

Die Schrödinger-Newton-Gleichung als Modell selbstgravitierender Quantensysteme

Von der QUEST-Leibniz-Forschungsschule
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Phys. André Großardt
geboren am 9. Oktober 1984 in Offenburg

2013

Referent: Prof. Dr. Domenico Giulini
Korreferent: Prof. Dr. Claus Kiefer
Korreferent: Prof. Dr. Claus Lämmerzahl
Tag der Promotion: 6. Dezember 2013

Zusammenfassung

Die Schrödinger-Newton-Gleichung (SN-Gleichung), die ein quantenmechanisches Einteilchensystem mit einem gravitativen Selbstwechselwirkungsterm beschreibt, kann eine Antwort auf die Frage liefern, ob eine Quantisierung der Gravitation als Wechselwirkung notwendig ist. Als nicht-relativistischer Grenzfall einer semiklassischen Gravitation liefert sie überprüfbare Vorhersagen, welche Effekte die klassische Gravitation im experimentell unerschlossenen Massenbereich zwischen einigen tausend Protonmassen und der Planckmasse auf genuin quantenmechanische Systeme hat.

In dieser Arbeit fasse ich die mathematischen Eigenschaften der SN-Gleichung zusammen und motiviere sie als physikalisches Modell. Nach einem Abriss der kontroversen Debatte um die (Un-)Möglichkeit einer fundamental semiklassischen Gravitation sowie der Idee, die SN-Gleichung als Modell der quantenmechanischen Zustandsreduktion aufzufassen, gehe ich auf häufige Einwände gegen nichtlineare Schrödingergleichungen ein. Ich werde demonstrieren, wie man die SN-Gleichung im selben Sinne aus einer an Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie gekoppelten Klein-Gordon- oder Dirac-Gleichung erhält, wie man auch in der flachen Minkowski-Raumzeit die lineare Schrödingergleichung ableiten kann. In diesem Sinne ist die Gleichung eine nicht-relativistische Näherung der semiklassischen Einstein-Gleichungen.

Ich untersuche weiter, zunächst mithilfe analytischer Abschätzungen und schließlich numerisch, in welchem Parameterbereich Effekte einer gravitativen Selbstwechselwirkung nach der SN-Gleichung – z. B. in Molekülinterferometrieexperimenten – zu erwarten sind. Neben der Einteilchen-SN-Gleichung motiviere ich eine modifizierte Gleichung für die Schwerpunktswellenfunktion eines Vielteilchensystems und analysiere für diese ebenfalls numerisch die experimentellen Konsequenzen.

Im Ergebnis lässt sich feststellen, dass Effekte der SN-Gleichung zwar frühestens bei Massen zu erwarten sind, die sechs bis sieben Größenordnungen über den heute molekülinterferometrisch betrachteten liegen, dass aber Tests der Gleichung – etwa in Satellitenexperimenten – in absehbarer Zukunft möglich erscheinen.

Schlagwörter: Schrödinger-Newton-Gleichung, Quantenmechanik, Gravitation

Abstract

The Schrödinger-Newton equation (SN equation) describes a quantum-mechanical one-particle-system with gravitational self-interaction and might play a role answering the question if gravity must be quantised. As non-relativistic limit of semi-classical gravity, it provides testable predictions of the effects that classical gravity has on genuinely quantum mechanical systems in the mass regime between a few thousand proton masses and the Planck mass, which is experimentally unexplored.

In this thesis I subsume the mathematical properties of the SN equation and justify it as a physical model. I will give a short outline of the controversial debate around semi-classical gravity as a fundamental theory, along with the idea of the SN equation as a model of quantum state reduction. Subsequently, I will respond to frequent objections against nonlinear Schrödinger equations. I will show how the SN equation can be obtained from Einstein's General Relativity coupled to either a Klein-Gordon or a Dirac equation, in the same sense as the linear Schrödinger equation can be derived in flat Minkowski space-time. The equation is, to this effect, a non-relativistic approximation of the semi-classical Einstein equations.

Additionally, I will discuss, first by means of analytic estimations and later numerically, in which parameter range effects of gravitational self-interaction—e. g. in molecular-interferometry experiments—should be expected. Besides the one-particle SN equation I will provide justification for a modified equation describing the centre-of-mass wave-function of a many-particle system. Furthermore, for this modified equation, I will examine, numerically, the consequences for experiments.

Although one arrives at the conclusion that no effects of the SN equation can be expected for masses up to six or seven orders of magnitude above those considered in contemporary molecular interferometry experiments, tests of the equation, for example in satellite experiments, seem possible in the foreseeable future.

Keywords: Schrödinger-Newton equation, Quantum Mechanics, Gravitation

Danksagung

Es sei mir gestattet, einige dankende Worte zu verlieren, bevor ich zum interessanten Teil meiner Arbeit komme.

Zunächst und vor allem gilt mein Dank Domenico Giulini für die herausragende Betreuung, die mir im Zuge meiner Promotion eingeräumte Freiheit sowie eine schöne und erkenntnisreiche gemeinsame Zeit. Für die Einladungen nach Triest bzw. Köln und die damit verbundenen Diskussionen, die meine Arbeit voran gebracht haben, danke ich Angelo Bassi und Claus Kiefer. Außerdem bedanke ich mich ganz herzlich bei Steffen, Falk, Kika und Amy für hilfreiche Anmerkungen, das Aufspüren von Schreibfehlern in meiner Dissertation und den ehrgeizigen Versuch, Semikola unterzubringen.

Ich bedanke mich bei QUEST Hannover für die Finanzierung meiner Promotion mit einem Stipendium im HALOSTAR-Programm sowie beim ZARM Bremen und allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern für die nette Unterbringung. Ein ganz besonderer Dank gilt Birgit Ohlendorf, der nachweislich besten Sekretärin der Welt, dafür dass sie die übliche Uni-bürokratie so erträglich wie nur möglich gemacht hat.

Zu guter Letzt bin ich allen dankbar, die mich als Freunde, Lehrer, Professoren und so weiter auf meinem Weg begleitet und unterstützt haben, ganz besonders meinen Eltern. Und ich danke einer Gesellschaft, die solidarisch genug ist, mir ein kostenfreies Studium zu finanzieren, und mit ihrer Bereitschaft, Steuergelder für Grundlagenforschung aufzuwenden, einen wichtigen Beitrag zum wissenschaftlichen Fortschritt liefert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Eigenschaften der Schrödinger-Newton-Gleichung	5
2.1. Symmetrien der SN-Gleichung	6
2.2. Die stationäre SN-Gleichung	11
2.2.1. Der stationäre Grundzustand: Existenz, Eindeutig- keit und Energie	11
2.2.2. Die stationäre SN-Gleichung mit sphärischer Sym- metrie	14
2.3. Reproduktion der klassischen newtonschen Gravitation . .	16
3. Motivation der Schrödinger-Newton-Gleichung	19
3.1. Probleme einer fundamentalen semiklassischen Theorie .	19
3.2. Die SN-Gleichung als Kollapsmodell	24
3.2.1. Gravitativ induzierte Zustandsreduktion nach Pen- rose	26
3.3. Sind nichtlineare Schrödingergleichungen physikalisch re- levant?	28
3.4. Die SN-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall	31
3.4.1. Semiklassische und nicht-relativistische Grenzfälle der Klein-Gordon und Dirac-Gleichung	33
3.4.2. Nicht-relativistischer Grenzfall der Einstein-Klein- Gordon-Gleichung	43
3.4.3. Nicht-relativistischer Grenzfall der Einstein-Dirac- Gleichung	51
3.4.4. Sind Gravitation und Elektromagnetismus verschie- den?	58
3.5. Die SN-Gleichung für Vielteilchensysteme	60
4. Auswirkungen der Gravitation auf das Dispersionsverhalten	65
4.1. Analytische Abschätzungen der Kollapsmasse	67
4.1.1. Kräftegleichgewicht für die freie Lösung	67
4.1.2. Massenuntergrenze für nicht-expansives Verhalten .	68

4.1.3.	Masse des stationären Grundzustands	69
4.1.4.	Verhalten für kleine Zeiten	71
4.2.	Numerische Analyse der zeitabhängigen SN-Gleichung . .	74
4.2.1.	Numerisches Verfahren	76
4.2.2.	Massenabhängigkeit der Dynamik der Wellenfunktion	82
4.2.3.	Die Phase der Wellenfunktion	85
4.2.4.	Nicht-gaußförmiger Anfangszustand	88
4.2.5.	Unterscheidung von physikalischen und numerischen Effekten	89
4.3.	Modifizierte SN-Gleichung für Vielteilchensysteme	93
4.3.1.	Numerische Analyse mit modifiziertem Potential . .	94
4.4.	Kollapszeiten und experimentelle Tests	98
5.	Schlussfolgerungen und Ausblick	101
	Anhang	105
A.	Konventionen und Notationen	105
A.1.	Physikalische Größen	105
A.2.	Mathematische Notationen	107
B.	Galilei-Invarianz der Schrödinger-Newton-Gleichung . . .	109
C.	Realität sphärisch-symmetrischer Lösungen	111
D.	Herleitung der BMT-Gleichung	112
E.	Herleitung des Dirac-Operators im gekrümmten Raum . .	114
F.	Energie-Impuls-Tensor für das Dirac-Feld	118
G.	Entwicklung der Einstein-Gleichungen mit Mathematica .	120
H.	Programmcodes	122
H.1.	Modifizierte Potentiale	131
	Literaturverzeichnis	135

1. Einleitung

Zwei nebeneinander stehende Theorien bilden heute das Fundament der Physik: Auf der einen Seite steht die einsteinsche Allgemeine Relativitätstheorie, welche die Gravitation als Attribut der Raumzeit erklärt. Als zweite Säule steht ihr die Quantenmechanik (bzw. ihre Fortentwicklung in der Quantenfeldtheorie) gegenüber, die die Bausteine der Materie, von Elektronen über Atome bis hin zu Molekülen und größeren Systemen, beschreibt.

Beide Theorien sind – in ihrer derzeitigen Form – inkompatibel: Während einerseits die Quantenmechanik eine feste Hintergrund-Raumzeit benötigt, die nicht wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie dynamischen Wechselwirkungen mit der Materie unterworfen ist, ist die Allgemeine Relativitätstheorie eine klassische Theorie, in welcher der Materie deterministische Eigenschaften zukommen; insbesondere besitzt jedes Teilchen eine definierte Bahn, auf der es sich bewegt.

Während jede der beiden Theorien für sich – in näherungsweise Abwesenheit der Effekte der jeweils anderen – experimentell sehr gut getestet ist (insbesondere im Falle der Quantenmechanik zum Teil mit beeindruckender Präzision), gibt es bislang kaum Experimente, die Gravitation und Quanteneigenschaften gemeinsam an einem System testen.

Die einzigen Experimente dieser Art wurden an Neutronen durchgeführt, die sich in einem *äußeren* Gravitationsfeld befanden. 1975 wurden im berühmten Experiment von Colella, Overhauser und Werner [24] (auch als „COW-Experiment“ bekannt) Neutronen im Gravitationsfeld der Erde zur Interferenz gebracht. In einem neueren Experiment von Nesvizhevsky u. a. [75] wurde der Grundzustand von Neutronen in einem Potential aus Erdgravitationsfeld und einem reflektierenden Bodenspiegel gemessen. In diesen Experimenten ist jedoch die Quelle des Gravitationsfeldes immer klassischer Natur. Gravitationsfelder, die von quantenmechanisch zu beschreibender Materie erzeugt werden, sind bisher nicht Gegenstand von Untersuchungen gewesen.

Dabei handelt es sich nicht um eine Frage rein experimenteller Natur. Schon aus theoretischer Sicht ist unklar, wie das von einem quanten-

mechanisch zu behandelnden Objekt erzeugte Gravitationsfeld zu beschreiben ist. Natürlich würde man eine Antwort darauf von einer vollständigen Quantentheorie der Gravitation erwarten; jedoch ist keiner der bisher verfolgten Ansätze auf der Suche nach einer solchen – die prominentesten Vertreter Stringtheorie und Schleifenquantengravitation eingeschlossen – weit genug entwickelt, diese Frage beantworten zu können. Meist wird allerdings angenommen, dass Effekte einer Quantengravitationstheorie erst im Bereich der Planck-Skala, d. h. für Massen im Bereich der Planckmasse $m_P = \sqrt{\hbar c/G} \approx 2,2 \cdot 10^{-8}$ kg und Comptonwellenlängen im Bereich der Plancklänge $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$ m, zu erwarten sind. Zwischen der Planck-Skala und dem Massenbereich, bis zu dem quantenmechanische Effekte experimentell überprüft sind, liegen fast 16 Größenordnungen. Es eröffnet sich folglich ein riesiges Intervall, in welchem gravitative Korrekturterme zur bekannten Theorie der Quantenmechanik als sinnvolle Approximation erscheinen.

Ein naheliegender Ansatz zur Kopplung der bekannten Gravitationstheorie an die Quantenmechanik ist, den Materieteil der einsteinschen Feldgleichungen, den klassischen Energie-Impuls-Tensor, durch den Erwartungswert des entsprechenden quantenmechanischen Operators zu ersetzen. Dies führt zu den semiklassischen Einstein-Gleichungen,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} \langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle, \quad (1.1)$$

wobei G die Gravitationskonstante, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, R den Krümmungs-Skalar sowie $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ und $T_{\mu\nu}$ die Komponenten des Ricci-, Metrik- bzw. Energie-Impuls-Tensors bezeichnen. Ψ ist hier der Zustandsvektor eines zweitquantisierten Feldes, das die betrachtete Materie beschreibt.

Wie im dritten Kapitel dieser Arbeit zu zeigen sein wird, führen die semiklassischen Einstein-Gleichungen im nicht-relativistischen Grenzfall auf die Schrödinger-Newton-Gleichung (im Folgenden als „SN-Gleichung“ abgekürzt). Sie ist das System aus einer gewöhnlichen Schrödingergleichung,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + m U(t, \vec{x}) \right) \psi(t, \vec{x}), \quad (1.2a)$$

mit einem Gravitationspotential U , welches mittels der Poisson-Gleichung

$$\Delta U(t, \vec{x}) = 4\pi G m |\psi(t, \vec{x})|^2 \quad (1.2b)$$

die mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte der Wellenfunktion ψ assoziierte Massendichte als Quelle hat. Δ bezeichnet hier den Laplace-Operator in den drei räumlichen Dimensionen.

In einem völlig anderen Zusammenhang (einkomponentige Plasmen) wurde die *stationäre* Version der Gleichung bereits in den Siebzigerjahren von Lieb [68] untersucht. In Zusammenhang mit der Gravitationswechselwirkung wurde die SN-Gleichung dann erstmalig von Diósi [29] betrachtet, der sie als Modell für die Zustandsreduktion makroskopischer Quantenobjekte vorschlug. Diese Idee wurde von Penrose [81] wieder aufgegriffen, der auch den Begriff der „Schrödinger-Newton-Gleichung“ prägte [82].

Vor einigen Jahren erregten Salzman und Carlip [20, 91, 92] Aufmerksamkeit mit der Behauptung, dass die SN-Gleichung einen beobachtbaren „Kollaps“ (gemeint ist ein der quantenmechanischen Dispersion entgegengesetztes, kontraktives Verhalten) der Wellenfunktion bereits für Massen in der Größenordnung einiger tausend atomarer Masseneinheiten – und damit in einem für aktuelle Molekülinterferometrieexperimente zugänglichen Bereich – zur Folge habe. Wie sich als Resultat meiner numerischen Untersuchung in Kapitel 4 zeigen wird, halten diese Ergebnisse einer Überprüfung nicht stand, sondern müssen um mehrere Größenordnungen nach oben korrigiert werden.

Aber inwiefern kann die SN-Gleichung – als eine nichtlineare Einteilchen-Schrödingergleichung – überhaupt als geeignetes Modell für ein komplexes System wie ein Molekül dienen? Lässt sich die Anwendung der Gleichung auf Quantensysteme anhand von fundamentalen Prinzipien der Physik motivieren oder muss man sie als Ad-hoc-Prinzip betrachten, das seine Rechtfertigung nur in einer experimentellen Überprüfung finden kann? Welches sind die Voraussetzungen, die an ein solches Experiment zur Überprüfung der Gültigkeit der SN-Gleichung zu stellen sind? Und wie begegnet man Einwänden, die sowohl die Gültigkeit der semiklassischen Einstein-Gleichungen als auch die Relevanz nichtlinearer Schrödingergleichungen im Allgemeinen anzweifeln? Diesen Fragen möchte ich in dieser Arbeit auf den Grund gehen.

Im zweiten Kapitel fasse ich die grundlegenden mathematischen Eigenschaften der SN-Gleichung zusammen, beschreibe ihre Symmetrien und schildere, welche analytischen und numerischen Erkenntnisse bereits über ihre Lösungen vorliegen. Das dritte Kapitel befasst sich dann mit der Motivation der SN-Gleichung aus fundamentalen Prinzipien der Physik. Ich gebe dabei zunächst einen chronologischen Überblick der

kontroversen Debatte über die semiklassischen Einstein-Gleichungen und beschreibe die Ideen von Diósi und Penrose, die SN-Gleichung als Modell für den quantenmechanischen Kollaps der Wellenfunktion zu betrachten. Außerdem soll hier dargelegt werden, wie aus der SN-Gleichung, die dem Wesen nach eine Einteilchengleichung ist, die Dynamik der Schwerpunktswellenfunktion eines komplexen Moleküls deduziert werden kann. Von den Konsequenzen für das Dispersionsverhalten eines gaußförmigen Wellenpakets und den daraus resultierenden Ausichten einer experimentellen Überprüfung der SN-Gleichung handelt das vierte Kapitel, in dem ich analytische und numerische Argumente für eine Kollapsmasse liefere, die mit etwa $6,5 \cdot 10^9$ atomaren Masseneinheiten (bei einer Breite des gaußschen Wellenpakets von einem halben Mikrometer) um mehr als sechs Größenordnungen oberhalb der von Salzman und Carlip postulierten liegt. Des Weiteren untersuche ich, welche Konsequenzen der Vielteilchencharakter und die endliche Ausdehnung eines Moleküls auf diesen Wert haben und werde auf ein potentielles Problem eingehen, das dadurch entsteht, dass mit der Vergrößerung der Masse auch die Zeitskala für den Kollaps gedehnt wird. Im fünften und letzten Kapitel fasse ich schließlich die Ergebnisse bewertend zusammen und gebe einen Ausblick auf offene Fragestellungen.

2. Eigenschaften der Schrödinger-Newton-Gleichung

Die SN-Gleichung fällt in die Klasse der sogenannten Hartree-Gleichungen, welche in ihrer allgemeinen Form wie folgt formuliert werden können [38]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi + \left(\Phi * |\psi|^2 \right) \psi. \quad (2.1)$$

Dabei ist $\psi(t, \vec{x})$ eine komplexwertige Wellenfunktion, $V(\vec{x})$ und $\Phi(\vec{x})$ sind zeitunabhängige, reellwertige Potentiale und $*$ bezeichnet die Faltung von Funktionen in \mathbb{R}^3 ,

$$(u * v)(\vec{x}) := \int u(\vec{x} - \vec{y}) v(\vec{y}) d^3 y. \quad (2.2)$$

Die SN-Gleichung erhält man für den speziellen Fall eines verschwindenden $V(\vec{x})$ und eines Coulomb-artigen Potentials $\Phi(\vec{x}) = -G m^2 |\vec{x}|^{-1}$. Sie lautet dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - G m^2 \int \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \right) \psi(t, \vec{x}) \quad (2.3)$$

und folgt aus der Formulierung (1.2) nach Integration der Poisson-Gleichung (1.2b). Diese Form ist äquivalent zum System (1.2), wenn man zusätzlich die Bedingung stellt, dass das Gravitationspotential im Unendlichen verschwindet. Für einen gegebenen normierten Anfangszustand $\psi(0, \vec{x}) \in H^2(\mathbb{R}^3)^1$ hat die SN-Gleichung (2.3) eine eindeutige, zeitlich globale starke Lösung [53, 57].

Führt man eine Längenskala l und einen dimensionslosen Zeitparameter $\tau = t \frac{\hbar}{2ml}$ ein, sowie räumliche Koordinaten $\vec{\xi} = \vec{x}/l$, so erhält man

¹d. h. $\psi(0, \vec{x}) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und die ersten und zweiten räumlichen partiellen Ableitungen liegen ebenfalls in $L^2(\mathbb{R}^3)$ (für Notationen siehe auch Anhang A)

die SN-Gleichung in dimensionsloser Form [66],

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \chi(\tau, \vec{\xi}) = \left(-\Delta_{\xi} - K \int \frac{|\chi(\tau, \vec{\zeta})|^2}{|\vec{\xi} - \vec{\zeta}|} d^3 \zeta \right) \chi(\vec{\xi}, \tau), \quad (2.4)$$

mit der dimensionslosen Kopplungskonstante

$$K = \frac{2l}{l_P} \left(\frac{m}{m_P} \right)^3, \quad (2.5)$$

wobei $m_P = \sqrt{\hbar c / G}$ und $l_P = \sqrt{\hbar G / c^3}$ die Planckmasse bzw. Plancklänge bezeichnen. Dabei muss die Wellenfunktion ψ zu $\chi = l^{3/2} \psi$ reskaliert werden, um die vorherige Normierung zu erhalten.

2.1. Symmetrien der SN-Gleichung

Die Hartree-Gleichung (2.1) lässt sich aus einer Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \psi|^2 - V |\psi|^2 - \frac{1}{2} (\Phi * |\psi|^2) |\psi|^2 \quad (2.6)$$

bzw. der zugehörigen Wirkung

$$S[\psi, \psi^*] = \iint \mathcal{L}[\psi, \psi^*] dt d^3 x \quad (2.7)$$

ableiten, wobei ψ und die komplex konjugierte Wellenfunktion ψ^* als unabhängige Variablen zu betrachten sind. Der Punkt bezeichnet hier und im Folgenden zeitliche Ableitungen, $\dot{} = \partial / \partial t$.

Robertshaw u. Tod [87] stellen heraus, dass das SN-System (1.2) zehn linear unabhängige *Lie-Punktsymmetrien* besitzt. Wir wollen, wie schon in [46] geschehen, die Symmetrien der SN-Gleichung (2.3) untersuchen. Das sind:

Phasentransformationen mit konstanter, reeller Phase α :

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \psi'(t, \vec{x}) := e^{i\alpha} \psi(t, \vec{x}). \quad (2.8)$$

Dies ist – genau wie für die lineare Schrödingergleichung – auch eine Invarianz der Lagrange-Dichte (2.6). Den zugehörigen Noether-Strom bil-

den die Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) \quad (2.9)$$

als räumliche Komponente, sowie als zeitliche Komponente die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi|^2$, so dass aus der Invarianz zugleich die zeitliche Erhaltung der Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\vec{x})|^2 d^3x = 0 \quad (2.10)$$

als Noether-Ladung folgt.

Galilei-Transformationen

$$(t, \vec{x}) \rightarrow (t', \vec{x}') := (t + b, \mathbf{R}\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}), \quad (2.11)$$

bestehend aus räumlichen Rotationen, ausgedrückt durch die Drehmatrix $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$, räumlichen und zeitlichen Translationen \vec{a} und b sowie Boosts, die durch \vec{v} beschrieben werden. Sie bewirken auch eine Phasentransformation der Wellenfunktion

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow \exp \left[\frac{im}{\hbar} \left(\vec{v} \cdot \vec{x} - \frac{\vec{v}^2}{2} t \right) \right] \psi(t - b, \mathbf{R}^{-1}(\vec{x} - \vec{v}t - \vec{a})). \quad (2.12)$$

Genauer handelt es sich dabei um die Gruppe der eigentlichen, orthochronen Galilei-Transformationen.² Zusätzlich sind aber auch die Zeit- und Raumspiegelungen $t \rightarrow -t$ bzw. $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ Symmetrien der SN-Gleichung, wobei erstere mit einer komplexen Konjugation der Wellenfunktion einhergehen. Damit ist die SN-Gleichung invariant unter beliebigen Galilei-Transformationen.

Für ein verschwindendes Potential V sind die Galilei-Transformationen ebenfalls Symmetrien der Lagrange-Dichte (2.6), damit auch Symmetrien der allgemeineren Hartree-Gleichungen, und führen zu zehn erhaltenen Noether-Ladungen.³ Für die zeitliche und räumliche Transla-

²Die Galilei-Gruppe besteht aus vier Zusammenhangskomponenten, die durch Zeit- und Raumspiegelungen ineinander überführt werden können. Dabei bilden die eigentlichen, orthochronen Transformationen die Untergruppe der orientierungstreu- und die Zeitrichtung erhaltenden Abbildungen.

³Die zusätzliche Forderung $V \equiv 0$ ist für Invarianz unter Translation und Rotation erforderlich, nicht jedoch für die Zeittranslationsinvarianz.

tion sowie die Rotation sind dies die Energie

$$\mathcal{E}[\psi] = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2 + V|\psi|^2 + \frac{1}{2} (\Phi * |\psi|^2) |\psi|^2 \right) d^3x, \quad (2.13)$$

der Impuls

$$P[\psi] := -i\hbar \int \psi^* \vec{\nabla}\psi d^3x \quad (2.14)$$

und der Drehimpuls

$$L[\psi] := -i\hbar \int \psi^* (\vec{x} \times \vec{\nabla}) \psi d^3x. \quad (2.15)$$

Für die Boosts ist $m\langle\vec{x}\rangle - \langle\vec{p}\rangle t$ die erhaltene Größe. Die detaillierte Herleitung der Galilei-Invarianz und der zugehörigen Erhaltungsgrößen findet sich im Anhang B.

