Rozprawa doktorska pt.

Problem liczby skoków w zbiorach częściowo uporządkowanych

Kombinatoryczne algorytmy aproksymacyjne, przeszukiwanie wyczerpujące i złożoność obliczeniowa

autoreferat

Przemysław Krysztowiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Problem liczby skoków dla danego zbioru częściowego uporządkowanego P (zwanego dalej posetem) polega na znalezieniu rozszerzenia liniowego, które minimalizuje liczbę sąsiadujących par elementów nieporównywalnych w P. Klasycznym zastosowaniem problemu jest szeregowanie zadań na jednej maszynie. Załóżmy, że oprócz zadań mamy ograniczenia orzekające, że pewne zadania nie mogą się rozpocząć, zanim nie skończą się inne (poprzednicy w posecie). Przyjmijmy ponadto, że wykonanie zadania bezpośrednio po zadaniu, które nie było jego poprzednikiem, wymaga ponownego przygotowania maszyny. Oznacza to dodatkowy koszt (skok). Należy wyznaczyć taką kolejność wykonywania zadań, która minimalizuje liczbę skoków. Problem ten był badany już w latach 70-tych [9, 28]. Pierwszy dowód NP-trudności dla tego problemu przedstawił Pulleyblank [34] w 1981 roku.

Przedmiotem badań w tej rozprawie są algorytmy dla problemu liczby skoków posetu. Najważniejszym teoretycznym wynikiem jest algorytm 1.484-aproksymacyjny dla problemu skoków na posetach przedziałowych. Dla tej klasy posetów zaprezentowano też nowy algorytm dokładny oraz nowy algorytm genetyczny. Dla dwuwymiarowych posetów przedziałowych otrzymano algorytm 4/3-aproksymacyjny. Ponadto, sformułowano adaptację algorytmu przeszukiwania z zakazami, działającą na dowolnych posetach. W pracy zawarto również eksperymentalną analizę wydajności wielu algorytmów przybliżających liczbę skoków.

Sformułowanie problemu skoków

Całkowite uporządkowanie $L = p_1, p_2, \ldots, p_n$ elementów zbioru P nazywamy **rozszerzeniem liniowym** posetu $(P, <_P)$, jeśli zachowane są wszystkie relacje, tzn. $p_i <_P p_j$ pociąga za sobą $i < j$. Dwa sąsiadujące elementy p_i, p_{i+1} w L są oddzielone **skokiem**, jeśli $p_i \not<_P p_{i+1}$, a w przeciwnym razie są oddzielone **progiem**.

Rodzina rozszerzeń liniowych $\{L_1, \ldots, L_d\}$ posetu P nazywa się jego **realizatorem**, jeśli ich przekrojem jest $<_P$. **Wymiar** posetu to najmniejsza moc realizatora $(P, <_P)$. Poset jest d-wymiarowy, jeśli jego wymiar jest równy co najwyżej d.

Poset $(P, <_P)$ jest **posetem przedziałowym**, jeśli istnieje bijekcja pomiędzy jego elementami i domkniętymi przedziałami na osi rzeczywistej,

$$P \leftrightarrow \{I_p = [l(p), r(p)], l(p) \leqslant r(p)\}_{p \in P}$$

taka, że $p <_P q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r(p) < l(q)$.

Niech $s_L(P)$ oznacza liczbę skoków w rozszerzeniu liniowym L posetu P. Problem liczby skoków polega na znalezieniu

$$s(P) = \min\{s_L(P) : L \text{ jest rozszerzeniem liniowym } P\}.$$

Aktualny stan wiedzy o problemie skoków

W latach 80-tych Chaty i Chein [7] wykazali, że wyznaczenie liczby skoków dla posetów dwudzielnych jest równoważne ze znalezieniem najliczniejszego skojarzenia na grafie porównywalności, z dodatkowym warunkiem: nie może to być skojarzenie, którego co druga krawędź należy do (tego samego) cyklu. W oparciu o tę równoważność, Pulleyblank [34] udowodnił NP-trudność problemu skoków na posetach dwudzielnych. Następnie Müller [33] uszczegółowił ten rezultat wykazując, że problem skoków pozostaje NP-trudny na posetach dwudzielnych, których graf porównywalności nie zawiera cyklu C_k dla żadnego $k \geqslant 6$ jako podgrafu indukowanego.

