

# Fourier-menetelmät osittaisdifferentiaaliyhtälöissä

Pro gradu -tutkielma  
Ville Vestman  
170140  
Itä-Suomen yliopisto  
23. lokakuuta 2013

# Sisältö

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Alku- ja reuna-arvo-ongelmien ratkaiseminen</b>	<b>2</b>
2.1	Perusmääritelmiä ja merkintöjä . . . . .	2
2.2	Aaltoyhtälö värähtelevälle soittimen kielelle . . . . .	4
2.3	Alku- ja reuna-arvo-ongelmat . . . . .	5
2.4	Muuttujien separointimenetelmä . . . . .	6
2.5	Lämmön johtuminen eristetyssä kappaleessa . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Fourier'n sarjat</b>	<b>12</b>
3.1	Fourier-sarja . . . . .	12
3.2	Jaksolliset funktiot . . . . .	16
3.3	Toispuoleiset raja-arvot ja derivaatat . . . . .	17
3.4	Paloittain jatkuvat funktiot . . . . .	19
3.5	Dirichlet'n ydin . . . . .	21
3.6	Fourier'n lause . . . . .	24
3.7	Fourier-sarjan kerrointen ominaisuuksia . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat</b>	<b>30</b>
4.1	Parilliset ja parittomat funktiot . . . . .	30
4.2	Sinitermiset Fourier-sarjat . . . . .	31
4.3	Kosinitermiset Fourier-sarjat . . . . .	32
4.4	Jatkoa lämmönjohtumisesimerkkiin . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Fourier-integraalit</b>	<b>36</b>
5.1	Fourier'n integraalikaava . . . . .	36
5.2	Fourier'n integraalilause . . . . .	37
5.3	Integrointijärjestyksen vaihto . . . . .	43
5.4	Fourier'n integraalikaavan eksponentiaalinen muoto . . . . .	49
5.5	Fourier-muunnos . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Johtopäätökset</b>	<b>57</b>

# 1 Johdanto

Fourier-menetelmät syntyivät fysiikan ongelmien innoittamana. Oli vuosi 1804, kun Joseph Fourier alkoi tutkia lämmön johtumista. Fourier keksi seuraavien kolmen vuoden aikana lämmön johtumista kuvaavat yhtälöt ja periaatteet, kehitti menetelmät näiden yhtälöiden ratkaisemiseksi sekä tutki ja ratkaisi useita käytännön ongelmia kehittämillään menetelmillä. [1]

Fourier'n esittämässä ratkaisumallissa on oleellisena osana yhtälöiden

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \end{array} \right. \quad (1.3)$$

käyttäminen. Fourier väitti, että jokainen välillä  $(-\pi, \pi)$  määritelty funktio, jonka graafi rajaa äärellisen alueen (integroituva funktio), voidaan esittää Fourier-sarjamuodossa (1.1). Tämä väite osoittautui vääräksi viimeistään vuonna 1876, kun Paul du Bois-Reymond esitti esimerkin jatkuvasta funktiosta, jonka Fourier-sarja on hajaantuva yhdessä pisteessä. Fourier'n väite ei kuitenkaan mennyt täysin pieleen, sillä vuonna 1966 Lennart Carleson osoitti, että avaruuden  $L_2([-\pi, \pi])$  funktioiden Fourier-sarjat suppenevat melkein kaikkialla. Tämä tulos pätee siis esimerkiksi jatkuville funktioille. [1]

Toinen aiheeseen läheisesti liittyvä fysiikan osa-alue on värähtelyjen ja äänen tutkiminen. Värähtelevän säikeen liikettä kuvaavan aaltoyhtälön kehitti J. d'Alembert vuonna 1747. D'Alembert onnistui myös muodostamaan aaltoyhtälölle suljetussa muodossa esitettävän ratkaisun. Tämän jälkeen vuonna 1755 Daniel Bernoulli esitti aaltoyhtälölle vaihtoehtoisen sarjamuotoisen ratkaisun, joka edellytti säikeen alkusijaintia ja alkunopeutta kuvaavien funktioiden esittämistä sarjan (1.1) kaltaisessa muodossa. Bernoullin lisäksi tänä aikakautena Fourier-sarjaesityksien kanssa tekemisissä olivat myös Alexis Clairaut, Joseph Lagrange ja Leonhard Euler. Fourier-sarjoja esiintyi siis jo 1700-luvun puolella, eli ennen Fourier'n tutkimuksia. [1] [2]

Vuonna 1811 Fourier lisäsi alkuperäiseen työhönsä joitain uusia tuloksia. Näistä merkittävimpinä mainittakoon Fourier-integraalit. Fourier'n ensimmäiset lämmönjohtumista käsittelevät teokset vuosilta 1807 ja 1811 jäivät kuitenkin julkaisematta, sillä ne eivät saaneet riittävää hyväksyntää. Fourier'n teoriaa kritisoivat erityisesti Laplace ja Lagrange. Myöhemmin Fourier'n tulokset alkoivat saada yleistä hyväksyntää, mikä johti Fourier'n luo-

man teorian julkaisemiseen teoksessa *The Analytical Theory of Heat* vuonna 1822. [3]

Fourier'n sarjat antoivat modernin analyysin kehitykselle hyvän sysäyksen eteenpäin. Fourier'n sarjojen täsmällinen jatkotutkimus vaati nimittäin matemaattisen teorian kehittämistä, sillä Fourier'n aikana ei esimerkiksi ollut olemassa nykyisen kaltaisia integraalien määritelmiä ja lisäksi sen aikainen käsitys funktioista poikkesi hieman nykyisestä. [1]

Tämän tutkielman alkupuolella Luvussa 2 esitetään esimerkit niin aalto- kuin lämpöyhtälön ratkaisemista ja nähdään kuinka käytettävä ratkaisumenetelmä johtaa Fourier-sarjaesityksiin. Luvuissa 3 ja 4 perehdytään Fourier-sarjoihin ja saadaan vastauksia Luvussa 2 esiin nousseisiin kysymyksiin. Tutkielman lopuksi Luvussa 5 käsitellään Fourier-integraaleja ja Fourier-muunnosta.

## 2 Alku- ja reuna-arvo-ongelmien ratkaiseminen

Tässä luvussa perehdytään lyhyesti osittaisdifferentiaaliyhtälöihin, alku- ja reuna-arvo-ongelmiin sekä muuttujien separointimenetelmän ja superpositioperiaatteen käyttämiseen kyseisten ongelmien ratkaisemiseksi. Käytettävä ratkaisumenetelmä nostaa esille matemaattisen ongelman, jonka seurauksena päädytään tutkimaan Fourier-sarjoja Luvussa 3.

### 2.1 Perusmääritelmiä ja merkintöjä

Yleinen *osittaisdifferentiaaliyhtälö* voidaan esittää muodossa

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

missä  $F$  on tunnettu funktio, jonka arvo riippuu vähintään yhdestä osittaisderivaattatermistä, ja  $u$  on tuntematon funktio muuttujinaan  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Funktion  $u$  osittaisderivaatoista tullaan usein käyttämään lyhyemmän esitystavan vuoksi alaindeksimerkintöjä

$$u_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad u_{x_1 x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad u_{x_2 x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots$$

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt voidaan esittää myös käyttämällä operaattoreita. *Operaattorilla* tarkoitetaan kuvausta vektoriavaruudelta toiselle. Tässä tutkielmassa nämä avaruudet ovat funktioavaruuksia, jolloin operaattorit kuvaavat funktion toiseksi funktioksi. Esimerkkinä osittaisdifferentiaaliyhtälön

esittämisestä operaattorin avulla tarkastellaan yhtälöä  $u_{xx}^2 + u_y - xy = 0$ . Kun määritellään operaattori  $\mathcal{M}$  lausekkeella

$$\mathcal{M}(u) = (u_{xx})^2 + u_y,$$

voidaan kyseinen yhtälö esittää muodossa  $\mathcal{M}(u) = xy$ .

Operaattori  $\mathcal{L}$  on *lineaarinen*, mikäli yhtälöt

$$\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v) \quad \text{ja} \quad \mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u) \quad (2.1)$$

pätevät operaattorin  $\mathcal{L}$  kaikilla määrittelyjoukon alkioilla  $u$  ja  $v$  sekä kaikilla vakion  $c$  arvoilla.

**Lause 2.1.1. (Superpositioperiaate)** *Olkkoon  $\mathcal{L}$  lineaarinen operaattori ja olkkoot  $u_1, u_2, \dots, u_n$  funktioita siten, että  $\mathcal{L}(u_i) = 0$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Tällöin*

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = 0,$$

missä  $c_i \in \mathbb{R}$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Todistus.* Käyttämällä toistuvasti operaattorin  $\mathcal{L}$  lineaarisuusominaisuutta (2.1) päästään haluttuun tulokseen

$$\mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^n c_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}(u_i) = 0. \quad \square$$

Superpositioperiaate on hyödyllinen apukeino differentiaaliyhtälöitä ratkaistaessa. Sen avulla voidaan muodostaa yksittäisistä ratkaisuista yleisempiä ratkaisuja.

Edellä esitetty superpositioperiaate koskee vain äärellistä määrää funktioita, mutta jatkossa tarvitaan tulosta, jossa funktioita voi olla numeroituvasti ääretön määrä. Laajennetaan siis saatua tulosta:

**Lause 2.1.2.** *Olkkoon  $\mathcal{L}$  lineaarinen operaattori ja olkkoot  $u_1, u_2, u_3, \dots$  funktioita siten, että  $\mathcal{L}(u_i) = 0$  kaikilla  $i \in \mathbb{N}$ . Oletetaan, että sarja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i \quad (c_i \in \mathbb{R})$$

*suppenee pisteittäin kohti funktioita  $u$  ja että yhtälö*

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathcal{L}(u_i)$$

*on voimassa. Tällöin*

$$\mathcal{L}(u) = 0.$$

*Todistus.* Lauseen 2.1.1 nojalla

$$\mathcal{L}(u) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathcal{L}(u_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{L}(u_i) = 0. \quad \square$$

## 2.2 Aaltoyhtälö värähtelevälle soittimen kielelle

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt liittyvät usein johonkin fysikaaliseen ilmiöön. Kirjallisuudessa eräs tyypillisimmistä esimerkeistä tällaisesta ilmiöstä on kieli-soittimen kielen värähtely. Jotta päästäisiin käsittelemään asiaa matemaattisesti, ajatellaan, että kieli sijaitsee  $xy$ -tasossa ja että kieli on alkutilassa pingotettu kahden  $x$ -akselin pisteen välille. Kun kieli poikkeutetaan tasapainoasemastaan ja päästetään vapaaksi, kieli jää värähtelemään.

Kun tarkoituksena on muodostaa kielen poikkeamaa tasapainoasemasta kohdassa  $x$  ajanhetkellä  $t$  kuvaava funktio  $u(x, t)$ , päädytään tilannetta riittävästi yksinkertaistavien oletusten jälkeen siihen, että halutun funktion tulee toteuttaa *yksiulotteinen aaltoyhtälö*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \quad (2.2)$$

Jos lisäksi tiedetään riittävästi alkutilanteesta, on funktio  $u(x, t)$  mahdollista ratkaista.

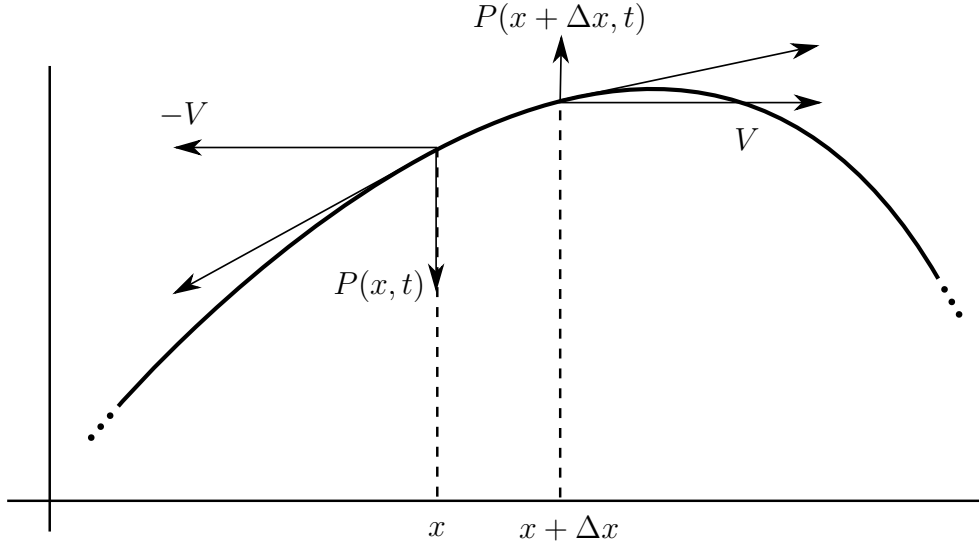
Käydään esimerkin vuoksi läpi, kuinka edellä olevaan aaltoyhtälöön päädytään. Johdetaan yhtälö samaan tapaan kuin on tehty kirjassa [4]. Kuten mainittu, ensin on tehtävä joitain tilannetta yksinkertaistavia oletuksia:

1. Kieleen ei vaikuta ulkoisia voimia, kuten esimerkiksi painovoimaa.
2. Kieli on niin taipuisa, että taipumisesta aiheutuvaa taipumismomenttia ei tarvitse huomioida. Ainoa kieleen vaikuttava voima muualla kuin kiinnityspisteissä on siis kielen venymisestä johtuva jännitysvoima.
3. Kielessä ei tapahdu sivusuuntaista liikettä. Näin ollen jännitysvoiman vaakakomponentti  $V$  on vakio.

Tarkastellaan kielenpätkää, jonka projektiio  $x$ -akselille on pisteiden  $(x, 0)$  ja  $(x + \Delta x, 0)$  välillä (Kuva 1). Kielenpätkään kohdistuvat ulkoiset voimat ovat nyt pätkän reunoihin kohdistuvat vetävät jännitysvoimat, joista riittää tarkastella vain pystykomponentteja  $P(x, t)$  ja  $P(x + \Delta x, t)$ , koska vaakakomponentit kumoavat vastakkaisuuntaisina toisensa.

Kielenpätkän vasemman reunan kulmakerroin ajanhetkellä  $t$  on

$$-\frac{P(x, t)}{V} = u_x(x, t),$$



**Kuva 1:** Tasapainoasemasta poikkeutetun soittimen kielen osa.

kun taas oikean reunan kulmakerroin on

$$\frac{P(x + \Delta x, t)}{V} = u_x(x + \Delta x, t).$$

Newtonin toisen lain mukaan kappaleeseen vaikuttava voima on yhtä kuin kappaleen massa kerrottuna kappaleen kiihtyvyydellä. Kiihtyvyys saadaan derivoimalla paikkafunktiota kahdesti aikamuuttujan suhteen, joten kiihtyvyys kielenpätkän vasemmassa reunassa hetkellä  $t$  on  $u_{tt}(x, t)$ . Näin ollen, kun  $\Delta x$  on pieni, saadaan approksimaatio

$$\begin{aligned} \delta \Delta x u_{tt}(x, t) &\approx P(x, t) + P(x + \Delta x, t) \\ &= V u_x(x + \Delta x, t) - V u_x(x, t), \end{aligned}$$

missä  $\delta$  on kielen massa pituusyksikköä kohden tasapainoasemassa. Kun  $\Delta x \rightarrow 0$ , niin saatu approksimaatio tarkentuu kohti tarkkaa arvoa, joten

$$u_{tt}(x, t) = \frac{V}{\delta} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} = \frac{V}{\delta} u_{xx}(x, t).$$

Merkitsemällä  $c = \sqrt{V/\delta}$  päästään muotoa (2.2) olevaan yhtälöön.

