# Einbettungen von logarithmischen Morrey-Räumen

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades (Dr.rer.nat.) der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Igor Huft

aus

Nowoaltaisk

Bonn, 2008

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich–Wilhelm–Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr.Jens Frehse

2. Referent: Dr.habil. Wladimir Weigant

Tag der Promotion: 17.Juli.2008

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn unter http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Einleitung

## 1.1 Das Problem und seine Geschichte

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, die Implikation

$$\begin{aligned}\Big[\textstyle\int_{B_R}\varphi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \varphi(|u|)dx \le K\Big]\\ \Rightarrow\ \textstyle\int_\Omega \psi(|u|)dx \le K_1.\end{aligned} \tag{1.1}$$

für $\varphi = t^p \log(t+2)^\alpha$ betrachten. Hierbei sei $p \ge 1$ vorausgesetzt. Wir versuchen, optimales $\psi$ zu finden, für das (1.1) noch gilt (siehe Definition 1.7.)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Einbettungssätzen von Orlicz-Morrey-Räumen. Es geht um die Frage, welche Integrabilitätsaussagen man für eine Funktion $u$ erzielen kann, wenn die folgende sogenannte logarithmische Morrey-Bedingung im Orlicz-Raum $L_\varphi, \varphi = t^p \log(t+2)^\alpha, p \ge 1$ erfüllt ist:

$$\int_{B_R}\varphi(|\nabla u|)\,dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \quad \forall \text{Kugeln}\, B_R,\ R \le 1/2. \tag{1.2}$$

Hierbei ist $\int_\Omega \varphi(|u|)\,dx \le K$ vorausgesetzt.
Gesucht ist die optimale Funktion $\psi$, für die unter der Voraussetzung (1.2) noch die Integrabilitätsaussage

$$\int_\Omega \psi(u)\,dx < K_1 < \infty$$

gültig ist.
Diese Fragestellung ist für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen von großer Wichtigkeit.
Die Geschichte hierzu beginnt im Jahre 1940, als C.B.Morrey sein folgendes berühmtes Resultat bewies:
Eine Ungleichung der Gestalt

$$\int_{B_R}|\nabla u|^p dx \le KR^{n-p+p\alpha} \quad \forall\, R > 0 \tag{1.3}$$

für eine Funktion $u$ aus dem Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ zieht die Hölderstetigkeit der Funktion $u$ mit Hölderexponenten $\alpha$ nach sich, sofern in (1.3): $\alpha > 0$ gilt.

Äquivalent ist die Aussage: die Ungleichung

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \leq K R^{n-\lambda} \quad \forall\, R > 0 \tag{1.4}$$

für eine Funktion $u$ aus dem Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ zieht die Hölderstetigkeit der Funktion $u$ mit Hölderexponenten $\alpha = 1 - \lambda/p$ nach sich, falls $p > \lambda$ ist.

Das Supremum wird über alle Kugeln $B_R = B_R(x_0)$ genommen. Im Randnähe ist $B_R$ durch $B_R \cap \Omega$ zu ersetzen; von dem zugrunde liegenden Gebiet wird Lipschitzstetigkeit vorausgesetzt.

Dieses Resultat von Morrey wird als Morrey's Lemma bezeichnet und ist von großer Bedeutung für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen.

Das Morrey-Lemma wurde in verschiedenen Hinsichten ausgedehnt. Im Fall $p < \lambda$ in der Gleichung (1.4) erhielten Marcinkiewicz und Stampacchia [26], dass die Bedingung (1.4) die Inklusion

$$u \in L^q(\Omega) \quad \text{für} \quad \frac{1}{q} < \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda} \tag{1.5}$$

impliziert. Außerdem bleibt die Morrey-Bedingung für $u$ erhalten.[1] Später erhielt man die scharfe Abschätzung $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$ (Chiarenza Frasca).

Im Grenzfall $\lambda = p$ läßt sich aus (1.4) nicht schließen, dass $u$ stetig ist, stattdessen erhält man, dass $u$ in dem sogenannten Raum BMO liegt (BMO=bounded mean oscillation=beschränkte mittlere Oszillation). Dies besagt, dass

$$\sup_{B_R} |B_R|^{-1} \int_{B_R} |u(x) - \bar{u}_R|\, dx \leq K, \quad \bar{u}_R = |B_R|^{-1} \int_{B_R} u\, dx.$$

*Beweisskizze:* Sei $\int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx \leq K R^{n-p}$. Dann folgt aus der Ungleichung von Poincaré $\int_{B_R} |u(x) - \bar{u}_R|^p dx \leq C R^p \int_{B_R} |\nabla u|^p dx$, dass

$\left(\frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - \bar{u}_R|\, dx\right)^p \leq \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |u(x) - \bar{u}_R|^p\, dx \leq$

$C R^p \cdot \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx \leq C R^p \cdot \frac{K R^{n-p}}{|B_R|} = C_1.$ □

John und Nirenberg zeigten 1961 in [13], dass die Inklusion $u \in BMO \cap L^p$ die Ungleichung

$$\int_\Omega e^{\alpha u(x)} dx \leq K, \qquad \alpha = \frac{C(\Omega)}{\|u\|_{BMO}}, \qquad C(\Omega) > 0 \tag{1.6}$$

nach sich zieht.

[1] Wir meinen damit, dass $u \in$ Morrey-Raum $L_{q,\lambda}(\Omega)$ im Sinne der Definition auf Seite 15.

Für viele Anwendungen ist es von Bedeutung, (1.6) zu verbessern. Beispielsweise bewies Trudinger 1967 in [32], dass im Grenzfall $u \in W^{1,n}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in dem auch $u \in BMO$ gilt, die stärkere Ungleichung

$$\int_\Omega \exp(c|u|^q)dx \leq K, \quad q = \frac{n}{n-1} \tag{1.7}$$

gilt.

Für einfachste Fälle wurde sogar beste Konstanten gefunden. Zum Beispiel, es ist schon lange bekannt, dass $\forall\, u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 \leq p < n$ gilt es:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx\right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \tag{1.8}$$

In dieser Ungleichung hängt die Konstante $C$ von $p$ und $n$, aber nicht von $u$ ab.

Talenti hat beste Konstanten $C = C(p, n)$ für (1.8) berechnet [30], und zwar

$C(1, n) = \frac{[\Gamma(1+n/2)]^{1/n}}{\sqrt{\pi}\, n}$ und

$C(p, n) = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-1/p} \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p} \left(\frac{\Gamma(1+n/2)\,\Gamma(n)}{\Gamma(n/p)\,\Gamma(1+n-n/p)}\right)^{1/n}$ für $1 < p < n$.

Man kann bemerken, dass

$C(1, n) = O(n^{-1/2})$ und $C(p, n) = O(n^{1/2-1/p}) \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{1-1/p}$.

Das sind tatsächlich sehr gute Konstanten.

Die Hauptidee von Talenti war, Schwarzsche Symmetrisation anzuwenden (siehe Seite 15 in [15] oder Seite 35 von meiner Arbeit). Diese Operation benutzen wir ebenfalls recht häufig.

Wir wollen jetzt ein paar Worte über Orlicz-Raum sagen (siehe auch [24],[17] und [10].) Zunächst einige Definitionen:

**Definition 1.1 ($N$-Funktionen)** *Man sagt, dass $\varphi$ eine $N$-Funktion ist, wenn $\varphi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex, $\varphi(t) \neq 0\ \forall\, t \neq 0$ und $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$.*

**Bemerkung 1.1** *Sehr oft erweitert man den Definitionsbereich der $N$-Funktionen auf das ganze $\mathbb{R}$, indem man durch $f(-t) := f(t)\ \forall\, t \geq 0$ setzt.*

**Bemerkung 1.2** *Jede $N$-Funktion ist für $t > 0$ streng monoton wachsend.*

Sehr hilfreich ist auch folgende Äquivalenzrelation:

**Definition 1.2** *Seien $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ wachsend. $\varphi_1 \sim \varphi_2$ genau dann, wenn $\exists\, T, C, c > 0$ mit*

$$\forall\, t \geq T : \quad c\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t) \leq C\varphi_1(t).$$

Nun kann man das Problem dieser Arbeit folgendermaßen umformulieren:
Sei $\varphi \sim t^p \log(t+2)^\alpha$, außerdem ist $\varphi$ $N$-Funktion. Für welche $N$-Funktionen $\psi$ gilt die Implikation (1.1)?

Eine Antwort auf diese Frage liefert die Einbettungssätze in die Orlicz-Räume, wie wir später sehen.

**Definition 1.3 (Orlicz-Raum $L^*_\varphi(\Omega)$)** *Sei $\varphi$ eine $N$-Funktion. Dann*

$$L^*_\varphi(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \middle| \, \|u\|_{(\varphi)} := \inf \left\{ \lambda > 0 \,\middle|\, \int_\Omega \varphi\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1 \right\} < \infty \right\}. \tag{1.9}$$

Das ist eine Verallgemeinerung der $L^p$-Räume, $1 < p < \infty$, die vom polnischen Mathematiker M.W.Orlicz in [24] eingeführt wurde.

Man muss sagen, dass die ursprüngliche Definition von diesen Orlicz-Räumen, die von Orlicz stammt, sich von (1.9) unterscheidet. Um die eigentliche Definition des Orlicz-Raum zu schildern, müssen wir zuerst den Begriff der komplementären Funktionen einführen.

**Definition 1.4** *Sei $\varphi$ eine $N$-Funktion, $p(t) = \varphi'(t)$ (existiert f.ü. auf $[0;\infty)$), $q = p^{-1}$ sei die Inverse zu $p$.*

*Dann ist $\tilde{\varphi}(t) := \int_0^t q(\tau)\, d\tau$ die komplementäre Funktion für $\varphi$.*

**Bemerkung 1.3** *Hiermit ist $\tilde{\varphi}$ eine $N$-Funktion.*

oder

**Definition 1.5** *Sei $\varphi$ — $N$-Funktion.*
*Dann ist $\tilde{\varphi}(p) := \sup_{q \ge 0} pq - \varphi(q)$ die komplementäre Funktion von $\varphi$.*

Die beide Definitionen sind equivalent.

Nach diesen Vorbereitungen kann man die von Orlicz benutzte Definition zitieren:

**Definition 1.6 (Orlicz-Raum $L^*_\varphi(\Omega)$)** *Sei $\varphi$—$N$-Funktion, $\tilde{\varphi}$ ist komplementäre $N$-Funktion zu $\varphi$ und $\varrho(g) := \int_\Omega \tilde{\varphi}(|g(x)|)dx$. Dann*

$$L^*_\varphi(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \,\middle|\, \|u\|_\varphi := \sup_{\varrho(g) \le 1} \int_\Omega u(x)g(x)dx < \infty \right\}.$$

Noch Orlicz hat bemerkt, dass es eine besondere Klasse von $N$-Funktionen mit der
**Eigenschaft $\triangle_2$:** $\exists \boldsymbol{C, T} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\boldsymbol{\varphi(2t) \le C\varphi(t)}$ $\forall \boldsymbol{t \ge T}$
existiert, so dass die Orlicz-Klasse $L_\varphi(\Omega)$, also die Mengen

$$L_\varphi(\Omega) := \{u \in L^1(\Omega) \mid \int_\Omega \varphi(|u|)dx < \infty\},$$

mit Orlicz-Raum genau dann übereinstimmt, wenn $\varphi$ die Eigenschaft $\triangle_2$ hat. Im Buch von Krasnosel'skiĭ und Rutitskiĭ [17] kann man noch mehr Besonderheiten der Klasse $\{\triangle_2$-Funktionen$\}$ finden (z.B., dass Raum $L^*_\varphi(\Omega)$ genau dann separabel ist, wenn $\varphi$ die Eigenschaft $\triangle_2$ besitzt).

Leider wird nicht jeder Orlicz-Raum, den wir in dieser Arbeit bekommen, von $N$-Funktion mit Eigenschaft $\triangle_2$ generiert, und deswegen hat auch Formel (1.9) eine große Bedeutung.

Zum Schluß kehren wir zum Ziel unserer Arbeit (Implikation (1.1) ) zurück. Wir haben bisher vorausgesetzt, dass $\varphi$ und $\psi$ $N$-Funktionen sind, obwohl man kann leicht sehen kann, dass die Implikation (1.1) gültig bleibt, wenn wir $\varphi$ bzw. $\psi$ durch $\overline{\varphi} \sim \varphi$ bzw. $\overline{\psi} \sim \psi$ ersetzen. Die Relation "$\sim$" wird im Sinne von Definition 1.2 verstanden. Natürlich werden die Koeffizienten $K$ und $K_1$ dabei verändert.

Aber jetzt können wir voraussetzen, dass $\overline{\varphi}(t) = t^p \log(t+2)^\beta$. Außerdem ist es leichter, $\overline{\psi}(t) \sim \psi(t)$ statt der $N$-Funktion $\psi(t)$ zu berechnen.

## 1.2 Ein Überblick über Kapitel 4 bis 10

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit verschiedenen Verfeinerungen und Verallgemeinerungen der beschriebenen klassischen Einbettungssätze.

Die Dissertation besteht etwa aus drei Teile:

Teil 1. (Kapitel 4-7) enthält Verfeinerungen der Sätze von Marcinkiewicz–Stampacchia sowie John und Nirenberg im Fall von logarithmischen Störungen der Morrey-Bedingung (1.4), also die logarithmische Morrey-Bedingung

$$\forall\, R \le 1/2: \int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le \frac{K R^{n-\lambda}}{\left|\log \frac{1}{R}\right|^\vartheta} \tag{1.10}$$

(in der Arbeit wird immer $|\log R|$ statt $\left|\log \frac{1}{R}\right|$ geschrieben).

Zunächst behandeln wir den Fall $p = \lambda < n$. (Selbstverständlich $p \ge 1$). Wir zeigen: Falls $1 \le p = \lambda < n$, dann folgt die Inklusion

$$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le K \frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^p dx \le K\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{p}{p-\vartheta}}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta < p \\ \int_\Omega e^{e^{\alpha|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta = p \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \vartheta > p. \end{cases} \quad \text{und passende } \alpha > 0,\ K_1 > 0.$$

Bemerkung: das gilt auch für negative $\vartheta$.

(In Fall "$\vartheta \ge 0$" ist diese Inklusion durch den Satz 6.1 bewiesen, und "$\vartheta < 0$" ist ein Speziellfall des Satzes 8.4(b) mit $\phi(t) = t^p$, $p \ge 1$.)

In Anschluß wird der Grenzfall $p = n$ behandelt.

Wir erhalten dann superexponentielle Integrabilitätsrelationen

$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^n dx \le \frac{K}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^n dx \le K\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{\frac{n}{n-\vartheta-1}}} dx \le K_1 & \text{für } 0 \le \vartheta < n-1 \\ \int_\Omega e^{e^{\alpha|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \quad \vartheta = n-1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \quad \vartheta > n-1. \end{cases} \quad \text{und passende } \alpha > 0,\ K_1 > 0.$$

(Es ist nicht notwendig, den Fall “$\vartheta < 0$” zu betrachten, weil er äquivalent dem Fall “$\vartheta = 0$” ist.)

Diese Inklusion ist in Satz 6.2 bewiesen.

Schließlich wird noch ein schwierigerer Fall behandelt, nämlich die logarithmische Verfeinerung des Satzes von Stampacchia–Marcinkiewicz.
Unter der Bedingung

$$\forall\, R \le 1/2 : \int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le \frac{KR^{n-\lambda}}{\left|\log \frac{1}{R}\right|^\vartheta} \quad \text{für} \quad 1 \le p < \lambda \le n$$

ergibt sich im Vergleich zu dem alten Resultat (1.5) eine verbesserte Orlicz-Raum-Inklusion für die Funktion $u$, und zwar erhält man statt der Integrabilität von $|u|^q$ eine zusätzliche Information:
die Integrabilität von $|u|^q \log(|u|+2)^\beta$. Die genaue Aussage lautet:

Sei $1 \le p < \lambda \le n$. Dann

$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^p dx \le K\right]$

$$\Rightarrow \int_\Omega |u|^q [\log(|u|+2)]^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} dx \le K_1,$$

hier ist $q$ definiert durch $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$, $\quad \vartheta \in \mathbb{R}$ beliebig.

Das beweist man durch Satz 7.2 für “$\vartheta \ge 0$” und durch Satz 8.4(a) mit $\phi(t) = t^p$ für “$(\vartheta < 0,\ \lambda < n)$”.

Nur der Fall “$(\lambda = n,\ \vartheta < 0)$” ist noch nicht abgehandelt.
Für unsere Bedingungen ist dieser letzte Fall dem Fall “$(\lambda = n,\ \vartheta = 0)$” äquivalent, und man kann die letzte Inklusion einfach mit Sobolev-Satz vergleichen. Die ist für “$(\vartheta < 0,\ \lambda = n)$” sogar schwächer als der Sobolev-Satz.

Im zweiten Teil (Kapitel 8) werden die Resultate auf Orlicz-Räume verbreitet, und zwar behandeln wir, welche Abschätzungen aus “$\int_{B_R} \phi(|\nabla u|) dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}$”, $\phi(t) = t^p \log(t+2)^\alpha$ für die Funktion $u$ folgen. Diese Resultate lauten so:

a) Sei $1 < p = \lambda < n$. Dann

$\left[\int_{B_R} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta+\alpha<p \\ \int_\Omega e^{e^{\beta|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta+\alpha=p \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \vartheta+\alpha>p. \end{cases} \quad \text{und passende } \beta>0,\ K_1>0.$$

b) Sei $1 < p < \lambda < n$. Dann

$\left[\int_{B_R} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K\right]$

$\Rightarrow \int_\Omega |u|^q [\log(|u|+2)]^{q\kappa} dx \le K_1.$

Hier $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\vartheta}{\lambda} + \frac{\alpha}{p}$.

In Teil 3 (Kapitel 9 und 10) betrachten wir logarithmische Nikolski-Morrey-Räume mit bruchteiligen (fraktionellen) Ordnungen. Man hat das Resultat:

Sei $\alpha p < \lambda \le n$, $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\vartheta \in (-\infty,+\infty)$. Dann

$$\left[\begin{array}{c} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega\cap(\Omega-he_k)} \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \ \forall R \le 1/2, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall h>0 \\ \\ \text{und} \quad \int_{B_R(x_0)} |u|^p dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall R \le 1/2\, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \int_\Omega |u|^q [\log(|u|+2)]^{q\kappa} dx \le K_\varepsilon$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\alpha\vartheta}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}$
für jedes $\varepsilon > 0$.

Außerdem zeigen wir in der Arbeit, dass fast alle Resultate optimal sind. Die genauen Resultate und Definitionen befinden sich auch in der Zusammenfassung.

## 1.3 Definitionen und Bezeichnungen

Sei $G$—eine Menge. Dann

| | | |
|---|---|---|
| $\lvert G\rvert$ | — | $n$-dim. Maß von $G$, |
| $\lvert\partial G\rvert_F$ | — | $n-1$ -dim. Maß von $\partial G$, |
| $\operatorname{trg} G$ | — | Träger von $G$, |
| $int(G)$ | — | Interior von $G$, also die Menge von allen inneren Punkten von $G$, |
| $\int_\Gamma \ldots dS$ | — | Oberflächenintegral. |

Außerdem, sei $\Omega$– Definitionsgebiet von $f$.
Dann benutzen wir "$\int_{B_R} f\,dx$" als Abkürzung für "$\sup\limits_{x_0\in\mathbb{R}^n} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} f\,dx$".

**Definition 1.7 (Optimalität)** *Sei*

$$\left[\int_{B_R} \phi(|\nabla u|)\,dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \quad \forall R\le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \phi(|u|)\,dx \le K\right]$$
$$\Rightarrow \int_\Omega \psi(|u|)\,dx \le K_1. \tag{1.11}$$

*Dieses Resultat nennen wir "optimal", wenn*
*(1.11) gilt, die Inklusion (1.11) jedoch falsch wird, wenn wir* $\psi$ *durch* $\psi_1$ *mit* $\psi_1(t)=\psi(t\omega(t))$ *und* $\lim\limits_{t\to\infty}\omega(t)=\infty$ *ersetzen.*

*(1.11) wird also falsch bei* <u>*jeder*</u> *Auswahl von* $K>0$, $K_1>0$, *egal, wie langsam* $\omega$ *wächst*
*(z.B.* $\omega(t)=c\ln\ln(t+e)$ *ist auch zugelassen).*

**Definition 1.8 (Kegelbedingung)** *Sei* $\Omega$ *–ein offenes Gebiet. Dann erfüllt* $\Omega$ *die Kegelbedingung, wenn es eine endliche Anzahl der offenen Gebiete* $\Omega_1,\ldots,\Omega_s$ *mit* $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{s}\Omega_k$ *gibt, so dass für jedes* $\Omega_k$ *ein beschränkter Kegel* $C_k$ *existiert, mit* $\Omega=\bigcup\limits_{k=1}^{s}(\Omega_k+C_k)$.

*Unter beschränktem Kegel verstehen wir die Menge*
$C_k := \{tx|\,0\le t\le 1,\ x\in B_{r_k}(x_0^k)\}$.

**Bemerkung 1.4** *Diese Variante von Kegelbedingung nennt man schwache Kegelbedingung.*

**Dankbarsagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. J. Frehse bedanken für seine hervorragende Betreuung. Mein Dank geht ebenso an Herrn Dr. habil. W. Weigant und meine Kollegin Frau L. Khasina für Beratungen in Organisationsfragen.

# Kapitel 2

# Kurzer Abriss der Trudinger-Theorie

Zur besseren Einordnung meiner Resultate gehe ich kurz auf die Trudingersche Beweistechnik ein, welche sich von der Technik dieser Arbeit unterscheidet.

Sei $\Omega-$ beschränktes Gebiet mit Kegelbedingung (siehe Definition 1.8).

**Bemerkung 2.1** *Jedes beschränkte Lipschitzgebiet erfüllt die Kegelbedingung.*

In seiner Arbeit benutzt Trudinger die folgende Räume:
Morrey-Räume

$$L_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in L_p(\Omega) \,\middle|\, \|u\|_{L_{p,\lambda}} = \sup_{R>0, x_0 \in \mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{R^{n-\lambda}} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |u|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\},$$

Sobolev-Morrey-Räume

$$W^1_{p,\lambda}(\Omega) = \left\{ u \in W^1_p(\Omega) \,\middle|\, \|u\|_{W^1_{p,\lambda}} = \|u\|_{L_{p,\lambda}} + \|\nabla u\|_{L_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

und auch Orlicz-Räume

$$L^*_\phi(\Omega) = \left\{ u \in L_1(\Omega) \,\middle|\, \|u\|_{L^*_\phi(\Omega)} = \inf \left\{ K > 0 \,\middle|\, \int_\Omega \phi\left(\frac{|u(x)|}{K}\right) dx \leq 1 \right\} < \infty \right\}$$

für $N$-Funktionen $\phi$ (siehe Definition 1.1).

Trudinger beweist, dass:

1) $W^1_{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^*_\phi(\Omega)$ für $\phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$

(mit anderen Worten, $\left\{ \sup\limits_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u| + |u| \, dx \leq K R^{n-1} \; \forall R \right\} \Rightarrow \int_\Omega e^{\alpha|u|} dx \leq K_1$ für bestimmte $\alpha, K_1 > 0$).

Es ist leicht, die Einbettung $W^1_{p,p}(\Omega) \hookrightarrow W^1_{1,1}(\Omega) \, \forall p \geq 1$ zu beweisen.
So gilt $W^1_{p,p}(\Omega) \hookrightarrow L^*_\phi(\Omega)$ für $\phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$.

Das entspricht dem Satz 6.1 bei "$\vartheta = 0$" in meiner Arbeit.

2) $W_n^1(\Omega) \hookrightarrow L_\phi^*(\Omega)$ mit $\phi(t) = e^{|t|^{n/(n-1)}} - 1$

(mit anderen Worten, $\|u\|_{W_n^1(\Omega)} \le K \Rightarrow \int_\Omega e^{\alpha|u|^{n/(n-1)}} dx \le K_1$ für bestimmte $\alpha, K_1 > 0$).

Das entspricht dem Satz 6.2 bei "$\vartheta = 0$" in meiner Arbeit.

Trudinger verwendet das folgende Lemma:
wenn $\Omega$ die Kegelbedingung erfüllt, dann gilt

$$|u(x)| \le C(n,\Omega) \left\{ \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}} d\xi + \|u\|_{L_1(\Omega)} \right\} \text{ f.ü. in } \Omega. \tag{2.1}$$

Ferner sei $n \ge 2$.

In der Tat: Sei $x \in$ konvexes $\Gamma_x \subset \Omega$, $\operatorname{diam}(\Gamma_x) < C$, $|\Gamma_x| > c$.

Dann $|u(x)| \le \frac{1}{|\Gamma_x|} \Big( \int_{\Gamma_x} \overbrace{\int_0^1 \Big| \frac{d}{dt} u(x + t(\eta - x)) \Big| dt}^{\geqslant |u(\eta) - u(x)|} \, d\eta + \int_{\Gamma_x} |u(\eta)| \, d\eta \Big)$ f.ü. in $\Omega$.

Mit Substitution $\xi = x + t(\eta - x)$ haben wir:

$$d\eta = t^{-n} d\xi, \quad |\xi - x| \le t \operatorname{diam}(\Gamma_x) \le tC \ (\Rightarrow t \in [\frac{|\xi - x|}{C}; 1]\,)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u(x)| &\le \frac{1}{|\Gamma_x|} \Big( \int_{\Gamma_x} C |\nabla u(\xi)| \int_{t = \frac{|\xi - x|}{C}}^1 t^{-n} dt \, d\xi + \|u\|_{L_1(\Gamma_x)} \Big) \\ &\le C_1 \Big( \int_{\Gamma_x} \frac{|\nabla u(\xi)| d\xi}{|x - \xi|^{n-1}} + \|u\|_{L_1(\Gamma_x)} \Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt (2.1). Siehe auch [21, S. 26]. □

Natürlich setzt man in beiden nächsten Sätzen voraus, dass das Gebiet $\Omega$ beschränkt ist und die Kegelbedingung erfüllt.

**Theorem 1** $\|u\|_{L_\phi^*(\Omega)} \le C_1(n,\Omega) \|u\|_{W_{1,1}^1(\Omega)}$ *mit* $\phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$.

*Beweis:* Man muss zeigen, dass

$$\int_\Omega (e^{b|u|} - b|u| - 1) \, dx \le 1, \quad \text{wenn} \quad b = \frac{C}{\|u\|_{W_{1,1}^1}}. \tag{2.2}$$

Sei $K := \|u\|_{W_{1,1}^1}$, $d := \operatorname{diam}(\Omega)$.

Schätzen wir $\int_\Omega |f(x) u(x)| \, dx$ ab, wenn $\|f\|_p = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)u(x)| \, dx &\overset{(2.1)}{\le} C \left\{ \int_\Omega |f(x)| dx \left( \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}} d\xi + K \right) \right\} \\ &\le C \left\{ \left( \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1/q}} d\xi \, dx \right)^{1/q} \left( \int_\Omega |f|^p dx \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1-1/q}} d\xi \right)^{1/p} + K \int_\Omega |f| dx \right\} \\ &= C \left( I^{1/q} \cdot J^{1/p} + K \|f\|_1 \right). \end{aligned}$$

$$I=\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1/q}}d\xi\,dx = \underbrace{\int_\Omega |\nabla u(\xi)|\,d\xi}_{\le Cd^{n-1}\underbrace{\|u\|_{W^1_{1,1}(\Omega)}}_{=K}} \underbrace{\int_\Omega \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1/q}}}_{\le Cqd^{1/q}} \le CqKd^{n-1+1/q}.$$

Sei, weiter, $v_x(\rho) := \int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |\nabla u(\xi)|\,d\xi \le K\rho^{n-1}$. Wir berechnen:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|\,d\xi}{|x-\xi|^{n-1-1/q}} = \int_0^d \frac{v_x'(\rho)\,d\rho}{\rho^{n-1-1/q}} \overset{v_x(\rho)\le K\rho^{n-1}}{\le} Kd^{1/q} + (n-1-1/q)\underbrace{\int_0^d \frac{v_x(\rho)\,d\rho}{\rho^{n-1/q}}}_{\le qKd^{1/q}} \le$$

$q(n-1)Kd^{1/q}$. Wir sehen, dass

$J \le q(n-1)Kd^{1/q}$ (weil $\|f\|_p = 1$).

Dann $\int_\Omega |f(x)u(x)|\,dx \le C(\underbrace{I^{1/q}J^{1/p}}_{\le CKqd^{n/q}} + \underbrace{K\|f\|_1}_{\le CKd^{\frac{n}{q}}}) \le CK(q+1)d^{n/q} \le C_1Kqd^{n/q}$

$$\Rightarrow \|u\|_q \le C_1Kqd^{n/q}.$$

Nach dem Lemma von Fatou, $\int_\Omega e^{b|u|} - 1\,dx = \int_\Omega \lim_{\ell\to\infty}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{(b|u|)^j}{j!}dx \le$ $\lim_{\ell\to\infty}\int_\Omega \sum_{j=1}^{\ell}\frac{(b|u|)^j}{j!}dx = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b^j\int_\Omega |u|^j}{j!} \le d^n\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(bC_1Kj)^j}{j!} < \infty$, wenn $bC_1K < \frac{1}{e}$.

Damit ist Theorem 1 in Artikel [32] von Trudinger bewiesen. □

**Theorem 2** $W^1_n(\Omega) \hookrightarrow L^*_\phi(\Omega)$, *hier* $\phi(t) = e^{|t|^{n/(n-1)}}$.

*Beweis:* Sei $u \in W^1_n(\Omega)$, $\|f\|_p = 1$, $d = \operatorname{diam}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.
Schätzen wir $\int_\Omega |f(x)u(x)|\,dx$ ab.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)u(x)|\,dx &\le C\left\{\int_\Omega |f(x)|\,dx\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{n-1}}d\xi + \|u\|_{L_1(\Omega)}\right)\right\}\\ &\le C\left\{\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{n-1/q}}d\xi dx\right)^{1-\frac{1}{n}}\left(\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^n d\xi\int_\Omega \frac{|f(x)|\,dx}{|x-\xi|^{\frac{n-1}{q}}}\right)^{1/n} + \|u\|_1\|f\|_1\right\}\\ &= C\left(I^{1-1/n}J^{1/n} + \|u\|_1\|f\|_1\right).\end{aligned}$$

$$I = \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{n-1/q}}dxd\xi = \underbrace{\int_\Omega |f(x)|\,dx}_{\le Cd^{n/q}\|f\|_p}\underbrace{\int_\Omega \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-1/q}}}_{\le Cqd^{1/q}} \le Cqd^{(n+1)/q}\|f\|_p =$$

$Cqd^{(n+1)/q}$, weil $\|f\|_p = 1$. Weiter:

$\int_\Omega \frac{|f(x)|\,dx}{|x-\xi|^{\frac{n-1}{q}}} \le \left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega \frac{dx}{|x-\xi|^{n-1}}\right)^{1/q} = C\|f\|_p d^{1/q} = Cd^{1/q}$

$\Rightarrow J \le C\|u\|^n_{W^1_n} d^{1/q} = CK^n d^{1/q}$, hier $K := \|u\|_{W^1_n(\Omega)}$

$\Rightarrow \int_\Omega |f(x)u(x)|\,dx \le C(I^{1-1/n}J^{1/n} + \|u\|_1\|f\|_1) \le CK(q^{\frac{n-1}{n}}d^{n/q} + \underbrace{\|f\|_1}_{\le Cd^{\frac{n}{q}}}) \le$
$C_1 q^{\frac{n-1}{n}} d^{n/q}$.

$$\text{Folglich,} \quad \int_\Omega |u|^q dx \le C_1^q q^{\frac{n-1}{n}q} d^n. \tag{2.3}$$

Wie zuvor, verwenden wir hier das Lemma von Fatou:

$\int_\Omega e^{\mu|u|^{\frac{n}{n-1}}} - 1dx \le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}\mu^j \int_\Omega |u|^{\frac{n}{n-1}j}dx \overset{\substack{\text{siehe (2.3)} \\ q=\frac{n}{n-1}j}}{\le} d^n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(\mu C_2 j)^j < \infty,$

wenn $\mu C_2 < \frac{1}{e}$.

Damit ist Theorem 2 im Artikel [32] bewiesen. □

Für den Beweis der Sätze 6.1, 6.2 wird in dieser Arbeit eine ganz andere Methode verwendet. Insbesondere, wird die Methode der Symmetrisation verwendet.

Unsere Methode verläuft über Abschätzungen der Niveaumengen $\Omega_t := \{x \in \Omega | \, |u(x)| \ge t\}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und beruht auf der folgenden Überlegung.

Sind $p$, $n$, $\lambda$, $\vartheta$, $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, $K > 0$ schon bestimmt, und

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le K \quad \& \quad \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall\, R \le 1/2.$$

Sei jetzt $r(i) := c \cdot 2^{-i}$ bzw $c \cdot 2^{1-2^i}$ $\forall\, i \in \mathbb{N}_0$. Wir erreichen bei geeignetem asymptotischen Verhalten der $\lambda_i$ (etwa $\lambda_i \sim i^s$), dass

$$\left|\left\{x \in \Omega \middle| \, |u(x)| \ge \lambda_i\right\}\right| \le |B_{r(i)}|$$

und benutzen dann diese Information, um zu beweisen, dass für bestimmte $\psi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ gilt:

$$\int_\Omega \psi(|u(x)|)dx \le K_1 < \infty.$$

Wählt man z.B. die Daten so, dass $|\Omega| \le |B_1|$, $r(i) = 2^{-i}$, $\lambda_i \sim i^s$ $\forall\, i \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\int_\Omega e^{\alpha|u|^{1/s}}dx \le K \quad \text{für geeignete} \quad \alpha > 0,\ K > 0.$$

Wir diskutieren noch die Beziehung eines neueren Resultates von Jörg Wolf [33] zu unseren Ergebnissen. Es handelt sich um Satz A.1 aus [33, S. 262-265] über Campanato-Räume:

**Definition A.1** *Sei* $1 \leq p < \infty$. *Sei* $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *nichtfallend.*
*Campanato-Raum* $\mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega)$ *ist die Menge aller Funktionen* $u \in L^p(\Omega)$ *mit*

$$[u]^p_{\mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega)} := \sup_{\substack{0<r<\mathrm{diam}(\Omega)\\ x_0\in\Omega}} \left\{ \frac{1}{r^n(\omega(r))^p} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u(x) - u_{B_r(x_0)\cap\Omega}|^p dx \right\} < \infty$$

(wobei $u_{B_r(x_0)\cap\Omega} := \frac{1}{|B_r(x_0)\cap\Omega|} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} u\, dx$)

**Satz A.1** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *eine reguläre, offene und beschränkte Menge.*
*Sei* $p \in [1,\infty)$ *und sei* $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *nichtfallend mit*

$$\int_0^1 \frac{\omega(r)}{r} dr < \infty.$$

*Dann ist* $\mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega)$ *in* $C(\overline{\Omega})$ *stetig eingebettet.*

Wir erklären, welcher Zusammenhang zwischen dem Satz A.1 aus [33] und Satz 6.1, Kap. 6 der vorliegenden Arbeit besteht.

$$\text{Sei} \quad \omega(r) := \begin{cases} |\ln r|^{-\vartheta/p} & \text{für } 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ |\ln \frac{1}{2}|^{-\vartheta/p} & \text{für } r > \frac{1}{2} \end{cases}$$

(wir unterdrücken die Abhängigkeit der $\omega(r)$ von $\vartheta$ und $p$).

Man überlegt sich leicht, dass $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ erfüllt ist, wenn $\theta > p$ gilt.

In der Tat, $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt = \int_0^{1/2} \frac{|\ln t|^{-\vartheta/p}}{t} dt + \int_{1/2}^1 \frac{|\ln \frac{1}{2}|^{-\vartheta/p}}{t} dt = I + J,$

und $I = \int_0^{1/2} \frac{|\ln t|^{-\vartheta/p}}{t} dt \overset{y=-\ln t}{=} \int_{\ln 2}^\infty y^{-\vartheta/p} dy, \quad J < \infty \quad \forall\, \vartheta > p$

und wir sehen, dass $I + J < \infty$ bei $\vartheta > p$.

Also, $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$ bei $\vartheta > p$.

Die Einfachheit halber sei $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{diam}\,\Omega \leq \frac{1}{2}, \\ \partial\Omega \text{ ist regulär}\end{array}}$.Jetzt zeigen wir, dass aus den Satz A.1 folgt:

$$\left( \vartheta > p, \quad \exists K < \infty : \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx \leq K \frac{R^{n-p}}{|\ln R|^\vartheta}\ \forall\, R \leq \frac{1}{2} \right) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

Dafür ist es genug zu zeigen, dass

$$\left( \exists K < \infty : \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx \leq K \frac{R^{n-p}}{|\ln R|^\vartheta}\ \forall\, R \leq \frac{1}{2} \right) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega) \tag{2.5}$$

mit der oben definierte Funktion $\omega$. Satz A.1 in [33] ergibt dann $\mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, wenn $\vartheta > p$. Beweisen wir (2.5).

Sei jetzt $\tilde{u} = Eu$, hier ist $E$ ein Erweiterungsoperator, welcher $u$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzt; $E$ sei stetig bzgl. der zur Ungleichung (2.6) gehörigen Norm. Beweisen wir:

$$\left(\exists K < \infty : \int_{B_R(x_0)} |\nabla \tilde{u}|^p dx \leq K \frac{R^{n-p}}{|\ln R|^\vartheta} \, \forall R \leq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow u \in \mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega). \qquad (2.6)$$

In der Tat, nach Poincaré folgt (für $R \leq 1/2$):

$\int_{B_R(x_0)} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_{B_R(x_0)}|^p dx \leq CR^p \int_{B_R(x_0)} |\nabla \tilde{u}(x)|^p dx \leq C \frac{KR^n}{|\ln R|^\vartheta} =$
$CKR^n(\omega(R))^p$

$\Rightarrow \frac{1}{R^n \omega(R)^p} \int_{B_R(x_0)} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}_{B_R(x_0)}|^p dx \leq CK$, wenn $R \leq \operatorname{diam}(\Omega) \leq \frac{1}{2}$, $x_0 \in \Omega$

$\Rightarrow u \in \mathcal{L}^p_{(\omega)}(\Omega)$.

Wir erklären, woher die letzte Inklusion kommt.

$|u(x) - u_{B_r(x_0)\cap\Omega}|^p \leq C\left(|u(x) - \tilde{u}_{B_r(x_0)}|^p + |u_{B_r(x_0)\cap\Omega} - \tilde{u}_{B_r(x_0)}|^p\right) =$

$C\left(|u(x) - \tilde{u}_{B_r(x_0)}|^p + \left|\frac{1}{|B_r(x_0)\cap\Omega|} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} u(y) - \tilde{u}_{B_r(x_0)} \, dy\right|^p\right) \leq$

$C\left(|\tilde{u}(x) - \tilde{u}_{B_r(x_0)}|^p + \frac{1}{|B_r(x_0)\cap\Omega|} \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\tilde{u}(y) - \tilde{u}_{B_r(x_0)}|^p dy\right)$ für jedes $x \in B_r(x_0) \cap \Omega$,

weil in diesem Gebiet $\tilde{u}(x) = u(x)$. Zum Schluß substituieren wir diese Abschätzung in Definition von $[u]_{\mathcal{L}^p_{(\omega)}}$. $\square$

Daraus folgt (2.4). Die Implikation (2.4) folgt auch aus dem Satz 6.1, im Fall "$\vartheta > p$" der vorliegenden Arbeit.

Satz 6.2 der vorliegenden Arbeit gibt im Fall "$\vartheta > n - 1$" jedoch ein feineres Resultat, welches nicht in dem Satz A.1 aus [33] enthalten ist: wenn $p = n$, ist die gleichmäßige Stetigkeit schon bei $\vartheta > n - 1$ garantiert.

Im übrigen handelt Satz A.1 aus [33] von modifizierte BMO-Räume und ist methodisch deutlich verschieden von Satz 6.1 in meiner Arbeit.

# Kapitel 3

# Einige einfache Bemerkungen

In diesem Kapitel werden drei einfache Behauptungen gezeigt, die später eine große Rolle bei unseren Beweisen spielen werden. Besonders wichtig ist die Bemerkung 3.3, die erklärt, warum keine Einschränkungen ist vorauszusetzen, dass das Gebiet $\Omega$ in einem Würfel (für ein beliebiges, aber festes $d > 0$) enthalten: $\Omega \subset [0; d]^n$.

**Bemerkung 3.1** *Für jedes* $p \geq 1, \quad |A| < \infty$ :

$$\left| \int_A u \, dx \right|^p \leq |A|^{p-1} \int_A |u|^p dx. \tag{3.1}$$

**Beweis:** Nach der Jensen'schen Ungleichung (vgl. [6, S.621]) hat man

$$\left| \frac{1}{|A|} \int_A u \, dx \right|^p \leq \frac{1}{|A|} \int_A |u|^p \, dx \quad \forall \, p \geq 1.$$

Daraus folgt (3.1). □

Im Folgenden wird in den Ungleichungen "$\ldots \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}$" immer $R \leq 1/2$ angenommen.

Wir benutzen weiter bis Ende vom Kapitel 3 eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Folgende zwei Bemerkungen gelten offensichtlich für jede solche Funktion $\phi$:

**Bemerkung 3.2** *Wenn* $\Omega$ *beschränkt ist, dann hat man die folgende Implikation*

$$\left( \forall \, R \leq 1/2, \, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_R(y)} \phi(|\nabla u|) \, dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \right) \Rightarrow \int_\Omega \phi(|\nabla u|) \, dx \leq c_1 K. \tag{3.2}$$

*In diesem Kapitel ist* $\int_{B_R(y)}$ *Verkürzung für* $\int_{B_R(y) \cap \Omega}$.

**Beweis:** Wir überdecken $\Omega$ mit $B_{1/2}(y_1), \ldots, B_{1/2}(y_m)$.

Dann ist $\int_\Omega \phi(|\nabla u|) dx \leq \sum_{i=1}^m \underbrace{\int_{B_{1/2}(y_i)} \phi(|\nabla u|) dx}_{\leq cK} \leq mcK.$ □

**Bemerkung 3.3**

*Wenn* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega$*–beschränkt, dann* $\forall\, c > 0,\, C > 0:$

$$\begin{array}{ll} Aus & \text{“}\forall\, R \le 1/2 : \int_{B_{cR}(.)} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\text{”} \\ folgt: & \text{“}\forall\, R \le 1/2 : \int_{B_{CR}(.)} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K_1 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\text{”}. \end{array} \tag{3.3}$$

In der Tat, sei $R \le 1/2$. Mit $R = \frac{c}{C} R_1$ folgt

$$\int_{B_{CR}(.)} \phi(|\nabla u(x)|)dx \overset{R=\frac{c}{C}R_1}{=} \int_{B_{cR_1}(.)} \phi(|\nabla u(x)|)dx \le$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} K\frac{R_1^{n-\lambda}}{|\log R_1|^{\vartheta}} \overset{R_1<\sqrt{R}\le\frac{1}{\sqrt{2}}}{\le} K\frac{R_1^{n-\lambda}}{|\log\sqrt{R}|^{\vartheta}} & \text{, wenn } \vartheta \ge 0, & \overbrace{R_1 < c/C\,,}^{\Leftrightarrow R_1<\sqrt{\frac{c}{C}R_1}=\sqrt{R}} \quad R_1 \le \frac{1}{2} \\ K\frac{R_1^{n-\lambda}}{|\log R_1|^{\vartheta}} \overset{R^2<R_1\le\frac{1}{2}}{\le} K\frac{R_1^{n-\lambda}}{|\log(R^2)|^{\vartheta}} & \text{, wenn } \vartheta < 0, & \overbrace{R < C/c\,,}^{\Leftrightarrow R^2<\frac{C}{c}R=R_1} \quad R_1 \le \frac{1}{2} \\ c_1 K \quad \text{(wegen (3.2) )} & \text{sonst (in diesem Fall } \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ge const) & \end{array} \right\} \le$$

$K_1 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}$ bei passendem $K_1$. □

Wegen (3.3) können wir z.B. die Längeeinheit bei Abschätzung von $u$ mit

$$\int_{B_R(\cdot)} \phi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \quad \forall\, R \le 1/2$$

willkürlich wählen.

Das heißt, jedes beschränkte Gebiet liegt o.B.d.A. im $[0; d]^n$ für jede Konstante $d > 0$.

# Kapitel 4

# Der Erweiterungssatz

Für die in dieser Arbeit bewiesenen Einbettungssätze werden wir sehr oft einen Erweiterungsoperator benötigen. Die Existenz eines solchen Operator leider nicht a priori klar und muss für jeden Typ der Banach-Räume einzeln nachgewiesen werden.
In diesem Kapitel beweisen wir einen wichtigen Satz über die Existenz eines Erweiterungsoperators von logarithmischen Sobolev-Morrey-Raum, der mit der Banach-Norm

$$\left( \sup_{\substack{r \leqslant 1/2 \\ x_0 \in \mathbb{R}^n}} \frac{|\log r|^\vartheta}{r^{n-\lambda}} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

versehen ist.

**Satz 4.1**
*Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein beschränktes offenes Lipschitzgebiet,* $p \geq 1$.
*Dann gibt es* $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ *und einen linearen Erweiterungsoperator* $E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega')$, *so dass* $\Omega' \supset \Omega$, $Eu|_\Omega = u \ \forall u : \Omega \to \mathbb{R}$ *und*

$$\left(\forall R \leq 1/2 : \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx \ \leq \ K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \ \textit{und} \ \int_\Omega |u|^p dx \leq K \right) \Rightarrow$$

$$\forall R \leq 1/2 : \int_{B_R(x_0)} |\nabla Eu|^p dx \ \leq \ cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \textit{für eine Konstante } c = c(\Omega).$$

**Beweis:** Im Folgenden bezeichne "$lin\{\}$" die lineare Hülle.
Weil $\Omega$ ein Lipschitzgebiet ist, gibt es für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U(x)$ und eine orthonormale Basis $\{e_1, \dots, e_{n-1}, \nu\}$ mit folgender Eigenschaft:

Sei $P$ die orthogonale Projektion der $U(x)$ auf $lin\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$,
$W = P(U(x)) \quad (\Rightarrow W \subset lin\{e_1, \dots, e_{n-1}\})$.

Dann existiert eine Lipschitz-Funktion $\varphi : W \to \mathbb{R}$, so dass:

$$\begin{array}{rl} \text{wenn} & [\,(y,t) \in W \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y + t\nu \in U(x)\,], \\ \text{dann} & \left[ \begin{array}{rl} & y + t\nu \in \Omega \Leftrightarrow t < \varphi(y) \\ \text{und} & y + t\nu \in \partial\Omega \Leftrightarrow t = \varphi(y) \end{array} \right] \end{array}$$

Betrachten wir $\forall\, x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U^*(x) \subset\subset U(x)$.
Dann ist $\{U^*(x) | x \in \partial\Omega\}$ eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$.
Der Rand $\partial\Omega$ ist kompakt (weil $\Omega$ beschränkt und $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\complement\Omega}$ abgeschlossen ist).

Daher können wir aus der offenen Überdeckung $\{U^*(x) | x \in \partial\Omega\}$ von $\partial\Omega$ eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1^*, \ldots, U_k^*\}$ auswählen.

Für jedes $U_i^*$ gibt es:
eine Menge $U_i \supset\supset U_i^*$, eine Basis $\{e_1^i, \ldots, e_{n-1}^i, \nu^i\}$, $P_i =$ eine orthogonale Projektion von $U_i$ auf $lin\{e_1^i, \ldots, e_{n-1}^i\}$, $W_i := P_i(U_i)$, $\varphi_i : W_i \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-Funktion, für die

$$\begin{array}{rl} \text{wenn} & [\,(y,t) \in W_i \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y + t\nu^i \in U_i\,], \\ \text{dann} & \left[ \begin{array}{rl} & y + t\nu^i \in \Omega \Leftrightarrow t < \varphi_i(y) \\ \text{und} & y + t\nu^i \in \partial\Omega \Leftrightarrow t = \varphi_i(y) \end{array} \right]. \end{array} \tag{4.1}$$

Betrachten wir für $i \geq 1$ neben der Lipschitz-Funktion $\varphi_i$ die Funktion $\psi_i : W_i + \mathbb{R}\nu^i \to \mathbb{R}^n$ mit:

$$\psi_i(y + t\nu^i) := y + (2\varphi_i(y) - t)\nu^i \quad \forall\,(y,t) \in W_i \times \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Offensichtlich ist $\psi_i$ genauso wie $\varphi_i$ eine Lipschitz-Funktion, und es gilt:

$$\psi_i^{-1} = \psi_i \quad \text{wegen (4.2)},$$

$$\forall\, x \in \partial\Omega \cap U_i : \psi_i(x) = x. \tag{4.3}$$

In der Tat, wenn $[\,(y,t) \in W_i \times \mathbb{R}$ und $y + t\nu^i \in \partial\Omega \cap U_i\,]$, dann gilt wegen (4.1): $t = \varphi_i(y)$. Mit (4.2) folgt $\psi_i(y + \varphi_i(y)\nu^i) = y + \varphi_i(y)\nu^i$.

Sei jetzt $\Omega_i := U_i^* \cap \psi_i(U_i^*)$. Dann ist $\Omega_i \subset U_i^* \subset\subset U_i$, $\psi_i(\Omega_i) = \Omega_i$ und $\partial\Omega \cap \Omega_i = \partial\Omega \cap U_i^*$ wegen (4.3) und der Wahl von $\Omega_i$.

Deshalb ist $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_i$, weil $\partial\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i^*$ und auch

$\psi_i(\Omega_i - \Omega) = \Omega_i \cap \overline{\Omega}$ (weil $\psi_i(\Omega_i) = \Omega_i$, $\forall x \in \Omega_i : x \notin \Omega \overset{(4.1),(4.2)}{\Leftrightarrow} \psi_i(x) \in \overline{\Omega}$).

Sei weiter $\Omega_{-1} = \complement\overline{\Omega}$, $\Omega_0 := \Omega$. Dann ist $\{\Omega_i | -1 \leq i \leq k\}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von der Zerlegung der 1 gibt es eine Familie von Funktionen $\pi_{-1}, \pi_0, \ldots, \pi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, für die

$0 \leq \pi_i(.) \leq 1, \quad \operatorname{trg}(\pi_i) \subset \Omega_i$ und $\forall x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=-1}^{k} \pi_i(x) = 1.$

Dann ist $\forall\, x \in \overline{\Omega} : \pi_{-1}(x) = 0,$ darum $\forall\, x \in \overline{\Omega} : \sum_{i=0}^{k} \pi_i(x) = 1.$

Wir definieren $E$ folgendermaßen:

$$Eu(x) := \begin{cases} u(x), & \text{falls } x \in \overline{\Omega}, \\ \sum_{i=1}^{k} \pi_i(x) u(\psi_i(x)), & \text{falls } x \notin \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Somit ist $Eu(x)$ f.ü. auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

Wir wollen nun zeigen: Sei $E_j u(x) := \frac{d}{dx_j} Eu(x) \ \forall x \notin \partial\Omega,\ \forall j = 1, \ldots, n.$ Dann ist $E_j u$ tatsächlich die $j$-te schwache Ableitung vom $Eu$ auf $\mathbb{R}^n$, mit anderen Worten,
$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} Eu(x) D_j \phi(x) dx,$ wobei $D_j := \frac{d}{dx_j}.$

In der Tat:

$\int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x)\phi(x)\, dx = \int_\Omega D_j Eu(x)\phi(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} D_j Eu(x)\phi(x)\, dx = (*).$

Sei $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)\,)$ die äußere Normale von $\Omega$ in $x \in \partial\Omega$
($\eta(x)$ existiert f.ü. auf $\partial\Omega$).

Dann haben wir

$$\begin{aligned} \int_\Omega D_j Eu(x)\phi(x)dx &\overset{(4.4)}{=} \int_{\partial\Omega} u(x)\phi(x)\eta_j(x)dS - \int_\Omega Eu(x) D_j\phi(x)dx \\ \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n-\Omega} D_j Eu(x)\phi(x)dx &\overset{(4.4)}{=} \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{k} \pi_i(x)u(\psi_i(x))\phi(x)(-\eta_j(x))dS \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n-\Omega} Eu(x)D_j\phi(x)dx. \end{aligned}$$

Laut (4.2) wissen wir, dass $\forall x \in \Omega_i \cap \partial\Omega : \psi_i(x) = x,$
darum $\forall x \in \partial\Omega : \sum_{i=1}^{k} \pi_i(x)u(\psi_i(x)) = u(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x)\phi(x)\, dx = (*) &\overset{\text{s.o.}}{=} \int_{\partial\Omega} \overbrace{\Big(u(x) - \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} \pi_i(x)u(\psi_i(x))\Big)}^{=0} \phi(x)\eta_j(x)dS \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} Eu(x)D_j\phi(x)dx \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x)\phi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} Eu(x)D_j\phi(x)dx \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$

Also ist $E_j u$ tatsächlich die $j$-te schwache Ableitung vom $Eu$.

Um Satz 4.1 zu beweisen, genügt es zu zeigen: $\exists\, c_1 > 0,\, c_2 > 0$ mit:

$$\text{Sei} \quad \forall B_R(x_0) : \quad \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^p dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^p dx \leq K. \tag{4.5}$$

$$\text{Dann} \quad \forall B_R(x_0) : \quad \int_{B_{c_1 R}(x_0)} |\nabla Eu|^p dx \leq c_2 K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}. \tag{4.6}$$

(Wegen (3.3) spielt der Wert von $c_1 > 0$ keine Rolle.)

Wir zeigen nun die Implikation (4.5) $\Rightarrow$ (4.6): Sei die Bedingung (4.5) erfüllt. Wir zeigen,

$$c_2 K \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \textstyle\int_{B_{c_1 R}(\cdot)} |\nabla E u|^p dx = \int_{B_{c_1 R}(\cdot)-\Omega} |\nabla E u|^p dx + \underbrace{\int_{B_{c_1 R}(\cdot)\cap\Omega} |\nabla E u|^p dx}_{=\int_{B_{c_1 R}(\cdot)\cap\Omega} |\nabla u|^p dx.\ \text{gut.}} .$$

Wir müssen also nur beweisen, dass für passende $c$, $c_1 > 0$:

$$cK \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \textstyle\int_{B_{c_1 R}(\cdot)-\Omega} |\nabla E u|^p dx \overset{(4.4)}{=} \int_{B_{c_1 R}(\cdot)-\Omega} \left| \sum\limits_{i=1}^{k} \nabla_x (\pi_i(x)(u \circ \psi_i)(x)) \right|^p dx.$$

Also genügt es zu zeigen, dass

$$\forall i \geq 1: \quad cK \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \textstyle\int_{B_{c_1 R}(\cdot)-\Omega} |\nabla(\pi_i(x)(u \circ \psi_i)(x))|^p dx =$$
$$\textstyle\int_{B_{c_1 R}(\cdot)-\Omega} |(\nabla \pi_i(x))(u \circ \psi_i)(x) + \pi_i(x) \nabla (u \circ \psi_i)(x)|^p dx.$$

Aber $\forall i \geq 1$ gilt, dass $\pi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Somit sind $\pi_i(x), \nabla \pi_i(x)$ beschränkt. Außerdem ist $\operatorname{trg}(\pi_i) \subset \Omega_i$.
Darum müssen wir nur zeigen: $\exists\, c_1 > 0$ mit:

$$cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{B_{c_1 R}(\cdot)\cap(\Omega_i - \Omega)} |(u \circ \psi_i)(x)|^p + |\nabla (u \circ \psi_i)(x)|^p dx = (**). \quad (4.7)$$

Wir substituieren "$y = \psi_i(x)$" in $(**)$.
Aus (4.2) folgt: Für alle Gebiete $A \subset \Omega_i$ gilt: $|\psi_i(A)| = |A|$.
Darum haben wir (symbolisch) $dy = dx$ für $y = \psi_i(x)$.

$$\Rightarrow (**) \overset{\substack{y=\psi_i(x)\\ dy=dx}}{=} \int_{\psi_i(B_{c_1 R})\cap\Omega_i\cap\Omega} \overbrace{|u(y)|^p + |\nabla u(y) \nabla \psi_i(x)|^p}^{\text{existiert f.ü. in } \Omega_i\cap\Omega} dy. \quad (4.8)$$

Wir haben hier benutzt, dass $\psi_i(\Omega_i - \Omega) = \Omega_i \cap \overline{\Omega}$ und
$\nabla \psi_i$ existiert f.ü., da $\psi_i$ eine Lipschitz-Funktion ist.

Aus der Lipschitzstetigkeit der $\psi_i$ folgt auch:

$$\left.\begin{array}{rl} & |\nabla \psi_i(x)| \leq \frac{1}{c_1} \quad (\text{wo } \nabla \psi_i(x) \text{ existiert}) \\ \text{und} & \psi_i(B_{c_1 R}(x_0)) \subset B_R(\psi_i(x_0)). \end{array}\right\} \quad (4.9)$$

Wegen (4.7),(4.8),(4.9) müssen wir zum Beweis von Satz 4.1 nur noch zeigen:

$$cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{B_R(\cdot)\cap\Omega\cap\Omega_i} |u(y)|^p dy + \underbrace{\int_{B_R(\cdot)\cap\Omega\cap\Omega_i} |\nabla u(y)|^p dy}_{\text{gut}}.$$

Sei $T_R := B_R(x_0) \cap \Omega \cap \Omega_i$. Wir müssen also nur zeigen:

$$cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{T_R} |u(y)|^p dy.$$

Aber wir wissen (nach (4.1)):

$$\Omega \cap U_i = U_i \cap \{x + t\nu^i | \, x \in W_i,\, t < \varphi_i(x)\},$$

$\varphi_i$ ist Lipschitz-Funktion und $U_i \supset\supset \Omega_i$.

Dann gibt es einen beschränkten Kegel $\Gamma_i := \{tx| \, 0 \le t \le 1,\, x \in B_{r_i}(x_0^i)\}$ für ein $B_{r_i}(x_0^i)$, so dass $\forall x \in \Omega \cap \Omega_i : x + \Gamma_i \subset \Omega \cap U_i$.

Daraus und wegen der Setzung von $T_R$ folgt : $T_R + \Gamma_i \subset \Omega$ und $T_R \subset B_R(\cdot)$. Darum gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{T_R} |u(x+\gamma)|^p dx &= \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{T_R} dx \int_{\Gamma_i} |u(x+\gamma)|^p d\gamma \\
(T_R + \Gamma_i \subset \Omega) \quad &\le \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{T_R} dx \overbrace{\int_{\Omega} |u(y)|^p dy}^{\le K} \le \frac{|T_R|}{|\Gamma_i|}K \\
(T_R \subset B_R(\cdot)) \quad &\le \frac{|B_R|}{|\Gamma_i|}K = cKR^n,
\end{aligned}$$

weil $|B_R| = R^n |B_1|$. Somit folgt

$$\frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i} d\gamma \int_{T_R} |u(x+\gamma)|^p dx \le cKR^n.$$

Folglich,

$$\exists \gamma_0 \in \Gamma_i : \int_{T_R} |u(x+\gamma_0)|^p dx \le cKR^n. \tag{4.10}$$

$u(x) = u(x+\gamma_0) - \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt.$ Darum (für $\gamma_0$ aus (4.10) )[1]:

$$\begin{aligned}
\int_{T_R} |u(x)|^p dx &= \int_{T_R} \left| u(x+\gamma_0) - \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt \right|^p dx \\
&\le c\overbrace{\int_{T_R} |u(x+\gamma_0)|^p dx}^{\le cKR^n \; (wg.(4.10))} + c\int_{T_R} \left| \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt \right|^p dx \\
&\le cKR^n + c\int_{T_R} dx \int_0^1 \left| \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0) \right|^p dt \\
&= cKR^n + c\int_0^1 dt \int_{T_R} \overbrace{\left| \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0) \right|^p}^{\le |\gamma_0|^p |\nabla u(x+t\gamma_0)|^p} dx \\
(|\gamma_0| \le diam(\Omega)) \quad &\le cKR^n + c\int_0^1 dt \overbrace{\int_{\underbrace{T_R + t\gamma_0}_{\subset B_R(\cdot)}} |\nabla u(x)|^p dx}^{\le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}}
\end{aligned}$$

[1]Konstante $c$ dabei immer verändert.

$$\leq cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}.$$

Damit ist der Beweis von Satz 4.1 abgeschlossen. $\square$

# Kapitel 5

# Einige Definitionen und Lemmata

In diesem Kapitel führen wir drei neue Begriffe ein: Erstens betrachten wir auf dem Würfel $W = [0, R]^n$, $R > 0$ definierte Funktion $f : W \to \mathbb{R}$, $f \in H^{1,p}(W)$, $1 \le p < \infty$ und konstruieren eine *lineare Approximation,* für die wir auch einige Eigenschaften nachweisen. Zweitens beweisen wir Existenz einer speziellen Würfelüberdeckung eines beschränkten meßbaren Gebietes $G \subset [0, 1]^n$ mit $|G| < 1$. Schließlich beschäftigen wir mit dem Begriff der Schwarzschen Symmetrisation und beweisen eines wichtige für uns Lemma.

