Untersuchung der Primzahlzählfunktion und verwandter Funktionen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Jan Patrick Büthe

aus
Viersen

Bonn, Juni 2014

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Natruwissenschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter:	Prof. Dr. Jens Franke
2. Gutachter:	Prof. Dr. Jörg Brüdern
Tag der Promotion:	24.3.2015
Erscheinungsjahr:	2015

Diese Arbeit ist meinen Lehrern gewidmet, die mich auch in schwierigen Zeiten immer wieder unterstützt haben.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Jens Franke für den Themenvorschlag, die vielen Anregungen und alle Unterstützung, die ich während meiner Promotionszeit erhalten habe, danken. Ebenso danke ich Boris Z. Moroz, der meine Promotion als Mentor mit begleitet hat. Desweiteren danke ich Arnold Schönhage für seine überaus interessanten Kommentare zu dieser Arbeit und für den Hinweis auf eine ganze Reihe typographischer Fehler, und Robert Kucharczyk danke ich für seine Korrekturen und Anmerkungen zur ersten Fassung dieser Arbeit.

Ferner danke ich dem Hausdorff Center for Mathematics für die Möglichkeit der Nutzung der Großrechner, die zur Berechnung der numerischen Resultate verwendet wurden. Mein besonderer Dank gilt dabei Benedict Geihe und Sascha Tölkes für die hervorragende Betreuung der Rechner und ihre Hilfe bei technischen Problemen.

Inhaltsverzeichnis

Notationen

Im zahlentheoretischen Kontext orientieren sich die Notationen in dieser Arbeit an dem Buch [Brü95]. Die Bezeichnungen für die auftretenden Funktionenräume und die zugehörigen Normen sind [AF03] entnommen. Notationen, die über mehrere Kapitel hinweg verwendet werden, sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet.

Notationstabelle

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen $\{1,2,3,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathbb{C}$	komplexe Zahlen
O	$f = O(g)$ synonym mit $\exists C : f \le C\|g\|$.
o	$f = o(g)$ synomym mit $f/g \to 0$
$\ll$	synonym mit O
Θ	Turingsches Thetasymbol $\to$ S. 22
$\tilde{O}$	$f(x) = \tilde{O}(g(x))$ synonym mit $\exists N : f(x) = O(\log(x)^N g(x))$
Ω	logische Negation von o
$\pi(x)$	Anzahl der Primzahlen $\le x$
$\pi^*(x)$	Riemannsche Primzahlzählfunktion $\pi^*(x) = \sum_{k>0} \frac{\pi(x^{1/k})}{k}$
θ, ψ	Tschebyschow-Funktionen $\to$ S. 17
π_0, π_0^*, ϑ_0, ψ_0	Normalisierungen ($\to$ S. 19) der Funktionen π, π^*, ϑ und ψ
$\psi_{c,\varepsilon}$	modifizierte Tschebyschow-Funktion $\to$ S. 21
$\pi^*_{c,\varepsilon}$	modifizierte Riemannsche Primzahlzählfunktion $\to$ S. 32
χ_A	charakteristische Funktion der Menge A
χ_A^*	Normalisierung der charakteristischen Funktion, d.h. $\chi_A^*(x) = \frac{1}{2}$ für Randpunkte x von A
$f_\pm(x)$	$\lim_{h\searrow 0} f(x \pm h)$
$B_r(x)$	je nach Kontext in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$: $\{y \mid \|x-y\| < r\}$
ζ	Riemannsche Zetafunktion
Γ	Gammafunktion
Ei	Synonym mit Ei_1
li	Integrallogarithmus: $\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\log(x))$
Ei_k	Exponentialintegrale $\to$ S. 38
I_k	modifizierte Besselfunktion der 1. Art $\to$ S. 84
$\ell_{c,\varepsilon}$	Logan-Funktion $\to$ S. 20
$\eta_{c,\varepsilon}$	Fourier-Transformierte von $\ell_{c,\varepsilon}$ $\to$ S. 21
$\lambda_{c,\varepsilon}$	synonym mit $\ell_{c,\varepsilon}(i/2)$
sgn	Vorzeichenfunktion: $\mathrm{sgn}(0) = 0$, $\mathrm{sgn}(\pm t) = \pm 1$ für $t > 0$
∂U	Rand der Menge U.
$[x]$	größte ganze Zahl $\le x$
$\{x\}$	$x - [x]$

Einleitung

Diese Arbeit ist dem Studium der Funktion

$$\pi(x) = \#\{p \mid p \leq x, p \text{ prim}\}$$

gewidmet. Der Primzahlsatz in seiner schwächsten Form besagt, dass $\pi(x)$ für $x \to \infty$ asymptotisch äquivalent zum Integrallogarithmus

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Big(\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^x \Big) \frac{dt}{\log t}$$

ist. Derertige Aussagen gewinnt man für gewöhnlich über das Studium der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, welche in $\Re(s) > 1$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p \left(1 - p^{-s}\right)^{-1}$$

gegeben ist. So ist die schwache Form des Primzahlsatzes beispielsweise zum Nichtverschwinden von $\zeta(1 + it)$ für reelle t äquivalent. Stärkere Versionen der Primzahlsatzes beruhen auf Nullstellenfreien Gebieten links der Gerade $\Re(s) = 1$. Das stärkste Resultat dieser Art geht auf Vinogradov und Korobov zurück, die unabhängig voneinander zeigten, dass die nicht-trivialen Nullstellen ρ der Riemannschen Zetafunktion für geeignetes $c > 0$ und $\Im(\rho)$ genügend groß die Abschätzung

$$\Re(\rho) \leq 1 - c \log\log(\Im\rho)^{-1/3} \log(\Im(\rho))^{-2/3}$$

erfüllen [Vin58, Kor58]. Dies führt zu Abschätzungen der Form

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \ll x \exp\left(-\eta \frac{\log(x)^{3/5}}{\log(\log(x))^{1/5}} \right)$$

für geeignetes $\eta > 0$.

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung, nach welcher $\Re(\rho) = 1/2$ für alle Nullstellen ρ gelten soll, lassen sich deutlich stärkere Abschätzung beweisen. Schoenfeld zeigte unter dieser Annahme, dass

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \sqrt{x} \log(x) \tag{1}$$

für genügend große x gilt.

Die Riemannsche Vermutung lässt sich numerisch zumindest partiell verifizieren, indem man einen Teil der Nullstellen berechnet und anschließend ihre Vollständigkeit beweist (siehe z.B. [Bre79]). Die Liste derartiger Berechnungen ist lang und die umfangreichste ihrer

Art umfasst die ersten 10^{13} Nullstellen [Gou04]. Es ist daher naheliegend, die Frage zu stellen, wie sich aus der Kenntnis eines Teils der Nullstellen genauere Kenntnisse über die Primzahlzählfunktion gewinnen lassen, und darin besteht der Beitrag dieser Arbeit.

Wir beweisen zum einen einen partiellen Primzahlsatz, der besagt, dass die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung für alle Nullstellen mit Imaginäranteil in $(0, T)$ bereits die Gültigkeit der Schoenfeldschen Schranke (1) für $25x/\log(x) < T^2$ impliziert.

Ferner entwickeln wir einen effizienten analytischen Algorithmus zur Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz. Dieser basiert auf einer Idee von J. Franke zur effizienten multiplen Auswertung gewisser Summen über einen Teil der Nullstellen der Zetafunktion. Für die Primzahlzählfunktion ergeben sich daraus unter Verwendung der Nullstellen mit Imaginärteil bis 10^{11} die Schranken

$$0 < \mathrm{li}(x) - \pi(x) < \frac{\sqrt{x}}{\log x}\left(1.94 + \frac{3.88}{\log x} + \frac{27.57}{\log(x)^2}\right)$$

für $10^8 \leq x \leq 10^{19}$. Im oberen Gültigkeitsbereich ist diese Abschätzung etwa um einen Faktor 35 stärker als die Schoenfeldsche Schranke und sie zeigt insbesondere, dass die Skewes-Zahl, die Stelle des ersten Vorzeichenwechsels von $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ in $[2, \infty)$, von unten durch 10^{19} beschränkt ist.

Desweiteren entwickeln wir eine neue Variante der analytischen Methode zur Berechnung der Primzahlzählfunktion. Dies schließt an die Vorarbeiten in [FKBJ] an und wird zur Berechnung von

$$\pi(10^{25}) = 176,846,309,399,143,769,411,680$$

herangezogen. Wegen der starken Abhängigkeit der Implementierung des Verfahrens von der Vorgängermethode ist diese Berechnung allerdings als ein gemeinsames Resultat der Autoren in [FKBJ] anzusehen.

Als Hilfsmittel für die oben erwähnten Abschätzungen entwickeln wir zudem neue Schranken für gewichtete Summen über Primzahlen, wie sie unter Anderem beim Studium der Primzahlverteilung mittels der Weil-Barnerschen expliziten Formel auftreten. Das Resultat verallgemeinert die wohlbekannte Brun-Titchmarsh-Ungleichung

$$\pi(x + y) - \pi(x) \leq 2\frac{y}{\log(y)}.$$

Zum Aufbau der Arbeit ist das Folgende zu sagen. Das zweite Kapitel bildet die technische Grundlage: Die Weil-Barnersche explizite Formel wird vorgestellt, und wir definieren eine modifizierte Tschebyschow- Funktion, die uns später als Hilfsmittel zur Abschätzung der Primzahlzählfunktion dient.

Das dritte Kapitel ist der analytischen Berechnung von $\pi(x)$ gewidmet. Wir entwickeln eine modifizierte Primzahlzählfunktion, die effizient über die Nullstellen der Zetafunktion berechnet werden kann und deren Differenz zur Riemannschen Primzahlzählfunktion im Wesentlichen durch die Primzahlpotenzen in einer geeigneten Umgebung von x ausgedrückt werden kann.

Im vierten Kapitel studieren wir schwach gewichtete Summen über Primzahlen. Dabei kommen vornehmlich elementare Siebmethoden zum Einsatz.

In Kapitel 5 stellen wir dann den Algorithmus zur effizienten Restgliedabschätzung von. Dieser wird nicht für die Primzahlzählfunktion direkt, sondern für die Tschebyschow-Funktion formuliert. Die Resultate werden im darauffolgenden Kapitel 6 auf die Primzahlzählfunktion übertragen. Dieses beinhaltet auch den partiellen Primzahlsatz sowie eine Erweiterung der Liste der Lösungen von

$$N\pi(x) = x$$

auf $N \leq 50$. Diese waren bislang für $N \leq 26$ bekannt.

Kapitel 1

Explizite Formeln und die Tschebyschow-Funktionen

Den Tschebyschow-Funktionen

$$\vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta(x^{1/k}) \tag{1.1}$$

kommt in der analytischen Zahlentheorie eine zentrale Bedeutung zu. Sie sind über partielle Summation mit der Primzahlzählfunktion $\pi(x) = \sum_{p \le x} 1$ und der Riemannschen Primzahlzählfunktion

$$\pi^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi(x^{1/k})}{k}$$

verbunden, was es ermöglicht, Aussagen über die Primzahlzählfunktionen in Aussagen über die Tschebyschow-Funktionen zu übersetzen. So ist beispielsweise der Primzahlsatz, nach welchem $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$ für $x \to \infty$ gilt, zu $\vartheta(x) \sim x$ äquivalent. Der Gewinn solcher Übersetzungen liegt in der einfacheren analytischen Natur der Funktion $\psi(x)$. Denn diese, oder genauer gesagt ihre Normalisierung

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \big(\psi(x+h) + \psi(x-h)\big),$$

ist über die Mellin-Transformation mit der meromorphen Funktion $\frac{\zeta'}{\zeta}$ verbunden, während die Riemannsche Primzahlzählfunktion auf diesem Wege zu einem Logarithmus der Zetafunktion korrespondiert.

Die Funktion $\psi_0(x)$ ist über die von Mangoldtsche explizite Formel

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho}{}^{*} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) \tag{1.2}$$

mit den Nullstellen der Zetafunktion verbunden [vM95]. Somit hängt die Größe des Restglieds $\psi(x) - x$ maßgeblich von der Nullstellenverteilung der Zetafunktion ab. Die direkte Anwendung dieser Formel gestaltet sich aber häufig als schwierig, da die auftretende Summe über Nullstellen nur langsam und nicht absolut konvergiert.

In diesem Kapitel führen wir eine stetige Approximation der Tschebyschow-Funktion ein, für welche eine zu (1.2) ähnliche explizite Formel existiert. Der Wert der modifizierten

Tschebyschow-Funktion an der Stelle x unterscheidet sich dabei von $\psi(x)$ durch einen Beitrag der Primzahlpotenzen in einer Umgebung variabler Größe von x. Dafür ist die Summe über Nullstellen in der expliziten Formel sehr viel leichter handhabbar. Diese modifizierte Tschebyschow-Funktion dient in den folgenden Kapiteln sowohl als Grundlage für theoretische Betrachtungen als auch für numerische Abschätzungen des Restglieds im Primzahlsatz.

Die Konstruktion der modifizierten Tschebyschow-Funktion basiert auf der Weil-Barnerschen expliziten Formel, einer Verallgemeinerung klassischer expliziter Formeln in funktionalanalytischer Sprache.

1.1 Die Weil-Barnersche explizite Formel

Die Weilsche explizite Formel ist eine Verallgemeinerung klassischer expliziter Formeln wie der Riemannschen oder von-Mangoldtschen expliziten Formel und ihrer Analoga auf Restklassen oder im Zahlkörperfall [Wei52]. Der Zusammenhang des Euler- und des Weierstraß-Produkts wird dort durch eine Identität von Funktionalen auf einem Raum geeigneter Testfunktionen ausgedrückt. Die Weilsche explizite Formel wurde später von Barner in eine etwas handhabbarere Form überführt [Bar81], die wir hier verwenden.

Im Fall der Riemannschen Zetafunktion sind die Funktionale durch

$$w_s(\hat{g}) = \sum_{\rho}{}^{*} \hat{g}\Big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\Big) - \hat{g}\Big(\frac{i}{2}\Big) - \hat{g}\Big(-\frac{i}{2}\Big), \tag{1.3}$$

$$w_f(g) = -\sum_{p^m} \frac{\log p}{p^{m/2}} \big(g(m \log p) + g(-m \log p)\big) \tag{1.4}$$

und

$$w_\infty(g) = \Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big) - \log \pi\Big) g(0) - \int_0^\infty \frac{g(t) + g(-t) - 2g(0)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt \tag{1.5}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\hat{g}$ die Fourier-Transformierte von g, die hier als

$$\hat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\xi t}\, dt$$

definiert ist, und die Summe in (1.3) läuft über alle nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion, wobei die Nullstellen gemäß ihrer Vielfachheit auftreten und die Summe als

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{|\Im \rho| < T} \hat{g}\Big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\Big) \tag{1.6}$$

zu berechnen ist.

Die Weil-Barnersche explizite Formel ist dann durch

$$w_s(\hat{g}) = w_f(g) + w_\infty(g) \tag{1.7}$$

gegeben und gilt für alle g in der Barner-Klasse. Diese umfasst alle Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

(B1) Es gibt ein $a > \frac{1}{2}$ derart, dass die Funktion $e^{a|t|} g(t)$ Lebesgue-integrierbar und von beschränkter Variation ist.

(B2) Die Funktion g ist normalisiert, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \big(g(t+h) + g(t-h) \big).$$

(B3) Es existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$2g(0) = g(t) + g(-t) + O(|t|^{\varepsilon})$$

gilt.

Barner stellt in [Bar81] die stärke Bedingung, dass (B3) mit $\varepsilon = 1$ gelten soll. Die Abschwächung zu $\varepsilon > 0$ geht auf Lang zurück [Lan94].

Es sei noch erwähnt, dass für Funktionen g der Barner-Klasse die Fourier-Inversionsformel

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\xi) e^{-it\xi} \, d\xi$$

punktweise gilt (siehe z.B. [Lan93, Theorem 2.5]).

1.1.1 Die von Mangoldtsche explizite Formel

Die Riemannsche explizite Formel folgt mit etwas Mühe aus der Weil-Barnerschen (siehe [BFJK13]) und es wird gerne darauf verwiesen, dass die von Mangoldt-Formel (1.2) leicht durch Anwendung der Weil-Barner-Formel auf die Normalisierung der Testfunktion $\chi_{[0,\log x]}(t)e^{t/2}$ folgt. Letzteres bedarf aber dennoch einiger Rechenschritte, und da wir diese Rechnungen später ohnehin benötigen werden, bietet es sich an, den Beweis an dieser Stelle einmal auszuführen.

Satz 1.1. *Sei $x > 1$. Dann gilt*

$$\psi_0(x) = x - \sum_{\rho}{}^{*} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}).$$

Beweis. Sei $g_x(t) = \chi^{*}_{[0,\log x]}(t)e^{t/2}$. Dann gilt

$$\hat{g}_x(\xi) = \frac{e^{\frac{1}{2}+i\xi}}{\frac{1}{2}+i\xi},$$

und somit haben wir

$$w_s(\hat{g}_x) = \sum_{\rho}{}^{*} \frac{x^{\rho}-1}{\rho} + 1 - x - \log(x).$$

Bekanntlich konvergiert die Summe der Reziproken der Nullstellen, und wir haben

$$\sum_{\rho}{}^{*} \frac{1}{\rho} = 1 + \frac{1}{2}\Big(\gamma - \log(4\pi)\Big) \tag{1.8}$$

[Edw74, S. 67]. Offenbar gilt

$$w_f(g_x) = -\psi(x),$$

und es verbleibt somit lediglich die Betrachtung von

$$w_{\infty}(g_x) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big) - \frac{1}{2}\log\pi - \int_0^{\log x} \frac{1-e^{-t/2}}{1-e^{-2t}}\, dt + \int_{\log x}^{\infty} \frac{e^{-t/2}}{1-e^{-2t}}\, dt.$$

Hier nutzen wir die Integraldarstellung

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big) = \int_0^\infty \frac{e^{-2t}}{2t} - \frac{e^{-t/2}}{1-e^{-2t}}\,dt, \tag{1.9}$$

die Tatsache, dass für das Exponentialintegral

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt = -\gamma - \log y + O(y)$$

für $y \searrow 0$ gilt [Olv97, S. 40], wobei γ die Eulersche Konstante bezeichnet, sowie die Gleichung

$$-\int_0^{\log x} \frac{1-e^{-t/2}}{1-e^{-2t}}\,dt = -\log x + \int_0^{\log x} \frac{e^{-t/2}-e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\,dt \tag{1.10}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} w_\infty(g_x) &= -\log x - \frac{1}{2}\log\pi + \int_0^{\log x} \frac{e^{-2t}}{2t} - \frac{e^{-2t}}{1-e^{-2t}}\,dt + \int_{\log x}^\infty \frac{e^{-2t}}{2t}\,dt \\ &= -\log x - \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) + \frac{1}{2}\lim_{\delta\searrow 0}\big(E_1(2\delta) + \log(1-e^{-2\delta})\big) \\ &= -\log x - \frac{1}{2}\log\pi - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) - \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

□

1.2 Eine modifizierte Tschebyschow-Funktion

Im Kontext der Weil-Barner-Formel zeigt sich die Unstetigkeit der Testfunktion als Ursache für das schlechte Konvergenzverhalten der Summe über Nullstellen. Es ist also naheliegend, die Testfunktion in einer Umgebung von $\log x$ durch eine stetige Approximation zu ersetzen. Dabei kann man sich zu Nutze machen, dass für $g(t) = e^{t/2}$ und jeden Kern K

$$g * K(t) = \int_{-\infty}^\infty K(y)g(t-y)\,dy = g(t)\hat{K}(-i/2)$$

gilt, sofern das Fourier-Integral konvergiert. Liegt der Träger von K dann in $[-\varepsilon,\varepsilon]$, so unterscheidet sich $g_x * K$ nur in einer ε-Umgebung von 0 und $\log x$ von $\hat{K}(-i/2)g_x$ und der Kern wirkt durch

$$\widehat{g_x * K}(\xi) = \hat{g}_x(\xi)\hat{K}(\xi)$$

konvergenzbeschleunigend.

Die Wahl des Kernes fiel dabei, wie schon bei der Berechnung der Primzahlzählfunktion in [FKBJ], auf die Fourier-Transformierte der Loganschen Funktion

$$\ell_{c,\varepsilon}(\xi) = \frac{c}{\sinh c}\frac{\sinh\big(\sqrt{c^2-(\xi\varepsilon)^2}\big)}{\sqrt{c^2-(\xi\varepsilon)^2}}. \tag{1.11}$$

Man beachte, dass $\ell_{c,\varepsilon}(\xi)$ nicht von der Wahl der Wurzel $\sqrt{c^2-(\xi\varepsilon)^2}$ abhängt, sofern diese in Zähler und Nenner gleich gewählt wird. Die Logansche Funktion minimiert unter allen Funktionen h mit $h(0) = 1$ und $\operatorname{supp}\hat{h} \subset [-\varepsilon,\varepsilon]$ das Funktional

$$\int_{|t|\geq \frac{c}{\varepsilon}} \frac{|h(t)|}{|t|}\,dt$$

[Log88]. Somit kommt die Faltung von g_x mit $\ell_{c,\varepsilon}$ einem Abschneiden der Summe über Nullstellen bei $|\Im(\rho)| = \frac{c}{\varepsilon}$ nahe, wobei der Parameter c die Größe des abgeschnittenen Restglieds kontrolliert.

Sei also

$$\eta_{c,\varepsilon}(t) = \hat{\ell}_{c,\varepsilon}(t) = \chi^*_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(t)\frac{c}{2\sinh(c)} I_0\big(c\sqrt{1-(t/\varepsilon)^2}\big), \tag{1.12}$$

$\lambda_{c,\varepsilon} = \ell_{c,\varepsilon}(i/2)$ der Eigenwert zu g unter Faltung mit $\eta_{c,\varepsilon}$ und

$$g_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} g_x * \eta_{c,\varepsilon}.$$

Dann definieren wir die modifizierte Tschebyschow-Funktion zu den Parametern c und ε durch

$$\psi_{c,\varepsilon}(x) = -w_f(g_{x,c,\varepsilon}). \tag{1.13}$$

Da $\eta_{c,\varepsilon}$ nicht-negativ ist und außerhalb von $[-\varepsilon,\varepsilon]$ verschwindet, erhalten wir nach dem bisher Gesagten unmittelbar den folgenden Satz.

Satz 1.2. *Sei $\varepsilon < \log 2$ und*

$$\begin{aligned} M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{\log t}{\lambda_{c,\varepsilon}} \Big[& \chi^*_{[x,\exp(\varepsilon)x]}(t) \int_{\log(t/x)}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{-\tau/2}\, d\tau \\ & - \chi^*_{[\exp(-\varepsilon)x,x]}(t) \int_{-\varepsilon}^{\log(t/x)} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{-\tau/2}\, d\tau \Big]. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Dann gilt

$$\psi(x) = \psi_{c,\varepsilon}(x) - \sum_{e^{-\varepsilon}x < p^m < e^{\varepsilon}x} \frac{1}{m} M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m). \tag{1.15}$$

Ferner gelten für jedes $\alpha > 0$ die Ungleichungen

$$\psi(e^{-\alpha\varepsilon}x) \le \psi_{c,\varepsilon}(x) - \sum_{e^{-\varepsilon}x < p^m \le e^{-\alpha\varepsilon}x} \frac{1}{m} M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m) \tag{1.16}$$

und

$$\psi(e^{\alpha\varepsilon}x) \ge \psi_{c,\varepsilon}(x) - \sum_{e^{\alpha\varepsilon}x \le p^m < e^{\varepsilon}x} \frac{1}{m} M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m). \tag{1.17}$$

Beweis. Wegen $\varepsilon < \log 2$ gilt $g_{x,c,\varepsilon}(t) = e^{t/2}$ für $t \in [\log 2, \log x - \varepsilon]$. Ferner verschwindet $g_{x,c,\varepsilon}(t)$ für $t > \log x + \varepsilon$ und $t \le -\log 2$. Die behauptete Identität in (1.15) folgt nun aus

$$\begin{aligned} \lambda_{c,\varepsilon}\, g_{x,c,\varepsilon}(y) &= e^{\frac{y}{2}} \int_{y-\log x}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{-\frac{\tau}{2}}\, d\tau \\ &= \lambda_{c,\varepsilon} e^{\frac{y}{2}} - \int_{-\varepsilon}^{y-\log x} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{-\frac{\tau}{2}}\, d\tau. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen folgen leicht aus der Positivität (bzw. Negativität) von $M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}$ in $(x, \exp(\varepsilon)x)$ (bzw. $(\exp(-\varepsilon)x, x)$) und dem Verschwinden von $M^{(\psi)}_{x,c,\varepsilon}$ außerhalb von $[\exp(-\varepsilon)x, \exp(\varepsilon)x]$. □

Insbesondere liefert $\psi_{c,\varepsilon}(x)$ somit eine untere bzw. obere Abschätzung für $\psi(e^{\pm\varepsilon}x)$. Diese kann durch geschicktes Abschätzen der Summen in (1.16) und (1.17) unter Verwendung von Siebmethoden noch einmal deutlich verbessert werden, was Gegenstand des 3. Kapitels sein wird.

1.2.1 Die explizite Formel für $\psi_{c,\varepsilon}$

Die Weil-Barnersche Formel liefert eine zu (1.2) ähnliche explizite Formel für $\psi_{c,\varepsilon}$, von der wir eine approximative Variante beweisen. Hierzu führen wir die Turingsche Θ-Notation ein:

Definition 1.1. Für Funktionen $f, g\colon U \to \mathbb{C}$ sagen wir, *dass*

$$f(t) = \Theta(g(t))$$

für $t \in U$ gilt, falls für alle derartige t

$$|f(t)| \leq g(t)$$

gilt.

Theorem 1.1. *Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ und sei $\log(x) > \frac{2}{|\log \varepsilon|}$. Sei ferner*

$$C = -\frac{\gamma}{2} - 1 - \frac{1}{2}\log \pi$$

und

$$a_{c,\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}}\ell_{c,\varepsilon}\Big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\Big).$$

Dann gilt

$$\psi_{c,\varepsilon}(x) = x - \sum_{\rho}{}^{*} a_{c,\varepsilon}(\rho)\frac{x^\rho - 1}{\rho} + C - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) + \Theta(8\varepsilon|\log \varepsilon|). \tag{1.18}$$

Beweis. Sei

$$\Delta = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} f_x * \eta_{c,\varepsilon} - f_x.$$

Dann gilt offenbar

$$\psi_{c,\varepsilon}(x) = -\frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} w_s(\widehat{f_x * \eta_{c,\varepsilon}}) + w_\infty(f_x) + w_\infty(\Delta).$$

Da

$$\frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} w_s(\widehat{f_x * \eta_{c,\varepsilon}}) = 1 - x - \log(x) + \sum_{\rho}{}^{*} a_{c,\varepsilon}(\rho)\frac{x^\rho - 1}{\rho}$$

gilt und $w_\infty(f_x)$ aus dem Beweis von Satz 1.1 bereits bekannt ist, genügt zum Beweis des Satzes der Nachweis von

$$|w_\infty(\Delta)| \leq 8\varepsilon|\log \varepsilon|. \tag{1.19}$$

Hierzu nutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.1. *Seien ε und x wie in der Formulierung des Satzes. Dann verschwindet $\Delta(t)$ für $t \notin B_\varepsilon(0) \cup B_\varepsilon(\log x)$. Ferner gilt*

$$\Delta(t) + \Delta(-t) = 2\Delta(0) + \Theta(2t) \qquad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon, \tag{1.20}$$

$$|\Delta(0)| \leq \varepsilon, \tag{1.21}$$

sowie

$$|\Delta(t)| \leq \frac{1}{2}e^{\varepsilon/2}\sqrt{x} \qquad \text{für } |t - \log(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.22}$$

Beweis des Lemmas. Die Aussage über das Verschwinden von Δ außerhalb von $B_\varepsilon(0) \cup B_\varepsilon(\log x)$ ist nach dem bisher Gesagten klar.

Für das Weitere benutzen wir die großzügige Abschätzung

$$e^{t+\tau} = e^t + \Theta(2|\tau|). \tag{1.23}$$

Aus

$$e^{t/2} = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{\frac{t-\tau}{2}}\, d\tau$$

erhalten wir mit

$$\Delta(0) = \frac{1}{2\lambda_{c,\varepsilon}} \int_0^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\big(e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}\big)\, d\tau = \Theta(\varepsilon) \tag{1.24}$$

die Ungleichung (1.21) und zum Beweis von (1.20) nutzen wir

$$\begin{aligned}
\Delta(t) + \Delta(-t) &= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_t^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\big(e^{\frac{\tau-t}{2}} - e^{\frac{t-\tau}{2}}\big)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_t^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\big(e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}\big)\, d\tau + \Theta(t) \\
&= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_0^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\big(e^{\tau/2} - e^{-\tau/2}\big)\, d\tau + \Theta(2t).
\end{aligned}$$

Die verbleibende Ungleichung (1.22) entnimmt man unschwer der wegen $\log x > 2\varepsilon$ in $B_\varepsilon(\log x)$ gültigen Gleichung

$$\Delta(t) = \frac{\chi_{(\log x,\infty)}(t)}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_{t-\log x}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{\frac{t-\tau}{2}}\, d\tau - \frac{\chi_{(0,\log x)(t)}}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^{t-\log x} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) e^{\frac{t-\tau}{2}}\, d\tau.$$

□

Zum Beweis von (1.19) unterteilen wir nun das Integral in $w_\infty(\Delta)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\Delta(t) + \Delta(-t) - 2\Delta(0)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt &= \int_0^\varepsilon \frac{\Delta(t) + \Delta(-t) - 2\Delta(0)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt \\
&\quad - 2\int_\varepsilon^\infty \frac{\Delta(0)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt + \int_{B_\varepsilon(\log x)} \frac{\Delta(t)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Da die Abbildung $t \mapsto \frac{1-\exp(-2t)}{t}$ in $(0,\infty)$ monoton fällt, gilt für $0 \le t \le 1/10$ die Ungleichung

$$1 - e^{-2t} \ge 1.8\, t \tag{1.26}$$

und somit erhalten wir für das erste Integral auf der rechten Seite von (1.25), unter Ausnutzung von (1.20), die Abschätzung

$$\int_0^\varepsilon \frac{|\Delta(t) + \Delta(-t) - 2\Delta(0)|}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt \le \int_0^\varepsilon \frac{2t}{1.8\, t}\, dt \le 1.2\, \varepsilon.$$

Für das zweite Integral nutzen wir (1.21), sowie die Tatsache, dass $|\log \varepsilon| \ge 2.3$ für $\varepsilon < \frac{1}{10}$ gilt, und erhalten

$$2|\Delta(0)| \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-t/2}}{1 - e^{-t}}\, dt \le 2|\Delta(0)| \left|\log \frac{e^{\varepsilon/2} - 1}{e^{\varepsilon/2} + 1}\right| \le 2\,\varepsilon \left|\log \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2.1}\right| \le 3.4\, \varepsilon\, |\log \varepsilon|.$$

Es verbleibt die Abschätzung des dritten Integrals. Analog zu (1.26) erhalten wir unter Ausnutzung von $\log x \geq \frac{2}{|\log \varepsilon|}$ die für $t \in B_\varepsilon(\log x)$ gültige Abschätzung

$$1 - e^{-2t} \geq 1 - \exp(2\varepsilon - 2\log x) \geq 1 - \exp\Big(-\frac{4}{|\log \varepsilon|}\Big) \geq \frac{2}{|\log \varepsilon|}.$$

Aus dieser folgt zusammen mit (1.22) die Schranke

$$\int_{B_\varepsilon(\log x)} \frac{|\Delta(t)|}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt \leq \frac{1}{2} e^{\varepsilon/2} \sqrt{x} \frac{e^{\varepsilon/2}}{\sqrt{x}} \int_{B_\varepsilon(\log x)} \frac{dt}{1 - e^{-2t}} \leq \varepsilon\, |\log \varepsilon|.$$

Der Gaußsche Digamma-Satz [AAR99, Theorem 1.2.7] liefert noch

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3\log 2$$

und somit

$$\left|\frac{\Gamma'}{\Gamma}\Big(\frac{1}{4}\Big) - \log \pi\right| \leq 5.4. \tag{1.27}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$|w_\infty(\Delta)| \leq \varepsilon(5.4 + 1.2 + (3.4 + 1)|\log \varepsilon|) \leq 8\, \varepsilon\, |\log \varepsilon|.$$

□

1.2.2 Abschneiden der Summe über Nullstellen

Der natürliche Punkt für das Abschneiden der Summe über Nullstellen in (1.18) ist $\frac{c}{\varepsilon}$, da die Logansche Funktion $\ell_{c,\varepsilon}$ bis zu diesem Punkt schnell fällt und anschließend zu oszillieren beginnt und nur noch langsam abklingt. Für Betrachtungen ohne Annahme der Riemannschen Vermutung kann es aber sinnvoll sein, den Abschneidepunkt weiter zu senken, wenn die Riemannsche Vermutung zumindest für Nullstellen mit einem Imaginärteil bis $\frac{c}{\varepsilon}$ bekannt ist.