Dla kontrastu, Steiner i Stewart [36] podali wielomianowy algorytm do obliczania liczby skoków posetu dwudzielnego, jeśli zarazem jest on dwuwymiarowy. Następnie podawano wielomianowe algorytmy dla coraz szerszych klas posetów dwudzielnych (Brandstädt [4], Dahlhaus [12], Soto i Telha [37]).

Algorytmy wielomianowe zaprojektowano też dla kilku innych klas posetów. W szczególności są to posety N-wolne (Rival [35], Sysło [40]) oraz podklasa porządków przedziałowych, w której wszystkie elementy posetu są reprezentowane przedziałami jednej długości (Arnim i Higuera [1]). Colbourn i Pulleyblank [10] podali wielomianowy algorytm dla posetów o stałej szerokości.

Mitas [31] wykazała, że problem skoków jest NP-trudny w klasie posetów przedziałowych. Dla tej klasy posetów zaprojektowano trzy różne wielomianowe algorytmy aproksymacyjne. Podejścia Felsnera [16] i Sysły [44] stanowią realizację strategii zachłannej. Algorytm Mitas opiera się na redukcji do problemu pakowania podgrafów. Wszystkie trzy algorytmy mają stały współczynnik aproksymacji, równy $\frac{3}{2}$. Autor rozprawy poprawił [23] współczynnik aproksymacji w tej klasie posetów do 1.484. Omawiamy ten rezultat w podrozdziale 3.7, po wprowadzeniu pracy Mitas.

Liczbę skoków dowolnego posetu można wyznaczyć algorytmem przeszukiwania wyczerpującego, podanym przez Sysłę [43], omówionym w podrozdziale 2.3. Pesymistyczna złożoność czasowa szacowana jest przez funkcję silnia od liczby łuków pozornych w diagramie reprezentującym poset. Jeśli pytamy, czy $s(P) \leqslant k$, gdzie k jest stałą, to odpowiedź uzyskamy w czasie $\mathcal{O}(k!k^2n)$ algorytmem McCartin [29]. Ostatnio Kratsch i Kratsch [21] podali algorytm dokładny działający w czasie $\mathcal{O}(1.8638^n)$, a przy ograniczeniu do posetów przedziałowych otrzymali złożoność $\mathcal{O}(1.7593^n)$. Wykazano w podrozdziale 3.9, że na posetach przedziałowych można otrzymać algorytm o niższej złożoności, stosując technikę rozgałęziania.

Otwartym problemem pozostaje złożoność problemu skoków w klasie posetów dwuwymiarowych. Ceroi [5] sformułował dowód NP-trudności w rozszerzonym przypadku, gdy na porównywalnościach określona jest całkowitoliczbowa funkcja wagowa, a celem jest maksymalizacja sumy wag na progach rozszerzenia liniowego. Nie podano też do tej pory algorytmu aproksymacyjnego dla posetów dwuwymiarowych. W podrozdziale 4.1 pokazano, jak aproksymacja liczby skoków na posetach przedziałowych przenosi się na posety przedziałowe, będące zarazem dwuwymiarowymi.

Omówienie wyników rozprawy na tle dziedziny

Wyniki rozprawy dotyczą algorytmów dla problemu skoków posetu:

1. Podano algorytm 1.484-aproksymacyjny dla posetów przedziałowych [23, 24].

2. Podano algorytm dokładny dla posetów przedziałowych o złożoności czasowej $\mathcal{O}(1.47^n \cdot \text{poly}(n))$ [27].

3. Sformułowano algorytm genetyczny dla posetów przedziałowych, który zawsze generuje rozwiązanie dopuszczalne [22].

4. Podano algorytm 4/3-aproksymacyjny dla posetów przedziałowych, które są dwuwymiarowe.

5. Sformułowano algorytm przeszukiwania z zakazami dla dowolnych posetów [27].

6. Znaleziono trudne przypadki posetów przedziałowych, wymuszające najwyższe dopuszczalne odchylenie od optimum dla algorytmów aproksymacyjnych Felsnera, Sysły i Mitas [22].

7. Przeprowadzono intensywne testy algorytmów Felsnera, Sysły, Mitas oraz nowych algorytmów (genetycznego oraz przeszukiwania z zakazami), w oparciu o własne implementacje, by zbadać jakość aproksymacji otrzymywanej w praktyce [22, 27].