## 5.1 Stückweise lineare Approximation

**Definition 5.1** *(affines Simplex)*
*Sei* $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ *und* $\{\overrightarrow{x_0x_1}, \dots, \overrightarrow{x_0x_n}\}$ *linear unabhängig.*
*Die konvexe Hülle* $conv(x_0, \dots, x_n)$ *nennen wir "affines Simplex".*

Folgende Behauptung notieren wir ohne Beweis[1]:

**Behauptung 5.1** *Jeden Würfel* $W$ *kann man mit* $N(n)$ *(nicht notwendig kongruenten) n-dim affinen Simplexen* $T_1, \dots, T_{N(n)}$ *pflastern,*
*d.h.* $\bigcup T_i = W$ *und* $\forall\, i \ne j :\ T_i \cap T_j$ *entweder die leere Menge* $\emptyset$ *oder eine gemeinsame k-dim Fläche*[2] $T_{ij}$ *ist.*

Solche Pflasterung nennen wir $T^0(W)$.

Wir nehmen an, dass die Menge von Pflasterungen $\{T^0([0; R]^n) \,|\, R > 0\}$ so konstruiert ist: Wir machen nach Behauptung 5.1 die Pflasterung $T^0([0; 1]^n)$, und für alle $R > 0$ bekommen wir $T^0([0; R]^n)$ aus $T^0([0; 1]^n)$ durch Skalierung.

[1] Man kann sie für $N(n) = n!$ beweisen
[2] $k = 0, \dots, n-1$; 0-*dim.* Fläche ist Vertex, 1-*dim.* Fläche ist Kante u.s.w.

**Definition 5.2** *(von $T^i$ für $i \geq 1$)*
*Definieren wir die Pflasterung $T^{i+1}([0;2R]^n)$ durch die Pflasterung $T^i([0;R]^n)$. Sei $[0;R]^n$ durch $T^i([0;R]^n)$ gepflastert. Seien $x_1,\ldots,x_n$— Koordinaten von $x \in \mathbb{R}^n$ und $S_{(x_i=R)}(P)$ =Spiegelung vom $P$ bzgl. Hyperfläche $(x_i = R)$ (weiter sind $P_0,\ldots,P_n$ und $S_{(x_j=R)}P_k$ Mengen von affinen Simplexen).*
*Sei* $P_0 := T^i([0;R]^n)$, *und*

$$\begin{aligned} P_1 &:= P_0 \cup S_{(x_1=R)}(P_0) \\ P_2 &:= P_1 \cup S_{(x_2=R)}(P_1) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n &:= P_{n-1} \cup S_{(x_n=R)}(P_{n-1}) \end{aligned}$$

*Dann* $T^{i+1}([0;2R]) := P_n$.

Sei

$$Q_s := [0;s]^n, \quad Q := [0;1]^n \tag{5.1}$$

Man kann leicht sehen (wegen Behauptung 5.1 und Definition 5.2):
Wenn $T_1, T_2 \in T^i(Q_s)$ (also, $T_1, T_2$ sind affine Simplices aus $T^i(Q_s)$ ), dann ist $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ oder = gemeinsame *k-dim.* Fläche von $T_1$ und $T_2$.

**Definition 5.3** *(von $FT^{(i)}(Q_s)$, $FT(Q_s)$)*
*$FT^{(i)}(Q_s)$ ist Menge aller Funktionen $f : Q_s \to \mathbb{R}$, die stetig auf $Q_s$ und linear auf jedem affinen Simplex $\in T^i(Q_s)$ sind.*
*Und* $FT(Q_s) := \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} FT^{(i)}(Q_s)$.

**Definition 5.4** *(des Operators $\tau^{(i)}$)*
*Sei* $M_i := \{x \in Q_s | \, \exists T \in T^i(Q_s) : x \text{ ist Ecke vom } T\}$
*(Bemerkung: die Menge $M_i$ ist endlich.)*
*und sei $g \in C(Q_s)$. Dann* $\tau^{(i)}(g) := f \in FT^{(i)}(Q_s)$ *mit* $f(x) = g(x) \, \forall \, x \in M_i$.

Wir zeigen, dass dieser Operator $\tau^{(i)}$ tatsächlich existiert:

Konstruieren wir $f \in FT^{(i)}(Q_s)$, $f = \tau^{(i)}(g)$ so:
für jede $T \in T^i(Q_s)$, $T = conv(x_0,\ldots,x_n)$ existiert eine lineare Funktion $f_T : T \to \mathbb{R}$ mit $f_T(x_j) = g(x_j) \, \forall \, j \in \{0,\ldots,n\}$.

Sei $\widetilde{T}$ – *k-dim* Fläche vom $T$, $\widetilde{T} = conv(y_0,\ldots,y_k)$. Dann ist $f_T\Big|_{\widetilde{T}} : conv(y_0,\ldots,y_k) \to \mathbb{R}$ linear und darum eindeutig bestimmt durch $g(y_0),\ldots,g(y_k)$. Aber, wenn $\widetilde{T} := T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$, dann ist $\widetilde{T}$ gemeinsame *k-dim* Fläche von $T_1$ und $T_2$, folglich, $f_{T_1}(x) = f_{T_2}(x) \ \forall \, x \in \widetilde{T}$, darum ist die Funktion $f : Q_s \to \mathbb{R}$ mit: $f(x)\Big|_{x\in T} = f_T(x) \ \forall \, T \in T^i(Q_s)$ wohldefiniert, $f \in C(Q_s)$ und linear auf jedem $T \in T^i(Q_s)$ (also, $f \in FT^{(i)}(Q_s)$).

Bemerkung:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sei } g \in C_0^\infty(Q_s), \text{ dann konvergiert } |g - \tau^{(i)} g| \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ gleichmäßig,}\\ \text{sowie } |\nabla g - \nabla(\tau^{(i)} g)| \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ gleichmäßig.}\end{array}} \tag{5.2}$$

**Definition 5.5** *(für $FT_0(Q_s)$)*
$f \in FT_0(Q_s) \Leftrightarrow (f \in FT(Q_s)$ *und* $f(x) = 0 \, \forall x \in \partial Q_s)$.

Außerdem werden wir immer voraussetzen, dass $\forall\, x \notin Q_s : \; f(x) = 0$, wenn $f \in FT_0(Q_s)$.

**Lemma 5.1** *Sei* $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{trg} u \subset Q_s$ *und*

$$\forall\, B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^p dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}.$$

*Dann gibt es eine Folge* $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $f_i \in FT_0(Q_s)$ *so dass* $\forall i \in \mathbb{N}$ :

$$\forall\, B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla f_i|^p dx \le CK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \textit{und} \quad f_i \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \textit{in} \quad L^1(Q_s).$$

*Dabei ist jede Konstante* $C > 1$ *zulässig.*

**Beweis:** (hier steht $B_R(.)$ für $B_R(x_0)$).
Sei $\omega$ ein Standardkern, $\omega_h(x) := h^{-n}\omega(x/h)$.
Dann konvergiert $\omega_h * u \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} u$ in $L^1(Q_s)$. Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(.)} |\nabla(\omega_h * u)|^p \, dx &= \int_{B_R(.)} dx \Big| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) \nabla_x u(x-y) dy \Big|^p \\
(\omega - \text{Standardkern}) \quad &\le \int_{B_R(.)} dx \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) |\nabla_x u(x-y)|^p dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) dy \int_{B_R(.)} |\nabla u(x-y)|^p dx \\
(z = x - y) \quad &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(y) dy \overbrace{\int_{B_R(.)-y} |\nabla u(z)|^p dz}^{\le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}} \\
&\le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}.
\end{aligned}$$

Also,

$$\int_{B_R(.)} |\nabla(\omega_h * u)|^p \, dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}. \tag{5.3}$$

Weiter schließen wir,
$\operatorname{trg} u \subset\subset Q_s \Rightarrow \exists h_0 > 0 : \ \operatorname{trg}(\omega_h * u) \subset\subset Q_s \ \forall h < h_0$.

Sei $\lim\limits_{m\to\infty} \delta_m = 0, \quad \delta_m > 0$.
Aus (5.2) folgt: $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall h_m > 0 : \exists i_m \in \mathbb{N}$ mit:

$$\begin{array}{l} \|\tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u) - \omega_{h_m} * u\|_{L^1(Q_s)} < \delta_m \\ |\nabla\tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u) - \nabla(\omega_{h_m} * u)| < \delta_m \quad \text{punktweise.} \end{array} \tag{5.4}$$

Jetzt wählen wir $h_m > 0$ so, dass $\|u - \omega_{h_m} * u\|_{L^1(Q_s)} < \delta_m$ und für diese $h_m$ Indizes $i_m$ derart, dass (5.4) gilt.
Dann haben wir: $\|\tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u) - u\|_{L^1} < 2\delta_m$.
Darum gilt für $f_m := \tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u) :\quad f_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ in $L^1$, weil $\delta_m \to 0$.

Wenn nun $\max\limits_{m\in\mathbb{N}} \delta_m$ aus (5.4) klein genug und $R \leq \operatorname{Radius}(Q_s)$, folgert man:

$$\sqrt[p]{\int_{B_R(.)} |\nabla f_m|^p\, dx} = \sqrt[p]{\int_{B_R(.)} |\nabla \tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u)|^p\, dx} \leq$$

$$\sqrt[p]{\int_{B_R(.)} |\nabla \tau^{(i_m)}(\omega_{h_m} * u) - \nabla(\omega_{h_m} * u)|^p\, dx} + \sqrt[p]{\int_{B_R(.)} |\nabla(\omega_{h_m} * u)|^p\, dx} \overset{(5.4),(5.3)}{\leq}$$

$$\sqrt[p]{|B_1| R^n \max_m \delta_m^p} + \sqrt[p]{K\tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}} \leq \sqrt[p]{CK\tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}}$$

$$\Rightarrow \int_{B_R(.)} |\nabla f_m|^p\, dx \leq CK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}.$$

Hier kann man $C > 1$ beliebig wählen. □

**Lemma 5.2** *Seien* $\Omega, p, \lambda, \vartheta, s$ *vorgegeben,* $s > 0, \quad \psi \in C(\mathbb{R}_{\geq 0}; \mathbb{R}_{\geq 0})$. *Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$*, so dass*

*Wenn* $\forall f \in FT_0(Q_s)$ *folgende Inklusion erfüllt:*
$\left(\int_{B_R(x_0)} |\nabla|f||^p\, dx \leq cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall R \leq 1/2\right) \Rightarrow \int_{Q_s} \psi(|f(x)|)dx \leq K_1,$
*dann gilt* $\forall u \in W^{1,p}(\Omega) :$
$\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^p\, dx \leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall R \leq 1/2 \ \ \&\ \ \int_\Omega |u|^p\, dx \leq K\right) \Rightarrow$
$\int_\Omega \psi(|u|)dx \leq K_1.$

**Beweis:** Sei $\|u\|_p^p \leq K, \quad \int_{B_R(.)\cap\Omega} |\nabla u|^p\, dx \leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}$.
Nach Erweiterungssatz (Satz 4.1), o.B.d.A. $u \in W_0^{1,p}(\Omega')$ mit $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$; ferner haben wir auf die Seite 3.3 gezeigt, dass o.B.d.A. $\Omega' \subset\subset Q_s$.

Wir setzen im Weiteren also voraus: $u(x) = 0\ \forall x \notin \Omega$
($\Rightarrow u \in W_0^{1,p}(Q_s), \quad \operatorname{trg} u \subset\subset Q_s$). Nach Lemma 5.1, $\exists\, (f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall i : f_i \in FT_0(Q_s), \quad f_i \to u \ \text{ in } \ L^1(Q_s), \quad \int_{B_R(.)} |\nabla f_i|^p\, dx \leq cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}. \tag{5.5}$$

Man kann leicht sehen: wenn $f_i$ stückweise linear, dann

$$|\nabla|f_i(x)|| = |\nabla f_i(x)| \text{ f.ü. .}$$

Darum $\forall\, i : \int_{B_R(.)} |\nabla|f_i||^p\, dx = \int_{B_R(.)} |\nabla f_i|^p\, dx \overset{(5.5)}{\leq} cK \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}$.

Daraus folgt, nach der Voraussetzung unseres Lemmas:

$$\forall i : \int_{Q_s} \psi(|f_i|)dx \leq K_1. \tag{5.6}$$

Weil $f_i \to u$ in $L^1(Q_s)$, existiert eine Folge $(i_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $f_{i_m} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ f.ü. .

Folglich, $\psi(|f_{i_m}(x)|) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \psi(|u(x)|)$ f.ü. (da $\psi$ stetig).
Da $\psi \geq 0$, können wir das Lemma von Fatou anwenden:

$$\int_{Q_s} \psi(|u|)dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_{Q_s} \psi(|f_{i_m}|)dx \overset{(5.6)}{\leq} K_1.$$

$\square$

## 5.2 Überdeckung mit Würfeln

Sehr oft brauchen wir solche Behauptung:

**Lemma 5.3** *Sei* $Q = [0;1]^n, \quad G \subset Q, \quad |G| \le c_1 \quad (0 < c_1 < 1$ *beliebig*$)$. *Dann kann man* $int(G)$ *mit einer Menge* $\Lambda$ *von Würfeln überdecken derart, dass*

$$\begin{aligned} \forall\, W \in \Lambda : \quad 2^{-n} c_1 |W| \quad &\le \quad |G \cap W| \le c_1 |W|, \\ \forall\, W_1, W_2 \in \Lambda,\ W_1 \ne W_2 \quad &: \quad |W_1 \cap W_2| = 0 \end{aligned}$$

*und jede Kante von* $W \in \Lambda$ *parallel zur eine Koordinatenachse.*

**Beweis:** Betrachten wir solche Prozesse: in jedem Schritt wird $Q$ mit "weißen" und "schwarzen" Würfeln gepflastert. Wir nennen Würfel $W$ "weiß", wenn $|G \cap W| \ge 2^{-n} c_1 |W|$ und $W$ ist "schwarz", wenn $|G \cap W| < 2^{-n} c_1 |W|$.

Wir möchten solche Prozesse rekursiv konstruieren, so dass:

1. in jedem Schritt wird $Q$ mit schwarzen und weißen Würfeln gepflastert.
2. $\forall$ weiße $W$ : $\quad |G \cap W| \le c_1 |W|$
   (für schwarze $W$ sogar $|G \cap W| < 2^{-n} c_1 |W|$ nach Definition).
3. $\forall$ schwarze $W$ vom Schritt $i$: die Kantenlänge vom $W$ beträgt $2^{-i}$.

(diese Bedingungen betrachten wir als Induktionsvoraussetzungen)

Schritt 0: $\quad Q$ ist durch $\{Q\}$ gepflastert, dabei gilt $|G \cap Q| \le c_1 = c_1 |Q|$ nach Bedingung vom Lemma, und Kantenlänge vom $Q = 1 = 2^{-0}$. Die Induktionsvoraussetzungen gelten, daher egal, ob $Q$ weiß oder schwarz ist.

Schritt $i \rightsquigarrow i+1$: alle weiße Würfel vom Schritt $i$ kommen in den Schritt $i+1$ (darum gilt die $2^{\text{te}}$ Induktionsvoraussetzung für diese Würfel auch im Schritt $i+1$).

Sei $W$ schwarz. Dann ist Kantenlänge von $W = 2^{-i}$ (nach den Induktionsvoraussetzungen). Teilen wir $W$ im Schritt $i+1$ in Würfel $W_1, \dots, W_{2^n}$, jedes $W_k$ hat die Kantenlänge $2^{-i-1}$. Da $W$ schwarz, $|G \cap W| < 2^{-n} c_1 |W|$ (nach Definition)$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, 2^n\} : \ |G \cap W_k| \le |G \cap W| < 2^{-n} c_1 |W| = c_1 |W_k|$.
Außerdem ist die Kantenlänge von $W_k = 2^{-i-1}$.

Für jedes $k$ gelten alle Induktionsvoraussetzungen für $W_k$, egal, ob $W_k$ weiß oder schwarz ist. $\square$(von des Induktionsprozesse)

Sei $\Lambda$–Menge aller weißen Würfeln, die bei dieser Prozesse entstehen. Offensichtlich, $\forall\, W_1, W_2 \in \Lambda : \ |W_1 \cap W_2| = 0$, wenn $W_1 \ne W_2$ (weil $\exists\, i \in \mathbb{N} : W_1$ und $W_2 \in$ Schritt $i$).

Außerdem klar, dass $\forall\, W \in \Lambda : \ 2^{-n} c_1 |W| \le |G \cap W| \le c_1 |W|$ (da $W$ weiß).

Zeigen wir: $\bigcup\limits_{W \in \Lambda} W \supset int(G)$.

Angenommen, es ist nicht so. Dann $\exists x \in int(G)$, welches sich bei jedem Schritt $i$ in einem schwarzen Würfel $W_i$ befindet. Die Kantenlänge von $W_i$ ist $2^{-i}$.

Aber da $x \in int(G)$, gibt es ein $i$, so dass $W_i \subset G$,
denn $x \in$ Würfel $W_i$ und Kantenlänge von $W_i = 2^{-i}$.
Damit hat man $|W_i \cap G| = |W_i|$.

Aber, wenn $W_i$ schwarz ist, folgt $|W_i \cap G| < 2^{-n} c_1 |W_i| \overset{c_1<1}{<} |W_i|$.

Widerspruch. □

## 5.3 Symmetrisation

Wir verwenden die Abkürzungen "$(f(.) > t)$" oder "$(f > t)$" für "$\{x|\, f(x) > t\}$".

Weiter arbeiten wir mit Schwarzsche Symmetrisation (vgl. [15, S.15-16]), die wir einfach als "Symmetrisation" nennen. Wir erklären, worum es sich handelte.

Wir betrachten die meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Sei[3]

$$\begin{cases} B(t) \text{ ein } n\text{-dim Ball mit Mittelpunkt in 0 und } |B(t)| = |(f(\cdot) \geq t)|, & \text{wenn } (f(\cdot) \geq t) \neq \emptyset, \\ B(t) = \emptyset, & \text{wenn } (f(\cdot) \geq t) = \emptyset. \end{cases}$$

(Schwarzsche) Symmetrisation von $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ist die Funktion
$g : B_R(0) \to \mathbb{R}$ mit $|B_R| = |\Omega|$ und

$$g(y) := \sup\{t \in \mathbb{R} \,|\, y \in B(t)\}.$$

Für uns sind zwei bekannte Eigenschaften der (Schwarzsche) Symmetrisation wichtig: erstens, man kann $g$ mit Hilfe eine Funktion $\varphi : [0; R] \to \mathbb{R}$ mit

$$g : x \mapsto \varphi(|x|); \quad \varphi \text{ fallend} \tag{5.7}$$

darstellen,
und zweitens,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} : \quad |(f(.) > t)| = |(g(.) > t)|. \tag{5.8}$$

In der Tat, aus [15, S.21,(E)] folgt, dass $|(f(.) \geq t)| = |(g(.) \geq t)|$. Deswegen $|(f(\cdot) > t)| = \sup_{\delta>0} |(f(\cdot) \geq t + \delta)| = \sup_{\delta>0} |(g(\cdot) \geq t + \delta)| = |(g(\cdot) > t)|$.

[3] $|(f(.) > t)|$ ist Volumen für $\{x|f(x) > t\}$

**Lemma 5.4** *Sei* $f : W \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *stetig mit einem n-dim Würfel* $W$, $f \geq 0$. *Der Träger* $\operatorname{trg} f$ *von* $f$ *sei mit konvexen Polyedern* $P_1, \dots, P_k$ *gepflastert, auf jedem* $P_i$ *sei* $f$ *linear.*
*Es gelte* $|\operatorname{trg} f| \leq c_1 |W|$ *(mit der Konstanten* $c_1$ *aus Lemma A.1).*
*Weiter, sei* $g : B_R(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *Symmetrisation vom* $f$, $|B_R| = |W|$.
*Dann gilt*
1. $g$ *ist stetig.*
2. $\int_{B_R(0)} |\nabla g|^p \, dx \leq \frac{1}{c_2^p} \int_W |\nabla f|^p \, dx, \quad p \geq 1$

*mit der Konstanten* $c_2$ *aus Lemma A.1.*

**Beweis:** von 1.: $g$ ist stetig.
In der Tat:
Sei $f(W) = [0; T]$. Dann ist $g(B_R(0)) \subseteq [0; T]$.
Außerdem ist $g(x) = \varphi(|x|)$ für eine fallende Funktion $\varphi : [0; R] \to [0; T]$.

Annahme: $g$ ist nicht stetig.
Dann ist $\varphi$ nicht stetig.
Dann[4]

$$\exists\, t, a, b \text{ mit: } \varphi(t+0) \leq a < b \leq \varphi(t-0).$$

Das heißt[4], $|(a < g(.) \leq b)| = 0$. Außerdem $[a; b] \subset [0; T] = f(W)$

$$\Rightarrow (a < f < b) \quad \text{offen in } W \text{ und nicht leer.}$$

Folglich, $|(a < f(.) < b)| > 0$.
Dann

$$\begin{aligned}
0 &= |(a < g(.) \leq b)| = |(g > a)| - |(g > b)| \\
&\overset{(5.8)}{=} |(f > a)| - |(f > b)| = |(a < f(.) \leq b)| \\
&\geq |(a < f < b)| \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Widerspruch. □

Beweis von 2.: $\int_{B_R(0)} |\nabla g|^p \, dx \leq \frac{1}{c_2^p} \int_W |\nabla f|^p \, dx$.
Sei

$$\psi_d(t) := \int_{f(x) \leq t} |\nabla f|^d dx, \quad d \geq 0 \tag{5.9}$$

Dann ist $\psi_d(.)$ wachsend ($\Rightarrow \psi_d'$ existiert f.ü.).

Außerdem ist $\psi_p(.)$ stetig, wenn $p \geq 1$. In der Tat:

$$\forall\, t : \psi_p(t+0) - \psi_p(t-0) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{t-\varepsilon < f(x) \leq t+\varepsilon} |\nabla f|^p dx$$

[4] da $\varphi$ fallend

$$
\begin{aligned}
&= \int_{f(x)=t} |\nabla f(x)|^p dx \\
&= \sum_i \underbrace{|(f(x)=t)\cap P_i|}_{=0 \text{ bei } \nabla f(x\in P_i)\neq 0} |\nabla f(x\in P_i)|^p \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

weil $\nabla f = const$ auf $P_i \,\forall\, i$ und $p \geq 1$.

Somit ist $\psi_p$ wachsend und stetig, wenn $p \geq 1$.
Deshalb ist $\psi_p' = \frac{d}{dt}\psi_p(t)$ definiert f.ü. und

$$
\int_W |\nabla f|^p \, dx = \psi_p(T) = \int_0^T \psi_p'(t)dt + \overbrace{\psi_p(0)}^{=0} = \int_0^T \psi_p'(t)dt, \quad \text{wenn} \quad p \geq 1.
$$

Sei $d \geq 0$. In jedem Punkt $t$, wo $\psi_d'(t)$ existiert (also f.ü. auf $[0;T]$ ):

$$
\begin{aligned}
\psi_d'(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi_d(t+\varepsilon)-\psi_d(t)}{\varepsilon} \\
&\overset{(5.9)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t<f(x)\leq t+\varepsilon} |\nabla f|^d dx \\
&= \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{(t<f(x)\leqslant t+\varepsilon)\cap P_i} |\nabla f|^d dx \\
(|\nabla f| = const \text{ auf } P_i) \quad &= \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(t<f(.)\leqslant t+\varepsilon)\cap P_i|}{\varepsilon} |\nabla f(x\in P_i)|^d.
\end{aligned}
$$

Somit

$$
\psi_d'(t) = \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(t<f(.)\leq t+\varepsilon)\cap P_i|}{\varepsilon} |\nabla f(x\in P_i)|^d. \tag{5.10}
$$

Seien $|\ldots|_F$–Flächeninhalt (wie in Lemma A.1) und

$$
\Gamma_t := (f(.)=t)
$$

Dann kann man leicht sehen, dass für fast alle $t \in [0;T]$ gilt:

a) $\Gamma_t$ ist eine $n-1$-*dim* Mannigfaltigkeit und $|\Gamma_t|_F = \sum_i |\Gamma_t \cap P_i|_F$.

b) bei genügend kleinem $\varepsilon$ : $(t < f(.) \leq t+\varepsilon)\cap P_i$ hat entweder die “Dicke” $\frac{\varepsilon}{|\nabla f(x\in P_i)|}$ oder $= \emptyset$ (da $f|_{P_i}$ linear).

Daher

$$
|(t<f(.)\leq t+\varepsilon)\cap P_i| = |\Gamma_t \cap P_i|_F \cdot \frac{\varepsilon}{|\nabla f(x\in P_i)|} + o(\varepsilon) \quad \text{für fast alle } t\in[0;T].
$$

Für solches $t$:

$$\begin{aligned}
\psi'_d(t) &\overset{(5.10)}{=} \sum_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(t < f(.) \leqslant t+\varepsilon) \cap P_i|}{\varepsilon} |\nabla f(x \in P_i)|^d \\
&= \sum_{i=1}^{k} |\Gamma_t \cap P_i|_F \cdot |\nabla f(x \in P_i)|^{d-1} \\
&= \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{d-1} dS
\end{aligned}$$

Also,

$$\psi'_d(t) = \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{d-1} dS \qquad \forall\, d \geq 0 \tag{5.11}$$

$$\Rightarrow \int_W |\nabla f|^p\, dx \overset{(5.9)}{=} \int_0^T \psi'_p(t) dt \overset{(5.11)}{=} \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{p-1} dS, \quad \text{wenn } \ p \geq 1 \tag{5.12}$$

Sei jetzt $\;d = 0$. Dann $\;\psi'_0(t) \overset{(5.9)}{=} \frac{d}{dt}\left(\int_{f(x)\leq t} 1dx\right)$, und

$$\int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS \overset{(5.11)}{=} \psi'_0(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t<f(x)\leq t+\varepsilon} 1dx. \tag{5.13}$$

$$\text{Sei} \quad G_t := \partial(g(.) > t) \tag{5.14}$$

Auch für die Symmetrisation $g$ von $\;f$, $\;g : B_R(0) \to \mathbb{R}\;$ gilt:

$$\int_{B_R(0)} |\nabla g|^p dx = \int_0^T dt \int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS \tag{5.15}$$

In der Tat, $\;\exists \varphi : [0; R] \to \mathbb{R}\;$ mit $\;g(x) = \varphi(|x|)$.

Dabei ist $\;\varphi\;$ fallend und stetig $\Rightarrow \varphi'$ existiert f.ü. auf [0;T].

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} |\nabla g|^p dx &= |S_1^{n-1}| \int_0^R |\varphi'(r)|^p r^{n-1} dr \\
&\overset{\varphi \text{ fallend}}{=} \int_{\varphi=0}^{T} |\varphi'(r)|^{p-1} |S_r^{n-1}| \overbrace{d\varphi}^{\varphi' dr} = (*)
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\;\varphi(r) = t$. Falls $\;\varphi'(r) \neq 0\;$ (das gilt für fast alle $t$), hat man

$$G_t \overset{(5.14)}{=} (g(.) = t) = S_r^{n-1}, \quad |\nabla g(x)|_{x\in G_t} \equiv |\varphi'(r)|.$$

$$\Rightarrow \int_{B_R(0)} |\nabla g|^p dt = (*) \overset{\varphi(r)=t}{=} \int_{t=0}^{T} \underbrace{|\varphi'(r)|^{p-1} |G_t|_F}_{=\int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS} dt = \int_{t=0}^{T} dt \int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS.$$

Weiterhin gilt: wenn $\nabla g$ existiert und $\neq 0$ auf $G_t$ (da $|\nabla g| = const$ auf $G_t$):

$$\begin{aligned}
\int_{G_t} |\nabla g|^{-1} dS &\overset{t=\varphi(r)}{=} |\varphi'(r)|^{-1} |G_t|_F \\
&= \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\varphi(r)=t}^{t+\varepsilon} |G_{\varphi(r)}|_F \, dr \right| \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(t < g(.) \leqslant t+\varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(g > t)| - |(g > t+\varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&\overset{(5.8)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(f > t)| - |(f > t+\varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(t < f(.) \leqslant t+\varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&\overset{(5.13)}{=} \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS.
\end{aligned}$$

Somit

$$\int_{G_t} |\nabla g|^{-1} dS = \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS \qquad \text{für fast alle } t \in [0;T]. \tag{5.16}$$

Sei

$$\mu(x) := |\nabla f(x)|^{-1}. \tag{5.17}$$

Daraus folgt

$$\int_W |\nabla f|^p dx \overset{(5.12)}{=} \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{p-1} dS = \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \mu(x)^{1-p} dS = (**).$$

Weiter, für $p \geq 1: \quad 1-p \leq 0 \Rightarrow t^{1-p}$ konvex für $t > 0$.
Für konvexe $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda \phi(v) dt \geq \phi\left(\frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda v \, dt\right)$.[5]

Daher gilt für fast alle $t \in [0;T]$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{\Gamma_t} \mu(x)^{1-p} \, dS &\overset{t^{1-p} \text{ konvex}}{\geq} \left( \frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{\Gamma_t} \mu(x) \, dS \right)^{1-p} \\
&\overset{(5.16),(5.17)}{=} \left( \frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{G_t} |\nabla g|^{-1} \, dS \right)^{1-p} \\
(|\nabla g| = const \text{ auf } G_t) \qquad &= \left( \frac{|G_t|_F}{|\Gamma_t|_F} |\nabla g(x \in G_t)|^{-1} \right)^{1-p} \\
&= \frac{|\Gamma_t|_F^{p-1}}{|G_t|_F^{p-1}} |\nabla g(x \in G_t)|^{p-1}
\end{aligned}$$

[5] Ungleichung von Jensen (siehe z.B. [6, Seite 621])

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_t} \mu(x)^{1-p} dS \geq \frac{|\Gamma_t|_F^p}{|G_t|^{p-1}} |\nabla g(x \in G_t)|^{p-1} = \left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F}\right)^p \int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_W |\nabla f|^p dx &= (**) = \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \mu(x)^{1-p} dS \\
&\overset{(5.18)}{\geq} \int_0^T dt \left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F}\right)^p \int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS \\
&\geq \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0;T]} \left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F}\right)^p \int_0^T dx \int_{G_t} |\nabla g|^{p-1} dS \\
&\overset{(5.15)}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0;T]} \left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F}\right)^p \int_{B_R(0)} |\nabla g|^p dx.
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_W |\nabla f|^p dx \geq \operatorname*{ess\,inf}_{t \in [0;T]} \left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F}\right)^p \int_{B_R(0)} |\nabla g|^p dx. \tag{5.19}$$

$$\text{Sei jetzt} \quad F_t := \partial(f > t). \tag{5.20}$$

Zum Beweis vom Lemma 5.4 sollen wir nur zeigen: $\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} \geq c_2$ an derjenigen Stellen, wo $\Gamma_t$ Mannigfaltigkeit ist (also, f.ü. auf [0;T]). Hierbei ergibt sich die Konstante $c_2$ aus Lemma A.1.

Wir zeigen, $\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1$ und $\frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2$ $\left(\Rightarrow \frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} = \frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \cdot \frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq c_2\right)$.

Zunächst beweisen wir $\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1$.

Wir wissen: $F_t = \partial(f(.) > t)$, $G_t = \partial(g(.) > t)$, dabei ist

$$|(f(.) > t)| \overset{(5.8)}{=} |(g(.) > t)| \text{ und } (g(.) > t) \text{ ist eine Kugel}$$

$$\Rightarrow |F_t|_F \geq |G_t|_F,$$

da Kugel hat den kleinsten Flächeninhalt unter allen (nicht unbedingt zusammenhängenden) Gebieten mit gleichen Volumen hat.
Darum folgt

$$\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1.$$

Zeigen wir, $\frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2$. Sei $t$ fixiert, $G := (f(.) > t)$, $\widetilde{\Gamma} := \partial G \setminus \partial W$.

Man kann leicht sehen, $\Gamma_t = (f(.) = t) \overset{(*)}{\supseteq} \partial(f(.) > t) \setminus \partial W = \partial G \setminus \partial W = \widetilde{\Gamma}$,
(*) gilt wegen $f \in C(W)$.
Also ist

$$|\Gamma_t|_F \geq |\widetilde{\Gamma}|_F. \tag{5.21}$$

Außerdem gilt $G = (f(.) > t)$ und deshalb: $|G| \leq |\mathrm{trg}\, f| \leq c_1|W|$ nach die Bedingungen des Lemmas.

Wir haben also die Situation
$G \subset$ Würfel $W$, $|G| \leq c_1|W|$ und $\widetilde{\Gamma} = \partial G \setminus \partial W$.
Damit folgt aus Lemma A.1: $|\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2|\partial G|_F$.

Außerdem, $\partial G = \partial(f(.) > t) \overset{(5.20)}{=} F_t$. Deshalb $|\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2 \overbrace{|F_t|_F}^{=|\partial G|_F}$.
Zum Schluß $|\Gamma_t|_F \overset{(5.21)}{\geq} |\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2|F_t|_F$, mit anderen Worten, $\frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2$. $\square$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir einige Abschätzungen für $W^{1,p}(\Omega)$-Funktionen mit bestimmten Eigenschaften nachweisen. Aus diesem Grunde haben wir nachfolgende Stoffsdarstellung gerade nach vorausgesetzten Funktionseigenschaften gegliedert.

# Kapitel 6

## Abschätzungen für Funktionen $\boldsymbol{u \in W^{1,p}(\Omega)}$ mit: $\boldsymbol{\forall B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(x)|^p dx \leq K \frac{R^{n-p}}{|\log R|^{\vartheta}}}$

In diesem Abschnitt geben wir eine Antwort auf die Frage: In welchem Orlicz-Raum liegt die Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$, für die

$$\forall B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(x)|^p dx \leq K \frac{R^{n-p}}{|\log R|^{\vartheta}}, \quad n \geq p$$

gilt. Daneben sei bemerkt, dass wir auf der Stufe nur $\vartheta \geq 0$ betrachten und die Fälle $n > p$, $n = p$ voneinander trennen.
Die Section 6.1 befaßt sich mit dem Fall $\vartheta \in [0; p]$, die Section 6.2 — mit dem Fall $\vartheta \in [0; p-1]$. Besonders wichtig aber ist Section 6.3, in der wir zeigen, dass die beiden Resultate aus der Definition 1.7 (für die obigen $\vartheta$) optimal sind.

## 6.1 Der Fall "$n > p$"

**Satz 6.1**
*Sei $\Omega$ ein beschränktes Lipschitzgebiet,* $\dim \Omega = n > p \geq 1, \quad 0 \leq \vartheta < p.$

*Dann* $\forall K > 0 \; \exists K', \; \alpha > 0$ *so dass für* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt:*

$$\left(\forall B_r(x_0) \text{ mit } r \leq 1/2 : \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla u|^p dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^{\vartheta}} \;\; \& \;\; \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq K\right) \Rightarrow$$
$$\int_{\Omega} e^{\alpha |u|^{\frac{p}{p-\vartheta}}} dx \leq K'$$

*und für* $\vartheta = p$ :

$$\left(\forall B_r(x_0) \text{ mit } r \leq 1/2 : \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla u|^p \, dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^{p}} \;\; \& \;\; \|u\|^p_{L^p(\Omega)} \leq K\right) \Rightarrow$$
$$\int_{\Omega} e^{e^{\alpha |u|}} dx \leq K'.$$

*Für* $\vartheta > p$ *gilt:*

$$\left(\forall B_r(x_0) \text{ mit } r \leq 1/2 : \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} |\nabla u|^p \, dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^{\vartheta}}\right) \Rightarrow$$

$$|u(x)-u(y)| \leq \underbrace{K' |\ln|x-y||^{\frac{p-\vartheta}{p}}}_{\to 0 \text{ bei } |x-y|\to 0}, \quad \textit{wenn} \;\; |x-y| \leq 1/2.$$

*Für* $\vartheta > p$ *gilt überdies:* $u \in L^\infty(\Omega)$.

**Bemerkung 6.1** *Die letzte Aussage aus Satz 6.1 ist klar.*

Wir beweisen Satz 6.1 zunächst für den Fall $\vartheta \leq p$, anschließend für den Fall $\vartheta > p$.

**Beweis für $\boldsymbol{\vartheta \leq p}$:** Wir setzen $Q_d = [0; d]^n$, $\quad Q = [0; 1]^n$.
Nach Lemma 5.2 können wir o.B.d.A. $u = |\tilde{u}|$ setzen mit $\tilde{u} \in FT_0(Q_d)$ für ein $d$. Genauer:

$$\text{O.B.d.A.} \quad \begin{cases} & u := |\tilde{u}|, \\ \text{dabei} & \tilde{u} : Q \to \mathbb{R} \\ \text{und} & \tilde{u}|_{Q_d} \in FT_0(Q_d), \quad \tilde{u}(x) = 0 \;\; \forall x \notin Q_d. \end{cases} \tag{6.1}$$

Aus den Definitionen 5.3 und 5.5 folgt, dass $u$ stetig und stückweise linear ist.

Wir wählen $d := \sqrt[n]{c_1}$ mit $c_1$ aus Lemma A.1.

$$\text{Dann gilt} \quad |\operatorname{trg} u| \leq c_1. \tag{6.2}$$

Sei weiter $g : x \mapsto \varphi(|x|)$ die Symmetrisation von $u$
($\Rightarrow \varphi$ ist fallend).

Wir bestimmen $R$ so, dass

$$|B_R| := c_1 \qquad (\Rightarrow \operatorname{trg} g \overset{(*)}{\subset} B_R(0)) \tag{6.3}$$

(*) folgt aus: $|\operatorname{trg} g| = |\operatorname{trg} u| \overset{(6.2)}{\leq} c_1 = |B_R|$, $\quad \operatorname{trg} g$ ist eine Kugel.

$$\text{Sei} \quad \lambda_i = \varphi(2^{-i}R), \quad i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{6.4}$$

($\Rightarrow$ die Folge $(\lambda_i)$ ist wachsend, da $\varphi$ fallend ist, $\lambda_0 = 0$ wegen (6.3).)

Wir wollen jetzt "$\lambda_{i+1} - \lambda_i$" abschätzen. Sei jetzt

$$u_i(x) := \begin{cases} u(x) - \lambda_i & \text{, wenn } \; u(x) \geq \lambda_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6.5}$$

($\Rightarrow u_i \in C(Q)$ ).

Wir überlegen: $g(x) > \lambda_i \overset{(6.4)}{\Leftrightarrow} \varphi(|x|) > \varphi(2^{-i}R) \overset{\varphi \text{ fallend}}{\Rightarrow} |x| \leq 2^{-i}R$. Daraus folgt:

$$|\operatorname{trg} u_i| \overset{(5.8)}{=} |(g > \lambda_i)| \overset{\text{s.o.}}{\leq} |B_{2^{-i}R}|. \tag{6.6}$$

Seien $\;i$ fixiert, $\;G := \operatorname{trg} u_i$. Dann ist $\;|G| \overset{(6.6)}{\leq} |B_R| \overset{(6.3)}{=} c_1$.
$\Rightarrow$ Nach Lemma 5.3 kann man $int(G)$ mit Würfeln $\{W_\beta | \beta \in \Lambda\}$ bedecken, dabei $\;\forall\, \beta, \gamma \in \Lambda$:

$$W_\beta \neq W_\gamma \;\Rightarrow\; |W_\beta \cap W_\gamma| = 0 \quad \text{im } n\text{-}dim \text{ Mass} \tag{6.7}$$

$$\text{und} \qquad 2^{-n} c_1 |W_\beta| \leq |G \cap W_\beta| \leq c_1 |W_\beta|. \tag{6.8}$$

Betrachten wir $\;f := u_i|_{W_\beta}$, hier $\beta \in \Lambda$ fixiert. Dann

$$|\operatorname{trg} f| = |W_\beta \cap G| \overset{(6.8)}{\leq} c_1 |W_\beta|, \tag{6.9}$$

da $\;G = \operatorname{trg} u_i$.

Außerdem gilt nach Wahl von $u_i$ : $\;f$ ist stetig und $\operatorname{trg} f$ ist mit einer endlichen Anzahl von konvexen Polyedern gepflastert, wobei $f$ auf jedem solchen Polyeder linear ist. Darum gilt für die Symmetrisation $g_\beta$ von $f$ nach Lemma 5.4

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx \leq \frac{1}{c_2^p} \int_{W_\beta} |\nabla f|^p \, dx, \tag{6.10}$$

$$\text{wobei} \quad B_{R_\beta}(0) := \overline{\operatorname{trg}(g_\beta)}. \tag{6.11}$$

Wir schätzen nun $|W_\beta|$ ab. Es gilt:

$$2^{-n} c_1 |W_\beta| \overset{(6.8)}{\leq} |G \cap W_\beta| \overset{(6.9)}{=} |\operatorname{trg} f| = |\operatorname{trg} g_\beta| \overset{(6.11)}{=} |B_{R_\beta}|,$$

also liegt $W_\beta$ in einem $B_{cR_\beta}(.)$, wobei $c$ eine Konstante bezeichnet, die sich von Formel zu Formel verändert kann.

Aus "$\forall\, B_r(y)$ mit $r \leq 1/2 : \int_{B_r(y)} |\nabla u|^p \, dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta}$" folgt:

$$\text{“} \int_Q |\nabla u|^p \, dx \leq c' K \text{”} \;\text{ für ein }\; c' \text{”}.$$

Auch $\;W_\beta \subset Q \cap B_{cR_\beta}(x_0)\;$ für ein $\;x_0$
$\Rightarrow \int_{W_\beta} |\nabla f|^p \, dx \leq \int_{W_\beta} |\nabla u|^p \, dx \leq \min \left\{ K \frac{(cR_\beta)^{n-p}}{|\log cR_\beta|^\vartheta}, K c' \right\} \leq c'' K \frac{{R_\beta}^{n-p}}{1 + |\log_2 R_\beta|^\vartheta}$.

Also gilt

$$\int_{W_\beta} |\nabla f|^p \, dx \leq c'' K \frac{{R_\beta}^{n-p}}{1 + |\log_2 R_\beta|^\vartheta}. \tag{6.12}$$

Weiter ist $\;R_\beta \leq 2^{-i} R$, $\;$weil $\;|B_{R_\beta}| = |G \cap W_\beta| \leq |G| = |\operatorname{trg} u_i| \overset{(6.6)}{\leq} |B_{2^{-i}R}|$

$$\Rightarrow \exists\, i_0 : \forall\, i \geq i_0 : 1 + |\overbrace{\log_2 R_\beta}^{\leq -i + \log_2 R}|^\vartheta \geq c(i+1)^\vartheta \quad \text{für ein } c. \tag{6.13}$$

Somit $\int_{W_\beta} |\nabla f|^p\,dx \overset{(6.12),(6.13)}{\leq} \left\{ \begin{array}{ll} cK\frac{{R_\beta}^{n-p}}{(i+1)^\vartheta} & i \geq i_0 \\ cK{R_\beta}^{n-p} & \text{sonst} \end{array} \right\} \leq c'K\frac{{R_\beta}^{n-p}}{(i+1)^\vartheta}$ für ein $c'$.

Wenn $g_\beta : x \mapsto \varphi_\beta(|x|)$, dann gibt es eine Konstante $c$, für die gilt:

$$\begin{aligned} cK\frac{{R_\beta}^{n-p}}{(i+1)^\vartheta} &\geq \frac{1}{c_2^p}\int_{W_\beta} |\nabla f|^p\,dx \overset{(6.10)}{\geq} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p\,dx \\ &\geq \overbrace{|S_1^{n-1}|}^{:=c'} \int_{R_\beta/2}^{R_\beta} |{\varphi_\beta}'(r)|^p r^{n-1} dr \\ &\geq c'\left(\frac{R_\beta}{2}\right)^{n-1} \int_{R_\beta/2}^{R_\beta} |{\varphi_\beta}'(r)|^p dr. \end{aligned}$$

Also ist

$$cK\frac{{R_\beta}^{n-p}}{(i+1)^\vartheta} \geq c'\left(\frac{R_\beta}{2}\right)^{n-1} \int_{R_\beta/2}^{R_\beta} |{\varphi_\beta}'(r)|^p dr.$$

Wegen (3.1) haben wir $\left|\int_U v\,dx\right|^p \leq |U|^{p-1}\int_U |v|^p dx$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} cK\frac{1}{(i+1)^\vartheta} &\geq \left(\frac{R_\beta}{2}\right)^{p-1} \int_{R_\beta/2}^{R_\beta} |{\varphi_\beta}'(r)|^p dr \\ &\overset{(3.1)}{\geq} \left|\int_{R_\beta/2}^{R_\beta} {\varphi_\beta}'(r) dr\right|^p \\ (\varphi_\beta(R_\beta) = 0 \text{ wg.}(6.11)) \quad &= (\varphi_\beta(R_\beta/2))^p. \end{aligned}$$

Folglich haben wir $\frac{\sqrt[p]{cK}}{(i+1)^{\vartheta/p}} \geq \varphi_\beta(R_\beta/2)$. Wenn $K_1 := \sqrt[p]{cK}$:

$$\varphi_\beta(R_\beta/2) \leq \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}.$$

Dann gilt, weil $\varphi_\beta$ fallend ist: $\forall\, t > R_\beta/2 :\ \varphi_\beta(t) \leq \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}$

$$\Rightarrow \left(g_\beta(.) > \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}\right) \subset B_{R_\beta/2}(0). \tag{6.14}$$

Sei $g$ die Symmetrisation von $u$, d.h. $g : x \mapsto \varphi(|x|)$.
Dann gilt $\forall\, t \geq 0$ :

$$|(g(.) > \lambda_i + t)| \overset{(5.8)}{=} |(u(.) > \lambda_i + t)| \overset{(6.5)}{=} |(u_i(.) > t)| \overset{(I)}{=} \sum_{\beta\in\Lambda} |(u_i|_{W_\beta} > t)| = (**)$$

( (I) folgt aus: $\bigcup_{\beta\in\Lambda} W_\beta \supset int(\text{trg}\, u_i) = (u_i > 0)$ und Formel (6.7) ).

Aber $g_\beta$ ist die Symmetrisation von $u_i|_{W_\beta}$, darum $|(g_\beta > t)| = |(u_i|_{W_\beta} > t)|$ und folglich $|(g(.) > \lambda_i + t)| = (**) = \sum\limits_{\beta\in\Lambda} |(u_i|_{W_\beta} > t)| = \sum\limits_{\beta\in\Lambda} |(g_\beta > t)|$.

Also ist

$$|(g(.) > \lambda_i + t)| = \sum_{\beta\in\Lambda} |(g_\beta > t)| \;\; \forall\, t \geq 0. \tag{6.15}$$

Darum

$$\begin{aligned}
\left|\left(g(.) > \lambda_i + \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}\right)\right| &\overset{(6.15)}{=} \sum_{\beta\in\Lambda} \left|\left(g_\beta(.) > \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}\right)\right| \\
&\overset{(6.14)}{\leq} \sum_{\beta\in\Lambda} |B_{R_\beta/2}| = \frac{1}{2^n}\sum_{\beta\in\Lambda} |B_{R_\beta}| \\
&\overset{(6.11)}{=} \frac{1}{2^n}\sum_{\beta\in\Lambda} |(g_\beta > 0)| \overset{(6.15)}{=} \frac{1}{2^n}|(g(.) > \lambda_i)| \\
(\lambda_i = \varphi(2^{-i}R)) \quad &\leq \frac{1}{2^n}|B_{2^{-i}R}| = |B_{2^{-i-1}R}| \\
(\lambda_{i+1} = \varphi(2^{-i-1}R)) \quad &\leq |(g(.) \geq \lambda_{i+1})|.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lambda_i + \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}} \geq \lambda_{i+1}.$$

Deshalb hat man $\lambda_{i+1} - \lambda_i \leq \frac{K_1}{(i+1)^{\vartheta/p}}$.

Nun ist aber $\lambda_0 = \varphi(R) = 0$, weil $\operatorname{trg} g \subset B_R(0)$ wegen (6.3)

$$\Rightarrow \forall\, i: \;\lambda_i = \overbrace{\lambda_0}^{=0} + \sum_{m=0}^{i-1}(\lambda_{m+1} - \lambda_m) \leq \sum_{m=0}^{i-1} \frac{K_1}{(m+1)^{\vartheta/p}}. \tag{6.16}$$

Darum gilt für $0 \leq \vartheta < p$: $\quad \lambda_i \overset{(6.16)}{\leq} \sum\limits_{m=0}^{i-1} \frac{K_1}{(m+1)^{\vartheta/p}} \leq \int_{x=0}^{i} \frac{K_1}{x^{\vartheta/p}}\,dx = (K_2 i)^{1-\frac{\vartheta}{p}}$

und wenn $(\vartheta = p,\ i \geq 1)$: $\quad \lambda_i \overset{(6.16)}{\leq} \sum\limits_{m=0}^{i-1} \frac{K_1}{m+1} \leq K_1 + \int_{x=1}^{i} \frac{K_1}{x}\,dx = K_1(1 + \ln i)$

$$\Rightarrow \lambda_i \leq \begin{cases} (K_2 i)^{1-\frac{\vartheta}{p}} & \text{,wenn } 0 \leq \vartheta < p, \\ K_1(1 + \ln i) & \text{,wenn } \vartheta = p,\ i \geq 1. \end{cases} \tag{6.17}$$

Wir wissen schon:

$$g \text{ ist Symmetrisation von } u, \quad (g > \lambda_j) \overset{(6.4)}{\subset} B_{2^{-j}R}(0). \tag{6.18}$$

Für jede wachsende Funktion $\psi \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ mit $\psi \geq 0$ gilt unter Berücksichtigung der Nichtnegativität von $u$:

$$\int_Q \psi(|u(x)|)\,dx \overset{\psi \text{ wachsend}}{\leq} \int_{u(x)=0} \overbrace{\psi(\lambda_0)}^{=\psi(0)}\,dx + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\lambda_{i-1} < u(x) \leq \lambda_i} \psi(\lambda_i)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&& \leq \quad & \overbrace{\int_Q \psi(0)\,dx}^{=\psi(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{u(x)>\lambda_{i-1}} \psi(\lambda_i) dx \\
&& \overset{(5.8)}{=} \quad & \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{g(y)>\lambda_{i-1}} \psi(\lambda_i) dy \\
(\,(g(x) > \lambda_\ell) \subset B_{2^{-\ell}R}(0)\,) && \leq \quad & \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2^{1-i}R}|\, \psi(\lambda_i).
\end{aligned}
$$

Wir haben also

$$
\int_Q \psi(|u(x)|)\,dx \leq \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2^{1-i}R}|\, \psi(\lambda_i). \tag{6.19}
$$

Für $\vartheta < p: \quad \lambda_i \leq (K_2 i)^{\frac{p-\vartheta}{p}}$ nach (6.17).
Wenn $\psi : t \mapsto e^{\alpha t^{\frac{p}{p-\vartheta}}}, \quad t \geq 0,$ dann ist

$$
\psi(\lambda_i) = e^{\alpha \lambda_i^{\frac{p}{p-\vartheta}}} \leq e^{\alpha K_2 i}. \tag{6.20}
$$

Sei $\alpha$ so gewählt, dass $e^{\alpha K_2} < 2^n$.
Dann

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{\alpha |u|^{\frac{p}{p-\vartheta}}}\,dx \quad & = \quad \int_Q \psi(|u|)\,dx \\
& \overset{(6.19),(6.20)}{\leq} \quad e^0 + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2^{1-i}R}\,| e^{\alpha K_2 i} \\
& = \quad 1 + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}| \left( \frac{e^{\alpha K_2}}{2^n} \right)^i =: K' \\
& < \quad \infty,
\end{aligned}
$$

weil $\frac{e^{\alpha K_2}}{2^n} < 1$. $\square$ (für $\vartheta < p$ )

Sei nun $\vartheta = p$, dann $\lambda_i \overset{(6.17)}{\leq} K_1(1 + \ln i) \quad \forall i \geq 1$.
Sei $\psi(t) = e^{e^{\alpha t}}$, dann $\forall j \geq 1: \psi(\lambda_j) \leq e^{e^{\alpha K_1 (1+\ln j)}} = e^{e^{\alpha K_1} j^{\alpha K_1}} = e^{\frac{e^{\alpha K_1}}{j^{1-\alpha K_1}} j}$.
Wir wählen $\alpha$ so, dass $1 - \alpha K_1 > 0$. Dann haben wir im Limes

$$
-n \ln 2 + \frac{e^{\alpha K_1}}{j^{1-\alpha K_1}} \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} -n \ln 2 < 0. \tag{6.21}
$$

Schließlich sehen wir

$$
\int_Q e^{e^{\alpha |u|}}\,dx \quad = \quad \int_Q \psi(|u|)\,dx \overset{(6.19)}{\leq} \psi(0) + \sum_{j=1}^{\infty} |B_{2^{1-j}R}|\, \psi(\lambda_j)
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad e + \sum_{j=1}^{\infty} |B_{2^{1-j}R}| \underbrace{e^{\frac{e^{\alpha K_1}}{j^{1-\alpha K_1}} j}}_{\geq \psi(\lambda_j)} \\
&= \quad e + |B_{2R}| \sum_{j=1}^{\infty} e^{\left(-n \ln 2 + \frac{e^{\alpha K_1}}{j^{1-\alpha K_1}}\right) j} \overset{(6.21)}{=}: K' \\
&< \quad \infty.
\end{aligned}
$$

Wir erklären die letzte Ungleichung:
Angenommen, $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$—eine Folge der Zahlen mit $\lim\limits_{i\to\infty} Z_i < 0$.
Dann existieren $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$, für die $\forall n \geq n_0 :\ Z_n < -\varepsilon$.

Wir haben: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} e^{iZ_i} \leq \sum\limits_{i=1}^{n_0-1} e^{iZ_i} + \sum\limits_{i=n_0}^{\infty} e^{-\varepsilon i} < \infty.$ $\square$

**Beweis von Satz 6.1 für $\boldsymbol{\vartheta > p}$:**
Wegen Satz 4.1 können wir o.B.d.A. $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^p)$ voraussetzen, denn wir können $u$ durch $Eu$ ersetzen.

Wir möchten Folgendes beweisen: Sei $\vartheta > p$, $n > p$. Dann folgt

$$
\left.\left[\begin{array}{l}
\forall\, K > 0 :\ \exists\, K' > 0 \quad \text{so dass,} \\
\text{wenn } \ u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \ \text{ und } \ \forall\ B_r(x_0) : \int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^p\, dx \leq \frac{K r^{n-p}}{|\log r|^{\vartheta}}, \\
\text{dann gilt für } |x-y| \leq 1/2 : \quad |u(x) - u(y)| \leq K' |\ln|x-y||^{\frac{p-\vartheta}{p}}.
\end{array}\right.\right\} \qquad (I)
$$

Um (I) für $u$ zu beweisen, genügt es (I) für $u * \omega_h \ \forall\, h > 0$ zu beweisen, wobei $\omega_h$ ein Standardkern ist.

Darum betrachten wir $\boxed{\text{o.B.d.A.} \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Sei weiter $\varepsilon \in (0; 1/2]$, $v(x) := u(x + x_0)$. Dann

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(z) - u(x_0) dz \right| \quad &\overset{z=x+x_0}{=} \quad \left| \int_{B_\varepsilon(0)} v(x) - v(0) dx \right| \\
&\leq \quad \int_{B_\varepsilon(0)} dx \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} v(tx) \right| dt \\
&= \quad \int_0^1 dt \int_{B_\varepsilon(0)} \left| \frac{d}{dt} v(tx) \right| dx \\
(y := tx) \qquad &= \quad \int_0^1 dt \int_{x \in B_\varepsilon(0)} |\nabla v(y) \cdot x| dx \\
\left(dx = \frac{dy}{t^n},\ |x| \leqslant \varepsilon\right) \qquad &\leq \quad \int_{t=0}^1 \frac{\varepsilon dt}{t^n} \int_{B_{\varepsilon t}(0)} |\nabla v(y)| dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq && \int_{t=0}^{1} \frac{\varepsilon dt}{t^n} \overbrace{|B_{\varepsilon t}|^{1-1/p}}^{=c(\varepsilon t)^{n(1-\frac{1}{p})}} \overbrace{\left(\int_{B_{\varepsilon t}(0)} |\nabla v|^p dy\right)^{1/p}}^{\leq c\frac{(\varepsilon t)^{\frac{n-p}{p}}}{|\log(\varepsilon t)|^{\vartheta/p}}} \\
&\leq && c\varepsilon^n \int_0^1 \frac{dt}{t|\ln(\varepsilon t)|^{\vartheta/p}} \overset{s=\varepsilon t}{=} c\varepsilon^n \int_0^{\varepsilon} \frac{ds}{s|\ln s|^{\vartheta/p}} \\
(\tau := |\ln s| = -\ln s) \quad &= && c\varepsilon^n \int_{|\ln\varepsilon|}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\vartheta/p}} = -\frac{p}{\vartheta - p} \cdot \frac{c\varepsilon^n}{\tau^{\frac{\vartheta-p}{p}}}\Bigg|_{\tau=|\ln\varepsilon|}^{\infty} \\
(\vartheta > p) \quad &= && C\varepsilon^n |\ln\varepsilon|^{\frac{p-\vartheta}{p}}.
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\left| \int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x) - u(x_0) dx \right| \leq c|B_\varepsilon| |\ln\varepsilon|^{\frac{p-\vartheta}{p}}. \tag{6.22}
$$

Wir betrachten jetzt zwei Punkte $x_1$ und $x_2$ mit $|x_1 - x_2| = \varepsilon \leq 1/2$. Sei $x' := \frac{x_1+x_2}{2}$. Dann ist

$$
B_{\varepsilon/2}(x') \subset B_\varepsilon(x_1) \cap B_\varepsilon(x_2). \tag{6.23}
$$

$$
\begin{aligned}
|u(x_1) - u(x_2)| \quad &= && \frac{1}{|B_{\varepsilon/2}|} \left| \int_{B_{\varepsilon/2}(x')} u(y) - u(x_1) dy - \int_{B_{\varepsilon/2}(x')} u(y) - u(x_2) dy \right| \\
&\overset{(6.23)}{\leq} && \frac{1}{|B_{\varepsilon/2}|} \left( \left| \int_{B_\varepsilon(x_1)} u(y) - u(x_1) dy \right| + \left| \int_{B_\varepsilon(x_2)} u(y) - u(x_2) dy \right| \right) \\
&\overset{(6.22)}{\leq} && \frac{|B_\varepsilon|}{|B_{\varepsilon/2}|} \cdot 2c |\ln\varepsilon|^{\frac{p-\vartheta}{p}} \\
&= && \underbrace{2^{n+1}c}_{=:K'} |\ln\varepsilon|^{\frac{p-\vartheta}{p}} \\
(\,\varepsilon = |x_1 - x_2|\,) \quad &= && K' |\ln|x_1 - x_2||^{\frac{p-\vartheta}{p}}.
\end{aligned}
$$

Also haben wir Behauptung (I) bewiesen, somit gilt Satz 6.1 für $\vartheta > p$. $\square$

**Bemerkung 6.2** *Der Fall "$\forall R \leq 1/2 : \int_{B_R(\cdot)} |\nabla u|^p dx \leq \frac{KR^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}, \quad p > n$" ist ziemlich einfach. In diesem Fall bekommen wir:*

$$
\forall x, y \in \Omega, |x - y| \leq 1/2 : \ |u(x) - u(y)| \leq C \frac{|x-y|^{1-\lambda/p}}{|\log|x-y||^{\vartheta/p}}.
$$

## 6.2 Der Fall "$n = p$"

Speziell für den Fall "$n = p$" kann man ein besseres Resultat beweisen:

**Satz 6.2** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $\dim\Omega = n$.*

*Dann*
$\forall\,\vartheta \in [0; n-1[, \forall K > 0 : \exists K',\ \alpha > 0,$ *so dass gilt* $\forall\, u \in W^{1,n}(\Omega)$*:*
$\Big(\forall B_r(x_0)$ *mit* $r \le 1/2 : \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|^{\vartheta}}\ \ \&\ \ \|u\|^n_{L^n(\Omega)} \le K\Big) \Rightarrow$
$\int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1-\vartheta}}}\, dx \le K'$

*und für* $\vartheta = n-1$ *gilt:*
$\Big(\forall B_r(x_0)$ *mit* $r \le 1/2 : \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|^{\vartheta}}\ \ \&\ \ \|u\|^n_{L^n(\Omega)} \le K\Big) \Rightarrow$
$\int_\Omega e^{e^{\alpha|u|}} dx \le K'$.