Satz 1.3. *Sei $x > 1$, $\varepsilon \leq 10^{-3}$ und $c \geq 3$. Dann gilt*

$$\sum_{|\Im(\rho)| > \frac{c}{\varepsilon}}^{*} \left| a_{c,\varepsilon}(\rho) \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq 0.32 \frac{x^h}{\sinh(c)} e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}} \log(3c) \log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big), \tag{1.28}$$

wobei unter Annahme der Riemannschen Vermutung $h = \frac{1}{2}$ gewählt werden kann und ansonsten $h = 1$ zu setzen ist.

Sei ferner $a \in (0,1)$ derart, dass $a\frac{c}{\varepsilon} \geq 10^3$ gilt. Falls die Riemannsche Vermutung für alle Nullstellen mit Imaginärteil in $(0, \frac{c}{\varepsilon}]$ gilt, so haben wir

$$\sum_{\frac{ac}{\varepsilon} < |\Im(\rho)| \leq \frac{c}{\varepsilon}}^{*} \left| a_{c,\varepsilon}(\rho) \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq \frac{1 + 11c\varepsilon}{\pi c a^2} \log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big) \frac{\cosh(c\sqrt{1 - a^2})}{\sinh(c)} \sqrt{x}. \tag{1.29}$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zwei Lemmata. Das erste ist eine Verbesserung der Rechnungen in [FKBJ].

Lemma 1.2. *Sei* $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ *und sei* $c \geq 3$. *Dann gilt*

$$\sum\nolimits^*_{|\Im(\rho)| > \frac{c}{\varepsilon}} \frac{\left|\ell_{c,\varepsilon}\left(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\right)\right|}{|\Im(\rho)|} \leq 0.32 \frac{e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}}}{\sinh(c)} \log(3c) \log\left(\frac{c}{\varepsilon}\right). \tag{1.30}$$

Beweis. Sei $z = x + iy$ mit $|y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Wir zeigen zunächst, dass für die Logansche Funktion für $|x| \geq c$ und $|y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ die Ungleichung

$$|\ell_{c,1}(z)| \leq \frac{c}{\sinh(c)} e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}} \min\left\{1, \frac{1}{|x| - c}\right\} \tag{1.31}$$

gilt. Offenbar können wir uns dabei auf den Fall $x, y \geq 0$ beschränken. Wir untersuchen zunächst den Quotienten

$$\frac{\sin(\sqrt{z^2 - c^2})}{\sqrt{z^2 - c^2}}.$$

Es gilt einerseits

$$\left|\frac{\sin(w)}{w}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} e^{iwt}\, dt\right| \leq e^{|\Im(w)|} \tag{1.32}$$

und andererseits

$$\left|\frac{\sin(w)}{w}\right| \leq \frac{e^{|\Im(w)|}}{|w|}. \tag{1.33}$$

Wir haben also $\left|\Im(\sqrt{z^2 - c^2})\right|$ abzuschätzen. Dazu zeigen wir zunächst für beliebige $y > 0$, dass die Abbildung $x \mapsto \Im(\sqrt{z^2 - c^2})$ in $(0, \infty)$ monoton fallend ist, wenn wir die in $(0, \infty) \times i(0, \infty)$ holomorphe Wurzel mit positivem Imaginärteil wählen. Diese ist gerade durch den Hauptzweig des Logarithmus gegeben. Sei also $y > 0$ und es gelte $(a + ib)^2 = z^2 - c^2$, sowie $b > 0$. Dann erfüllen a, b, x und y die Gleichung

$$\frac{x^2 y^2}{b^2} - b^2 = x^2 - y^2 - c^2. \tag{1.34}$$

Somit strebt b für $x \to 0$ gegen $\sqrt{y^2 + c^2} > y$ und für $x \to \infty$ gegen y. Ferner ist b als Funktion von x reell-analytisch und das Vorliegen eines lokalen Maximums in $(0, \infty)$ implizierte $b^2 = y^2$, im Widerspruch zu (1.34).

Wir erhalten daher für $x \geq c$ und $0 \leq y \leq \frac{\varepsilon}{2}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 \leq \Im\big(\sqrt{z^2 - c^2}\big) \leq \Im\big(\sqrt{(c + iy)^2 - c^2}\big) &= \sqrt{|2ciy - y^2|} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{y}{2c}\right)\right) \\ &\leq \sqrt{(2c + \varepsilon)y} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{1200}\right) \leq 0.71\sqrt{2cy}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

wobei die für $t \geq 0$ gültige Ungleichung $\arctan(t) \leq t$ sowie die Monotonie des Sinus in $[0, \frac{\pi}{2}]$ benutzt wurde. Hieraus folgt zusammen mit (1.32) die Abschätzung

$$|\ell_{c,1}(z)| \leq \frac{e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}}}{\sinh c}$$

für $x \geq c$.

Sein nun $x \geq c + 1$. Dann gilt wegen $y^2 \leq 2c$ offenbar

$$\left|\sqrt{z^2 - c^2}\right|^2 \geq \left|\Re(z^2 - c^2)\right| = (x - c)^2 + 2c(x - c) - y^2 \geq (x - c)^2 \tag{1.36}$$

und somit erhalten wir mit (1.33) den zweiten Teil,

$$|\ell_{c,1}(z)| \le \frac{c}{\sinh(c)} e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}} \frac{1}{|x|-c},$$

der Ungleichung (1.31).

Als nächstes benötigen wir eine Abschätzung der Nullstellenzählfunktion $N(t)$, deren Wert die Summe der Vielfachheiten der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion mit Imaginärteil in $(0,t]$ ist. Dazu nutzen wir das Rossersche Resultat, nach welchem

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + \frac{7}{8} + \Theta(0.137\log T + 0.443\log\log T + 1.588). \tag{1.37}$$

für $T \ge 2$ gilt (siehe [Ros41, Seite 223]). Es sind zwar inzwischen bessere Abschätzungen für das Restglied bekannt, aber die Auswirkung auf die Abschätzung der betrachteten Summe über Nullstellen ist äußerst gering, weshalb sich eine konservative Wahl empfiehlt. Wir nutzen sogar das schwächere Resultat

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e} + \Theta(0.82\log T) \tag{1.38}$$

für $T \ge 100$, welches unmittelbar aus (1.37) folgt.

Wir wollen zunächst den Beitrag der Nullstellen mit Imaginärteil in $(\frac{c}{\varepsilon}, \frac{c+1}{\varepsilon}]$ abschätzen. Sei dazu $T \ge 100$ und $M \ge 0$. Dann erhalten wir aus (1.38), unter Verwendung der für $a, b > 0$ gültigen Ungleichung $\log(a+b) \le \log(a) + \frac{b}{a}$, die Abschätzung

$$\begin{aligned} N(T+M) - N(T) &= \frac{T+M}{2\pi}\log\frac{T+M}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{M}{2\pi} + \Theta(1.64\log(T+M)) \\ &= \frac{M}{2\pi}\log\frac{T+M}{2\pi} + \frac{T}{2\pi}\log\frac{T+M}{T} - \frac{M}{2\pi} + \Theta\big(1.64\log(T+M)\big) \\ &< \frac{M}{2\pi}\log\frac{T+M}{2\pi} + \log(T+M) < \frac{M+18}{2\pi}\log\frac{T+M}{2\pi}. \end{aligned}$$

Sei nun

$$f(z) = \frac{\sinh(c)}{c} e^{-0.71\sqrt{c\varepsilon}} \ell_{c,\varepsilon}(z).$$

Aus (1.31) und der vorangegangenen Abschätzung, angewandt mit $T = \frac{c}{\varepsilon}$ und $M = \frac{1}{\varepsilon}$ erhalten wir somit

$$\sum_{\substack{\rho \\ \frac{c}{\varepsilon} < \Im(\rho) \le \frac{c+1}{\varepsilon}}} \frac{\left|f\left(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\right)\right|}{|\Im(\rho)|} \le \frac{\varepsilon}{c}\frac{\varepsilon^{-1}+18}{2\pi}\log\frac{c+1}{2\pi\varepsilon} \le \frac{0.16}{c}\log\frac{c}{\pi\varepsilon}. \tag{1.39}$$

Den Beitrag der Nullstellen mit Imaginärteil $> \frac{c+1}{\varepsilon}$ schätzen wir über ein Riemann-Stieltjes-Integral ab:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \\ \Im(\rho) > \frac{c+1}{\varepsilon}}} \frac{\left|f\left(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\right)\right|}{|\Im(\rho)|} &\le -\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty} N(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(\varepsilon t - c)}\right) dt - \frac{\varepsilon}{c+1} N\Big(\frac{c+1}{\varepsilon}\Big) \\ &\le -\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty} N(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(\varepsilon t - c)}\right) dt - \frac{1}{2\pi}\log\frac{c+1}{2\pi\varepsilon e} \\ &\quad + \Theta\Big(0.82\frac{\varepsilon}{c}\log\frac{c+1}{\varepsilon}\Big). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Wir nutzen (1.38), um das Integral auf der vorletzten Zeile von (1.40) weiter abzuschätzen. Der Hauptterm $\frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi e}$ liefert den Beitrag

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty} t\log\frac{t}{2\pi e}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(\varepsilon t-c)}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\log\frac{c+1}{2\pi\varepsilon e} + \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\log(\frac{t}{2\pi})}{t(\varepsilon t-c)}\,dt,$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite den zweiten Term auf der vorletzten Zeile von (1.40) weghebt. Das Integral können wir weiter abschätzen zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty}\frac{\log\frac{t}{2\pi}}{t(\varepsilon t-c)}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\infty}\frac{\log(\frac{t+c}{2\pi\varepsilon})}{(t+c)t}\,dt \\
&\le \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\log(\frac{c}{\pi\varepsilon})}{c}\int_1^c\frac{dt}{t} + \int_c^\infty\frac{\log(\frac{t+c}{2\pi\varepsilon})}{t^2}\,dt\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi c}\log\big(\frac{c}{\pi\varepsilon}\big)\cdot\log c + \frac{\log\frac{2c}{2\pi}}{2\pi c} + \frac{1}{2\pi}\int_c^\infty\frac{dt}{t(t+c)} \\
&\le \frac{1}{2\pi c}\Big(\log\big(\frac{c}{\pi\varepsilon}\big)\cdot\log c + \log\frac{c}{\pi} + 1\Big) \le \frac{0.16}{c}\log(c)\log\frac{c}{\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{1.41}$$

Für die Abschätzung des Beitrags des Restterms zum Integral in der zweiten Zeile von (1.40) nutzen wir

$$\begin{aligned}
-\int_{\frac{c+1}{\varepsilon}}^{\infty}\log t\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t(\varepsilon t-c)}\right)dt &= \varepsilon\int_1^\infty\frac{\log\frac{t+c}{\varepsilon}}{(t+c)^2t}\,dt + \varepsilon\int_1^\infty\frac{\log\frac{t+c}{\varepsilon}}{(t+c)t^2}\,dt \\
&\le 2\varepsilon\int_1^\infty\frac{\log\frac{t+c}{\varepsilon}}{(t+c)t^2} = 2\varepsilon\int_1^\infty\frac{\log(t+c)-\log\varepsilon}{(t+c)t^2} \\
&\le 2\varepsilon\int_1^\infty\frac{dt}{t^2} - 2\varepsilon\log\varepsilon\int_1^\infty\frac{dt}{t^3} = 2\varepsilon-\varepsilon\log\varepsilon \le \varepsilon\log\frac{c}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Der besagte Beitrag ist also durch $\varepsilon\log\frac{c}{\varepsilon}$ beschränkt und man sieht unschwer, dass der Θ-Term auf der rechten Seite von (1.40) durch $2\varepsilon\log\frac{c}{\varepsilon}$ beschränkt ist. Da die Nullstellen mit positivem Imaginärteil über die Abbildung $\rho\mapsto 1-\rho$ in Bijektion mit den Nullstellen mit negativem Imaginärteil stehen, erhalten wir also aus (1.39) und (1.40) mit den obigen Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\rho\\ |\Im(\rho)|>\frac{c}{\varepsilon}}}\frac{\big|f\big(\frac{\rho}{i}-\frac{1}{2i}\big)\big|}{|\Im(\rho)|} &\le \frac{2}{c}\Big[0.16\log\frac{c}{\varepsilon} + 0.16\log\big(\frac{c}{\varepsilon}\big)\log(c) + 3\varepsilon\log\big(\frac{c}{\varepsilon}\big)\Big] \\
&\le \frac{0.32}{c}\log(3c)\log\frac{c}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

woraus sich die behauptete Ungleichung ergibt. □

Lemma 1.3. *Seien $c,\varepsilon>0$ und sei $a\in(0,1)$, so dass $\frac{ac}{\varepsilon}\ge 10^3$ gilt. Dann haben wir*

$$\sum_{\frac{ac}{\varepsilon}<|\Im(\rho)|\le\frac{c}{\varepsilon}}\frac{\ell_{c,\varepsilon}(\Im(\rho))}{|\Im(\rho)|} \le \frac{1+11\cdot c\varepsilon}{\pi c a^2}\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big)\frac{\cosh\big(c\sqrt{1-a^2}\big)}{\sinh(c)}.\tag{1.42}$$

Beweis. Sei
$$\tilde{N}(t) = \frac{t}{2\pi}\log\frac{t}{2\pi e} + \frac{7}{8} \quad \text{und} \quad R(t) = N(t) - \tilde{N}(t),$$
wobei N wieder die Nullstellenzählfunktion bezeichnet. Dann erhalten wir aus (1.37) die Schranke
$$R(t) = \Theta(0.5\log t) \tag{1.43}$$
für $t \geq 10^3$.

Die Nullstellen mit positivem bzw. negativem Imaginärteil tragen jeweils die Hälfte zur betrachteten Summe bei, weshalb wir uns, wie schon im vorangegangenen Lemma, auf die Betrachtung der Summe über die Nullstellen mit positivem Imaginärteil beschränken können.

Offenbar haben wir
$$\begin{aligned}\sum_{a\frac{c}{\varepsilon} < \Im(\rho) \leq \frac{c}{\varepsilon}} \frac{\ell_{c,\varepsilon}(\Im(\rho))}{\Im(\rho)} &= \int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{l_c(\varepsilon t)}{t}\, d(\tilde{N}(t) + R(t)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \ell_{c,1}(\varepsilon t)\log\frac{t}{2\pi}\frac{dt}{t} + \int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{\ell_{c,1}(\varepsilon t)}{t}\, dR(t).\end{aligned} \tag{1.44}$$

Wir schätzen zunächst das erste Integral in der letzten Zeile von (1.44) ab. Dazu nutzen wir die im Integrationsbereich gültige Abschätzung
$$0 < \frac{1}{t}\log\frac{t}{2\pi} \leq \frac{\varepsilon^2}{(ac)^2}\log\Big(\frac{c}{2\pi\varepsilon}\Big)t.$$
Mit der Substitution $u = \sqrt{c^2 - (\varepsilon t)^2}$ erhalten wir dann
$$\begin{aligned}0 < \frac{1}{2\pi}\int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \ell_{c,1}(\varepsilon t)\log\frac{t}{2\pi}\frac{dt}{t} &\leq \frac{1}{2\pi(ac)^2}\log\Big(\frac{c}{2\pi\varepsilon}\Big)\frac{c}{\sinh(c)}\int_0^{c\sqrt{1-a^2}} \sinh(u)\, du \\ &\leq \frac{1}{2\pi ca^2}\log\Big(\frac{c}{2\pi\varepsilon}\Big)\frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c)}.\end{aligned} \tag{1.45}$$

Für das zweite Integral in der letzten Zeile von (1.44) haben wir
$$\begin{aligned}\left|\int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{\ell_{c,1}(\varepsilon t)}{t}\, dR(t)\right| &= \left|\left[\frac{\ell_{c,1}(\varepsilon t)}{t}R(t)\right]_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} - \int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\ell_{c,1}(\varepsilon t)}{t}\Big)R(t)\, dt\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{ac}\ell_{c,1}(a\,c)\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big) - 0.5\int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{d}{dt}\Big(\frac{\ell_{c,1}(\varepsilon t)}{t}\Big)\log(t)\, dt \\ &\leq 1.5\frac{\varepsilon}{ac}\ell_{c,1}(ac)\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big) + 0.5\int_{a\frac{c}{\varepsilon}}^{\frac{c}{\varepsilon}} \frac{\ell_{c,1}(\varepsilon\, t)}{t^2}\, dt \\ &\leq 1.6\frac{\varepsilon}{ac}\ell_{c,1}(ac)\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big).\end{aligned} \tag{1.46}$$

Dabei wurde in der zweiten Zeile benutzt, dass $\ell_{c,\varepsilon}(t)/t$ im Integrationsbereich monoton fällt und in der letzten Zeile, dass $\log(\frac{c}{\varepsilon}) \geq 6$ gilt. Da die Funktion $t \mapsto \frac{t\cosh t}{\sinh t}$ in $[0,\infty)$ monoton wächst, haben wir
$$c\sqrt{1-a^2}\,\frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c\sqrt{1-a^2})} \geq 1$$

und können somit (1.46) weiter abschätzen zu

$$1.6\frac{\varepsilon c}{ac}\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big)\frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c)}.$$

Zusammen mit (1.45) erhalten wir also die Abschätzung

$$\frac{1}{2\pi ca^2}\log\Big(\frac{c}{2\pi\varepsilon}\Big)+1.6\frac{\varepsilon c}{ac}\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big)\le\frac{1}{2}\frac{1+11\,c\,\varepsilon}{\pi ca^2}\log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big),$$

was gerade der Hälfte der behaupteten Schranke für die gesamte Summe entspricht. □

Beweis von Satz 1.3. Da

$$\left|a_{c,\varepsilon}(\rho)\frac{x^\rho}{\rho}\right|\le\frac{\left|\ell_{c,\varepsilon}(\frac{\rho}{i}-\frac{1}{2i})\right|x^h}{|\Im(\rho)|}$$

gilt, folgt Satz 1.3 unmittelbar aus den vorangegangenen Lemmata. □

Kapitel 2

Analytische Berechnung der Primzahlzählfunktion

Die Konstruktion der modifizierten Tschebyschow-Funktion aus dem vorherigen Kapitel lässt sich auch auf die Riemannsche Primzahlzählfunktion $\pi^*(x)$ übertragen und liefert dann eine Variante der analytischen Methode zur Berechnung von $\pi(x)$ [LO87]. Die ursprüngliche analytische Methode basiert auf der numerischen Berechnung einer Modifikation der bekannten Integraldarstellung

$$\pi_0^*(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \log \zeta(s) \frac{x^s}{s} \, ds, \tag{2.1}$$

wobei $\log \zeta(s)$ die holomorphe Ausdehnung des reellen Logarithmus von $\zeta(\sigma)$ in die Halbebene $\Re(s) > 1$ bezeichnet.

Inzwischen sind Varianten dieser Methode bekannt, die stattdessen auf der Auswertung einer Summe über die Nullstellen der Zetafunktion basieren [FKBJ, Pla], was zu einer kleineren Konstante in der Laufzeit führt. Die im Folgenden beschriebene Methode vereinheitlicht die beiden Methoden in [FKBJ], die ebenfalls den Logan-Kern verwenden. Sie ist dabei allgemeiner anwendbar als die Erste und simpler als die Zweite, die aus der Notwendigkeit heraus konstruiert wurde, den minimalen Bedarf an Nullstellen zu senken.

Die Methode in [Pla] basiert auf der Arbeit von Galway [Gal04], der zur Konvergenzbeschleunigung den Gauß-Kern verwendet. Das Ergebnis scheint aber nicht besser zu sein als jenes, welches der Logan-Kern liefert, und der Logan-Kern hat den Vorzug, die Summe über Nullstellen scharf abzuschneiden und bandbreitenbeschränkt zu sein, was auf eine endliche Korrektursumme über Primzahlpotenzen führt.

Die im Folgenden beschriebene Methode wurde, basierend auf den Vorarbeiten mit J. Franke, Th. Kleinjung und A. Jost, implementiert und zur Berechnung von

$$\pi(10^{25}) = 176,846,309,399,143,769,411,680$$

verwendet, was derzeit der größte bekannte Wert an einer Zehnerpotenz ist. Ferner wurde mit dieser Methode auch nach der Berechnung in [Pla] ein zweites Mal der Wert

$$\pi(10^{24}) = 18,435,599,767,349,200,867,866$$

ohne Annahme der Riemannschen Vermutung bestätigt.

2.1 Eine modifizierte Primzahlzählfunktion

Bei der Übertragung der Konstruktionsmethode für die modifizierte Tschebyschow-Funktion aus dem vorangegangenen Kapitel auf die Riemannsche Primzahlzählfunktion treten zwei zusätzliche Probleme auf, die die Lage technisch etwas schwieriger machen. Zum Ersten ist die Herleitung der Riemannschen expliziten Formel aus der Weil-Barner-Formel, die formal durch Anwendung der Weil-Barner-Formel auf die Testfunktion $\chi^*_{(-\infty,\log x)}(t)\frac{e^{t/2}}{t}$ folgt, technisch anspruchsvoller als die der von Mangoldtschen expliziten Formel. Und zum Zweiten ist die Funktion $\frac{e^{t/2}}{t}$ keine Eigenfunktion der Faltung mit dem Logan-Kern mehr.

Das zweite Problem lässt sich teilweise durch eine Modifikation der Testfunktion beheben (im Gegensatz zur Modifikation des Kerns in [FKBJ]). Wir definieren zunächst einige Hilfsfunktionen. Sei

$$f_k(t) = \frac{e^{t/2}}{t^k}, \tag{2.2}$$

sei $A_{c,\varepsilon} = -\ell''_{c,\varepsilon}(0)/2$, und für $|t| > \varepsilon$ sei

$$\phi_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}}\Big(\chi_{(-\infty,\log x]}\cdot\Big(f_1 + A_{c,\varepsilon}\Big(f_2 - 2f_3\Big)\Big)\Big) * \eta_{c,\varepsilon}(t). \tag{2.3}$$

Dann definieren wir für $\varepsilon < \log 2$ die modifizierte Primzahlzählfunktion durch

$$\pi^*_{c,\varepsilon}(x) = -w_f(\phi_{x,c,\varepsilon}) = \sum_{p^m}\frac{1}{m}\Phi_{x,c,\varepsilon}(p^m), \tag{2.4}$$

wobei wir

$$\Phi_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{\log t}{\sqrt{t}}\phi_{x,c,\varepsilon}(\log t) \tag{2.5}$$

setzen.

Im Gegensatz zur modifizierten Tschebyschow-Funktion sind wir nun in der Situation, wo $\phi_{x,c,\varepsilon}$ und f_1 auf $[\log 2, \log x - \varepsilon]$ nicht mehr übereinstimmen; der Korrekturterm $A_{c,\varepsilon}(f_2 - 2f_3)$ verkleinert lediglich ihre Differenz. Folglich ist die Differenz $\pi^*(x) - \pi^*_{c,\varepsilon}(x)$ nicht mehr alleine eine Funktion der Primzahlpotenzen mit Logarithmus in $B_\varepsilon(\log x)$, sondern hängt auch von den Primzahlpotenzen $\leq e^{-\varepsilon}x$ ab. Dieser Beitrag stellt sich aber als vernachlässigbar heraus.

Um die Fehlerabschätzungen etwas zu vereinfachen, beschränken wir gelegentlich den Parameterbereich durch

$$\frac{1}{2}\log x \leq c \leq 2\log x \tag{2.6}$$

und

$$x^{-2/3} \leq \varepsilon \leq x^{-1/3}. \tag{2.7}$$

Für die Berechnung von $\pi_{c,\varepsilon}(x)$ ist dies praktisch keine Einschränkung. Denn die untere Schranke für c ist sogar unter Annahme der Riemannschen Vermutung notwendig, um $\pi_{c,\varepsilon}(x)$ exakt zu berechnen, und die obere Schranke ist immer noch groß genug, um den Fehler $\ll x^{\eta-1}$ für jedes $\eta > 0$ zu halten. Der Bereich für ε ist ebenfalls recht weit gefasst und erlaubt auch Anwendungen, in denen die Nullstellen bis $x^{2/3}$ zur Berechnung von $\pi_{c,\varepsilon}(x)$ herangezogen werden. Dies wäre zwar für einzelne Auswertungen ineffizient, aber es ist durchaus interessant, wenn $\pi^*_{c,\varepsilon}(x)$ für viele Werte von x gleichzeitig ausgewertet werden soll.

Wir untersuchen zunächst die Differenz $\pi^*(x) - \pi^*_{c,\varepsilon}(x)$.

Satz 2.1. *Sei* $x > 10^{10}$, $x^{-2/3} < \varepsilon < x^{-1/3}$, *sei* $\frac{1}{2}\log x < c < 2\log x$ *und sei*

$$M^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}}\Big[\mu_{c,\varepsilon}\big(\log\tfrac{t}{x}\big) + \Big(\frac{1}{\log t} - \frac{1}{2}\Big)\Big(\mu_{c,\varepsilon}\big(\log\tfrac{t}{x}\big)\log\tfrac{t}{x} - \nu_{c,\varepsilon}\big(\log\tfrac{t}{x}\big)\Big)\Big]$$

Dann gilt

$$\pi^*_{c,\varepsilon}(x) = \pi^*(x) + \sum_{e^{-\varepsilon}x<p^m<e^{\varepsilon}x} \frac{1}{m} M^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m) + \Theta\Big(0.82\frac{\varepsilon^3 x}{\log(\varepsilon x)^2}\Big). \tag{2.8}$$

Wir beweisen zunächst einige Lemmata.

