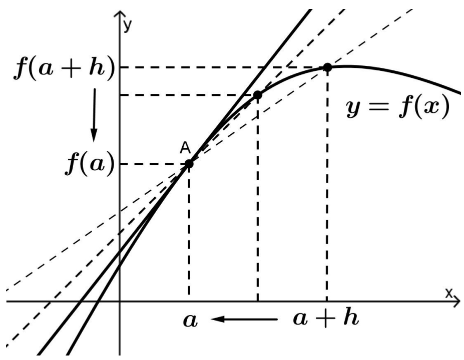
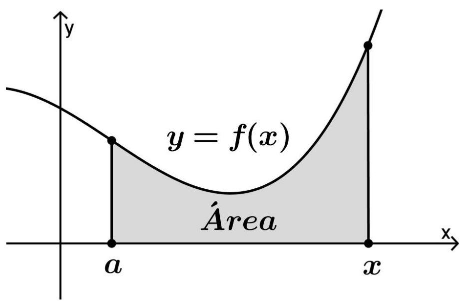
UAL
UNIVERSIDADE
AUTÓNOMA
DE LISBOA

Matemática para Economia e Gestão





Bruno Maia
`bmaia@ual.pt`

1ª edição
2014

Conteúdo

Capítulo 1

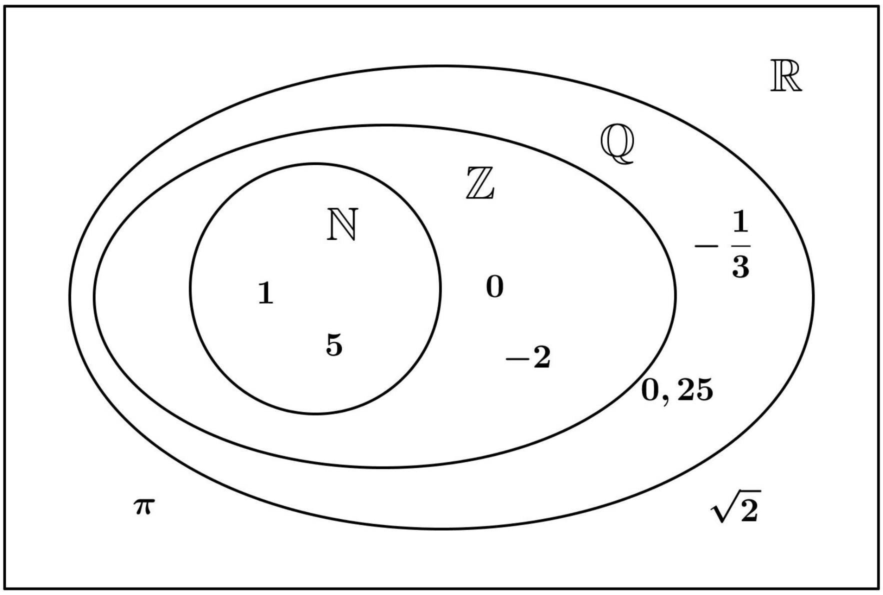
Álgebra

1.1 Números e recta real

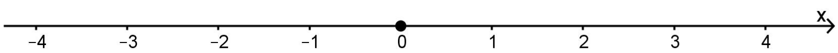
Definição 1.1. *Definem-se os seguintes conjuntos de números:*

$$
\begin{aligned}
\textit{naturais} \quad & \mathbb{N} := \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots \,\} \\
\textit{inteiros} \quad & \mathbb{Z} := \{\, \dots\ ,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots \,\} \\
\textit{racionais} \quad & \mathbb{Q} := \left\{\, \frac{p}{q}\ :\ p \in \mathbb{Z}\ ,\ q \in \mathbb{N} \,\right\} \\
\textit{reais} \quad & \mathbb{R} := \overline{\mathbb{Q}}
\end{aligned}
$$

Estes conjuntos estão contidos uns nos outros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

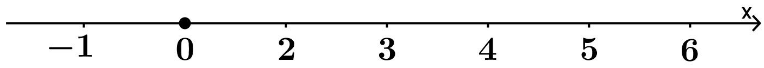


Definição 1.2. *A recta real é aquela na qual se define uma origem* 0*, um sentido crescente (ou positivo) e uma escala linear:*

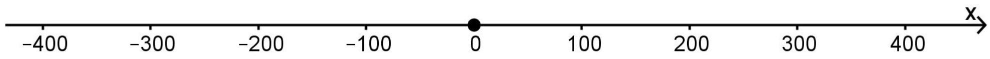


ficando cada número real identificado com um único ponto na recta.

Exemplo 1.1. *A seguinte recta real está incorrectamente desenhada, uma vez que a distância entre* 0 *e* 2 *está inconsistente com as outras distâncias (escala não linear):*

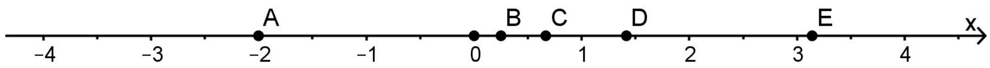


A seguinte recta real está correctamente desenhada, pois a distância entre múltiplos consecutivos de 100 *é constante:*

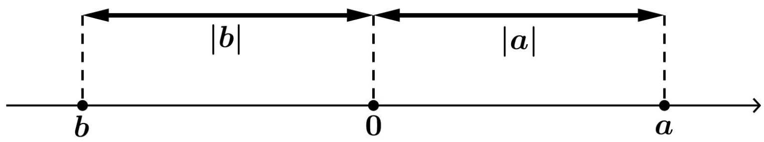


A representação dos seguintes números na recta real é:

$$A = -2 \quad ; \quad B = 0,25 \quad ; \quad C = \frac{2}{3} \quad ; \quad D = \sqrt{2} \approx 1,4 \quad ; \quad \pi \approx 3,14$$



Definição 1.3. $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *são simétricos se* $a = -b$*. A sua representação na recta real são dois pontos equidistantes da origem (um positivo e outro negativo).*
O valor absoluto ou módulo de $a \in \mathbb{R}$ *é a distância (*$d \geq 0$*) na recta real entre esse ponto e a origem. Indica-se por* $|a|$*. Se* $a = -b$ *e* $a > 0$*, então* $|a| = |b|$ *e teremos:*



Observação. O sinal "$-$"que precede a não significa que $-a$ seja negativo:

$$\text{se } a > 0 \text{ então } \; -a < 0$$
$$\text{se } a < 0 \text{ então } \; -a > 0$$

Exemplo 1.2. *Os números* 3 *e* -3 *são simétricos.*

$$|3| = 3 \qquad |-4| = 4 \qquad |0| = 0 \qquad \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$$

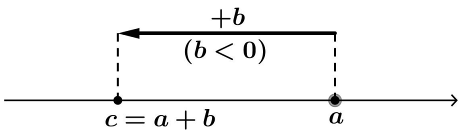
Se $a = -3$*, então* $-a = -(-3) = 3$ *e teremos* $-a > 0$*.*

Se $a = 3$*, então* $-a = -(3) = -3$ *e teremos* $-a < 0$*.*

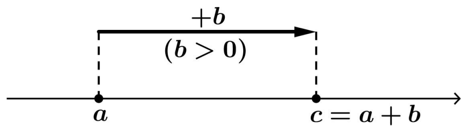
1.2 Operações aritméticas

Definição 1.4. *Na recta real, $a + b$ é o número c que está à distância $|b|$ de a:*

à sua esquerda, se $b < 0$:



à sua direita, se $b > 0$:



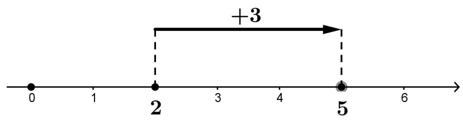
A subtracção de a com b é a soma de a com o simétrico de b:

$$c = a - b = a + (-b)$$

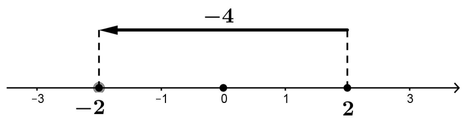
Observação. Na soma e na subtracção não se aplicam as regras "menos com menos dá mais", nem "mais com menos dá menos".

Exemplo 1.3.

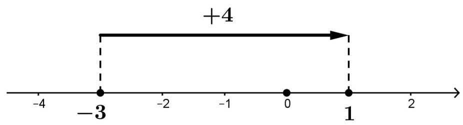
$$2 + 3 = 5$$



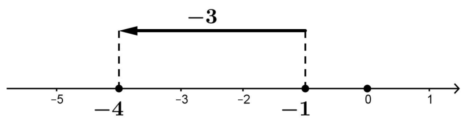
$$2 + (-4) = 2 - 4 = -2$$



$$-3 + 4 = (-3) + 4 = 1$$



$$-1 - 3 = (-1) + (-3) = -4$$



Exemplo 1.4.

$$-\Big[\ 1 + (\ -3 + 1\ )\ \Big] = -\Big[\ 1 + (\ -2\ )\ \Big] = -\Big[\ -1\Big] = 1$$

$$5 - 37 = -\Big[\ 37 - 5\ \Big] = -32$$

Definição 1.5. *Consideremos o produto de* $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Se a *e* b *tiverem o mesmo sinal, então* $a \cdot b > 0$

(b) Se a *e* b *tiverem sinais contrários, então* $a \cdot b < 0$

(c) Se $a = 0$ *ou* $b = 0$, *então* $a \cdot b = 0$

Definição 1.6. *O inverso de* $a \neq 0$ *é* $b = \dfrac{1}{a} = a^{-1}$.
A divisão de a *por* $b \neq 0$ *é o produto de* a *com o inverso de* b:

$$c = a \div b = a \cdot \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

Exemplo 1.5.
"Mais com menos dá menos":

$$3 \times (-2) = \underbrace{(-2) + (-2) + (-2)}_{3\times} = -6$$

ou

$$(-3) \times 2 = 2 \times (-3) = \underbrace{(-3) + (-3)}_{2\times} = -6$$

"Menos com menos dá mais":

$$(-3) \times (-2) = [(-1) \times 3] \times (-2) = (-1) \times [3 \times (-2)] = -[-6] = 6$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad\qquad 10 \div 2 = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

Exemplo 1.6.

$$5 + \underbrace{2 \times 100}_{prioridade} = 5 + 200 = 205$$

$$2 + 3 \times (-5) = 2 + (-15) = -13$$

$$3 \times (6 - 10) = 3 \times (-4) = -12$$

$$(-1) \times (-1) \times (-1) = (-1) \times \Big[(-1) \times (-1)\Big] = (-1) \times 1 = -1$$

$$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = \Big[(-2) \times (-2)\Big] \times \Big[(-2) \times (-2)\Big] = 4 \times 4 = 16$$

1.3 Tabuada

Recordando a tabuada da multiplicação:

$\times$	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	20
4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**

Repare que na diagonal desta tabela temos os quadrados perfeitos:

2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2
4	9	16	25	36	49	64	81	100

Exemplo 1.7 (multiplicações e divisões)**.**

$$256 \div 10 = 25,6$$

$$12 \times 100 = 1200$$

$$3,5 \times 0,1 = 3,5 \div 10 = 0,35$$

$$54 \div 0,001 = 54 \times 1000 = 54000$$

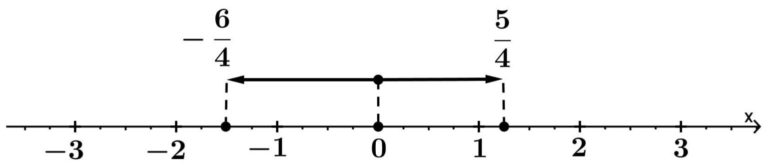
1.4 Fracções

Definição 1.7. *Os números racionais podem ser representados sob a forma de fracção:*

$$\frac{p}{q} = p \cdot \frac{1}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$$

Para representar $\frac{p}{q}$ *na recta real, divide-se cada intervalo unitário em* q *subintervalos de comprimento* $\frac{1}{q}$*. De seguida, contam-se* $|p|$ *subintervalos para a direita ou para a esquerda a partir da origem, de acordo com o sinal de* p*.*

Exemplo 1.8. *Marquemos* $-\frac{6}{4}$ *e* $\frac{5}{4}$ *na recta real:*



Proposição 1.1. *A soma (ou subtracção) de números racionais em forma de fracção exige a redução a um denominador comum.*

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{(d)} + \underbrace{\frac{c}{d}}_{(b)} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

Exemplo 1.9.

$$\underbrace{\frac{2}{3}}_{(4)} + \underbrace{\frac{-1}{4}}_{(3)} = \frac{8}{12} + \frac{-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Proposição 1.2 (Lei do corte)**.**

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Exemplo 1.10.

$$\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

Observação.

$$\frac{2+3}{5+3} \neq \frac{2}{5}$$

Proposição 1.3.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \quad e \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Exemplo 1.11.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{10}{21} \quad ; \quad \frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

Exercícios (Fracções)**.**

1. *Simplifique as seguintes fracções (com denominador mínimo):*

   (a) $\dfrac{15}{35}$

   (b) $\dfrac{24}{36}$

   (c) $\dfrac{42}{63}$

   (d) $\dfrac{14}{56}$

2. *Simplifique:*

   (a) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$

   (b) $\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)^{-1}$

3. *Calcule e simplifique*

   (a) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$

   (b) $\dfrac{2+a}{a^2b}+\dfrac{1-b}{ab^2}-\dfrac{2b}{a^2b^2}$

   (c) $\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1-x}{x-1}-\dfrac{-1+4x}{2(x+1)}$

4. *Simplifique*

   (a) $\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{7}-\dfrac{5}{7}$

   (b) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}-1$

   (c) $\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{6}$

   (d) $\dfrac{x}{10}-\dfrac{3x}{10}+\dfrac{17x}{10}$

   (e) $\dfrac{x+2}{3}+\dfrac{1-3x}{4}$

   (f) $\dfrac{5}{2b}-\dfrac{5}{3b}$

5. *Simplifique*

   (a) $\dfrac{5x^2yz^3}{25xy^2z}$

   (b) $\dfrac{2x+5}{x^2+2x}$

   (c) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2}$

   (d) $\dfrac{x+3y}{xy}$

   (e) $\dfrac{x}{x^2+2x}$

6. *Uma fracção* $\dfrac{p}{q}$ *diz-se imprópria se* $|p| \geq |q|$ *(e diz-se própria no caso contrário).*

   Por exemplo: $\dfrac{21}{8}$ *é uma fracção imprópria.*

   Escreva $\dfrac{21}{8}$ *como a soma de um inteiro com uma fracção própria.*

1.5 Percentagens

Definição 1.8. *Se a grandeza y é igual a $P\,\%$ da grandeza x, isso significa que:*

$$y = \frac{P}{100} \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{P}{100}$$

Para calcular $P\,\%$ de uma quantidade, multiplicamo-la por $\frac{P}{100}$.

Exemplo 1.12.

(a) *Quanto é* 15% *de* 20 € *?*
Resposta: é $0,15 \times 20$ € $= 3$ €.

(b) 4 €, *que percentagem de* 20 € *será ?*
Resposta: é $\frac{4}{20} = 0,20 = \frac{20}{100} = 20\%$.

(c) 7 € *é* 14% *de que valor?*
Resposta: $7€ = 0,14 \cdot x\ €$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $x = \frac{7}{0,14} = 50$ €.

Se x aumentar 20%, o seu novo valor será 120% do valor de referência: $1,20 \cdot x$.
Se x diminuir 20%, o seu novo valor será 80% do valor de referência: $0,80 \cdot x$.
Se x aumentar 20% e posteriormente diminuir 20% (do valor entretanto actualizado), não recuperamos o valor inicial, pois $1,20 \cdot 0,80 \neq 1,00$.

Exemplo 1.13. *Suponha que vende um artigo tem um custo de produção x e um preço de venda y. Pretende-se que o lucro seja 20% do preço de venda.*
Para tal, o custo de produção deverá ser será 80% do preço de venda:

$$x = 0,80\,y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{0,80} \quad \Leftrightarrow \quad y = 1,25\,x$$

Repare que o preço de venda é 125% do custo de produção.

Exemplo 1.14. *Suponha agora que para um artigo com um custo de produção x e um preço de venda y se pretende que o lucro seja 20% do custo de produção x.*
Nesse caso, o preço de venda deverá ser 120% do custo de produção:

$$y = 1,20\,x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{y}{1,20} \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,833\,y$$

Assim se constata que o custo de produção corresponderá a $83,3\%$ do preço de venda.

Proposição 1.4. *A conhecida "regra de três simples"deriva da equação que define a razão constante (proporcionalidade) entre pares de grandezas:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a \times d = b \times c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$a = \frac{b \times c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a \times d}{b} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{a \times d}{c} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{b \times c}{a}$$

Exercícios (Percentagens).

1. *Um produto é vendido por* 370 €*. Se a margem de lucro for* 15% *do preço de venda, quanto será o custo de produção deste produto?*

2. *O custo de produção de um produto é de* 260 €*. Se pretender ter uma margem de lucro de* 15% *sobre o preço de venda, por quanto deverá vender o produto?*

3. *O custo de produção de um produto é de* 260 € *e o seu preço de venda é* 370 €*.*

   (a) *Qual a margem de lucro relativamente (%) ao preço de venda ?*

   (b) *Qual a margem de lucro relativamente (%) ao custo de produção ?*

4. *O custo de produção unitário de um produto é* 80 € *e o seu preço de venda é* P*. Determine* P *para ter um lucro de* 20% *sobre o preço de venda (e não sobre o custo de produção).*

1.6 Potências

Definição 1.9 (Potência de base $a \in \mathbb{R}$ e expoente $n \in \mathbb{N}$).

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ \ldots \ \cdot a}_{n \text{ factores } a}$$

Observação ($a^n \neq n \cdot a$).

$$n \cdot a = \underbrace{a + a + \ \ldots \ + a}_{n \text{ termos } a}$$

Exemplo 1.15.

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \quad ; \quad 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$$

Proposição 1.5. *Regras das potências:*

$a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

Exemplo 1.16.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^7 \qquad \frac{7^5}{7^2} = 7^3 \qquad 2^5 \cdot 3^5 = 6^5 \qquad \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

$$5^0 = 1 \qquad 3^{-1} = \frac{1}{3} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad \left(3^5\right)^2 = 3^{5\times 2} = 3^{10}$$

Observação.

$$(-10)^2 = (-10)(-10) = 100 \qquad (2x)^{-1} = \frac{1}{2x}$$

$$-10^2 = -10 \cdot 10 = -100 \qquad 2x^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

Note que $(a+b)^n \neq a^n + b^n$. Considere o seguinte contra-exemplo:

$$(2+3)^3 = 5^3 = 125, \quad \text{mas} \quad 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$$

Definição 1.10. *Uma raiz de índice $n \in \mathbb{N}$ é uma potência de expoente $\dfrac{1}{n}$:*

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \qquad e \qquad x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a} = \left(\sqrt[b]{x}\right)^a$$

Exemplo 1.17.

$$36^{1/2} = \sqrt{36} = 6 \qquad e \qquad 16^{3/2} = \left(16^{1/2}\right)^3 = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3 = 64$$

Proposição 1.6. *Pelas regras das potências, teremos também:*

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemplo 1.18.

$$\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9}\,\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6 \qquad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Observação.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por exemplo:

$$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5, \text{ mas } \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3 + 5 = 8$$

Exercícios (Potências).