*Für* $\vartheta > n-1$ *gilt:*
$\Big(\forall B_r(x_0)$ *mit* $r \le 1/2 : \int_{B_r(x_0)\cap\Omega} |\nabla u|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|^{\vartheta}}\Big) \Rightarrow$
$|u(x) - u(y)| \le \underbrace{K' |\ln|x-y||^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}}_{\to 0 \text{ bei } |x-y|\to 0},$ *wenn* $|x-y| \le 1/2$.
*Folglich gilt für* $\vartheta > p-1$ *auch:* $u \in L^\infty(\Omega)$.

**Bemerkung 6.3** *Wie in Satz 6.1 ist auch in Satz 6.2 die letzte Aussage offensichtlich.*

**Beweis von Satz 6.2 für $\vartheta \le n-1$:**
Sei $Q = [0,1]^n$, $Q_d = [0; d]^n$.
Nach Lemma 5.2 können wir o.B.d.A. $u = |\tilde u|$ setzen mit $\tilde u \in FT_0(Q_d)$ für ein $d$. Genauer:

$$\text{o.B.d.A.} \begin{cases} & u := |\tilde u|, \\ \text{dabei} & \tilde u : Q \to \mathbb{R} \\ \text{und} & \tilde u|_{Q_d} \in FT_0(Q_d), \quad \tilde u = 0\ \forall x \notin Q_d. \end{cases} \tag{6.24}$$

Weiter: $d := \sqrt[n]{c_1}$ mit $c_1$ aus Lemma A.1. Dann ist $|\operatorname{trg} u| \le c_1$.

$$\text{Sei } g \text{ Symmetrisation von } u, \quad \text{d.h. } g(x) = \varphi(|x|). \tag{6.25}$$

Wie wir wissen, ist $\varphi$ fallend und stetig (siehe Lemma 5.4). Wir wählen $R$ so, dass

$$|B_R| = c_1. \tag{6.26}$$

Dann ist $|\operatorname{trg} g| \overset{(6.25)}{=} |\operatorname{trg} u| \le c_1 = |B_R|$, $\operatorname{trg} g = B_\gamma(0)$ für ein $\gamma \in \mathbb{R}_+$

$$\Rightarrow \operatorname{trg} g \subset B_R(0) \qquad (\Rightarrow \varphi(R) = 0). \tag{6.27}$$

Sei jetzt

$$\forall\, i \ge 0 : \quad \lambda_i := \varphi(2^{1-2^i} R). \tag{6.28}$$

Dann

$$\lambda_0 := \varphi(R) = 0. \tag{6.29}$$

Sei

$$u_i(x) = \begin{cases} u(x) - \lambda_i & \text{wenn } u(x) \geq \lambda_i \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6.30}$$

Sei $i$ fixiert, $G := \operatorname{trg} u_i$. Dann hat man

$$|G| = |(u(.) > \lambda_i)| = |(g(.) > \lambda_i)| \overset{(6.28)}{\leq} |B_{2^{1-2^i}R}| \overset{(6.26)}{=} 2^{n(1-2^i)} c_1. \tag{6.31}$$

Folglich ist $|G| \leq c_1$. Darum kann man nach Lemma 5.3, $int(G)$ mit den Würfeln $\{W_\beta | \beta \in \Lambda\}$ überdecken, so dass $\forall\, \beta, \gamma \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} W_\beta \neq W_\gamma \quad &\Rightarrow \quad |W_\beta \cap W_\gamma| = 0 \quad \text{ im } n\text{-}dim \text{ Mass} \\ \text{und} \qquad & \quad 2^{-n} c_1 |W_\beta| \leq |G \cap W_\beta| \leq c_1 |W_\beta|. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Abschätzung von $|W_\beta|$: $\quad 2^{-n} c_1 |W_\beta| \overset{(6.32)}{\leq} |W_\beta \cap G| \leq |G| \overset{(6.31)}{=} 2^{n(1-2^i)} c_1$
$\Rightarrow |W_\beta| \leq 2^{n(2-2^i)} \Rightarrow$ Kantenlänge von $W_\beta \leq 2^{2-2^i} \Rightarrow$

$$W_\beta \text{ liegt in einer Kugel mit Radius } c \cdot 2^{-2^i} \text{ für ein } c.$$

Sei weiter $f := u_i|_{W_\beta}$ wobei $i$ und $\beta$ weiter fixiert seien.
Es ist klar, dass es ein $\tilde{c}$ gibt mit $\int_Q |\nabla u|^n \, dx \leq \tilde{c} K$. Darum existiert $c''$ mit
$\int_{W_\beta} |\nabla f|^n \, dx \leq \int_{W_\beta} |\nabla u|^n \, dx \leq \left\{ \begin{array}{ll} \frac{K}{\left|\log_2(c \cdot 2^{-2^i})\right|^\vartheta} = \frac{K}{|c' - 2^i|^\vartheta}, & \text{wenn } 2^i \geq 2c' \\ \int_Q |\nabla u|^n \, dx \leq \tilde{c} K & , \text{wenn } 2^i < 2c' \end{array} \right\} \leq$
$\frac{c'' K}{2^{\vartheta i}}$

$$\Rightarrow \int_{W_\beta} |\nabla f|^n \, dx \leq \frac{cK}{2^{\vartheta i}} \quad \text{für ein } c. \tag{6.33}$$

Seien

$$g_\beta \text{ Symmetrisation von } f(= u_i|_{W_\beta}); \quad g_\beta : x \mapsto \varphi_\beta(|x|) \tag{6.34}$$

und $R_\beta$ so gewählt, dass

$$B_{R_\beta}(0) = \overline{\operatorname{trg} g_\beta} \qquad (\Rightarrow \varphi_\beta(R_\beta) = 0). \tag{6.35}$$

Weiter, $|\operatorname{trg} f| = |W_\beta \cap G| \overset{(6.32)}{\leq} c_1 |W_\beta|$.
Aus Lemma 5.4 folgt:

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^n \, dx \leq \frac{1}{c_2^n} \int_{W_\beta} |\nabla f|^n \, dx \overset{(6.33)}{\leq} \frac{cK}{2^{\vartheta i}}. \tag{6.36}$$

Wegen (3.1) gilt $\int_U |v|^n dx \geq \frac{1}{|U|^{n-1}} \left| \int_U v \, dx \right|^n$.

Weiter gilt für alle $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
\int_{e^a}^{e^b} |\phi'(r)|^n r^{n-1} dr &\overset{r=e^t,\,\psi(t)=\phi(e^t)}{=} \int_{e^t=e^a}^{e^b} \left|\frac{\psi'(t)}{e^t}\right|^n e^{(n-1)t} de^t \\
&= \int_a^b |\psi'(t)|^n dt \overset{(3.1)}{\geq} \frac{1}{|b-a|^{n-1}} \left|\int_a^b \psi'(t)dt\right|^n \\
&= \frac{1}{|b-a|^{n-1}} \left|\psi(t)\Big|_{t=a}^{b}\right|^n \\
&\overset{r=e^t,\,\psi(t)=\phi(e^t)}{=} \frac{1}{|b-a|^{n-1}} \left|\phi(r)\Big|_{r=e^a}^{e^b}\right|^n .
\end{aligned}$$

Wenn $a_1 = e^a, \quad b_1 = e^b,$ bekommen wir:

$$\int_{a_1}^{b_1} |\phi'(r)|^n r^{n-1} dr \geq \frac{1}{\left|\ln \frac{b_1}{a_1}\right|^{n-1}} \left|\phi(.)\Big|_{a_1}^{b_1}\right|^n . \tag{6.37}$$

Dann gilt, wenn $c' = |\partial B_1(0)|$ :

$$\begin{aligned}
\frac{cK}{2^{\vartheta i}} &\overset{(6.36)}{\geq} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^n \, dx \geq \overbrace{|\partial B_1|}^{=c'} \int_{2^{-2^i} R_\beta}^{R_\beta} |\varphi_\beta{}'(r)|^n r^{n-1} dr \\
&\overset{(6.37)}{\geq} \frac{c'}{\left(\ln\left(2^{2^i}\right)\right)^{n-1}} \left|\varphi_\beta(R_\beta) - \varphi_\beta(2^{-2^i} R_\beta)\right|^n \\
(\varphi_\beta(R_\beta) = 0) \quad &= \frac{C}{2^{(n-1)i}} \left(\varphi_\beta(2^{-2^i} R_\beta)\right)^n .
\end{aligned}$$

Wir berechnen: $\varphi_\beta(2^{-2^i} R_\beta) \leq 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n} i} K_1$ für geeignetes $K_1$

$$\Rightarrow \left(g_\beta(.) > 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n} i} K_1\right) \subset B_{2^{-2^i} R_\beta}(0), \tag{6.38}$$

weil $g_\beta : x \mapsto \varphi_\beta(|x|), \quad \varphi_\beta$ fallend.

In (6.15) haben wir schon gezeigt, dass

$$|(g(.) > \lambda_i + t)| = \sum_{\beta \in \Lambda} |(g_\beta > t)| \;\; \forall\, t \geq 0. \tag{6.39}$$

(Die Überlegungen, die wir damals gemacht haben, lassen sich auch auf diesen Fall übertragen.)

Weiter haben wir

$$|(g(.) > \lambda_i + 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n} i} K_1)| \overset{(6.39)}{=} \sum_{\beta \in \Lambda} |(g_\beta(.) > 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n} i} K_1)|$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(6.38)}{\leq} && \sum_{\beta\in\Lambda} |B_{2^{-2^i}R_\beta}| = 2^{-2^i n} \sum_{\beta\in\Lambda} |B_{R_\beta}| \\
(B_{R_\beta}(0) = \operatorname{trg} g_\beta) \quad &= && 2^{-2^i n} \sum_{\beta\in\Lambda} |(g_\beta > 0)| \\
&\overset{(6.39)}{=} && 2^{-2^i n} |\underbrace{(g > \lambda_i)}_{\subseteq B_{2^{1-2^i}R}(0)}| \\
&\overset{(6.28)}{\leq} && 2^{-2^i n} |B_{2^{1-2^i}R}| = |B_{2^{1-2^{i+1}}R}| \\
&\leq && |(g \geq \lambda_{i+1})|,
\end{aligned}
$$

woraus $\lambda_i + 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n}i} K_1 \geq \lambda_{i+1}$ folgt.

Darum $\lambda_{i+1} - \lambda_i \leq 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n}i} K_1$.

Zum Schluß, $\lambda_i = \overbrace{\lambda_0}^{=0} + \sum\limits_{m=0}^{i-1} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \leq \sum\limits_{m=0}^{i-1} 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n}m} K_1$

$$
\Rightarrow \begin{cases} \text{wenn } \vartheta < n-1, & \lambda_i \leq c \cdot 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n}i} K_1 = (K_2 \cdot 2^i)^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}, \\ \text{wenn } \vartheta = n-1, & \lambda_i \leq K_1 i. \end{cases} \tag{6.40}
$$

Außerdem haben wir für jedes wachsende $\psi \in C(\mathbb{R}_{\geq 0})$ unter Ausnutzung der Nichtnegativität von $u$ und $\psi$:

$$
\begin{aligned}
\int_Q \psi(|u(x)|)dx \quad &\overset{\psi \text{ wachsend}}{\leq} && \int_{u(x)=0} \overbrace{\psi(\lambda_0)}^{=\psi(0)} dx \\
& && + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\lambda_{i-1} < u(x) \leq \lambda_i} \psi(\lambda_i) dx \\
&\leq && \overbrace{\int_Q \psi(0)\, dx}^{=\psi(0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{u(x) > \lambda_{i-1}} \psi(\lambda_i) dx \\
&\overset{(5.8)}{=} && \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \int_{g(y) > \lambda_{i-1}} \psi(\lambda_i) dy \\
((g(.) > \lambda_\ell) \subseteq B_{2^{1-2^\ell}R}(0)) \quad &\leq && \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2^{1-2^{i-1}}R}|\, \psi(\lambda_i) \\
(\dim Q = n) \quad &= && \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-\frac{n}{2}\cdot 2^i} \psi(\lambda_i).
\end{aligned}
$$

Also,

$$
\int_Q \psi(|u(x)|)dx \leq \psi(0) + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-\frac{n}{2}\cdot 2^i} \psi(\lambda_i). \tag{6.41}
$$

Wenn $\vartheta < n-1$, wählen wir:

$$\psi(t) = e^{\alpha t^{\frac{n}{n-1-\vartheta}}} \overset{(6.40)}{\Rightarrow} \psi(\lambda_i) \le e^{\alpha K_2 \cdot 2^i}.$$

Wir wählen $\alpha > 0$ so, dass $e^{\alpha K_2} = 2^{n/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.
In diesem Fall $\psi(\lambda_i) \le \left(e^{\alpha K_2}\right)^{2^i} = 2^{(n/2-\varepsilon)\cdot 2^i}$. Dann

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-1-\vartheta}}} dx &= \int_Q \psi(|u|)\, dx \overset{(6.41)}{\le} \underbrace{\psi(0)}_{=1} + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-\frac{n}{2}\cdot 2^i} \underbrace{\psi(\lambda_i)}_{\le 2^{2^i (n/2-\varepsilon)}} \\
&\le 1 + |B_{2R}| \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2^i \varepsilon} =: K' < \infty.
\end{aligned}$$

$\square$(für $\vartheta < n-1$)

Wenn $\vartheta = n-1$, wählen wir: $\psi(t) = e^{e^{\alpha t}}$.
Wir werden zuerst zeigen, dass bei entsprechenden $\alpha > 0$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$:

$$\forall\, i \text{ gilt:} \quad \psi(\lambda_i) \overset{(6.40)}{\le} e^{e^{\alpha K_1 i}} \overset{(\diamond)}{\le} c \cdot 2^{(n/2-\varepsilon)2^i}. \tag{6.42}$$

Dafür müssen wir $(\diamond)$ beweisen.
Beweis von $(\diamond)$: Wenn $\alpha$ so gewählt ist, dass $e^{\alpha K_1} = 2^{1-\delta}$, $\delta > 0$, dann ist $e^{e^{\alpha K_1 i}} = e^{2^{-\delta i} 2^i}$. Offensichtlich gibt es $i_0$ mit $e^{2^{-\delta i_0}} \le 2^{n/2-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Damit gilt

$$e^{e^{\alpha K_1 i}} = e^{2^{-\delta i} 2^i} \le \left\{ \begin{array}{cl} \left(e^{2^{-\delta i_0}}\right)^{2^i} \le 2^{(\frac{n}{2}-\varepsilon)2^i} & \text{bei } i \ge i_0 \\ c' & \text{bei } i < i_0 \end{array} \right\} \le \max\{1, c'\} \cdot 2^{(\frac{n}{2}-\varepsilon)2^i}.$$

(6.42) ist bewiesen.
Zum Schluß:

$$\begin{aligned}
(6.42) \Rightarrow \int_Q e^{e^{\alpha|u|}} dx &\overset{(6.41)}{\le} \underbrace{\psi(0)}_{=e} + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-\frac{n}{2}\cdot 2^i} \psi(\lambda_i) \\
&\overset{(6.42)}{\le} e + \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-\frac{n}{2}\cdot 2^i} \cdot c \cdot 2^{(n/2-\varepsilon)2^i} \\
&= e + c \sum_{i=1}^{\infty} |B_{2R}|\, 2^{-2^i \varepsilon} =: K' \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

**Beweis von Satz 6.2 für $\boldsymbol{\vartheta > n-1}$:**
Wegen Satz 4.1 können wir o.B.d.A. $u \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ voraussetzen,

denn wir können $u$ durch $Eu$ ersetzen.

Wir möchten Folgendes beweisen: Sei $\vartheta > n-1$. Dann

$$\left.\left[\begin{array}{l} \forall\, K>0 :\ \exists\, K'>0 \quad \text{so, dass} \\ \text{wenn } \ u \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n) \ \text{ und } \ \forall\, B_r(0) : \int_{B_r(0)} |\nabla u|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|^\vartheta}, \\ \text{dann gilt für } |x-y| \le 1/2 : \quad |u(x)-u(y)| \le K' |\ln|x-y||^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}. \end{array}\right.\right\} \qquad (II)$$

Um (II) für $u$ zu beweisen, genügt es (II) für $u * \omega_h \ \forall\, h>0$ zu beweisen, wobei $\omega_h$ ein Standardkern ist.

Darum betrachten wir $\boxed{\text{o.B.d.A.} \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)}$.

Wir betrachten Polarkoordinaten $(r,w)$ in $\mathbb{R}^n$ mit dem Pol $x_0$, also hat ein Punkt $x_0$ die Koordinaten $(0,w)$ $\forall\, w \in \partial B_1(0)$.

Dann gilt $\forall\, \varepsilon \in (0;1/2]$:

$$\begin{aligned} \frac{K}{|\ln\varepsilon|^\vartheta} &\overset{\text{s.(II)}}{\ge} \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\nabla u|^n\, dx \ge \int_{\partial B_1(0)} dw \int_{\varepsilon^2}^{\varepsilon} |\partial_r u(r,w)|^n r^{n-1} dr \\ &\overset{s.(6.37)}{\ge} \frac{1}{|\ln\varepsilon|^{n-1}} \int_{\partial B_1(0)} |u(\varepsilon,w)-u(\varepsilon^2,w)|^n dw \\ &\overset{(3.1)}{\ge} \frac{c^n}{|\ln\varepsilon|^{n-1}} \left| \int_{\partial B_1(0)} u(\varepsilon,w)-u(\varepsilon^2,w) dw \right|^n. \end{aligned}$$

Wenn $s>0$, $\varepsilon = e^{-s}$, dann

$$\left| \int_{\partial B_1(0)} u(e^{-s},w) - u(e^{-2s},w)\, dw \right| \overset{K_1 = \frac{\sqrt[n]{K}}{c}}{\le} s^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} K_1. \qquad (6.43)$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_1(0)} u(e^{-s},w) - u(e^{2^\ell s},w)\, dw \right| &\le \sum_{i=0}^{\infty} \left| \int_{\partial B_1(0)} u(e^{2^i s},w) - u(e^{2^{i+1}s},w)\, dw \right| \\ &\overset{(6.43)}{\le} \sum_{i=0}^{\infty} (2^i s)^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} K_1 \\ &= s^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \overbrace{\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{n-1-\vartheta}{n} i} K_1}^{=:c<\infty} \\ &= c \cdot s^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} = (*). \end{aligned}$$

Wir verwenden, dass o.B.d.A., $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Außerdem gilt $e^{-2^\ell s} \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$, da $s>0$.

Darum ist

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B_1(0)} u(x_0) - u(e^{-s}, w)\, dw\right| &= \lim_{\ell\to\infty}\left|\int_{\partial B_1(0)} u(e^{-2^\ell s}, w) - u(e^{-s}, w)\, dw\right| \\ &\leq (*) = c \cdot s^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}.\end{aligned}$$

Wenn hier $s = -\ln r$ gewählt wird, bekommen wir:

$$\left|\int_{\partial B_1(0)} u(x_0) - u(r, w)\, dw\right| \leq c|\ln r|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}.$$

Schließlich, wenn $0 < r \leq \varepsilon \leq 1/2, \quad \vartheta > n-1$,
gilt $|\ln r|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \leq |\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}$. Folglich

$$\left|\int_{\partial B_1(0)} u(x_0) - u(r, w)\, dw\right| \leq c|\ln r|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \leq c|\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \quad \forall\, r \in\, ]0;\varepsilon[\,. \tag{6.44}$$

Darum haben wir

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(y) - u(x_0)\, dy\right| &\overset{y=(r,w)}{=} \left|\int_{r=0}^{\varepsilon} r^{n-1} dr \int_{\partial B_1(0)} u(r, w) - u(x_0)\, dw\right| \\ &\overset{(6.44)}{\leq} |B_\varepsilon| \cdot c|\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}.\end{aligned}$$

Also,

$$\left|\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(y) - u(x_0)\, dy\right| \leq |B_\varepsilon| \cdot c|\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}. \tag{6.45}$$

Wir betrachten jetzt zwei Punkte: $x_1$ und $x_2$ mit $|x_1 - x_2| = \varepsilon \leq 1/2$.
Sei $x' := \frac{x_1+x_2}{2}$. Dann ist

$$B_{\varepsilon/2}(x') \subset B_\varepsilon(x_1) \cap B_\varepsilon(x_2). \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}|u(x_1) - u(x_2)| &= \frac{1}{|B_{\varepsilon/2}|}\left|\int_{B_{\varepsilon/2}(x')} u(y) - u(x_1)dy - \int_{B_{\varepsilon/2}(x')} u(y) - u(x_2)dy\right| \\ &\overset{(6.46)}{\leq} \frac{1}{|B_{\varepsilon/2}|}\left(\left|\int_{B_\varepsilon(x_1)} u(y) - u(x_1)dy\right| + \left|\int_{B_\varepsilon(x_2)} u(y) - u(x_2)dy\right|\right) \\ &\overset{(6.45)}{\leq} \frac{|B_\varepsilon|}{|B_{\varepsilon/2}|} \cdot 2c|\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \\ &= \underbrace{2^{n+1}c}_{=:K'}|\ln \varepsilon|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \\ (\,\varepsilon = |x_1 - x_2|\,) \quad &= K'|\ln|x_1 - x_2|\,|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}}.\end{aligned}$$

Also haben wir die Behauptung (II) bewiesen, und somit ist der Beweis von Satz 6.2 für $\vartheta > n-1$ abgeschlossen. □

## 6.3 Optimalität der diesen Resultate

Jetzt beweisen wir, dass die Resultate aus Satz 6.2 (den Fall $(n = p,\, 0 \leq \vartheta \leq n-1)$ ) und Satz 6.1 (den Fall $(n > p \geq 1,\, 0 \leq \vartheta \leq p)$ ) optimal sind, wenn die Bedingung "$n \geq 2$" erfüllt sich.

Wir betrachten in Satz 6.3 alle Möglichkeiten außer dem Fall "$(n = p,\, \vartheta = 0)$", weil dies eine andere Methode erfordert. Den letzten Fall betrachten wir in Satz 6.4.

Weiter schreiben wir immer $g$ statt $|g|$, weil immer $g \geq 0$.
Für den Beweis der Sätze 6.3, 6.4 brauchen wir

**Lemma 6.1** *Seien* $\varphi : ]0; R] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *stetig,* $|\varphi'|$ *fallend,* $\zeta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *wachsend und* $g : x \mapsto \varphi(|x|)$.

*Dann* $\forall\, r,\, y :\ \int_{B_r(0)} \zeta(|\nabla g|)\, dx \geq \int_{B_r(y) \cap B_R(0)} \zeta(|\nabla g|)\, dx$ *(wobei* $r \leq R$*).*

**Beweis:** Sei $D := B_r(0) - B_r(y)$, $E := B_r(0) \cap B_r(y)$, $F := B_r(y) - B_r(0)$.
Dann gilt $B_r(0) = D \cup E$, $B_r(y) = E \cup F$, wobei beide Vereinigungen disjunkt sind und $\forall\, x \in D :\ |x| \leq r$; $\forall\, x \in F :\ |x| > r$.

Deshalb $\forall\, x \in D,\, \forall\, y \in F :\ |\nabla g(x)| \leq |\varphi'(r)| \leq |\nabla g(y)|$.
Außerdem gilt $|D| = |F|$ (denn $|D| = |B_r(0)| - |E| = |B_r(y)| - |E| = |F|$ ).

Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \zeta(|\nabla g|)\, dx &= \int_D \overbrace{\zeta(|\nabla g|)}^{\geq \zeta(|\varphi'(r)|)}\, dx + \int_E \zeta(|\nabla g|)\, dx \\
&\geq \zeta(|\varphi'(r)|) \cdot \overbrace{|D|}^{=|F|} + \int_E \zeta(|\nabla g|)\, dx \\
&\geq \int_{F \cap B_R(0)} \overbrace{\zeta(|\nabla g|)}^{\leq \zeta(|\varphi'(r)|)}\, dx + \int_E \zeta(|\nabla g|)\, dx \\
&= \int_{B_R(0) \cap B_r(y)} \zeta(|\nabla g|)\, dx
\end{aligned}$$

und Lemma 6.1 ist bewiesen. □
In Sätzen 6.3, 6.4 benutzen wir Lemma 6.1 mit $\zeta(t) := t^p$, $p \geq 1$.

**Satz 6.3** *Wir setzen voraus, dass* $\boxed{p \geq 1,\, n \geq 2}$.
$\forall\, K > 0,\, \forall\, \alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty$ *existiert für jedes System* $(n, p, \vartheta)$ *ein* $R > 0$ *und eine Funktion* $g : B_R(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *so dass:*

1) $n = p,\ 0 < \vartheta < n-1:$

$\quad \forall\, B_r(x_0) : \int_{B_r(x_0)\cap B_R(0)} |\nabla g|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|^\vartheta} \quad und \quad \int_{B_R(0)} e^{\alpha(g) g^{\frac{n}{n-1-\vartheta}}} dx = \infty,$

2) $n = p,\ \vartheta = n-1:$

$\quad \forall\, B_r(x_0) : \int_{B_r(x_0)\cap B_R(0)} |\nabla g|^n\, dx \le \frac{K}{|\log r|} \quad und \quad \int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g) g}}\, dx = \infty,$

3) $n > p,\ 0 \le \vartheta < p:$

$\quad \forall\, B_r(x_0) : \int_{B_r(x_0)\cap B_R(0)} |\nabla g|^p\, dx \le \frac{K r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta} \quad und \quad \int_{B_R(0)} e^{\alpha(g) g^{\frac{p}{p-\vartheta}}}\, dx = \infty,$

4) $n > p,\ \vartheta = p:$

$\quad \forall\, B_r(x_0) : \int_{B_r(x_0)\cap B_R(0)} |\nabla g|^p\, dx \le \frac{K r^{n-p}}{|\log r|^p} \quad und \quad \int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g) g}}\, dx = \infty.$

(Bemerkung: Die Funktion $\alpha(.)$ kann sehr schwach wachsen, z.B. $\alpha(t) = \alpha_0 \ln\ln(t+e), \quad t \ge 0, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}_{>0}$.)

**Beweis:**
In jedem der vier Fälle betrachten wir differenzierbare Funktionen $\varphi : (0;R) \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, und $R > 0$ soll so gewählt werden, dass $|\varphi'|$ auf $(0;R)$ fallend wäre.

Dann für

$$g : x \mapsto \varphi(|x|), \quad \varphi : (0;R) \to \mathbb{R}_{\ge 0} \tag{6.47}$$

für jedes $r \in (0;\ R)$ gilt

$$\overbrace{\int_{B_r(0)} |\nabla g|^p\, dx \le K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta}}^{(I)} \overset{\text{Lemma 6.1}}{\Longrightarrow} \overbrace{\forall y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)\cap B_R(0)} |\nabla g|^p\, dx \le K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta}}^{(II)}.$$

Also müssen wir nur (I) beweisen, um (II) zu zeigen.

<u>Beweis von Fall 1</u> $(n = p,\ 0 < \vartheta < n-1)$:
Sei

$$\varphi(y) := \mathbf{K} |\ln y|^{\frac{n-1-\vartheta}{n}} \tag{6.48}$$

Dann $\varphi$ differenzierbar auf (0;1) und

$$|\varphi'(y)| = \overbrace{\frac{n-1-\vartheta}{n}\mathbf{K}}^{:=K_1} \frac{|\ln y|^{\frac{-1-\vartheta}{n}}}{y} = \frac{K_1}{y|\ln y|^{\frac{1+\vartheta}{n}}}. \tag{6.49}$$

Wählen wir $R \in ]0;1]$ so, dass $|\varphi'(y)| = \frac{K_1}{y|\ln y|^{(1+\vartheta)/n}}$ fallend auf $]0;R]$ ist. Dann

$$\begin{aligned} \int_{B_r(0)} |\nabla g|^n\, dx &\overset{(6.47)}{=} |\partial B_1| \int_0^r |\varphi'(y)|^n y^{n-1} dy \overset{(6.49)}{=} \overbrace{|\partial B_1| K_1^n}^{:=K_2} \int_0^r \frac{dy}{y|\ln y|^{1+\vartheta}} \\ &= -K_2 \int_\infty^{|\ln r|} \frac{dt}{t^{1+\vartheta}} \overset{\vartheta \ge 0}{=} \frac{K_2}{\vartheta t^\vartheta}\Big|_\infty^{|\ln r|} = \frac{K_2}{\vartheta |\ln r|^\vartheta}. \end{aligned}$$

$\forall K > 0$ können wir $\mathbf{K}$ so wählen, dass $K = \frac{K_2}{\vartheta}$
($= c\mathbf{K}^n$ mit einem $c > 0$).

Wir berechnen: $\int_{B_r(0)} |\nabla g|^n \, dx = \frac{K}{|\ln r|^\vartheta}$

$$\overset{\text{Lemma 6.1}}{\Longrightarrow} \forall\, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)\cap B_R(0)} |\nabla g|^n \, dx \leq \frac{K}{|\ln r|^\vartheta}.$$

Sei $\beta : x \mapsto \mathbf{K}^{\frac{n}{n-1-\vartheta}} \alpha(g(x))$.
Bei solchem Auswahl vom $\beta$: $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x) = \infty$,

weil $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \alpha(g(x)) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.

Deshalb

$$\boxed{\exists\, r_0 \in ]0; R] \text{ mit: } \beta(x) \geq n \;\; \forall\, x \in B_{r_0}(0).}$$

Auch $g(x)^{\frac{n}{n-1-\vartheta}} \overset{(6.47),(6.48)}{=} \mathbf{K}^{\frac{n}{n-1-\vartheta}} |\ln|x||$. Dann bekommen wir:

$$\alpha(g(x)) \cdot g(x)^{\frac{n}{n-1-\vartheta}} = K^{\frac{n}{n-1-\vartheta}} \alpha(g(x)) |\ln|x|| = \beta(x)|\ln|x|| \;\; \forall\, x \in B_{r_0}(0)$$

und $B_R(0) \supset B_{r_0}(0)$.
Folglich,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} e^{\alpha(g) g^{\frac{n}{n-1-\vartheta}}} dx \;&\geq\; \int_{B_{r_0}(0)} e^{\beta(x)|\ln|x||} dx \overset{\beta(x)\geqslant n}{\geq} \int_{B_{r_0}(0)} e^{n|\ln|x||} dx \\
(|\ln|x|| = -\ln|x|) \;&=\; \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{|x|^n} = \infty,
\end{aligned}$$

weil $\dim B_{r_0}(0) = n$.

<u>Fall 2</u> ($n = p,\ \vartheta = n-1$):
Sei

$$\varphi(y) := \mathbf{K} \ln|\ln y| \tag{6.50}$$

Dann $\varphi$ differenzierbar auf $(0; \frac{1}{e})$. Wir berechnen:

$$|\varphi'(y)| = \frac{\mathbf{K}}{y|\ln y|}. \tag{6.51}$$

Wählen wir $R \in ]0; \frac{1}{e}]$ so, dass $\frac{\mathbf{K}}{y|\ln y|}$ fallend auf $]0; R]$ ist. Dann

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} |\nabla g|^n \, dx \;&\overset{(6.47)}{=}\; |\partial B_1| \int_0^r |\varphi'(y)|^n y^{n-1} dy \overset{(6.51)}{=} \overbrace{|\partial B_1| \mathbf{K}^n}^{K_2} \int_0^r \frac{dy}{y|\ln y|^n} \\
&=\; K_2 \int_{y=0}^r \frac{d\ln y}{|\ln y|^n} \overset{\ln y<0}{=} -K_2 \int_\infty^{|\ln r|} \frac{dt}{t^n} = \frac{K_2}{n-1} \cdot \frac{1}{|\ln r|^{n-1}} \\
&=\; \frac{c\mathbf{K}^n}{|\ln r|^\vartheta},
\end{aligned}$$

weil $\vartheta = n-1$.

Wählen wir $\mathbf{K}$ so, dass $c\mathbf{K}^n = K$.
In diesem Fall

$$\forall\, y : \int_{B_r(y)} |\nabla g|^n \, dx \overset{\text{Lemma 6.1}}{\leq} \int_{B_r(0)} |\nabla g|^n \, dx = \frac{K}{|\ln r|^{\vartheta}}.$$

Sei $\beta : x \mapsto \mathbf{K}\alpha(g(x))$.
Dann $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x) = \infty$, weil

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0} \alpha(g(x)) = \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty.$$

Deshalb

$$\boxed{\exists\, r_0 \in ]0;R] \text{ mit: } \beta(x) \geq 2 \ \ \forall\, x \in B_{r_0}(0)}.$$

Außerdem ist $g(x) \overset{(6.47),(6.50)}{=} \mathbf{K} \ln|\ln|x||$.
Folglich, $\forall\, x \in B_{r_0}(0)$ :

$$\alpha(g(x)) \cdot g(x) = \mathbf{K}\alpha(g(x)) \ln|\ln|x|| = \beta(x) \ln|\ln|x|| \geq 2\ln|\ln|x||$$

und $B_R(0) \supset B_{r_0}(0)$.
Darum

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g)\cdot g}} dx \quad &\geq \quad \int_{B_{r_0}(0)} e^{e^{2\ln|\ln|x||}} dx = \int_{B_{r_0}(0)} e^{|\ln|x||^2} dx \\ &\overset{\ln|x|<0}{=} \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{e^{\ln|x|\cdot|\ln|x||}} = \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{|x|^{|\ln|x||}}.\end{aligned}$$

Sei $r_1 \leq r_0$, $\ln r_1 \leq -n$. Dann

$$\int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g)\cdot g}} dx \geq \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{|x|^{|\ln|x||}} \geq \int_{B_{r_1}(0)} \frac{dx}{|x|^n} = \infty.$$

<u>Fall 3</u> $(n > p,\ 0 \leq \vartheta < p)$:
Sei

$$\varphi(y) = \mathbf{K}|\ln y|^{\frac{p-\vartheta}{p}} \tag{6.52}$$

Dann $\varphi$ differenzierbar auf (0;1). Wir sehen:

$$|\varphi'(y)| = \overbrace{\frac{p-\vartheta}{p}\mathbf{K}}^{:=K_1} \frac{1}{y|\ln y|^{\vartheta/p}} = \frac{K_1}{y|\ln y|^{\vartheta/p}}. \tag{6.53}$$

Wählen wir $R \in ]0;1]$ so, dass $|\varphi'|$ fallend auf $]0;R]$ ist.

Dann wächst $\frac{1}{|\ln y|}$ auf $]0;R]$, da $R \le 1$. Darum gilt $\forall\, r \in ]0;R]$:

$$\int_{B_r(0)} |\nabla g|^p \, dx \overset{(6.47)}{=} |S_1^{n-1}| \int_0^r |\varphi'(y)|^p y^{n-1} dy \overset{(6.53)}{=} \overbrace{|S_1^{n-1}| K_1^p}^{:=K_2} \int_0^r \frac{y^{n-1-p} dy}{|\ln y|^\vartheta}$$
$$\le K_2 \int_0^r \frac{y^{n-1-p} dy}{|\ln r|^\vartheta} \overset{n \ge p}{=} \frac{K_2}{n-p} \cdot \frac{y^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta}\Big|_0^r = \frac{K_2}{n-p} \cdot \frac{r^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta}.$$

Wählen wir $\mathbf{K}$ so, dass $K = \frac{K_2}{n-p}$ mit $K_2 = |S_1^{n-1}| K_1^p = |S_1^{n-1}| \left(\frac{p-\vartheta}{p}\mathbf{K}\right)^p$.
Daraus folgt,

$$\int_{B_r(0)} |\nabla g|^p \, dx \le K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta} \quad \left( \overset{\text{Lemma 6.1}}{\Rightarrow} \forall\, y : \int_{B_r(y)} |\nabla g|^p \, dx \le K \frac{r^{n-p}}{|\log r|^\vartheta} \right).$$

Sei $\beta : x \mapsto \mathbf{K}^{\frac{p}{p-\vartheta}} \alpha(g(x))$.

Dann $\lim\limits_{x \to 0} \beta(x) = \infty$, da

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x \to 0} \alpha(g(x)) = \lim_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty.$$

Deshalb

$$\boxed{\exists\, r_0 \in ]0;R] \text{ mit: } \beta(x) \ge n \ \forall\, x \in B_{r_0}(0)}.$$

Außerdem ist $g(x)^{\frac{p}{p-\vartheta}} \overset{(6.47),(6.52)}{=} \mathbf{K}^{\frac{p}{p-\vartheta}} |\ln|x||$.

Folglich, $\alpha(g(x)) \cdot g(x)^{\frac{p}{p-\vartheta}} = \mathbf{K}^{\frac{p}{p-\vartheta}} \alpha(g(x)) |\ln|x|| = \beta(x) |\ln|x||$.
Also,

$$\int_{B_R(0)} e^{\alpha(g) g^{\frac{p}{p-\vartheta}}} dx \overset{R \ge r_0}{\ge} \int_{B_{r_0}(0)} e^{\beta(x)|\ln|x||} dx \ge \int_{B_{r_0}(0)} e^{n|\ln|x||} dx$$
$$= \int_{B_{r_0}(0)} e^{-n \ln|x|} dx = \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{|x|^n} = \infty.$$

<u>Fall 4</u> $(n > p,\ \vartheta = p)$:
Sei

$$\varphi(y) := \mathbf{K} \ln|\ln y| \tag{6.54}$$

($\Rightarrow \varphi$ differenzierbar auf $(0; \frac{1}{e})$ ). Wir berechnen:

$$|\varphi'(y)| = \frac{\mathbf{K}}{y|\ln y|}. \tag{6.55}$$

Wählen wir $R \in ]0; \frac{1}{e}]$ so, dass $|\varphi'(y)|$ auf $]0;R]$ fällt.

Aber $\frac{1}{|\ln y|}$ wächst auf $]0;R]$ (weil $R \le 1$), und darum gilt $\forall\, r \in ]0;R]$:

$$\int_{B_r(0)} |\nabla g|^p \, dx \overset{(6.47)}{=} |S_1^{n-1}| \int_0^r |\varphi'(y)|^p y^{n-1} dy = \overbrace{|S_1^{n-1}| \mathbf{K}^p}^{:=K_2} \int_0^r \frac{y^{n-1-p} dy}{|\ln y|^p}$$

$$\leq \quad K_2 \int_0^r \frac{y^{n-1-p} dy}{|\ln r|^p} \overset{n \geq p}{=} \frac{K_2}{n-p} \cdot \frac{y^{n-p}}{|\ln r|^p}\Big|_0^r = \frac{K_2}{n-p} \cdot \frac{r^{n-p}}{|\ln r|^p}.$$

Wählen wir $\mathbf{K}$ so, dass $K = \frac{K_2}{n-p}$ mit $K_2 = |S_1^{n-1}|\mathbf{K}^p$.
Das heißt, $\forall\, r, x_0$ :

$$\int_{B_r(x_0)} |\nabla g|^p \, dx \overset{\text{Lemma 6.1}}{\leq} \int_{B_r(0)} |\nabla g|^p \, dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\ln r|^p} = K \frac{r^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta}.$$

Sei $\beta : x \mapsto \mathbf{K}\alpha(g(x))$.
Dann $\lim\limits_{x\to 0} \beta(x) = \infty$, da $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \alpha(g(x)) = \lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.
Deshalb

$$\boxed{\exists\, r_0 \in ]0; R] \text{ mit: } \beta(x) \geq 2 \ \ \forall\, x \in B_{r_0}(0)}.$$

Außerdem ist $g(x) \overset{(6.47),(6.54)}{=} \mathbf{K} \ln|\ln|x||$.

Wir berechnen: $\forall\, x \in B_{r_0}(0)$:

$$\alpha(g(x)) \cdot g(x) = \mathbf{K}\alpha(g(x)) \ln|\ln|x|| = \beta(x) \ln|\ln|x|| \geq 2\ln|\ln|x||.$$

Folglich,

$$\int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g)\cdot g}} dx \overset{R \geqslant r_0}{\geq} \int_{B_{r_0}(0)} e^{e^{2\ln|\ln|x||}} dx = \int_{B_{r_0}(0)} e^{|\ln|x||^2} dx.$$

Wählen wir $r_1 \leq r_0$ so, dass $\ln r_1 \leq -n$ $(\Rightarrow |\ln|x||^2 \geq -n\ln|x| \quad \forall\, x \in B_{r_1}(0))$. Dann

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} e^{e^{\alpha(g)\cdot g}} dx &\geq \int_{B_{r_0}(0)} e^{|\ln|x||^2} dx \overset{r_0 \geqslant r_1}{\geq} \int_{B_{r_1}(0)} e^{-n\ln|x|} dx \\ &= \int_{B_{r_1}(0)} \frac{dx}{|x|^n} = \infty. \end{aligned}$$

Damit ist Satz 6.3 bewiesen. □

Jetzt beweisen wir, dass man auch für den Fall ($n = p$, $\vartheta = 0$) das Resultat aus Satz 6.2 nicht verbessern kann. Genauer:

**Satz 6.4** *Sei* $p = n \geq 2, \quad \vartheta = 0.$

*Dann*
$\forall K > 0,\ K_1 > 0$ *und* $\forall\, \alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$
$\exists\, u \in W_0^{1,n}(B_1(0)),\ u \geq 0 : \int_{B_1(0)} |\nabla u|^n \, dx \leq K$ *und* $\int_{B_1(0)} e^{\alpha(u) u^{\frac{n}{n-1}}} dx > K_1$.

**Beweis:** Wir wählen $\mathbf{K}$ so, dass

$$K = c\mathbf{K}^n \quad \text{mit} \quad c := |\partial B_1|. \tag{6.56}$$

Bestimmen wir $\forall\, t > 0: \quad u_t : B_1(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

$$u_t(x) = \begin{cases} \mathbf{K} t^{1-1/n} & \text{für } |x| \leq e^{-t}, \\ \frac{\mathbf{K}}{\sqrt[n]{t}} |\ln|x|| & \text{für } |x| \geq e^{-t}. \end{cases}$$

Die Funktion $u_t(.)$ ist wohldefiniert und stetig, weil für $|x| = e^{-t}$ gilt

$$\mathbf{K} t^{1-1/n} = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt[n]{t}} |\ln|x||.$$

Außerdem, für $x \in \partial B_1(0) : u_t(x) = \frac{\mathbf{K}}{\sqrt[n]{t}} |\ln 1| = 0$. Folglich, $u_t \in W_0^{1,n}(B_1(0))$, und:

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} |\nabla u_t|^n \, dx &= c \int_{e^{-t}}^1 \left| \frac{d}{dr} \left( \frac{\mathbf{K}}{\sqrt[n]{t}} |\ln r| \right) \right|^n r^{n-1} dr = \frac{c\mathbf{K}^n}{t} \int_{e^{-t}}^1 \frac{1}{r^n} r^{n-1} dr \\ &\overset{(6.56)}{=} \frac{K}{t} \overbrace{\int_{e^{-t}}^1 \frac{dr}{r}}^{=t} = K. \end{aligned}$$

Somit $\int_{B_1(0)} |\nabla u_t|^n \, dx = K$.

Schätzen wir jetzt $\int_{B_1(0)} e^{\alpha(u_t) u_t^{\frac{n}{n-1}}} dx$ ab.
Offensichtlich,

$$\forall\, x \in B_{e^{-t}}(0) : u_t(x) = \mathbf{K} t^{1-1/n} =: a_t \in \mathbb{R}, \tag{6.57}$$

und $\lim\limits_{t \to \infty} a_t = \infty \Rightarrow \lim\limits_{t \to \infty} \alpha(a_t) = \infty$. Also,

$$\begin{aligned} \int_{B_1(0)} e^{\alpha(u_t) u_t^{\frac{n}{n-1}}} dx &\overset{(6.57)}{\geq} \int_{B_{e^{-t}(0)}} e^{\alpha(a_t) \mathbf{K}^{\frac{n}{n-1}} t} dx = |B_{e^{-t}}| e^{\alpha(a_t) \mathbf{K}^{\frac{n}{n-1}} t} \\ &= |B_1| e^{(\alpha(a_t) \mathbf{K}^{\frac{n}{n-1}} - n) t} \xrightarrow{t \to \infty} \infty, \end{aligned}$$

weil $\alpha(a_t) \to \infty$ für $t \to \infty$.
Das heißt,

$$\forall\, K_1 > 0 \, \exists\, t > 0 : \int_{B_1(0)} e^{\alpha(u_t) u_t^{\frac{n}{n-1}}} dx > K_1.$$

Damit ist Satz 6.4 bewiesen. $\square$

# Kapitel 7

## Abschätzungen für Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit: $\forall B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(x)|^p dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}, \quad p < \lambda$

Am Anfang dieses Kapitels wird die Zugehörigkeit der Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$\forall B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(x)|^p dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}$$

untersucht. Unabhängig davon wird in der Sektion 7.2 das optimale Resultat angegeben. (Wir meinen Optimalität im Sinne Definition 1.7). Dass dieses Resultat optimal ist, wird in der Sektion 7.3 bewiesen.

### 7.1 erster Versuch

Folgender Satz kann man ohne Benutzung der Symmetrisation beweisen (aber später beweisen wir ein besseres Resultat):

**Satz 7.1** *Sei $\Omega$–beschränktes Lipschitzgebiet,* $\lambda > p \geq 1$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$. *Außerdem, gelte* $\vartheta > \lambda$ *und* $\tau < q(\frac{\vartheta}{\lambda} - 1)$ *(o.B.d.A.* $\tau > 0$*).*

*Dann* $\forall K > 0 \; \exists K_1 > 0$, *so dass für jedes* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *die folgende Inklusion gilt:*

$$\Big(\forall R \leq \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_R(y)\cap\Omega} |\nabla u|^p \, dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \;\; \textit{und} \;\; \int_\Omega |u|^p \, dx \leq K\Big) \Rightarrow$$
$$\int_\Omega |u|^q |\log |u||^\tau \, dx \leq K_1.$$

**Beweis:** (in diesem Satz $Q := [0; 1[^n$)
Wir beweisen den Satz 7.1 zuerst für den Fall "$u \in W^{1,p}(Q)$, $u$ stetig".

Dafür werden wir die Bedingung unseres Satzes folgendermaßen umformulieren (mit einer eventuell geänderten Konstante $K$ ):

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \text{ Würfel } W \text{ mit Kantenlänge } 2^{-m}: & \int_W |\nabla u|^p\,dx \le K^p \frac{(2^{-m})^{(n-\lambda)}}{m^\vartheta}. \\ \text{sowie} & \int_Q |\nabla u|^p\,dx \le K^p, \quad \int_Q |u|^p\,dx \le K^p. \end{array}\right\} \tag{7.1}$$

Wir wollen zeigen:
für bestimmte $K_1 = K_1(K)$: $(7.1) \Rightarrow \int_Q |u|^q |\log|u||^\tau\,dx \le K_1$.

In der Tat: sei $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wir zerlegen $Q$ in $2^{mn}$ "halboffene" Würfel $Q_m^1, \dots, Q_m^{2^{mn}}$,

$$Q_m^i := \overbrace{x_{i,m}}^{\in\mathbb{R}^n} + [0, 2^{-m}[^n \text{ mit } Q = \bigcup_{i=1}^{2^{mn}} Q_m^i,$$

alle $Q_m^i$ sind disjunkt. Wir definieren $u^{(m)} : Q \to \mathbb{R}$ so:

$$u^{(m)}(x) := \begin{cases} 2^{mn} \int_{Q_m^1} u(y)dy & \text{für } x \in Q_m^1 \\ \vdots & \vdots \\ 2^{mn} \int_{Q_m^{2^{mn}}} u(y)dy & \text{für } x \in Q_m^{2^{mn}} \end{cases}, \quad 2^{mn} = \frac{1}{|Q_m^j|} \ \forall j \tag{7.2}$$

**Lemma 7.1** *Bedingung (7.1) gelte für* $u \in W^{1,p}(Q)$, $m \ge 1$.
*Dann*

$$\forall x \in Q \cap Q - 2^{-m}e_i : |u^{(m)}(x + 2^{-m}e_i) - u^{(m)}(x)| \le K \frac{2^{-m(1-\frac{\lambda}{p})}}{m^{\vartheta/p}},$$

*hierbei ist* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *Standardbasis vom* $\mathbb{R}^n$.

**Beweis:** sei $x \in Q_m^\alpha$, $x + 2^{-m}e_i \in Q_m^\beta = Q_m^\alpha + 2^{-m}e_i$. Dann folgt

$$\begin{aligned} |u^{(m)}(x + 2^{-m}e_i) - u^{(m)}(x)| &\overset{(7.2)}{=} 2^{mn} \left| \int_{Q_m^\alpha} u(y + 2^{-m}e_i) - u(y)dy \right| \\ &\le 2^{mn} \int_{Q_m^\alpha} dy \int_0^{2^{-m}} |\nabla u(y + te_i)|dt \\ &\le 2^{mn} \int_0^{2^{-m}} dt \int_{Q_m^\alpha + te_i} |\nabla u(y)|dy. \end{aligned}$$

Aber nun ist $2^{mn} = \frac{1}{|Q_m^\alpha|}$, und aus der Jensen'sche Ungleichung folgt:

$$\frac{1}{|U|} \int_U |v|\,dx \le \sqrt[p]{\frac{1}{|U|} \int_U |v|^p\,dx}$$

Zum Schluß bekommen wir:

$$|u^{(m)}(x + 2^{-m}e_i) - u^{(m)}(x)| \quad \le \quad \int_0^{2^{-m}} dt( \overbrace{2^{mn}}^{|Q_m^\alpha|^{-1}} \int_{Q_m^\alpha + te_i} |\nabla u(y)|\,dy)$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\leq} \int_0^{2^{-m}} dt \sqrt[p]{2^{mn} \int_{Q_m^\alpha + te_i} |\nabla u(y)|^p dy}$$

$$\overset{(7.1)}{\leq} 2^{-m} \cdot \sqrt[p]{2^{mn} K^p \frac{2^{-m(n-\lambda)}}{m^\vartheta}} = K \frac{2^{-m(1-\frac{\lambda}{p})}}{m^{\vartheta/p}}.$$

$\square$(von Lemma 7.1)

Aus Lemma 7.1 folgt: $\forall\, x \in Q \cap Q - 2^{-m} e_i$ :

$$\left| \frac{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}{2^{-m}} \right| \leq K \frac{2^{\frac{m\lambda}{p}}}{m^{\vartheta/p}}. \tag{7.3}$$

Wir wollen jetzt beweisen:

$$\int_{Q \cap Q - 2^{-m} e_i} \left| \frac{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}{2^{-m}} \right|^p dx \leq K^p \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{7.4}$$

In der Tat, sei $\Lambda_i := \{\alpha | Q_m^\alpha \subset Q \cap Q - 2^{-m} e_i\}$. Dann $\forall\, \alpha \in \Lambda_i$ :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_m^\alpha} |\overbrace{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}^{= const \text{ im } Q_m^\alpha}|^p dx &\overset{(7.2)}{=} |Q_m^\alpha| \left| \frac{1}{|Q_m^\alpha|} \int_{Q_m^\alpha} u(x + 2^{-m} e_i) - u(x) dx \right|^p \\
&\leq |Q_m^\alpha|^{1-p} \left( \int_{Q_m^\alpha} dx \int_0^{2^{-m}} |\nabla u(x + te_i)| dt \right)^p \\
&\overset{(3.1)}{\leq} \int_{Q_m^\alpha} \left| \int_0^{2^{-m}} |\nabla u(x + te_i)| dt \right|^p dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{Q_m^\alpha} \left| \frac{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}{2^{-m}} \right|^p dx \leq \int_{Q_m^\alpha} \left| \int_0^{2^{-m}} \frac{|\nabla u(x + te_i)|}{2^{-m}} dt \right|^p dx. \tag{7.5}$$

Jetzt definieren wir $Q' := Q \cap Q - 2^{-m} e_i$.

$$\begin{aligned}
\int_{Q'} \left| \frac{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}{2^{-m}} \right|^p dx &= \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \int_{Q_m^\alpha} \left| \frac{u^{(m)}(x + 2^{-m} e_i) - u^{(m)}(x)}{2^{-m}} \right|^p dx \\
&\overset{(7.5)}{\leq} \sum_{\alpha \in \Lambda_i} \int_{Q_m^\alpha} \left| \int_0^{2^{-m}} \frac{|\nabla u(x + te_i)|}{2^{-m}} dt \right|^p dx \\
&\leq \int_{Q'} 2^{mp} \left| \int_0^{2^{-m}} |\nabla u(x + te_i)| dt \right|^p dx \\
&\overset{(3.1)}{\leq} 2^m \int_{Q'} dx \int_0^{2^{-m}} |\nabla u(x + te_i)|^p dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^m \int_0^{2^{-m}} dt \overbrace{\int_{Q'} |\nabla u(x+te_i)|^p dx}^{\leqslant K^p \quad (\text{nach } (7.1))} \\
&\leq K^p.
\end{aligned}
$$

**Lemma 7.2** $\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{L^q(Q)} \leq \frac{cK}{(m+1)^{\vartheta/\lambda}}$.

**Beweis:**
Wir definieren einen Raum $H(Q_R)$ durch die folgende Konstruktion:
Sei $Q_R(x) = x + [0; R[^n$ und $Q_R := Q_R(x)$ für ein $x$.
Man zerlegt $Q_R$ auf $Q^1, \dots, Q^{2^n}$ mit

$$
Q^i = Q_{R/2}(x_i), \quad Q_R = \bigcup_{i=1}^{2^n} Q^i \quad \text{und} \quad Q^i \text{ sind disjunkt.}
$$

Dann der Raum $H(Q_R)$ wie folgt definiert:

$$
\left.
\begin{array}{l}
f \in H(Q_R) \quad \text{genau dann, wenn } f : Q_R \to \mathbb{R}, \ \int_{Q_R} f\,dx = 0 \quad \text{und} \\
\qquad \exists\, a_1, \dots, a_{2^n} \in \mathbb{R} \quad \text{mit:} \quad f(x) = \begin{cases} a_1 & \text{auf} \quad Q^1 \\ & \vdots \\ a_{2^n} & \text{auf} \quad Q^{2^n} \end{cases}
\end{array}
\right\}
\tag{7.6}
$$

Offensichtlich ist $H(Q_R)$ endlichdimensional. Sei

$$
\|f\|_{H(Q_R)} := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_R \cap Q_R - \frac{R}{2}e_i} \left| \frac{f(y + \frac{R}{2}e_i) - f(y)}{R/2} \right|^p dy}. \tag{7.7}
$$

$\|\cdot\|_{H(Q_R)}$ ist tatsächlich eine Norm in $H(Q_R)$, weil offensichtlich

$$
\begin{cases}
\forall\, \mu \geq 0 : \mu\|f\|_{H(Q_R)} = \|\mu f\|_{H(Q_R)} \\
\|f\|_{H(Q_R)} + \|g\|_{H(Q_R)} \geq \|f+g\|_{H(Q_R)} \\
f \in H(Q_R),\ \|f\|_{H(Q_R)} = 0 \overset{(7.6),(7.7)}{\Rightarrow} \int_{Q_R} f = 0 \ \& \ f = const \ \Rightarrow f \equiv 0.
\end{cases}
$$

Wir schreiben auch

$$
\|\cdot\|_q := \|\cdot\|_{L^q(Q)}.
$$

Da der Raum $H(Q_R)$ endlichdimensional ist, sind folglich alle Normen in diesem Raum equivalent. Mit einem geeigneten $c(R)$ gilt daher

$$
\forall\, f \in H(Q_R) : \|f\|_{H(Q_R)} \geq c(R)\|f\|_{L^q(Q_R)} \tag{7.8}
$$

Wie hängt $c(R)$ vom $R$ ab?

$$
\|f\|_{H(Q_R)} \overset{(7.7)}{=} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_R \cap Q_R - \frac{R}{2}e_i} \left| \frac{f(y + \frac{R}{2}e_i) - f(y)}{R/2} \right|^p dy}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c} y = Rx, \\ f(Rz) = \tilde f(z) \end{array}\right) \quad &= \quad R^{\frac{n}{p}-1} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \int_{Q_1 \cap Q_1 - \frac{1}{2}e_i} \left| \frac{\tilde f(x + \frac{1}{2}e_i) - \tilde f(x)}{1/2} \right|^p dx} \\
(\text{ wegen } (7.8)\ ) \quad &\geq \quad R^{\frac{n}{p}-1} c(1) \|\tilde f\|_{L^q(Q_1)} \\
(\ \tilde f(z) = f(Rz)\ ) \quad &= \quad R^{\frac{n}{p}-1-\frac{n}{q}} c(1) \|f\|_{L^q(Q_R)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \forall\, f \in H(Q_R): \quad \|f\|^q_{L^q(Q_R)} \leq c R^{q(\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1)} \|f\|^q_{H(Q_R)} \tag{7.9}
$$

mit $\quad c = 1/c(1)^q$.

Betrachten wir die Funktionen

$$
v^i_m := (u^{(m+1)} - u^{(m)})\Big|_{Q^i_m} \qquad (\text{dann } \ v^i_m \in H(Q^i_m)\,) \tag{7.10}
$$

Sei $\ r_{mj} = 2^{-(m+1)} e_j$. Dann folgt nach (7.7) und (7.3), unter Berücksichtigung der Identität $\ \|v^i_m\|_{H(Q^i_m)} = \|u^{(m+1)}\|_{H(Q^i_m)}$:

$$
\|v^i_m\|_{H(Q^i_m)} \leq 2^{\frac{\lambda}{p}} K \frac{2^{\frac{m\lambda}{p}}}{(m+1)^{\vartheta/p}} \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{|Q^i_m \cap Q^i_m - r_{mj}|}_{=2^{-mn-1}}} = cK \frac{2^{\frac{m(\lambda-n)}{p}}}{(m+1)^{\vartheta/p}} \tag{7.11}
$$

($c$ kann verschieden in verschiedenen Formeln sein!)

$$
v^i_m \in H(Q^i_m) \Rightarrow
$$

$$
\begin{aligned}
\|v^i_m\|^q_{L^q(Q^i_m)} \quad &\overset{(7.9),(7.11)}{\leq} \quad c \cdot 2^{-mq(\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1)} \underbrace{\cdot \|v^i_m\|^{q-p}_{H(Q^i_m)} \cdot}_{\leq \left( cK \frac{2^{\frac{m(\lambda-n)}{p}}}{(m+1)^{\vartheta/p}} \right)^{q-p}} \quad \|v^i_m\|^p_{H(Q^i_m)} \\
&\leq \quad cK^{q-p} \frac{2^{-m\left(q(\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1) - \frac{(\lambda-n)(q-p)}{p}\right)}}{(m+1)^{\frac{q-p}{p}\vartheta}} \|v^i_m\|^p_{H(Q^i_m)} =: I.
\end{aligned}
$$

Es ist $\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}, \quad$ folglich $\ \lambda = \frac{qp}{q-p}$.
Darum gilt $\ q(\frac{n}{q} - \frac{n}{p} + 1) - \frac{(\lambda-n)(q-p)}{p} = \frac{(p-q)n + pq}{p} - \frac{pq - n(q-p)}{p} = 0$

$$
\Rightarrow \|v^i_m\|^q_{L^q(Q^i_m)} \leq I = \frac{cK^{q-p}}{(m+1)^{\frac{q-p}{p}\vartheta}} \|v^i_m\|^p_{H(Q^i_m)}. \tag{7.12}
$$

Aber aus (7.7) und (7.10) folgt:

$$
\sum_{i=1}^{2^{mn}} \|v^i_m\|^p_{H(Q^i_m)} \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{2^{mn}} \int_{Q^i_m \cap Q^i_m - r_{mj}} \left| \frac{u^{(m+1)}(y + r_{mj}) - u^{(m+1)}(y)}{|r_{mj}|} \right|^p dy
$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\int_{Q\cap Q-r_{mj}} \left| \frac{u^{(m+1)}(y+r_{mj}) - u^{(m+1)}(y)}{|r_{mj}|} \right|^p dy}_{\leq K^p \text{ wegen (7.4) und } r_{mj}=2^{-m-1}e_j}$$
$$\leq nK^p.$$

Also,

$$\sum_{i=1}^{2^{mn}} \|v_m^i\|_{H(Q_m^i)}^p \leq nK^p. \tag{7.13}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{L^q(Q)}^q &\overset{(7.10)}{=} \sum_{i=1}^{2^{mn}} \|v_m^i\|_{L^q(Q)}^q \overset{(7.12)}{\leq} \frac{cK^{q-p}}{(m+1)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}} \sum_i \|v_m^i\|_{H(Q_m^i)}^p \\ &\overset{(7.13)}{\leq} \frac{cK^q}{(m+1)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}}.\end{aligned}$$

Folglich, $\|u^{(m+1)} - u^{(m)}\|_{L^q(Q)} \leq \frac{cK}{(m+1)^{\vartheta/\lambda}}$. □(von Lemma 7.2)

Weil $|Q| = 1$ ist,

$$\|u^{(0)}\|_{L^q(Q)} \overset{(7.2)}{=} \left|\int_Q u(x)dx\right| \leq |Q|^{\frac{p}{p-1}} \sqrt[p]{\int_Q |u|^p\,dx} \overset{(7.1)}{\leq} K$$

und somit

$$\|u^{(0)}\|_{L^q(Q)} \leq K. \tag{7.14}$$

Im Weiteren arbeiten wir mit Orlicz-Räumen.