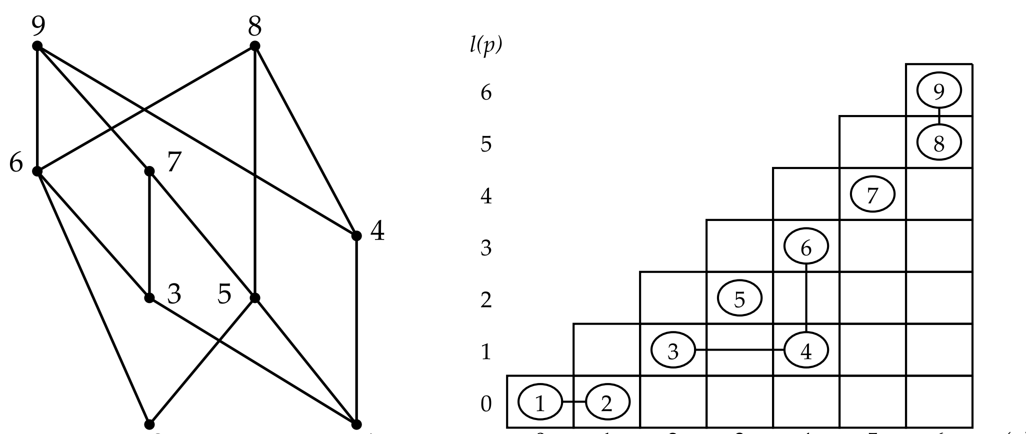
Poniżej streszczono rozprawę, wskazując, w których rozdziałach omówiono wymienione wyżej wyniki.

Pierwszy rozdział rozprawy zawiera pojęcia z dziedziny złożoności obliczeniowej oraz z teorii grafów, które są używane w kolejnych rozdziałach. W szczególności przytoczono tu algorytm pakowania krawędzi i rodziny grafów podskojarzalnych (algorytm 1.3.20), który jest wykorzystywany do aproksymacji liczby skoków na posetach przedziałowych.

Drugi rozdział rozpoczyna się od sformułowania problemu skoków i pojęć związanych z posetami, niezbędnych w dalszej części pracy. Następnie zarysowano w nim aktualny stan wiedzy o tym problemie (podrozdział 2.2). Obszerną część tego rozdziału stanowi przegląd algorytmu Sysły (podrozdział 2.3), który był jednym z pierwszych algorytmów dla problemu skoków. Przytoczono pojęcia diagramu łukowego (definicja 2.3.1) oraz ścieżek zachłannych, półsilnie- oraz silnie zachłannych (odpowiednio: 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7), którym odpowiadają zachłanne łańcuchy w posecie. Cytujemy dokładny algorytm Sysły (algorytm 2.3.13), którego wynikiem są zachłanne rozszerzenia liniowe (definicja 2.2.2), złożone z łańcuchów półsilnie- i silnie zachłannych. Na mocy twierdzenia 2.3.10, wystarczy szukać rozwiązań optymalnych pośród takich rozszerzeń liniowych (zwanych półsilnie zachłannymi). W podrozdziale 2.3 zawarto również wyniki pierwszych eksperymentów obliczeniowych, pokazujących rozmiar przestrzeni poszukiwań tego algorytmu. Podrozdział 2.4 zawiera prezentację nowego algorytmu przeszukiwania z zakazami (tabu search) dla minimalizacji liczby skoków na dowolnych posetach. Algorytm ten (2.4.1 i 2.4.2), opisany w artykule [27], jest rozwinięciem podejścia Sysły i eksploatuje tę samą przestrzeń poszukiwań, złożoną z półsilnie zachłannych rozszerzeń liniowych. Proponowany algorytm przeszukiwania z zakazami opisano również w artykule [27]. Doświadczenia obliczeniowe dotyczące tego algorytmu zawarto w podrozdziałach 3.3 i 4.3.

Posety przedziałowe

Trzeci, najobszerniejszy rozdział rozprawy poświęcony jest posetom przedziałowym. W latach 90-tych zaproponowano trzy różne algorytmy $\frac{3}{2}$-aproksymacyjne dla problemu skoków na posetach przedziałowych. Wobec faktu, że trzy algorytmy mają ten sam współczynnik aproksymacji, można było sądzić, że nie da się go poprawić. Rozdział trzeci zawiera m.in. najważniejszy wynik rozprawy, tj. algorytm o współczynniku aproksymacji 1.484 dla posetów przedziałowych.



Kanoniczna reprezentacja przedziałowa posetu

Rozdział trzeci rozpoczyna się od przypomnienia charakteryzacji posetów przedziałowych (tw. 3.1.2 Fishburna). Wnioskiem z tej charakteryzacji jest kanoniczna reprezentacja takich posetów, używana zwłaszcza w częściach pracy związanych z algorytmem Mitas. Elementy posetu są wpisane do **tabeli** o e wierszach i e kolumnach, gdzie $e = |\mathcal{P}_P| = |\mathcal{S}_P|$. Przedział $[l(p), r(p)]$ trafia do komórki w wierszu $l(p)$, kolumnie $r(p)$.