### 2.3 Alku- ja reuna-arvo-ongelmat

Tarkastellaan värähtelevän kielen tapausta esimerkkinä alku- ja reuna-arvo-ongelmasta. Ajatellaan, että kieli on pingotettu  $x$ -akselille pisteiden 0 ja  $l$

välille ja että kielen alkusijainti ja alkunopeus tunnetaan. Tällöin ongelma voidaan esittää muodossa

$$\left\{ \begin{array}{lll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, & t > 0, & (2.3) \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l, & & (2.4) \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, & & (2.5) \\ u(0, t) = 0, & & t \geq 0, & (2.6) \\ u(l, t) = 0, & & t \geq 0, & (2.7) \end{array} \right.$$

missä  $f$  kuvaa kielen alkusijaintia ja  $g$  alkunopeutta.

Yhtälöiden (2.4) ja (2.5) kaltaisia, tilannetta tietyllä ajanhetkellä kuvaavia ehtoja kutsutaan *alkuehdoiksi*. Osittaisdifferentiaaliyhtälöä, johon on liitetty alku-ehdot, kutsutaan *alkuarvo-ongelmaksi*.

Yhtälöt (2.6) ja (2.7) ovat puolestaan esimerkkejä *reunaehdoista*, jotka kuvaavat tilannetta tarkasteltavan alueen reunoilla. Tässä esimerkissä näiden yhtälöiden merkitys on kielen paikallaan pitäminen kielen päätepisteissä. Osittaisdifferentiaaliyhtälöä, johon on liitetty reunaehdot, kutsutaan *reuna-arvo-ongelmaksi*.

On vielä huomiotava alku- ja reunaehtojen yhteensopivuus. Jotta nämä ehdot eivät olisi keskenään ristiriidassa, on vaadittava, että  $f(0) = f(l) = g(0) = g(l) = 0$ . Lisäksi funktion  $f$  tulee olla jatkuva, koska soittimen kieli on yhtenäinen kappale. Funktion  $g$  epäjatkuvuus olisi puolestaan ristiriidassa mekaniikan lakien kanssa, joten myös funktion  $g$  tulee olla jatkuva.

## 2.4 Muuttujien separointimenetelmä

Etsitään seuraavaksi ratkaisu Luvussa 2.3 esitettyyn värähtelevän kielen ongelmaan noudattaen kirjassa [5, s. 140] esitettyä menetelmää. Oletetaan ensin, että ratkaisu on muotoa

$$u(x, t) = X(x)T(t),$$

missä  $X$  ja  $T$  eivät ole nollafunktioita. Koska ratkaisun tulee toteuttaa yhtälö (2.3), päästään yhtälöön

$$X(x)T''(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0.$$

Tähän yhtälöön voidaan tehdä *muuttujien separointi* jakamalla se esimerkiksi termillä  $c^2 X(x)T(t)$  ja siirtämällä saadusta yhtälöstä muuttujan  $x$  sisältävä termi toiselle puolelle. Näin menetelmällä päästään muotoon

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)},$$



missä muuttujat  $x$  ja  $t$  esiintyvät siis eri puolilla yhtälöä. Kun nyt kiinnitetään muuttujan  $t$  arvo, nähdään, että yhtälön vasen puoli saa vakioarvon riippumatta muuttujan  $x$  arvosta. Samoin jos kiinnitetään muuttujan  $x$  arvo, niin yhtälön oikea puoli saa vakioarvon riippumatta muuttujan  $t$  arvosta. Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda,$$

missä  $\lambda \in \mathbb{R}$  on vakio. Tällä tavoin osittaisdifferentiaaliyhtälö (2.3) on saatu muutettua kahdeksi tavalliseksi differentiaaliyhtälöksi:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, & (2.8) \\ T'' - \lambda c^2 T = 0. & (2.9) \end{cases}$$

Funktioon  $X$  kohdistuu lisäksi vaatimuksia, jotka ovat peräisin reunaehdoista. Reunaehdon (2.6) nojalla  $X(0)T(t) = 0$ , josta voidaan päätellä, että  $X(0) = 0$ , sillä  $T(t) \neq 0$  jollakin  $t \geq 0$ . Vastaavasti reunaehdosta (2.7) seuraa, että  $X(l) = 0$ .

Yhtälöt (2.8) ja (2.9) ovat vakiokertoimisia, lineaarisia ja homogeenisia toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä, joihin tyydytään käyttämään valmiita ratkaisukaavoja. Perustelut näille kaavoille löytyvät useimmista lineaarisista differentiaaliyhtälöistä käsittelevistä perusteoksista.

Yhtälön (2.8) ratkaisun muoto riippuu vakiosta  $\lambda$ . Mikäli  $\lambda > 0$ , yleinen ratkaisu on muotoa

$$X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x},$$

missä  $A$  ja  $B$  ovat reaalisia vakioita. Yhtälöistä  $X(0) = 0$  ja  $X(l) = 0$  seuraa, että

$$\begin{cases} A + B = 0, & (2.10) \\ Ae^{-\sqrt{\lambda}l} + Be^{\sqrt{\lambda}l} = 0, & (2.11) \end{cases}$$

mikä on totta vain jos  $A = B = 0$ . On siis päädytty triviaaliin ratkaisuun. Jos taas  $\lambda = 0$ , on yleinen ratkaisu muotoa

$$X(x) = Ax + B.$$

Myös tässä tapauksessa ehdot  $X(0) = 0$  ja  $X(l) = 0$  johtavat siihen, että  $A = B = 0$ .

On vielä tarkasteltava tapaus  $\lambda < 0$ , joka osoittautuu hyödyllisimmäksi, sillä ratkaisu on muista tapauksista poiketen epätriviaali. Tässä tapauksessa ratkaisun muoto on

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Ehdosta  $X(0) = 0$  seuraa, että  $A = 0$ . Ehdon  $X(l) = 0$  seurauksena saadaan puolestaan yhtälö

$$B \sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0.$$

Mikäli  $B \neq 0$ , päädytään epätriviaaliin ratkaisuun. Tällöin  $\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$ , joten

$$\sqrt{-\lambda}l = n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Yhtälö  $\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0$  on siis voimassa, jos  $\lambda$  saa jonkin arvoista  $\lambda_n$ , missä

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Näin ollen yhtälön (2.8) ratkaisuiksi reunaehdot huomioiden on saatu funktiot

$$\begin{aligned} X_n(x) &= B_n \sin(\sqrt{-\lambda_n}x) \\ &= B_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

missä kertoimet  $B_n$  ovat vakioita.

Yhtälöön (2.9) liittyy sama arvo  $\lambda$  kuin yhtälöön (2.8), joten yhtälöä (2.9) on tarkasteltava arvoilla  $\lambda = \lambda_n$ . Koska  $\lambda_n c^2 < 0$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , niin ratkaisut ovat muotoa

$$\begin{aligned} T_n(t) &= C_n \cos(\sqrt{-\lambda_n c^2}t) + D_n \sin(\sqrt{-\lambda_n c^2}t) \\ &= C_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + D_n \sin \frac{n\pi ct}{l}, \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

missä kertoimet  $C_n$  ja  $D_n$  ovat vakioita kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

Merkitsemällä  $a_n = B_n C_n$  ja  $b_n = B_n D_n$ , saadaan ratkaisut

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(x) = \left(a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l}\right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

jotka toteuttavat yhtälöt (2.3), (2.6) ja (2.7).

Tähän asti ei ole vielä ollenkaan tarkasteltu alkuehtoja (2.4) ja (2.5). On helposti nähtävissä, että mikään ratkaisusta  $u_n$  ei toteuta näitä alkuehtoja elleivät  $f(x)$  ja  $g(x)$  ole juuri sopivasti valittuja sinifunktioita. Jotta saataisiin muodostettua alkuehdot toteuttava ratkaisu, muodostetaan uusi yleisempi ratkaisu käyttämällä apuna lausetta 2.1.2. Lauseen käyttäminen on mahdollista, sillä yhtälöt (2.3), (2.6) ja (2.7) ovat kukin esitettävissä sopivasti

määritellyn lineaarisen operaattorin avulla muodossa  $\mathcal{L}(u) = 0$ . Lauseen käyttämiseksi on myös oletettava, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

suppenee ja on kahdesti derivoituva muuttujien  $x$  ja  $t$  suhteen. Nämä oletukset on tehtävä, sillä tässä vaiheessa ei vielä tunneta kertoimia  $a_n$  ja  $b_n$ , mikä tekee sarjan analysoimisen mahdottomaksi. Suppenemis- ja derivoitumiskäytännön palataan myöhemmin Luvussa 3.7.

Lauseen 2.1.2 nojalla saadaan siis uusi yhtälöt (2.3), (2.6) ja (2.7) toteuttava ratkaisu summaamalla aikaisemmin saadut ratkaisut yhteen. Ratkaisuksi saadaan

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Alkuehdon (2.5) käsittelemiseksi on tarpeen derivoida sarja (2.12) muuttujan  $t$  suhteen. Derivoinnin tuloksena saadaan

$$u_t(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} \left( -a_n \sin \frac{n\pi ct}{l} + b_n \cos \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Alkuehtojen (2.4) ja (2.5) nojalla

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.13)$$

ja

$$u_t(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{l} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Nyt on enää jäljellä selvittää voidaanko löytää sopivat kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  siten, että saadut sinitermit sarjat esittävät funktioita  $f$  ja  $g$ . Tähän kysymykseen löytyy vastaus Fourier-sarjojen teoriasta, jota käsitellään luvuissa 3 ja 4.

## 2.5 Lämmön johtuminen eristetyssä kappaleessa

Otetaan tarkasteluun materiaaliltaan homogeeninen tanko, jonka pinta on täysin eristetty. Sijoitetaan tanko  $x$ -akselille pisteiden 0 ja  $l$  välille ja oletetaan, että tangon lämpötila on vakio  $x$ -akselia vastaan kohtisuorassa olevissa

suunnissa. Näin ollen lämmön johtuminen tangossa tapahtuu vain  $x$ -akselin suunnassa lämpimämmästä kohdasta kylmempään.

Ongelmana on ratkaista funktio  $u(x, t)$ , joka kuvaa tangon lämpötilaa paikassa  $x$  ajanhetkellä  $t$ , kun tangon lämpötilajakauma on tiedossa alkuhetkellä. Koska lämmön johtuminen tapahtuu siis vain  $x$ -akselin suunnassa, riittää lämmön johtumista kuvaamaan yksiulotteinen lämpöyhtälö

$$u_t = k u_{xx}.$$

Tämän yhtälön johtamista ei tässä tutkielmassa tehdä, mutta sen voi löytää esimerkiksi kirjasta [4, ss. 10-12]. Yhtälössä esiintyvä vakiokerroin  $k$  kuvaa materiaalin lämmönjohtavuutta.

Edellä kuvailtua tilannetta vastaa muotoa

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, & 0 \leq x \leq l, & t > 0, & (2.14) \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq l, & & (2.15) \\ u_x(0, t) = 0, & & t \geq 0, & (2.16) \\ u_x(l, t) = 0, & & t \geq 0 & (2.17) \end{cases}$$

oleva alku- ja reuna-arvo-ongelma. Alkuehto (2.15) määrää tangon lämpötilan alkuhetkellä. Reunaehdot (2.16) ja (2.17) puolestaan takaavat, että myös tangon päädyt ovat eristetty. Tämä on perusteltavissa *Fourier'in lain* avulla, jonka mukaan lämpövuoto  $q$  toteuttaa yhtälön

$$q = k u_x.$$

Lämpövuoto on suure, joka kuvaa lämmön siirtymisen määrää tarkasteltavan pinnan läpi ( $\text{W}/\text{m}^2$ ), joten eristetyissä kohdissa pätee  $u_x = 0$ .

Kuten Luvussa 2.4, yritetään etsiä ratkaisuja, jotka ovat muotoa

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Yhtälön (2.14) nojalla

$$X(x)T'(t) - kX''(x)T(t) = 0.$$

Tekemällä tähän yhtälöön muuttujien separointi, voidaan kirjoittaa

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = \lambda,$$

missä  $\lambda$  on vakio. Tästä yhtälöketjusta saadaan muodostettua taas kaksi tavallista differentiaaliyhtälöä:

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0, \\ T' - \lambda k T = 0. \end{cases}$$

Funktioon  $X$  liittyvä yhtälö on sama kuin Luvussa 2.4, mutta koska reunaehdot ovat erilaiset kuin viimeksi, tulee ratkaisut etsiä uudelleen. Tapaus  $\lambda > 0$  on kuitenkin hyvin samankaltainen kuin viimeksi ja sen ainut ratkaisu onkin triviaalitapaus.

Tapauksessa  $\lambda = 0$  haetaan taas ratkaisua, joka on muotoa

$$X(x) = Ax + B.$$

Reunaehdosta (2.16) ja (2.17) on pääteltävissä, että  $X'(0) = X'(l) = 0$ , josta seuraa, että  $A = 0$ . Reunaehdot eivät rajoita millään tavalla vakiota  $B$ , joten funktion  $X$  ratkaisuina ovat tässä tapauksessa vakioarvot.

Jäljellä on vielä tapaus  $\lambda < 0$ , jolloin yleinen ratkaisu on muotoa

$$X(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda}x) + B \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Tämän derivaataksi saadaan

$$X'(x) = -A\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x).$$

Ehdosta  $X'(0) = 0$  seuraa, että  $B = 0$ . Mikäli vaaditaan, että  $A \neq 0$ , niin ehdon  $X'(l) = 0$  seurauksena

$$\sin(\sqrt{-\lambda}l) = 0,$$

jolloin päädytään taas arvoihin

$$\lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

ja saadaan ratkaisut

$$X_n(x) = A_n \cos(\sqrt{-\lambda_n}x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Funktioon  $T$  liittyvä differentiaaliyhtälö on puolestaan separoituva ja sen ratkaisuksi saadaan

$$T(t) = C \exp(k\lambda t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lukuja  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , vastaa ratkaisut

$$T_n(t) = C_n \exp\left(-k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

joten merkitsemällä  $a_n = A_n C_n$  saadaan ratkaisut

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(x) = a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp\left(-k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right),$$

jotka toteuttavat yhtälöt (2.14), (2.16) ja (2.17). Näiden ratkaisujen lisäksi on olemassa vielä vakioratkaisu, joka muodostuu arvolla  $\lambda = 0$ . Käytetään tästä vakiosta merkintää  $a_0/2$ . Yhdistetään sitten saadut ratkaisut Lauseen 2.1.2 avulla, jolloin saadaan yleisempi ratkaisu

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp\left(-k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t\right).$$

Jotta tämä ratkaisu olisi paikkansapitävä, on oletettava, että saatu sarja supenee ja on kerran derivoituva muuttujan  $t$  suhteen ja kahdesti derivoituva muuttujan  $x$  suhteen. Näiden oletusten paikkansapitävyyttä tarkastellaan Luvussa 3.7.

Alkuehdon (2.15) nojalla

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (2.18)$$

Näin päädyttiin samankaltaiseen ongelmaan kuin Luvussa 2.4. On selvitetävä voidaanko funktio  $f$  esittää edellä olevassa sarjamuodossa.

### 3 Fourier'n sarjat

Edellisessä luvussa ilmenneitä sarjaesitysmuotoja (2.13) ja (2.18) kutsutaan sini- ja kosinitermisiksi Fourier-sarjoiksi. Ennen näihin sarjoihin paneutumista tutkitaan Fourier-sarjaa, jossa on sekä sini- että kosinitermejä.

Luvun alussa määritetään Fourier-sarjalle sopivat kertoimet. Tämän jälkeen keskitytään tutkimaan Fourier-sarjan pisteittäistä suppenemistä. Luvun lopuksi palataan käsittelemään Luvussa 2 ilmenneitä sarjojen suppenemis- ja derivoituvuuskysymyksiä.

#### 3.1 Fourier-sarja

Tavoitteena on esittää välillä  $(-l, l)$  määritelty funktio  $f$  muodossa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (3.1)$$

Aloitetaan esittämällä lemma, jota tarvitaan kerrointen  $a_n$  ja  $b_n$  määrittämiseksi.