Sei $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex, stetig, $g(0) = 0$, $\forall\, x > 0 : g(x) > 0$.
Die Orlicz-Norm $\|\cdot\|_g$ ist wie folgt definiert:

$$\|f\|_g := \inf\{t > 0 |\ \int_Q g\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx \leq 1\}.$$

Orlicz-Raum wird definiert durch $L^g(Q) := \{u \in L^1(Q) |\ \|u\|_g < \infty\}$.

Wir werden Dreiecksungleichung benutzen: $\|f_1\|_g + \|f_2\|_g \geq \|f_1 + f_2\|_g$.
Sei $\forall\, T > 0 :$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$g : x \mapsto \frac{x^q \varphi(x)^\tau}{T}, \quad \text{wobei} \quad \varphi(x) := \begin{cases} x & \text{bei } x \leq 1 \\ \ln x + 1 & \text{bei } x \geq 1 \end{cases} \tag{7.15}$$

gesetzt ist. (Damit gilt $q \geq 1$, $\tau > 0$).

Es ist klar, dass $\varphi$ und $\varphi'$ sind stetig auf $R_{\geq 0}$ ist, $\forall\, x > 0 : \varphi(x) > 0$.
Darum gilt für $g : x \mapsto T^{-1} x^q \varphi(x)^\tau$: $g$ und $g'$ sind stetig auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $g(0) =$

0, $\quad \forall\, x > 0 : g(x) > 0.$

Wir zeigen die Konvexität von $g$. Wegen "$g \in C^1(\mathbb{R}_{>0})$" genügt es zu zeigen: $g'(x)$ wachsend für $x \geq 0$.

Im Fall $x \in [0;1]$ : $\quad g(x) = T^{-1}x^{q+\tau}$ & $q+\tau > 1 \Rightarrow g'$ ist wachsend auf $[0;1]$ (klar).

Für $x > 1$:

$$\begin{aligned} g(x) &= T^{-1}x^q(1+\ln x)^\tau \\ \Rightarrow \quad T \cdot g'(x) &= qx^{q-1}(1+\ln x)^\tau + x^q \cdot \frac{\tau(1+\ln x)^{\tau-1}}{x} \\ &= x^{q-1}(q(1+\ln x)^\tau + \tau(1+\ln x)^{\tau-1}). \end{aligned}$$

Aber $x^{q-1}$ wächst bei $x > 1$ (weil $q-1 \geq 0$ ).

Also, wir müssen nur zeigen, dass

$$q(1+\ln x)^\tau + \tau(1+\ln x)^{\tau-1} \text{ wächst,}$$

mit anderen Worten,

$$\frac{d}{dx}\left(q(1+\ln x)^\tau + \tau(1+\ln x)^{\tau-1}\right) \geq 0 \ \ \forall\, x > 1.$$

In der Tat,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(q(1+\ln x)^\tau + \tau(1+\ln x)^{\tau-1}\right) = \\ &\qquad = \frac{q\tau(\ln x+1)^{\tau-1} + \tau(\tau-1)(\ln x+1)^{\tau-2}}{x} \\ &\qquad = \frac{\tau(\ln x+1)^{\tau-2}}{x}\overbrace{(q(\ln x+1)+\tau-1)}^{\geq q+\tau-1\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Konvexität von $g$ bewiesen und es gilt

$$g(0) = 0, \quad \forall\, x > 0 : g(x) > 0.$$

Die Größe

$$\|f\|_g = \inf\{t > 0 | \int_Q g\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx \leq 1\}$$

ist dabei eine Orlicz-Norm.

Sei $u : Q \to \mathbb{R}$ und es gelte (7.1). Sei, weiter,

$$f_0 := u^{(0)}, \quad f_i := u^{(i)} - u^{(i-1)} \ \ \forall\, i \geq 1 \tag{7.16}$$

Nun haben wir $\|u^{(0)}\|_{L^q(Q)} \leq K$ nach (7.14) und

$$\forall\, m \geq 1 : \|u^{(m)} - u^{(m-1)}\|_{L^q(Q)} \leq \frac{cK}{m^{\vartheta/\lambda}} \text{ wegen Lemma 7.2.}$$

Folglich,

$$\|f_0\|_{L^q} \leq K, \quad \forall\, m \geq 1 : \|f_m\|_{L^q} \leq \frac{cK}{m^{\vartheta/\lambda}}. \tag{7.17}$$

Wir müssen $\|f_m\|_g$ abschätzen. Offensichtlich hat man

$$f_m \equiv 0 \Leftrightarrow \|f_m\|_g = 0.$$

Seien $f_m \not\equiv 0, \quad t := \|f_m\|_g$. Für $0 < t < \infty$ ist $g$ stetig, und daher

$$\int_Q g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right) dx = 1$$

(weil $t = \inf\{s > 0 | \int_Q g\left(\frac{|f_m(x)|}{s}\right) dx \leq 1\}$ )

$$\Rightarrow 1 \overset{(7.15)}{=} \frac{1}{T} \int_Q \left|\frac{f_m}{t}\right|^q \varphi\left(\frac{|f_m|}{t}\right)^\tau dx \leq \frac{1}{t^q \cdot T} \left(\max_{x\in Q} \varphi\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)\right)^\tau \int_Q |f_m|^q dx$$

$$\Rightarrow t^q \leq \frac{\left(\max_{x\in Q} \varphi\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)\right)^\tau}{T} \cdot \|f_m\|^q_{L^q(Q)} \tag{7.18}$$

Jetzt müssen wir $\max_{x\in Q} \varphi\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)$ abschätzen. Wir stellen zunächst fest

$$f_m(x) = const \text{ auf } Q^\alpha_m \text{ für jedes } \alpha.$$

Somit gilt $|f_m(x)|$ nimmt das Maximum bei $x \in Q^\beta_m$ an.
Für $t = \|f_m\|_g \neq 0$ :

$$1 = \int_Q g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right) dx \geq \int_{Q^\beta_m} g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right) dx = \overbrace{|Q^\beta_m|}^{=2^{-mn}} \max_{x\in Q} g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right).$$

Daher ist $\max_{x\in Q} g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right) \leq 2^{mn}$, und

$$\max_{x\in Q} \left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)^q \overset{(7.15)}{\leq} \max\left\{1, T \max_{x\in Q} g\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)\right\} \leq \max\{1, 2^{mn}T\}. \tag{7.19}$$

Sei $\ln_+ y := \max\{0, \ln y\}$. Dann folgt $\varphi(y) \overset{(7.15)}{\leq} 1 + \ln_+ y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max_{x\in Q} \varphi\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right) &\leq 1 + \ln_+\left(\max_{x\in Q}\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)\right) \overset{(7.19)}{\leq} 1 + \ln_+(\sqrt[q]{2^{mn}T}) \\ &\leq 1 + m\overbrace{\ln 2^{\frac{n}{q}}}^{:=c} + \ln_+ T^{1/q} = 1 + \ln_+ T^{1/q} + mc. \end{aligned}$$

Darum folgert man

$$\|f_m\|_g = t \overset{(7.18)}{\leq} \frac{\left(\max\limits_{x\in Q}\varphi\left(\frac{|f_m(x)|}{t}\right)\right)^{\tau/q}}{T^{1/q}}\|f_m\|_{L^q(Q)}$$

$$\overset{\text{s.o.}}{\leq} \begin{cases} \frac{(1+\ln_+ T^{1/q})^{\tau/q}}{T^{1/q}}\|f_0\|_{L^q(Q)} & \text{bei } m=0 \\ \frac{(1+\ln_+ T^{1/q}+c)^{\tau/q}}{T^{1/q}}m^{\tau/q}\|f_m\|_{L^q(Q)} & \text{bei } m\geq 1 \end{cases}$$

Weiter gilt (7.16)$\Rightarrow u^{(m)} = f_0 + \ldots + f_m \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|u^{(m)}\|_g &\leq \sum_{j=0}^{m}\|f_j\|_g \leq \frac{(1+\ln_+ T^{1/q})^{\tau/q}}{T^{1/q}}\|f_0\|_{L^q} \\ &+ \frac{(1+\ln_+ T^{1/q}+c)^{\tau/q}}{T^{1/q}}\sum_{j=1}^{m} j^{\frac{\tau}{q}}\|f_j\|_{L^q} \\ &\overset{(7.17)}{\leq} \frac{(1+\ln_+ T^{1/q})^{\frac{\tau}{q}}}{T^{1/q}}K + \frac{(1+\ln_+ T^{1/q}+c)^{\frac{\tau}{q}}}{T^{1/q}}\sum_{j=1}^{\infty} j^{\frac{\tau}{q}-\frac{\vartheta}{\lambda}}cK =: J.\end{aligned}$$

Wenn $\tau < q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}-1\right)$, also $\frac{\tau}{q}-\frac{\vartheta}{\lambda} < -1$, dann ist $\sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{\frac{\tau}{q}-\frac{\vartheta}{\lambda}} < \infty$,

und wir können $T>0$ so groß wählen, dass $J \leq 1$.
Wir setzen die Schlußkette fort:

$$\|u^{(m)}\|_g \leq (**) \leq 1 \ \ \forall\, m \Rightarrow$$

wenn $\|u^{(m)}\|_g = t \leq 1$, dann

$$\int_Q g(|u^{(m)}|)\,dx \overset{t\leq 1}{\leq} \int_Q g\left(\frac{|u^{(m)}|}{t}\right)\,dx = 1,$$

weil $g$ wachsend ist.
Wenn $u$ stetig auf $Q$ ist, dann ist klar, dass $u^{(m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ f.ü. auf $Q$

$$\Rightarrow g\circ|u^{(m)}| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} g\circ|u| \ \text{ f.ü. auf } Q \quad (\text{weil } g \text{ stetig}).$$

Außerdem gilt $g(.) \geq 0$
$\Rightarrow$ (Lemma von Fatou) $\int_Q g\circ|u|\,dx \leq \liminf\limits_{m\to\infty}\int_Q g\circ|u^{(m)}|\,dx \leq 1.$

Wir haben bewiesen:

$$\left.\begin{array}{lll}\forall\, v\in C(Q) & \text{mit} & \int_{B_R(y)}|\nabla v|^p\,dx \leq K'\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \ \& \ \ \int_Q |v|^p\,dx \leq K' \\ & \text{gilt:} & \int_Q g\circ|v|\,dx \leq 1\end{array}\right\} \quad (7.20)$$

Weiter betrachten wir den Fall: $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega$–ein beschränktes Lipschitzgebiet, $u$ ist eventuell nicht stetig.

Wegen Satz 4.1, $\exists \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n, \quad \Omega' = \Omega'(\Omega)$ mit:

$$(\text{Satz 7.1 gilt } \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega')) \overset{\text{Satz 4.1}}{\Rightarrow} (\text{Satz 7.1 gilt } \forall\, u : \Omega \to \mathbb{R}).$$

Darum liegt o.B.d.A. $u \in W_0^{1,p}(\Omega')$. Wegen $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ können wir o.B.d.A. voraussetzen: $\Omega' \subset\subset Q$. Wegen $u \in W_0^{1,p}(\Omega')$ wissen wir:

$$\begin{array}{l} \text{Es ist genügt, } \quad \text{Satz 7.1} \quad \text{für} \quad u : Q \to \mathbb{R}, \quad \Omega' \subset\subset Q, \\ u\Big|_{\Omega'} \in W_0^{1,p}(\Omega'), \quad \forall\, x \notin \Omega' : u(x) = 0 \quad \text{zu beweisen.} \end{array} \tag{7.21}$$

Sei außerdem $u_h := \omega_h * u$, hier $\omega_h$–Standardkern. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} |\nabla u_h|^p\, dx &= \int_{B_R(y)} |\omega_h * \nabla u|^p\, dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(s) ds \int_{B_R(y)} |\nabla u(x-s)|^p\, dx \\ &\le \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \int_{B_R(z)} |\nabla u|^p\, dx. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} \int_{B_R(y)} |\nabla u|^p\, dx &\le K' \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \;\; \forall\, y \;\Rightarrow \\ \int_{B_R(y)} |\nabla u_h|^p\, dx &\le K' \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \;\; \forall\, h,\, y. \end{aligned}$$

Analog $\forall\, h : \int_Q |u_h|^p\, dx \le \int_Q |u|^p\, dx \le K'$.

Es ist klar, dass $u_h$ stetig $\forall\, h > 0$.
Folglich, $(7.20) \Rightarrow \forall\, h > 0 : \int_Q g \circ |u_h|\, dx \le 1$.
Außerdem konvergiert $u_h \overset{h \to 0}{\longrightarrow} u$ in $L^1$

$\Rightarrow \quad \exists\, (h_i)_{i \in \mathbb{N}},\ h_i \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0$ mit $u_{h_i} \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} u$ f.ü.

$\Rightarrow g \circ |u_{h_i}| \overset{i \to \infty}{\longrightarrow} g \circ |u|$ f.ü. , weil $g$ stetig.

Außerdem, $g(.) \ge 0$.

$\Rightarrow$ (Lemma von Fatou) $\int_Q g \circ |u|\, dx \le \liminf_{i \to \infty} \int_Q g \circ |u_{h_i}|\, dx \overset{(7.20)}{\le} 1$

$\Rightarrow \int_Q |u|^q \varphi(|u|)^\tau\, dx \overset{(7.15)}{\le} T.$ $\square$

## 7.2 zweiter Versuch (Satz 7.2)

Weiter will ich durch Symmetrisation ein besseres Resultat als in Satz 7.1 erhält.

**Satz 7.2** *Seien* $\Omega$ *beschränktes Lipschitzgebiet,* $\Omega, p, \lambda, \vartheta$ *fixiert.*
*Ferner gelte* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$, $\vartheta \geq 0$, $\boxed{\tau = \frac{q\vartheta}{\lambda}}$, $p \geq 1$, $p < \lambda \leq n$.

*Dann* $\forall\, K' > 0\; \exists\, \mathbf{K}' > 0$, *so dass folgende Inklusion* $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt:*

$$\left(\forall\, r \leq 1/2,\; y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)\cap\Omega} |\nabla u|^p \, dx \leq K' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta} \;\;\&\;\; \|u\|_p^p \leq K'\right) \Rightarrow$$
$$\int_{u(x)\neq 0} |u|^q |\log|u||^\tau \, dx \leq \mathbf{K}'.$$

**Beweis:** (im Weiteren sei $Q := [0;1]^n$, $Q_d = [0;d]^n$)
Nach Lemma 5.2, o.B.d.A. können wir voraussetzen, dass[1]

$$\left.\begin{array}{rl} & u := |\tilde{u}|, \\ \text{wobei} & \tilde{u} : Q \to \mathbb{R} \\ \text{und} & \tilde{u}|_{Q_d} \in FT_0(Q_d), \quad \tilde{u}(x) = 0 \;\forall\, x \notin int(Q_d). \end{array}\right\} \tag{7.22}$$

(Erinnerung: $v \in FT_0(Q_d) \;\Rightarrow\; v$ stetig und stückweise linear auf $Q_d$,
$v(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \partial(Q_d)$.)

$$\text{Sei} \quad d := \sqrt[n]{c_1}, \quad c_1 \text{ kommt aus Lemma A.1.} \tag{7.23}$$

Die Behauptung "$\forall r \leq 1/2,\, y : \int_{B_r(y)} |\nabla u|^p \, dx \leq K' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta}$" können wir umformulieren: für ein $K = K(K')$ gilt es

$$\left.\begin{array}{rl} \forall \text{ Würfel } W \text{ mit Kantenlänge } r: & \frac{1}{c_2^p}\int_W |\nabla u|^p \, dx \leq K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r - 1|^\vartheta} \\ \text{insbesondere für } W = Q: & \frac{1}{c_2^p}\int_Q |\nabla u|^p \, dx \leq K \end{array}\right\} \tag{7.24}$$

Wegen (7.22),(7.23): $|\mathrm{trg}\, u| \leq c_1$.
Wählen wir $R$ so, dass

$$|B_R| = c_1 \; (\geq |\mathrm{trg}\, u|\;). \tag{7.25}$$

Sei wieder

$$\left.\begin{array}{rl} & g : x \mapsto \varphi(|x|) \text{ Symmetrisation von } u, \\ \text{wobei} & \varphi : [0;R] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\text{wir wissen, } \varphi \text{ ist fallend}) \end{array}\right\} \tag{7.26}$$

Weiter

$$\mu_i \;:=\; \varphi(2^{-i}R) \;\; \forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{7.27}$$
$$\text{und} \quad T_i \;:=\; \mu_{i+1} - \mu_i \quad (\Rightarrow T_i \geq 0, \;\text{ da } \varphi \text{ fallend}) \tag{7.28}$$

[1] dabei nehmen wir an: im Lemma 5.2 $\psi(t) = \begin{cases} t^q |\log t|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$

Wir unterbrechen den Beweis von Satz 7.2, um das folgende Lemma einzuschieben.

**Lemma 7.3**
*Sei* $h : x \mapsto \phi(|x|)$ *mit* $\phi : [0;a] \to \mathbb{R}$, $\phi(a) = 0$ *($a > 0$ beliebig).*
*Dann ist* $\forall\, \gamma \in ]0;1[$: $\int_{B_a(0)} |\nabla h|^p dx \geq \pi(\gamma) \cdot a^{n-p} |\phi(\gamma a)|^p$
*(hierbei ist* $\pi(\gamma) > 0\ \forall\, \gamma \in ]0;1[$, $\pi(\gamma)$ *hängt nur von* $\gamma$ *ab).*

In der Tat,

$$\begin{aligned}
\int_{B_a(0)} |\nabla h|^p \, dx \quad &\geq \quad \overbrace{|S_1^{n-1}|}^{=:c} \int_{\gamma a}^{a} |\phi'(r)|^p r^{n-1} dr \\
&\geq \quad c(\gamma a)^{n-1} \int_{\gamma a}^{a} |\phi'(r)|^p dr \\
&\overset{(3.1)}{\geq} \quad c \frac{(\gamma a)^{n-1}}{((1-\gamma)a)^{p-1}} \left| \int_{\gamma a}^{a} \frac{d}{dr} \phi(r) dr \right|^p \\
&\overset{\phi(a)=0}{=} \quad \overbrace{c \frac{\gamma^{n-1}}{(1-\gamma)^{p-1}}}^{=:\pi(\gamma)} a^{n-p} |\phi(\gamma a)|^p = \pi(\gamma) a^{n-p} |\phi(\gamma a)|^p.
\end{aligned}$$

Damit ist Lemma 7.3 bewiesen. □

Wir nehmen nun den Beweis von Satz 7.2 wieder auf:
Wir müssen $T_i\ (= \mu_{i+1} - \mu_i)$ abschätzen.
Sei

$$u_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u(x) \leq \mu_i \\ u(x) - \mu_i & \text{für } \mu_i \leq u(x) \leq \mu_{i+1} \\ T_i & \text{für} \quad u(x) \geq \mu_{i+1} \end{cases} \tag{7.29}$$

Dann ist $u_i$ wohldefiniert (weil $T_i = \mu_{i+1} - \mu_i$) und stetig (weil $u$ stetig).

$$|\operatorname{trg} u_i| = |(u > \mu_i)| \overset{(7.26)}{=} |(g > \mu_i)| \overset{(*)}{\leq} |B_{2^{-i}R}| \tag{7.30}$$

$(*)$ folgt aus: $g : x \mapsto \varphi(|x|)$ & $\mu_i = \varphi(2^{-i}R) \overset{\varphi \text{ fallend}}{\Longrightarrow} (g(.) > \mu_i) \subset B_{2^{-i}R}(0)$.

**Wir schätzen $T_i$ für "$i \geq 1$" ab.**
Wegen (7.30), $|\operatorname{trg} u_i| \leq |B_R| = c_1$. Nach Lemma 5.3 können wir daher $int(\operatorname{trg} u_i) = (u_i(.) > 0)$ mit Würfeln $\{W_\beta | \, \beta \in \Lambda_i\}$ überdecken, für die:

$$\left.\begin{array}{rcl} W_\beta \neq W_\gamma & \Rightarrow & |W_\beta \cap W_\gamma| = 0, \\ \forall\, \beta \in \Lambda_i & : & 2^{-n} c_1 |W_\beta| \leq |\operatorname{trg} u_i \cap W_\beta| \leq c_1 |W_\beta|. \end{array}\right\} \tag{7.31}$$

Seien $i$ und $\beta$ fixiert. Definieren wir $f : W_\beta \to \mathbb{R}$ und die Funktion $g_\beta$ folgendermaßen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Sei} & f := u_i\big|_{W_\beta} \quad (\Rightarrow |\operatorname{trg} f| \leq c_1 |W_\beta| \quad \text{wegen (7.31)}\ ) \\ \text{und} & g_\beta : x \mapsto \varphi_\beta(|x|) \text{ ist Symmetrisation von } f. \end{array}\right\} \tag{7.32}$$

Sei $R_\beta$ so gewählt, dass

$$\overline{\operatorname{trg} g_\beta} = B_{R_\beta}(0). \tag{7.33}$$

Nach Lemma 5.4,

$$\left.\begin{array}{c} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx \overset{(7.32)}{\leq} \frac{1}{c_2^p} \int_{W_\beta} |\nabla f|^p \, dx = \frac{1}{c_2^p} \int_{W_\beta} |\nabla u_i|^p \, dx \\ \text{und} \quad g_\beta \ \text{ stetig } \overset{(7.33)}{\Rightarrow} \varphi_\beta(R_\beta) = 0. \end{array}\right\} \tag{7.34}$$

Definieren wir:

$$K_i := \frac{1}{c_2^p} \int_Q |\nabla u_i|^p \, dx \ \ \forall\, i \geq 0. \tag{7.35}$$

Dann gilt $\forall i \geq 1:$

$$K_i := \frac{1}{c_2^p} \int_Q |\nabla u_i|^p \, dx \overset{(7.31)}{=} \sum_{\beta \in \Lambda_i} \frac{1}{c_2^p} \int_{W_\beta} |\nabla u_i|^p \, dx \overset{(7.34)}{\geq} \sum_{\beta \in \Lambda_i} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx.$$

Somit

$$\forall i \geq 1: \ \ K_i \geq \sum_{\beta \in \Lambda_i} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx. \tag{7.36}$$

Wegen (7.29),

$$\int_Q |\nabla u_i|^p \, dx = \int_{\mu_i \leq u < \mu_{i+1}} |\nabla u|^p \, dx,$$

daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} K_i \quad &\overset{(7.35)}{=} \quad \frac{1}{c_2^p} \sum_{i \geq 0} \int_Q |\nabla u_i|^p \, dx = \frac{1}{c_2^p} \sum_{i \geq 0} \int_{\mu_i \leq u < \mu_{i+1}} |\nabla u|^p \, dx \\ &= \quad \frac{1}{c_2^p} \int_Q |\nabla u|^p \, dx \overset{(7.24)}{\leq} K \end{aligned}$$

und schließlich

$$\sum_{i \geq 0} K_i \leq K. \tag{7.37}$$

Wir können $\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx$ abschätzen:

$$|\operatorname{trg} u_i \cap W_\beta| = \left| \operatorname{trg}(u_i|_{W_\beta}) \right| \overset{(7.32)}{=} |\operatorname{trg} g_\beta| \overset{(7.33)}{=} |B_{R_\beta}|.$$

Daher gilt

$$|B_{R/2}| \cdot |W_\beta| \overset{c_1 = |B_R|}{=} 2^{-n} c_1 |W_\beta| \overset{(7.31)}{\leq} |\operatorname{trg}\, u_i \cap W_\beta| = |B_{R_\beta}|.$$

Sei nun $r :=$Kantenlänge vom $W_\beta$. Dann

$$r = \sqrt[n]{|W_\beta|} \overset{\text{s.o.}}{\leq} \sqrt[n]{\frac{|B_{R_\beta}|}{|B_{R/2}|}} = \frac{2R_\beta}{R}.$$

und erfolgt

$$r \le \frac{2R_\beta}{R} \qquad \Big( \overset{R=const}{\Longrightarrow} r \le cR_\beta \Big) \tag{7.38}$$

mit $r$ =Kantenlänge von $W_\beta$.
Aber

$$|B_{R_\beta}| = \Big|\operatorname{trg}(u_i|_{W_\beta})\Big| \le |\operatorname{trg} u_i| \overset{(7.30)}{\le} |B_{2^{-i}R}| \;\Rightarrow\; R_\beta \le 2^{-i}R$$

$$\Rightarrow \log_2 r \overset{(7.38)}{\le} \log_2 \frac{2R_\beta}{R} \overset{R_\beta \le 2^{-i}R}{\le} 1 - i.$$

Wir sehen, dass

$$|\log_2 r - 1| \ge i \tag{7.39}$$

mit $r$ =Kantenlänge vom $W_\beta$.
Damit schließen wir aus (7.38) und (7.39):

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx \overset{\text{Lemma 5.4}}{\le} \frac{1}{c_2^p} \int_{W_\beta} |\nabla u_i|^p \, dx \overset{(7.24)}{\le} K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r - 1|^\vartheta} \le c' K \frac{{R_\beta}^{n-\lambda}}{i^\vartheta}$$

und daher

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx \le c' K \frac{{R_\beta}^{n-\lambda}}{i^\vartheta}. \tag{7.40}$$

Wählen wir für jedes $i \ge 1$ solches $\mathbf{R}_i$, dass

$$\frac{K_i \mathbf{R}_i^p}{c'' 2^{-ni}} = c' K \frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} \quad \text{mit} \quad c'' = (2^{-n} - 3^{-n}) R^n. \tag{7.41}$$

Wir berechnen:

$$\mathbf{R}_i = \left( c' c'' \frac{K}{K_i} \cdot \frac{2^{-ni}}{i^\vartheta} \right)^{1/\lambda}. \tag{7.42}$$

Sei $R_\beta \ge \mathbf{R}_i$. Wir schätzen $\varphi_\beta(R_\beta/3)$ ab.
(Erinnerung: $g_\beta : x \mapsto \varphi_\beta(|x|)$, $\varphi_\beta(R_\beta) = 0$ wegen (7.34).)

Weiter:

$$\begin{aligned} c' K \frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} &\overset{p-\lambda<0,\ \mathbf{R}_i \le R_\beta}{\ge} c' K \frac{{R_\beta}^{p-\lambda}}{i^\vartheta} = {R_\beta}^{p-n} \cdot c' K \frac{{R_\beta}^{n-\lambda}}{i^\vartheta} \\ &\overset{(7.40)}{\ge} {R_\beta}^{p-n} \cdot \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p \, dx \overset{\text{Lemma 7.3}}{\ge} \pi(1/3) \left(\varphi_\beta(R_\beta/3)\right)^p \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c' K \frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} \ge \pi(1/3) \cdot \left(\varphi_\beta(R_\beta/3)\right)^p, \quad \text{wenn} \quad R_\beta \ge \mathbf{R}_i \tag{7.43}$$

Weiter möchten wir beweisen:

$$c' K \frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} \ge \pi(1/3) \cdot T_i^p$$

(Die Definition vom $T_i$ sehen Sie in (7.28) ). In der Tat:

Nehmen wir an, $c'K\frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} < \pi(1/3)\cdot T_i^p$ für ein $i$.

Dann folgt aus (7.43): für dieses $i$ : $\varphi_\beta(R_\beta/3) < T_i\ \ \forall\,\beta$ mit $R_\beta \geq \mathbf{R}_i$

$$\overset{\varphi_\beta \text{ fallend}}{\Rightarrow} (g_\beta(.) \geq T_i) \subset B_{R_\beta/3}(0), \quad \text{wenn} \quad R_\beta \geq \mathbf{R}_i.$$

$$\Rightarrow |(g_\beta(.) \geq T_i)| \leq |B_{R_\beta/3}|, \quad \text{wenn} \quad R_\beta \geq \mathbf{R}_i \tag{7.44}$$

Betrachten wir jetzt die Mengen $\begin{array}{l} \Lambda_i' := \{\beta \in \Lambda_i \mid |(g_\beta \geq T_i)| \leq 3^{-n}|B_{R_\beta}|\} \quad \text{und} \\ \Lambda_i'' := \{\beta \in \Lambda_i \mid |(g_\beta \geq T_i)| > 3^{-n}|B_{R_\beta}|\} \end{array}$

Dann gilt $\sum_{\beta\in\Lambda_i'} |(g_\beta \geq T_i)| \leq 3^{-n} \sum_{\beta\in\Lambda_i'} |B_{R_\beta}| \overset{(7.33)}{\leq} 3^{-n}|\operatorname{trg} u_i| \overset{(7.30)}{\leq} 3^{-n}|B_{2^{-i}R}|$

und $\sum_{\beta\in\Lambda_i} |(g_\beta \geq T_i)| = |(u_i \geq T_i)| = |(u \geq \mu_{i+1})| \geq |B_{2^{-i-1}R}| = 2^{-n}|B_{2^{-i}R}|$

$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |(g_\beta \geq T_i)| = \sum_{\beta\in\Lambda_i} |(g_\beta \geq T_i)| - \sum_{\beta\in\Lambda_i'} |(g_\beta \geq T_i)| \geq (2^{-n} - 3^{-n})|B_{2^{-i}R}|$

$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \overset{(7.33)}{=} \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |\operatorname{trg} g_\beta| \geq \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |(g_\beta \geq T_i)| \overset{\text{s.o.}}{\geq} (2^{-n} - 3^{-n})|B_{2^{-i}R}|$

$$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} {R_\beta}^n \geq \underbrace{(2^{-n} - 3^{-n})R^n}_{=c''} 2^{-ni} = c'' 2^{-ni}. \tag{7.45}$$

Nach Definition, $\Lambda_i'' = \{\beta \in \Lambda_i \mid |(g_\beta \geq T_i)| > |B_{R_\beta/3}|\}$, und darum

$$\forall\,\beta \in \Lambda_i'' : \begin{cases} \varphi_\beta(R_\beta/3) \geq T_i & (\text{da } \beta \in \Lambda_i'' \Rightarrow \overbrace{(g_\beta \geq T_i)}^{\text{Kugel}} \supset B_{R_\beta/3}(0)\ ) \\ R_\beta < \mathbf{R}_i & (\text{sonst wäre } \beta \notin \Lambda_i'' \text{ wegen (7.44) }) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_i \ &\overset{(7.36)}{\geq} \sum_{\beta\in\Lambda_i''} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|^p\,dx \overset{\text{Lemma 7.3}}{\geq} \sum_{\beta\in\Lambda_i''} \pi(1/3){R_\beta}^{n-p}(\varphi_\beta(R_\beta/3))^p \\ &\overset{R_\beta<\mathbf{R}_i}{\geq} \pi\left(\frac{1}{3}\right) \sum_{\beta\in\Lambda_i''} \frac{{R_\beta}^n(\varphi_\beta(R_\beta/3))^p}{\mathbf{R}_i^p} \overset{\forall\,\beta\in\Lambda_i'':\ \varphi_\beta(R_\beta/3)\geq T_i}{\geq} \pi\left(\frac{1}{3}\right) \frac{\sum_{\beta\in\Lambda_i''} {R_\beta}^n}{\mathbf{R}_i^p} T_i^p \\ &\overset{(7.45)}{\geq} \pi\left(\frac{1}{3}\right) \frac{c'' 2^{-ni}}{\mathbf{R}_i^p} T_i^p \end{aligned}$$

(hier ist $c''$ definiert wie in (7.41) oder (7.45) ).
Folglich,

$$K_i \geq \pi\left(\frac{1}{3}\right)\frac{c''2^{-ni}}{\mathbf{R}_i^p}T_i^p \quad \text{und} \quad c'K\frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} \overset{(7.41)}{=} \frac{K_i\mathbf{R}_i^p}{c''2^{-ni}} \geq \pi\left(\frac{1}{3}\right)T_i^p.$$

Wir haben aber vorausgesetzt, $c'K\frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} < \pi\left(\frac{1}{3}\right)T_i^p$. Damit ergibt sich ein

Widerspruch.

Unsere Voraussetzung war daher falsch, und es gilt $\pi\left(\frac{1}{3}\right) T_i^p \le c' K \frac{\mathbf{R}_i^{p-\lambda}}{i^\vartheta} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} T_i &\le cK^{\frac{1}{p}} \frac{\mathbf{R}_i^{\frac{p-\lambda}{p}}}{i^{\vartheta/p}} \overset{(7.42)}{=} \tilde{c}K^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\frac{K}{K_i}\cdot\frac{2^{-ni}}{i^\vartheta}\right)^{\frac{p-\lambda}{p\lambda}}}{i^{\vartheta/p}} \overset{\frac{1}{q}=\frac{\lambda-p}{p\lambda}}{=} \tilde{c}K^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\frac{K_i}{K}2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}} i^{\vartheta/q}}{i^{\vartheta/p}} \\ &= \tilde{c}K^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\frac{K_i}{K}2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}} \end{aligned}$$

$$\text{und somit} \quad T_i \le cK^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\frac{K_i}{K}2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}} \qquad \forall\, i \ge 1 \tag{7.46}$$

**Wir schätzen $T_0$ ab.**

$$(7.28) \Rightarrow T_0 = \mu_1 - \overbrace{\mu_0}^{=0} = \mu_1.$$

Weiter folgt $u_0(x) = \min\{u(x), \mu_1\}$ nach (7.29).

Wenn $g_0$ =Symmetrisation vom $u_0$ ist, dann $|\operatorname{trg} u_0| \overset{(7.30)}{\le} |B_R| = c_1$ .

$$\overset{\text{Lemma 5.4}}{\Rightarrow} \int_{B_R(0)} |\nabla g_0|^p\, dx \le \frac{1}{c_2^p} \int_Q |\nabla u_0|^p\, dx \overset{(7.35)}{=} K_0.$$

Außerdem, $g(x) = 0$ bei $|x| = R$, $g(x) = \mu_1$ bei $|x| = R/2$ wegen (7.27).

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; K_0 \ge \int_{B_R(0)} |\nabla g_0|^p\, dx = \int_{\frac{R}{2}\le|x|\le R} |\nabla g|^p\, dx \overset{\text{Lemma 7.3}}{\ge} \pi(1/2)R^{n-p}\mu_1^p \\ &\Rightarrow\; \mu_1^p \le c^p K_0 \;\text{ mit einem } c \\ &\Rightarrow\; T_0 = \mu_1 \le cK_0^{\frac{1}{p}} = cK^{\frac{1}{p}} \left(\frac{K_0}{K}\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\frac{K_0}{K}\leqslant 1,\; 1/p>1/q}{\le} cK^{\frac{1}{p}} \left(\frac{K_0}{K}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Folglich,

$$T_0 \le cK^{\frac{1}{p}} \left(\frac{K_0}{K}\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \forall\, i \ge 1 : T_i \overset{(7.46)}{\le} cK^{\frac{1}{p}} \frac{\left(\frac{K_i}{K}2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}}. \tag{7.47}$$

Definieren wir $t_i$ und $\Delta_j$ für $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so ergibt sich

$$t_0 := 1, \quad \forall\, i \ge 1 : t_i := \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}}, \qquad \forall\, j \ge 0 : \Delta_j = \sum_{i=0}^{j} t_i \tag{7.48}$$

$$\Rightarrow \mu_j = \sum_{i=0}^{j-1} T_i \overset{(7.47),(7.48)}{\le} cK^{\frac{1}{p}} \sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{K_i}{K}\right)^{\frac{1}{q}} t_i \;\; \forall\, j \ge 0. \tag{7.49}$$

Sei

$$\log_+ x := \max\{0, \log_2 x\}.$$

Dann ist $\log_+ x$ wachsend und

$$\begin{aligned}
\log_+ \mu_j &\overset{(7.49)}{=} \log_+\Big(cK^{\frac{1}{p}}\sum_{i=0}^{j-1}\underbrace{\Big(\frac{K_i}{K}\Big)^{\frac{1}{q}}}_{\leqslant 1}\overbrace{t_i}^{\leqslant 2^{\frac{ni}{q}}}\Big) \le \log_+\Big(cK^{\frac{1}{p}}\overbrace{\sum_{i=0}^{j-1}2^{\frac{ni}{q}}}^{\leqslant c\cdot 2^{nj/q}}\Big)\\
&\le \log_+\Big(c(K)\cdot 2^{\frac{nj}{q}}\Big) \le \hat{c}\cdot(1+j),
\end{aligned}$$

$\hat{c}$ hängt vom $K$ ab.
Also,

$$\log_+ \mu_j \le \hat{c}\cdot(1+j), \quad \hat{c} = \hat{c}(K) \tag{7.50}$$

Wegen (7.48):

$$\frac{t_i}{\Delta_j} \ge 0, \quad \sum_{i=0}^{j}\frac{t_i}{\Delta_j} = 1 \ \ \forall j \ge 0.$$

Daher gilt (dies ist wohlbekannt!)

$$\forall (a_i)_{i=0,1,2,\dots} : \quad \left|\sum_{i=0}^{j}\frac{t_i}{\Delta_j}a_i\right|^q \le \sum_{i=0}^{j}\frac{t_i}{\Delta_j}|a_i|^q \tag{7.51}$$

$$\Rightarrow \Big(\sum_{i=0}^{j}\big(\tfrac{K_i}{K}\big)^{\frac{1}{q}}t_i\Big)^q = \Delta_j^q\Big(\sum_{i=0}^{j}\tfrac{t_i}{\Delta_j}\big(\tfrac{K_i}{K}\big)^{\frac{1}{q}}\Big)^q \overset{(7.51)}{\le} \Delta_j^q\sum_{i=0}^{j}\tfrac{t_i}{\Delta_j}\tfrac{K_i}{K} = \Delta_j^{q-1}\sum_{i=0}^{j}t_i\tfrac{K_i}{K}$$

$$\Rightarrow \mu_j^q \overset{(7.49)}{\le} cK^{\frac{q}{p}}\left(\sum_{i=0}^{j-1}\Big(\frac{K_i}{K}\Big)^{\frac{1}{q}}t_i\right)^q \overset{\text{siehe oben}}{\le} cK^{\frac{q}{p}}\Delta_{j-1}^{q-1}\sum_{i=0}^{j-1}t_i\frac{K_i}{K}. \tag{7.52}$$

Deswegen $\exists\, \mathbf{K} = \mathbf{K}(K)$:

$$\mu_j^q(\log_+ \mu_j)^\tau \overset{(7.50),(7.52)}{\le} \mathbf{K}\sum_{i=0}^{j-1}\Big(\Delta_{j-1}^{q-1}t_i\frac{K_i}{K}(1+j)^\tau\Big). \tag{7.53}$$

Nach (7.26), $g : x \mapsto \varphi(|x|)$ ist Symmetrisation vom $u$ ($\Rightarrow \varphi$ fallend) und, nach (7.27), $\mu_i = \varphi(2^{-i}R)$. Somit

$$\forall\, x \notin B_{2^{-j-1}R}(0) : g(x) \le \varphi(2^{-j-1}R) = \mu_{j+1}. \tag{7.54}$$

Sei zusätzlich $\psi(s) := s^q(\log_+ s)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}$ für $s \ge 0$. Dann gilt $\psi(0) = 0$, $\psi$ wachsend.
Wir formen um und schätzen ab

$$\begin{aligned}
&\int_Q |u|^q(\log_+|u|)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}\,dx \overset{u\geqq 0}{=}\\
&\quad = \int_Q \psi\circ u\,dx \overset{\operatorname{trg} g\subset B_R(0)}{=} \int_{B_R(0)} \psi\circ g\,dx
\end{aligned}$$

$$\overset{(7.54)}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_{2^{-j}R}(0)-B_{2^{-j-1}R}(0)} \psi(\mu_{j+1})\, dx$$

$$= \overbrace{(|B_1| - |B_{1/2}|)}^{=:c} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj}\, \psi(\mu_{j+1}) = c \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj}\, \mu_{j+1}^{q} \cdot (\log_+ \mu_{j+1})^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}$$

$$\overset{(7.53)}{\leq} c\mathbf{K} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj} \sum_{i=0}^{j} \left( \Delta_j^{q-1} t_i \frac{K_i}{K} (2+j)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \right)$$

$$= c\mathbf{K} \sum\sum_{0\leq i\leq j<\infty} \left( 2^{-nj} \Delta_j^{q-1} t_i \frac{K_i}{K} (2+j)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \right)$$

$$= c\mathbf{K} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K_i}{K} \sum_{j=i}^{\infty} \left( \left( \frac{\Delta_j \cdot (2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nj}{q}}} \right)^{q-1} \cdot \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \cdot \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \right)$$

$$\leq c\mathbf{K} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m}{K} \right) \cdot \sup_{i\geq 0} \sum_{j=i}^{\infty} \left( \left( \frac{\Delta_j \cdot (2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nj}{q}}} \right)^{q-1} \cdot \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \cdot \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \right)$$

$$\leq c\mathbf{K} \underbrace{\left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K_m}{K} \right)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\left( \sup_{\ell\geq 0} \frac{\Delta_\ell \cdot (2+\ell)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n\ell}{q}}} \right)^{q-1}}_{=:(I)} \cdot \underbrace{\sup_{i\geq 0} \left( \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \cdot \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \right)}_{=:(II)}.$$

Dies ergibt

$$\int_Q |u|^q (\log_+ |u|)^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}\, dx \leq c\mathbf{K} \cdot (I)^{q-1} \cdot (II). \tag{7.55}$$

Jetzt müssen wir beweisen, dass $(I) < \infty$ und $(II) < \infty$.
( (I) und (II) sind Konstanten, da $t_i$ und $\Delta_j$ nicht von $u$ abhängen, siehe (7.48).) Wir wissen,

$$\Delta_j \overset{(7.48)}{=} \sum_{i=0}^{j} t_i = 1 + \sum_{i=1}^{j} \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}}.$$

Wählen wir $i_0 \in \mathbb{N}$ und $d \in (0;1)$ so, dass

$$2^{-\frac{n}{q}} \left( \frac{i+1}{i} \right)^{\vartheta/\lambda} \leq 1-d \ \ \forall\, i \geq i_0.$$

Wenn $m \geq i \geq i_0$, dann $\frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}} = \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda}} \prod_{j=i}^{m-1} \overbrace{2^{-n/q} \left( \frac{j+1}{j} \right)^{\vartheta/\lambda}}^{\leqslant 1-d \quad (\text{da } j \geqslant i_0)} \leq \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda}} (1-d)^{m-i}.$

$$\Rightarrow \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}} \leq \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda}} (1-d)^{m-i}, \quad \text{wenn } m \geq i \geq i_0. \tag{7.56}$$

(für "$m = i$" ist dies offensichtlich).
$\forall\, m \geq i_0$ gilt es:

$$\Delta_m \overset{(7.48)}{=} \underbrace{1 + \sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}}}_{=:c} + \sum_{i=i_0}^{m} \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\vartheta/\lambda}} \overset{(7.56)}{\leq} c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda}} \sum_{i=i_0}^{m} (1-d)^{m-i}$$

$$\overset{j=m-i\geqslant 0}{\leq} c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda}} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (1-d)^j}_{=1/d} = c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda} \cdot d}.$$

Somit

$$\Delta_m \leq c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\vartheta/\lambda} \cdot d} \quad \forall\, m \geq i_0. \tag{7.57}$$

Weiter schließen wir

$$\sup_{m \geq i_0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nm}{q}}} \overset{(7.57)}{\leq} c \cdot \sup_{m \geq i_0} \left( \frac{(2+m)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nm}{q}}} \right) + \frac{1}{d} \left( \frac{2+i_0}{i_0} \right)^{\vartheta/\lambda} =: T_1 < \infty.$$

Außerdem ist es klar, dass

$$\max_{0 \leq m < i_0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nm}{q}}} =: T_2 < \infty,$$

weil jede endliche Menge ein Maximum hat.

$$\text{Daher} \quad (I) = \sup_{m \geq 0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{nm}{q}}} \leq \max\{T_1, T_2\} < \infty.$$

Weiter schätzen wir ab

$$\sum_{j=i}^{\infty} \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \overset{\ell=j-i}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2+\ell+i)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n\ell}{q}}} \overset{i \leqslant \frac{2+\ell}{2} i}{\leq} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(2+\ell+\frac{2+\ell}{2} i\right)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n\ell}{q}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left((2+i)\frac{2+\ell}{2}\right)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n\ell}{q}}}$$

$$= (2+i)^{\vartheta/\lambda} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2+\ell}{2}\right)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n\ell}{q}}}}_{=:c' < \infty} = c' \cdot (2+i)^{\vartheta/\lambda}, \qquad c' < \infty.$$

$$\text{Dies ergibt} \quad \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \leq c' \cdot (2+i)^{\vartheta/\lambda}. \tag{7.58}$$

Schätzen wir (II) ab:

$$(II) = \sup_{i\geq 0} \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(2+j)^{\vartheta/\lambda}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \overset{(7.58)}{\leq} c' \cdot \sup_{i\geq 0} \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}(2+i)^{\vartheta/\lambda}.$$

Hierbei ist

$$\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \overset{(7.48)}{=} \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{bei } \ i=0 \\ \frac{1}{i^{\vartheta/\lambda}} & \text{bei } \ i\geq 1 \end{array} \right. .$$

Folglich,

$$\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}(2+i)^{\vartheta/\lambda} = \left\{ \begin{array}{cl} 2^{\vartheta/\lambda} & \text{bei } \ i=0 \\ \left(\frac{2+i}{i}\right)^{\vartheta/\lambda} & \text{bei } \ i\geq 1 \end{array} \right\} \leq 3^{\vartheta/\lambda} \ \ \forall\, i\geq 0$$

$$\Rightarrow (II) \leq c' \cdot \sup_{i\geq 0} \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}(2+i)^{\vartheta/\lambda} \leq c' \cdot 3^{\vartheta/\lambda} < \infty.$$

Wir erreichen daher schliesslich

$$\int_Q |u|^q |\log_+ |u||^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}\, dx \overset{(7.55)}{\leq} c\mathbf{K} \cdot (I)^{q-1} \cdot (II) =: \mathbf{K}' < \infty,$$

weil $\mathbf{K}'$ nur von $\mathbf{K}$ abhängt. Satz 7.2 ist damit bewiesen. □

**Bemerkung 7.1** *Aus Satz 8.4 folgt, dass die Behauptung von Satz 7.2 auch bei* $(\lambda < n,\ \vartheta < 0)$ *gilt.*

## 7.3 Resultat von Satz 7.2 ist optimal!

Jetzt wollen wir beweisen, dass das Resultat aus Satz 7.2 optimal ist.
Genauer, unter den Bedingungen an $(p,\lambda,\vartheta)$, die wir später angeben, gilt:

| |
|---|
| Wenn $\psi:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t^q\lvert\log t\rvert^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}}=\infty$, wobei $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}$, dann folgt |
| für jedes Paar $K_1>0,\ K_2>0$ existiert ein solches $u\in C_0^\infty(\Omega)$, dass $\left[\int_{B_R(x_0)}\lvert\nabla u\rvert^p dx\leq K_1\frac{R^{n-\lambda}}{\lvert\log R\rvert^{\vartheta}}\ \ \forall R\leq 1/2\,\forall x_0\right]$ und $\int_\Omega\psi(\lvert u\rvert)dy>K_2$. |

**Bemerkung 7.2** *Wir können o.B.d.A. voraussetzen, dass $\Omega$ Kugel oder Würfel ist.*

Wir wollen zeigen: diese Behauptung ist richtig, wenn

$1\leq p<\lambda$ und

entweder $(\lambda=n,\ \vartheta\geq 0)$ oder $(\lambda<n,\ \ \vartheta\in\mathbb{R}$ beliebig$)$.

Dies beweisen wir in den folgenden zwei Sätzen (in Satz 7.3 betrachte ich den Fall $(\lambda=n,\ \vartheta=0)$, in Satz 7.4 alle andere Fälle).

**Satz 7.3** *Sei $B:=B_1(0)$ die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.*
*Dann $\forall K_1>0,\ K_2>0$ und $\forall\alpha:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ so dass $\lim\limits_{s\to\infty}\alpha(s)=\infty$*
*$\exists u\in C_0^\infty(B)$, so dass $\int_B\lvert\nabla u\rvert^p\leq K_1$ und $\int_B\alpha(\lvert u\rvert)\lvert u\rvert^q>K_2$.*
*Hierbei $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$.*

**Beweis:**
Wählen wir $G\subset\subset B$ mit $\lvert G\rvert=\frac{1}{2}\lvert B\rvert$ und $v\in C_0^\infty(B)$ mit $v\Big|_G\equiv 1$ und $\forall x: v(x)\geq 0$.

Betrachten wir $\forall t\in]0;1[$ eine Funktion $u_t:B\to\mathbb{R}$:

$$u_t(x)=\begin{cases}\mathbf{K}t^{\frac{p-n}{p}}v\left(\frac{x}{t}\right), & \text{wenn } \lvert x\rvert\leq t,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}\tag{7.59}$$

Dann ist

$$\int_B\lvert\nabla u_t(x)\rvert^p\,dx=\mathbf{K}^p t^{p-n}\int_{x\in B_t(0)}\left\lvert\nabla_x v\left(\frac{x}{t}\right)\right\rvert^p\,dx\overset{y=\frac{x}{t}}{=}\mathbf{K}^p\int_{y\in B}\lvert\nabla_y v(y)\rvert^p\,dy.$$

Wählen wir $\mathbf{K}$ so, dass

$$\mathbf{K}^p\int_B\lvert\nabla v\rvert^p\,dx=K_1.$$

Dann gilt

$$\int_B |\nabla u_t|^p \, dx = K_1.$$

Sei

$$\psi(s) := \alpha(s) \cdot s^q \quad \text{für} \;\; s \geq 0.$$

Dann haben wir, weil $v$ nichtnegativ ist,

$$\begin{aligned}
\int_B \psi(|u_t(x)|) \, dx \quad &\overset{(7.59)}{=} \quad \int_{B_t(0)} \psi \left( \mathbf{K} t^{\frac{p-n}{p}} v \left( \frac{x}{t} \right) \right) dx \\
&\overset{y=\frac{x}{t}}{=} \quad t^n \int_B \psi \left( \mathbf{K} t^{\frac{p-n}{p}} v(y) \right) dy \\
&\overset{v|_G \equiv 1}{\geq} \quad t^n \int_G \psi(\mathbf{K} t^{\frac{p-n}{p}}) \, dy \\
&\overset{\frac{p-n}{p} = -\frac{n}{q}}{=} \quad t^n \cdot |G| \cdot \psi(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}).
\end{aligned}$$

Auch $\quad \psi(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}) = \alpha(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}) \cdot \mathbf{K}^q t^{-n} \quad$ und $\quad \lim\limits_{s \to \infty} \alpha(s) = \infty. \qquad$ Darum

$$\begin{aligned}
\int_B \psi(|u_t(x)|) \, dx \quad &\geq \quad t^n \cdot |G| \cdot \psi(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}) \overset{\text{s.o.}}{=} \overbrace{|G| \cdot \mathbf{K}^q}^{=:c} \cdot \alpha(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}) \\
&= \quad c \cdot \alpha(\mathbf{K} t^{-\frac{n}{q}}) \xrightarrow{t \to 0} \infty
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_B |\nabla u_t|^p \, dx = K_1 \;\; \forall \, t \in ]0;1[ \quad \text{und} \quad \int_B \alpha(|u_t|) \cdot |u_t|^q \, dx \xrightarrow{t \to 0} \infty$$

$$\Rightarrow \exists \, t > 0 : \int_B |\nabla u_t|^p \, dx = K_1 \;\; \text{und} \;\; \int_B \alpha(|u_t|) \cdot |u_t|^q \, dx > K_2.$$

Und das Lemma ist bewiesen. □

Weiter zeigen wir, dass man das Resultat aus Satz 7.2 auch in allen anderen Fällen (also $\lambda < n$ oder $(\lambda = n, \; \vartheta > 0)$ ) nicht verbessern kann.

**Satz 7.4** *Sei weiter* $\; Q := [0;1]^n$.
*Seien* $p, \lambda, \vartheta$ *fixiert,* $\; 1 \leq p < \lambda \leq n, \;\; \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$.
*Es gelte entweder* $(\lambda < n, \;\; \vartheta \in \mathbb{R}$ *beliebig)* *oder* $(\lambda = n, \; \vartheta > 0)$.

*Dann* $\;\; \forall \, K_1 > 0, \; K_2 > 0, \; \forall \, \alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \;\;$ *mit* $\;\; \lim\limits_{t \to \infty} \alpha(t) = \infty$
$\exists \, u \in C_0^\infty(Q) \;\;$ *mit:*

$$\begin{aligned}
\forall \, R \leq 1/2 : \quad &\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^p \, dx \leq K_1 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \textit{und} \\
&\int_Q \alpha(|u|) \cdot |u|^q |\log |u||^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \, dx > K_2.
\end{aligned}$$

**Beweis:**
Wir wählen
$$G \subset\subset Q = [0;1]^n \quad \text{mit} \quad |G| = 1/2 \tag{7.60}$$
sowie $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit
$$v \geq 0, \quad \operatorname{trg} v \subset Q \quad \text{und} \quad \forall\, x \in G : v(x) = 1. \tag{7.61}$$
Seien
$$D_j := \begin{cases} 2^{-\frac{n}{n-\lambda}j} j^{\frac{\vartheta}{n-\lambda}} & \text{für} \quad \lambda < n \\ 2^{-2^{\frac{n}{\vartheta}j}} & \text{für} \ \lambda = n,\ \vartheta > 0 \end{cases} \quad ; \qquad T_j := \mathbf{K}\frac{D_j^{\frac{p-\lambda}{p}}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta/p}}. \tag{7.62}$$
Sei $\beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j)-$Multiindex und $\forall\, j \in \mathbb{N}$ :
$$\Lambda_j := \{\beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j) | \gamma_i \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\ \forall\, i\} \tag{7.63}$$
$$\begin{gathered} \text{Für} \quad \beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j) : \\ x_\beta := \left(\tfrac{\gamma_1}{2^j}, \dots, \tfrac{\gamma_n}{2^j}\right), \quad W_\beta := x_\beta + [0; 2^{-j}]^n. \end{gathered} \tag{7.64}$$
Also, $\forall\, j :\ Q = \bigcup\limits_{\beta \in \Lambda_j} W_\beta; \quad \forall\, \beta, \gamma \in \Lambda_j,\ \beta \neq \gamma :\ |W_\beta \cap W_\gamma| = 0.$

Sei außerdem
$$j_0 \geq 1 \quad \text{so gewählt, dass} \quad \forall\, j \geq j_0 : D_j \leq 2^{-j} \tag{7.65}$$
(ein solches $j_0$ existiert immer, denn (7.62)$\Rightarrow D_j = o(2^{-j})$ ).
Dann wird $u_j \in C_0^\infty(Q)$ für $j \geq j_0$ folgendermaßen definiert:
$$\forall\, \beta \in \Lambda_j,\ y \in [0; 2^{-j}]^n : \quad u_j(\overbrace{x_\beta + y}^{\in W_\beta}) := T_j v\left(\frac{y}{D_j}\right). \tag{7.66}$$
Dann (7.65)$\Rightarrow \forall\, j \geq j_0 :\ u_j \in C_0^\infty(Q)$, da $\operatorname{trg}(v) \subset Q$, $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Wir müssen beweisen für $u_j,\ j \geq j_0$:
$$\left.\forall\, R \leq 1/2 : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_j|^p\, dx \leq K_1 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\right\} \qquad (I)$$
Dafür genügt es aber zu zeigen: $\forall\, u_j,\ j \geq j_0,\ \forall\, i \geq 1$:
$$\left.\begin{array}{l} \forall \text{ Würfel } W_\beta,\ \beta \in \Lambda_i,\ i \geq 1 \ \text{(siehe (7.64) )} \quad \text{gilt :} \\ \int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p\, dx \leq K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad \text{hier} \quad r = 2^{-i}. \end{array}\right\} \qquad (II)$$
Denn man kann leicht sehen, dass $(II) \Rightarrow (I)$ für geeignetes $K = K(K_1)$.

**Beweisen wir (II).** Zuerst schätzen wir $\int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx$ für $\gamma \in \Lambda_j$ ab:
$\forall \gamma \in \Lambda_j$ :

$$\begin{aligned}
\int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx &\overset{(7.66)}{=} T_j^p \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x v\left(\frac{x}{D_j}\right)\right|^p \, dx \overset{y=\frac{x}{D_j}}{=} T_j^p D_j^{n-p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(y)|^p \, dy \\
&\overset{(7.62)}{=} \mathbf{K}^p \frac{D_j^{p-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} D_j^{n-p} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^p \, dy}_{=: c} = c\mathbf{K}^p \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}.
\end{aligned}$$

$$\text{Also,} \quad \forall \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx = c\mathbf{K}^p \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{7.67}$$

Weiter gilt für $j \geq j_0$:

$$\begin{aligned}
&\text{wenn} \quad \lambda < n : \quad (7.62), (7.65) \Rightarrow \left[ D_j \leq 2^{-j} \ \text{ und } \ D_j = 2^{-\frac{n}{n-\lambda} j} j^{\frac{\vartheta}{n-\lambda}} \right] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow |\log_2 D_j|^\vartheta \geq c j^\vartheta, \\
&\text{wenn} \quad \lambda = n : \quad (7.62) \Rightarrow |\log_2 D_j| = 2^{\frac{n}{\vartheta} j}.
\end{aligned}$$

$$\text{Also,} \quad \text{für } j \geq j_0 : \quad |\log_2 D_j|^\vartheta \begin{cases} \geq c j^\vartheta & \text{bei} \quad \lambda < n \\ = 2^{nj} & \text{bei} \quad \lambda = n, \ \vartheta > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{für } j \geq j_0 : \quad \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \left\{ \begin{array}{lll} \overset{(7.62)}{\leq} \frac{2^{-nj} j^\vartheta}{c j^\vartheta} & \text{bei} & \lambda < n \\ \overset{n=\lambda}{=} 2^{-nj} & \text{bei} & \lambda = n, \ \vartheta > 0 \end{array} \right\} = c' 2^{-nj}.$$

Darum hat man $\forall j \geq j_0$:

$$\forall \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx \overset{(7.67)}{=} c\mathbf{K}^p \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \leq 2^{-nj} c\mathbf{K}^p. \tag{7.68}$$

Weiter wollen wir (II) für $j \geq j_0$ beweisen (dabei müssen wir $j_0$ eventuell vergrößern).

Es gibt drei mögliche Fälle für $i$: $1 \leq i \leq j$, $D_j \leq 2^{-i} \leq 2^{-j}$ und $2^{-i} \leq D_j$.

<u>Fall 1:</u> $1 \leq i \leq j$.
Dann besteht jeder Würfel $W_\beta$, $\beta \in \Lambda_i$ aus $2^{n(j-i)}$ Würfeln $W_\gamma$, $\gamma \in \Lambda_j$ (siehe (7.64)) und

$$\forall \gamma \in \Lambda_j : \int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx \overset{(7.68)}{\leq} c\mathbf{K}^p 2^{-nj}.$$

Darum gilt

$$\forall \beta \in \Lambda_i : \quad \int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p \, dx \leq 2^{n(j-i)} \cdot c\mathbf{K}^p 2^{-nj} = c\mathbf{K}^p 2^{-ni}. \tag{7.69}$$

Weiter gilt für eine Konstante $c'$ : $\forall\, r \in ]0; \frac{1}{2}]$ : $r^n \le c' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}$ (da $\lambda > p$).
Folglich, wenn $r = 2^{-i}$, $\beta \in \Lambda_i$ :

$$\int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p \, dx \overset{(7.69)}{\le} c\mathbf{K}^p r^n \le c' c\mathbf{K}^p \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}.$$

<u>Fall 2:</u> $D_j \le 2^{-i} \le 2^{-j}$.
Wegen "$2^{-i} \le 2^{-j}$" gilt $\forall \beta \in \Lambda_i$ : $W_\beta$ liegt in einem $W_\gamma$, $\gamma \in \Lambda_j$, darum

$$\forall\, \beta \in \Lambda_i\, \exists\, \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p \, dx \le \int_{W_\gamma} |\nabla u_j|^p \, dx \overset{(7.67)}{=} c\mathbf{K}^p \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{7.70}$$

Weiter: $D_j \le 2^{-i} =: r$.
Wir wissen, dass $j \ge 1$. Das heißt, $r = 2^{-i} \le 1/2$.
Dann gibt es eine Konstante $c'$, für die

$$\frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta} \overset{r \geqslant D_j}{\ge} c' \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \overset{(7.70)}{\ge} \frac{1}{c\mathbf{K}^p} \int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p \, dx \quad \forall\, \beta \in \Lambda_i$$

(bei $\lambda = n$ benutzen wir, dass $\vartheta > 0$; sonst $n - \lambda > 0$).
Wir haben:

$$\forall\, \beta \in \Lambda_i : \quad \int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p \, dx \le c\mathbf{K}^p \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad r = 2^{-i}.$$

<u>Fall 3:</u> $r = 2^{-i} \le D_j$.
Sei $a := \max\limits_{x \in Q} |\nabla v|^p$ (zur Erinnerung: $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ).
Dann

$$\max_{x \in Q} |\nabla u_j|^p \overset{(7.66)}{=} \max_y \left| T_j \nabla_y v \left( \frac{y}{D_j} \right) \right|^p = \frac{T_j^p}{D_j^p} \overbrace{\max_x |\nabla v(x)|^p}^{=a} \overset{(7.62)}{=} \frac{a\mathbf{K}^p}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta}.$$

Also,

$$\max_{x \in Q} |\nabla u_j|^p = \frac{a\mathbf{K}^p}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{7.71}$$

Und, wenn $r = 2^{-i}$, $\beta \in \Lambda_i$:

$$|W_\beta| = r^n. \tag{7.72}$$

Weiter, wenn $j_0$ groß genug ist (eventuell müssen wir $j_0$ vergrößern), dann wächst $t^\lambda |\log_2 t|^\vartheta$ für $t \in ]0; 2^{-j_0}]$, und $D_j \overset{(7.65)}{\le} 2^{-j} \le 2^{-j_0}$ $\forall\, j \ge j_0$.
Folglich gilt für $j \ge j_0$, $r = 2^{-i} \le D_j$ :

$$r^\lambda |\log_2 r|^\vartheta \le D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta. \tag{7.73}$$

Dann für $\quad r = 2^{-i},\ \beta \in \Lambda_i$ :

$$\begin{aligned}
\int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p\, dx \quad &\leq \quad |W_\beta| \cdot \max_x |\nabla u_j(x)|^p \overset{(7.71),(7.72)}{\leq} r^n \frac{a\mathbf{K}^p}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta} \\
&\overset{(7.73)}{\leq} \quad r^n \frac{a\mathbf{K}^p}{r^\lambda |\log_2 r|^\vartheta} = a\mathbf{K}^p \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wenn $\ r = 2^{-i},\ \beta \in \Lambda_i$ :

$$\int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p\, dx \leq a\mathbf{K}^p \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}.$$

Folglich können wir die Konstante $\tilde{c}$ so wählen, dass in allen drei Fällen gilt:

$$\int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p\, dx \leq \tilde{c}\mathbf{K}^p \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad \text{wenn} \quad \beta \in \Lambda_i,\ r = 2^{-i},\ j \geq j_0.$$

Wählen wir $\mathbf{K}$ so, dass $K = \tilde{c}\mathbf{K}^p$. Dann

$$\int_{W_\beta} |\nabla u_j|^p\, dx \leq K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta},$$

wenn $\quad \beta \in \Lambda_i, \quad r = 2^{-i}, \quad j \geq j_0$.
Also haben wir (II) bewiesen.