W podrozdziale 3.2 przytoczono algorytm Felsnera (algorytm 3.2.2) oraz przedstawiono doświadczenia obliczeniowe, badające jakość aproksymacji uzyskiwanej tym algorytmem na losowych posetach przedziałowych (tabela 3.2.6). Znaleziono posety wymuszające 50%-nieoptymalność tego algorytmu (rysunek 3.2.7). Rozdział 3.3, dotyczący aproksymacji Sysły, zawiera specjalizacje pojęć użytych do sformułowania ogólnych algorytmów (dokładnego 2.3.13 oraz przybliżonego 2.3.12). Następnie podano wyniki doświadczeń obliczeniowych z algorytmem aproksymacyjnym Sysły na losowych posetach przedziałowych (tabela 3.3.6), a także nowego algorytmu przeszukiwania z zakazami (algorytmy 2.4.1 i 2.4.2) zarówno na posetach losowych, jak i na posetach trudnych (tabele 3.3.10 – 3.3.12), tj. posetach wymuszających nieoptymalność rozwiązań generowanych algorytmami Felsnera, Sysły oraz Mitas. Przykład takiej trudnej instancji dla algorytmu Sysły podano na rysunku 3.3.7. W tabeli 3.4.1 zawarto wyniki kolejnych eksperymentów, czyli porównanie algorytmów Felsnera i Sysły na posetach losowych.

W podrozdziale 3.5 zaprezentowano algorytm Mitas. Ważnym pojęciem w tym algorytmie jest **ciąg progów** (definicja 3.5.2), czyli ciąg par uporządkowanych postaci

$$T = \{(r_k, l_k) : k = 1, \ldots, b; 0 \leqslant r_k, l_k, b \leqslant e - 1\},$$

spełniający $r_k < l_k$ oraz $l_k \leqslant r_{k+1}$ dla każdego k, gdzie b jest jego długością. Niech $T_R := \{r_1, \ldots, r_b\}$ oznacza zbiór kolumn używanych w T, a $T_L := \{l_1, \ldots, l_b\}$ zbiór wierszy używanych w T. Mówimy, że kolumny $i \notin T_R$ oraz wiersze $j \notin T_L$ są **omijane** przez T. Ciąg progów T is **realizowalny**, jeśli $T = \{(r, l) :$ istnieje próg (p_i, p_{i+1}) w L taki, że $r(p_i) = r, l(p_{i+1}) = l\}$.

Na przykład, dla powyższego rysunku, realizowalnym ciągiem progów jest $T = \{(col_0, row_1), (col_1, row_2), (col_2, row_4), (col_4, row_6)\}$. Omijane są kolumny $3, 5, 6$ i wiersze $0, 3, 5$. Wzdłuż ciągu progów T można odczytać rozszerzenie liniowe $L = (1, 4) \oplus (2, 5) \oplus (3, 7) \oplus (6, 9) \oplus (8)$, $s_L(P) = 4$, $b = 4 = |T|$. Natomiast pełny ciąg progów, nie omijający żadnej kolumny (poza szóstą) i żadnego wiersza (poza zerowym), nie jest realizowalny.

Celem algorytmu Mitas jest generowanie realizowalnych ciągów progów. Mitas podała charakteryzację takich ciągów progów. Aby ją przytoczyć, najpierw definiuje się **graf przedziałów** $G_I(P) = (V, E)$ (definicja 3.5.8), w którym wierzchołkami V są niepuste komórki tabeli, a dwa wierzchołki są połączone krawędzią, jeśli są umiejscowione w tym samym wierszu lub w tej samej kolumnie, i w tym wierszu (odp. w tej kolumnie) nie ma innego wierzchołka pomiędzy nimi (przykład jest naniesiony na powyższym rysunku). Składowa C grafu przedziałów G_I jest **nienasycona** (definicja 3.5.9), jeśli żaden z jej wierzchołków nie leży na obrzeżu tabeli, ani żadna komórka tej składowej nie zawiera wielokrotnego elementu posetu, ani C nie zawiera cyklu. Następnie dowodzi się (tw. 3.5.14, 3.5.15), że aby ciąg progów był realizowalny, wystarczy, że każda nienasycona składowa C spełnia jedną z własności:

($\star$) $(P1)$ Składowa C zawiera wierzchołek położony w kolumnie lub wierszu omijanym przez T.

