Propuesta para la innovación del curso de precálculo: Funciones, sus gráficas, dominios y codominios.

Carlos Eduardo Bernal
matematicascb@hotmail.com

Mayo, 2020

1. Introducción

Habar del tema de funciones en nuestro contexto, es hablar de un contenido relacionado con el último grado de bachillerato y el primero de universidad. Es un curso limítrofe entre el colegio y la universidad que causa opiniones encontradas entre los profesores de colegio, aludiendo de que no se cuenta con el tiempo necesario para profundizarlo y profesores universitarios, que manifiestan que los estudiantes de primer ingreso, carecen de competencias básicas.

Según Leithold (1998): “Una función puede considerarse como una correspondencia de un conjunto $\mathcal{X}$ de números reales x a un conjunto $\mathcal{Y}$ de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x” (p. 2).

Por lo general, la enseñanza del de tema, inicia con la definición y de manera casi inmediata se facilita la función lineal, sin aplicar actividades previas para la construcción del concepto.

Con relación a esta rápida forma de enseñar, Fabra y Deulofeu (2000) comentan: La ansiedad al enseñar provoca aversión. La rapidez va en contra de la calidad, lo cual no significa que estemos en desacuerdo con la evolución, *el cambio*, la incertidumbre y el reconocimiento de los errores. Es conveniente que el profesorado se plantee con el alumnado la resolución de conflictos que vienen apareados con las situaciones nuevas. (p. 223)

Es aquí donde la enseñanza del objeto matemático se convierte en un reto y no en un proceso trivial. Donde la actitud-aptitud del profesor se fusionan, para elaborar y ejecutar nuevas propuestas para la obtención, de un aprendizaje más significativo.

Quintero y Cadavid (2009) con relación al tema, expresan lo siguiente**:** Las dificultades con las que nos encontramos en el aula en cuanto a la apropiación de los contenidos matemáticos por parte de los estudiantes, esto es, “la relación sujeto-objeto” (Radford, 2000), particularmente en cuanto al concepto de Función como objeto de conocimiento, nos llevan a reflexionar sobre aspectos relacionados con nuestra práctica docente, como posibilitadora de ambientes de aprendizaje en los cuales se tejen a diario interacciones que pueden generar bien sea, el desarrollo de conocimiento matemático o contrariamente, transformarse en un inhibidor del mismo. (p. 2)

Precisamente es la reflexión personal, la que me ha motivado a crear y ejecutar una propuesta didáctica con la finalidad de forjar conocimientos más sólidos, con relación al tema de funciones.

Parte de las conclusiones de García et al. (2004) en un contexto universitario, fue el siguiente:

Se ha documentado a través de un test aplicado a estudiantes de ingeniería que las mayores dificultades de aprendizaje del concepto de función están asociadas a tareas de transferencia entre registros semióticos. Específicamente, son las tareas de pasaje del registro gráfico al algebraico las que presentan el mayor reto para los estudiantes. (p.33)

Nuestra propuesta didáctica pretende construir el concepto y desarrollar los diferentes temas subsiguientes, utilizando las representaciones semióticas como recursos relevantes para la enseñanza y la comprensión matemática.

Entiéndase por representaciones semióticas “todas aquellas construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc. Cumplen funciones de comunicación, expresión, objetivación y tratamiento” (Tamayo,2006, p.41).

Expuesto esto, facilito las 5 fases en que se compone la propuesta didáctica:

Fase 1: Aplicación de actividades para construcción del concepto de función, adaptados de:

- Libro: *El lenguaje de funciones y gráficas*. Traducido y adaptado por Alayo (1990)
- Libro: *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria.* Calvo et al. (2016)

Fase 2: Determinar si una gráfica corresponde o no, a una función. Determinar a partir de la gráfica de una función el dominio y el codominio.

Adaptados del sitio web Khan Academy:

- Determinar si una gráfica representa una función o no. https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:recognizing-functions/e/recog-func-2
- Determinar el dominio y codominio a partir de la gráfica. https://es.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:functions/x2f8bb11595b61c86:introduction-to-the-domain-and-range-of-a-function/e/domain_and_range_0.5

Fase 3: La función lineal desde su forma algebraica y = mx + b, siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen.

Actividades:

- Graficar manualmente, una función lineal con m =1 sin efectuar cálculos.
- Graficar manualmente, una función lineal con m ≠ 1 determinando solo el corte en el eje de las abscisas x.

Fase 4: La función cuadrática desde su forma general $y = ax^2 + bx + c$, y su forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$.

Actividades:

- Verificación de la correspondencia algebraica–gráfica al variar los parámetros de la función (Anchura, concavidad, ordenada en el origen, traslación vertical y horizontal)

  Ejercicios adaptados del blog MatematicasCercanas.com

  https://matematicascercanas.com/2017/05/26/funcion-cuadratica-parabola/

  y verificados con la aplicación GeoGebra https://www.geogebra.org/m/tnfMxTqV.

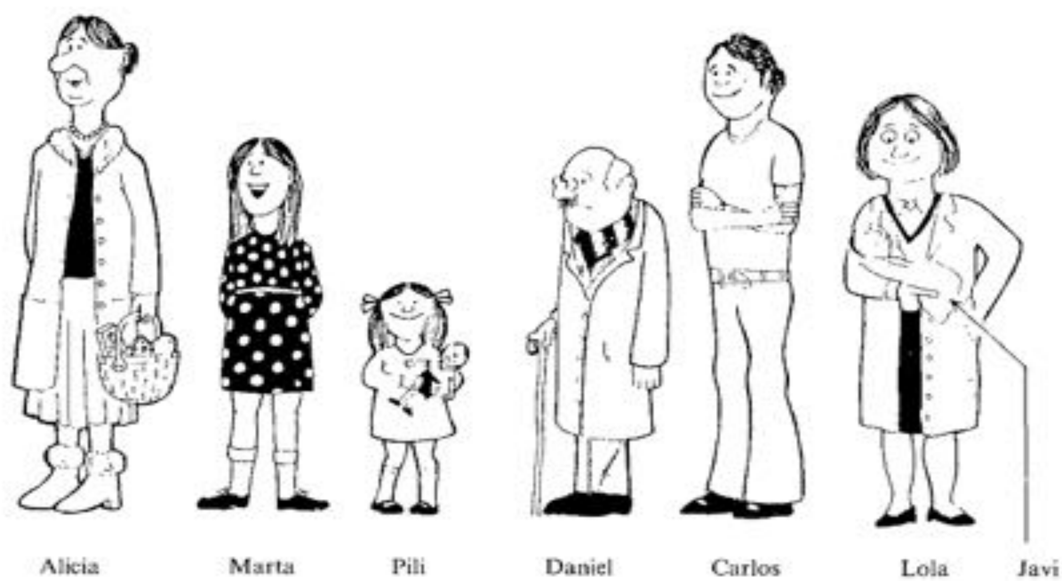
- A partir gráficas impresas de rectas y parábolas, determinar la ecuación de la función.

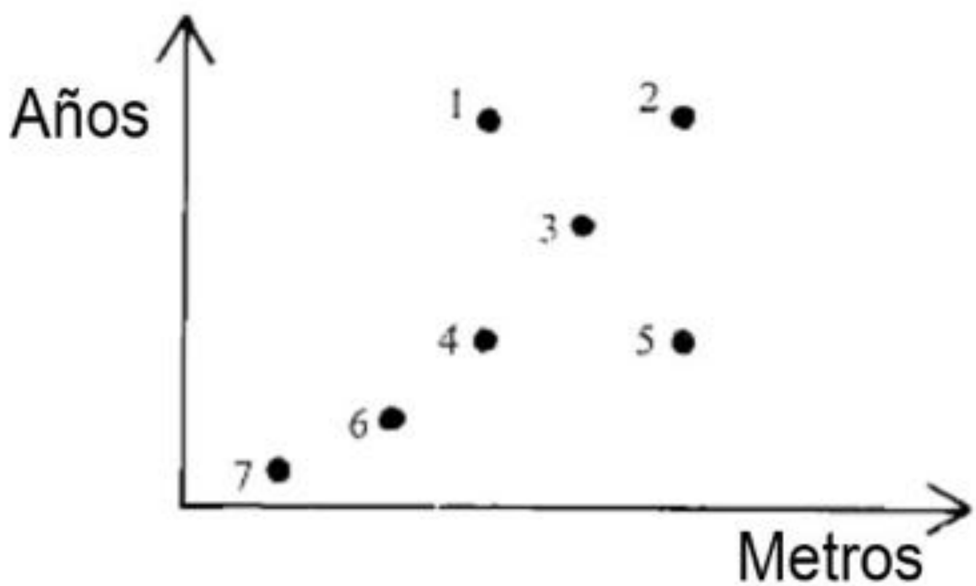
Fase 5: Ejercicios de argumentación, a partir de informaciones gráficas.

Adaptado del sitio web ¿Which One Doesn’t Belong? http://wodb.ca/graphs.html

2. Construcción del objeto matemático (Función)

1. **La siguiente imagen, representa la cola de una parada de autobús y el diagrama de la parte inferior, se relaciona con cada una de las personas que presenta la imagen.**





A partir de esta información, responde lo siguiente:

- De las unidades que presentan los ejes vertical y horizontal ¿Qué aspectos de las personas, crees que se están relacionando? ______________________________
- Cada punto esta enumerado. Por lo tanto, determina a quien representa cada uno:

Punto 7: ____________________ Punto 6:___________________

Punto 4: ____________________ Punto 3:___________________

Punto 1: ____________________ Punto 2:___________________

Punto 5: ____________________

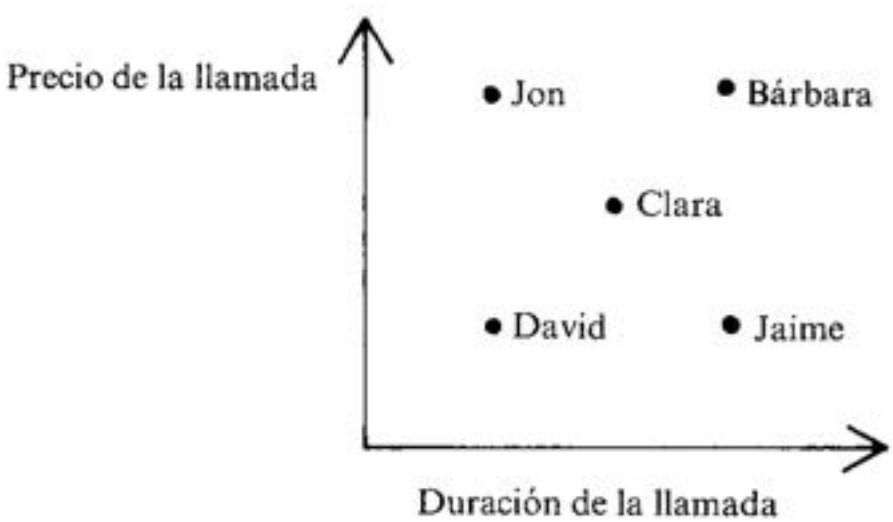
- ¿Qué otros aspectos podríamos relacionar en este grupo de persona?

____

____

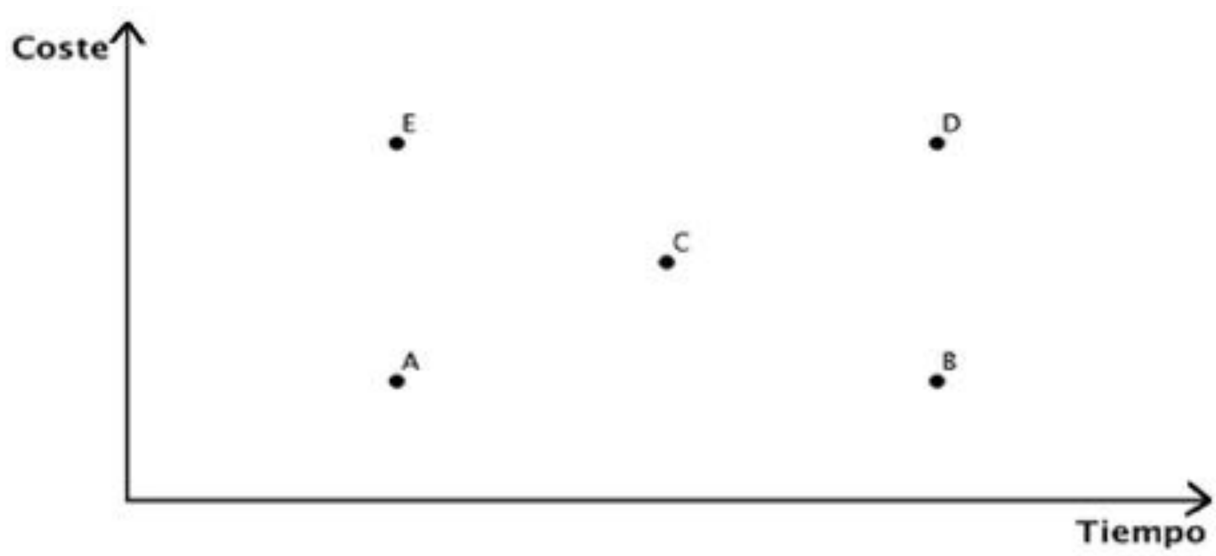
2. Llamadas telefónicas

Un fin de semana. Cinco personas hicieron llamadas telefónicas a varias partes del país. Anotaron el precio de sus llamadas y el tiempo que estuvieron en el teléfono en la siguiente gráfica:



- ¿Quién realizó la llamada de mayor distancia? Explica con cuidado tu razonamiento.
- ¿Quién realizó una llamada de menor distancia? Explícalo.
- ¿Quiénes hicieron llamadas a la misma distancia aproximadamente? Explícalo de nuevo.

3. Observa la siguiente gráfica. Cada uno de los puntos corresponde a un ticket de parking distinto.



- ¿Cuál de los tickets corresponde a la estancia en el parking más larga? ¿Cuál corresponde al coste más elevado?
- ¿Todos los tickets corresponden a un mismo parking y con una misma tarifa? ¿Cuáles sí y cuáles no?
- Explica la información que se puede obtener al interpretar la gráfica.

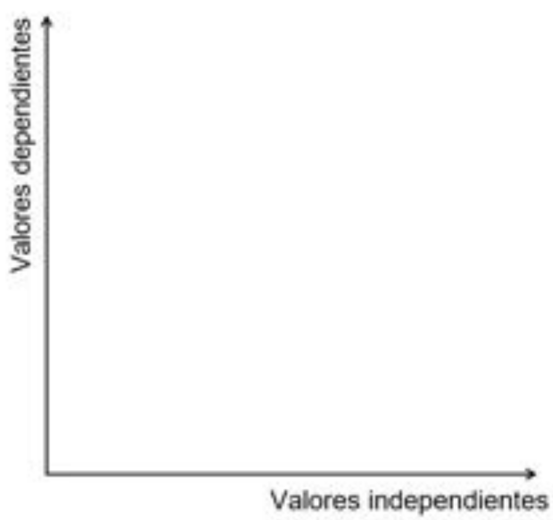
4. En una estación de combustible de la localidad, el litro de gasolina tiene un precio de B/. 0.74. A partir de esta información, determine los valores de las siguientes compras:

Litros de gasolina	Valor de la compra
2	
5,5	
9	
7,5	
6	

Como observas, existe una correspondencia entre dos conjuntos, el del litro de gasolina y el del valor de la compra. ¿Cuál conjunto es dependiente del otro? ¿El del litro de gasolina del valor de la compra, o viceversa?

Localiza los puntos que corresponda a cada pareja de valores, en un sistema de ejes como los mostrados en las actividades anteriores.

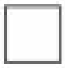
Utiliza el eje horizontal para los valores del conjunto independiente y el eje vertical para los del dependiente.

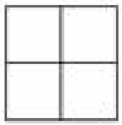


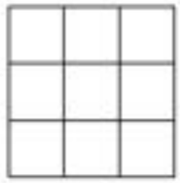
¿Qué relación encuentras entre los puntos localizados?

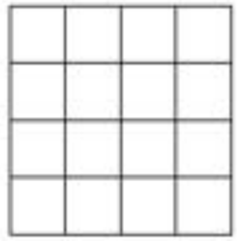
5. Relación entre la longitud del lado de un cuadrado y su área.

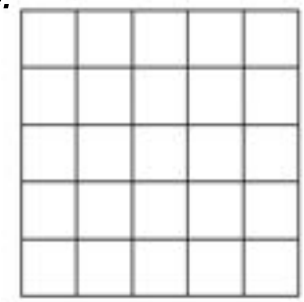
Observa las figuras y completa la tabla:

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

.

Número de unidades en el lado	Área del cuadrado
1	
2	
3	
4	
5	

Una vez completada la tabla, localiza los puntos y únelos a través de una línea utilizando tu pulso. Recuerda colocar los valores dependientes e independientes en los ejes recomendados.

¿Al unir los puntos, que forma obtiene la gráfica? Explica su significado.

6. Con la contratación de 15 obreros, se construyó un pequeño edificio en 20 meses. ¿Cuántos obreros tenían que haberse contratado, para construir el edificio en 15, 10, 5 y 4 meses, respectivamente?

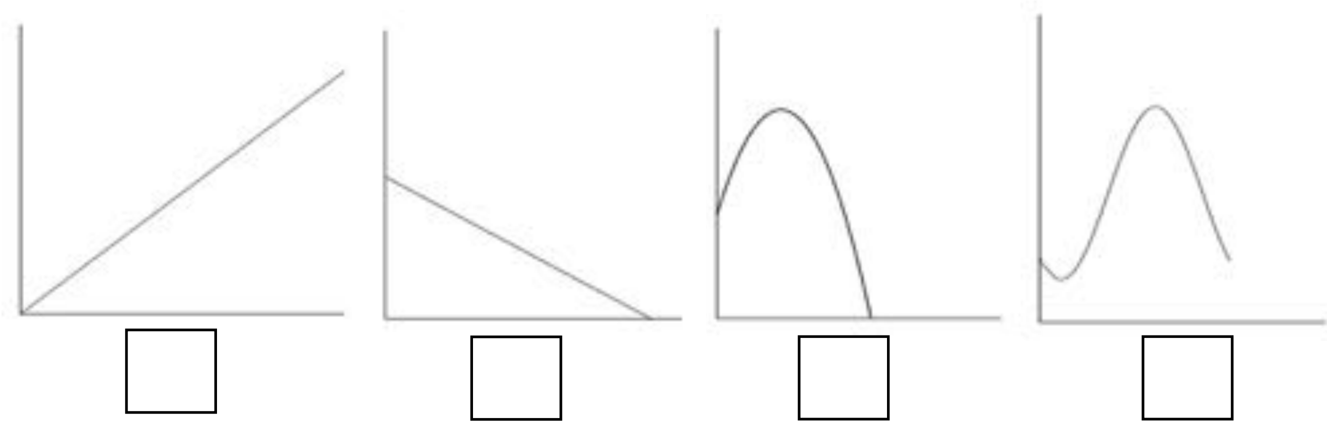
Número de obreros	Número de meses
15	20
	15
	10
	5
	4

Una vez completada la tabla, localiza los puntos y únelos a través de una línea utilizando tu pulso. Recuerda colocar los valores dependientes e independientes en los ejes recomendados.

¿Qué forma tiene la gráfica? Explica su significado.

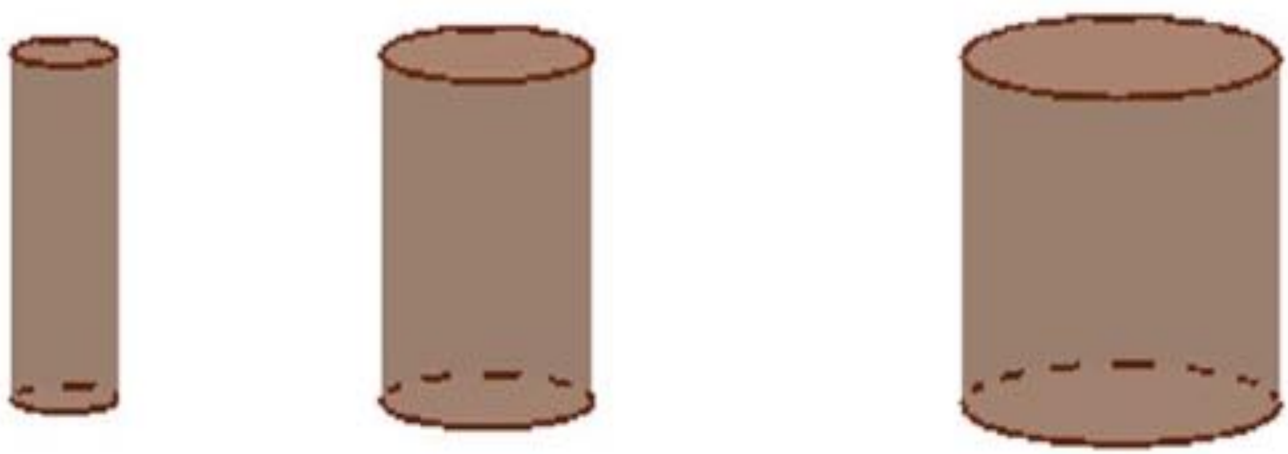
7. Tenemos cuatro situaciones expresadas verbalmente y cuatro gráficas. Relaciona cada frase con una gráfica, explicando el porqué de tu elección.
A. ¿Cómo varía la altura de una pelota desde que la lanzamos al aire verticalmente hasta que llega al suelo?
B. ¿Cómo varía la temperatura durante un día en la cima de una montaña, empezando a las 12 de la noche?
C. ¿Cómo varía el coste de la gasolina según la cantidad de litros que ponemos?
D. ¿Cómo varía la altura de una vela a medida que va consumiéndose?