**Lemma 3.1.1.** *Olkoot  $m$  ja  $n$  positiivisia kokonaislukuja ja olkoon  $l > 0$  reaalityyppi. Tällöin*

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } m \neq n, \\ l, & \text{jos } m = n, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & \text{jos } m \neq n, \\ l, & \text{jos } m = n, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 0, \quad (3.4)$$

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad (3.6)$$

*Todistus.* Käytetään apuna trigonometrista kaavaa

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \cos(x - y) - \frac{1}{2} \cos(x + y)$$

tuloksen (3.2) todistamiseksi, jolloin saadaan

$$\int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{(n - m)\pi x}{l} dx - \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{(n + m)\pi x}{l} dx.$$

Jos  $n = m$ , niin yhtälön oikea puoli sievenee muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-l}^l 1 dx - \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{2m\pi x}{l} dx &= l - \frac{1}{2} \frac{l}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi x}{l} \Big|_{-l}^l \\ &= l. \end{aligned}$$

Jos taas  $n \neq m$ , niin yhtälön oikean puolen määrättyt integraalit häviävät samaan tapaan kuin tapauksen  $n = m$  jälkimmäinen määrätty integraali.

Kohdan (3.3) todistamisessa käytetään puolestaan apuna kaavaa

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} \cos(x + y) + \frac{1}{2} \cos(x - y),$$

jolloin saadaan

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{(n + m)\pi x}{l} dx + \frac{1}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{(n - m)\pi x}{l} dx.$$

Tästä on helposti nähtävissä, että lopputulos on sama kuin kohdan (3.2) todistuksessa.

Seuraavassa kohdassa käytetään kaavaa

$$\cos x \sin y = \frac{1}{2} \sin(x + y) - \frac{1}{2} \sin(x - y),$$

jonka nojalla saadaan

$$\int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} dx - \frac{1}{2} \int_{-l}^l \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} dx.$$

Tämän yhtälön oikean puolen molemmat integraalit ovat muotoa

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

missä  $k \in \mathbb{Z}$ . Jos  $k = 0$ , niin

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \int_{-l}^l \sin 0 dx = 0.$$

Jos taas  $k \neq 0$ , niin

$$\int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l = 0,$$

sillä  $\cos x = \cos(-x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Näin ollen yhtälö (3.4) pitää paikkansa.

Kohdat (3.5) ja (3.6) on helppo todistaa suoralla integroinnilla, joten niiden käsitteleminen ohitetaan.  $\square$

*Huomautus 3.1.2.* Lemman 3.1.1 todistuksessa käytetyt trigonometriset kaavat voidaan johtaa käyttämällä sinin ja kosinin summakaavoja

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

ja

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y. \quad (3.7)$$

Kukin kaava saadaan laskemalla kaksi sopivasti valittua summakaavaa puolitain yhteen. Summakaavat saadaan puolestaan Eulerin kaavan avulla kirjoittamalla

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) + i \sin(x \pm y) &= e^{i(x \pm y)} \\ &= e^{ix} e^{\pm iy} \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y \pm i \sin y) \\ &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y + i(\sin x \cos y \pm \cos x \sin y) \end{aligned}$$

ja asettamalla alku- ja lopputilanteen reaali- ja imaginaariosat yhtäsuuriksi.



Nyt voidaan ryhtyä etsimään sopivia kertoimia yhtälöön (3.1). Lähdetään liikkeelle oletuksesta, että funktio  $f$  voidaan esittää muodossa (3.1) ja oletetaan lisäksi, että  $f$  on integroituva. Integroidaan yhtälö (3.1) puolittain ja käytetään kaavoja (3.5) ja (3.6), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) dx &= \int_{-l}^l \frac{a_0}{2} dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ &= l a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx + b_n \int_{-l}^l \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \\ &= l a_0, \end{aligned}$$

joten

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx.$$

Edellä tehdyn äärettömän sarjan termeittäin integroinnin oikeellisuutta ei tarkasteta, sillä sopivien kerroinehdokkaiden löydyttyä riittää tarkastella mielenkiinnon kohteena olevaa ongelmaa, eli sitä, että suppeneeko sarja (3.1) saaduilla kerrointen arvoilla kohti funktiota  $f$ .

Kerrotaan seuraavaksi yhtälön (3.1) molemmat puolet termillä  $\cos(m\pi x/l)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , ja integroidaan saatu yhtälö puolittain. Kun käytetään lisäksi apuna Lemmaa 3.1.1, saadaan

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \int_{-l}^l \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \cos \frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^l a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx + \int_{-l}^l b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx \right) \\ &= l a_m, \end{aligned}$$

joten

$$a_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{m\pi x}{l} dx.$$

Kertoimet  $b_n$  saadaan määritettyä samaan tapaan. Erona on vain se, että tällä kertaa on lähdettävä liikkeelle kertomalla yhtälön (3.1) molemmat

puolet termillä  $\sin(m\pi x/l)$ . On helppo nähdä, että vastaavalla menettelyllä kuin edellä päädytään kerrointen arvoihin

$$b_m = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx.$$

**Määritelmä 3.1.3.** Sarjaa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \quad (3.8)$$

kutsutaan funktion  $f$  *Fourier-sarjaksi* välillä  $(-l, l)$ , mikäli kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  ovat yhtälöiden

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ja

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mukaiset.

Fourier-sarjan vakiotermin esittäminen muodossa  $a_0/2$  mahdollistaa kertoimen  $a_0$  määrittämisen samalla kaavalla kuin millä kertoimet  $a_n, n \in \mathbb{N}$  on määritelty.

Ennen kuin siirrytään tutkimaan Fourier-sarjan suppenemista, on esitettävä joitain tarvittavia määritelmiä ja niihin liittyviä tuloksia.

## 3.2 Jaksolliset funktiot

**Määritelmä 3.2.1.** Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio ja olkoon  $p > 0$ . Jos kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  pätee

$$f(x + p) = f(x),$$

niin funktion  $f$  sanotaan olevan *jaksollinen funktio* ja lukua  $p$  sanotaan funktion  $f$  *jaksoksi*. Funktiota, joka on jaksollinen jaksonaan  $p$ , voidaan kutsua lyhyemmin *p-jaksolliseksi funktioksi*.

Jaksollisuus liittyy vahvasti Fourier-sarjoihin, sillä esimerkiksi

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi(x+2l)}{l} + b_n \sin \frac{n\pi(x+2l)}{l} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \left[ \frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \right] + b_n \sin \left[ \frac{n\pi x}{l} + 2n\pi \right] \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \end{aligned}$$

joten  $2l$  on Määritelmän 3.1.3 Fourier-sarjan jakso.

Jatkossa tullaan tarvitsemaan seuraavaa jaksollisten funktioiden integraaleihin liittyvää tulosta:

**Lause 3.2.2.** *Olkoon  $p$  integroituvan funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jakso. Tällöin integraalin*

$$\int_a^{a+p} f(x) \, dx$$

*arvo ei riipu luvusta  $a \in \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Olkoot  $a, b \in \mathbb{R}$  siten, että  $b > a$ . Olkoon lisäksi  $s = b - a - np$ , missä  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  on valittu siten, että  $0 \leq s < p$ . Funktion  $f$  jaksollisuuden nojalla  $f(x) = f(x + np) = f(x + (n+1)p)$ , joten

$$\begin{aligned} \int_a^{a+p} f(x) \, dx &= \int_a^{a+s} f(x) \, dx + \int_{a+s}^{a+p} f(x) \, dx \\ &= \int_a^{a+s} f(x + (n+1)p) \, dx + \int_{a+s}^{a+p} f(x + np) \, dx \\ &= \int_{a+(n+1)p}^{a+s+(n+1)p} f(x) \, dx + \int_{a+s+np}^{a+(n+1)p} f(x) \, dx \\ &= \int_{b+p-s}^{b+p} f(x) \, dx + \int_b^{b+p-s} f(x) \, dx \\ &= \int_b^{b+p} f(x) \, dx. \quad \square \end{aligned}$$

### 3.3 Toispuoleiset raja-arvot ja derivaatat

Toispuoleisten raja-arvojen ja derivaattojen merkintätavoissa on otettu vaikutteita kirjasta [4].

**Määritelmä 3.3.1.** Funktiolla  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on *vasemmanpuoleinen raja-arvo*  $a$  pisteessä  $x_0$ , mikäli jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa  $\delta > 0$  siten, että kaikilla  $x < x_0$  pätee

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \text{ kun } x_0 - x < \delta.$$

Jos kyseinen raja-arvo on olemassa, siitä käytetään merkintöjä

$$f(x_0 -) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} f(x_0 + h) = a.$$

Funktiolla  $f$  on vastaavasti *oikeanpuoleinen raja-arvo*  $a$  pisteessä  $x_0$ , mikäli jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa  $\delta > 0$  siten, että kaikilla  $x > x_0$  pätee

$$|f(x) - a| < \varepsilon, \text{ kun } x - x_0 < \delta.$$

Tästä raja-arvosta käytetään puolestaan merkintöjä

$$f(x_0 +) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} f(x_0 + h) = a.$$

**Määritelmä 3.3.2.** Olkoon  $f$  funktio, jolla on olemassa vasemmanpuoleinen raja-arvo  $f(x_0 -)$ . Olkoon lisäksi funktio  $g$  määritelty lausekkeella

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0 -)}{x - x_0}.$$

Mikäli funktiolla  $g$  on vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä  $x_0$ , niin kyseistä raja-arvoa kutsutaan funktion  $f$  *vasemmanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä  $x_0$  ja tästä derivaatasta käytetään merkintää  $f'_-(x_0)$ . Tälle derivaatalle pätee

$$f'_-(x_0) = g(x_0 -) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} g(x_0 + h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 -)}{h}.$$

Olkoon sitten  $f$  funktio, jolla on olemassa oikeanpuoleinen raja-arvo  $f(x_0 +)$  ja olkoon

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0 +)}{x - x_0}.$$

Mikäli funktiolla  $g$  on oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä  $x_0$ , niin kyseistä raja-arvoa kutsutaan funktion  $f$  *oikeanpuoleiseksi derivaataksi* pisteessä  $x_0$  ja tästä derivaatasta käytetään puolestaan merkintää  $f'_+(x_0)$ . Siispä

$$f'_+(x_0) = g(x_0 +) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} g(x_0 + h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 +)}{h}.$$

### 3.4 Paloittain jatkuvat funktiot

Tähän mennessä ei ole vielä juurikaan kiinnitetty huomiota siihen, millaisille funktioille Fourier-sarjaesitys voidaan muodostaa. Ainut vaatimus, joka on jo ilmennyt, on funktion integroituvuus. Koska integroitava funktio voi sisältää epäjatkuaikoja, ei ole syytä vaatia funktiolta jatkuvuutta. Tästä syystä asetetaan seuraava määritelmä:

**Määritelmä 3.4.1.** Olkoon  $f$  reaalfunktio, joka on jatkuva avoimella välillä  $(a, b)$  lukuun ottamatta mahdollista äärellistä määrää pisteitä  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , joissa  $f$  ei ole jatkuva. Mikäli toispuoleiset raja-arvot

$$f(a+), f(x_1-), f(x_1, +), \dots, f(x_n-), f(x_n, +), f(b, -)$$

ovat olemassa, sanotaan funktion  $f$  olevan *paloittain jatkuva* välillä  $(a, b)$ .

Määritelmästä on nähtävissä, että kahden paloittain jatkuvan funktion tulo on paloittain jatkuva, sillä epäjatkuvuus pisteiden määrä säilyy äärellisenä. Oletetaan sitten, että määritelmän pisteet  $x_1, \dots, x_n$  ovat nimetty siten, että  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ . Tällöin funktio  $f$  on jatkuva jokaisella välillä  $(a, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_n, b)$ , joten paloittain jatkuvan funktion integraali yli välin  $(a, b)$  voidaan laskea seuraavasti:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x) dx. \quad (3.9)$$

Luvussa 3.6 käsiteltävä Fourier'n lause antaa vastauksen siihen, milloin Fourier-sarja suppenee pisteittäin kohti funktiota, josta sarja on muodostettu. Fourier'n lauseen todistus ja todistukseen tarvittavat aputulokset tullaan antamaan kutakuinkin kirjan [4] esittämällä tavalla. Aloitetaan todistukseen johtavien tulosten käsittely seuraavalla lemmalla:

**Lemma 3.4.2.** *Olkoon  $f$  paloittain jatkuva funktio välillä  $(c, d)$ . Tällöin*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_c^d f(x) \sin(rx) dx = 0.$$

*Todistus.* Myös sinifunktio on paloittain jatkuva välillä  $(c, d)$ , joten integrandi on paloittain jatkuva. Koska paloittain jatkuvan funktion integraali voidaan esittää kaavalla (3.9), riittää osoittaa, että

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(rx) dx = 0, \quad (3.10)$$

missä  $(a, b)$  on avoin väli, jossa  $f$  on jatkuva.

Tiedetään, että äärellisellä ja suljetulla välillä jatkuva funktio on myös tasaisesti jatkuva kyseisellä välillä [6, s. 3]. Nyt on tosin tarkasteltavana avoin väli  $(a, b)$ , jolle pätee tässä tapauksessa sama tulos seuraavan perustelun nojalla: Funktion  $f$  paloittaisesta jatkuvuudesta seuraa, että toispuoleiset raja-arvot  $f(a+)$  ja  $f(b-)$  ovat olemassa. Näin ollen voidaan määritellä funktio  $g$  siten, että

$$g(x) = \begin{cases} f(a+), & \text{kun } x = a, \\ f(x), & \text{kun } a < x < b, \\ f(b-), & \text{kun } x = b. \end{cases}$$

Funktio  $g$  on jatkuva suljetulla välillä  $[a, b]$ , josta seuraa tasainen jatkuvuus tällä välillä ja myös kaikilla tämän välin osaväleillä, kuten avoimella välillä  $(a, b)$ . Koska  $f(x) = g(x)$  välillä  $(a, b)$ , on myös  $f$  tasaisesti jatkuva tällä välillä.

Olkoon nyt  $\varepsilon_0 > 0$  ja olkoon

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}.$$

Funktion  $f$  tasaisesta jatkuvuudesta seuraa, että on olemassa  $\delta > 0$  siten, että kaikilla  $x, y \in (a, b)$ , joille on voimassa  $|x - y| < \delta$ , pätee epäyhtälö

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}. \quad (3.11)$$

Jotta todistuksen myöhemmässä vaiheessa päästäisiin käyttämään saatua epäyhtälöä, jaetaan väli  $(a, b)$  pienempiin tasapituisiin osaväleihin, joita on  $N$  kappaletta, ja vaaditaan, että  $N$  on niin suuri, että kunkin osavälin pituus  $(b-a)/N$  on pienempi kuin  $\delta$ . Käytetään välien jakopisteistä merkintöjä  $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_N = b$ , missä  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N$ . Nyt jakamalla tarkastelun kohteena oleva integraali usean integraalin summaksi ja lisäämällä sopivia vastakkaismerkkisiä termejä, päädytään arvioon

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin(rx) \, dx \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \sin(rx) \, dx \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} [f(x) - f(x_n)] \sin(rx) \, dx + \sum_{n=1}^N f(x_n) \int_{x_{n-1}}^{x_n} \sin(rx) \, dx \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N \int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - f(x_n)| |\sin(rx)| \, dx + \sum_{n=1}^N |f(x_n)| \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} \sin(rx) \, dx \right|. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Käyttämällä epäyhtälöä (3.11) ja huomioimalla, että  $|\sin(rx)| \leq 1$ , saadaan

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} |f(x) - f(x_n)| |\sin(rx)| dx < \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)} \frac{b-a}{N} = \frac{\varepsilon_0}{2N}$$

kaikilla  $n = 1, 2, \dots, N$ . Kohdistetaan sitten huomio epäyhtälön (3.12) jälkimmäiseen summalausekkeeseen. Sen integraaliosalle saadaan arvio

$$\left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} \sin(rx) dx \right| \leq \frac{|\cos(rx_n)| + |\cos(rx_{n-1})|}{r} \leq \frac{2}{r}$$

kaikilla  $n = 1, 2, \dots, N$ , kun  $r > 0$ .