Lemma 2.1. *Sei* $\varepsilon \le 0.001$, $c \ge 1$ *und sei* $|t| \ge \log 2$. *Dann gilt*

$$\phi_{\infty,c,\varepsilon}(t) = f_1(t) + \Theta\Big(39\frac{\varepsilon^4}{c^2} f_2(t)\Big).$$

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$, $|t| \ge \log 2$ und sei

$$g_k(\tau) = e^{-\tau/2}\Big(\frac{t^2}{(t-\tau)^k} - t^{2-k}\Big).$$

Dann haben wir

$$f_k * \eta_{c,\varepsilon}(t) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\frac{e^{\frac{t-\tau}{2}}}{(t-\tau)^k}\,d\tau = \lambda_{c,\varepsilon} f_k(t) + f_2(t)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\eta_{c,\varepsilon}(\tau) g_k(\tau)\,d\tau. \tag{2.9}$$

Hieraus erhalten wir das behauptete Resultat durch Abschätzen des Integrals auf der rechten Seite mittels Taylor-Approximation. Dazu verwenden wir die aus der Fourier-Analysis bekannte Beziehung

$$\ell^{(n)}_{c,\varepsilon}(0) = i^n \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\tau^n\,d\tau. \tag{2.10}$$

Da $\eta_{c,\varepsilon}$ eine gerade Funktion ist, genügt dabei die Betrachtung der ungeraden Terme in der Taylor-Entwicklung von g_k im Nullpunkt. Offenbar gilt $g_k(0) = 0$, und für die zweite Ableitung bekommen wir

$$g''_k(\tau) = e^{-\tau/2}\Big[-\frac{t^{2-k}}{4} + \frac{1}{4}\frac{t^2}{(t-\tau)^k} - \frac{kt^{k+1}}{(t-\tau)^2} + \frac{k(k+1)t^2}{(t-\tau)^{k+2}}\Big].$$

Darüber hinaus benötigen wir für $k = 1$ noch die vierte Ableitung. Diese berechnet sich zu

$$g^{(4)}_1(\tau) = e^{-\tau/2}\Big[\frac{1}{16}\frac{t\tau}{t-\tau} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{(t-\tau)^2} + \frac{3t^2}{(t-\tau)^3} - \frac{12t^2}{(t-\tau)^4} + \frac{24t^2}{(t-\tau)^5}\Big].$$

Nun gilt für $|\tau| \le \varepsilon \le 0.001$ die Abschätzung

$$\Big|\frac{t}{t-\tau}\Big| \le \frac{\log 2}{\log 2 - 0.001} \le 1.002,$$

und folglich erhalten wir

$$|g''_k(\tau)| \le 1.002^{k+2} e^{0.0005}\Big[\frac{1}{2\log(2)^{k-2}} + \frac{k}{\log(2)^{k-1}} + \frac{k(k+1)}{\log(2)^k}\Big] \le \begin{cases} 16.1 & k = 2, \\ 43.5 & k = 3, \end{cases}$$

sowie

$$\left|g_1^{(4)}(\tau)\right| \;\leq\; 1.002^5 \;\cdot\; e^{0.0005}\Big[\frac{1}{16}0.001 \;+\; \frac{1}{2} \;+\; \frac{3}{\log(2)} \;+\; \frac{12}{\log(2)^2} \;+\; \frac{24}{\log(2)^3}\Big] \;\leq\; 103.$$

Damit bekommen wir also die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
g_1(\tau) &= \alpha_1\tau + \frac{\tau}{2}\Big(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}\Big) + \beta_1\tau^3 + \Theta(4.3\tau^4),\\
g_2(\tau) &= \alpha_2\tau + \Theta(8.1\tau^2),
\end{aligned}$$

und

$$g_3(\tau) = \alpha_3\tau + \Theta(21.8\tau^2)$$

für passende α_k und passendes β_1. Hieraus erhalten wir mit (2.10)

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) g_k(\tau)\, d\tau\right| \leq \begin{cases} 8.1\left|l''_{c,\varepsilon}(0)\right| & k=2,\\ 21.8\left|l''_{c,\varepsilon}(0)\right| & k=3,\end{cases} \tag{2.11}$$

und

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) g_1(\tau)\, d\tau = -\frac{l''_{c,\varepsilon}(0)}{2}\Big(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t}\Big) + \Theta(4.3\,\ell^{(4)}_{c,\varepsilon}(0)). \tag{2.12}$$

Es verbleibt die Abschätzung von $\ell''_{c,\varepsilon}(0)$ und $\ell^{(4)}_{c,\varepsilon}(0)$. Für $c \geq 1$ gilt

$$0 \leq \frac{\cosh(c)}{\sinh(c)} - \frac{1}{c} = 1 + \frac{e^{-c}}{\sinh(c)} - \frac{1}{c} \leq 1 + \frac{1}{c}\Big(\frac{e^{-1}}{\sinh(1)} - 1\Big) \leq 1.$$

Ferner folgt aus (2.10) unmittelbar, dass $l''_{c,\varepsilon}(0) < 0$ und $l^{(4)}_{c,\varepsilon}(0) > 0$ gilt. Folglich erhalten wir

$$0 < -\ell''_{c,\varepsilon}(0) = \frac{\varepsilon^2}{c}\Big(\frac{\cosh(c)}{\sinh(c)} - \frac{1}{c}\Big) \leq \frac{\varepsilon^2}{c} \tag{2.13}$$

und

$$0 < \ell^{(4)}_{c,\varepsilon}(0) = \frac{9\varepsilon^4}{c^2}\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{\cosh(c)}{c\sinh(c)} + \frac{1}{3}\Big) \leq \frac{3\varepsilon^4}{c^2}.$$

Dies, zusammen mit (2.11) und (2.12) (unter Berücksichtigung von $\lambda_{c,\varepsilon} > 1$), liefert wie behauptet

$$\begin{aligned}
\phi_{\infty,c,\varepsilon}(t) &= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}}\big(f_1 + A_{c,\varepsilon}(f_2 - 2f_3)\big) * \eta_{c,\varepsilon}(t)\\
&= f_1(t)\Big[1 + \Theta\Big(4.3\frac{3\varepsilon^4}{tc^2}\Big) + A_{c,\varepsilon}\Theta\Big((8.1 + 43.6)\frac{\varepsilon^2}{tc}\Big)\Big]\\
&= f_1(t)\Big[1 + \Theta\Big(39\frac{\varepsilon^4}{tc^2}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. *Sei $x \geq 10^{10}$, $\varepsilon \leq 0.001$ und $c \geq 1$. Mit der Bezeichnung $y = t - \log(x)$ definieren wir*

$$m^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{e^{t/2}}{\lambda_{c,\varepsilon} t}\Big[\mu_{c,\varepsilon}(y) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\Big)\big(y\,\mu_{c,\varepsilon}(y) - \nu_{c,\varepsilon}(y)\big)\Big]. \tag{2.14}$$

Dann gilt

$$\phi_{x,c,\varepsilon}(t) = \chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}(t)\phi_{\infty,c,\varepsilon}(t) + m^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(t) + \Theta\Big(0.1e^{-\varepsilon/2}\frac{\varepsilon^2\sqrt{x}}{c\log(e^\varepsilon x)}\Big) \tag{2.15}$$

für $|t - \log x| \leq \varepsilon$.

Beweis. Seien t, ε und y wie in der Formulierung des Lemmas. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(\chi_{[2\varepsilon,\log x]}f_k) * \eta_{c,\varepsilon}(t) = \chi^*_{[\log x,\infty)}(t)&\int_y^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)f_k(t-\tau)\,d\tau \\ &+ \chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}(t)\Big[f_k * \eta_{c,\varepsilon}(t) - \int_{-\varepsilon}^{y}\eta_{c,\varepsilon}(\tau)f_k(t-\tau)\,d\tau\Big].\end{aligned} \tag{2.16}$$

Für $t \in B_\varepsilon(\log x)$ gilt

$$0 < f_k(t) \leq f_k(\log(x) + \varepsilon) \leq e^{\varepsilon/2}\frac{\sqrt{x}}{\log(x)^k}.$$

Zusammen mit

$$\int_0^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \int_{-\varepsilon}^0 \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\ell_{c,\varepsilon}(0) = \frac{1}{2}$$

erhalten wir somit aus (2.16)

$$(\chi_{[2\varepsilon,\log x]}f_k) * \eta_{c,\varepsilon}(t) = \chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}(t)\big(f_k * \eta_{c,\varepsilon}\big)(t) + \Theta\Big(\frac{e^{\varepsilon/2}\sqrt{x}}{2\log(x)^2}\Big). \tag{2.17}$$

Für $k = 1$ verbessern wir diese Abschätzung noch etwas. Durch eine einfache Rechnung erhält man unter den Voraussetzungen des Lemmas (wir haben $t > 23$)

$$\frac{e^{\frac{t-\tau}{2}}}{t-\tau} = f_1(t)\Big(1 + \tau\Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\Big) + \Theta(0.15\tau^2)\Big)$$

für $|\tau| \leq \varepsilon$. Wir behandeln zunächst den Fall $y > 0$. In diesem Fall erhalten wir unter Verwendung von (2.10) und (2.13) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_y^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{t}\int_y^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)(1 + \tau(\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{2}) + \Theta(0.15\tau^2))\,d\tau \\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{t}\Big(\mu_{c,\varepsilon}(y) + (\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{2})\int_y^\varepsilon \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\tau\,d\tau + \Theta\Big(0.15\frac{\varepsilon^2}{c}\Big)\Big) \\ &= \frac{e^{\frac{t}{2}}}{t}\Big(\mu_{c,\varepsilon}(y) + (\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{2})(y\mu_{c,\varepsilon}(y) - \nu_{c,\varepsilon}(y)) + \Theta\Big(0.075\frac{\varepsilon^2}{c}\Big)\Big)\end{aligned}$$

für das erste Integral in (2.16).

Für $y < 0$ zeigt eine ähnliche Rechnung, dass

$$\int_{-\varepsilon}^{y} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) f_1(t-\tau)\, d\tau = -f_1(t)\Big(\mu_{c,\varepsilon}(y) + (\tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{2})(y\mu_{c,\varepsilon}(y) - \nu_{c,\varepsilon}(y)) + \Theta\Big(0.075\frac{\varepsilon^2}{c}\Big)\Big)$$

gilt. Der Fall $y = 0$ ergibt sich aus den beiden Abschätzungen durch Grenzübergang, da $\mu_{c,\varepsilon}$ und $\nu_{c,\varepsilon}$ normalisiert sind. Da ferner

$$e^{\varepsilon/2}\frac{\sqrt{x}}{\log x}\Big[0.075\frac{\varepsilon^2}{c} + A_{c,\varepsilon}\Big(\frac{1}{\log(x)} + \frac{2}{\log(x)^2}\Big)\Big] \le 0.1 e^{-\varepsilon/2}\frac{\varepsilon^2\sqrt{x}}{c\log(e^{\varepsilon}x)}$$

gilt, folgt die Aussage des Lemmas aus (2.16) und den obigen Abschätzungen. □

Beweis von Satz 2.1. Wir bemerken zunächst, dass unter den geforderten Bedingungen an x, c und ε die Ungleichungen $\varepsilon < 0.0005$ und $c > 10$ gelten, so dass die Voraussetzungen von Lemma 2.1 und 2.2 erfüllt sind.

Sei nun $I = [e^{-\varepsilon}x, e^{\varepsilon}x]$ das Siebintervall. Aus Lemma 2.2 erhalten wir die Zerlegung

$$\begin{aligned}
\pi^*_{c,\varepsilon}(x) &= \sum_{p^m} \frac{\log p}{p^{m/2}} \phi_{x,c,\varepsilon}(m\log x) \\
&= \sum_{p^m} \frac{\log p}{p^{m/2}} \big(\chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}\phi_{\infty,c,\varepsilon}\big)(m\log p) \\
&\quad + \sum_{p^m \in I} \frac{\log p}{p^{m/2}} \Big(m^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(m\log p) + \Theta\Big(0.1\frac{e^{-\varepsilon/2}\varepsilon^2\sqrt{x}}{c\log(e^{\varepsilon}x)}\Big)\Big).
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Die Summe in der zweiten Zeile von (2.18) gleicht

$$\pi^*(x) + \sum_{p^m} \frac{\log p}{p^{m/2}} \chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}(\phi_{\infty,c,\varepsilon} - f_1)(m\log p). \tag{2.19}$$

Wir können die hierin auftretende Summe mit Lemma 2.1 unter Verwendung von $c \ge \log(\varepsilon x)/2$ und $\sum_{p^m \le x} \frac{1}{m^2\log(p)} \le x$ durch

$$\begin{aligned}
\sum_{p^m \le x} \frac{\log p}{p^{m/2}} |(\phi_{\infty,c,\varepsilon} - f_1)(m\log p)| &\le 39\frac{\varepsilon^4}{c^2} \sum_{p^m \le x} \frac{1}{m^2\log(p)} \\
&\le 39\frac{\varepsilon^4}{c^2} x \;\le\; 0.08\frac{\varepsilon^3 x}{\log(\varepsilon x)^2}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

abschätzen. Die Schranke x für die Summe auf der rechten Seite von (2.20) ist dabei nicht ganz trivial, ergibt sich aber leicht aus der Tatsache, dass nur der erste Summand größer als 1 ist und die Summe für $x = 5$ den Wert $3.695\cdots < 5$ annimt.

Für die Summe in der dritten Zeile von (2.18) nutzen wir die für $p^m \in I$ gültige Ungleichung

$$\frac{\log p}{p^m} \le e^{\varepsilon/2}\frac{\log(e^{\varepsilon}x)}{\sqrt{x}}$$

und erhalten den Beitrag

$$\sum_{p^m \in I} \frac{1}{m} M^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m) + \Theta\Big(0.1\frac{\varepsilon^2}{c}\sum_{p^m \in I}\frac{1}{m}\Big). \tag{2.21}$$

Es verbleibt die Abschätzung des Θ-Terms. Wir behandeln zunächst den Beitrag der Primzahlen. Für diese erhalten wir mit der Brun-Titchmarsh-Ungleichung aus [MV73],

$$\pi(x+y) - \pi(x) < 2\frac{y}{\log(y)} \quad \text{für } y > 1,$$

die Abschätzung

$$0.1\frac{\varepsilon^2}{c}\sum_{p\in I} 1 \leq \frac{0.1\varepsilon^2}{c}\frac{4.01\varepsilon x}{\log(\varepsilon x)} \leq 0.802\frac{\varepsilon^3 x}{\log(\varepsilon x)^2}. \tag{2.22}$$

Für die höheren Primzahlpotenzen nutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Sei $x \geq 100$, $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$ und sei $I = [e^{-\varepsilon}x, e^{\varepsilon}x]$. Dann gilt*

$$\sum_{\substack{p^m\in I\\ m>1}} \frac{1}{m} \leq 4.01\varepsilon\sqrt{x} + \log\log(2x^2).$$

Beweis. Sei $0 < 2Y < X$. Durch Taylor-Entwicklung erhalten wir für $m > 1$ die Ungleichungskette

$$(X-Y)^{1/m} \geq X^{1/m} - \frac{Y}{m}X^{1/m-1} - \frac{Y^2}{2m}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)(X-Y)^{1/m-2} \geq X^{1/m} - 2\frac{Y}{m}X^{1/m-1}.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned}\#\{p \mid p^m \in [X, X-Y]\} &\leq X^{1/m} - (X-Y)^{1/m} + 1\\ &\leq 2\frac{Y}{m}X^{1/m-1} + 1.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Für $X = e^{\varepsilon}x$, $Y = 2\sinh(\varepsilon)x$ und $m \geq 2$ ist dies offenbar durch

$$\frac{4.01}{m}\sqrt{x} + 1$$

beschränkt und somit erhalten wir wie behauptet die Abschätzung

$$\sum_{\substack{p^m\in I\\ m\geq 2}} \frac{1}{m} \leq \int_1^{2\log(2x)} \frac{4.01\varepsilon\sqrt{x}}{t^2} + \frac{1}{t}\,dt \leq 4.01\varepsilon\sqrt{x} + \log\log(2x^2).$$ □

Wegen $x^{1/3} \leq \varepsilon x \leq x^{2/3}$ liefert Lemma 2.3 die Abschätzung

$$\sum_{\substack{p^m\in I\\ m\geq 2}} \frac{1}{m} \leq \frac{\varepsilon x}{\log(\varepsilon x)}\Big(4.01\frac{\log(\varepsilon x)}{\sqrt{x}} + \frac{\log\log(2x^2)\log(\varepsilon x)}{\varepsilon x}\Big) \leq 0.03\frac{\varepsilon x}{\log(\varepsilon x)}.$$

Zusammen mit (2.22) impliziert dies, dass der Θ-Term in (2.21) durch

$$0.81\frac{\varepsilon^3 x}{\log(\varepsilon x)^2}, \tag{2.24}$$

beschränkt ist, wobei wieder $2c \geq \log(\varepsilon x)$ benutzt wurde. Die Behauptung des Satzes folgt nun wegen $0.08 + 0.81 < 0.82$ aus (2.21) und (2.24). □

2.1.1 Die explizite Formel für $\pi^*_{c,\varepsilon}$

Die modifizierte Primzahlzählfunktion $\pi^*_{c,\varepsilon}(x)$ erfüllt eine zur Riemannschen expliziten Formel,

$$\pi_0^*(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_\rho{}^* \mathrm{Ei}(\rho \log(x)) - \log(2) + \int_x^\infty \frac{dt}{t\log(t)(t^2-1)}$$

[Rie59, vM95], ähnliche explizite Formel. In diesem Abschnitt beweisen wir eine für Berechnungen hinreichende approximative Variante der expliziten Formel für $\pi^*_{c,\varepsilon}(x)$. Wir definieren dazu zunächst die folgenden Hilfsfunktionen.

Definition 2.1. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re(z) > 0$ bezeichne $\gamma^+(z)$ den Polygonzug $(-\infty + i, i, z)$ und es bezeichne $\gamma^-(z)$ den Polygonzug $(-\infty - i, -i, z)$. Dann definieren wir

$$\mathrm{Ei}_k(z) = \frac{1}{2}\Big(\int_{\gamma^+(z)} + \int_{\gamma^-(z)}\Big) \frac{e^u}{u^k}\, du. \tag{2.25}$$

Die explizite Formel ist dann wie folgt gegeben.

Theorem 2.1. *Sei $x > 30000$, $c \geq 1$, $0 < \varepsilon \leq 0.01$ und sei*

$$\Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) = \lambda_{c,\varepsilon}^{-1}\Big(\mathrm{Ei}_1(\rho\log x) + A_{c,\varepsilon}\big(\rho\,\mathrm{Ei}_2(\rho\log x) - 2\rho^2\,\mathrm{Ei}_3(\rho\log x)\big)\Big)\ell_{c,\varepsilon}\left(\tfrac{\rho}{i} - \tfrac{1}{2i}\right).$$

Dann gilt

$$\pi^*_{c,\varepsilon}(x) = \mathrm{li}(x) + \frac{A_{c,\varepsilon}\, x}{\log(x)^2} - \sum_\rho{}^* \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) - \log(2) + \int_x^\infty \frac{dt}{t\log t(t^2-1)} + \Theta(50\varepsilon). \tag{2.26}$$

Beweis. Für $0 < \delta < 1/x$ definieren wir die Hilfsfunktionen

$$f_{\delta,x} = \chi^*_{(\log\delta, \log x)} f_1 \quad \text{und} \quad g_{\delta,x} = \chi^*_{(\log\delta,\log x)}(f_2 - 2f_3),$$

f_k wie in (2.2), sowie

$$F_{\delta,x}(t) = \frac{1}{2}(f_{\delta,x}(t) + f_{\delta,x}(-t)) \quad \text{und} \quad G_{\delta,x}(t) = \frac{1}{2}(g_{\delta,x}(t) + g_{\delta,x}(-t)).$$

Wir beweisen den Satz durch Anwendung der Weil-Barnerschen expliziten Formel (1.7) auf die Testfunktion

$$H_{\delta,x,c,\varepsilon} = \lambda_{c,\varepsilon}^{-1}(F_{\delta,x} + A_{c,\varepsilon} G_{\delta,x}) * \eta_{c,\varepsilon}$$

und den Grenzübergang $\delta \searrow 0$. Angewandt auf die Testfunktion $F_{\delta,x}$ alleine ergibt dies gerade die Riemannsche explizite Formel, wie in [BFJK13] gezeigt, und wir bedienen uns im weiteren Verlauf der folgenden Resultate aus dieser Arbeit:

$$\lim_{\delta\searrow 0}\big(w_s(\widehat{F_{\delta,x}}) - \log|\log\delta|\big) = \sum_\rho{}^* \mathrm{Ei}_1(\rho\log x) - \mathrm{li}(x) - \log\log x, \tag{2.27}$$

$$\lim_{\delta\searrow 0}\big(w_f(F_{\delta,x}) - \log|\log\delta|\big) = \gamma - \pi^*(x) \tag{2.28}$$

und

$$\lim_{\delta\searrow 0} w_\infty(F_{\delta,x}) = \int_x^\infty \frac{dt}{t\log t(t^2-1)} - \gamma - \log 2, \tag{2.29}$$

was Bestandteil der Lemmata 3.3, 3.4 und 3.5 in [BFJK13] ist.

Wir beginnen nun mit der Betrachtung von $w_s(\widehat{H_{\delta,x,c,\varepsilon}})$.

Lemma 2.4. *Sei $x > 30000$. Dann gilt*

$$\lim_{\delta\searrow 0}\big(w_s(\widehat{H_{\delta,x,c,\varepsilon}}) - \log|\log\delta|\big) = -\operatorname{li}(x) - \log\log(x) - A_{c,\varepsilon}\frac{x}{\log(x)^2} + \sum_{\rho}{}^{*}\,\Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) + \Theta\left(\frac{3.2A_{c,\varepsilon}}{\log x}\right). \tag{2.30}$$

Beweis. Für $|t| \le \log x$ gilt offenbar

$$F_{\delta,x}(t) = \frac{\sinh(t/2)}{t} \quad \text{und} \quad G_{\delta,x}(t) = \frac{1}{t^2}\Big(\cosh(t/2) - 2\frac{\sinh(t/2)}{t}\Big).$$

Somit sind $F_{\delta,x}$ und $G_{\delta,x}$ auf $\mathbb{R}$ beschränkt und ihre Fourier-Integrale $\widehat{F_{\delta,x}}$ und $\widehat{G_{\delta,x}}$ konvergieren in $|\Im(\xi)| < \frac{1}{2}$ für $\delta \to 0$ jeweils punktweise gegen $\widehat{F}_{0,x}$ und $\widehat{G}_{0,x}$.

Wir berechnen w_s in der Form

$$w_s(\widehat{H_{\delta,x,c,\varepsilon}}) = \lambda_{c,\varepsilon}^{-1}\big(w_s(\widehat{F_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}}) + A_{c,\varepsilon} w_s(\widehat{G_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}})\big). \tag{2.31}$$

Dazu vergewissern wir uns zunächst, dass w_s in beiden Fällen mit dem Limes $\delta \to 0$ vertauscht. Wir zeigen dies exemplarisch für $\widehat{F_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}}$. Die Überlegungen dazu lassen sich eins zu eins auf den Fall $\widehat{G_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}}$ übertragen.

Da die nicht-trivialen Nullstellen der Zetafunktion Realteil in $(0,1)$ und nicht-verschwindenden Imaginärteil haben, genügt es dazu, die Funktion $\widehat{F_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}}$ für $|\Im(\xi)| < 1/2$ und $|\Re(\xi)| > 0$ abzuschätzen. Da $F_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}$ reellwertig ist, können wir uns dabei sogar auf den Fall $\Re(\xi) > 0$ beschränken.

Wir haben

$$\widehat{F_{\delta,x} * \eta_{c,\varepsilon}} = \widehat{F_{\delta,x}} \cdot \widehat{\eta_{c,\varepsilon}} = \widehat{F_{\delta,x}} \cdot \ell_{c,\varepsilon}.$$

Die Logansche Funktion $\ell_{c,\varepsilon}$ erfüllt in dem betrachteten Gebiet offensichtlich die Abschätzung

$$|\ell_{c,\varepsilon}(\xi)| \ll \frac{1}{\Re(\xi)},$$

und die Fourier-Transformierte von $F_{\delta,x}$ ist dort durch

$$\widehat{F_{\delta,x}}(\xi) = \int_{-\log x}^{\log x} e^{i\xi t}\frac{\sinh(t/2)}{t}\,dt - \int_{\log x}^{-\log\delta} \frac{e^{(-1/2+i\xi)t} + e^{(-1/2-i\xi)t}}{t}\,dt \tag{2.32}$$

gegeben. Hier schätzen wir die beiden Integrale auf der rechten Seite separat ab. Für das erste Integral bekommen wir

$$\int_{-\log x}^{\log x} e^{i\xi t}\frac{\sinh(t/2)}{t}\,dt = \left[\frac{e^{i\xi t}\sinh(t/2)}{i\xi t}\right]_{-\log x}^{\log x} - \frac{1}{i\xi}\int_{-\log x}^{\log x} e^{i\xi t}\left(\frac{\sinh(t/2)}{t}\right)'\,dt = O\Big(\frac{1}{\Re(\xi)}\Big).$$

Da

$$\int_{\log x}^{-\log\delta} \frac{e^{(\pm i\xi-1/2)t}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{(\pm i\xi-1/2)t}}{(\pm i\xi - \frac{1}{2})t}\right]_{\log x}^{-\log\delta} + \frac{1}{\pm i\xi - 1/2}\int_{\log x}^{-\log\delta}\frac{e^{(\pm i\xi-\frac{1}{2})t}}{t^2}\,dt = O\Big(\frac{1}{\Re(\xi)}\Big)$$

gleichmäßig in $\delta > 0$ gilt, ist auch das zweite Integral in (2.32) durch $O(\Re(\xi)^{-1})$ abgeschätzt.

Folglich gilt

$$\left|(\widehat{F_{\delta,x} \cdot \ell_{c,\varepsilon}})(\xi)\right| \ll \frac{1}{\Re(\xi)^2}$$

gleichmäßig für $|\Im(\xi)| < 1/2$ und $0 < \delta < 1/x$. Bekanntermaßen konvergiert für jedes $\alpha > 1$ die Summe

$$\sum_{\rho}^{*} \frac{1}{|\Im(\rho)|^{\alpha}}$$

und somit erhalten wir wie gewünscht

$$\sum_{\rho}^{*} (\widehat{F}_{\delta,x} \cdot \ell_{c,\varepsilon})\big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\big) \to \sum_{\rho}^{*} (\widehat{F}_{0,x} \cdot \ell_{c,\varepsilon})\big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\big)$$

für $\delta \to 0$ aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz.

Als nächstes drücken wir die Fourier-Transformierten von $F_{0,x}$ und $G_{0,x}$ durch die Funktionen Ei_k aus. Dazu benutzen wir die Bezeichnungen $z = \frac{1}{2} + i\xi$ und $\tilde{z} = 1 - z$. Wir wollen zeigen, dass mit diesen Bezeichnungen für $|\Im(\xi)| < 1/2$

$$\widehat{F}_{0,x}(\xi) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Ei}_1(z \log x) + \mathrm{Ei}_1(\tilde{z} \log x)\big) \tag{2.33}$$

und

$$\widehat{G}_{0,x}(\xi) = \frac{z}{2} \mathrm{Ei}_2(z \log x) - z^2 \mathrm{Ei}_3(z \log x) + \frac{\tilde{z}}{2} \mathrm{Ei}_2(\tilde{z} \log x) - \tilde{z}^2 \mathrm{Ei}_3(\tilde{z} \log x) \tag{2.34}$$

gilt. Da beide Seiten von (2.33) und (2.34) in diesem Gebiet holomorph sind, können wir uns dabei der Einfachheit halber auf den Fall beschränken, dass ξ rein imaginär ist, so dass $z, \tilde{z} \in (0,1)$ gilt. Wir substituieren nun $u = zs$ in (2.25). Dann sind die Transformationen der Kurven $\gamma^{\pm}(z \log x)$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ zu den Polygonzügen $(-\infty \pm ir, \log x \pm ir, \log x)$ homotop, und folglich haben wir

$$z^{1-k} \mathrm{Ei}_k(z \log x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\log x} \frac{e^{z(ir+t)}}{(ir+t)^k} + \frac{e^{z(-ir+t)}}{(-ir+t)^k}\, dt + O(r),$$

wobei die implizite Konstante von z und k abhängt. Analog ergibt die Substitution $u = -\tilde{z}s$

$$\tilde{z}^{1-k} \mathrm{Ei}_k(\tilde{z} \log x) = \frac{1}{2} \int_{-\log x}^{\infty} \frac{e^{\tilde{z}(-ir-t)}}{(-ir-t)^k} + \frac{e^{\tilde{z}(ir-t)}}{(ir-t)^k}\, dt + O(r).$$

Setzen wir dies in die rechte Seite von (2.33) bzw. (2.34) ein, so bleibt die Summe der Integranden in einer Umgebung der 0 beschränkt. Folglich vertauscht der Limes $r \to 0$ mit dem Integral, und wir erhalten das Fourier-Integral von $F_{0,x}$ bzw. $G_{0,x}$.

Die Polstellenbeiträge zu $w_s(\widehat{F_{\delta,x}})$ und $w_s(\widehat{G_{\delta,x}})$ berechnen sich leicht zu

$$F_{\delta,x}(i/2) + F_{\delta,x}(-i/2) = \mathrm{li}(x) + \log\log(x) - \log|\log\delta| + O(\delta)$$

und

$$\begin{aligned} G_{\delta,x}(i/2) + G_{\delta,x}(-i/2) = &\int_{-\log x}^{\log x} \frac{e^t - 1}{t^2} - 2\frac{e^t - 1}{t^3}\, dt \\ &+ \Theta\left(\int_{\log x}^{\infty} \Big(\frac{1}{t^2} + \frac{2}{t^3}\Big)(1 + e^{-t})\right) + O\big(|\log\delta|^{-1}\big). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Hier ist das erste Integral auf der rechten Seite von (2.35) gleich

$$\left[\frac{e^t - t - 1}{t^2}\right]_{-\log x}^{\log x} = \frac{x}{\log(x)^2} + \Theta\Big(\frac{2.1}{\log x}\Big),$$

und das Integral im Θ-Term ist betragsmäßig durch $1.1/\log(x)$ beschränkt. Somit erhalten wir

$$\lim_{\delta \searrow 0}\Big(G_{\delta,x}(i/2) + G_{\delta,x}(-i/2)\Big) = \frac{x}{\log(x)^2} + \Theta\Big(\frac{3.2}{\log x}\Big).$$

Da $\ell_{c,\varepsilon}(\xi) = \ell_{c,\varepsilon}(-\xi)$ gilt und da $\rho \mapsto 1 - \rho$ eine Bijektion der nicht-trivialen Nullstellen ist, erhalten wir

$$\sum_\rho{}^* \operatorname{Ei}_k((1-\rho)\log x)\,\ell_{c,\varepsilon}\big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\big) = \sum_\rho{}^* \operatorname{Ei}_k(\rho \log x)\,\ell_{c,\varepsilon}\big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\big)$$

für $k \geq 1$. Folglich können wir in (2.33) und (2.34) $\tilde{z}$ durch z ersetzen, und somit erhalten wir, unter Beachtung von $\lambda_{c,\varepsilon} > 1$, das gewünschte Resultat aus (2.31). □

Lemma 2.5. *Sei $x > 1$, $\varepsilon \leq 0.01$ und $c \geq 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\delta \searrow 0}\big(w_f(H_{\delta,x,c,\varepsilon}) - \log|\log \delta|\big) = \gamma - \pi^*_{c,\varepsilon}(x) + \Theta\Big(440\frac{\varepsilon^4}{c^2}\Big).$$

Beweis. Für $|t| > \varepsilon$ definieren wir die Hilfsfunktion

$$h(t) = \lambda_{c,\varepsilon}^{-1}(\chi_{(\log\delta, \log x)}(f_1 + A_{c,\varepsilon}(f_2 - 2f_3))) * \eta_{c,\varepsilon}(t).$$

Für derartige t gilt dann

$$H_{\delta,x,c,\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}(h(t) + h(-t)),$$

und wegen $\varepsilon \leq 0.01 < \log 2$ gilt zudem

$$w_f(H_{\delta,x,c,\varepsilon}) = w_f(h).$$

Wir beweisen das Lemma durch Vergleich von $w_f(H_{\delta,x,c,\varepsilon})$ und $w_f(F_{\delta,x})$. Wegen

$$w_f(H_{\delta,x,c,\varepsilon} - F_{\delta,x}) = \pi^*(x) - \pi^*_{c,\varepsilon}(x) - \sum_{p^m} \frac{\log p}{p^{m/2}}\big(h - f_{\delta,x}\big)(-m\log p) \tag{2.36}$$

und (2.28) genügt es dafür zu zeigen, dass die Summe auf der rechten Seite von (2.36) für $\delta \to 0$ durch $440\,\varepsilon^4/c^2$ beschränkt bleibt.