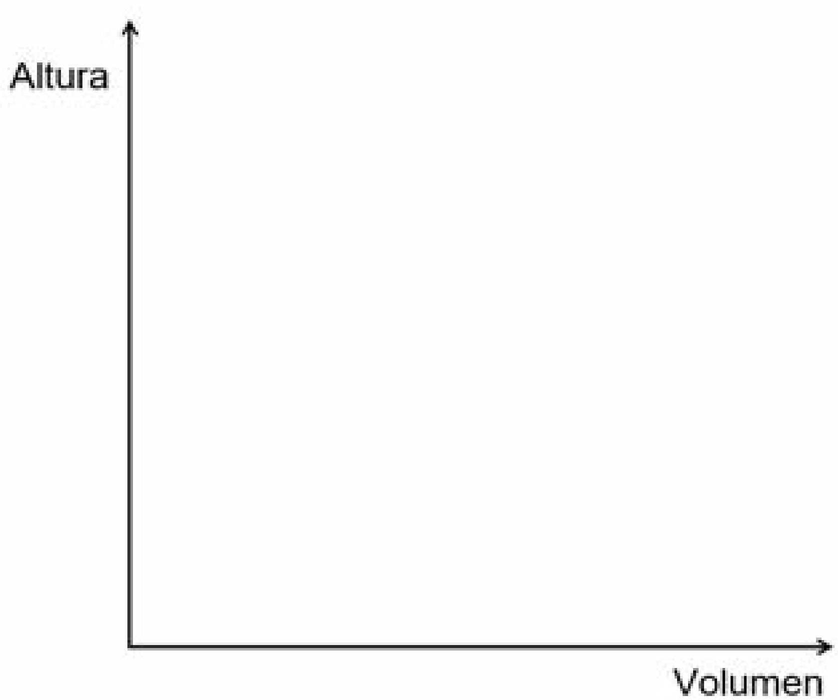
Coloca en el recuadro debajo de cada gráfica, la letra que corresponda a cada situación:



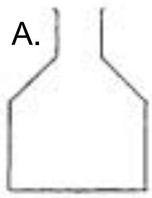
8. Llenando botellas.

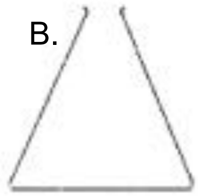
A. Tenemos tres botellas de forma cilíndrica, todas con la misma altura pero distinta base. Empezamos a llenar las botellas con agua y queremos representar en un mismo gráfico la variación de la altura de acuerdo con la cantidad de agua (volumen) introducido en cada una de las botellas. Dibuja en unos mismos ejes de coordenadas el gráfico que corresponde a cada botella.

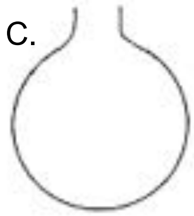




B. Aquí hay 6 frascos y 9 gráficas. Elige la gráfica correcta para cada frasco, escribiendo en el recuadro la letra correspondiente. Dibuja cómo deberían se los frascos que corresponden a las tres gráficas sobrantes.

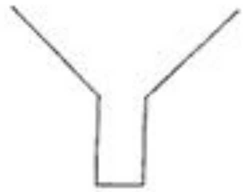
A.


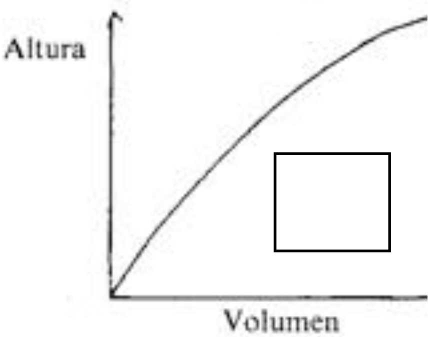
B.


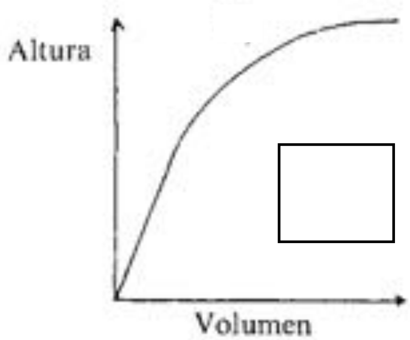
C.


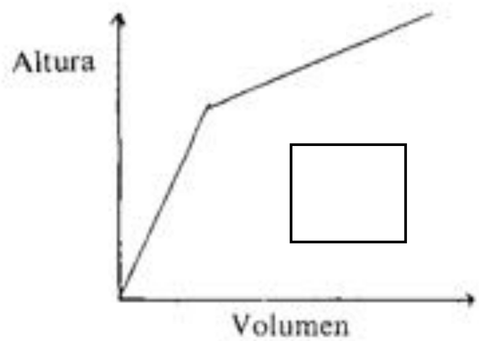
D.

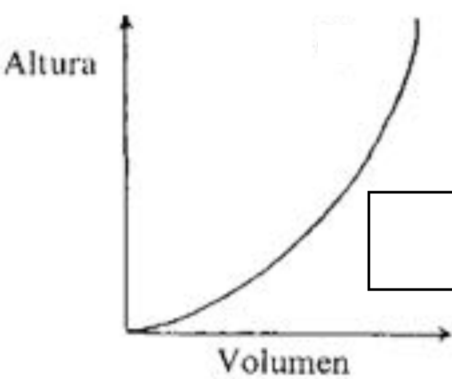

E.

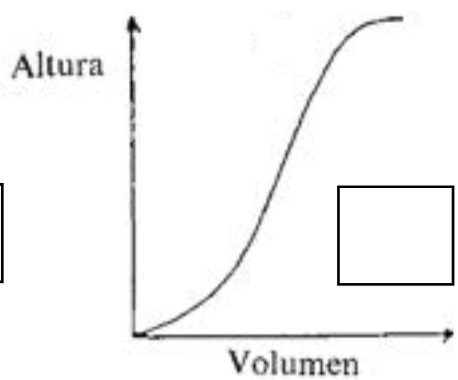

F.


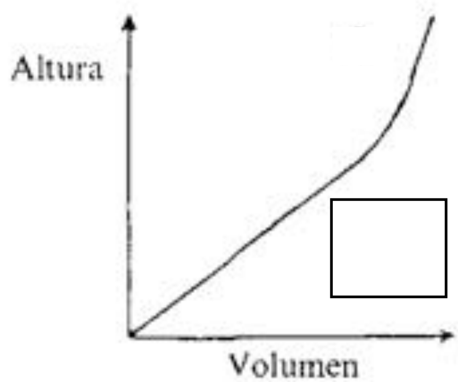


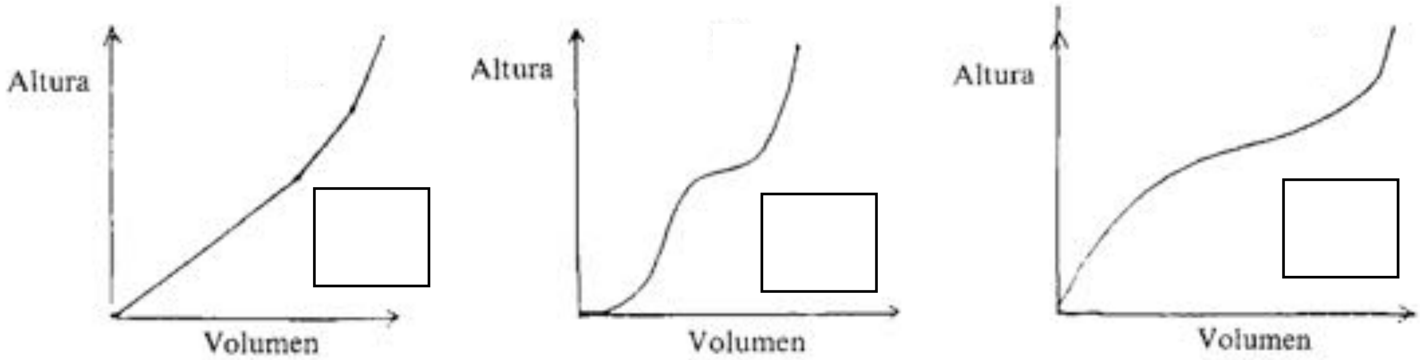












Como haz visto, las relaciones entre dos conjuntos son variadas y generan diversas representaciones gráficas. Líneas rectas, curvas y demás formas.

Estas relaciones también generan modelos matemáticos (Ecuaciones) y dieron origen, a uno de los conceptos y herramienta más fundamentales, el cual tiene aplicación en diferentes contextos, como el científico y el comercial. Este concepto se conoce como ***Función.***

En los siguientes apartados, conocerás sobre los modelos matemáticos, la definición formal de este concepto-herramienta llamada función, otras formas gráficas y demás aspectos que se generan de estas relaciones.

3. Modelos matemáticos

Determinemos el modelo matemático de algunas de las actividades que hemos desarrollado:

A) La venta y compra de gasolina en una determinada estación.

El valor de la compra depende de los litros de gasolina. Lo que implicó que le correspondiera el **eje vertical** a los valores de **compra** y al **eje horizontal** a los **litros** de gasolina.

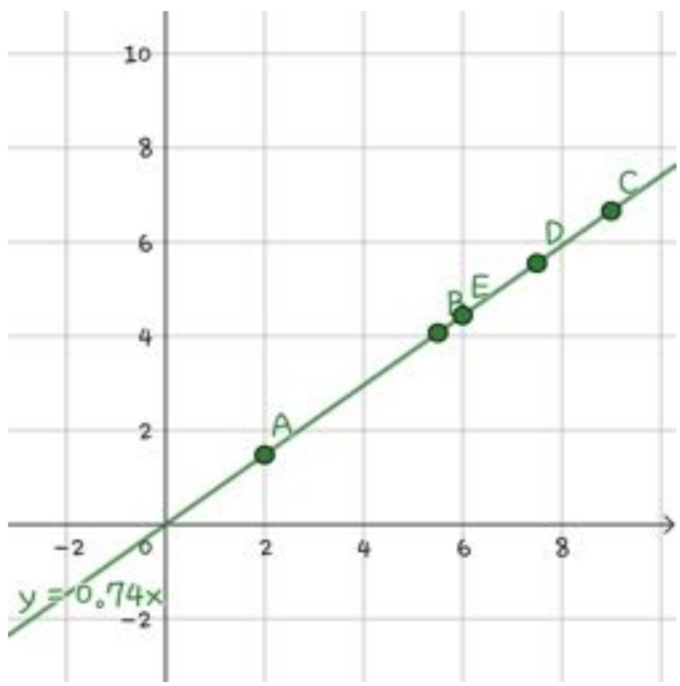
Consecuente con esto, designemos por la letra y ↔ Los valores de compra

X ↔ Los litros de gasolina

Lo siguiente es escribir en forma algebraica la operación pertinente para obtener el valor de la compra. Compra = 0,74 · Litros

Sustituyendo $y = 0{,}74\ x$

Si utilizamos la aplicación GeoGerba, para localizar los puntos y graficar la ecuación, obtendremos una representación como esta:



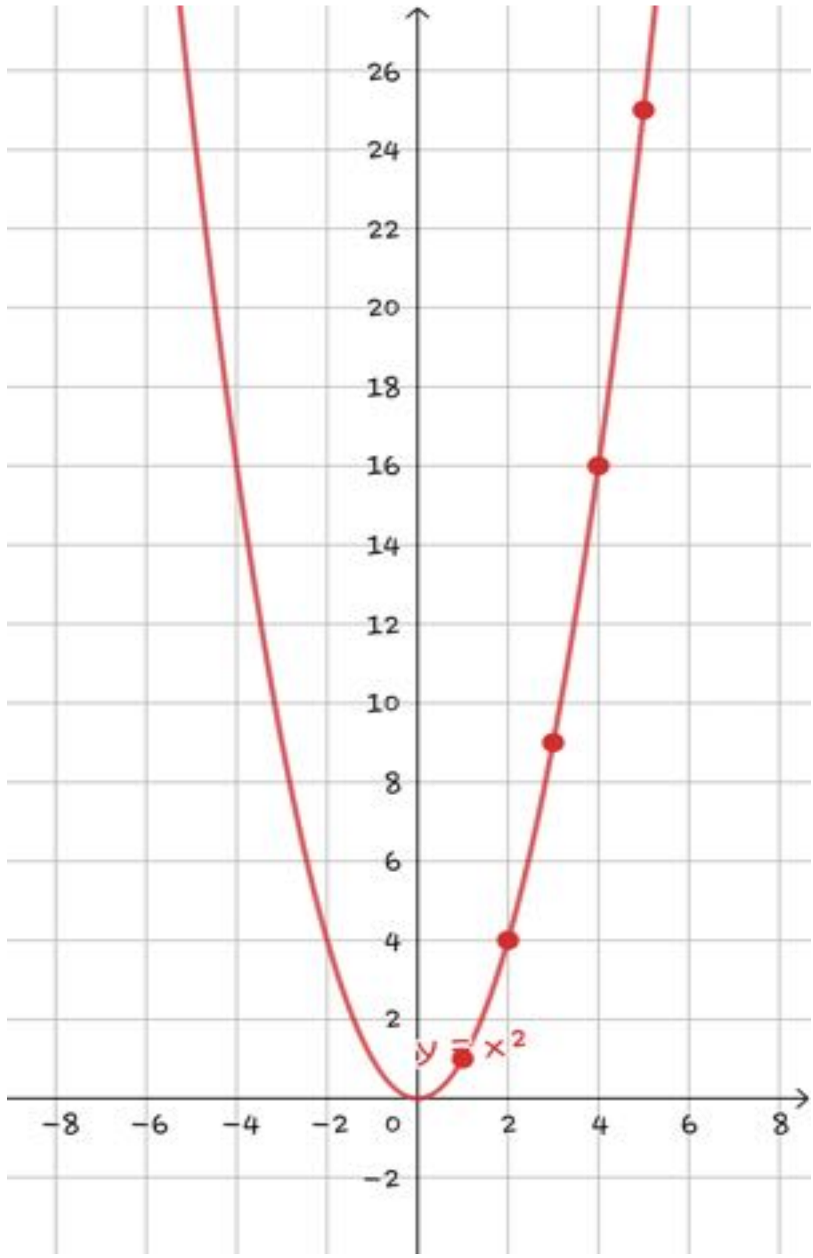
De esta manera, verificamos que los puntos pertenecen a la gráfica de la ecuación.

B) La relación entre el área de un cuadrado y la longitud de su lado

La fórmula de área para un cuadrado es $A = l^2$.

El área depende de la longitud del lado. Por lo tanto, el modelo matemático en términos de *x* e *y* es:

$$y = x^2$$



C) La relación en el tiempo de construcción y el número de obreros.

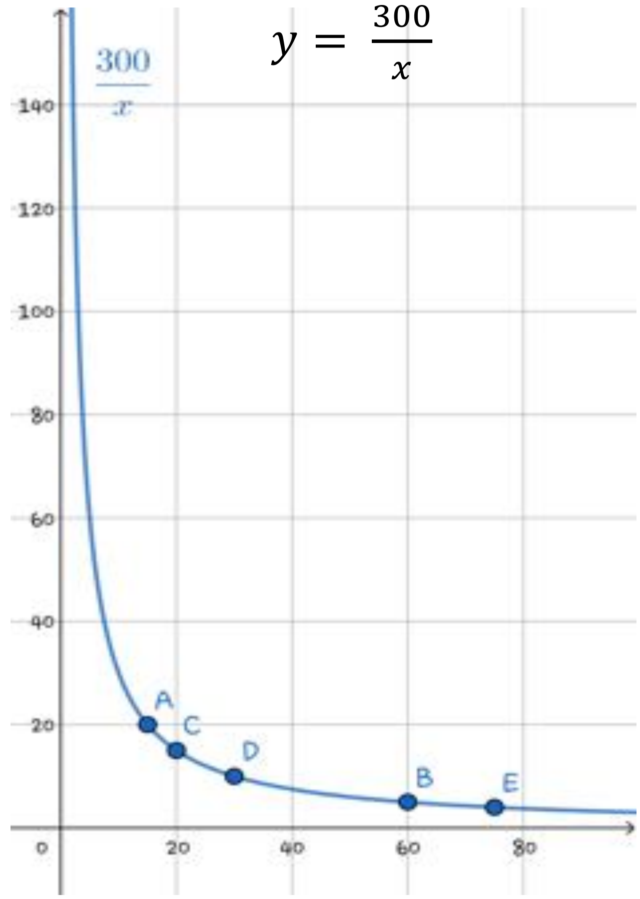
Número de obreros	Número de meses
15	20
20	15
30	10
60	5
75	4

Como se observa, existe una relación inversamente proporcional entre el tiempo de construcción y el número de obreros.

La constante de proporcionalidad es 300 y se obtiene multiplicando cualquiera de las parejas de números.

El tiempo de construcción depende del número de obreros y por presentarse una relación inversa el modelo matemático es:

$$y = \frac{300}{x}$$

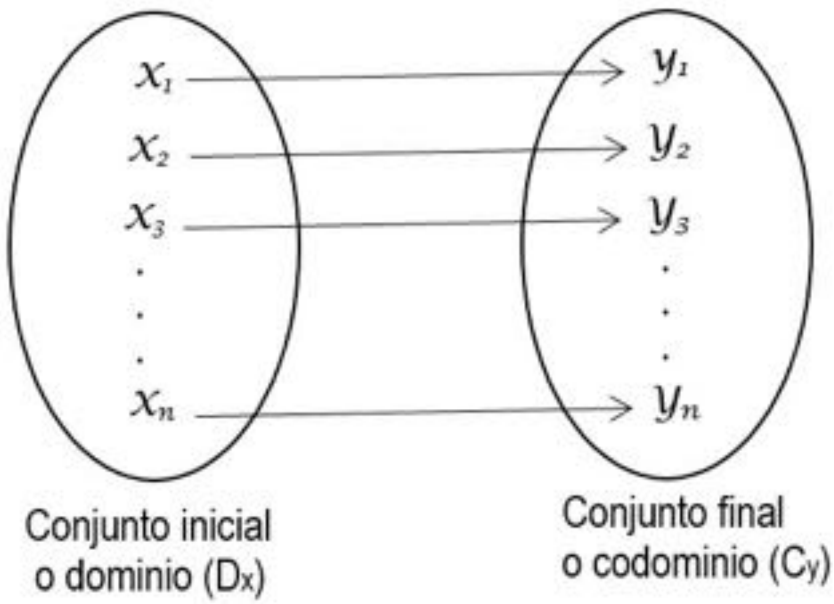


A continuación, la definición formal de función.

4. Funciones y sus gráficas

Definición

Una función $y = f(x)$, es una relación entre dos conjuntos de forma que a cada elemento del conjunto inicial (variable independiente x) le corresponda un **único** elemento del conjunto final (variable dependiente y).

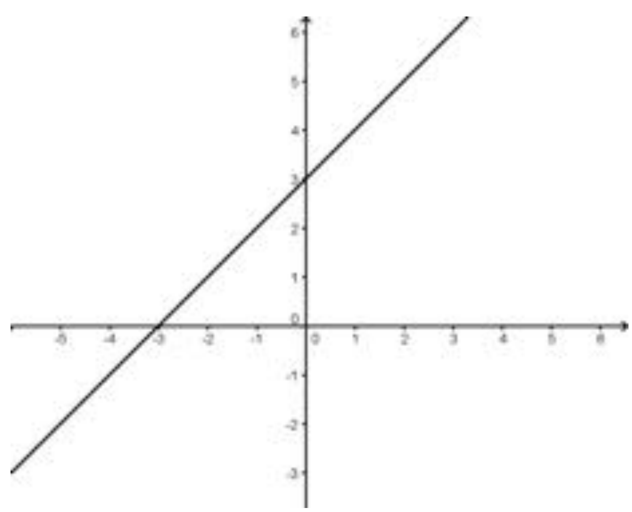


Representación gráfica

Tomando los valores x como abscisas y los correspondientes valores y como ordenadas se obtienen una serie de puntos en el plano cartesiano. El conjunto formado por todos estos puntos originará una línea recta o curva, que recibe el nombre de gráfica de la función.

Dominio y codominio a partir de la gráfica

Ejemplo 1: Una función f(x) es graficada y se obtiene la siguiente representación:



¿Cómo determinar el dominio y codominio a partir de la gráfica?

Tracemos segmentos perpendiculares del eje x a un punto de la gráfica como se observa en la Fig. 3.

¿Cuántos valores del eje **x** guardan relación con la gráfica?

La gráfica corresponde a una recta y las rectas se extienden hacia el infinito en ambos sentidos.

Por lo tanto, $D_x = \mathbb{R}$.