Reskalierung der Wellenfunktion sowie der Orts- und Zeitvariablen. Dazu betrachten wir die dimensionslose SN-Gleichung (2.4), kurz

$$i\dot{\chi} + \Delta\chi + K\tilde{U}\chi = 0, \quad (2.16)$$

wobei der Punkt hier für die Ableitung nach τ steht, der Laplace-Operator bezüglich $\vec{\xi}$ zu verstehen ist und das Integral \tilde{U} gegeben ist durch

$$\tilde{U}[\chi](\tau, \vec{\xi}) = \int \frac{|\chi(\tau, \vec{\zeta})|^2}{|\vec{\xi} - \vec{\zeta}|} d^3\zeta. \quad (2.17)$$

Wir wollen die Herleitung der Reskalierung, welche die SN-Gleichung invariant lässt, wie sie in [46] ausführlich dargestellt wurde, für die dimensionslose Gleichung zusammenfassen:

Unter Reskalierung verstehen wir die Wirkung der Gruppe der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ auf die Raumzeit mittels der Skalentransformation

$$(\tau, \vec{\xi}) \rightarrow (\tau', \vec{\xi}') := (\mu^a \tau, \mu^b \vec{\xi}), \quad (2.18)$$

die auch eine Transformation komplexwertiger Funktionen bewirkt, die wir durch einen μ -abhängigen linearen Operator S_μ beschreiben:

$$f(\tau, \vec{\xi}) \rightarrow S_\mu f(\tau, \vec{\xi}) := \mu^c f(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi}). \quad (2.19)$$

a , b und c sind reelle Zahlen, die die Skalentransformation charakte-

risieren. Für die Terme der SN-Gleichung (2.16) hat das die folgenden Transformationen zur Auswirkung:

$$\dot{\chi}(\tau, \vec{\xi}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau'} S_\mu \chi(\tau, \vec{\xi}) = \mu^{-a} S_\mu \dot{\chi}(\tau, \vec{\xi}) \quad (2.20)$$

$$\Delta \chi(\tau, \vec{\xi}) \rightarrow \Delta_{\xi'} S_\mu \chi(\tau, \vec{\xi}) = \mu^{-2b} S_\mu \Delta \chi(\tau, \vec{\xi}). \quad (2.21)$$

Für die Transformation des Gravitationspotentials müssen wir beachten, dass gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{U}[S_\mu \chi] S_\mu \chi)(\tau, \vec{\xi}) &= \int \frac{|S_\mu \chi(\tau, \vec{\zeta})|^2}{|\vec{\xi} - \vec{\zeta}|} d^3 \zeta S_\mu \chi(\tau, \vec{\xi}) \\ &= \mu^{3c} \int \frac{|\chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\zeta})|^2}{|\vec{\xi} - \vec{\zeta}|} d^3 \zeta \chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi}) \\ &= \mu^{3c+2b} \int \frac{|\chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\zeta})|^2}{|\mu^{-b} \vec{\xi} - \mu^{-b} \vec{\zeta}|} d^3 (\mu^{-b} \zeta) \chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi}) \\ &= \mu^{3c+2b} \int \frac{|\chi(\mu^{-a} \tau, \vec{\zeta})|^2}{|\mu^{-b} \vec{\xi} - \vec{\zeta}|} d^3 \zeta \chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi}) \\ &= \mu^{2b+2c} \mu^c (\tilde{U}[\chi](\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi}) \chi(\mu^{-a} \tau, \mu^{-b} \vec{\xi})) \\ &= \mu^{2b+2c} S_\mu (\tilde{U}[\chi] \chi)(\tau, \vec{\xi}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Damit transformiert der Potentialterm wie folgt:

$$K \tilde{U}[\chi] \chi \rightarrow K_\mu \tilde{U}[S_\mu \chi] S_\mu \chi = \frac{K_\mu}{K} \mu^{2b+2c} S_\mu (K \tilde{U}[\chi] \chi), \quad (2.23)$$

wobei wir zulassen, dass auch die Kopplungskonstante zu K_μ mit transformiert. Damit nun die SN-Gleichung invariant ist unter dieser Transformation, müssen die Vorfaktoren in (2.20), (2.21) und (2.23) identisch sein, also

$$\mu^{-a} = \mu^{-2b} = \frac{K_\mu}{K} \mu^{2b+2c}, \quad (2.24)$$

woraus zunächst $a = 2b$ folgt. Mit der Skalentransformation transfor-

miert sich auch die (L^2 -) Norm der Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \|\chi\|^2(\tau) &:= \int |\chi(\tau, \vec{\xi})|^2 d^3\xi \rightarrow \|S_\mu\chi\|^2(\tau) = \mu^{2c} \int |\chi(\mu^{-a}\tau, \mu^{-b}\vec{\xi})|^2 d^3\xi \\ &= \mu^{2c+3b} \|\chi\|^2(\mu^{-a}\tau). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Halten wir die Kopplungskonstante fix, so folgt aus (2.24), dass $c = -2b$ ist. Diese Skalentransformation ist dann allerdings nicht normerhaltend, sondern hat eine Transformation der Norm um einen Faktor μ^{-b} zur Folge.

Beschränken wir uns stattdessen auf den Raum der auf eins normierten Wellenfunktionen, so muss $2c+3b = 0$ sein, was eine Transformation der Kopplungskonstanten zu $K_\mu = \mu^{-b}K$ bewirkt. Setzen wir $b = -3$, so erhalten wir die folgenden Transformationen:

$$K \rightarrow \mu^3 K, \quad \tau \rightarrow \mu^{-6}\tau, \quad \vec{\xi} \rightarrow \mu^{-3}\vec{\xi}, \quad \chi(\tau, \vec{\xi}) \rightarrow \mu^{9/2}\chi(\mu^6\tau, \mu^3\vec{\xi}). \quad (2.26)$$

Wie wirkt sich das nun auf die dimensionsbehaftete SN-Gleichung aus? Die Kopplungskonstante (2.5) enthält neben der fixierten Längeneinheit l und der Plancklänge und -masse nur die Masse m als einzigen freien Parameter. Damit entspricht die Transformation (2.26) einer Transformation der Masse $m \rightarrow \mu m$. Da $t \propto m\tau$ ist, transformiert die Zeit sich gemäß $t \rightarrow \mu^{-5}t$. Ist also $\psi(t, \vec{x})$ eine normierte Lösung der SN-Gleichung (2.3) zum Masseparameter m , so ist die normierte Wellenfunktion

$$\psi'(t, \vec{x}) = \mu^{9/2}\psi(\mu^5 t, \mu^3 \vec{x}) \quad (2.27)$$

eine Lösung der SN-Gleichung zum Masseparameter μm .

Neben diesen drei Klassen von Symmetrien der SN-Gleichung finden Robertshaw u. Tod [87] eine weitere, die einer zeitabhängigen Translation der Ortsvariablen bei gleichzeitiger Phasentransformation der Wellenfunktion und einer additiven, zeit- und ortsabhängigen Transformation des Gravitationspotentials entspricht. Diese ist aber nur eine Symmetrie des Gleichungssystems (1.2), solange das Potential noch nicht durch Randbedingungen eingeschränkt ist. Wir wollen uns dagegen auf Symmetrien der SN-Gleichung (2.3) beschränken, die man unter den Randbedingungen eines im Unendlichen verschwindenden Potentials erhält.

2.2. Die stationäre SN-Gleichung

Aus der dynamischen SN-Gleichung (2.3) erhält man wie gewohnt eine zeitunabhängige Gleichung durch den Separationsansatz

$$\psi(t, \vec{x}) = T(t)\varphi(\vec{x}). \quad (2.28)$$

Um der Normierung der Wellenfunktion Rechnung zu tragen, muss $|T|^2$ eine zeitunabhängige Konstante sein, welche dann ohne Einschränkung zu $|T|^2 = 1$ gewählt werden kann, so dass auch φ auf eins normiert ist. Die separierte Gleichung lautet damit⁴

$$i\hbar \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta\varphi(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} - Gm^2 \int \frac{|\varphi(\vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y \quad (2.29)$$

und besitzt eine Lösung, wenn beide Seiten gleich derselben Konstante E sind:

$$\dot{T}(t) = -\frac{iE}{\hbar} T(t) \quad (2.30a)$$

$$E\varphi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi(\vec{x}) + mU(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \quad (2.30b)$$

$$\Delta U(\vec{x}) = 4\pi Gm |\varphi(\vec{x})|^2. \quad (2.30c)$$

Gleichung (2.30a) besitzt die übliche Lösung $T(t) = \exp(-iEt/\hbar)$ und Gleichung (2.30b) ist zusammen mit der Poisson-Gleichung (2.30c) die stationäre SN-Gleichung.

2.2.1. Der stationäre Grundzustand: Existenz, Eindeutigkeit und Energie

Eine erste numerische Betrachtung der stationären Gleichung (2.30b) als Modell für Bosonensterne findet sich schon bei Ruffini u. Bonazzola [90]. Analytisch wurde sie erstmals in den Siebzigerjahren von Lieb [68] untersucht. Motiviert war die Gleichung dabei in einem völlig anderen Kontext als hier betrachtet, nämlich als Hartree-Fock-Näherung für einkomponentige Plasmen (also als Beschreibung eines Elektrons in seinem eigenen Loch). In diesem Zusammenhang wurde sie im Juli 1976 beim Symposium über Coulomb-Systeme in Lausanne von Choquard vorgeschlagen. Lieb taufte sie zu dessen Ehren „Choquard-Gleichung“

⁴unter der Voraussetzung, dass \dot{T}/T und $\Delta\varphi/\varphi$ nirgendwo divergieren

und konnte für die stationäre Gleichung die Existenz und Eindeutigkeit eines Grundzustandes beweisen.

Die Existenz der Grundzustandslösung – nicht jedoch deren Eindeutigkeit – lässt sich auch für die allgemeineren Hartree-Gleichungen (2.1) beweisen, was Fröhlich u. Lenzmann [38] vorführen. Der schwierigere Aspekt an Liebs Untersuchung in [68] besteht im Beweis der Eindeutigkeit der Grundzustandslösung. Präzise formuliert beweist Lieb für die stationäre SN-Gleichung (2.30b) das Folgende:

Man betrachte das Energiefunktional (2.13),

$$\mathcal{E}[\varphi] = \int \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\varphi|^2 d^3x - \frac{Gm^2}{2} \iint \frac{|\varphi(\vec{x})|^2 |\varphi(\vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3x d^3y, \quad (2.31)$$

und definiere auf dem Sobolev-Raum $H^1(\mathbb{R}^3) := W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$ die Funktion

$$\epsilon(\lambda) := \inf \{ \mathcal{E}[\varphi] \mid \varphi \in H^1(\mathbb{R}^3), \|\varphi\| \leq \lambda \}, \quad (2.32)$$

wobei

$$\|\varphi\| := \left(\int |\varphi(\vec{x})|^2 d^3x \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

die L^2 -Norm bezeichnet. Dann gilt:

- (i) $\epsilon(\lambda)$ ist endlich.
- (ii) Es gibt ein minimierendes φ zu $\epsilon(\lambda)$, d. h. $\mathcal{E}[\varphi] = \epsilon(\lambda)$, das die stationäre SN-Gleichung (2.30b) erfüllt.
- (iii) Das minimierende φ ist bis auf Translationen $\varphi(\vec{x}) \rightarrow \varphi(\vec{x} + \vec{a})$ eindeutig und auf $\|\varphi\| = \lambda$ normiert. φ ist zudem beliebig oft differenzierbar.

Fröhlich u. Lenzmann beweisen außerdem die *orbitale Stabilität* der Grundzustandslösung der Hartree-Gleichungen (2.1). Darunter versteht man, dass für ein gegebenes ε ein δ existiert, so dass für alle Anfangsdaten ψ_0 in einer δ -Umgebung⁵ der stationären Lösung bei Evolution nach der dynamischen Gleichung (2.1) die Lösung für alle Zeiten in einer ε -Umgebung der stationären Lösung bleibt.

Tod [99] gibt eine Untergrenze für die Grundzustandsenergie an. Wir definieren zunächst „kinetische“ und „potentielle“ Energie der SN-Glei-

⁵bezüglich der Norm $\|\psi\|_X = \|\psi\| + \|\vec{\nabla}\psi\| + \|\sqrt{|V|}\psi\|$ auf dem Energieraum $X = \{ \psi \in H^1(\mathbb{R}^3) \mid |V|\psi|^2 \in L^1(\mathbb{R}^3) \}$, wobei im Falle der SN-Gleichung $V \equiv 0$ ist

chung als

$$T = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\vec{\nabla}\varphi|^2 d^3x, \quad V = m \int U |\varphi|^2 d^3x. \quad (2.34)$$

Ist φ eine Lösung der stationäre SN-Gleichung (2.30b), so gilt:

$$E = \int E |\varphi|^2 d^3x = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \varphi^* \Delta\varphi d^3x + m \int U |\varphi|^2 d^3x = T + V. \quad (2.35)$$

Nun betrachtet man den Tensor

$$T_{ij} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \frac{\partial\varphi^*}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{4\pi G} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_j} - \delta_{ij} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\varphi|^2 + \frac{1}{8\pi G} (\vec{\nabla}U)^2 + mU |\varphi|^2 - E |\varphi|^2 \right), \quad (2.36)$$

der die Erhaltungsgleichungen

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.37)$$

erfüllt, wie sich leicht nachrechnen lässt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial(T_{ij}x_j)}{\partial x_i} d^3x \\ &= \int \sum_{i=1}^3 T_{ii} d^3x \\ &= \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\varphi|^2 - \frac{1}{8\pi G} (\vec{\nabla}U)^2 - 3mU |\varphi|^2 + 3E |\varphi|^2 \right) d^3x \\ &= \int \left(-\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\varphi|^2 + \frac{1}{8\pi G} U \Delta U - 3mU |\varphi|^2 \right) d^3x + 3E \int |\varphi|^2 d^3x \\ &= -T - \frac{5}{2}V + 3E = 2T + \frac{1}{2}V \end{aligned} \quad (2.38)$$

und damit

$$T = -\frac{1}{3}E, \quad V = \frac{4}{3}E. \quad (2.39)$$

Das zeigt nun, dass $\mathcal{E} = T + V/2 = E/3$ beschränkt ist, woraus auch die Untergrenze der Grundzustandsenergie von

$$E_0 \geq -\frac{32}{9\pi^2} \frac{G^2 m^5}{\hbar^2} \quad (2.40)$$

folgt.⁶

2.2.2. Die stationäre SN-Gleichung mit sphärischer Symmetrie

Substituieren wir, wie bei Moroz u. a. [74], in den Gleichungen (2.30) die Wellenfunktion φ und das Potential durch

$$S(\vec{x}) := \frac{\sqrt{8\pi G m^3}}{\hbar} \varphi(\vec{x}) \quad (2.41a)$$

$$W(\vec{x}) := \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + Gm^2 \int \frac{|\varphi(\vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \right), \quad (2.41b)$$

so vereinfacht sich das System aus (2.30b) und (2.30c) zu

$$\Delta S(\vec{x}) = -S(\vec{x})W(\vec{x}) \quad (2.42a)$$

$$\Delta W(\vec{x}) = -|S(\vec{x})|^2, \quad (2.42b)$$

wobei die Substitution des Potentials durch W die erste Gleichung zur Folge hat und die Umnormierung der Wellenfunktion zu S die Proportionalitätskonstante in der Poisson-Gleichung für W zu eins werden lässt.

Betrachtet man nun sphärisch-symmetrische Lösungen $S(r)$ (mit entsprechend sphärisch-symmetrischem Potential) und beachtet, dass solche stationären Lösungen ohne Einschränkung als reell angenommen werden können (siehe Anhang C), so nimmt das System die einfache, von Moroz u. a. untersuchte Form an:

$$(rS)'' = -rSW \quad (2.43a)$$

$$(rW)'' = -rS^2, \quad (2.43b)$$

wobei der Strich Ableitungen nach r bezeichnet. Entwickelt man S und W jeweils um $r = 0$ und fordert für das Potential in niedrigster Ordnung $W_0 = 1$, was wegen der Reskalierungsinvarianz der SN-Gleichung ohne Einschränkung möglich ist, so erhält man die Potenzreihen [74]

$$S = S_0 - \frac{1}{6}S_0 r^2 + \frac{1}{120}S_0(S_0^2 + 1)r^4 + \dots \quad (2.44a)$$

$$W = 1 - \frac{1}{6}S_0^2 r^2 + \frac{1}{60}S_0^2 r^4 + \dots \quad (2.44b)$$

⁶Diese Untergrenze an die Grundzustandsenergie steht zugleich in Widerspruch zum von Kumar u. Soni [66] behaupteten Wert von exakt $-0,5 G^2 m^5 / \hbar^2$.

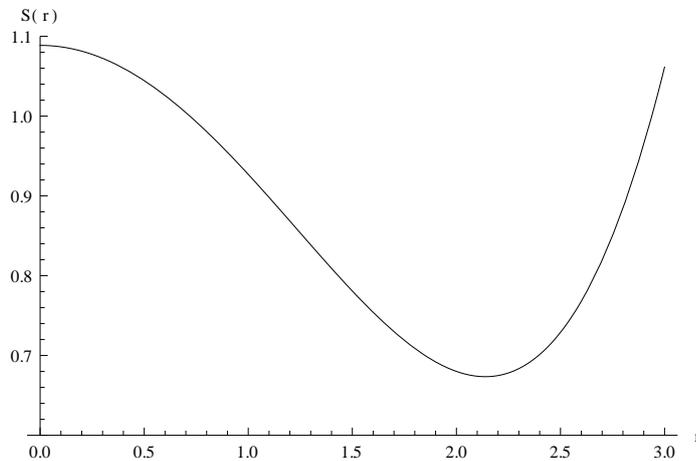


Abbildung 2.1.: Die Grundzustandslösung (2.44) mit $S_0 = 1.08864$, wie sie von Moroz u. a. [74] gefunden wurde, geplottet bis zur vierten Ordnung. Ein genauerer Plot findet sich in [74].

Die Lösungen des Differentialgleichungssystems (2.43) bilden also eine einparametrische Schar.⁷ Allerdings sind diese Lösungen nur für bestimmte, diskrete Werte von S_0 , für die die Potenzreihe für $r \rightarrow \infty$ konvergiert, normierbar. Diese Werte lassen sich numerisch bestimmen, denn bei Variation von S_0 finden sich abwechselnd Bereiche, in denen die Reihe (2.44) gegen $+\infty$ und $-\infty$ divergiert. Dazwischen muss also jeweils ein kritischer Wert liegen, für den die Reihe endlich bleibt. Numerisch kann man sich diesem Wert nun annähern, indem man das Divergenzverhalten für verschiedene Werte von S_0 untersucht und das Intervall, in dem der kritische Wert liegen muss, sukzessive verkleinert. Auf diese Weise finden Moroz u. a. [74] für den Grundzustand $S_0 \approx 1,08863707942905$. Die zugehörige Funktion $S(r)$ ist in Abbildung 2.1 geplottet. Im Plot sieht man auch die Divergenz der genäherten Lösung für große Werte von r .

Moroz u. a. finden numerisch eine unendliche Anzahl diskreter gebundener Zustände, die sich dem Anschein nach bei $S = 0$ häufen. Tod u. Moroz [100] zeigen, dass zu jeder positiven ganzen Zahl n (mindestens) eine Lösung der sphärisch-symmetrischen stationäre SN-Gleichung mit n Nullstellen existiert. Von Harrison u. a. [53] wurden sowohl der Ener-

⁷Zwar ist (2.43) ein System aus zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das folglich vier Anfangsdaten benötigt, zwei davon sind allerdings dadurch gegeben, dass aufgrund der sphärischen Symmetrie, bei Forderung von Stetigkeit für S' und W' , $S'(r=0) = W'(r=0) = 0$ sein muss, als dritte Anfangsbedingung haben wir aufgrund der Skaleninvarianz $W_0 = 1$ fixiert.

gieeigenwert des Grundzustands, der $-0,163G^2m^5/\hbar^2$ beträgt, als auch die ersten zwanzig angeregten Zustände, deren Energien von $-0,0308$ bis $-0,000221G^2m^5/\hbar^2$ reichen, numerisch berechnet. Die Bindungsenergie des Grundzustands ist derart klein, dass ein gravitativ gebundenes Elektron einen Radius von rund 10^{32} m hätte, einen Wert also, der 47 Größenordnungen über dem klassischen Elektronenradius liegt (und sechs Größenordnungen über dem Radius des Universums).

2.3. Reproduktion der klassischen newtonschen Gravitation

Versteht man die SN-Gleichung wie Penrose⁸ als ein Modell der quantenmechanischen Zustandsreduktion und ihre stationären Zustände als diejenigen Lösungen, die makroskopische Objekte annehmen, so kann man sich fragen, ob im entsprechenden Grenzfall die klassischen Bewegungsgleichungen für solche makroskopischen Objekte korrekt aus der SN-Gleichung folgen.

Dies zeigen Robertshaw u. Tod [87], die eine genäherte Lösung der dynamischen SN-Gleichung für ein System aus stationären „Materiekumpen“ betrachten. Sie machen dabei Gebrauch von der Skaleninvarianz (2.27) sowie der Galilei-Invarianz (2.12) der SN-Gleichung und stellen fest, dass mit einer stationären Lösung zur Masse m und mit Schwerpunkt im Ursprung, $\psi_0(t, \vec{x}) = \varphi_0(r)e^{-iE_0t/\hbar}$, auch das sich mit Masse μm und Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{a}}$ am Orte \vec{a} befindliche stationäre Wellenpaket

$$\psi(t, \vec{x}; \mu, \vec{a}, \vec{v}) = \mu^{9/2} \varphi_0(\mu^3 |\vec{x} - \vec{a}|) e^{-\frac{i}{\hbar}(\mu^5 E_0 t - m \vec{v} \cdot \vec{x} + \frac{m}{2} \vec{v}^2 t)} \quad (2.45)$$

die SN-Gleichung löst. Diese Lösungen sind vollständig durch Angabe von μ , \vec{v} und \vec{a} charakterisiert.

Nun gehen Robertshaw u. Tod von Anfangsdaten aus, die eine Superposition von n solcher stationärer Lösungen mit Parametern $(\mu_i, \vec{a}_i, \vec{v}_i)$ sind, wobei $\sum \mu_i = 1$ gelten soll – sie betrachten also ein System aus n makroskopischen Objekten unterschiedlicher Massen, die sich an unterschiedlichen Orten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten befinden. Geht man davon aus, dass diese Wellenpakete sich in großem Abstand zueinander befinden, so kann man näherungsweise annehmen,

⁸Ich werde im nächsten Kapitel auf den Vorschlag von Penrose eingehen.

dass die Wechselwirkung der Pakete untereinander zu vernachlässigen, das gesamte Potential also ebenfalls die Summe der Potentiale der einzelnen Gleichungen ist. Setzt man diesen Ansatz in den Energieausdruck (2.13) ein und verwendet die Beziehungen (2.39), so erhält man die Hamiltonfunktion für n klassische Punktmassen $\mu_i m$, die gemäß dem Coulomb-Gesetz gravitativ wechselwirken. Die SN-Gleichung reproduziert also in der entsprechenden Näherung das newtonsche Gravitationsgesetz für Punktteilchen, wie man es für die klassische Bewegung massiver Objekte erwartet.

3. Motivation der Schrödinger-Newton-Gleichung

Nachdem wir im letzten Kapitel die mathematischen Eigenschaften der SN-Gleichung zusammengefasst haben, wenden wir uns nun der Frage zu, weshalb die SN-Gleichung aus physikalischer Sicht interessant ist. Wir wollen uns zunächst mit der kontroversen Geschichte der semiklassischen Einstein-Gleichungen (1.1) auseinandersetzen, wie sie auch bei Kiefer [63] dargestellt wird. Danach befassen wir uns mit der Idee von Diósi und Penrose, die SN-Gleichung als Ursache des Kollapses der quantenmechanischen Wellenfunktion zu betrachten, und der vor allem in diesem Kontext oft geäußerten Kritik an fundamentalen nichtlinearen Schrödingergleichungen im Allgemeinen. Im Anschluss daran wenden wir uns der Fragestellung zu, die uns hier hauptsächlich beschäftigt: Lässt sich die SN-Gleichung aus grundlegenden Prinzipien ableiten als diejenige Gleichung, nach der sich (nicht-relativistische) „Quantenmaterie“ – also solche Materie, die bei vernachlässigter Gravitation der linearen Schrödingergleichung genügt – verhält, wenn die Gravitation mit in Betracht gezogen wird? Abschließend werden wir eine Antwort darauf geben, welche Konsequenzen eine Einteilchendynamik nach der SN-Gleichung für Vielteilchensysteme, wie etwa komplexe Moleküle, hat.