1. *Calcule:*

   (a) 10^3 *(b)* $(-0.3)^2$ *(c)* 4^{-2} *(d)* $(0.1)^{-1}$

2. *Escreva na forma de potência de base 2:*

   (a) 4 *(b)* 1 *(c)* 64 *(d)* $\dfrac{1}{16}$

3. *Expanda e simplifique:*

   (a) $2^5 \cdot 2^5$ *(b)* $3^8 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3}$ *(c)* $(2x)^3$ *(d)* $(-3xy^2)^3$

4. *Simplifique:*

   (a) $\dfrac{p^{24}p^3}{p^4p}$ *(b)* $\dfrac{a^4b^{-3}}{(a^2b^{-3})^2}$ *(c)* $\dfrac{(x+1)^3(x+1)^{-2}}{(x+1)^2(x+1)^{-3}}$

5. *Se* $x^{-2}y^3 = 5$*, calcule:*

   (a) $x^{-4}y^6$ *(b)* x^6y^{-9} *(c)* $x^2y^{-3} + 2x^{-10}y^{15}$

6. *Calcule*

   (a) $4^{7/2}$ *(c)* $(1/27)^{-2/3}$ *(e)* $81^{3/4}$

   (b) $16^{-1.25}$ *(d)* $16^{5/4}$ *(f)* $1000^{-2/3}$

7. *Simplifique*

   (a) x^px^{2p} *(c)* $a^2b^3a^{-1}b^5$ *(e)* $\left(x^{1/2}x^{3/2}x^{-3/2}\right)^{3/4}$

   (b) $\dfrac{t^s}{t^{s-1}}$ *(d)* $\dfrac{a^{3/8}}{a^{1/8}}$ *(f)* $\left(\dfrac{10p^{-1}q^{2/3}}{80p^2q^{-7/3}}\right)^{-2/3}$

8. *Simplifique, colocando fora dos radicais os factores possíveis:*

   (a) $\sqrt{27}$ *(b)* $\sqrt[3]{\dfrac{125}{81}}$ *(c)* $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{1000}}$ *(d)* $\sqrt[3]{16x^{10}}$

9. *Simplifique as potências:*

   (a) $(x^4)^{1/4}$ *(c)* $(a^{-1/3})^{3/2}$ *(e)* $\left(\dfrac{x^{-4/3}y^{4/3}}{x^{1/2}}\right)^3$

   (b) $(x^{20})^{1/5}$ *(d)* $\left(\dfrac{x^6y^3}{x^{12}}\right)^{1/3}$

1.7 Expressões algébricas

Exemplo 1.19.

(a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}x$

(b) $(-3)5 = 3(-5) = -(3 \cdot 5) = -15$

(c) $3x(y + 2z) = 3xy + 6xz$

(d) $(a + 2b) + 3b = a + (2b + 3b) = a + 5b$

(e) $(-6)(-20) = 120$

(f) $(t^2 + 2t)4t^3 = t^2 4t^3 + 2t4t^3 = 4t^5 + 8t^4$

Proposição 1.7 (Casos notáveis da multiplicação).

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Exemplo 1.20.

(a) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

(b) $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

(c) $(3x - 2)(3x + 2) = 9x^2 - 4$

Definição 1.11 (Termos semelhantes).
São monómios do mesmo grau (as variáveis são potências iguais):

$$2x^3 \ \textit{é semelhante a} \ -5x^3$$

$$3x^2 \ \textit{não é semelhante a} \ 2x$$

$$5x^3y^2 \ \textit{é semelhante a} \ 2x^3y^2$$

Definição 1.12 (Factorização de números inteiros e de polinómios).

$$49 = 7 \cdot 7 = 7^2, \qquad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 6x^2y = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y$$

Exemplo 1.21 (Ponha em evidência os factores comuns).

$$x^2 - 2x = x(x - 2)$$

$$5x^2y^3 - 15xy^2 = 5 \cdot x \cdot y \cdot y(xy - 3) = 5xy^2(xy - 3)$$

Exercícios (Expressões algébricas).

1. *Desenvolva*

   (a) $(3x+2y)^2$

   (b) $(1-2z)^2$

   (c) $(4p+5q)(4p-5q)$

   (d) $(r+1)^3$

2. *Substitua $x=1$ e $y=2$ nas seguintes expressões e calcule-as:*

   (a) $2x^2-xy$

   (b) $x-4(1+2y)$

   (c) $\dfrac{x+1}{y-1}$

   (d) x^{2y}

3. *Identifique os termos semelhantes e simplifique:*

   (a) $2x^3-4x^2+6x^3+7x+x^2-3$

   (b) $3xy-5x^2y^3+6y^3x^2+5yx+8$

4. *Desenvolva e simplifique:*

   (a) $-x(2x-y)+y(1-x)+3(x+y)$

   (b) $(2xy-3x^2)(x+2y)-(y^2-2xy)(2x-y)$

5. *Substitua $x=2z-1$ e simplifique:*

   (a) $2x^2-x+1$

   (b) $\dfrac{1-x}{x+1}$

6. *Factorize*

   (a) $5x^2+15x$

   (b) $-18b^2+9ab$

   (c) $K(1+r)+K(1+r)r$

   (d) $16a^2-1$

   (e) $x^2y^2-25z^2$

   (f) $4u^2+8u+4$

   (g) $x^2-x+\dfrac{1}{4}$

7. *Prove as igualdades*

   (a) $4x^2-y^2+6x^2+3xy=(2x+y)(5x-y)$

   (b) $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$

1.8 Equações

Proposição 1.8 (Princípios de equivalência).

1. *somar (ou subtrair) um mesmo termo* $h(x)$ *aos dois membros:*

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$$

2. *multiplicar (ou dividir) por um mesmo factor* $h(x) \neq 0$ *os dois membros:*

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$$

Consequências práticas: um termo troca de sinal ao transitar de membro da equação; um factor (de um membro) passa para a dividir todo o outro membro da equação.

Exemplo 1.22.

$$4x - 3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3 + 3 = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 5 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = 8$$

$$4x = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot 4x = \frac{1}{4} \cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Proposição 1.9 (Fórmula resolvente do 2^o grau).

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{se } \underbrace{b^2 - 4ac}_{\Delta} \geq 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$ *é o discriminante da equação quadrática. A equação:*

(a) não tem soluções se $\Delta < 0$*;*

(b) tem uma única solução se $\Delta = 0$*;*

(c) tem duas soluções se $\Delta > 0$*.*

Proposição 1.10 (Lei do anulamento do produto).

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \ \ \text{ou} \ \ g(x) = 0$$

Exemplo 1.23.

$$(x^2 + 1)(x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 + 1 = 0}_{\textit{impossível}} \ \ \text{ou} \ \ x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Numa equação quadrática incompleta (isto é, $b = 0$ ou $c = 0$) teremos:

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (ax + b)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax + b = 0 \text{ ou } x = 0$$

$$ax^2 + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad \text{se } -\frac{c}{a} \geq 0$$

Exemplo 1.24.

$$2x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = 0 \text{ } ou \text{ } x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ } ou \text{ } x = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

Teorema 1.11 (Factorização de polinómios do 2^o grau)**.** *Se*

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \quad ou \quad x = x_2$$

então

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemplo 1.25 (Factorize $2x^2 - 4x - 6$)**.**

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \textit{(fórmula resolvente)} \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad ou \quad x = 3.$$

$$\textit{Factorizando:} \qquad 2x^2 - 4x - 6 = 2\big(x - (-1)\big)(x - 3) = 2(x+1)(x-3)$$

Exemplo 1.26. *Resolva* $2x^2 = 4x$*:*

$$2x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2$$

Exemplo 1.27. *Seja* $p(x)$ *um polinómio do 2^o grau com zeros* $x = -2$ *e* $x = 2$*. Determine a expressão geral deste polinómio.*

$$p(x) = a(x+2)(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = a(x^2 - 4) \quad \Leftrightarrow \quad p(x) = ax^2 - 4a$$

Exemplo 1.28. *Resolva:*

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 8 = x^2 \ \wedge \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 4$$

Exemplo 1.29. *Resolva:*

$$x + \frac{1}{x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3x}{x}$$

$$x^2 + 1 = 3x \ \wedge \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Exercícios (Equações).

1. *Resolva:*

   (a) $3x - 5 = x - 3$

   (b) $3x - (x-1) = x - (1-x)$

   (c) $-x - 3 = 5$

   (d) $\dfrac{x-3}{4} + 2 = 3x$

2. *Resolva:*

   (a) $\dfrac{1}{2x+1} = \dfrac{1}{x+2}$

   (b) $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-2x} = \dfrac{2}{x}$

   (c) $\dfrac{x}{x-5} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{-5}{5-x}$

   (d) $\dfrac{3}{x-3} - \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{9}{x^2-9}$

3. *Resolva em ordem a x:*

   (a) $\dfrac{1}{ax} + \dfrac{1}{bx} = 2$

   (b) $\dfrac{ax+b}{cx+d} = A$

   (c) $\sqrt{1+x} + \dfrac{ax}{\sqrt{1+x}} = 0$

   (d) $a^2x^2 - b^2 = 0$

   (e) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$

   (f) $\dfrac{z - 2y + xz}{z - x} = 4y$

4. *Resova as equações quadráticas:*

   (a) $4x^2 - 12x = 0$

   (b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

   (c) $x^2 - 16 = 0$

   (d) $x^2 + 1 = 0$

   (e) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

   (f) $x(x+1) = 2x(x-1)$

5. *Escreva uma equação para cada problema e determine a sua solução:*

   (a) *Os custos fixos de uma empresa são* 2 000 €. *O custo de produção unitário de um bem é* 20 €. *Se o preço de venda unitário desse bem for* 75 €, *quantas unidades deverão ser produzidas para a empresa obter* 14 500 € *de lucro ?*

   (b) *O Sr. Mateus deixou em testamento* 2/3 *dos seus bens à sua esposa,* 1/4 *aos seus filhos, e o restante, no valor de* 100 000 €, *ao Banco Alimentar contra a Fome. Qual era o valor total dos seus bens?*

6. *Idem.*

   (a) *Determine os comprimentos dos lados de um rectângulo com perímetro igual a* 40 *cm e área igual a* 75 cm^2.

   (b) *Determine dois números inteiros consecutivos, de forma que a soma dos seus quadrados seja igual a* 13.

   (c) *Um condutor conduz habitualmente um percurso de* 80 *km. Um dia poupou* 16 *minutos nesse percurso, tendo conduzido em média* 10 *km/h mais rápido do que habitualmente. Qual é a sua velocidade média habitual?*

1.9 Inequações

Exemplo 1.30.

$$x > 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]3, +\infty[$$

O princípio de equivalência 1 também se aplica às inequações.

Proposição 1.12 (Princípio de equivalência 2 - multiplicação por um factor)**.**
Inversão do sentido da desigualdade quando se multiplica por $h(x) < 0$:

$$f(x) < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} h(x) \cdot f(x) < h(x) \cdot g(x) & se \;\; h(x) > 0 \\ h(x) \cdot f(x) > h(x) \cdot g(x) & se \;\; h(x) < 0 \end{cases}$$

Exemplo 1.31.

$$4x < 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot 4x < \frac{1}{4} \cdot 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{8}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$$

Multiplicação por um factor negativo, com inversão do sentido da desigualdade:

$$-3x < 9 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3} \cdot (-3)x > -\frac{1}{3} \cdot 9 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$$

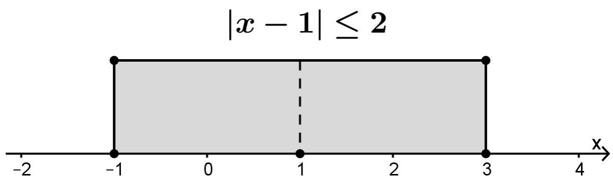
Proposição 1.13.
Seja $k > 0$.

$$|f(x)| \leq k \quad \Leftrightarrow \quad -k \leq f(x) \leq k$$

$$|f(x)| \geq k \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq -k \quad \vee \quad f(x) \geq k$$

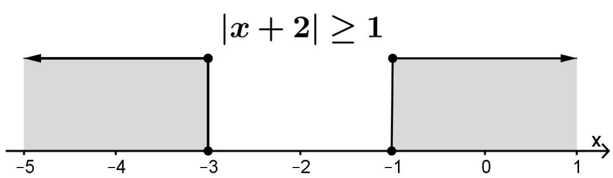
Exemplo 1.32.

$$|x-1| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x-1 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2+1 \leq x \leq 2+1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 3$$



Exemplo 1.33.

$$|x+2| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 \leq -1 \quad \vee \quad x+2 \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq -1$$



Exercícios (Inequações).

1. *Determine o conjunto solução de:*

   (a) $3x - 5 > x - 3$

   (b) $-x - 3 \leq 5$

   (c) $3x - (x - 1) \geq x - (1 - x)$

   (d) $-4x^2 < -1$

2. *Resolva:*

   (a) $|x - 2| \leq 1$

   (b) $|2 - 3x| \leq 4$

   (c) $|x^2 - 2| \geq 1$

3. *Esboce um diagrama de sinais para o primeiro membro da inequação e resolva-a:*

   (a) $(x - 1)(x - 3) \geq 0$

   (b) $(2x + 1)(3x - 1) \leq 0$

   (c) $x(x - 1)(x + 3) > 0$

4. *Idem:*

   (a) $\dfrac{x}{x - 1} \geq 0$

   (b) $\dfrac{x - 4}{1 - x} \leq 0$

   (c) $\dfrac{-x}{x^2 - 1} > 0$

5. *Resolva, apresentando o conjunto solução como (união de) intervalos de números reais e representando-o na recta real:*

   (a) $x^2 \leq 9$

   (b) $-3x^2 \geq -12$

   (c) $\dfrac{1}{x} > 2$

6. *Resolva:*

   (a) $x^2 \geq 0$

   (b) $-x^2 - 1 \geq 0$

   (c) $\dfrac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

Capítulo 2

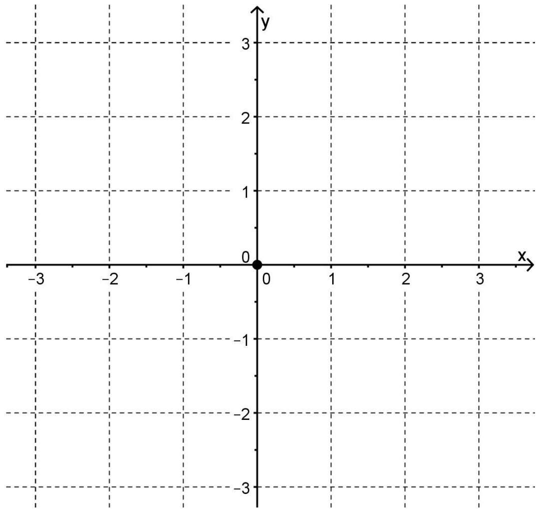
Funções

2.1 Geometria analítica

Definição 2.1 (Plano cartesiano)**.**
é um plano (superfície bidimensional) com um sistema de eixos coordenados ortogonais: eixo das abcissas, ou dos x, e eixo das ordenadas, ou dos y. Neste sistema de eixos coordenados, cada par ordenado (x, y) define um único ponto no plano.

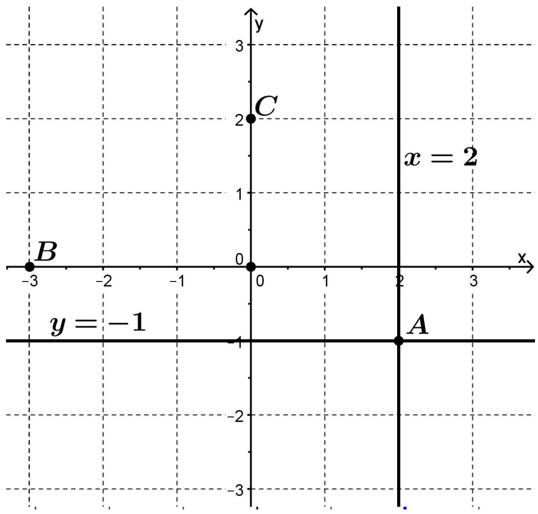
O plano cartesiano é designado por:

$$\mathbb{R}^2 := \{ \ (x, y) \mid x \in \mathbb{R} \quad e \quad y \in \mathbb{R} \ \}$$



Exemplo 2.1.
No plano cartesiano, estão representados:

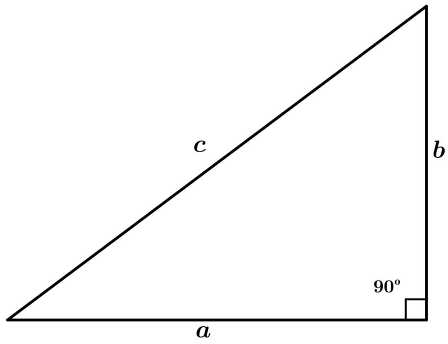
- *Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x = 2$ (recta vertical);*
- *Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y = -1$ (recta horizontal);*
- *O ponto $A = (2, -1)$;*
- *O ponto $B = (-3, 0)$;*
- *O ponto $C = (0, 2)$.*



Teorema 2.1 (Pitágoras).
Num triângulo com lados de comprimento $a, b, c \in \mathbb{R}^+$,

$$a^2 + b^2 = c^2$$

se e só se os lados de comprimento a e b formarem um ângulo de 90^o.

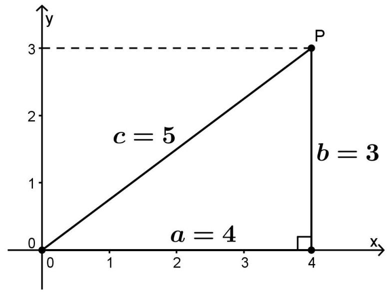


Proposição 2.2. *A distância de $P = (x, y)$ à origem é $||\,(x, y)\,|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Exemplo 2.2. *Um triângulo com lados de comprimento $4, 3$ e 5 é rectângulo, pois*

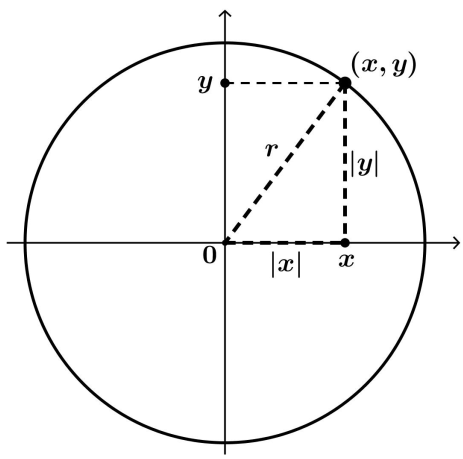
$4^2+3^2 = 5^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16+9 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad$ *P. V.*

e o Teorema de Pitágoras afirma que se a proposição for verdadeira (P. V.) então o triângulo é rectângulo, com o ângulo de 90^o entre os lados de comprimento 4 e 3.

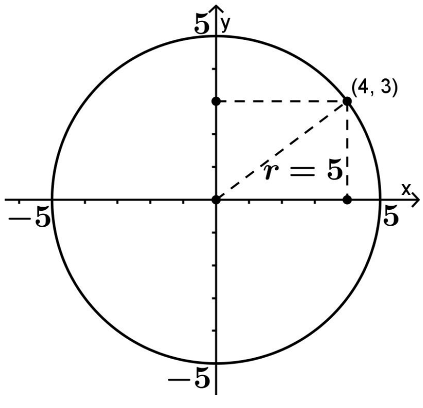


Proposição 2.3.
A circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = r^2$$



Exemplo 2.3. *$x^2 + y^2 = 5^2$ define a circunferência de raio 5 e centro na origem*



Exercícios (Geometria analítica).

1. *Esboce os seguintes pontos no plano cartesiano:*

a)	$A = (1,3)$	*d)*	$D = (-3,-1)$	*g)*	$G = (-1,0)$
b)	$B = (3,1)$	*e)*	$E = (2,0)$	*h)*	$H = (0,-1)$
c)	$C = (-1,3)$	*f)*	$F = (0,2)$	*i)*	$I = \left(\pi, \frac{1}{2}\right)$

2. *Esboce as seguintes rectas:*

a)	$x = -2$	*c)*	$x = 0$	*e)*	$y = 0$
b)	$y = 1$	*d)*	$y = -3$	*f)*	$x = 3$

3. *Esboce cada par de rectas e o seu ponto de intersecção:*

   a) recta $x = 3$ *com a recta* $y = 2$

   b) recta $x = -1$ *com a recta* $y = -2$

   c) recta $x = 0$ *com a recta* $y = 2$

   d) recta $x = 1$ *com a recta* $y = 0$

4. *Esboce as seguintes circunferências:*

a)	$x^2 + y^2 = 2^2$	*b)*	$x^2 + y^2 = 9$	*c)*	$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

5. *Determine o comprimento da diagonal de:*

   a) Um quadrado com lados de comprimento 1.

   b) Um rectângulo com lados de comprimento $\sqrt{2}$ *e* 1.