($\star$) $(P2)$ Składowa C zawiera element $[j, j+q]$ taki, że kolumny $j, \ldots, j+q-1$ oraz wiersze $j+1, \ldots, j+q$ są omijane przez T.

Przytoczono też dolne ograniczenie Mitas na liczbę skoków (twierdzenie 3.5.25), to znaczy $s(P) \geqslant |P| - \frac{u}{3}$, gdzie u jest liczbą nienasyconych składowych.

Następnie wyjaśniono, jak problem generowania realizowalnych ciągów progów jest redukowany do pakowania podgrafów. W **grafie nienasyconych składowych** $G_U(P)$ wierzchołki odpowiadają nienasyconym składowym grafu przedziałów $G_I(P)$, to znaczy dla każdej nienasyconej składowej $C \in U$ dodajemy wierzchołek v_C. Krawędzią łączymy dwa wierzchołki v_C i v_D dokładnie wtedy, gdy nienasycona składowa C pokrywa kolumnę i, zaś D pokrywa wiersz i lub wiersz $i+1$. Wówczas:

($\star$) Jeśli krawędź łączy v_C i v_D, to odpowiadające składowe C oraz D mają własność $(P1)$ gdy jedna para (col_i, row_i) lub (col_i, row_{i+1}) jest omijana przez ciąg progów.

($\star$) Jeśli istnieje nienasycona składowa C z elementem $[j, j+q]$ takim, że każda z kolumn $j, \ldots, j+q-1$ i każdy z wierszy $j+1, \ldots, j+q$ zawiera wierzchołek z innej nienasyconej składowej, to wszystkie te $2q$ składowych mają własność $P1$, a C ma własność $P2$, gdy wszystkie q par $(col_j, row_{j+1}), \ldots, (col_{j+q-1}, row_{j+q})$ są omijane przez ciąg progów. Wówczas te $2q+1$ składowych stanowią nieparzysty cykl w G_U. Nazywamy takie cykle **$P2$-cyklami**.

Zatem z każdą krawędzią i z każdym $P2$-cyklem jest stowarzyszony zbiór par postaci (col_i, row_i) lub (col_i, row_{i+1}), i jeśli usunie się je z ciągu progów, to odpowiadające nienasycone składowe będą mieć własność ($P1$) lub ($P2$). W ten sposób problem jest redukowany do zadania pakowania podgrafów, rozwiązywanego procedurą Cornuéjolsa i in. [11] dla pakowania krawędzi i danej rodziny grafów podskojarzalnych. Warunek rozłączności krawędzi i cykli gwarantuje, że pary omijane przez ciąg progów są również rozłączne, a więc otrzymujemy poprawny ciąg progów. Upakowanie angażujące v wierzchołków i c cykli przekłada się na ciąg progów, który zaoszczędza $\frac{v+c}{2}$ progów.

Algorytm 3.5.27 podsumowuje powyższe rozważania. Podrozdział 3.5.29 kończy się wynikami doświadczeń obliczeniowych z algorytmem Mitas (tabela 3.5.29 zawiera wyniki algorytmu na serii losowych posetów przedziałowych).

W podrozdziale 3.6 przedstawiono eksperymentalne porównania algorytmów zachłannych Felsnera i Sysły z algorytmem Mitas (tabele 3.6.1 oraz 3.6.2). W testach tych uwzględniono zarówno posety losowe, jak i trudne. Uzasadniono też (lemat 3.6.4), że algorytmy zachłanne nie mają przewagi nad algorytmem Mitas na posetach N-wolnych, na których zawsze generują optimum.

Poprawa współczynnika aproksymacji

W podrozdziale 3.7 uzasadniono, że na posetach przedziałowych istnieje algorytm 1.484-aproksymacyjny dla problemu skoków. Wykorzystano w tym celu dwa różne algorytmy. Z jednej strony, poprawiono współczynnik aproksymacji oryginalnego algorytmu Mitas dla niektórych posetów przedziałowych, tj. udowodniono **wniosek 3.7.1**: jeśli graf $G_U(P)$ nie zawiera upakowania rozłącznych $P2$-trójkątów zajmującego wszystkie wierzchołki grafu, a jedynie τu dla pewnego $\tau \leqslant 1$, to współczynnik aproksymacji algorytmu opartego na pakowaniu podgrafów jest ograniczony przez $1 + \frac{2\tau+3}{12-2\tau}$.