3.1. Probleme einer fundamentalen semiklassischen Theorie

Die wohl derzeit in der Physik vorherrschende Meinung ist, dass auch die Gravitation wie die übrigen Wechselwirkungen quantisiert werden muss. Die Frage, ob eine Quantisierung der Gravitation überhaupt notwendig und sinnvoll ist, wurde allerdings bereits von Møller [73] und Rosenfeld [88] aufgeworfen. Carlip [20] greift die Frage erneut auf und stellt fest, dass keines der vorgebrachten Argumente, die einer klassischen Beschreibung der Gravitation in Verbindung mit einer Quantentheorie der Materie Inkonsistenz attestieren, eine solchen Theorie kon-

kludent ausschließt. Stellt man sich auf den Standpunkt, dass die Gravitation auch auf fundamentaler Ebene klassisch zu beschreiben ist, so sind die semiklassischen Einstein-Gleichungen (1.1) ein naheliegender Ansatzpunkt. Man geht dabei davon aus, dass die Struktur der Raumzeit weiterhin klassisch durch die Allgemeine Relativitätstheorie zu beschreiben ist, als Quelle des Gravitationsfeldes dient anstelle des klassischen Energie-Impuls-Tensors jedoch der Erwartungswert des Energie-Impuls-Operators in einem Quantenzustand, der das betrachtete System beschreibt. Wie ich in Abschnitt 3.4 zeigen werde, führt diese Betrachtungsweise im nicht-relativistischen Grenzfall zur SN-Gleichung. Dabei wird die Metrik zu einem Funktional der Wellenfunktion, woraus ein nichtlinearer Potentialterm resultiert.

Die semiklassischen Einstein-Gleichungen bringen auf theoretischer Seite einige Unwägbarkeiten mit sich. So ist der Erwartungswert $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ üblicherweise divergent und erfordert eine gewisse Renormierungsprozedur [14], bei der Gegenterme höherer Ordnung in der Krümmung auftreten. Diese Gegenterme sind in der Lage, die Einstein-Gleichungen auf fundamentaler Ebene zu modifizieren, was unter Umständen zu unerwünschten Effekten, wie etwa der Instabilität der Minkowski-Raumzeit, führen kann [63]. Außerdem weisen die semiklassischen Einstein-Gleichungen instabile Lösungen auf und es ist unklar, wie der Zustand $|\Psi\rangle$ in (1.1) zu wählen ist [18, 71]. Diese Probleme sind natürlich ernst zu nehmen, es scheint allerdings zumindest nicht ausgeschlossen sie zu lösen, ohne den semiklassischen Ansatz ad acta zu legen. Zudem stehen ihnen auch die Herausforderungen in nichts nach, welche die verschiedenen Ansätze einer Quantengravitationstheorie mit sich bringen.

Häufig wird gegen einen fundamentalen semiklassischen Ansatz für die Gravitation ein Gedankenexperiment von Bohr u. Rosenfeld [16] ins Feld geführt. Bohr u. Rosenfeld zeigen dabei, dass sich ein elektromagnetisches Feld, entgegen anders lautender Aussagen von Landau u. Peierls [67], prinzipiell mit beliebiger Genauigkeit messen lässt und somit eine experimentelle Unterscheidung zwischen einem quantisierten und einem nicht-quantisierten Feld möglich ist. Der Behauptung, dass dies einen Beweis für die Notwendigkeit der Quantisierung des elektromagnetischen Feldes liefere, widerspricht Rosenfeld [88]. Er bemerkt, dass diese Analyse nur die Konsistenz mit den Vertauschungsrelationen der Quantenelektrodynamik zeige. Über die Frage, ob das elektromagnetische Feld zu quantisieren ist, könne nur das Experiment entscheiden. Das ist insofern von Bedeutung, als dasselbe Argument sich auch in ana-

loger Weise auf die Notwendigkeit der Quantisierung der Gravitation anwenden lässt. Nach Rosenfeld kann auch für die Gravitation nur das Experiment Aufschluss hierüber geben.

Page u. Geilker [77, 78] behaupten, die semiklassischen Einstein-Gleichungen experimentell widerlegen zu können. Dazu konstruieren sie ein Gravitationswaagenexperiment, das Schrödingers Katze ähnlich ist. Zunächst wird mithilfe eines Quantenprozesses, namentlich anhand der Zerfallsrate¹ eines Kobaltpräparates, eine von zwei möglichen Stellungen festgelegt, in welche die Massen einer Torsionswaage von Hand gebracht werden können. Im Anschluss daran wird das so erzeugte Gravitationsfeld – wie im bekannten Cavendish-Experiment – vermessen. Verwendet man nun die Everett-Interpretation der Quantenmechanik, in der kein Kollaps der Wellenfunktion stattfindet, sondern beide möglichen Szenarien als Superpositionszustand koexistieren, so wäre nach den semiklassischen Einstein-Gleichungen zu erwarten, dass sich ein mittleres Gravitationspotential der beiden möglichen Zustände einstellt. Wie intuitiv zu erwarten ist, beobachten Page u. Geilker, die das Experiment tatsächlich durchführen, kein mittleres Gravitationspotential, sondern stets das der einen oder das der anderen Konfiguration. Diese Argumentation ist allerdings auf die Gültigkeit der Everett-Interpretation angewiesen. Nur wenn beim Messprozess des Zerfallspräparats kein Kollaps der Wellenfunktion stattfindet, sondern sämtliche Zustände nebeneinander koexistieren, ist auch die von Page u. Geilker angenommene Superposition beider Stellungen korrekt. Damit bestehen auch die bekannten Erklärungsschwierigkeiten der Everett-Interpretation fort, beispielsweise, dass bis heute nicht bekannt ist, inwiefern sie die bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation liefert (vgl. Bassi u. a. [13]).

Dieser offensichtlichen Schwäche ihres Arguments entgegenen Page u. Geilker mit einer theoretischen Betrachtung, aus der sie folgern, dass die Everett-Interpretation die einzige mit einer semiklassischen Gravitation kompatible Interpretation der Quantenmechanik sei. Dies ist schon deshalb unzulänglich, weil sie alleinig einen Kollaps der Wellenfunktion nach der Kopenhagener Deutung als Alternative in Betracht ziehen. Doch wie Mattingly [71] ausführt, ist selbst ihre Folgerung für die Kopenhagener Deutung angreifbar. Um die Inkonsistenz der semiklassischen Einstein-Gleichungen mit einem instantanen Kollaps der Wellenfunktion zu zeigen, betrachten Page u. Geilker einen Superpositionszustand

¹Gemessen wird, ob die Zahl der Zerfälle in 30 Sekunden über oder unter der durchschnittlichen Zerfallszahl liegt.

$|\Psi\rangle = \sum_i c_i(x^\alpha) |\Psi_i\rangle$ und berechnen im Heisenberg-Bild die kovariante Ableitung

$$\nabla_\nu \langle \Psi | T^{\mu\nu} | \Psi \rangle = \sum_{i,j} \nabla_\nu (c_i^* c_j) \langle \Psi_i | T^{\mu\nu} | \Psi_j \rangle \propto \nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0. \quad (3.1)$$

Da die kovariante Ableitung des Einstein-Tensors $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ verschwindet, sich die Koeffizienten c_i aber bei einer Messung instantan ändern und somit ihre Ableitung kaum verschwinden kann, sind die semiklassischen Einstein-Gleichungen während des Kollapses offenkundig verletzt. Dies genügt Page u. Geilker als Beweis ihrer Inkonsistenz. Allerdings kann dieses Argument nicht vollständig überzeugen, denn der Kollaps ist nach der Kopenhagener Deutung nur ein Ad-hoc-Prinzip ohne mathematische Beschreibung. Erwartet man, dass die Interpretation der Quantenmechanik in einer Weise verändert werden muss, die den Kollaps der Wellenfunktion als dynamischen Vorgang erklärt, so ist die Gültigkeit von (3.1) anhand dieses konkreten Kollapsmodells zu untersuchen. Es ist dabei keineswegs davon auszugehen, dass (3.1) in jedem Fall verletzt wird. Ein Beispiel für eine Beschreibung des Messprozesses, die diese Relation erfüllt, findet sich etwa bei Wald [102].

Auch in [19, 72] sind kritische Auseinandersetzungen mit dem Vorschlag von Page u. Geilker zu finden. Tatsächlich stieß das Experiment von Page u. Geilker bereits vor seiner eigentlichen Durchführung auf Kritik von Kibble [62], der selbst ein ganz ähnliches Gedankenexperiment vorschlug. Ein quantenmechanischer Entscheidungsprozess soll dabei in einer abgeschlossenen Kiste eine Masse in eine von zwei möglichen Positionen bringen. Für einen außenstehenden Beobachter würde das Gravitationsfeld nun in der Kopenhagener Deutung Sprünge vollziehen. Ganz im Gegensatz zu Page u. Geilker zieht Kibble daraus allerdings nicht den Schluss, dass die semiklassischen Einstein-Gleichungen inkonsistent seien, sondern stellt vielmehr fest, dass diese einer neuen Theorie des Messprozesses bedürfen [71].

Bereits vor Page u. Geilker kreierten Eppley u. Hannah [32] ein Gedankenexperiment, mit dem sie behaupten, nicht nur die semiklassischen Einstein-Gleichungen auszuschließen, sondern jegliche Theorie der Kopplung einer nicht-quantisierten Gravitation an Quantenmaterie, die im klassischen Grenzfall ($\hbar \rightarrow 0$) die Allgemeine Relativitätstheorie reproduziert. Grundgedanke des Vorschlags ist, dass eine klassische Welle *nicht* der de Broglie-Beziehung zwischen Impuls und Wellenlänge, $p \propto 1/\lambda$, genügt. Deshalb sind, anders als für Objekte quantenmecha-

nischer Natur, beliebig kurze Wellen mit beliebig kleinem Impuls prinzipiell möglich. Im Experiment wird nun die Position eines Quantenteilchens durch Streuung einer (klassischen) Gravitationswelle gemessen. Eppley u. Hannah unterscheiden dann zwei Fälle: Falls die Streuung einen Kollaps der Wellenfunktion zur Folge hat, dann ist eine Ortsmessung für ein Quantenteilchen mit präpariertem Impuls mit beliebiger Genauigkeit möglich, indem man eine Gravitationswelle mit geringem Impuls und kleiner Wellenlänge streut (Impulserhaltung vorausgesetzt); eine solche Messung würde also die Unbestimmtheitsrelation zwischen Ort und Impuls verletzen. Wie Albers u. a. [2] herausstellen, ist eine solche Aussage aber ohne eine konkrete Realisierung eines Kollapsmodells noch kein starkes Argument gegen die semiklassischen Gleichungen. Schwierigkeiten mit Erhaltungssätzen sind in Kollapsmodellen nicht ungewöhnlich, so dass auch eine Verletzung der Impulserhaltung für sich noch kein Ausschlusskriterium darstellt. Auch sind die Unbestimmtheitsrelationen nicht in diesem Sinne experimentell getestet, so dass eine Verletzung nicht notwendigerweise ausgeschlossen ist [71]. Albers u. a. zeigen mithilfe des Formalismus von DeWitt zur Analyse des Messprozesses, dass die Kopplung einer Gravitationswelle an einen Testkörper, der die Unbestimmtheitsrelationen erfüllt, immer zu einer Übertragung einer gewissen Unbestimmtheit auch auf das klassische System führt, was den Voraussetzungen von Eppley u. Hannah widerspricht, das klassische System frei von jeder Unbestimmtheit vermessen zu können.

Im zweiten Fall, dass kein Kollaps stattfindet, muss die Streuung der klassischen Gravitationswelle vom gesamten betrachteten Superpositionszustand abhängen. Ihre Streuung kann also nur eine Funktion der Wellenfunktion ψ (und nicht nur eines Eigenzustandes) sein, was auch der Gedanke der SN-Gleichung ist. Die klassische Gravitationswelle ermöglicht also die Messung der Wellenfunktion (und nicht nur der Erwartungswerte von Operatoren, wie es die Quantenmechanik erfordert). So lassen sich prinzipiell überlichtschnelle Signale erzeugen: Betrachtet man zwei getrennte Raumgebiete, dann lässt sich durch Messung der Wellenfunktion im eigenen Gebiet sagen, ob und welcher Anteil der Aufenthaltswahrscheinlichkeit im zweiten gemessen wird. Auf diese Weise ist eine instantane Kommunikation über beliebige räumliche Distanzen möglich. Eine binäre Information kann beispielsweise schlicht als „ist kollabiert“ bzw. „ist nicht kollabiert“ kodiert werden, indem der Absender auf seiner Seite eine Messung vornimmt oder nicht. Gegen die dazu konkret vorgeschlagene Realisierung wendet Mattingly [72] allerdings

ein, dass dieses Gedankenexperiment nicht durchführbar sei – nicht einmal im Prinzip. Zum Beispiel müsste der Detektor zur Vermessung der am Zustand ψ gestreuten Gravitationswelle so massiv sein, dass er innerhalb seines eigenen Schwarzschildradius läge [2].

Albers u. a. gehen sogar noch einen Schritt weiter und liefern ein konkretes Modell für ein gekoppeltes System aus klassischem und quantisiertem Feld. Sie betrachten dazu eine zweidimensionale Version der skalaren Gravitation nach Nordström, die sie an ein quantisiertes, massives Skalarfeld koppeln. Behauptungen wie die DeWitts, dass generell die Quantisierung eines Systems zugleich auch die Quantisierung aller Systeme bedinge, an die es gekoppelt werden könne, sind mit diesem Gegenbeispiel nicht weiter haltbar.

Für eine Notwendigkeit der Quantisierung der Gravitation bleiben andere Argumente: Eines ist selbstverständlich der Wunsch nach einer vereinheitlichten Theorie. Darüber hinaus könnten die vielversprechenden Resultate der bisherigen Ansätze – allen voran Stringtheorie und Schleifenquantengravitation – für die Beschreibung schwarzer Löcher und des frühen Universums sowie die Möglichkeit, dass eine Quantengravitation bekannte Probleme des Standardmodells, wie beispielsweise das Hierarchieproblem, behebt, als Indizien für eine notwendige Quantisierung dienen. Eine Schwierigkeit der semiklassischen Theorie stellen des Weiteren die unterschiedlichen Zeitbegriffe der Relativitätstheorie auf der einen und der Quantenmechanik auf der anderen Seite dar. Dies ändert allerdings wenig daran, dass die Frage, ob die Gravitation quantisiert werden muss, final nur durch das Experiment zu beantworten ist. Gute Zusammenfassungen der Auseinandersetzung über Sinn und Unsinn einer fundamental semiklassischen Theorie finden sich bei Mattingly [71] und Kiefer [63].

3.2. Die SN-Gleichung als Kollapsmodell

Trotz des großen experimentellen Erfolges der Quantenmechanik war ihre Formulierung bereits von Beginn an mit konzeptionellen und interpretatorischen Fragen verbunden. Eine ihrer Schwierigkeiten ist die Beschreibung des Übergangs von der mikroskopischen, quantenmechanischen zur makroskopischen, klassischen Welt. Diese Frage ist eng mit dem sogenannten Messproblem der Quantenmechanik verknüpft.

Nach der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik, wie sie von Bohr [15] und Heisenberg [54] formuliert wurde, erfolgt die quantenme-

chanische Evolution in einem zweigeteilten Prozess, dessen eine Hälfte lediglich als Ad-hoc-Prinzip ohne mathematische Beschreibung eingeführt wird: Vor einem Messprozess genügt die Evolution der linearen Schrödingergleichung, welche die Ausbreitung einer Wellenfunktion beschreibt. Im zweiten Schritt, der „Messung“, reduziert sich diese Wellenfunktion auf eine Eigenfunktion des zur Messung gehörenden Operators, wobei sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden Eigenzustands nach der Bornschen Regel aus dem Erwartungswert des Operators im jeweiligen Eigenzustand ergibt. Solange sich eine Trennung in eine mikroskopische, den Gesetzen der Quantenmechanik unterworfenen und eine makroskopische, klassisch zu beschreibende Welt aufrecht erhalten lässt, stellt diese Interpretation in ihren praktischen Konsequenzen kein Problem dar. Aus der Perspektive eines grundlegenden Verständnisses der Quantenmechanik ist diese Situation allerdings unbefriedigend, da weder klar spezifiziert ist, was genau einen Messprozess auszeichnet, noch wie die Zustandsreduktion der Wellenfunktion auf eine Eigenfunktion vonstatten geht. Ab welcher Größe ist ein Objekt ein Messgerät und welche weiteren Eigenschaften muss es dazu besitzen? Genügt die Anwesenheit des Messinstruments, oder muss ein lebender Beobachter anwesend sein? Und ist im letzteren Fall auch ein Goldfisch als Beobachter qualifiziert, oder bedarf es dazu eines mit Universitätsabschluss zertifizierten Wissenschaftlers?²

Experimentell ist die Quantennatur der Materie, also ihre Evolution nach der linearen Schrödingergleichung ohne Kollaps der Wellenfunktion, für Moleküle mit bis zu einigen tausend Atomen getestet. Experimente mit Molekülen aus bis zu einer Million Atomen sind angestrebt. Andererseits ist das klassische Verhalten von Materie, d. h. die Abwesenheit von Ortssuperpositionszuständen, für Partikel bis etwa im Mikrogrammbereich, also für etwa 10^{18} Atome, beobachtbar [13]. Ein Mechanismus, der den Übergang von mikroskopischen zu makroskopischen Objekten definiert, muss also irgendwo dazwischen einsetzen.

Einer der ersten Vorschläge, den Kollaps der Wellenfunktion als Folge der Gravitationswechselwirkung zu erklären, stammt von Károlyházy [60] (siehe auch [61]). Er schreibt der Struktur der Raumzeit eine fundamentale Längenunbestimmtheit

$$(\Delta s)^2 = \left(\frac{G \hbar s}{2c^3} \right)^{2/3} \quad (3.2)$$

²frei nach John S. Bell

zu, die er aus der Orts-Impuls-Unbestimmtheitsrelation motiviert. Dabei ist Δs die Unbestimmtheit eines Weltliniensegments der Länge $s = cT$. Die Idee von Károlyházy besteht nun darin, anstelle der flachen Minkowski-Metrik eine Schar von Metriken zu betrachten, welche statistisch derart um die flache Metrik verteilt sind, dass ihre statistische Unsicherheit gerade zum angegebenen Wert Δs aus (3.2) führt. Man findet dann eine vom betrachteten System abhängige „Kohärenzlänge“ a_c innerhalb derer sich Wellenfunktionen, die in verschiedenen Metriken des Ensembles leben, nur wenig in ihrer Phase unterscheiden, außerhalb derer aber die Phasenunterschiede so groß werden, dass nicht zu vernachlässigende Interferenzen der verschiedenen Wellenfunktionen auftreten. Im Ergebnis lässt sich die Evolution nach dem Modell von Károlyházy verstehen als eine Entwicklung nach der linearen Schrödingergleichung innerhalb der „Kohärenzzellen“ der Größe a_c , die von stochastischen Sprüngen beim Überschreiten der Kohärenzzellen begleitet ist. Schätzt man die Kohärenzlänge ab, so findet man beispielsweise $a_c \approx 10^{23}$ m für ein Proton und $a_c \approx 10^{-18}$ m für eine Kugel vom Radius 1 cm, die eine für irdische Verhältnisse typische Dichte besitzt [13]. Für typische Quantenobjekte ist also keine Dekohärenz zu erwarten, während für makroskopische Objekte Sprünge der Wellenfunktion praktisch ständig auftreten.

3.2.1. Gravitativ induzierte Zustandsreduktion nach Penrose

Bereits Diósi [29] stellt fest, dass die SN-Gleichung bei der Frage der Zustandsreduktion – so diese eine gravitative Ursache hat – eine Rolle spielen könnte. Er schreibt die Gleichung als Ein- und Vielteilchengleichung auf (ohne ihr jedoch einen Namen zu geben) und sieht in der Tatsache, dass sie stationäre Lösungen besitzt, wie sie nötig sind, um wohllokalisierte Makroobjekte zu erklären, einen Hinweis für ihre Bedeutung.

Diesen Gedanken verfolgt auch Penrose [81, 82], der die Problematik mithilfe einer leblosen Version von Schrödingers Katze illustriert: Ein Photon, das durch einen halbdurchlässigen Spiegel geschickt wird, löst abhängig vom von ihm durchlaufenen Weg die Bewegung eines massiven Objekts in eine von zwei Positionen aus. Das Objekt befindet sich anschließend in einer Superposition zweier Quantenzustände, welche die beiden Positionen repräsentieren. Beide Zustände besitzen in der gewöhnlichen Quantenmechanik dieselbe Energie und sind stabil, also Eigenzustände des Hamiltonoperators. Damit muss aber auch jede Superposition beider Zustände wieder einen Eigenzustand – also einen sta-

bilen Zustand – bilden. Dies widerspricht offenkundig unserer Alltagserfahrung, da wir in der Natur niemals solche Superpositionszustände vorfinden.

Nun bringt Penrose die Gravitation ins Spiel und betrachtet die mit dem Gravitationszustand zur jeweiligen Position verschränkten Zustände. Dadurch unterscheiden sich beide Zustände: Der Schrödinger-Operator $\partial/\partial t$ korrespondiert dann mit der Wirkung des Killing-Vektors, der die Zeittranslation repräsentiert, und ist für jeden der beiden Zustände ein anderer. Wie beide Killing-Vektoren zu identifizieren sind, ist nicht klar, da eine solche Identifizierung eine punktweise Identifizierung der zu beiden Positionszuständen gehörenden Raumzeiten erfordern würde. Penrose schlägt vor, dass diese Identifizierung *näherungsweise* möglich sei, der Fehler, den man dabei mache, allerdings zu einer gewissen Unsicherheit bei der zugehörigen Energie führe. In newtonscher Approximation zeigt er, dass diese Energiedifferenz gerade die gravitative Selbstenergie zwischen der einen und der anderen Position des Objekts ist.

Ein Problem anderer auf der Gravitation beruhender Kollapsmodelle (insbesondere dessen von Diósi [30]) ist, dass für ein Punktteilchen grundsätzlich alle Ortseigenzustände infrage kommen, was zu einer unendlichen Energieunbestimmtheit und damit zu einer instantanen Zustandsreduktion führt. Ghirardi u. a. [40] schlagen als Lösung die Einführung einer weiteren Konstanten, einer fundamentalen Länge, vor. Die Lösung von Penrose ist dagegen, als diejenigen Zustände, in welche ein Kollaps stattfindet, die stationären Zustände der SN-Gleichung zu betrachten. Dieses Modell kommt ohne neue Konstanten aus. Allerdings ist es nicht ohne interpretatorische Schwierigkeiten. Fraglich ist vor allem, wie die bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation folgt. Schließlich wird bei Penrose' Vorschlag eine deterministische Schrödingergleichung betrachtet. Im Unterschied zu anderen Kollapsmodellen gibt es keine äußere Quelle für stochastische Effekte [39].

3.3. Sind nichtlineare Schrödinger-Gleichungen physikalisch relevant?

Häufig wird nichtlinearen Schrödinger-Gleichungen im Allgemeinen mit einem formalen Argument von Gisin [41–43]³ die physikalische Relevanz abgesprochen, der behauptet, dass Nichtlinearitäten jeglicher Art⁴ in der Schrödinger-Gleichung immer zur Möglichkeit überlichtschneller Signalausbreitung führten. Wie Bassi u. Hejazi [12] übersichtlich darstellen, basiert das Argument auf der Feststellung, dass zwei Gemische quantenmechanischer Zustände, die durch dieselbe Dichtematrix ρ repräsentiert werden, physikalisch – durch Messung aller möglichen Erwartungswerte – nicht unterscheidbar sind.⁵ In der linearen Quantenmechanik bleibt die Ununterscheidbarkeit auch nach einer Zeitentwicklung bestehen. In einer nichtlinearen Theorie werden dagegen aus ein und derselben Dichtematrix, je nachdem welches anfängliche Gemisch sie repräsentiert, verschiedene Dichtematrizen hervorgehen.

Seien in einem Hilbertraum \mathcal{H} $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ und $\{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_m\rangle\}$ zwei solche Gemische mit entsprechenden assoziierten Wahrscheinlichkeiten⁶, so dass beide Gemische dieselbe Dichtematrix ρ besitzen. Sei außerdem $n \geq m$ (andernfalls vertausche man beide Gemische für das Argument) und seien $\{|\alpha_1\rangle, \dots, |\alpha_n\rangle\}$ und $\{|\beta_1\rangle, \dots, |\beta_n\rangle\}$ zwei Orthonormalbasen eines weiteren, n -dimensionalen Hilbertraums \mathcal{K} , für die sich ein gemeinsamer Zustand

$$|V\rangle = \sum_{i=1}^n |\psi_i\rangle \otimes |\alpha_i\rangle = \sum_{i=1}^n |\phi_i\rangle \otimes |\beta_i\rangle \quad (3.3)$$

zwischen zwei Parteien teilen lässt.⁷ Wie in [12] gezeigt, existieren solche

³Gisin reagiert damit auf einen Vorschlag von Weinberg [103, 104], wie nichtlineare Korrekturen zur Quantenmechanik eingeführt werden können.