Sei dazu $g(t) = (h - f_{\delta,x})(-t)$ und sei $y = \delta^{-1}$. Wir betrachten zunächst den Beitrag der Primzahlpotenzen p^m mit $m \log p \in B_\varepsilon(y)$. Offensichtlich gilt für $t \in B_\varepsilon(y)$ gleichmäßig

$$|g(t)| \ll_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{y}\log y}$$

für $y \to \infty$. Somit ist der Beitrag eines jeden solchen p^m in (2.36) gleichmäßig durch ein Vielfaches von $1/y$ beschränkt. Aus der Brun-Titchmarsh-Ungleichung folgt, dass die Anzahl derartiger Primzahlpotenzen für $y \to \infty$ bei festem ε durch ein Vielfaches von

$$\frac{y}{\log y} + \sqrt{y}$$

beschränkt ist. Somit ist der Beitrag dieser Summanden zu (2.36) $O(\log(y)^{-1})$ und verschwindet folglich für $y \to \infty$.

Da $g(t)$ für $t > y + \varepsilon$ verschwindet verbleibt nur die Betrachtung der Primzahlpotenzen mit $\log p^m \leq y - \varepsilon$. Dazu nutzen wir Lemma 2.1, nach welchem

$$|g(t)| = |(\phi_{\infty,c,\varepsilon} - f_1)(-t)| \leq 39 \frac{\varepsilon^4}{c^2} \frac{e^{-t/2}}{t^2}$$

für $t \geq \log 2$ gilt. Folglich haben wir

$$\sum_{p^m \leq y-\varepsilon} \frac{\log p}{p^{m/2}} |g(m \log p)| \leq 39 \frac{\varepsilon^4}{c^2} \sum_{p^m} \frac{1}{m^2 p^m \log p} \leq 39 \frac{\varepsilon^4}{c^2} \zeta(2) \sum_{p^m} \frac{1}{p \log p}. \tag{2.37}$$

Aus der Brun-Titchmarsh-Ungleichung erhalten wir nun

$$\sum_{2^k \leq p < 2^{k+1}} \frac{1}{p \log p} < \frac{2^{k+1}}{k \log 2} \frac{2^{-k}}{k \log 2} < \frac{2}{\log(2)^2}, k^{-2}$$

und Summation über k zeigt, dass die Summe in (2.37) wie behauptet durch

$$39\, \zeta(2)^2 \frac{2}{\log(2)^2} \frac{\varepsilon^4}{c^2} < 440 \frac{\varepsilon^4}{c^2}$$

beschränkt ist. □

Lemma 2.6. *Seien $x > 30000$, $0 < \varepsilon < 0.01$ und $c \geq 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\delta \searrow 0} w_\infty(H_{\delta,x,c,\varepsilon}) = \int_x^\infty \frac{dt}{t \log t (t^2 - 1)} - \gamma - \log \log x - \log 2 + \Theta(49.4\, \varepsilon).$$

Beweis. Wir können w_∞ direkt auf $H_{0,x,c,\varepsilon}$ anwenden und nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz haben wir $\lim_{\delta \searrow 0}(H_{\delta,x,c,\varepsilon}) = w_\infty(\lim_{\delta \searrow 0} H_{\delta,x,c,\varepsilon})$.

Sei nun $\Delta = H_{0,x,c,\varepsilon} - F_{0,x}$. Dann gilt

$$w_\infty(H_{0,x,c,\varepsilon}) = w_\infty(F_{0,x}) + w_\infty(\Delta).$$

Zum Beweis der Aussage des Lemmas genügt wegen (2.29) also der Nachweis von $w_\infty(\Delta) = \Theta(49.4\, \varepsilon)$. Dies ergibt sich aus den folgenden Abschätzungen, die wir im Nachfolgenden beweisen werden.

$$-2 \int_0^{\log 2} \frac{\Delta(t) - \Delta(0)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt = \Theta(14.1\, \varepsilon), \tag{2.38}$$

$$2\Delta(0) \int_{\log 2}^\infty \frac{e^{-t/2}}{1 - e^{-2t}}\, dt = \Theta(14.5\, \varepsilon), \tag{2.39}$$

$$-\int_{\log 2}^{\log x} \frac{(\phi_{\infty,c,\varepsilon} - f_1)(t)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt = \Theta(76\, \varepsilon^4), \tag{2.40}$$

$$-\int_{\log x - \varepsilon}^{\log x + \varepsilon} \frac{(\phi_{x,c,\varepsilon} - \chi_{(\varepsilon, \log x]} \phi_{\infty,c,\varepsilon})(t)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt = \Theta(0.12\, \varepsilon), \tag{2.41}$$

$$-\int_{\log 2}^\infty \frac{(\phi_{x,c,\varepsilon} - f_1)(-t)}{1 - e^{-2t}} e^{-t/2}\, dt = \Theta(38\, \varepsilon^4), \tag{2.42}$$

$$\Delta(0) \Big(\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1/4) - \log \pi \Big) = \Theta(20.6\, \varepsilon). \tag{2.43}$$

Wir zeigen aber zunächst, dass aus diesen Abschätzungen tatsächlich das Gewünschte folgt. Da für $t > \varepsilon$

$$\Delta(t) + \Delta(-t) = (\phi_{x,c,\varepsilon} - f_{0,x})(t) + (\phi_{x,c,\varepsilon} - f_1)(-t)$$

gilt, sieht man leicht, dass sich die linken Seiten von (2.38) bis (2.43) zu $w_\infty(\Delta)$ summieren. Da wir ferner $\varepsilon < 0.01$ fordern, erhalten wir daraus in der Tat

$$|w_\infty(\Delta)| \leq \big(14.1 + 14.5 + 76 \times 10^{-6} + 0.12 + 38 \times 10^{-6} + 20.6\big)\,\varepsilon < 49.4\,\varepsilon.$$

Wir benötigen zunächst eine Schranke für Δ in einer Umgebung der 0. Dazu definieren wir die ganzen Hilfsfunktionen

$$F(z) = \frac{\sinh(z/2)}{z} \quad \text{und} \quad G(z) = \frac{\cosh(z/2)}{z^2} - 2\frac{\sinh(z/2)}{z^3}.$$

Sei nun $U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < 3/2, |\Im(z)| < 3/2\}$. Dann stimmen $F_{0,x}$ und $G_{0,x}$ auf $U_1 \cap \mathbb{R}$ mit F und G überein. Wir haben

$$\max_{z \in \partial U_1} \{|\sinh(z/2)|, |\cosh(z/2)|\} \leq e^{3/4} < 2.2$$

und folglich erhalten wir aus dem Maximumprinzip die Schranken

$$|F(z)| \leq 2.2\,\frac{2}{3} < 1.5 \quad \text{und} \quad |G(z)| \leq 2.2\Big(\frac{4}{9} + \frac{16}{27}\Big) < 2.3$$

für $z \in U_1$. Wir verkleinern U_1 nun zu $U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < 1, |\Im(z)| < 1\}$ und schätzen die Ableitung von F und G durch die Cauchy-Formel ab. Für F erhalten wir für $z \in U_2$ die Schranke

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=\frac{1}{2}} \frac{F(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi = \Theta(3).$$

Völlig analog erhalten wir $G'(z) = \Theta(4.6)$ für $z \in U_2$.

Als nächstes benötigen wir explizite Schranken für $\lambda_{c,\varepsilon}^{-1}$. Die Abbildung $t \mapsto \sinh(t)/t$ ist in $t \in (0, \infty)$ monoton steigend und folglich haben wir

$$\frac{\sinh(\sqrt{c^2 + \varepsilon^2/4})}{\sqrt{c^2 + \varepsilon^2/4}} \leq \frac{\sinh(c + \varepsilon/2)}{c + \varepsilon/2} \leq e^{\varepsilon/2}\frac{\sinh c}{c}.$$

Hieraus erhalten wir

$$1 > \lambda_{c,\varepsilon}^{-1} \geq e^{-\varepsilon/2} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei nun $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt ganz allgemein

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau) f(z - \tau)\, d\tau &= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_{c,\varepsilon}(\tau)\big(f(z) + \Theta(|\tau|\|f'\|_{\infty,U})\big)\, d\tau \\
&= \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} f(z) + \Theta\big(\varepsilon\|f'\|_{\infty,U}\big) = f(z) + \Theta\big(\varepsilon(\|f'\|_{\infty,U} + 0.5\|f\|_{\infty,U})\big)
\end{aligned}$$

für alle z mit $B_\varepsilon(z) \subset U$. Wir wenden dies auf F und G an, verkleinern U_2 noch einmal zu

$$U_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re(z)| < \log 2, |\Im(z)| < \pi/4\},$$

und erhalten

$$\lambda_{c,\varepsilon}^{-1} F * \eta_{c,\varepsilon}(z) = F(z) + \Theta(3.75\,\varepsilon) \quad \text{und} \quad \lambda_{c,\varepsilon}^{-1} G * \eta_{c,\varepsilon}(z) = G(z) + \Theta(5.75\,\varepsilon)$$

für $z \in U_3$, woraus sich unmittelbar die Abschätzung

$$\Delta(z) = \Theta(3.8\,\varepsilon) \tag{2.44}$$

ergibt.

Wir kommen nun zum Beweis der Abschätzungen (2.38) - (2.43). Für $z \in \partial U_3$ haben wir

$$\left|1 - e^{-2z}\right| \geq 1 - e^{-2\log 2} = \frac{3}{4}.$$

Durch Anwendung des Maximumprinzips auf die Funktion $\frac{\Delta(z)-\Delta(0)}{1-\exp(-2z)}$ unter Verwendung der Abschätzung (2.44) erhalten wir somit

$$2\int_0^{\log 2} \left|\frac{\Delta(t)-\Delta(0)}{1-e^{-2t}}\right| e^{-t/2}\,dt \leq 2\cdot\log 2\cdot\Big(\frac{4}{3}\cdot 2\cdot 3.8\,\varepsilon\Big) < 14.1\,\varepsilon,$$

wie in (2.38) behauptet.

Zum Beweis von (2.39) nutzen wir

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{e^{-t/2}}{1-e^{-2t}}\,dt \leq \frac{4}{3}\int_{\log 2}^{\infty} e^{-t/2},\ dt = \frac{4}{3}\sqrt{2} < 1.9,$$

(2.44) und $2\cdot 3.8\,\varepsilon\cdot 1.9 < 14.5\,\varepsilon$.

Für (2.40) nutzen wir Lemma 2.1, nach welchem

$$|\phi_{\infty,c,\varepsilon}(t) - f_1(t)| \leq 39\,\varepsilon\frac{e^{t/2}}{t^2} \tag{2.45}$$

für $t \geq \log 2$ gilt. Folglich haben wir

$$\int_{\log 2}^{\log x} \frac{|\phi_{\infty,c,\varepsilon}(t)-f_1(t)|}{1-e^{-2t}} e^{-t/2}\,dt \leq 39\,\varepsilon^4\frac{4}{3}\int_{\log 2}^{\infty}\frac{dt}{t^2} < \frac{39\cdot 4}{3\log 2}\,\varepsilon^4 < 76\,\varepsilon^4.$$

Zum Beweis von (2.41) nutzen wir Lemma 2.2. Mit den offensichtlichen Abschätzungen

$$|\mu_{c,\varepsilon}(t)| \leq \frac{1}{2}, \qquad |\nu_{c,\varepsilon}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{und} \quad |y| \leq \varepsilon$$

in (2.14) erhalten wir

$$\left|m^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(t)\right| \leq \frac{e^{t/2}}{t}\Big(\frac{1}{2}+\varepsilon\Big).$$

Somit liefert Lemma 2.2 die Abschätzung

$$\left|(\phi_{x,c,\varepsilon} - \chi^*_{[2\varepsilon,\log x]}\phi_{\infty,c,\varepsilon})(t)\right|\frac{e^{-t/2}}{1-e^{-2t}} \leq 1.001\Big(\frac{\frac{1}{2}+\varepsilon}{\log x-\varepsilon} + 0.1\frac{\varepsilon^2}{\log x}\Big) < 0.06$$

für den Integranden in (2.41), wobei $\log x - \varepsilon > 10$ benutzt wurde. Die Länge des Integrationswegs beträgt 2ε, und somit folgt die Behauptung.

Für (2.42) nutzen wir wieder die Abschätzung (2.45) aus Lemma 2.1. Diese liefert

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{|(\phi_{x,c,\varepsilon}-f_1)(-t)|}{1-e^{-2t}} e^{-t/2}\,dt \leq 39\,\varepsilon^4\frac{4}{3}\frac{1}{2}\int_{\log 2}^{\infty}\frac{dt}{t^2} < 38\,\varepsilon^4.$$

Es verbleibt der Beweis von (2.43), aber dies folgt direkt aus (2.44) und (1.27). □

Theorem 2.1 folgt nun leicht durch Einsetzen der bisherigen Resultate in

$$w_s(\widehat{H_{\delta,x,c,\varepsilon}}) - \log|\log\delta| = w_f(H_{\delta,x,c,\varepsilon}) - \log|\log\delta| + w_\infty(H_{\delta,x,c,\varepsilon}). \tag{2.46}$$

Unter Verwendung der Abschätzungen $\log x > 10$, $c \geq 1$, $\varepsilon \leq 0.01$ und $A_{c,\varepsilon} \leq 0.005$ summieren sich hier die Restglieder aus den Lemmata 2.4, 2.5 und 2.6 zu

$$A_{c,\varepsilon}\frac{3.2}{\log x} + \frac{440\,\varepsilon^4}{c^2} + 49.4\,\varepsilon < 50\,\varepsilon,$$

und die Behauptung des Satzes folgt durch den Grenzübergang $\delta \to 0$. □

2.1.2 Auswertung der Summe über Nullstellen

Wie schon im Fall der modifizierten Tschebyschow-Funktion liegt der natürliche Punkt zum Abschneiden der Summe in (2.26) bei $|\Im(\rho)| \approx \frac{c}{\varepsilon}$. Im Fall der Berechnung von $\pi(x)$ ohne Annahme der Riemannschen Vermutung kann man sich aber wieder die partielle Kenntnis der Riemannschen Vermutung zu Nutze machen, wodurch sich die Anzahl der Nullstellen etwa um 13% reduzieren lässt.

Wir beweisen zunächst einige asymptotische Formeln zur Auswertung von $\Psi_{x,c,\varepsilon}$. Dazu beginnen mit der Betrachtung der Funktionen Ei_k aus Definition 2.1.

Lemma 2.7. *Es gilt*

$$\mathrm{Ei}_k(z) = \mathrm{sgn}(\Im(z))\frac{\pi i}{(k-1)!} + \sum_{l=0}^{n-1}\frac{(k+l-1)!}{(k-1)!}\frac{e^z}{z^{l+k}} + \Theta\Big(2\frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}\frac{e^{\Re(z)}}{|\Im(z)|^{k+n}}\Big) \tag{2.47}$$

in $\Re(z) > 0$.

Beweis. Sei $z = x + iy$. Da sowohl Ei_k als auch die rechte Seite von (2.47) mit komplexer Konjugation vertauschen, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y < 0$ voraussetzen. Durch Verschieben der Integrationswege $\gamma^+(z)$ und $\gamma^-(z)$ nach $i\infty$ bzw. $-i\infty$ in (2.25) erhalten wir

$$\mathrm{Ei}_k(z) = -\frac{1}{2}\int_z^{x+i\infty}\frac{e^\xi}{\xi^k}\,d\xi + \frac{1}{2}\int_{x-i\infty}^z\frac{e^\xi}{\xi^k}\,d\xi. \tag{2.48}$$

Es gilt nun

$$\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}\frac{e^\xi}{\xi^k}\,d\xi = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{\xi=0}\frac{e^\xi}{\xi^k} = \frac{2\pi i}{(k-1)!},$$

wie man durch Verschieben des Integrationswegs nach $-\infty$ sieht, und somit liefert (2.48)

$$\mathrm{Ei}_k(z) = -\frac{\pi i}{(k-1)!} + \int_{x-i\infty}^z\frac{e^\xi}{\xi^k}\,d\xi.$$

Durch mehrmalige partielle Integration erhalten wir daraus die gewünschte asymptotische Formel

$$\int_{x-i\infty}^z\frac{e^\xi}{\xi^k}\,d\xi = \sum_{j=0}^n\frac{(j+k-1)!}{(k-1)!}\frac{e^z}{z^{j+k}} + \frac{(k+n)!}{(k-1)!}\int_{x-i\infty}^z\frac{e^\xi}{\xi^{k+n+1}}\,d\xi,$$

wobei das Restglied wie behauptet durch

$$\left|\frac{(k+n)!}{(k-1)!}\int_{x-i\infty}^z\frac{e^\xi}{\xi^{k+n}}\,d\xi\right| \leq \frac{(k+n)!}{(k-1)!}e^x\int_{-\infty}^y\frac{d\xi}{|\xi|^{k+n+1}} \leq \frac{(k+n-1)!}{(k-1)!}\frac{e^x}{|y|^{k+n}}$$

abgeschätzt ist. □

Wir definieren nun die Hilfsfunktion

$$\psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) = \mathrm{Ei}_1(\rho \log x) + A_{c,\varepsilon}(\rho\,\mathrm{Ei}_2(\rho \log x) - 2\rho^2\,\mathrm{Ei}_3(\rho \log x)), \tag{2.49}$$

sodass also

$$\Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) = \frac{1}{\lambda_{c,\varepsilon}} \psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \ell_{c,\varepsilon}\Big(\frac{\rho}{i} - \frac{1}{2i}\Big)$$

gilt. Zur Auswertung von $\psi_{x,c,\varepsilon}(\rho)$ haben wir den folgenden Satz.

Satz 2.2. *Sei $c \geq 3$ und $\varepsilon \leq 0.01$. Für $l \geq 1$ sei*

$$\alpha_l(x, c, \varepsilon) = \frac{(l-1)!}{\log(x)^l} + A_{c,\varepsilon}\Big(\frac{l!}{\log(x)^{l+1}} - \frac{(l+1)!}{\log(x)^{l+2}}\Big)$$

und es sei

$$\alpha_0(\rho, c, \varepsilon) = \mathrm{sgn}(\Im(\rho))\,\pi i\,\big(1 + A_{c,\varepsilon}(\rho - \rho^2)\big).$$

Sei ferner $|\Im(\rho)| > 14$, $\Re(\rho) \in (0, 1)$ und $n + 1 \leq 10 \log x$. Dann gilt

$$\psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) = \alpha_0(\rho, c, \varepsilon) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_l(x, c, \varepsilon) \frac{x^\rho}{\rho^l} + \Theta\Big(2.01(n-1)! \frac{x^{\Re(\rho)}}{(|\Im(\rho)| \log x)^n}\Big). \tag{2.50}$$

Die Approximation in (2.50) ist für die Berechnung der Summe über Nullstellen vollkommen ausreichend, denn mit der Wahl $n = \lceil \log(x) \rceil$ folgt aus der Stirlingschen Formel die Abschätzung

$$2.01(n-1)! \frac{x^{\Re(\rho)}}{(|\Im(\rho)| \log x)^n} \ll \frac{1}{|\Im(\rho)|} \sqrt{\frac{\log x}{x}}$$

mit hinreichend kleiner impliziter Konstante. Ferner sei bemerkt, dass der Term $\alpha_0(\rho, c, \varepsilon)$ wegen $\alpha_0(\rho, c, \varepsilon) + \alpha_0(1 - \rho, c, \varepsilon) = 0$ für die Berechnung der Summe über Nullstellen keine Rolle spielt. Zur Beschleunigung der Auswertung der Summe über Nullstellen kann ähnlich wie in [FKBJ] die Funktion

$$x^{-\rho}(\psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) - a_0\rho, c, \varepsilon)$$

abschnittsweise durch Tschebyschow-Approximation berechnet werden.

Beweis von Satz 2.2. Wir erhalten den Hauptterm aus den asymptotischen Entwicklungen für $\mathrm{Ei}_k(\rho \log x)$. Die Summe der Θ-Terme ist dabei durch

$$2\,(n-1)! \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\Im(\rho) \log x|^n} \left[1 + A_{c,\varepsilon}\left(\frac{n|\rho|}{|\Im(\rho) \log x|} + \frac{n(n+1)|\rho|^2}{|\Im(\rho) \log x|^2}\right)\right] \tag{2.51}$$

beschränkt. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt ferner

$$\frac{|\rho|}{|\Im(\rho)|} \leq \frac{1+14}{14} < 1.08, \qquad \frac{n+1}{\log(x)} \leq 10$$

und $A_{c,\varepsilon} \leq 3 \times 10^{-5}$. Somit ist der Ausdruck in der eckigen Klammer in (2.51) durch 1.004 beschränkt, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. □

Es verbleibt die Abschätzung des Approximationsfehlers, der durch das Abschneiden der Summe über Nullstellen entsteht. Hierzu haben wir den folgenden Satz.

Satz 2.3. *Sei $c \geq 10$, $\varepsilon \leq 10^{-3}$ und $x \geq 10^{10}$. Sei $h = \frac{1}{2}$, wenn die Riemannsche Vermutung gilt, und sei ansonsten $h = 1$. Dann gilt*

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\Im(\rho)| > c/\varepsilon}}^{*} \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \right| \leq 0.65\, e^{0.71\sqrt{c\varepsilon} - c} \log(3c) \log\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) \frac{x^h}{\log x}. \tag{2.52}$$

Sei ferner $a \in (0,1)$ derart, dass $ac/\varepsilon \geq 10^3$ erfüllt ist, und es gelte $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$ für alle Nullstellen ρ der Zetafunktion mit $|\Im(\rho)| \leq \frac{c}{\varepsilon}$. Dann gilt

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ a\frac{c}{\varepsilon} < |\Im(\rho)| \leq \frac{c}{\varepsilon}}}^{*} \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \right| \leq \frac{0.33 + 3.6c\varepsilon}{c\, a^2} \log\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) \frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c)} \frac{\sqrt{x}}{\log x}. \tag{2.53}$$

Beweis von Satz 2.3. Mit $n = 2$ in Satz 2.2 und der Abschätzung

$$|\alpha_1(x,c,\varepsilon)| \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\varepsilon^2}{2c}\left(\frac{1}{\log(x)^2} + \frac{2}{\log(x)^3}\right) \leq \frac{1.001}{\log x}$$

erhalten wir

$$|\psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) - \alpha_0(\rho,c,\varepsilon)| \leq 1.001 \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\rho| \log x} + 2.01 \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\Im(\rho) \log x|^2} \leq \frac{1.01 x^{\Re(\rho)}}{|\Im(\rho)| \log x}. \tag{2.54}$$

Aus Lemma 1.2 folgt somit

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\Im(\rho)| > c/\varepsilon}}^{*} \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \right| \leq 0.32 \frac{e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}}}{\sinh(c)} \log(3c) \log\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) \frac{x^h}{\log x},$$

woraus wegen $e^c / \sinh(c) < 2.01$ die Abschätzung in (2.52) folgt.

Für die zweite Abschätzung (2.53) nutzen wir Lemma 1.3 zusammen mit (2.54), wo wir $\Re(\rho) = \frac{1}{2}$ annehmen dürfen, und erhalten

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ a\frac{c}{\varepsilon} < |\Im(\rho)| \leq \frac{c}{\varepsilon}}}^{*} \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \right| \leq 1.01 \frac{1 + 11\, c\varepsilon}{\pi c a^2} \log\left(\frac{c}{\varepsilon}\right) \frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c)} \frac{\sqrt{x}}{\log x}.$$

□

Unter Einschränkung des Parameterbereichs lassen sich diese Abschätzungen wieder etwas vereinfachen. Im ersten Fall erhält man z.B. das folgende Korollar:

Korollar 2.1. *Sei $x \geq 10^{10}$ und seien c, ε wie in (2.6) und (2.7). Sei $h = \frac{1}{2}$, wenn die Riemmansche Vermutung gilt, und sei ansonsten $h = 1$. Dann gilt*

$$\left| \sum_{\substack{\rho \\ |\Im(\rho)| > c/\varepsilon}}^{*} \Psi_{x,c,\varepsilon}(\rho) \right| \leq e^{-c} x^h \log\log(x).$$

Beweis. Wir benutzen $e^{0.71\sqrt{c\varepsilon}} < 1.11$, $\log(3c) < 1.6 \log\log(x)$ und $\log(c/\varepsilon) < 0.84 \log(x)$ in (2.52). □

2.2 Auswertung der Summe über Primzahlpotenzen

Die Berechnung der Summe über Primzahlpotenzen geschieht wie in [FKBJ] und basiert auf der Potenzreihenentwicklung von $\eta_{c,\varepsilon}(t)$ im Nullpunkt. Diese berechnet sich leicht zu

$$\eta_{c,\varepsilon}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k t^{2k}$$

mit

$$\lambda_k = -\frac{(-c/2)^{k+1}}{k! \sinh c} I_k(c).$$

Daraus erhalten wir die für $t \in (-1, 1)$ gültigen Formeln

$$\mu_{c,\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}\chi_{(0,1]} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2k} t^{2k+1} \tag{2.55}$$

und

$$\nu_{c,\varepsilon}(t) = \frac{I_1(c)}{2\sinh(c)} + \frac{|t|}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k}{2k(2k+1)} t^{2k+1}. \tag{2.56}$$

Mit der Lukeschen Ungleichung

$$1 < k! \left(\frac{2}{t}\right)^k I_k(t) < \cosh(t)$$

[Luk72] sieht man leicht, dass unter den Bedingungen in (2.6) für die Auswertung von $\mu_{c,\varepsilon}$ und $\nu_{c,\varepsilon}$ mit einer Genauigkeit von $x^{-\alpha}$ für beliebiges $\alpha > 0$ eine Anzahl von $O(\log x)$ Summanden der Potenzreihen genügen.

Die Berechnung der Beiträge der Primzahlen in $I = [e^{-\varepsilon}x, e^{\varepsilon}x]$ zur Summe

$$\sum_{p \in I} M^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}(p^m)$$

folgt ebenfalls dem gleichen Schema wie in [FKBJ]: Das Intervall I wird in Teilstücke $[a_k, b_k)$ zerlegt, die nacheinander mit den Primzahlen bis zu einer gegebenen Primzahlgrenze P gesiebt werden. Die Beiträge der Überlebenden des Siebes in $[a_k, b_k)$ werden dabei durch Polynominterpolation von $M^{(\pi)}_{x,c,\varepsilon}$ approximiert. Zur Reduzierung des Speicherbedarfs kann die Primzahlgrenze P kleiner als $\sqrt{b_k}$ gewählt werden. Fordert man zumindest $P > \sqrt[3]{a_k}$, so bleiben auf diesem Weg höchstens zusammengesetze Zahlen der Form $p \cdot q$ mit $\max\{p, q\} > P$ übrig, die mit einem Rechenaufwand von $\tilde{O}(b_k/P)$ wieder entfernt werden können.

2.3 Rechnungen und Laufzeit

Die ursprüngliche analytische Methode [LO87] berechnet $\pi(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ mit $O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ Rechenschritten. Für die Methoden in [FKBJ] und [Pla] sowie für die im Vorangegangenen beschriebene Methode ist dies nicht mehr offensichtlich, weil man die Nullstellenberechnung mit einbeziehen müsste. Man erwartet zwar, dass sich die ersten n Nullstellen mit einer Laufzeit von $O(n^{1+\varepsilon})$ bestimmen lassen [OS88], jedoch ist dem Autor kein strenger Beweis dieser Aussage bekannt. Es wäre allerdings denkbar, dass sie sich dies mit den Methoden zur Beschränkung der Komplexität der Nullstellenbestimmung von komplexen Polynomen in [Sch82] bewerkstelligen ließe.

Setzt man die Nullstellen einfach als gegeben voraus, so sieht man zum Beispiel mit der Parameterwahl

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\log x}{x}} \quad \text{und} \quad c = \log(x) + \log\log\log(x) + 10,$$

dass das oben beschriebene Verfahren $\pi(x)$ auf offensichtliche Weise mit den Nullstellen bis $C\sqrt{x/\log x}$ und $O(\log(x)^{3/2}\sqrt{x})$ Rechenschritten berechnet.

Die Werte von $\pi(10^{24})$ und $\pi(10^{25})$ wurden beide mit der Parameterwahl $c = 62$ und $\varepsilon = 6.2 \times 10^{-10}$ berechnet. Die erste Berechnung benötigte $3,900$ CPU-Stunden und die zweite etwas weniger als $40,000$ CPU-Stunden. Beide Berechnungen könnten durch den Einsatz einer größeren Nullstellenmenge deutlich beschleunigt werden. Im ersten Fall ergäbe zum Beispiel der Einsatz der Nullstellen mit Imaginärteil bis zu 4×10^{11} eine hypothetische Rechenzeit von 900 CPU-Stunden, was ca. 5 Wochen auf einem einzigen Prozessorkern entspricht. Damit sollte die analytische Methode für Werte in dieser Größenordnung inzwischen schneller sein als die kombinatorische Lehmer-Meissel Methode [LMO85].

Eine interessante verbleibende Frage ist, ob der Logan-Kern oder der Gauß-Kern für die analytische Berechnung von $\pi(x)$ besser geeignet ist. Beide Kerne erfüllen gewisse, dem Problem zuträgliche, Optimalitätsbedingungen in disjunkten Klassen von Funktionen. Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, hat der Logan-Kern den Vorzug, die Summe über Nullstellen quasi scharf abzuschneiden, und wegen der Kompaktheit des Trägers von $\eta_{c,\varepsilon}$ ist die Summe über Primzahlpotenzen endlich und man verbleibt somit nur mit einer kritischen Fehlerabschätzung. Die Frage nach der Effizienz der Methoden ist hingegen nicht ganz offensichtlich. Das rechte Maß für einen solchen Vergleich wäre Produkt der Länge des Siebintervalls und der Länge des Summationsbereichs der Summe über Nullstellen. Für die Berechnung von $\pi(10^{24})$ fällt dieses für beide Methoden etwa gleich aus. Allerdings hätte dies für die vorliegende Methode unter Verwendung der Abschätzung in (2.53) noch um mindestens 20% reduziert werden können.

Kapitel 3

Gewichtete Summen über Primzahlen

Motiviert durch Satz 1.2 sollen in diesem Kapitel Summen der Form

$$\sum_{\substack{p \in I \\ p \equiv l \bmod k}} f(p) \tag{3.1}$$

mit teilerfremden $l, k \in \mathbb{N}$ untersucht werden, wobei $I = [x, x + y]$ ein Teilintervall von $[0, \infty)$ bezeichnet. Für diese Arbeit ist dabei nur der Fall $k = 1$ von Interesse, aber die Betrachtung des Falls $k > 1$ bereitet keine große zusätzliche Mühe und wäre beispielsweise von Nutzen, wenn man die Überlegungen in dieser Arbeit auf Primzahlen in arithmetischen Progressionen übertragen wollte.