Tiedetään, että äärellisellä suljetulla välillä jatkuva funktio on kyseisellä välillä myöskin rajoitettu. Tätä voidaan soveltaa myös avoimelle välille, sillä toispuoleisten raja-arvojen  $f(a+)$  ja  $f(b-)$  olemassaolosta seuraa samaan tapaan kuin tasaisen jatkuvuuden tapauksessa, että funktio  $f$  on rajoitettu avoimella välillä  $(a, b)$ . On siis olemassa  $M > 0$  siten, että  $|f(x)| \leq M$  kaikilla  $x \in (a, b)$ .

Epäyhtälöstä (3.12) seuraa nyt, että

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(rx) dx \right| < N \frac{\varepsilon_0}{2N} + NM \frac{2}{r} = \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{2MN}{r} < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

kun  $r > 4MN/\varepsilon_0$ . Näin ollen raja-arvo (3.10) on osoitettu todeksi.  $\square$

### 3.5 Dirichlet'n ydin

Fourier'n lauseen todistus tulee perustumaan merkittävilta osin seuraavaksi määriteltävän Dirichlet'n ytimen ominaisuuksiin.

**Määritelmä 3.5.1.** Olkoon  $m$  luonnollinen luku. Funktiota  $D_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$D_m(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos(nu), \quad (3.13)$$

kutsutaan *Dirichlet'n ytimeksi*.

**Lemma 3.5.2.** *Olkoon  $m$  luonnollinen luku. Tällöin*

$$\int_0^\pi D_m(u) du = \frac{\pi}{2}, \quad (3.14)$$

$$D_m(u) = \frac{\sin[(m + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)}, \quad u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad (3.15)$$

*Todistus.* Tulos (3.14) saadaan helposti integroimalla yhtälöä (3.13) puolittain. Kosinitermit muuttuvat integroinnissa sinitermeiksi, jotka häviävät kun  $u$  saa arvot 0 tai  $\pi$ . Näin ollen jäljelle jää vain vakiotermin integraali, joka saa arvon  $\pi/2$ .

Toisen kohdan todistamiseen tarvitaan kompleksianalyysin kaavoja

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

ja

$$\sum_{n=1}^m z^n = \frac{z(1-z^m)}{1-z} \quad (z \neq 1),$$

joista viimeinen saadaan seuraavasti:

$$\begin{aligned} z + z^2 + \dots + z^m &= z(1 + z + \dots + z^{m-1}) \\ \Leftrightarrow z &= \frac{z + z^2 + \dots + z^m}{1 + z + \dots + z^{m-1}} \\ \Leftrightarrow 1 - z &= \frac{1 + z + \dots + z^{m-1} - z - z^2 - \dots - z^m}{1 + z + \dots + z^{m-1}} = \frac{1 - z^m}{1 + z + \dots + z^{m-1}} \\ \Leftrightarrow z + z^2 + \dots + z^m &= \frac{z(1 - z^m)}{1 - z}, \quad z \neq 1. \end{aligned}$$

Näiden kaavojen avulla saadaan

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^m \cos(nu) &= \sum_{n=1}^m e^{inu} + \sum_{n=1}^m e^{-inu} \\ &= \sum_{n=1}^m (e^{iu})^n + \sum_{n=1}^m (e^{-iu})^n \\ &= \frac{e^{iu}(1 - e^{imu})}{1 - e^{iu}} + \frac{e^{-iu}(1 - e^{-imu})}{1 - e^{-iu}} \\ &= -\frac{e^{iu}(1 - e^{imu})}{e^{iu} - 1} \frac{e^{-iu/2}}{e^{-iu/2}} + \frac{e^{-iu}(1 - e^{-imu})}{1 - e^{-iu}} \frac{e^{iu/2}}{e^{iu/2}} \\ &= -\frac{e^{iu/2} - e^{i(m+\frac{1}{2})u}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} + \frac{e^{-iu/2} - e^{-i(m+\frac{1}{2})u}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} \\ &= \frac{-e^{iu/2} + e^{-iu/2} + e^{i(m+\frac{1}{2})u} - e^{-i(m+\frac{1}{2})u}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} \\ &= -1 + \frac{e^{i(m+\frac{1}{2})u} - e^{-i(m+\frac{1}{2})u}}{e^{iu/2} - e^{-iu/2}} \frac{1/2i}{1/2i} \\ &= -1 + \frac{\sin[(m + \frac{1}{2})u]}{\sin(u/2)}, \end{aligned}$$



kun  $u \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ . Näin ollen

$$D_m(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^m \cos(nu) = \frac{\sin[(m + \frac{1}{2})u]}{2 \sin(u/2)}. \quad \square$$

Kosinifunktion ominaisuuksista seuraa lisäksi, että Dirichlet'n ydin on  $2\pi$ -jaksollinen ja että  $D_m(u) = D_m(-u)$ .

**Lemma 3.5.3.** *Olkoon  $f$  paloittain jatkuva funktio välillä  $(0, \pi)$ . Mikäli oikeanpuoleinen derivaatta  $f'_+(0)$  on olemassa, niin*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(u) D_m(u) \, du = \frac{\pi}{2} f(0+).$$

*Todistus.* Todistuksen niksinä on se, että kaikilla  $m \in \mathbb{N}$  voidaan kirjoittaa

$$\int_0^\pi f(u) D_m(u) \, du = I_m + J_m,$$

missä

$$I_m = \int_0^\pi [f(u) - f(0+)] D_m(u) \, du \quad \text{ja} \quad J_m = f(0+) \int_0^\pi D_m(u) \, du.$$

Tällöin yhtälön (3.14) nojalla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m = \frac{\pi}{2} f(0+),$$

joten lemmän todistamiseksi riittää osoittaa, että

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m = 0.$$

Käyttämällä Dirichlet'n ytimen esitysmuotoa (3.15) voidaan kirjoittaa

$$I_m = \int_0^\pi \frac{f(u) - f(0+)}{2 \sin(u/2)} \sin[(m + \frac{1}{2})u] \, du,$$

joten Lemman 3.4.2 nojalla riittää enää osoittaa, että funktio

$$g(u) = \frac{f(u) - f(0+)}{2 \sin(u/2)}$$

on paloittain jatkuva välillä  $(0, \pi)$ . Koska  $g$  on määritelty osamääränä, jossa sekä osoittaja että nimittäjä ovat paloittain jatkuvia funktioita välillä  $(0, \pi)$ , riittää ainoastaan tarkastella funktion  $g$  käyttäytymistä nimittäjän

nollakohdassa  $u = 0$ . Jotta  $g$  olisi paloittain jatkuva, täytyy oikeanpuoleisen raja-arvon  $g(0+)$  olla olemassa. Kyseiseksi raja-arvoksi saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} g(0+h) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0+)}{1} \frac{1}{2 \sin(h/2)} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0+)}{h} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{h/2}{\sin(h/2)} \\ &= f'_+(0), \end{aligned}$$

sillä funktion  $x/\sin x$  raja-arvo pisteessä  $x = 0$  on tunnetusti 1. Derivaatan  $f'_+(0)$  olemassaolo takaa siis funktion  $g$  paloittaisen jatkuvuuden välillä  $(0, \pi)$  ja näin ollen lemma on todistettu.  $\square$

### 3.6 Fourier'n lause

Tässä aliluvussa todistetaan ensiksi pisteittäinen suppeneminen Fourier-sarjalle välillä  $(-\pi, \pi)$ , jonka jälkeen laajennetaan tulos koskemaan myös muita tyyppin  $(-l, l)$  välejä.

**Lause 3.6.1. (Fourier'n lause)** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, joka on  $2\pi$ -jaksollinen sekä paloittain jatkuva välillä  $(-\pi, \pi)$ . Tällöin funktion  $f$  Fourier-sarja välillä  $(-\pi, \pi)$  suppenee kohti arvoa*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$$

niissä pisteissä  $x \in \mathbb{R}$ , joissa toispuoleiset derivaatat  $f'_+(x)$  ja  $f'_-(x)$  ovat olemassa.

*Todistus.* Olkoon  $x \in \mathbb{R}$  piste, jossa toispuoleiset derivaatat  $f'_+(x)$  ja  $f'_-(x)$  ovat olemassa. Ensiksi huomataan, että Fourier-sarja välillä  $(-\pi, \pi)$  on esitysmuodoltaan hieman yksinkertaisempi kuin muilla väleillä. Se on nimittäin kirjoitettavissa muodossa

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ns) ds \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ns) ds.$$

Tämä voidaan yhdistää yhdeksi lausekkeeksi, jolloin saadaan esitys

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) [\cos(ns) \cos(nx) + \sin(ns) \sin(nx)] ds,$$

joka sievenee kosinin summakaavaa (3.7) käyttämällä muotoon

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos[n(s-x)] ds.$$

Olkoon sitten  $S_m(x)$  tämän sarjan  $m+1$  ensimmäisen termin osasumma. Tämä osasumma voidaan kirjoittaa käyttämällä Dirichlet'n ydintä muodossa

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos[n(s-x)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{n=1}^m \cos[n(s-x)] ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_m(s-x) ds, \end{aligned}$$

kun  $m \geq 1$ . Koska sekä funktion  $f$  että Dirichlet'n ytimen jaksona on  $2\pi$ , niin  $2\pi$  on myös viimeisimmän integrandin jakso. Näin ollen Lauseen 3.2.2 nojalla voidaan kirjoittaa

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s) D_m(s-x) ds.$$

Jaetaan sitten integraali kahteen osaan:

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} [I_m(x) + J_m(x)], \quad (3.16)$$

missä

$$I_m(x) = \int_{x-\pi}^x f(s) D_m(s-x) ds \quad \text{ja} \quad J_m(x) = \int_x^{x+\pi} f(s) D_m(s-x) ds.$$

Tekemällä nyt muuttujanvaihto  $u = x - s$ , saadaan

$$\begin{aligned} I_m(x) &= - \int_{\pi}^0 f(x-u) D_m(-u) du \\ &= \int_0^{\pi} f(x-u) D_m(u) du. \end{aligned}$$

Olkoon sitten  $F(u) = f(x - u)$ , jolloin

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{F(0 + h) - F(0 +)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(x - h) - f(x -)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{f(x + h) - f(x -)}{-h} = -f'_-(x). \end{aligned}$$

Funktion  $f$  jaksollisuudesta seuraa, että  $f$  on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä, joten sama pätee myös funktiolle  $F$ . Näin ollen voidaan käyttää Lemmaa 3.5.3, jonka nojalla

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_m(x) = \frac{\pi}{2} F(0 +) = \frac{\pi}{2} f(x -). \quad (3.17)$$

Tekemällä sitten muuttujanvaihto  $u = s - x$  integraaliin  $J_m$  päästään esitykseen

$$J_m(x) = \int_0^\pi f(x + u) D_m(u) du.$$

Määritellään  $F$  tällä kertaa yhtälöllä  $F(u) = f(x + u)$ , jolloin  $F(0 +) = f(x +)$  ja  $F'_+(0) = f'_+(x)$ . Käyttämällä taas Lemmaa 3.5.3 saadaan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_m(x) = \frac{\pi}{2} F(0 +) = \frac{\pi}{2} f(x +). \quad (3.18)$$

Kohtien (3.16), (3.17) ja (3.18) nojalla päästään haluttuun tulokseen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{1}{2} [f(x +) + f(x -)]. \quad \square$$

Fourier'n lauseessa esiintyvä termi  $\frac{1}{2} [f(x +) + f(x -)]$  on funktion  $f$  toispuoleisten raja-arvojen keskiarvo pisteessä  $x$ , ja mikäli  $f$  on jatkuva pisteessä  $x$ , on yhtälö

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x +) + f(x -)]$$

voimassa.

Vaikka Fourier'n lauseen oletuksissa vaaditaan funktion  $f$  olevan jaksollinen, niin lauseen tulos pätee silti pisteissä  $-\pi < x < \pi$  vaikka  $f$  ei olisi jaksollinen. Tämä on seurausta siitä, että Fourier-sarjan kerrointen määrittämiseen käytetään vain väliä  $(-\pi, \pi)$ .

**Seuraus 3.6.2.** *Olko  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, joka on  $2l$ -jaksollinen sekä paloittain jatkuva välillä  $(-l, l)$ . Tällöin funktion  $f$  Fourier-sarja välillä  $(-l, l)$  suppenee kohti arvoa*

$$\frac{1}{2} [f(x +) + f(x -)]$$

*niissä pisteissä  $x \in \mathbb{R}$ , joissa toispuoleiset derivaatat  $f'_+(x)$  ja  $f'_-(x)$  ovat olemassa.*

*Todistus.* Olkoot

$$s = \frac{\pi x}{l} \quad \text{ja} \quad F(s) = f\left(\frac{ls}{\pi}\right) = f(x). \quad (3.19)$$

Kun  $-l < x < l$ , niin  $-\pi < s < \pi$ . Näin ollen funktion  $f$  paloittaisesta jatkuvuudesta välillä  $(-l, l)$  seuraa, että funktio  $F$  on paloittain jatkuva välillä  $(-\pi, \pi)$ . Funktion  $f$  jaksollisuudesta seuraa puolestaan, että  $2\pi$  on funktion  $F$  jakso. Tämä nähdään kirjoittamalla

$$F(s + 2\pi) = f\left(\frac{ls}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{ls}{\pi}\right) = F(s).$$

Oletetaan sitten, että  $x$  on piste, jossa toispuoleiset derivaatat  $f'_+(x)$  ja  $f'_-(x)$  ovat olemassa. Tällöin voidaan osoittaa toispuoleisten derivaattojen määritelmiä käyttämällä, että

$$F'_+(s) = \frac{l}{\pi} f'_+(x) \quad \text{ja} \quad F'_-(s) = \frac{l}{\pi} f'_-(x).$$

Fourier'n lauseen kaikki vaatimukset täyttyvät funktion  $F$  osalta, joten

$$\frac{1}{2}[F(s+) + F(s-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(ns) + b_n \sin(ns)],$$

missä

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \cos(ns) \, ds \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(s) \sin(ns) \, ds.$$

Tämä saadaan muutettua yhtälöitä (3.19) käyttämällä muotoon

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

missä kertoimet ovat määrätty kuten Määritelmässä 3.1.3. □

### 3.7 Fourier-sarjan kerrointen ominaisuuksia

Seuraavaksi on tarkoitus osoittaa, että Fourier-sarjan kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  lähestyvät nollaa, kun  $n$  lähestyy ääretöntä. Tätä tietoa voidaan käyttää apuna, kun tutkitaan luvuissa 2.4 ja 2.5 ilmenneitä kysymyksiä liittyen sarjojen suppenemiseen ja derivoituvuuteen. Näiden asioiden käsittelyssä on otettu mallia kirjasta [7, ss. 30-31, 48-49].

**Lause 3.7.1.** Olkoon  $f$  paloittain jatkuva funktio välillä  $(-l, l)$ . Tällöin Fourier-sarjan (3.8) kertoimien neliöistä koostuvat sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$$

suppenevat.