6. *Considere uma circunferência de raio* 1*:*

$$x^2 + y^2 = 1$$

   a) Se dilatar a circunferência segundo o eixo das abcissas por um factor $a > 0$*, a circunferência transforma-se numa elipse que passa por* $(a, 0)$ *e por* $(0, 1)$*. Justifique que essa elipse é definida pela equação:*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1$$

   b) Apresente um resultado semelhante para uma dilatação por um factor $b > 0$ *segundo o eixo das ordenadas e conclua que tipo de curva é definida pela equação:*

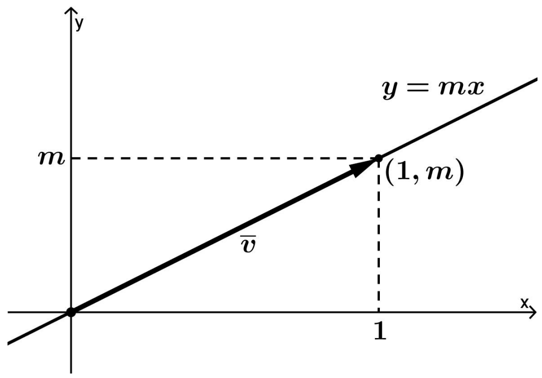
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

2.2 Função linear

Definição 2.2 (Proporcionalidade directa).
Duas variáveis y e x são directamente proporcionais ($y \propto x$), com constante de proporcionalidade (directa) $m \neq 0$ quando:

$$y = mx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = m \qquad (x \neq 0)$$

A representação gráfica desta relação é a recta que passa por $(0, 0)$ e $(1, m)$.



Observação. Seja $t \in \mathbb{R}$ e $x = t$. Se $y = mx$, então $y = mt$, logo:

$$(x, y) = (t, mt) = t(1, m), \quad t \in \mathbb{R}$$

logo (x, y) são os múltiplos escalares de $\overline{v} = (1, m)$.

Exemplo 2.4. *Constantes de proporcionalidade:*

(a) Um automóvel gasta $6l\,/\,100km = \dfrac{6\,l}{100\,km}$

(b) O ananás custa $2,5€\,/\,kg = \dfrac{2,5\,€}{1\,kg}$

(c) A velocidade média de uma viagem foi de $80km\,/\,h = \dfrac{80\,km}{1\,h}$.

(d) Um televisor tem um formato 16 *por* 9, *ou seja,* $16 : 9 = \dfrac{16}{9}$

(e) Um vinho tem $12\% = \dfrac{12}{100}$ *de álcool.*

(f) A taxa de IVA é de $23\% = \dfrac{23}{100}$.

(g) O perímetro de uma circunferência é directamente proporcional ao seu diâmetro.

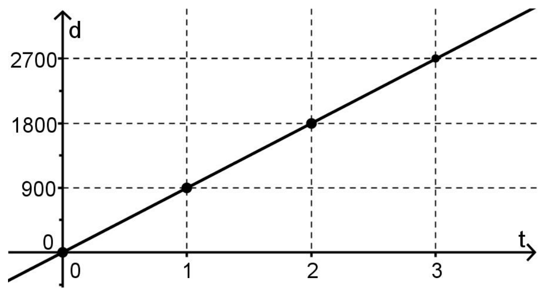
(h) Num mapa com determinada escala ($1 : 1\,000\,000$) *a distância medida no mapa é directamente proporcional à distância real.*

Exemplo 2.5. *Um avião viaja a 900 km/h. Sejam t o tempo de viagem (em horas) e d a distância percorrida (em km). A distância percorrida é directamente proporcional ao tempo de viagem:*

$$d = 900\,t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{t} = 900 \qquad (t \neq 0)$$

e $m = 900$ km/h é a constante de proporcionalidade (directa).

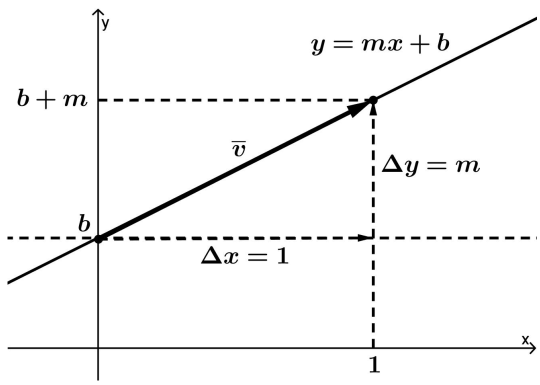
tempo (h) t	*distância (km)* $d = 900\,t$
0	0
1	900
2	1800
3	2700



Definição 2.3 (Função linear).
$y = f(x)$ é uma função linear se existirem $m, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$y = \underbrace{mx + b}_{f(x)}$$

Esta equação define a recta que passa por $(0, b)$ e $(1, b + m)$.
Dizemos que b é a ordenada na origem e que m é o declive da recta.



Como $y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad (y - b) = mx$, concluímos que $(y - b) \propto x$, definindo uma recta que passa por $(0, b)$ e por $(1, b + m)$.

As equações da recta podem surgir nas seguintes formas equivalentes:

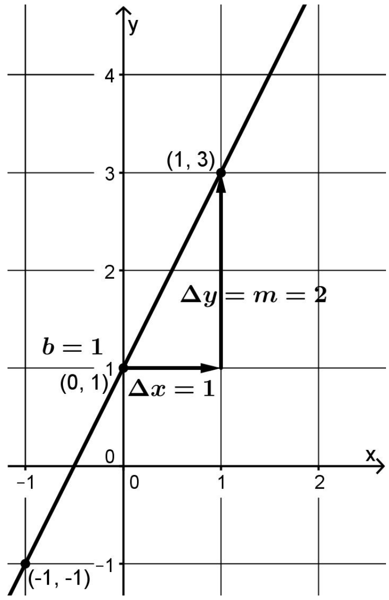
reduzida: $y = mx + b$	ponto-declive: $y - y_1 = m(x - x_1)$
cartesiana: $Ax + By = C$	dupla intersecção: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

Exemplo 2.6.

$$y = 2x + 1$$

define y *como função linear de* x*, de acordo com a Definição 2.3, com declive* $m = 2$ *e intersecção na origem* $b = 1$.

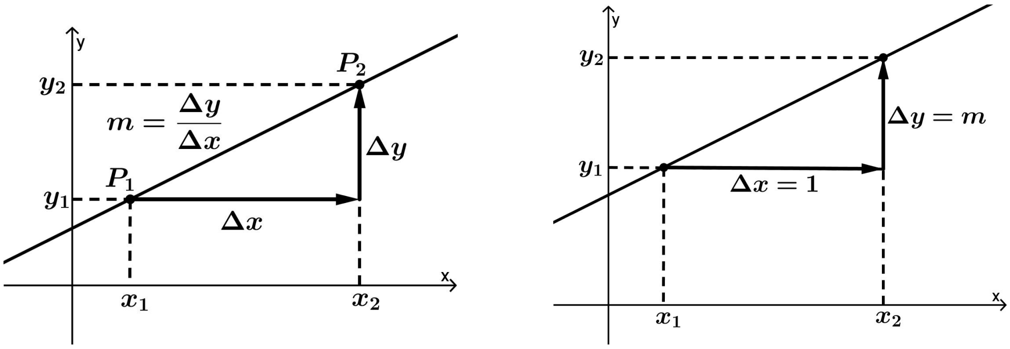
x	$y = 2x + 1$
-1	$2(-1) + 1 = -1$
0	$2(0) + 1 = 1$
1	$2(1) + 1 = 3$
2	$2(2) + 1 = 5$



Definição 2.4. *O declive de uma recta (não vertical) é o número*

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

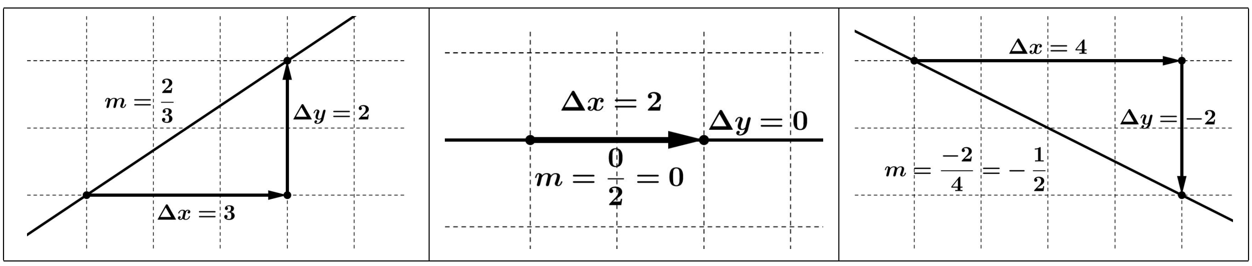
onde $P_1 = (x_1, y_1)$ *e* $P_2 = (x_2, y_2)$ *são dois pontos dessa recta* ($x_1 \neq x_2$)*.*



$m = \tan\theta$*, e em particular é independente da escolha de* P_1 *e* P_2*.*

Observação. Uma vez que $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \Leftrightarrow \Delta y = m\,\Delta x$, escolhendo x_1 e x_2 por forma a que $\Delta x = x_2 - x_1 = 1$, concluímos que $\Delta y = m \cdot 1 = m$, ou seja: o declive m é a variação da variável dependente y para um aumento unitário da variável independente x.

Exemplo 2.7. *Os declives das seguintes rectas são:*



Exercícios (Função linear).

1. *Esboce as rectas que passam em* $(0;0)$ *e com declives:*

   (a) $m = \frac{1}{2}$ (b) $m = \frac{2}{3}$ (c) $m = -\frac{3}{2}$

2. *Verifique quais dos seguintes pontos pertencem à recta* $4x - 3y = 6$*:*

   (a) $A = (0, -2)$ (b) $B = \left(1, \frac{2}{3}\right)$ (c) $C = (3, 2)$

3. *Esboce as rectas com os pontos e declives indicados:*

   (a) $P = (2;1)$, $m = 1$ (b) $P = (0;-2)$, $m = 2$ (c) $P = (-2;3)$, $m = -\frac{1}{2}$

4. *Considere a recta* $R_1 : \ x + 2y = 12$.

   (a) *Determine as intersecções de* R_1 *com os eixos coordenados.*

   (b) *Esboce* R_1.

5. *Uma recta contém os pontos* $A = (4;3)$ *e* $B = (7;-3)$

   (a) *Calcule o seu declive.*

   (b) *Determine a sua equação reduzida.*

   (c) *Esboce a recta.*

6. *Considere a recta definida por* $2x - 3y = 6$.

   (a) *Verifique que os pontos* $(3,0)$ *e* $(0,-2)$ *pertencem à recta.*

   (b) *Determine o declive da recta.*

   (c) *Esboce a recta.*

7. *Esboce as seguintes rectas:*

   (a) $4x + 3y = 12$ (b) $2x + 3y = 12$ (c) $2x + y = 1$

8. *Uma tipografia cobra* 1400 € *para imprimir* 100 *exemplares de um livro, e* 3000 € *para imprimir* 500 *exemplares do mesmo livro. Suponha que o custo de impressão é uma função linear do número de exemplares (mas não proporcional).*

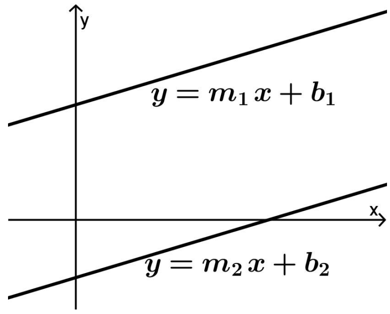
   (a) *Determine a equação para o custo* C *da impressão de* Q *exemplares.*

   (b) *Calcule o custo de impressão de* 300 *exemplares.*

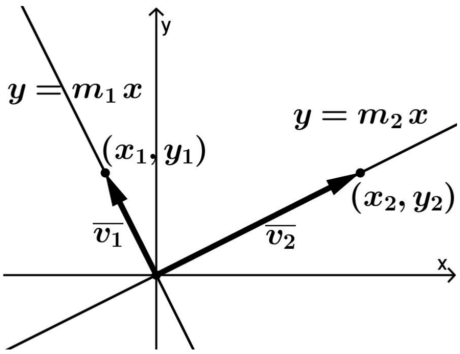
   (c) *Esboce o gráfico de* C *em função de* Q.

2.3 Sistemas de equações lineares

Proposição 2.4 (Rectas paralelas). *os declives são iguais:* $m_1 = m_2$



Proposição 2.5 (Rectas perpendiculares). m_1 *e* m_2 *(*$\neq 0$*) satisfazem* $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$



Demonstração.
Os vectores $\overline{v_1} = (x_1, y_1)$ e $\overline{v_2} = (x_2, y_2)$ são perpendiculares se e só se:

$$\overline{v_1} \cdot \overline{v_2} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

As rectas com declives m_1 e m_2 têm as direcções dos vectores $\overline{v_1} = (1, m_1)$ e $\overline{v_2} = (1, m_2)$, os quais serão perpendiculares se e só se:

$$\overline{v_1} \cdot \overline{v_2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \cdot 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}\,, \quad (m_1, m_2 \neq 0)$$

□

Exemplo 2.8 (Rectas paralelas ou perpendiculares).

a) $y = 3x - 4$ *e* $y = 3x + 1$ *são paralelas, pois* $m_1 = m_2 = 3$.

b) $y = -\dfrac{1}{3}x + 2$ *e* $y = 3x - 5$ *são perpendiculares, pois* $m_1 = -\dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{m_2}$.

Definição 2.5 (Soluções de Sistemas de Equaçoes Lineares (SEL))**.**
Uma solução de um SEL de duas variáveis reais

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{cases}$$

é um par ordenado (x, y) que satisfaz simultaneamente as duas equações.

Cada equação do SEL define uma recta.
As soluções do sistema serão os pontos de intersecção das duas rectas. O SEL terá:

(a) nenhuma solução, se as rectas forem paralelas

(b) uma solução, se as rectas forem concorrentes num ponto

(c) infinitas soluções, se as duas rectas forem coincidentes

Exemplo 2.9.

(a) Nenhuma solução:

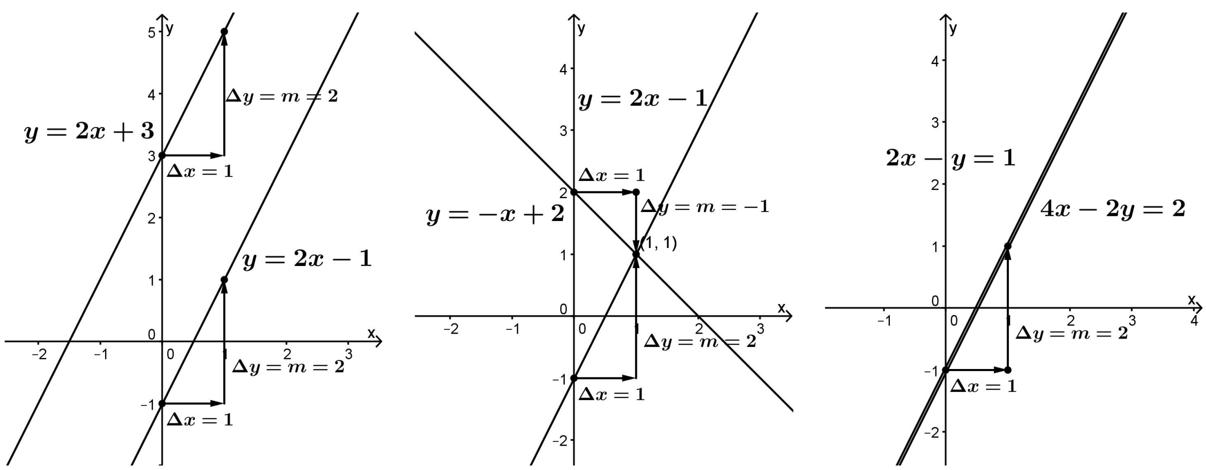
$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

(b) uma solução:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

(c) infinitas soluções:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$



Exercícios (Sistemas de equações lineares)**.**

1. *Resolva graficamente (esboçando das rectas) cada SEL:*

   (a) $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} 6x+8y=24 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$

2. *Considere a recta* $R_1: \; 2x+y-8=0$ *e seja* R_2 *uma recta perpendicular a* R_1*.*

   (a) Calcule o declive de R_2*.*

   (b) A intersecção de R_1 *com* R_2 *é o ponto* $(4;k)$*. Determine* k *e a equação de* R_2*.*

3. *Resolva algebricamente e esboce graficamente as rectas e a solução:*

   (a) $\begin{cases} -x+4y=4 \\ 3x-2y=3 \end{cases}$ *(b)* $\begin{cases} 3x+4y=2 \\ 6x+8y=24 \end{cases}$ *(c)* $\begin{cases} 3x+2y=-6 \\ -6x-4y=12 \end{cases}$

4. *Determine dois números cuja soma seja* 52 *e a diferença* 26*.*

5. *Cinco mesas e vinte cadeiras custam* 1 800 €*, enquanto que duas mesas e três cadeiras custam* 420 €*. Qual é o preço de cada mesa e de cada cadeira?*

6. *Uma pessoa investiu em dois depósitos a prazo com juros simples, às taxas anuais de* 5% *e de* 7.2%*, um total de* 10 000 € *. Se ao final de um ano recebeu* 676 € *em juros, quanto depositou em cada depósito?*

7. *(a) Mostre que as rectas definidas por*

   $$ax+by=c \qquad e \qquad dx+ey=f$$

   são paralelas se e só se $ae-bd=0$*.*

   (b) Classifique quanto ao número de soluções:

   $$\begin{cases} 2x-4y=1 \\ -3x+6y=7 \end{cases}$$

2.4 Conjuntos de $\mathbb{R}^2$

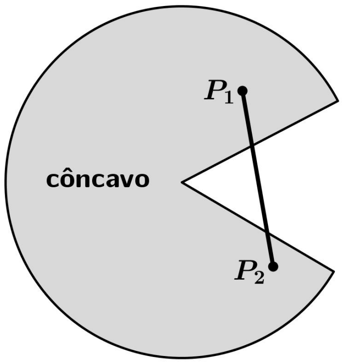
Definição 2.6 (Segmento de recta entre dois pontos).
O segmento de recta entre $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é o conjunto:

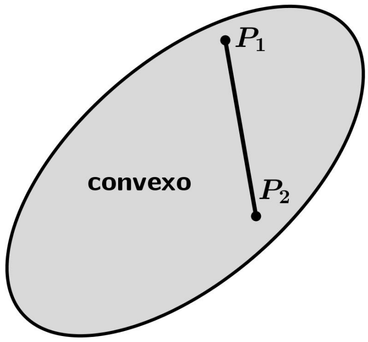
$$\begin{aligned}(x, y) &= P_1 + t\,\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= P_1 + t\,(P_2 - P_1) \\ &= (1 - t)\,P_1 + t\,P_2, \quad t \in [0, 1]\end{aligned}$$

Definição 2.7 (Conjunto côncavo ou convexo).
Considere um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ e segmentos de recta definidos por pares de pontos desse conjunto. O conjunto diz-se:

a) côncavo, se existir algum segmento de recta não totalmente contido no conjunto

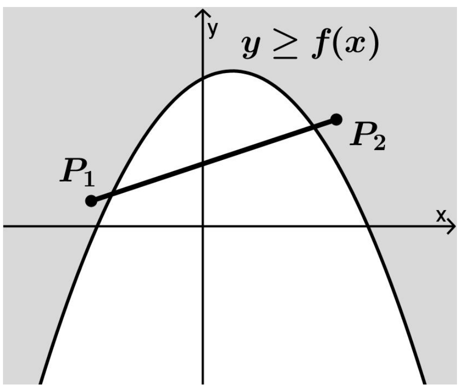
b) convexo, se qualquer segmento de recta estiver totalmente contido no conjunto.



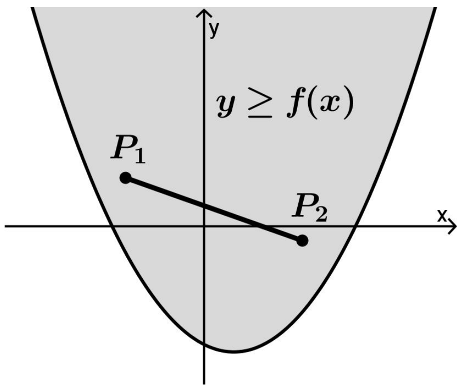


Definição 2.8.
Uma função diz-se côncava ou convexa se $\{\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\ \}$ for um conjunto côncavo ou convexo, respectivamente:

Côncava:



Convexa:



Exercícios (Conjuntos de $\mathbb{R}^2$).