⁴ausgenommen stochastische, siehe dazu weiter unten

⁵Hughston u. a. [56] zeigen, dass die Menge der Gemische $\{|\phi_1\rangle, \dots, |\phi_m\rangle\}$, die eine gegebene Dichtematrix ρ besitzen, genau diejenigen sind, die aus einem beliebigen Gemisch $\{|\psi_1\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$ zur Dichtematrix ρ durch eine Neumischung der Zustände mit einer unitären $r \times r$ -Matrix hervorgehen. Dabei ist $r = \max\{m, n\}$ und das kleinere Ensemble wird durch Nullzustände aufgefüllt (siehe dazu die folgenden Fußnoten). Die Zahl der von Null verschiedenen Zustände je Ensemble muss mindestens gleich dem Rang von ρ sein.

⁶Genauer betrachten wir statt des Paares $(|\psi_i\rangle, p_i)$ aus (auf eins normiertem) Zustand und assoziierter Wahrscheinlichkeit die auf p_i umnormierten Zustände $|\psi_i\rangle$.

⁷Das kleinere Ensemble wird durch Nullzustände aufgefüllt, was aufgrund der Normierung der Zustände auf ihre Wahrscheinlichkeit im Gemisch möglich ist.

Orthonormalbasen, die etwa zu verschiedenen Einstellungsmöglichkeiten einer Stern-Gerlach-Apparatur korrespondieren können. Ein Beobachter kann nun an der einen Hälfte des Systems eine Messung vornehmen, für die er seine Messapparatur wahlweise in die zur Basis $\{|\alpha_i\rangle\}$ oder die zur Basis $\{|\beta_i\rangle\}$ gehörende Position bringt. Diese Messung reduziert den ersten Faktor des Zustands auf eines der Ensembles $\{|\psi_i\rangle\}$ oder $\{|\phi_i\rangle\}$. Da beide dieselbe Dichtematrix besitzen, lässt sich aber nicht feststellen, welches der beiden Ensembles tatsächlich vorliegt, so dass keine Kommunikation möglich ist.

Wäre die Evolution der Dichtematrix nun nichtlinear, so Gisins Argument, so ließe sich nach einiger Zeit ein Unterschied zwischen beiden Gemischen erkennen. Ein Beobachter am anderen Ende kann daraus schlussfolgern, welche Einstellungsmöglichkeit seiner Messapparatur der erste Beobachter gewählt hat. Dies eröffnet die Möglichkeit der Kommunikation. Da aber der Abstand beider Beobachter prinzipiell beliebig groß gewählt werden kann, sei auf diese Weise auch eine überlichtschnelle Informationsübertragung möglich. Aus dieser Betrachtung wird dann geschlussfolgert, dass die einzigen zulässigen Nichtlinearitäten in der Schrödingergleichung solche seien, die die Evolution der Dichtematrix linear belassen. Dabei handle es sich genau um die stochastischen Modifikationen, die in Kollapsmodellen wie „Continuous Spontaneous Localisation“ (CSL) betrachtet werden.⁸ Sie modifizieren die Quantendynamik zu einer stochastischen Differentialgleichung, die über einen nichtlinearen Term verfügt. Bei der Bildung der Dichtematrix ist allerdings eine statistische Mittelung vonnöten, so dass man die lineare Evolution der Dichtematrix trotz nichtlinearer Evolution der Zustände fordern kann [11]. Unter dieser Bedingung (mit der ergänzenden Forderung einer markowschen Stochastik) kommt als nichtlineare Modifikation nur die Lindblad-Gleichung [69] in Frage, weshalb stochastische Kollapsmodelle wie CSL auf dieser beruhen.

Gisins Argumentation hat zwei offenkundige Schwachpunkte, die beide damit zusammenhängen, dass die modifizierte, nichtlineare Evolution nur an einem sehr konkreten Punkt in Betracht gezogen wird. Die übrige Betrachtung geht dagegen stillschweigend von der Gültigkeit bekannter Eigenschaften der linearen Quantenmechanik aus. Es stellt sich zunächst die Frage, wie der präparierte Zustand $|V\rangle$ räumlich getrennt werden kann, ohne dass bereits während des Transports die nichtlineare Evolution die Ununterscheidbarkeit der Gemische zerstört. Welcher Ge-

⁸vgl. [13] für eine Übersicht über das Gebiet

stalt die Nichtlinearität auch ist, für die Gültigkeit des Arguments muss sie schwach genug sein, um über die Transportdauer noch näherungsweise eine lineare Zeitentwicklung annehmen zu können. Dann aber muss auch die Zeit, die der zweite Beobachter warten muss, bevor er ermitteln kann, welche Einstellung der erste Beobachter gewählt hat, in derselben Größenordnung liegen. Die Signalausbreitungsgeschwindigkeit kann also nicht deutlich über der Transportgeschwindigkeit liegen.

Zum anderen ist aber, auch wenn man dieses Problem ausblendet, nach wie vor die Rede von einer – nicht näher definierten – „Messung“, und zwar sowohl auf Seiten des ersten wie auch beim zweiten Beobachter. Nimmt man allerdings die Idee von Penrose [82] ernst, die SN-Gleichung als Modell für die quantenmechanische Zustandsreduktion zu verstehen, so ist es gerade Teil der Idee, auch den Messprozess als nichtlinearen Vorgang zu begreifen. Zumindest bedarf es also einer weiteren Rechtfertigung, weshalb hier nicht das Gesamtsystem aus Quantenzustand und Messapparatur im Sinne der nichtlinearen Evolution zu beschreiben ist, sondern im Sinne der Kopenhagener Deutung mit einem durch den Messprozess ausgelösten, instantanen Kollaps der Wellenfunktion argumentiert werden darf.

Dass Gisins Argument an der Gültigkeit des Projektionspostulats (Zustände werden bei Messung auf die zur Observablen gehörigen Eigenzustände projiziert) hängt, stellen auch Polchinski [85] sowie Lochan u. Singh [70] fest. Czachor u. Doebner [27] erklären zudem, wie zumindest für die von Polchinski vorgeschlagene Erweiterung von Weinbergs nichtlinearer Schrödingergleichung [103, 104] das Projektionspostulat modifiziert werden kann, damit keine überlichtschnelle Kommunikation mehr möglich ist.

Ähnlich kann man auch einem anderen Argument begegnen, demzufolge nichtlineare Schrödingergleichungen zu Entropieabnahme führen [31, 58, 83]. Betrachtet man ein Gemisch zweier normierter Zustände mit Dichtematrix $\rho = \frac{1}{2} |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2} |\psi_2\rangle\langle\psi_2|$, so lässt sich aus der Forderung, dass die Entropie $S = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ nicht abnimmt, folgern, dass die Beträge von Skalarprodukten beliebiger Zustände zeitlich erhalten sein müssen. Nach Wigner [106] muss die Zeitentwicklung dann unitär oder antiunitär sein, woraus aber Unitarität (und damit insbesondere Linearität) folgt, denn eine Hintereinanderausführung zweier identischer Zeitentwicklungen muss wieder eine Zeitentwicklung ergeben. Dieses Argument wirft allerdings eine Vielzahl an Fragen auf: etwa inwiefern man im Falle der SN-Gleichung – ohne vollständige Berücksichtigung

des Gravitationsfeldes – von einem abgeschlossenen System ausgehen kann, ob $-\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ überhaupt der richtige Entropiebegriff für eine modifizierte, nichtlineare Quantenmechanik ist oder weshalb eine Entropieabnahme ein Problem darstellt, solange man sich jenseits des thermodynamischen Grenzfalls bewegt.

3.4. Die SN-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall

Die Frage, wie sich Quantenmaterie in einem äußeren Gravitationsfeld – wie wir sie etwa beim COW-Experiment [24] vorfinden – beschreiben lässt, ist leicht zu beantworten: Die Schrödinger-Gleichung wird dabei um das klassische, konstante oder auch orts- und zeitabhängige Gravitationspotential ergänzt [45]. Sie verliert dabei ihre Linearität nicht. Padmanabhan u. Padmanabhan [76] zeigen, dass sich dies auch als nicht-relativistischer Grenzfall einer Klein-Gordon-Gleichung in einem starren, zeitabhängig beschleunigten Nichtinertialsystem motivieren lässt.

Ungleich schwerer zu beantworten ist die umgekehrte Frage, wie das Gravitationsfeld eines Quantenobjekts aussieht, das durch die Schrödingergleichung beschrieben wird. Das übliche Schema, ein Materiefeld an die Gravitation, also an die Einstein-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, zu koppeln, ist das Prinzip der minimalen Kopplung, das in drei Schritten vollzogen wird:

- (i) der Formulierung der Feldtheorie des zu beschreibenden Feldes in Poincaré-invarianter Form, d. h. so dass es den Prinzipien der Speziellen Relativitätstheorie genügt,
- (ii) dem Ersetzen der flachen Minkowski-Metrik durch eine allgemeine Lorentz-Metrik und der partiellen Ableitungen durch die kovariante Ableitung bezüglich dieser Metrik,
- (iii) der Berechnung des zugehörigen Energie-Impuls-Tensors, der die rechte Seite der Einstein-Gleichungen bildet.

Ob dieses Schema seine Gültigkeit auch für ein quantisiertes Feld behält, ist nicht eindeutig zu beantworten. Nimmt man dies an, so wäre im letzten Schritt im Sinne der semiklassischen Einstein-Gleichungen der Erwartungswert des Energie-Impuls-Tensors (als quantenmechanischer Operator) einzusetzen. Für ein Quantenobjekt, das der (Einteilchen-)

Schrödinger-Gleichung genügt, scheitert dieses Schema allerdings schon am ersten Schritt, denn eine speziell-relativistische Einteilchen-Quantenmechanik existiert nicht. Da eine relativistische Behandlung zur Erzeugung und Vernichtung von Teilchen führt, ist sie nur innerhalb einer Vielteilchentheorie machbar.⁹

Eine Möglichkeit, das Problem zu umgehen, wäre die Betrachtung einer relativistischen Quantenfeldtheorie. Das Schema würde dann zu einer Quantenfeldtheorie auf einem gekrümmten Hintergrund führen, die über die semiklassischen Einstein-Gleichungen an das Gravitationsfeld zurückkoppelt. Schon ohne diese Rückkopplung stellt allerdings das Gebiet der Quantenfeldtheorie auf gekrümmten Raumzeiten eine Herausforderung dar (obgleich in der jüngeren Vergangenheit beachtliche Fortschritte erzielt wurden [36]).

Eine weitere Variante ist, gar nicht erst mit einer Poincaré-invarianten Theorie zu beginnen, sondern die von Cartan [21] und Friedrichs [37] formulierte, Galilei-invariante Newton-Cartan-Gravitation als Ausgangspunkt der Analyse zu wählen. Diesen Ansatz, bei dem zunächst der nicht-relativistische Grenzfall betrachtet wird, bevor die Kopplung an die Felder (beschrieben durch die nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung) erfolgt, wählt Christian [23]. Er gelangt dabei ebenfalls zur SN-Gleichung, wobei er allerdings anschließend in einer kanonischen Quantisierungsprozedur eine Uminterpretation der Wellenfunktion zu einem zweitquantisierten Feldoperator vornimmt und dann durch Normalordnung bei einer Vielteilchentheorie endet, die keine Selbstwechselwirkungsterme mehr enthält.

Auch wenn die Schrödinger-Gleichung als empirisch bestätigte Einteilchengleichung sich nicht aus einer „höheren“, relativistischen Theorie ableiten lässt (jedenfalls ist eine solche Ableitung, z. B. als Grenzfall einer relativistischen Quantenfeldtheorie nicht bekannt), so folgt sie *formal* doch als nicht-relativistischer Grenzfall sowohl der klassischen Klein-Gordon- als auch der klassischen Dirac-Gleichung, die wiederum die Grundlage für die Quantenelektrodynamik bildet. Der Begriff des nicht-relativistischen Grenzfalles meint dabei den formalen Grenzwertprozess $1/c \rightarrow 0$. Die Schrödinger-Gleichung (bzw. die Pauli-Gleichung, ihre Verallgemeinerung mit Spin) in diesem Sinne als Grenzfall der entsprechenden relativistischen Feldtheorien abzuleiten, wird in zahlreichen Lehrbüchern als Motivation der Schrödinger-Gleichung angeführt. Versteht

⁹vgl. etwa das Klein-Paradoxon [65] als Beispiel für die Problematik einer relativistischen Behandlung eines Einteilchensystems

man diese Ableitung nicht nur als Rechenübung, sondern misst ihr eine physikalische Bedeutung bei, so lässt sich berechtigt die Frage aufwerfen, zu welchen Modifikationen es führt, diesen Grenzwertprozess statt mit der freien Klein-Gordon- oder Dirac-Gleichung auf einem flachen Minkowski-Hintergrund mit den entsprechenden Feldern auf einer gekrümmten Raumzeit vorzunehmen, die über die Einstein-Gleichungen dynamisch mit der Raumzeit wechselwirken.

Dazu wollen wir nun zuerst ein Verfahren vorstellen, wie ganz allgemein der Übergang der Klein-Gordon- bzw. Dirac-Gleichung entweder zum semiklassischen ($\hbar \rightarrow 0$) oder zum nicht-relativistischen ($1/c \rightarrow 0$) Grenzfall vorzunehmen ist, und dieses anhand bekannter Beispiele demonstrieren. Anschließend übertragen wir dieses Verfahren auf das gravitativ wechselwirkende Klein-Gordon- bzw. Dirac-Feld. Die folgenden Seiten dieses Kapitels geben dabei die in [47] bereits veröffentlichten Überlegungen wieder.

3.4.1. Semiklassische und nicht-relativistische Grenzfälle der Klein-Gordon und Dirac-Gleichung

Die WKB-Näherung [105] stellt eine gängige Methode dar, den semiklassischen Grenzfall einer Quantentheorie als formale Entwicklung in \hbar zu bekommen. Dabei macht man für die Wellenfunktion den Ansatz

$$\psi(t, \vec{x}) \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(t, \vec{x})\right), \quad (3.4)$$

der in eine entsprechende Differentialgleichung, wie etwa die Schrödinger-, Klein-Gordon- oder Dirac-Gleichung, einzusetzen ist, wobei der Exponent S in Potenzen von \hbar entwickelt wird. Man erhält dann Ordnung für Ordnung Differentialgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten, die von Ordnung zu Ordnung eine genauere Approximation der vollen Theorie liefern.

Von Pauli [80] wurde dieses Entwicklungsschema auch auf die Dirac-Gleichung als mehrkomponentige Gleichung angewandt, um deren semiklassischen Grenzfall zu betrachten. Die von ihm nicht vollständig dargelegte Lösung der erhaltenen Gleichungen wurde später von anderen zu Ende geführt [79, 86, 89].

Kiefer u. Singh [64] verwenden denselben Ansatz für eine Entwicklung der Klein-Gordon-Gleichung in Potenzen von $1/c$ und zeigen damit, dass sich mit dem Ansatz auch der nicht-relativistische Grenzfall

betrachten lässt, für den die Schrödingergleichung als erster Näherung resultiert.

Ich mache in dieser Analyse den Ansatz

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S(t, \vec{x})\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n a_n(t, \vec{x}). \quad (3.5)$$

ψ kann dabei ein beliebiges Skalar-, Vektor- oder Spinorfeld sein und dementsprechend sind auch die Entwicklungskoeffizienten a_n Skalar-, Vektor- oder Spinorfelder derselben Dimension. Die Funktion S ist jedoch immer als skalare Funktion zu verstehen.

Davon ausgehend kann man nun, nachdem man den Reihenansatz in die zu betrachtende Gleichung (in unserem Fall die Klein-Gordon- oder Dirac-Gleichung) eingesetzt hat, eine Entwicklung wahlweise in \hbar oder in $1/c$ vornehmen. Wenn die betrachteten Gleichung, wie bei der Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung der Fall, von \hbar und c jeweils unterschiedlich abhängt und nicht nur vom Verhältnis \hbar/c^2 , führen beide Entwicklungen zu verschiedenen Gleichungen in der jeweiligen Ordnung.

Klein-Gordon-Felder

Aus der freien Klein-Gordon-Gleichung¹⁰,

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \psi = 0, \quad \square = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \Delta, \quad (3.6)$$

folgt nach dem Prinzip der minimalen Kopplung die Klein-Gordon-Gleichung mit einem *äußeren* elektromagnetischen Feld. Dazu sind die Ableitungen durch

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \frac{ie}{\hbar} \phi(\vec{x}, t) \quad (3.7a)$$

$$\partial_k \rightarrow \partial_k - \frac{ie}{\hbar} A_k(\vec{x}, t) \quad (3.7b)$$

$$\begin{aligned} \square \rightarrow \square + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\phi^2 - c^2 A^2) - \frac{2ie}{\hbar c^2} (\phi \partial_t + c^2 \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \\ - \frac{ie}{\hbar c^2} (\dot{\phi} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \end{aligned} \quad (3.7c)$$

¹⁰Ich verwende hier und im Folgenden die Konvention einer Metrik mit mehrheitlich positivem Vorzeichen, d. h. $(-, +, +, +)$.

zu ersetzen. ϕ und \vec{A} sind das elektrische Potential bzw. das elektromagnetische Vektorpotential. Wir verwenden im Folgenden die Koordinatenbezeichnungen $ct = x^0$ und $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ nebeneinander und bezeichnen die Komponenten von Vierervektoren x^μ mit griechischen Indizes, die Komponenten von räumlichen Vektoren x^k mit lateinischen, wobei wir von der Summenkonvention¹¹ Gebrauch machen. Für die Ableitungen schreiben wir kurz $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, bzw. entsprechend $\partial_t = \partial/\partial t$ und $\partial_k = \partial/\partial x^k$. Für die Zeitableitung verwenden wir außerdem, wie gehabt, auch einen Punkt als Kurznotation.

Im Ergebnis führt die Ersetzung der Ableitungen – vollständig ausgeschreiben – auf die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\partial_t^2 - c^2 \Delta + \frac{2ie}{\hbar} (\phi \partial_t + c^2 \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) - \frac{e^2}{\hbar^2} (\phi^2 - c^2 A^2) + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + \frac{ie}{\hbar} (\dot{\phi} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) \psi = 0. \quad (3.8)$$

Man beachte, dass ψ hier ein skalares Feld bezeichnet.

In den Gleichungen (3.7c) und (3.8) könnte jeweils durch Wahl der Lorenz-Eichung, $\dot{\phi} + c^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, die letzte Zeile zum Verschwinden gebracht werden. Wir wollen aber an dieser Stelle noch keine Eichung fixieren, sondern zunächst den möglichst allgemeinen Fall betrachten.

Nun setzen wir den Ansatz (3.5) in die Klein-Gordon-Gleichung (3.8) ein. Dazu betrachten wir zunächst die Ableitungen

$$\partial_t \psi = e^{ic^2 S/\hbar} \frac{c^2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n \left(i\dot{S} a_n + \dot{a}_{n-2} \right) \quad (3.9a)$$

$$\vec{\nabla} \psi = e^{ic^2 S/\hbar} \frac{c^2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n \left(i(\vec{\nabla} S) a_n + \vec{\nabla} a_{n-2} \right) \quad (3.9b)$$

$$\partial_t^2 \psi = e^{ic^2 S/\hbar} \frac{c^4}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n \left(-\dot{S}^2 a_n + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-2} + i\ddot{S}a_{n-2} + \ddot{a}_{n-4} \right) \quad (3.9c)$$

$$\Delta \psi = e^{ic^2 S/\hbar} \frac{c^4}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n \left(-(\vec{\nabla} S)^2 a_n + 2i(\vec{\nabla} S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} + i(\Delta S) a_{n-2} + \Delta a_{n-4} \right). \quad (3.9d)$$

Um nicht die ersten beiden bzw. vier Reihenglieder einzeln auflisten zu müssen, wollen wir dabei als Konvention festlegen, dass alle a_n mit ne-

¹¹über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren

gativem n als identisch Null zu verstehen sind. Eingesetzt in (3.8) erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = & \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar}S\right) \frac{c^4}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n \left[-\dot{S}^2 a_n + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-2} + i\ddot{S}a_{n-2} + \ddot{a}_{n-4} \right. \\
& + c^2(\vec{\nabla}S)^2 a_n - 2ic^2(\vec{\nabla}S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} - ic^2(\Delta S)a_{n-2} - c^2\Delta a_{n-4} \\
& - \frac{2e\phi}{\hbar}\dot{S}a_{n-2} + \frac{2ie\phi}{\hbar}\dot{a}_{n-4} - 2e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}S)a_n + 2ie\vec{A} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} \\
& \left. - \frac{e^2\phi^2}{\hbar^2}a_{n-4} + \frac{e^2A^2}{\hbar}a_{n-2} + m^2a_n + \frac{ie}{\hbar}\dot{\phi}a_{n-4} + ie(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})a_{n-2} \right]. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck tauchen sowohl \hbar als auch c noch innerhalb der eckigen Klammern auf. Um nun die Entwicklung vornehmen zu können, nutzen wir aus, dass eine Verschiebung des Index bei gleichzeitiger Multiplikation mit einer entsprechenden Potenz von $\sqrt{\hbar}/c$ die Gleichung nicht verändert. Innerhalb der Reihenentwicklung ist $\hbar a_n$ also beispielsweise derselbe Term wie $c^2 a_{n-2}$.

Semiklassischer Grenzfall Verschieben wir die Indizes also zunächst auf solche Weise, dass nur noch Potenzen von c innerhalb der Entwicklung auftreten:

$$\begin{aligned}
0 = & \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar}S\right) \frac{c^4}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n \left[-\dot{S}^2 a_n + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-2} + i\ddot{S}a_{n-2} + \ddot{a}_{n-4} \right. \\
& + c^2(\vec{\nabla}S)^2 a_n - 2ic^2(\vec{\nabla}S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} - ic^2(\Delta S)a_{n-2} - c^2\Delta a_{n-4} \\
& - \frac{2e\phi}{c^2}\dot{S}a_n + \frac{2ie\phi}{c^2}\dot{a}_{n-2} - 2e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}S)a_n + 2ie\vec{A} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} \\
& \left. - \frac{e^2\phi^2}{c^4}a_n + \frac{e^2A^2}{c^2}a_n + m^2a_n + \frac{ie}{c^2}\dot{\phi}a_{n-2} + ie(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})a_{n-2} \right]. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Die Betrachtung des semiklassischen Grenzfalls bedeutet nun, bis zu einer gewissen Ordnung n die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 = & \left(m^2 - \dot{S}^2 + c^2(\vec{\nabla}S)^2 - \frac{2e\phi}{c^2}\dot{S} - 2e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}S) - \frac{e^2\phi^2}{c^4} + \frac{e^2A^2}{c^2} \right) a_n \\
& + i\left(\ddot{S} - c^2(\Delta S) + \frac{e}{c^2}(\dot{\phi} + c^2\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) a_{n-2} + 2i\left(\dot{S} + \frac{e\phi}{c^2} \right) \dot{a}_{n-2} \\
& - 2ic^2 \left((\vec{\nabla}S) - \frac{e\vec{A}}{c^2} \right) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} + \ddot{a}_{n-4} - c^2\Delta a_{n-4} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

zu betrachten. In niedrigster Ordnung, $n = 0$, erhalten wir

$$0 = (mc^2)^2 - (c^2\dot{S} + e\phi)^2 + c^2(c^2\vec{\nabla}S - e\vec{A})^2, \quad (3.13)$$

die Hamilton-Jacobi-Gleichung für einen relativistischen Massenpunkt. Da in der Klein-Gordon-Gleichung nur geradzahlige Potenzen von $\sqrt{\hbar}/c$ auftauchen, ist mit den Gleichungen zur Ordnung n auch immer die Ordnung $n + 1$ trivial erfüllt. Die nächsthöhere Ordnung ist also $n = 2$. Wir erhalten

$$0 = (c^2\ddot{S} - c^4\Delta S)a_0 + 2(c^2\dot{S} + e\phi)\dot{a}_0 - 2c^2(c^2\vec{\nabla}S - e\vec{A}) \cdot \vec{\nabla}a_0, \quad (3.14)$$

wobei wir von der Lorenz-Eichung Gebrauch gemacht haben.