*Todistus.* Aloitetaan todistus kirjoittamalla

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[ f(x) - \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right]^2 dx \quad (3.20)$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx \quad (3.21)$$

$$- \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) dx \quad (3.22)$$

$$+ \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[ \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \right]^2 dx. \quad (3.23)$$

Termi (3.22) sievenee Fourier-sarjan kertoimien määritelmien nojalla muotoon

$$\begin{aligned} -\frac{2}{l} \left[ \sum_{n=1}^N \left( a_n \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right) + \sum_{n=1}^N \left( b_n \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) \right] \\ = -2 \left[ \sum_{n=1}^N (a_n)^2 + \sum_{n=1}^N (b_n)^2 \right]. \end{aligned}$$

Termi (3.23) saadaan puolestaan Lemmaa 3.1.1 käyttämällä muotoon

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \int_{-l}^l \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \left( a_m \cos \frac{m\pi x}{l} + b_m \sin \frac{m\pi x}{l} \right) dx \\ = \sum_{n=1}^N (a_n)^2 + \sum_{n=1}^N (b_n)^2. \end{aligned}$$

Koska integraali (3.20) on ei-negatiivinen, saadaan epäyhtälö

$$0 \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx - \sum_{n=1}^N (a_n)^2 - \sum_{n=1}^N (b_n)^2.$$

Kun annetaan luvun  $N$  lähestyä ääretöntä, nähdään että sarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$$

on oltava suppenvia, jotta saatu epäyhtälö olisi voimassa.  $\square$

**Seuraus 3.7.2.** *Fourier-sarjan kertoimet  $a_n$  ja  $b_n$  lähestyvät nollaa, kun  $n$  lähestyy ääretöntä.*

*Todistus.* Sarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \quad \text{ja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n)^2$$

suppenemisestä seuraa, että

$$(a_n)^2 \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad (b_n)^2 \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty,$$

joten

$$a_n \rightarrow 0 \quad \text{ja} \quad b_n \rightarrow 0, \quad \text{kun } n \rightarrow \infty. \quad \square$$

Saadun tuloksen myötä voidaan alkaa käsitellä aiemmin ilmenneitä suppenemis- ja derivoituvuuskyymyksiä. Luvusta 2.5 jäi osoitettavaksi sarjan

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp \left( -k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \quad (3.24)$$

suppeneminen sekä derivoituvuus muuttujan  $t$  suhteen yhden kerran ja muuttujan  $x$  suhteen kahdesti.

Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Koska  $a_n \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , niin on olemassa  $C > 0$  siten, että  $|a_n| < C$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Näin ollen kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee

$$\left| a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp \left( -k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right| < C \exp \left( -k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \leq C e^{-\delta n^2}, \quad \text{kun } t \geq \varepsilon,$$

missä  $\delta = k\pi^2\varepsilon/l^2$ . Sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta n^2}$$

on suppeneva, joten Weierstrassin M-testin nojalla sarja (3.24) suppenee tasaisesti alueessa  $0 \leq x \leq l$ ,  $t \geq \varepsilon$ . Koska  $\varepsilon$  voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, on sarjan suppeneminen täten osoitettu ongelman kannalta riittävän laajalla alueella.

Kun sarjaa (3.24) derivoidaan termeittäin muuttujan  $t$  suhteen kerran tai muuttujan  $x$  suhteen kahdesti, ilmaantuu sarjaan kerroin  $n^2$ . Tämä ei haittaa vastaavankaltaisen päättelyn tekemistä kuin edellä, sillä myöskin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\delta n^2}$$

suppenee. Näin ollen Weierstrassin M-testin nojalla myöskin termeittäin derivoimalla saadut sarjat suppenevat tasaisesti alueessa  $0 \leq x \leq l, t > 0$ , mikä osoittaa sarjan 3.24 derivoitavuuden halutuilla tavoilla.

Luvussa 2.4 käsiteltyyn värähtelevän kielen ongelmaan saatiin ratkaisu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Tässä sarjassa ei ole eksponentiaalisesti pienentyvää kerrointa, mikä tekee sarjan derivoitavuuden analysoimisesta vaikeampaa kuin edellä. Kirjassa [7, ss. 51-52] suppeneminen ja derivoitavuus on saatu osoitettua tekemällä alkutilanteesta riittävät oletukset. Näitä oletuksia ovat kielen alkusijaintia kuvaavan funktion derivoitavuus kahteen kertaan sekä alkunopeutta kuvaavan funktion derivoitavuus.

## 4 Sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti sini- ja kosinitermisiä Fourier-sarjoja. Näiden sarjojen myötä saadaan varmistettua Luvussa 2 ilmenneiden sarjaesitysten pätevyys. Luvun lopussa jatketaan Luvussa 2.5 käsiteltyä lämmönjohtumisesimerkkiä, jonka yhteydessä pyritään havainnollistamaan Fourier-sarjojen toimintaa kuvien avulla.

### 4.1 Parilliset ja parittomat funktiot

Sini- ja kosinitermiset Fourier-sarjat saadaan johdettua tavallisesta Fourier-sarjasta, kun oletetaan, että funktio, josta Fourier-sarja muodostetaan on joko parillinen tai pariton.

**Määritelmä 4.1.1.** Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio. Mikäli  $f(x) = f(-x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , niin funktiota  $f$  sanotaan *parilliseksi funktioksi*. Jos taas  $f(x) = -f(-x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , niin funktioita  $f$  sanotaan *parittomaksi funktioksi*.

Määritelmää käyttäen on helposti osoitettavissa, että kahden parillisen funktion tulo on parillinen funktio. Parillinen funktio saadaan myös tuloksena



kahden parittoman funktion tulosta. Parittoman ja parillisen funktion tulo on puolestaan pariton funktio.

**Lemma 4.1.2.** *Olkoon  $l > 0$  ja olkoon  $f$  integroitava funktio välillä  $(-l, l)$ . Mikäli  $f$  on parillinen funktio, niin*

$$\int_{-l}^l f(x) \, dx = 2 \int_0^l f(x) \, dx.$$

*Jos taas  $f$  on pariton, niin*

$$\int_{-l}^l f(x) \, dx = 0.$$

*Todistus.* Kirjoitetaan ensiksi

$$\int_{-l}^l f(x) \, dx = \int_{-l}^0 f(x) \, dx + \int_0^l f(x) \, dx.$$

Tekemällä ensimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto  $s = -x$ , saadaan

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \, dx &= - \int_l^0 f(-s) \, ds + \int_0^l f(x) \, dx \\ &= \int_0^l f(-s) \, ds + \int_0^l f(x) \, dx \\ &= \begin{cases} \int_0^l f(s) \, ds + \int_0^l f(x) \, dx, & \text{jos } f \text{ on parillinen,} \\ - \int_0^l f(s) \, ds + \int_0^l f(x) \, dx, & \text{jos } f \text{ on pariton} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 \int_0^l f(x) \, dx, & \text{jos } f \text{ on parillinen,} \\ 0, & \text{jos } f \text{ on pariton.} \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

## 4.2 Sinitermiset Fourier-sarjat

Olkoon  $f$  pariton funktio. Funktion  $f$  Fourier-sarjan kertoimiksi saadaan Lemmaa 4.1.2 käyttämällä

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = 0$$

ja

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Näin ollen Fourier-sarjan kosinitermit sekä vakiotermit häviävät.

**Määritelmä 4.2.1.** Sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

kutsutaan funktion  $f$  *sinitermiseksi Fourier-sarjaksi* välillä  $(0, l)$ , mikäli kertoimet  $a_n$  ovat yhtälön

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

mukaiset.

Siniterminen Fourier-sarja saatiin siis erikoistapauksena tavallisesta Fourier-sarjasta, kun määrättiin Fourier-sarjan kertoimia parittomalle funktiolle. Näin ollen funktion  $f$  ollessa pariton,  $2l$ -jaksollinen ja paloittain jatkuva välillä  $(0, l)$  on Seurausta 3.6.2 vastaava pisteittäistä suppenemista koskeva tulos voimassa myös sinitermiselle Fourier-sarjalle. Mikäli tiedetään vain, että  $f$  on paloittain jatkuva välillä  $(0, l)$ , voidaan silti todeta suppenemista koskevan tuloksen olevan paikkansapitävä välillä  $(0, l)$ , sillä sinitermisen Fourier-sarjan kerrointen määrittämiseen käytetään vain väliä  $(0, l)$ .

### 4.3 Kosinitermiset Fourier-sarjat

Olkoon  $f$  parillinen funktio. Tällä kertaa funktion  $f$  Fourier-sarjan kertoimiksi saadaan

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

ja

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Näin ollen Fourier-sarjan sinitermit häviävät.

**Määritelmä 4.3.1.** Sarjaa

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}$$

kutsutaan funktion  $f$  *kosinitermiseksi Fourier-sarjaksi* välillä  $(0, l)$ , mikäli kertoimet  $a_n$  ovat yhtälön

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mukaiset.

Kosinitermiselle Fourier-sarjalle pätevät luonnollisesti vastaavat huomiot suppenemisesta kuin mitä sinitermiselle Fourier-sarjalle tehtiin.

#### 4.4 Jatkoa lämmönjohtumisesimerkkiin

Luvussa 2.5 tutkittiin lämmön johtumista eristetyssä tangossa. Tuolloin saatiin tangon lämpötilaa paikassa  $x$  ajanhetkellä  $t$  kuvaavaksi funktioksi

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \exp \left( -k \frac{n^2 \pi^2}{l^2} t \right). \quad (4.1)$$

Kertoimet  $a_n$  eivät olleet vapaasti valittavia, sillä niitä saatiin rajaamaan tieto, että tangon alkuhetken lämpötilajakauma  $f$  olisi pystyttävä esittämään muodossa

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.2)$$

Täsmennetään käsiteltävää ongelmaa antamalla sille arvot  $l = 6$  ja  $k = 1$ . Olkoon lisäksi alkujakauma  $f$  määritelty lausekkeella

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kun } 0 \leq x < 4, \\ -1, & \text{kun } 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Kun annetaan kerrointen arvoiksi

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$$

on yhtälö (4.2) paikkansapitävä kaikilla  $x \in (0, 6) \setminus \{4\}$ . Tämä on perusteltavissa Seurauksella 3.6.2 sekä luvun 4.2 lopussa tehdyillä huomioilla sovellettuna kosinitermiselle Fourier-sarjalle. Poikkeama pisteessä  $x = 4$  ei ole haitaksi ongelman ratkaisemisen kannalta, sillä yksittäisellä pisteellä ei ole vaikutusta tangon lämpö määrään.

Kerrointen  $a_n$  arvoiksi saadaan

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{6} \int_0^6 f(x) \cos \frac{n\pi x}{6} dx \\ &= \frac{1}{3} \left( 2 \int_0^4 \cos \frac{n\pi x}{6} dx - \int_4^6 \cos \frac{n\pi x}{6} dx \right) \\ &= \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Lisäksi

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx = 2.$$

Näin ollen

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{6}$$

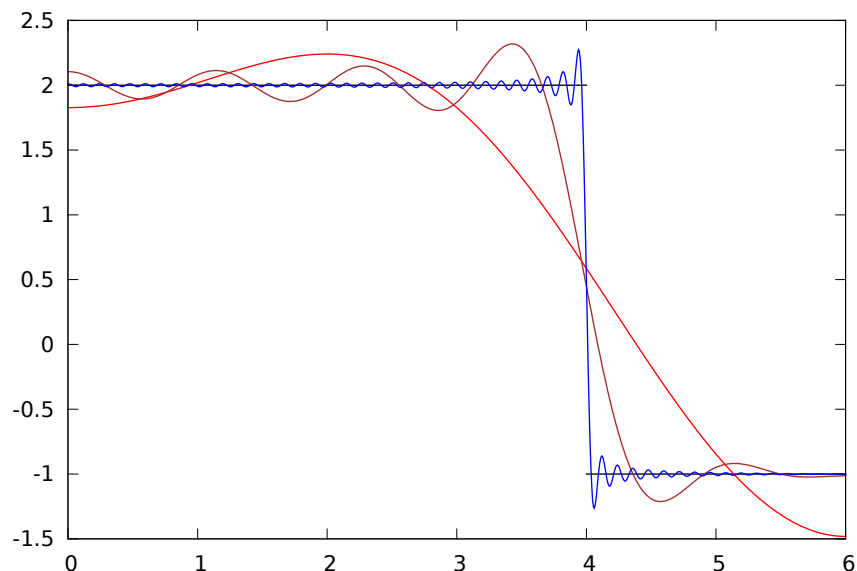
kaikilla  $x \in (0, 6) \setminus \{4\}$ .

Lämpötilaa kuvaava funktio (4.1) on nyt saatu muotoon

$$u(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{6} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{36}t\right).$$

Tätä ratkaisua on vaikea hyödyntää käytännössä, sillä summattavia termejä on äärettömästi. Muuttamalla alkuhetken lämpötilajakaumaa sopivasti, saadaan kuitenkin ratkaisu, jossa on äärellinen määrä termejä. Määritellään ensiksi funktio  $g_i$  funktion  $f$  kosinitermisen Fourier-sarjan  $i + 1$  ensimmäisen termin osasummaksi, eli

$$g_i(x) = 1 + \sum_{n=1}^i \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{6}.$$



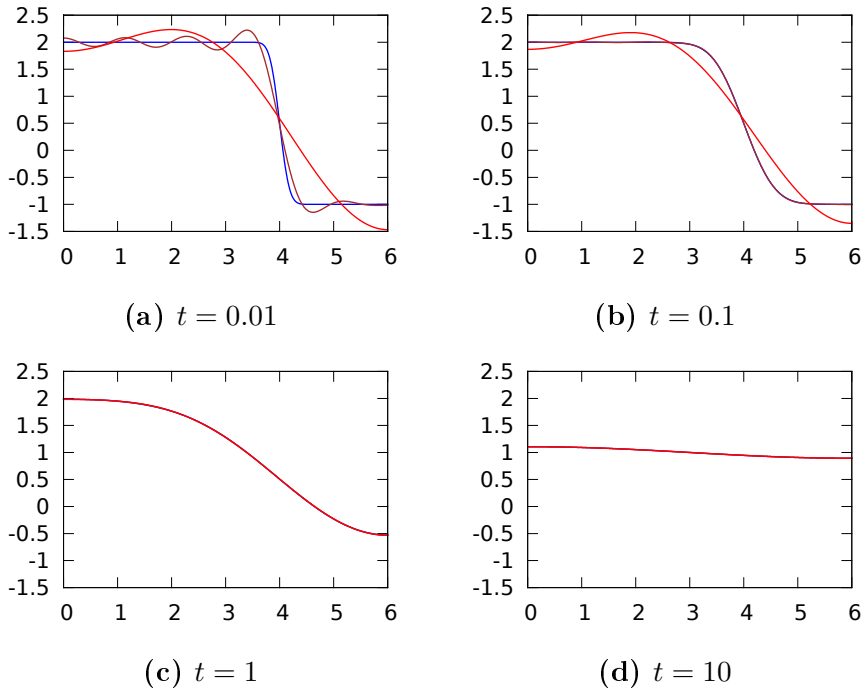
**Kuva 2:** Funktioiden  $f$ ,  $g_3$ ,  $g_{10}$  ja  $g_{100}$  kuvaajat.

Jos ongelman alkulämpötilajakauma  $f(x)$  korvattaisiin funktiolla  $g_i(x)$  jollakin  $i \in N$ , saadaan ratkaisuksi

$$u_i(x, t) = 1 + \sum_{n=1}^i \frac{6}{n\pi} \sin \frac{2n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{6} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{36}t\right), \quad (4.3)$$

sillä tässä tapauksessa kertoimet  $a_n$  ovat nolliä kaikilla  $n > i$ . Nyt on mielenkiintoista tarkastella kuinka paljon funktio  $g_i(x)$  poikkeaa alkuperäisestä lämpötilajakaumasta  $f$ , ja mikä on luvun  $i$  vaikutus.

Kun  $i \rightarrow \infty$ , niin  $g_i(x) \rightarrow f(x)$  kaikilla  $x \in (0, 6) \setminus \{4\}$ , joten voidaan päätellä, että mitä suurempi luvun  $i$  arvo on, sitä tarkemmin  $g_i$  approksimoi funktiota  $f$ . Kuva 2 havainnollistaa tilannetta.