1. *Esboce no plano cartesiano os conjuntos definidos pelas inequações:*

   (a) $y \geq x - 1$ (c) $2x - 3y < 6$ (e) $x^2 + y^2 > 1$

   (b) $2x + y \leq 4$ (d) $x^2 + y^2 \leq 4$ (f) $x - y^2 \geq 0$

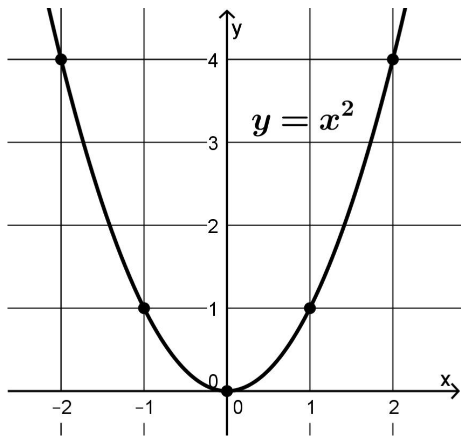
2. *Esboce no plano cartesiano os conjuntos definidos pelos sistemas de inequações:*

   (a) $\begin{cases} y \leq -\dfrac{x}{2} + 2 \\ y \leq -2x + 5 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + 4y \leq 6 \\ 2x + y \leq 5 \end{cases}$

2.5 Função quadrática

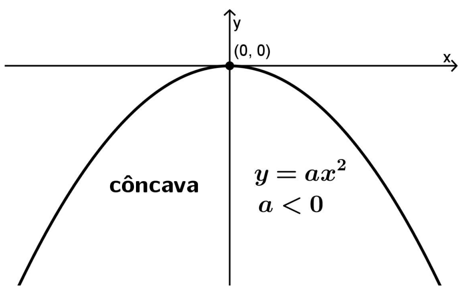
Exemplo 2.10.
A função $y = x^2$ depende quadraticamente de x (logo, é não linear):

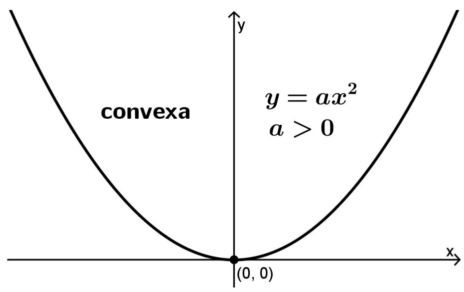
x	$y = x^2$
-2	$(-2)^2 = 4$
-1	$(-1)^2 = 1$
0	$(0)^2 = 0$
1	$(1)^2 = 1$
2	$(2)^2 = 4$



Definição 2.9. *A curva definida por $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ é uma parábola com vértice na origem e concavidade virada para:*

(a) baixo (côncava), se $a < 0$ *(b) cima (convexa), se $a > 0$*

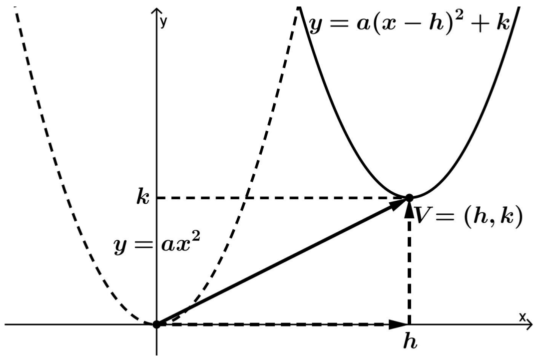




O valor absoluto de a determina a maior ou menor abertura da parábola.

Proposição 2.6. *A parábola $y = ax^2$ com vértice em $(0, 0)$ pode ser transladada para o vértice $V = (h, k)$ e eixo de simetria $x = h$ através de:*

$$y = a(x - h)^2 + k$$



Definição 2.10. *A função $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ são constantes e $a \neq 0$) é uma função quadrática (ou polinomial do 2º grau). O seu gráfico é uma parábola com vértice $V = (h, k)$ e eixo de simetria $x = h$, onde:*

$$h = -\frac{b}{2a} \quad , \quad k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Exemplo 2.11.

$$y = (x-1)(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad y = x^2 + 2x - 3$$

$$h = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1 \quad , \quad k = f(-1) = -4$$

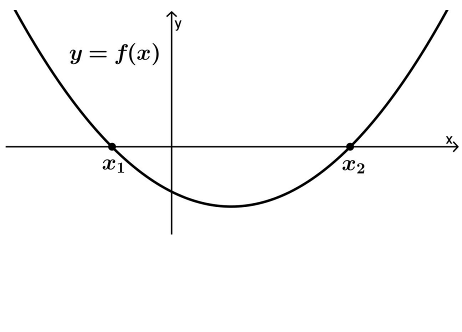
logo o vértice é $V = (-1; -4)$ e o eixo de simetria é $x = -1$.

Definição 2.11. *Os zeros de uma função real $f(x)$ são as soluções da equação:*

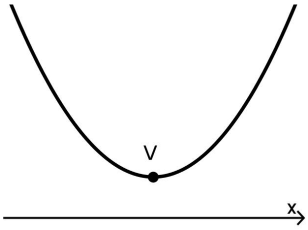
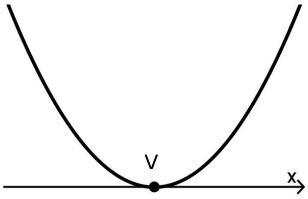
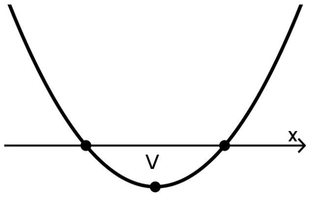
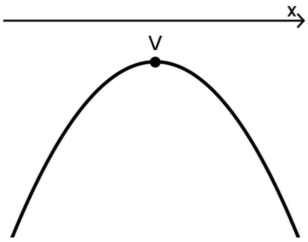
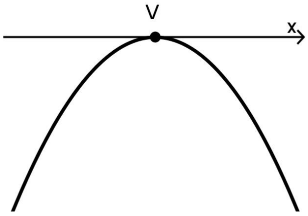
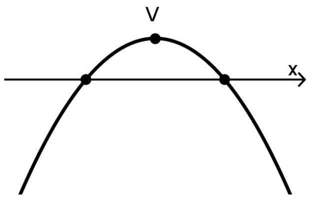
$$f(x) = 0$$

Graficamente, são as abcissas dos pontos da intersecção do gráfico $y = f(x)$ com o eixo das abcissas (recta $y = 0$).

x	$y = f(x)$
x_1	$f(x_1) = 0$
x_2	$f(x_2) = 0$



Se $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $\Delta = b^2 - 4ac$, teremos:

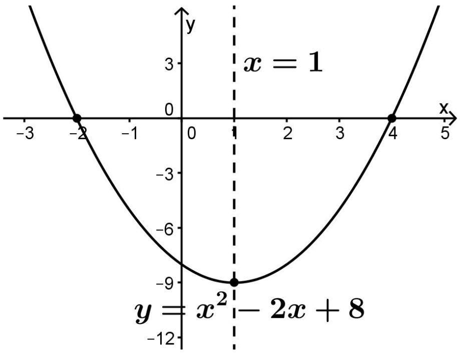
	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Proposição 2.7.
Se $y = ax^2 + bx + c$ tem dois zeros x_1, x_2, o eixo de simetria do seu gráfico é

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Exemplo 2.12.
Seja $f(x) = (x + 2)(x - 4)$. Os zeros desta quadrática determinam-se por inspecção:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)(x-4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = 0 \vee x-4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \vee x = 4$$



O eixo de simetria da parábola $y = (x + 2)(x - 4)$ é determinado pela média dos zeros:

$$x = \frac{(-2) + 4}{2} = 1$$

Alternativamente, se desenvolvermos o produto, obteremos:

$$f(x) = x^2 - 2x - 8$$

e nesse caso o eixo de simetria calcular-se-ia: $x = -\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1.$

Exercícios (Função quadrática).

1. *Esboce os gráficos de:*

   (a) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ (b) $y = -2x^2$

2. *Prove que para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$*:*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

3. *Determine o eixo de simetria e o vértice de:*

   (a) $y = 2x^2 - 6x + 4$ (b) $y = (x-2)^2 - 1$ (c) $y = x(4-x)$

4. *Determine os zeros das seguintes funções:*

   (a) $y = 2x^2 - 6x + 4$ (b) $y = (x-2)^2 - 1$ (c) $y = x(4-x)$

5. *Esboce os gráficos*

   (a) $y = 2x^2 - 6x + 4$ (b) $y = (x-2)^2 - 1$ (c) $y = x(4-x)$

6. *Determine: zeros, eixo de simetria, vértice e gráficos:*

   (a) $y = (x-1)(x+2)$ (c) $y = 2(x-1)(x+1)$ (e) $y = -2(x+1)^2 - 3$

   (b) $y = (x+3)(x+1)$ (d) $y = (x-2)^2 + 1$ (f) $y = \dfrac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

2.6 Estudo de uma função

Definição 2.12. *O domínio de uma função é o conjunto de valores que a variável independente (frequentemente x) pode tomar.*
O domínio de uma função:

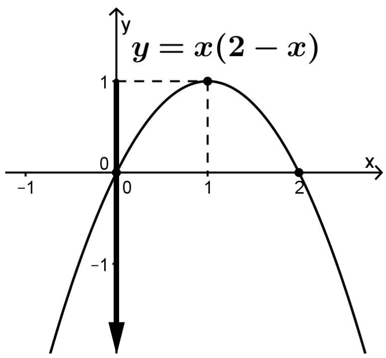
(a) *polinomial,* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*, é* $\mathbb{R}$

(b) *racional,* $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$*, é* $\{x \in \mathbb{R} \,:\, q(x) \neq 0\}$

(c) *raiz de índice (n) par,* $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$*, é* $\{x \in \mathbb{R} \,:\, g(x) \geq 0\}$

Definição 2.13. *O contradomínio de uma função é o conjunto de todos os valores tomados pela variável dependente (frequentemente y) quando a variável independente toma todos os valores possíveis do domínio da função.*

Exemplo 2.13. *A função $f(x) = x(2 - x)$ é quadrática (polinomial), logo tem domínio $D_f = \mathbb{R}$. A concavidade da parábola é virada para baixo, e o seu vértice é $(1, 1)$, logo o contradomínio de f é $D'_f =]-\infty, 1]$:*

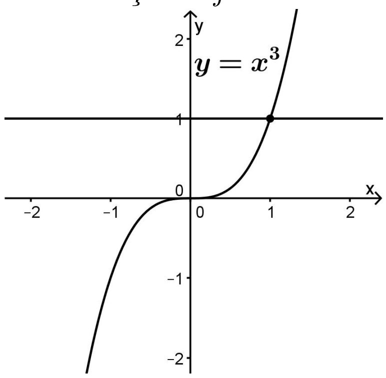


Definição 2.14. *Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é injectiva se e só se quaisquer dois pontos distintos do domínio forem sempre transformados em imagens distintas:*

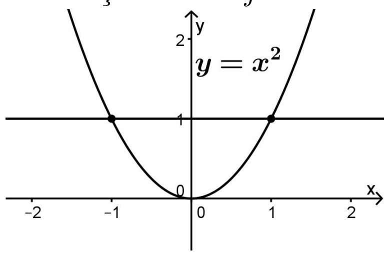
$$\forall x_1, x_2 \in D, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo 2.14.

Função injectiva:



Função não-injectiva:



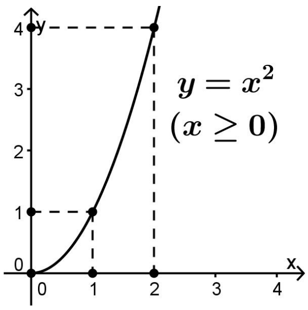
Qualquer função linear $f(x) = mx + b$, com $m \neq 0$ é injectiva e invertível. Podemos determinar a expressão da função inversa resolvendo a equação $y = f(x)$ em ordem a x:

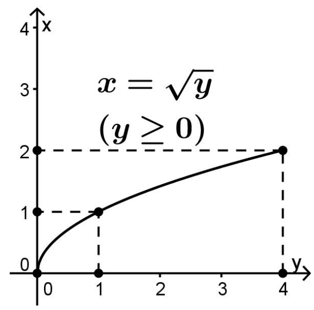
$$y = mx + b \quad \Leftrightarrow \quad y - b = mx \quad \Leftrightarrow \quad x = \underbrace{\frac{1}{m}y - \frac{b}{m}}_{f^{-1}(y)}$$

Qualquer função quadrática não é invertível, devido à existência de pares de valores do domínio (equidistantes do eixo de simetria) com a mesma imagem.

Exemplo 2.15. *A restrição da parábola $y = x^2$ a $[0, +\infty[$ admite inversa. Com efeito*

$$y = x^2 \ \wedge \ x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{y} \ \wedge \ x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = +\sqrt{y}$$





Proposição 2.8. *Uma função $f : D \to D'$, onde $D' = f(D)$, admite função inversa $f^{-1} : D' \to D$ se e só se f é injectiva.*

Definição 2.15. *Uma função f tem uma assímptota:*

(a) vertical $x = a$ (aderente a D_f) se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

(b) horizontal $y = b$ quando $x \to \pm\infty$ se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

(c) oblíqua $y = mx + b$ quando $x \to \pm\infty$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad e \quad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = b$$

Definição 2.16. *Uma função é par se $f(x) = f(-x)$ e ímpar se $-f(x) = f(-x)$.*

Proposição 2.9 (Limites notáveis)**.**

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log_b x} = +\infty \qquad (b > 1)$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^p} = +\infty \qquad (b > 1)$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right) = e^k$

Exemplo 2.16. *Consideremos $f(x) = \dfrac{1}{x}$. O domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Para determinar o contradomínio, iremos calcular a função inversa:

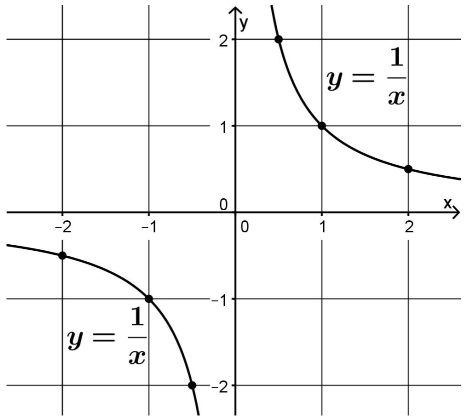
$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{x} \ \wedge \ x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} \ \wedge \ y \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(y)$$

logo o contradomínio é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois a função inversa está bem definida para $y \neq 0$. A função é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$.

f é crescente em $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$.

Tem uma assímptota horizontal $y = 0$ quando $x \to \pm\infty$, pois:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$



f tem uma assímptota vertical $x = 0$ quando $x \to 0$, pois:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

Exercícios (Estudo de uma função)**.**

1. *Determine o domínio das seguintes funções:*

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ *(b)* $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ *(c)* $h(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}}$

2. *Determine o domínio das seguintes funções:*

   (a) $f(x) = e^{x^2 - 3x}$ *(b)* $g(x) = 2^{\left(x - \sqrt{2}\right)^{-1}}$ *(c)* $h(x) = \ln\left(x^2 - 4\right)$

3. *Caracterize as funções inversas de:*

   (a) $f(x) = x + 1$

   (b) $g(x) = \sqrt{x + 3}$

   (c) $i(x) = x^2 - 1$ *sendo* $D_i = \mathbb{R}_0^+$

4. *Calcule as assímptotas de:*

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *(b)* $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ *(c)* $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

5. *Calcule as assímptotas de:*

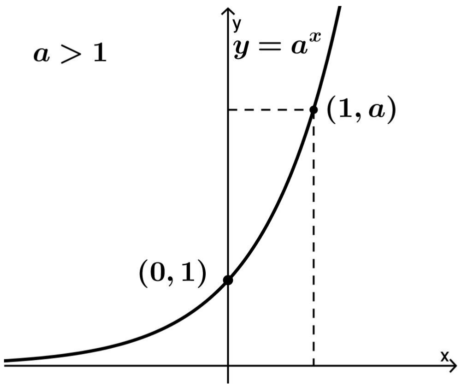
   (a) $f(x) = x - \ln x$ *(b)* $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ *(c)* $f(x) = \dfrac{5}{1 + 2e^{-x}}$

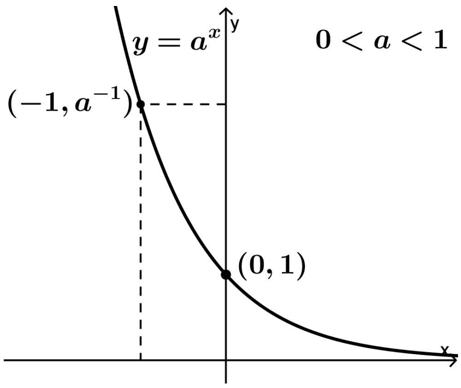
2.7 Função exponencial e logarítmica

Definição 2.17. *A função exponencial de base* $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ *é:*

$$f(x) = a^x$$

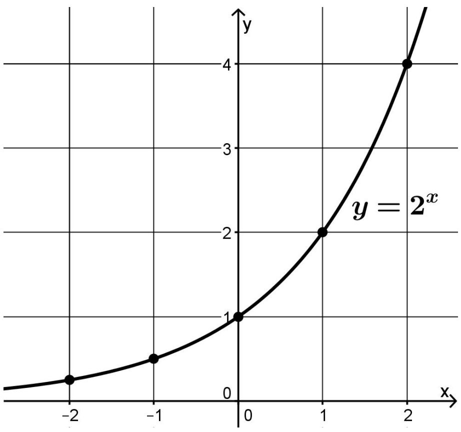
O seu domínio é $\mathbb{R}$ *e o contradomínio é* $\mathbb{R}^+$ *(logo, não tem zeros).*





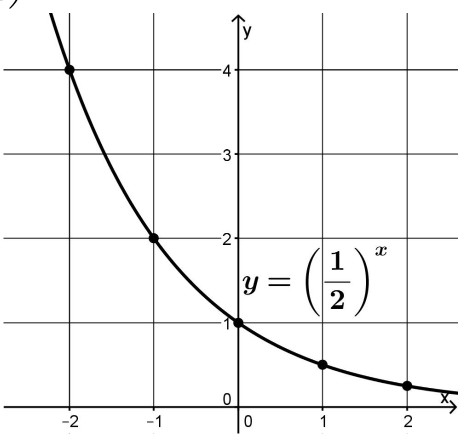
Exemplo 2.17. *A função exponencial* $f(x) = 2^x$

x	$y = 2^x$
-2	$1/4$
-1	$1/2$
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 2.18. *A função exponencial* $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

x	$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$1/2$
2	$1/4$



A função exponencial de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ é injectiva, e por conseguinte invertível.

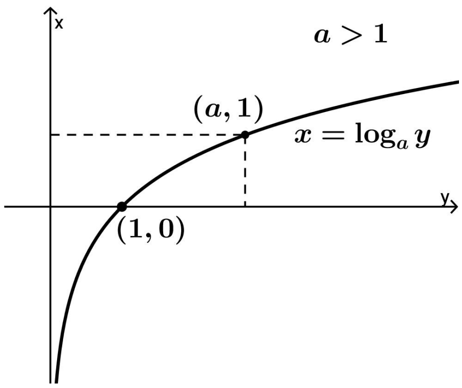
Definição 2.18. *A função logarítmica de base $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ é a inversa da função exponencial com a mesma base e indica-se por:*

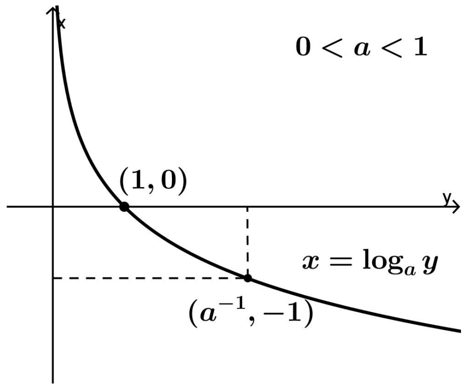
$$f^{-1}(y) = \log_a y$$

Isto significa que:

$$\underbrace{y = a^x}_{y=f(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x = \log_a y}_{x=f^{-1}(y)}$$

O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}^+$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$ (são os contradomínio e domínio da função exponencial, respectivamente).





Observação. Nestes gráficos, o eixo das abcissas corresponde à variável y e o eixo das ordenadas à variável x, para facilitar a correspondência com a função inversa (exponencial).