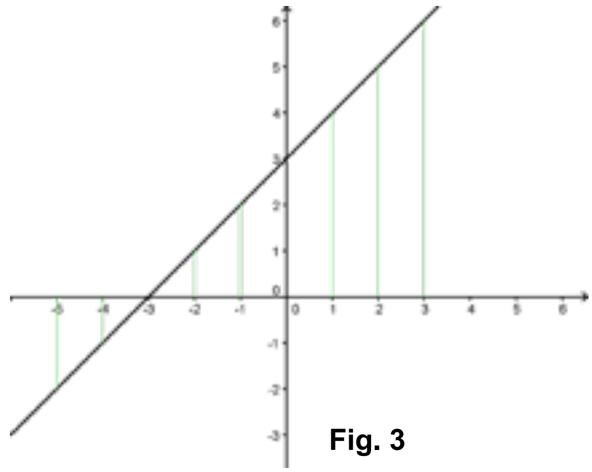
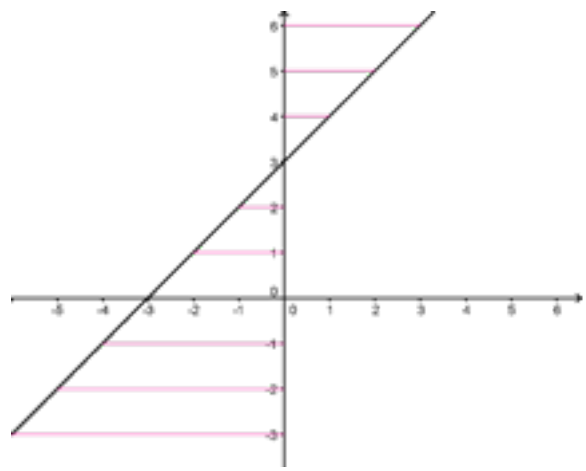


Fig. 3

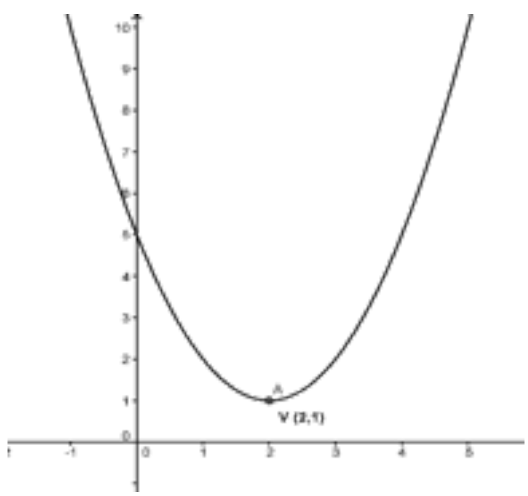
De igual forma apliquemos la misma técnica para determinar el codominio.

¿Cuántos valores del eje **y** guardan relación con la gráfica?

Nuevamente podemos observar que todos sus valores. Por lo tanto, $C_y = \mathbb{R}$.

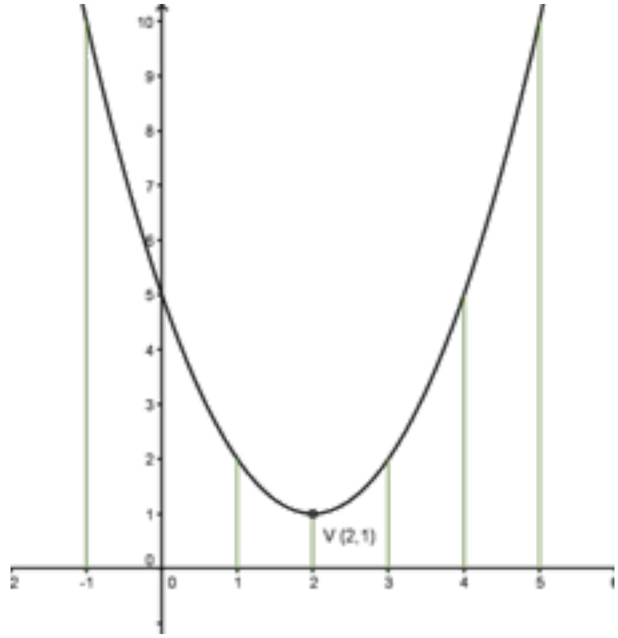


Ejemplo 2: Una función f(x) es graficada y se obtiene la siguiente representación:



La gráfica en este caso resulta una parábola con vértice (2, 1). Aplicando la técnica anterior tenemos lo siguiente:

Como toda parábola se abre hacia el infinito, todos los valores de eje x se relacionan con la gráfica. Por lo tanto, $D_x = \mathbb{R}$.



Como podemos observar en la Fig. 7, los valores del eje y que se relacionan con la gráfica, van de 1 hacia arriba. Por lo tanto, $C_y = [1,\ \infty)$.

Lo otro que se observa, es que los valores del eje y > 1 se relacionan con dos puntos de la gráfica, lo que implica que a los y > 1 les corresponden dos valores del eje x, relación que cumple con la definición de función.

¿Por qué

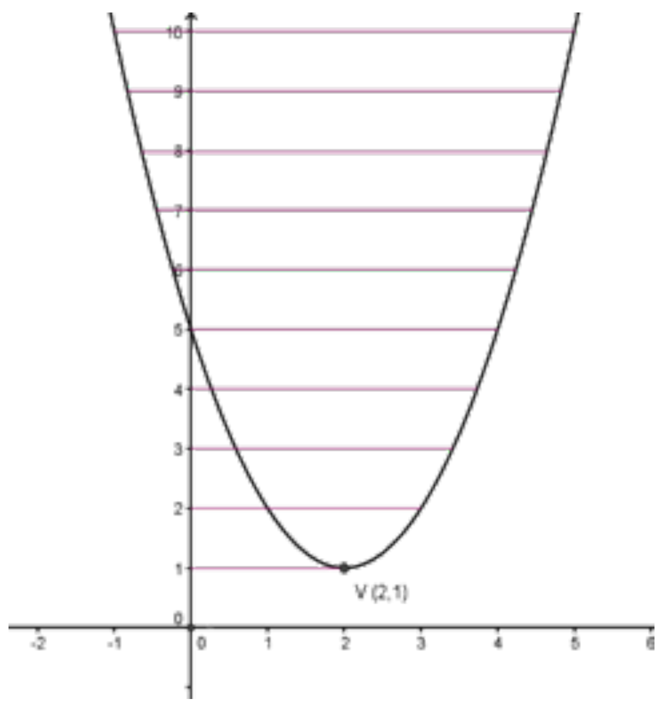
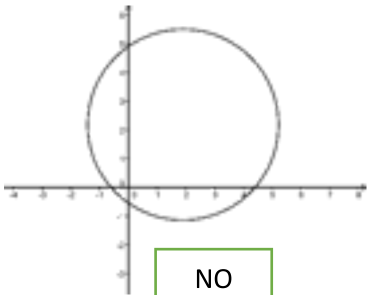


Fig. 7

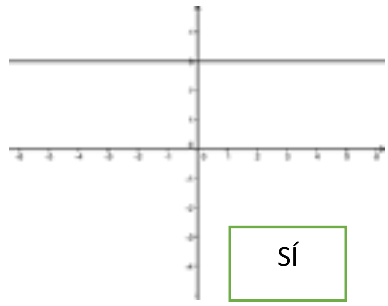
Observación: La finalidad de compartir esta técnica, no es para que se aplique de igual forma, sino más bien es una orientación para determinar tanto el dominio como el codominio a través de la visualización.

Ejercicios resueltos

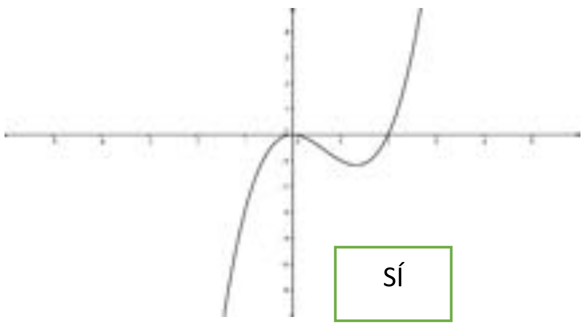
A. Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función. Escribe sí o no en el respectivo recuadro:



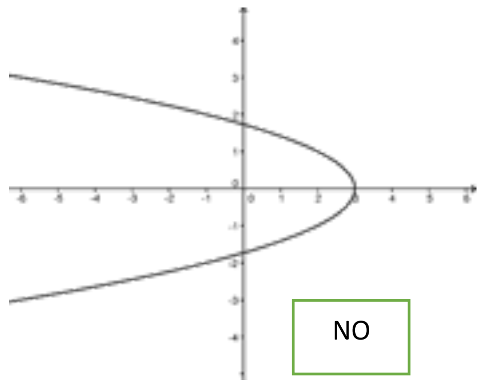
NO



SÍ

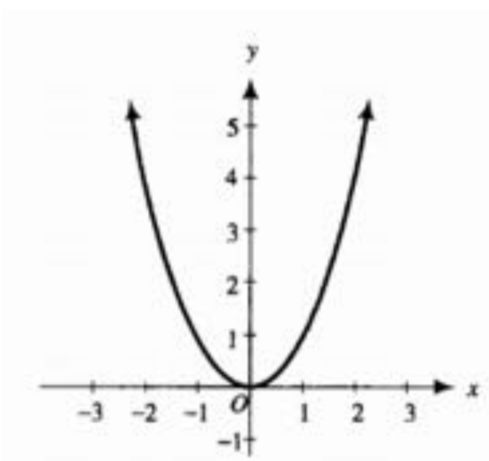


SÍ



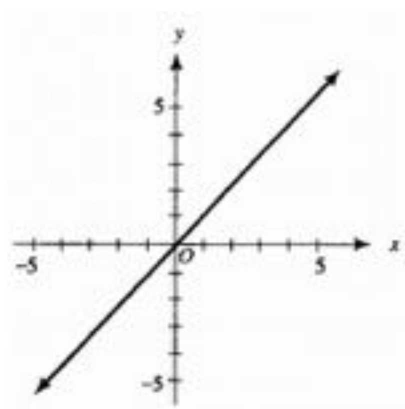
NO

B. Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica:



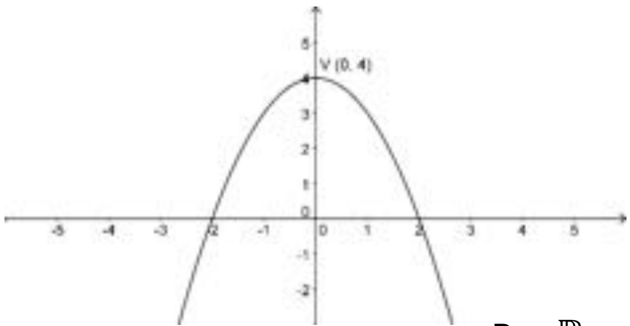
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = [0, \infty)$



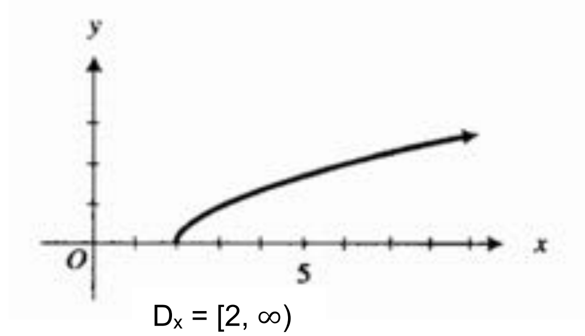
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \mathbb{R}$



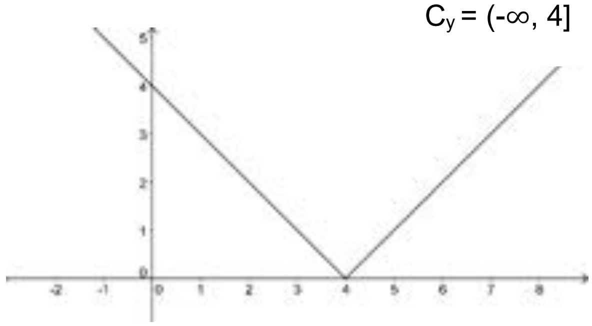
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 4]$



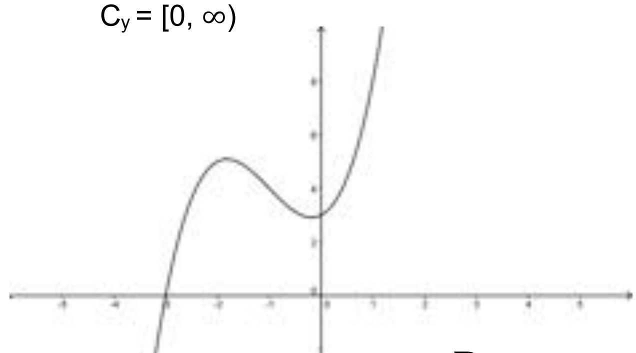
$D_x = [2, \infty)$

$C_y = [0, \infty)$



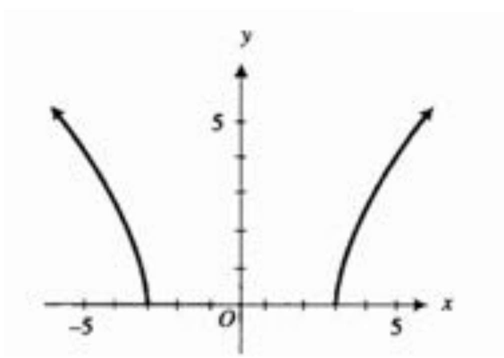
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = [0, \infty)$



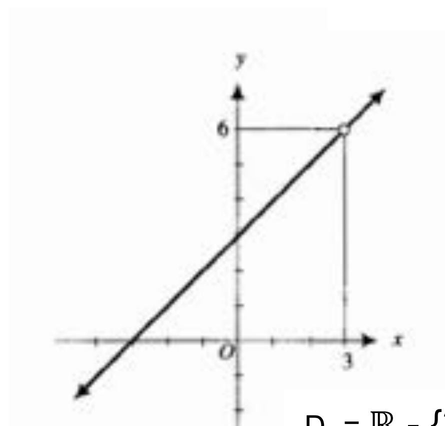
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \mathbb{R}$



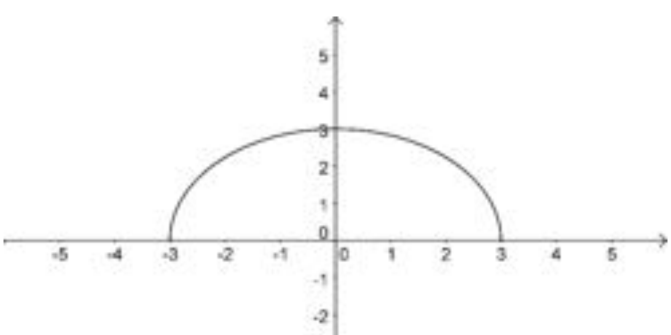
$D_x = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$C_y = [0, \infty)$



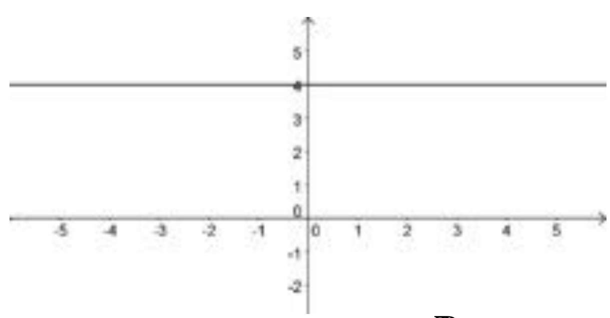
$D_x = \mathbb{R} - \{3\}$

$C_y = \mathbb{R} - \{6\}$



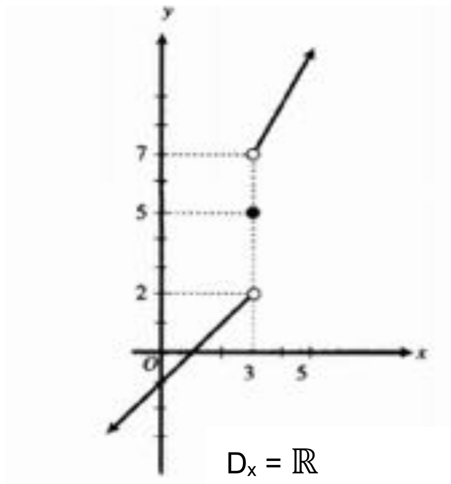
$D_x = [-3, 3]$

$C_y = [0, 3]$



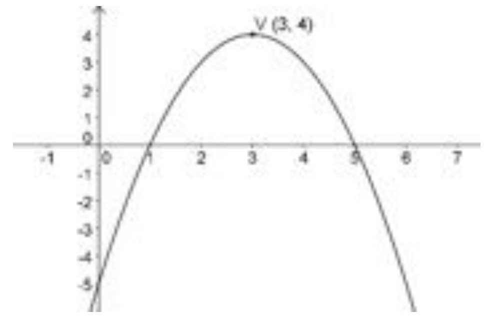
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \{4\}$



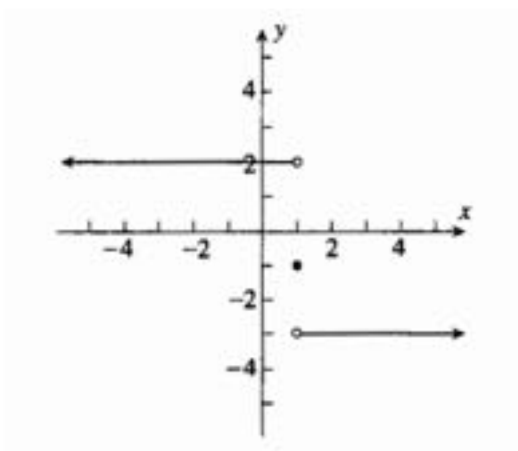
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 2) \cup \{5\} \cup (7, \infty)$



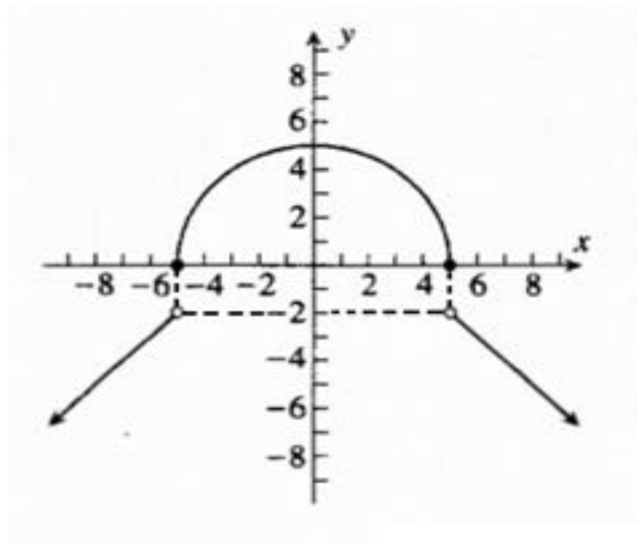
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, 4]$



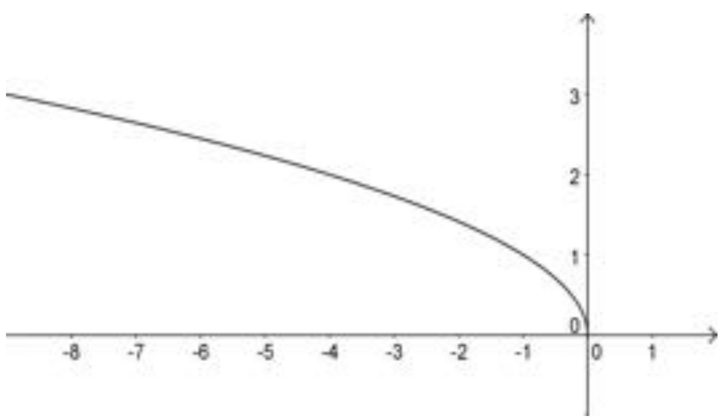
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = \{-3, -1, 2\}$



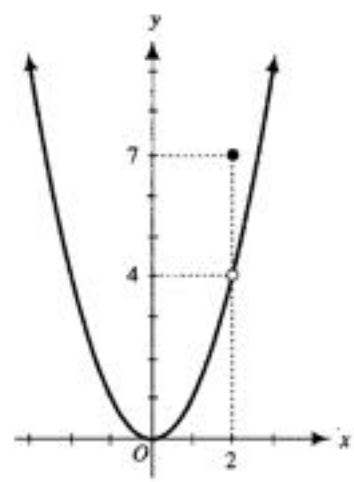
$D_x = \mathbb{R}$

$C_y = (-\infty, -2) \cup [0, 5]$



$D_x = (-\infty, 0]$

$C_y = [0, \infty)$

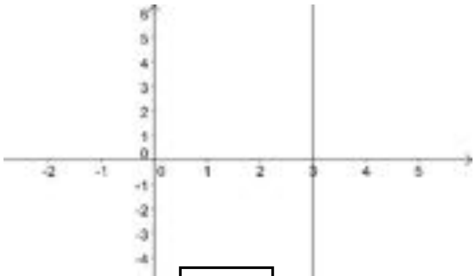


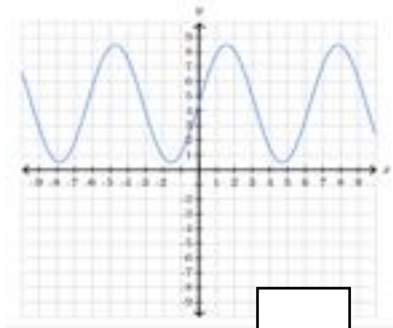
$D_x = \mathbb{R}$

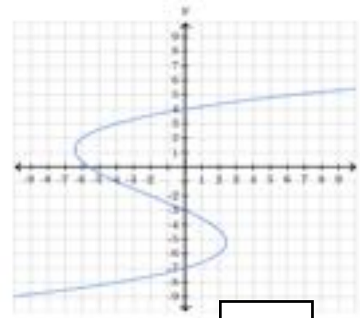
$C_y = \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$