**Kuva 3:** Ratkaisuja  $u_3$ ,  $u_{10}$  ja  $u_{100}$  käyttäen piirretyt lämpötilajakaumat eri ajanhetkillä.

Tutkitaan sitten ratkaisun (4.3) käyttäytymistä luvun  $i$  eri arvoilla. Kuvassa 3 on piirretty lämpötilajakaumat neljänä eri ajanhetkenä käyttäen ratkaisua (4.3) kolmella luvun  $i$  eri arvolla. Nähdään, että hetkestä  $t = 0.1$  eteenpäin ratkaisujen  $u_{10}$  ja  $u_{100}$  kuvaajat menevät käytännössä päällekkäin, ja hetkestä  $t = 1$  eteenpäin myös  $u_3$  on kutakuinkin identtinen muiden ratkaisujen kanssa. On siis nähtävissä, että käsiteltävä ongelma on siinä mielessä suotuisa, että pienet erot alkutilanteessa pyrkivät tasaantumaan, kun

aika kuluu. Täten voidaan arvella, että  $u_{100}$  antaa hyvin tarkan arvion funktiosta  $u$  lähestulkoon heti hetken  $t = 0$  jälkeen.

## 5 Fourier-integraalit

Fourier-integraaleihin päädytään luonnollisella tavalla, kun yritetään päästä eroon Fourier-sarjojen jaksollisuusrajoitteesta. Päättely, joka johtaa Fourier-sarjoista Fourier-integraaleihin, esitetään seuraavassa aliluvussa nojautuen kirjan [5, s. 129] esitykseen. Tämän jälkeen keskitytään osoittamaan päätetyn tuloksena saatu integraalikaava todeksi. Todistuksessa on paljon samankaltaisuutta Fourier'n lauseen todistuksen kanssa.

Niin Fourier-sarjoista kuin -integraaleistakin on olemassa eksponentiaaliset muodot. Eksponentiaalsiin muotoihin päästään käyttämällä kaavoja, jotka yhdistävät trigonometriset funktiot eksponenttifunktioon. Integraalikaavalle johdetaan eksponentiaalinen muoto luvun loppupuolella.

Samoin kuin Fourier-sarjoilla, on myös Fourier-integraaleilla käyttöä osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa. Esimerkki tästä nähdään luvun lopussa Fourier-muunnosten yhteydessä. Fourier-muunnoksiin päädytään kun tarkastellaan integraalikaavaa hieman eri näkökulmasta.

### 5.1 Fourier'n integraalikaava

Fourier-sarja välillä  $(-l, l)$  voidaan esittää muodossa

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(s) ds + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(s) \cos \left[ \frac{n\pi}{l}(s-x) \right] ds. \quad (5.1)$$

Tämä esitysmuoto saadaan samaan tapaan kuin Lauseen 3.6.1 todistuksen alussa johdettu esitysmuoto Fourier-sarjalle välillä  $(-\pi, \pi)$ .

Tiedetään, että Seurauksen 3.6.2 suppenemistulos pätee välillä  $(-l, l)$  vaikka funktio  $f$  ei olisi jaksollinen. Jotta tulos saataisiin pätemään koko reaalityöjien joukossa, on loogista kokeilla mitä Fourier-sarjalle tapahtuu, kun annetaan luvun  $l$  kasvaa kohti ääretöntä. Nähdään, että tällöin sarjan (5.1) ensimmäinen termi häviää, mikäli epäoleellinen integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds$$

suppenee.

Tehdään sitten merkinnät

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{l} \quad \text{ja} \quad \Delta\alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{\pi}{l},$$

jolloin sarjan (5.1) loppuosa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta\alpha,$$

missä

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds.$$

Nyt huomataan, että summa

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \Delta\alpha$$

muistuttaa läheisesti Riemannin integraalin määritelmässä käytettävää Riemannin summaa. Kyseisessä summassa approksimoidaan tarkasteltavan funktion ja  $x$ -akselin väliin jäävää alaa suorakaiteiden avulla. Tässä yhteydessä  $\Delta\alpha$  vastaa suorakaiteiden leveyttä ja luvut  $F(\alpha_n)$  vastaavat suorakaiteiden korkeutta. Itse integraali määritellään raja-arvona, kun suorakaiteiden leveyden annetaan lähestyä nollaa. Tässä tapauksessa nähdään, että kun  $l \rightarrow \infty$ , niin  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Nämä päätelmät mahdollistavat johtopäätöksen, että sarjan (5.1) raja-arvo, kun  $l \rightarrow \infty$ , saattaisi olla esitettävissä muodossa

$$\int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha.$$

Edellä tehty päättely on varsin epätarkka, sillä epäoleellista integraalia ei ole määriteltä kyseisellä tavalla. Lisäksi poikkeavuutta integraalin määrittelyyn esiintyy siinä, että funktio  $F$  muuttuu samalla kun  $\Delta\alpha$  muuttuu. Jatkossa pystytään kuitenkin osoittamaan, että saatu lauseke esittää todella funktiota  $f$  koko reaalityöjoukossa, kun tietyt oletukset ovat voimassa.

## 5.2 Fourier'n integraalilause

Tämän aliluvun päätarkoituksena on tutkia yhtälön

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha$$

paikkansapitävyyttä. Aloitetaan asian käsittely kahdella lemmalla.

Aliluvussa esitettävät todistukset ovat peräisin kirjasta [4, ss. 151-156].

**Lemma 5.2.1.**

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

*Todistus.* Todistus on peräisin kirjasta [4, s. 151]. Tarkoituksena on ensin osoittaa raja-arvon

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.2)$$

olemassaolo, jonka jälkeen kyseinen raja-arvo saadaan raja-arvon yksikäsitteisyyden perustuen määrittämällä raja-arvo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad (5.3)$$

missä  $m$  lähestyy ääretöntä luonnollisia lukuja pitkin.

Aloitetaan jakamalla integraali kahteen osaan:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Tiedetään, että funktiolla  $\frac{1}{x} \sin x$  on äärelliset raja-arvot integroimisvälin päätepisteissä  $x = 0$  ja  $x = 1$ , joten integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenee.

Tutkitaan seuraavaksi integraalin

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \quad (5.4)$$

suppenemista. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left[ \cos 1 - \frac{\cos c}{c} - \int_1^c \frac{\cos x}{x^2} dx \right].$$

Termi  $\frac{1}{c} \cos c$  häviää, kun  $c \rightarrow \infty$ , sillä

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos c}{c} \right| \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} = 0.$$

Lisäksi

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{c} \right) = 1,$$



joten majoranttiperiaatteen nojalla integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

suppenee itseisesti, ja siis myös tavallisessa mielessä. Tästä seuraa, että integraali (5.4) suppenee ja näin ollen raja-arvo (5.2) on olemassa.

Ryhdytään sitten määrittämään raja-arvoa (5.3). Tehdään ensin muuttujanvaihto  $x = (m + 1/2)u$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{(m+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin[(m+1/2)u]}{u} du \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{2 \sin(u/2) \sin[(m+1/2)u]}{u \cdot 2 \sin(u/2)} du \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{2 \sin(u/2)}{u} D_m(u) du, \end{aligned}$$

missä  $D_m(u)$  on Dirichlet'n ydin. Olkoon nyt

$$f(u) = \frac{2 \sin(u/2)}{u}.$$

Koska  $f(0+) = 1$ , niin funktio  $f$  on paloittain jatkuva välillä  $(0, \pi)$ . Näin ollen Lemman 3.5.3 nojalla päästään haluttuun raja-arvoon  $\pi/2$ , mikäli pystytään osoittamaan, että oikeanpuoleinen derivaatta  $f'_+(0)$  on olemassa.

Määritelmän 3.3.2 mukaan

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{f(0+h) - f(0+)}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\frac{2 \sin(h/2)}{h} - 1}{h} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{2 \sin(h/2) - h}{h^2}.$$

Nyt voidaan käyttää l'Hôpitalin sääntöä kahdesti peräkkäin, jolloin saadaan

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{2 \sin(h/2) - h}{h^2} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\cos(h/2) - 1}{2h} = - \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{\sin(h/2)}{4} = 0.$$

On siis osoitettu, että  $f'_+(0)$  on olemassa, joten aikaisemmin tehtyjen johtopäätösten nojalla lemma on todistettu.  $\square$

**Lemma 5.2.2.** *Olkoon  $f$  funktio, joka on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä. Oletetaan lisäksi, että oikeanpuoleinen derivaatta  $f'_+(0)$  on olemassa ja että integraali*

$$\int_0^{\infty} |f(u)| du \tag{5.5}$$

suppenee. Tällöin

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin ru}{u} du = \frac{\pi}{2} f(0+). \tag{5.6}$$

*Todistus.* Osoitetaan ensiksi, että tulos on voimassa, jos integroimisväli korvataan äärellisellä välillä  $(0, c)$ . Aloitetaan kirjoittamalla

$$\int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du = \int_0^c f(0+) \frac{\sin ru}{u} du + \int_0^c [f(u) - f(0+)] \frac{\sin ru}{u} du.$$

Tehdään sitten ensimmäiseen integraaliin muuttujanvaihto  $t = ru$ , jolloin saadaan

$$\int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du = f(0+) \int_0^{rc} \frac{\sin t}{t} dt + \int_0^c \frac{f(u) - f(0+)}{u} \sin ru du. \quad (5.7)$$

Jälkimmäiseen integraaliin voidaan käyttää Lemmaa 3.4.2, mikäli pystytään osoittamaan, että funktio

$$g(u) = \frac{f(u) - f(0+)}{u}$$

on paloittain jatkuva välillä  $(0, c)$ . Koska  $f$  on paloittain jatkuva kyseisellä välillä, riittää näyttää, että raja-arvo  $g(0+)$  on olemassa. Tämä on helposti tehty, sillä Määritelmän 3.3.2 mukaan  $g(0+) = f'_+(0)$  ja  $f'_+(0)$  on olemassa oletuksen nojalla.

Kun annetaan luvun  $r$  lähestyä ääretöntä yhtälössä (5.7), niin lemموjen 3.4.2 ja 5.2.1 nojalla päästään haluttuun tulokseen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du = \frac{\pi}{2} f(0+). \quad (5.8)$$

Ryhdytään seuraavaksi tarkastelemaan yhtälön (5.6) paikkansapitävyyttä. Oletetaan tätä varten, että  $\varepsilon > 0$  ja että  $c \geq 1$ . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty f(u) \frac{\sin ru}{u} du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| \\ &= \left| \int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du + \int_c^\infty f(u) \frac{\sin ru}{u} du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| \\ &\leq \left| \int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| + \left| \int_c^\infty f(u) \frac{\sin ru}{u} du \right| \\ &\leq \left| \int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| + \int_c^\infty |f(u)| du, \end{aligned}$$

sillä

$$\left| \frac{\sin ru}{u} \right| \leq 1,$$

kun  $u \geq 1$ . Nyt valitsemalla  $c$  riittävän suureksi saadaan

$$\int_c^\infty |f(u)| \, du < \frac{\varepsilon}{2},$$

koska integraali (5.5) suppenee. Toisaalta yhtälön (5.8) nojalla on olemassa luku  $R$  siten, että

$$\left| \int_0^c f(u) \frac{\sin ru}{u} \, du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun  $r > R$ .

Näin ollen

$$\left| \int_0^\infty f(u) \frac{\sin ru}{u} \, du - \frac{\pi}{2} f(0+) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

kun  $r > R$ , mikä todistaa väitteen (5.6). □

Tätä lemmaa apuna käyttäen saadaan todistettua Fourier'n lausetta vastaava tulos Fourier-integraaleille.

**Lause 5.2.3. (Fourier'n integraalilause)** *Olkoon  $f$  funktio, joka on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä. Oletetaan lisäksi, että  $f$  on itseisesti integroitava, eli*

$$\int_{-\infty}^\infty |f(u)| \, du < \infty.$$

*Tällöin yhtälö*

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds \, d\alpha \quad (5.9)$$

*pätee kaikissa niissä pisteissä  $x$ , joissa toispuoleiset derivaatat  $f_+'(x)$  ja  $f_-'(x)$  ovat olemassa.*

*Todistus.* Tehdään merkintä

$$I(r) = \int_0^r \int_{-\infty}^\infty f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds \, d\alpha,$$

jolloin lauseen todistamiseksi tulee osoittaa, että

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I(r) = \frac{\pi}{2}[f(x+) + f(x-)]. \quad (5.10)$$

Vaihdetaan ensiksi integraalin  $I$  integroimisjärjestys. Jotta todistus ei pitkittyisi liikaa, jätetään tämän toimenpiteen oikeellisuuden perustelu seuraavaan alilukuun ja jatketaan kirjoittamalla

$$\begin{aligned}
I(r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r f(s) \cos[\alpha(s-x)] d\alpha ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds \\
&= \int_{-\infty}^x f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds + \int_x^{\infty} f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Tekemällä muuttujanvaihto  $t = x - s$  saadaan

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^x f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds &= - \int_{\infty}^0 f(x-t) \frac{\sin(-rt)}{-t} dt \\
&= \int_0^{\infty} f(x-t) \frac{\sin(rt)}{t} dt.
\end{aligned}$$

Määritellään sitten funktio  $F$  samalla tavoin kuin Lauseen 3.6.1 todistuksessa lausekkeella  $F(t) = f(x-t)$ , jolloin siis pätee  $F'_+(0) = -f'_-(x)$  ja  $F(0+) = f(x-)$ . Lisäksi funktion  $f$  ominaisuuksien nojalla  $F$  on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä sekä

$$\int_0^{\infty} |F(t)| dt = \int_0^{\infty} |f(x-t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Näin ollen funktio  $F$  täyttää kaikki Lemman 5.2.2 oletukset, joten

$$\begin{aligned}
\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^x f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F(t) \frac{\sin(rt)}{t} dt \\
&= \frac{\pi}{2} F(0+) \\
&= \frac{\pi}{2} f(x-).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Tehdään seuraavaksi muuttujanvaihto  $t = s - x$  yhtälökettjun (5.11) viimeiseen integraaliin:

$$\int_x^{\infty} f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds = \int_0^{\infty} f(x+t) \frac{\sin(rt)}{t} dt.$$

Tällöin määrittely  $F(t) = f(x+t)$  johtaa vastaavin päättelyin kuin edellä tulokseen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} f(s) \frac{\sin[r(s-x)]}{s-x} ds = \frac{\pi}{2} f(x+). \tag{5.13}$$

Yhtälö (5.10) seuraa nyt kohdista (5.11), (5.12) ja (5.13).  $\square$

### 5.3 Integrointijärjestyksen vaihto

Tässä aliluvussa käytetään Riemannin integraalien lisäksi Lebesguen integraaleja. Lebesgue-integraalit erotetaan Riemann-integraaleista merkittävällä integroimisjoukko integraalimerkin alareunaan.

Edellisestä aliluvusta jäi todistettavaksi, että integraalin

$$\int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha \quad (5.14)$$

integrointijärjestys voidaan muuttaa. Todistus tehdään osoittamalla yhtälöketju

$$\int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha = \int_{[0,r]} \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha \quad (5.15)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{[0,r]} f(s) \cos[\alpha(s-x)] d\alpha ds \quad (5.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r f(s) \cos[\alpha(s-x)] d\alpha ds \quad (5.17)$$

paikkansapitäväksi. Lebesguen integraaleja käytetään apuna, koska integrointijärjestyksen muuttamiseen käytetään *Fubinin lausetta*, joka mahdollistaa integrointijärjestyksen vaihtamisen, kun käytössä ovat Lebesguen integraalit.

Ennen yhtälöketjuun paneutumista osoitetaan integraalin (5.14) olemassaolo.

**Lemma 5.3.1.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paloittain jatkuva funktio jokaisella äärellisellä välillä. Oletetaan lisäksi, että  $f$  on itseisesti integroituva. Tällöin integraali*

$$\int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha \quad (r > 0)$$

*on olemassa kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Koska kaikilla  $x \in \mathbb{R}$  ja kaikilla  $\alpha \in (0, r)$  pätee

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds < \infty,$$

riittää osoittaa, että funktio

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds$$

on jatkuva ja näin ollen myös integroituva. Oletetaan tätä varten, että  $\varepsilon > 0$  ja että  $\Delta\alpha \in \mathbb{R}$ .

