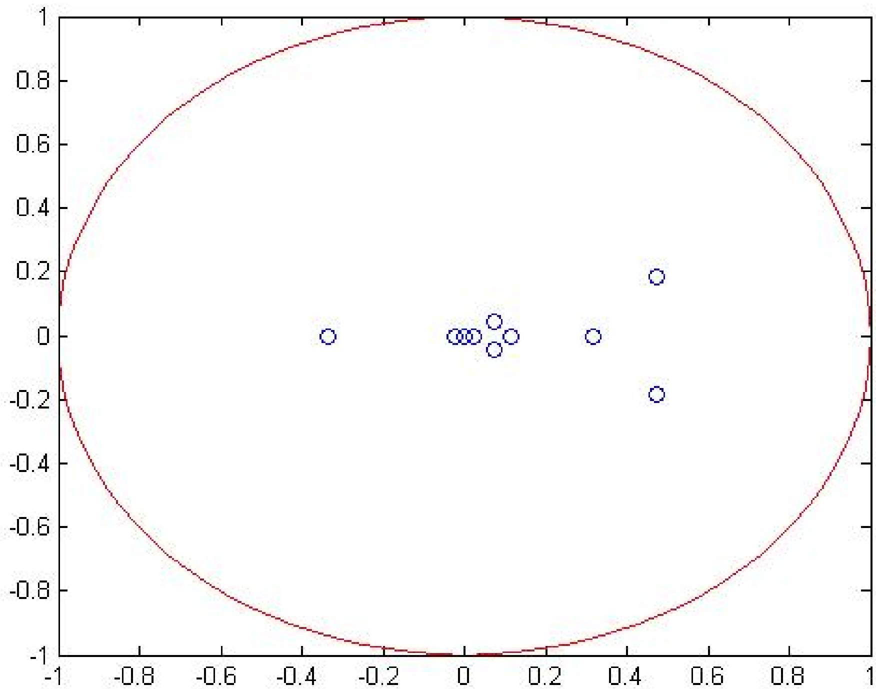

Kuva 25: Valikko



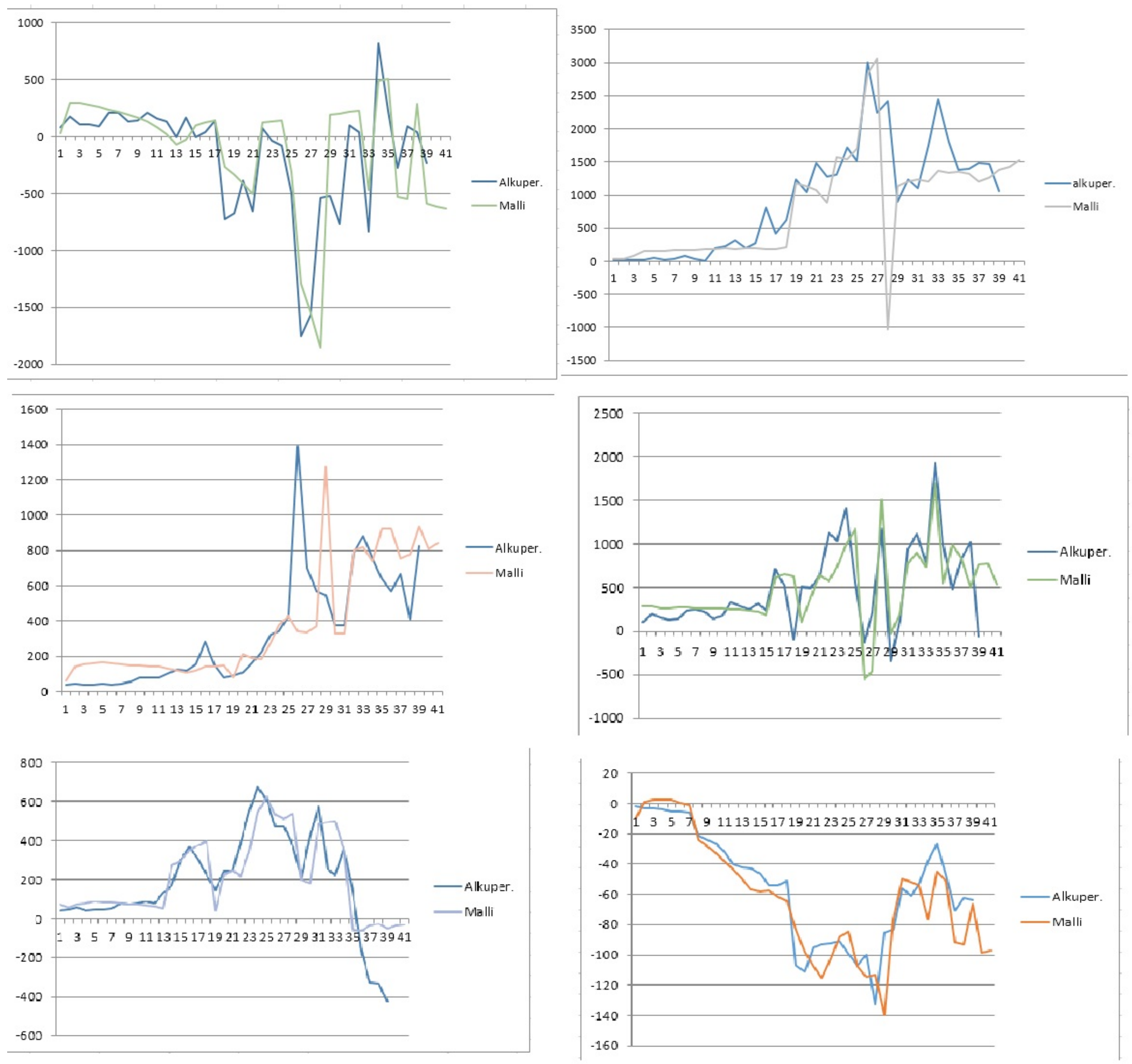

Kuva 26: Odotusikkuna



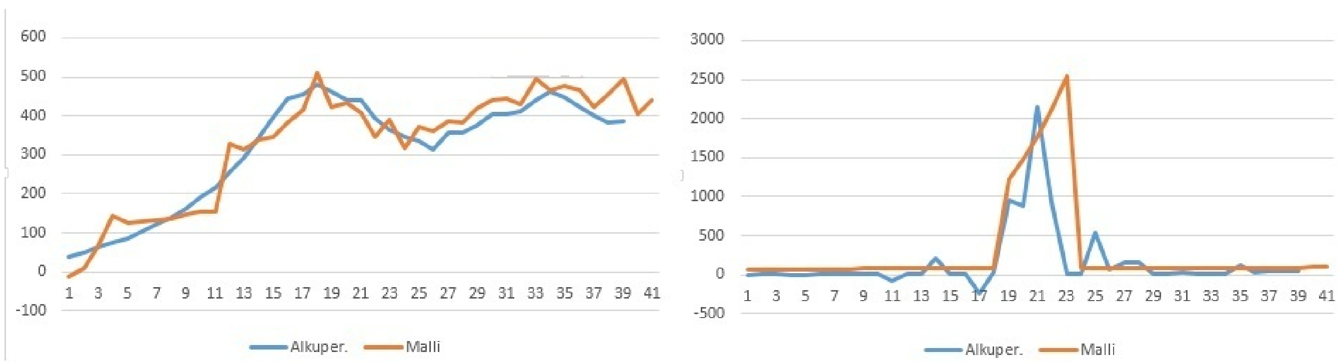

Kuva 27: Kuva matriisista




Kuva 28: Kuva nollasta eroavista ominaisarvoista ja yksikköympyrästä. Ominaisarvot ovat sinisellä ja yksikköympyrä on punainen.




Kuva 29: Tulokset Pankkisektorin ASUA-tililtä.




Kuva 30: Tulokset Pankkisektorin CA-tililtä.