W związku z tym faktem, rozważono pozostałe przypadki grafów $G_U(P)$. Najpierw udowodniono (**lemat 3.7.2**, **wniosek 3.7.4**), że problem skoków można zredukować do pokrycia zbioru. Zamiast szukać upakowań krawędzi i $P2$-cykli na $G_U(P)$, wystarczy znaleźć zbiór krawędzi i $P2$-cykli, być może mających wspólne wierzchołki, gdyż odpowiadające pary kolumn i wierszy, przeznaczone do ominięcia przez ciąg progów, da się przełożyć na pary rozłączne, a więc otrzymane ciągi progów pozostaną poprawne.

W algorytmie 3.7.5 zastosowano algorytm 3-pokrycia zbioru o współczynniku aproksymacji równym 4/3 [14]. Następnie wykazano (**lemat 3.7.6**), że otrzymany algorytm ma współczynnik aproksymacji $\frac{4}{3}(3 - 2\tau)$ na tych grafach, które zawierają upakowania $P2$-trójkątów zajmujące przynajmniej τu wierzchołków (a więc grafach komplementarnych do tych, które obsłużono algorytmem pakowania). Podsumowując połączenie tych dwóch podejść, w dowodzie **twierdzenia 3.7.7** obliczono, że pesymistyczny współczynnik aproksymacji otrzymanego nowego algorytmu aproksymacyjnego dla liczby skoków wynosi 1.484. Wyniki te opublikowano w artykule [23], a także streszczono w [24].

Podrozdział 3.8 zawiera opis algorytmu genetycznego, którego założeniem jest optymalizacja wykorzystania własności $P2$ w ciągach progów. Zbadano doświadczalnie ten algorytm i porównano liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia optimum z liczbą iteracji dokładnego algorytmu Sysły (tabela 3.8.4).

W podrozdziale 3.9 zaproponowano algorytm dokładny dla liczby skoków na posetach przedziałowych, działający w oparciu o redukcję Mitas do pakowania podgrafów. Wykazano w dowodzie **twierdzenia 3.9.3**, że przeliczając upakowania $P2$-cykli i krawędzi za pomocą rozgałęziania otrzymuje się złożoność czasową rzędu $\mathcal{O}(1.47^n \cdot \mathrm{poly}(n))$.

W rozdziale 3.10 wyjaśniono, w jaki sposób generowano trudne instancje dla algorytmów Felsnera, Sysły i Mitas. W oparciu o implementacje tych algorytmów znaleziono wiele posetów, które wymuszają nieoptymalność rozszerzeń liniowych generowanych tymi algorytmami. Bazę tych posetów opisano w pracy [25] i upubliczniono [26].

Posety dwuwymiarowe

Czwarty rozdział dotyczy posetów dwuwymiarowych. Skoro problem skoków jest otwarty na posetach dwuwymiarowych, podjęto próbę zastosowania niektórych algorytmów do tej klasy posetów. Podrozdział 4.1 dotyczy dwuwymiarowych posetów przedziałowych. W przypadku, gdy posety dwuwymiarowe są zarazem przedziałowe, otrzymano aproksymację ze współczynnikiem $\frac{4}{3}$ (**wniosek 4.1.4**). Jest to wniosek z redukcji problemu skoków do problemu pokrycia zbioru i zaaplikowania algorytmu 4/3-aproksymacyjnego do tego problemu.

W podrozdziale 4.2 przypomniano rezultat Ceroi [5], który zredukował problem skoków na posetach dwuwymiarowych do problemu zbioru niezależnego w grafie przecięć prostokątów. Dzięki tej redukcji otrzymuje się ograniczenie dolne na liczbę skoków, używając relaksacji liniowej programu całkowitoliczbowego dla najcięższego zbioru niezależnego.

Podrozdział 4.3 opisuje doświadczenia obliczeniowe z algorytmem przeszukiwania z zakazami, zaproponowanym w drugim rozdziale rozprawy i w pracy [27]. Aby ocenić jakość generowanej aproksymacji, porównano otrzymane wyniki z ograniczeniem dolnym, wyjaśnionym w podrozdziale 4.2. Rezultaty testów zebrano w tabelach 4.3.2, 4.3.3 oraz 4.3.4.