Proposição 2.10 (Propriedades dos logaritmos)**.**

$\log_a a = 1$	$\log_a 1 = 0$	$\log_a (x^z) = z \cdot \log_a x$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$	$\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Exemplo 2.19.

$$\ln x + 2 \ln y = \ln x + \ln\left(y^2\right) = \ln\left(xy^2\right)$$

$$4 \ln x - 3 \ln y + 5 \ln z = \ln\left(x^4\right) - \ln\left(y^3\right) + \ln\left(z^5\right) = \ln\left(\frac{x^4 z^5}{y^3}\right)$$

$$\log_2(30) = \frac{\ln 30}{\ln 2}$$

Exercícios (Função exponencial e logarítmica)**.**

1. *Resolva:*

   (a) $2^{x^2-1} = 16$ *(b)* $3^{2+x^2} = 27$ *(c)* $4^{2x-1} = 8^{x+2}$

2. *A percentagem p de famílias que adquiriram frigorífico, t anos após terem começado a ser produzidos (nos EUA) é:* $p = 100 - 95e^{-0.15t}$*. Determine:*

   (a) *a percentagem que adquiriu frigorífico no ano de início de produção;*
   (b) *a percentagem que tinha frigorífico ao fim de* 5 *anos de comercialização;*
   (c) *a quota de saturação do mercado (a percentagem de famílias que irá adquirir frigoríficos a longo prazo).*
   (d) *gráfico do modelo.*

3. *A percentagem p de famílias que possuem televisores de tecnologia LED, t anos após terem surgido no mercado (num determinado país) é prevista por:*

$$p = \frac{75}{1 + 5e^{-0.4t}}$$

   De acordo com este modelo, determine a percentagem de famílias que:

   (a) *adquiriram estes televisores no ano de introdução no mercado;*
   (b) *adquiriram estes televisores durante os primeiros* 10 *anos de comercialização;*
   (c) *que nunca irão adquirir estes televisores.*

4. *Calcule:*

   (a) $\log_4 64$ *(c)* $\log_{0,1} 1$ *(e)* $\log_2(64 \times 256 \times 128)$

   (b) $\log_{\sqrt{3}} 9$ *(d)* $\log_3(81 \times 27)$ *(f)* $\log_{0,1}\left(\frac{0,001}{1000}\right)$

5. *Use as propriedades dos logaritmos para expandir:*

   (a) $\ln\left(x^3 y^2\right)$ *(b)* $\ln\left((xy)^2\right)$ *(c)* $\ln\left(\frac{x^5}{y^7}\right)$

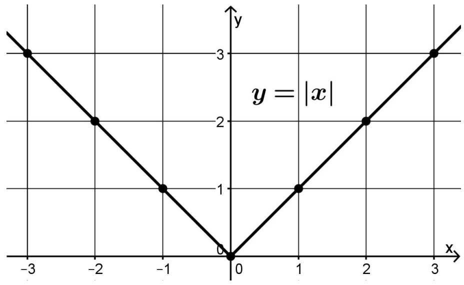
6. *Resolva:*

   (a) $\log_2 x + \log_2 2 = -2$
   (b) $\log_3(x^2 + 8) - \log_3 x = 2$
   (c) $\frac{1}{4}\log_{10}(x + 1) - \frac{1}{2}\log_{10}(x - 1) = 0$

2.8 Função valor absoluto, ou módulo

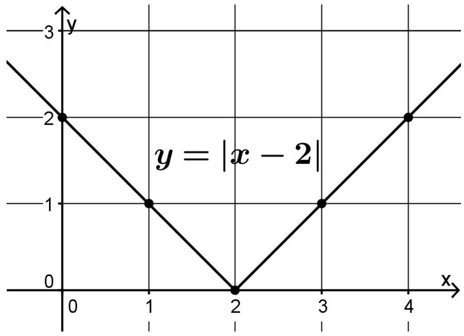
Definição 2.19. *A função valor absoluto, ou módulo é:*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & se \;\; x \geq 0 \\ -x & se \;\; x < 0 \end{cases}$$



Exemplo 2.20. *Seja* $f(x) = |x - 2|$.

x	$y = f(x)$
0	$\|0-2\| = \|-2\| = 2$
1	$\|1-2\| = \|-1\| = 1$
2	$\|2-2\| = \|0\| = 0$
3	$\|3-2\| = \|1\| = 1$
4	$\|4-2\| = \|2\| = 2$

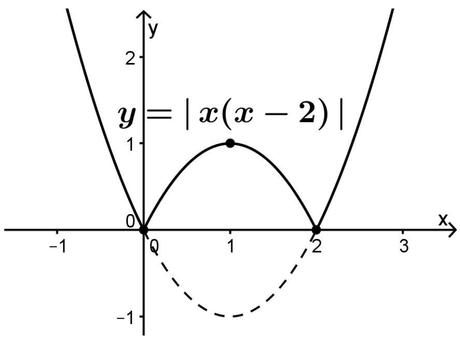


O gráfico é formado por duas semi-rectas, uma vez que:

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & se \;\; x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & se \;\; x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & se \;\; x \geq 2 \\ -x+2 & se \;\; x < 2 \end{cases}$$

Exemplo 2.21. *Seja* $f(x) = |\,x(x-2)\,|$.

O gráfico de $g(x) = x(x-2)$ *é uma parábola com zeros* $x = 0$ *e* $x = 2$ *e vértice* $(1, -1)$. *Assim, o gráfico de* $y = f(x) = |\,g(x)\,|$ *é:*



Analiticamente, teríamos:

$$f(x) = |\,x(x-2)\,| = \begin{cases} x(x-2) & se \;\; x(x-2) \geq 0 \\ -x(x-2) & se \;\; x(x-2) < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x-2) & se \;\; x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -x(x+2) & se \;\; 0 < x < 2 \end{cases}$$

Exercícios (Função valor absoluto).

1. *Se $x = -3$, calcule o valor de:*

   (a) $|x+6|$ (c) $|2x+3|$ (e) $|x-7|$

   (b) $|x-6|$ (d) $|7-x|$ (f) $3+|x|$

2. *Use a definição de $|x|$ para provar que* $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = \sqrt{x^2}$.

3. *Esboce o gráfico de:*

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ (b) $f(x) = x + |x|$

4. *Esboce o gráfico de:*

   (a) $f(x) = |\,(x-2)(x-4)\,|$ (b) $f(x) = |\,-x(x-3)\,|$

5. *Resolva:*

   (a) $|2x+5| = 1$ (c) $|3-2x| = 4$

   (b) $|2x+5| = -2$ (d) $\left|\dfrac{2x-1}{x+3}\right| = 2$

2.9 Sequências

Definição 2.20. *Uma sequência de números reais é uma sequência infinita e ordenada de números reais, designados por termos da sequência. Os termos podem repetir-se.*

Exemplo 2.22. *Os números pares positivos formam uma sequência de números reais:*

$$2\ ,\ 4\ ,\ 6\ ,\ 8\ ,\ 10\ ,\ 12\ ,\ 14\ ,\ 16\ ,\ \ldots$$

O termo de n-ésima ordem (o n-ésimo número par) pode ser obtido através de $a_n = 2n$, ou seja, os termos da sequência são os valores de uma função com domínio $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_0$):

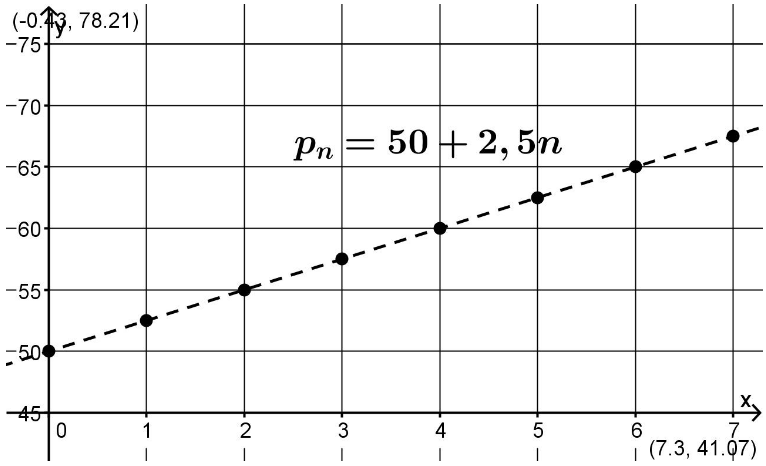
n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$a_n = 2n$	2	4	6	8	10	12	14	16	$\cdots$

Definição 2.21. *Uma sequência aritmética é aquela em quaisquer dois termos consecutivos têm diferença constante: $a_{n+1} - a_n = d$. O seu termo geral é:*

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Exemplo 2.23 (Aumento linear de preços).
Um título mensal de transportes custa 50 €.
Prevê-se que o seu preço aumentará 2,5 € *em cada ano.*
O preço após n *anos será* $p_n = 50 + 2,5\,n$. *É uma sequência aritmética com termo inicial* $p_1 = 50$ *e diferença comum entre termos* $d = 2,5$.

ano n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
preço p_n	$50,0$	$52,5$	$55,0$	$57,5$	$60,0$	$62,5$	$65,0$	$67,5$	$70,0$

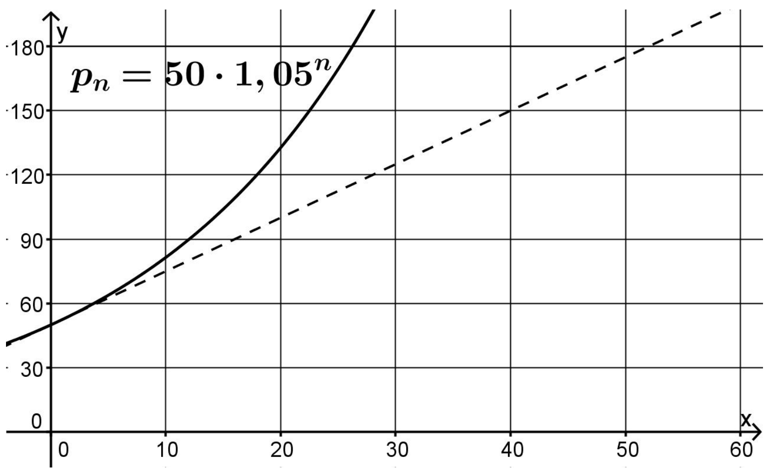


Definição 2.22. *Uma sequência geométrica é aquela em que a razão entre quaisquer dois termos consecutivos é constante:* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$. *O seu termo geral é:*

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Exemplo 2.24 (Aumento exponencial de preços).
Um título mensal de transportes custa 50 €.
Prevê-se que o seu preço aumentará 5% *por ano.*
O preço após n *anos será* $p_n = 50 \cdot (1,05)^n$.

ano n	0	1	2	3	4	5	6
preço p_n	$50,00$	$52,50$	$55,13$	$57,88$	$60,78$	$63,81$	$67,00$



Proposição 2.11.
A soma dos primeiros k termos de uma série aritmética $a_n = a_1 + (n-1)d$ é:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \frac{n}{2}\Big(a_1 + a_k\Big)$$

Proposição 2.12.
A soma dos primeiros k termos de uma série geométrica $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ é:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 \cdot \frac{1-r^k}{1-r}$$

Definição 2.23. *Juro simples:*

$$J = C \cdot \frac{r}{100} \cdot n$$

onde J é o valor dos juros, C é o capital depositado inicialmente, r é a percentagem de juro anual e n é o número de anos do depósito.

Definição 2.24. *Juro composto:*

$$J = C \cdot \Big(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\Big)^{k \cdot n} - C$$

onde k é o número de composições por ano e n é o número de anos.

Exemplo 2.25. *Composição contínua de juros:*
Considere um depósito a prazo com uma taxa de juro anual de $r\%$ e composição de juros k vezes por ano. O valor do depósito ao fim de 1 ano será:

$$C \cdot \Big(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\Big)^{k}$$

Obtemos a composição contínua de juros fazendo $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} C \cdot \Big(1 + \frac{r}{k \cdot 100}\Big)^{k} = C \cdot e^{r/100}$$

A composição contínua de juros foi estudada por Jacob Bernoulli.

Exercícios (Sequências).

1. a) *Depositou-se* 12 000 *euros num depósito a prazo com composição anual de juros, que rende* 4% *por ano. Qual será o valor do depósito após* 15 *anos?*

   b) *Um depósito a prazo com composição anual de juros rende* 6% *por ano. Que quantia deveria ter sido depositada há* 5 *anos atrás para que hoje tivesse* 50 000 *euros?*

2. *Uma quantidade aumenta* 25% *por ano durante* 3 *anos. Qual é a percentagem de aumento combinada ao longo desses* 3 *anos?*

3. a) *O lucro de uma empresa aumentou* 20% *de 1990 para 1991, mas diminuiu* 17% *de 1991 para 1992.*
   O lucro em 1990 foi superior ou inferior ao de 1992 ?

   b) *Que percentagem de diminuição do lucro de 1991 para 1992 asseguraria que os lucros em 1990 e em 1992 fossem iguais?*

4. *Um depósito a prazo rende* 5% *ao ano (juros simples).*
   Sejam:
   x = *montante depositado (€)*
   y = *juros recebidos após um ano (€)*

   Os juros y (€) recebidos após um ano $\propto$ *ao montante depositado x (€):*

$$y = 0,05\,x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{x} = 0,05 \qquad (t \neq 0)$$

   e $0,05 = 5\%$ *é a constante de proporcionalidade (directa).*

5. *Calcule a soma de todos os inteiros entre* 1 *e* 100 *(Sol:* 5050*).*

6. *Calcule a soma dos números pares entre* 2 *e* 100 *(Sol:* 2550*).*

7. *Calcule a soma dos números ímpares entre* 1 *e* 100 *(Sol:* 2500*).*

Capítulo 3

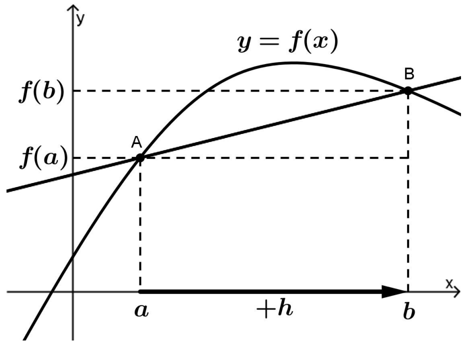
Cálculo Diferencial

3.1 Derivada num ponto

Definição 3.1 (Recta secante).
Considere o gráfico $y = f(x)$ *e os pontos* $A = \Big(a\,,\, f(a)\Big)$ *e* $B = \Big(b\,,\, f(b)\Big)$ *com* $a \neq b$.

A recta que passa por A *e por* B *diz-se que é secante ao gráfico de* f.

O seu declive é: $\quad m = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$



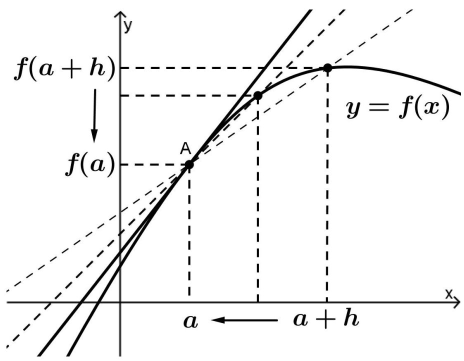
Fixando A, definimos diferentes rectas secantes, considerando diferentes pontos B. A variável $h \neq 0$ definirá B relativamente a A através de: $b = a + h \quad \Leftrightarrow \quad h = b - a$.

Definição 3.2 (Derivada num ponto).

A derivada de f *em* $x = a$ *é o número:*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(se o limite existir). Se o limite não existir, diremos que f *não tem derivada em* $x = a$.



As seguintes notações são equivalentes:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{d}{dx}\left[f(x)\right]\bigg|_{x=a}$$

Definição 3.3 (Recta tangente ao gráfico de f num ponto)**.**
O declive da recta tangente ao gráfico $y = f(x)$ em $x = a$ é $f'(a)$ (se existir).
A recta tangente tem declive $f'(a)$ e passa por $A = \Big(a\,,\, f(a)\Big)$, logo terá equação:

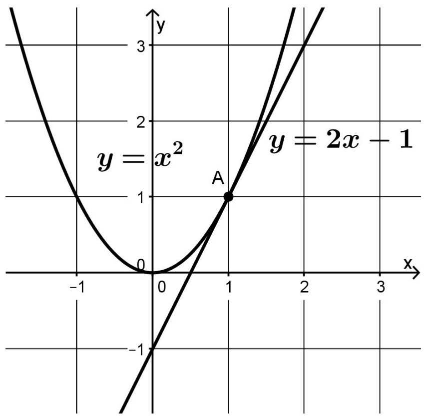
$$y - f(a) = f'(a)\,(x-a)$$

Exemplo 3.1.
Seja $f(x) = x^2$. Calcule $f'(1)$ e determine a equação da recta tangente a f em $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2) = 2 \end{aligned}$$

A equação da recta tangente é:

$$\begin{aligned} y - f(1) &= f'(1)\,(x-1) \\ y - 1 &= 2\,(x-1) \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$



Exemplo 3.2.
Sendo $f(x) = x^2 - 3x$, calcule $f'(2)$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+1) = 1 \end{aligned}$$

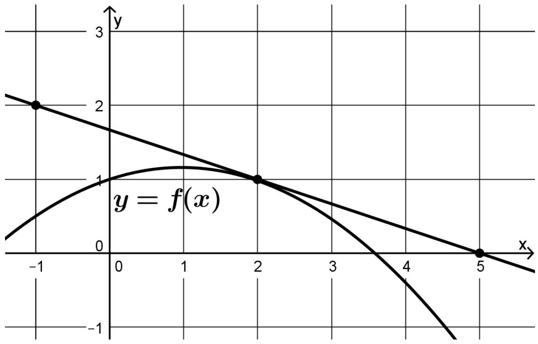
Exemplo 3.3.
Sendo $f(x) = x^2$, calcule $f'(a)$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2ah}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2a)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2a) = 2a \end{aligned}$$

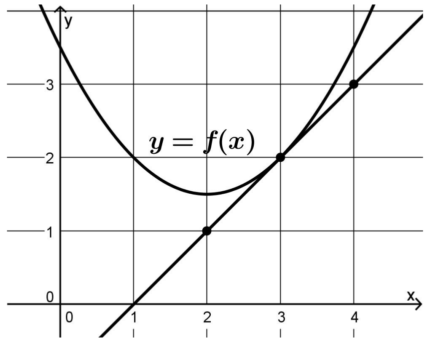
Exercícios (Derivada num ponto).

1. *Com base nos gráficos $y = f(x)$ e nas rectas tangentes apresentadas, determine:*

(a) $f(2)$ *e* $f'(2)$



(b) $f(3)$ *e* $f'(3)$



2. *Esboce o gráfico de* $f(x) = 2$ *e explique porquê* $f'(a) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

3. *Use a definição de derivada num ponto para calcular:*

   (a) $f'(1)$, *sendo* $f(x) = 2x - 3$.

   (b) $g'(2)$, *sendo* $g(x) = 3x^2$.

   (c) $h'(-1)$, *sendo* $h(x) = 2x^3 + x + 1$.

4. *Seja* $f(x) = mx + b$, *com* $m, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Calcule $f'(a)$ *pela definição, para qualquer* $a \in \mathbb{R}$.

   (b) Interprete graficamente o resultado da alínea anterior.

5. *Defina a equação da recta tangente ao gráfico* $y = f(x)$ *em* $x = a$:

   (a) se $f(3) = -1$, $f'(3) = 5$ *e* $a = 3$.

   (b) se $f(x) = x^4$ *e* $a = 1$.