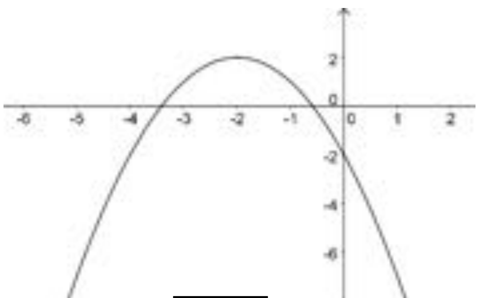
Actividad de afianzamiento_1

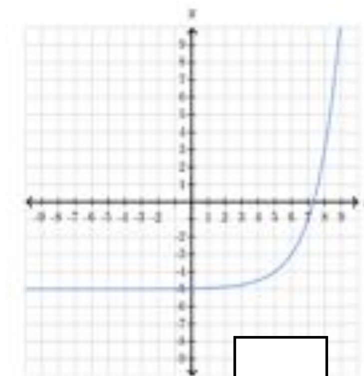
A. Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función.   Escribe sí o no en el respectivo recuadro:

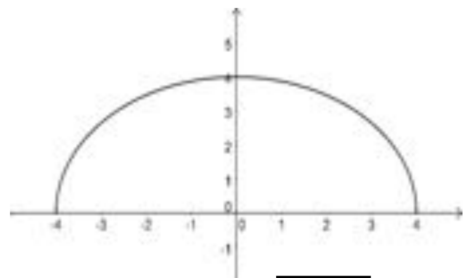




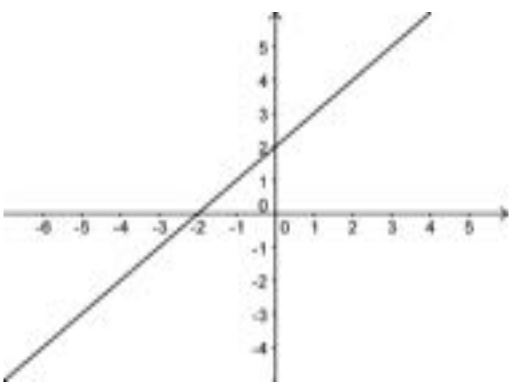






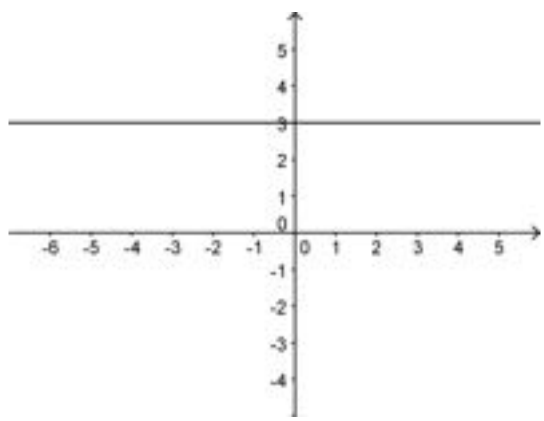


B. Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica:



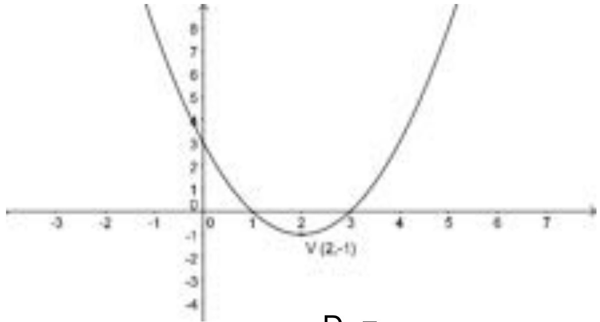
D_x =

C_y =



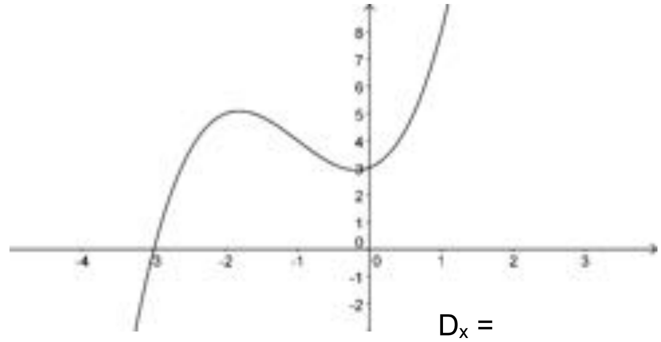
D_x =

C_y =



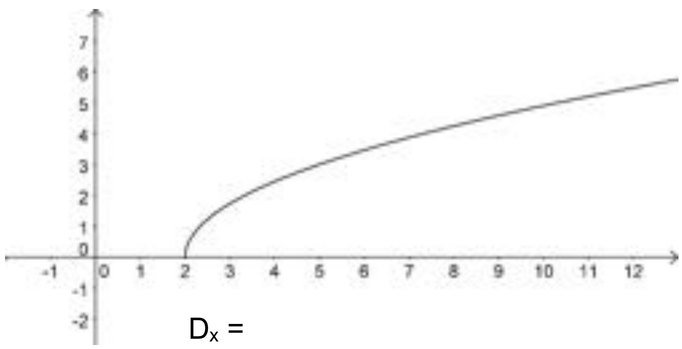
D_x =

C_y =



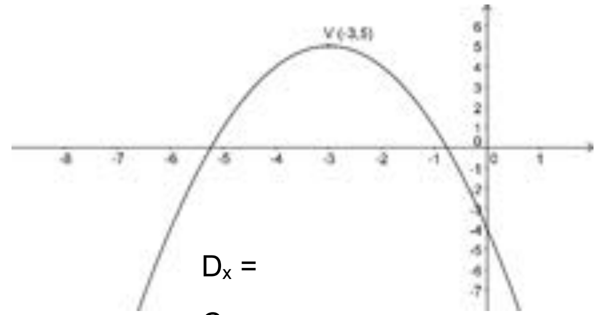
D_x =

C_y =



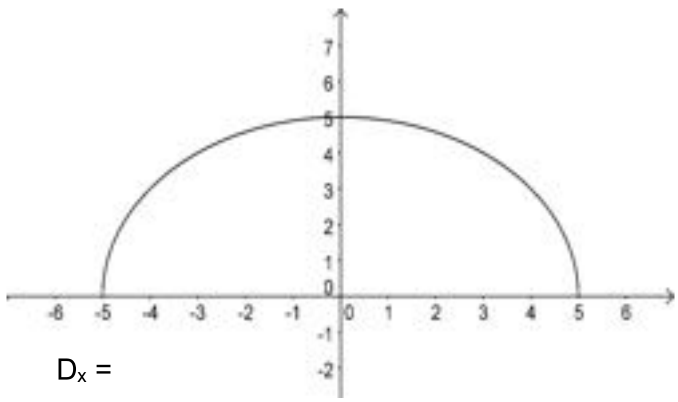
D_x =

C_y =



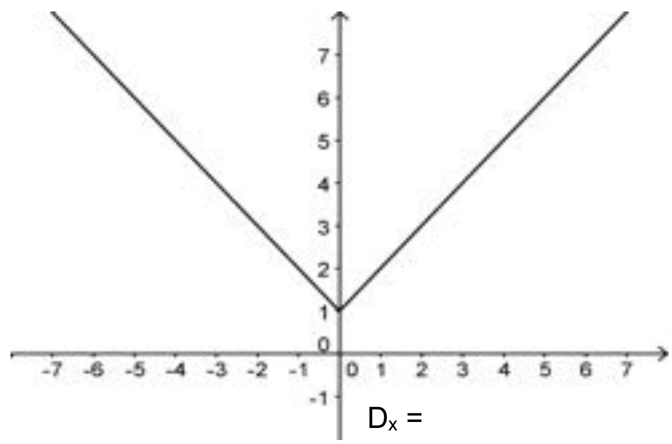
D_x =

C_y =



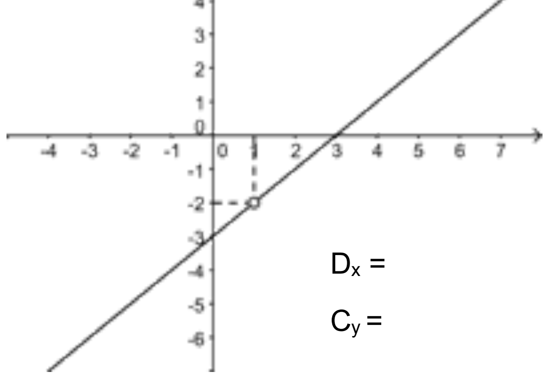
D_x =

C_y =



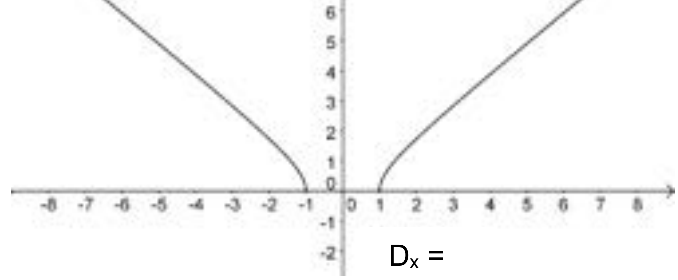
D_x =

C_y =



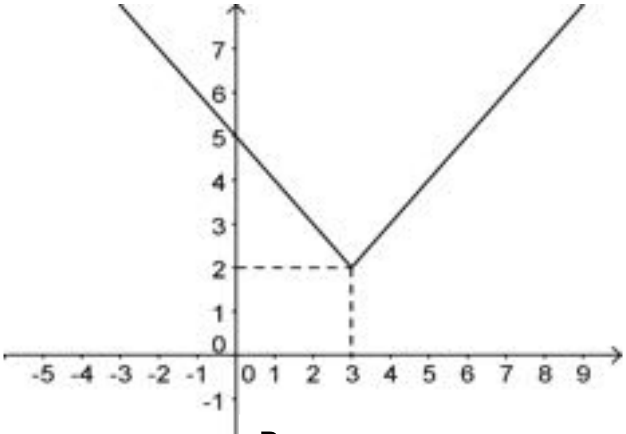
D_x =

C_y =



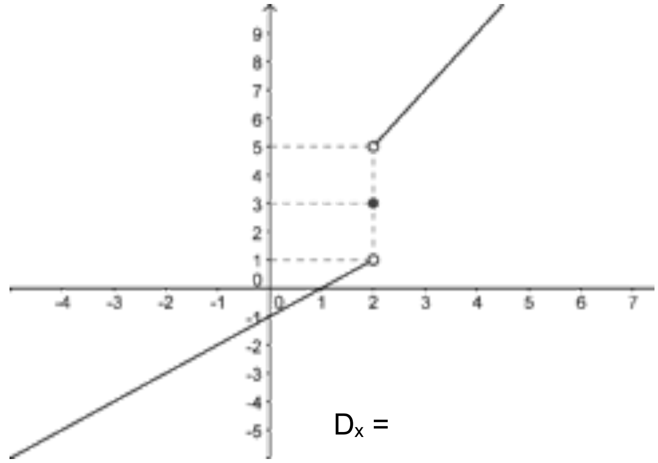
D_x =

C_y =



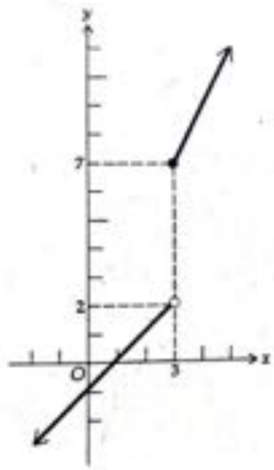
D_x =

C_y =



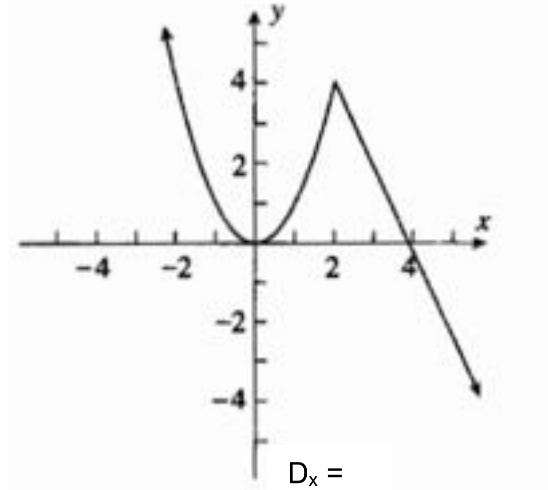
D_x =

C_y =



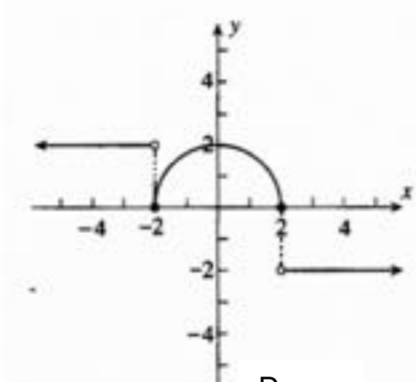
D_x =

C_y =



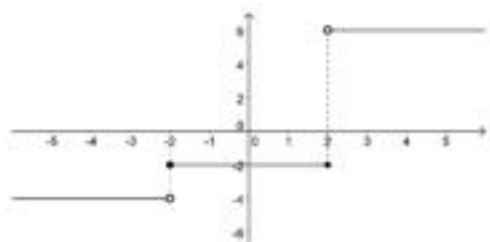
D_x =

C_y =



D_x =

C_y =



D_x =

C_y =

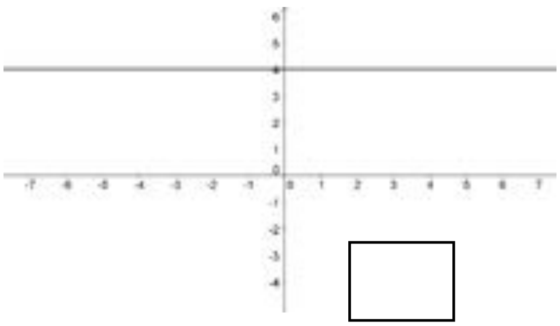
Parcial 1

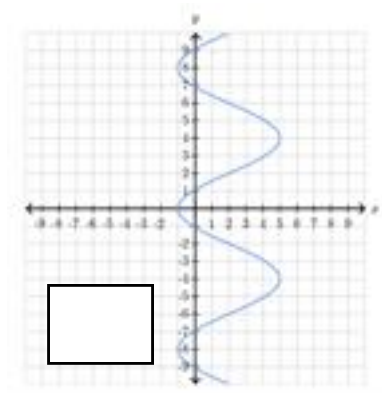
Fecha:____________________ Prof. Carlos Bernal

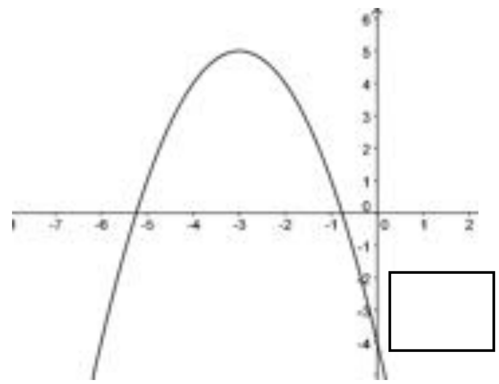
12°___ Total de puntos: 36

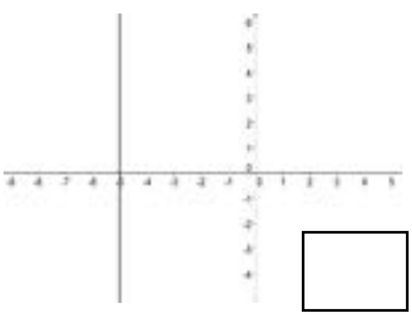
Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:_____

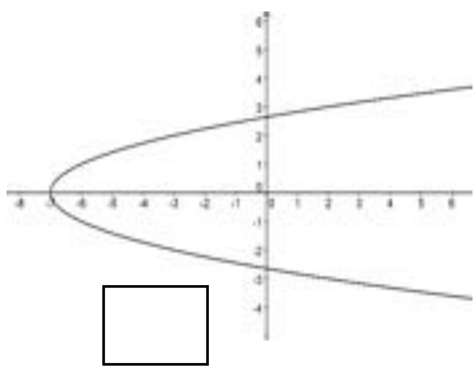
I_ Identifica cuales de las siguientes gráficas corresponden a una función. Escribe sí o no en el respectivo recuadro: (12 ptos.)

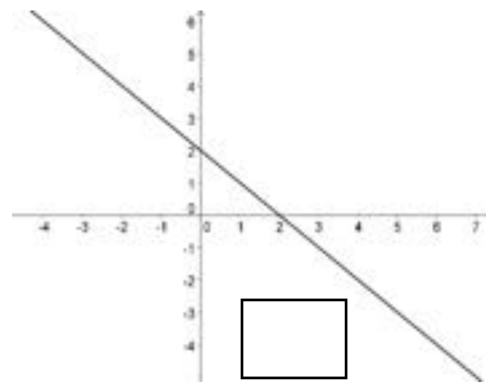




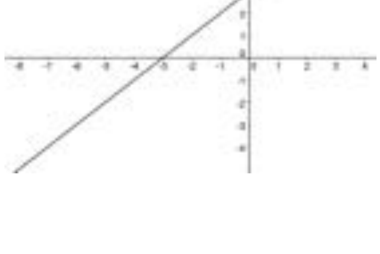


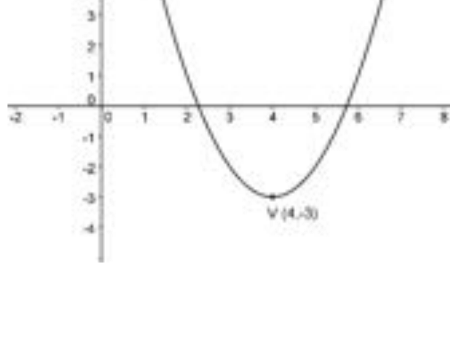


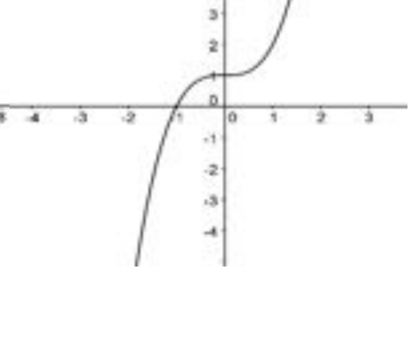




II_Determina el dominio y el codominio a partir de la información gráfica: (24 ptos.)