Podsumowanie

Tematem rozprawy było algorytmiczne wyznaczanie liczby skoków posetu. Przeważającą część pracy poświęcono posetom przedziałowym. Przedstawiono też pewne wyniki dla posetów dwuwymiarowych, a także dla ogólnego przypadku dowolnych posetów:

1. Przedstawiono nowy algorytm aproksymacyjny dla klasy posetów przedziałowych, będący rozwinięciem algorytmu Mitas. Udowodniono, że podany algorytm ma współczynnik aproksymacji ograniczony przez 1.484 [23, 24].

2. Dla posetów przedziałowych sformułowano algorytm dokładny wyznaczający liczbę skoków w czasie $\mathcal{O}(1.47^n \cdot \mathrm{poly}(n))$ [27].

3. Wykazano, że jeśli ograniczy się rozważania do dwuwymiarowych posetów przedziałowych, to otrzymuje się algorytm $\frac{4}{3}$-aproksymacyjny dla liczby skoków.

4. Zaproponowano dwie adaptacje metaheurystyk. Po pierwsze, sformułowano algorytm przeszukiwania z zakazami dla dowolnych posetów [27]. Po drugie, podano algorytm genetyczny dla posetów przedziałowych [22].

5. Przeprowadzono intensywne testy algorytmów Felsnera, Sysły, Mitas oraz nowych algorytmów, w oparciu o własne implementacje, by zbadać jakość aproksymacji otrzymywanej w praktyce [22, 27]. Znaleziono trudne przypadki posetów przedziałowych, wymuszające odchylenie od optimum sięgające 50% dla algorytmów aproksymacyjnych Felsnera, Sysły i Mitas [22].

Rezultaty uzyskane w toku prac nad rozprawą doktorską były prezentowane podczas kilku konferencji, m.in. *EuroComb'11* w Budapeszcie i *Combinatorics 2012* w Perugii [24]. Poprawiony współczynnik aproksymacji dla posetów przedziałowych został opublikowany w artykule [23]. Baza trudnych posetów została omówiona w pracy [25] i na stronie internetowej [26], przeszukiwanie z zakazami opisano w [27], a doświadczenia z algorytmami na posetach przedziałowych wraz z algorytmem genetycznym w [22].

Spis cytowanej literatury

[1] A. von Arnim, C. de la Higuera, Computing the jump number on semi-orders is polynomial, *Discrete Appl. Math.* 51, 219–232 (1994).

[2] V. Bouchitté, M. Habib, NP-completeness properties about linear extensions, *Order* 4, 143–154 (1987).

[3] V. Bouchitté, M. Habib, The calculation of invariants for ordered sets, w: *Algorithms and Order*, red. I. Rival , NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 231–279 (1989).

[4] A. Brandstädt, The jump number problem for biconvex graphs and rectangle covers of rectangular regions, w: *FCT 1989*, LNCS 380, red. J. Csirik, J. Demetrovics, F. Gécseg, Springer, Heidelberg, 68–77 (1989).

[5] S. Ceroi, A weighted version of the jump number problem on two-dimensional orders is NP-complete, *Order* 20, 1–11 (2003).

[6] S. Ceroi, Jump number of 2-dimensional orders and intersection graphs of rectangles, artykuł niepublikowany (2000).

[7] G. Chaty, M. Chein, Ordered matchings and matchings without alternating cycles in bipartite graphs, *Utilitas Mathematica* 16, 183–187 (1979).

[8] M. Chein, M. Habib, The jump number of dags and posets: an introduction, *Ann. Discrete Math.* 9, 189–194 (1980).

[9] M. Chein, P. Martin, Sur le nombre de sauts d'une forét, *C.R. Acad. Sci. Paris (A)* 275 (1972), 159–161.

[10] C.J. Colbourn, W.R. Pulleyblank, Minimizing setups in ordered sets of fixed width, *Order* 1, 225–229 (1985).

[11] G.P. Cornuéjols, D. Hartvigsen, W. Pulleyblank, Packing subgraphs in a graph, *Oper. Res. Lett.* 1, 139–143 (1982).

[12] E. Dahlhaus, The computation of the jump number of convex graphs, w: *ORDAL 1994*, LNCS 831, red. V. Bouchitté, M. Morvan, Springer, Heidelberg, 176–185 (1994).

[13] D. Duffus, I. Rival, P. Winkler, Minimizing setups for cycle-free ordered sets, *Proc. Amer. Math. Soc.* 85, 509–513 (1982).

[14] R. Duh, M. Fürer, Approximation of k-set cover by semi-local optimization, *Proc. STOC 1997*, 256–264 (1997).

[15] U. Faigle, R. Schrader, A setup heuristic for interval orders, *Oper. Res. Lett.* 4, 185–188 (1985).