Gemäß den Bedingungen dieses Satzes, $\quad \alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \infty$.
Sei auch

$$\psi(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0, \\ \alpha(t) t^q |\log_2 t|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} & \text{für } t > 0. \end{cases} \tag{7.74}$$

Wir wollen zeigen:

$$\int_Q \psi(|u_j|)\, dx \to \infty \ \text{ bei } \ j \to \infty.$$

Tatsächlich:

$$\begin{aligned}
\int_Q \psi(|u_j|)\, dx \quad &= \quad \sum_{\gamma\in\Lambda_j} \int_{W_\gamma} \psi(|u_j(x)|)\, dx \overset{|\Lambda_j|=2^{nj}}{=} 2^{nj} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \psi\left( T_j \left| v\left(\frac{x}{D_j}\right)\right|\right) dx}^{=\int_{W_\gamma} \psi(|u_j|)dx \ \ \forall\, \gamma\in\Lambda_j} \\
&\overset{y=\frac{x}{D_j}}{=} \quad 2^{nj} D_j^n \int_Q \psi(T_j |v(y)|) dy \overset{v=1 \text{ auf } G}{\geq} 2^{nj} D_j^n \int_G \psi(T_j) dy \\
&\overset{|G|=1/2}{=} \quad 2^{nj} D_j^n \cdot \frac{1}{2}\psi(T_j) \overset{(7.74)}{=} 2^{nj} D_j^n \cdot \frac{\alpha(T_j)}{2} \cdot T_j^q |\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Also,

$$\int_Q \psi(|u_j|)\, dx \geq 2^{nj} D_j^n \cdot \frac{\alpha(T_j)}{2} \cdot T_j^q |\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}. \tag{7.75}$$

Wegen (7.62) und $p < \lambda \leq n:\quad T_j \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Darum gilt

$$\lim_{j\to\infty} \alpha(T_j) = \infty.$$

Und wir vergrößern $j_0$ so, dass

$$\forall\, j \geq j_0 :\ C_1|\log D_j| \leq |\log T_j| \leq C_2|\log D_j|$$

für die Konstanten $C_1 > 0, C_2 > 0$, die nicht von $j$ abhängen.
Außerdem: $D_j \leq 2^{-j} \leq 1/2\ \ \forall\, j \geq j_0$ (siehe (7.65) ).
Weiter,

$$T_j \stackrel{(7.62)}{=} \mathbf{K}\frac{D_j^{\frac{p-\lambda}{p}}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta/p}} \quad \text{und} \quad q = \frac{\lambda p}{\lambda - p}.$$

Wir berechnen:

$$\forall\, j \geq j_0 :\ \left(T_j^q = \mathbf{K}^q\frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\frac{q\vartheta}{p}}} \text{ und } |\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \geq c'|\log_2 D_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}}\right), \quad c' = c'(\mathbf{K}).$$

Dann gilt

$$T_j^q|\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \geq c''\frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\frac{q\vartheta}{p}-\frac{q\vartheta}{\lambda}}} \stackrel{\frac{q\vartheta}{p}-\frac{q\vartheta}{\lambda}=\vartheta}{=} c''\frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}}.$$

Somit hat man

$$\lim_{j\to\infty} \alpha(T_j) = \infty \quad \text{und} \quad T_j^q|\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \geq c''\frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}}. \tag{7.76}$$

$$\Rightarrow \int_Q \psi(|u_j|)\,dx \stackrel{(7.75)}{\geq} 2^{nj}D_j^n\cdot\frac{\alpha(T_j)}{2}T_j^q|\log_2 T_j|^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} \stackrel{(7.76)}{\geq} c''2^{nj}\frac{\alpha(T_j)}{2}\frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}}. \tag{7.77}$$

Wir betrachten jetzt zwei Fälle (immer $j \geq j_0$):

**Fall 1:** $\lambda < n$.
Aus (7.62) und $\lambda < n$ folgt: $\forall\, j \geq j_0 : [\, D_j \leq 2^{-j}$ und $D_j = 2^{-\frac{n}{n-\lambda}j}\cdot j^{\frac{\vartheta}{n-\lambda}}\,]$
$\stackrel{j\geqslant 1}{\Longrightarrow} |\log_2 D_j|^{\vartheta} \leq cj^{\vartheta}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int_Q \psi(|u_j|)\,dx &\stackrel{(7.77)}{\geq} c''2^{nj}\frac{\alpha(T_j)}{2}\frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}} \stackrel{|\log_2 D_j|^{\vartheta}\leqslant cj^{\vartheta}}{\geq} c''2^{nj}\frac{\alpha(T_j)}{2}\frac{D_j^{n-\lambda}}{cj^{\vartheta}}\\ &\stackrel{(7.62)}{=} C\cdot 2^{nj}\cdot\alpha(T_j)\cdot\frac{2^{-nj}j^{\vartheta}}{j^{\vartheta}}\\ &= C\cdot\alpha(T_j) \stackrel{(7.76)}{\to} \infty \quad \text{bei} \quad j\to\infty.\end{aligned}$$

**Fall 2:** $\lambda = n,\ \vartheta > 0.$

$$\int_Q \psi(|u_j|)\,dx \overset{(7.77)}{\geq} c'' \cdot \frac{\alpha(T_j)}{2} \frac{2^{nj} D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}} \overset{\lambda=n}{=} c'' \cdot \frac{\alpha(T_j)}{2} \frac{2^{nj}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}}$$
$$= c'' \cdot \frac{\alpha(T_j)}{2} \overset{(7.76)}{\to} \infty \quad \text{bei} \quad j \to \infty.$$

Wir benutzen hier, dass $|\log_2 D_j|^{\vartheta} = 2^{nj}$.

Also gilt in beiden Fällen

$$\int_Q \psi(|u_j|)\,dx \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Darum gibt es für jedes $K_2 > 0$ ein $j \geq j_0$ mit:

$$\int_{u_j \neq 0} \alpha(|u_j|)|u_j|^q |\log_2 |u_j||^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} dx = \int_Q \psi(|u_j|)\,dx > K_2.$$

Und wir haben schon bewiesen:

$$\forall\, j \geq j_0, \forall\, B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_j|^p\,dx \leq K_1 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}.$$

Das beweist den Satz 7.4. $\square$

# Kapitel 8

## Abschätzungen für Funktionen $u \in W^{1,1}(\Omega)$ mit: $\forall\, B_R(x_0) : \int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u(x)|)dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}$

Für diesen Kapitel setzen wir voraus, dass $\phi = t^p \log(t+2)^{\alpha}$ ist, und beweisen noch ein Mal die Behauptungen aus Kapiteln 4 und 5 für anderen, für unsere Zwecke nützlichen Banach-Räume.

Dieser Kapitel hat der folgenden Aufbau:

**Sektion 8.1:** Wir beweisen

- Erweiterungssatz, d.h. Existenz eines Erweiterungsoperators im speziellen Raum.
- Satz über stückweise lineare Approximation.
- Symmetrisationssatz.

Um die Darstellung zu vereinfachen wird den Begriff eines Banach-Raumes nicht eingeführt. Später sehen wir, dass wir auch ohne diese Definition auskommen.

**Sektion 8.2** Hier wird die Abschätzung mit $\lambda = p,\ \alpha + \vartheta \geq 0$ bewiesen.

**Sektion 8.3** Wir behandeln die gleiche Abschätzung wie in vorige Sektion für $[\lambda > p$ und $\alpha, \vartheta$— beliebig$]$ oder $[\lambda = p,\ \alpha + \vartheta < 0]$.

**Sektion 8.4** Es wird ein Beweis über die Optimalität der Resultate aus Sektionen 8.2.1 und 8.3 geliefert.

## 8.1 Hilfsresultate

### 8.1.1 Erweiterungssatz

Im Kapitel 8 setzen wir immer voraus, dass die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex und glatt ist.

Weiter werden wir die Funktionen $u \in W^{1,1}(\Omega)$ mit

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \leq 1/2,\ x_0, \qquad \int_{\Omega} \phi(|u|)dx \leq K$$

behandeln. Dafür brauchen wir die "Orlicz-Varianten" von Satz 4.1, Lemmata 5.2 und 5.4.

Der Satz 4.1 in der "Orlicz-Variante" sieht folgendermaßen aus:

**Satz 8.1 ("Orlicz-Variante" des Erweiterungssatzes)**
*Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Lipschitzgebiet und $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex, $\phi(0) = 0$.*

*Dann gibt es $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$ und einen linearen Erweiterungsoperator*

$$E : W^{1,1}(\Omega) \to W_0^{1,1}(\Omega'),$$

*so dass $\Omega' \supset \Omega$, $Eu|_{\Omega} = u\ \forall u : \Omega \to \mathbb{R}$ und*

$$\left(\forall\, R \leq 1/2 : \int_{B_R(.)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \ \leq\ K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \textit{und}\ \int_{\Omega} \phi(|u|)dx \leq K\right) \Rightarrow$$
$$\forall\, R \leq 1/2 : \int_{B_R(.)} \phi(c'|\nabla Eu|)dx \ \leq\ cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}},$$

*für die Konstanten $c, c' > 0$.*

Wir benutzen für den Beweis dieses Satzes die Form der Jensenschen Ungleichung

**Lemma 8.1** *Sei $\phi$ konvex.*
*Wenn $\forall\, i = 1, \ldots, m :\quad C \geq \int_{\Lambda} \phi(m|v_i|)dx,$ dann gilt auch:*

$$C \geq \int_{\Lambda} \phi\left(\sum_{i=1}^{m} |v_i|\right) dx.$$

Beweis:

$$C \geq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\int_{\Lambda} \phi(m|v_i|)dx = \int_{\Lambda} \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \phi(m|v_i|)dx \overset{\phi\,\text{konvex}}{\geq} \int_{\Lambda} \phi\left(\sum_{i=1}^{m} |v_i|\right) dx.$$

□

**Beweis von Satz 8.1:** Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Satz 4.1. Da $\Omega$ ein Lipschitzgebiet ist, gibt es für jedes $x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U(x)$ und eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \nu\}$ mit folgender Eigenschaft:

Sei $P$ ist die orthogonale Projektion der $U(x)$ auf $lin\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$,

$W = P(U(x)) \quad (\Rightarrow W \subset lin\{e_1, \dots, e_{n-1}\})$.
Dann gibt es eine Lipschitz-Funktion $\xi : W \to \mathbb{R}$, so dass:

$$\begin{array}{ll} \text{wenn} & [\,(y,t) \in W \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y + t\nu \in U(x)\,], \\ \text{dann} & \left[ \begin{array}{rl} & y + t\nu \in \Omega \Leftrightarrow t < \xi(y) \\ \text{und} & y + t\nu \in \partial\Omega \Leftrightarrow t = \xi(y) \end{array} \right]. \end{array}$$

Betrachten wir $\forall\, x \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U^*(x) \subset\subset U(x)$.
Dann ist $\{U^*(x) | x \in \partial\Omega\}$ eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$.
$\partial\Omega$ ist kompakt (weil $\Omega$ beschränkt und $\partial\Omega = \overline{\Omega} \cap \overline{\complement\Omega}$ abgeschlossen ist).

Wir wählen aus der offenen Überdeckung $\{U^*(x) | x \in \partial\Omega\}$ von $\partial\Omega$ eine endliche Teilüberdeckung $\{U_1^*, \dots, U_k^*\}$.

Für jedes $U_i^*$ gibt es auch:
eine Menge $U_i \supset\supset U_i^*$, eine Basis $\{e_1^i, \dots, e_{n-1}^i, \nu^i\}$, $P_i =$ eine orthogonale Projektion von $U_i$ auf $lin\{e_1^i, \dots, e_{n-1}^i\}$, $W_i := P_i(U_i)$, $\xi_i : W_i \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-Funktion, für die gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{wenn} & [\,(y,t) \in W_i \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad y + t\nu^i \in U_i\,], \\ \text{dann} & \left[ \begin{array}{rl} & y + t\nu^i \in \Omega \Leftrightarrow t < \xi_i(y) \\ \text{und} & y + t\nu^i \in \partial\Omega \Leftrightarrow t = \xi_i(y) \end{array} \right]. \end{array} \tag{8.1}$$

Betrachten wir für $i \geq 1$ neben der Lipschitz-Funktion $\xi_i$ auch die Funktion $\psi_i : W_i + \mathbb{R}\nu^i \to \mathbb{R}^n$, die folgendermaßen definiert ist:

$$\psi_i(y + t\nu^i) := y + (2\xi_i(y) - t)\nu^i \quad \forall\, (y,t) \in W_i \times \mathbb{R}. \tag{8.2}$$

Offensichtlich ist $\psi_i$ eine Lipschitz-Funktion genauso wie $\xi_i$ und es gilt:

$$\psi_i^{-1} = \psi_i \quad \text{wegen (8.2)},$$

$$\forall\, x \in \partial\Omega \cap U_i : \psi_i(x) = x, \tag{8.3}$$

denn

$$[\,(y,t) \in W_i \times \mathbb{R} \;\text{ und }\; y + t\nu^i \in \partial\Omega \cap U_i\,] \overset{(8.1)}{\Rightarrow} t = \xi_i(y).$$

Außerdem

$$\psi_i(y + \xi_i(y)\nu^i) \overset{(8.2)}{=} y + \xi_i(y)\nu^i.$$

Sei $\Omega_i := U_i^* \cap \psi_i(U_i^*)$.

Dann ist

$$\Omega_i \subset U_i^* \subset\subset U_i, \quad \psi_i(\Omega_i) = \Omega_i \quad \text{und} \quad \partial\Omega \cap \Omega_i = \partial\Omega \cap U_i^*$$

wegen (8.3) und der Wahl von $\Omega_i$.
Deshalb

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i, \;\text{ weil }\; \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i^*$$

und auch

$$\psi_i(\Omega_i - \Omega) = \Omega_i \cap \overline{\Omega}$$

(weil $\psi_i(\Omega_i) = \Omega_i, \quad \forall x \in \Omega_i : x \notin \Omega \overset{(8.1),(8.2)}{\Leftrightarrow} \psi_i(x) \in \overline{\Omega}$).

Sei weiter

$$\Omega_{-1} := \complement\overline{\Omega}, \quad \Omega_0 := \Omega.$$

Dann ist $\{\Omega_i | -1 \le i \le k\}$ eine offene Überdeckung des $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von der Zerlegung der 1 gibt es eine Familie von Funktionen $\pi_{-1}, \pi_0, \dots, \pi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit:

$$0 \le \pi_i(.) \le 1, \quad \operatorname{trg}(\pi_i) \subset \Omega_i \text{ und } \forall x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=-1}^{k} \pi_i(x) = 1.$$

Dann

$$\forall\, x \in \overline{\Omega} : \pi_{-1}(x) = 0, \quad \text{darum} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} : \sum_{i=0}^{k} \pi_i(x) = 1.$$

Wir sehen:

$$Eu(x) := \begin{cases} u(x) & x \in \overline{\Omega}, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i(x) u(\psi_i(x)) & x \notin \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{8.4}$$

Also ist $Eu(x)$ definiert f.ü. auf $\mathbb{R}^n$.

Wir zeigen nun: Sei $E_j u(x) := \frac{d}{dx_j} Eu(x) \;\; \forall x \notin \partial\Omega, \; \forall j = 1, \dots, n.$

Dann ist $E_j u$ tatsächlich die $j$-te schwache Ableitung vom $Eu$ auf $\mathbb{R}^n$.

Mit anderen Worten müssen wir beweisen, dass

$$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x) v(x) dx = -\int_{\mathbb{R}^n} Eu(x) D_j v(x) dx,$$

wobei $D_j := \frac{d}{dx_j}$.

Wir haben:

$$\int_{\mathbb{R}^n} E_j u(x) v(x)\, dx = \int_{\Omega} D_j Eu(x) v(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n - \Omega} D_j Eu(x) v(x)\, dx.$$

Sei $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_n(x)\,)$ die äußere Normale von $\Omega$ in $x \in \partial\Omega$ ($\eta(x)$ existiert f.ü. auf $\partial\Omega$).
Dann

$$\int_{\Omega} D_j Eu(x) v(x) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) \eta_j(x) dS - \int_{\Omega} Eu(x) D_j v(x) dx,$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n-\Omega} D_jEu(x)v(x)dx = \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{k}\pi_i(x)u(\psi_i(x))v(x)(-\eta_j(x))dS - \int_{\mathbb{R}^n-\Omega} Eu(x)D_jv(x)dx.$$

Wegen (8.2) haben wir, dass $\forall x\in\Omega_i\cap\partial\Omega:\psi_i(x)=x,$ darum

$$\forall x\in\partial\Omega:\sum_{i=1}^{k}\pi_i(x)u(\psi_i(x))=u(x)$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} E_ju(x)v(x)\,dx \overset{\text{s.o.}}{=} \int_{\partial\Omega}\overbrace{\Big(u(x)-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\pi_i(x)u(\psi_i(x))\Big)}^{=0}v(x)\eta_j(x)dS - \int_{\mathbb{R}^n} Eu(x)D_jv(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} E_ju(x)v(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} Eu(x)D_jv(x)dx \;\; \forall v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $E_ju$ tatsächlich die $j$-te schwache Ableitung von $Eu$.

Um Satz 8.1 zu beweisen genügt es zu zeigen: $\exists\, c_1>0,\ c_2>0$ mit:

$$\text{Sei}\quad \forall R\le 1/2:\quad \int_{B_R(x_0)\cap\Omega}\phi(|\nabla u|)\,dx\le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\quad\text{und}\quad\int_\Omega\phi(|u|)\,dx\le K. \tag{8.5}$$

Dann

$$\forall R\le 1/2:\quad \int_{B_{c_1R}(x_0)}\phi(c'|\nabla Eu|)\,dx\le c_2K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}. \tag{8.6}$$

(Wegen (3.3) spielt der Wert von $c_1>0$ keine Rolle.)

Wir zeigen nun, dass (8.5) $\Rightarrow$ (8.6).
Tatsächlich, sei Bedingung (8.5) erfüllt. Dann zeigen wir,

$$c_2K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ge \int_{B_{c_1R}(\cdot)}\phi(c'|\nabla Eu|)\,dx = \int_{B_{c_1R}(\cdot)-\Omega}\phi(c'|\nabla Eu|)\,dx + \underbrace{\int_{B_{c_1R}(\cdot)\cap\Omega}\phi(c'|\nabla Eu|)\,dx}_{=\int_{B_{c_1R}(\cdot)\cap\Omega}\phi(c'|\nabla u|)\,dx.\ \text{gut.}}.$$

Wir müssen also nur beweisen, dass für passende $c,\, c_1,\, c' > 0$:

$$
\begin{aligned}
cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} &\geq \int_{B_{c_1R}(.)-\Omega} \phi(c'|\nabla Eu|)\,dx \\
&\overset{(8.4)}{=} \int_{B_{c_1R}(.)-\Omega} \phi\left(c'\left|\sum_{i=1}^{k} \nabla_x(\pi_i(x)(u\circ\psi_i)(x))\right|\right)dx.
\end{aligned}
$$

Wegen des Lemmas 8.1 genügt es zu zeigen, dass $\forall i \geq 1$ :

$$
\begin{aligned}
cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} &\overset{(\star)}{\geq} \int_{B_{c_1R}(.)-\Omega} \phi(kc'|\nabla_x(\pi_i(x)(u(\psi_i(x))))|)\,dx \\
&= \int_{B_{c_1R}(.)-\Omega} \phi(kc'|(\nabla\pi_i(x))(u(\psi_i(x)) \\
&\qquad +\pi_i(x)\nabla_x(u(\psi_i(x))))|)\,dx.
\end{aligned}
$$

Wir wissen,

$$\forall i \geq 1 : \pi_i \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \pi_i(x), \nabla\pi_i(x) \text{ sind beschränkt.}$$

Außerdem, $\operatorname{trg}(\pi_i) \subset \Omega_i$ und

$$\int_\Lambda \phi(a(x)+b(x))\,dx \leq \frac{1}{2}\int_\Lambda \phi(2a(x)) + \phi(2b(x))\,dx.$$

Wir sehen: um $(\star)$ zu beweisen, müssen wir nur zeigen: $\exists\, c_1,\, c' > 0$ , für die

$$cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{B_{c_1R}(.)\cap(\Omega_i-\Omega)} \phi(c'|(u(\psi_i(x))|) + \phi(c'|\nabla(u(\psi_i(x))|)\,dx = (**) \tag{8.7}$$

Wir benutzen die Substitution "$y = \psi_i(x)$" in $(**)$.

Aus (8.2) folgt: $\forall$ Gebiete $A \subset \Omega_i : |\psi_i(A)| = |A|$.
Darum haben wir (symbolisch) $dy = dx$ für $y = \psi_i(x)$.

$$\Rightarrow (**) \overset{\substack{y=\psi_i(x)\\ dy=dx}}{=} \int_{\psi_i(B_{c_1R})\cap\Omega_i\cap\Omega} \overbrace{\phi(c'|u(y)|) + \phi(c'|\nabla u(y)\nabla\psi_i(x)|)}^{\text{existiert f.ü. im } \Omega_i\cap\Omega}\,dy. \tag{8.8}$$

Wir haben hier benutzt, dass $\psi_i(\Omega_i - \Omega) = \Omega_i \cap \overline{\Omega}$ (s.o.) und $\nabla\psi_i$ existiert f.ü., da $\psi_i$–Lipschitz-Funktion.

Aus der Lipschitzstetigkeit der $\psi_i$ folgt auch:
für eine Konstante $c_1 > 0$

$$\left.\begin{aligned} &|\nabla\psi_i(x)| \leq \tfrac{1}{c_1} \quad (\text{wo } \nabla\psi_i(x) \text{ existiert}) \\ \text{und}\quad &\psi_i(B_{c_1R}(x_0)) \subset B_R(\psi_i(x_0)). \end{aligned}\right\} \tag{8.9}$$

Wegen (8.7),(8.8),(8.9) müssen wir zum Beweis vom Satz 8.1 noch nur zeigen:

$$cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{B_R(.)\cap\Omega\cap\Omega_i} \phi(c'|u(y)|)dy + \underbrace{\int_{B_R(.)\cap\Omega\cap\Omega_i} \phi(c'|\nabla u(y)|)dy}_{\text{gut}}\,.$$

Sei $T_R := B_R(x_0)\cap\Omega\cap\Omega_i$. Wir müssen also nur zeigen:
Für geeignete $c,\, c' > 0$ :

$$cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{T_R} \phi(c'|u(y)|)dy.$$

Aber wir wissen (nach (8.1)):

$$\Omega\cap U_i = U_i\cap\{x+t\nu^i|\, x\in W_i,\, t<\xi_i(x)\},$$

$\xi_i$–Lipschitz-Funktion und $U_i \supset\supset \Omega_i$.

Dann gibt es einen beschränkten Kegel $\Gamma_i := \{tx|\, 0\leq t\leq 1,\; x\in B_{r_i}(x_0^i)\}$ für ein $B_{r_i}(x_0^i)$, so dass $\forall x\in\Omega\cap\Omega_i : x+\Gamma_i\subset\Omega\cap U_i$.

$$\boxed{\text{Wir wählen } \Gamma_i \text{ so, dass } \;\forall\, i :\; \mathrm{diam}(\Gamma_i)\leq 1}\,.$$

Die Wahl von $T_R$ und $\Gamma_i$ gibt:

$$T_R+\Gamma_i\subset\Omega \quad\text{und}\quad T_R\subset B_R(.).$$

Deswegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i} d\gamma\int_{T_R}\phi(|u(x+\gamma)|)dx &= \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{T_R} dx\int_{\Gamma_i}\phi(|u(x+\gamma)|)d\gamma \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{T_R} dx\,\overbrace{\int_{\Omega}\phi(|u(y)|)dy}^{\leq K} \\
&\leq \frac{|T_R|}{|\Gamma_i|}K \leq \frac{|B_R|}{|\Gamma_i|}K = cKR^n
\end{aligned}$$

Wir haben

$$\frac{1}{|\Gamma_i|}\int_{\Gamma_i} d\gamma\int_{T_R}\phi(|u(x+\gamma)|)dx \leq cKR^n.$$

Folglich,

$$\exists\gamma_0\in\Gamma_i : \int_{T_R}\phi(|u(x+\gamma_0)|)dx \leq cKR^n. \tag{8.10}$$

Hierbei ist

$$|\gamma_0| \leq \max_i\, \mathrm{diam}(\Gamma_i) \leq 1.$$

Um den Beweis von Satz 8.1 abzuschließen, müssen wir nur zeigen, dass

$$cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \geq \int_{T_R} \phi\left(\frac{1}{2}|u|\right) dx.$$

Dies folgt so:

$$u(x) = u(x+\gamma_0) - \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt.$$

Darum (für $\gamma_0$ aus (8.10) )

$$\begin{aligned}
2\int_{T_R} \phi\left(\frac{1}{2}|u(x)|\right) dx &= 2\int_{T_R} \phi\left(\frac{1}{2}\left|u(x+\gamma_0) - \int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt\right|\right) dx \\
&\leq \overbrace{\int_{T_R} \phi(|u(x+\gamma_0)|)dx}^{\leq cKR^n\ (wg.(8.10))} + \int_{T_R} \phi\left(\left|\int_0^1 \frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)dt\right|\right) dx \\
&\leq cKR^n + \int_{T_R} dx \int_0^1 \phi\left(\left|\frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)\right|\right) dt \\
&= cKR^n + \int_0^1 dt \int_{T_R} \phi\left(\overbrace{\left|\frac{d}{dt}u(x+t\gamma_0)\right|}^{\leq|\gamma_0||\nabla u(x+t\gamma_0)|}\right)dx \\
\left(\begin{array}{c}\text{Wir wissen:}\\ |\gamma_0|\leq 1\end{array}\right) \quad &\leq cKR^n + \int_0^1 dt \overbrace{\int_{\underbrace{T_R+t\gamma_0}_{\subset B_R(.)}} \phi(|\nabla u(x)|)dx}^{\leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}} \\
&\leq cK\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}.
\end{aligned}$$

□

### 8.1.2 Stückweise lineare Approximation (Lemma 8.2)

Nun beweisen wir die "Orlicz-Variante" von Lemma 5.2.
Wie in Lemma 5.2 definieren wir

$$Q_d := [0; d]^n.$$

Nun benutzen wir den Raum $FT_0(Q_d)$, der auf Seite 31 definiert wurde. Eigentlich ist für uns nur folgende Eigenschaft von $FT_0(Q_d)$ wichtig:

*Sei $g \in C_0^\infty(Q_d)$. Dann existiert eine Folge $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $f_i \in FT_0(Q_d)$, dass*

$$\begin{array}{rl} |\, g - f_i \,| \to 0 & \textit{gleichmäßig und} \\ |\, \nabla g - \nabla f_i \,| \to 0 & \textit{gleichmäßig.} \end{array} \tag{8.11}$$

Wir beweisen nun folgendes

**Lemma 8.2** *Sei* $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konvex,* $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *stetig.*
*Dann existieren Konstanten* $c, c' > 0$*, für die gilt:*

*Wenn* $\forall f \in FT_0(Q_d)$ *folgende Inklusion erfüllt ist:*
$$\left(\int_{B_R(x_0)} \phi(c'|\nabla f|)dx \leq cK \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall R \leq 1/2\right) \Rightarrow \int_{Q_d} \psi(|f|)dx \leq K_1,$$
*dann gilt auch* $\forall u \in W^{1,1}(\Omega)$*:*
$$\left(\int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u|)dx \leq K \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall R \leq 1/2 \quad \& \quad \int_\Omega \phi(|u|)dx \leq K\right) \Rightarrow \int_\Omega \psi(|u|)dx \leq K_1.$$

**Beweis:** Wenn $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$ $\operatorname{trg}(Eu) \subset\subset [0; d]^n$ gilt, ist der Beweis einfach:
Wir substituieren
$$\text{“}g(x) = \omega_h * (Eu(x))\text{”}$$
in den Formeln (8.11) , wobei $E$ der Erweiterungsoperator aus Satz 8.1 und $\omega_h$ ein Standardkern ist. Für $h \to 0^+$ bekommen wir Lemma 8.2.[1]

Sonst können wir “die Längeneinheit so verändern”, dass danach
$$\forall u : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{gilt:} \quad \operatorname{trg}(Eu) \subset\subset [0; d]^n$$
(diese Möglichkeit ist auf Seite 3.3 erklärt). □

### 8.1.3 Symmetrisation (Lemma 8.3)

Lemma 5.4 ist interessanter. In der “Orlicz-Variante” sieht dieses Lemma so aus:

**Lemma 8.3** *Sei* $f : W \to \mathbb{R}_{\geq 0}$*, wobei* $W$ *ein n-dim Würfel ist,* $f \geq 0$*.*

*Außerdem sei* $f$ *stetig und* $\operatorname{trg} f$ *mit konvexen Polyedern* $P_1, \ldots, P_k$ *gepflastert, auf jedem* $P_i$ *gelte:* $f$ *linear.*

*Außerdem gelte* $|\operatorname{trg} f| \leq c_1|W|$ *mit* $c_1$ *aus Lemma A.1.*

*Weiter sei* $g : B_R(0) \to \mathbb{R}$ *Symmetrisation von* $f$, $|B_R| = |W|$,
$\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konvex,* $\phi(0) = 0$.

*Dann gilt:*
1. $g$ *ist stetig.*
2. $\int_{B_R(0)} \phi(c_2|\nabla g|)\, dx \leq \int_W \phi(|\nabla f|)\, dx$ *mit* $c_2$ *aus Lemma A.1.*

**Beweis:**
Den ersten Punkt beweist man wie in Lemma 5.4.

[1] wir benutzen dabei Stetigkeit von $\psi$ und Lemma von Fatou

Beweis von 2.: $\int_{B_R(0)} \phi(c_2|\nabla g|)\, dx \leq \int_W \phi(|\nabla f|)\, dx$.

Sei

$$T := \sup_W f(x).$$

Sei auch

$$\psi(t) := \int_{f(x)\leq t} \phi(|\nabla f|) dx. \tag{8.12}$$

Dann ist $\psi(.)$ wachsend, woraus folgt, dass die Ableitung $\psi'$ f.ü. existiert.

Außerdem ist $\psi(.)$ stetig. Tatsächlich:

$\forall\, t \in (0;T)$ :

$$\begin{aligned}
\psi(t+0) - \psi(t-0) &= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{t-\varepsilon<f(x)\leq t+\varepsilon} \phi(|\nabla f|) dx = \int_{f(x)=t} \phi(|\nabla f|) dx \\
&= \sum_i \underbrace{|(f(x)=t)\cap P_i|}_{=0 \ \text{ bei } \nabla f(x\in P_i)\neq 0} \phi(|\nabla f(x\in P_i)|) = 0,
\end{aligned}$$

weil $\nabla f = const$ auf $P_i\, \forall\, i$ und $\phi(0) = 0$.

Also ist $\psi$ wachsend und stetig. Darum ist $\psi' = \frac{d}{dt}\psi(t)$ f.ü. definiert und

$$\int_W \phi(|\nabla f|) dx = \psi(T) = \int_0^T \psi'(t) dt + \overbrace{\psi(0)}^{=0} = \int_0^T \psi'(t) dt$$

Weiter gilt in jedem Punkt $t$, wo $\psi'(t)$ existiert (also f.ü. auf $[0;T]$ ):

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi(t+\varepsilon)-\psi(t)}{\varepsilon} \overset{(8.12)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t<f(x)\leq t+\varepsilon} \phi(|\nabla f|) dx \\
&= \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{(t<f(x)\leqslant t+\varepsilon)\cap P_i} \phi(|\nabla f|) dx \\
&= \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(t<f(.)\leqslant t+\varepsilon)\cap P_i|}{\varepsilon} \phi(|\nabla f(x\in P_i)|).
\end{aligned}$$

Wir benutzen dabei, dass $|\nabla f| = const$ auf $P_i$.
Also ist

$$\psi'(t) = \sum_{i=1}^k \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|(t<f(.)\leq t+\varepsilon)\cap P_i|}{\varepsilon} \phi(|\nabla f(x\in P_i)|). \tag{8.13}$$

Seien $|\ldots|_F$–Flächeninhalt und

$$\Gamma_t := (f(.) = t).$$

Dann kann man leicht sehen, dass für fast alle $t \in [0;T]$ gilt:

a) $\Gamma_t$ ist eine $n-1$-dimensionale Mannigfaltigkeit und $|\Gamma_t|_F = \sum_i |\Gamma_t \cap P_i|_F$.

b) bei genügend kleinem $\varepsilon$ : die Menge $(t < f(.) \leq t+\varepsilon) \cap P_i$ hat entweder die "Dicke" $\frac{\varepsilon}{|\nabla f(x \in P_i)|}$ oder ist $\emptyset$ (da $f|_{P_i}$ linear).

Folgende Überlegungen funktionieren sogar bei $\phi(0) \neq 0$:
Für fast alle $t \in [0;T]$ :

$$|(t < f(.) \leq t+\varepsilon) \cap P_i| = |\Gamma_t \cap P_i|_F \cdot \frac{\varepsilon}{|\nabla f(x \in P_i)|} + o(\varepsilon).$$

Folglich,

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\overset{(8.13)}{=} \sum_{i=1}^{k} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(t < f(.) \leqslant t+\varepsilon) \cap P_i|}{\varepsilon} \phi(|\nabla f(x \in P_i)|) \\
&\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{i=1}^{k} |\Gamma_t \cap P_i|_F \cdot \frac{\phi(|\nabla f(x \in P_i)|)}{|\nabla f(x \in P_i)|} = \int_{\Gamma_t} \frac{\phi(|\nabla f|)}{|\nabla f|} dS
\end{aligned}$$

f.ü. auf $[0;T]$. Also gilt

$$\psi'(t) = \int_{\Gamma_t} \frac{\phi(|\nabla f|)}{|\nabla f|} dS, \tag{8.14}$$

woraus folgt

$$\int_W \phi(|\nabla f|) dx \overset{(8.12)}{=} \int_0^T \psi'(t) dt \overset{(8.14)}{=} \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \frac{\phi(|\nabla f|)}{|\nabla f|} dS. \tag{8.15}$$

Nach Definition ist $g : B_R(0) \to \mathbb{R}$ Symmetrisation von $f$.

Sei

$$G_t := \partial(g(.) > t). \tag{8.16}$$

Wir können beweisen:

$$\int_{B_R(0)} \phi(c_2 |\nabla g|) dx = \int_0^T dt \int_{G_t} \frac{\phi(c_2 |\nabla g|)}{|\nabla g|} dS. \tag{8.17}$$

Tatsächlich,

$$\exists \xi : [0;R] \to \mathbb{R} \text{ mit } g(t) = \xi(|t|).$$

Hierbei ist $\xi$ fallend und stetig ($\Rightarrow \xi'$ existiert f.ü. auf [0;T]).

Sei

$$\varphi(t) := \phi(c_2 t).$$

Dann

$$\int_{B_R(0)} \varphi(|\nabla g|) dx = |S_1^{n-1}| \int_0^R \varphi(|\xi'(r)|) r^{n-1} dr \overset{\xi \text{ fallend}}{=} \int_{\xi=0}^{T} \frac{\varphi(|\xi'(r)|)}{|\xi'(r)|} |S_r^{n-1}| \overbrace{d\xi}^{\xi' dr}.$$

Sei jetzt $\xi(r) = t$. Wenn $\xi'(r) \neq 0$ (das gilt für fast alle $t$), dann haben wir:

$$G_t \overset{(8.16)}{=} (g(.) = t) = S_r^{n-1}, \quad |\nabla g(x)|_{x \in G_t} \equiv |\xi'(r)|.$$

Wir sammeln alle Resultate

$$\int_{B_R(0)} \varphi(|\nabla g|) dx \overset{\xi(r)=t}{=} \int_{t=0}^{T} \underbrace{\frac{\varphi(|\xi'(r)|)}{|\xi'(r)|} |G_t|_F}_{= \int_{G_t} \frac{\varphi(|\nabla g|)}{|\nabla g|} dS} dt = \int_{t=0}^{T} dt \int_{G_t} \frac{\varphi(|\nabla g|)}{|\nabla g|} dS.$$

Mit anderen Worten,

$$\int_{B_R(0)} \phi(c_2 |\nabla g|) dx = \int_0^T dt \int_{G_t} \frac{\phi(c_2 |\nabla g|)}{|\nabla g|} dS.$$

Wir wollen jetzt beweisen, dass

$$\int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t < f(x) \leq t + \varepsilon} 1 dt. \tag{8.18}$$

Für diesen Beweis setzen wir voraus, dass $\phi(\cdot) \equiv 1$.
Aber dann impliziert (8.12), dass

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_{f(x) \leq t} 1 dx \right),$$

und darum

$$\int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS \overset{(8.14)}{=} \underbrace{\psi'(t)}_{\text{bei } \phi \equiv 1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t < f(x) \leq t + \varepsilon} 1 dt.$$

Wenn $\nabla g$ existiert und auf $G_t$ nicht verschwindet, dann
(da $|\nabla g| = const$ auf $G_t$) haben wir ebenso:

Da $g(x) = \xi(|x|)$, $t = \xi(r)$,

$$\begin{aligned}
\int_{G_t} |\nabla g|^{-1} dS &= |\xi'(r)|^{-1} |G_t|_F = \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi(r)=t}^{t+\varepsilon} |G_{\xi(r)}|_F \, dr \right| \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(t < g(.) \leqslant t + \varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(g > t)| - |(g > t + \varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&\overset{(5.8)}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(f > t)| - |(f > t + \varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|(t < f(.) \leqslant t + \varepsilon)|}{\varepsilon} \\
&\overset{(8.18)}{=} \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS.
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_{G_t} |\nabla g|^{-1} dS = \int_{\Gamma_t} |\nabla f|^{-1} dS \qquad \text{für fast alle } \ t \in [0;T]. \tag{8.19}$$

$$\boxed{\text{Im Weiteren wird } \phi \text{ wie am Anfang des Satzes definiert.}}$$

Sei

$$\mu(x) := |\nabla f(x)|^{-1} \quad \text{und} \quad \alpha(t) := \phi(t^{-1})t. \tag{8.20}$$

Aus der Konvexität von $\phi$ folgt die Konvexität von $\alpha$. In der Tat:

$$\alpha'(t) = -\tfrac{\phi'(t^{-1})}{t} + \phi(t^{-1})$$
$$\alpha''(t) = \tfrac{\phi''(t^{-1})}{t^3} \geq 0, \quad \text{wenn } \phi \text{ konvex}, \quad t > 0.$$

Wir haben

$$\int_W \phi(|\nabla f|) dx \overset{(8.15)}{=} \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \frac{\phi(|\nabla f|)}{|\nabla f|} dS = \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \alpha(\mu(x)) dS.$$

Weil $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvex ist, haben wir nach der Jensenschen Ungleichung (vgl. [6, S.621]), dass

$$\frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda \alpha(v) dx \geq \alpha\left(\frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda v \, dx\right).$$

Damit gilt für fast alle $t \in [0;T]$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{\Gamma_t} \alpha(\mu(x)) \, dS \quad & \geq \quad \alpha\left(\frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{\Gamma_t} \mu(x) \, dS\right) \\
& \overset{(8.19),(8.20)}{=} \quad \alpha\left(\frac{1}{|\Gamma_t|_F} \int_{G_t} |\nabla g|^{-1} \, dS\right) \\
(|\nabla g| = const \text{ auf } G_t) \quad & = \quad \alpha\left(\frac{|G_t|_F}{|\Gamma_t|_F} |\nabla g(x \in G_t)|^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Folglich,

$$\int_{\Gamma_t} \alpha(\mu(x)) dS \geq \frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} \int_{G_t} \alpha\left(\frac{|G_t|_F}{|\Gamma_t|_F} |\nabla g|^{-1}\right) dS \overset{(8.20)}{=} \int_{G_t} \frac{\phi\left(\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} |\nabla g|\right)}{|\nabla g|} dS.$$

Aber

$$\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} \geq c_2 \ \text{f.ü.}$$

mit $c_2$ aus Lemma A.1 (diesen Fakt beweisen wir später).
Des Weiteren ist $\phi$ wachsend. Also gilt

$$\int_{\Gamma_t} \alpha(\mu(x)) dS \geq \int_{G_t} \frac{\phi(c_2 |\nabla g|)}{|\nabla g|} dS.$$

Wir sammeln alle Resultate:

$$\begin{aligned}\int_W \phi(|\nabla f|)dx &= \int_0^T dt \int_{\Gamma_t} \alpha(\mu(x))dS \\ &\geq \int_0^T dt \int_{G_t} \frac{\phi(c_2|\nabla g|)}{|\nabla g|} dS \overset{(8.17)}{=} \int_{B_R(0)} \phi(c_2|\nabla g|)dx.\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\int_W \phi(|\nabla f|)dx \geq \int_{B_R(0)} \phi(c_2|\nabla g|)dx.$$

Zum Beweis von Lemma 8.3 müssen wir nur noch zeigen: $\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} \geq c_2$ überall wo $\Gamma_t$ Mannigfaltigkeit ist (also f.ü. auf [0;T]). Hierbei ist $c_2$ die Konstante aus Lemma A.1.

$$\text{Sei jetzt} \quad F_t := \partial(f(.) > t). \tag{8.21}$$

Wir zeigen, dass

$$\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1 \ \text{ und } \ \frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2.$$

(Daraus folgt dann wegen $\frac{|\Gamma_t|_F}{|G_t|_F} = \frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \cdot \frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq c_2$ die Behauptung).

Zeige: $\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1$.

Wir wissen: $F_t = \partial(f(.) > t)$, $G_t = \partial(g(.) > t)$, wobei

$$|(f(.) > t)| \overset{(5.8)}{=} |(g(.) > t)| \ \text{ und } \ (g(.) > t) \ \text{ eine Kugel ist.}$$

Daher ist $|F_t|_F \geq |G_t|_F$, da eine Kugel den kleinsten Flächeninhalt unter allen (nicht unbedingt zusammenhängenden) Gebieten mit gleichen Volumen hat. Also ist $\frac{|F_t|_F}{|G_t|_F} \geq 1$.

Zeige: $\frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2$.

Sei $t$ fixiert,

$$G := (f(.) > t), \quad \widetilde{\Gamma} := \partial G \setminus \partial W.$$

Man sieht leicht, dass

$$\Gamma_t = (f(.) = t) \overset{(*)}{\supseteq} \partial(f(.) > t) \setminus \partial W = \partial G \setminus \partial W = \widetilde{\Gamma},$$

wobei $(*)$ wegen $f \in C(W)$ gilt. Also haben wir

$$|\Gamma_t|_F \geq |\widetilde{\Gamma}|_F. \tag{8.22}$$

Außerdem ist $G = (f(.) > t)$ und deshalb $|G| \leq |\mathrm{trg}\, f| \leq c_1|W|$ nach Voraussetzung. Also ist

$$G \subset \text{Würfel } W, \quad |G| \leq c_1|W| \quad \text{und} \quad \widetilde{\Gamma} = \partial G \setminus \partial W.$$

Dann folgt aus Lemma A.1: $|\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2 |\partial G|_F$.

Außerdem ist $\partial G = \partial(f(.) > t) \overset{(8.21)}{=} F_t$. Darum gilt $|\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2 \overbrace{|F_t|_F}^{=|\partial G|_F}$.
Also ist $|\Gamma_t|_F \overset{(8.22)}{\geq} |\widetilde{\Gamma}|_F \geq c_2 |F_t|_F$, mit anderen Worten, $\frac{|\Gamma_t|_F}{|F_t|_F} \geq c_2$, und das Lemma ist bewiesen. □

## 8.2 Einfache Ergebnisse

Für die Sätze 6.1, 6.2 und 7.2 ist alles komplizierter. Wenn wir beweisen wollen, dass

$$\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \leq 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \phi(|u|)dx \leq K\right) \Rightarrow$$
$$\int_\Omega \psi(|u|)dx \leq K_1$$

für bestimmte Funktionen $\phi$ und $\psi$ ($\psi$ soll optimal sein), dann haben wir schon bei $\phi(t) = t^p$ gesehen, dass die Abhängigkeit zwischen $\phi$ und $\psi$ sehr kompliziert ist. Es ist schwer, den Operator $\mathcal{A}$ zu finden, für den $\psi = \mathcal{A}\phi$.

Das heißt, dass wir die Funktion $\phi$ konkretisieren müssen.
Wir werden das Symbol "$\sim$" benutzen, das hier folgendermaßen definiert ist:

**Definition 8.1** *Sei* $\phi,\ \psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Dann* $\phi \sim \psi$, *wenn*
$\exists\, T, C, c > 0$, *so dass* $\forall t \geq T : c\phi(t) \leq \psi(t) \leq C\phi(t)$.

Man kann leicht zeigen:
Wenn entweder $p = 1,\ \alpha \geq 0$ oder $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$,
dann existiert eine konvexe Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\phi(0) = 0$,
so dass $\phi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha$.

Wir können dabei immer voraussetzen, dass $\phi(t) \neq 0$, wenn $t \neq 0$ (damit haben wir Garantie, dass $\phi$ invertierbar ist).

### 8.2.1 Der Fall "$\boldsymbol{\alpha + \vartheta \in [0, p)}$" (Satz 8.2)

Wir bekommen die "Orlicz-Variante" von Satz 6.1:

**Satz 8.2** *Sei* $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konvex,* $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha$.
*Sei auch*

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla v|)dx \leq K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \leq 1/2, \quad \int_\Omega \phi(|v|)dx \leq K$$

$$\textit{und} \quad \alpha + \vartheta \in [0; p).$$

*Dann* $\exists\,\beta > 0$*, so dass*

$$\int_\Omega e^{\beta|v|^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}}dx \le \bar{K}.$$

**Beweis:** Wegen des Erweiterungssatzes 8.1 können wir Satz 8.2 so umformulieren:
*Sei* $u := Ev$, $E$ *ist der Erweiterungsoperator aus dem Satz 8.1. Wir betrachten eine konvexe Funktion* $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \ne 0$, *wenn* $t \ne 0$ *und* $\phi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha$.
*Sei weiterhin*

$$\int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2, \qquad \int_\Omega \phi(|\nabla u|)dx \le K$$

$$\textit{und}\ \ \alpha + \vartheta \in [0;p).$$

*Dann*

$$\exists\,\beta > 0 : \int_\Omega e^{\beta|v|^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}}dx \le \bar{K}.$$

Wir wissen: $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\operatorname{trg} u \subset \Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \Omega'$. Dann gilt

$$\phi\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|dx\right) \le \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u|)dx \le K_1\frac{R^{-p}}{|\log R|^\vartheta}. \tag{8.23}$$

Aber die Funktion $\phi$ ist invertierbar und wachsend. Außerdem gilt

$$\phi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha \quad \Rightarrow \phi^{-1}(t) \sim t^{1/p}|\log(t+2)|^{-\alpha/p}$$
$$\Rightarrow \phi^{-1}(t) \le C_1 t^{1/p}|\log(t+2)|^{-\alpha/p} + C_2.$$

Darum folgt aus (8.23) für jedes $R \in (0;1/2]$ :

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|dx \le \phi^{-1}\left(K_1\frac{R^{-p}}{|\log R|^\vartheta}\right) \overset{R\leqslant 1/2}{\le} K_2\frac{R^{-1}}{|\log R|^{\frac{\vartheta}{p}+\frac{\alpha}{p}}} + K_3$$

$$\Rightarrow \int_{B_R(x_0)} |\nabla u|dx \le K_4\frac{R^{n-1}}{|\log R|^{\frac{\vartheta}{p}+\frac{\alpha}{p}}} + K_5R^n \overset{R\leqslant 1/2}{\le} K_6\frac{R^{n-1}}{|\log R|^{\frac{\vartheta}{p}+\frac{\alpha}{p}}}.$$

Aus Satz 6.1 folgt:

$$\int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}}dx = \int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\vartheta}{p}\right)}}}dx \overset{\text{Satz 6.1}}{\le} \bar{K}$$

für passendes $\beta > 0$, weil $\alpha + \vartheta \in [0;p)$ $\quad(\Leftrightarrow \alpha/p + \vartheta/p \in [0;1))$. $\square$

Analog, wenn $\vartheta + \alpha = p$, dann gilt

$$\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \|u\|_1 \le K\right) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega e^{e^{\beta|u|}}dx \le \bar K$$

und, wenn $\vartheta + \alpha > p$, dann gilt

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \ \Rightarrow\ u \in C(\overline{\Omega}).$$

**Bemerkung 8.1** *Auch für* $\alpha + \vartheta < 0$ *gilt die Einbettung:*

$$\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)dx \le K\frac{R^{n-p}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad und \quad \|u\|_1 \le K\right) \Rightarrow$$

$$\int_\Omega e^{|u|^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}}dx \le K_1,$$

*aber dies wird erst in Satz 8.4 bewiesen.*

Hierbei ist $\phi$ wie in Satz 8.2 definiert (insbesondere $\phi(t) \sim t^p[\log(t+2)]^\alpha$).

### 8.2.2 Der Fall "$\boldsymbol{\alpha + \vartheta = p}$" (Satz 8.3)

Wenn $\alpha \ge 0$ ist, können wir auch die Sätze 6.2 und 7.2 leicht in die "Orlicz-Variante" überführen.

**Satz 8.3** *Sei* $v$, $\nabla v \in L^\psi(\Omega)$.
*Sei* $\psi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *konvex,* $\psi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha$, $p \ge 1$, $\alpha \ge 0$ *und*

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \psi(|\nabla v|)dx \le K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\ \forall\, R \le 1/2 \quad und \quad \int_\Omega \psi(|v|)dx \le K. \tag{8.24}$$

*Dann gilt, wenn* $n = \lambda = p$ *und* $\vartheta + \alpha \in [0; n-1)$*:*

$$\exists\, \bar K,\ \beta > 0, \quad so\ dass \quad \int_\Omega e^{\beta|v|^{\frac{n}{n-1-(\vartheta+\alpha)}}}dx \le \bar K$$

*und, wenn* $p < \lambda$, $\vartheta + \alpha \ge 0$, *dann* $\exists\, \bar K$ *mit*

$$\int_\Omega |v|^q|\log v|^{\frac{q(\vartheta+\alpha)}{\lambda}}dx \le \bar K \quad für \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}.$$

**Beweis:** Sei $u := Ev$, wobei $E$ der Erweiterungsoperator aus Satz 8.1 ist.
Dann folgt aus Satz 8.1, dass (8.24) $\Rightarrow$

$$\int_{B_R(x_0)} \psi(c|\nabla u|)dx \le K_1\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall\, R \le 1/2 \tag{8.25}$$

für bestimmte $c$, $K_1 > 0$.

Betrachten wir eine Funktion $\phi$, so dass: $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ konvex ist, $\phi(t) \sim$

$t|\log(t+2)|^\alpha$, $\phi(0)=0$, $\phi(t)\neq 0\ \forall t\neq 0$. (Insbesondere folgt hieraus, dass $\phi$ invertierbar ist).
Eine Funktion $\phi$ dieser Art existiert für $\alpha\geq 0$.

Weiter wissen wir, dass $\psi(t)\sim t^p|\log(t+2)|^\alpha\sim\phi(t^p)$. Aber daraus folgt, dass $\forall t\geq 0:\phi(t^p)\leq C_1\psi(t)+C_2$ für geeignete Konstanten $C_1,C_2$ (wir benutzen, dass $\phi$ und $\psi$ wachsend sind). Für $c$ aus (8.25) haben wir, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\phi(c^p|\nabla u|^p)dx &\overset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}C_1\psi(c|\nabla u|)dx+C_2\\ &\overset{(8.25)}{\leq} K_2\frac{R^{-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}+K_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\phi\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}c^p|\nabla u|^pdx\right)\leq\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}\phi(c^p|\nabla u|^p)dx\leq K_2\frac{R^{-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}+K_3.$$

Aber $\phi$ ist invertierbar und wachsend. Außerdem, $\phi(t)\sim t|\log(t+2)|^\alpha\Rightarrow\phi^{-1}(t)\sim t|\log(t+2)|^{-\alpha}\Rightarrow\phi^{-1}(t)\leq C_3t|\log(t+2)|^{-\alpha}+C_4$.

Darum haben wir für $R\in(0;1/2]$:

$$\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(x_0)}c^p|\nabla u|^pdx\leq\phi^{-1}\left(K_2\frac{R^{-\lambda}}{|\log_2 R|^\vartheta}+K_3\right)\leq K_4\frac{R^{-\lambda}}{|\log_2 R|^{\vartheta+\alpha}}+K_5$$

$$\Rightarrow\int_{B_R(x_0)}|\nabla u|^pdx\leq K_6\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta+\alpha}}+K_7R^n\overset{R\leq 1/2}{\leq}K_8\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta+\alpha}}.$$

Wenn $n=p=\lambda$ und $\alpha+\vartheta\in[0;n-1)$, dann gibt es wegen Satz 6.2 $\beta$, $\bar{K}>0$, so dass

$$\int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{n}{n-1-(\vartheta+\alpha)}}}dx\leq\bar{K}.$$

Wenn $p<\lambda$, dann gilt wegen Satz 7.2:

$$\int_\Omega|u|^q|\log u|^{\frac{q(\vartheta+\alpha)}{\lambda}}dx\leq\bar{K}.$$

Damit ist Satz 8.3 bewiesen, denn nach Definition $v=u|_\Omega$ ist. $\square$

Analog kann man beweisen:
wenn $n=p=\lambda$, $\alpha\geq 0$ und $\alpha+\vartheta=n-1$, dann

$$\left(\int_{B_R(x_0)\cap\Omega}\psi(|\nabla v|)\,dx\leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\quad\forall R\leq 1/2\quad\text{und}\quad\int_\Omega\psi(|v|)\,dx\leq K\right)\Rightarrow$$

$$\int_\Omega e^{e^{\beta|v|}}dx\leq\bar{K}$$

und, wenn $n = p = \lambda$, $\alpha \geq 0$ und $\alpha + \vartheta > n - 1$, dann

$$\int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \psi(|\nabla v|)\, dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \;\; \forall\, R \leq 1/2 \Rightarrow v \in C(\overline{\Omega}),$$

wobei $\psi$, $p$, $\alpha$ und $\Omega$ definiert sind wie in Satz 8.3.

## 8.3 Hauptresultat (Satz 8.4)

Nun will ich zeigen, dass man die "Orlicz-Variante" von Satz 7.2 noch verbessern kann. Allerdings wird der Beweis dann viel komplizierter.

**Satz 8.4**

*a) Sei* $\Omega$ *ein beschränktes Lipschitzgebiet, und seien* $p, \lambda, \vartheta, \alpha$ *fixiert, wobei*

$$\vartheta,\, \alpha \in (-\infty;\, +\infty), \quad 1 \le p < \lambda < n, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}, \quad \boxed{\kappa = \tfrac{\vartheta}{\lambda} + \tfrac{\alpha}{p}}.$$

*Sei* $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *konvex,* $\phi(0) = 0$, $\phi(t) \ne 0\, \forall\, t \ne 0$,
$\phi(t) \sim t^p |\log(t{+}2)|^\alpha$. *(Folglich, der Fall "*$(p = 1,\ \alpha < 0)$*" ist ausgeschlossen.)*

*Dann gibt es zu jeden* $K'$ *ein* $\mathbf{K}'$, *so dass folgende Inklusion* $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt:*

$$\Big(\forall\, r \le \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta} \ \ \textit{und} \ \ \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K'\Big)$$
$$\Rightarrow \int_\Omega |u|^q |\log(|u|+2)|^{q\kappa} dx \le \mathbf{K}'.$$

*b) Seien* $\phi$ *und* $\Omega$ *wie in Punkt a) definiert*
*(insbesondere* $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *konvex,* $\phi(t) \sim t^p [\log(t+2)]^\alpha$*),*
*wobei*

$$\boxed{1 \le p = \lambda < n}, \quad \alpha \in \begin{cases} [0; +\infty) & \textit{für } p = 1, \\ (-\infty; +\infty) & \textit{für } p > 1, \end{cases} \quad \textit{und} \ \ \vartheta + \alpha < 0.$$

*Dann gibt es zu jeden* $K'$ *ein* $\mathbf{K}' > 0, b > 0$, *so dass folgende Inklusion* $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ *gilt:*

$$\Big(\forall\, r \le \frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta} \ \ \textit{und} \ \ \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K'\Big)$$
$$\Rightarrow \int_\Omega e^{b|u|^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}} dx \le \mathbf{K}'.$$

**Beweis:** Wir verwenden wie bisher die Bezeichnungen $Q := [0;1]^n$, $Q_d := [0;d]^n$.

Dieser Teil des Beweises betrifft beide Punkte von Satz 8.4, a) und b).
Nach Lemma 8.2 können wir o.B.d.A. voraussetzen, dass

$$\left.\begin{array}{rl} & u := |\tilde{u}|, \quad \text{wobei} \\ & \tilde{u} : Q \to \mathbb{R} \\ \text{und} & \tilde{u}|_{Q_d} \in FT_0(Q_d), \quad \tilde{u}(x) = 0\ \forall\, x \notin int(Q_d). \end{array}\right\} \tag{8.26}$$

(Erinnerung: $v \in FT_0(Q_d) \;\Rightarrow\; v$ stetig und stückweise linear auf $Q_d$,
$v(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \partial(Q_d)$.)

Sei

$$d := \sqrt[n]{c_1} \;\text{ mit }\; c_1 \;\text{ aus Lemma A.1.} \tag{8.27}$$

Dann gilt

$$\text{“}\forall r \leq 1/2, y \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(y)} \phi(|\nabla u|)dx \leq K' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^{\vartheta}}\text{”}$$

bei passender Modifikation der Konstante $K' > 0$.
Diese Bedingung kann folgendermaßen umformuliert werden:

$$\left.\begin{array}{rl} \forall \text{ Würfel } W \text{ mit Kantenlänge } r \leq 1 : & \int_W \phi(|\nabla u|)dx \leq K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r - 1|^{\vartheta}}, \\ \text{insbesondere für } W = Q : & \int_Q \phi(|\nabla u|)dx \leq K. \end{array}\right\} \tag{8.28}$$

Wegen (8.26),(8.27):

$$|\operatorname{trg} u| \leq c_1.$$

Wir wählen $R$ so, dass

$$|B_R| = c_1 \;(\geq |\operatorname{trg} u|\;). \tag{8.29}$$

Sei

$$\left.\begin{array}{rl} & g : x \mapsto \xi(|x|) \;\text{ die Symmetrisation von } u, \\ \text{dabei} & \xi : [0; R] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{(wir wissen, dass } \xi \text{ fallend ist)} \end{array}\right\} \tag{8.30}$$

Sei weiterhin

$$\mu_i \;:=\; \xi(2^{-i}R) \;\; \forall\, i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{8.31}$$

$$\text{und} \quad T_i \;:=\; \mu_{i+1} - \mu_i \quad (\Rightarrow T_i \geq 0, \;\text{ da } \xi \text{ fallend}). \tag{8.32}$$

Folgendes Lemma ist im Prinzip nur ein spezieller Fall von Lemma 7.3, aber ich möchte den Beweis trotzdem präsentieren.