Einfacher lassen sich beide Gleichungen in kovarianter Schreibweise darstellen, wenn man den Vierervektor π_μ mit $\pi_0 = -c\dot{S} - e\phi/c$ und $\pi_k = -c^2\partial_k S + eA_k$ einführt. Sie lauten dann

$$0 = m^2 c^2 + \pi_\mu \pi^\mu \quad (3.15)$$

$$0 = (\partial_\mu \pi^\mu) a_0 + 2\pi_\mu \partial^\mu a_0. \quad (3.16)$$

Nicht-relativistischer Grenzfall Ganz genauso gehen wir vor, um zum nicht-relativistischen Grenzfall zu gelangen, nur dass für diesen die Indizes so zu verschieben sind, dass nur noch Potenzen von \hbar in der Entwicklung auftauchen, d. h.

$$\begin{aligned} 0 = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar}S\right) \frac{c^6}{\hbar^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n & \left[-\dot{S}^2 a_{n-2} + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-4} + i\ddot{S}a_{n-4} + \ddot{a}_{n-6} \right. \\ & + \hbar(\vec{\nabla}S)^2 a_n - 2i\hbar(\vec{\nabla}S) \cdot \vec{\nabla}a_{n-2} - i\hbar(\Delta S)a_{n-2} - \hbar\Delta a_{n-4} - \frac{2e\phi}{\hbar}\dot{S}a_{n-4} \\ & + \frac{2ie\phi}{\hbar}\dot{a}_{n-6} - 2e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}S)a_{n-2} + 2ie\vec{A} \cdot \vec{\nabla}a_{n-4} - \frac{e^2\phi^2}{\hbar^2}a_{n-6} \\ & \left. + \frac{e^2 A^2}{\hbar}a_{n-4} + m^2 a_{n-2} + \frac{ie}{\hbar}\dot{\phi}a_{n-6} + ie(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})a_{n-4} \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Damit haben wir bis zur n -ten Ordnung die Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 = & \hbar(\vec{\nabla}S)^2 a_n \\
& + (m^2 - \dot{S}^2 - i\hbar\Delta S - 2e(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}S)) a_{n-2} - 2i\hbar(\vec{\nabla}S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} \\
& + \frac{1}{\hbar} (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 a_{n-4} + \left(i\dot{S} - \frac{2e\phi}{\hbar} \dot{S} \right) a_{n-4} + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-4} \\
& - \frac{1}{\hbar^2} (i\hbar\partial_t - e\phi)^2 a_{n-6}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

zu betrachten. In niedrigster Ordnung, $n = 0$, folgt damit $\vec{\nabla}S = 0$. $S(t, \vec{x}) = S(t)$ ist also eine nur zeit- und nicht ortsabhängige Funktion.

In der nächsthöheren Ordnung, $n = 2$, erhalten wir

$$(m^2 - \dot{S}^2) a_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \pm mt + \text{konst.} \tag{3.19}$$

Der konstante Term bewirkt nur eine globale Phasenverschiebung und kann daher ignoriert werden. Wir wählen für die weitere Betrachtung das negative Vorzeichen, $S = -mt$, das mit positiver Energie korreliert. Sämtliche Betrachtungen ließen sich allerdings auch für die umgekehrte Vorzeichenwahl entsprechend wiederholen.

In der Ordnung $n = 4$ kann man nun diese Ergebnisse verwenden, die zu einer Vereinfachung der Gleichungen führen. Wir erhalten in dieser Ordnung schließlich die Schrödingergleichung

$$(i\hbar\partial_t - e\phi) a_0 = \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 a_0 \tag{3.20}$$

für den Entwicklungskoeffizienten a_0 .

Die erste Korrektur zur Schrödingergleichung ergibt sich dann in der Ordnung $n = 6$. Diese liefert eine Gleichung an den Koeffizienten a_2 , der eine Korrektur der Ordnung $1/c^2$ zur schrödingerschen Wellenfunktion liefert:

$$(i\hbar\partial_t - e\phi) a_2 = \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 a_2 - \frac{1}{2m\hbar} (i\hbar\partial_t - e\phi)^2 a_0. \tag{3.21}$$

Wenn das Vektorpotential \vec{A} verschwindet, erhält man die auch schon von Kiefer u. Singh [64] gefundene Gleichung. Für die freie Klein-Gordon-Gleichung mit verschwindendem \vec{A} und ϕ ergibt sich

$$i\hbar\dot{a}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta a_2 - \frac{\hbar^3}{8m^3}\Delta\Delta a_0. \tag{3.22}$$

Dirac-Felder

Wir wollen diese Überlegungen für die Dirac-Gleichung wiederholen. Wieder erhalten wir aus der freien Dirac-Gleichung,

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0, \quad (3.23)$$

mithilfe des Prinzips der minimalen Kopplung durch Ersetzung der Ableitungen gemäß

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \frac{ie}{\hbar}\phi(\vec{x}, t) \quad (3.24)$$

$$\partial_k \rightarrow \partial_k - \frac{ie}{\hbar}A_k(\vec{x}, t) \quad (3.25)$$

die elektromagnetisch wechselwirkende Dirac-Gleichung

$$\left(i\partial_t + ic\alpha^k\partial_k - \frac{e}{\hbar}\phi + \frac{ec}{\hbar}\alpha^k A_k - \frac{mc^2}{\hbar}\beta\right)\psi = 0. \quad (3.26)$$

Dabei sind die Dirac-Matrizen definiert als

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0, \quad \alpha^k = \gamma^0\gamma^k \quad (3.27)$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Wie bereits für die Klein-Gordon-Gleichung setzen wir nun unseren Ansatz (3.5) in die Dirac-Gleichung (3.26) ein. Dabei sind die Koeffizienten a_n nun, ebenso wie das Feld ψ , keine Skalare mehr sondern Viererspinoren. Wir erhalten:

$$0 = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar}S\right) \frac{c^2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n \left[-\dot{S}a_n + i\dot{a}_{n-2} - \frac{e\phi}{\hbar}a_{n-2} \right. \\ \left. - c\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla}S)a_n + ic\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}a_{n-2} + \frac{ec}{\hbar}\vec{\alpha} \cdot \vec{A}a_{n-2} - \frac{mc^2}{\hbar}\beta a_{n-2} \right]. \quad (3.29)$$

Semiklassischer Grenzfall Wieder verschieben wir die Indizes, so dass nur noch Potenzen von c in der Entwicklung auftreten:

$$0 = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S\right) \frac{c^2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n \left[-\dot{S}a_n + i\dot{a}_{n-2} - \frac{e\phi}{c^2}a_n - c\vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla}S)a_n + ic\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}a_{n-2} + \frac{e}{c}\vec{\alpha} \cdot \vec{A}a_n - m\beta a_n \right]. \quad (3.30)$$

Daraus folgen in jeder Ordnung die Gleichungen

$$\left(m\beta + \dot{S} + \frac{e\phi}{c^2} + c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}S - \frac{e}{c}\vec{\alpha} \cdot \vec{A} \right) a_n - i\dot{a}_{n-2} - ic\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}a_{n-2} = 0. \quad (3.31)$$

Zur einfacheren Darstellung verwenden wir von Beginn an die kovariante Schreibweise π_μ wie oben mit $\pi_0 = -c\dot{S} - e\phi/c$ und $\pi_k = -c^2\partial_k S + eA_k$. Damit erhalten wir in niedrigster Ordnung, $n = 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= (mc\beta - \pi_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi}) a_0 \\ \Leftrightarrow 0 &= (mc - \pi_\mu \gamma^\mu) a_0 \\ &= \begin{pmatrix} (mc - \pi_0) \mathbb{1} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & (mc + \pi_0) \mathbb{1} \end{pmatrix} a_0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dieses lineare Gleichungssystem an die vier Einträge von a_0 hat nicht-triviale Lösungen genau dann, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} (mc - \pi_0) \mathbb{1} & -\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & (mc + \pi_0) \mathbb{1} \end{vmatrix} = m^2 c^2 - \pi_0^2 + |(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2| = 0 \quad (3.33)$$

verschwindet. Aus der Algebra der Pauli-Matrizen,

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + ie^{ijk} \sigma^k \quad \Rightarrow \quad (\vec{\sigma} \cdot \vec{u})(\vec{\sigma} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}), \quad (3.34)$$

folgt $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi}$. Aus der Lösbarkeitsbedingung des Verschwindens der Determinante (3.33) erhält man also, wie im Falle der Klein-Gordon-Gleichung, die Hamilton-Jacobi-Gleichung für den relativistischen Massenpunkt,

$$0 = m^2 c^2 + \pi_\mu \pi^\mu. \quad (3.35)$$

Da auch in der Dirac-Gleichung nur ganzzahlige Potenzen von \hbar auftreten, ist die nächsthöhere Ordnung $n = 2$. In dieser Ordnung erhalten

wir

$$\begin{aligned} (mc - \pi_\mu \gamma^\mu) a_2 &= ic\gamma^0 (\partial_t + c\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) a_0 \\ &= -ic^2 \gamma^\mu \partial_\mu a_0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Wir können die auftretenden Operatoren mit

$$L := mc - \pi_\mu \gamma^\mu, \quad D := -ic^2 \gamma^\mu \partial_\mu \quad (3.37)$$

bezeichnen. Dann ist die Determinantenbedingung in Ordnung $n = 0$ gleichbedeutend mit der Eigenschaft, dass $a_0 \in \text{Ker}(L)$. In der Ordnung $n = 2$ bekommen wir dann die Bedingung, dass $Da_0 \in \text{Im}(L)$, bzw. die äquivalente Aussage, dass $Da_0 \in (\text{Ker}(L^\dagger))^\perp$. Da $L^\dagger = \gamma^0 L \gamma^0$ gilt, ist $x \in \text{Ker}(L^\dagger) \Leftrightarrow \gamma^0 x \in \text{Ker}(L)$. Mit anderen Worten ist die Bedingung, dass Da_0 im Bild von L liegt, also äquivalent zur Aussage, dass für je zwei Lösungen $a_0, \tilde{a}_0 \in \text{Ker}(L)$ der Gleichung (3.32) in Ordnung $n = 0$

$$\bar{a}_0 \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{a}_0 = 0 \quad (3.38)$$

gilt, wobei $\bar{a}_0 = a_0^\dagger \gamma_0$ den adjungierten Spinor bezeichnet. Die Gleichungen (3.32) und (3.38) bestimmen gemeinsam die Lösung a_0 in niedrigster Ordnung.

Als notwendige Bedingung für Gleichung (3.36) lässt sich auch die Bargmann-Michel-Telegdi-Gleichung [5] ableiten. Dies wird im Anhang D ausgeführt.

Nicht-relativistischer Grenzfall Wie zuvor für die Klein-Gordon-Gleichung eliminieren wir in Gleichung (3.29) zunächst jegliches Auftreten von c innerhalb der eckigen Klammern durch entsprechende Verschiebung der Indizes. Die resultierende Gleichung ist

$$\begin{aligned} 0 = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S\right) \frac{c^3}{\hbar^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n & \left[-\dot{S} a_{n-1} + i\dot{a}_{n-3} - \frac{e\phi}{\hbar} a_{n-3} \right. \\ & \left. - \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} S) a_n + i\sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} + \frac{e}{\sqrt{\hbar}} \vec{\alpha} \cdot \vec{A} a_{n-2} - m\beta a_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

die in jeder Ordnung n

$$\begin{aligned} \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} S) a_n + (\dot{S} + m\beta) a_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A}) a_{n-2} \\ - \frac{1}{\hbar} (i\hbar \partial_t - e\phi) a_{n-3} = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

impliziert.

Wie für die Klein-Gordon-Gleichung folgt in niedrigster Ordnung, $n = 0$, dass $\vec{\nabla} S = 0$, also $S = S(t)$ eine rein zeitabhängige Funktion ist.

Da die Dirac-Gleichung auch ungeradzahlige Potenzen von c enthält, ist in diesem Fall die nächsthöhere zu betrachtende Ordnung $n = 1$. Um die Gleichung in dieser Ordnung zu betrachten, teilen wir den vier-komponentigen Spinor $a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, a_{n,4})$ in zwei zwei-komponentige Spinoren $a_n^> = (a_{n,1}, a_{n,2})$ und $a_n^< = (a_{n,3}, a_{n,4})$. Wir erhalten dann in der Ordnung $n = 1$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$(m + \dot{S}) a_0^> = 0 \quad (3.41a)$$

$$(m - \dot{S}) a_0^< = 0. \quad (3.41b)$$

Diese können für nicht verschwindende a_0 nur dann gleichzeitig erfüllt werden, wenn entweder $S = -mt$ ist und die „Negative-Energie-Komponente“ $a_0^<$ verschwindet, oder aber wenn $S = +mt$ ist und die „Positive-Energie-Komponente“ $a_0^>$ verschwindet. Wir wollen hier den ersteren Fall betrachten und $a_0^< \equiv 0$ setzen. Der zu negativer Energie korrespondierende umgekehrte Fall lässt sich ganz analog behandeln. Mit dieser Wahl vereinfacht sich die Dirac-Gleichung (3.40) zu dem folgenden System aus zwei Gleichungen:

$$0 = \sqrt{\hbar} \vec{\sigma} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A}) a_{n-2}^< - (i\hbar \partial_t - e\phi) a_{n-3}^> \quad (3.42a)$$

$$a_{n-1}^< = \frac{1}{2m\sqrt{\hbar}} \vec{\sigma} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A}) a_{n-2}^> - \frac{1}{2m} (i\hbar \partial_t - e\phi) a_{n-3}^<. \quad (3.42b)$$

Gleichung (3.42b) liefert in Ordnung n jeweils eine Bestimmungsgleichung der Negative-Energie-Komponenten der Ordnung $n-1$, $a_{n-1}^<$, wodurch sich diese nur durch die Positive-Energie-Komponenten bis einschließlich zur Ordnung $n-2$, $a_{n-2}^>$, ausdrücken lassen. In Gleichung (3.42a) fließen dann nur die bereits bestimmten Negative-Energie-Komponenten ein, sie liefert damit die Bewegungsgleichung für die Positive-Energie-Komponenten.

In der Ordnung $n = 2$ ist (3.42a) trivial erfüllt und (3.42b) liefert

$$a_1^< = \frac{1}{2m\sqrt{\hbar}} \vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) a_0^>. \quad (3.43)$$

Setzt man dies dann in Gleichung (3.42a) in der Ordnung $n = 3$ ein, erhält man

$$\left(\frac{1}{2m} [\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})]^2 - (i\hbar\partial_t - e\phi) \right) a_0^> = 0. \quad (3.44)$$

Verwendet man die Algebra der Pauli-Matrizen (3.34) und macht davon Gebrauch, dass

$$\begin{aligned} (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) \times (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) a_0^> &= -\hbar^2 \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} a_0^>)}_{=0} \\ &+ ie\hbar \underbrace{\vec{\nabla} \times (a_0^> \vec{A})}_{=a_0^> \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla} a_0^>} + ie\hbar \vec{A} \times \vec{\nabla} a_0^> + e^2 \underbrace{\vec{A} \times \vec{A}}_{=0} = ie\hbar \vec{B} a_0^>, \end{aligned} \quad (3.45)$$

wobei $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ das Magnetfeld bezeichnet, so erhält man schließlich die Pauli-Gleichung

$$(i\hbar\partial_t - e\phi) a_0^> = \frac{1}{2m} (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A})^2 a_0^> - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} a_0^>. \quad (3.46)$$

Wie sehen nun die Korrekturen zur Pauli-Gleichung in höherer Ordnung aus? Gleichung (3.42b) bestimmt in der Ordnung $n = 3$ $a_2^<$ zu

$$a_2^< = \frac{1}{2m\sqrt{\hbar}} \vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) a_1^>, \quad (3.47)$$

was genau dieselbe Gleichung ist wie (3.43), nur mit den Indizes um eins verschoben. Aus Gleichung (3.42a) in der Ordnung $n = 4$ folgt also wieder die Pauli-Gleichung, diesmal für $a_1^>$. Allerdings liefert die Gleichung (3.42b) in der Ordnung $n = 4$ einen weiteren, von $a_1^<$ abhängenden Term,

$$a_3^< = \frac{1}{2m\sqrt{\hbar}} \vec{\sigma} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla} - e\vec{A}) a_2^> + \frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_t + e\phi) a_1^<, \quad (3.48)$$

so dass die Gleichung für $a_2^>$, die in der Ordnung $n = 5$ folgt, komplizierter wird und sich von der Pauli-Gleichung unterscheidet.

3.4.2. Nicht-relativistischer Grenzfall der Einstein-Klein-Gordon-Gleichung

Nachdem wir nun demonstriert haben, wie der WKB-Ansatz (3.5) bei Abwesenheit der Gravitation zu den bekannten Gleichungen führt, wol-

len wir uns dem gravitativ wechselwirkenden System zuwenden. Dazu betrachten wir zunächst ein Klein-Gordon-Feld in einer gekrümmten Raumzeit, welches über die einsteinschen Feldgleichungen,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (3.49)$$

einer Selbstwechselwirkung unterliegt. Die genaue Form des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ des Klein-Gordon-Feldes werden wir weiter unten betrachten. Das System aus Einstein-Gleichungen (3.49) und Klein-Gordon-Gleichung (3.6) ist auch unter dem Namen Einstein-Klein-Gordon-Gleichung bzw. -System bekannt.

Wir beschränken uns hier auf den Fall einer sphärisch-symmetrischen Metrik, die sich in der Form [98]

$$ds^2 = -e^{2A(t,r)} c^2 dt^2 + e^{2B(t,r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (3.50)$$

darstellen lässt. Die zugehörige Determinante ist

$$g = -c^2 e^{2(A+B)} r^4 \sin^2 \theta. \quad (3.51)$$

Wir wenden nun unseren Entwicklungsansatz (3.5) nicht nur auf das Feld ψ an, sondern entwickeln auch die Koeffizienten der Metrik in Potenzen von $\sqrt{\hbar}/c$:

$$e^{A(t,r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n A_n(t,r) \quad ; \quad A_0 \equiv 1 \quad (3.52a)$$

$$e^{B(t,r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n B_n(t,r) \quad ; \quad B_0 \equiv 1. \quad (3.52b)$$

Das hat für die weiteren Potenzen und Ableitungen, die im Folgenden auftreten werden, die Entwicklungen

$$\begin{aligned} e^{-A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n C_n, & e^{-B} - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n D_n, \\ e^{-A} \dot{B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n E_n, & e^{-B} A' &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n F_n, \\ e^{-2A} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n G_n, & e^{-2B} - 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n H_n, \\ e^{-2A} (\dot{A} - \dot{B}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n J_n, & e^{-2B} (A' - B') &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \right)^n K_n \end{aligned} \quad (3.53)$$

zur Folge, wobei die Koeffizienten bis zur zweiten Ordnung bestimmt sind durch

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1, & C_1 &= -A_1, & C_2 &= A_1^2 - A_2, \\
D_0 &= 0, & D_1 &= -B_1, & D_2 &= B_1^2 - B_2, \\
E_0 &= 0, & E_1 &= \dot{B}_1, & E_2 &= -(A_1 + B_1) \cdot B_1 + \dot{B}_2, \\
F_0 &= 0, & F_1 &= A'_1, & F_2 &= -(A_1 + B_1) A'_1 + A'_2, \\
G_0 &= 1, & G_1 &= -2A_1, & G_2 &= 3A_1^2 - 2A_2, \\
H_0 &= 0, & H_1 &= -2B_1, & H_2 &= 3B_1^2 - 2B_2, \\
J_0 &= 0, & J_1 &= \dot{A}_1 - \dot{B}_1, \\
& & J_2 &= -2A_1(\dot{A}_1 - \dot{B}_1) - A_1 \dot{A}_1 + B_1 \dot{B}_1 + \dot{A}_2 - \dot{B}_2, \\
K_0 &= 0, & K_1 &= A'_1 - B'_1, \\
& & K_2 &= -2B_1(A'_1 - B'_1) - A_1 A'_1 + B_1 B'_1 + A'_2 - B'_2.
\end{aligned}$$

Klein-Gordon-Gleichung Wir wollen nun zunächst die Klein-Gordon-Gleichung auf dem gekrümmten Hintergrund mit der Metrik (3.50) betrachten und bestimmen dazu als erstes den d'Alembert-Operator

$$\begin{aligned}
\Box &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \cdot) \\
&= e^{-2A} c^{-2} ((\dot{A} - \dot{B}) \partial_t - \partial_t^2) + e^{-2B} (A' - B') \partial_r \\
&\quad + (e^{-2B} - 1) \left(\frac{2}{r} \partial_r + \partial_r^2 \right) + \Delta,
\end{aligned} \tag{3.54}$$

wobei der Punkt Ableitungen nach t und der Strich Ableitungen nach r bezeichnet. Δ ist der dreidimensionale Laplace-Operator im flachen Raum. Dies können wir nun in die Klein-Gordon-Gleichung (3.6) einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
0 &= e^{-2A} c^{-2} ((\dot{A} - \dot{B}) \dot{\psi} - \ddot{\psi}) + e^{-2B} (A' - B') \psi' \\
&\quad + (e^{-2B} - 1) \left(\frac{2}{r} \psi' + \psi'' \right) + \Delta \psi - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Setzen wir den Entwicklungsansatz (3.5) für die Wellenfunktion ψ sowie den Ansatz (3.52) und (3.53) für die Metrikoeffizienten ein und schreiben die radiale Komponente des Laplace-Operators als $\Delta_r = 2/r \partial_r + \partial_r^2$,

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = & \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S\right) \frac{c^4}{\hbar^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n \left[\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{1}{\hbar} J_k (\dot{S} a_{n-k-4} + \dot{a}_{n-k-6}) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\hbar} G_k (\dot{S}^2 a_{n-k-2} - 2i\dot{S}\dot{a}_{n-k-4} - i\ddot{S}a_{n-k-4} - \ddot{a}_{n-k-6}) \\
& + K_k (iS' a_{n-k-2} + a'_{n-k-4}) \\
& \left. \left. + H_k (-S'^2 a_{n-k} + 2iS' a'_{n-k-2} + i(\Delta_r S) a_{n-k-2} + \Delta_r a_{n-k-4}) \right\} \right. \\
& \left. - (\vec{\nabla} S)^2 a_n + 2i(\vec{\nabla} S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} + i(\Delta S) a_{n-2} + \Delta a_{n-4} - \frac{m^2}{\hbar} a_{n-2} \right]. \quad (3.56)
\end{aligned}$$

Dies lässt sich noch weiter vereinfachen, berücksichtigt man, dass $H_0 = J_0 = K_0 = 0$. In jeder Ordnung n ist dann die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 = & \hbar(\vec{\nabla} S)^2 a_n + m^2 a_{n-2} - 2i\hbar(\vec{\nabla} S) \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} - i\hbar(\Delta S) a_{n-2} - \dot{S}^2 a_{n-2} \\
& + 2i\dot{S}\dot{a}_{n-4} + i\ddot{S}a_{n-4} - \hbar\Delta a_{n-4} + \ddot{a}_{n-6} - \sum_{k=1}^n \left[J_k (\dot{S} a_{n-k-4} + \dot{a}_{n-k-6}) \right. \\
& + G_k (\dot{S}^2 a_{n-k-2} - 2i\dot{S}\dot{a}_{n-k-4} - i\ddot{S}a_{n-k-4} - \ddot{a}_{n-k-6}) \\
& + K_k (i\hbar S' a_{n-k-2} + \hbar a'_{n-k-4}) \\
& \left. + H_k (-\hbar S'^2 a_{n-k} + 2i\hbar S' a'_{n-k-2} + i\hbar(\Delta_r S) a_{n-k-2} + \hbar\Delta_r a_{n-k-4}) \right] \quad (3.57)
\end{aligned}$$

zu betrachten. In niedrigster Ordnung, $n = 0$, erhalten wir auch hier wieder, dass S eine rein zeitabhängige Funktion ist, die Ordnung $n = 1$ ist damit trivial erfüllt. In Ordnung $n = 2$ erhalten wir, wie für die Klein-Gordon-Gleichung im flachen Raum, $\dot{S}^2 = m^2$ und wählen wieder die Lösung zu positiver Energie, $S = -mt$. Damit vereinfacht sich (3.57) weiter zu

$$\begin{aligned}
0 = & -i\hbar\dot{a}_{n-4} - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta a_{n-4} + \frac{\hbar}{2m} \ddot{a}_{n-6} \\
& - \frac{\hbar}{2m} \sum_{k=1}^n \left[G_k (m^2 a_{n-k-2} + 2im\dot{a}_{n-k-4} - \ddot{a}_{n-k-6}) \right. \\
& \left. + \hbar(K_k a'_{n-k-4} + H_k \Delta_r a_{n-k-4}) - J_k (ima_{n-k-4} - \dot{a}_{n-k-6}) \right]. \quad (3.58)
\end{aligned}$$

In Ordnung $n = 3$ folgt dann, dass $G_1 = 0$, was $A_1 = 0$ und $G_2 = -2A_2$ impliziert.

Schließlich folgt in Ordnung $n = 4$, wie schon zuvor im flachen Raum, aus (3.58) die Schrödingergleichung, nun allerdings mit einem zusätzlichen Potentialterm:

$$i\hbar\dot{a}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta a_0 + mUa_0. \quad (3.59)$$

Um zu zeigen, dass es sich um die SN-Gleichung handelt, müssen wir nun allerdings noch demonstrieren, dass das Potential $U = \hbar A_2$ auch die Poisson-Gleichung (1.2b) erfüllt. Dazu betrachten wir die einsteinschen Feldgleichungen.