3.2 Função derivada

Definição 3.4. *O domínio de diferenciabilidade de f é* $D_{f'} := \{a \in D_f \mid f'(a) \text{ existe}\}$. *A função que transforma cada* $a \in D_{f'}$ *em* $f'(a)$ *designa-se por função derivada de* f:

$$\begin{array}{rccc} f': & D_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

A função derivada de f é representada pelas notações:

$$f'(x) = [f(x)]' = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\,[f(x)]$$

Exemplo 3.4. *Dada* $f(x) = x^3 + 3x$, *calculou-se que* $f'(a) = 3a^2 + 3$. *Logo,*

$$f' : x \mapsto 3x^2 + 3, \quad \text{ou seja} \quad f'(x) = 3x^2 + 3$$

Exemplo 3.5. $f(x) = x^3 + 3x$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \ldots = 6$$

Em geral:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ldots = 3a^2 + 3$$

Proposição 3.1. *Regra de derivação de uma potência:*

$(1)' = 0$	$(x^4)' = 4x^3$
$(x)' = 1$	$(x^5)' = 5x^4$
$(x^2)' = 2x$	$\vdots$
$(x^3)' = 3x^2$	$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

Proposição 3.2 (Linearidade da derivação)**.** *Sejam $u = f(x)$, $v = g(x)$ e $K \in \mathbb{R}$.*

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad\qquad (K \cdot u)' = K \cdot u'$$

Exemplo 3.6.

$$\begin{aligned} (3x^2 - 5x + 2)' &= (3x^2)' - (5x)' + (2)' = 3(x^2)' - 5(x)' + (2)' \\ &= 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 + 0 = 6x - 5 \end{aligned}$$

Proposição 3.3. *Regra de derivação do produto: se $u = f(x)$, $v = g(x)$, então:*

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Exemplo 3.7.

$$\begin{aligned} \left[(3x^2 - 5x)(2x^4 + x^2)\right]' &= \\ &= (3x^2 - 5x)'(2x^4 + x^2) + (3x^2 - 5x)(2x^4 + x^2)' \\ &= (6x - 5)(2x^4 + x^2) + (3x^2 - 5x)(8x^3 + 2x) \\ &= 12x^5 + 6x^3 - 10x^4 - 5x^2 + 24x^5 + 6x^3 - 40x^4 - 10x^2 \\ &= 36x^5 - 50x^4 + 12x^3 - 15x^2 \end{aligned}$$

Proposição 3.4 (Derivada do quociente)**.** *Sejam $u = f(x)$, $v = g(x)$.*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Exemplo 3.8.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' &= \frac{(x^2)'(x+1) - (x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Proposição 3.5 (Derivada da função exponencial)**.**

$$(e^x)' = e^x \qquad\qquad (a^x)' = \ln a \cdot a^x$$

Seja $f(x) = e^x$. Calculemos, pela definição, $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^x \cdot e^h - e^x \cdot 1}{h} = e^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \end{aligned}$$

Observação. Recordemos o seguinte limite notável:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Proposição 3.6 (Derivada da função logarítmica)**.**

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad\qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Exemplo 3.9.

$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 3}$$

Exercícios (Derivadas)**.**

1. *Calcule*

   (a) $(3x^5)'$

   (b) $(x^{10})'$

   (c) $(x^{-4})'$

   (d) $\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'$

   (e) $(\sqrt{x})'$

   (f) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

   (g) $(x\sqrt{x})'$

   (h) $(2x^2 + 3x^4)'$

   (i) $\left(3x^5 - \dfrac{1}{2x^2}\right)'$

2. *Calcule (derivada do produto):*

   (a) $\left[\,(x^2+1)(2x^3 - x + 2)\,\right]'$

   (b) $\left[\,(x^2-1)(3x-4)\,\right]'$

   (c) $\left[\,(3x^5+x)(2x^2+3x^4)\,\right]'$

   (d) $[\,(x+1)(x-6)\,]'$

3. *Calcule (derivada do quociente):*

   (a) $\left(\dfrac{x^3-3x}{2}\right)'$

   (b) $\left(\dfrac{x^2-3}{x}\right)'$

   (c) $\left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)'$

   (d) $\left(\dfrac{x^2-5x+3}{x^2}\right)'$

   (e) $\left(\dfrac{x+4}{3x-7}\right)'$

   (f) $\left(\dfrac{x}{5x+6}\right)'$

4. *Calcule (derivada da exponencial):*

   (a) $(2^x)'$

   (b) $(x \cdot e^x)'$

   (c) $\left(e^{3x}\right)'$

   (d) $[3^x \cdot (x-1)]'$

   (e) $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'$

5. *Calcule (derivada do logaritmo):*

   (a) $\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)'$

   (b) $(\, x \cdot \ln x \,)'$

   (c) $\left[\, \log_a(x^2) \,\right]'$

6. *A função procura (demand) de um bem em função do preço é:* $D = a - bP$, *onde* D *e* P *são variáveis e* a *e* b *são constantes. Calcule* $\dfrac{dD}{dP}$.

7. *Seja* $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + x - 3$. *Determine* $f''(4)$.

8. *Determine a equação da recta tangente à curva* $y = 4x^3 - 5x^2 + x - 3$ *no ponto onde a curva intersecta o eixo* y *(ordenadas).*

3.3 Regra da cadeia

Teorema 3.7 (Regra de derivação da função composta, ou regra da cadeia).
Sejam $u(v)$ *e* $v(x)$ *duas funções diferenciáveis e* $(u \circ v)(x)$ *a respectiva composta. Então:*

$$(\, u \circ v \,)'\,(x) = u'\,[\, v(x) \,] \cdot v'(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Exemplo 3.10. *Sejam* $u(v) = v^3$, $v(x) = x^2 + x$. *Então* $(u \circ v)\,(x) = \left(x^2 + x\right)^3$.
Como $u'(v) = 3v^2$ *e* $v'(x) = 2x + 1$, *teremos:*

$$\begin{aligned} (u \circ v)'\,(x) &= u'\,[\, v(x) \,] \cdot v'(x) \\ &= 3[\, v(x) \,]^2 \cdot (2x+1) \\ &= 3(x^2 + x)^2 \cdot (2x+1) \end{aligned}$$

Corolário 3.8 (Derivada da potência de uma função).

$$\left(\, [\, v(x) \,]^r \,\right)' = r \cdot [\, v(x) \,]^{r-1} \cdot v'(x)$$

Exemplo 3.11. *Para calcular a derivada de* $f(x) = \left(x - x^3\right)^5$ *reparemos que* $f(x) = (u \circ v)\,(x)$, *onde* $u(v) = v^5$ *e* $v(x) = x - x^3$.
Assim, $u'(v) = 5v^4$ *e* $v'(x) = 1 - 3x^2$, *e pela regra da cadeia:*

$$f'(x) = u'\,[\, v(x) \,] \cdot v'(x) = 5\left(x - x^3\right)^4 \cdot (1 - 3x^2)$$

Exemplo 3.12. *Para calcular a derivada de*

$$f(x) = \frac{5}{(x^3+2x+1)^4}$$

notamos que $f(x) = (u \circ v)(x)$, *onde* $u(v) = \dfrac{5}{v^4}$ *e* $v(x) = x^3 + 2x + 1$.
Calculando $u'(v) = \left(5v^{-4}\right)' = -20v^{-5}$ *e* $v'(x) = 3x^2 + 2$, *teremos:*

$$f'(x) = -20\left(x^3+2x+1\right)^{-5} \cdot (3x^2+2) = \frac{-20 \cdot (3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^5}$$

Exemplo 3.13. *Para calcular a derivada de*

$$f(x) = \sqrt{x^4+x} = \left(x^4+x\right)^{1/2}$$

utilizamos a regra de derivação de uma potência de uma função:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^4+x\right)^{-1/2} \cdot \left(4x^3+1\right) = \frac{4x^3+1}{2\sqrt{x^4+x}}$$

Exercícios (Regra da cadeia)**.**

1. *Para cada par de funções* $u(v)$ *e* $v(x)$, *indique a expressão de* $(u \circ v)(x)$ *e use a regra da cadeia para calcular* $(u \circ v)'(x)$.

   (a) $u(v) = 4v^5$ *e* $v(x) = x^3 + 2$

   (b) $u(v) = v^4 - v$ *e* $v(x) = \dfrac{x+1}{x}$

2. *Use a regra da cadeia para calcular as derivadas de:*

   (a) $(4x-2)^5$

   (b) $(7x^3+5)^4$

   (c) $\dfrac{6}{(x-1)^3}$

   (d) $\sqrt{x^2+4}$

   (e) $\sqrt[3]{x^3-1}$

   (f) $\dfrac{4}{\sqrt{x^2+1}}$

3. *Calcule:*

   (a) $\left[\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+1}\right)^3\right]'$

   (b) $\left[\, x^3(x^2-3x)^4 \,\right]'$

   (c) $\left[\, (2x+1)(x+5)^3 \,\right]'$

   (d) $\left(\sqrt{f(x)}\right)'$

4. *Sabe-se que* $f(3) = 2$, $g(2) = 5$, $f'(3) = -1$ *e* $g'(2) = 4$. *Determine* $(g \circ f)'(3)$.

5. *Suponha que foram investidos* 1000 € *num depósito com taxa de juro anual de* 10%. *Após* 10 *anos, o valor do depósito será* $D = f(p)$.

   (a) Diga qual é o significado económico de $f(5) \approx 1629$ *e de* $f'(5) \approx 155$.

   (b) Escreva uma fórmula para $f(p)$

6. *Determine $f'(x)$ em função de g e de h:*

   (a) $f(x) = g\left(x^3\right)$ (b) $f(x) = g\left(x^n\, h(x)\right)$

7. *Sejam $f(x) = 2x^2 - x$ e $g(x) = x^5$.*

   (a) *Determine $f \circ g(x)$ e $(f \circ g)'(x)$.*

   (b) *Determine $g \circ f(x)$ e $(g \circ f)'(x)$.*

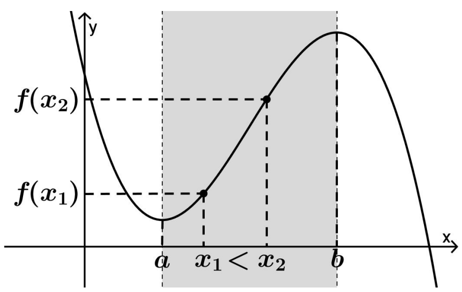
8. *Calcule a derivada de:*

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

3.4 Monotonia, extremos e concavidade

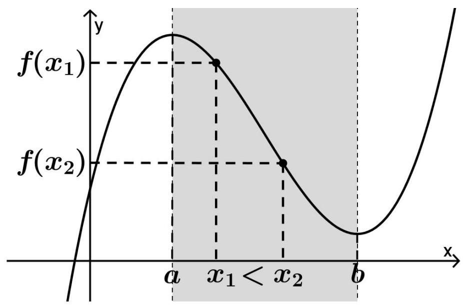
Definição 3.5. *Uma função é (estritamente) monótona crescente ou decrescente num intervalo $[a, b]$ se $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



(crescente)

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



(decrescente)

Teorema 3.9. *Seja f contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Se $\forall x \in\,]a, b[$:*

1. *$f'(x) > 0$ então f é (estritamente) monótona crescente em $[a, b]$.*
2. *$f'(x) = 0$ então f é constante em $[a, b]$.*
3. *$f'(x) < 0$ então f é (estritamente) monótona decrescente em $[a, b]$.*

Definição 3.6. *Os pontos de estacionariedade de uma função diferenciável f são as soluções de $f'(x) = 0$.*

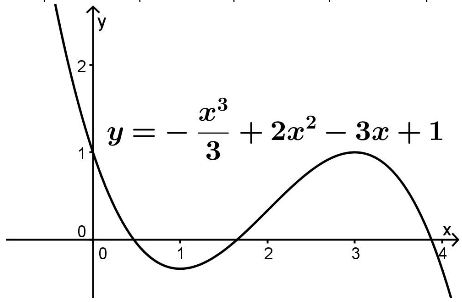
Exemplo 3.14. *Estudemos os intervalos de monotonia de $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.*

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Os pontos de estacionariedade são:

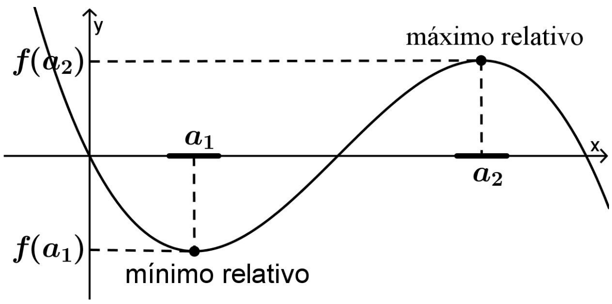
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 4x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	*min.*	$\nearrow$	*max.*	$\searrow$	

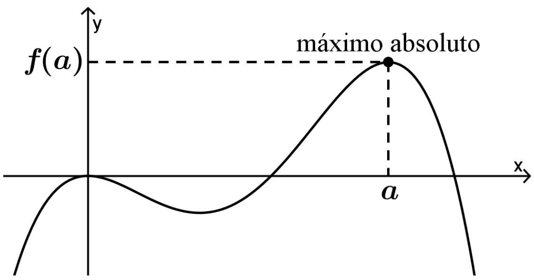


Definição 3.7. *Uma função tem um extremo relativo (ou local) em $x = a$ se $f(a)$ for o maior (ou menor) valor que a função toma numa vizinhança de $x = a$.*
Ou seja, se para todo o $x \in]a - \delta, a + \delta[$ (para um dado $\delta > 0$) se verificar:

mínimo relativo:	*máximo relativo:*
$f(x) \geq f(a)$	$f(x) \leq f(a)$



Definição 3.8. *Uma função tem um extremo absoluto (ou global) em $x = a$ se $f(a)$ for o valor máximo (ou mínimo) que a função toma em todo o seu domínio (e não apenas numa vizinhança de $x = a$).*



Exemplo 3.15.

$$f(x) = 4 - (x-1)^2$$

tem um máximo absoluto em $x = 1$, que é $f(1) = 4$, porque

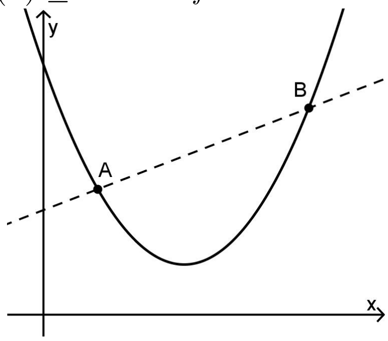
$$(x-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 - (x-1)^2 \leq 4$$

com igualdade se e só se $x = 1$.

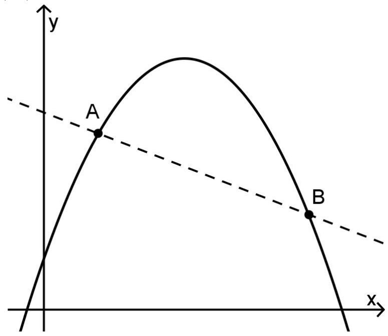
Proposição 3.10. *Seja f uma função diferenciável num intervalo aberto I. Se f tiver um extremo relativo (máximo ou mínimo) em $c \in I$, é necessário que c seja um ponto de estacionariedade de f, isto é: $f'(c) = 0$.*

Definição 3.9 (Concavidade).
Seja f duas vezes diferenciável num intervalo aberto I. Se $\forall x \in I$:

$f''(x) \geq 0$ *então f é convexa em I*



$f''(x) \leq 0$ *então f é côncava em I*



Exemplo 3.16. *Consideremos a função de produção $Q = A \cdot K^{\alpha}$, com $A > 0$ e $\alpha > 0$.*

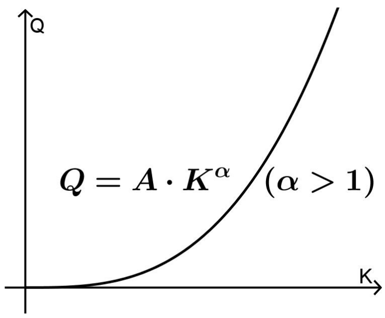
$$\frac{d\,Q}{d\,K} = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} \qquad e \qquad \frac{d^2\,Q}{d\,K^2} = A \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{\alpha-2}$$

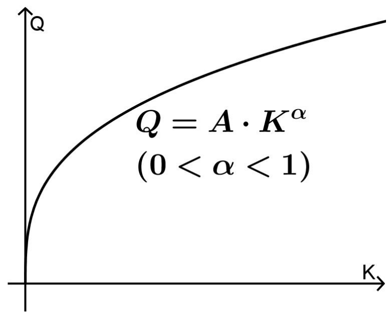
$$\frac{d^2\,Q}{d\,K^2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot (\alpha - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$$

e

$$\frac{d^2\,Q}{d\,K^2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \cdot (\alpha - 1) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 1$$

logo a função de produção é convexa se $\alpha > 1$ e côncava se $0 < \alpha < 1$.





Exercícios (Monotonia, extremos e concavidade)**.**

1. *Determine os intervalos de monotonia de:*

   (a) $g(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$ (b) $h(x) = 2x(x-1)^4$

2. *Considere a função* $f(x) = \ln x - x$.

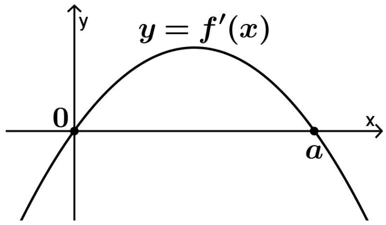
   (a) *Determine o seu domínio* D_f.

   (b) *Estude os intervalos de monotonia e os extremos locais de* f.

3. *A* derivada *de uma função* f *tem o seguinte gráfico:*

   (a) *Estude os intervalos de monotonia de* f.

   (b) *Mostre que* f *tem dois extremos locais, um máximo e um mínimo.*



4. *Determine os valores de* m *e de* n *por forma a que a função* $f(x) = x^3 + mx + n$ *tenha um extremo local em* $x = 2$, *e que seja* $f(2) = 4$.

5. *Determine os extremos das seguintes funções, sem calcular as suas derivadas:*

   (a) $f(x) = \dfrac{6}{5x^2+3}$ (b) $g(x) = 3(x-1)^2 - 4$ (c) $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

6. *Determine os extremos locais de:*

   (a) $f(x) = x^2 - 1$ *em* $[-3, 3]$ (b) $g(x) = |x-1|$ *em* $[-2, 3]$

7. *Qual o perímetro mínimo de um rectângulo com* $50\,m^2$*?*

8. *Determine os pontos críticos e os extremos relativos das seguintes funções:*

   (a) $f(x) = x^5 - x$ (b) $g(x) = e^{-x^2}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$

9. *Estude os intervalos de monotonia de* $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$ *e esboce* $y = f(x)$.

10. *Pretende-se limitar com rede os três lados de um jardim rectangular que tem um lado já limitado por uma parede. Qual é a maior área de jardim que pode ser limitada com* $40\,m$ *de comprimento de rede? Quais os comprimentos dos seus lados?*

11. *Determine e classifique os pontos de estacionariedade de:*

    (a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

    (b) $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 + 1$

    (c) $h(x) = (x-1)^3 - 1$ *no intervalo* $[0, 2]$.

3.5 Derivadas parciais e extremos condicionados

Definição 3.10 (Função real de n variáveis reais)**.**
É uma função com valores em $\mathbb{R}$ que depende das variáveis $x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\ \dots\ ,x_n) & \longmapsto & f(x_1,\ \dots\ ,x_n) \end{array}$$

Exemplo 3.17. *A função*

$$\begin{array}{rcl} f\ :\ \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

calcula a distância de um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ à origem.

Definição 3.11. *Uma curva (ou superfície) de nível de uma função é um conjunto de pontos do domínio da função onde o valor da função não muda de valor:*

$$f(x_1,\ \dots\ ,x_n) = C$$

Em economia, as curvas isoquantas e isocustos são curvas de nível.

Exemplo 3.18.
As curvas de nível de $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ são circunferências de raio $C \geq 0$:

$$f(x,y) = C \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = C \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2 = C^2$$

Definição 3.12. *A derivada parcial de uma função de n variáveis reais:*

$$f(x_1,\dots,x_n)$$

em ordem a uma variável x_i é a derivada obtida quando se consideram as restantes variáveis constantes. Designam-se por:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\ ,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\ ,\quad \dots \quad ,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Exemplo 3.19. *Calcule as derivadas parciais de:*

$$f(x,y) = x^3+2xy+y^2+1$$

Se y é constante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^3+2xy+y^2+1\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^3\Big) + 2y\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(x\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(y^2+1\Big) = 3x^2+2y$$

Se x é constante:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^3+2xy+y^2+1\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(x^3\Big) + 2x\,\frac{\partial}{\partial y}\Big(y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(1\Big) = 2x+2y$$

Definição 3.13 (Extremo local)**.**
$f(x_1,\dots,x_n)$ tem um máximo, ou um mínimo local em $(a_1,\dots,a_n)$ se e só numa vizinhança deste ponto se verificar uma das seguintes condições (respectivamente):

$$f(x_1,\dots,x_n) \leq f(a_1,\dots,a_n) \quad ou \quad f(x_1,\dots,x_n) \geq f(a_1,\dots,a_n)$$

Proposição 3.11 (Condição necessária para a existência de um extremo local).
Se f for diferenciável, para que $(a_1, \ldots, a_n)$ seja um extremo local, é necessário que seja um ponto de estacionariedade de f (que anule simultaneamente as n derivadas parciais):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0 \end{cases}$$

Exemplo 3.20.

$$f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

f tem um mínimo absoluto em $(1, 2)$, que é $f(1, 2) = 0$.
Sendo f diferenciável, os seus extremos locais têm de ser pontos de estacionariedade:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2(x-1) = 0 \\ 2(y-2) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

havendo um único ponto de estacionariedade em $(1, 2)$, que é um mínimo absoluto.