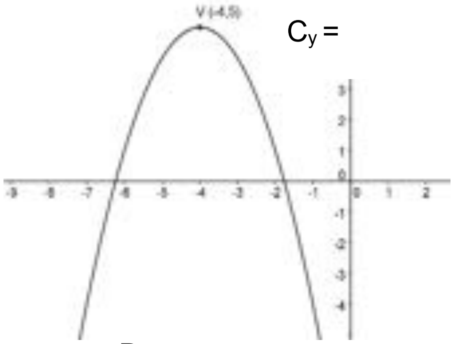






$D_x =$

$C_y =$

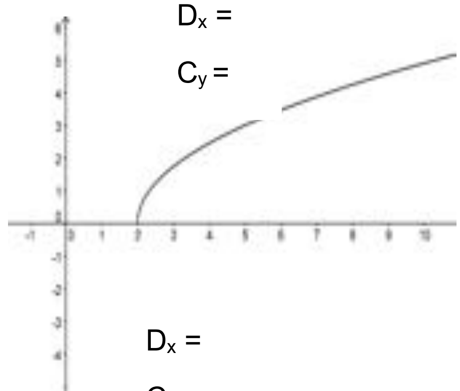


$D_x =$

$C_y =$

$D_x =$

$C_y =$

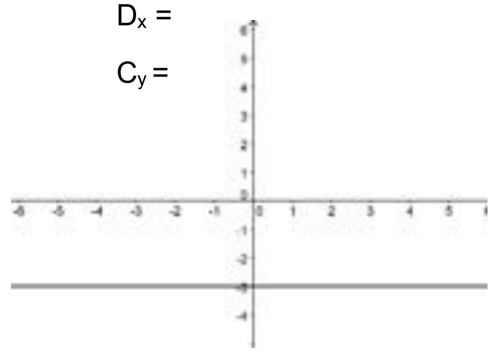


$D_x =$

$C_y =$

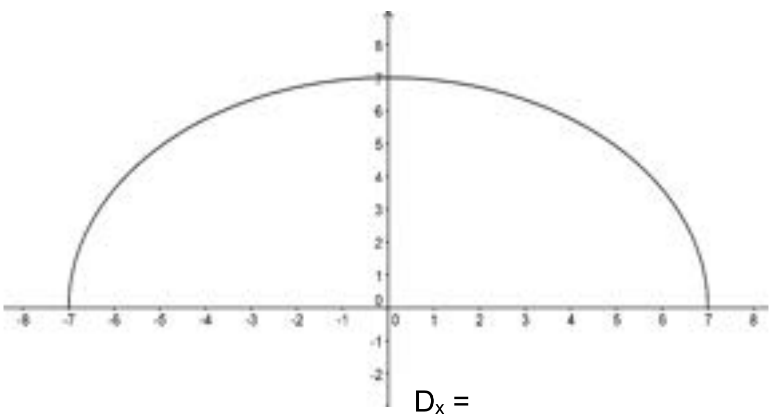
$D_x =$

$C_y =$



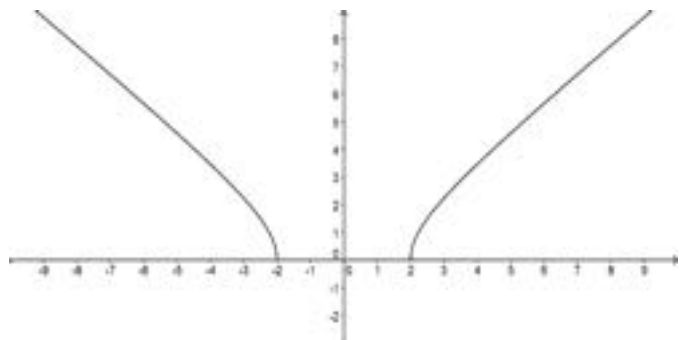
$D_x =$

$C_y =$



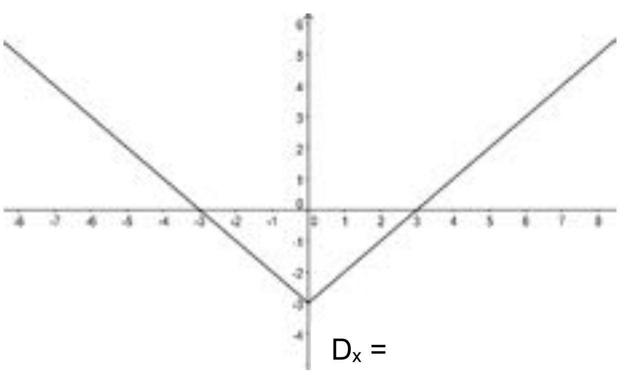
$D_x =$

$C_y =$



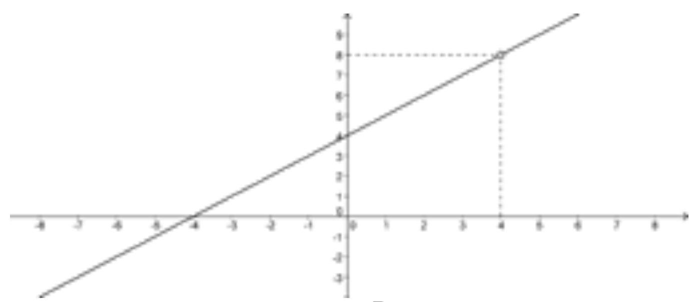
$D_x =$

$C_y =$



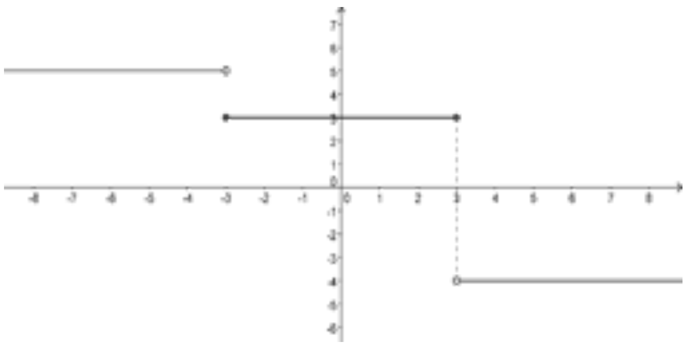
$D_x =$

$C_y =$



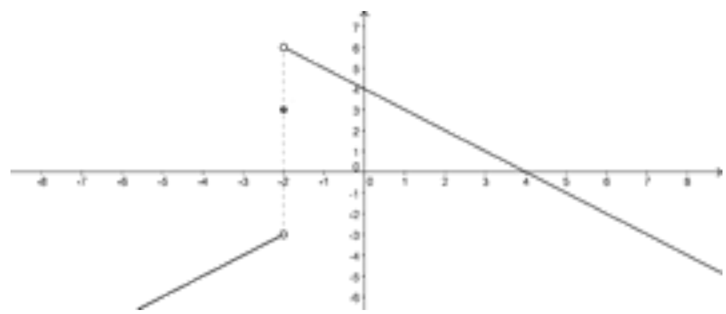
$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$



$D_x =$

$C_y =$

5. Tipos de funciones

A. Lineal

Las funciones lineales se representan gráficamente mediante rectas.
En la siguiente figura se representan gráficamente dos funciones lineales:

$$y = x + 1, \quad y = x + 3.$$

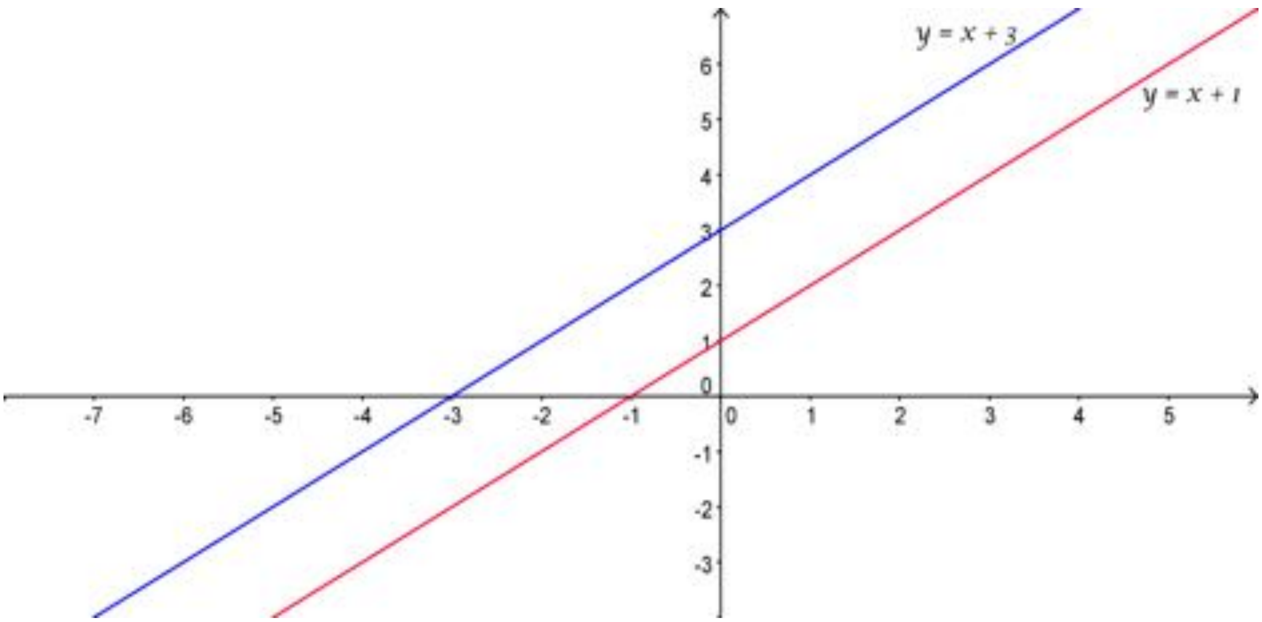


Fig. 1

Observa los detalles de la figura y responde lo siguiente:

¿Dónde corta $y = x + 1$ al eje y? ________

¿Dónde corta $y = x + 1$ al eje x? ________

¿Dónde corta $y = x + 3$ al eje y? ________

¿Dónde corta $y = x + 3$ al eje x? ________

A partir de estos datos, ¿Dónde crees que cortaría $y = x + 2$, ambos ejes?

Eje y en _____

Eje x en _____

Completa la figura de arriba y traza $y = x + 2, \; y = x + 4, \; y = x + 5.$

Observa las siguientes representaciones gráficas:

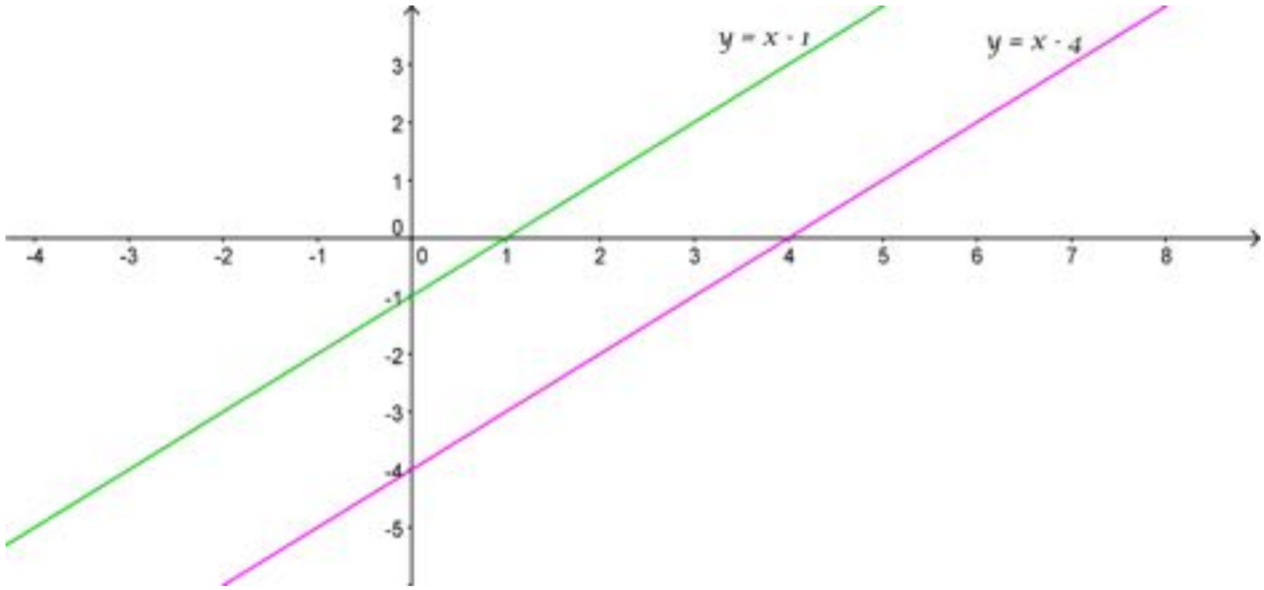
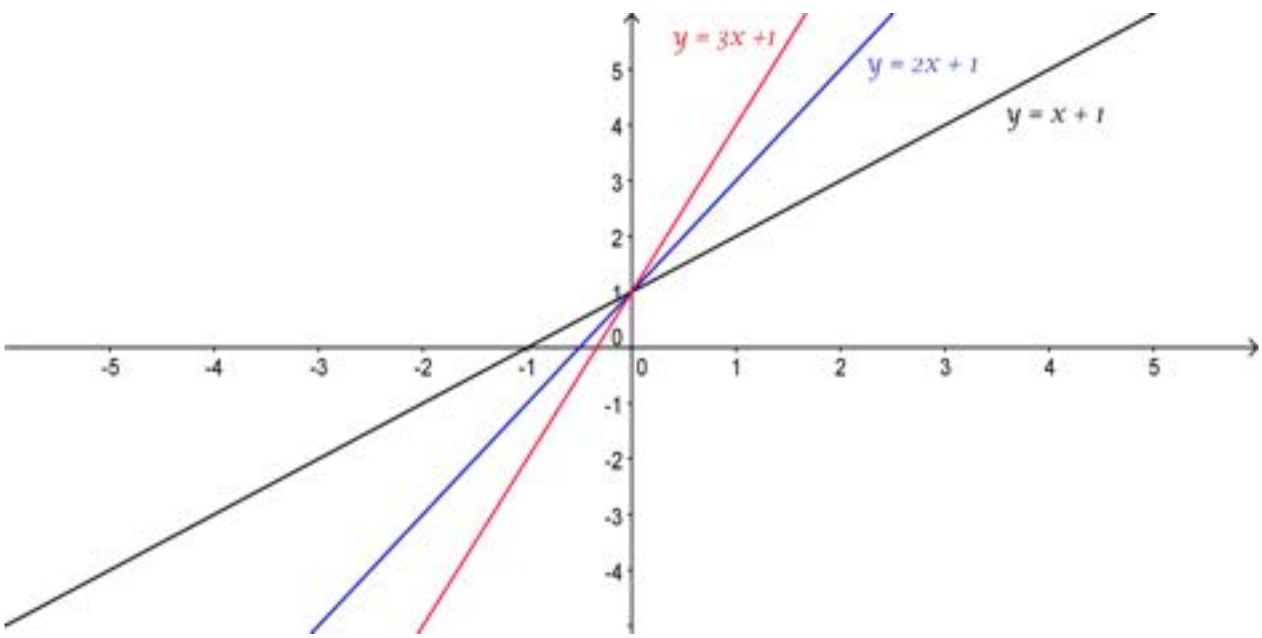


Fig. 2

Nuevamente determina donde cada una de las siguientes funciones, corta a los ejes, y traza en la misma figura. $y = x - 2,\quad y = x - 3,\quad y = x - 5$.

Observa la relación entre las siguientes rectas:

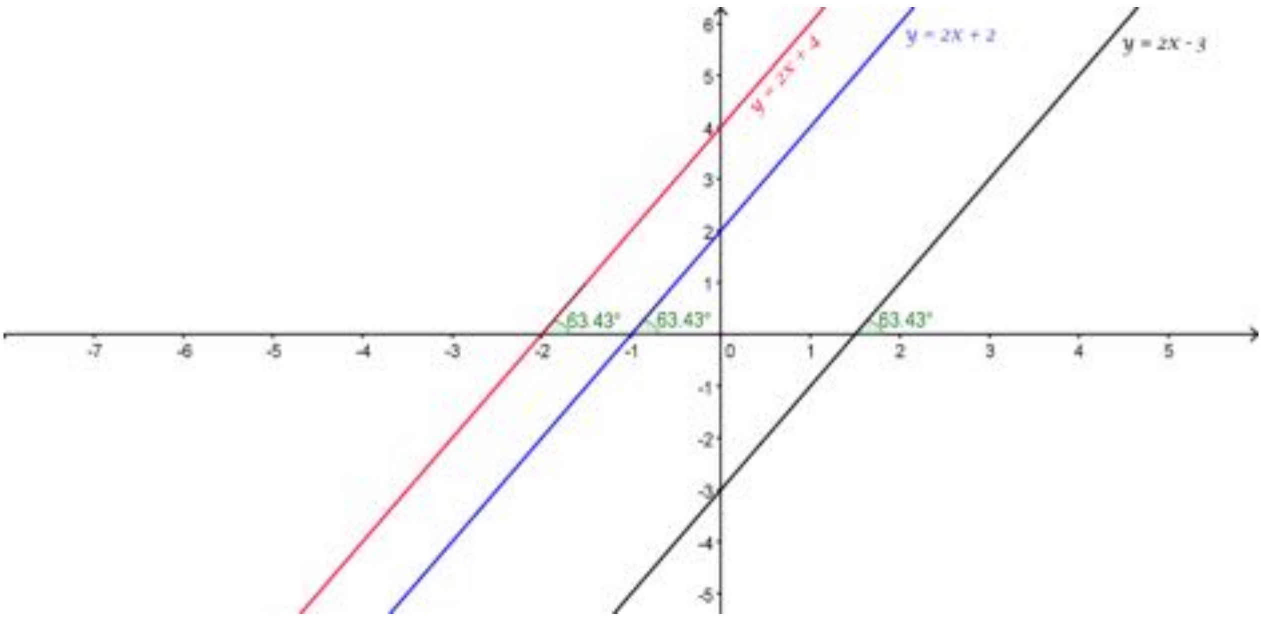


¿Qué tienen en común?

¿Qué sucede cuando el coeficiente de la variable independiente x aumenta?

Esta inclinación que se observa a medida que aumenta el coeficiente de la variable independiente x, se denomina pendiente de la recta y el valor independiente (en este caso 1) es el punto donde la recta interseca al eje y. Por lo tanto, la forma general de la función lineal es $y = mx + b$ ó $f(x) = mx + b$. Donde m es la pendiente y b el punto donde la recta interseca el eje y, conocido también como ordenada en el origen.

Observa el siguiente grupo de rectas:



¿Qué tienen en común?

¿Esta condición en qué las convierte?

En rectas pa-______-las.

Recapitulando, a partir de lo observado podemos determinar que una función $y = mx + b$, con $m = 1 \wedge b \neq 0$, interseca al eje y en b e interseca al eje x en -b, como se observa en las figuras 1 y 2.

Una función $y = mx + b$, con $m \neq 0$, $m \neq 1 \wedge b \neq 0$, interseca al eje y en b.
¿En qué punto intersecará al eje x?
Sencillo.

¿Cuál es el valor de la variable y, en el punto de intersección de la recta con el eje x?
Cero.
Por lo tanto, solo sustituimos este valor en la variable y, y despejamos la variable x.

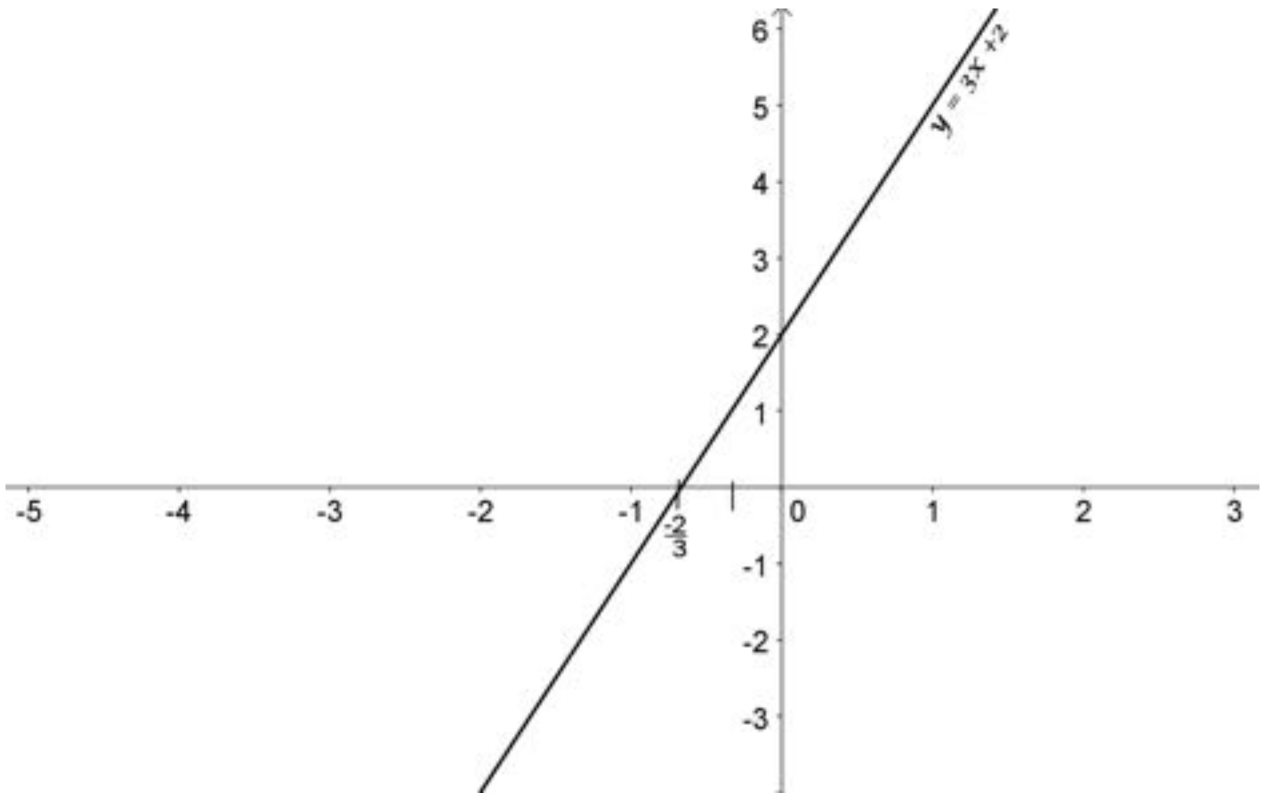
Dada una función:

$y = mx + b$, con $m \neq 0$, $m \neq 1 \wedge b \neq 0$, si $y = 0 \Rightarrow 0 = mx + b \Rightarrow \dfrac{-b}{m} = x$

Ejemplo: Represente gráficamente la función $y = 3x + 2$.