**Lemma 8.4**
*Sei $h : x \mapsto \eta(|x|)$ mit $\eta : [0; a] \to \mathbb{R}$, $\eta(a) = 0$ ($a > 0$ beliebig).
Dann gilt mit einer wachsenden Funktion*

$$\pi : (0,1) \to \mathbb{R}_{>0} : \forall\, \gamma \in (0;1) : \int_{B_a(0)} |\nabla h| dx \geq \pi(\gamma) \cdot a^{n-1} |\eta(\gamma a)|.$$

**Beweis:** In der Tat,

$$\begin{aligned} \int_{B_a(0)} |\nabla h| dx \;&\geq\; \overbrace{|S_1^{n-1}|}^{=:c} \int_{\gamma a}^{a} |\eta'(r)| r^{n-1} dr \geq c \cdot (\gamma a)^{n-1} \int_{\gamma a}^{a} |\eta'(r)| dr \\ &\geq\; c \cdot (\gamma a)^{n-1} \left| \int_{\gamma a}^{a} \frac{d}{dr} \eta(r) dr \right| \overset{\eta(a)=0}{=} \overbrace{c \cdot \gamma^{n-1}}^{=:\pi(\gamma)} a^{n-1} |\eta(\gamma a)| \\ &=\; \pi(\gamma) a^{n-1} |\eta(\gamma a)|, \end{aligned}$$

und Lemma 8.4 ist bewiesen. □

Jetzt müssen wir $T_i \ (= \mu_{i+1} - \mu_i)$ abschätzen.

$$\text{Sei} \quad u_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u(x) \leq \mu_i, \\ u(x) - \mu_i & \text{für} \quad \mu_i \leq u(x) \leq \mu_{i+1}, \\ T_i & \text{für} \quad u(x) \geq \mu_{i+1}. \end{cases} \tag{8.33}$$

Dann ist $u_i$ wohldefiniert (weil $T_i = \mu_{i+1} - \mu_i$) und stetig (weil $u$ stetig ist).

$$|\operatorname{trg} u_i| = |(u > \mu_i)| \overset{(8.30)}{=} |(g > \mu_i)| \overset{(*)}{\leq} |B_{2^{-i}R}|, \tag{8.34}$$

hierbei folgt $(*)$ aus:

$$g : x \mapsto \xi(|x|) \text{ und } \mu_i = \xi(2^{-i}R) \overset{\xi \text{ fallend}}{\Longrightarrow} (g(.) > \mu_i) \subset B_{2^{-i}R}(0).$$

**Wir schätzen $T_i$ für "$i \geq 1$" ab.**
Wegen (8.34) ist

$$|\operatorname{trg} u_i| \leq |B_R| = c_1.$$

Darum können wir nach Lemma 5.3 $int(\operatorname{trg} u_i) = (u_i(.) > 0)$ mit Würfeln $\{W_\beta |\, \beta \in \Lambda_i\}$ überdecken, für die gilt:

$$\left.\begin{array}{rcl} W_\beta \neq W_\gamma & \Rightarrow & |W_\beta \cap W_\gamma| = 0, \\ \forall\, \beta \in \Lambda_i & : & 2^{-n} c_1 |W_\beta| \leq |\operatorname{trg} u_i \cap W_\beta| \leq c_1 |W_\beta|. \end{array}\right\} \tag{8.35}$$

Seien $i$ und $\beta$ fixiert. Wir definieren $f : W_\beta \to \mathbb{R}$ so:
Sei

$$\left.\begin{array}{rl} & f := u_i\big|_{W_\beta} \quad (\Rightarrow |\operatorname{trg} f| \leq c_1 |W_\beta| \quad \text{wegen (8.35)}\ ) \\ \text{und es sei} & g_\beta : x \mapsto \xi_\beta(|x|) \ \text{ die Symmetrisation von } f. \end{array}\right\} \tag{8.36}$$

Sei $R_\beta$ so gewählt, dass

$$\overline{\operatorname{trg} g_\beta} = B_{R_\beta}(0). \tag{8.37}$$

Sei

$$\psi(t) := \phi(c_2 t)$$

mit $c_2$ aus Lemma A.1.
Dann haben wir nach Lemma 8.3, dass

$$\left.\begin{array}{c} \int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx \overset{(8.36)}{\leq} \int_{W_\beta} \phi(|\nabla f|)dx = \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_i|)dx \\ \text{und} \quad g_\beta \ \text{ stetig } \overset{(8.37)}{\Rightarrow} \xi_\beta(R_\beta) = 0. \end{array}\right\} \tag{8.38}$$

Wir definieren:

$$K_i := \int_Q \phi(|\nabla u_i|)dx \ \ \forall\, i \geq 0. \tag{8.39}$$

Dann gilt $\forall\, i \geq 1$ :

$$K_i := \int_Q \phi(|\nabla u_i|)dx \overset{(8.35)}{=} \sum_{\beta\in\Lambda_i} \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_i|)dx \overset{(8.38)}{\geq} \sum_{\beta\in\Lambda_i} \int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx.$$

Somit

$$\forall\, i \geq 1 : \quad K_i \geq \sum_{\beta\in\Lambda_i} \int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx. \tag{8.40}$$

Wegen (8.33) ist $\quad \int_Q \phi(|\nabla u_i|)dx = \int_{\mu_i \leq u < \mu_{i+1}} \phi(|\nabla u|)dx, \qquad$ darum

$$\begin{aligned}\sum_{i\geq 0} K_i \quad &\overset{(8.39)}{=} \quad \sum_{i\geq 0} \int_Q \phi(|\nabla u_i|)dx = \sum_{i\geq 0} \int_{\mu_i \leq u < \mu_{i+1}} \phi(|\nabla u|)dx \\ &= \quad \int_Q \phi(|\nabla u|)dx \overset{(8.28)}{\leq} K.\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$\sum_{i\geq 0} K_i \leq K. \tag{8.41}$$

**Bemerkung 8.2** *Nach Konstruktion ist*

$$|B_{R_\beta}| \leq |\mathrm{trg}(u_i)| \leq |B_{2^{-i}R}|.$$

*Folglich hat man* $\quad R_\beta \leq c \cdot 2^{-i} \quad$ *für eine Konstante c.*

Weiter benutzen wir die Bezeichnung

$$\mathbf{R}_i := \min\left\{ \left( c' \frac{K}{K_i} \cdot \frac{2^{-ni}}{i^\vartheta} \right)^{1/\lambda}, c \cdot 2^{-i} \right\}, \tag{8.42}$$

wobei $c'$ eine Konstante ist (die von $i$ und $u$ nicht abhängt) und
die Konstante $c$ aus Bemerkung 8.2 kommt.

Sei jetzt $R_\beta \geq \mathbf{R}_i$. $\quad$ Dann gilt

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx \overset{(8.38)}{\leq} \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_i|)dx \overset{(8.28)}{\leq} K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r - 1|^\vartheta} \overset{(\diamond)}{\leq} CK \frac{{R_\beta}^{n-\lambda}}{i^\vartheta},$$

wobei $r$ eine Kantenlänge des Würfels $W_\beta$ ist.
Hierbei folgt $(\diamond)$ aus:

| | | |
|---|---|---|
| $\langle 1 \rangle$ | $2^{-n} c_1 r^n \leq \lvert B_{R_\beta} \rvert \leq c_1 r^n$ | $(\Rightarrow C_1 R_\beta \leq r \leq C_2 R_\beta)$ |
| $\langle 2 \rangle$ | $\mathbf{R}_i \leq R_\beta \leq c \cdot 2^{-i}$ | (zusammen mit $\langle 1 \rangle$ heißt das: $-C_3 i - C_4 \leq \log_2 r \leq -i + C_5$) |
| $\langle 3 \rangle$ | $r \leq 1$ | $(\Rightarrow \log_2 r - 1 \leq -1)$. |

Tatsächlich, $\langle 1\rangle \Rightarrow r^{n-\lambda} \leq C{R_\beta}^{n-\lambda}$.
Und $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \langle 3\rangle \Rightarrow -L_1 i \leq \log_2 r - 1 \leq -L_2 i$, wenn $i \geq 1$ mit passenden Konstanten $L_1, L_2 > 0$.

Wir schätzen $\xi_\beta(R_\beta/3)$ für $R_\beta \geq \mathbf{R}_i$ ab:

$$\begin{aligned}
\int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx &\leq CK\frac{{R_\beta}^{n-\lambda}}{i^\vartheta} \\
\Rightarrow \frac{1}{|B_{R_\beta}|}\int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|)dx &\leq CK\frac{{R_\beta}^{-\lambda}}{i^\vartheta} \\
\Rightarrow \psi\left(\frac{1}{|B_{R_\beta}|}\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|dx\right) &\leq CK\frac{{R_\beta}^{-\lambda}}{i^\vartheta}.
\end{aligned}$$

Da $\psi$ invertierbar und wachsend ist

$$\Rightarrow \frac{1}{|B_{R_\beta}|}\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|dx \leq \psi^{-1}\left(CK\frac{{R_\beta}^{-\lambda}}{i^\vartheta}\right) \tag{8.43}$$

und

$$\begin{aligned}
\psi(t) \sim t^p|\log(t+2)|^\alpha &\Rightarrow \psi^{-1}(t) \sim t^{\frac{1}{p}}|\log(t+2)|^{-\frac{\alpha}{p}} \\
&\Rightarrow \psi^{-1}(t) \leq C_1 t^{\frac{1}{p}}|\log(t+2)|^{-\frac{\alpha}{p}} + C_1'.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(8.43) \Rightarrow \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|dx \leq C_2\frac{{R_\beta}^{n-\frac{\lambda}{p}}}{i^{\vartheta/p}} \underbrace{\left|\log\left(\frac{{R_\beta}^{-\lambda}}{i^\vartheta}+2\right)\right|^{-\frac{\alpha}{p}}}_{\leq \hat{c} i^{-\alpha/p} \quad (\star)} + C_3{R_\beta}^n$$

( $(\star)$ gilt wegen $\mathbf{R}_i \leq R_\beta \leq c \cdot 2^{-i}$).
Wir benutzen nochmals die Tatsache, dass $R_\beta \leq c\cdot 2^{-i}$, und bekommen:

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|dx \leq C_4\frac{{R_\beta}^{n-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}}.$$

Aus Lemma 8.4 folgt:

$$\pi(1/3)\xi_\beta(R_\beta/3) \leq {R_\beta}^{1-n}\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta|dx \leq C_4\frac{{R_\beta}^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}}.$$

Wir sehen: wenn $R_\beta \geq \mathbf{R}_i$, dann

$$\xi_\beta(R_\beta/3) \leq \frac{C_4}{\pi(1/3)}\frac{{R_\beta}^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}} = C_5\frac{{R_\beta}^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}}. \tag{8.44}$$

Wir müssen beweisen, dass für eine genügend große Konstante $\bar{K}$ gilt:

$$\bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}} \geq T_i.$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Dafür müssen wir zeigen: Es existiert eine Konstante } \bar{K}\text{, so dass die}\\ \text{Voraussetzung}\\ \qquad\qquad \bar{K}\dfrac{\mathbf{R}_i^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}} < T_i \quad \text{für ein } i \geq 1\\ \text{zum Widerspruch führt.}\end{array}}$$

Wir wählen $\bar{K} \geq C_5$ und nehmen an, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Dann, wenn $R_\beta \geq \mathbf{R}_i$ :

$$\xi_\beta(R_\beta/3) \overset{(8.44)}{\leq} C_5\frac{{R_\beta}^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}} \overset{\substack{1-\frac{\lambda}{p}\leq 0,\\ C_5\leq\bar{K}}}{\leq} \bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{1-\lambda/p}}{i^{\vartheta/p+\alpha/p}} < T_i.$$

Also,

$$\xi_\beta(R_\beta/3) < T_i \;\; \forall\,\beta \text{ mit } R_\beta \geq \mathbf{R}_i$$

Weil $\xi_\beta$ fallend ist, daraus folgt:

$$(g_\beta(.) \geq T_i) \subset B_{R_\beta/3}(0), \quad \text{wenn} \quad R_\beta \geq \mathbf{R}_i.$$

$$\Rightarrow |(g_\beta(.) \geq T_i)| \leq |B_{R_\beta/3}|, \quad \text{wenn} \quad R_\beta \geq \mathbf{R}_i \tag{8.45}$$

Betrachten wir jetzt die Mengen $\begin{array}{l}\Lambda_i' := \{\beta \in \Lambda \mid |(g_\beta \geq T_i)| \leq 3^{-n}|B_{R_\beta}|\} \\ \Lambda_i'' := \{\beta \in \Lambda_i \mid |(g_\beta \geq T_i)| > 3^{-n}|B_{R_\beta}|\}\end{array}$ und

Dann

$$\sum_{\beta\in\Lambda_i'} |(g_\beta \geq T_i)| \leq 3^{-n}\sum_{\beta\in\Lambda_i'}|B_{R_\beta}| \overset{(8.37)}{\leq} 3^{-n}|\operatorname{trg} u_i| \overset{(8.34)}{\leq} 3^{-n}|B_{2^{-i}R}|$$

und

$$\sum_{\beta\in\Lambda_i} |(g_\beta \geq T_i)| = |(u_i \geq T_i)| = |(u \geq \mu_{i+1})| \geq |B_{2^{-i-1}R}| = 2^{-n}|B_{2^{-i}R}|$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |(g_\beta \geq T_i)| = \sum_{\beta\in\Lambda_i} |(g_\beta \geq T_i)| - \sum_{\beta\in\Lambda_i'} |(g_\beta \geq T_i)| \geq (2^{-n}-3^{-n})|B_{2^{-i}R}|$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \overset{(8.37)}{=} \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |\operatorname{trg} g_\beta| \geq \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |(g_\beta \geq T_i)| \overset{\text{s.o.}}{\geq} (2^{-n}-3^{-n})|B_{2^{-i}R}|$$

$$\Rightarrow \sum_{\beta\in\Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \geq \underbrace{(2^{-n}-3^{-n})|B_R|}_{=:c''} 2^{-ni} = c'' 2^{-ni} \tag{8.46}$$

Nach Definition, $\Lambda_i'' = \{\beta \in \Lambda_i \mid |(g_\beta \geq T_i)| > |B_{R_\beta/3}|\}$, und darum

$$\forall\, \beta \in \Lambda_i'' : \begin{cases} \xi_\beta(R_\beta/3) \geq T_i & (\text{da } \ \beta \in \Lambda_i'' \Rightarrow \overbrace{(g_\beta \geq T_i)}^{\text{Kugel}} \supset B_{R_\beta/3}(0)\ ) \\ R_\beta < \mathbf{R}_i & (\text{sonst wäre } \ \beta \notin \Lambda_i'' \quad \text{wegen} \quad (8.45)\ ) \end{cases}$$

Und

$$(8.40) \Rightarrow K_i \geq \sum_{\beta \in \Lambda_i''} \int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|) dx.$$

Wir wissen:

$$\frac{1}{|B_{R_\beta}|} \int_{B_{R_\beta}(0)} \psi(|\nabla g_\beta|) dx \geq \psi\left(\frac{1}{|B_{R_\beta}|} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta| dx\right) \quad \forall\, \beta \in \Lambda_i''.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen bekommen wir:

$$K_i \geq \sum_{\beta \in \Lambda_i''} |B_{R_\beta}|\, \psi\left(\frac{1}{|B_{R_\beta}|} \int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta| dx\right). \tag{8.47}$$

Weiter ist $\xi_\beta(R_\beta) = 0$, weil $\operatorname{trg}(g_\beta) \subseteq B_{R_\beta}(0)$ (nach Konstruktion).
Und $\xi_\beta(R_\beta/3) \geq T_i \quad \forall\, \beta \in \Lambda_i''$, wie bereits erwähnt.
Deshalb folgt aus Lemma 8.4:

$$\int_{B_{R_\beta}(0)} |\nabla g_\beta| dx \geq \pi(1/3) {R_\beta}^{n-1} \xi_\beta(R_\beta/3) \geq \pi(1/3) {R_\beta}^{n-1} T_i.$$

Dann folgt aus (8.47), dass

$$\begin{aligned} K_i \quad &\geq \quad \sum_{\beta \in \Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \psi\left(\frac{\pi(1/3)}{|B_{R_\beta}|} {R_\beta}^{n-1} T_i\right) \overset{c := \frac{\pi(1/3)}{|B_1|}}{=} \sum_{\beta \in \Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \psi\left(\frac{c}{R_\beta} T_i\right) \\ &\overset{R_\beta \leq \mathbf{R}_i}{\geq} \quad \sum_{\beta \in \Lambda_i''} |B_{R_\beta}| \psi\left(\frac{c}{\mathbf{R}_i} T_i\right) \overset{(8.46)}{\geq} c'' \cdot 2^{-ni} \psi\left(\frac{c}{\mathbf{R}_i} T_i\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi\left(\frac{c}{\mathbf{R}_i} T_i\right) \leq \frac{2^{ni} K_i}{c''}.$$

Somit folgt

$$T_i \leq \frac{\mathbf{R}_i}{c} \psi^{-1}\left(\frac{2^{ni} K_i}{c''}\right). \tag{8.48}$$

Wie bereits erwähnt,

$$\psi^{-1}(t) \leq C_1 t^{1/p} |\log(t+2)|^{-\alpha/p} + C_2.$$

Und aus (8.42) folgt: für jede Konstante $C > 0$ existieren Konstanten $A, B > 0$, so dass

$$Ai \le \log\left(\frac{C\mathbf{R}_i^{-\lambda}}{i^\vartheta} + 2\right) \le Bi \quad \forall\, i \ge 1, \quad \mathbf{R}_i \le \left(c' \frac{K}{K_i} \cdot \frac{2^{-ni}}{i^\vartheta}\right)^{1/\lambda}.$$

Darum

$$\psi^{-1}\Big(\underbrace{\frac{2^{ni}K_i}{c''}}_{\le C\mathbf{R}_i^{-\lambda}/i^\vartheta}\Big) \overset{\psi^{-1}\text{ wächst}}{\le} \psi^{-1}\left(C\frac{\mathbf{R}_i^{-\lambda}}{i^\vartheta}\right) \le C_3\frac{\mathbf{R}_i^{-\lambda/p}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} + C_3' \overset{\substack{\mathbf{R}_i \le c\cdot 2^{-i} \\ (s.(8.42))}}{\le} C_4 \frac{\mathbf{R}_i^{-\lambda/p}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}.$$

Also,

$$T_i \overset{(8.48)}{\le} C' \frac{\mathbf{R}_i^{1-\lambda/p}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}.$$

Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, wenn wir die Konstante $\bar{K} \ge C'$ gewählt haben.

Also war unsere Annahme falsch, und

$$T_i \le \bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{1-\lambda/p}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} \quad \forall\, i \ge 1$$

(für beide Punkte von Satz 8.4).

Für Punkt b) ist es einfach, $T_i$ zu berechnen. In diesem Fall $\lambda = p$, darum

$$T_i \le \bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{\frac{p-\lambda}{p}}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} = \frac{\bar{K}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} \qquad \forall\, i \ge 1. \tag{8.49}$$

Wir wollen jetzt $T_i$ für Punkt a) abschätzen:
Wegen (8.42),

$$\mathbf{R}_i = \min\left\{\left(c'\frac{K}{K_i} \cdot \frac{2^{-ni}}{i^\vartheta}\right)^{1/\lambda}, c \cdot 2^{-i}\right\}.$$

Weiter haben wir $q$ so definiert, dass $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$.

$$\text{Folglich,} \quad \frac{1}{q} = \frac{\lambda - p}{p\lambda}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T_i \quad &\le \quad \bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{\frac{p-\lambda}{p}}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} = \bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{-\frac{\lambda}{q}}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} \\
&= \quad \bar{K}\max\left\{\frac{i^{\vartheta/q}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}\left(c'\frac{K}{K_i}2^{-ni}\right)^{-1/q}, \frac{(c\cdot 2^{-i})^{-\lambda/q}}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}\right\} \\
\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{\lambda}\right) \quad &= \quad \bar{K}\max\left\{\frac{1}{i^{\vartheta/\lambda+\alpha/p}}\left(\frac{K_i}{K}\cdot\frac{2^{ni}}{c'}\right)^{1/q}, \frac{2^{\frac{\lambda}{q}i}\cdot C_1}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}\right\}.
\end{aligned}$$

Wir haben $\kappa = \frac{\vartheta}{\lambda} + \frac{\alpha}{p}$ gesetzt.
Also

$$T_i \le \bar{K} \max\left\{ \frac{1}{i^\kappa}\left(\frac{K_i}{K}\cdot\frac{2^{ni}}{c'}\right)^{1/q}, \frac{2^{\frac{\lambda}{q}i}\cdot C_1}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}} \right\}. \tag{8.50}$$

Nach den Bedingungen des Satzes ist $\lambda < n$. Darum gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$$\lambda < n - \varepsilon.$$

Dann existiert eine Konstante $C$, so dass

$$\text{für Punkt a)} \quad T_i \overset{(8.50)}{\le} C\frac{\left(\left(\frac{K_i}{K} + 2^{-\varepsilon i}\right)2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}}}{i^\kappa} \quad \forall i \ge 1,\ ^{2} \tag{8.51}$$

**Wir schätzen nun $T_0$ ab.** (8.32) $\Rightarrow T_0 = \mu_1 - \overbrace{\mu_0}^{=0} = \mu_1.$
Weiter, $u_0(x) = \min\{u(x), \mu_1\}$ nach (8.33).
Wenn $g_0$ =Symmetrisation von $u_0$, dann $|\operatorname{trg} u_0| \overset{(8.34)}{\le} |B_R| = c_1$.

$$\overset{\text{Lemma 8.3}}{\Rightarrow} \int_{B_R(0)} \psi(|\nabla g_0|)dx \overset{\psi(t)=\phi(c_2 t)}{\le} \int_Q \phi(|\nabla u_0|)dx \overset{(8.39)}{=} K_0.$$

Außerdem ist $g_0(x) = 0$ für $|x| = R$, $g_0(x) = \mu_1$ bei $|x| = R/2$ wegen (8.31). Nach Lemma 8.4,

$$\int_{B_R(0)} |\nabla g_0|dx \ge \pi(1/2)R^{n-1}\mu_1.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} K_0 &\ge \int_{B_R(0)} \psi(|\nabla g_0|)dx \ge |B_R|\,\psi\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R(0)}|\nabla g_0|dx\right) \\ &\ge |B_R|\,\psi\left(\frac{\pi(1/2)}{|B_R|}R^{n-1}\mu_1\right) \overset{c:=\frac{\pi(1/2)}{|B_1|}}{=} |B_R|\,\psi\left(\frac{c}{R}\mu_1\right). \end{aligned}$$

Folglich,

$$T_0 = \mu_1 \le \frac{R}{c}\,\psi^{-1}\left(\frac{K_0}{|B_R|}\right) \le \frac{R}{c}\,\psi^{-1}\left(\frac{K}{|B_R|}\right) = C_1.$$

( dabei hängt $C_1$ von $K$, aber nicht von $K_0$ ab ).
Jedenfalls können wir schreiben:

$$T_0 \le C\left(\frac{K_0}{K} + 1\right)^{1/q}.$$

[2] wir könnten auch schreiben: $T_i \le C\frac{\left(\left(\frac{K}{K_i} + c_3 2^{-\varepsilon i}\right)2^{ni}\right)^{\frac{1}{q}}}{i^\kappa}$, aber wir möchten die Formeln kürzer machen.

Wir haben für Punkt a):

$$T_0 \le C\left(\frac{K_0}{K}+1\right)^{1/q}, \quad \forall\, i \ge 1 : T_i \overset{(8.51)}{\le} C\frac{\left(\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)2^{ni}\right)^{1/q}}{i^{\kappa}}. \tag{8.52}$$

Und für Punkt b):

$$T_0 \le C, \quad \forall\, i \ge 1 : T_i \overset{(8.49)}{\le} \frac{C}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}. \tag{8.53}$$

Die weitere Überlegungen betreffen ausschließlich den Punkt a).
Man kann leicht beweisen: es gibt eine Konstante $c_4 \ge 1$, so dass die Funktion

$$\omega(t) := t^q |\log(t+c_4)|^{q\kappa} \tag{8.54}$$

bei $t \ge 0$ wächst (sogar wenn $\kappa < 0$).

Wir müssen jetzt $\omega(\mu_j) = \omega\left(\sum\limits_{i=0}^{j-1} T_i\right) \quad \forall\, j \ge 1$ abschätzen.
Wir definieren $t_i$ und $\Delta_j$ für $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ folgendermassen

$$t_0 := 1, \quad \forall\, i \ge 1 : \; t_i := \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}, \qquad \forall\, j \ge 0 : \Delta_j = \sum_{i=0}^{j} t_i. \tag{8.55}$$

Wegen (8.52) und (8.55)

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{j-1} T_i \le C \sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i \;\; \forall\, j \ge 0. \tag{8.56}$$

$\omega$ wachsend $\Rightarrow$

$$\omega(\mu_j) \le \omega\left(C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{1/q} t_i\right).$$

Wir wissen: $\lambda < n - \varepsilon$, und darum $\frac{n}{q} - \frac{\varepsilon}{q} > 0$. Daraus und aus der Definition von $t_i$ kann man leicht sehen:

$$A(j+1) \le \log\left(C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i + c_4\right) \le B(j+1) \quad \forall\, j \ge 1 \tag{8.57}$$

für geeignete Konstanten $A > 0$ und $B > 0$, weil $c_4 \ge 1$.

Wegen (8.55): $\frac{t_i}{\Delta_j} \ge 0$, $\sum\limits_{i=0}^{j} \frac{t_i}{\Delta_j} = 1 \;\; \forall\, j \ge 0$. Darum

$$\forall\, (a_i)_{i=0,1,2,\dots} : \quad \left|\sum_{i=0}^{j} \frac{t_i}{\Delta_j} a_i\right|^q \le \sum_{i=0}^{j} \frac{t_i}{\Delta_j} |a_i|^q \tag{8.58}$$

Wir bekommen:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i\right)^q &= \Delta_j^q\left(\sum_{i=0}^{j}\frac{t_i}{\Delta_j}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q \\
&\overset{(8.58)}{\leq} \Delta_j^q\sum_{i=0}^{j}\frac{t_i}{\Delta_j}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right) \\
&= \Delta_j^{q-1}\sum_{i=0}^{j} t_i\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right).
\end{aligned}$$

Wenn $D = \max\{A^{q\kappa}, B^{q\kappa}\}$ (siehe (8.57) ), dann

$$\begin{aligned}
\omega(\mu_j) &\overset{(8.56)}{\leq} \omega\left(C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i\right) \\
&= \left(C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i\right)^q \\
&\quad \cdot\left(\log\left(C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)^{\frac{1}{q}} t_i + c_4\right)\right)^{q\kappa} \\
&\overset{(8.57)}{\leq} C^q\Delta_{j-1}^{q-1}\sum_{i=0}^{j-1} t_i\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)\cdot D(1+j)^{q\kappa}.
\end{aligned}$$

Daher gibt es eine Konstante $\mathbf{K} = \mathbf{K}(K)$:

$$\omega(\mu_j) \overset{(8.57)}{\leq} \mathbf{K}\sum_{i=0}^{j-1}\left(\Delta_{j-1}^{q-1} t_i\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)(1+j)^{q\kappa}\right). \tag{8.59}$$

Nach (8.30) ist $g : x \mapsto \xi(|x|)$ Symmetrisation von $u$ $(\Rightarrow \xi$ fallend) und nach (8.31) $\mu_i = \xi(2^{-i}R)$. Darum ist

$$\forall\, x \notin B_{2^{-j-1}R}(0) : g(x) \leq \xi(2^{-j-1}R) = \mu_{j+1}. \tag{8.60}$$

Nach Definition ist $\omega(t) = t^q(\log(t+c_4))^{q\kappa}$ $\forall\, t \geq 0$.
Wir wissen, dass $\omega(0) = 0$, $\omega$ wachsend.

Deshalb

$$\begin{aligned}
&\int_Q |u|^q(\log(|u|+c_4))^{q\kappa}dx \overset{u \geqq 0}{=} \\
&\quad = \int_Q \omega\circ u\,dx \overset{\operatorname{trg} g \subset B_R(0)}{=} \int_{B_R(0)} \omega\circ g\,dx \\
&\quad \overset{(8.60)}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty}\int_{B_{2^{-j}R}(0)-B_{2^{-j-1}R}(0)} \omega(\mu_{j+1})\,dx = \overbrace{(|B_1|-|B_{1/2}|)}^{=:c}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj}\,\omega(\mu_{j+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(8.59)}{\leq} c\mathbf{K}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-nj}\sum_{i=0}^{j}\left(\Delta_j^{q-1}t_i\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)(2+j)^{q\kappa}\right)\\
&= c\mathbf{K}\sum\sum_{0\leq i\leq j<\infty}\left(2^{-nj}\Delta_j^{q-1}t_i\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)(2+j)^{q\kappa}\right)\\
&= c\mathbf{K}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-\varepsilon i}\right)\sum_{j=i}^{\infty}\left(\left(\frac{\Delta_j\cdot(2+j)^{\kappa}}{2^{\frac{nj}{q}}}\right)^{q-1}\cdot\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}\cdot\frac{(2+j)^{\kappa}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}}\right)\\
&\leq c\mathbf{K}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{K_m}{K}+2^{-\varepsilon m}\right)\right)\cdot\sup_{i\geq 0}\sum_{j=i}^{\infty}\left(\left(\frac{\Delta_j\cdot(2+j)^{\kappa}}{2^{\frac{nj}{q}}}\right)^{q-1}\cdot\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}\cdot\frac{(2+j)^{\kappa}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}}\right)\\
&\leq c\mathbf{K}\underbrace{\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{K_m}{K}+2^{-\varepsilon m}\right)\right)}_{\leq 1+\frac{1}{1-2^{-\varepsilon}}}\cdot\underbrace{\left(\sup_{\ell\geq 0}\frac{\Delta_\ell\cdot(2+\ell)^{\kappa}}{2^{\frac{n\ell}{q}}}\right)}_{=:(I)}{}^{q-1}\cdot\underbrace{\sup_{i\geq 0}\left(\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}\cdot\sum_{j=i}^{\infty}\frac{(2+j)^{\kappa}}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}}\right)}_{=:(II)}.
\end{aligned}
$$

$$
\text{Damit gilt}\quad \int_Q |u|^q(\log(|u|+c_4))^{q\kappa}dx\leq c\mathbf{K}\cdot(I)^{q-1}\cdot(II). \tag{8.61}
$$

Jetzt müssen wir beweisen, dass $(I)<\infty$ und $(II)<\infty$.
( (I) und (II) sind Konstanten, da $t_i$ und $\Delta_j$ nicht von $u$ abhängen, siehe (8.55).) Wir wissen, dass

$$
\Delta_j \overset{(8.55)}{=} \sum_{i=0}^{j} t_i = 1+\sum_{i=1}^{j}\frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}\quad \forall\, j\geq 0.
$$

Wir wählen $i_0\in\mathbb{N}$ und $d\in(0;1)$ so, dass

$$
2^{-\frac{n}{q}}\left(\frac{i+1}{i}\right)^{\kappa}\leq 1-d\ \ \forall\, i\geq i_0.
$$

Wenn $m\geq i\geq i_0$, dann $\displaystyle\frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}=\frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\kappa}}\prod_{j=i}^{m-1}\overbrace{2^{-n/q}\left(\frac{j+1}{j}\right)^{\kappa}}^{\leqslant 1-d\quad (\text{da } j\geqslant i_0)}\leq\frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\kappa}}(1-d)^{m-i}.$

$$
\Rightarrow \frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}\leq\frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\kappa}}(1-d)^{m-i},\quad \text{wenn } m\geq i\geq i_0. \tag{8.62}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall\, m\geq i_0:\quad \Delta_m &\overset{(8.55)}{=} \underbrace{1+\sum_{i=1}^{i_0-1}\frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}}_{=:c}+\sum_{i=i_0}^{m}\frac{2^{\frac{ni}{q}}}{i^{\kappa}}\\
&\overset{(8.62)}{\leq} c+\frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^{\kappa}}\sum_{i=i_0}^{m}(1-d)^{m-i}
\end{aligned}
$$

$$(j = m - i \geqslant 0) \quad \leq \quad c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^\kappa} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (1-d)^j}_{=1/d} = c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^\kappa \cdot d}.$$

Also haben wir, dass

$$\Delta_m \leq c + \frac{2^{\frac{nm}{q}}}{m^\kappa \cdot d} \quad \forall\, m \geq i_0. \tag{8.63}$$

Daraus folgt aber

$$\sup_{m \geq i_0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^\kappa}{2^{\frac{nm}{q}}} \overset{(8.63)}{\leq} \sup_{m \geq i_0} \left( c \frac{(2+m)^\kappa}{2^{\frac{nm}{q}}} + \frac{1}{d} \left( \frac{2+m}{m} \right)^\kappa \right) =: T_1 < \infty.$$

Außerdem ist klar, dass

$$\max_{0 \leq m < i_0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^\kappa}{2^{\frac{nm}{q}}} =: T_2 < \infty,$$

weil jede endliche Menge von Zahlen ein Maximum hat.
Somit gilt

$$(I) = \sup_{m \geq 0} \frac{\Delta_m \cdot (2+m)^\kappa}{2^{\frac{nm}{q}}} \leq \max\{T_1, T_2\} < \infty.$$

Jetzt müssen wir noch zeigen, dass $(II) < \infty$.
Aber

$$(II) = \sup_{i \geqslant 0} \frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(2+j)^\kappa}{2^{\frac{n(j-i)}{q}}} \overset{\ell = j-i}{=} \sup_{i \geqslant 0} \underbrace{\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2+\ell+i)^\kappa}{2^{\frac{n\ell}{q}}}}_{=: a_i}.$$

Wir schätzen $a_i$ für $i \geq 0$ ab:

$$a_0 = \underbrace{t_0}_{=1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2+\ell)^\kappa}{2^{\frac{n\ell}{q}}} < \infty.$$

Und $\forall\, i \geq 1$ :

$$a_i = \underbrace{\frac{t_i}{2^{\frac{ni}{q}}}}_{=i^{-\kappa}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2+\ell+i)^\kappa}{2^{\frac{n\ell}{q}}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2+\ell}{i} + 1\right)^\kappa}{2^{\frac{n\ell}{q}}}.$$

Wir sehen: $\forall\, i \geq 1 \quad a_i \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{n\ell}{q}}}$ für $\kappa < 0$,
$a_i \leq \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2+\ell+1)^\kappa}{2^{\frac{n\ell}{q}}}$ für $\kappa \geq 0$.

Offensichtlich ist

$$(II) = \sup_{i \geqslant 0} a_i < \infty \quad \forall\, \kappa \in \mathbb{R}.$$

Für den Punkt a) fassen wir zusammen

$$\int_Q |u|^q |\log(|u|+c_4)|^{q\kappa}\,dx \overset{(8.61)}{\leq} c\mathbf{K}\cdot(I)^{q-1}\cdot(II) =: \mathbf{K}' < \infty,$$

damit hängt $\mathbf{K}'$ nur von $\mathbf{K}$ ab.

Punkt b) ist einfacher:
Nach Definition von $\mu_i$ (siehe (8.31),(8.32) ) haben wir

$$\mu_0 = 0, \quad \forall\, i \geq 1: \ \mu_i = T_0 + \sum_{j=1}^{i-1} T_i \overset{(8.53)}{\leq} C\Big(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{i^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}\Big).$$

Wir bekommen leicht:

$$\mu_i \leq C' \cdot i^{\frac{p-(\vartheta+\alpha)}{p}} \qquad \forall\, i \geq 0$$

(wir benutzen dabei, dass $\vartheta + \alpha < 0$).

Sei $\omega(t) = e^{bt^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}}$. Dann ist $\omega(\mu_j) \leq e^{bC''j} = 2^{\frac{n}{2}j}$ für eine geeignete Konstante $b > 0$.

Wir wissen außerdem: $u \geq 0$, und $g$ ist Symmetrisation von $u$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{b|u|^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}}\,dx &= \int_\Omega \omega\circ u\,dx \overset{\operatorname{trg}(g)\subset B_R(0)}{=} \int_{B_R(0)} \omega\circ g\,dx \\
&\overset{(8.60)}{\leq} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_{2^{-j}R}(0)-B_{2^{-j-1}R}(0)} \omega(\mu_{j+1})dx \\
&= \overbrace{(|B_1| - |B_{1/2}|)}^{=c} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj}\omega(\mu_{j+1}) \\
&\leq c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-nj}2^{\frac{n}{2}(j+1)} = c\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}(j-1)} = \mathbf{K}' < \infty,
\end{aligned}$$

und der Beweis ist abgeschlossen. □

## 8.4 Optimalität von Resultaten der Sätze 8.2 und 8.4

In den Sätzen 8.5 bzw. 8.6 wollen wir beweisen, dass die Abschätzungen, die wir in Satz 8.4(a) bzw. (b) bekommen haben, optimal sind.
Resultat von Satz 8.2 ist auch optimal, was aus Satz 8.6 folgt.

Zuerst beweisen wir

**Lemma 8.5** *Sei* $Q := [0;1]^n$. *Sei auch* $p, \lambda, \vartheta, \alpha$ *fixiert,*
$1 \le p < \lambda < n, \quad \alpha, \vartheta \in (-\infty; +\infty)$ *und* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$.
*Weiter sei* $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *konvex,* $\phi(0) = 0, \quad \phi(t) \sim t^p[\log(t+2)]^\alpha$.
*Dann gibt es eine Konstante* $K_0 > 0$ *und eine Folge von Funktionen* $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, *für die gilt:*

$$\forall\, i: \; u_i \in C_0^\infty(Q), \quad u_i \ge 0,$$
$$\int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u_i|) dx \le K_0 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \;\; \forall\, R \le 1/2 \;\forall\, x_0 \forall\, i \quad \textit{und gleichzeitig}$$
$$\int_Q \omega(u_i) u_i^q [\log(u_i+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} dx \to \infty \quad \textit{für } i \to \infty$$

*für jede Funktion* $\omega : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$.

**Beweis:**
Wir wählen $G \subset\subset Q = [0;1]^n$ mit

$$|G| = 1/2$$

sowie $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\mathrm{trg}(v) \subset Q, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n : \; v(x) \ge 0 \quad \text{und} \quad \forall\, x \in G : v(x) = 1.$$

Seien

$$D_j := 2^{-\frac{n}{n-\lambda}j} j^{\frac{\vartheta}{n-\lambda}}; \qquad T_j := \frac{D_j^{\frac{p-\lambda}{p}}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta/p+\alpha/p}}. \tag{8.64}$$

Sei $\beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j)-$Multiindex und $\forall\, j \in \mathbb{N}$ :

$$\Lambda_j := \{\beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j) | \gamma_i \in \{0, \dots, 2^j - 1\} \;\forall\, i\} \tag{8.65}$$

$$\begin{gathered} \text{Für} \quad \beta = (\gamma_1, \dots, \gamma_n; j) : \\ x_\beta := \left(\tfrac{\gamma_1}{2^j}, \dots, \tfrac{\gamma_n}{2^j}\right), \quad W_\beta := x_\beta + [0; 2^{-j}]^n. \end{gathered} \tag{8.66}$$

Man hat dann

$$\forall\, j: \; Q = \bigcup_{\beta \in \Lambda_j} W_\beta; \quad \forall\, \beta, \gamma \in \Lambda_j, \; \beta \ne \gamma : \; |W_\beta \cap W_\gamma| = 0.$$

Sei außerdem

$$j_0 \ge 1 \quad \text{so gewählt, dass} \quad \forall\, j \ge j_0 : D_j \le 2^{-j} \tag{8.67}$$

(solche $j_0$ existieren, da immer (8.64)$\Rightarrow D_j = o(2^{-j})$ ).

Für $j \ge j_0$ (siehe (8.67) ) definieren wir $u_j \in C_0^\infty(Q)$

$$\forall\, \beta \in \Lambda_j, \; y \in [0; 2^{-j}]^n : \quad u_j(\overbrace{x_\beta + y}^{\in W_\beta}) := T_j v\left(\frac{y}{D_j}\right). \tag{8.68}$$

Es gilt dann wegen (8.67):

$$\forall\, j \geq j_0 : \; u_j \in C_0^\infty(Q),$$

da $\operatorname{trg}(v) \subset Q, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Für die $u_j$ müssen wir beweisen:

$$\left[\forall\, R \leq 1/2 : \int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u_j|)dx \leq K_0 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}\right] \qquad (I)$$

für eine Konstante $K_0$.

Dafür genügt es aber zu zeigen, dass $\forall\, u_j,\ j \geq j_0,\ \forall\, i \geq 1$:

$$\left[\begin{array}{l} \forall \text{ Würfel } W_\beta,\ \beta \in \Lambda_i,\ i \geq 1 \;\text{ (siehe (8.66) ) } \;\text{ gilt : } \\ \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \leq K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad \text{hier} \quad r = 2^{-i}. \end{array}\right] \qquad (II)$$

Denn man kann leicht sehen, dass $(II) \Rightarrow (I)$ für geeignetes $K$.

$$\text{Sei} \quad a := \max_{x \in Q} |\nabla u(x)|.$$

**Beweisen wir (II).** Zuerst schätzen wir $\int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|)dx$ für $\gamma \in \Lambda_j$ ab. Nach (8.68),

$$[W_\gamma \cap \operatorname{trg}(u_j)] \subset x_\gamma + [0; D_j]^n.$$

Daher gilt $\forall\, \gamma \in \Lambda_j$ :

$$\begin{aligned}
\int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|)dx &\overset{(8.68)}{=} \int_{[0;D_j]^n} \phi\left(T_j \left|\nabla_x v\left(\frac{x}{D_j}\right)\right|\right) dx \\
&\leq D_j^n \max_{x \in [0;1]^n} \phi\left(\frac{T_j}{D_j}|\nabla v(x)|\right) = D_j^n \phi\left(a \frac{T_j}{D_j}\right) \\
&\overset{(8.64)}{=} D_j^n \phi\left(a \frac{D_j^{-\lambda/p}}{|\log_2 D_j|^{\alpha/p + \vartheta/p}}\right) \\
&\leq C_3 \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} + C_4 D_j^n \leq C_5 \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei benutzt, dass $0 < D_j \leq 1/2$ und dass

$$\phi(t) \leqslant C_1 t^p [\log_2(t+2)]^\alpha + C_2.$$

Also,

$$\forall\, \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|)dx \leq C \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{8.69}$$

Weiter gilt für $j \geq j_0$:

$$(8.64), (8.67) \Rightarrow \left[ D_j \leq 2^{-j} \;\text{ und }\; D_j = 2^{-\frac{n}{n-\lambda} j} j^{\frac{\vartheta}{n-\lambda}} \overset{j \geqslant 1}{\geq} c \cdot 2^{-bj} \overset{j \geqslant 1}{\geq} 2^{-Bj} \right],$$

wenn $B > 0$ groß genug ist. Wir haben

$$j \leq |\log_2 D_j| \leq Bj. \tag{8.70}$$

Wir sehen, dass für $j \geq j_0$ :

$$\frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \overset{(8.64)}{\leq} \frac{2^{-nj} j^\vartheta}{c j^\vartheta} = \frac{1}{c} \cdot 2^{-nj}.$$

Daher folgt $\forall\, j \geq j_0$:

$$\forall\, \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|) dx \overset{(8.69)}{\leq} C \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \overset{\text{s.o.}}{\leq} C \cdot 2^{-nj}. \tag{8.71}$$

Nun wollen wir weiter (II) im Fall $j \geq j_0$ beweisen
(dabei müssen wir $j_0$ eventuell vergrößern).
Es gibt drei mögliche Fälle für $i$: $1 \leq i \leq j$, $D_j \leq 2^{-i} \leq 2^{-j}$ und $2^{-i} \leq D_j$.

<u>Fall 1:</u> $1 \leq i \leq j$.
Dann besteht jeder Würfel $W_\beta$, $\beta \in \Lambda_i$ aus $2^{n(j-i)}$ Würfeln $W_\gamma$, $\gamma \in \Lambda_j$ (siehe (8.66)) und

$$\forall\, \gamma \in \Lambda_j : \int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|) dx \overset{(8.71)}{\leq} C \cdot 2^{-nj}.$$

Daher ist

$$\forall\, \beta \in \Lambda_i : \quad \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|) dx \leq 2^{n(j-i)} \cdot C \cdot 2^{-nj} = C \cdot 2^{-ni}. \tag{8.72}$$

Weiter gilt für eine Konstante $c'$ :

$$\forall\, r \in ]0; \frac{1}{2}] : \quad r^n \leq c' \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta} \quad (\text{da } \lambda > 0).$$

Folglich, wenn $r = 2^{-i}$, $\beta \in \Lambda_i$ :

$$\int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|) dx \overset{(8.72)}{\leq} C \cdot r^n \overset{\text{s.o.}}{\leq} c' C \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}.$$

<u>Fall 2:</u> $D_j \leq 2^{-i} \leq 2^{-j}$.
Wegen "$2^{-i} \leq 2^{-j}$" : $\forall \beta \in \Lambda_i$ : $W_\beta$ liegt in einem $W_\gamma$, $\gamma \in \Lambda_j$, darum

$$\forall\, \beta \in \Lambda_i\, \exists\, \gamma \in \Lambda_j : \quad \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|) dx \leq \int_{W_\gamma} \phi(|\nabla u_j|) dx \overset{(8.69)}{=} C \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{8.73}$$

Es gilt: $D_j \le 2^{-i} =: r$.
Wir wissen, $j \ge 1$. Das heißt, $r = 2^{-i} \le 1/2$.
Dann gibt es eine Konstante $c'$, für die

$$\frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta} \overset{r\geqslant D_j}{\geq} c' \frac{D_j^{n-\lambda}}{|\log_2 D_j|^\vartheta} \overset{(8.73)}{\geq} \frac{1}{C} \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \quad \forall \beta \in \Lambda_i.$$

$$\Rightarrow \forall \beta \in \Lambda_i : \quad \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \le C \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad r = 2^{-i}.$$

<u>Fall 3</u>: $r = 2^{-i} \le D_j$.
Wie früher, ist $a = \max\limits_{x\in Q} |\nabla v|$ gesetzt. Wir berechnen:

$$\max_{x\in Q} |\nabla u_j| \overset{(8.68)}{=} \max_y \left| T_j \nabla_y v \left( \frac{y}{D_j} \right) \right| = \frac{T_j}{D_j} \overbrace{\max_x |\nabla v(x)|}^{=a} \overset{(8.64)}{=} \frac{a}{D_j^{\lambda/p} |\log_2 D_j|^{\vartheta/p+\alpha/p}}.$$

Aus Bedingungen dieses Satzes folgt $\phi(t) \le C_1 t^p [\log_2(t+2)]^\alpha + C_2$.
Daraus folgern wir

$$\max_{x\in Q} \phi(|\nabla u_j|) \le \frac{C_3}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta} + C_4 \overset{D_j\leqslant 1/2}{\leq} \frac{C}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta}. \tag{8.74}$$

Weiter berücksichtigen wir für genügend großes $j_0$ (eventuell müssen wir $j_0$ vergrößern), dass

$$t^\lambda |\log_2 t|^\vartheta \text{ für } t \in (0; 2^{-j_0}] \text{ wächst und } \quad D_j \overset{(8.67)}{\leq} 2^{-j} \le 2^{-j_0} \ \forall j \ge j_0.$$

Folglich gilt für $j \ge j_0$, $r = 2^{-i} \le D_j$:

$$r^\lambda |\log_2 r|^\vartheta \le D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta. \tag{8.75}$$

Dann hat man für $r = 2^{-i}$, $\beta \in \Lambda_i$ :

$$\begin{aligned} \int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \quad &\le \quad \overbrace{|W_\beta|}^{=r^n} \cdot \max_x \phi(|\nabla u_j(x)|) \overset{(8.74)}{\leq} r^n \frac{C}{D_j^\lambda |\log_2 D_j|^\vartheta} \\ &\overset{(8.75)}{\leq} \quad r^n \frac{C}{r^\lambda |\log_2 r|^\vartheta} = C \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}. \end{aligned}$$

Wir halten fest: wenn $r = 2^{-i}$, $\beta \in \Lambda_i$ :

$$\int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \le C \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}.$$

Folglich können wir eine Konstante $K$ so wählen, dass in allen drei Fällen gilt:

$$\int_{W_\beta} \phi(|\nabla u_j|)dx \le K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log_2 r|^\vartheta}, \quad \text{wenn} \quad \beta \in \Lambda_i, \quad r = 2^{-i}, \quad j \ge j_0.$$

Damit haben wir (II) bewiesen.

Gemäß den Bedingungen dieses Satzes, $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$.
Sei jetzt

$$\psi(t) := \omega(t) t^q [\log_2(t+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)}. \tag{8.76}$$

Wir wollen zeigen:

$$\int_Q \psi(|u_j|)\, dx \to \infty \ \text{ bei } \ j \to \infty.$$

Tatsächlich:

$$\begin{aligned}
\int_Q \psi(|u_j|)\, dx &= \sum_{\gamma\in\Lambda_j} \int_{W_\gamma} \psi(|u_j(x)|)\, dx \\
(|\Lambda_j| = 2^{nj}) \quad &= 2^{nj} \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \psi\left(T_j \left| v\left(\frac{x}{D_j}\right)\right|\right) dx}^{=\int_{W_\gamma}\psi(|u_j|)dx \ \ \forall\, \gamma\in\Lambda_j} \\
(y = \frac{x}{D_j}) \quad &= 2^{nj} D_j^n \int_Q \psi(T_j |v(y)|) dy \\
(v = 1 \ \text{ auf } G) \quad &\geq 2^{nj} D_j^n \int_G \psi(T_j) dy \overset{|G|=1/2}{=} 2^{nj} D_j^n \cdot \frac{1}{2}\psi(T_j) \\
&\overset{(8.76)}{=} 2^{nj} D_j^n \cdot \frac{\omega(T_j)}{2} \cdot T_j^q [\log_2(T_j+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} = (*).
\end{aligned}$$

Wegen (8.64) und $p < \lambda < n$ :

$$T_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Daher ist

$$\lim_{j\to\infty} \omega(T_j) = \infty.$$

Wir wissen, dass

$$T_j \overset{(8.64)}{=} \frac{D_j^{\frac{p-\lambda}{p}}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta/p+\alpha/p}} \quad \text{und} \quad q = \frac{\lambda p}{\lambda - p}.$$

Weiter folgt aus (8.70), dass $|\log_2 D_j|^\vartheta \leq C j^\vartheta$.
Man kann berechnen:

$$T_j^q = \frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{q\left(\frac{\vartheta}{p}+\frac{\alpha}{p}\right)}}$$

und

$$[\log_2(T_j+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} \overset{D_j \leqslant 1/2}{\geq} c' |\log_2 D_j|^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)}.$$

Dann folgt

$$T_j^q[\log_2(T_j+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} \geq c'' \frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\frac{q\vartheta}{p}-\frac{q\vartheta}{\lambda}}} \stackrel{\frac{q\vartheta}{p}-\frac{q\vartheta}{\lambda}=\vartheta}{=} c''\frac{D_j^{-\lambda}}{|\log_2 D_j|^{\vartheta}} \geq c\frac{D_j^{-\lambda}}{j^{\vartheta}},$$

und somit

$$\lim_{j\to\infty}\omega(T_j)=\infty \quad \text{und} \quad T_j^q[\log_2(T_j+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} \geq c\frac{D_j^{-\lambda}}{j^{\vartheta}}. \tag{8.77}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\int_Q \psi(|u_j|)dx \quad &\geq \quad (*) = 2^{nj}D_j^n\cdot\frac{\omega(T_j)}{2}T_j^q[\log_2(T_j+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)}\\
&\stackrel{(8.77)}{\geq} \quad c\cdot 2^{nj}\frac{\omega(T_j)}{2}\frac{D_j^{n-\lambda}}{j^{\vartheta}} \stackrel{(8.64)}{=} c\cdot 2^{nj}\frac{\omega(T_j)}{2}\frac{2^{-nj}j^{\vartheta}}{j^{\vartheta}}\\
&= \quad \frac{c}{2}\omega(T_j)\to\infty \quad \text{für} \quad j\to\infty.
\end{aligned}$$

Damit haben wir Lemma 8.5 bewiesen. □

**Satz 8.5** *Sei* $Q:=[0;1]^n$ *sowie* $p,\lambda,\vartheta,\alpha$ *feste Konstanten mit* $1\leq p<\lambda<n$, $\alpha,\vartheta\in(-\infty;+\infty)$. $q$ *sei definiert durch* $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{\lambda}$. *Ferner sei* $\phi:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ *eine konvexe Funktion mit* $\phi(0)=0$, $\phi(t)\sim t^p[\log(t+2)]^{\alpha}$. *(Folglich, der Fall "*$(p=1,\ \alpha<0)$*" ist ausgeschlossen.)*

*Dann gibt es zu jeder Konstante* $K>0$ *eine Folge von Funktionen* $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, *für die gilt:*

$$\forall\, i:\ u_i\in C_0^{\infty}(Q), \quad u_i\geq 0,$$

$$\int_{B_R(x_0)}\phi(|\nabla u_i|)dx \leq K\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \quad \forall\, R\leq 1/2\ \forall\, x_0 \forall\, i \quad \textit{und gleichzeitig}$$

$$\int_Q \omega(u_i)u_i^q[\log(u_i+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)}dx\to\infty \quad \textit{für} \quad i\to\infty$$

*für jede Funktion* $\omega:\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\infty$.

**Beweis:** Wenn $K\geq K_0$ aus Lemma 8.5, dann umfaßt Lemma 8.5 bereits den Satz 8.5.

Sei jetzt $0<K<K_0$. Wegen "$\phi$ konvex, $\phi(0)=0$" gilt

$$\phi\left(\frac{K}{K_0}t\right)\leq\frac{K}{K_0}\phi(t) \quad \forall\, t\geq 0. \tag{8.78}$$

Nach Lemma 8.5 existiert eine Folge $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ so dass

$$v_i\in C_0^{\infty}(Q), \quad v_i\geq 0, \qquad \int_{B_R(x_0)}\phi(|\nabla v_i|)\,dx\leq K_0\frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \ \forall\, R\leq 1/2\ \forall\, x_0\ \forall\, i$$

und
$$\int_Q \widetilde{\omega}(v_i) v_i^q [\log(v_i+2)]^{q\left(\frac{\vartheta}{\lambda}+\frac{\alpha}{p}\right)} dx \to \infty \quad \text{für} \quad i \to \infty$$
für jede Funktion $\widetilde{\omega} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \widetilde{\omega}(t) = \infty$.
Sei
$$u_i(t) := \frac{K}{K_0} v_i(t), \quad \kappa := \frac{\vartheta}{\lambda} + \frac{\alpha}{p}, \quad \widetilde{\omega}(t) := \omega\left(\frac{K}{K_0} t\right) \left(\frac{K}{K_0}\right)^q \left(\frac{\log\left(\frac{K}{K_0} t + 2\right)}{\log(t+2)}\right)^{q\kappa}.$$
Dann folgt
$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla u_i|)\, dx &= \int_{B_R(x_0)} \phi\left(\left|\frac{K}{K_0} \nabla v_i\right|\right) dx \\ &\overset{(8.78)}{\leq} \frac{K}{K_0} \int_{B_R(x_0)} \phi(|\nabla v_i|)\, dx \\ &\leq \frac{K}{K_0} \cdot K_0 \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} = K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}. \end{aligned}$$
Wir berechnen:
$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty \quad \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \widetilde{\omega}(t) = \infty$$
und nach Definition von $\widetilde{\omega}$ :
$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}(v_i) v_i^q [\log(v_i+2)]^{q\kappa} &= \omega\left(\frac{K}{K_0} v_i\right) \left(\frac{K}{K_0} v_i\right)^q \left[\log\left(\frac{K}{K_0} v_i + 2\right)\right]^{q\kappa} \\ &= \omega(u_i) u_i^q [\log(u_i+2)]^{q\kappa}. \end{aligned}$$
Daher gilt die Limesbeziehung
$$\int_Q \omega(u_i) u_i^q [\log(u_i+2)]^{q\kappa} dx = \int_Q \widetilde{\omega}(v_i) v_i^q [\log(v_i+2)]^{q\kappa} dx \to \infty \;\text{ für }\; i \to \infty. \;\Box$$

**Satz 8.6** *Sei* $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *konvex,* $\phi(0) = 0$, $\forall\, t \neq 0 : \phi(t) \neq 0$, $\phi(t) \sim t^p [\log(t+2)]^\alpha$.
*(Folglich, entweder* $(p > 1,\ \alpha \in (-\infty; +\infty))$ *oder* $(p = 1,\ \alpha \geq 0)$*.)*
*Sei* $-\infty < \alpha + \vartheta < p < n$.

*Dann gibt es eine Kugel* $B_R(0)$ *mit* $R < 1$*, für die gilt:*
$\forall\, K > 0 \quad \exists$ *Funktion* $g \in W_0^{1,1}(B_R(0))$*, so dass*
$$\forall\, r \leq 1/2, x_0 \in \mathbb{R}^n : \int_{B_r(x_0)\cap B_R(0)} \phi(|\nabla g|) dx \leq K \frac{r^{n-p}}{|\log R|^\vartheta} \quad \textit{und}$$
$$\int_{B_R(0)} e^{\omega(g) g^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}} dx = \infty$$
*für jede Funktion* $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) \to \infty$.

**Beweis:** Wir betrachten eine Funktion $g$, die wie folgt definiert ist

$$g : B_R(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad g(x) = \xi(|x|), \quad \xi(t) = \mathbf{K}(|\ln t|^{\frac{p-(\vartheta+\alpha)}{p}} - c), \\ \text{wobei } c \text{ so gewählt ist, dass } \quad \xi(R) = 0. \tag{8.79}$$

($R > 0$ und $K$ werden später definiert). Nach Voraussetzung gilt $\vartheta + \alpha < p$, und deshalb ist die Funktion $\xi$ fallend auf $(0;1)$. Wir sehen:

$$|\xi'(t)| = \frac{K_1}{t|\ln t|^{\frac{\vartheta+\alpha}{p}}}.$$

Wir wählen $0 < R < 1$ so, dass $|\xi'|$ auf $(0;R)$ fallend ist. $R$ kann man unabhängig von $K_1$ wählen.

Wir wissen, dass die Funktion $\phi$ wächst. Darum läßt sich die folgende Inklusion aus Lemma 6.1 ableiten:

$$\left(\forall\, r \leq 1/2 : \int_{B_r(0)} \phi(|\nabla g|)dx \leq K\frac{r^{n-p}}{|\log r|^{\vartheta}}\right) \Rightarrow \\ \left(\forall\, r < 1/2, x_0 : \int_{B_r(x_0)} \phi(|\nabla g|)dx \leq K\frac{r^{n-p}}{|\log r|^{\vartheta}}\right).$$

Wir bemerken: Wegen "$\phi$ konvex, $\phi(0) = 0$" gilt

$$\phi\left(\frac{K}{K_0}t\right) \leq \frac{K}{K_0}\phi(t), \quad \text{wenn} \quad 0 < K \leq K_0.$$

Deshalb folgt aus der Behauptung "$\int_{B_r(0)} \phi(|\nabla g|)dx \leq K_0 \frac{r^{n-p}}{|\ln r|^{\vartheta}} \quad \forall\, r \leq 1/2$", dass $\forall\, r \leq 1/2$ :

$$\begin{cases} \text{wenn } K < K_0 : & \int_{B_r(0)} \phi\left(\left|\nabla\left[\frac{K}{K_0}g(x)\right]\right|\right) dx \leq \frac{K}{K_0}\int_{B_r(0)} \phi(|\nabla g|)\, dx \leq K\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^{\vartheta}}, \\ \text{wenn } K \geq K_0 : & \int_{B_r(0)} \phi(|\nabla g|)\, dx \leq K_0\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^{\vartheta}} \leq K\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^{\vartheta}}. \end{cases}$$

Also müssen wir nur beweisen:

*Wenn die Funktion* $g$ *die folgende Form hat:*

$$g : B_R(0) \to R_{\geq 0}, \quad g(x) = \xi(|x|), \quad \xi(t) = \mathbf{K}(|\ln t|^{\frac{p-(\alpha+\vartheta)}{p}} - c),$$

*dann* (a): $\exists\, \mathbf{K} > 0, K_0 > 0$ *mit:* $\int_{B_r(0)} \phi(|\nabla g|)dx \leq K_0\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^{\vartheta}} \quad \forall\, r \leq 1/2$

*und* (b): $\forall\, \mathbf{K} > 0$ : $\int_{B_R(0)} e^{\omega(g)\cdot g^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}} dx = \infty$

*für jede Funktion* $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *mit* $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$,

*hierbei ist* $\phi(t) \leq Ct^p[\ln t]^{\alpha} \quad \forall\, t \geq 2$.