Einstein-Gleichungen Für unseren Ansatz (3.50) einer sphärisch-symmetrischen Metrik sind die nicht verschwindenden Komponenten des Einstein-Tensors

$$G_{tt} = e^{2A} c^2 \left(\frac{1}{r^2} - e^{-2B} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2B'}{r} \right) \right) \quad (3.60a)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2B} + \frac{1}{r^2} + \frac{2A'}{r} \quad (3.60b)$$

$$G_{tr} = \frac{2\dot{B}}{r} \quad (3.60c)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2B} \left(A'^2 - A' B' + A'' + \frac{A' - B'}{r} \right) + \frac{r^2}{c^2} e^{-2A} (-\dot{B}^2 + \dot{A}\dot{B} - \ddot{B}) \quad (3.60d)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \quad (3.60e)$$

Zur Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors benötigen wir zunächst die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left((\partial^\lambda \psi)(\partial_\lambda \psi^*) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} |\psi|^2 \right) \sqrt{-g} \quad (3.61)$$

des Klein-Gordon-Feldes. Der Energie-Impuls-Tensor ist dann

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left[(\partial_\mu \psi)(\partial_\nu \psi^*) + (\partial_\mu \psi^*)(\partial_\nu \psi) \right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu} \left((\partial^\lambda \psi)(\partial_\lambda \psi^*) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} |\psi|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.62)$$

mit den folgenden nicht verschwindenden Komponenten:

$$T_{tt} = \frac{mc^4}{2} e^{2A} |\psi|^2 + \frac{\hbar^2 c^2}{2m} e^{2(A-B)} |\psi'|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} |\dot{\psi}|^2 \quad (3.63a)$$

$$T_{rr} = -\frac{mc^2}{2} e^{2B} |\psi|^2 + \frac{\hbar^2}{2m} |\psi'|^2 + \frac{\hbar^2}{2m c^2} e^{2(B-A)} |\dot{\psi}|^2 \quad (3.63b)$$

$$T_{tr} = \frac{\hbar^2}{2m} (\dot{\psi} \psi'^* + \dot{\psi}'^* \psi) \quad (3.63c)$$

$$T_{\theta\theta} = -\frac{mc^2}{2} r^2 |\psi|^2 - \frac{\hbar^2 r^2}{2m} e^{-2B} |\psi'|^2 + \frac{\hbar^2 r^2}{2m c^2} e^{-2A} |\dot{\psi}|^2 \quad (3.63d)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta}. \quad (3.63e)$$

Wir wollen nun sowohl die Komponenten des Einstein-Tensors als auch die des Energie-Impuls-Tensors, bzw. der rechten Seite $8\pi G T_{\mu\nu}/c^4$ der Einstein-Gleichungen, mit Hilfe der Ansätze (3.5) für die Wellenfunktion und (3.52) für die Metrikkoeffizienten entwickeln und Ordnung für Ordnung die Einstein-Gleichungen betrachten.¹² Die Gleichungen, die wir dabei erhalten, werden allerdings sehr komplex. Die Betrachtung wurde deshalb mittels der Software MATHEMATICA vorgenommen. Dabei verwenden wir bereits das aus der Analyse der Klein-Gordon-Gleichung erhaltene Resultat, dass $A_1 = 0$ ist, und nutzen die in niedrigeren Ordnungen erhaltenen Ergebnisse aus, um die Gleichungen höherer Ordnung zu vereinfachen. Die Ergebnisse der Entwicklung des Einstein- und Energie-Impuls-Tensors mit MATHEMATICA listen wir im Anhang G auf. Sie lassen sich in den Ordnungen $n = 0$ bis $n = 3$ wie folgt zusammenfassen:¹³

$n = 0$: Die tt -Komponente liefert $(rB_1)' = 0$.

$n = 1$: Die tt -Komponente liefert

$$\frac{2\hbar}{r^2} \left(\frac{3}{2} B_1^2 + (rB_2)' \right) = 8\pi G m |a_0|^2. \quad (3.64)$$

$n = 2$: Die tt -Komponente liefert

$$\frac{2\hbar}{r^2} (-4B_1^3 - 3rB_1B_2' + (rB_3)') = 8\pi G m (a_1^* a_0 + a_0^* a_1). \quad (3.65)$$

¹²Da $G_{\mu\nu}$ von der Ordnung c und $T_{\mu\nu}$ von der Ordnung c^5 ist, vergleichen wir $G_{\mu\nu}/c$ und $8\pi G T_{\mu\nu}/c^5$.

¹³Die nicht erwähnten Komponenten sind in der jeweiligen Ordnung trivial erfüllt.

Die rr - und $\theta\theta$ -Komponenten liefern beide $B_1 = 0$, woraufhin die tr -Komponente, $B_1' = 0$, trivial wird. Auch die Gleichung in Ordnung $n = 0$ ist damit trivial erfüllt. Die Gleichungen (3.64) und (3.65) vereinfachen sich zu

$$(rB_2)' = \frac{4\pi Gmr^2}{\hbar} |a_0|^2 \quad (3.66)$$

$$(rB_3)' = \frac{4\pi Gmr^2}{\hbar} (a_1 a_0^* + a_0 a_1^*). \quad (3.67)$$

$n = 3$: Die tt -Komponente liefert

$$4(A_2 - B_2)(rB_2)' + B_2^2 - 2rB_2B_2' + (rB_4)' = \frac{4\pi Gr^2}{\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |a_0'|^2 + \frac{i\hbar}{2} (a_0^* \dot{a}_0 - \dot{a}_0^* a_0) + m\hbar (A_2 |a_0|^2 + |a_1|^2 + a_2^* a_0 + a_0^* a_2) \right]. \quad (3.68)$$

Die rr -Komponente liefert

$$B_2 = rA_2' \quad (3.69)$$

und die $\theta\theta$ -Komponente ist nur die Ableitung der rr -Komponente. Für die tr -Komponente erhalten wir

$$\frac{2}{r} \dot{B}_2 = 4\pi iG (a_0^* a_0' - a_0 a_0'^*). \quad (3.70)$$

Definieren wir nun, wie oben für die Klein-Gordon-Gleichung, das Potential $U = \hbar A_2$ und entsprechend für den räumlichen Metrikkoeffizienten $W = \hbar B_2$, und führen wir weiterhin die Wahrscheinlichkeitsstromdichte (bzw. deren radiale Komponente)

$$j_{\text{KG}} = \frac{i\hbar}{2m} (a_0'^* a_0 - a_0^* a_0') \quad (3.71)$$

ein, so erhalten wir schließlich den folgenden Satz von Gleichungen:

$$W = rU' \quad (3.72a)$$

$$(rW)' = 4\pi Gmr^2 |a_0|^2 \quad (3.72b)$$

$$\dot{W} = -4\pi Gmr j. \quad (3.72c)$$

Dies sind die Gleichungen, die nur von den Potentialen U und W sowie von a_0 abhängen. Die zusätzlichen Gleichungen (3.67) und (3.68) schränken lediglich die Koeffizienten B_3 und B_4 sowie die nächste Ord-

nung der Wellenfunktion a_2 in Abhängigkeit der Lösung für U , W und a_0 weiter ein.

Wir wollen nun zeigen, dass das Gleichungssystem (3.72) zur Poisson-Gleichung (1.2b) äquivalent ist. Setzen wir Gleichung (3.72a) für W in (3.72b) ein, so erhalten wir bereits die gewünschte Poisson-Gleichung,

$$4\pi G m |a_0|^2 = U'' + \frac{2}{r}U' = \Delta U. \quad (3.73)$$

Wir müssen also nur noch zeigen, dass die beiden anderen Gleichungen keine weiteren Einschränkungen liefern. Gleichung (3.72b) bestimmt allerdings lediglich das Potential W . Fordern wir, dass es im Unendlichen verschwindet, so ist es durch (3.72b) bereits eindeutig bestimmt. Die Integration dieser Gleichung führt zu

$$W(t, r) = \frac{4\pi G m}{r} \int_0^r \tilde{r}^2 |a_0(t, \tilde{r})|^2 d\tilde{r}. \quad (3.74)$$

Auch die dritte Gleichung (3.72c) ist konsistent mit dem SN-System. Um dies zu zeigen, verwendet man die Kontinuitätsgleichung,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \partial_t |a_0|^2 = 0, \quad (3.75)$$

die unmittelbar aus der Schrödingergleichung folgt. Im sphärisch-symmetrischen Fall ist die Divergenz dabei durch

$$\operatorname{div} \vec{j} = j' + \frac{2}{r} j \quad (3.76)$$

gegeben. Leiten wir nun das Ergebnis (3.74) nach der Zeit ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{W} &= 4\pi G m r \int_0^r \frac{\tilde{r}^2}{r^2} \partial_t |a_0(t, \tilde{r})|^2 d\tilde{r} \\ &= -4\pi G m r \int_0^1 x^2 \operatorname{div} \vec{j}(t, xr) dx \\ &= -G m r \int_{B_{\mathbb{R}^3}} \operatorname{div} \vec{j}(t, xr) dV \\ &= -G m r \int_{\partial B_{\mathbb{R}^3}} j(t, xr) dS \\ &= -4\pi G m r j(t, r), \end{aligned} \quad (3.77)$$

wobei $B_{\mathbb{R}^3}$ die Einheitskugel bezeichnet und $\partial B_{\mathbb{R}^3}$ ihren Rand. Wir haben

dabei ausgenutzt, dass \vec{j} sphärisch-symmetrisch ist. Gleichung (3.72c) folgt also schon aus den übrigen Gleichungen.

3.4.3. Nicht-relativistischer Grenzfall der Einstein-Dirac-Gleichung

Zu guter Letzt wollen wir uns der an die Einstein-Gleichungen gekoppelten Dirac-Gleichung, auch als Einstein-Dirac-Gleichung bezeichnet, widmen. Im Grunde können wir dabei wie beim Einstein-Klein-Gordon-System verfahren. Allerdings lässt die Dirac-Gleichung, die Teilchen mit Spin beschreibt, sphärisch-symmetrische Einteilchen-Lösungen prinzipiell nicht zu, was in Widerspruch zu unserem Ansatz einer sphärisch-symmetrischen Metrik steht. Um diesen dennoch konsistent verwenden zu können, werden wir an geeigneter Stelle eine Mittelung über alle Spinrichtungen vornehmen.

Zunächst betrachten wir allerdings die Dirac-Gleichung

$$\left(D - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi = 0. \quad (3.78)$$

Wir orientieren uns dabei an Finster u. a. [34] (basierend auf Finster [33]) und schreiben den Dirac-Operator als

$$D = i\Gamma^\mu \partial_\mu + \frac{i}{2} \nabla_\mu \Gamma^\mu, \quad (3.79)$$

wobei ∇ die kovariante Ableitung bezeichnet und die Γ^μ eine Darstellung der Raumzeit-abhängigen Dirac-Matrizen liefern, welche die Clifford-Algebra

$$\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = -2g_{\mu\nu} \quad (3.80)$$

erfüllen. Die hier gewählte Darstellung ist die Folgende:

$$\Gamma^t = e^{-A} c^{-1} \gamma^0 \quad (3.81a)$$

$$\Gamma^r = e^{-B} (\gamma^1 \cos\theta + \gamma^2 \sin\theta \cos\varphi + \gamma^3 \sin\theta \sin\varphi) \quad (3.81b)$$

$$\Gamma^\theta = \frac{1}{r} (-\gamma^1 \sin\theta + \gamma^2 \cos\theta \cos\varphi + \gamma^3 \cos\theta \sin\varphi) \quad (3.81c)$$

$$\Gamma^\varphi = \frac{1}{r \sin\theta} (-\gamma^2 \sin\varphi + \gamma^3 \cos\varphi). \quad (3.81d)$$

Dabei haben wir für die Metrik wie im Falle der Klein-Gordon-Gleichung die sphärisch-symmetrische Form (3.50) angesetzt. Die Herleitung des Dirac-Operators (3.79) wird im Anhang E nachvollzogen. Mit der Dar-

stellung (3.81) der Dirac-Matrizen bestimmen wir nun den Dirac-Operator. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \Gamma^\mu &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \Gamma^\mu) \\
&= \underbrace{\dot{B} \Gamma^t}_{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g} \Gamma^t)} + \underbrace{\left(A' + \frac{2}{r} \right) \Gamma^r}_{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} \Gamma^r)} + \underbrace{\left(\cot \theta \Gamma^\theta - \frac{e^B}{r} \Gamma^r \right)}_{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\theta (\sqrt{-g} \Gamma^\theta)} \\
&\quad - \underbrace{\frac{\gamma^2 \cos \varphi + \gamma^3 \sin \varphi}{r \sin \theta}}_{\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\varphi (\sqrt{-g} \Gamma^\varphi)} \\
&= \dot{B} \Gamma^t + \left(A' + \frac{2}{r} \right) \Gamma^r - \frac{e^B}{r} \Gamma^r \\
&\quad - \frac{1}{r \sin \theta} (\gamma^1 \cos \theta \sin \theta + (1 - \cos^2 \theta) (\gamma^2 \cos \varphi + \gamma^3 \sin \varphi)) \\
&= \dot{B} \Gamma^t + \left(A' + \frac{2}{r} (1 - e^B) \right) \Gamma^r. \tag{3.82}
\end{aligned}$$

Der Dirac-Operator lautet also

$$\mathcal{D} = i \Gamma^t \left(\partial_t + \frac{\dot{B}}{2} \right) + i \Gamma^r \left(\partial_r + \frac{A'}{2} + \frac{1 - e^B}{r} \right) + i \Gamma^\theta \partial_\theta + i \Gamma^\varphi \partial_\varphi. \tag{3.83}$$

Jetzt verwenden wir wie zuvor die Entwicklungen (3.5) für die Wellenfunktion ψ sowie (3.52) und (3.53) für die Metrikoeffizienten und setzen sie in die Dirac-Gleichung (3.78) mit (3.83) ein. Analog zu den Matrizen $\alpha^k = \gamma^0 \gamma^k$ im Falle der Dirac-Gleichung im flachen Raum führen wir die Matrizen

$$\tilde{\alpha}^r = \gamma^0 \gamma^1 \cos \theta + \gamma^0 \gamma^2 \sin \theta \cos \varphi + \gamma^0 \gamma^3 \sin \theta \sin \varphi \tag{3.84a}$$

$$\tilde{\alpha}^\theta = -\gamma^0 \gamma^1 \sin \theta + \gamma^0 \gamma^2 \cos \theta \cos \varphi + \gamma^0 \gamma^3 \cos \theta \sin \varphi \tag{3.84b}$$

$$\tilde{\alpha}^\varphi = -\gamma^0 \gamma^2 \sin \varphi + \gamma^0 \gamma^3 \cos \varphi \tag{3.84c}$$

ein. Außerdem definieren wir die rotierten Pauli-Matrizen

$$\tilde{\sigma}^r = \sigma^1 \cos \theta + \sigma^2 \sin \theta \cos \varphi + \sigma^3 \sin \theta \sin \varphi \tag{3.85a}$$

$$\tilde{\sigma}^\theta = -\sigma^1 \sin \theta + \sigma^2 \cos \theta \cos \varphi + \sigma^3 \cos \theta \sin \varphi \tag{3.85b}$$

$$\tilde{\sigma}^\varphi = -\sigma^2 \sin \varphi + \sigma^3 \cos \varphi. \tag{3.85c}$$

Multiplizieren wir die Dirac-Gleichung von links mit $\beta = \gamma^0$, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 = \exp\left(\frac{ic^2}{\hbar} S\right) \frac{c^2}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\hbar}}{c}\right)^n & \left[-\frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{-A} \dot{S} a_{n-1} + \frac{i}{\sqrt{\hbar}} e^{-A} \dot{a}_{n-3} \right. \\
& + \frac{i}{2\sqrt{\hbar}} e^{-A} \dot{B} a_{n-3} - \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} S) a_n - (e^{-B} - 1) \tilde{\alpha}^r S' a_n + i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} \\
& + i(e^{-B} - 1) \tilde{\alpha}^r a'_{n-2} + \frac{i}{2} e^{-B} A' \tilde{\alpha}^r a_{n-2} + \frac{i}{r} (e^{-B} - 1) \tilde{\alpha}^r a_{n-2} \\
& \left. - \beta \frac{m}{\sqrt{\hbar}} a_{n-1} \right], \tag{3.86}
\end{aligned}$$

woraus unter Verwendung von (3.53)

$$\begin{aligned}
0 = \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} S) a_n + \beta m a_{n-1} - i \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} \\
+ \sum_{k=0}^n & \left[C_k \dot{S} a_{n-k-1} - i C_k \dot{a}_{n-k-3} - \frac{i}{2} E_k a_{n-k-3} + \sqrt{\hbar} D_k \tilde{\alpha}^r S' a_{n-k} \right. \\
& \left. - i \sqrt{\hbar} D_k \tilde{\alpha}^r a'_{n-k-2} - \frac{i \sqrt{\hbar}}{2} F_k \tilde{\alpha}^r a_{n-k-2} - \frac{i \sqrt{\hbar}}{r} D_k \tilde{\alpha}^r a_{n-k-2} \right] \tag{3.87} \\
= \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} S) a_n + \beta m a_{n-1} + \dot{S} a_{n-1} - i \sqrt{\hbar} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2} - i \dot{a}_{n-3} \\
+ \sum_{k=1}^n & \left[\sqrt{\hbar} D_k \tilde{\alpha}^r S' a_{n-k} + C_k \dot{S} a_{n-k-1} - i \sqrt{\hbar} D_k \tilde{\alpha}^r a'_{n-k-2} \right. \\
& \left. - \frac{i \sqrt{\hbar}}{2} F_k \tilde{\alpha}^r a_{n-k-2} - \frac{i \sqrt{\hbar}}{r} D_k \tilde{\alpha}^r a_{n-k-2} - i C_k \dot{a}_{n-k-3} - \frac{i}{2} E_k a_{n-k-3} \right] \tag{3.88}
\end{aligned}$$

für jede Ordnung n folgt.

Wie zuvor folgt in Ordnung $n = 0$, dass $\vec{\nabla} S = 0$, also S eine rein zeitabhängige Funktion ist, und in Ordnung $n = 1$ erhalten wir wie im flachen Raum $(\beta m + \dot{S}) a_0 = 0$. Wieder teilen wir den vier-komponentigen Spinor $a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, a_{n,4})$ in zwei zwei-komponentige Spinoren $a_n^> = (a_{n,1}, a_{n,2})$ und $a_n^< = (a_{n,3}, a_{n,4})$ und wählen $a_0^< \equiv 0$, so dass $S = -mt$. Wie im flachen Hintergrund vereinfacht sich (3.88) wieder zu zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 = i \sqrt{\hbar} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} a_{n-2}^< + i \dot{a}_{n-3}^> + \sum_{k=1}^n & \left[m C_k a_{n-k-1}^> \right. \\
& + i \sqrt{\hbar} D_k \tilde{\sigma}^r a_{n-k-2}^< + \frac{i \sqrt{\hbar}}{2} \left(F_k + \frac{2}{r} D_k \right) \tilde{\sigma}^r a_{n-k-2}^< \\
& \left. + i C_k \dot{a}_{n-k-3}^> + \frac{i}{2} E_k a_{n-k-3}^> \right] \tag{3.89a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n-1}^{\leftarrow} = & -\frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}a_{n-2}^{\rightarrow} - \frac{i}{2m}\dot{a}_{n-3}^{\leftarrow} - \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2}C_k a_{n-k-1}^{\leftarrow} \right. \\
& + \frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}D_k\tilde{\sigma}^r a_{n-k-2}^{\rightarrow\prime} + \frac{i\sqrt{\hbar}}{4m}\left(F_k + \frac{2}{r}D_k\right)\tilde{\sigma}^r a_{n-k-2}^{\rightarrow} \\
& \left. + \frac{i}{2m}C_k \dot{a}_{n-k-3}^{\leftarrow} + \frac{i}{4m}E_k a_{n-k-3}^{\leftarrow} \right]. \tag{3.89b}
\end{aligned}$$

In der Ordnung $n = 2$ lautet die erste Gleichung $0 = mC_1 a_0^{\rightarrow}$, woraus $C_1 = 0$ und damit $A_1 = 0$, $C_2 = -A_2$ sowie $F_1 = 0$ folgen. Die zweite Gleichung liefert

$$a_1^{\leftarrow} = -\frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}a_0^{\rightarrow}. \tag{3.90}$$

Dies können wir nun in die erste Gleichung in Ordnung $n = 3$ einsetzen und erhalten

$$0 = i\sqrt{\hbar}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\left(-\frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}a_0^{\rightarrow}\right) + i\dot{a}_0^{\rightarrow} - mA_2 a_0^{\rightarrow}. \tag{3.91}$$

Da für beliebige Vektoren \vec{u} gilt, dass $(\vec{\sigma}\cdot\vec{u})^2 = \vec{u}^2$ ist, folgt daraus für die Komponente a_0^{\rightarrow} die Schrödingergleichung mit Potential $U = \hbar A_2$:

$$i\hbar\dot{a}_0^{\rightarrow} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta a_0^{\rightarrow} + mU a_0^{\rightarrow}. \tag{3.92}$$

Werfen wir einen kurzen Blick auf die nächsthöhere Ordnung, so müssen wir die zweite Gleichung in Ordnung $n = 3$,

$$a_2^{\leftarrow} = -\frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}a_1^{\rightarrow} + \frac{i\sqrt{\hbar}}{2m}B_1\tilde{\sigma}^r\left(a_0^{\rightarrow\prime} + \frac{1}{r}a_0^{\rightarrow}\right), \tag{3.93}$$

in die erste Gleichung in Ordnung $n = 4$ einsetzen. Anders als im flachen Raum, wo wir auch für a_1^{\rightarrow} wieder die Pauli-Gleichung erhalten haben, ist hier jedoch die Gleichung für a_1^{\rightarrow} eine andere.

Einstein-Gleichungen Als nächstes wollen wir, wie für das Einstein-Klein-Gordon-System, die Einstein-Gleichungen betrachten, um zu zeigen, dass das in der Schrödingergleichung (3.92) auftretende Potential die Poisson-Gleichung der SN-Gleichung erfüllt. Die Lagrange-Dichte

der Dirac-Gleichung ist

$$\mathcal{L} = \hbar c \bar{\psi} \left(\mathcal{D} - \frac{mc}{\hbar} \right) \psi \sqrt{-g}, \quad (3.94)$$

und ihre Variation bezüglich der Metrik $g^{\mu\nu}$ „on-shell“ (also unter der Annahme, dass die Dirac-Gleichung erfüllt ist) ergibt

$$\delta \mathcal{L} = \hbar c \operatorname{Re} \left[\bar{\psi} \left(i(\delta \Gamma^\mu) \partial_\mu + \delta Y \right) \psi \sqrt{-g} \right], \quad (3.95)$$

wobei der Ausdruck Y im Anhang E definiert wird. Nach Finster u. a. [34] haben wir

$$\operatorname{Re} (\bar{\psi} \delta Y \psi) = \frac{1}{16} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\delta g_{\nu\lambda}) \operatorname{Tr} \left(\Gamma^\lambda \partial_\mu \Gamma_\rho \right) \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma_\sigma \psi \quad (3.96a)$$

$$\delta \Gamma^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\delta g_{\nu\lambda}) \Gamma^\lambda \quad (3.96b)$$

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} \delta g^{\lambda\sigma}, \quad (3.96c)$$

womit der Energie-Impuls-Tensor sich – wie in (3.62) – zu

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\bar{\psi} \left(i\Gamma_\nu \partial_\mu + i\Gamma_\mu \partial_\nu \right) \psi \right] \\ & + \frac{\hbar c}{8} \epsilon^{\alpha\lambda\rho\beta} \left[g_{\mu\lambda} \operatorname{Tr} \left(\Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\rho \right) + g_{\nu\lambda} \operatorname{Tr} \left(\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma_\rho \right) \right] \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma_\beta \psi \end{aligned} \quad (3.97)$$

ergibt. Man beachte, dass (3.96b) nur bis auf lokale Lorentz-Transformationen gilt. Allgemein muss $\delta \Gamma^\mu$

$$\delta \{ \Gamma^\mu, \Gamma^\nu \} = -\delta g^{\mu\nu} \quad \Rightarrow \quad \{ \delta \Gamma^\mu, \Gamma^\nu \} = -\delta g^{\mu\nu} \quad (3.98)$$

erfüllen, wozu (3.96b) eine spezielle Lösung darstellt.

Die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors sind im Anhang F berechnet. Bis einschließlich der Ordnung c^2 lauten sie¹⁴:

$$T_{tt} = -\hbar c \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger (-ie^A c) \dot{\psi} \right] \quad (3.99a)$$

$$T_{rr} = -\hbar c \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger (ie^B \tilde{\alpha}^r) \psi' \right] \quad (3.99b)$$

$$T_{tr} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger (-ie^A c) \psi' + \psi^\dagger (ie^B \tilde{\alpha}^r) \dot{\psi} \right] \quad (3.99c)$$

¹⁴Man beachte, dass $\dot{\psi}$ und ψ' von der Ordnung c^2 sind und B sowie A' von der Ordnung c^{-1} . Da wir die durch c dividierten Einstein-Gleichungen, also $T_{\mu\nu}/c^5$, betrachten, können wir in der Reihenentwicklung bis zur Ordnung c^{-3} , bzw. $n = 3$, gehen.

$$T_{t\theta} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \tilde{\alpha}^\theta \right) \dot{\psi} \right] + \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99d)$$

$$T_{r\theta} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \tilde{\alpha}^\theta \right) \psi' \right] + \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99e)$$

$$T_{t\varphi} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \sin \theta \tilde{\alpha}^\varphi \right) \dot{\psi} \right] + \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99f)$$

$$T_{r\varphi} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \sin \theta \tilde{\alpha}^\varphi \right) \psi' \right] + \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99g)$$

$$T_{\theta\theta} = -\hbar c \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \tilde{\alpha}^\theta \right) \partial_\theta \psi \right] = \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99h)$$

$$T_{\theta\varphi} = -\frac{\hbar c}{2} \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \tilde{\alpha}^\theta \right) \partial_\varphi \psi + \psi^\dagger \left(i r \sin \theta \tilde{\alpha}^\varphi \right) \partial_\theta \psi \right] = \mathcal{O}(c^1) \quad (3.99i)$$

$$T_{\varphi\varphi} = -\hbar c \operatorname{Re} \left[\psi^\dagger \left(i r \sin \theta \tilde{\alpha}^\varphi \right) \partial_\varphi \psi \right] = \mathcal{O}(c^1). \quad (3.99j)$$

Wie für die Klein-Gordon-Gleichung entwickeln wir wieder $8\pi G T_{\mu\nu}/c^5$ mit Hilfe von MATHEMATICA und vergleichen Ordnung für Ordnung mit der Entwicklung des durch c dividierten Einstein-Tensors. Wir verwenden dabei bereits die Beziehung $A_1 = 0$, die aus der Dirac-Gleichung folgt. In den Ordnungen $n = 0$ bis $n = 3$ erhalten wir:¹⁵

$n = 0$: Die tt -Komponente liefert $(rB_1)' = 0$.