Määritellään ensin funktio  $h$  lausekkeella

$$h(\alpha) = \int_{-c}^c f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds,$$

jolloin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} |h(\alpha) - h(\alpha + \Delta\alpha)| &= \left| \int_{-c}^c f(s) (\cos[\alpha(s-x)] - \cos[(\alpha + \Delta\alpha)(s-x)]) ds \right| \\ &\leq \int_{-c}^c |f(s)| |\cos[\alpha(s-x)] - \cos[(\alpha + \Delta\alpha)(s-x)]| ds. \end{aligned}$$

Paloittaisesta jatkuvuudesta seuraa, että  $f$  on rajoitettu välillä  $[-c, c]$ . On siis olemassa  $M > 0$  siten, että  $|f(x)| < M$  kaikilla  $x \in [-c, c]$ . Lisäksi koska kosinifunktio on jatkuva, on olemassa  $\delta > 0$  siten, että

$$|\cos[\alpha(s-x)] - \cos[(\alpha + \Delta\alpha)(s-x)]| < \frac{\varepsilon}{10Mc},$$

kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ . Näin ollen

$$|h(\alpha) - h(\alpha + \Delta\alpha)| < \int_{-c}^c M \frac{\varepsilon}{10Mc} ds = \frac{\varepsilon}{5},$$

kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ .

Koska  $f$  on itseisesti integroitava funktio, voidaan valita luku  $c > 0$  siten, että

$$\int_c^\infty |f(s)| ds < \frac{\varepsilon}{5}$$

ja että

$$\int_{-\infty}^{-c} |f(s)| ds < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Tämän seurauksena voidaan kirjoittaa

$$\left| \int_c^\infty f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds \right| \leq \int_c^\infty |f(s) \cos[\alpha(s-x)]| ds \leq \int_c^\infty |f(s)| ds < \frac{\varepsilon}{5}$$

ja vastaavasti

$$\left| \int_{-\infty}^{-c} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds \right| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Kyseiset arviot pätevät luonnollisesti myös kun  $\alpha$  on korvattu arvolla  $\alpha + \Delta\alpha$ .

Nyt nähdään, että

$$\begin{aligned} g(\alpha) - g(\alpha + \Delta\alpha) &= \int_{-\infty}^{-c} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds - \int_{-\infty}^{-c} f(s) \cos[(\alpha + \Delta\alpha)(s-x)] ds \\ &+ h(\alpha) - h(\alpha + \Delta\alpha) \\ &+ \int_c^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds - \int_c^{\infty} f(s) \cos[(\alpha + \Delta\alpha)(s-x)] ds, \end{aligned}$$

joten kolmioepäyhtälöä ja todistuksen aikaisempia kohtia käyttäen saadaan

$$|g(\alpha) - g(\alpha + \Delta\alpha)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon,$$

kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ , mikä osoittaa funktion  $g$  jatkuvuuden.  $\square$

Integraalin olemassaolon osoittamisen jälkeen voidaan alkaa selvittää integroimisjärjestyksen vaihdon oikeellisuutta. Yhtäsuuruuden (5.15) osoittamisen avuksi otetaan käyttöön kaksi lausetta lähteestä [8, s. 15]:

**Lause 5.3.2.** *Olkoon  $f: [a, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituva jokaisella joukon  $[a, \infty]$  suljetulla osavälillä. Tällöin  $f$  on Lebesgue-integroituva, jos ja vain jos epäoleellinen integraali*

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx$$

*suppenee. Mikäli  $f$  on Lebesgue-integroituva, niin*

$$\int_{[a, \infty]} f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx.$$

**Lause 5.3.3.** *Olkoon  $f: [-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituva jokaisella joukon  $[-\infty, a]$  suljetulla osavälillä. Tällöin  $f$  on Lebesgue-integroituva, jos ja vain jos epäoleellinen integraali*

$$\int_{-\infty}^a |f(x)| dx$$

*suppenee. Mikäli  $f$  on Lebesgue-integroituva, niin*

$$\int_{[-\infty, a]} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx.$$

Näitä lauseita tarvitaan tässä yhteydessä ainoastaan seuraavan tuloksen perustelemiseksi:

**Seuraus 5.3.4.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  itseisesti integroitava funktio. Tällöin  $f$  on Lebesgue-integroitava ja*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx.$$

*Todistus.* Lauseiden 5.3.2 ja 5.3.3 nojalla

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) \, dx + \int_0^{\infty} f(x) \, dx \\ &= \int_{[-\infty, 0]} f(x) \, dx + \int_{[0, \infty]} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx. \quad \square \end{aligned}$$

Lisäksi jatkossa tulee tarvetta seuraavalle tulokselle:

**Lause 5.3.5.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio. Jos  $f$  on Riemann-integroitava välillä  $[a, b]$ , niin*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a, b]} f(x) \, dx.$$

*Todistus.* Todistus löytyy kirjasta [9, ss. 81-82]. □

Nyt voidaan siirtyä tarkastelemaan kohtaa (5.15):

**Lemma 5.3.6.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  itseisesti integroitava funktio. Tällöin*

$$\int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds \, d\alpha = \int_{[0, r]} \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds \, d\alpha$$

*kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Tiedetään, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s) \cos[\alpha(s-x)]| \, ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \, ds < \infty,$$

joten Seurauksen 5.3.4 nojalla

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds.$$

Integraali

$$\int_{\mathbb{R}} f(s) \cos[\alpha(s-x)] \, ds$$

on Lemman 5.3.1 todistuksessa näytetty jatkuvaksi funktioksi muuttujan  $\alpha$  suhteen. Näin ollen se on sekä Riemann-integroitava että rajoitettu suljetulla välillä, mikä osoittaa lemmän todeksi Lauseen 5.3.5 nojalla. □



Osoitetaan sitten yhtäsuuruus (5.16). Kuten mainittu, tähän tarvitaan avuksi Fubinin lausetta, joka löytyy todistuksineen esimerkiksi kirjasta [10, s. 126]. Tässä yhteydessä ei tarvita kaikkia Fubinin lauseen antamia tuloksia, joten esitetään seuraavaksi edellä mainitun kirjan Fubinin lauseesta sopivasti yksinkertaistettu versio. Ennen tätä mainittakoon, että esitettävässä lauseessa ja sen jälkeisessä lemmassa esiintyy hieman mittateorian käsitteistöä, jota ei tutkielman aihepiirin ulkopuolisena käsitellä.

**Lause 5.3.7.** *Olkoon  $u: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mitallinen funktio. Jos*

$$\int_{[a,b]} \int_{\mathbb{R}} |u(x, y)| \, dx \, dy < \infty,$$

*niin*

$$\int_{[a,b]} \int_{\mathbb{R}} u(x, y) \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{[a,b]} u(x, y) \, dy \, dx.$$

Lauseen 5.3.7 mukaan yhtäsuuruuden (5.16) todistamiseksi riittää siis näyttää, että

$$\int_{[0,r]} \int_{\mathbb{R}} |f(s) \cos[\alpha(s-x)]| \, ds \, d\alpha < \infty \quad (5.18)$$

ja että

$$g(s, \alpha) = f(s) \cos[\alpha(s-x)]$$

on mitallinen. Todistuksia hieman muuttamalla on helppo osoittaa, että lemmojen 5.3.1 ja 5.3.6 tulokset pätevät myös tapauksessa, jossa sisemmän integraalin integrandi on korvattu itseisarvolla, joten kohta (5.18) on voimassa. Osoitetaan sitten funktion  $g$  mitallisuus:

**Lemma 5.3.8.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  itseisesti integroitava funktio. Tällöin funktio*

$$g(s, \alpha) = f(s) \cos[\alpha(s-x)], \quad s \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0, r],$$

*on mitallinen.*

*Todistus.* Määritellään ensin funktio  $h: \mathbb{R} \times [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$  lausekkeella

$$h(s, \alpha) = f(s).$$

Olkoon nyt  $A \subset \mathbb{R}$  avoin joukko. Tällöin

$$h^{-1}(A) = f^{-1}(A) \times [0, r].$$

Seurauksen 5.3.4 nojalla  $f$  on Lebesgue-integroitava ja siis myös mitallinen. Kirjan [11, s. 54] mukaan jokaisen avoimen joukon alkukuva joukko kuvauksessa  $f$  on mitallinen, jos ja vain jos funktio  $f$  on mitallinen. Näin ollen

$f^{-1}(A)$  on mitallinen joukko. Lisäksi tiedetään, että  $[0, r]$  on mitallinen joukko joukkoon  $[0, r]$  liittyvässä mitta-avaruudessa. Koska kahden mitallisen joukon karteeminen tulo on mitallinen joukko tuloavaruudessa, on  $h^{-1}(A)$  mitallinen joukko. Nyt on siis osoitettu, että mielivaltaisesti valitun avoimen joukon  $A$  alkukuvajoukko kuvauksessa  $h$  on mitallinen ja näin ollen funktio  $h$  on mitallinen.

Toisaalta tiedetään, että muuttujien  $\alpha$  ja  $s$  funktio

$$\cos[\alpha(s - x)]$$

on jatkuva, josta seuraa, että kyseinen funktio on mitallinen [11, s. 49]. Lisäksi tiedetään, että kahden mitallisen funktion pisteittäinen tulo on mitallinen [11, s. 52], joten funktio

$$h(s, \alpha) \cos[\alpha(s - x)] = f(s) \cos[\alpha(s - x)]$$

on mitallinen. □

Nyt on siis perusteltu yhtäsuuruus (5.16) ja jäljellä onkin enää yhtäsuuruuden (5.17) osoittaminen:

**Lemma 5.3.9.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  itseisesti integroitava funktio. Tällöin*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^r f(s) \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha \, ds = \int_{\mathbb{R}} \int_{[0, r]} f(s) \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha \, ds$$

kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ .

*Todistus.* Käyttämällä Lausetta 5.3.5 voidaan kirjoittaa

$$\int_0^r f(s) \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha = \int_{[0, r]} f(s) \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha$$

Koska

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^r f(s) \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha \right| \, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(s) \int_0^r \cos[\alpha(s - x)] \, d\alpha \right| \, ds \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \int_0^r |\cos[\alpha(s - x)]| \, d\alpha \, ds \\ &\leq r \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| \, ds \\ &< \infty, \end{aligned}$$

niin Seurauksen 5.3.4 mukaan väite on voimassa. □

Tämän lemmän myötä aliluvun alussa esitetty yhtälöketju on nyt osoitettu kaikilta osin paikkansapitäväksi.

## 5.4 Fourier'n integraalikaavan eksponentiaalinen muoto

Fourier'n integraalikaavalle voidaan johtaa eksponentiaalinen muoto käyttämällä kaavaa  $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ . Tämän muodon aikaansaamiseksi noudatetaan kirjassa [4, s. 159] esitettyä menetelmää ja kirjoitetaan ensin yhtälö (5.9) muodossa

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \int_{-\infty}^{\infty} 2f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds d\alpha \quad (5.19)$$

ja muokataan sitten sisempää integraalia seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 2f(s) \cos[\alpha(s-x)] ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)[e^{i\alpha(s-x)} + e^{-i\alpha(s-x)}] ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)[e^{i\alpha s} e^{-i\alpha x} + e^{-i\alpha s} e^{i\alpha x}] ds \\ &= e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds + e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\alpha s} ds. \end{aligned}$$

Yhtälöketjun viimeinen yhtäsuuruus vaatii perusteluja epäoleellisen integraalin määritelmässä esiintyvien raja-arvojen vuoksi. Yhtäsuuruus on voimassa, mikäli integraalit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\alpha s} ds \quad (5.20)$$

suppevat riippumatta muuttujan  $\alpha$  arvosta. Tämä on kuitenkin selvää, sillä esimerkiksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(s) e^{i\alpha s}| ds = \int_{-\infty}^{\infty} |f(s)| ds < \infty$$

Lauseen 5.2.3 oletusten ollessa voimassa.

Yhtälön (5.19) oikea puoli on nyt siis saatu muotoon

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \left( e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds + e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\alpha s} ds \right) d\alpha.$$

Jotta tämä voitaisiin kirjoittaa edelleen muodossa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \int_0^r e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\alpha s} ds d\alpha \right. \\ \left. + \int_0^r e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i\alpha s} ds d\alpha \right), \quad (5.21) \end{aligned}$$

on osoitettava, että integraalit (5.20) ovat jatkuvia funktioita muuttujan  $\alpha$  suhteen. Tämä toimenpide varmistaa sen että, edellä esitetystä lausekkeesta on molemmissa muuttujan  $\alpha$  integraaleissa jatkuvat integrandit ja näin ollen integraalit ovat hyvin määriteltyjä. Siirretään tämä jatkuvuuden tutkiminen kuitenkin hieman myöhemmäksi ja jatketaan eksponentiaalisen muodon johdantamista olettaen, että välivaihe (5.21) on validi.

Tekemällä muuttujanvaihto  $\beta = -\alpha$  saadaan lausekkeen (5.21) jälkimmäinen integraali muotoon

$$\int_{-r}^0 e^{-i\beta x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\beta s} ds d\beta,$$

joka poikkeaa ensimmäisestä integraalista ainoastaan integroimisvälin osalta. Yhdistämällä integraalit saadaan yhtälö

$$\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds d\alpha, \quad (5.22)$$

jota kutsutaan *Fourier'in integraalikaavan eksponentiaaliseksi muodoksi*.

Huomioitakoon vielä, että tehdyillä oletuksilla yhtälössä (5.22) esiintyvää raja-arvoa ei voi korvata epäoleellisella integraalilla negatiivisesta äärettömästä positiiviseen äärettömään. Tämä onnistuisi, jos yhtälön (5.22) oikea puoli voitaisiin kirjoittaa muodossa

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^0 e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds d\alpha + \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds d\alpha.$$

Tässä lausekkeessa olevien raja-arvojen olemassaolon takaamiseksi on oletettava aikaisemmin tehtyjen oletusten lisäksi, että muuttujan  $\alpha$  funktio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds$$

on itseisesti integroitava, jolloin siis esimerkiksi

$$\int_{-\infty}^0 \left| e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds \right| d\alpha = \int_{-\infty}^0 \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds \right| d\alpha < \infty.$$

Integraalikaavan oikeellisuuden osoittamiseksi on vielä jäljellä osoittaa integraalien (5.20) jatkuvuus.

**Lemma 5.4.1.** *Integraalit (5.20) ovat jatkuvia funktioita muuttujan  $\alpha$  suhteen.*

*Todistus.* Tehdään todistus ainoastaan funktiolle

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds,$$

sillä toisen integraalin tapauksessa pätee täsmälleen sama todistus.

Aloitetaan osoittamalla, että funktio

$$h(\alpha) = \int_{-c}^c f(s)e^{i\alpha s} ds$$

on jatkuva. Olkoon tätä varten  $\varepsilon > 0$  ja  $\Delta\alpha \in \mathbb{R}$ . Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} |h(\alpha + \Delta\alpha) - h(\alpha)| &= \left| \int_{-c}^c f(s)e^{i(\alpha+\Delta\alpha)s} ds - \int_{-c}^c f(s)e^{i\alpha s} ds \right| \\ &= \left| \int_{-c}^c f(s) [e^{i(\alpha+\Delta\alpha)s} - e^{i\alpha s}] ds \right| \\ &= \left| \int_{-c}^c f(s)e^{i\alpha s} [e^{i\Delta\alpha s} - 1] ds \right| \\ &\leq \int_{-c}^c |f(s)e^{i\alpha s} [e^{i\Delta\alpha s} - 1]| ds \\ &= \int_{-c}^c |f(s)| |e^{i\Delta\alpha s} - 1| ds. \end{aligned}$$

Koska funktio  $f$  on paloittain jatkuva jokaisella äärellisellä välillä, on  $f$  myös rajoitettu jokaisella äärellisellä välillä. Näin ollen on olemassa  $M > 0$  siten, että  $|f(s)| < M$  kaikilla  $s \in [-c, c]$ . Lisäksi  $e^{i\Delta\alpha c} \rightarrow 1$ , kun  $|\Delta\alpha| \rightarrow 0$ , joten on olemassa  $\delta > 0$  siten, että  $|e^{i\Delta\alpha c} - 1| < \varepsilon/2cM$ , kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ . Koska  $|\Delta\alpha s| \leq |\Delta\alpha c|$  kaikilla  $s \in [-c, c]$ , niin kaikilla  $s \in [-c, c]$  pätee  $|e^{i\Delta\alpha s} - 1| < \varepsilon/2cM$ , kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ . Näiden tietojen avulla voidaan kirjoittaa

$$|h(\alpha + \Delta\alpha) - h(\alpha)| < \int_{-c}^c M \frac{\varepsilon}{2cM} ds = \varepsilon, \text{ kun } |\Delta\alpha| < \delta,$$

joten funktio  $h$  on jatkuva.