Wir beweisen eine obere Schranke für (3.1), die im Fall $f \equiv 1$ die wohlbekannte Brun-Titchmarsh-Ungleichung in der Form von van Lint und Richert [vLR65] impliziert. Im Fall $k = 1$ erhalten wir sogar das etwas stärkere Resultat von Montgomery und Vaughan [MV73].

Der Beweis beruht auf einer gewichteten Form des Selberg- und des Eratosthenes-Siebes.

3.1 Gewichtete Siebe

Sei $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ eine endliche Menge und sei

$$\mathcal{A}_d = \{a \in \mathcal{A} \mid d \mid a\}$$

die Teilmenge aller durch d teilbarer Elemente. Viele Siebmethoden beruhen auf der Möglichkeit, das Verhältnis

$$\frac{|\mathcal{A}_d|}{|\mathcal{A}|}$$

gut durch eine multiplikative Funktion in d beschreiben zu können.

Zur Untersuchung von gewichteten Summen der Form (3.1) ist es daher naheliegend, das Gleiche für den Quotienten

$$\frac{\sum_{a \in \mathcal{A}_d} f(a)}{\sum_{a \in \mathcal{A}} f(a)}$$

zu versuchen. Im Fall $\mathcal{A} = [x, x+y] \cap (l + k\mathbb{Z})$ stößt man dabei im Wesentlichen auf Riemannsummen und kann beide Summen zu $\int_I f(t)\,dt$ ins Verhältnis setzen.

Wir fixieren diese Bezeichnungen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_d$ für den Rest des Abschnitts. Ferner bezeichnen wir mit $W^{1,1}(I)$ den Abschluss von $C^1(I)$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_{1,1,I} = \|f\|_{1,I} + \|f'\|_{1,I} = \int_I |f(t)|\,dt + \int_I |f'(t)|\,dt,$$

wobei f' die schwache Ableitung von f bezeichnet. Der Sobolev-Raum $W^{1,1}(I)$ ist stetig in $C^0(I)$ eingebettet und wir definieren die punktweise Auswertung über diese Einbettung.

Wir wiederholen zudem die Definition einiger arithmetischer Funktionen, die im Folgenden verwendet werden. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$ und $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ die Primfaktorzerlegung, d.h. es gelte $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und $e_j > 0$ für $1 \leq j \leq k$. Dann ist die Möbiusfunktion μ durch

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & e_1 = e_2 = \cdots = e_k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Die Eulersche φ-Funktion hat in diesem Fall den Wert

$$\varphi(n) = \#\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \prod_{j=1}^{k} p_j^{e_j - 1}(p_j - 1).$$

Ferner benötigen wir die Funktionen

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d,$$

$$P(z,k) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid k}} p,$$

die Primfaktorzählfunktion

$$\nu(n) = k$$

und die Primzahlzählfunktion in arithmetischen Progressionen

$$\pi(x; k, l) = \{p \leq x \mid p \equiv l \bmod k\}.$$

Desweitern bezeichnet $[x]$ die kleinste ganze Zahl $\leq x$ und $\{x\} := x - [x]$ den nichtganzzahligen Anteil einer reellen Zahl x. Für natürliche Zahlen n, m bezeichnet zudem (n, m) den größten gemeinsamen Teiler und $[n, m]$ das kleinste gemeinsame Vielfache.

Lemma 3.1. *Sei $f \in W^{1,1}(I)$ und seien $k, d \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt*

$$\left| \frac{1}{kd} \int_I f(t)\,dt - \sum_{\substack{n \in I \cap (l + k\mathbb{Z}) \\ d|n}} f(n) \right| \leq \|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I}.$$

Beweis. Sei

$$r_d = \sum_{n \in \mathcal{A}_d} f(n) - \frac{1}{kd} \int_I f(t)\,dt.$$

Dann haben wir $|r_d| \leq \|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I}$ zu zeigen. Seien dazu $x' = x + kd\left[\frac{y}{kd}\right]$, $I' = [x, x')$ und $I'' = [x', x+y]$. Wir definieren

$$r'_d = \sum_{a \in \mathcal{A}_d \cap I'} f(a) - \frac{1}{kd} \int_{I'} f(t)\, dt \quad \text{und} \quad r''_d = \sum_{a \in \mathcal{A}_d \cap I''} f(a) - \frac{1}{kd} \int_{I''} f(t)\, dt.$$

Dann gilt $r_d = r'_d + r''_d$, da I die disjunkte Vereinigung von I' und I'' ist.

Sei nun $a < b$ und $\xi \in [a, b]$. Wir wollen zeigen, dass für jedes $g \in W^{1,1}((a, b))$ die Gleichung

$$\int_a^b g(t)\, dt = (b-a)g(\xi) + \int_a^\xi g'(t)(a-t)\, dt + \int_\xi^b g'(t)(b-t)\, dt \tag{3.2}$$

gilt. Für $g \in C^1((a, b))$ ist dies wohlbekannt und folgt unmittelbar durch partielle Integration. Für allgemeine stetige $g \in W^{1,1}((a, b))$ wählt man eine approximierende Folge von C^1-Funktionen in $W^{1,1}((a, b))$. Da $W^{1,1}$ stetig in $C^0([a, b])$ eingebettet ist, konvergiert diese auch Punktweise gegen g und (3.2) folgt durch Grenzübergang.

Aus (3.2) erhalten wir nun die Schranke

$$\left| g(\xi) - \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |g'(t)|\, dt. \tag{3.3}$$

Nach dem Chinesischen Restsatz gilt $\mathcal{A}_d = (b + dk\mathbb{Z}) \cap I$ für ein geeignetes $b \in \mathbb{Z}$. Somit zerfällt I' in $\left[\frac{y}{kd}\right]$ disjunkte halboffene Intervalle der Länge kd, von welchem jedes genau ein Element aus $\mathcal{A}_d$ enthält. Durch Anwendung von (3.3) auf jedes dieser Teilintervalle und anschließende Summation über die Teilstücke erhalten wir also

$$|r'_d| \leq \int_{I'} |f'(t)|\, dt. \tag{3.4}$$

Es verbleibt somit die Abschätzung von r''_d. Da $|I''| < kd$ gilt, ist $\mathcal{A}_d \cap I''$ entweder leer oder besteht aus genau einem Element a. Im ersten Fall erhalten wir

$$|r''_d| \leq \frac{1}{kd} \int_{I''} f(t)\, dt \leq \|f\|_{\infty,I''}$$

und im zweiten

$$\begin{aligned} |r''_d| &\leq \left| \frac{1}{kd} \int_{I''} f(t)\, dt - \frac{|I''|}{kd} f(a) \right| + \Big(1 - \frac{|I''|}{kd}\Big) |f(a)| \\ &\leq \frac{|I''|}{kd} \int_{I''} |f'(t)|\, dt + \Big(1 - \frac{|I''|}{kd}\Big) |f(a)| \leq \|f'\|_{1,I''} + \|f\|_{\infty,I''}. \end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt also $|r''_d| \leq \|f'\|_{1,I''} + \|f\|_{\infty,I''}$, woraus sich zusammen mit (3.4) die behauptete Abschätzung ergibt. □

Die Anwendung auf das Selberg-Sieb ergibt

Satz 3.1 (Gewichtetes Selberg-Sieb). *Sei $f \in W^{1,1}(I)$ nicht-negativ und sei $z \geq 1$. Seien ferner*

$$S_k(z) = \sum_{\substack{n \leq z \\ (n,k)=1}} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} \quad \textit{und} \quad H_k(z) = \sum_{\substack{n \leq z \\ (n,k)=1}} \mu(n)^2 \frac{\sigma(n)}{\varphi(n)}.$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{\substack{n\in I\cap(l+k\mathbb{Z})\\(n,P(z,k))=1}} f(n) \le \frac{\|f\|_{1,I}}{kS_k(z)} + (\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I})\frac{H_k(z)^2}{S_k(z)^2}.$$

Beweis. Der Beweis beruht auf Selbergs quadratischer Methode [Sel47]. Sei r_d wie im Beweis von Lemma 3.1 und sei

$$\mathcal{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le z, \mu(n) \ne 0, (n,k) = 1\}.$$

Sei $(\lambda_n)_{n\in\mathcal{N}_k}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_1 = 1$. Dann gilt

$$\sum_{a\in\mathcal{A}} f(a)\Big(\sum_{\substack{n\in\mathcal{N}_k\\n|a}} \lambda_n\Big)^2 \ge \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\(a,P(z,k))=1}} f(a)\Big(\sum_{\substack{n\in\mathcal{N}_k\\n|a}} \lambda_n\Big)^2 = \sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\(a,P(z,k))=1}} f(a). \tag{3.5}$$

Durch Ausmultiplizieren der inneren Summen auf der linken Seite von (3.5) und anschließendem Vertauschen der Summationsreihenfolge erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathcal{A}} f(a)\Big(\sum_{\substack{n\in\mathcal{N}_k\\n|a}} \lambda_n\Big)^2 &= \sum_{(n_1,n_2)\in\mathcal{N}_k^2} \lambda_{n_1}\lambda_{n_2} \sum_{a\in\mathcal{A}_{[n_1,n_2]}} f(a)\\ &= \frac{\|f\|_1}{k} \sum_{(n_1,n_2)\in\mathcal{N}_k^2} \frac{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}{[n_1,n_2]} + \sum_{(n_1,n_2)\in\mathcal{N}_k^2} \lambda_{n_1}\lambda_{n_2} r_{[n_1,n_2]}. \end{aligned}\tag{3.6}$$

Folglich erhalten wir aus (3.5) und (3.6) zusammen mit Lemma 3.1 die Abschätzung

$$\sum_{\substack{n\in I\cap(l+k\mathbb{Z})\\(n,P(z,k))=1}} f(n) \le \frac{\|f\|_1}{k} \sum_{(n_1,n_2)\in\mathcal{N}_k^2} \frac{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}{[n_1,n_2]} + (\|f\|_{\infty,I} + \|f\|_1')\Big(\sum_{n\in\mathcal{N}_k} |\lambda_n|\Big)^2.$$

Hier wählen wir nun die bekannte minimierende Folge

$$\lambda_n = \frac{\mu(n)n}{S_k(z)} \sum_{\substack{m\in\mathcal{N}_k\\n|m}} \frac{1}{\varphi(n)}$$

für die quadratische Form in (3.6) und wie in [vLR65] erhalten wir

$$\sum_{(n_1,n_2)\in\mathcal{N}_k^2} \frac{\lambda_{n_1}\lambda_{n_2}}{[n_1,n_2]} = \frac{1}{S_k(z)} \quad \text{und} \quad \sum_{n\in\mathcal{N}_k} |\lambda_n| = \frac{H_k(z)}{S_k(z)}.$$

□

Wir benötigen auch noch eine gewichtete Form des Eratosthenes-Siebs, was zwar im Allgemeinen schwächer ist als das Selberg-Sieb, aber bessere Abschätzungen für die Anzahl von Primzahlen in sehr kurzen Intervallen liefert.

Satz 3.2 (Gewichtetes Eratosthenes-Sieb)**.** *Sei $f \in W^{1,1}(I)$ nicht-negativ und sei $z \ge 1$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\sum_{\substack{n\in I\cap(l+k\mathbb{Z})\\(n,P(z,k))=1}} f(n) \le \frac{\|f\|_{1,I}}{k} \prod_{\substack{p\le z\\p\nmid k}} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + (\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I})\, 2^{\pi(z)}.$$

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\in I\cap(l+k\mathbb{Z})\\(n,P(z,k))=1}} f(n) &= \sum_{a\in\mathcal{A}} f(a) \sum_{d|(a,P(z,k))} \mu(d)\\
&= \sum_{d|P(z,k)} \mu(d) \sum_{a\in\mathcal{A}_d} f(a)\\
&= \frac{\|f\|_{1,I}}{k} \sum_{d|P(z,k)} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{d|P(z,k)} \mu(d) r_d\\
&\le \frac{\|f\|_{1,I}}{k} \prod_{p|P(z,k)} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) + \left(\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I}\right) 2^{\pi(z)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

3.2 Die gewichtete Brun-Titchmarsh-Ungleichung

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Kapitels, der gewichteten Brun-Titchmarsh-Ungleichung. Wir beweisen diese zunächst für den allgemeinen Fall $k \ge 1$ unter Verwendung der Resultate in [vLR65]. Im Anschluss verbessern wir dieses Resultat für den Spezialfall $k = 1$.

Sei $I = [x, x+y]$. Dann definieren wir das Funktional $\rho_I \colon W^{1,1}(I) \to [0,\infty)$ durch $\rho_I(0) = 0$ und

$$\rho_I(f) = \frac{\|f\|_{1,I}}{\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I}}$$

falls f nicht identisch verschwindet.

Theorem 3.1. *Sei $I = [x, x+y] \subset [0,\infty)$ und seien $l, k \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gelten die Ungleichungen*

$$\sum_{\substack{p\in I\\p\equiv l \bmod k}} f(p) < 2\frac{\|f\|_{1,I}}{\varphi(k)\log(\rho_I(f)/k)}\Big(1+\frac{8}{\log(\rho_I(f)/k)}\Big)$$

und

$$\sum_{\substack{p\in I\\p\equiv l \bmod k}} f(p) < 3\frac{\|f\|_{1,I}}{\varphi(k)\log(\rho_I(f)/k)}$$

für alle nicht-negativen $f \in W^{1,1}(I)$ mit $\rho_I(f) > k$.

Beweis. Wir führen die Aussage des Satzes auf eine Situation im Beweis der gewöhnlichen Brun-Titchmarsh-Ungleichung in [vLR65] zurück.

Sei $g = f/(\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I})$. Dann gilt $\rho_I(g) = \|g\|_{1,I} = \rho_I(f)$. Mit der Bezeichnung $Y = \rho_I(f)$ genügt es also offenbar,

$$\sum_{\substack{p\in I\\p\equiv l \bmod k}} g(p) < 2\frac{Y}{\varphi(k)\log(Y/k)}\Big(1+\frac{8}{\log(Y/k)}\Big) \tag{3.7}$$

und

$$\sum_{\substack{p\in I\\p\equiv l \bmod k}} g(p) < 3\frac{Y}{\varphi(k)\log(Y/k)} \tag{3.8}$$

zu zeigen.

Wir setzen $k_1 = [k,2]$ und bezeichnen mit l_1 einen Vertreter des ungeraden Urbilds (d.h. des Urbilds, welches nur ungerade Elemente enthält) der Restklasse von l unter der Projektion $\mathbb{Z}/k_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Wegen $\|g\|_{\infty,I} \leq 1$ gilt dann

$$\sum_{\substack{p\in I\\ p\equiv l \bmod k}} g(p) \leq \sum_{\substack{p\in I\\ p\equiv l_1 \bmod k_1}} g(p) + 1.$$

Mit Hilfe von Satz 3.1 erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\sum_{\substack{p\in I\\ p\equiv l \bmod k}} g(p) \leq \frac{Y}{\varphi(k)S_1(z)} + \frac{H_{k_1}^2(z)}{S_{k_1}^2(z)} + \pi(z;k_1,l_1) + 1 \tag{3.9}$$

und sind somit in der Situation des Beweises der Brun-Titchmarsh-Ungleichung in [vLR65], in der zu zeigen ist, dass die rechte Seite von (3.9) für eine geeignete Wahl von z durch die rechte Seite von (3.7) bzw. (3.8) beschränkt ist. □

Theorem 3.2. *Sei $I = [x, x+y] \subset [0,\infty)$. Dann gilt die Ungleichung*

$$\sum_{p\in I} f(p) < 2\frac{\|f\|_{1,I}}{\log(\rho_I(f))}$$

für alle nicht-negativen $f \in W^{1,1}(I)$ mit $\rho_I(f) > 1$.

Der Beweis beruht auf einer Kombination des Eratosthenes-Siebs mit dem Selberg-Sieb unter Verwendung von schärferen Abschätzungen für H_1 und S_1. Wir beweisen zunächst zwei Lemmata. Das zweite ist eine explizite Fassung eines Resultats von Ward [War27].

Wir benötigen dazu die folgenden wohlbekannten Identitäten für die Zetafunktion (siehe z.B. [Tit51]):

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \prod_p (1+p^{-s}) = \sum_n \frac{\mu(n)^2}{n^s},$$
$$\sum_n \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_n \frac{\mu(n)}{n^s}. \tag{3.10}$$

Lemma 3.2. *Es gilt*

$$H_1(z) = \frac{15}{\pi^2} z + \Theta(223\sqrt{z})$$

für $z \geq 1$.

Beweis. Wir definieren

$$h(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{2}{(1+p^s)(p-1)}\Big) \quad \text{und} \quad \tilde{h}(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{2}{(p^s-1)(p-1)}\Big).$$

Diese Produkte konvergieren normal in $\Re(s) > 0$ und besitzen dort eine Darstellung als Dirichlet-Reihen

$$h(s) = \sum_n c_n n^{-s} \quad \text{und} \quad \tilde{h}(s) = \sum_n |c_n| n^{-s}$$

mit geeigneten c_n. Aus (3.10) erhalten wir

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}h(s) = \prod_p(1+p^{-s})\prod_p\Big(1+\frac{2}{(1+p^s)(p-1)}\Big) = \prod_p\Big(1+p^{-s}\frac{p+1}{p-1}\Big) = \sum_n \frac{\mu(n)^2\sigma(n)}{\varphi(n)}n^{-s},$$

woraus

$$\sum_{n\le z}\frac{\mu(n)^2\sigma(n)}{\varphi(n)} = \sum_{d\le z}c_d\sum_{m\le z/d}\mu(m)^2 \tag{3.11}$$

folgt.

Aus der wohlbekannten Gleichung

$$\mu(n)^2 = \sum_{d^2|n}\mu(d)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{n\le z}\mu(n)^2 &= \sum_{d\le\sqrt{z}}\mu(d)\left[\frac{z}{d^2}\right] = z\sum_{d\le\sqrt{z}}\frac{\mu(d)}{d^2} + \Theta(\sqrt{z}+1)\\ &= \frac{z}{\zeta(2)} + \Theta(2\sqrt{z}+2) = \frac{6}{\pi^2}z + \Theta(4\sqrt{z})\end{aligned}$$

für $z\ge 1$, woraus wir zusammen mit (3.11)

$$\begin{aligned}H_1(z) &= \sum_{d\le z}c_d\Big(\frac{6z}{\pi^2 d} + \Theta\Big(4\sqrt{\frac{z}{d}}\Big)\Big)\\ &= \frac{6z}{\pi^2}\sum_d\frac{c_d}{d} + \Theta\Big(4\sqrt{z}\sum_d\frac{|c_d|}{\sqrt{d}} + \frac{6z}{\pi^2}\sum_{d>z}\frac{|c_d|}{d}\Big)\\ &= \frac{6}{\pi^2}h(1)z + \Theta(4.7\cdot\tilde{h}(1/2)\sqrt{z}) \qquad (3.12)\end{aligned}$$

erhalten.

Der Wert $h(1)$ berechnet sich unter Verwendung von (3.10) zu

$$h(1) = \prod_p\Big(1+\frac{2}{p^2-1}\Big) = \sum_n\frac{2^{\nu(n)}}{n^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{5}{2}.$$

Zur Abschätzung von $\tilde{h}(1/2)$ verwenden wir die in $t\ge 16$ gültige Ungleichung $(\sqrt{t}-1)(t-1)\ge\frac{2}{3}t^{3/2}$ und erhalten

$$\tilde{h}(1/2) \le \Big(\prod_{p<10000}\frac{1+2(\sqrt{p}-1)^{-1}(p-1)^{-1}}{1+3p^{-3/2}}\Big)\sum_n\mu(n)^2\frac{3^{\nu(n)}}{n^{3/2}}.$$

Hier ist Produkt auf der rechten Seite ist durch 4.6 beschränkt und die Summe lässt sich mit Hilfe der Zetafunktion abschätzen: Für $r\in\mathbb{N}$ definieren wir

$$M_r(n) = \sum_{d_1\cdots d_r=n}\prod_{j=1}^r\mu(d_j)^2.$$

Dann ist M_r multiplikativ, es gilt $M_r(n) \geq 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und wir haben $M_r(p) = r$ für jede Primzahl p. Ferner gilt

$$\sum_n M_r(n) n^{-s} = \Big(\sum_n \mu(n)^2 n^{-s}\Big)^r = \frac{\zeta(s)^r}{\zeta(2s)^r},$$

und folglich erhalten wir für $\sigma > 1$ die Abschätzung

$$\sum_n \mu(n)^2\, r^{\nu(n)} n^{-\sigma} \leq \frac{\zeta(\sigma)^r}{\zeta(2\sigma)^r}.$$

Wegen $\zeta(3/2)^3/\zeta(3)^3 \leq 10.27$ haben wir also $\tilde{h}(1/2) \leq 47.3$, und da $4.7 \cdot 47.3 \leq 223$ gilt, folgt die Behauptung aus (3.12).

$\square$

Lemma 3.3. *Sei $z \geq 10^9$. Dann gilt*

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} = \log(z) + \gamma + \sum_p \frac{\log(p)}{p(p-1)} + \Theta((42\log(z) + 121)/\sqrt{z}). \tag{3.13}$$

Beweis. Sei $p(t) = 1 - \{t\}$, sei $g(t) = 1/[t] - 1/t$ und sei $z \geq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} g(n + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} p(n - \varepsilon) = 0$$

und es gilt $p'(t) = 1$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Somit erhalten wir

$$\gamma = \int_1^\infty g(t)\, dt = \sum_{n \leq z} \frac{1}{n} + \frac{\{z\} - 1}{[z]} - \log(z) - g(z)p(z) - \int_z^\infty \frac{p(t)}{t^2}\, dt.$$

Wegen

$$0 \leq \frac{z}{[z]}(1 - \{z\}) \leq 1,$$

gilt

$$0 \leq \frac{1 - \{z\}}{[z]} + g(z)p(z) + \int_z^\infty \frac{p(t)}{t^2}\, dt \leq \frac{3}{z},$$

und somit haben wir

$$\sum_{n \leq z} \frac{1}{n} = \log(z) + \gamma + \Theta(3/z).$$

Angewandt auf

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)^2}{n} = \sum_{d \leq \sqrt{z}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{m \leq z/d^2} \frac{1}{m}$$

ergibt dies

$$\sum_{n \leq z} \frac{\mu(n)^2}{n} = \frac{\log(z) + \gamma}{\zeta(2)} - 2\sum_d \frac{\mu(d)\log(d)}{d^2} + \Theta\Big(\frac{4\log(z) + 7.2}{\sqrt{z}}\Big), \tag{3.14}$$

wobei

$$\sum_{d > \sqrt{z}} \frac{|\mu(d)|}{d^2} \log(d) \leq \frac{\log(z) + 1}{\sqrt{z}} \quad \text{und} \quad \sum_{d > \sqrt{z}} \frac{|\mu(d)|}{d^2} \leq \frac{2}{\sqrt{z}} \tag{3.15}$$

benutzt wurde. Zur Abkürzung definieren wir

$$A = \frac{\gamma}{\zeta(2)} - 2\sum_d \frac{\mu(d)\log(d)}{d^2} = \frac{\gamma}{\zeta(2)} - 2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)^2}.$$

Sei nun

$$h(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(1+p^s)(p-1)}\Big) \quad \text{und} \quad \tilde{h}(s) = \prod_p \Big(1 + \frac{1}{(p^s-1)(p-1)}\Big).$$

Eine ähnliche Berechnung wie im Beweis von Lemma 3.2 zeigt

$$\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} h(s) = \sum_n \frac{n\,\mu(n)^2}{\varphi(n)} n^{-s}, \tag{3.16}$$

und es gilt wieder

$$h(s) = \sum_n c_n n^{-s} \quad \text{und} \quad \tilde{h}(s) = \sum_n |c_n| n^{-s}$$

für geeignete c_n in $\Re(s) > 0$. Aus (3.16) erhalten wir

$$\sum_{n\le z} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} = \sum_{d\le z} \frac{c_n}{d} \sum_{m\le z/d} \frac{\mu(m)^2}{m}$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n\le z} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} &= \sum_{d\le z} \frac{c_d}{d} \sum_{m\le z/d} \frac{\mu(m)^2}{m} \\ &= \sum_{d\le z} \Big(\frac{\log(z/d)}{\zeta(2)} + A\Big)\frac{c_d}{d} + \Theta\Big(\tilde{h}(1/2)\frac{4\log(z)+7.2}{\sqrt{z}}\Big).\end{aligned} \tag{3.17}$$

Seien nun $\varepsilon < 1/2$, $z_0 > 1$ und $C_\varepsilon > 0$ derart, dass für $z \ge z_0$ die Ungleichung

$$\log(z) \le C_\varepsilon z^\varepsilon \tag{3.18}$$

gilt. Dann gilt offenbar

$$\sum_{d>z} \frac{|c_d|}{d}\Big(\frac{\log(z)+\log(d)}{\zeta(2)} + |A|\Big) \le \frac{1}{\sqrt{z}}\Big(\frac{2C_\varepsilon}{\zeta(2)} + z_0^{-\varepsilon}|A|\Big)\tilde{h}(\tfrac{1}{2} - \varepsilon). \tag{3.19}$$

Zur Abschätzung von $\tilde{h}(\sigma)$ nutzen wir, dass für $\sigma \ge 1/4$ und $t \ge 20$ die Ungleichung

$$t^{1+\sigma} - t^\sigma - t + 1 \ge t^{1+\sigma}/2$$

gilt. Daraus erhalten wir, wie im Beweis des vorigen Lemmas, für $\sigma \ge \frac{1}{4}$ die Abschätzung

$$\tilde{h}(\sigma) \le \Big(\prod_{p<10000} \frac{1 + (p^\sigma - 1)^{-1}(p-1)^{-1}}{1 + 2p^{-1-\sigma}}\Big)\frac{\zeta(1+\sigma)^2}{\zeta(2+2\sigma)^2}. \tag{3.20}$$

Desweiteren haben wir

$$|A| \le \frac{\gamma}{\zeta(2)} + 2\left|\sum_{d\le 100} \frac{\mu(d)\log(d)}{d^2}\right| + 2\int_{100}^\infty \frac{\log(t)}{t^2}\,dt \le 1.8.$$

Mit der gültigen Wahl $\varepsilon = 1/8$, $z_0 = 10^9$ und $C_\varepsilon = 1.56$ in (3.19) erhalten wir nun aus (3.20) die Schranke $\tilde{h}(3/8) \leq 22$. Aus dieser folgt zusammen mit (3.19)

$$\sum_{d>z} \frac{|c_d|}{d}\Big(\frac{\log(z)+\log(d)}{\zeta(2)} + |A|\Big) \leq \frac{2.04 \cdot 22}{\sqrt{z}} \leq \frac{45}{\sqrt{z}}.$$

Aus (3.20) erhalten wir ferner $\tilde{h}(1/2) \leq 10.5$. Mit

$$h(1) = \prod_p \Big(1 + p^{-2}\frac{1}{1-p^{-2}}\Big) = \zeta(2)$$

und (3.17) bekommen wir also

$$\sum_{n\leq z} \frac{\mu(n)^2}{\varphi(n)} = \log(z) + B + \Theta\Big(\frac{42\log(z)+121}{\sqrt{z}}\Big).$$

Der Beweis, dass B mit der Konstante in (3.13) übereinstimmt, wird beispielsweise in [Brü95] ausgeführt. □

Beweis von Theorem 3.1. Seien g und Y wie im Beweis von Theorem 3.2. Wir betrachten zunächst den Fall $Y > 4 \times 10^{18}$. Aus Satz 3.1 erhalten wir die Abschätzung

$$\sum_{p\in I} g(p) \leq \frac{Y}{S_1(z)} + \frac{H_1^2(z)}{S_1^2(z)} + \pi(z)$$

für jedes $z \geq 1$. Mit der Wahl $z = \sqrt{Y}/2$ folgt aus unseren Voraussetzungen an Y, dass $z > 10^9$ gilt, und somit erhalten wir aus Lemma 3.3 die Abschätzung

$$S_1(z) \geq \log(z) + \gamma + \sum_{p<1000} \frac{\log(p)}{p(p-1)} - 0.007 \geq \log(z) + 1.32 \geq \frac{1}{2}\big(\log(Y) + 1.25\big).$$

Aus Lemma 3.2 erhalten wir ferner

$$H_1(z) \leq \Big(\frac{15}{\pi^2} + \frac{223}{\sqrt{10^9}}\Big)z \leq 1.53\, z,$$

und somit folgt

$$\frac{Y}{S_1(z)} \leq 2\frac{Y}{\log(Y)+1.25} = 2\frac{Y}{\log(Y)} - 2.5\frac{Y}{\log(Y)(\log(Y)+1.25)}$$

und

$$\frac{H_1^2(z)}{S_1^2(z)} \leq 2.4\frac{Y}{(\log(Y)+1.25)^2}.$$

Mit der trivialen Abschätzung $\pi(z) \leq z$ erhalten wir also

$$\frac{Y}{S_1(z)} + \frac{H_1^2(z)}{S_1^2(z)} + \pi(z) \leq 2\frac{Y}{\log(Y)} + \frac{\sqrt{Y}}{2} - \frac{0.1Y}{\log(Y)(\log(Y)+1.25)} < 2\frac{Y}{\log(Y)},$$

wie behauptet.

Als nächstes betrachten wir den Fall $1 < Y < 20000$. Hier liefert Satz 3.2 die Abschätzung

$$\sum_{p\in I} g(p) \leq Y \prod_{p\leq z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) + 2^{\pi(z)} + \pi(z).$$

Es genügt also zu zeigen, dass für jedes derartige Y ein Wahl von z existiert, so dass

$$Y \prod_{p\leq z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) + 2^{\pi(z)} + \pi(z) < 2\frac{Y}{\log(Y)}$$

gilt. Aber dies ist bereits in [MV73, S. 130] bewiesen.

Zum Beweis der Behauptung verbleibt nun nur noch die Betrachtung des Fallst $20000 \leq Y \leq 4 \times 10^{18}$. Hier bedienen wir uns einer numerischen Methode: Die Funktion $t \mapsto t/\log(t)$ ist für $t > e^2$ konkav. Folglich impliziert bei fester Wahl von z die Gültigkeit der Ungleichung

$$\frac{Y}{S_1(z)} + \frac{H_1^2(z)}{S_1^2(z)} + \pi(z) < 2\frac{Y}{\log(Y)} \tag{3.21}$$

für $Y \in \{Y_0, Y_1\}$ bereits ihre Gültigkeit für beliebige $Y \in [Y_0, Y_1]$. Die Ungleichung (3.21) wurde mit einem einfachen C-Programm für alle $z \in [50, 2\times 10^9) \cap \mathbb{Z}$ für $Y \in \{4z^2, 4(z+1)^2\}$ verifiziert. Folglich gilt (3.21) mit der Wahl $z = \sqrt{Y}/2$ für alle $Y \in [4 \times 50^2, 1.6 \times 10^{19}]$. $\square$

Bemerkung 3.1. Die gewichtete Brun-Titchmarsh-Ungleichung bietet wieder einen Anreiz, eine Herleitung des stärkeren Resultats

$$\pi(x+y;k,l) - \pi(x;k,l) < \frac{2}{\varphi(k)}\frac{y}{\log(y/k)} \qquad \text{für } y > k \tag{3.22}$$

von Montgomery und Vaughan [MV73] aus dem Selberg-Sieb zu versuchen, denn das große Sieb, auf dem die obige Abschätzung beruht, ist für den hier gewählten Ansatz zur Gewinnung gewichteter Siebabschätzungen nicht zugänglich.