Beweis von (a):

Wenn $\xi(t) = \mathbf{K}(|\ln t|^{\frac{p-(\alpha+\vartheta)}{p}} - c)$, dann

$$|\xi'(t)| = \frac{C'\mathbf{K}}{t|\ln t|^{\frac{\alpha+\vartheta}{p}}} = \frac{C_1}{t|\ln t|^{\frac{\alpha+\vartheta}{p}}}.$$

Wir wählen $\mathbf{K} > 0$ so, dass

$$|\xi'(t)| > 2 \text{ für } t \in (0;1/2).$$

Dann hat man $\forall t \in (0;1/2)$ :

$$\begin{aligned}\phi(|\xi'(t)|) &\overset{|\xi'|>2}{\leq} C|\xi'(t)|^p[\ln|\xi'(t)|]^\alpha \overset{|\xi'|>2,\ \frac{1}{t}>2}{\leq} C|\xi'(t)|^p[\ln\frac{1}{t}]^\alpha \\ &= \frac{C_1C}{t^p[\ln\frac{1}{t}]^\vartheta} \overset{t<1}{=} \frac{C_1C}{t^p|\ln t|^\vartheta}.\end{aligned}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_{B_r(0)}\phi(|\nabla g|)dx &= C\int_0^r \phi(|\xi'(t)|)t^{n-1}dt \overset{r\leqslant 1/2}{\leq} C\int_0^r \frac{t^{n-p-1}}{|\ln t|^\vartheta}dt \\ &\overset{t=ry}{=} Cr^{n-p}\int_0^1 \frac{y^{n-p-1}}{|\ln(ry)|^\vartheta}dy = (**).\end{aligned}$$

Wenn $\vartheta \geq 0$, haben wir: $\frac{1}{|\ln(ry)|^\vartheta} \leq \frac{1}{|\ln r|^\vartheta}$ für $0 < r, y < 1$. Darum

$$\int_{B_r(0)}\phi(|\nabla g|)dx \leq (**) \leq C\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta}\int_0^1 y^{n-p-1}dy = K_0\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta},$$

weil $n-p-1 > -1$.
Für $\vartheta < 0$ gilt

$$|\ln(ry)|^{-\vartheta} \leq C(|\ln r|^{-\vartheta} + |\ln y|^{-\vartheta}).$$

Wir haben

$$\begin{aligned}&\int_{B_r(0)}\phi(|\nabla g|)dx \leq (**) \leq \\ &\leq Cr^{n-p}\left(\int_0^1 y^{n-p-1}|\ln r|^{-\vartheta}dy + \int_0^1 y^{n-p-1}|\ln y|^{-\vartheta}dy\right) \\ &= r^{n-p}(C_1|\ln r|^{-\vartheta} + C_2) \overset{r\leq 1/2,\ \vartheta<0}{\leq} K_0\frac{r^{n-p}}{|\ln r|^\vartheta}.\end{aligned}$$

Beweis von (b): Nun müssen wir nur zeigen, dass für jedes $\mathbf{K} > 0$ gilt:

$$\int_{B_R(0)} e^{\omega(g)\cdot g^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}}dx = \infty$$

für jede Funktion $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty}\omega(t) = \infty$.
Sei

$$\gamma(x) := \mathbf{K}^{\frac{p}{p-(\alpha+\vartheta)}}\omega(g(x)).$$

Man kann leicht sehen:

$$\lim_{x\to 0}\gamma(x) = \infty.$$

Daraus folgt:
*Es gibt eine solche Kugel* $B_{r_0}(0)$, *dass* $\gamma(x) \geq n \;\; \forall\, x \in B_{r_0}(0)$ *und* $r_0 \leq R$.
Folglich

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} e^{\omega(g) g^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}} dx &= \int_{B_R(0)} e^{\omega(g)\mathbf{K}^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}(|\ln|x||-c)} dx \\
&\geq \int_{B_{r_0}(0)} e^{\gamma(x)(|\ln|x||-c)} dx \\
&\overset{\gamma(x)\geqslant n}{\geq} \int_{B_{r_0}(0)} e^{n(-\ln|x|-c)} dx \\
&= \frac{1}{e^{nc}} \int_{B_{r_0}(0)} \frac{dx}{|x|^n} = \infty.
\end{aligned}$$

$\square$

# Kapitel 9

## Abschätzungen für Funktionen $u \in L^2(\Omega)$ mit: $\forall\, B_R(x_0) : \sup\limits_{h,k} \int_{B_R(x_0)} \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^2}{h} dx \le \frac{K}{|\log R|^\vartheta}$

In diesem Kapitel beweisen wir die Einbettung vom logarithmischen Nikolski-Morrey-Raum in den Orlicz-Raum für einen Spezialfall, bei dem $\dim \Omega = 2$ und die Funktion $u$ eine bestimmte Gestalt hat. Der allgemeine Fall eines beschränkten Lipschitz-Gebietes wird im nächsten Kapitel betrachtet.

Wir betrachten zunächst den speziellen Fall:

Sei $u \in L^2(A)$, und $A \subset \mathbb{R}^2$ ein Winkel mit $\measuredangle A \in (0°; 360°]$, der Scheitelpunkt dieses Winkels sei $(0;0)$ (siehe Abbildung 9.1),

$$\text{für ein } R_0 > 0 \text{ gelte} \qquad \operatorname{trg} u \subset B_{R_0}(0) \cap A \tag{9.1}$$

$$\text{und} \quad \left[ \begin{array}{c} \sup\limits_{\vec{h} \neq 0} \int_{A_{\vec{h}} \cap B_r(x_0)} \frac{|u(x+\vec{h})-u(x)|^2}{|\vec{h}|} dx \le \frac{K}{|\log r|^\vartheta} \quad \forall\, r \le 1/2,\ x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \text{mit} \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad A_{\vec{h}} = A \cap (A - \vec{h}) \end{array} \right]. \tag{9.2}$$

Wir wollen beweisen, dass $(9.1),(9.2) \Rightarrow \int_A |u|^4 [\log(|u|+2)]^{\vartheta-1-\varepsilon} dx \le K^*$,
$K^* = K^*(K, \varepsilon, R_0, A)$.

O.B.d.A. $\measuredangle A < 180°$. (Andernfalls können wir den Winkel $A$ in einige Winkel $A_i$ mit $\measuredangle A_i < 180°$ zerlegen.)

Wir wählen eine Basis $\{e_1, e_2\}$ so, dass

1. $A = \{te_1 + se_2 |\, t, s \in [0; \infty)\}$.
2. Wenn $Q^* := \{te_1 + se_2 |\, t, s \in [0;1]\}$, dann $\operatorname{trg} u \subset Q^*$ und $|\operatorname{trg} u| \le \frac{1}{2} |Q^*|$.

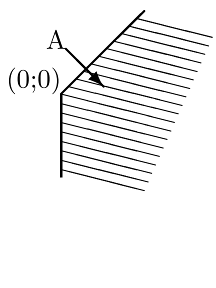


Abbildung 9.1:

Dies ist möglich wegen (9.1).
O.B.d.A. ist $u \geq 0$, denn wir können $|u(x)|$ statt $u(x)$ betrachten. Die Ungleichung (9.2) ist damit offensichtlich immer noch gültig. Weiter führen wir eine affine Abbildung, durch die die Basis $\{e_1, e_2\}$ in die Standardbasis abbildet.

Also genügt es, Folgendes zu zeigen:
Seien bzgl. der Standard-Orthonormalbasis

$$Q := [0;1]^n, \quad \mathbb{R}^n_+ := [0;+\infty)^n. \qquad \text{Dann definieren wir:}$$

**Definition 9.1** *Die Menge* $\mathcal{B}$ *ist die Menge aller Funktionen* $u$ *mit* $u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $\quad u \geq 0$, $\quad \mathrm{trg}(u) \subset Q$ $\quad$ *und* $\quad |\mathrm{trg}(u)| \leq 1/2$.

Unter Würfeln verstehen wir immer die Würfeln mit Kanten, die parallel den Koordinatenachsen sind.

**Definition 9.2** *Sei* $i \in \mathbb{N}_0$.
$\mathcal{L}_i$ *ist die Menge von Würfeln* $W \subset Q$ *mit Kantenlänge* $2^{-i}$.

Nun wollen wir beweisen

**Satz 9.1** *Sei* $\quad u \in \mathcal{B}$, $\quad \sup\limits_{h>0,k} \int_{W \in \mathcal{L}_i} \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^2}{h} dx \leq \frac{K}{(i+1)^\vartheta}$, $\quad$ *n=dim Q=2,*
*insbesondere* $\quad \sup\limits_{h>0,k} \int_Q \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^2}{h} dx \leq K$.

*Dann gilt* $\int_Q u^4 [\log(u+2)]^{\vartheta-1-\varepsilon} dx \leq K_\varepsilon$.

**Beweis:** Weiter setzen wir immer voraus, dass $h > 0$ ist. Außerdem

beschränken auf den Fall *stetiges* $u \in \mathcal{B}$. Der allgemeine Fall durch Approximation beweisen kann. (9.3)

Sei

$$\mu_i := \inf\{t > 0 | \; |(u(\cdot) > t)| \leq 2^{-i-1}\} \quad \text{für jedes } i \geq 0 \tag{9.4}$$

und $\quad T_i := \mu_{i+1} - \mu_i$. Man kann leicht sehen, dass $\mu_0 = 0$ $\quad$ (da $u \in \mathcal{B}$).
Wir müssen $T_i$ abschätzen.

Sei

$$u_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u(x) \leq \mu_i, \\ u(x) - \mu_i & \text{für} \quad \mu_i \leq u(x) \leq \mu_{i+1}, \\ T_i & \text{für} \quad u(x) \geq \mu_{i+1}. \end{cases} \tag{9.5}$$

Wir betrachten ein Funktional $J$:

**Definition 9.3** *Sei* $\quad W \in \mathcal{L}_i$, $\quad g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Dann setzen wir*

$$J_W(g) := \inf \left\{ t \geq 0 \middle| \; |(g(\cdot) > t) \cap W| \leq \frac{|W \cap \mathrm{trg}(g)|}{4} \right\}.$$

**Bemerkung 9.1** *Daraus folgt* $\begin{cases} 1 & |\,(g(\cdot) > J_W(g)\,) \cap W| \le \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}, \\ 2 & |\,(g(\cdot) \ge J_W(g)\,) \cap W| \ge \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}. \end{cases}$

**Beweis von 1 und 2:** Aus der Definition von $J_W(g)$ folgt sofort, dass

1. $\forall\,\delta > 0: \quad |\,(g(\cdot) > J_W(g) + \delta) \cap W| \le \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}$
   $\Rightarrow |\,(g(\cdot) > J_W(g)) \cap W| = \left|\Big[\bigcup_{\delta>0} (g(\cdot) > J_W(g) + \delta)\Big] \cap W\right| =$
   $\sup_{\delta>0} |\,(g(\cdot) > J_W(g) + \delta) \cap W| \le \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}.$
2. $\forall\,\delta > 0: \quad |\,(g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W| > \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}$
   $\Rightarrow |\,(g(\cdot) \ge J_W(g))\, \cap W| = \left|\bigcap_{\delta>0} (g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W\right| =$
   $\inf_{\delta>0} |\,(g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W| \ge \frac{|W \cap \operatorname{trg}(g)|}{4}.$

Aus der Definition von $u_i$ und $\mu_i$ folgt, dass

$$\begin{cases} \operatorname{trg}(u_i) \subset Q, \\ |\operatorname{trg} u_i| \le 2^{-i-1} \le 1/2. \end{cases}$$

Nach Lemma 5.3 kann man $int(\operatorname{trg} u_i)$ mit einer Familie $\Lambda_i$ von Würfeln überdecken, so dass

$$\left.\begin{array}{lll} W_1, W_2 \in \Lambda_i, & W_1 \neq W_2 \;\Rightarrow & |W_1 \cap W_2| = 0, \\ & \forall\, W \in \Lambda_i \quad : & \frac{2^{-n}}{2}|W| \le |\operatorname{trg} u_i \cap W| \le \frac{1}{2}|W|. \end{array}\right\} \tag{9.6}$$

**Lemma 9.1** *Seien* $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, $\quad \frac{2^{-n}}{2} \le |\operatorname{trg} f \cap Q| \le \frac{1}{2}$, $\quad \bar{f} = \int_Q f(x)\,dx$ *und* $v(x) = f(x) - \bar{f}$.

*Dann gilt* $J_Q(f) \le C\|v\|_{L^2(Q)}$.

**Beweis:** Wir berechnen zuerst $\bar{f}$. Sei

$$G_0 := \{x \in Q | f(x) = 0\}.$$

Es ist klar, dass $|G_0| \ge 1/2$ und $\forall\, x \in G_0: \; v(x) = -\bar{f}$.
Dann ist

$$\|v\|^2_{L^2(Q)} = \int_Q v^2 dx \ge \int_{G_0} v^2 dx \ge \frac{1}{2}|\bar{f}|^2 \quad \Rightarrow |\bar{f}| \le \sqrt{2}\|v\|_{L^2(Q)}.$$

Wir haben

$$\|f\|_{L^2(Q)} = \|v + \bar{f}\|_{L^2(Q)} \le \|v\|_{L^2(Q)} + \bar{f} \le (1 + \sqrt{2})\|v\|_{L^2(Q)}.$$

Nun betrachten wir die Menge

$$G_1 := \{x \in Q | f(x) \ge J_Q(f)\}.$$

Wir haben nach Bemerkung 9.1:

$$|G_1| \geq \frac{|\mathrm{trg}\, f \,\cap\, Q|}{4} \geq \frac{2^{-n}}{8}$$

$$\Rightarrow C\|v\|^2_{L^2(Q)} \geq \int_Q f^2\, dx \geq \int_{G_1} f^2\, dx \geq [J_Q(f)]^2 \cdot |G_1| \geq 2^{-n-3}[J_Q(f)]^2.$$

Mit anderen Worten, $J_Q(f) \leq C_1\|v\|_{L^2(Q)}$. □

**Lemma 9.2** *Sei* $W \in \mathcal{L}_j$, $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$,
$\frac{2^{-n}}{2}|W| \leq |\mathrm{trg}\, g \cap W| \leq \frac{1}{2}|W|$, $\sup\limits_{h,k} \int_W \frac{|g(x+he_k)-g(x)|^2}{h} dx \leq \frac{K}{(j+1)^\vartheta}$.

*Dann gilt* $J_W(g) \leq C\dfrac{2^{(n-1)j/2}}{(j+1)^{\vartheta/2}}$.

**Beweis:** Wir definieren $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ so, dass $W = x_0 + 2^{-j}Q$.
Weiter ist

$$f(x) := g(x_0 + 2^{-j}x), \quad \bar{f} := \int_Q f(x)\, dx \text{ und } v(x) := f(x) - \bar{f}.$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\sup_{h,k} \int_Q \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^2}{h} dx &= \sup_{h,k} \int_Q \frac{|f(x+he_k)-f(x)|^2}{h} dx \\
(y = x_0 + 2^{-j}x) \quad &= \sup_{h,k} \int_W \frac{|g(y+2^{-j}he_k)-g(y)|^2}{h} 2^{nj} dy \\
(h = 2^j h_1) \quad &= 2^{(n-1)j} \sup_{h_1,k} \int_W \frac{|g(y+h_1e_k)-g(y)|^2}{h_1} dy \\
&\leq K\frac{2^{(n-1)j}}{(j+1)^\vartheta}.
\end{aligned}$$

Nun ist aber $\int_Q v(x)\, dx = 0$, und für den Raum solcher Funktionen ist $\left(\sup\limits_{h,k} \int_{Q\cap Q-he_k} \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^2}{h} dx\right)^{1/2}$ die Norm, die zu der Nikolski-Norm $\|v\|_{\mathcal{N}^{1/2,2}(Q)}$ äquivalent ist. Aber es ist bekannt, dass

$$\mathcal{N}^{1/2,2}(Q) \hookrightarrow L^2(Q).$$

Wir haben

$$\|v\|_{L^2(Q)} \leq C\|v\|_{\mathcal{N}^{1/2,2}(Q)} \leq C\left(\sup_{h,k} \int_Q \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^2}{h} dx\right)^{1/2} \leq C\frac{2^{(n-1)j/2}}{(j+1)^{\vartheta/2}}.$$

Man kann leicht sehen, dass

$$J_W(g) = J_Q(f) \overset{\text{Lemma 9.1}}{\leq} C\|v\|_{L^2(Q)} \leq C\frac{2^{(n-1)j/2}}{(j+1)^{\vartheta/2}},$$

und Lemma 9.2 ist bewiesen. $\square$

Sei

$$\mathcal{M}_W(v) := \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_W \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^2}{h}dx. \tag{9.7}$$

Aber da $\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$, hat man

$$\mathcal{M}_W(v) \le \sup_{h,k}\int_W \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^2}{h}dx.$$

Wir definieren:

$$K_i := \mathcal{M}_Q(u_i). \tag{9.8}$$

Nach (9.5),

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u(x)\le \mu_i, \\ u(x)-\mu_i & \text{für} \quad \mu_i \le u(x)\le \mu_{i+1}, \\ T_i & \text{für} \quad u(x)\ge \mu_{i+1}. \end{cases}$$

Es ist klar, dass

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Außerdem gilt, dass

$$\begin{cases} \quad u_i(x+he_k)-u_i(x) \ge 0 \quad \forall\, i\ge 0, \quad \text{wenn} \quad u(x+he_k)-u(x)\ge 0, \\ \text{und} \quad u_i(x+he_k)-u_i(x) \le 0 \quad \forall\, i\ge 0, \quad \text{wenn} \quad u(x+he_k)-u(x)\le 0. \end{cases}$$

Wir sehen, dass $|u(x+he_k)-u(x)| = \sum\limits_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|$.

Eine einfache Rechnung zeigt:

$|u(x+he_k)-u(x)|^2 = \Big|\sum\limits_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|\Big|^2 \ge \sum\limits_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|^2$.

Wir haben

$$\begin{aligned} K &\ge \mathcal{M}_Q(u) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_Q\frac{|u(x+he_k)-u(x)|^2}{h}dx \\ &\ge \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_Q\frac{|u_i(x+he_k)-u_i(x)|^2}{h}dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{M}_Q(u_i) = \sum_{i=0}^{\infty}K_i. \end{aligned}$$

Also ist

$$K \ge \sum_{i=0}^{\infty}K_i. \tag{9.9}$$

**Lemma 9.3** *Sei* $W \in \mathcal{L}_j, \quad \frac{2^{-n}}{2}|W| \leq |W \cap \operatorname{trg} g| \leq \frac{1}{2}|W|.$

$$\textit{Dann} \quad [J_W(g)]^2 \leq C \cdot 2^{(n-1)j}(j+1)^{1+\varepsilon}\mathcal{M}_W(g).$$

**Beweis:** Wir definieren $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ so, dass $W = x_0 + 2^{-j}Q$.
Weiter sei

$$f(x) := g(x_0 + 2^{-j}x), \quad \bar{f} := \int_Q f(x)\,dx \quad \text{und} \quad v(x) := f(x) - \bar{f}.$$

Sei $h \in (0; 1/e]$. Dann folgt

$$|\ln(2^{-j}h)| = j + |\ln h| \overset{|\ln h| \geqslant 1}{\leq} (j+1)|\ln h|$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_W(g) &= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{1/e}\frac{dh_1}{h_1|\ln h_1|^{1+\varepsilon}}\int_W \frac{|g(x+h_1e_k)-g(x)|^2}{h_1}dx \\
\left(x=x_0+2^{-j}y,\, h_1=2^{-j}h\right) \quad &= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2^j/e}\frac{dh}{h|\ln(2^{-j}h)|^{1+\varepsilon}}\int_Q \frac{|f(y+he_k)-f(y)|^2}{h}2^{(1-n)j}dy \\
&\geq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln(2^{-j}h)|^{1+\varepsilon}}\int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{h}2^{(1-n)j}dy \\
\left(|\ln(2^{-j}h)| \leqslant (j+1)|\ln h|\right) \quad &\geq \frac{2^{(1-n)j}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\mathcal{M}_Q(v).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun:

$$\forall\, h \in (0; 1/e] : \ \mathcal{M}_Q(v) \geq C_\varepsilon \int_{Q \cap Q - he_k} \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{h^{1/2}}dy.$$

Wir wissen: Seien $t \in (0; 1/e)$, $Q_{t,k} := Q \cap Q - te_k$. Dann folgt

$$M_Q(v) \geq C\int_0^{1/e}\frac{dh}{h^{1/2}}\int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{h}dy$$

und $\forall\, h \in [0; t]$ :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy &\leq 2\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y+he_k)|^2}{t^{1/2}}dy \\
&\quad +2\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy \\
(y_1 = y+he_k) \quad &\leq 2\int_Q \frac{|v(y_1+(t-h)e_k)-v(y_1)|^2}{t^{1/2}}dy_1 \\
&\quad +2\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\quad \forall\, t \in (0;1/e]:$

$$\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy \le$$

$$\le \frac{2}{t}\int_0^t dh \int_Q \frac{|v(y+(t-h)e_k)-v(y)|^2+|v(y+he_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy$$

$$\le 4\int_0^t dh \int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^2}{h^{3/2}}dy$$

$$\Rightarrow \sup_{t\leqslant 1/e} \int_{Q_{t,k}} \tfrac{|v(y+te_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy \le 4\int_0^{1/e} \tfrac{dh}{h^{1/2}} \int_Q \tfrac{|v(y+te_k)-v(y)|^2}{h}dy \le C\mathcal{M}_Q(v).$$

Aber

$$\int_Q v(x)dx = 0.$$

Für den Raum solcher Funktionen ist $\left(\sup\limits_k \sup\limits_{t\leqslant 1/e} \int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^2}{t^{1/2}}dy\right)^{1/2}$ eine Norm, die äquivalent zur Nikolski-Norm $\|v\|_{\mathcal{N}^{1/4,2}(Q)}$ ist. Und

$$\mathcal{N}^{1/4,2}(Q) \hookrightarrow L^2(Q).$$

Daraus folgern wir

$$\mathcal{M}_W(g) \ge \frac{2^{(1-n)j}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\mathcal{M}_Q(v),$$

und

$$[\mathcal{M}_Q(v)]^{1/2} \ge C\|v\|_{\mathcal{N}^{1/4,2}(Q)} \ge C\|v\|_{L^2(Q)} \overset{\text{Lemma 9.1}}{\ge} CJ_Q(f) = CJ_W(g).$$

Wir haben

$$[J_W(g)]^2 \le C_1 \cdot 2^{(n-1)j}(j+1)^{(1+\varepsilon)}\mathcal{M}_W(g).$$

Der Beweis von Lemma 9.3 ist damit abgeschlossen. $\square$

Wegen der Definition von $\mu_i$ und $u_i$ (siehe (9.4),(9.5) ) gilt

$$|\mathrm{trg}\, u_i| \le 2^{-i-1}.$$

Darum gilt für die Menge $\Lambda_i$ von Würfeln, die $int(\mathrm{trg}\, u_i)$ überdeckt und in (9.6) definiert ist:

$$\forall\, W \in \Lambda_i:\ 2^{-i-1} \ge |\mathrm{trg}\, u_i| \ge |\mathrm{trg}\, u_i \cap W| \ge 2^{-n-1}|W|$$
$$\Rightarrow |W| \le 2^{n-i}.$$

Andererseits ist

$$|W| \le 1 = 2^0.$$

Die Kantenlänge von $W$ ist $\sqrt[n]{|W|} \leq \min\{1, 2^{1-i/n}\}$, und wir haben:

$$\text{Aus} \quad \text{“}W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j\text{”} \quad \text{folgt} \quad j \geq \max\{0; \frac{i}{n} - 1\}.$$

Also

$$\forall\, W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j : \quad j+1 \geq \max\{1, i/n\} \geq c(i+1).$$

Weiter wollen wir solche $\mathbf{R}_i$ betrachten, für die

$$\frac{K_i \mathbf{R}_i (i+1)^{1+\varepsilon}}{2^{-i}} = K \frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}}. \tag{9.10}$$

Wir berechnen:

$$\mathbf{R}_i = \left( \frac{K}{K_i} \frac{2^{-i}}{(i+1)^{\vartheta+1+\varepsilon}} \right)^{1/n}. \tag{9.11}$$

Sei jetzt $W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j, \quad 2^{-j} \geq \mathbf{R}_i$. Dann haben wir nach Lemma 9.2

$$[J_W(u_i)]^2 \leq C \frac{(2^{-j})^{1-n}}{(j+1)^{\vartheta}} \overset{\substack{2^{-j} \geqslant \mathbf{R}_i, \\ j+1 \geqslant c(i+1)}}{\leq} C_1 \frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}}. \tag{9.12}$$

Wir haben dabei benutzt, dass $1-n \leq 0, \quad \vartheta \geq 0$. Nun wollen wir beweisen, dass

$$T_i^2 \leq \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}}$$

für eine Konstante $\bar{K}$, die von $K$, aber nicht von der Funktion $u$ abhängt.

$$\boxed{\text{Annahme:} \quad T_i^2 > \bar{K} \tfrac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}} \quad \text{für ein } i \geq 0.}$$

Wir werden $\bar{K}$ im Folgenden festlegen.

Die erste Voraussetzung ist: $\bar{K} \geq C_1$ mit $C_1$ aus (9.12).
Dann gilt für jedes $W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j$ mit $2^{-j} \geq \mathbf{R}_i$ :

$$T_i^2 > \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}} \geq C_1 \frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}} \overset{(9.12)}{\geq} [J_W(u_i)]^2.$$

Wir haben

$$T_i > J_W(u_i) \quad \text{für jedes } W \in \Lambda_i \text{ mit Kantenlänge} \geq \mathbf{R}_i. \tag{9.13}$$

$\Lambda_i$ besteht aus zwei Teilen $\begin{array}{l} \Lambda_i' := \{W \in \Lambda_i \mid J_W(u_i) < T_i\} \quad \text{und} \\ \Lambda_i'' := \{W \in \Lambda_i \mid J_W(u_i) \geq T_i\}. \end{array}$

Nach Definition von $\Lambda_i'$: $\quad W \in \Lambda_i' \quad \Rightarrow T_i > J_W(u_i)$

$$\Rightarrow |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W| \leq |\,(u_i(\cdot) > J_W(u_i)\,) \cap W| \overset{\text{Bemerkung 9.1}}{\leq} \frac{|\operatorname{trg} u_i \,\cap\, W|}{4}.$$

Dann ist
$$\sum_{W\in\Lambda_i'} |\,(u_i(\cdot)\geq T_i)\cap W| \overset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{|\operatorname{trg} u_i|}{4} \leq \frac{2^{-i}}{8}$$
und
$$\sum_{W\in\Lambda_i} |(u_i(\cdot)\geq T_i)\cap W| \overset{(+)}{=} |(u_i\geq T_i)| = |(u\geq \mu_{i+1})| \overset{(9.4)}{\geq} \frac{2^{-i}}{4}.$$
In (+) benutzen wir (9.3), und zwar (9.3) $\Rightarrow$ [$u$ ist stetig] $\Rightarrow$ [$u_i$ sind stetig] $\Rightarrow \Big[\bigcup_{W\in\Lambda_i} W \supset int(\operatorname{trg} u_i) \supset \{x\in Q-\partial Q | u_i(x)>0\}\Big]$.

Wir bekommen
$$\sum_{W\in\Lambda_i''} |(u_i(\cdot)\geq T_i)\cap W| = \sum_{W\in\Lambda_i} |(u_i(\cdot)\geq T_i)\cap W| - \sum_{W\in\Lambda_i'} |(u_i(\cdot)\geq T_i)\cap W| \geq \tfrac{2^{-i}}{8}$$
$$\Rightarrow \sum_{W\in\Lambda_i''} |\operatorname{trg} u_i\cap W| \geq \frac{2^{-i}}{8}.$$

Zum Schluß
$$\sum_{W\in\Lambda_i''} |W| \overset{(9.6)}{\geq} 2\sum_{W\in\Lambda_i''} |\operatorname{trg} u_i\cap W| \geq \frac{2^{-i}}{4}. \tag{9.14}$$
Wir bezeichnen die Kantenlänge von $W$ durch $R(W)$. Dann
$$\forall\, W\in\Lambda_i'':\ R(W)<\mathbf{R}_i, \tag{9.15}$$
denn $[\,W\in\Lambda_i''$ und $R(W)\geq \mathbf{R}_i\,] \overset{(9.13)}{\Longrightarrow} [T_i>J_W(u_i)] \Rightarrow W\notin\Lambda_i''$.

Sei $\tau := 1+\varepsilon$. Die Funktion
$$\phi(t) := t\Big[\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big)\Big]^\tau$$
wächst auf $(0;+\infty)$ für eine geeignete Konstante $c_4>1$, denn
$$\phi'(t) = \Big[\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big)\Big]^{\tau-1}\left(\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big)-\frac{\tau}{1+c_4t}\right) > 0 \quad \forall\, t>0,$$
wenn $\ln c_4>\tau$.

Die Funktion
$$\psi(t) := t\Big[\log_2\Big(\frac{2}{t}+c_4\Big)\Big]^\tau = c'\cdot\phi(t/2)$$
wächst auch.

Sei $W\in\Lambda_i''\cap\mathcal{L}_j$. Wir wissen, dass $2^{-j}=R(W)\overset{(9.15)}{<}\mathbf{R}_i$. Deshalb
$$2^{-j}(j+1)^\tau \leq \psi(2^{-j}) < \psi(\mathbf{R}_i) = \mathbf{R}_i\Big[\log_2\Big(\frac{2}{\mathbf{R}_i}+c_4\Big)\Big]^\tau \overset{(*)}{\leq} C\mathbf{R}_i(i+1)^\tau,$$

hierbei folgt $(*)$ aus: $\frac{2}{\mathbf{R}_i} \overset{(9.11)}{=} 2\left(\frac{K_i}{K}\frac{(i+1)^{\vartheta+1+\varepsilon}}{2^{-i}}\right)^{1/n} \overset{\frac{K_i}{K}\leqslant 1}{\leq} C\cdot 2^{c\,i}$.
Auch

$$W\in\Lambda_i''\cap\mathcal{L}_j \quad\Rightarrow\Big[|W|=2^{-nj}\quad\text{und}\quad J_W(u_i)\geq T_i\Big].$$

Wir haben

$$\mathcal{M}_W(u_i)\overset{\text{Lemma 9.3}}{\geq} C\tfrac{(2^{-j})^{n-1}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}[J_W(u_i)]^2\geq C\tfrac{|W|}{2^{-j}(j+1)^{1+\varepsilon}}T_i^2\overset{2^{-j}<\mathbf{R}_i}{\geq} C\tfrac{|W|}{\mathbf{R}_i(i+1)^{1+\varepsilon}}T_i^2.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}K_i &\overset{(9.8)}{=} \mathcal{M}_Q(u_i)\overset{(9.7)}{\geq}\sum_{W\in\Lambda_i}\mathcal{M}_W(u_i)\geq\sum_{W\in\Lambda_i''}\mathcal{M}_W(u_i)\\ &\geq C\sum_{W\in\Lambda_i''}|W|\left(\frac{T_i^2}{(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i}\right)\overset{(9.14)}{\geq}\frac{C}{4}\left(2^{-i}\frac{T_i^2}{(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i}\right).\end{aligned}$$

Wir sehen, dass

$$T_i^2\leq C_2\frac{K_i(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i}{2^{-i}}\overset{(9.10)}{=}C_2K\frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}}.$$

Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, wenn wir die Konstante $\bar{K}\geq C_2K$ gewählt haben.

Also war unsere Annahme falsch, und $T_i^2\leq\bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{1-n}}{(i+1)^{\vartheta}}$.

Hierbei ist $\mathbf{R}_i\overset{(9.11)}{=}\left(\frac{K}{K_i}\frac{2^{-i}}{(i+1)^{\vartheta+1+\varepsilon}}\right)^{1/n}$.

Wir berechnen für den Fall "$n=2$": $T_i^2\leq\bar{K}\frac{\mathbf{R}_i^{-1}}{(i+1)^{\vartheta}}=\bar{K}\left(\frac{K_i}{K}\frac{2^i}{(i+1)^{\vartheta-1-\varepsilon}}\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow T_i\leq C\frac{\left(\frac{K_i}{K}\cdot 2^i\right)^{1/4}}{(i+1)^{\frac{\vartheta-1-\varepsilon}{4}}}\quad\forall\,i\geq 0.$$

Sei jetzt $q:=4$, $\kappa:=\dfrac{\vartheta-1-\varepsilon}{4}$. Dann haben wir

$$T_i\leq C\frac{\left(\left(\frac{K_i}{K}+2^{-i/2}\right)2^i\right)^{1/q}}{(i+1)^{\kappa}}\quad\forall\,i\geq 0.\tag{9.16}$$

Die weiteren Berechnungen gehen fast wie in Satz 8.4:

$$t_i:=\frac{2^{i/q}}{(i+1)^{\kappa}}\quad\forall\,i\geq 0,\qquad\Delta_j:=\sum_{i=0}^{j}t_i\quad\forall\,j\geq 0.\tag{9.17}$$

Dann

$$\mu_j=\sum_{i=0}^{j-1}T_i\overset{(9.16)}{\leq}C\sum_{i=0}^{j-1}\left(\frac{K_i}{K}+2^{-i/2}\right)^{1/q}t_i\quad\forall\,j\geq 0.\tag{9.18}$$

Wir definieren die Funktion $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ so:

$$\omega(t) := t^q [\log(t + c_4)]^{q\kappa}, \tag{9.19}$$

wobei man die Konstante $c_4 \geq 1$ so wählen muss, dass die Funktion $\omega$ wachsend ist (nicht vergessen: $\kappa$ kann negativ sein!)
Für den Beweis von Satz 9.1 ist das genug zu zeigen, dass $\int_Q \omega(u)\, dx \leq C^*$ für eine Konstante $C^*$.

Wir wissen, dass $t_i = \frac{2^{i/q}}{(i+1)^\kappa}$, $0 \leq \frac{K_i}{K} \leq 1$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\frac{2^{\frac{j}{2q}}}{(j+1)^\kappa} \leq \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i \leq (j+1) \cdot 2^{1/q} \cdot \sup_{0 \leqslant i \leqslant j} t_i.$$

Darum gilt für $c_4 \geq 1$:

$$A(j+1) \leq \log \left( C \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i + c_4 \right) \leq B(j+1) \quad \forall\, j \geq 0 \tag{9.20}$$

für geeignete positive Konstanten $A > 0$, $B > 0$.

Die diskrete Variante der Hölder-Ungleichung gibt

$$\forall\, (a_i)_{i=0,1,2,\dots} : \quad \left( \sum_{i=0}^{j} |a_i|^{\frac{1}{q}} \cdot t_i^{\frac{q-1}{q}} \right)^q \leq \sum_{i=0}^{j} |a_i| \cdot \left( \sum_{m=0}^{j} t_m \right)^{q-1} \overset{(9.17)}{=} \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} |a_i|.$$

Wenn $a_i := \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i$ ist, haben wir:

$$\left( \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i \right)^q \leq \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i. \tag{9.21}$$

Sei $D := \max\{A^{q\kappa}, B^{q\kappa}\}$ (siehe (9.20) ). Die Funktion $\omega$ wächst, darum

$$\begin{aligned}
\omega(\mu_{j+1}) &\overset{(9.18)}{\leq} \omega \left( C \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i \right) \\
&\overset{(9.19)}{=} \left( C \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i \right)^q \\
&\quad \cdot \left( \log \left( C \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i + c_4 \right) \right)^{q\kappa} \\
&\overset{(9.21),(9.20)}{\leq} DC^q \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \quad \forall\, j \geq 0.
\end{aligned}$$

Kurz gesagt, für geeignete Konstante $\mathbf{K}$ gilt

$$\omega(\mu_{j+1}) \leq \mathbf{K}\, \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \quad \forall\, j \geq 0. \tag{9.22}$$

Weiter wollen wir ein solches $R > 0$ und eine Funktion $g$ betrachten, dass

$$\begin{array}{ll} g : B_R(0) \to \mathbb{R}_{\geq 0}, & |B_R| = 1/2, \\ g(x) = \xi(|x|) & \text{die Symmetrisation von } u \text{ ist.}^1 \end{array}$$

Die Definition von $\mu_j$ und der Funktion $\xi$ zeigt, dass

$$\mu_j = \xi(2^{-j/n}R) \quad \text{und} \quad \xi \quad \text{fallend.}$$

Darum gilt

$$\forall\, x \in B_{2^{-j/n}R}(0) - B_{2^{-(j+1)/n}R}(0) : \quad g(x) \leq \mu_{j+1} \quad (\text{da } |x| > 2^{-(j+1)/n}R).$$

Wir haben

$$\begin{aligned} &\int_Q \omega(u(x))\, dx = \\ &\quad = \int_{B_R(0)} \omega(g(x))\, dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_{2^{-j/n}R}(0) - B_{2^{-(j+1)/n}R}(0)} \omega(\mu_{j+1})\, dx \\ &\quad = \overbrace{\frac{1}{2}|B_R|}^{=:\, c} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \omega(\mu_{j+1}) \overset{(9.22)}{\leq} \overbrace{c\mathbf{K}}^{=:\, C} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \\ &\quad = C \sum\sum_{0 \leq i \leq j < \infty} 2^{-j} \Delta_j^{q-1} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \\ &\quad = C \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) \sum_{j=i}^{\infty} \left( \frac{\Delta_j (j+1)^{\kappa}}{2^{j/q}} \right)^{q-1} \cdot \frac{t_i}{2^{i/q}} \cdot \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}} \\ &\quad \leq \underbrace{C \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{K_m}{K} + 2^{-m/2} \right)}_{\leq C\left(1 + \sum_{m \geqslant 0} 2^{-m/2}\right) = C_1} \underbrace{\left( \sup_{\ell \geqslant 0} \frac{\Delta_\ell (\ell+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}} \right)}_{(I)}^{q-1} \underbrace{\sup_{i \geqslant 0} \frac{t_i}{2^{i/q}} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}}}_{(II)} \\ &\quad \leq C_1 \cdot (I)^{q-1} \cdot (II). \end{aligned}$$

$$\text{Also ist} \quad \int_Q |u|^q [\log(|u + c_4)]^{q\kappa} dx \leq C_1 \cdot (I)^{q-1} \cdot (II)$$
$$\text{mit} \quad q = 4, \quad q\kappa = \vartheta - 1 - \varepsilon.$$

Nun müssen wir nur noch beweisen, dass $(I) < \infty$ und $(II) < \infty$.

Zeige: $(I) < \infty$. Wir wissen:

$$\Delta_j \overset{(9.17)}{=} \sum_{i=0}^{j} t_i, \quad t_i = \frac{2^{i/q}}{(i+1)^{\kappa}}.$$

[1] diese Funktion war in unserem Fall eigentlich nicht notwendig, aber wir verkleinern den Koeffizienten $c$ in der Berechnung von $\int_Q \omega(u(x))\, dx$.

Wir wählen $i_0 \in \mathbb{N}$ und $d \in (0;1)$ so, dass

$$2^{-1/q}\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{\kappa} \le 1-d \quad \forall\, i \ge i_0.$$

Dann

$$\forall\, i \ge i_0: \quad \frac{t_i}{t_{i+1}} = 2^{-1/q}\left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{\kappa} \le 1-d.$$

Folglich ist

$$\forall\, m \ge i \ge i_0: \quad t_i \le t_m \cdot (1-d)^{m-i}.$$

Wir haben

$$\forall\, m \ge i_0: \ \Delta_m = \underbrace{\sum_{i=0}^{i_0-1} t_i}_{=:\,c} + \sum_{i=i_0}^{m} t_i \le c + t_m \sum_{i=i_0}^{m}(1-d)^{m-i} \le c + \frac{t_m}{d}.$$

Dann $\limsup\limits_{m\to\infty} \frac{\Delta_m}{t_m} \le \lim\limits_{m\to\infty}\left(\frac{c}{t_m}+\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} < \infty$

$$\Rightarrow (I) = \sup_{m\geqslant 0} \frac{\Delta_m}{t_m} < \infty.$$

Zeige: $(II) < \infty$.

$$(II) = \sup_{i\geqslant 0} \frac{t_i}{2^{i/q}} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}} \overset{\ell=j-i}{=} \sup_{i\geqslant 0} \frac{1}{(i+1)^{\kappa}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}} = \sup_{i\geqslant 0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\frac{\ell}{i+1}+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}}.$$

Es ist klar: $\begin{cases} \text{wenn } \kappa < 0, \text{ dann } & (II) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell/q}} < \infty, \\ \text{wenn } \kappa \ge 0, \text{ dann } & (II) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}} < \infty, \end{cases}$

und der Beweis von Satz 9.1 ist abgeschlossen. □

# Kapitel 10

## Abschätzungen für Funktionen $u \in L^p(\Omega)$ mit: $\forall\, B_R(x_0) : \sup\limits_{h,k} \int_{B_R(x_0)} \left| \frac{u(x+he_k)-u(x)}{h^\alpha} \right|^p dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta}$

Zum Schluß wird eine allgemeine Einbettung vom logarithmischen Nikolski-Morrey-Raum in Orlicz-Raum beweisen. Das Resultat ist insofern "allgemein", als die Dimension von $\Omega$ beliebig sein kann. Die einzige Voraussetzung an $\Omega$ ist "beschränkte Lipschitz-Gebiet". Das Ergebnis, das wir in diesem Kapitel bekommen, ist im Sinne der Definition 1.7 nicht optimal.

Wir wollen beweisen

**Behauptung 10.1** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $u \in L^p(\Omega)$, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$, $\Omega_{\vec{h}} = \Omega \cap (\Omega - \vec{h})$, $\alpha \in (0;1)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ und $\alpha p < \lambda \le n$.*

*Dann haben wir:*

$$\textit{Aus}\quad \left[\begin{array}{ll} \sup\limits_{\vec{h}\neq 0} \int_{\Omega_{\vec{h}} \cap B_r(x_0)} \frac{|u(x+\vec{h})-u(x)|^p}{|\vec{h}|^{\alpha p}} dx \le K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta} & \forall\, r \le 1/2,\ x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \quad \textit{und} \quad \int_{\Omega \cap B_r(x_0)} |u|^p dx \le K \frac{r^{n-\lambda}}{|\log r|^\vartheta} & \forall\, r \le 1/2,\ x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right] \tag{10.1}$$

*folgt, dass $\forall\, \varepsilon > 0$:*

$$\int_\Omega |u|^q [\log(|u|+2)]^{q\kappa} dx \le K_{\varepsilon,\Omega} \quad \textit{mit} \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{\vartheta\alpha}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}.$$

**Bemerkung 10.1** *O.B.d.A. ist $u \geqslant 0$, denn wir können $|u(x)|$ statt $u(x)$ betrachten. Man kann das leicht sehen, weil die Ungleichungen (10.1) damit immer noch gültig sind.*

$$\text{Seien} \qquad Q := [0;1]^n, \quad \mathbb{R}^n_+ := \{\, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n \ge 0 \,\}.$$

**Definition 10.1** *Wir sagen, dass die Funktion $u \in \mathcal{B}$ liegt, wenn $u \in L^p(\mathbb{R}^n_+)$, $u \ge 0$, $\operatorname{trg}(u) \subset Q$ und $|\operatorname{trg}(u)| \le 1/2$.*

Wir beweisen Behauptung 10.1 in zwei Etappen:
in Satz 10.1 – für den Fall $\{\Omega = \mathbb{R}^n_+,\ u \in \mathcal{B}\}$,

und in Satz 10.2 – für alle andere Fälle.

| Alle Würfeln, die im Folgenden entstehen, haben achsenparallele Kanten. |
|---|

## 10.1 Beweis für $u \in \mathcal{B}$ (Satz 10.1)

**Definition 10.2** *Mit* $\mathcal{L}_i$ *bezeichnen wir die Menge von Würfeln* $W \subset Q$ *mit Kantenlänge* $2^{-i}$, $i \geq 0$.

Für das Spätere benötigen wir

**Satz 10.1** *Seien* $\alpha \in (0;1)$, $p \in [1;\infty)$, $\vartheta \in (-\infty;+\infty)$ *und* $\alpha p < \lambda \leq n$.

*Ferner gelte* $u \in \mathcal{B}$, $\sup\limits_{h>0,k} \int_{W\in\mathcal{L}_i} \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K\frac{(2^{-i})^{n-\lambda}}{(i+1)^\vartheta}$,

*insbesondere* $\sup\limits_{h>0,k} \int_Q \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K$.

*Dann gilt* $\int_Q u^q[\log(u+2)]^{q\kappa} dx \leq K_\varepsilon$, *wobei* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\vartheta\alpha}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}$.

**Beweis:** Weiter setzen wir immer voraus, dass $h > 0$ ist. Außerdem

machen wir unseren Beweis nur für *stetiges* $u \in \mathcal{B}$. Das ist ausreichend, weil man den allgemeinen Fall durch Approximation beweisen kann. (10.2)

Sei

$$\mu_i := \inf\{t > 0 |\ |(u(\cdot) > t)| \leq 2^{-i-1}\} \quad \text{für jedes } i \geq 0 \tag{10.3}$$

und $T_i := \mu_{i+1} - \mu_i$. Man kann leicht sehen, dass $\mu_0 = 0$ (da $u \in \mathcal{B}$).

Wir müssen $T_i$ abschätzen.

Sei

$$u_i(x) := \begin{cases} 0 & \text{für} & u(x) \leq \mu_i, \\ u(x) - \mu_i & \text{für} & \mu_i \leq u(x) \leq \mu_{i+1}, \\ T_i & \text{für} & u(x) \geq \mu_{i+1}. \end{cases} \tag{10.4}$$

**Definition 10.3** *Sei* $W \in \mathcal{L}_i$, $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. *Dann ist*
$J_W(g) := \inf\left\{t \geq 0 \middle|\ |(g(\cdot) > t) \cap W| \leq \frac{|W\cap \operatorname{trg}(g)|}{4}\right\}$.

**Bemerkung 10.2** *Daraus folgt* $\begin{cases} 1 & |(g(\cdot) > J_W(g)) \cap W| \leq \frac{|W\cap \operatorname{trg}(g)|}{4}, \\ 2 & |(g(\cdot) \geq J_W(g)) \cap W| \geq \frac{|W\cap \operatorname{trg}(g)|}{4}. \end{cases}$

**Beweis von 1 und 2:** Aus der Definition von $J_W(g)$ folgt sofort, dass

1. $\forall\, \delta > 0 :\quad |(g(\cdot) > J_W(g) + \delta) \cap W| \leq \frac{|W\cap \operatorname{trg}(g)|}{4}$
$\Rightarrow |(g(\cdot) > J_W(g)) \cap W| = \left|\left[\bigcup\limits_{\delta>0} (g(\cdot) > J_W(g) + \delta)\right] \cap W\right| =$
$\sup\limits_{\delta>0} |(g(\cdot) > J_W(g) + \delta) \cap W| \leq \frac{|W\cap \operatorname{trg}(g)|}{4}$.

2. $\forall\,\delta > 0: \quad |\,(g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W| > \frac{|W \cap \mathrm{trg}(g)|}{4}$

$\Rightarrow |\,(g(\cdot) \geq J_W(g)) \cap W| = \Big|\bigcap\limits_{\delta>0} (g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W\Big| =$

$\inf\limits_{\delta>0} |\,(g(\cdot) > J_W(g) - \delta) \cap W| \geq \frac{|W \cap \mathrm{trg}(g)|}{4}.$

Aus der Definition von $u_i$ und $\mu_i$ folgt, dass

$$\begin{cases} \mathrm{trg}(u_i) \subset Q, \\ |\mathrm{trg}\, u_i| \leq 2^{-i-1} \leq 1/2. \end{cases}$$

Nach Lemma 5.3 kann man $int(\mathrm{trg}\, u_i)$ mit einer Familie $\Lambda_i$ von Würfeln überdecken, so dass

$$\left.\begin{array}{lll} W_1, W_2 \in \Lambda_i, & W_1 \neq W_2 \;\Rightarrow & |W_1 \cap W_2| = 0, \\ & \forall\, W \in \Lambda_i \quad : & \frac{2^{-n}}{2}|W| \leq |\mathrm{trg}\, u_i \cap W| \leq \frac{1}{2}|W|. \end{array}\right\} \qquad (10.5)$$

**Lemma 10.1** *Seien*

$$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \frac{2^{-n}}{2} \leq |\mathrm{trg}\, f \cap Q| \leq \frac{1}{2}, \quad \bar{f} := \int_Q f(x)\,dx \;\; und \;\; v(x) := f(x) - \bar{f}.$$

*Dann gilt* $J_Q(f) \leq C\|v\|_{L^p(Q)}$.

**Beweis:** Wir berechnen zuerst $\bar{f}$. Sei

$$G_0 := \{x \in Q | f(x) = 0\}.$$

Es ist klar, dass $|G_0| \geq 1/2$ und $\forall\, x \in G_0 : \; v(x) = -\bar{f}$.
Dann folgt aus

$$\|v\|^p_{L^p(Q)} = \int_Q |v|^p dx \geq \int_{G_0} |v|^p dx \geq \frac{1}{2}|\bar{f}|^p,$$

dass

$$|\bar{f}| \leq \sqrt[p]{2}\|v\|_{L^p(Q)}.$$

Wir haben

$$\|f\|_{L^p(Q)} = \|v + \bar{f}\|_{L^p(Q)} \leq \|v\|_{L^p(Q)} + |\bar{f}| \leq (1 + \sqrt[p]{2})\|v\|_{L^p(Q)}$$

Nun betrachten wir die Menge

$$G_1 := \{x \in Q | f(x) \geq J_Q(f)\}.$$

Die Bemerkung 10.2 liefert: $|G_1| \geq \frac{|\mathrm{trg}\, f \cap Q|}{4} \geq \frac{2^{-n}}{8}$

$$\Rightarrow C\|v\|^p_{L^p(Q)} \geq \int_Q |f|^p\,dx \geq \int_{G_1} |f|^p\,dx \geq [J_Q(f)]^p \cdot |G_1| \geq 2^{-n-3}[J_Q(f)]^p.$$

Mit anderen Worten, $J_Q(f) \leq C_1\|v\|_{L^p(Q)}$. □

**Lemma 10.2** *Sei* $W \in \mathcal{L}_j, \quad g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_{\geq 0},$
$\frac{2^{-n}}{2}|W| \leq |\operatorname{trg} g \cap W| \leq \frac{1}{2}|W|, \quad \sup\limits_{h,k} \int_W \frac{|g(x+he_k)-g(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K \frac{(2^{-j})^{n-\lambda}}{(j+1)^\vartheta}.$

*Dann gilt* $J_W(g) \leq C \dfrac{2^{(\lambda/p-\alpha)j}}{(j+1)^{\vartheta/p}}.$

**Beweis:** Wir definieren $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ so, dass $W = x_0 + 2^{-j}Q$.
Weiter seien

$$f(x) := g(x_0 + 2^{-j}x), \quad \bar{f} := \int_Q f(x)\,dx \text{ und } v(x) := f(x) - \bar{f}.$$

Wir wissen:

$$\sup_{h_1,k} \int_W \frac{|g(y+h_1 e_k) - g(y)|^p}{h_1^{\alpha p}} dy \leq K \frac{2^{(\lambda-n)j}}{(j+1)^\vartheta}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{h,k} \int_Q \frac{|v(x+he_k) - v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx &= \sup_{h,k} \int_Q \frac{|f(x+he_k) - f(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \\
(y = x_0 + 2^{-j}x) &= \sup_{h,k} \int_W \frac{|g(y+2^{-j}he_k) - g(y)|^p}{h^{\alpha p}} 2^{nj} dy \\
(h = 2^j h_1) &= 2^{(n-\alpha p)j} \sup_{h_1,k} \int_W \frac{|g(y+h_1 e_k) - g(y)|^p}{h_1^{\alpha p}} dy \\
&\leq K \frac{2^{(\lambda-\alpha p)j}}{(j+1)^\vartheta}.
\end{aligned}$$

Aber nun ist

$$\int_Q v(x)\,dx = 0,$$

und für den Raum solcher Funktionen ist $\left( \sup\limits_{h,k} \int_{Q \cap Q - he_k} \frac{|v(x+he_k)-v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \right)^{1/p}$
eine Norm, die zu der Nikolski-Norm $\|v\|_{\mathcal{N}^{\alpha,p}(Q)}$ äquivalent ist. Es ist bekannt, dass $\mathcal{N}^{\alpha,p}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$.
Somit haben wir

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^p(Q)} &\leq C\|v\|_{\mathcal{N}^{\alpha,p}(Q)} \leq C \left( \sup_{h,k} \int_Q \frac{|v(x+he_k) - v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \right)^{1/p} \\
&\leq C \frac{2^{(\lambda/p-\alpha)j}}{(j+1)^{\vartheta/p}}.
\end{aligned}$$

Man kann leicht sehen, dass

$$J_W(g) = J_Q(f) \overset{\text{Lemma 10.1}}{\leq} C\|v\|_{L^p(Q)} \leq C \frac{2^{(\lambda/p-\alpha)j}}{(j+1)^{\vartheta/p}},$$

und Lemma 10.2 ist bewiesen. $\square$

Sei

$$\mathcal{M}_W(v) := \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_W\frac{|v(x+he_k)-v(x)|^p}{h^{\alpha p}}dx. \tag{10.6}$$

Aber $\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon}$, so ist

$$\mathcal{M}_W(v) \le \sup_{h,k}\int_W\frac{|v(x+he_k)-v(x)|^p}{h^{\alpha p}}dx.$$

Wir definieren:

$$K_i := \mathcal{M}_Q(u_i). \tag{10.7}$$

Nach (10.4),

$$u_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad u(x) \le \mu_i, \\ u(x)-\mu_i & \text{für} \quad \mu_i \le u(x) \le \mu_{i+1}, \\ T_i & \text{für} \quad u(x) \ge \mu_{i+1}. \end{cases}$$

Es ist klar, dass $u(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+$. Außerdem gilt, dass

$$\begin{cases} u_i(x+he_k)-u_i(x) \ge 0 \quad \forall\, i \ge 0, \quad \text{wenn} \quad u(x+he_k)-u(x) \ge 0, \\ \text{und} \quad u_i(x+he_k)-u_i(x) \le 0 \quad \forall\, i \ge 0, \quad \text{wenn} \quad u(x+he_k)-u(x) \le 0. \end{cases}$$

Wir sehen, dass $|u(x+he_k)-u(x)| = \sum\limits_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|$.

Eine einfache Rechnung zeigt:

$$|u(x+he_k)-u(x)|^p = \Big|\sum_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|\Big|^p \ge \sum_{i=0}^{\infty}|u_i(x+he_k)-u_i(x)|^p.$$

Wir haben

$$\begin{aligned} K &\ge \mathcal{M}_Q(u) = \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_Q\frac{|u(x+he_k)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}}dx \\ &\ge \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_Q\frac{|u_i(x+he_k)-u_i(x)|^p}{h^{\alpha p}}dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\mathcal{M}_Q(u_i) = \sum_{i=0}^{\infty}K_i. \end{aligned}$$

Also ist

$$K \ge \sum_{i=0}^{\infty}K_i. \tag{10.8}$$

**Lemma 10.3** *Sei* $W \in \mathcal{L}_j$, $\frac{2^{-n}}{2}|W| \le |W \cap \operatorname{trg} g| \le \frac{1}{2}|W|$.
*Dann gilt* $[J_W(g)]^p \le C \cdot 2^{(n-\alpha p)j}(j+1)^{1+\varepsilon}\mathcal{M}_W(g)$.

**Beweis:** Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ so gewählt, dass $W = x_0 + 2^{-j}Q$.
Weiter seien

$$f(x) := g(x_0 + 2^{-j}x), \quad \bar{f} := \int_Q f(x)\,dx \ \text{ und } \ v(x) := f(x) - \bar{f}$$

wie zuvor definiert. Sei $h \in (0; 1/e]$. Dann schätzen wir ab:

$$|\ln(2^{-j}h)| = j + |\ln h| \overset{|\ln h| \geqslant 1}{\leq} (j+1)|\ln h|$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_W(g) &= \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh_1}{h_1|\ln h_1|^{1+\varepsilon}}\int_W \frac{|g(x+h_1e_k)-g(x)|^p}{h_1^{\alpha p}}dx \\
\begin{pmatrix} x = x_0 + 2^{-j}y, \\ h_1 = 2^{-j}h \end{pmatrix} &= \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2^j/e}\frac{dh}{h|\ln(2^{-j}h)|^{1+\varepsilon}}\int_Q \frac{|f(y+he_k)-f(y)|^p}{h^{\alpha p}}2^{(\alpha p-n)j}dy \\
&\geq \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln(2^{-j}h)|^{1+\varepsilon}}\int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p}}2^{(\alpha p-n)j}dy \\
&\overset{\text{s.o.}}{\geq} \frac{2^{(\alpha p-n)j}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{1/e}\frac{dh}{h|\ln h|^{1+\varepsilon}}\int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p}}dy \\
&= \frac{2^{(\alpha p-n)j}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\mathcal{M}_Q(v).
\end{aligned}$$

Zeige:

$$\mathcal{M}_Q(v) \geq C_\varepsilon \sup_{h\in(0;1/e]}\int_{Q\cap Q-he_k}\frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p/2}}dy.$$

Seien $t \in (0; 1/e]$, $Q_{t,k} := Q \cap Q - te_k$. Wir haben:

$$\mathcal{M}_Q(v) \geq C\int_0^{1/e}\frac{dh}{h^{1-\alpha p/2}}\int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p}}dy.$$

Und $\forall\, h \in (0; t)$ :

$$\begin{aligned}
\int_{Q_{t,k}}\frac{|v(y+te_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy &\leq C\int_{Q_{t,k}}\frac{|v(y+te_k)-v(y+he_k)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy \\
&\quad + C\int_{Q_{t,k}}\frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy \\
(y_1 = y + he_k) &\leq C\int_Q \frac{|v(y_1+(t-h)e_k)-v(y_1)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy_1 \\
&\quad + C\int_{Q_{t,k}}\frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $\forall\, t \in (0;1/e]$ :

$$\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}} dy \leq$$
$$\leq \frac{C}{t}\int_0^t dh \int_Q \frac{|v(y+(t-h)e_k)-v(y)|^p + |v(y+he_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}} dy$$
$$\leq 2C\int_0^t dh \int_Q \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{1+\alpha p/2}} dy$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sup_{t\leqslant 1/e}\int_{Q_{t,k}} \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}} dy \;&\leq\; 2C\int_0^{1/e}\frac{dh}{h^{1-\alpha p/2}}\int_Q \frac{|v(y+te_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p}} dy\\ &\leq\; C_1\mathcal{M}_Q(v).\end{aligned}$$

Aber

$$\int_Q v(x)dx = 0.$$

Für den Raum solcher Funktionen ist $\left(\sup\limits_k \sup\limits_{t\leqslant 1/e}\int_{Q_{t,k}}\frac{|v(y+te_k)-v(y)|^p}{t^{\alpha p/2}}dy\right)^{1/p}$ eine zur $\|v\|_{\mathcal{N}^{\alpha/2,p}(Q)}$ äquivalente Norm. Schliesslich ist die Einbettung $\mathcal{N}^{\alpha/2,p}(Q) \hookrightarrow L^p(Q)$ bekannt.

Wir sammeln alle Resultate:

$$\mathcal{M}_W(g) \geq \frac{2^{(\alpha p-n)j}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}\mathcal{M}_Q(v), \quad \text{und}$$

$$[\mathcal{M}_Q(v)]^{1/p} \geq C\|v\|_{\mathcal{N}^{\alpha/2,p}(Q)} \geq C\|v\|_{L^p(Q)} \overset{\text{Lemma 10.1}}{\geq} CJ_Q(f) = CJ_W(g).$$

Wir haben

$$[J_W(g)]^p \leq C_1\cdot 2^{(n-\alpha p)j}(j+1)^{(1+\varepsilon)}\mathcal{M}_W(g).$$

Der Beweis von Lemma 10.3 ist damit abgeschlossen. □

Wegen der Definition von $\mu_i$ und $u_i$ (siehe (10.3),(10.4) ) gilt

$$|\mathrm{trg}\, u_i| \leq 2^{-i-1}.$$

Deshalb folgt für die Würfelmenge $\Lambda_i$, die $int(\mathrm{trg}\, u_i)$ überdeckt (s. (10.5) ):

$$\begin{aligned}&\forall\, W\in\Lambda_i:\; 2^{-i-1} \geq |\mathrm{trg}\, u_i| \geq |\mathrm{trg}\, u_i \cap W| \geq 2^{-n-1}|W|\\ &\Rightarrow |W| \leq 2^{n-i}.\end{aligned}$$

Andererseits ist $|W| \leq 1$.