$n = 1$: Die tt -Komponente liefert

$$\frac{2\hbar}{r^2} \left(\frac{3}{2} B_1^2 + (rB_2)' \right) = 8\pi G m |a_0^\rangle|^2. \quad (3.100)$$

$n = 2$: Die tt -Komponente liefert

$$\frac{2\hbar}{r^2} (-4B_1^3 - 3rB_1B_2' + (rB_3)') = 8\pi G m \left(a_1^{\rangle\ddagger} a_0^\rangle + a_0^{\rangle\ddagger} a_1^\rangle \right). \quad (3.101)$$

Die rr -Komponenten liefert $B_1 = 0$, womit die $\theta\theta$ -Komponente $B_1' = 0$ ebenso wie die tr -Komponente $\dot{B}_1 = 0$ trivial werden. Auch die Gleichung in Ordnung $n = 0$ ist damit trivial erfüllt. Die Gleichungen (3.100) und (3.101) vereinfachen sich zu

$$(rB_2)' = \frac{4\pi G m r^2}{\hbar} |a_0^\rangle|^2 \quad (3.102)$$

$$(rB_3)' = \frac{4\pi G m r^2}{\hbar} \left(a_1^{\rangle\ddagger} a_0^\rangle + a_0^{\rangle\ddagger} a_1^\rangle \right). \quad (3.103)$$

¹⁵Wie bei der Klein-Gordon-Gleichung sind die nicht erwähnten Komponenten in der jeweiligen Ordnung trivial erfüllt.

$n = 3$: Die tt -Komponente liefert

$$4(A_2 - B_2)(rB_2)' + B_2^2 - 2rB_2B_2' + (rB_4)' = \frac{4\pi Gr^2}{\hbar^2} \left[\frac{i\hbar}{2} (a_0^{>\dagger} \dot{a}_0^> - \dot{a}_0^{>\dagger} a_0^>) + m\hbar (A_2 |a_0^>|^2 + |a_1|^2 + a_2^{>\dagger} a_0^> + a_0^{>\dagger} a_2^>) \right]. \quad (3.104)$$

Die rr -Komponente liefert

$$B_2 = r A_2' \quad (3.105)$$

und die $\theta\theta$ -Komponente ist nur die Ableitung der rr -Komponente. Für die tr -Komponente erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \dot{B}_2 &= 2\pi i G (a_0^{>\dagger} a_0^{>' } - a_0^{>' \dagger} a_0^>) - \frac{8\pi G m}{\sqrt{\hbar}} \operatorname{Re} (a_0^{>\dagger} \tilde{\sigma}^r a_1^<) \\ &= 2\pi i G (a_0^{>\dagger} a_0^{>' } - a_0^{>' \dagger} a_0^>) + 4\pi G \operatorname{Re} [a_0^{>\dagger} (i\vec{\nabla} + \vec{\sigma} \times \vec{\nabla})_r a_0^>] \\ &= 4\pi i G (a_0^{>\dagger} a_0^{>' } - a_0^{>' \dagger} a_0^>) + 4\pi G \operatorname{Re} [a_0^{>\dagger} (\vec{\sigma} \times \vec{\nabla})_r a_0^>], \quad (3.106) \end{aligned}$$

wobei die $\tilde{\sigma}^r$ wie in (3.85) definiert sind. Dabei haben wir in der zweiten Zeile von (3.90) Gebrauch gemacht, um $a_1^<$ durch $a_0^>$ auszudrücken. Für die $t\theta$ - und $t\varphi$ -Komponenten bekommen wir

$$0 = \operatorname{Re} (a_0^{>\dagger} \tilde{\sigma}^\theta a_1^<) \Leftrightarrow 0 = \operatorname{Re} [a_0^{>\dagger} (i\vec{\nabla} + \vec{\sigma} \times \vec{\nabla})_\theta a_0^>] \quad (3.107a)$$

$$0 = \operatorname{Re} (a_0^{>\dagger} \tilde{\sigma}^\varphi a_1^<) \Leftrightarrow 0 = \operatorname{Re} [a_0^{>\dagger} (i\vec{\nabla} + \vec{\sigma} \times \vec{\nabla})_\varphi a_0^>]. \quad (3.107b)$$

Da wir aber nur sphärisch-symmetrische Situationen betrachten wollen, müssen wir nun über alle Spinrichtungen mitteln, um einen sphärisch-symmetrischen Energie-Impuls-Tensor zu erhalten. Das hat zur Folge, dass $\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}$ in den Gleichungen (3.106) und (3.107) verschwindet und (3.107) äquivalent ist zu der Forderung, dass die θ - und φ -Komponenten des Wahrscheinlichkeitsstroms

$$\vec{j}_{\text{Dirac}} = \frac{i\hbar}{2m} \left((\vec{\nabla} a_0^{>\dagger}) a_0^> - a_0^{>\dagger} \vec{\nabla} a_0^> \right) \quad (3.108)$$

verschwinden.

Definieren wir nun die Potentiale $U = \hbar A_2$ und $W = \hbar B_2$, wie bereits zuvor für das Klein-Gordon-Feld, und bezeichnen die radiale Komponente des Wahrscheinlichkeitsstroms (3.108) mit j , so erhalten wir exakt denselben Satz von Gleichungen (3.72) wie für das Einstein-Klein-

Gordon-System,

$$U = rV' \quad (3.109)$$

$$(rU)' = 4\pi Gm^2 r^2 |a_0^>|^2 \quad (3.110)$$

$$\dot{U} = -4\pi Gm^2 rj, \quad (3.111)$$

zusammen mit den Gleichungen (3.103) und (3.104).

Wie schon für das Einstein-Klein-Gordon-System demonstriert, führt dieser Satz von Gleichungen auf die Poisson-Gleichung, so dass wir feststellen können, dass sowohl das Einstein-Klein-Gordon-System als auch das Einstein-Dirac-System im nicht-relativistischen Grenzfall (im Sinne unserer WKB-ähnlichen Reihenentwicklung) auf die SN-Gleichung führen. Dies zeigt zugleich den Übergang der semiklassischen Einstein-Gleichungen in die SN-Gleichung im nicht-relativistischen Grenzfall, da der Energie-Impuls-Tensor der klassischen Feldtheorie gerade dem Erwartungswert des Quantenoperators im Einteilchensektor entspricht.

Der Versuch einer ähnlichen Analyse, wie ich sie hier dargestellt habe, wird auch schon in [49, 94] unternommen, ist dort allerdings unvollständig (und zum Teil fehlerhaft) dargestellt. Eine frühere Arbeit von de Oliveira u. Tiomno [28], die sich der Approximation nach Foldy u. Wouthuysen [35] bedient, findet zwar ebenfalls die Schrödingergleichung mit einem Gravitationspotentialterm als nicht-relativistischen Grenzfall der Klein-Gordon-Gleichung, legt aber nicht dar, dass dieses newtonsche Gravitationspotential genau die Form der SN-Gleichung hat, also einer Poisson-Gleichung genügt, auf deren rechter Seite das Betragsquadrat der Wellenfunktion als Quelle des Gravitationspotentials steht.

3.4.4. Sind Gravitation und Elektromagnetismus verschieden?

Natürlich ließe sich genau dieselbe Analyse auch für das gekoppelte System aus Klein-Gordon- bzw. Dirac- und den Maxwell-Gleichungen wiederholen. Genau wie für die Gravitation erhielte man einen nichtlinearen Term – dieselbe Nichtlinearität wie für die SN-Gleichung, lediglich mit Gm^2 durch $-e^2/(4\pi\epsilon_0)$ ersetzt – in der Schrödingergleichung, der die elektromagnetische Selbstwechselwirkung beschreibt. Im Unterschied zur Gravitation wäre dieser Term allerdings nicht klein, sondern ginge mit deutlichen Auswirkungen – beispielsweise auf das Spektrum des Wasserstoffatoms – einher. Dies bemerkte auch schon Schrödinger [93] in einer frühen Arbeit. Er stellt fest, dass der Selbstwechselwirkungsterm

aus Gründen der Konsistenz im Grunde nötig wäre und „die *Geschlossenheit* der Feldgleichungen [...] somit in eigenartiger Weise durchbrochen“ scheine. Die Quantenelektrodynamik umgeht diese Problematik, indem Selbstwechselwirkungen zunächst durch Normalordnung ausgeschlossen werden, um sie anschließend in der Störreihenentwicklung Ordnung für Ordnung wieder hinzuzufügen. Dieser Ansatz scheint aber vor allem durch seinen Erfolg gerechtfertigt und nicht etwa durch ein ihm zugrunde liegendes tieferes Verständnis der Theorie.

Die Frage, ob und inwiefern Elektrodynamik und Gravitation sich in ihrem nicht-relativistischen Grenzfall unterscheiden, lässt sich auf zweierlei Weise beantworten: Die erste, offensichtliche Antwortmöglichkeit ist: Gravitation ist anders – und zwar in dem Sinne, den Carlip [20] zur Diskussion stellt, wenn er fragt, ob Quantengravitation notwendig sei. Im Unterschied zur Elektrodynamik – so die Idee – ist für die Gravitation die semiklassische Theorie (1.1) nicht nur eine Näherung sondern fundamental. Die SN-Gleichung bietet einen Ansatzpunkt, dies experimentell zu testen. Wie ich in Abschnitt 3.1 ausgeführt habe, ist dieser Ansatz mit einer kontroversen Debatte verbunden, bei allen Bedenken muss aber letztlich das Experiment die Frage beantworten, ob die Gravitation zu quantisieren ist oder nicht.

Eine alternative, wenn auch etwas ungewöhnliche Antwort gibt Barut, der in einer ganzen Reihe von Artikeln die Ansicht propagiert, dass auch für die Elektrodynamik Selbstwechselwirkungsterme zu berücksichtigen sind (vgl. [6] für eine Zusammenfassung und [7–10] für die weitere Lektüre). Barut betrachtet dazu eine nichtlineare Dirac-Gleichung, aus welcher sich seiner Aussage nach auch QED-Effekte wie die Lamb-Verschiebung, spontane Emission und das anomale magnetische Moment ableiten lassen. Auch für das Wasserstoffatom erhalte man das richtige Spektrum, so Barut, wenn man auf richtige Weise berücksichtige, dass ein Teil der Selbstenergie bereits im gemessenen Wert für Masse und Ladung des Elektrons steckt. So kontrovers diese Behauptung sein mag, scheint doch die Frage berechtigt, weshalb es aus physikalischer Sicht einen Unterschied machen sollte, ob die Selbstwechselwirkung in der QED nachträglich und Ordnung für Ordnung oder aber bereits vor der Quantisierung auf klassischer Ebene berücksichtigt wird.

3.5. Die SN-Gleichung für Vielteilchensysteme

Im vorherigen Abschnitt haben wir gezeigt, dass sich die SN-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall aus der gravitierenden Klein-Gordon- und Dirac-Gleichung ebenso ableiten lässt, wie es in der in Lehrbüchern üblichen Herleitung im flachen Raum für die Schrödingergleichung getan wird. Allerdings handelt es sich dabei um die Herleitung einer *Ein*teilchengleichung. Als Kandidaten für einen Test der SN-Gleichung im Experiment, der große Massen erfordert, kommen vor allem Moleküle in Frage – also Vielteilchensysteme.

Im Falle der linearen Schrödingergleichung ist die Situation einfach zu behandeln: Für ein System aus N Teilchen mit Massen m_i und Koordinaten \vec{r}_i lautet die N -Teilchen-Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\Psi}_N(\vec{r}^N) = -\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\vec{r}_i} \Psi_N(\vec{r}^N) + V(\vec{r}^N) \Psi_N(\vec{r}^N), \quad (3.112)$$

wobei das lineare Potential V nur von den Relativkoordinaten abhängt und \vec{r}^N für die Gesamtheit aller N Teilchenkoordinaten steht. $\Delta_{\vec{r}_i}$ bezeichnet den Laplace-Operator bezüglich der Koordinate \vec{r}_i , wirkt also in einem dreidimensionalen Unterraum des insgesamt $3N$ -dimensionalen Raums, auf welchem die Wellenfunktionen Ψ_N definiert sind. Gehen wir also zum Schwerpunktssystem über, indem wir die Relativkoordinaten

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i \vec{r}_i}{M}, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad \vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r} \quad (i = 1, \dots, N-1) \quad (3.113)$$

einführen, so können wir für die N -Teilchen-Wellenfunktion Ψ_N den Separationsansatz

$$\Psi_N(\vec{r}^N) = \left(\frac{m_N}{M}\right)^{3/2} \psi(\vec{r}) \chi(\vec{\rho}^{N-1}) \quad (3.114)$$

machen. Den Vorfaktor benötigen wir, um dem Integralmaß Rechnung zu tragen und sicherzustellen, dass die drei Wellenfunktionen Ψ_N , ψ und χ gleichzeitig auf eins normierbar sind. Wir haben dabei das N -te Teilchen ausgezeichnet. Die Schrödingergleichung separiert dann in die Gleichung

$$i\hbar\dot{\chi}(\vec{\rho}^{N-1}) = -\sum_{i=1}^{N-1} \frac{\hbar^2}{2m_i} \Delta_{\vec{\rho}_i} \chi(\vec{\rho}^{N-1}) + V\chi(\vec{\rho}^{N-1}) \quad (3.115)$$

für die Relativbewegung und die freie Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta_{\vec{r}}\psi(\vec{r}) \quad (3.116)$$

für die Schwerpunktswellenfunktion.

Aufgrund des nichtlinearen Terms ist diese Separation für die SN-Gleichung nicht mehr exakt möglich. Unter gewissen Annahmen gilt sie aber näherungsweise weiter, wie wir nun zeigen wollen (vgl. [48]). Dafür betrachten wir die N -Teilchen-SN-Gleichung

$$i\hbar\dot{\Psi}_N(\vec{r}^N) = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\hbar^2}{2m_i}\Delta_{\vec{r}_i} + V_{\text{EM}}(\vec{r}^N) + U_G[\Psi_N(\vec{r}^N)] \right] \Psi_N(\vec{r}^N), \quad (3.117a)$$

$$V_{\text{EM}}(\vec{r}^N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (3.117b)$$

$$\begin{aligned} U_G[\Psi_N(\vec{r}^N)] &= -G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \int \frac{|\Psi_N(\vec{r}'^N)|^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_j|} dV'^N \\ &= -G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \int \frac{P_j(\vec{r}'_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_j|} d^3 r'_j, \end{aligned} \quad (3.117c)$$

die sich auch schon bei Diósi [29] findet. P_i bezeichnet dabei die i -te Marginalverteilung, die man nach Integration von $|\Psi_N(\vec{r}^N)|^2$ über alle $(N-1)$ Faktoren von \mathbb{R}^3 , welche die Positionen sämtlicher Teilchen bis auf die des i -ten parametrisieren, erhält. Neben dem linearen elektromagnetischen Potential V_{EM} tritt nun auch das nichtlineare Gravitationspotential U_G auf. Die Philosophie, welche diesem Gravitationspotentialterm zugrunde liegt, ist dabei, dass jedes Teilchen unter dem Einfluss eines newtonschen Gravitationsfeldes steht, dessen Quelle eine Materiedichte ist, zu welcher jedes Teilchen entsprechend seiner Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Ortsraum – das heißt proportional zu seiner Marginalverteilung P_i – beiträgt. Die Materiedichte, die als Quelle wirkt, ist also

$$\rho^{\text{mat}}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N m_j P_j(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N m_j \int |\Psi_N(\vec{r}^N)|^2 \delta(\vec{r}'_j - \vec{x}) dV'^N. \quad (3.118)$$

Zwar lebt jedes Teilchen in seiner eigenen Kopie des \mathbb{R}^3 , alle Teilchen

„spüren“ aber dieselbe Materiedichte ρ^{mat} , was insbesondere auch die Materiedichte des Teilchens selbst – und damit seine Selbstwechselwirkung – mit einbezieht. Damit ist das Gravitationspotential aller N Teilchen

$$\begin{aligned} U_G[\Psi_N(\vec{r}^N)] &= -G \sum_{i=1}^N \int \frac{m_i \rho^{\text{mat}}(\vec{x})}{|\vec{r}_i - \vec{x}|} d^3x \\ &= -G \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int \frac{m_i m_j P_j(\vec{x})}{|\vec{r}_i - \vec{x}|} d^3x. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Die N -Teilchen-Gleichung (3.117) unterscheidet in zweierlei Hinsicht die elektromagnetische Wechselwirkung und die Gravitation: Zum einen berücksichtigt die Behandlung der Gravitation in der oben ausgeführten Weise, wie bereits erwähnt, Selbstwechselwirkungsterme, während diese in der Definition (3.117b) für das elektromagnetische Potential explizit ausgelassen werden. Zum anderen ist aber auch das elektromagnetische Potential lokal am Ort der wechselwirkenden Teilchen definiert, während in das Gravitationspotential der Wert der Wellenfunktion an jedem Ort im gesamten Raum einfließt. Diese Nichtlokalität ist ausschlaggebend dafür, dass die Gravitation auch einen Beitrag zur Ausbreitung der Schwerpunktswellenfunktion liefert.

Wir machen nun auch für die SN-Gleichung (3.117) den Separationsansatz (3.114). Eingesetzt in das Gravitationspotential (3.117c) erhalten wir

$$U_G \approx -G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} m_i m_j \int \frac{|\psi(\vec{r}')|^2 |\chi(\vec{\rho}'^{N-1})|^2}{|\vec{r} + \vec{\rho}_i - \vec{r}' - \vec{\rho}_j|} d^3\rho'_1 \cdots d^3\rho'_{N-1} d^3r', \quad (3.120)$$

wobei wir der Einfachheit halber den jeweils letzten Term der Summen unterschlagen haben. Es handelt sich dabei um $(2N - 1)$ von insgesamt N^2 Termen¹⁶, so dass der Beitrag für große Teilchenzahlen N vernachlässigbar wird. Wir definieren die Marginalverteilung der Relativwellenfunktion χ zum i -ten Teilchen als

$$P_i^{\text{rel}}(\vec{\rho}_i) = \int |\chi(\vec{\rho}^{N-1})|^2 d^3\rho_1 \cdots d^3\rho_{i-1} d^3\rho_{i+1} \cdots d^3\rho_{N-1}. \quad (3.121)$$

¹⁶Sofern nicht alle Terme als ähnlich groß angenommen werden können, wählt man die Nummerierung der Teilchen so, dass das N -te den kleinsten Beitrag zum Gravitationspotential liefert.

Dann erhalten wir (in der obigen Näherung)

$$U_G = -G \int |\psi(\vec{r}')|^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} m_i \int \frac{m_j P_j^{\text{rel}}(\vec{\rho}')}{|\vec{r} + \vec{\rho}_i - \vec{r}' - \vec{\rho}'|} d^3 \rho' d^3 r', \quad (3.122)$$

wobei wir die Integrationsvariable $\vec{\rho}'_j$ in $\vec{\rho}'$ umbenannt haben. Weil aber $m_j P_j^{\text{rel}} = \rho_j^{\text{mat}}$ schlicht die Materiedichte des j -ten Teilchens relativ zum Schwerpunkt ist, können wir das innere Integral mithilfe des Gravitationspotentials

$$\phi_j(\vec{x}) = -GM \int \frac{\rho_j^{\text{mat}}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \quad (3.123)$$

des j -ten Teilchens substituieren und erhalten

$$U_G = \int |\psi(\vec{r}')|^2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{m_i}{M} \phi_j(\vec{r} + \vec{\rho}_i - \vec{r}') d^3 r' \quad (3.124)$$

und nach Substitution von \vec{r}' durch $\vec{r}' + \vec{\rho}_i$

$$U_G = \int \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} |\psi(\vec{r}' + \vec{\rho}_i)|^2 \frac{m_i}{M} \phi_j(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r'. \quad (3.125)$$

Bis zu diesem Punkt sind – abgesehen von der vereinfachenden Annahme, dass eines der N Teilchen in seiner Gravitationswirkung vernachlässigbar ist – keine weiteren Anforderungen eingeflossen.

Um nun allerdings den Ausdruck (3.125) weiter vereinfachen zu können, müssen wir näherungsweise $|\psi(\vec{r}' + \vec{\rho}_i)|^2 \approx |\psi(\vec{r}')|^2$ annehmen können. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass sich die Wellenfunktion über den Abstand $|\vec{\rho}_i|$ der Konstituenten des N -Teilchen-Systems nicht wesentlich ändert, oder aber dass die Abmessungen der Schwerpunktswellenfunktion die physikalischen Abmessungen des betrachteten Systems überschreiten. In diesem Fall vereinfacht sich (3.125) zu

$$U_G[\psi(\vec{r})] = \int |\psi(\vec{r}')|^2 \Phi(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r', \quad (3.126)$$

wobei Φ das volle Gravitationspotential der gesamten Materiedichte ist.

Die N -Teilchen-SN-Gleichung (3.117) separiert also in die gewöhnliche N -Teilchen-Schrödingergleichung der Relativkoordinaten und eine Gleichung für die Schwerpunktswellenfunktion. Erstere können wir zwar nur für einfache Modelle von N -Teilchen-Systemen lösen, die Lö-

sung wird uns aber von der in der Natur vorliegenden Materie, z. B. einem Molekül, bereits präsentiert. Ein gegebener „Materiekumpen“ unterliegt also mit seiner Schwerpunktswellenfunktion einer Hartree-Gleichung (2.1), wobei die einfließende Masse die Gesamtmasse M ist. Im Unterschied zur SN-Gleichung (2.3) ist das in der Faltung auftretende Potential aber *kein* rein Coulomb-artiges Potential mehr, sondern das zur Massenverteilung des gegebenen Materiekumpens korrespondierende Gravitationspotential.

Mit diesem Resultat lassen sich auch die Einwände von Adler [1], der die Signifikanz der Ergebnisse von Salzman u. Carlip [91] für Molekülinterferometrieexperimente anzweifelt, ausräumen. Aus der N -Teilchen-SN-Gleichung (3.117) versucht Adler mit einem Produktansatz (unabhängige Teilchen) die Einteilchengleichung abzuleiten, was allerdings nicht auf die SN-Gleichung für den Schwerpunkt führt. Stattdessen betrachtet er dann eine Gleichung, in der die Gravitation lokal behandelt wird, wie in (3.117) die elektromagnetische Wechselwirkung. Natürlich hat diese Behandlung der Gravitation keinen Einfluss auf die Schwerpunktswellenfunktion. Etwas irritierend ist, dass sich Adler vor allem am Selbstwechselwirkungsterm der genäherten Gleichung stört, wo doch die Selbstwechselwirkung essentieller Bestandteil der N -Teilchen-Gleichung ist, die Ausgangspunkt der Analyse war. Seine Abneigung gegen Selbstwechselwirkungsterme findet ihre Ursache vermutlich in der ausgeprägten Skepsis gegenüber der semiklassischen Gravitation, auf die wir bereits in Abschnitt 3.1 eingegangen sind. In der Ableitung der Einteilchen- aus der Vielteilchendynamik, wie Adler den Eindruck erweckt, lässt sich jedenfalls keine Inkonsistenz feststellen.

4. Auswirkungen der Gravitation auf das Dispersionsverhalten

Im vorigen Kapitel haben wir dargelegt, weshalb die SN-Gleichung ein ernstzunehmendes Modell für selbstgravitierende Quantensysteme ist, und haben gezeigt, dass (die Gültigkeit der Einteilchen-SN-Gleichung vorausgesetzt) auch die Schwerpunktswellenfunktionen komplexer Systeme, wie etwa Moleküle, der SN-Gleichung¹ genügen – zumindest solange ihre Abmessungen die physikalische Ausdehnung des Moleküls überschreiten. Nun wollen wir uns mit der Fragestellung befassen, welche Effekte dadurch konkret in Experimenten zu erwarten sind, und für welche Parameter, insbesondere für welche Massen, diese auftreten.