Funktio  $g$  voidaan esittää muodossa

$$g(\alpha) = h(\alpha) + \int_{-\infty}^{-c} f(s)e^{i\alpha s} ds + \int_c^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds. \quad (5.23)$$

Koska integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds$$

suppenee tasaisesti muuttujan  $\alpha$  suhteen, voidaan  $c$  valita muuttujasta  $\alpha$  riippumattomasti niin suureksi, että molemmat yhtälössä (5.23) esiintyvät integraalit tulevat itseisarvoiltaan pienemmiksi kuin  $\varepsilon$ . Näin ollen kolmioepäyhtälöä käyttämällä saadaan vastaavasti kuin Lemman 5.3.1 todistuksessa

$$|g(\alpha + \Delta\alpha) - g(\alpha)| < |h(\alpha + \Delta\alpha) - h(\alpha)| + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon < 5\varepsilon,$$

kun  $|\Delta\alpha| < \delta$ , mikä todistaa funktion  $g$  jatkuvuuden.  $\square$

## 5.5 Fourier-muunnos

Seuraavaksi esitettävä määritelmä ja sitä seuraava lause hyödyntävät Fourier'n integraalilauseen tarjoamaa informaatiota esittäen sen sisällön hieman eri tavalla.

**Määritelmä 5.5.1.** Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  itseisesti integroitava funktio. Lausekkeella

$$F(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{i\alpha s} ds$$

määriteltyä funktiota  $F$  kutsutaan funktion  $f$  *Fourier-muunnokseksi* ja siitä käytetään merkintää  $\mathcal{F}[f]$ . Funktiota  $f$  kutsutaan puolestaan funktion  $F$  *Fourier-käänteismuunnokseksi*.

**Lause 5.5.2.** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva ja itseisesti integroitava funktio, jolla on olemassa toispuoleiset derivaatat  $f'_-(x)$  ja  $f'_+(x)$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Mikäli  $F$  on funktion  $f$  Fourier-muunnos, niin käänteismuunnos  $f$  saadaan lausekkeella*

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

*Jos  $F$  on lisäksi itseisesti integroitava, voidaan kirjoittaa*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

*Todistus.* Väitteet seuraavat Fourier'n integraalilauseesta, kun integraalikaava esitetään eksponentiaalisessa muodossa.  $\square$

Fourier-muunnosta voidaan käyttää apuna alku- ja reuna-arvo-ongelmien ratkaisemisessa. Kun tarkoituksena on ratkaista funktio  $u$ , voidaan ensin yrittää ratkaista funktion  $u$  Fourier-muunnos  $\mathcal{F}(u)$ . Tällöin ratkaisemisen apuna ovat Fourier-muunnokseen liittyvät ominaisuudet. Tämän jälkeen alkuperäinen funktio  $u$  saadaan Fourier-muunnoksen käänteismuunnoksena. Tarkastellaan seuraavaksi joitakin Fourier-muunnokseen liittyvistä ominaisuuksista ottaen mallia kirjasta [5, ss. 321-325].

**Lause 5.5.3. (Lineaarisuus)** *Fourier-muunnos on lineaarimuunnos.*

*Todistus.* Olkoot  $f$  ja  $g$  itseisesti integroituvia funktioita ja olkoot  $a$  ja  $b$  reaalilukuja. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[af + bg](\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)]e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx + \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx \\ &= a\mathcal{F}[f](\alpha) + b\mathcal{F}[g](\alpha).\end{aligned}\quad \square$$

**Lause 5.5.4. (Derivaatan Fourier-muunnos)** *Olkoon  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolle pätee  $f(x) \rightarrow 0$ , kun  $|x| \rightarrow \infty$ . Oletetaan lisäksi, että  $f$  ja derivaattafunktio  $f'$  ovat itseisesti integroituvia. Tällöin*

$$\mathcal{F}[f'](\alpha) = -i\alpha\mathcal{F}[f](\alpha).$$

*Todistus.* Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'](\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ f(x)e^{i\alpha x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \right] \\ &= -i\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx \\ &= -i\alpha\mathcal{F}[f](\alpha).\end{aligned}\quad \square$$

**Seuraus 5.5.5.** *Oletetaan, että funktio  $f(x)$  ja sen  $n - 1$  ensimmäistä derivaattaa lähestyvät nollaa kun  $|x|$  lähestyy ääretöntä. Oletetaan lisäksi, että  $f$  ja sen  $n$  ensimmäistä derivaattaa ovat itseisesti integroituvia. Tällöin*

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (-i\alpha)^n \mathcal{F}[f](\alpha).$$

**Määritelmä 5.5.6.** Olkoon  $f$  ja  $g$  funktioita, joista toinen on itseisesti integroituva ja toinen integroituva ja rajoitettu. Funktiota

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy$$

kutsutaan funktioiden  $f$  ja  $g$  *konvoluutioksi*.

Määritelmässä funktiolle  $f$  ja  $g$  asetetut vaatimukset takaavat, että integraali on olemassa. Nimittäin, jos  $f$  on itseisesti integroitava ja  $g$  rajoitettu, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dy = M \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty.$$

Jos taas  $f$  on rajoitettu ja  $g$  on itseisesti integroitava, niin

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)g(y)| dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty.$$

On olemassa muitakin keinoja rajoittaa funktioita  $f$  ja  $g$  konvoluution määrittämiseksi. Muutamia eri tapoja on mainittu kirjassa [7, s. 206].

**Lause 5.5.7. (Konvoluutiolause)** *Olko  $f$  ja  $g$  funktioita, joille konvoluutio on määritelty. Tällöin*

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g].$$

*Todistus.* Käyttämällä Fourier-muunnoksen ja konvoluution määritelmiä saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y) dy dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x-y)g(y) dy dx. \end{aligned}$$

Vaihdetaan seuraavaksi integroimisjärjestys ja muotoillaan lauseketta todistuksen kannalta sopivaan suuntaan:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\alpha) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x-y)g(y) dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-y)} f(x-y) dx dy \end{aligned}$$

Integroimisjärjestyksen vaihdon tarkka perustelu ohitetaan, mutta on nähtävissä, että perustelu voidaan tehdä samankaltaisesti kuin Luvussa 5.3.

Tehdään seuraavaksi sisempään integraaliin muuttujanvaihto  $z = x - y$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\alpha) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} g(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha z} f(z) dz dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} g(y) \mathcal{F}[f](\alpha) dy \\ &= \mathcal{F}[f](\alpha) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha y} g(y) dy \\ &= \mathcal{F}[f](\alpha) \mathcal{F}[g](\alpha). \end{aligned}$$

□



Seuraavassa, kirjasta [5, s. 326] peräisin olevasta esimerkissä hyödynnetään edellä saatuja tuloksia alkuarvo-ongelman ratkaisemisessa.

**Esimerkki 5.5.8.** Luvussa 2.5 tutkittiin lämmön johtumista tangossa. Muutetaan nyt tanko äärettömän pituiseksi, jolloin ratkaistavaksi ongelmaksi saadaan

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, & t > 0, & (5.24) \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, & & (5.25) \end{cases}$$

missä ratkaistava funktio  $u(x, t)$  kuvaa lämpötilaa paikassa  $x$  hetkellä  $t$ .

Tässä esimerkissä käsitellään kahden muuttujan funktiota vaikka Fouriermuunnosten yhteydessä on tähän asti käytetty vain yhden muuttujan funktioita. Saadut tulokset kuitenkin pätevät myös kahden muuttujan tapauksessa, kun Fourier-muunnos otetaan vain toisen muuttujan suhteen, jolloin toinen muuttuja käyttäytyy Fourier-muunnoksiin liittyvissä toimenpiteissä vakion tavoin.

Olkoon  $U$  funktion  $u(x, t)$  Fourier-muunnos muuttujan  $x$  suhteen, eli

$$U(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx.$$

Ottamalla Fourier-muunnos muuttujan  $x$  suhteen yhtälöstä (5.24) saadaan yhtälö

$$\mathcal{F}[u_t - ku_{xx}] = \mathcal{F}[0],$$

joka voidaan Lausetta 5.5.3 ja Seurausta 5.5.5 käyttämällä kirjoittaa muodossa

$$\mathcal{F}[u_t](\alpha) + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0.$$

Lisäksi termiä  $\mathcal{F}[u_t]$  voidaan muokata seuraavasti:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[u_t](\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{i\alpha x} dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx \\ &= U_t(\alpha, t). \end{aligned}$$

Edellä tehty derivoinnin siirto integraalin ulkopuolelle asettaa joitakin vaatimuksia funktiolle  $u$ , mutta käsitellään niitä vasta tämän esimerkin jälkeen.

Muunnetaan myöskin yhtälö (5.25), jolloin ratkaistavaksi ongelmaksi saadaan

$$\begin{cases} U_t(\alpha, t) + k\alpha^2 U(\alpha, t) = 0, & -\infty < \alpha < \infty, & t > 0, & (5.26) \\ U(\alpha, 0) = F(\alpha), & -\infty < \alpha < \infty, & & (5.27) \end{cases}$$

missä  $F$  on funktion  $f$  Fourier-muunnos. Nyt huomataan, että muunnoksen avulla saatu alkuarvo-ongelma on selvästi yksinkertaisempi ratkaista kuin alkuperäinen ongelma. Yhtälön (5.26) ratkaisuksi saadaan nimittäin

$$U(\alpha, t) = h(\alpha)e^{-k\alpha^2 t},$$

missä  $h$  on tuntematon funktio. Alkuehdon (5.27) nojalla

$$U(\alpha, t) = F(\alpha)e^{-k\alpha^2 t}.$$

Ratkaisu alkuperäiseen ongelmaan saadaan funktion  $U$  Fourier-käänteismuunnoksena:

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r F(\alpha)e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (5.28)$$

Funktion  $f$  Fourier-muunnoksen  $F$  takia tämä ratkaisu sisältää auki purettuna kaksi sisäkkäistä integraalia. Ratkaisua voidaan kuitenkin yksinkertaistaa konvoluutiolauseen avulla. Sen nojalla

$$\mathcal{F}[f * g](\alpha, t) = F(\alpha)e^{-k\alpha^2 t},$$

missä  $g$  on funktion  $e^{-k\alpha^2 t}$  Fourier-käänteismuunnos. Ottamalla edellä olevasta yhtälöstä Fourier-käänteismuunnos saadaan

$$(f * g)(x, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r F(\alpha)e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

josta seuraa konvoluution määritelmän ja yhtälön (5.28) nojalla, että

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y, t) dy,$$

missä käänteismuunnokselle  $g$  pätee

$$g(x, t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{kt}} e^{-x^2/4kt}.$$

Edellä saadun käänteismuunnoksen lausekkeen perustelemisen ohitetaan työllään. Tulos on saatu nojautuen kirjassa [12, s. 326] esitettyihin perusteluihin samantyyppisen integraalin laskemiseksi.

Nyt siis tiedetään, että

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) e^{-y^2/4kt} dy.$$

Tehdään vielä lopuksi muuttujanvaihto  $z = y/2\sqrt{kt}$ , jolloin ratkaisu saadaan muotoon

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - 2\sqrt{kt}z) e^{-z^2} dz.$$

Se milloin tässä esimerkissä tehty derivoinnin siirto integraalin ulkopuolelle voidaan tehdä, selviää seuraavassa lauseessa:

**Lause 5.5.9.** *Olkoon  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sellainen jatkuva funktio, että myös  $u_t$  on jatkuva. Oletetaan, että integraalit*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| \, dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |u_t(x, t)| \, dx$$

*ovat olemassa kaikilla  $t \in \mathbb{R}$  ja että*

$$\int_{-\infty}^{-R} |u_t(x, t)| \, dx + \int_R^{\infty} |u_t(x, t)| \, dx$$

*suppenee tasaisesti kohti nollaa muuttujan  $t$  suhteen jokaisella välillä  $[a, b]$ , kun  $R \rightarrow \infty$ . Tällöin*

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) \, dx.$$

*Todistus.* Todistus löytyy kirjasta [3, s. 268]. □

Fourier-muunnoksille on osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisen lisäksi monia eri käyttökohteita. Näitä ovat esimerkiksi kvanttimekaniikka ja signaalianalyysi sekä käyttö työkaluna puhtaan matematiikan tarpeisiin. [7, ss. 229-234]

## 6 Johtopäätökset

Tutkielman alussa haettiin ratkaisuja alku- ja reuna-arvo-ongelmille käyttäen muuttujien separoimismenetelmää. Tämä johti tarpeeseen käyttää Fourier-sarjoja sekä herätti joitakin kysymyksiä liittyen saatujen sarjamuotoisten ratkaisujen suppenemiseen ja derivoituvuuteen. Tämän jälkeen onnistuttiin todistamaan ongelmien kannalta tarpeellinen Fourier-sarjojen pisteittäinen suppeneminen sekä lisäksi saatiin vastaukset ratkaisujen suppenemista ja derivoituvuutta koskeviin kysymyksiin.

Tutkielman loppupuolella käsiteltiin Fourier-integraaleja, joiden suppenemista koskeva Fourier'n integraalilause saatiin myöskin todistettua. Käsiteltyjen integraalien avulla määriteltiin Fourier-muunnos, jota hyödyntäen esitettiin esimerkki äärettömässä alueessa määritellyn alku- ja reuna-arvo-ongelman ratkaisemisesta.

Tutkielmassa ei käytetty Fourier-sarjan eksponentiaalista muotoa

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Tämä muoto olisi tarjonnut kompaktimman esitystavan lisäksi yksinkertaisempia todistuksia eksponenttifunktion laskusääntöjen ansiosta. Fourier-integraalien yhteydessä asian käsittelyä olisi puolestaan helpottanut, jos olisi otettu tarkastelun kohteeksi  $L_1$ -avaruuden funktiot ja käytetty pelkästään Lebesguen integraaleja. Tällöin Luku 5.3 olisi ollut pitkälti tarpeeton.

## Viitteet

- [1] Bhatia R. *Fourier Series*. Washington: The Mathematical Association of America, 2005.
- [2] Lemarié-Rieusset P.-G. Kahane J.-P. *Fourier Series and Wavelets*. Gordon ja Breach Science Publishers, 1995.
- [3] Körner T.W. *Fourier analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [4] Brown J. W. Churchill R. V. *Fourier Series and Boundary Value Problems*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1978.
- [5] Myint-U T. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.
- [6] Ray W. O. *Real Analysis*. New York: Elsevier Science Publishing Co., Inc., 1987.
- [7] Folland G.B. *Fourier analysis and its applications*. Pacific Grove, California: Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.
- [8] Ng Tze Beng. *Improper Integral and Lebesgue Integral*. URL: <http://www.math.nus.edu.sg/~matngtb/Calculus/MA3110/Chapter%2014%20Improper%20Integrals.pdf> (viitattu 27.05.2013).
- [9] Royden H. L. *Real Analysis*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- [10] Schilling R. L. *Measures, Integrals and Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [11] Cohn D.L. *Measure Theory*. Stuttgart: Birkhäuser, 1993.
- [12] Strauss W. A. *Partial differential equations : an introduction*. John Wiley & Sons, Inc., 1992.