Die Kantenlänge von $W$ ist $\sqrt[n]{|W|} \leq \min\{1, 2^{1-i/n}\}$, und wir haben:

$$\text{Aus} \quad \text{“}W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j\text{”} \quad \text{folgt} \quad j \geq \max\{0; \frac{i}{n} - 1\}.$$

Also

$$\forall\, W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j : \quad j + 1 \geq \max\{1, i/n\} \geq c(i+1). \tag{10.9}$$

Weiter wollen wir solche $\mathbf{R}_i$ betrachten, die die Gleichung

$$\frac{K_i \mathbf{R}_i^{\alpha p} (i+1)^{1+\varepsilon}}{2^{-i}} = K \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}} \tag{10.10}$$

erfüllen. Daher

$$\mathbf{R}_i = \left( \frac{K}{K_i} \frac{2^{-i}}{(i+1)^{\vartheta + 1 + \varepsilon}} \right)^{1/\lambda}. \tag{10.11}$$

Sei jetzt

$$W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j, \quad 2^{-j} \geq \mathbf{R}_i. \tag{10.12}$$

Dann rechnen wir nach, dass

$$2^{-(j+1)} \geq \frac{\mathbf{R}_i}{2} \overset{\frac{K}{K_i} \geqslant 1}{\geq} \frac{1}{2} \left( \frac{2^{-i}}{(i+1)^{\vartheta + 1 + \varepsilon}} \right)^{1/\lambda} \geq 2^{-C(i+1)} \quad \forall\, i \geq 0.$$

Folglich gilt

$$j + 1 \leq C(i+1). \tag{10.13}$$

Wir sehen:

$$(10.9), (10.13) \Rightarrow c(i+1) \leq j + 1 \leq C(i+1).$$

Unter der Bedingung (10.12) folgt daraus

$$[J_W(u_i)]^p \overset{\text{Lemma10.2}}{\leq} C \frac{(2^{-j})^{\alpha p - \lambda}}{(j+1)^{\vartheta}} \overset{\substack{2^{-j} \geqslant \mathbf{R}_i, \\ (j+1)^{\vartheta} \geqslant c'(i+1)^{\vartheta}}}{\leq} C_1 \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}}, \tag{10.14}$$

wobei wir $\alpha p - \lambda \leq 0$ benutzt haben.

Nun wollen wir beweisen, dass $T_i^p \leq \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}}$. Hierbei hängt die Konstante $\bar{K}$ von $K$, aber nicht von der Funktion $u$ ab.

| Annahme: $T_i^p > \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}}$ für ein $i \geq 0$.<br>(Wir werden $\bar{K}$ im Folgenden festlegen). |
|---|

Wir wählen $\bar{K}$ so, dass $\bar{K} \geq C_1$ mit $C_1$ aus (10.14).
Dann gilt für jedes $W \in \Lambda_i \cap \mathcal{L}_j$ mit $2^{-j} \geq \mathbf{R}_i$ :

$$T_i^p > \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}} \geq C_1 \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^{\vartheta}} \overset{(10.14)}{\geq} [J_W(u_i)]^p.$$

Wir haben

$$T_i > J_W(u_i) \quad \text{für jedes } W \in \Lambda_i \text{ mit Kantenlänge} \geq \mathbf{R}_i. \tag{10.15}$$

$\Lambda_i$ kann man als Vereinigung von $\begin{array}{l} \Lambda_i' := \{W \in \Lambda_i \mid J_W(u_i) < T_i\} \\ \Lambda_i'' := \{W \in \Lambda_i \mid J_W(u_i) \geq T_i\} \end{array}$ $\begin{array}{l} \text{und} \\ \text{darstellen.} \end{array}$

Nach Definition von $\Lambda_i'$: $\quad W \in \Lambda_i' \quad \Rightarrow T_i > J_W(u_i)$

$\Rightarrow |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W| \leq |\,(u_i(\cdot) > J_W(u_i)\,) \cap W| \overset{\text{Bemerkung 10.2}}{\leq} \frac{|\mathrm{trg}\, u_i \cap W|}{4}.$

Dann gilt

$$\sum_{W \in \Lambda_i'} |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W\,| \overset{\text{s.o.}}{\leq} \frac{|\mathrm{trg}\, u_i|}{4} \leq \frac{2^{-i}}{8}$$

und

$$\sum_{W \in \Lambda_i} |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W\,| \overset{(+)}{=} |\,(u_i \geq T_i)\,| = |\,(u \geq \mu_{i+1})\,| \overset{(10.3)}{\geq} \frac{2^{-i}}{4}.$$

In (+) benutzen wir (10.2), und zwar $\quad$ (10.2) $\quad \Rightarrow$ [$u$ ist stetig] $\quad \Rightarrow$ [$u_i$ ist stetig] $\quad \Rightarrow \Big[\bigcup_{W \in \Lambda_i} W \supset int(\mathrm{trg}\, u_i) \supset \{x \in Q - \partial Q \mid u_i(x) > 0\}\Big].$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} \sum_{W \in \Lambda_i''} |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W| \quad &= \quad \sum_{W \in \Lambda_i} |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W| \\ &\quad - \sum_{W \in \Lambda_i'} |\,(u_i(\cdot) \geq T_i) \cap W| \geq \frac{2^{-i}}{8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{W \in \Lambda_i''} |\mathrm{trg}\, u_i \cap W| \geq \frac{2^{-i}}{8}.$$

Schließlich ist

$$\sum_{W \in \Lambda_i''} |W| \overset{(10.5)}{\geq} 2 \sum_{W \in \Lambda_i''} |\mathrm{trg}\, u_i \cap W| \geq \frac{2^{-i}}{4}. \tag{10.16}$$

Wir bezeichnen die Kantenlänge von $W$ durch $R(W)$.
Dann hat man die folgende Implikation:

$$[\, W \in \Lambda_i'' \text{ und } R(W) \geq \mathbf{R}_i\,] \overset{(10.15)}{\Longrightarrow} [\, T_i > J_W(u_i)\,] \Rightarrow W \notin \Lambda_i''.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass

$$W \in \Lambda_i'' \;\Rightarrow\; R(W) < \mathbf{R}_i.$$

Sei $\tau := 1+\varepsilon$. Die Funktion $\phi(t) := t\Big[\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big)\Big]^\tau$ wächst auf $(0;+\infty)$ für eine geeignete Konstante $c_4 > 1$, denn

$$\phi'(t) = \Big[\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big)\Big]^{\tau-1}\left(\ln\Big(\frac{1}{t}+c_4\Big) - \frac{\tau}{1+c_4 t}\right) > 0 \quad \forall\, t > 0,$$

wenn $\ln c_4 > \tau$.

Die Funktion $\psi(t) := t\Big[\log_2\Big(\frac{2}{t}+c_4\Big)\Big]^\tau = c'\cdot\phi(t/2)$ wächst auch.

Sei $W \in \Lambda_i'' \cap \mathcal{L}_j$. Wir wissen, dass $2^{-j} = R(W) < \mathbf{R}_i$. Deshalb gilt

$$2^{-j}(j+1)^\tau \le \psi(2^{-j}) < \psi(\mathbf{R}_i) = \mathbf{R}_i \overbrace{\Big[\log_2\Big(\frac{2}{\mathbf{R}_i}+c_4\Big)\Big]^\tau}^{\leqslant C(i+1)^\tau\ (*)} \le C\mathbf{R}_i(i+1)^\tau,$$

hierbei folgt $(*)$ aus:

$$\frac{2}{\mathbf{R}_i} \overset{(10.11)}{=} 2\left(\frac{K_i}{K}\frac{(i+1)^{\vartheta+1+\varepsilon}}{2^{-i}}\right)^{1/\lambda} \overset{\frac{K_i}{K}\leqslant 1}{\le} C\cdot 2^{c\,i}, \quad \tau > 0.$$

Nun benutzen wir die Inklusion

$$W \in \Lambda_i'' \cap \mathcal{L}_j \quad \Rightarrow \Big[\,|W| = 2^{-nj} \quad \text{und} \quad J_W(u_i) \ge T_i\Big].$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_W(u_i) &\overset{\text{Lemma 10.3}}{\ge} C\frac{(2^{-j})^{n-\alpha p}}{(j+1)^{1+\varepsilon}}[J_W(u_i)]^p \\ &\ge C\frac{|W|}{2^{-\alpha p j}(j+1)^{1+\varepsilon}}T_i^p \overset{2^{-j}<\mathbf{R}_i}{\ge} C\frac{|W|}{\mathbf{R}_i^{\alpha p}(i+1)^{1+\varepsilon}}T_i^p. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} K_i &\overset{(10.7)}{=} \mathcal{M}_Q(u_i) \overset{(10.6)}{\ge} \sum_{W\in\Lambda_i''}\mathcal{M}_W(u_i) \\ &\ge C\sum_{W\in\Lambda_i''}|W|\left(\frac{T_i^p}{(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i^{\alpha p}}\right) \overset{(10.16)}{\ge} \frac{C}{4}\left(2^{-i}\frac{T_i^p}{(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i^{\alpha p}}\right). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass

$$T_i^p \le C_2\frac{K_i(i+1)^{1+\varepsilon}\mathbf{R}_i^{\alpha p}}{2^{-i}} \overset{(10.10)}{=} C_2 K\frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p-\lambda}}{(i+1)^\vartheta}.$$

Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, wenn wir die Konstante $\bar{K} \ge C_2K$ gewählt haben.

Also war unsere Annahme falsch, und

$$T_i^p \leq \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^\vartheta}.$$

Hierbei ist

$$\mathbf{R}_i \overset{(10.11)}{=} \left( \frac{K}{K_i} \frac{2^{-i}}{(i+1)^{\vartheta+1+\varepsilon}} \right)^{1/\lambda}.$$

Man setze diesen Ausdruck für $\mathbf{R}_i$ in die obige Abschätzung für $T_i^p$ und erhalte

$$T_i^p \leq \bar{K} \frac{\mathbf{R}_i^{\alpha p - \lambda}}{(i+1)^\vartheta} = \bar{K} \frac{\left( \frac{K_i}{K} \frac{2^i}{(i+1)^{-\vartheta-1-\varepsilon}} \right)^{\frac{\lambda - \alpha p}{\lambda}}}{(i+1)^\vartheta},$$

deshalb

$$T_i \leq C \frac{\left( \frac{K_i}{K} \cdot 2^i \right)^{\frac{\lambda-\alpha p}{p\lambda}}}{(i+1)^{\frac{\vartheta\alpha}{\lambda} - (1+\varepsilon)\frac{\lambda-\alpha p}{p\lambda}}} \quad \forall\, i \geq 0.$$

Sei jetzt

$$q := \frac{p\lambda}{\lambda - \alpha p} \quad \left( \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda} \right), \quad \kappa := \frac{\vartheta\alpha}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}.$$

Dann haben wir

$$T_i \leq C \frac{\left( \frac{K_i}{K} \cdot 2^i \right)^{1/q}}{(i+1)^\kappa} \leq C \frac{\left( \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) 2^i \right)^{1/q}}{(i+1)^\kappa} \quad \forall\, i \geq 0. \tag{10.17}$$

Für weitere Rechnungen ist es wichtig, dass $1 < q < \infty$.
(Diese Ungleichungen folgen aus $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda}$ und $\lambda > \alpha p$).

Seien

$$t_i := \frac{2^{i/q}}{(i+1)^\kappa} \quad \forall\, i \geq 0, \qquad \Delta_j := \sum_{i=0}^{j} t_i \quad \forall\, j \geq 0. \tag{10.18}$$

Dann ist

$$\mu_j = \sum_{i=0}^{j-1} T_i \overset{(10.17)}{\leq} C \sum_{i=0}^{j-1} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right)^{1/q} t_i \quad \forall\, j \geq 0. \tag{10.19}$$

Wir definieren die Funktion $\omega : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\omega(t) := t^q [\log(t + c_4)]^{q\kappa}, \tag{10.20}$$

wobei man die Konstante $c_4 \geq 1$ so wählen muss, dass die Funktion $\omega$ wachsend ist (nicht vergessen: $\kappa$ kann negativ sein!)

Für den Beweis von Satz 10.1 genügt es zu zeigen, dass $\int_Q \omega(u)\,dx \le C^*$ für eine Konstante $C^*$.

Wir wissen, dass $t_i = \frac{2^{i/q}}{(i+1)^\kappa}$, $0 \le \frac{K_i}{K} \le 1$. Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\frac{2^{\frac{j}{2q}}}{(j+1)^\kappa} \le \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i \le (j+1)\cdot 2^{1/q} \cdot \sup_{0\leqslant i\leqslant j} t_i.$$

Deswegen gilt für $c_4 \ge 1$:

$$A(j+1) \le \log\left(C \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i + c_4\right) \le B(j+1) \quad \forall\, j \ge 0 \tag{10.21}$$

für geeignete positive Konstanten $A > 0$, $B > 0$.

Für $1 < q < \infty$ gilt eine diskrete Analogie der Hölder-Ungleichung

$$\forall\,(a_i)_{i=0,1,2,\dots}: \quad \left(\sum_{i=0}^{j} |a_i|^{\frac{1}{q}} \cdot t_i^{\frac{q-1}{q}}\right)^q \le \sum_{i=0}^{j} |a_i| \cdot \left(\sum_{m=0}^{j} t_m\right)^{q-1} \overset{(10.18)}{=} \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} |a_i|.$$

Mit $a_i := \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right) t_i$ haben wir:

$$\left(\sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i\right)^q \le \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right) t_i. \tag{10.22}$$

Sei $D := \max\{A^{q\kappa}, B^{q\kappa}\}$ (siehe (10.21) ). Da die Funktion $\omega$ monoton wächst, schätzen wir $\omega(\mu_{j+1})$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\omega(\mu_{j+1}) \quad &\overset{(10.19)}{\le} \quad \omega\left(C \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i\right) \\
&\overset{(10.20)}{=} \quad \left(C \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i\right)^q \\
&\qquad \cdot \left(\log\left(C \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right)^{1/q} t_i + c_4\right)\right)^{q\kappa} \\
&\overset{(10.22),(10.21)}{\le} \quad D C^q \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right) t_i (j+1)^{q\kappa} \quad \forall\, j \ge 0.
\end{aligned}$$

Kurz gesagt, für geeignete Konstante $\mathbf{K}$ gilt

$$\omega(\mu_{j+1}) \le \mathbf{K}\,\Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left(\frac{K_i}{K} + 2^{-i/2}\right) t_i (j+1)^{q\kappa} \quad \forall\, j \ge 0. \tag{10.23}$$

Wir betrachten die Mengen

$$A_i := \{x \in Q \mid \mu_i < u \le \mu_{i+1}\}.$$

Aus Definition von $\mu_i$ (siehe (10.3) ) fogt

$$|A_i| \leq |\{x \in Q | u(x) > \mu_i\}| \overset{(10.3)}{\leq} 2^{-i-1}.$$

Die Definition von $A_i$ zeigt auch, dass $\forall\, x \in A_i : \; u(x) \leq \mu_{i+1}$.
So gilt

$$\begin{aligned}
&\int_Q \omega(u(x))\, dx = \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{A_j} \omega(u(x))\, dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A_j| \cdot \omega(\mu_{j+1}) \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \omega(\mu_{j+1}) \overset{(10.23)}{\leq} \frac{\overbrace{\mathbf{K}}^{=:C}}{2} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \Delta_j^{q-1} \sum_{i=0}^{j} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \\
&= C \sum_{0 \leq i \leq j < \infty} \sum 2^{-j} \Delta_j^{q-1} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) t_i (j+1)^{q\kappa} \\
&= C \sum_{i=0}^{\infty} \left( \frac{K_i}{K} + 2^{-i/2} \right) \sum_{j=i}^{\infty} \left( \frac{\Delta_j (j+1)^{\kappa}}{2^{j/q}} \right)^{q-1} \cdot \frac{t_i}{2^{i/q}} \cdot \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}} \\
&\leq \underbrace{C \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{K_m}{K} + 2^{-m/2} \right)}_{\leq C\left(1+\sum_{m\geqslant 0} 2^{-m/2}\right) = C_1} \Bigg( \underbrace{\sup_{\ell \geqslant 0} \frac{\Delta_\ell (\ell+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}}}_{(I)} \Bigg)^{q-1} \underbrace{\sup_{i \geqslant 0} \frac{t_i}{2^{i/q}} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}}}_{(II)} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq C_1 \cdot (I)^{q-1} \cdot (II).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_Q |u|^q [\log(|u| + c_4)]^{q\kappa} dx \leq C_1 \cdot (I)^{q-1} \cdot (II)$$
$$\text{mit} \quad \tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{\lambda}, \quad \kappa = \tfrac{\vartheta\alpha}{\lambda} - \tfrac{1+\varepsilon}{q}.$$

Nun müssen wir nur noch beweisen, dass $(I)$ und $(II)$ beschränkt sind.

Zeige: $(I) < \infty$. Wir wissen:

$$\Delta_j \overset{(10.18)}{=} \sum_{i=0}^{j} t_i, \quad t_i = \frac{2^{i/q}}{(i+1)^{\kappa}}.$$

Man wähle $i_0 \in \mathbb{N}$ und $d \in (0;1)$ so, dass

$$2^{-1/q} \left( \frac{i+2}{i+1} \right)^{\kappa} \leq 1 - d \quad \forall\, i \geq i_0.$$

Dann gilt für $i \geq i_0$ :

$$\frac{t_i}{t_{i+1}} = 2^{-1/q} \left(\frac{i+2}{i+1}\right)^{\kappa} \leq 1-d.$$

Folglich ist $\quad \forall\, m \geq i \geq i_0 : \quad t_i \leq t_m \cdot (1-d)^{m-i}$. Wir haben

$$\forall\, m \geq i_0 :\ \Delta_m = \underbrace{\sum_{i=0}^{i_0-1} t_i}_{=:\, c} + \sum_{i=i_0}^{m} t_i \leq c + t_m \sum_{i=i_0}^{m} (1-d)^{m-i} \leq c + \frac{t_m}{d}.$$

Dann ist $\limsup\limits_{m\to\infty} \frac{\Delta_m}{t_m} \leq \lim\limits_{m\to\infty} \left(\frac{c}{t_m} + \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d} < \infty$ und somit

$$(I) = \sup_{m \geqslant 0} \frac{\Delta_m}{t_m} < \infty.$$

Zeige: $(II) < \infty$.

$(II) = \sup\limits_{i\geqslant 0} \frac{t_i}{2^{i/q}} \sum\limits_{j=i}^{\infty} \frac{(j+1)^{\kappa}}{2^{(j-i)/q}} \overset{\ell=j-i}{=} \sup\limits_{i\geqslant 0} \frac{1}{(i+1)^{\kappa}} \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+i+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}} = \sup\limits_{i\geqslant 0} \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\frac{\ell}{i+1}+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}}.$

Es ist klar, dass $(II) = \begin{cases} \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\ell+1)^{\kappa}}{2^{\ell/q}} < \infty & \text{für } \kappa \geq 0, \\ \sum\limits_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell/q}} < \infty & \text{sonst.} \end{cases}$

Der Satz 10.1 ist damit bewiesen. $\square$

## 10.2 Verallgemeinerung auf alle $u \in L^p(\Omega)$ (Satz 10.2)

Wir verallgemeinern nun Satz 10.1 auf beschränktes Lipschitzgebiet. Wie zu Beginn des Kapitels sei

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n \geq 0\}, \quad Q = [0;1]^n,$$
$$p \in [1, \infty), \quad \vartheta \in (-\infty; +\infty), \quad \alpha \in (0;1) \text{ und } p\alpha < \lambda \leq n.$$

Außerdem wähle man $q$ und $\kappa$ so, dass $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda}, \quad \kappa = \frac{\alpha\vartheta}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}$.

Wir wiederholen an dieser Stelle die Formulierung des Satzes 10.1, weil wir daraus ein zu dem Satz ähnliches Resultat nur für andere Gebiete (für beliebige beschränkte Lipschitzgebiete) folgern möchten.
Zuerst seien die folgenden Funktionale eingeführt:

$$S_a(u) := \inf\left\{ K > 0 \,\middle|\, \sup_{h>0,k} \int_{Q \cap B_R(x_0)} \frac{|u(x+he_k) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall\, R \leq \tfrac{1}{2},\, x_0 \in \mathbb{R}^n \right\}$$

und

$$S_b(u) := \int_Q |u|^q [\log(|u| + 2)]^{q\kappa} dx.$$

Für die Beschreibung der Menge $\mathcal{B}$ verweisen wir auf die Definition 10.1.
**Satz 10.1**: $\forall\, K > 0 \;\exists\, K_\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass die Bediengung $[S_a(u) \leq K]$

$$[\, S_b(u) \leq K_\varepsilon \,] \text{ für } u \in \mathcal{B}$$

impliziert.

Wir zeigen nun die folgende Behauptung:

**Satz 10.2** *Sei $\Omega$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ und $\Omega_{\vec{h}} = \Omega \cap (\Omega - \vec{h})$, $q$ und $\kappa$ - wie oben. In Analogie zu den oberen Überlegungen führen wir zwei Funktionale*

$$S^*_a(u) := \inf\left\{ K > 0 \,\middle|\, \begin{array}{l} \sup_{\vec{h}\neq 0} \int_{\Omega_{\vec{h}} \cap B_R(x_0)} \frac{|u(x+\vec{h}) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall\, R \leq \frac{1}{2},\, x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \quad \textit{und} \quad \int_{\Omega \cap B_R(x_0)} |u(x)|^p dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^\vartheta} \quad \forall\, R \leq \frac{1}{2},\, x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

*und*

$$S^*_b(u) := \int_\Omega |u|^q [\log(|u| + 2)]^{q\kappa} dx$$

*ein.*
*Dann existiert für jedes $K > 0$ ein $K_{\varepsilon,\Omega} > 0$, so dass aus $S^*_a(u) \leq K$*

$$S^*_b(u) \leq K_{\varepsilon,\Omega} \quad \textit{für } u \in L^p(\Omega)$$

*folgt.*

**Beweis:** Sei $U_\delta(z) := int(B_\delta(z))$. Außerdem setzen wir voraus, dass $u \geq 0$ (s. Bemerkung 10.1). Zu zeigen ist:

*Für jedes $z \in \overline{\Omega}$ existiert eine Umgebung $U_\delta(z)$ und $K_1(z,K) > 0$ ($K_1$ hängt von $U_\delta(z)$ und $K$ ab, jedoch nicht von der Funktion $u$), so dass die untengenannten Implikationen $(A)$ und $(B)$ gelten:*

$$[\, S_a^*(u) \le K\,] \overset{(A)}{\Rightarrow} \Big[\forall\, z \in \overline{\Omega}\ \exists\, \delta > 0:\ S_b^*\Big(u(\cdot)\chi_{U_\delta(z)}(\cdot)\Big) \le K_1(z,K)\Big] \overset{(B)}{\Rightarrow} [S_b^*(u) \le K_{\varepsilon,\Omega}],$$

hier ist $\chi_G$ die charakteristische Funktion vom Gebiet $G$.
$(B)$ folgt leicht aus dem Fakt, dass jede offene Überdeckung von $\overline{\Omega}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Nun möchten wir die Implikation $(A)$ beweisen.
Dazu sei die Funktion

$$\zeta \in C_0^1(\mathbb{R}^n;[0;1]) \text{ mit } \zeta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \le 1, \\ 0 & \text{für } |x| \ge 2 \end{cases}$$

eingeführt.
Wir definieren

$$\zeta_{r,x_0}(x) := \zeta\left(\frac{x - x_0}{r}\right).$$

Man kann leicht sehen, dass für $v(x) := u(x)\zeta_{r,x_0}(x)$ gilt

$$S_a^*(v) \le C_r \cdot S_a^*(u)$$

für eine Konstante $C_r$, die nur von $r$ abhängt.

Sei $z \in \overline{\Omega}$. Man unterscheide zwei Fälle $z \in int(\Omega)$ und $z \in \partial\Omega$.
Für $z \in int(\Omega)$, wählen wir $\delta$ so, dass

$$B_{2\delta}(z) \subset \Omega, \quad \delta \le 1/4, \quad |B_{2\delta}| \le 1/2, \quad v(x) = u(x)\zeta_{\delta,z}(x).$$

Die Funktion $v$ kann man als Funktion von der Klasse $\mathcal{B}$ betrachten. [1] Deshalb gilt die folgende Implikationskette:

$$S_a^*(u) \le K \Rightarrow [S_a(v) \le C_\delta S_a^*(u) \le C_\delta K]$$
$$\overset{\text{Satz 10.1}}{\Rightarrow} \Big[S_b^*\Big(u(\cdot)\chi_{U_\delta(z)}(\cdot)\Big) \le S_b(v) \le K_1(\delta,K)\Big].$$

Wir wenden uns dem Fall $z \in \partial\Omega$ zu.
Wenn $\delta > 0$ genügend klein ist, dann existiert eine Orthonormalbasis $\{e_1,\dots,e_{n-1},\nu\}$, $V := \mathrm{lin}\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ und eine Lipschitz-Funktion $\psi: V \to \mathbb{R}$, so dass für $x = (x', x_n) = x' + x_n\nu \in B_{2\delta}(z)$, $x' \in V$, $x_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \in \overline{\Omega} \Leftrightarrow x_n \ge \psi(x'). \tag{10.24}$$

Außerdem setzen wir voraus, dass

$$\delta \le 1/4, \quad |B_{2\delta}| \le 1/2 \text{ und } z = \{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2},0\}.$$

[1] zur Erinnerung: $u \ge 0$. Das erreicht man durch eventuelles Verschieben der Standardbasis.

Man weiß, dass $S_a^*(u \cdot \zeta_{\delta,z}) \leq C_\delta S_a^*(u) \leq K_1$ (die Abhängigkeit $K_1$ von $\delta$ wollen wir unterdrücken) und möchte $S_b^*(u \cdot \zeta_{\delta,z})$ berechnen.
Dazu sei $u(x)\zeta_{\delta,z}(x)$ wieder durch $u(x)$ bezeichnet.

Wir müssen unsere Behauptung für dieses modifizierte $u$ beweisen.
Seien $V$ und $\psi$ wie zuvor definiert.
Jedes $x \in \mathbb{R}^n$ schreibe man als $x = (x', x_n) = x' + x_n\nu, \quad x' \in V, \quad x_n \in \mathbb{R}$.
Wir führen noch zwei weitere Bezeichnungen $G$ und $Q^*$ ein:

$$\begin{aligned} G &:= \{(x', x_n) \,|\, x' \in V,\ x_n \geq \psi(x')\}, \\ Q^* &:= \{x_1e_1 + \ldots + x_{n-1}e_{n-1} \,|\, x_j \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

$u : G \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion mit beschränktem Träger, für den

$$\operatorname{trg}(u) \subset \left\{(x', x_n)\middle| x' \in Q^*,\ x_n \in [\psi(x'); \psi(x') + 1]\right\} \text{ und } |\operatorname{trg} u| \leq 1/2$$

gilt (verkleinere $\delta > 0$, falls nötig).
Schließlich sei

$$\Psi(x', x_n) := (x', x_n + \psi(x')).$$

$\Psi$ ist eine Lipschitz-Funktion.

Wenn $v : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ und $v(x) = u(\Psi(x))$, ist es klar, dass $v \in \mathcal{B}$ .
Wir erklären unsere Strategie:
Zuerst beweisen wir, dass $S_a(v) \leq C \cdot S_a^*(u)$ ($C$ unabhängig von $u$).
Wir wissen:

$$S_a(v) \leq C \cdot S_a^*(u) \leq CK_1.$$

Und $S_a(v) \leq K_1 \overset{\text{Satz10.1}}{\Longrightarrow} S_b(v) \leq K_\varepsilon$, was $S_b^*(u) = S_b(v) \leq K_\varepsilon$ nach sich zieht.
Genau das wollen wir zeigen.

Für den Beweis unseres Satzes brauchen wir also nur $S_a(v) \leq C \cdot S_a^*(u)$ zu zeigen. Mit anderen Worten: es muss bewiesen werden, dass

$$\sup_{h,x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+} \frac{|v(x+he_k) - v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq C \sup_{h,i,y} \int_{B_R(y)\cap G_{h,i}} \frac{|u(x+he_i) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx$$

$\forall\, R \in (0; 1/2]$ und $\forall\, k = 1, \ldots, n$ gilt, wobei $G_{h,k} := G \cap (G - he_k)$, $h > 0$.

Man betrachte zuerst den einfacheren Fall $k = n$. Dank $\left|\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right| = 1$ folgt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} &\sup_{h,x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+} \frac{|v(x+he_n) - v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx = \\ &\quad = \sup_{h,x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+\cap(\mathbb{R}^n_+-he_n)} \frac{|u(\Psi(x)+he_n) - u(\Psi(x))|^p}{h^{\alpha p}} dx \\ &\quad = \sup_{h,x_0} \int_{\Psi(B_R(x_0))\cap G_{h,n}} \frac{|u(x+he_n) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx. \end{aligned}$$

Wir haben $R^n_+ - he_n \supset R^n_+$ verwendet.

Weil die Funktion $\Psi$ eine Lipschitz-Funktion ist, können wir $\Psi(B_R(x_0))$ mit $N$ Kugeln $B_R(y_1), \ldots, B_R(y_N)$ überdecken, dabei hängt $N$ nur von der Funktion $\Psi$ ab. Also gilt

$$\sup_{h,x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+} \frac{|v(x+he_n)-v(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq N \sup_{h,i,y} \int_{B_R(y)\cap G_{h,i}} \frac{|u(x+he_i)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx.$$

Sei nun $k \neq n$. Wir definieren

$$M := 2 \sup_{x,y\in V} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|},$$

um die Differenzenquotienten von $\psi$ wie folgt abzuschätzen:

$$|\psi(y+he_k)-\psi(y)| \leq \frac{Mh}{2}.$$

Nach wie vor wird jedes $x \in \mathbb{R}^n$ als $x = (x', x_n) = x' + x_n\nu, \quad x' \in V, \quad x_n \in \mathbb{R}$ geschrieben. Zur Abkürzung unserer Formeln führen wir noch einige weitere Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
I_1(x) &:= x + \psi(x')e_n, \\
I_2(x) &:= x + (Mh + \psi(x'))e_n, \\
I_3(x) &:= x + he_k + (Mh + \psi(x'))e_n, \\
I_4(x) &:= x + he_k + \psi(x' + he_k)e_n,
\end{aligned}$$

für ein festes $h$.
Außerdem sei $B'_R(x_0) := B_R(x_0) \cap R^n_+, \quad T_R(x_0) := \Psi(B_R(x_0)) \cap G.$
Wir haben

$$\begin{aligned}
\int_{B'_R(x_0)} \frac{|v(y+he_k)-v(y)|^p}{h^{\alpha p}} dy &= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(\Psi(y+he_k))-u(\Psi(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \\
&= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_4(y))-u(I_1(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy.
\end{aligned}$$

Mit einer Nulladdition ist der letzte Ausdruck $\leq C(J_1 + J_2 + J_3)$, wobei

$$\begin{aligned}
J_1 &:= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_4(y))-u(I_3(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \\
J_2 &:= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_3(y))-u(I_2(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \\
J_3 &:= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_2(y))-u(I_1(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy.
\end{aligned}$$

Zuerst sei die Summe $J_2 + J_3$ behandelt: Die Substitution $x := I_2(y)$ bzw. $x := I_1(y)$ liefert

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_2(y) + he_k) - u(I_2(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \\ &= \int_{T_R(x_0)+Mhe_n} \frac{|u(x + he_k) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \quad \text{bzw.} \\ J_3 &= \int_{B'_R(x_0)} \frac{|u(I_1(y) + Mhe_n) - u(I_1(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \\ &= M^{\alpha p} \int_{T_R(x_0)} \frac{|u(x + Mhe_n) - u(x)|^p}{(Mh)^{\alpha p}} dx. \end{aligned}$$

Nach dem schon angewendeten Schema wird $T_R(x_0)$ mit $N$ Kugeln $B_R(y_1), \ldots, B_R(y_N)$ überdeckt ( $N = N(\Psi)$ ), man sieht, dass

$$J_2 + J_3 \leq NC \sup_{h,i,y} \int_{B_R(y)\cap G_{h,i}} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx.$$

Dann wird der schwierigere Term $J_1$ abgeschätzt.

$$J_1 = \int_{B'_R(x_0)} \tfrac{|u(I_3(y))-u(I_4(y))|^p}{h^{\alpha p}} dy \overset{x=\Psi(y+he_k)}{=} \int_{T_R(x_0+he_k)} \tfrac{|u(x+(Mh+\psi(x'-he_k)-\psi(x'))e_n)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx,$$

folglich ist

$$J_1 = \int_{T_R(x_0+he_k)} \frac{|u(x + A(x')e_n) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx, \tag{10.25}$$

mit $A : V \to \mathbb{R}, \quad A(x') = Mh + \psi(x' - he_k) - \psi(x')$.

Sei $U$ - die Orthogonalprojektion von $T_R(x_0 + he_k)$ auf $V$, jeden Punkt von $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir durch $(x', x_n)$. Die Funktionen $f_1$, $f_2$ werden so definiert, dass $T_R(x_0 + he_k) = \{ (x', x_n) \,|\, x' \in U,\ x_n \in [f_1(x'); f_2(x')] \}$.

$$\left[ \begin{array}{c} E_R := \{(x', x_n + A(x')) \,|\, (x', x_n) \in T_R(x_0 + he_k)\} \\ \Rightarrow \quad \operatorname{diam} E_R \leq CR. \end{array} \right] \tag{10.26}$$

Wir setzen

$$K(R) := \sup_{h,i,x_0} \int_{G_{h,i}\cap B_R(x_0)} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx. \tag{10.27}$$

Wegen $|a+b|^p \leq C(|a|^p+|b|^p)$ können wir $J_1$ wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned} &J_1 \overset{(10.25)}{=} \int_U \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \tfrac{|u(x',x_n+A(x'))-u(x',x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n\, dx' \\ &\quad \leq C \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \tfrac{|u(x',x_n+A(x'))-u(x',x_n+t(x'))|^p+|u(x',x_n+t(x'))-u(x',x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n, \\ &\text{wenn} \quad t(s) \in [0; A(s)] \quad \forall\, s \in U. \end{aligned} \tag{10.28}$$

**Bemerkung 10.3** $\forall x' \in V: \; A(x') \in [\frac{1}{2}Mh; \frac{3}{2}Mh]$.

**Beweis:** $M := 2 \sup\limits_{x,y\in V} \frac{|\psi(x)-\psi(y)|}{|x-y|}$ und $A(x') = Mh + \psi(x' - he_k) - \psi(x')$.
Mit den Bezeichnungen

$$\Gamma_1 := \frac{2}{Mh}\int_0^{\frac{Mh}{2}} ds \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + A(x')) - u(x', x_n + A(x') - s)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n,$$

$$\Gamma_2 := \frac{2}{3Mh}\int_0^{\frac{3}{2}Mh} d\tau \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + \tau) - u(x', x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n$$

folgt:

$$\Gamma_1 \overset{y_n = x_n + A(x') - s}{\leq} \sup_{0\leqslant s\leqslant \frac{M}{2}h} \int_{E_R - se_n} \frac{|u(x', y_n + s) - u(x', y_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx' dy_n \overset{(10.26),(10.27)}{\leq} C \cdot K(R),$$

$$\Gamma_2 \leq \sup_{0\leqslant \tau\leqslant \frac{3M}{2}h} \int_{T_R(x_0 + he_k)} \frac{|u(x', x_n + \tau) - u(x', x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx' dx_n \overset{(10.27)}{\leq} C \cdot K(R).$$

Wir substituieren $t(x') := A(x') - s$ in (10.28), integrieren die beiden Teile der so entstandenen Ungleichung bezüglich $s$, $s \in [0; \frac{M}{2}h]$ und dividieren durch $\frac{Mh}{2}$. Man bekommt

$$J_1 \leq C\Bigg(\frac{2}{Mh}\int_0^{Mh/2} ds \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + A(x')) - u(x', x_n + A(x') - s)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n +$$
$$\frac{2}{Mh}\int_0^{Mh/2} ds \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + A(x') - s) - u(x', x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n\Bigg) =$$
$$C\Bigg(\Gamma_1 + \underbrace{\frac{2}{Mh}\int_0^{Mh/2} ds \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + A(x') - s) - u(x', x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n}_{=:D}\Bigg).$$

Nun muss $D$ abgeschätzt werden: Dafür ersetzen wir $A(x') - s$ durch $\tau$. $\tau$ liegt im Intervall $[0; \frac{3M}{2}h]$, denn $A(x') \in [\frac{M}{2}h; \frac{3M}{2}h]$ und $s \in [0; \frac{M}{2}h]$. Außerdem ist $\left|\frac{\partial(\tau, x_1, \ldots, x_n)}{\partial(s, x_1, \ldots, x_n)}\right| = 1$.

D. h.

$$D \leq \frac{2}{Mh}\int_0^{\frac{3Mh}{2}} d\tau \int_U dx' \int_{f_1(x')}^{f_2(x')} \frac{|u(x', x_n + \tau) - u(x', x_n)|^p}{h^{\alpha p}} dx_n = 3\Gamma_2.$$

Insgesamt haben wir

$$\begin{aligned} J_1 &= C(\Gamma_1 + 3\Gamma_2) \leq C_1 K(R) \\ &= C_1 \sup_{h,i,x_0} \int_{B_R(x_0)\cap G_{h,i}} \frac{|u(x + he_i) - u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx. \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

# Anhang A

# Hilfsbehauptung

In diesem Anhang beweisen wir im Grunde das folgende Lemma:
Wenn das Gebiet $G$ im Würfel $W$ liegt und $|G| \leq c_1|W|$, dann gilt für die Oberfläche $(\partial G - \partial W)$ die Ungleichung:

$$|\partial G - \partial W| \geq c_2|\partial G|.$$

Die Konstante $c_1$ und $c_2$ werden unten berechnen.
Dieses Lemma ist für die Theorie von Symmetrisation von Bedeutung.

**Lemma A.1** *(Weiter* $|\ldots|_F$ *:=Flächeninhalt)*
*Es gibt positive Konstanten* $c_1$, $c_2$, *so dass folgende Aussage gilt:*
*Für jeder n-dim Würfel* $W$ *mit* $G \subset W$ *gelte* $|G| \leq c_1|W|$
*(eventuell ist* $G$ *nicht zusammenhängend!), und es sei* $\Gamma := \partial G \setminus \partial W$.
*Dann gilt* $|\Gamma|_F \geq c_2|\partial G|_F$.

**Beweis:** Sei $W = [0; R]^n$, $|G| \leq c_1|W| = c_1 R^n$. Es ist klar, dass

$$R \geq \left(\frac{|G|}{c_1}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{A.1}$$

Wir wissen, dass $|\partial G|_F \geq |\partial B_r|_F$ mit solchen $r$, dass $|G| = |B_r| = r^n|B_1|$ ($G$ ist hier nicht unbedingt zusammenhängend!) Wir berechnen:

$$r = \sqrt[n]{\frac{|G|}{|B_1|}}.$$

Wir schätzen ab

$$|\partial G|_F \geq |\partial B_r|_F = |S_1^{n-1}|_F \cdot r^{n-1} = |S_1^{n-1}|_F \left(\frac{|G|}{|B_1|}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \beta \cdot |G|^{\frac{n-1}{n}}$$

mit einer Konstante $\beta$. Wir halten fest

$$\beta \cdot |G|^{\frac{n-1}{n}} \leq |\partial G|_F. \tag{A.2}$$

Sei jetzt $A_0^i := \partial G \cap (x_i = 0)$, $A_R^i := \partial G \cap (x_i = R)\,\forall i$. Dann gilt

$$|\partial G|_F = |\Gamma|_F + \sum_{i=1}^{n}(|A_0^i|_F + |A_R^i|_F). \tag{A.3}$$

Wir wollen jetzt $|A_0^i|_F$ abschätzen.
Sei $i$ fixiert, und $\pi_i$–orthogonale Projektion auf $(x_i = 0)$.

Sei

$$\begin{cases} D_1 & := & A_0^i \cap \pi_i(\Gamma) \\ D_2 & := & A_0^i \setminus \pi_i(\Gamma) \end{cases}.$$

Offensichtlich gilt $A_0^i = D_1 \cup D_2$
und der Zylinder $\{x + te_i | x \in D_2,\ t \in [0;R]\}$ liegt in $G$
$\Rightarrow$ $|D_2|_F \cdot R \le |G|$ $\Rightarrow$ $|D_2|_F \le \frac{|G|}{R}$. Folglich,

$$|D_2|_F \le \frac{|G|}{R} \overset{(A.1)}{\le} c_1^{\frac{1}{n}}|G|^{\frac{n-1}{n}} \overset{c_1:=\left(\frac{\beta}{4n}\right)^n}{=} \frac{\beta}{4n}|G|^{\frac{n-1}{n}} \overset{(A.2)}{\le} \frac{1}{4n}|\partial G|_F, \tag{A.4}$$

wenn wir $c_1 := \left(\frac{\beta}{4n}\right)^n$ wählen.
Weiter ist klar, dass $|D_1|_F \le |\Gamma|_F$, weil $D_1 \subset \pi_i(\Gamma)$. Daher

$$|A_0^i|_F = \overbrace{|D_1|_F}^{\le|\Gamma|_F} + |D_2|_F \overset{(A.4)}{\le} |\Gamma|_F + \frac{1}{4n}|\partial G|_F.$$

Analog gilt $|A_R^i|_F \le |\Gamma|_F + \frac{1}{4n}|\partial G|_F$ (alle Flächen vom $W$ sind gleichberechtigt).
Daraus folgt $|\partial G|_F \overset{(A.3)}{=} |\Gamma|_F + \sum\limits_{i=1}^{n}(|A_0^i|_F + |A_R^i|_F) \le (2n+1)|\Gamma|_F + \frac{1}{2}|\partial G|_F$
$\Rightarrow \frac{1}{2}|\partial G|_F \le (1+2n)|\Gamma|_F$
$\Rightarrow |\Gamma|_F \ge c_2|\partial G|_F$ mit $c_2 := \frac{1}{2(1+2n)}$. □

**Wir beweisen jetzt ein besseres Resultat:** $\boxed{c_1 := \left(\frac{\beta}{4n}\right)^n, \quad c_2 := \frac{1}{2(1+\sqrt{n})}}$.

Wir benutzen alle Bezeichnungen aus Lemma A.1. Jedoch wiederholen wir:
$|G| \le c_1|W|$ mit $c_1 = \left(\frac{\beta}{4n}\right)^n$ und $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ ist äußere Normale von $G$ auf $\Gamma \subset \partial G$, auch $A_0^i := \partial G \cap (x_i = 0)$, $A_R^i := \partial G \cap (x_i = R)\,\forall i$
und $\begin{cases} D_1 := A_0^i \cap \pi_i(\Gamma) \\ D_2 := A_0^i \setminus \pi_i(\Gamma) \end{cases}$ (hier und weiter ist $i$ fixiert).

Sei $\pi_i^* : D_1 \to \overline{\Gamma}$, $\pi_i^*(x) := x + te_i$ mit $t := \inf \underbrace{\{s > 0 | x + se_i \in \Gamma\}}_{=:A_i(x);\ A_i(x) \text{ endlich f.ü.}}$.

| |
|---|
| **Erklärung:** *wenn $|\Gamma|_F < \infty$, dann ist die Menge $A_i(x)$ endlich für fast alle $x \in D_1$ (da $\int_{D_1} \#A_i(x)dS \le |\Gamma|_F < \infty$, hier ist $\#M-$ Kardinalität vom $M$)$\Rightarrow \pi_i^*(x) \in \Gamma$ f.ü. auf $D_1$.* |

Aber da $x \in D_1$, folgt aus der Definition von $D_1$, dass der Basisvektor $e_i$ <u>äußerer</u> Vektor vom $G$ im Punkt $\pi_i^*(x) \in \partial G$ ist

$\Rightarrow \nu_i(\pi_i^*(x)) = \langle \nu(\pi_i^*(x)), e_i \rangle \geq 0 \quad \& \quad \pi_i^*(x) \in \Gamma$ f.ü. auf $D_1$

$\Rightarrow |D_1|_F = \int_{\pi_i^*(D_1)} |\nu_i|\, dS \leq \int_{\Gamma \cap (\nu_i(x) \geq 0)} |\nu_i|\, dS = \int_{\Gamma \cap (\nu_i > 0)} |\nu_i|\, dS.$

Weiter gilt $|D_2|_F \overset{(A.4)}{\leq} \frac{1}{4n}|\partial G|_F$, man kann dies beweisen wie in Lemma A.1. Somit ist

$$|A_0^i|_F = |D_1|_F + |D_2|_F \leq \int_{\Gamma \cap (\nu_i > 0)} |\nu_i|\, dS + \frac{1}{4n}|\partial G|_F. \tag{A.5}$$

Sei, wie in Lemma A.1,

$$A_R^i = \partial G \cap (x_i = R).$$

Wir führen die Abbildung $T : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (R - x_1, \ldots, R - x_n)$ ein.
Dabei ist

$$T(A_R^i) = T(\partial G) \cap (x_i = 0), \quad T(\vec{\nu}) = -\vec{\nu} \ \ (\vec{\nu} - \text{ein Vektor}), \quad T(W) = W.$$

Wir verwenden das Resultat (A.5) für $T(G)$ anstelle von $G$ :

$$|A_R^i|_F = |T(A_R^i)|_F = |T(\partial G) \cap (x_i = 0)|_F \overset{T(\nu)=-\nu}{\leq} \int_{\Gamma \cap (-\nu_i > 0)} |\nu_i| dS + \tfrac{1}{4n}|\partial G|_F$$
$$= \int_{\Gamma \cap (\nu_i < 0)} |\nu_i| dS + \tfrac{1}{4n}|\partial G|_F \quad \left( \overset{(A.5)}{\Rightarrow} |A_0^i|_F + |A_R^i|_F \leq \int_\Gamma |\nu_i| dS + \tfrac{1}{2n}|\partial G|_F \right)$$

$$\Rightarrow |\partial G|_F = |\Gamma|_F + \int_\Gamma \sum_{i=1}^n (|A_0^i|_F + |A_R^i|_F) \overset{\text{s.o.}}{\leq} |\Gamma|_F + \sum_{i=1}^n \left( \int_\Gamma |\nu_i| dS + \tfrac{1}{2n}|\partial G|_F \right)$$
$$= |\Gamma|_F + \int_\Gamma \sum_{i=1}^n |\nu_i| dS + \tfrac{1}{2}|\partial G|_F$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|\partial G|_F \leq |\Gamma|_F + \int_\Gamma \sum_{i=1}^n |\nu_i| dS = (*).$

Wir wissen,

$$\left( \frac{|\nu_1| + \ldots + |\nu_n|}{n} \right)^2 \leq \frac{\nu_1^2 + \ldots + \nu_n^2}{n} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow (|\nu_1| + \ldots + |\nu_n|)^2 \leq n \Rightarrow |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| \leq \sqrt{n}.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2}|\partial G|_F \leq (*) \leq |\Gamma|_F + \int_\Gamma \sqrt{n}\, dS = (1 + \sqrt{n})|\Gamma|_F. \Rightarrow |\Gamma|_F \geq \frac{1}{2(1 + \sqrt{n})}|\partial G|_F.$$

Wir ersehen daraus, dass $c_2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{n})}$.

# Literaturverzeichnis


[1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press New York, 1975.

[2] A. Bensoussan/J. Frehse. *Regularity Results for Nonlinear Elliptic Systems and Applications.* Applied Mathematical Sciences, 151, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[3] R.F. Brown. *A Topological Introduction to Nonlinear Analysis.* Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1993.

[4] Dubinin. A certain symmetrization method. *Mathematical Analysis (Russian)*, 2:50–64, 160–161, 1974. Kubanskiĭ Gosudarstwenny Univ. Nauchnye Trudy.

[5] C. Ebmeyer and J. Frehse. Mixed boundary value problems for nonlinear elliptic equations in multidimensional non-smooth domains, 1998.

[6] L. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[7] W. Farkas. An imbedding results for generalized orlicz-sobolev-spaces. *Rev. Romaine Math. Pures Appl.*, 42(7-8):555–565, 1997.

[8] J. Frehse. Skript zur Vorlesungen "Gemischte Randwertprobleme", SS 2000.

[9] J. Frehse. Skript zur Vorlesungen "Funktionalanalysis", WS 1998/99.

[10] V.F. Gaposhkin. Existence of absolute bases. *Funkts. Anal. i Prilozhen.*, 1(1:4):26–32, 1967.

[11] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equation of Second Order.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1977.

[12] H. Jeggle. *Nichtlineare Funktionalanalysis.* B.G.Teubner-Verlag, Stuttgart, 1979.

[13] F. John and L. Nirenberg. On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961.

[14] L.W. Kantorovich and G.P. Akilov. *Funktionalanalysis in normierten Räumen.* Verlag Harri Deutsch, Thun-Frankfurt-Main, 1978.

[15] B. Kawohl. *Rearrangements and Convexity of Level Sets in PDE.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[16] W.E. Kirwan and G. Schober. New inequalities from old ones. *Math.Z.*, 1:19–40, 1982.

[17] M.A. Krasnosel'skiĭ and Ya.B. Rutitskiĭ. *Convex functions and Orlicz Spaces.* P. Noordhoff ltd.-Groninger-the Netherlands, 1961.

[18] M. Krbec and H.-J. Schmeisser. On extrapolation of Sobolev and Morrey type imbedding.

[19] A. Kufner, O. John, and S. Fučík. *Function spaces.* Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[20] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Uraltseva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1968. Übersetzung vom Russe.

[21] J. Malý. Lectures on change of variables in integral, November 2001. Preprint 305.

[22] C.B. Morrey. Functions of several variables and absolute continuity. *Duke Math.*, 6:187–217, 1940.

[23] C.B. Morrey. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer-Verlag, Volume 130, Berlin Heidelberg New York, 1966.

[24] M.W. Orlicz. Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus $\mathcal{B}$. *Bull. Intern. Acad. Pol. Ser. A*, (8/9):207–220, 1932.

[25] L. Pick and W. Sickel. Several types of intermediate besov-orlicz-spaces. *Math. Nachr.*, 164:141–165, 1993.

[26] G. Stampacchia. The $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ spaces and applications to the theory of partial differential equations. (to appear).

[27] E.M. Stein. Note on the class $L \log L$. *Studia Math.*, 32:305–310, 1969.

[28] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions.* Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1970.

[29] V.A. Štyk. Certain estimates for functions that are regular and univalent in an annulus. *Mathematical Analysis (Russian)*, 148:81–84, Kubanskiĭ Gosudarstvennyi Univ. Naučhnye Trudy 1971.

[30] G. Talenti. Best constant in sobolev inequality. *Annali di Matematica Pur Applicata*, 110(1):353–372, Dezember 1976.

[31] H. Triebel. Fourier analysis and function spaces. Teubner-Texte.

[32] N.S. Trudinger. On imbedding into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, 17:473–483, 1967.

[33] J Wolf. Regularität und partielle Regularität schwacher Lösungen nichtlinear elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen mit Entartung der Fall $1 < q < 2$. Dissertation, 2002. pages 262-294.

# Zusammenfassung

Die Arbeit befaßt sich mit Verfeinerungen der Einbettungssätze von Morrey, Marcinkiewicz-Stampacchia und Trudinger. Es geht um die Frage, inwieweit Morrey-Bedingungen für die Ableitungen eine Funktion zu *besseren*, als die Sobolevschen-Ungleichungen gegeben Integrabilitätsexponenten führen. Ein klassischer Satz (Marcinkiewicz-Stampacchia) kombiniert mit späteren Verbesserungen, besagt, dass eine Funktion im Lebesguesche Funktionalraum $L^q$ liegt, sofern die Ableitung der Morrey-Bedingung

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p \, dx \leq K R^{n-\lambda}$$

gilt. Hierbei ist

$$1/q = 1/p - 1/\lambda, \quad \lambda > p.$$

Von besonderen Wichtigkeit ist auch der Grenzfall "$\lambda = p = n$", in diesem Fall gelten Orlicz-Raum-Inklusionen für etwa das Resultat von Trudinger, dass in zweidimensionalen Fall $\int_\Omega e^{\alpha u^2} dx < \infty$ ausfällt, falls $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx < \infty$. ($\Omega$ ist begrenzt und erfüllt innere Kegelbedingung.)

Einbettungssätze sind für viele Fragen bei partiellen Differentialgleichungen, etwa Regularitäts-, Stabilitäts- und Kompaktheitsfragen von Bedeutung. Daher sind weiter gehende Verfeinerungen immer nützlich und willkommen. In der vorliegenden Arbeit stellen wir die Frage, inwieweit Morrey-Bedingungen mit logarithmischer Störung, also Bedingungen der Gestalt

$$\int_{B_R} |\nabla u|^p \, dx \leq K R^{n-\lambda} |\log R|^{-\vartheta}, \quad R \leq 1/2$$

zu verbesserten Einbettungen für die Funktion $u$ selbst führt. Es gelingt uns, hierzu optimale Einbettungen und Abschätzen zu geben. In Detail sehen die Ergebnisse folgendermaßen aus:

Im folgenden sei $\Omega$ ein beschränktes Gebiet mit lipschitzstetigem Rand. Wir behandeln die Frage: Sei $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvexe Funktion mit

$\phi(0) = 0$. Für welche Funktion $\psi$ gilt die Inklusion

$$\left[\sup_{x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \ \forall\, R \le 1/2 \ \text{ und } \ \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K\right]$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \psi(|u|)\, dx \le K_1 \quad \text{bei passender Auswahl} \quad K_1 = K_1(K)? \tag{A.6}$$

Parallel betrachten wir die Frage betrifft der "Optimalität" unserer Resultate. Wir meinen damit, dass die Inklusion (A.6) gilt, aber für jede Funktion $\omega : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit $\lim\limits_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$ und jede Auswahl $K > 0, K_1 > 0$ solches $u \in W^{1,1}(\Omega)$ existiert, dass

$$\sup_{x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K \tfrac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \ \forall\, R \le 1/2 \ \text{ und } \ \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K,$$

$$\text{aber} \quad \int_\Omega \psi(|u|\omega(|u|))\, dx > K_1.$$

Es ist klar, dass auch sehr schwach wachsende Funktionen $\omega$ zugelassen sind, z.B. $\omega(t) = c \ln\ln(t+e)$ für ein $c > 0$.

Zum Zwecke den kompakten Darstellung verabreden wir, dass

$$\text{das Symbol} \quad \text{“} \int_{B_R} \text{”} \quad \text{für} \quad \text{“} \sup_{x_0} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega} \text{”} \quad \text{steht.}$$

Die Dissertation besteht in etwa aus drei Teilen:

Teil 1. $\boldsymbol{\phi(t) = t^p}$. (Selbstverständlich $p \ge 1$.)

Den Fall "$p > \lambda$" findet man bereits in der Literatur. (In diesem Fall $u \in C(\overline{\Omega})$). Drei Möglichkeiten bleiben:

a) $p = \lambda < n$. Dann

$$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le K \tfrac{R^{n-p}}{|\log R|^{\vartheta}} \ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^p dx \le K\right]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{p}{p-\vartheta}}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta < p \\ \int_\Omega e^{e^{\alpha|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta = p \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \vartheta > p. \end{cases} \quad \text{und passende } \alpha > 0,\ K_1 > 0.$$

Bemerkung: das gilt auch für negative $\vartheta$. Außerdem sind diese Resultate optimal in unserem Sinne für $\vartheta \in (-\infty, p]$, also überall, wo unsere "Optimalität" hat einen Sinn. Wir zeigen

den Einbettungssatz in
Satz 6.1 (Fall "$\vartheta \ge 0$"), Satz 8.4(b) (Fall "$\vartheta < 0$"),

die Optimalität in
Satz 6.3 (Fall "$\vartheta \ge 0$"), Satz 8.6 (Fall "$\vartheta < 0$").

b) $p = \lambda = n$. Dann

$$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^n dx \le \frac{K}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^n dx \le K\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\alpha |u|^{\frac{n}{n-\vartheta-1}}} dx \le K_1 & \text{für } 0 \le \vartheta < n-1 \\ \int_\Omega e^{e^{\alpha|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \quad \vartheta = n-1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \quad \vartheta > n-1. \end{cases} \text{ und passende } \alpha > 0,\ K_1 > 0.$$

(Der Fall "$\vartheta < 0$" hat keinen Sinn.) Diese Resultate sind optimal in unserem Sinne für $\vartheta \in [0, n-1]$, $n \ge 2$. Wir zeigen

den Einbettungssatz in Satz 6.2,

die Optimalität in
Satz 6.3 (Fall "$\vartheta > 0$"), Satz 6.4 (Fall "$\vartheta = 0$").

c) $p < \lambda \le n$. Dann

$$\left[\int_{B_R} |\nabla u|^p dx \le K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega |u|^p dx \le K\right]$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |u|^q [\log(|u|+2)]^{\frac{q\vartheta}{\lambda}} dx \le K_1,$$

hier ist $q$ definiert durch $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ beliebig. Dieses Resultat ist optimal überall mit Ausnahme des Falls "($n = \lambda$, $\vartheta < 0$)". Wir zeigen

den Einbettungssatz in
Satz 7.2 (Fall "$\vartheta \ge 0$"), Satz 8.4(a) (Fall "$\vartheta < 0$"),

die Optimalität in
Sätze 7.3 & 7.4 (Fall "$\vartheta \ge 0$"), Satz 8.5 (Fall "$\vartheta < 0$").

Teil 2. ($\vartheta$ und $\alpha$ können sowohl positiv als auch negativ sein.)
Wir definieren zuerst Äquivalenzrelation: Seien $\phi, \psi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$. Dann $\phi \sim \psi$, wenn $\exists\, T, C, c > 0$ mit: $\forall\, t > T:\ c\psi(t) \le \phi(t) \le C\psi(t)$.

Betrachten wir konvexe Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ mit
$\phi(0) = 0$ und $\phi(t) \sim t^p[\log(t+2)]^{\alpha}$
(das heisst, entweder ($p = 1$, $\alpha \ge 0$) oder ($p > 1$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$).)

Wir wollen den Fall "$\lambda = n$" nicht betrachten. Der Fall "$p > \lambda$" ist klassisch und wird daher nicht behandelt. Deshalb bleiben zwei Varianten:

a) $p = \lambda < n$. Dann

$$\left[\int_{B_R} \phi(|\nabla u|)\, dx \le K \frac{R^{n-p}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall\, R \le 1/2 \quad \text{und} \quad \int_\Omega \phi(|u|)\, dx \le K\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_\Omega e^{\beta |u|^{\frac{p}{p-(\vartheta+\alpha)}}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta + \alpha < p \\ \int_\Omega e^{e^{\beta|u|}} dx \le K_1 & \text{für } \vartheta + \alpha = p \\ u \in C(\overline{\Omega}) & \text{für } \vartheta + \alpha > p. \end{cases} \text{ und passende } \beta > 0,\ K_1 > 0.$$

Das Resultat ist optimal in unserem Sinne mindestens für $\vartheta + \alpha < p$.
Wir zeigen

den Einbettungssatz in
Satz 8.2 (Fall "$\vartheta + \alpha \geq 0$"), Satz 8.4(b) (Fall "$\vartheta + \alpha < 0$"),

die Optimalität in Satz 8.6.

b) $p < \lambda < n$. Dann

$$\left[\int_{B_R} \phi(|\nabla u|)\, dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \forall R \leq 1/2 \quad \text{und} \quad \int_{\Omega} \phi(|u|)\, dx \leq K\right]$$
$$\Rightarrow \int_{\Omega} |u|^q [\log(|u|+2)]^{q\kappa} dx \leq K_1.$$

Hier $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\vartheta}{\lambda} + \frac{\alpha}{p}$. Resultat ist optimal. Wir zeigen

den Einbettungssatz in Satz 8.4(a),

die Optimalität in Satz 8.5.

<u>Teil 3.</u> Sei $\alpha p < \lambda \leq n$, $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1, \infty)$, $\vartheta \in (-\infty, +\infty)$. Dann

$$\left[\begin{array}{c} \int_{B_R(x_0)\cap\Omega\cap(\Omega - he_k)} \frac{|u(x+he_k)-u(x)|^p}{h^{\alpha p}} dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}}\ \ \forall R \leq 1/2, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall h > 0 \\ \text{und} \quad \int_{B_R(x_0)} |u|^p dx \leq K \frac{R^{n-\lambda}}{|\log R|^{\vartheta}} \quad \forall R \leq 1/2\, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \int_{\Omega} |u|^q [\log(|u|+2)]^{q\kappa} dx \leq K_{\varepsilon}$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\lambda}$, $\kappa = \frac{\alpha\vartheta}{\lambda} - \frac{1+\varepsilon}{q}$
für jedes $\varepsilon > 0$.

Es ist ziemlich offensichtlich, dass dieses letzte Resultat nicht optimal in unserem Sinne sein kann. Wir beweisen

Einbettungsatz in Sätze 10.1 und 10.2.