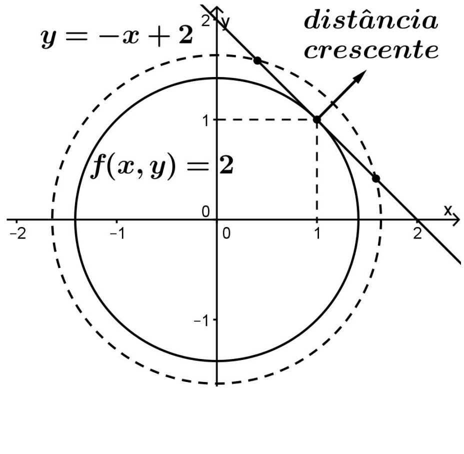
Definição 3.14 (Problema de extremos condicionados).

- *maximize (ou minimize) a função objectivo: $f(x_1, \ldots, x_n)$*
- *sujeita à restrição (ou constrangimento): $g(x_1, \ldots, x_n) = C$*

Exemplo 3.21 (Determine o ponto da recta $y = -x + 2$ mais próximo da origem).

- *minimize a função objectivo $f(x, y) = x^2 + y^2$ (quadrado da distância à origem)*
- *sujeita à restrição $y = -x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x + y}_{g(x,y)} = 2$*

A solução tem de pertencer à recta definida pela restrição. As curvas de nível da função objectivo são circunferências, e pretendemos considerar a de menor raio possível. Concluímos assim que a solução do problema é $(1, 1)$, que é o ponto de tangência da recta com a circunferência de raio mínimo ($r = \sqrt{2}$).



Definição 3.15. *O gradiente de uma função real f de n variáveis reais é o vector cujas componentes são as derivadas parciais de f:*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \, , \, \ldots \, , \, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Proposição 3.12. *Seja f uma função real e diferenciável, de n variáveis. O vector ∇f é ortogonal à curva (ou superfície) de nível $f(x_1, \ldots, x_n) = C$ em qualquer ponto.*

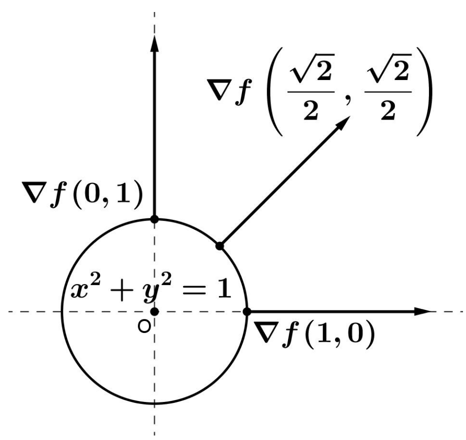
Exemplo 3.22. *Sejam $f(x, y) = x^2 + y^2$ e*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \, , \, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (\, 2x \, , \, 2y \,)$$

Consideremos a curva de nível $x^2 + y^2 = 1$ e os pontos $(1, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ e $(0, 1)$.

Os gradientes nestes pontos são ortogonais à curva de nível:

$$\begin{aligned} \nabla f(1,0) &= (2,0) \\ \nabla f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \\ \nabla f(0,1) &= (0,2) \end{aligned}$$



Teorema 3.13 (Método dos multiplicadores de Lagrange).
Sejam f e g duas funções diferenciáveis. As soluções do problema de optimização (minimização ou maximização) da função objectivo $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeita à restrição (ou constrangimento) $g(x_1, \ldots, x_n) = C$ encontram-se entre as soluções de:

$$\begin{cases} \nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \, \nabla g(x_1, \ldots, x_n) \\ g(x_1, \ldots, x_n) = C \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \end{cases}$$

Observação. A equação $\nabla f = \lambda \, \nabla g$ significa que ∇f e ∇g são vectores colineares (com a mesma direcção). Assim, a curva da restrição será tangente a uma dada curva de nível da função objectivo f em cada ponto que for solução do problema.

Definição 3.16. *Num problema de optimização de uma função objectivo $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeita à restrição $g(x_1, \ldots, x_n) = C$ define-se a função de Lagrange (ou Lagrangeana):*

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda \, [\, g(x_1, \ldots, x_n) - C \,]$$

Observação. Esta Lagrangeana permite a seguinte reformulação:

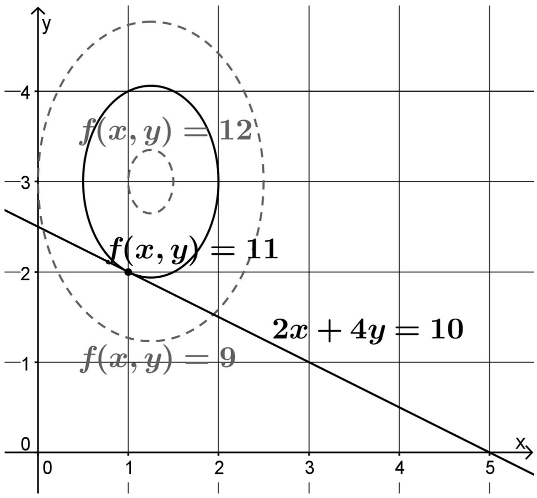
$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \, \nabla g(x_1, \ldots, x_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad \nabla \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = 0$$

Exemplo 3.23. *Maximize $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + 5x + 6y$ sujeita à restrição $\underbrace{2x + 4y}_{g(x,y)} = 10$.*

A Lagrangeana é $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -2x^2 - y^2 + 5x + 6y \; - \; \lambda \, [2x + 4y - 10]$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \, \dfrac{\partial g}{\partial y} \\[2mm] g(x,y) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 5 = 2\lambda \\ -2y + 6 = 4\lambda \\ 2x + 4y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 5 = 2\lambda \\ -y + 3 = 2\lambda \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(-2y + 5) + 5 = 2\lambda \\ 2\lambda = -y + 3 \\ x = -2y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8y - 20 + 5 = -y + 3 \\ 2\lambda = -y + 3 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 18 \\ 2\lambda = -y + 3 \\ x = -2y + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \lambda = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \textit{o máximo é } f(1,2) = 11.$$



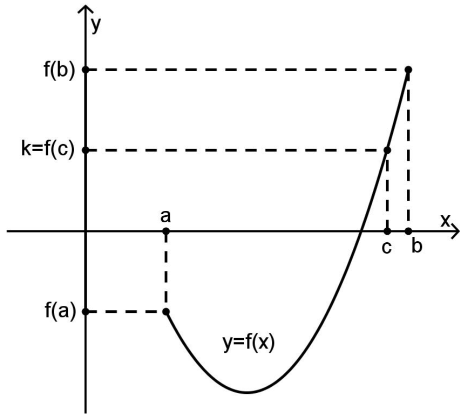
Para determinar se uma solução do problema de extremos condicionados é um máximo ou um mínimo, recorre-se ao sinal do determinante da matriz Hessiana da função objectivo (derivadas parciais de 2ª ordem), o qual nos indica se a função é côncava (sinal negativo; máximo) ou convexa (sinal positivo; mínimo), numa vizinhança do ponto.

3.6 Teoremas de continuidade e de diferenciabilidade

Teorema 3.14. *Do valor intermédio, ou de Bolzano*

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$.
Se k for um valor entre $f(a)$ e $f(b)$, então:

$$\exists c \in]a, b[: \ f(c) = k$$



Corolário 3.15. *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ então:*

$$\exists c \in]a, b[: \ f(c) = 0$$

Exemplo 3.24.
A função $f(x) = \ln x + x$ é contínua no seu domínio, $D_f =]0, +\infty[$.
Consideremos o intervalo $[e^{-1}, 1]$.

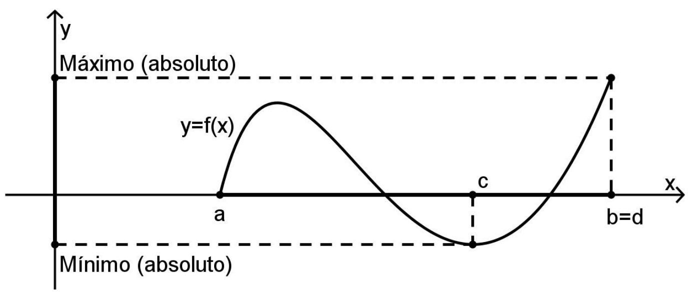
$$f(e^{-1}) = \ln(e^{-1}) + e^{-1} = -1 + \frac{1}{e} = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0$$

Logo $f(e^{-1}) \cdot f(1) < 0$ e pelo corolário do teorema de Bolzano f tem pelo menos um zero em $]e^{-1}, 1[$.

Teorema 3.16. *Do valor extremo, ou de Weierstrass*
Seja f uma função contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$.
Então f tem máximo e mínimo absolutos em I:

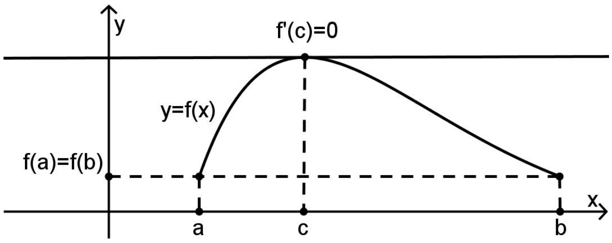
$$\exists c, d \in I \ , \forall x \in I \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d)$$



Corolário 3.17.
Uma função contínua transforma um um intervalo fechado num intervalo fechado.

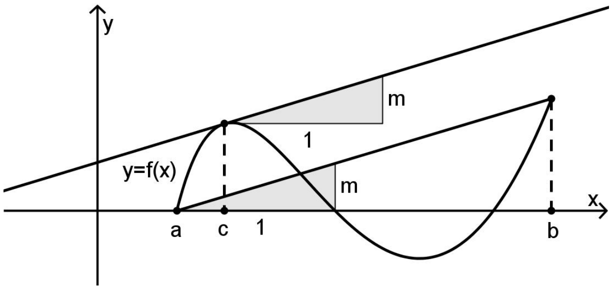
Teorema 3.18. *De Rolle*
Seja f contínua em $[a,b]$, diferenciável em $]a,b[$ e $f(a)=f(b)$. Então:

$$\exists c \in]a,b[\quad : \quad f'(c)=0$$



Teorema 3.19 (do valor médio, ou de Lagrange)**.**
Seja f contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então:

$$\exists c \in]a,b[\quad : \quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

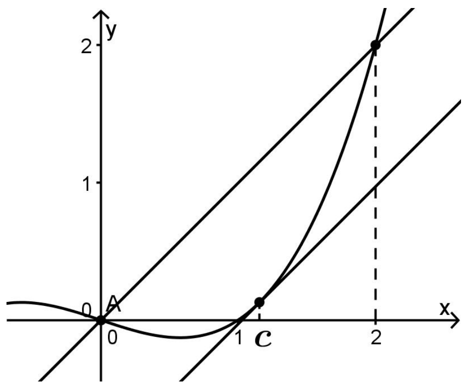


Exemplo 3.25.

Consideremos $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x$ no intervalo $[0,2]$.
Esta função é polinomial, logo é contínua em $[0,2]$ e diferenciável em $]0,2[$.

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{2-0}{2-0}=1$$

Pelo teorema do valor médio de Lagrange existe $c \in]0,2[$ tal que f'(c)=1.



Podemos confirmar este resultado: de facto, $f'(x)=x^2-\frac{1}{3}$ e

$$f'(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-\frac{1}{3}=1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2=\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,$$

confirmando-se que $c=\frac{2\sqrt{3}}{3} \in]0,2[$ e $f'(c)=1$.

Exercícios.

1. *Seja* $f(x) = x^3 - x^2 + 4$. *Mostre que:*
   (a) $f(x) = -1$ *tem pelo menos uma solução em* $]-2, -1[$.
   (b) $f(x) = 3$ *tem pelo menos uma solução em* $]-1, 1[$.
2. *Seja* $f(x) = x^3 - x + 4$. *Determine o conjunto dos valores de* k *para os quais a equação* $f(x) = k$ *tem pelo menos uma solução em* $]1, 2[$.
3. *Seja* f *uma função par e contínua no seu domínio* $D_f = [-3, 3]$. *Se* f *for crescente em* $[-3, 0]$, *quantas soluções terá a equação* $f(x) = 2$ *se:*
   (a) $f(-3) = 4$.
   (b) $f(0) = 2$.
4. *Uma função* f *é contínua no seu domínio* $\mathbb{R}$, *é ímpar e tem um máximo absoluto* 5 *(ou seja* $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq 5$*). Justifique que o contradomínio de* f *é* $[-5, 5]$.
5. *Prove que* $e^{-x} = x$ *tem pelo menos uma solução em* $]0, 1[$.
6. *Considere a função* $f(x) = x^3 + x - 1$.
   (a) *Prove que* $f(x) = 0$ *tem pelo menos uma solução em* $[0, 1]$.
   (b) *Utilize o teorema de Rolle para demonstrar que* $f(x) = 0$ *não pode ter duas (ou mais) soluções em* $\mathbb{R}$.
   (c) *Conclua que* $f(x) = 0$ *tem exactamente uma solução real.*
7. *Justifique que pode aplicar o teorema do valor médio de Lagrange às funções indicadas, nos respectivos intervalos, e conclua que resultado o teorema nos garante.*
   (a) $f(x) = x^2$ *em* $[1, 2]$.
   (b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ *em* $[2, 6]$.
   (c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ *em* $[0, 1]$.
   (d) $f(x) = \sqrt{9 + x^2}$ *em* $[0, 4]$.
8. *Use o teorema do valor médio de Lagrange para provar que se* f *for diferenciável em* $]a, b[$ *e* $\forall c \in]a, b[\,,\ f'(c) = 0$, *então* f *é uma função constante em* $]a, b[$.

Exercícios.
O estudo completo de uma função consiste em estudar:

(a) *domínio e contradomínio*

(b) *zeros*

(c) *paridade*

(d) *limites, continuidade e assímptotas*

(e) *primeira e segunda derivadas*

(f) *monotonia e extremos locais*

(g) *pontos de inflexão*

(h) *esboço do gráfico*

1. *Faça o estudo completo das seguintes funções*

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

   (b) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

   (c) $f(x) = x - \ln x$

   (d) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

2. *Calcule* $f'(x)$*:*

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2} + \dfrac{3}{x}$

   (b) $f(x) = (3x^2-5x+2)^4$

   (c) $f(x) = x \cdot \sqrt{2x-3}$

   (d) $f(x) = (3x)^5 \cdot (3x^2-5x+2)^4$

3. *Considere as funções:*

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \qquad\qquad g(x) = x^2+1$$

   (a) *Caracterize* $(f \circ g)(x)$.

   (b) *Calcule* $(f \circ g)'(x)$.

   (c) *Estude a monotonia e os extremos locais de* $f \circ g$.

   (d) $f \circ g$ *admite função inversa?*

4. *Faça o estudo completo da função:*

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4x^2+1}}$$

   (a) *Domínio*

   (b) *Zeros e intersecção na origem* $(\,0\,,\,f(0)\,)$

   (c) *paridade*

   (d) $f'(x)$ *e* $f''(x)$

   (e) *limites, continuidade, assímptotas, monotonia, extremos locais, pontos de inflexão e concavidade*

   (f) *esboço do gráfico*

   (g) *contradomínio*

Capítulo 4

Cálculo Integral

4.1 Primitivas

Definição 4.1. *$F(x)$ é uma primitiva ou anti-derivada de $f(x)$ se:*

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \qquad ou \qquad F'(x) = f(x)$$

$$F(x) \qquad \longrightarrow \text{derivação} \longrightarrow \qquad F'(x) = f(x)$$

$$F(x) + C \quad \longleftarrow \text{primitivação} \longleftarrow \quad F'(x) = f(x)$$

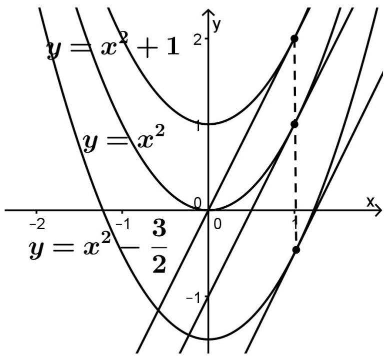
Proposição 4.1. *Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + C$ é a forma geral de todas as primitivas de $f(x)$. C designa-se por constante de integração.*

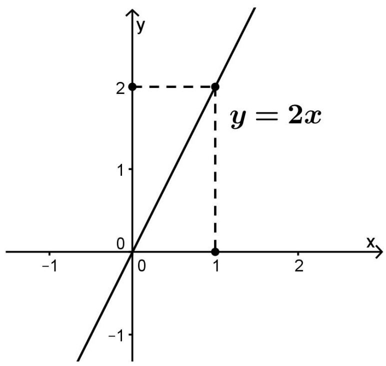
$$F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Exemplo 4.1. *Seja $F(x) = x^2$, logo $F'(x) = 2x$. Diz-se então que $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$. Contudo, $F(x) = x^2$ não é a única primitiva de $f(x) = 2x$:*

$$\left(x^2 + C\right)' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \int 2x\,dx = x^2 + C$$

Por exemplo: as funções x^2, $x^2 + 1$ e $x^2 - \dfrac{3}{2}$ são primitivas de $2x$;





Reparemos que:

$$(x)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int 1\,dx = x + C$$

$$\left(x^2\right)' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \int 2x\,dx = x^2 + C$$

Contudo, talvez seja mais conveniente considerar

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x = x \quad \Leftrightarrow \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

De igual modo:

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Proposição 4.2. *Fórmula de primitivação de uma potência:*

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \qquad (se \quad p \neq -1)$$

Exemplo 4.2.

$$\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int \frac{1}{x^5}\,dx = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}\,x^{3/2} + C$$

Proposição 4.3. *Propriedades do integral indefinido:*

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + G(x) + C$$

Exemplo 4.3.

$$\begin{aligned}
\int \left(3x^2 + 4x + 3\right)\,dx &= \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx + \int 3\,dx \\
&= 3 \cdot \int x^2\,dx + 4 \cdot \int x\,dx + \int 3\,dx \\
&= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C \\
&= x^3 + 2x^2 + 3x + C
\end{aligned}$$

Proposição 4.4.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \qquad e \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C \quad (a \neq 0)$$

Exercícios.

1. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int x^6\,dx$ (d) $\displaystyle\int 3x^{-4}\,dx$ (g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^5}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int x^{-3}\,dx$ (h) $\displaystyle\int x^{7/2}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \left(3x^4\right)\,dx$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$ (i) $\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

2. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int \left(x+x^2\right)\,dx$ (c) $\displaystyle\int \left(2x^5-3x\right)\,dx$

   (b) $\displaystyle\int \frac{3}{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x^3}\right)\,dx$

3. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$

4. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ (b) $\displaystyle\int 6\,e^{2x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int 3^x\,dx$

5. *Seja* $a>0$ *e* $a\neq 1$. *Use a identidade* $a^x=e^{(\ln a)x}$ *para provar que*

$$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\,a^x+C$$

6. *Verifique, por derivação, que:*

   (a) $\displaystyle\int \left(2xe^x+x^2e^x\right)\,dx=x^2e^x+C$ (b) $\displaystyle\int \ln x\,dx=x\ln x-x+C \quad (x>0)$

7. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int (x-1)^2\,dx$ (b) $\displaystyle\int (x+2)^3\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x+4}{x}\,dx$

4.2 Equações diferenciais

Definição 4.2. *Chama-se equação diferencial a uma equação do tipo*

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

sendo $f(x)$ é uma função dada e $y = F(x)$ é uma função que se pretende determinar. Não se pretende determinar x: a igualdade deverá verificar-se para todo o x, pois a função do 1º membro deverá ser igual à do 2º.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)\,dx$$

Exemplo 4.4.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \Leftrightarrow y = \int x^2\,dx \Leftrightarrow y = \frac{x^3}{3} + C$$

Definição 4.3. *Equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

Exemplo 4.5. *Resolva a equação a equação diferencial com condição inicial:*

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2, \qquad y(1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \int 6x^2\,dx \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x^3 + C$$

Mas a condição inicial $y(1) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot (1)^3 + C = 0 \Leftrightarrow C = -2$, logo a solução é $y(x) = 2x^3 - 2$.