Es lässt sich zeigen, dass die (3.22) entsprechende Abschätzung

$$\sum_{\substack{p\in I\\ p\equiv l \bmod}} f(p) < \frac{2}{\varphi(k)}\frac{\|f\|_{1,I}}{\log(\rho_I(f)/k)}$$

zumindest für $\rho_I(f) \gg_\varepsilon q^{1+\varepsilon}$ gilt. Es ist aber nicht klar, ob sie sich auch für $\rho_I(f) > k$ zeigen lässt.

Kapitel 4

Algorithmische Restgliedabschätzung

In diesem Kapitel entwickeln wir eine effiziente analytische Methode zur Abschätzung von

$$R_\psi(x) = \frac{x - \psi(x)}{\sqrt{x}},$$

dem normierten Restglied im Primzahlsatz für die Tschebyschow-Funktion. Die beste dem Autor bekannte explizite Abschätzung von R_ψ ist derzeit

$$|R_\psi(x)| \leq \sqrt{\frac{8}{17\pi}} X^{1/2} \sqrt{x} e^{-X} \tag{4.1}$$

mit $X = \sqrt{x/R}$ und $R = 6.455$, gültig für alle $x \geq 23$ [Tru, Theorem 1].

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung verbessert sich diese, nach einem bekannten Resultat von L. Schoenfeld, zu

$$|R_\psi(x)| \leq \frac{1}{8\pi} \log(x)^2 \tag{4.2}$$

für $x \geq 2657$ [Sch76].

Der im Nachfolgenden beschriebene Algorithmus leistet das Folgende: Sei

$$\pm M_\psi^\pm(x) = \max_{t \in [x, 2x]} \pm R_\psi(t)$$

und sei $\theta \in [0, 1/2)$. Dann nimmt der Algorithmus die ersten $\tilde{O}(x^{\frac{1}{2}-\theta})$ Nullstellen als Eingabedaten und berechnet mit $\tilde{O}(x^{\frac{1}{2}-\theta})$ Rechenschritten obere Schranken $\pm\tilde{M}_\psi^\pm(x)$ für $\pm M_\psi(x)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\pm\tilde{M}_\psi^\pm(x) \leq \pm M_\psi^\pm(x) + \delta x^\theta$$

für ein fest gewähltes $\delta > 0$ gilt.

Damit lassen sich sowohl die Schranke in (4.1) als auch die Schranke in (4.2) verbessern. Besonders interessant ist dabei der Fall $\theta = 0$. Nach einem Resultat von J. E. Littlewood gilt

$$R_\psi(x) = \Omega(\log\log\log(x)),$$

sodass $M_\psi^{\pm}(x)$ in diesem Fall dominant ist [Lit14]. Allerdings ist bislang kein x bekannt, für das $|R_\psi(x)| > 1$ gilt. Diese Frage ist eng verwandt mit dem Auftreten des ersten Vorzeichenwechsels von $\mathrm{li}(x) - \pi(x)$. Die Stelle des Vorzeichenwechsels ist nach Littlewoods Schüler S. Skewes, der als erster eine explizite obere Abschätzung bewies, als Skewes-Zahl benannt [Ske33]. Für diese ist inzwischen die obere Abschätzung $1.39821924 \times 10^{314}$ bekannt [BH00]. Diese beruht auf dem Nachweis der Positivität eines gewichteten Mittelwerts von $\mathrm{li}(x) - \pi(x)$ und liefert somit keine tatsächlichen Beispiele für $\mathrm{li}(x) - \pi(x) < 0$.

Die letzte dokumentierte untere Abschätzung der Skewes-Zahl stammt von T. Kotnik, der zeigte, dass kein Vorzeichenwechsel bis 2×10^{14} stattfindet [Kot08]. Sein Beweis basiert auf einer effizienten Implementierung des Siebs des Eratosthenes, also der Auswertung von $\mathrm{li}(p) - \pi(p)$ für alle Primzahlen $p \leq 2 \times 10^{14}$. Zudem geben D. A. Stoll und P. Demichel in [SD11] an, Vorzeichenwechsel bis 10^{18} ausgeschlossen zu haben, allerdings ohne ihre Methode näher zu erklären.

Die analytische Herangehensweise zur Gewinnung unterer Abschätzungen für die Skewes-Zahl ist deutlich effizienter als die Verwendung des Siebs des Eratosthenes, denn erstere berechnet für diese Zwecke hinreichend genaue Schranken bis zu einer Höhe von x mit einer Laufzeit von $\tilde{O}(\sqrt{x})$, wohingegen das Sieb des Erathostenes in diesem Fall eine Laufzeit von $\tilde{O}(x)$ hat.

Die Ergebnisse für $R_\psi(x)$ lassen sich mit Standardtechniken leicht auf $\theta(x)$, $\pi^*(x)$ und $\pi(x)$ übertragen, was im nachfolgenden Kapitel ausgeführt wird.

4.1 Beschreibung der Methode

Der Algorithmus basiert auf der Tatsache, dass die Tschebyschow-Funktion $\psi(x)$ einerseits durch die Nullstellen der Zetafunktion und andererseits durch die Primzahlpotenzen $\leq x$ ausgedrückt werden kann. Ersteres kann genutzt werden, um $\psi(x)$ effizient an vielen Stützstellen zu approximieren, wobei die Kenntnis der ersten $O(x^\alpha)$ Nullstellen ausreichend ist, um $\psi(x)$ bis zu einer Genauigkeit von $\tilde{O}(x^{1-\alpha})$ zu berechnen. Dabei kommen Verfahren zur schnellen Auswertung trigonometrischer Summen zum Einsatz, die im Abschnitt 4.2 näher beschrieben werden, und die eine Auswertung an $O(x^\alpha)$ Stützstellen mit einer Laufzeit von $\tilde{O}(x^\alpha)$ ermöglichen. Die Darstellung von $\psi(x)$ als Summe über Primzahlpotenzen bietet dann die Möglichkeit, derartige Schranken zwischen den Stützstellen zu interpolieren.

Zur Abschätzung von $\psi(x)$ wird dabei nicht die von Mangoldtsche explizite Formel verwendet, was prinzipiell möglich wäre, sondern die modifizierte Tschebyschow-Funktion $\psi_{c,\varepsilon}$ aus Kapitel 1, die leichter zu handhaben ist und vermutlich auch bessere Resultate liefert.

Die Idee, Methoden zur schnellen Auswertung trigonometrischer Summen zur multiplen Auswertung derartiger Summen über Nullstellen zu verwenden, verdankt der Autor J. Franke.

4.1.1 Beschränkung von $\psi(x)$ durch $\psi_{c,\varepsilon}(x)$

Wir hatten schon in Kapitel 1 gesehen, dass $\psi_{c,\varepsilon}$ zur Beschränkung von ψ herangezogen werden kann. Wir nutzen nun die gewichtete Brun-Titchmarsh-Ungleichung aus Kapitel 3, um die Summen über Primzahlpotenzen in Satz 1.2 weiter abzuschätzen.

Satz 4.1. *Sei $0 \leq \alpha < 1$, $x > 10^9$, $\varepsilon < 10^{-4}$, und es gelte*

$$B = \frac{\varepsilon x e^{-\varepsilon} |\nu_c(\alpha)|}{2(\mu_c)_+(\alpha)} > 1.$$

Wir definieren

$$A(x,c,\varepsilon,\alpha) = e^{2\varepsilon}\log(e^{\varepsilon}x)\Big[\frac{2\,\varepsilon\,x\,|\nu_c(\alpha)|}{\log B} + 2.01\varepsilon\sqrt{x} + \frac{1}{2}\log\log(2x^2)\Big]$$

Dann gilt

$$\psi(e^{-\alpha\varepsilon}x) \le \psi_{c,\varepsilon}(x) + A(x,c,\varepsilon,\alpha)$$

und

$$\psi(e^{\alpha\varepsilon}x) \ge \psi_{c,\varepsilon}(x) - A(x,c,\varepsilon,\alpha).$$

Beweis. Nach Satz 1.2 genügt es

$$\sum_{e^{\alpha\varepsilon}x\le p^m\le e^{\varepsilon}x} \frac{1}{m} M_{x,c,\varepsilon}(p^m) \le A(x,c,\varepsilon,\alpha) \tag{4.3}$$

und

$$-A(x,c,\varepsilon,\alpha) \le \sum_{e^{-\varepsilon}x\le p^m\le e^{-\alpha\varepsilon}x} \frac{1}{m} M_{x,c,\varepsilon}(p^m) \tag{4.4}$$

zu zeigen. Aus (1.23) und (1.14) ist leicht ersichtlich, dass

$$M_{x,c,\varepsilon}(t) = \frac{\log t}{\lambda_{c,\varepsilon}}\mu_{c,\varepsilon}\Big(\log\frac{t}{x}\Big)(1+\Theta(\varepsilon)) \le \frac{e^{\varepsilon}}{2}\log(e^{\varepsilon}x) \tag{4.5}$$

gilt.

Wir schätzen zunächst den Beitrag der Primzahlen ab.

Lemma 4.1. *Seien $x > 1$, $\varepsilon < 1$ und $\alpha \in [0,1)$ derart, dass*

$$B = \frac{\varepsilon x e^{-\varepsilon}|\nu_c(\alpha)|}{2(\mu_c)_+(\alpha)} > 1$$

gilt. Dann gelten die Ungleichungen

$$\sum_{e^{-\varepsilon}x\le p\le e^{-\alpha\varepsilon}x} \Big|\mu_c\Big(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{p}{x}\Big)\Big| \le 2\frac{\varepsilon x|\nu_c(\alpha)|}{\log B}$$

und

$$\sum_{e^{\alpha\varepsilon}x\le p\le e^{\varepsilon}x} \Big|\mu_c\Big(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{p}{x}\Big)\Big| \le 2\frac{\varepsilon x e^{\varepsilon}|\nu_c(\alpha)|}{\log B}.$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die zweite Ungleichung. Sei dazu $I = [e^{\alpha\varepsilon}x, e^{\varepsilon}x]$ und

$$f(t) = (\mu_c)_+\Big(\frac{1}{\varepsilon}\log\frac{t}{x}\Big).$$

Dann erfüllt f die Voraussetzungen von Theorem 3.2 und folglich haben wir

$$\sum_{p\in I} f(p) \le 2\|f\|_{1,I}\Big(\log\frac{\|f\|_{1,I}}{\|f\|_{\infty,I} + \|f'\|_{1,I}}\Big)^{-1}.$$

Da f auf I monoton fällt, gilt offenbar $\|f\|_{\infty,I} = \|f'\|_{1,I} = (\mu_c)_+(\alpha)$. Ferner erhalten wir mit der Substitution $u = \frac{1}{\varepsilon} \log \frac{t}{x}$

$$\|f\|_{1,I} = \int_{e^{\alpha\varepsilon}x}^{e^{\varepsilon}x} f(t)\, dt = \varepsilon x \int_{\alpha}^{\varepsilon} e^{\varepsilon u} \mu_c(u)\, du,$$

woraus sich unmittelber die Behauptung ergibt. Die erste Ungleichung folgt in völlig analoger Weise. □

Zusammen mit Lemma 2.3 und (4.5) folgen nun die behaupteten Ungleichungen. □

Bemerkung 4.1. Nach bekannten Resultaten über das Wachstum der modifizierten Besselfunktionen, auf die wir im nachfolgenden Kapitel noch weiter eingehen werden, gilt

$$|\nu_c(0)| \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}$$

für $c \to \infty$. Für Anwendungen mit $c \sim C_1 \log x$ liefert Satz 4.1 also eine Abschätzung, die um einen Faktor $C_2/\sqrt{\log x}$ kleiner ist als die triviale Abschätzung mit der Brun-Titchmarsh-Ungleichung. Dieser Gewinn lässt sich nutzen, um bei gleichem Approximationsfehler den Nullstellenbereich durch eine Verkleinerung von ε um etwa den gleichen Faktor $C_2/\sqrt{\log x}$ zu verringern. In typischen Anwendungen ließ sich der Nullstellenbereich auf diese Weise um ca. 80% verkleinern.

4.1.2 Interpolation von $\psi(x)$

Wir kommen nun zum zweiten Bestandteil des Algorithmus, der Interpolation von Schranken für $R_\psi(x)$ zwischen den Stützstellen. Hierzu dient uns der folgende Satz.

Satz 4.2. *Sei* $10^9 \le a < b$ *und sei*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

eine Zerlegung von $[a, b]$*, dessen maximale Schrittweite*

$$\Delta = \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \ldots, n\}$$

der Bedingung $10 \le \Delta \le 10^{-5}a$ *genügt. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Sei* $M > 0$ *und es gelte*
$$\frac{x_k - \psi(x_k)}{\sqrt{x_k}} \le M$$
für $k = 0, 1, \ldots, n$*. Dann gilt für alle* $y \in [a, b]$
$$\frac{y - \psi(y)}{\sqrt{y}} \le 1.001 \left[M + \frac{\log a}{\sqrt{a}} \left(\frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(a^2) \right) \right].$$

2. *Sei* $m < 0$ *und es gelte*
$$\frac{x_k - \psi(x_k)}{\sqrt{x_k}} \ge m$$
für $k = 0, 1, \ldots, n$*. Dann gilt für alle* $y \in [a, b]$
$$\frac{y - \psi(y)}{\sqrt{y}} \ge 1.001 \left[m - \frac{\log a}{\sqrt{a}} \left(\frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(a^2) \right) \right].$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Abschätzung

$$\psi(x) - \psi(x-y) \leq \log(x) \left(1.0001 \frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(x^2) \right) \tag{4.6}$$

für $x \geq a \geq 10^9$ und $0 \leq y \leq \frac{\Delta}{2}$. Wegen $\frac{\Delta}{\log \Delta} \geq \frac{10}{\log 10} > 3$ genügt es offenbar, dies für $y \geq 3$ zu zeigen. Wir nutzen wieder die Abschätzung in (2.23) und erhalten

$$\begin{aligned} \psi(x) - \psi(x-y) &\leq \log(x) \sum_{x-y \leq p^m \leq x} \frac{1}{m} \\ &\leq \log(x) \left(\frac{2y}{\log y} + \sum_{m=2}^{[2\log x]} \left(2\frac{y}{m^2} x^{1/m-1} + \frac{1}{m} \right) \right). \end{aligned}$$

Hier nutzen wir weiter

$$\sum_{m=2}^{[2\log x]} \frac{1}{m} \leq \int_1^{2\log x} \frac{dt}{t} \leq \log\log(x^2)$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{[2\log x]} 2\frac{y}{m^2} x^{1/m-1} &\leq \frac{y}{2\sqrt{x}} + \frac{2y}{x^{2/3}} \int_2^\infty \frac{dt}{t^2} \\ &\leq \frac{y}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{2} + x^{-1/6} \right) < 0.6 \frac{y}{\sqrt{x}} \leq 0.0002 \frac{y}{\log y}, \end{aligned}$$

und erhalten (4.6) unter Ausnutzung der Monotonie von $y \mapsto \frac{y}{\log y}$.

Sei nun $x \in \{x_k\}_{k=1}^n$ und $0 \leq y \leq \Delta/2$. Dann haben wir

$$\frac{x-y-\psi(x-y)}{\sqrt{x-y}} = \frac{x-\psi(x)}{\sqrt{x-y}} + \frac{\psi(x)-\psi(x-y)}{\sqrt{x-y}} - \frac{y}{\sqrt{x-y}}. \tag{4.7}$$

Sind nun $m < 0$ und $M > 0$ die Schranken aus der Formulierung des Satzes, so gilt

$$1.001m \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}} m \leq \frac{x-\psi(x)}{\sqrt{x-y}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}} M \leq 1.001M.$$

Aus (4.6) erhalten wir zudem

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\psi(x)-\psi(x-y)}{\sqrt{x-y}} &\leq \frac{\log x}{\sqrt{x-y}} \left(1.0001 \frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(x^2) \right) \\ &\leq 1.001 \frac{\log a}{\sqrt{a}} \left(\frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(a^2) \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$0 \leq \frac{y}{\sqrt{x-y}} \leq 1.0001 \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \leq 1.001 \frac{\log(a)\Delta}{\sqrt{a}\log\Delta}$$

erhalten wir somit aus (4.7) die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1.001 \left(m - \frac{\log a}{\sqrt{a}} \left(\frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(a^2) \right) \right) &\leq \frac{x-y-\psi(x-y)}{\sqrt{x-y}} \\ &\leq 1.001 \left(M + \frac{\log a}{\sqrt{a}} \left(\frac{\Delta}{\log \Delta} + \log\log(a^2) \right) \right). \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhält man die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
1.001\left(m - \frac{\log a}{\sqrt{a}}\Big(\frac{\Delta}{\log\Delta} + \log\log(a^2)\Big)\right) &\le \frac{x+y-\psi(x+y)}{\sqrt{x+y}} \\
&\le 1.001\left(M + \frac{\log a}{\sqrt{a}}\Big(\frac{\Delta}{\log\Delta} + \log\log(a^2)\Big)\right)
\end{aligned}
$$

für $x \in \{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ und $0 \le y \le \Delta/2$, womit der Satz bewiesen ist. □

Die Grundlage des Algorithmus bildet nun das folgende Theorem.

Theorem 4.1. *Sei $\varepsilon < 10^{-4}$ und sei $0 \le \alpha \le 1$ derart, dass*

$$\frac{\varepsilon\, x\, \nu_c(\alpha)}{2\mu_c(\alpha_+)} > 10$$

gilt. Seien ferner $e^{\alpha\varepsilon}10^9 \le a < b$ und sei

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

eine Zerlegung von $[a, b]$, dessen maximale Schrittweite

$$\Delta = \max\{|x_k - x_{k-1}| \mid k = 1, \ldots, n\}$$

der Bedingung $10 \le \Delta \le 10^{-5}a$ genügt.

Wir definieren die Fehlerterme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= 1.001\,\alpha\,\varepsilon\sqrt{b}, \\
\mathcal{E}_2 &= 2.02\log(b)\left(\varepsilon\sqrt{b}\,|\nu_c(\alpha)|\log\Big(\frac{\varepsilon\, b\,|\nu_c(\alpha)|}{2(\mu_c)_+(\alpha)}\Big)^{-1} + \varepsilon + \frac{\log\log(2a^2)}{4\sqrt{a}}\right)
\end{aligned}
$$

und

$$\mathcal{E}_3 = 1.001\frac{\log a}{\sqrt{a}}\left(\frac{\Delta}{\log\Delta} + \log\log(a^2)\right).$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Sei $M > 0$ und es gelte*

$$\frac{x_k - \psi_{c,\varepsilon}(x_k)}{\sqrt{x_k}} \le M$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $y \in [e^{\alpha\varepsilon}a, b]$

$$\frac{y - \psi(y)}{\sqrt{y}} \le 1.01\,(M + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)\,.$$

2. *Sei $m < 0$ und es gelte*

$$\frac{x_k - \psi_{c,\varepsilon}(x_k)}{\sqrt{x_k}} \ge m$$

für $k = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt für alle $y \in [a, e^{-\alpha\varepsilon}b]$

$$\frac{y - \psi(y)}{\sqrt{y}} \ge 1.01\,(m - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3)\,.$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die erste Aussage. Dazu definieren wir $\tilde{x} = e^{\alpha\varepsilon}x$. Dann erhalten wir aus Satz 4.1 die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{x}_k - \psi(\tilde{x}_k)}{\sqrt{\tilde{x}}} &\leq \frac{\tilde{x}_k - x_k}{\sqrt{\tilde{x}_k}} + \frac{x_k - \psi_{c,\varepsilon}(x_k)}{\sqrt{\tilde{x}_k}} + \frac{A(x_k, c, \varepsilon, \alpha)}{\sqrt{\tilde{x}_k}} \\ &= 2\sinh(\alpha\varepsilon/2)\sqrt{x_k} + e^{-\alpha\varepsilon/2}\frac{x_k - \psi_{c,\varepsilon}(x_k)}{\sqrt{x_k}} + e^{-\alpha\varepsilon/2}\frac{A(x_k, c, \varepsilon, \alpha)}{\sqrt{x_k}}.\end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes haben wir

$$2\sinh(\alpha\varepsilon/2)\sqrt{x_k} \leq \mathcal{E}_1$$

und

$$\frac{A(x_k, c, \varepsilon, \alpha)}{\sqrt{x_k}} \leq \mathcal{E}_2.$$

Folglich gilt

$$\frac{\tilde{x}_k - \psi(\tilde{x}_k)}{\sqrt{\tilde{x}_k}} \leq M + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

für $k = 0, \ldots, n$ und Satz 4.2 liefert die gewünschte Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{y - \psi(y)}{\sqrt{y}} &\leq 1.001\left(M + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \frac{\log(\tilde{a})}{\sqrt{\tilde{a}}}\Big(\frac{\tilde{\Delta}}{\log\tilde{\Delta}} + \log\log(\tilde{a}^2)\Big)\right) \\ &\leq 1.01\,(M + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)\end{aligned}$$

für alle $y \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Die untere Abschätzung erhält man analog durch Betrachtung von

$$\frac{\hat{x}_k - \psi(\hat{x}_k)}{\sqrt{\hat{x}_k}} \geq -2\sinh(\alpha\varepsilon/2)\sqrt{x_k} + e^{\alpha\varepsilon/2}\frac{x_k - \psi_{c,\varepsilon}(x_k)}{\sqrt{x}} - e^{\alpha\varepsilon/2}\frac{A(x_k, c, \varepsilon, \alpha)}{\sqrt{x_k}},$$

mit der Bezeichnung $\hat{x}_k = e^{-\alpha\varepsilon}x_k$. □

4.2 Schnelle multiple Auswertung von $\psi_{c,\varepsilon}$

Setzen wir $x \geq 10^9$ und $\varepsilon \leq 10^{-4}$ voraus, so erhalten wir aus Theorem 1.1 unter Verwendung von

$$\left|\sum_{\rho}{}^{*}\frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho}\right| = \left|\sum_{\Im(\rho)>0}{}^{*}\frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho(1-\rho)}\right| \leq \frac{e^{\varepsilon/2}|1 + i100|}{100}\sum_{\rho}{}^{*}\frac{1}{\rho} \leq 0.024$$

(siehe (1.8)) die für die hiesigen Zwecke ausreichende approximative Formel

$$\frac{x - \psi_{c,\varepsilon}(x)}{\sqrt{x}} = \sum_{\rho}{}^{*}\frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho}x^{\rho-\frac{1}{2}} + \Theta\Big(\frac{2}{\sqrt{x}}\Big). \tag{4.8}$$

Folglich ist der Aufwand zur Berechnung der benötigten Schranken für $\psi_{c,\varepsilon}(x)$ mittels der expliziten Formel gleich dem Aufwand zur Berechnung von

$$\sum_{\substack{\rho \\ |\Im(\rho)|\leq c/\varepsilon}}{}^{*}\frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho}x^{\rho-\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Dies führt nach Übergang zur logarithmischen Skala auf das Problem der schnellen Auswertung trigonometrischer Summen. Hierzu existieren verschiedene Methoden, die die schnelle Fourier-Transformation nutzen, um derartige Summen simultan auf äquidistanten Gittern zu berechnen (siehe z.B. [OS88, Odl92]). Auswertungen an Zwischenstellen können zudem effizient mittels bandbreitenbeschränkter Interpolation bewerkstelligt werden.

4.2.1 Schnelle Auswertung trigonometrischer Summen

Als *trigonometrische Summen* bezeichnen wir Funktionen der Form

$$F(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{i\gamma_j x}$$

mit $\gamma_j \in \mathbb{R}$. In [FKBJ] wurde ein einfaches Verfahren beschrieben, derartige Summen mit Hilfe der schnellen Fourier-Transformation für alle $x \in [-T, T] \cap \mathbb{Z}$ zu berechnen. Dieses ist wie folgt gegeben:

Sei $R = 2^r$ und sei

$$\gamma_j = \frac{2\pi n_j}{R} + \delta_j$$

mit

$$|\delta_j| \leq \frac{\pi}{R}.$$

Sei ferner

$$P(t) = b_0 + \cdots + b_n t^n$$

ein approximierendes Polynom der Funktion $f(t) = \exp(it)$ in $[-\pi T/R, \pi T/R]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{j=1}^{N} a_j e^{2\pi i n_j x/R} e^{ix\delta_j} \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j e^{2\pi i n_j x/R} P(x\delta_j) + \Theta\Big(\big\|f - P;\, C^0([-\pi T/R, \pi T/R])\big\| \sum_{j=1}^{N} |a_j|\Big). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$f_l(k) = \sum_{\substack{j=1 \\ n_j \equiv k \bmod R}}^{N} a_j \delta_j^l \quad \text{und} \quad \hat{f}_l(x) = \sum_{k=1}^{R} f_l(k) e^{2\pi i k x/R},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} a_j e^{2\pi i n_j x/R} P(x\delta_j) &= \sum_{l=1}^{n} b_l x^l \sum_{j=1}^{N} a_j \delta_j^l e^{2\pi i n_j x/R} \\ &= \sum_{l=1}^{n} b_l \hat{f}_l(x) x^l. \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\hat{f}_l$ an allen Elementen von $\mathbb{Z}/R\mathbb{Z}$ lässt sich mittels der schnellen Fourier-Transformation mit einer Laufzeit von $O(R\log(R))$ bewerkstelligen. Für P sind wegen ihrer guten Approximationseigenschaften die Tschebyschow-interpolierenden Polynome von f eine gute Wahl. In diesem Fall hat man

$$\big\|f - P_n;\, C^0([-\pi T/R, \pi T/R])\big\| \leq \Big(\frac{\pi T}{2R}\Big)^{n+1} \frac{\sqrt{8}}{(n+1)!}$$

nach der Standardabschätzung für den Interpolationsfehler, wenn $P_n \in \mathbb{C}[X]$ das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$ bezeichnet, welches an den Stützstellen $\frac{\pi T}{R}\cos(\frac{2k-1}{2n+2}\pi)$ für $k = 1, 2, \ldots, n+1$ mit f übereinstimmt.

Sind dann die Koeffizienten α_k gleichmäßig beschränkt, und gehen N, T und R gemeinsam gegen ∞, so dass die Quotionten N/T und R/T von oben und unten beschränkt bleiben, so lassen sich auf diese Weise offenbar alle gewünschten Werte von F für jedes $\alpha > 0$ in $O(N \log(N)^2)$ mit einer Genauigkeit von $N^{-\alpha}$ berechnen.

Die Laufzeit des Algorithmus ist somit von der gleichen Ordnung wie die des Odlyzko-Schönhage-Algorithmus, aber er ist einfacher anzuwenden und auf Fehlerfortpflanzung hin zu untersuchen.

4.2.2 Bandbreitenbeschränkte Interpolation

Das Verfahren aus Abschnitt 4.2.1 liefert eine effiziente Method zur Berechnung der Summe über Nullstellen auf geometrischen Progressionen. Zur Auswertung der Summe an Zwischenstellen kann eine konvergenzbeschleunigte Variante der Interpolationsformel von Shannon, Nyquist, Whittacker und Kotelnikov verwendet werden. Wir formulieren diese für den Spezialfall trigonometrischer Summen mit dem Logan-Kern zur Konvergenzbeschleunigung.

Satz 4.3. *Sei*

$$F(y) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{i\gamma_j y}$$

mit $\gamma_j \in \mathbb{R}$ und sei $\tau = \max_j\{|\gamma_j|\}$. Sind dann β und λ so gewählt, dass die Ungleichungen

$$\tau \leq \lambda - \varepsilon < \lambda + \varepsilon \leq \beta$$

gelten, so gilt für F die Interpolationsformel

$$F(y) = \frac{\lambda}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F\big(\frac{\pi n}{\beta}\big) \frac{\sin(\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta}))}{\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta})} \ell_{c,\varepsilon}\big(y - \frac{\pi n}{\beta}\big). \tag{4.10}$$

Ferner gilt mit der Bezeichnung $A = \sum_{j=1}^{N} |a_j|$ die Abschätzung

$$\left| F(y) - \frac{\lambda}{\beta} \sum_{|y - \frac{\pi n}{\beta}| \leq \frac{c}{\varepsilon}} F\big(\frac{\pi n}{\beta}\big) \frac{\sin(\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta}))}{\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta})} \ell_{c,\varepsilon}\big(y - \frac{\pi n}{\beta}\big) \right| \\ \leq \frac{2A}{\sinh(c)} \left(\frac{\log(c+1)}{\pi} + \frac{2\varepsilon}{\beta} + 1 \right). \tag{4.11}$$

Beweis. Der Beweis von (4.10) ist in [OS88] skizziert und in [BJ10] näher ausgeführt. Wir begnügen uns daher damit, an dieser Stelle (4.11) zu zeigen. Wir betrachten zunächst den Beitrag der Summanden mit

$$y - \frac{n\pi}{\beta} > \frac{c}{\varepsilon}$$

zu (4.10). Mit den Abschätzungen

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}, \quad |l_{c,1}(y)| \leq \frac{c}{\sinh(c)} \min\Big\{1, \frac{1}{|y|-c}\Big\} \quad \text{und} \quad |F(t)| \leq A$$

für $x \neq 0$, $y > c$ und $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{\beta} \sum_{y-\frac{n\pi}{\beta} > \frac{c}{\varepsilon}} \left| F\big(\frac{\pi n}{\beta}\big) \frac{\sin(\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta}))}{\lambda(y - \frac{\pi n}{\beta})} \ell_{c,\varepsilon}\big(y - \frac{\pi n}{\beta}\big) \right| \\
&\leq \frac{Ac}{\beta \sinh(c)} \left[\frac{c}{\varepsilon} + \sum_{y-\frac{n\pi}{\beta} > \frac{c+1}{\varepsilon}} \frac{1}{y - \frac{n\pi}{\beta}} \frac{1}{\varepsilon(y - \frac{n\pi}{\beta}) - c} \right] \\
&\leq \frac{Ac}{\beta \sinh(c)} \left[\frac{2\varepsilon}{c} + \int_{-\infty}^{\frac{\beta}{\pi}(y-\frac{c+1}{\varepsilon})} \frac{dt}{(y - \frac{\pi}{\beta}t)(\varepsilon(y - \frac{\pi}{\beta}t) - c)} \right] \\
&= \frac{A}{\sinh(c)} \left[\frac{2\varepsilon}{\beta} + \frac{1}{\pi} \log(c+1) \right],
\end{aligned}$$

wobei der erste Summand auf der zweiten Zeile von den Summanden mit $\frac{c}{\varepsilon} < y - \frac{n\pi}{\beta} \leq \frac{c+1}{\varepsilon}$ herrührt und beim Übergang von der zweiten zur dritten Zeile die Monotonie der Summanden genutzt wurde.