$$0 = 3x + 2$$

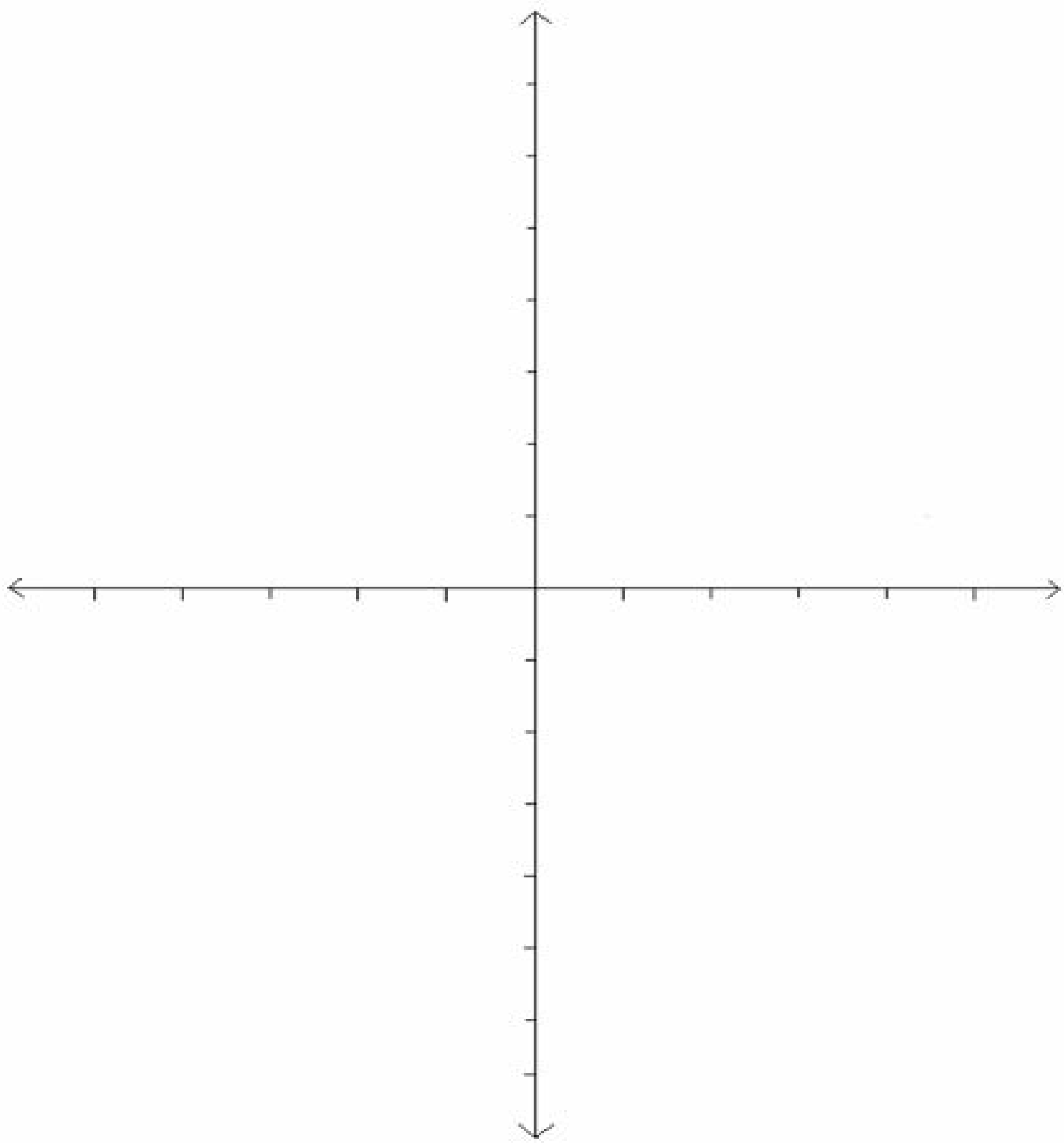
$$\frac{-2}{3} = x$$



Traza en esta misma figura las rectas correspondientes a: $y = 2x + 5$, $y = 4x - 2$.

Actividad de afianzamiento_2

Grafica las siguientes funciones en el plano cartesiano: $y = x + 6$, $y = x + 7$, $y = x - 6$, $y = x - 7$, $y = 5$, $y = -4$, $y = 3x + 4$, $y = 2x + 3$, $y = 4x - 3$, $y = 4x - 5$, $y = 3x + 2$, $y = -x - 2$, $y = -x + 1$.



A.1 Dominio y codominio a parir de la forma algebraica

A partir de la gráfica de una función lineal hemos determinado que:

a) Una función $y = mx + b$, con $m = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow$ $D_x = \mathbb{R} \wedge C_y = b$.

Cuando la función lineal cumple con esta condición, se dice que la función es constante.

b) Una función $y = mx + b$, con $m \neq 0 \Rightarrow$ $D_x = \mathbb{R} \wedge C_y = \mathbb{R}$.

¿Cómo verificar este dominio y codominio, a partir de la forma algebraica?

Ejemplo: Analicemos la forma algebraica de la función lineal $y = 3x + 2$.

Primero determinemos el dominio, lo que nos indica la forma algebraica es que los valores x son multiplicados por 3.

¿Habrá algún valor que no pueda ser multiplicado por 3?

Claro que no, por lo tanto, el $D_x = \mathbb{R}$.

Ahora determinemos el codominio.

Recordemos, que el codominio es el conjunto de salida de todos los valores que se puedan generar, en este caso específico de la expresión $3x + 2$.

Podemos determinar el codominio respondiendo correctamente la siguiente pregunta:

¿De la expresión $3x + 2$, se podrán generar todos los números reales?

Los números reales implica: números enteros, racionales e irracionales.

Completemos la siguiente tabla, determinando el valor de x correspondiente al valor específico de y.

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
0	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte cero? Fácil $\frac{-2}{3}$ porque $3\left(\frac{-2}{3}\right) = -2$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$	$\frac{-2}{3}$

	$y = 3\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$ $y = -2 + 2$ $y = 0$	

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
1	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte uno? Sería $\frac{-1}{3}$ porque $3\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{-1}{3}\right) + 2$ $y = -1 + 2$ $y = 1$	$\frac{-1}{3}$
-1	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte -1? Sería -1 porque $3(-1) = -3$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3(-1) + 2$ $y = -3 + 2$ $y = -1$	-1

$\frac{4}{5}$	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte $\frac{4}{5}$? Primero: ¿Cuántos quintos hay en 2? Hay $2\left(\frac{5}{5}\right)=\frac{10}{5}$ Por lo tanto, sería $\frac{-6}{3\cdot 5}$ porque $3\left(\frac{-6}{15}\right)=-\frac{6}{5}$ Verifiquemos: $y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{-6}{15}\right)+2$ $y = -\frac{6}{5}+2$ $y = \frac{4}{5}$	$\frac{-6}{15}$

Valor de salida y	Verificación en la forma algebraica	Valor de entrada x
$\sqrt{2}$	¿Qué valor multiplico por 3 para que sumado 2 resulte $\sqrt{2}$? Sería $\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right)$ porque $3\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right)=\sqrt{2}-2$ Verifiquemos:	$\frac{\sqrt{2}-2}{3}$

	$y = 3x + 2$ $y = 3\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right) + 2$ $y = \sqrt{2} - 2 + 2$ $y = \sqrt{2}$	
11		
$\frac{3}{4}$		

-5		
$-\sqrt{3}$		

En definitiva, si el $D_x = \mathbb{R}$.

¿Habrá algún valor que no se pueda generar de la expresión $3x + 2$?

En general, toda función lineal $y = mx + b$, con $m \neq 0$, tendrá un $D_x = \mathbb{R}$ y un $C_y = \mathbb{R}$.

Parcial 2

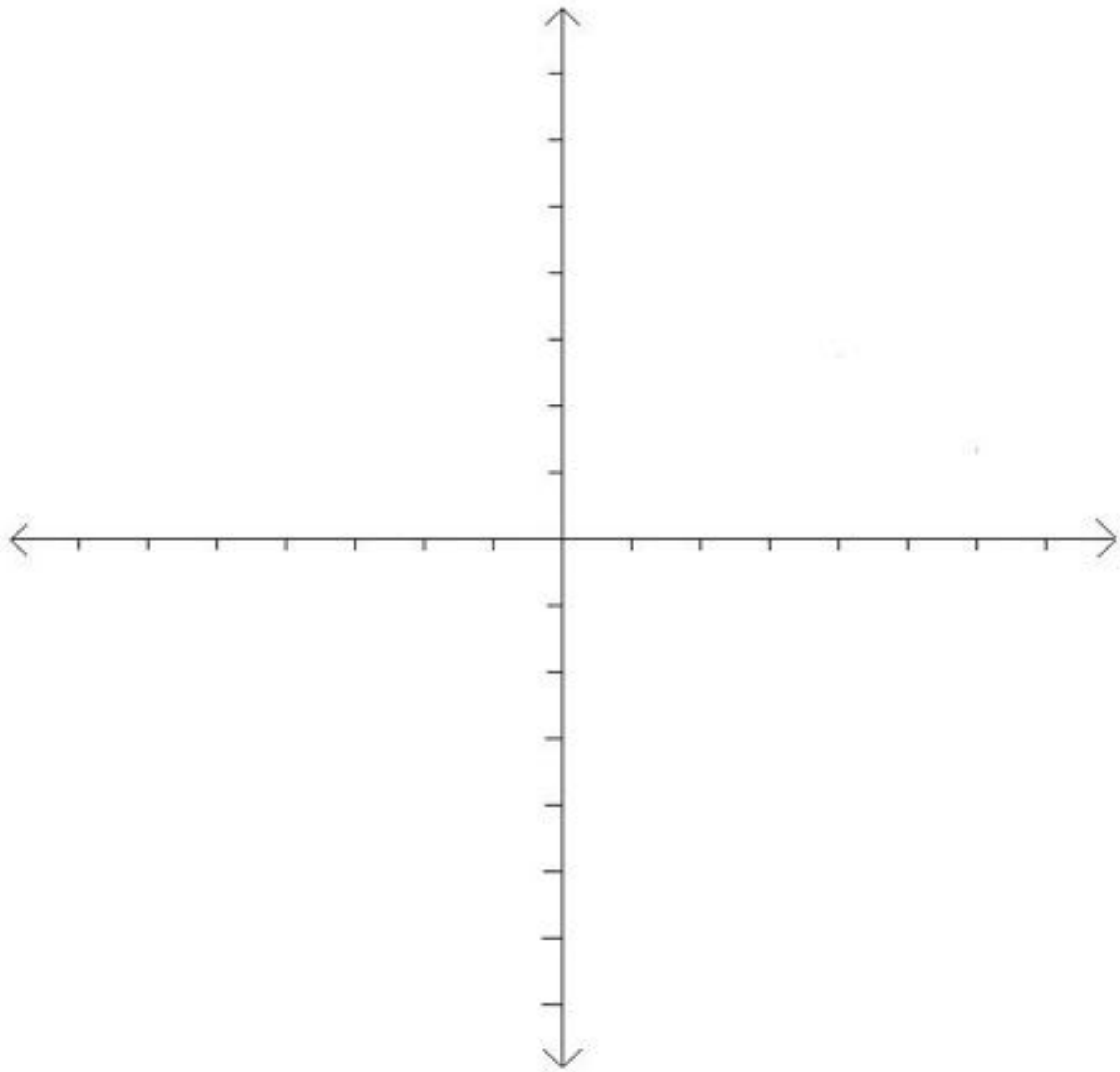
Fecha:____________________ Prof. Carlos Bernal

12°___ Total de puntos: 24

Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:______

Grafica las siguientes funciones, escribiendo junto a cada gráfica su respectiva forma algebraica. $y = x + 2$, $y = x + 6$, $y = x - 3$, $y = x - 5$, $y = 5$, $y = -4$, $y = 3x + 4$, $y = 2x + 3$, $y = 4x - 7$, $y = 4x - 6$, $y = 3x + 7$, $y = -x - 3$.

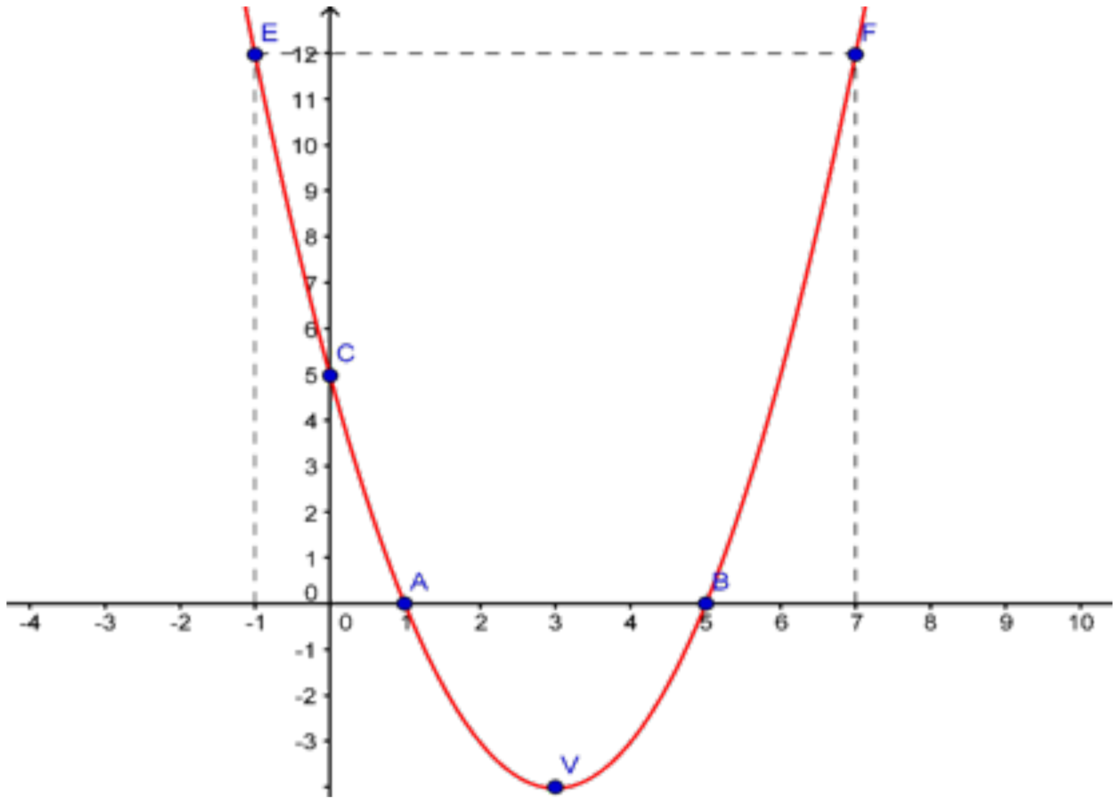
Observación: Anote los cálculos auxiliares, de los casos que los requieren.



B. Función cuadrática

Toda función cuadrática de la forma y = ax^2 + bx + c, con a ≠ 0, se representa gráficamente mediante una parábola.

Ejemplo 1: La representación gráfica de y = x^2 – 6x + 5 es la siguiente:



Te enseñaré como determinar estos puntos:

El punto C, no es más que la ordenada en el origen, que como en el caso de la función lineal es igual al término independiente en la ecuación, que en este caso es 5.
Los puntos A y B son los puntos donde interseca la parábola a eje x. Una curva corta al eje x en y=0. Solo tenemos que resolver la ecuación que resulta cuando hacemos y = 0.

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

$$0 = (x-5)(x-1)$$

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 1$$

Como la parábola corta al eje x en 1 y en 5, es conveniente determinar la respectiva imagen de los valores que están a 2 posiciones tanto a la izquierda como derecha de 1 y de 5 respectivamente para tener una forma gráfica más precisa de la parábola. En este caso serían -1 y 7. Para esto solo sustituimos estos valores en la ecuación:

$$y = (x-5)(x-1)$$
$$y = (-1-5)(-1-1)$$
$$y = (-6)(-2)$$
$$y = 12$$

$$y = (7 - 5)(7 - 1)$$
$$y = (2)(6)$$
$$y = 12$$

Podemos organizar estos resultados en una tabla:

x	-1	7
y	12	12

¿Por qué al -1 y al 7 les corresponde la misma imagen?

Luego, para determinar el vértice con coordenadas (h, k), aplicamos las siguientes fórmulas:

$$h = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

$$k = c - \frac{b^2}{4a} = 5 — \frac{(-6)^2}{4(1)} = 5 - \frac{36}{4} = -4$$

Por los que las coordenadas del vértice son: $(3, -4)$

Hay otra forma de determinar el vértice:

La expresión $x^2 - 6X + 5$ es fácilmente factorizable, pero no posee cuadrado perfecto.

Obtengamos un trinomio cuadrado perfecto a partir de la expresión:

$x^2 - 6X + 5 = x^2 - 6X + 9 - 9 + 5 = x^2 - 6X + 9 - 4 = (x - 3)^2 - 4$

Por lo tanto $y = x^2 - 6X + 5 \Longrightarrow y = (x - 3)^2 - 4$

Esta última expresión, nos ofrece las coordenadas del vértice y se denomina **forma canónica** de la función. Su modelización es: $y = a(x - h)^2 + k$.

Ejemplo 2: Dada la función $y = - x^2 - 6x - 5$

Determinemos los puntos importantes para la gráfica:

$$0 = -x^2 - 6x - 5$$
$$0 = -(x^2 + 6x + 5)$$
$$0 = -(x + 5)(x + 1)$$

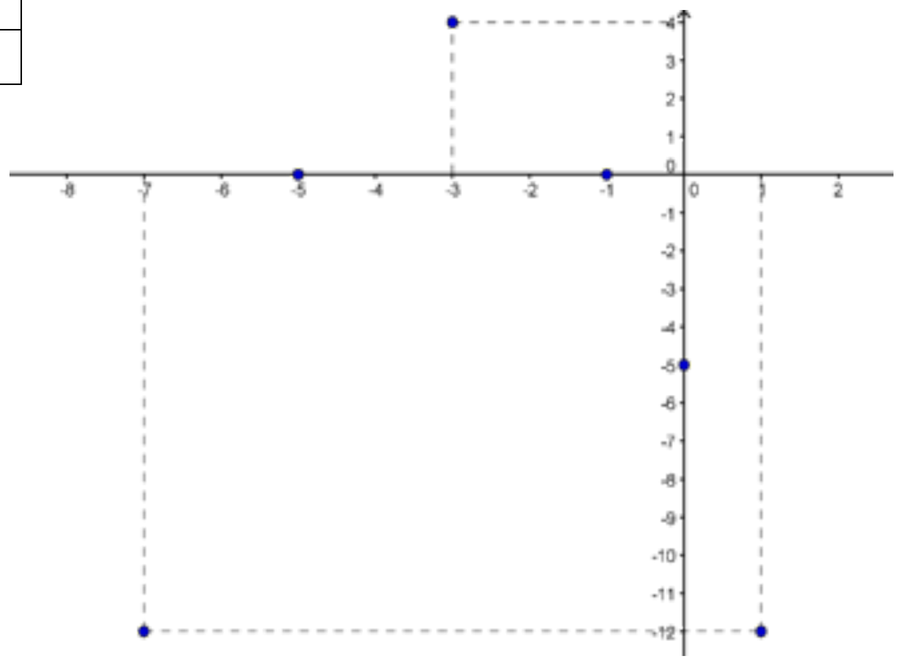
$$0 = (x + 5)(x + 1)$$

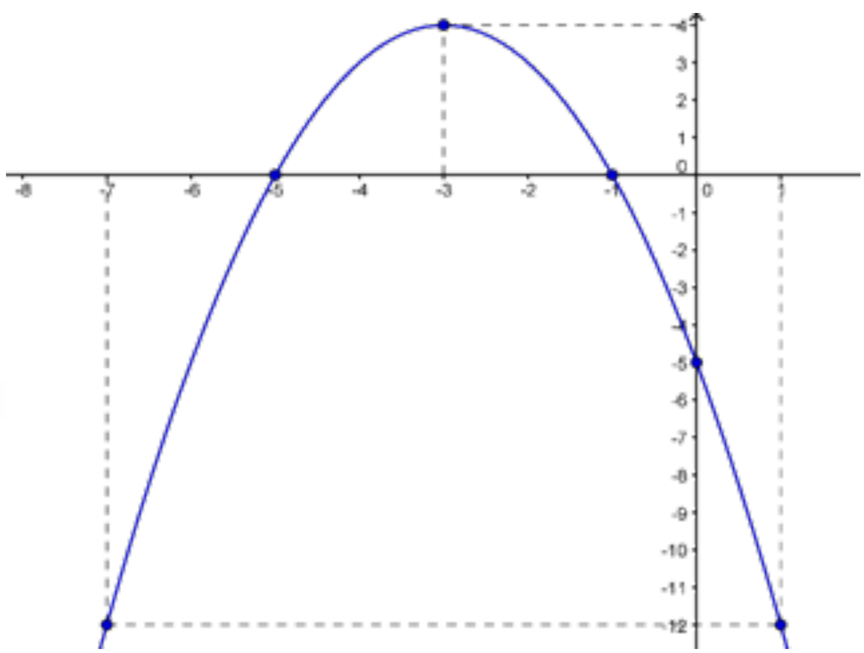
$$x_1 = -5, \qquad x_2 = -1$$

V(-3, 4)

x	-7	1
y	-12	-12

Localizamos los puntos:



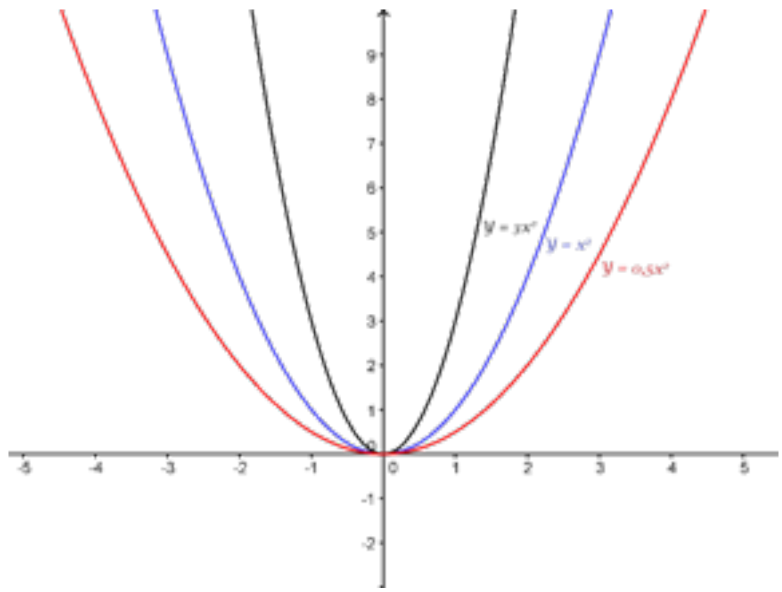


¿Por qué esta parábola abre hacia abajo

La representación gráfica de la función

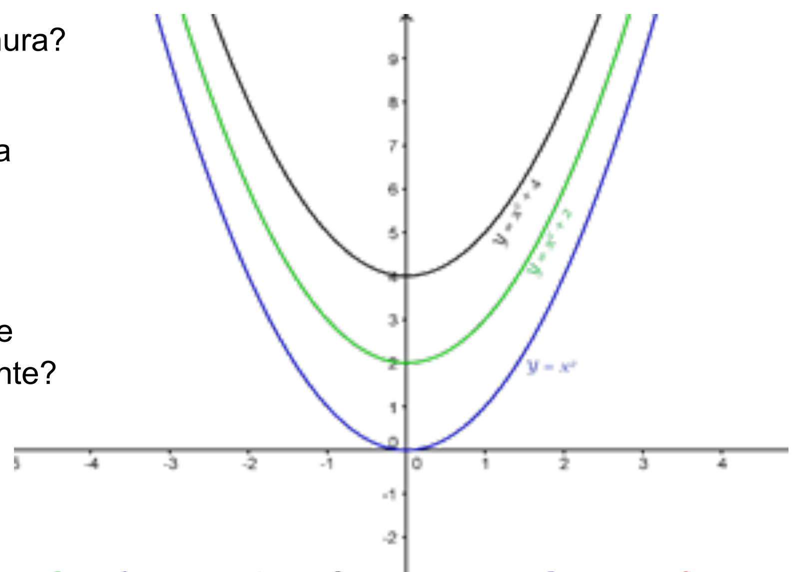
$y = x^2$ es la siguiente:

Observa y analiza las siguientes figuras:



¿Qué relación existe entre el coeficiente de la x^2 y la representación gráfica?

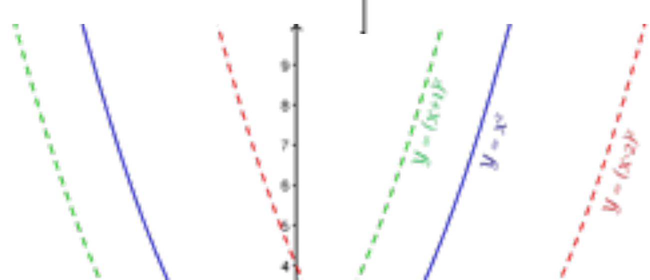
¿Las 3 parábolas tienen la misma anchura?



¿Qué sucede cuando a la x^2 se le suma 2 y 4 respectivamente?

¿Cuál sería la representación gráfica de $y = x^2 - 1$ y $y = x^2 + 5$, respectivamente?

¿Las parábolas tienen la misma anchura?



¿Qué funciones representarían el desplazo
de $y = x^2$, 4 unidades hacia la derecha
y 3 unidades hacia la izquierda,
respectivamente?

En general:

Si consideramos a n un número real positivo, los desplazamientos vertical y horizontal en la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$ están representados como sigue.

- ✓ Desplazamiento vertical n unidades hacia arriba: $y = a(x - h)^2 + k + n$
- ✓ Desplazamiento vertical n unidades hacia abajo: $y = a(x - h)^2 + k - n$
- ✓ Desplazamiento horizontal n unidades a la derecha: $y = a(x - h - n)^2 + k$
- ✓ Desplazamiento horizontal n unidades a la izquierda: $y = a(x - h + n)^2 + k$

Estas relaciones podemos verificarlas fácilmente, a través de la implementación de la aplicación GeoGebra https://www.geogebra.org/m/tnfMxTqV.

Actividad de afianzamiento 3

1. Grafique de forma manual cada una de las siguientes funciones, determinando el dominio como el codominio:

   a) $y = x^2 + 8X + 7$

   b) $y = x^2 - 3X - 10$

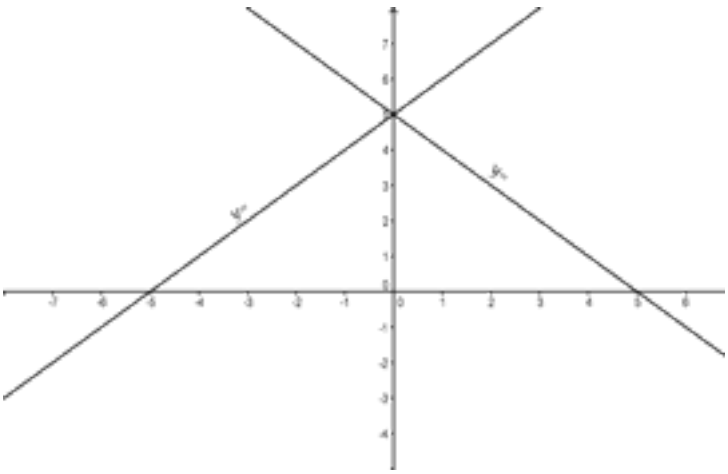
   c) $y = -(x - 4)^2 + 5$

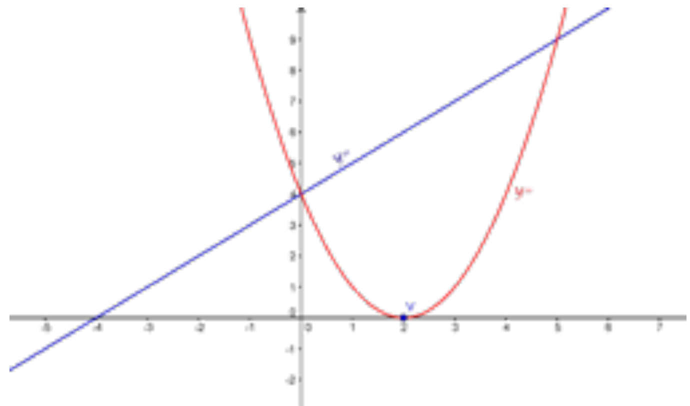
   d) $y = -2x^2 - 8X - 6$

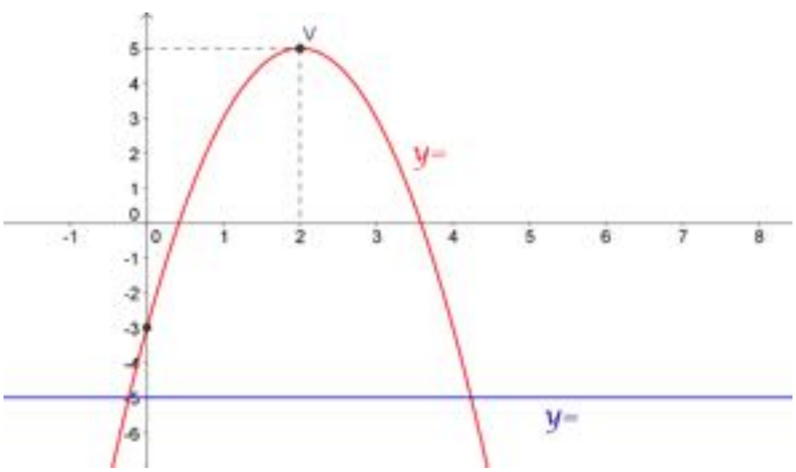
2. Grafique la función $y = x^2 - 6X + 4$ y desplácela una unidad hacia arriba y dos unidades hacia la izquierda. Escriba al lado de cada gráfica su respectiva forma

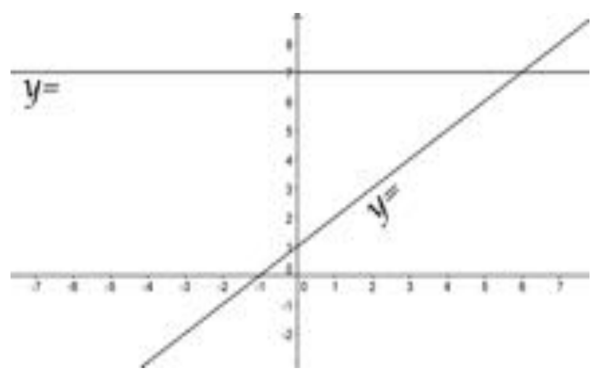
algebraica.

3. Escriba la forma algebraica de la función.
Complete la siguiente información:







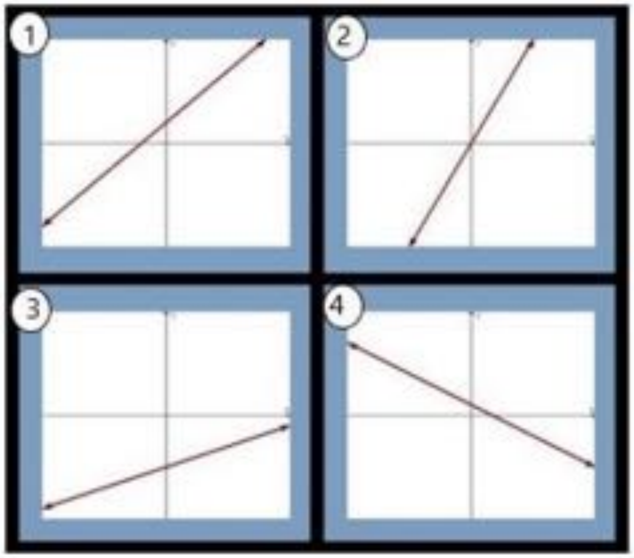


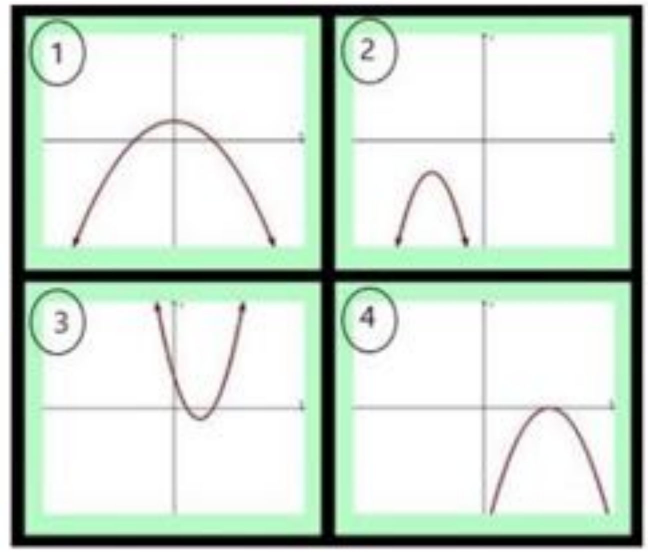
4.

¿Cuál no pertenece?

Pasos a seguir:

- ✓ Observa con detenimiento los siguientes grupos de 4 figuras.
- ✓ Luego, identifica que figura no guarda relación con el resto.
- ✓ Y escribe tu argumento en el espacio indicado.





____

____

____

____

____

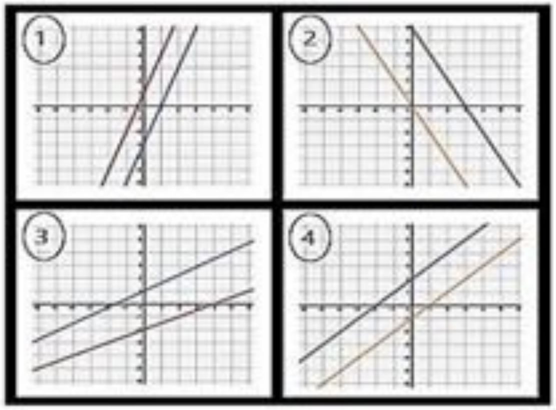
____

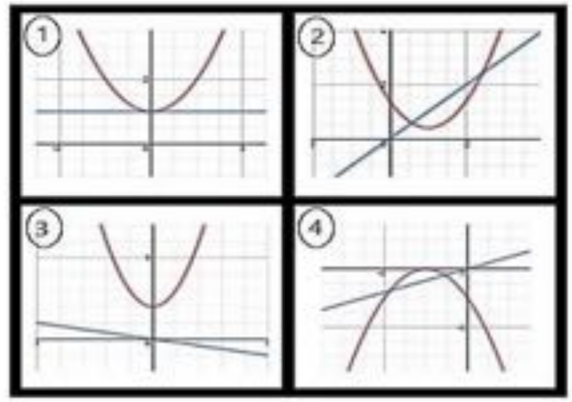
____

____

____

____



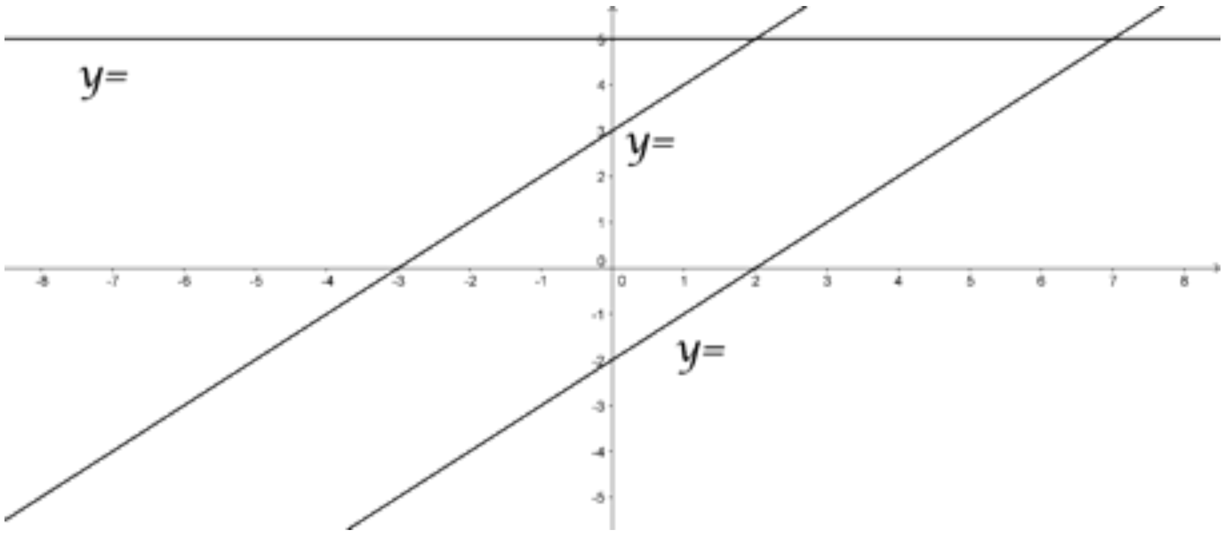


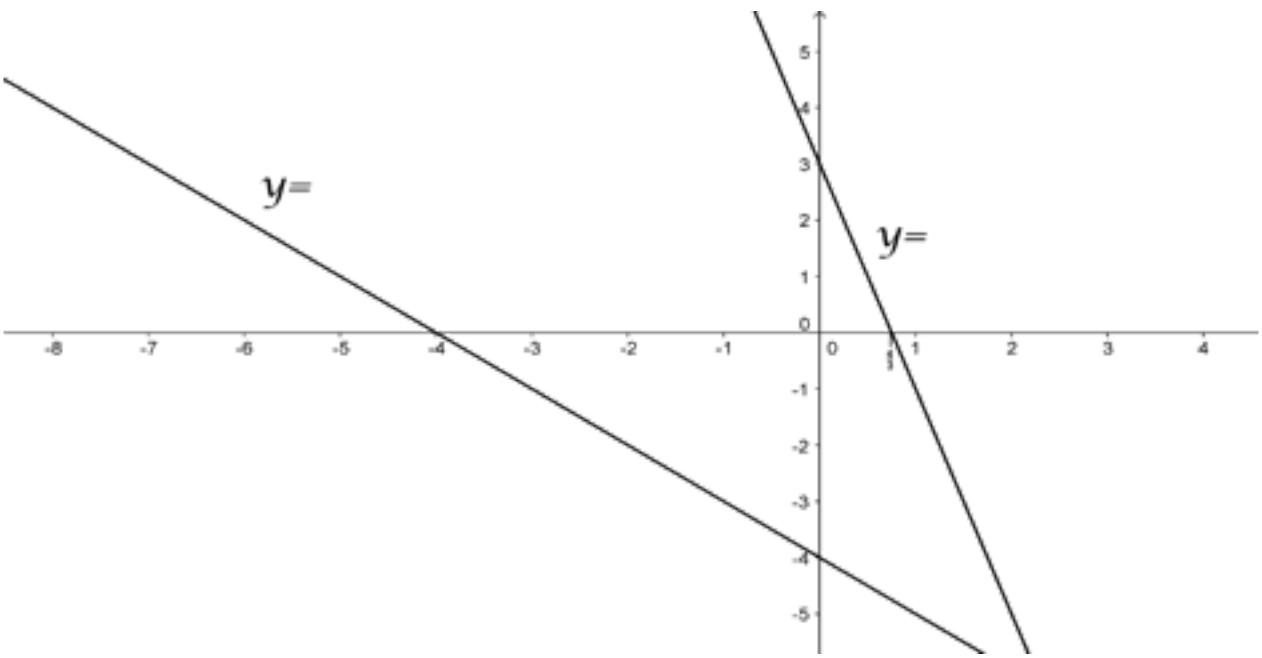
① $y = 2x^2 + 3x + 3$	② $y = -x^2 + 5x + 4$
③ $y = x^2 + 2$	④ $y = x^2 + 7x - 1$

① **$y = 4x + 3$**	② **$y = -4x + 5$**
③ **$y = \frac{1}{4}x + 5$**	④ **$y = 4x - 5$**

Actividad de afianzamiento 4

1. Escriba la forma algebraica de la función:





2. Asociar la representación gráfica de la función, con su respectiva forma algebraica. Coloque en el recuadro indicado en cada gráfica la letra que corresponde a su respectiva función:

A. $y = x^2 + 1$

B. $y = x^2 - 2x + 3$

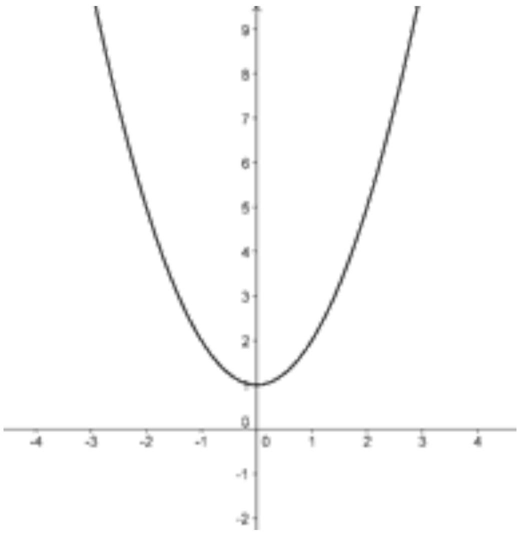
C. $y = 2x^2 + 1$

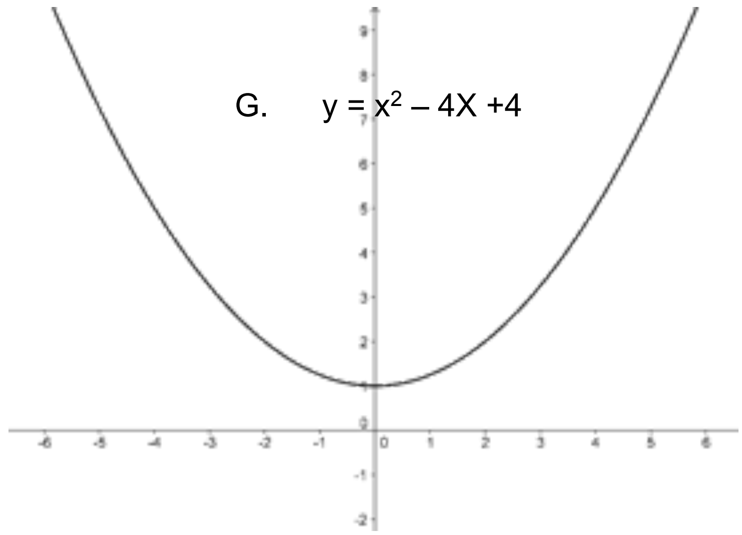
D. $y = 2x^2 - 4X + 4$

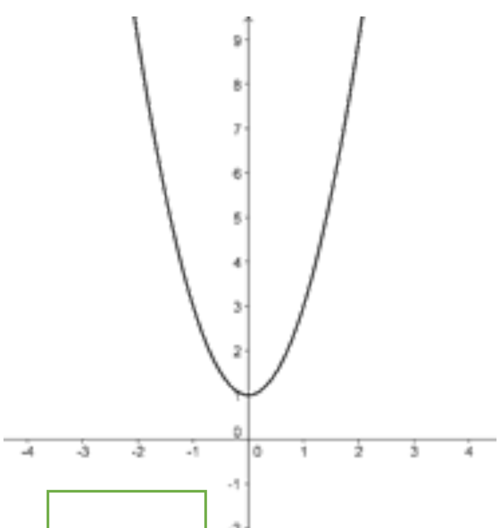
E. $y = -x^2 + 2X + 3$

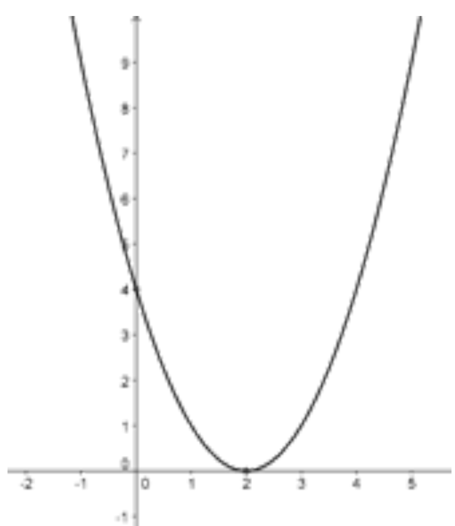
F. $y = 0{,}25x^2 + 1$

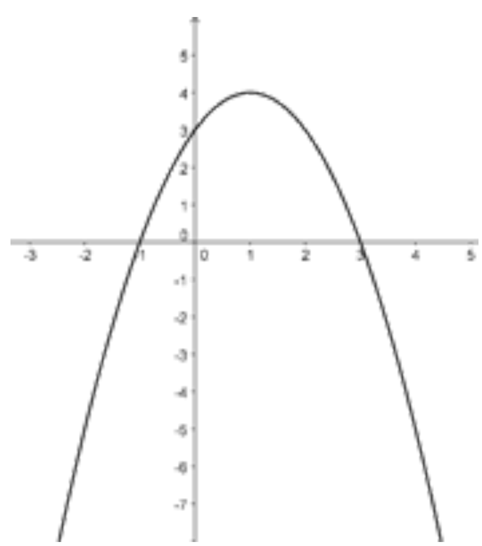
G. $y = x^2 - 4X + 4$





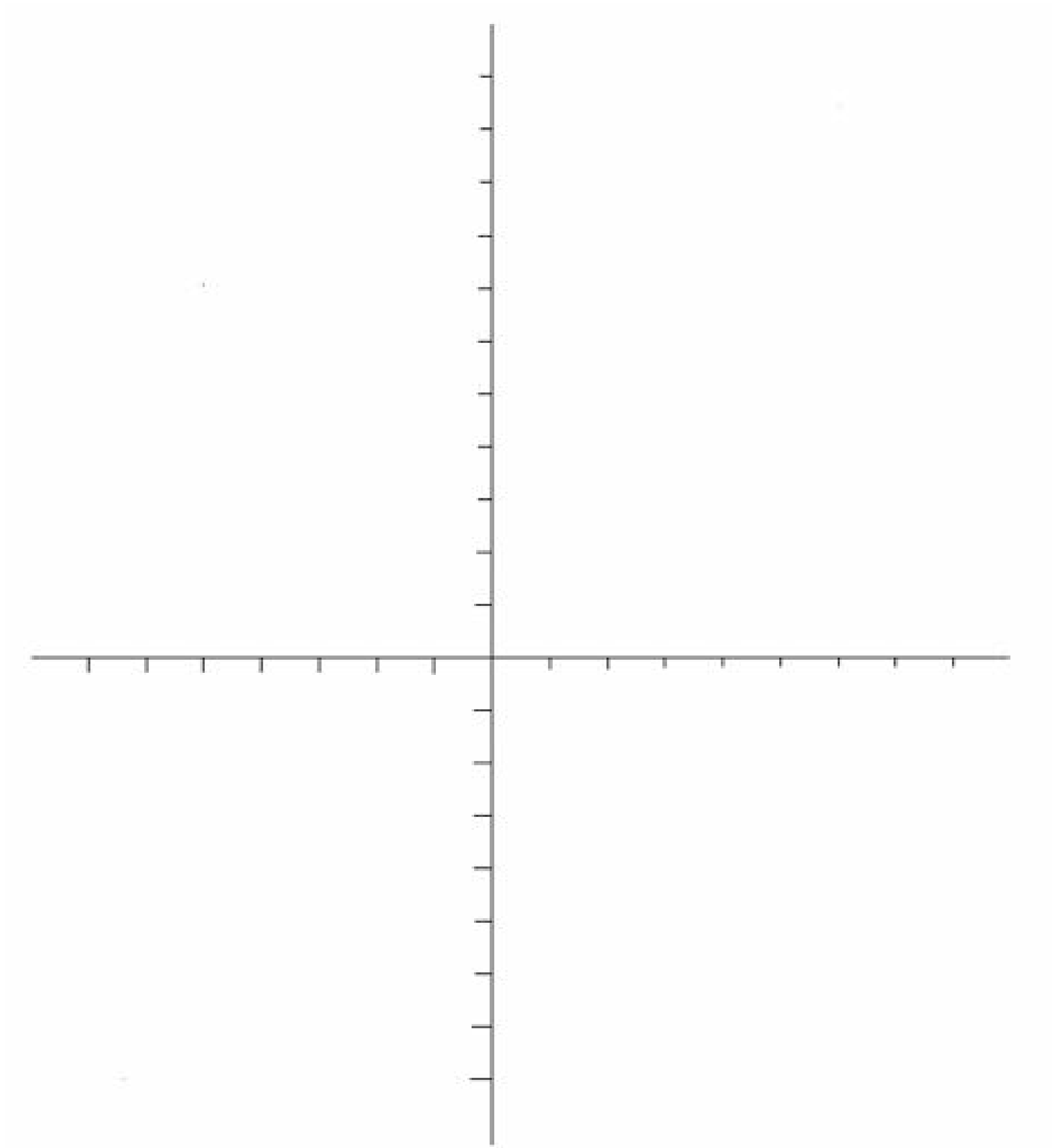






Actividad de afianzamiento 5

I_Grafique la función $y = x^2 - 2x - 3$ determinando tanto su dominio como codominio.



II_Dada la función $y = x^2 - 8x + 7$ determine las funciones que representen su desplazamiento:

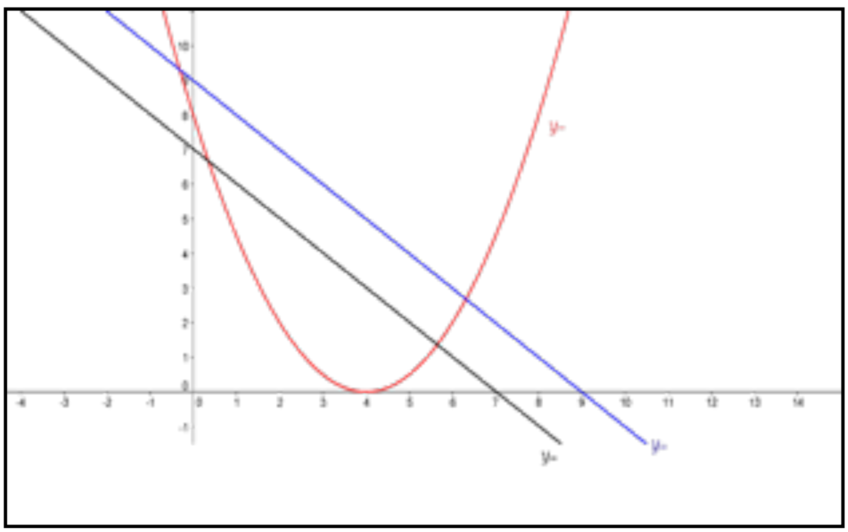
a) 2 unidades hacia la izquierda: ____________________________

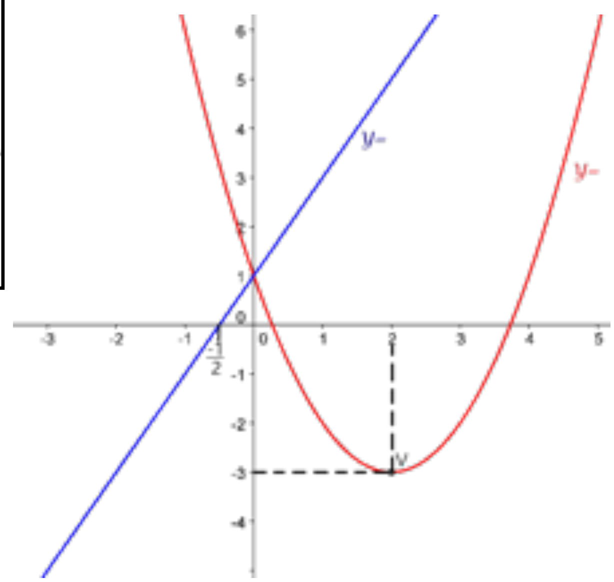
b) 3 unidades hacia la derecha: ____________________________

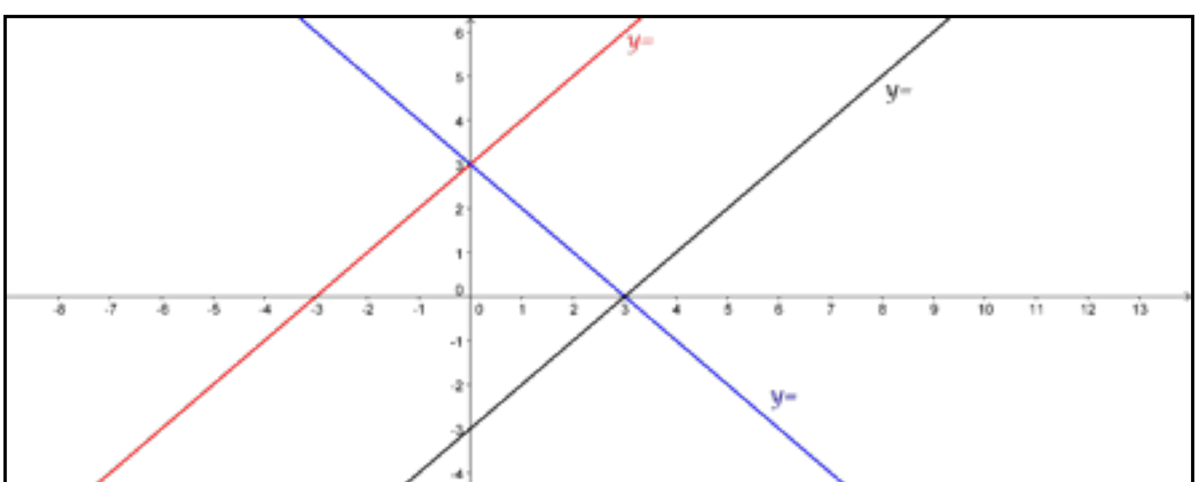
c) 5 unidades hacia arriba: ____________________________

d) 4 unidades hacia abajo: ____________________________

III_ Escriba la forma algebraica de la función. Complete la siguiente información:







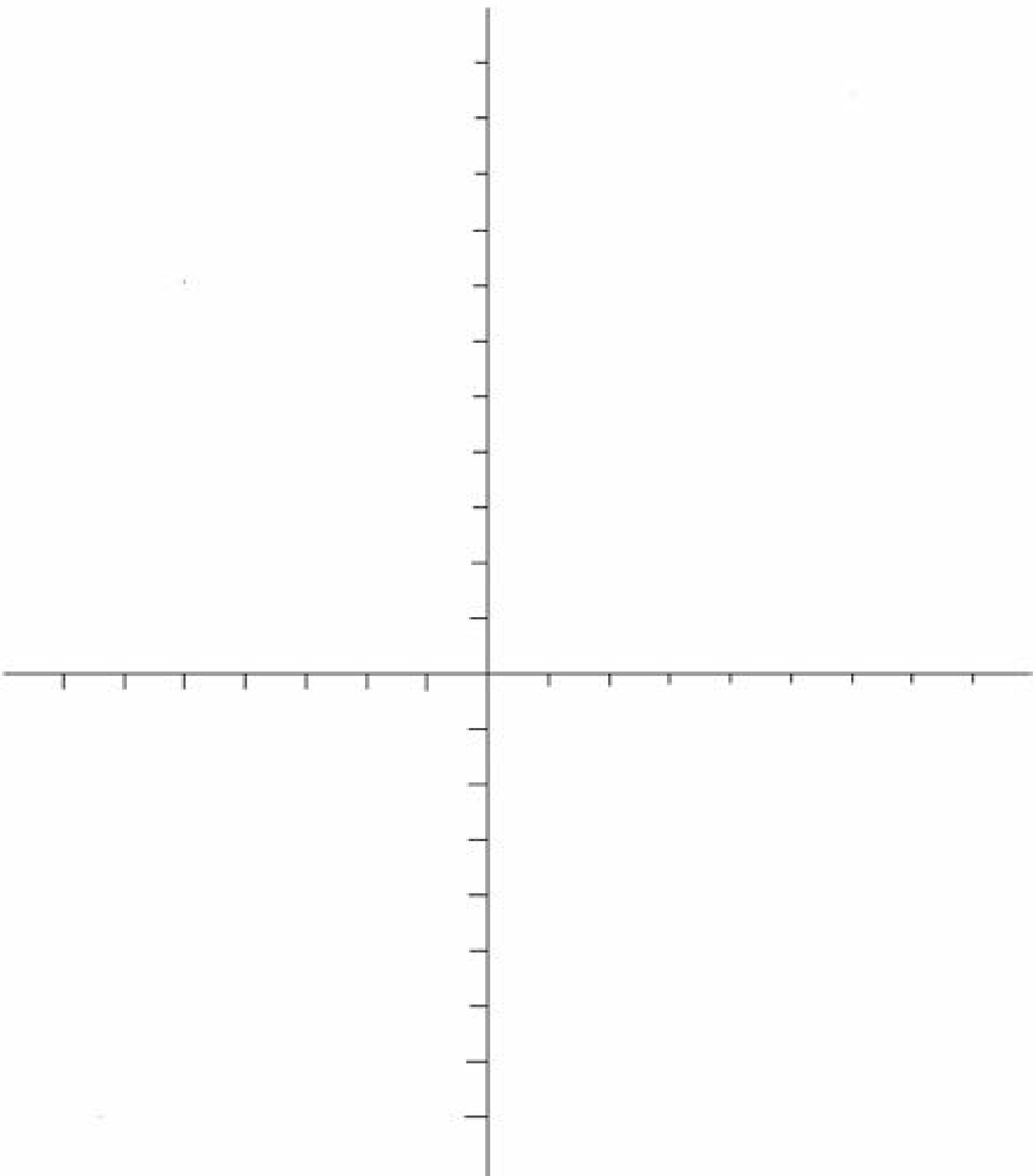
Parcial 3

Fecha:____________________ Prof. Carlos Bernal

12°___ Total de puntos: 30

Estudiante:___________________ Puntos obtenidos:______

I_Grafique la función $y = x^2 - 2x - 8$, determine tanto su dominio como codominio. (10 ptos.)



II_Dada la función $y = x^2 - 2x + 3$ determine las funciones que representen su desplazamiento:

(8 ptos.)

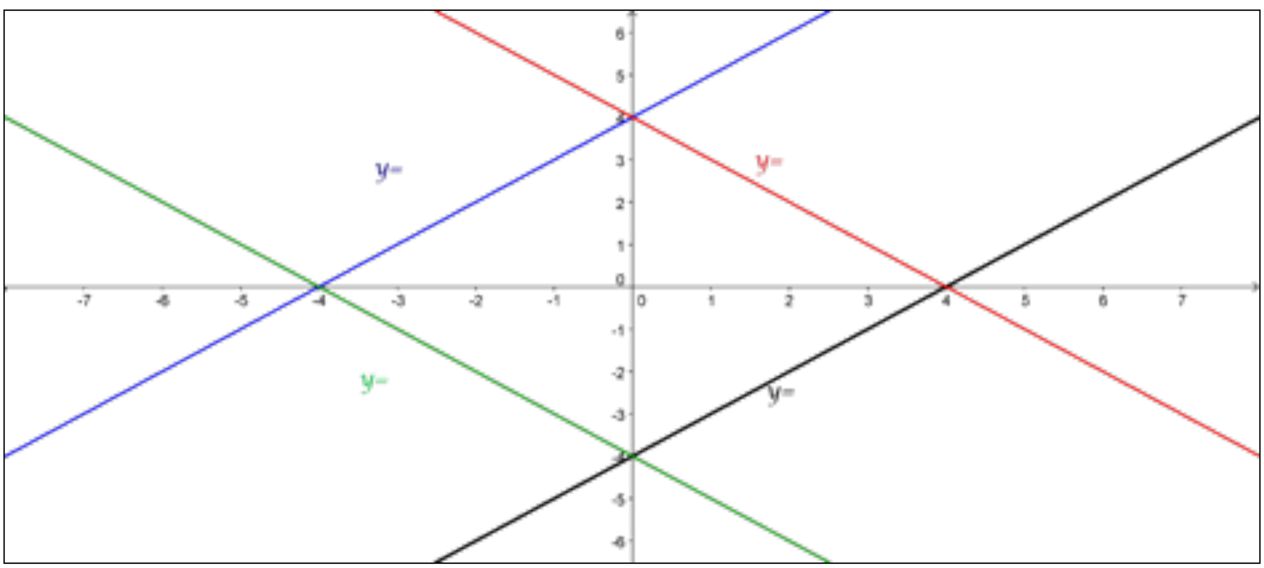
a) 3 unidades hacia la izquierda: ____________________________

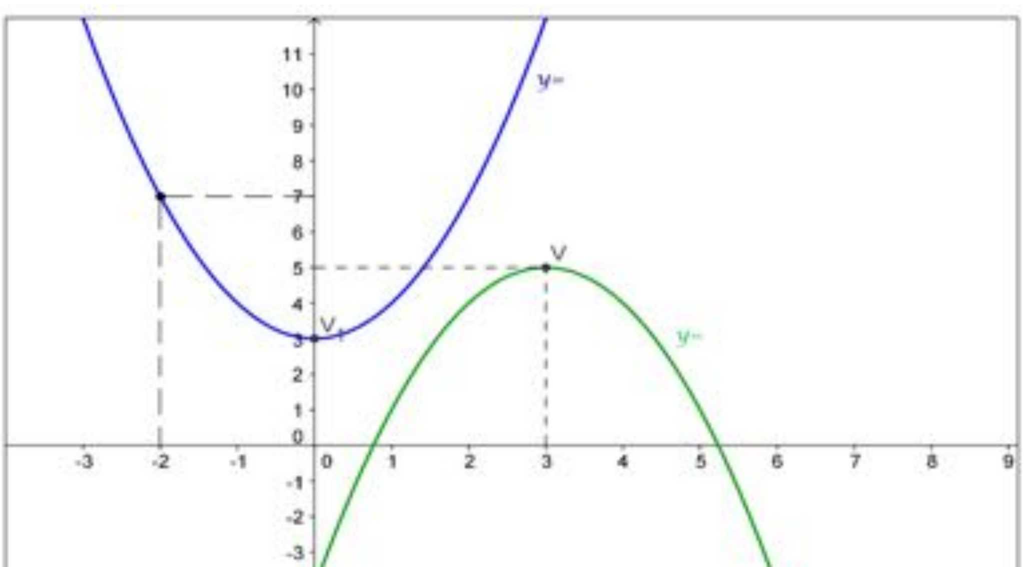
b) 4 unidades hacia la derecha: ____________________________

c) 6 unidades hacia arriba: ____________________________

d) 5 unidades hacia abajo: ____________________________

III_ Escriba la forma algebraica de la función. Complete la siguiente información: (12 ptos)





6. Bibliografía

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., y Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria*. Madrid: Síntesis

Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Ciencia. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* (F. Alayo, Trad.) Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

Fabra, M., y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3(2), 207-230. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/335/33530206.pdf

García, L., Vásquez, R., y Hinojosa, M. (2004). Dificultades en el aprendizaje del concepto de función en estudiantes de ingeniería. *Ingenierías,* 7(24), 27-34. Recuperado de ingenierias.uanl.mx/24/pdfs/24_dificultades_en_el_aprendizaje.pdf

Leithold, L. (1998). *El cálculo.* Mexico D.F., México: Harla

Quintero, C., y Cadavid, L. (2009). *Construcción del concepto de función en estudiantes de octavo grado.* Comunicación presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/705/

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Revista Educación y Pedagogía,* 18(45), 39-49. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/10963/