Exercícios.

1. *Determine a solução da equação diferencial com condição inicial:*

   (a) $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2, \qquad y(-2) = 8.$ *(b)* $\frac{dy}{dx} = 2x + 1, \qquad y(-3) = 0.$

2. *Determine a função $y = f(x)$ tal que:*

$$f''(x) = x + e^x, \qquad f'(0) = 2, \qquad f(0) = -1.$$

3. *O custo marginal da produção de x unidades é $C'(x)$. Os custos fixos são $C(0)$. Determine a fução custo de produção $C(x)$ quando:*

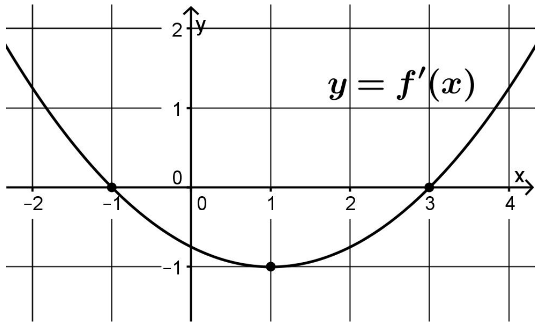
   (a) $C'(x) = 3x + 4$ *e* $C(0) = 40$ *(b)* $C'(x) = ax + b$ *e* $C(0) = C_0$

4. *Determine $F(x)$ sabendo que:*

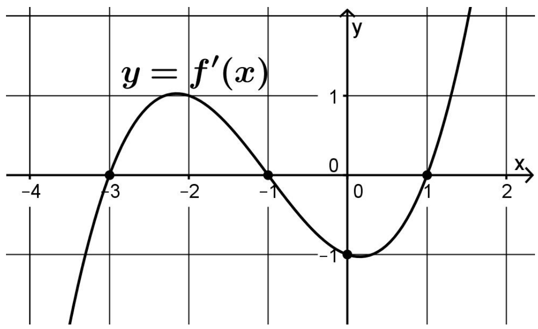
(a) $F'(x) = \frac{1}{2}e^x - 2x$ *e* $F(0) = \frac{1}{2}$ (b) $F'(x) = x(1 - x^2)$ *e* $F(1) = \frac{5}{12}$

5. *Determine a função $f(x)$ e esboce o seu gráfico, sabendo que:*

(a) $f(0) = 2$ *e o gráfico de* f' *é:*



(b) $f(0) = 0$ *e o gráfico de* f' *é:*



4.3 Integração por substituição

Recordemos a regra da derivação da função composta:

$$\frac{d}{dx}\left(F[\, g(x)\,] \right) = F'[\, g(x)\,] \cdot g'(x)$$

Designando $F'(x) = f(x)$, podemos escrever equivalentemente:

$$\int f[\, g(x)\,] \cdot g'(x)\, dx = F[\, g(x)\,] + C$$

Teorema 4.5.

$$\int f[\, g(x)\,] \cdot g'(x)\, dx = F[\, g(x)\,] + C \quad \Leftrightarrow \quad \int f(u)\, du = F(u) + C$$

sendo $u = g(x)$ *e* $du = g'(x)\, dx$.

Exemplo 4.6.

$$\int (x^2+1)^{20} \cdot 2x\, dx = \int u^{20}\, du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x^2+1)^{21}}{21} + C$$

sendo $u = x^2 + 1$ *e* $du = 2x\, dx$.

Exercícios.

1. (a) *Calcule:* $\dfrac{d}{d\,x}\Big((3x^2-2)^4\Big).$

   (b) *Complete:* $\displaystyle\int\Big(\qquad\ldots\qquad\Big)\,dx = (3x^2-2)^4 + C.$

2. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\int t^4 \cdot \sqrt[3]{3-5t^5}\,dt$

   (b) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sqrt{x-1}\,dx$

3. *Calcule*

   (a) $\displaystyle\int 2x\,e^{x^2}\,dx$

   (b) $\displaystyle\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3+1}\,dx$

   (c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

   (d) $\displaystyle\int x^2\,e^{x^3}\,dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2-8x+1}}\,dx$

   (f) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

4.4 Integração por partes

Proposição 4.6. *Regra de primitivação por partes:*

$$\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

Demonstração. Pela regra da derivação do produto $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Assim:

$$\int (u\cdot v)'\;dx = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx \quad\Leftrightarrow\quad u \cdot v = \int u' \cdot v\,dx + \int u \cdot v'\,dx$$

□

Exemplo 4.7.

$$\begin{aligned}
\int \ln(x)\;dx \quad &= \\
\int \underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{1}_{v'}\;dx \quad &= \underbrace{\ln(x)}_{u}\cdot\underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\cdot\underbrace{x}_{v}\;dx \\
&= \ln(x)\cdot x - \int 1\;dx \\
&= \ln(x)\cdot x - x + C
\end{aligned}$$

Exemplo 4.8.

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sqrt{x+1}}_{v'}\ dx &= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}}_{v}\ dx \\
&= x \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \int (x+1)^{3/2}\ dx \\
&= \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} + C
\end{aligned}$$

Exercícios.

1. *Calcule:*

   (a) $\int x \cdot e^x\, dx$

   (b) $\int \ln(x)\, dx$

   (c) $\int x^2 \cdot \sqrt{x-1}\, dx$

   (d) $\int \frac{1}{x} \ln x\, dx$

   (e) $\int x^3 e^{2x}\, dx$

2. *Calcule:*

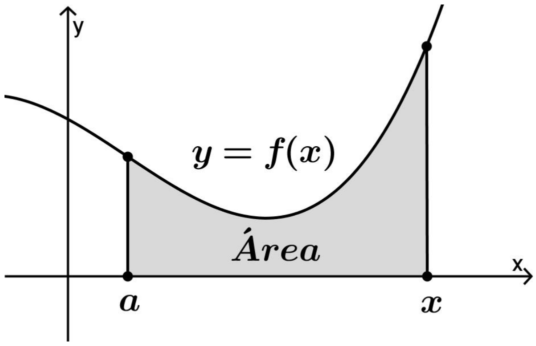
   (a) $\int x\,(x+5)^8\, dx$

   (b) $\int x^2\, \ln(x)\, dx$

   (c) $\int \frac{x}{e^{3x}}\, dx$

4.5 Integral de Riemann

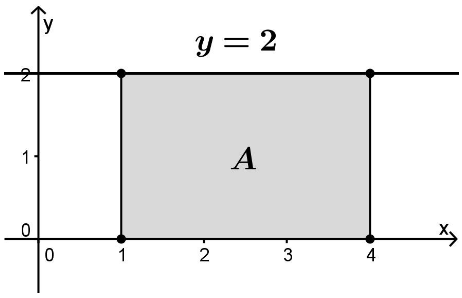
Pretendemos calcular a área sob o gráfico de uma função não negativa, em $[a, b]$:



Definição 4.4 (Integral definido).
Seja $f(x)$ uma função não-negativa em $[a, b]$. A área do conjunto:

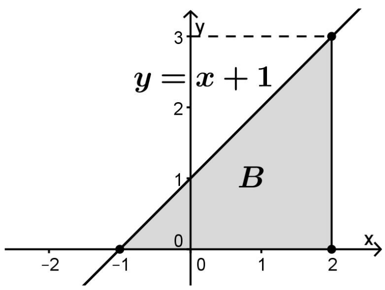
$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ 0 \leq y \leq f(x) \right\} \text{ designa-se por } \int_a^b f(x)\, dx$$

Exemplo 4.9 (Áreas e integrais definidos de algumas figuras geométricas familiares).
(a)



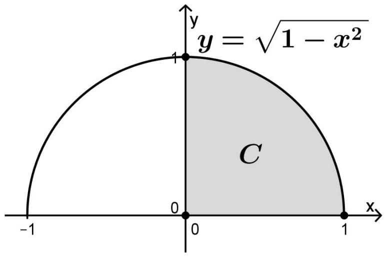
$$\acute{A}rea(A) = \int_1^4 2\, dx = 3 \cdot 2 = 6$$

(b)



$$\acute{A}rea(B) = \int_{-1}^2 (x+1)\, dx = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}$$

(c)

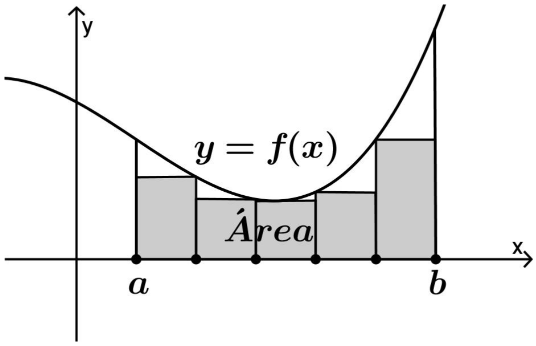


$$\acute{A}rea(C) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Definição 4.5. *O Integral de Riemann de uma função não negativa em* $[a, b]$*:*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

designa a área sob o gráfico de $y = f(x)$ *no intervalo* $[a, b]$.



O processo de cálculo da área (se existir) consiste no limite das aproximações através de rectângulos de largura cada vez menor:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

sendo $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ *e* x_k *pertence ao k-ésimo sub-intervalo de* $[a, b]$.
Quando o limite existe, dizemos que a função é Riemann-integrável em $[a, b]$.
a *e* b *são os limites de integração inferior e superior e* $f(x)$ *é a função integranda.*

Teorema 4.7. *Uma função contínua num intervalo* $[a, b]$ *é Riemann-integrável.*

Observação.
A variável de integração diz-se *muda*, pois os seguintes integrais são idênticos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$$

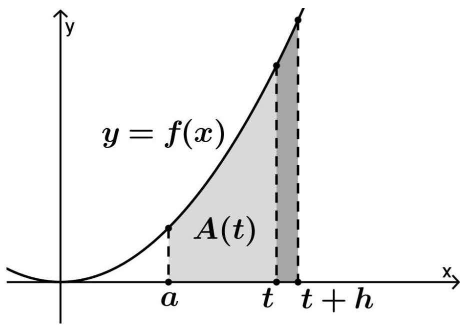
A definição do integral de Riemann como o limite das áreas que são aproximações por rectângulos não é um método adequado ao cálculo sistemático de integrais, em geral.

Teorema 4.8. *Teorema Fundamental do Cálculo (1):*
Seja f uma função contínua num intervalo.

O integral indefinido

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

é uma primitiva de f, ou seja:



$$A'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(x)\,dx\right) = f(t)$$

Demonstração.

$$A'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{h} \approx \frac{h \cdot f(t)}{h} = f(t)$$

□

Teorema 4.9. *Teorema Fundamental do Cálculo (2):*
Seja f uma função contínua num intervalo e F uma primitiva de f. Então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Demonstração. Seja $A(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,dx$.

Pelo T.F.C. (1), $A(t)$ é uma primitiva de $f(t)$, logo $A(t) = F(t) + C$.
Como $A(a) = 0$, então $C = -F(a)$.
Assim $A(t) = F(t) - F(a)$, para qualquer primitiva F. Finalmente

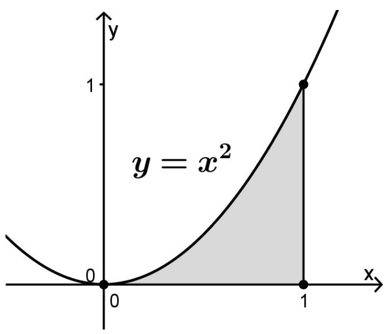
$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

□

Exemplo 4.10.

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}\,x^3\right]_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3\right) = \frac{1}{3}$$



Proposição 4.10. *Propriedades do integral definido, ou de Riemann:*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad\qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemplo 4.11.

$$\int_1^1 x^2\,dx = 0 \qquad\qquad\qquad \int_0^2 2x\ dx\ =\ -\int_2^0 2x\ dx$$

Proposição 4.11. *Linearidade do integral, relativamente à função integranda:*

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

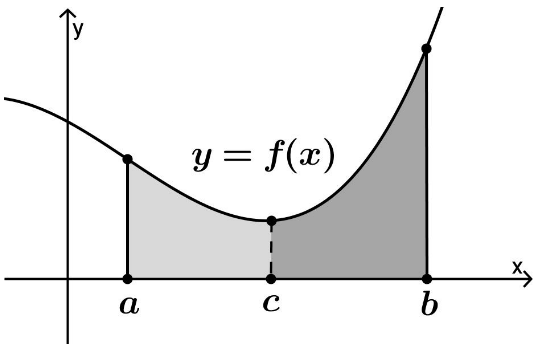
Exemplo 4.12.

$$\begin{aligned}\int_0^2 \big(\ 3x^2+2x\ \big)\ dx &= \int_0^2 3x^2\ dx\ +\ \int_0^2 2x\ dx\\ &= 3\cdot\int_0^2 x^2\ dx\ +\ 2\cdot\int_0^2 x\ dx\end{aligned}$$

Proposição 4.12. *Partição do intervalo de integração:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

independentemente da ordem dos números $a, b, c \in \mathbb{R}$.

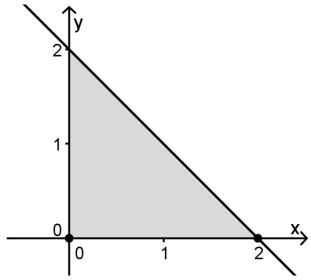


Exemplo 4.13.

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x-1|\ dx &= \int_0^1 |x-1|\ dx\ +\ \int_1^2 |x-1|\ dx\\ &= \int_0^1 (-x+1)\ dx\ +\ \int_1^2 (x-1)\ dx\end{aligned}$$

Exercícios.

1. *Escreva um integral definido que designe a área indicada e calcule-o:*
   (a) *Através de um método geométrico.*
   (b) *Pelo Teorema Fundamental do Cálculo.*



2. *Calcule os integrais e esboce os conjuntos correspondentes às áreas calculadas:*

   (a) $\displaystyle\int_1^2 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^2 |x|\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_1^9 \sqrt{x}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_4^0 x\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-2}^2 |x-1|\,dx$

3. *Calcule:*

   (a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right]$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{-1}^x |t|\,dt\right]$ (c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left[\int_{-2}^x |t-1|\,dt\right]$

4. *Esboce a região cuja área é representada pelo seguinte integral definido e calcule-o:*

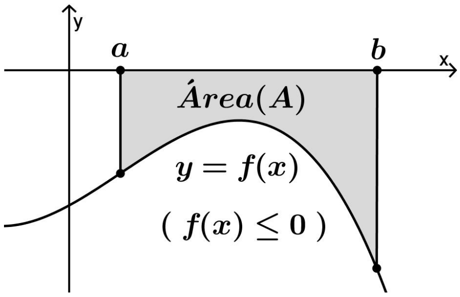
   (a) $\displaystyle\int_1^4 2\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x+2)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

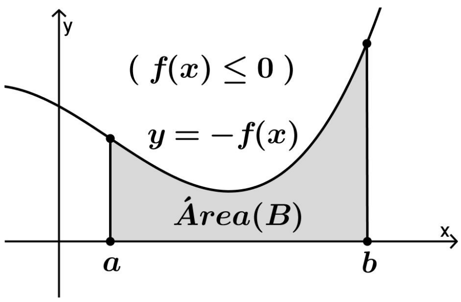
5. *Calcule e represente graficamente a área calculada:*

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$

4.6 Cálculo de áreas

Proposição 4.13. *Área de uma região limitada por uma função negativa:*





A área de uma região limitada por uma função negativa, Área(A), é igual à área da região simétrica, Área(B), limitada pela sua função simétrica (positiva):

$$\acute{A}rea(A) = \acute{A}rea(B) = \int_a^b \Big(- f(x) \Big)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

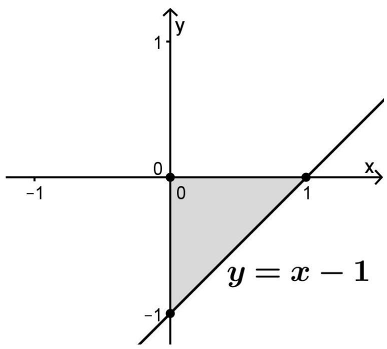
Concluímos assim que o integral definido de uma função $f(x) \le 0$ num intervalo $[a, b]$ é o simétrico da área entre o gráfico de f e o eixo das abcissas, em $[a, b]$.

Exemplo 4.14.

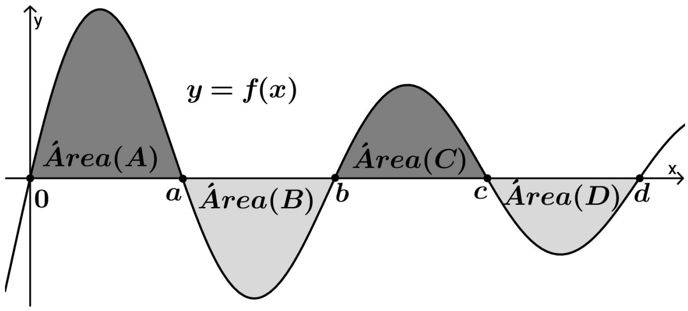
$$\int_0^1 (x-1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = -\frac{1}{2},$$

logo a área da figura situada abaixo do eixo das abcissas é:

$$\left|\int_0^1 (x-1)\, dx\right| = \frac{1}{2}$$



Proposição 4.14. *O integral de uma função contínua num intevalo é igual à soma das áreas acima do eixo das abcissas, subtraída das áreas abaixo desse eixo:*

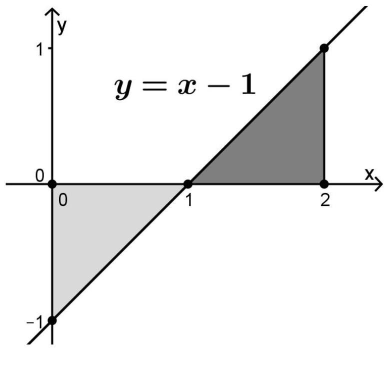


$$\int_0^d f(x)dx = \underbrace{\int_0^a f(x)dx}_{+\acute{A}rea(A)} + \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{-\acute{A}rea(B)} + \underbrace{\int_b^c f(x)dx}_{+\acute{A}rea(C)} + \underbrace{\int_c^d f(x)dx}_{-\acute{A}rea(D)}$$

Exemplo 4.15.

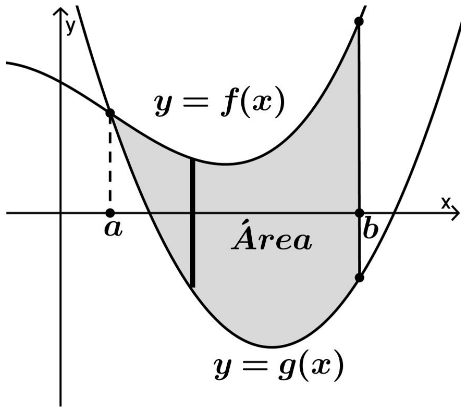
$$\int_0^2 (x-1)\, dx = 0$$

porque o integral calcula a diferença entre a área do triângulo acima do eixo das abcissas, e a do triângulo abaixo desse eixo, triângulos esses que têm a mesma área.



Proposição 4.15.
A área de um conjunto limitado superiormente e inferiormente por duas funções:

$$A := \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ g(x) \leq y \leq f(x) \ \}$$



calcula-se através do integral $\displaystyle\int_a^b \Big(\ f(x) - g(x) \ \Big) \ dx$.

Exercícios.

1. *Considere o seguinte conjunto:*

$$A := \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x \leq y \leq 2 - x \ \}$$

   (a) *Esboce o conjunto A.*
   (b) *Escreva um integral definido para calcular a área de A.*
   (c) *Calcule a área de A. (Sol:* $\frac{9}{2}$*)*

2. *Considere o seguinte conjunto:*

$$B := \{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 \leq y \leq 8 \ \}$$

   (a) *Esboce o conjunto A.*
   (b) *Escreva um integral definido para calcular a área de A.*
   (c) *Calcule a área de A. (Sol:* $\frac{9}{2}$*)*

3. *Determine a área da região limitada pelas curvas:*

   (a) $y = x^2 + x$ *e* $y = 3 - x$.
   (b) $y = 3x - x^2$ *e* $y = 4 - 2x$.