Eine analoge Rechnung schätzt den Beitrag der Summanden mit $y - \frac{n\pi}{\beta} < -\frac{c}{\varepsilon}$ ebenso ab, und somit folgt (4.11). □

Zur Berechnung der Summe über Nullstellen wird dies auf die Funktionen

$$F_{T,U}(y) = e^{-iy\frac{T+U}{2}} \sum_{T<\gamma<U} \frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho} e^{i\gamma y} \tag{4.12}$$

angewendet, wobei wir $\rho = 1/2 + i\gamma$ gesetzt und angenommen haben, dass γ reell ist, was für alle auftretenden Nullstellen der Fall ist. Der Vorfaktor $e^{-iy\frac{T+U}{2}}$ dient dabei der Reduktion der Bandbreite.

4.3 Laufzeit und Speicherbedarf

Sei $\delta > 0$ und sei $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$. Wir wollen für genügend große x die Laufzeit zur Berechnung oberer Schranken $\pm\tilde{M}_\psi^\pm(x)$ für $\pm R_\psi(t)$ in $[x, 2x]$, die der Bedingung

$$\pm\tilde{M}_\psi^\pm(x) \leq \pm M_\psi^\pm(x) + \delta x^\theta$$

genügen, abschätzen. Zu diesem Zweck wählen wir $c = \log x$ und $\varepsilon = c_1 x^{\theta - \frac{1}{2}}$, so dass nach Satz 4.1 für genügend großes t

$$\left| \frac{\psi(t) - \psi_{c,\varepsilon}(t)}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{\delta}{4} t^\theta$$

gilt. Für derartige t gilt dann folglich

$$\left| \frac{t - \psi_{c,\varepsilon}(t)}{\sqrt{t}} \right| \leq \left| R_\psi^\pm(t) \right| + \frac{\delta}{4} t^\theta.$$

Somit erhalten wir die gewünschte Abschätzung, wenn wir $\psi_{c,\varepsilon}$ auf einem Stützstellensystem in $[x, 2x]$ mit maximaler Schrittweite $c_2 x^{\theta+\frac{1}{2}}$ mit einer Genauigkeit von $\frac{\delta}{4}t^\theta$ auswerten, wobei c_2 klein genug gewählt sei, dass in Theorem 4.1 $\mathcal{E}_3 < \frac{\delta}{4}$ gelte. Letzteres ist für genügend großes x immer erfüllt, wenn $\psi_{c,\varepsilon}$ durch die Summe über die Nullstellen bis zu einem Imaginärteil von $\frac{c}{\varepsilon}$ approximiert wird.

In der Interterpolationsformel wählen wir $\beta = 2\tau = \frac{c}{\varepsilon}$ und berechnen die Koeffizienten mit dem in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Verfahren (wobei für $R = 2^r$ die nächste Zweierpotenz zu β zu wählen ist) mit $\tilde{O}(x^{\frac{1}{2}-\theta})$ Rechenschritten. Eine einzelne Auswertung der Summe mit der Interpolationsformel hat dann den Aufwand $O(\log(x)^B)$, für ein geeignetes $B > 0$, und somit lassen sich alle benötigten Auswertungen in $\tilde{O}(x^{\frac{1}{2}-\theta})$ bewerkstelligen.

Der Speicherbedarf ist bei der obigen Vorgehensweise durch ein Vielfaches der Anzahl der Nullstellen abgeschätzt, also $\tilde{O}(x^{\frac{1}{2}-\theta})$. Er lässt sich aber durch eine Unterteilung der Summe über Nullstellen reduzieren. Bei gegebenem Speicher der Größe $O(x^\gamma)$ erhöht sich der Aufwand durch das wiederholte Interpolieren dabei auf $\tilde{O}(x^{\gamma+1-2\theta})$. Insbesondere hat der Algorithmus damit im Fall $\theta = 0$ wieder eine Laufzeit von $\tilde{O}(x)$, wenn einmal die Speichergrenze erreicht ist. Allerdings ist die implizite Konstante dabei in der Regel deutlich geringer als bei einer Anwendung des Siebs des Eratosthenes.

4.4 Implementierung und Resultate

Die Implementierung des Algorithmus basiert wesentlich auf einer 64-Bit-Festkomma-Arithmetik, die zu diesem Zweck entwickelt wurde. Lediglich die Auswertung der auftretenden elementaren Funktionen werden mit der Multipräzisionsbibliothek *MPFR* bewerkstelligt und für die Berechnung der Koeffizienten

$$\frac{\ell_{c,\varepsilon}(\gamma)}{\rho \cdot \ell_{c,\varepsilon}(i/2)} \exp\Big(i\Big(\gamma - \frac{T_0 + T_1}{2}\Big)y_0\Big), \tag{4.13}$$

wobei T_0 und T_1 die Grenzen des Nullstellenbereichs und $y_0 = \log x + \log\sqrt{2}$ den Logarithmischen Mittelpunkt des betrachteten Intervalls bezeichnet, wird ein von J. Franke implementierter 128-Bit-Festkommadatentyp verwendet.

Die Verwendung der Festkomma-Arithmetik hat einige Vorzüge, die mit einer etwas erhöhten Laufzeit erkauft werden.

1. Sie liefert mehr Genauigkeit als der herkömmliche *double*-Datentyp und benötigt weniger Speicher als der *extended double*-Datentyp.

2. Nur Multiplikationen sind Rundungsfehler behaftet, sofern kein Variablenüberlauf auftritt.

3. Das Nichtauftreten eines Variablenüberlaufs liefert Informationenen über den größten aufgetretenen Zwischenwert, der sich a priori meist nur schlecht abschätzen lässt, aber für eine Rundungsfehleranalyse mit *double*-Variablen unerlässlich ist. Auf diesem Wege hat man die Möglichkeit, die Fehlerabschätzung durch Schätzung des größten Wertes zu verbessern.

Für die Berechnungen standen dem Autor die von J. Franke et. al. berechneten Nullstellen bis zu einem Imaginärteil von 10^{11} mit einer Genauigkeit von 64 Nachkommabits aus [FKBJ] zur Verfügung. Das Programm ist so konzipiert, dass es den Beitrag der Eingabe und Rundungsfehler selbst abschätzt (siehe Anhang). Die Strategie dabei ist, den Fehler der Ausgabedaten in der ℓ^∞-Norm gegen den Fehler der Eingabedaten in der ℓ^1-Norm abzuschätzen. Dabei kommt der Hauptterm von der Rundung der Koeffizienten in (4.13) auf 64 Nachkommabits. Der Fehler, der von der Ungenauigkeit der Nullstellen und von der Rundung der δ_j im in Abschnit 4.2.1 beschriebenen Verfahren herrührt, stellt sich dagegen als vernachlässigbar heraus. Zur Überprüfung werden die berechneten Maxima und Minima durch direkte Auswertung der Summen über Nullstellen gegengerechnet. Für die größten Rechnungen ergaben die Abschätzungen schon einen möglichen Approximationsfehler von 0.016 für den ersten Summenabschnitt. Es ist allerdings bei den Überprüfungen keine Abweichung, die größer als 10^{-11} wäre, festgestellt worden.

Für die bisherigen Rechnungen war die Speichergröße auf 340 GB beschränkt. Dies erforderte ab $x = 4 \times 10^{14}$ eine Unterteilung des Nullstellenbereichs. Für die Abschätzungen im Intervall $[5.12 \times 10^{18}, 1.024 \times 10^{19}]$ war bereits eine Unterteilung in13 Abschnitte vonnöten. Allerdings belief sich die Rechenzeit dafür auf einem einzigen Prozessorkern dennoch nur auf 290 Stunden.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die Ausgaben der Programme mit allen Parametern und den Werten der stückweisen Maxima und Minima ist dem Anhang in elektronischer Form beigefügt. Ebenso die Ergebnisse der Überprüfungen durch direkte Auswertung. Für die Zukunft sind weitere Berechnungen unter Einbeziehung eines größeren Nullstellenbereichs geplant.

Darüber hinaus hat der Autor mit einem *brute force*-Algorithmus die Schranken

$$-0.8 \leq R_\psi(t) \leq 0.81$$

für $t \in [100, 5 \times 10^{10}]$ berechnet. Mit den Werten in Tabelle 4.1 erhalten wir also zusammenfassend

Satz 4.4. *Es gilt*

$$|R_\psi(x)| \leq 0.94 \qquad \textit{für } 100 \leq x \leq 10^{19}.$$

Tabelle 4.1: Schranken für $R_\psi(x)$

x	$\tilde{M}_\psi^-(x)$	$\tilde{M}_\psi^+(x)$	x	$\tilde{M}_\psi^-(x)$	$\tilde{M}_\psi^+(x)$
10^{10}	$-.77$	$.85$	10^{12}	$-.80$	$.81$
2×10^{10}	$-.75$	$.64$	2×10^{12}	$-.79$	$.76$
4×10^{10}	$-.73$	$.80$	4×10^{12}	$-.73$	$.73$
8×10^{10}	$-.80$	$.86$	8×10^{12}	$-.80$	$.76$
16×10^{10}	$-.88$	$.68$	16×10^{12}	$-.80$	$.68$
32×10^{10}	$-.88$	$.78$	32×10^{12}	$-.67$	$.93$
64×10^{10}	$-.66$	$.74$	64×10^{12}	$-.78$	$.77$

x	$\tilde{M}_\psi^-(x)$	$\tilde{M}_\psi^+(x)$	x	$\tilde{M}_\psi^-(x)$	$\tilde{M}_\psi^+(x)$
10^{14}	$-.79$	$.72$	10^{16}	$-.88$	$.74$
2×10^{14}	$-.60$	$.76$	2×10^{16}	$-.87$	$.70$
4×10^{14}	$-.65$	$.73$	4×10^{16}	$-.65$	$.73$
8×10^{14}	$-.81$	$.88$	8×10^{16}	$-.82$	$.77$
16×10^{14}	$-.66$	$.86$	16×10^{16}	$-.71$	$.92$
32×10^{14}	$-.74$	$.86$	32×10^{16}	$-.78$	$.71$
64×10^{14}	$-.73$	$.66$	64×10^{16}	$-.94$	$.82$
			128×10^{16}	$-.94$	$.75$
			256×10^{16}	$-.82$	$.86$
			512×10^{16}	$-.83$	$.94$

Kapitel 5

Weitere Resultate und Anwendungen

5.1 Abschätzungen für $\pi(x)$, $\pi^*(x)$ und $\vartheta(x)$

Wir kommen nun zur Übertragung der errechneten Abschätzungen von

$$R_\psi(x) = \frac{x - \psi(x)}{\sqrt{x}}$$

aus dem vorherigen Kapitel auf die Restterme

$$R_\vartheta(x) = \frac{x - \vartheta(x)}{\sqrt{x}},$$
$$R_{\pi^*}(x) = \frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\big(\mathrm{li}(x) - \pi^*(x)\big)$$

und

$$R_\pi(x) = \frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\big(\mathrm{li}(x) - \pi(x)\big).$$

Dazu nutzen wir, dass $\psi(x)$ und $\pi^*(x)$, sowie $\vartheta(x)$ und $\pi(x)$ über partielle Summation miteinander verbunden sind. Wir beginnen aber zunächst mit der Übertragung der Ergebnisse für $R_\psi(x)$ auf $R_\vartheta(x)$.

5.1.1 Schranken für $R_\vartheta(x)$

Lemma 5.1. *Sei $0 < a < b$ und es gelte*

$$c \le R_\psi(x) \le C \tag{5.1}$$

für $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$R_\vartheta(x) \le C + 1 - c\,x^{-1/4} \tag{5.2}$$

für $x \in [a^2, b]$ und

$$R_\vartheta(x) \ge c + 1 - (C+1)x^{-1/4} + c\,x^{-3/8} \tag{5.3}$$

für $x \in [a^4, b]$.

Beweis. Wegen
$$\psi(t) - \psi(\sqrt{t}) = \vartheta(t) - \vartheta(\sqrt{t})$$
haben wir
$$\psi(t) - \psi(\sqrt{t}) \leq \vartheta(t) \leq \psi(t) - \psi(\sqrt{t}) + \psi(t^{1/4}).$$
Hieraus ergeben sich (5.2) und (5.3) durch Anwendung von (5.1) auf $\psi(\sqrt{t})$ und $\psi(t^{1/4})$. □

Aus den Schranken für R_ψ erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 5.1. *Es gilt*
$$R_\vartheta(x) < 1.94 \qquad \text{für } 10^4 \leq x \leq 10^{19}. \tag{5.4}$$
und
$$R_\vartheta(x) > 0.06 \qquad \text{für } 10^8 \leq x \leq 10^{19}. \tag{5.5}$$

Beweis. Zum Beweis der oberen Abschätzung wenden wir Lemma 5.1 zuerst mit $x = 100$, $y = 10^8$ und $-c = C = 0.81$ an und erhalten die Abschätzung in (5.4) für $10^4 \leq t \leq 10^8$. Für die verbleibenden t wählen wir dann $x = 100$, $y = 10^{19}$ und $-c = C = 0.94$. Die untere Abschätzung folgt analog mit der gleichen Parameterwahl. □

Für $x \leq 10^8$ sei zudem auf das Resultat [RS62, Theorem 19] verwiesen, nach welchem
$$0 < R_\vartheta(x) \leq 2.05282 \qquad \text{für } 0 < x \leq 10^8 \tag{5.6}$$
gilt. Insbesondere ist somit $R_\vartheta(x)$ für $0 < x \leq 10^{19}$ stets positiv.

5.1.2 Schranken für $R_{\pi^*}(x)$

Zur Übertragung der Schranken von $R_\psi(x)$ auf $R_{\pi^*}(x)$ haben wir das folgende Lemma.

Lemma 5.2. *Sei $b > 10^7$, $12 < a < b$, seien $c < 0$ und $C > 0$ derart, dass*
$$c \leq R_\psi(x) \leq C \tag{5.7}$$
für alle $x \in [a, b]$ gilt, und sei
$$A = \pi^*(a) - \mathrm{li}(a) + \frac{a - \psi(a)}{\log a}.$$
Dann gelten für alle $x \in [\max\{a, 10^7\}, b]$ die Ungleichungen
$$R_{\pi^*}(x) \leq \frac{1}{2} R_\psi(x) + \frac{C}{\log x}\Big(1 + \frac{5}{\log x}\Big) + A\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
und
$$R_{\pi^*}(x) \geq \frac{1}{2} R_\psi(x) + \frac{c}{\log x}\Big(1 + \frac{5}{\log x}\Big) + A\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Beweis. Durch partielle Summation erhalten wir
$$\pi^*(x) - \pi^*(a) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(a) - \frac{x - \psi(x)}{\log x} + \frac{a - \psi(a)}{\log a} - \int_a^x \frac{t - \psi(t)}{t\log(t)^2}\,dt. \tag{5.8}$$

Zum Beweis des Satzes genügt es somit, für $a \geq 12$ und $x \geq 10^7$ die Abschätzung

$$0 \leq \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}\log(t)^2} \leq 2\frac{\sqrt{x}}{\log(x)^2}\Big(1 + \frac{5}{\log x}\Big) \tag{5.9}$$

zu zeigen. Mit der Substitution $u = \log t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}\log(t)^2} &= \int_{\log a}^{\log x} \frac{e^{u/2}}{u^2}\,du \\ &= \int_{\log a}^{\log a + i\infty} \frac{e^{u/2}}{u^2}\,du - \int_{\log x}^{\log x + i\infty} \frac{e^{u/2}}{u^2}\,du.\end{aligned}$$

Für beliebiges $\alpha > 0$ erhält man durch zweimalige partielle Integration

$$e^{-\alpha/2}\int_\alpha^{\alpha+i\infty} \frac{e^{u/2}}{u^2}\,du = -\frac{2}{\alpha^2} - \frac{8}{\alpha^3} + 24i\int_0^\infty \frac{e^{it/2}}{(\alpha+it)^4}\,dt. \tag{5.10}$$

Hier schätzen wir das letzte Integral betragsmäßig durch

$$\int_0^\alpha \frac{dt}{\alpha^4} + \int_\alpha^\infty \frac{dt}{t^4} = \frac{4}{3\alpha^3}$$

ab und erhalten

$$\int_\alpha^{\alpha+i\infty} \frac{e^{u/2}}{u^2}\,du = -2\frac{e^{\alpha/2}}{\alpha^2}\Big(1 + \frac{4}{\alpha} + \Theta\Big(\frac{16}{\alpha^2}\Big)\Big).$$

Für $\alpha \geq \log(12)$ ist das Integral auf der linken Seite folglich negativ. Ferner gilt für $\alpha \geq \log(10^7)$ zudem $\frac{16}{\alpha} \leq 1$ und wir erhalten (5.9). □

Mit der Wahl $a = 100$ im Lemma 5.2 erhält man aus Satz 4.4 und den Werten in Tabelle 4.1 die in Tabelle 5.1 aufgeführten Schranken $\tilde{M}^{\pm}_{\pi^*}(x)$ mit

$$\tilde{M}^{-}_{\pi^*}(x) < R_{\pi^*}(t) < \tilde{M}^{+}_{\pi^*}(x) \qquad \text{für } x \leq t \leq 2x.$$

Wir erhalten somit das folgende Korollar.

Korollar 5.2. *Es gilt*

$$|R_{\pi^*}(x)| < \frac{1}{2} \qquad \text{für } 10^7 \leq x \leq 10^{19}.$$

5.1.3 Schranken für $R_\pi(x)$ und die Skewes-Zahl

Es verbleibt nun lediglich die Übertragung der Schranken für $R_\vartheta(x)$ auf $R_\pi(x)$. Hierbei ist besonders zu bemerken, dass $R_\vartheta(x)$ in $[2,\infty)$ das Vorzeichen erstmalig vor $R_\pi(x)$ wechselt. Zur unteren Abschätzung der Skewes-Zahl genügt es daher, die Positivität von $R_\vartheta(x)$ bis zu einer gegeben Größe zu verifizieren.

Lemma 5.3. *Sei $b > 10^7$, $12 < a < b$, $c \leq 0$ und $C \geq 0$ derart, dass für alle $x \in [a,b]$*

$$c \leq R_\vartheta(x) \leq C \tag{5.11}$$

gilt, und sei

$$A = \pi(a) - \mathrm{li}(a) + \frac{a - \vartheta(a)}{\log a}.$$

Tabelle 5.1: Schranken für $R_{\pi^*}(x)$

x	$\tilde{M}^-_{\pi^*}(x)$	$\tilde{M}^+_{\pi^*}(x)$	x	$\tilde{M}^-_{\pi^*}(x)$	$\tilde{M}^+_{\pi^*}(x)$
10^{10}	$-.43$	$.47$	10^{12}	$-.44$	$.45$
2×10^{10}	$-.42$	$.37$	2×10^{12}	$-.44$	$.42$
4×10^{10}	$-.41$	$.45$	4×10^{12}	$-.41$	$.40$
8×10^{10}	$-.44$	$.48$	8×10^{12}	$-.44$	$.42$
16×10^{10}	$-.49$	$.38$	16×10^{12}	$-.44$	$.38$
32×10^{10}	$-.48$	$.43$	32×10^{12}	$-.37$	$.50$
64×10^{10}	$-.37$	$.41$	64×10^{12}	$-.43$	$.42$

x	$\tilde{M}^-_{\pi^*}(x)$	$\tilde{M}^+_{\pi^*}(x)$	x	$\tilde{M}^-_{\pi^*}(x)$	$\tilde{M}^+_{\pi^*}(x)$
10^{14}	$-.43$	$.40$	10^{16}	$-.47$	$.40$
2×10^{14}	$-.34$	$.42$	2×10^{16}	$-.47$	$.38$
4×10^{14}	$-.36$	$.40$	4×10^{16}	$-.36$	$.40$
8×10^{14}	$-.44$	$.48$	8×10^{16}	$-.44$	$.42$
16×10^{14}	$-.36$	$.47$	16×10^{16}	$-.39$	$.49$
32×10^{14}	$-.40$	$.46$	32×10^{16}	$-.42$	$.39$
64×10^{14}	$-.40$	$.36$	64×10^{16}	$-.50$	$.44$
			128×10^{16}	$-.50$	$.40$
			256×10^{16}	$-.44$	$.46$
			512×10^{16}	$-.44$	$.50$

Dann gilt für alle $x \in [\max\{a, 10^7\}, b]$

$$R_\pi(x) \le \frac{1}{2} R_\vartheta(x) + \frac{C}{\log x}\Big(1 + \frac{5}{\log x}\Big) + A\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

sowie

$$R_\pi(x) \ge \frac{1}{2} R_\vartheta(x) + \frac{c}{\log x}\Big(1 + \frac{5}{\log x}\Big) + A\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Ferner gilt die Implikation

$$R_\vartheta(t) > 0 \text{ für } 2 \le t \le T \quad \Rightarrow \quad R_\pi(t) > 0 \text{ für } 2 \le t \le T.$$

Beweis. Der erste Teil des Lemmas folgt wie im Beweis von Lemma 5.2 aus

$$\pi(x) - \pi(a) = \mathrm{li}(x) - \mathrm{li}(a) - \frac{x - \vartheta(x)}{\log x} + \frac{a - \vartheta(a)}{\log a} - \int_a^x \frac{t - \vartheta(t)}{t \log(t)^2}\, dt. \tag{5.12}$$

Für den zweiten Teil genügt es, die Implikation „$R_\vartheta(t) > 0$ für $t \in [10, T]$“ $\Rightarrow$ „$R_\pi(t) > 0$ für $t \in [10, T]$“ zu zeigen, da für $t \in [2, 10]$ beide Aussagen ohnehin richtig sind. Aber dies folgt wegen

$$\pi(10) - \mathrm{li}(10) - \frac{10 - \vartheta(10)}{\log(10)} > 0.1$$

aus (5.12). □

Wir erhalten das folgende Korollar.

Korollar 5.3. *Es gilt*

$$R_\pi(x) < 0.97 + \frac{1.94}{\log(x)}\left(1 + \frac{5}{\log(x)}\right) \qquad \text{für } 10^8 \le x \le 10^{19}.$$

und

$$R_\pi(x) > 0 \qquad \text{für } 2 < x \le 10^{19}.$$

Beweis. Die obere Schranke folgt mit der Wahl $a = 100$ in Lemma 5.3 aus Korollar 5.1 und die untere Schranke folgt unter zusätzlicher Berücksichtigung von [RS62, Theorem 19], wie in (5.6) wiedergegeben. □

5.2 Ein partieller Primzahlsatz

Die Gültigkeit der Riemannsche Vermutung führt bekanntlich auf eine verbesserte Abschätzung für das Restglied im Primzahlsatz. Schoenfeld bewies unter ihrer Annahme in [Sch76] die explizite Abschätzung

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \le \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x).$$

Dieses Resultat lässt sich graduieren, denn für die obige Abschätzung an einer konkreten Stelle x ist es nicht erforderlich, dass alle Nullstellen auf der Gerade $\Re(s) = 1/2$ liegen. Es genügt vielmehr, dass dies für die Nullstellen mit einem Imaginärteil bis etwa $\sqrt{x}$ gilt. Auf diesem Wege lassen sich die Resultate partieller Überprüfungen der Riemannschen Vermutung in verbesserte Restgliedabschätzungen auf endlichen Intervallen übersetzen.

Unser Hauptresultat ist das folgende Theorem.

Theorem 5.1. *Sei $T > 0$ und es gelte die Riemannsche Vermutung für alle Nullstellen ρ mit $0 < \Im(\rho) \leq T$. Dann gelten unter der Voraussetzung $5\sqrt{\frac{x}{\log x}} \leq T$ die folgenden Abschätzungen:*

$$|\psi(x) - x| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x)^2 \qquad \textit{für } x > 59, \tag{5.13}$$

$$|\vartheta(x) - x| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x)^2 \qquad \textit{für } x > 599, \tag{5.14}$$

$$|\pi^*(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x) \qquad \textit{für } x > 59 \tag{5.15}$$

und

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x) \qquad \textit{für } x > 2657. \tag{5.16}$$

Insbesondere garantieren die dem Autor vorliegenden Nullstellen bis 10^{11} die Gültigkeit der besagten Schranken für $x < 2 \times 10^{22}$. Legt man das Resultat von Gourdon und Demichel [Gou04] zu Grunde, so ergibt sich sogar die Gültigkeit für $x < 1.3 \times 10^{25}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass unter den Voraussetzungen des Satzes die stärkere Abschätzung

$$|\psi(x) - x| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x)\big(\log(x) - 3\big) \qquad \text{für } x \geq 5000 \tag{5.17}$$

gilt. Für $5000 \leq x \leq 10^{19}$ folgt dies aus Satz 4.4 und für $x \geq 10^{19}$ werden wir dies aus (4.8), d. h.

$$x - \psi_{c,\varepsilon}(x) = \sum_{\rho}{}^{*} \frac{a_{c,\varepsilon}(\rho)}{\rho} x^{\rho} + \Theta(2), \tag{5.18}$$

herleiten. Dazu wählen wir die Parameter

$$c = \frac{1}{2}\log(x) + 5,$$
$$\varepsilon = \frac{\log(x)^{3/2}}{8\sqrt{x}}.$$

Insbesondere haben wir wegen $x \geq 10^{19}$ also $c > 26$ und $\varepsilon < 1.2 \times 10^{-8}$, und wegen

$$\frac{c}{\varepsilon} \leq 5\sqrt{\frac{x}{\log x}} \leq T$$

gilt nach Voraussetzung $\Re(\rho) = 1/2$ für alle Nullstellen mit $|\Im(\rho)| < c/\varepsilon$. Ferner sind damit die Voraussetzungen für (4.8) erfüllt.

Wir schätzen zunächst die Summe über Nullstellen in (5.18) ab. Für $|\Im(\rho)| > c/\varepsilon$ erhalten wir aus Satz 1.3

$$\sum_{|\Im(\rho)| > \frac{c}{\varepsilon}} \left| a_{c,\varepsilon}(\rho) \frac{x^{\rho}}{\rho} \right| \leq 0.32 \frac{x}{\sinh(c)} e^{0.72\sqrt{c\varepsilon}} \log(3c) \log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big)$$
$$\leq 0.0026\sqrt{x}\log(x)\log\log(x) =: \mathcal{E}_1(x). \tag{5.19}$$

Ferner liefert uns Satz 1.3 mit der Wahl $a = \sqrt{\frac{2}{c}}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{\sqrt{2c}}{\varepsilon} < |\Im(\rho)| \le \frac{c}{\varepsilon}} \left| a_{c,\varepsilon}(\rho) \frac{x^\rho}{\rho} \right| &\le \frac{1 + 11c\varepsilon}{2\pi} \log\Big(\frac{c}{\varepsilon}\Big) \frac{\cosh(c\sqrt{1-a^2})}{\sinh(c)} \sqrt{x} \\ &\le \frac{1.001}{4\pi e} \log(x)\sqrt{x} \le 0.03 \log(x)\sqrt{x} =: \mathcal{E}_2(x). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Für den Beitrag der verbleibenden Nullstellen nutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 5.4. *Sei $t_2 > t_1 \ge 14$. Dann gilt*

$$\sum_{t_1 \le \Im(\rho) < t_2} \frac{1}{\Im(\rho)} \le \frac{1}{4\pi} \Big[\log\Big(\frac{t_2}{2\pi}\Big)^2 - \log\Big(\frac{t_1}{2\pi}\Big)^2 \Big] + \Theta\Big(5 \frac{\log t_1}{t_1}\Big). \tag{5.21}$$

Unter der schärferen Voraussetzung $t_2 \ge 5000$ gilt zudem

$$\sum_{0 < \Im(\rho) < t_2} \frac{1}{\Im(\rho)} \le \frac{1}{4\pi} \log\Big(\frac{t_2}{2\pi}\Big)^2.$$

Beweis. Mit der Bezeichnung $N(t) = g(t) + R(t)$ und $g(t) = \frac{t}{2\pi} \log \frac{t}{2\pi e} + \frac{7}{8}$ erhalten wir

$$\sum_{t_1 \le \Im(\rho) < t_2} \frac{1}{\Im(\rho)} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{g'(t)}{t}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{dR(t)}{t}.$$

Das erste Integral liefert gerade den Hauptterm in (5.21). Aus (1.37) folgt $|R(t)| \le \log t$ für $t \ge 14$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dR(t)}{t} &= \Big[\frac{R(t)}{t}\Big]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{R(t)}{t^2}\, dt \\ &\le 2 \frac{\log t_1}{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\log t}{t^2}\, dt \\ &\le 4 \frac{\log t_1}{t_1} + \frac{1}{t_1} \le 5 \frac{\log t_1}{t_1}. \end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung folgt aus der ersten mittels

$$\begin{aligned} \sum_{0 < \Im(\rho) < t_2} \frac{1}{\Im(\rho)} &\le \frac{1}{4\pi} \log\Big(\frac{t_2}{2\pi}\Big)^2 + \sum_{0 < \Im(\rho) < 5000} \frac{1}{\Im(\rho)} - \frac{1}{4\pi} \log\Big(\frac{5000}{2\pi}\Big)^2 + 5 \frac{\log 5000}{5000} \\ &\le \frac{1}{4\pi} \log\Big(\frac{t_2}{2\pi}\Big)^2 + 3.54 - 3.55 + 0.0086 < \frac{1}{4\pi} \log\Big(\frac{t_2}{2\pi}\Big)^2. \end{aligned}$$

□

Aus Lemma 5.4 erhalten wir wegen $|a_{c,\varepsilon}(\rho)/\rho| \leq 1/|\Im(\rho)|$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\sum_{0<|\Im(\rho)|\leq \frac{\sqrt{2c}}{\varepsilon}} \left| a_{c,\varepsilon}(\rho)\frac{x^\rho}{\rho}\right| &\leq \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\log\left(\frac{\sqrt{2c}}{2\pi\varepsilon}\right)^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\log(x)+\log(1.45)-\log\log(x)\right)^2 \\
&\leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\log(x)^2+\sqrt{x}\Big(0.061\log(x)+0.16\log\log(x)^2 \\
&\qquad +0.024-0.15\log(x)\log\log(x)-0.114\log\log(x)\Big) \\
&=: \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\log(x)^2+\mathcal{E}_3(x). \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

Als nächstes wenden wir uns der Differenz $\psi(x)-\psi_{c,\varepsilon}(x)$ zu. Hier wenden wir Satz 4.1 an, wozu wir allerdings noch eine Abschätzung für $\nu_c(0)$ benötigen. Dazu führen wir die modifizierte Besselfunktion der ersten Art zu reellen Parametern α ein:

$$I_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(\alpha+n+1)}. \qquad (5.23)$$

Wir haben nun die folgende Monotonieaussage:

Lemma 5.5. *Seien $\alpha,\beta\in[0,\infty)$ und es gelte $\alpha<\beta$. Dann strebt die Funktion*

$$\frac{I_\beta(x)}{I_\alpha(x)}$$

in $(0,\infty)$ monoton wachsend gegen 1.