[16] S. Felsner, A 3/2-approximation algorithm for the jump number of interval orders, *Order* 6, 325–334 (1990).

[17] S. Felsner, *Interval orders: combinatorial structure and algorithms*, rozprawa doktorska, Technische Universität Berlin, Fachbereich Mathematik, 1992.

[18] P.C Fishburn, *Interval orders and interval graphs. A study of partially ordered sets*, Wiley, New York (1985).

[19] F. Glover, M. Laguna, *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

[20] D.B. Hartvigsen, *Extensions of matching theory*, rozprawa doktorska, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, 1984.

[21] D. Kratsch, S. Kratsch, The jump number problem: exact and parameterized, LNCS 8246, Springer Verlag, 2013, 230–242.

[22] P. Krysztowiak, M.M. Sysło, An experimental study of approximation algorithms for the jump number problem on interval orders, *Discrete Appl. Math.*, w recenzji.

[23] P. Krysztowiak, An improved approximation ratio for the jump number problem on interval orders, *Theor. Comput. Sci.* 513 (2013), 77–84.

[24] P. Krysztowiak, Improved approximation algorithm for the jump number of interval orders, *Electron. Notes Discrete Math.* 40 (2013), 193–198.

[25] P. Krysztowiak, The database of interval orders difficult for the jump number minimizing algorithms, *Ann. UMCS Inf.*, 1 (2011) 15–22.

[26] P. Krysztowiak, `http://forever.studentlive.pl/HardIntervalOrders.aspx`, Dostęp: 16 kwietnia 2014 roku.

[27] P. Krysztowiak, M.M. Sysło, A tabu search approach to the jump number problem, *Algebra Discrete Math.* 18 (2014), No. 1 (w druku).

[28] J. Kuntzmann, A. Verdillon, *Recherche d'un ordre total minimal compatible avec un ordre partial donné*, Sém. Inst. de Math. de Grenoble, 1971.

[29] C. McCartin, An improved algorithm for the jump number problem, *Inform. Process. Lett.* 79, 87–92 (2001).

[30] Z. Michalewicz, *Genetic algorithms + data structures = evolution programs*, Springer, 1996.

[31] J. Mitas, Tackling the jump number of interval orders, *Order* 8, 115–132 (1991).

[32] R.H. Möhring, Computationally tractable classes of ordered sets, w: *Algorithms and Order*, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, red. I. Rival, 105–193 (1989).

[33] H. Müller, Alternating cycle-free matchings, *Order* 7, 11–21 (1990).

[34] W.R. Pulleyblank, On minimizing setups in precedence-constrained scheduling, Report No. 81185 – OR, artykuł niepublikowany, 1981.

[35] I. Rival, Optimal linear extensions by interchanging chains, *Proc. Am. Math. Soc.* 89 (1983), 387–394.

[36] G. Steiner, L.K. Stewart, A linear time algorithm to find the jump number of 2-dimensional bipartite orders, *Order* 3, 359–367 (1987).

[37] J.A. Soto, C. Telha, Jump number of two-directional orthogonal ray graphs, w: *IPCO 2011*, LNCS 6655, red. O. Günlük, G.J. Woeginger, Springer-Verlag, 389–403 (2011).

[38] M.M. Sysło, A graph-theoretic approach to the jump-number problem, w: *Graphs and Order* (D. Reidel, Dodrecht, 1985, red. I. Rival), 185–215.

[39] M.M. Sysło, Remarks on Dilworth partially ordered sets, *Proceedings WG '85*, Trauner Verlag, 355–362 (1985).

[40] M.M. Sysło, Minimizing the jump number for partially ordered sets: a graph-theoretic approach, *Order* 1, 7–19 (1984).

[41] M.M. Sysło, K.M. Koh, W.L. Chia, A characterization of bipartite Dilworth posets, w: *Proceedings of the International Conference on Optimization Techniques and Applications*, Singapore, 451–459 (1987).

[42] M.M. Sysło, Minimizing the jump number for partially-ordered sets: a graph-theoretic approach, II, *Discrete Mathematics* 63, 279–295 (1987).

[43] M.M. Sysło, An algorithm for solving the jump number problem, *Discrete Mathematics* 72, 337–346 (1988).

[44] M.M. Sysło, The jump number problem on interval orders: A 3/2 approximation algorithm, *Discrete Math.* 144, 119–130 (1995).

[45] M.M. Sysło, On some new types of greedy chains and greedy linear extensions of partially ordered sets, *Discrete Appl. Math.* 60, 349–358 (1995).