Beweis. Der Beweis basiert auf dem Sturmschen Monotonieprinzip [Stu36], [Wat44, S. 518]. Wir definieren die Hilffunktion

$$f_\gamma(x)=\sqrt{x}I_\gamma(x).$$

Aus der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}I_\gamma+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}I_\gamma-\Big(1+\frac{\gamma^2}{x^2}\Big)I_\gamma=0$$

für die modifizierten Bessel-Funktionen folgt dann, dass

$$\frac{d^2}{dx^2}f_\gamma-\Big(1-\frac{1}{4x}+\frac{\gamma^2}{x^2}\Big)f_\gamma=0$$

gilt. Folglich haben wir

$$f_\beta f_\alpha''-f_\beta''f_\alpha=\frac{\beta^2-\alpha^2}{x^2}f_\alpha f_\beta>0$$

in $(0,\infty)$ und somit

$$\Big[f_\beta f_\alpha'-f_\beta' f_\alpha\Big]_\varepsilon^x>0$$

für jedes $\varepsilon>0$ und alle $x>\varepsilon$. Da

$$f_\beta f_\alpha'-f_\beta'f_\alpha=I_\beta\Big(xI_\alpha'+I_\alpha\Big)-I_\alpha\Big(xI_\beta'+I_\beta\Big)$$

für $x \to 0$ verschwindet, gilt somit

$$f_\beta f'_\alpha - f'_\beta f_\alpha \geq 0.$$

Folglich ist $f_\beta / f_\alpha = I_\beta / I_\alpha$ in $(0, \infty)$ monoton wachsend und strebt wegen

$$I_\gamma(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$$

gegen 1. $\square$

Da $I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sinh(x)$ gilt, erhalten wir aus Lemma 5.5 die Abschätzung

$$\frac{0.98}{\sqrt{2\pi c}} \leq |\nu_c(0)| = \frac{I_1(c)}{2\sinh(c)} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi c}}$$

für $c > 26$. Satz 4.1 liefert also

$$\begin{aligned}|\psi(x) - \psi_{c,\varepsilon}(x)| \leq \frac{2.01\sqrt{x}\log(x)^{5/2}}{8\sqrt{\pi(\log(x)+10)}} \log\Big(\frac{0.97\sqrt{x}\log(x)^{3/2}}{8\sqrt{\pi(\log(x)+10)}}\Big)^{-1} \\ + \frac{2.02}{8}\log(x)^{5/2} + 0.51\log\log(2x^2)\log(x). \quad (5.24)\end{aligned}$$

Wegen $\sqrt{\frac{\log(x)}{\log(x)+10}} \geq 0.9$ ist der erste Summand auf der rechten Seite durch

$$\mathcal{E}_4(x) := 0.283\sqrt{x}\frac{\log(x)^{3/2}}{\sqrt{\log(x)+10}} \quad (5.25)$$

beschränkt. Mit

$$\mathcal{E}_5(x) := 0.26\log(x)^{5/2} + 0.51\log(x)\log\log(2x)^2 + 2$$

erhalten wir somit die Abschätzung

$$|\psi(x) - x| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\log(x)^2 + \mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}_2(x) + \mathcal{E}_3(x) + \mathcal{E}_4(x) + \mathcal{E}_5(x).$$

Durch Differenzieren nach der Variablen $y = \log(x)$ sieht man leicht, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{x}\log(x)}\big(\mathcal{E}_1(x) + \mathcal{E}_2(x) + \mathcal{E}_3(x) + \mathcal{E}_4(x) + \mathcal{E}_5(x)\big)$$

für $x \geq 10^{19}$ monoton fallend ist. Da sein Wert an der Stelle $x = 10^{19}$ durch $-\frac{4}{8\pi}$ beschränkt ist, erhalten wir die gewünschte Abschätzung (5.17).

Wir kommen nun zu den Abschätzungen für ϑ, π und π^*. Aus (5.8), mit der Wahl $a = 5000$, und (5.17) erhalten wir

$$\begin{aligned}|\pi^*(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi}(\log(x) - 3) + \left|\pi^*(5000) - \mathrm{li}(5000) - \frac{\psi(5000) - 5000}{\log(5000)}\right| \\ + \frac{\sqrt{x}}{4\pi} - \frac{\sqrt{5000}}{4\pi} < \frac{\sqrt{x}}{8\pi}\log(x)\end{aligned}$$

für $x > 5000$, wobei benutzt wurde, dass der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen auf der rechten Seite kleiner als 0.5 ist.

Wegen $\psi(x) - \psi(\sqrt{x}) \leq \vartheta(x) \leq \psi(x)$ erhalten wir aus (5.17), Korollar 5.1 und (5.6) die Abschätzung

$$|\vartheta(x) - x| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x)\big(\log(x) - 2\big) \qquad \text{für } x \geq 5000$$

Ähnlich wie zuvor erhalten wir aus (5.12) nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq \frac{\sqrt{x}}{8\pi}(\log(x) - 2) + \left|\pi(5000) - \mathrm{li}(5000) - \frac{\vartheta(5000) - 5000}{\log(5000)}\right| \\ + \frac{\sqrt{x}}{4\pi} - \frac{\sqrt{5000}}{4\pi} < \frac{\sqrt{x}}{8\pi} \log(x), \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass der Ausdruck zwischen den Betragsstrichen auf der rechten Seite kleiner als 5 ist.

Somit sind (5.13), (5.15), (5.14) und (5.16) für $x > 5000$ bewiesen. Für die verbleibenden x folgen die Abschätzungen durch Tabellierung der Werte an den Primzahlpotenzen. □

5.3 Lösungen der Gleichung $N\pi(x) = x$

In [Gol62] bemerkte Golomb, dass in Folge des Primzahlsatzes $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$ der Quotient

$$\frac{x}{\pi(x)}$$

in $[2, \infty)$ alle ganzzahligen Werte $N > 1$ annimmt. Legt man den Primzahlsatz in einer etwas schärferen Form zu Grunde, etwa

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(xe^{-\eta\sqrt{\log x}})$$

mit einem $\eta > 0$, so sieht man leicht, dass für jedes $C > 1$ die Lösungen der Gleichung

$$N\pi(x) = x \tag{5.26}$$

für genügend großes N stets zwischen e^N/C und Ce^N liegen. Sie lassen sich folglich durch Sieben dieses Intervalls mit einer Laufzeit von $\tilde{O}(e^N)$ berechnen.

Mit den verbesserten Abschätzungen aus Theorem 5.1 lassen sich die Lösungen auf deutliche kürzere Intervalle der Form $B_{N^B e^{N/2}}(e^N)$, für geeignetes $B > 0$, beschränken, wenn die Riemannsche Vermutung bis zu einer Höhe von $O(e^{N/2})$ bekannt ist. Der Aufwand zur Berechnung der Lösungen reduziert sich dann auf $\tilde{O}(e^{N/2})$.

Zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit waren die Lösungen von (5.26) für $N \leq 26$ bekannt und der Autor hat alle weiteren Lösungen für $N \leq 50$ berechnet. Zur ersten Eingrenzung der Lösungen wurde dafür die explizite Abschätzung

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq 0.2452 \frac{x}{\log(x)^{3/4}} \exp\left(-\sqrt{\frac{\log x}{6.455}}\right) \qquad \text{für } x \geq 229$$

aus [Tru, Theorem 2] verwendet. Die gewonnenen Abschätzungen wurden dann mittels Theorem 5.1 auf die endgültigen Intervalle $[a_N, b_N]$, die in Tabelle 5.3 aufgelistet sind, verkleinert. Für $N \leq 49$ genügte dafür die Verifikation der Riemannschen Vermutung bis 10^{11} in [FKBJ] und für $N = 50$ musste auf das Resultat von Gourdon und Demichel in [Gou04] zurück gegriffen werden. Die benötigten Startwerte $\pi(a_N)$ wurden mit der analytischen Methode aus Kapitel 2 berechnet.

In Tabelle 5.2 sind die entsprechenden Glieder verschiedener Folgen der *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* [Slo09] aufgelistet, die mit den Lösungen von (5.26) in Verbindung stehen. Diese sind die Folge der kleinsten Lösungen (5.26) (A038625), der Wert von $\pi(x)$ an der kleinsten Lösung (A038626), die Anzahl der Lösungen (A038627) sowie der Abstand von größter und kleinster Lösung (A087237). Eine vollständige Liste der berechneten Lösungen ist dem Anhang in elektronischer Form beigefügt.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Lösung von (5.26) für $N = 26$, die in [Slo09] als kleinste Lösung angegeben ist, tatsächlich die zweitkleinste ist.

Tabelle 5.2: Minimale Lösungen von $N\pi(x) = x$ und verwandte Folgen.

N	A038625	A038626	A038627	A087237
26	554805820452	21338685402	4	4
27	1505578023621	55762149023	15	92
28	4086199301996	145935689357	9	36
29	11091501630949	382465573481	15	72
30	30109570412400	1003652347080	26	296
31	81744303089590	2636913002890	22	296
32	221945984401280	6935812012540	24	327
33	602656752070527	18262325820319	9	23
34	1636523496705466	48133044020749	3	2
35	4444280714420575	126979448983445	14	168
36	12069948025326672	335276334036852	55	658
37	32781729631790293	885992692751089	36	770
38	89038728550467484	2343124435538618	3	90
39	241849345578326577	6201265271239143	65	1274
40	656943924741197840	16423598118529946	52	1454
41	1784546064357412171	43525513764814931	33	1514
42	4847770656544878888	115423110870116164	139	3259
43	13169525310647352914	306268030480170998	42	612
44	35777578362249369360	813126780960212940	2	6
45	97199410027249992915	2159986889494444287	85	2896
46	264075047224548917472	5740761896185846032	25	367
47	717466145742128063267	15265237143449533261	7	15
48	1949328764391662651424	40611015924826305238	96	2011
49	5296363488157501280423	108089050778724515927	16	287
50	14390600632080526061850	287812012641610521237	33	1915

Tabelle 5.3: Siebintervalle und Anfangswerte

N	a_N	b_N	$\pi(a_N)$
26	554000000001	556000000000	21308886474
27	1500000000001	1506700000000	55563209929
28	4080000000001	4089000000000	145722197706
29	11000000000001	11100000000000	379418886337
30	30100000000001	30116000000000	1003343987689
31	81700000000001	81760000000000	2635530060709
32	221920000000001	221970000000000	6935025392842
33	602620000000001	602694000000000	18261245867717
34	1636400000000001	1636590000000000	48129518718772
35	4444100000000001	4444410000000000	126974433369163
36	12069700000000001	12070200000000000	335269636013392
37	32781300000000001	32782200000000000	885981395012372
38	89038070000000001	89039408000000000	2343107561732079
39	241848000000000003	241850600000000000	6201231654548898
40	656941852806685141	656946100000000000	16423547616178789
41	1784542362627032655	1784549867600073571	43525425682300978
42	4847764098327766761	4847777387805849133	115422958442310677
43	13169513742785180525	13169537236189699514	306267767720242404
44	35777557969650016531	35777599436014645058	813126328031628995
45	97199373983769429339	97199447062079268984	2159986106337500116
46	264074983991015495985	264075112594316116677	5740760551442136915
47	717466033637131277695	717466259639798613819	15265234809011163738
48	1949328569200267939771	1949328965841551974820	40611011943098192513
49	5296363144989782458813	5296363840220103130372	108089043918291421175
50	14390600028647151125091	14390601245752186653982	287812000814419074089

Anhang A

Zur numerischen Fehlerabschätzung

Im Folgenden sollen die Überlegungen zur Fehlerabschätzung der in Abschnitt 4.4 beschriebenen Implementierung dargelegt werden. Wir beginnen mit der Beschreibung der verwendeten 64-Bit-Arithmetik, geben eine Fehlerabschätzung für die FFT-Implementierung an, und beschreiben die Anwendung auf die Auswertung trigonometrischer Summen.

Die Fehlerabschätzung ist nicht völlig rigide, da zur Vereinfachung an verschiedenen Stellen vernachlässigbare Terme fortgelassen werden, die am Ende pauschal aufgefangen werden. Es sollte aber aus dem Gesagten plausibel hervor gehen, dass diese Vereinfachungen zulässig sind.

A.1 64-Bit-Festkomma-Arithmetik

Es sei

$$\mathcal{R}_{64} = [-1, 1) \cap 2^{-63}\mathbb{Z}.$$

Arithmetische Operationen auf $\mathcal{R}_{64}$ sind Abbildungen

$$\mathcal{R}_{64} \times \mathcal{R}_{64} \to \mathcal{R}_{64} \cup \{\mathcal{O}\},$$

wobei $\mathcal{O}$ das Auftreten eines Variablenüberlaufs anzeigt. Die Addition und die Subtraktion entsprechen einfach der 64-Bit-Ganzzahlarithmetik und somit gilt für die Addition $\oplus$ auf $\mathcal{R}_{64}$

$$a \oplus b = \begin{cases} a + b & a + b \in \mathcal{R}_{64}, \\ \mathcal{O} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analoges gilt für die Subtraktion $\ominus$. Die Multiplikation $\otimes$ auf $\mathcal{R}_{64}$ ist Rundungsfehlerbehaftet. Genauer haben wir

$$a \otimes b = \begin{cases} \mathcal{O} & a = b = -1, \\ ab + \delta(a, b) & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\delta(a, b) = \delta(b, a)$ und $|\delta(a, b)| \leq 2^{-63}$ gilt.

Daneben existiert noch die komplexe Datenstruktur

$$\mathcal{C}_{64} := \mathcal{R}_{64} \times i\mathcal{R}_{64}.$$

Auf diese übertragen sich die arithmetischen Operationen durch

$$(a + ib) \oplus (c + id) = (a \oplus c) + i(b \oplus c)$$

und

$$(a + ib) \otimes (c + id) = ((a \otimes c) \ominus (b \otimes d)) + i((a \otimes d) \oplus (b \otimes c)).$$

Wir geben dem Ergebnis den Wert $\mathcal{O}$, falls $\mathcal{O}$ in diesen Rechnungen an einer Stelle als Zwischenergebnis auftritt. Additionen sind somit wieder exakt sofern kein Überlauf statt findet und für $z, w \in \mathcal{C}_{64}$ mit $z \otimes w \neq \mathcal{O}$ gilt

$$z \otimes w = zw + \delta(z, w)$$

mit einem $\delta(z, w) \in \mathbb{C}$. Dieses erfüllt $\delta(z, w) = \delta(w, z)$ und

$$|\delta(z, w)| \leq \sqrt{2} \max\{\Re\delta(z, w), \Im\delta(z, w)\} \leq \sqrt{2} \cdot 2^{-62}.$$

A.2 Fehlerabschätzung für den FFT-Algorithmus

Es sei $R = 2^r$, $f\colon \mathbb{Z}/R\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ und $\phi\colon \mathbb{Z}/R\mathbb{Z} \to \mathcal{C}_{64}$ eine Approximation von f. Es bezeichne

$$\hat{f}(k) = \sum_{j=0}^{R-1} f(j) e^{\frac{2\pi i k j}{R}}$$

die Fouier-Transformierte von f. Sind dann die Einheitswurzeln mit maximaler Genauigkeit $\sqrt{2} \cdot 2^{-63}$ gegeben (Vorberechnung mit *MPFR*), so überzeugt man sich leicht davon, dass die Implementierung des Cooley-Tukey-Algorithmus mittels der $\mathcal{C}_{64}$-Arithmetik das Folgende leistet: Sei $\tilde{\hat{\phi}}\colon \mathbb{Z}/R\mathbb{Z} \to \mathcal{C}_{64}$ die berechnete Approximation für $\hat{\phi}$ (d. h. es ist kein Überlauf eingetreten). Dann gilt

$$\max_{0 \leq k < R} \left| \hat{f}(k) - \tilde{\hat{\phi}}(k) \right| \leq \sum_{j=0}^{R-1} |f(j) - \phi(j)| + \sqrt{2} \cdot 2^{r-61}.$$

Die ℓ^∞-Norm des Ausgabefehlers ist also im Wesentlichen durch die ℓ^1-Norm des Eingabefehlers abgeschätzt.

A.3 Anwendung auf die Auswertung trigonometrischen Summen

Die Betrachtung der Fehlerfortpflanzung des im Abschnitt 4.2.1 beschriebenen Algorithmus soll zunächst durch einige Vorüberlegungen vereinfacht werden. Wir nehmen vorweg, dass für jeden Teilabschnitt des Algorithmus die Abschätzung des Ausgabefehlers (in der ℓ^∞-Norm) affin-linear (mit positiven Koeffizienten) vom Eingabefehler (in der ℓ^1-Norm) abhängen wird. Somit führt eine Vergrößerung des Eingabefehlers um n Prozent höchstens zu einer Vergrößerung des Ausgabefehlers um n Prozent. Dies erlaubt es, höhere Terme im

Eingabefehler zu vernachlässigen und dafür entsprechend den Ausgabefehler etwas zu vergrößern. In all diesen Fällen sollte klar sein, dass der vernachlässigte Fehler im Bereich von höchstens einem Zehntausendstel (und meist sogar deutlich weniger) des Hauptterms liegt.

Es sind zunächst die Eingabedaten

$$a_\rho = \frac{\ell_{c,\varepsilon}(\rho \cdot \ell_{c,\varepsilon}(i/2))}{\lambda_{c,\varepsilon}} e^{iy_0(\gamma - T_m)}$$

und δ_ρ, m_ρ mit

$$\frac{\pi}{\beta}\big(\gamma - T_m\big) = \frac{2\pi m_\rho}{R} + \delta_\rho$$

und $|\delta_\rho| \leq \frac{\pi}{R}$ zu berechnen. Hierbei bezeichnet $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ eine Nullstelle, T_m den Mittelpunkt des betrachteten Nullstellenbereichs $[T_0, T_1)$, $y_0 = \log(x) + \frac{1}{2}\log 2$ den logarithmischen Mittelpunkt des untersuchten Intervalls $[x, 2x]$, $R = 2^r$ die FFT-Größe und π/β die Schrittweite des Gitters. Für die Implementierung ist $\beta = 8R$ fest gewählt.

Sei nun $\tilde{a}_\rho$ die berechnete Aprroximation für a_ρ, sodass $\hat{a}_\rho := 2^{-s_a}\tilde{a}_\rho \in \mathcal{C}_{64}$ für ein geeignetes s_a gilt. Die Nullstellen sind mit einer Genauigkeit von 64 Nachkommabits gegeben und die Berechnung der Werte a_ρ und δ_ρ erfolgt mit 128-Bit Genauigkeit, sodass wir für $x \leq 10^{20}$

$$\tilde{a}_\rho = a_\rho + \Theta(\sqrt{2} \cdot 2^{s_a - 63} + 2^{-55}|a_\rho|)$$

annehmen dürfen. Sei $\tilde{\delta}_\rho$ die Approximation mit $\hat{\delta}_\rho := 2^{-s_\delta}\tilde{\delta}_\rho \in \mathcal{R}_{64}$, dann haben wir

$$\tilde{\delta}_\rho = \delta_\rho + \Theta(2^{s_\delta - 62}).$$

Der Exponent für δ_ρ ist dabei fest als $s_\delta = 2 - r$ gewählt und s_a variiert mit dem Summenabschnitt. Für den ersten Abschnitt hat sich dabei die Wahl $s_a = 0$ (die prinzipiell zu Variablenüberlauf führen könnte) bislang als ausreichend erwiesen.

Beim Auswerten der trigonometrischen Summen haben wir nun

$$\hat{a}_\rho \otimes \underbrace{\hat{\delta}_\rho \otimes \cdots \otimes \hat{\delta}_\rho}_{k \text{ mal}} = 2^{-s_a - ks_\delta} a_\rho \delta_\rho^k + \Theta\big((k+1)\sqrt{2} \cdot 2^{-63} + k\, 2^{-s_a - 55}|a_\rho| + \varepsilon\big),$$

wobei ε für die vernachlässigbaren Terme höherer Ordnung steht. Sei nun N_ρ die Anzahl der betrachteten Nullstellen mit Imaginärteil in $[T_0, T_1)$ und

$$A = \sum_{T_0 \leq \Im\rho < T_1} |a_\rho|.$$

Da A nur wie $\log(T_1)^2 - \log(T_0)^2$ wächst, N_ρ aber schneller als $T_1 - T_0$, ist der relative Fehlerterm $k\, 2^{-s_a - 55}|a_\rho|$ vernachlässigbar (wir haben in der Regel $N_\rho \approx 10^{10}$, wohingegen die Summe der Absolutbeträge der Koeffizienten stets kleiner als 40 ist).

Mit den Bezeichnungen f_k und $\hat{f}_k$ wie in Abschnitt 4.2.1 fällt somit bei der Berechnung von $2^{-s_1 - ks_\delta}\hat{f}_k$ nach dem im vorherigen Abschnitt gesagten schlimmstenfalls ein Fehler von

$$\sqrt{2} \cdot N_\rho(k+1)2^{-63} + \sqrt{2} \cdot 2^{r-61} + \varepsilon$$

an. Der Rundungsfehler durch die Multiplikation mit $(2^{-r}j)^k$ ist dagegen vernachlässigbar. Die Exponenten der Tschebyschow-Koeffizienten, multipliziert mit der Verschiebung 2^{2k}, sind durch

$$0, 2, 3, 4, 4, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -3, -4, -6, -8, -10, -12, -14, -18, \ldots$$

gegeben, was schließlich zu einem Ausgabefehler

$$\leq 2^{s-63}\big(562 \cdot N_\rho + 440 \cdot 2^r\big)(1+\varepsilon)$$

in den trigonometrischen Summen

$$F(k) = \sum_{T_0 \leq \Im\rho < T_1} a_\rho \exp\Big(ik\frac{\pi}{\beta}(\gamma - T_0)\Big)$$

führt.

Die Betrachtung der Fehlerfortpflanzung bei der bandbreitenbeschränkten Interpolation ist dagegen vergleichsweise einfach, denn der Kern ist betragsmäßig ≤ 1 und Rundungsfehler spielen im Vergleich zum obigen Eingabfehler keine Rolle mehr. Die Anzahl der berücksichtigen Koeffizienten in der Interpolationsformel (4.10) ist in allen Berechnungen stets ≤ 160 gewesen. Zur Steigerung der Effizienz werden die Auswertungen an Zwischenstellen aber nicht einzeln vorgenommen, sondern es werden mittels diskreter Faltung unter Verwendung der schnellen Fourier-Transformation 2^t Werte gleichzeitig berechnet. Die diskrete Fourier-Transformierte des zyklisch fortgesetzten Kerns in (4.11) bleibt dabei betragsmäßig durch 1 beschränkt, und somit erhält man unter Verwendung der Abschätzung in Abschnitt A.2 die Fehlerschranke

$$2^{s+t-62}\big(562 \cdot N_\rho + 440 \cdot 2^r\big)(1+\varepsilon)$$

für die berechneten Werte

$$2\Re\left(\sum_{T_0 \leq \Im(\rho) < T_1} a_{c,\varepsilon}(\rho)\frac{x_k^{\rho-1/2}}{\rho}\right).$$

Die expliziten Abschätzungen in Tabelle 4.1 setzen voraus, dass ε durch 0.5 beschränkt bleibt. In Bezug auf die Laufzeit hat sich die Wahl $t = 12$ als optimal erwiesen. Für die größten Berechnungen ($N_\rho = 20, 248, 875, 963$, $r = 29$) ergibt dies einen Maximalfehler < 0.016 für den ersten Summenabschnitt. Der erwartete und der beobachtete Fehler fallen allerdings weit hinter diese Schranke zurück.

Anhang B

Daten

Die Daten sind der Arbeit auf CD-ROM beigefügt. Sie sind ferner online abrufbar unter

http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:5n-39732.

Literaturverzeichnis

[AAR99] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[AF03] Robert A. Adams and John J. F. Fournier, *Sobolev spaces*, second ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.

[Bar81] Klaus Barner, *On A. Weil's explicit formula*, J. Reine Angew. Math. **323** (1981), 139–152.

[BFJK13] Jan Büthe, Jens Franke, Alexander Jost, and Thorsten Kleinjung, *Some applications of the Weil-Barner explicit formula*, Math. Nachr. **286** (2013), no. 5-6, 536–549.

[BH00] Carter Bays and Richard H. Hudson, *A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$*, Math. Comp. **69** (2000), no. 231, 1285–1296.

[BJ10] J. Büthe and A. Jost, *Algorithmic Applications of Weil's explicit Formula*, 2010, Diplomarbeit.

[Bre79] Richard P. Brent, *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip*, Math. Comp. **33** (1979), no. 148, 1361–1372.

[Brü95] Jörg Brüdern, *Einführung in die analytische Zahlentheorie*, Springer, 1995.

[Edw74] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974, Pure and Applied Mathematics, Vol. 58.

[FKBJ] J. Franke, T. Kleinjung, J. Büthe, and A. Jost, *A practical analytic method for calculating $\pi(x)$*, preprint.

[Gal04] W. F. Galway, *Analytic computation of the prime-counting function*, Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2004.

[Gol62] Solomon W. Golomb, *Mathematical Notes: On the Ratio of N to $\pi(N)$*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), no. 1, 36–37.

[Gou04] Xavier Gourdon, *The 10^{13} first zeros of the Riemann Zeta function and zeros computation at very large height*, URL = http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf, October 2004.

[Kor58] N. M. Korobov, *Estimates of trigonometric sums and their applications*, vol. 13, 1958, pp. 185–192.

[Kot08] Tadej Kotnik, *The prime-counting function and its analytic approximations: $\pi(x)$ and its approximations*, Adv. Comput. Math. **29** (2008), no. 1, 55–70.

[Lan93] Serge Lang, *Real and functional analysis*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 142, Springer-Verlag, New York, 1993.

[Lan94] ______, *Algebraic number theory*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 110, Springer-Verlag, New York, 1994.

[Lit14] J. E. Littlewood, *Sur la distribution des nombres premier*, Comptes Rendus **158** (1914), 1869–1872.

[LMO85] J. C. Lagarias, V. S. Miller, and A. M. Odlyzko, *Computing $\pi(x)$: the Meissel-Lehmer method*, Math. Comp. **44** (1985), no. 170, 537–560.

[LO87] J. C. Lagarias and A. M. Odlyzko, *Computing $\pi(x)$: an analytic method*, J. Algorithms **8** (1987), no. 2, 173–191.

[Log88] B. F. Logan, *Bounds for the tails of sharp-cutoff filter kernels*, SIAM J. Math. Anal. **19** (1988), no. 2, 372–376.

[Luk72] Yudell L. Luke, *Inequalities for generalized hypergeometric functions*, J. Approximation Theory **5** (1972), 41–65, Collection of articles dedicated to J. L. Walsh on his 75th birthday, I.

[MV73] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *The large sieve*, Mathematika **20** (1973), 119–134.

[Odl92] A.M. Odlyzko, *The 10^{20}-th zero of the Riemann zeta function and 175 million of its neighbors*, http://www.dtc.umn.edu/ odlyzko/unpublished/zeta.10to20.1992.ps, 1992.

[Olv97] Frank W. J. Olver, *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters Ltd., Wellesley, MA, 1997.

[OS88] A. M. Odlyzko and A. Schönhage, *Fast algorithms for multiple evaluations of the Riemann zeta function*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), no. 2, 797–809.

[Pla] D. Platt, *Computing $\pi(x)$ analytically*, Math. Comp., Retrieved Jul. 25, 2012.

[Rie59] B. Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie **11** (1859), 177–187.

[Ros41] Barkley Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.

[RS62] J. Barkley Rosser and Lowell Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. **6** (1962), 64–94.

[Sch76] Lowell Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions $\theta(x)$ and $\psi(x)$. II*, Math. Comp. **30** (1976), no. 134, 337–360.

[Sch82] Arnold Schönhage, *The fundamental theorem of algebra in terms of computational complexity*, Tech. report, Mathematisches Institut der Universität Tübingen, 1982.

[SD11] Douglas A. Stoll and Patrick Demichel, *The impact of $\zeta(s)$ complex zeros on $\pi(x)$ for $x < 10^{10^{13}}$*, Math. Comp. **80** (2011), no. 276, 2381–2394.

[Sel47] Atle Selberg, *On an elementary method in the theory of primes*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem **19** (1947), no. 18, 64–67, Nachgedruckt in *Collected Papers*, Vol. 1. Berlin: Springer-Verlag, 1989, 609–615.

[Ske33] S. Skewes, *On the sign of the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$*, J. Lond. Math. Soc. **8** (1933), 277–283.

[Slo09] N. J. A. et. al. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, März 2009, https://oeis.org/.

[Stu36] C. Sturm, *Memoire sur les équation différentielles linéaire du second ordre*, J. Math. Pure Appl. (1) **1** (1836), pp. 106–186.

[Tit51] E. C. Titchmarsh, *On the Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, London, 1951.

[Tru] Tim Trudgian, *Updating the error term in the prime number theorem*, arXiv:1401:2689v1.

[Vin58] I. M. Vinogradov, *A new estimate of the function $\zeta(1+it)$*, Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **22** (1958), 161–164.

[vLR65] J. H. van Lint and H.-E. Richert, *On primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. **21** (1965), 209–216.

[vM95] H. von Mangoldt, *Zu Riemanns Abhandlungen "Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse"*, J. Reine Angew. Math. **114** (1895), pp. 255–305.

[War27] D. R. Ward, *Some series involving Euler's totient function*, J. Lond. Math. Soc. **2** (1927), 210–214.

[Wat44] G. N. Watson, *A treatise on the theory of bessel functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1944, Nachdruck von 1966.

[Wei52] A. Weil, *Sur les ≪formules explicites≫ de la théorie des nombres premiers*, Comm. Sém Math. Univ. Lund **vol. dédié à M. Riesz** (1952), pp. 252–265.