Als Orientierung dient dabei die Idee, die SN-Gleichung in interferometrischen Experimenten an Molekülen zu testen. Dieser Vorschlag wurde bereits von Carlip [20], Salzman u. Carlip [91] formuliert. Experimente dieser Art wurden beispielsweise von Hackermüller u. a. [52] mit dem Fluorofulleren $C_{60}F_{48}$ mit einer Masse von 1632 u durchgeführt. Sie verwenden ein sogenanntes Talbot-Lau-Interferometer, das aus einer Anordnung von drei optischen Gittern besteht. Das erste Gitter dient dabei der Erzeugung eines kohärenten Molekülstrahls, das zweite führt zum Interferenzmuster und das dritte wird dann zur Detektion dieses Musters verwendet. Eine übersichtliche Darstellung des Verfahrens findet sich bei Arndt u. a. [4] oder etwas umfangreicher in [3, 55].

Geht man nun davon aus, dass am ersten Gitter Wellenpakete ausgesandt werden, von denen man aus Gründen der Einfachheit annimmt,

¹genauer der modifizierten Gleichung (3.126)

dass sie sphärisch-symmetrisch sind und die Form einer Gaußglocke²

$$\psi(t=0, r) = (\pi a^2)^{-3/4} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) \quad (4.1)$$

haben, deren Breite a der Spaltbreite entspricht, so würde für ausreichend große Massen die Hemmung der quantenmechanischen Dispersion, wie man sie nach der SN-Gleichung erwartet, zu einem Verschwinden des Interferenzmusters führen, da während der Flugzeit des Moleküls zwischen Gitter und Schirm die von den verschiedenen Spalten ausgehenden Wellenpakete sich für eine Interferenz nicht weit genug ausbreiten.

Dank der Skaleninvarianz (2.27) muss bei der Analyse der SN-Gleichung (2.3) mit der Anfangsbedingung (4.1) nur entweder die Masse m oder die Breite a als freier Parameter betrachtet werden. Sind etwa sämtliche Lösungen für eine Breite \tilde{a} bekannt, so erhält man die Lösung zur Breite $a = \lambda \tilde{a}$ und zur Masse m als

$$\psi(t, \vec{x}) = \lambda^{-3/2} \tilde{\psi}(\lambda^{-5/3} t, \vec{x}/\lambda), \quad (4.2)$$

wobei $\tilde{\psi}$ die Lösung zur Breite \tilde{a} mit Masse $\lambda^{1/3} m$ ist. Aus diesem Grunde wird im Folgenden die Breite immer auf einen Wert von $a = 500$ nm fixiert, ein Wert, der auch von Salzman u. Carlip verwendet wird und seinen Ursprung darin findet, dass die Spaltbreite der in [52] verwendeten Gitter etwa diesen Wert hat.

Ich bleibe hier bei der Wortwahl von Salzman u. Carlip, den Fall eines anfänglich in seiner Breite abnehmenden Wellenpakets als „Kollaps“ zu bezeichnen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass es sich weder um einen Gravitationskollaps im Sinne des in der Astrophysik üblichen Begriffs handelt, noch im eigentlichen Sinne um einen Kollaps der Wellenfunktion, also die Reduktion des quantenmechanischen Zustands auf eine Ortseigenfunktion, was dem Zusammenschrumpfen auf eine Deltafunktion gleich käme. Auch die Bezeichnung der „Kollapsmasse“, die im Folgenden verwendet wird, ist nicht klar abgegrenzt, sondern hängt in gewissem Maße davon ab, welche Eigenschaft der Wellenfunktion man

²Ich werde hier immer von einer *reellen* Gaußfunktion als Anfangsbedingung ausgehen. Man beachte jedoch, dass eine Phase mit beliebiger Ortsabhängigkeit das Betragsquadrat der Wellenfunktion unverändert lässt, aber zu einer abweichenden dynamischen Entwicklung nach der SN-Gleichung (und natürlich auch nach der linearen Schrödingergleichung) führt. Die Betrachtung von nicht reellwertigen Anfangsbedingungen ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

zur Charakterisierung ihres dynamischen Ausbreitungsverhaltens heranzieht und über welchen Zeitraum man diese betrachtet. Ich werde in der weiteren Betrachtung jeweils erklären, welche Eigenschaft betrachtet wird. Von einem Kollaps spreche ich, wenn das Verhalten der Wellenfunktion sich von der Ausbreitung nach der freien Schrödingergleichung in einer Weise unterscheidet, die auf eine weitgehende Unterdrückung der quantenmechanischen Dispersion hindeutet.

4.1. Analytische Abschätzungen der Kollapsmasse

Bevor wir uns der numerischen Untersuchung der SN-Gleichung widmen, wollen wir uns zunächst ansehen, wie man mit einfachen analytischen Überlegungen die Kollapsmasse zumindest der Größenordnung nach abschätzen kann. Diese Abschätzungen finden sich auch in [46].

4.1.1. Kräftegleichgewicht für die freie Lösung

Eine erste grobe Abschätzung kann man erhalten, wenn man die Bewegungsgleichung einer Punktmasse im Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit betrachtet und fragt, welche Gravitationsbeschleunigung nötig ist, um die aus der freien Schrödingergleichung resultierende Beschleunigung zu kompensieren.

Für die Anfangsbedingung eines gaußschen Wellenpakets (4.1) wird die freie Schrödingergleichung gelöst durch

$$\psi_{\text{frei}}(t, r) = (\pi a^2)^{-3/4} \left(1 + \frac{i \hbar t}{m a^2}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2 \left(1 + \frac{i \hbar t}{m a^2}\right)}\right). \quad (4.3)$$

Für diese Lösung hat die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho(t, r) = 4\pi r^2 |\psi_{\text{frei}}(t, r)|^2$ ein globales Maximum bei

$$r_p = a \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}, \quad (4.4)$$

dessen Beschleunigung

$$\ddot{r}_p = \frac{\hbar^2}{m^2 a^3} \left(1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}\right)^{-3/2} = \frac{\hbar^2}{m^2 r_p^3} \quad (4.5)$$

beträgt. Wir betrachten also ein Partikelchen der Masse m mit dieser

Beschleunigung, die wir durch die newtonsche Gravitationsbeschleunigung

$$\ddot{r} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (4.6)$$

kompensieren wollen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $r_p = a$ und wir erhalten

$$m = \left(\frac{\hbar^2}{Ga} \right)^{1/3}. \quad (4.7)$$

Für die von uns betrachtete Breite $a = 500$ nm bedeutet das eine Kollapsmasse von etwa $7 \cdot 10^{-18}$ kg oder $4 \cdot 10^9$ u.

4.1.2. Massenuntergrenze für nicht-expansives Verhalten

Das zweite Moment der Wellenfunktion lautet

$$Q(t) = \int |\vec{x}|^2 |\psi(t, \vec{x})|^2 d^3x. \quad (4.8)$$

Harrison u. a. [53] stellen fest, dass dieses in Verbindung mit der Energie der SN-Wellenfunktion gebracht werden kann. Seine zweite Zeitableitung lässt sich nämlich schreiben als

$$\ddot{Q} = \frac{2\hbar^2}{m^2} \int |\nabla\psi|^2 d^3x + \int U |\psi|^2 d^3x = \frac{1}{m} (4T + V) = \frac{1}{m} (4\mathcal{E} - V), \quad (4.9)$$

wobei \mathcal{E} , T und V wie in Abschnitt 2.2.1 definiert sind. Aufgrund des Maximumsprinzips für elliptische Differentialgleichungen ist das Gravitationspotential U (unter der Annahme, dass es im Unendlichen verschwindet) als Lösung der Poisson-Gleichung (1.2b) überall negativ, womit selbiges auch für die potentielle Energie V gilt. Das bedeutet aber, dass \ddot{Q} für *positive* Energien \mathcal{E} nur positive Werte annehmen kann und Q damit eine konvexe Funktion ist. Für große Zeiten wird das zweite Moment also beliebig groß, was dem Gedanken eines Kollaps widerspricht, bei dem die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit für alle Zeiten in einem räumlich begrenzten Gebiet bleibt.³ Notwendige – aber nicht hin-

³Man beachte jedoch, dass durch diese Betrachtung ein Kollaps *nicht* ausgeschlossen ist, bei dem nur ein Teil der Wellenfunktion räumlich lokalisiert bleibt, während der übrige Teil der Aufenthaltswahrscheinlichkeit ins räumlich Unendliche wandert. Tatsächlich ist dies das Verhalten, wie es von den numerischen Analysen der SN-Gleichung nahegelegt wird, so dass die in diesem Abschnitt gegebene Massenuntergrenze eher den Charakter einer groben Abschätzung denn einer rigorosen mathematischen Herleitung hat.

reichende – Bedingung für einen Kollaps im hier beschriebenen Sinne eines beschränkten zweiten Moments ist also $\mathcal{E} < 0$.

Da die Energie \mathcal{E} eine Erhaltungsgröße ist, genügt es, sie für den Anfangszustand (4.1) zu berechnen, was analytisch möglich ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \frac{2\pi\hbar^2}{m} \int_0^\infty (\partial_r \psi(r))^2 r^2 dr - 8\pi^2 G m^2 \\
 &\quad \cdot \int_0^\infty \left[\int_0^r dr' \frac{r'^2}{r} \psi^2(r) \psi^2(r') + \int_r^\infty dr' r' \psi^2(r) \psi^2(r') \right] r^2 dr \\
 &= \frac{2\hbar^2}{\sqrt{\pi} m a^7} \int_0^\infty r^4 e^{-r^2/a^2} dr - \frac{8Gm^2}{\pi a^6} \int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} \\
 &\quad \cdot \left[\int_0^r e^{-r'^2/a^2} r'^2 dr' + r \int_r^\infty e^{-r'^2/a^2} r' dr' \right] dr \\
 &= \frac{3\hbar^2}{4ma^2} - \frac{Gm^2}{\sqrt{2\pi} a}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

$\mathcal{E} < 0$ ist dann äquivalent zu

$$m > \left(\frac{3\sqrt{2\pi}\hbar^2}{4Ga} \right)^{1/3}, \tag{4.11}$$

was für $a = 500$ nm eine Masse von etwa $8,6 \cdot 10^{-18}$ kg oder $5,2 \cdot 10^9$ u bedeutet.⁴

4.1.3. Masse des stationären Grundzustands

Der stationäre Grundzustand der SN-Gleichung ist keine Gaußkurve, er kommt aber in seiner Form einer Gaußkurve nahe. Physikalisch erwartet man, dass eine Erhöhung der Masse im stationären Grundzustand bei Beibehaltung seiner Form und Ausdehnung zu einem kollabierenden Verhalten führt, während bei einer Verringerung der Masse mit einem expandierenden Wellenpaket zu rechnen ist. Die Masse eines Grundzustands gegebener Breite kann also als Abschätzung für die Kollapsmasse der Gaußkurve dienen.

Den von Moroz u. a. [74] gefundenen Grundzustand haben wir bereits in (2.44) angegeben. Um diesen allerdings für unsere Abschätzung verwenden zu können, müssen wir die dimensionslosen Gleichungen (2.42)

⁴In [46] hat sich ein Rechenfehler eingeschlichen, so dass die dortigen Werte falsch sind und von den hier angegebenen abweichen.

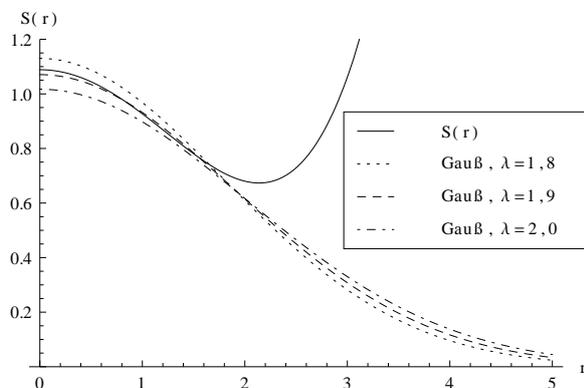


Abbildung 4.1.: Die Grundzustandslösung (2.44) mit $S_0 = 1.08864$, wie in Abbildung 2.1. Zusätzlich sind hier die Gaußkurven mit Norm $\sqrt{26}$ für Breiten λ von 1,8, 1,9 und 2 abgebildet. Wie man sieht, approximiert die Breite 1,9 den Grundzustand am besten.

erst wieder in die entsprechend dimensionsbehafteten transformieren.

Gegeben sei also eine Lösung $S(r)$ der Gleichung (2.42) mit Breite λ und Norm $\|S\|$. Dann ist $\tilde{\varphi}(r) = \hbar/\sqrt{8\pi G\tilde{m}^3}S(r)$ eine Lösung der SN-Gleichung mit Masse \tilde{m} und Breite λ . Allerdings ist diese Lösung nicht auf eins normiert, sondern hat die Norm

$$\|\tilde{\varphi}\| = \frac{\hbar}{\sqrt{8\pi G\tilde{m}^3}} \|S\|. \quad (4.12)$$

Wir nutzen nun die Skaleninvarianz (2.27) der SN-Gleichung aus und transformieren $\tilde{m} \rightarrow m = \mu\tilde{m}$, $\tilde{\varphi}(r) \rightarrow \varphi(r) = \mu^{9/2}\tilde{\varphi}(\mu^3 r)$. Diese Transformation erhält die Normierung, $\|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\|$. Wir fordern nun, dass φ auf eins normiert ist, wodurch \tilde{m} festgelegt ist und wir den Skalierungsfaktor μ bestimmen können:

$$1 = \|\varphi\| = \|\tilde{\varphi}\| = \frac{\hbar\mu^{3/2}}{\sqrt{8\pi Gm^3}} \|S\| \Rightarrow \mu = \left(\frac{8\pi Gm^3}{\hbar^2 \|S\|^2} \right)^{1/3}. \quad (4.13)$$

Nun wissen wir aber, dass Längen mit μ^{-3} skalieren. Das heißt die neue Funktion φ hat die Breite

$$a = \mu^{-3}\lambda = \frac{\hbar^2\lambda\|S\|^2}{8\pi Gm^3}. \quad (4.14)$$

Mit anderen Worten, kennen wir einen stationären Grundzustand der Gleichung (2.42) mit Breite λ und Norm $\|S\|$, so lässt sich die Masse des stationären, auf eins normierten Grundzustands der SN-Gleichung zur Breite a berechnen als

$$m = \left(\frac{\hbar^2 \lambda \|S\|^2}{8\pi G a} \right)^{1/3}. \quad (4.15)$$

Breite und Norm der von Moroz u. a. gefundenen Lösung müssen wir numerisch bestimmen bzw. graphisch abschätzen. Da der Reihenansatz (2.44) divergiert, ist es dabei notwendig einen Cutoff einzuführen, bis zu dem wir die Funktion integrieren. Es bietet sich der Wert 2,2 an, was zu einer Norm von $\|S\|^2 \approx 26$ führt. Plotten wir für diese Norm Gaußkurven verschiedener Breite über die Grundzustandslösung (vgl. Abbildung 4.1), so lässt sich erkennen, dass die Breite der Kurve etwa $\lambda = 1,9$ beträgt. Diese beiden Werte zusammen mit $a = 500$ nm in (4.15) eingesetzt ergeben eine Kollapsmasse von $8,7 \cdot 10^{-18}$ kg oder $5,2 \cdot 10^9$ u, also in etwa denselben Wert, den wir auch als Massenuntergrenze aus der vorherigen Abschätzung erhalten haben.

4.1.4. Verhalten für kleine Zeiten

Als letzte Abschätzung wollen wir das Verhalten der Wellenfunktion für kurze Zeiten betrachten. Dann können wir die Wellenfunktion oder die Aufenthaltswahrscheinlichkeit als Potenzreihe um $t = 0$ entwickeln und nur die Terme niedrigster Ordnung betrachten. Zur einfacheren mathematischen Behandlung betrachten wir die Funktion $\phi(t, r) := r\psi(t, r)$ anstelle der Wellenfunktion. Das sphärisch-symmetrische Gravitationspotential ist dann⁵

$$U(t, r) = -4\pi G m \left[\frac{1}{r} \int_0^r |\phi(r', t)|^2 dr' + \int_r^\infty \frac{|\phi(r', t)|^2}{r'} dr' \right]. \quad (4.16)$$

Damit lauten die SN-Gleichung und ihre komplexe Konjugation

$$\partial_t \phi = \frac{i\hbar}{2m} \partial_r^2 \phi - \frac{i m}{\hbar} U \phi, \quad \partial_t \phi^* = -\frac{i\hbar}{2m} \partial_r^2 \phi^* + \frac{i m}{\hbar} U \phi^*. \quad (4.17)$$

⁵vgl. Salzman [92, Anhang B]

Die erste Zeitableitung des Betragsquadrats der Wellenfunktion

$$\partial_t |\phi|^2 = (\partial_t \phi) \phi^* + \phi (\partial_t \phi^*) = \frac{i\hbar}{2m} \left((\partial_r^2 \phi) \phi^* - \phi (\partial_r^2 \phi^*) \right) \quad (4.18)$$

verschwindet bei $t = 0$, da $\phi(r, 0)$ reellwertig ist. Für die zweite Zeitableitung erhält man

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi &= \frac{i\hbar}{2m} \partial_r^2 (\partial_t \phi) - \frac{im}{\hbar} (\partial_t U) \phi - \frac{im}{\hbar} U (\partial_t \phi) \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m^2} \partial_r^4 \phi + \frac{1}{2} (\partial_r^2 U) \phi + (\partial_r U) (\partial_r \phi) + U (\partial_r^2 \phi) \\ &\quad - \frac{m^2}{\hbar^2} U^2 \phi - \frac{im}{\hbar} (\partial_t U) \phi \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi^* &= -\frac{\hbar^2}{4m^2} \partial_r^4 \phi^* + \frac{1}{2} (\partial_r^2 U) \phi^* + (\partial_r U) (\partial_r \phi^*) + U (\partial_r^2 \phi^*) \\ &\quad - \frac{m^2}{\hbar^2} U^2 \phi^* + \frac{im}{\hbar} (\partial_t U) \phi^* \end{aligned} \quad (4.19b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 |\phi|^2 &= (\partial_t^2 \phi) \phi^* + 2 (\partial_t \phi) (\partial_t \phi^*) + \phi (\partial_t^2 \phi^*) \\ &= -\frac{\hbar^2}{4m^2} \left[(\partial_r^4 \phi) \phi^* - 2 (\partial_r^2 \phi) (\partial_r^2 \phi^*) + \phi (\partial_r^4 \phi^*) \right] \\ &\quad + (\partial_r^2 U) |\phi|^2 + (\partial_r U) \left((\partial_r \phi) \phi^* + \phi (\partial_r \phi^*) \right). \end{aligned} \quad (4.19c)$$

Wir führen nun die folgenden Abkürzungen ein:

$$\alpha := (\pi a^2)^{-3/2} \quad \beta := a^{-1} \quad \rho := \beta r \quad (4.20a)$$

$$\gamma_1 := 4\pi^{-1/2} G \alpha \beta \quad \gamma_2 := 2 G \alpha \beta \quad \gamma_3 := \hbar^2 \alpha \beta^2 \quad (4.20b)$$

$$\tilde{U} := -\alpha \gamma_1^{-1} m^{-1} U \quad \phi_0(r) := \phi(r, 0) = \sqrt{\alpha} r e^{-\beta^2 r^2 / 2}. \quad (4.20c)$$

Da $U \propto m$ ist, lässt sich mit diesen Abkürzungen $\partial_t^2 |\phi|^2$ bei $t = 0$ auf die Form

$$\partial_t^2 |\phi|^2 \Big|_{t=0} = m A(\rho) + \frac{1}{m^2} B(\rho) \quad (4.21)$$

bringen, wobei die Funktionen A und B folgende Form haben:

$$A(\rho) = -\frac{\gamma_1}{\alpha} \left((\partial_r^2 \tilde{U}) \phi_0^2 + 2 (\partial_r \tilde{U}) (\partial_r \phi_0) \phi_0 \right) \quad (4.22a)$$

$$B(\rho) = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\phi_0 (\partial_r^4 \phi_0) - (\partial_r^2 \phi_0)^2 \right). \quad (4.22b)$$

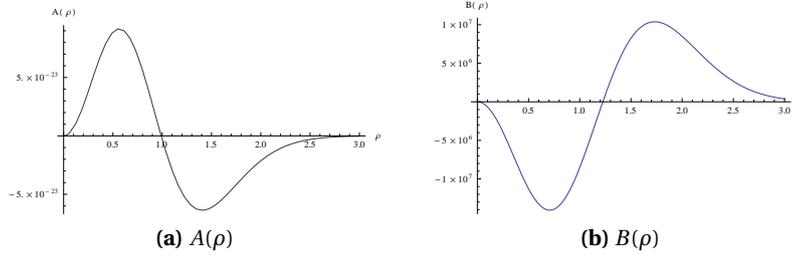


Abbildung 4.2.: Die Komponenten $A(\rho)$ und $B(\rho)$ des Beitrags zu $|\phi|^2$ in Ordnung t^2 , vgl. (4.25). A zeigt ein attraktives, B ein repulsives Verhalten. [46]

Für \tilde{U} und die Ableitungen von \tilde{U} erhalten wir

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho'^2 e^{-\rho'^2} d\rho' + \int_\rho^\infty \rho' e^{-\rho'^2} d\rho' \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\operatorname{erf}(\rho)}{\rho},\end{aligned}\quad (4.23a)$$

$$\frac{1}{\beta} \partial_r \tilde{U} = \partial_\rho \tilde{U} = \frac{1}{2\rho} e^{-\rho^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\operatorname{erf}(\rho)}{\rho^2}, \quad (4.23b)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \partial_r^2 \tilde{U} = \partial_\rho^2 \tilde{U} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\operatorname{erf}(\rho)}{\rho^3} - \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) e^{-\rho^2}, \quad (4.23c)$$

wobei $\operatorname{erf}(\rho)$ die Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(\rho) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\rho e^{-x^2} dx \quad (4.24)$$

ist. Setzen wir nun (4.23b) und (4.23c) in (4.22a) ein, so können wir die (durch 4π dividierte) radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit als Potenzreihe um $t = 0$ angeben. Sie ist

$$|\phi|^2 = \phi_0^2 + \frac{t^2}{2} \left(m A(\rho) + \frac{1}{m^2} B(\rho) \right) + \mathcal{O}(t^3), \quad (4.25a)$$

mit

$$A(\rho) = 2\gamma_1 \rho^2 e^{-2\rho^2} - \gamma_2 \rho e^{-\rho^2} \operatorname{erf}(\rho) \quad (4.25b)$$

$$B(\rho) = \gamma_3 \rho^2 (2\rho^2 - 3) e^{-\rho^2}. \quad (4.25c)$$

Die Funktionen $A(\rho)$ und $B(\rho)$ sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Während A ein anziehendes Verhalten hin zum Ursprung zeigt (zunehmende

Aufenthaltswahrscheinlichkeit für kleine Werte von ρ , abnehmende für große ρ), zeigt B ein abstoßendes Verhalten. Wie erwartet dominiert für große Massen mit dem Term A das anziehende Verhalten.

In Abbildung 4.3 ist die zweite Zeitableitung von $|\phi|^2$ für verschiedene Massen dargestellt. Man kann erkennen, dass für $m \lesssim 4 \cdot 10^9$ u ein abstoßendes Verhalten vorliegt, welches sich mit zunehmender Masse allmählich umkehrt und für Massen $m \gtrsim 9 \cdot 10^9$ u vollständig in ein anziehendes Verhalten übergeht. Ein Kollaps ist also für Massen zwischen etwa $5 \cdot 10^9$ u und $8 \cdot 10^9$ u zu erwarten.

Fassen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen, so lässt sich feststellen, dass sämtliche analytische Abschätzungen auf einen Massenwert in der Größenordnung von $5 \cdot 10^9$ u hindeuten. Diesen Wert und die von Salzman und Carlip in [20, 91, 92] behauptete Kollapsmasse von rund 1600 u trennen mehr als sechs Größenordnungen. Deshalb will ich im folgenden Abschnitt die numerische Betrachtung der SN-Gleichung einer Überprüfung unterziehen und die Analyse aus [92] wiederholen.

4.2. Numerische Analyse der zeitabhängigen SN-Gleichung

Zur numerischen Analyse der SN-Gleichung wird ein Algorithmus nach Crank u. Nicolson [26] verwendet. Diese Methode ist implizit⁶, unitär⁷ und numerisch stabil⁸. Dabei orientieren sich die numerischen Methoden, die ich zur Untersuchung der Dynamik der SN-Gleichung verwendet habe, an den von Salzman [92] benutzten. Die Beschreibung des Verfahrens deckt sich deshalb zu einem großen Teil mit der Beschreibung dort. Der Vollständigkeit wegen werde ich das numerische Verfahren hier dennoch ausführlich erläutern, bevor ich anschließend die Ergebnisse der numerischen Analyse zusammenfasse. Die zugehörigen Programmcodes finden sich in Anhang H.

⁶Während bei einem expliziten Verfahren $\psi(t + \delta t, \vec{x})$ in Abhängigkeit von $\psi(t, \vec{x})$ gelöst wird, erfordert das implizite Verfahren die Lösung eines Gleichungssystems, das die Werte zu den Zeitpunkten t und $t + \delta t$ in Verbindung bringt.

⁷Das heißt, die Gleichung wird auf solche Weise linearisiert, dass die Norm der Wellenfunktion während der Zeitentwicklung erhalten bleibt.

⁸Borisov [17] zeigt, dass die Crank-Nicolson-Methode für nichtlineare Schrödingergleichungen konvergiert.

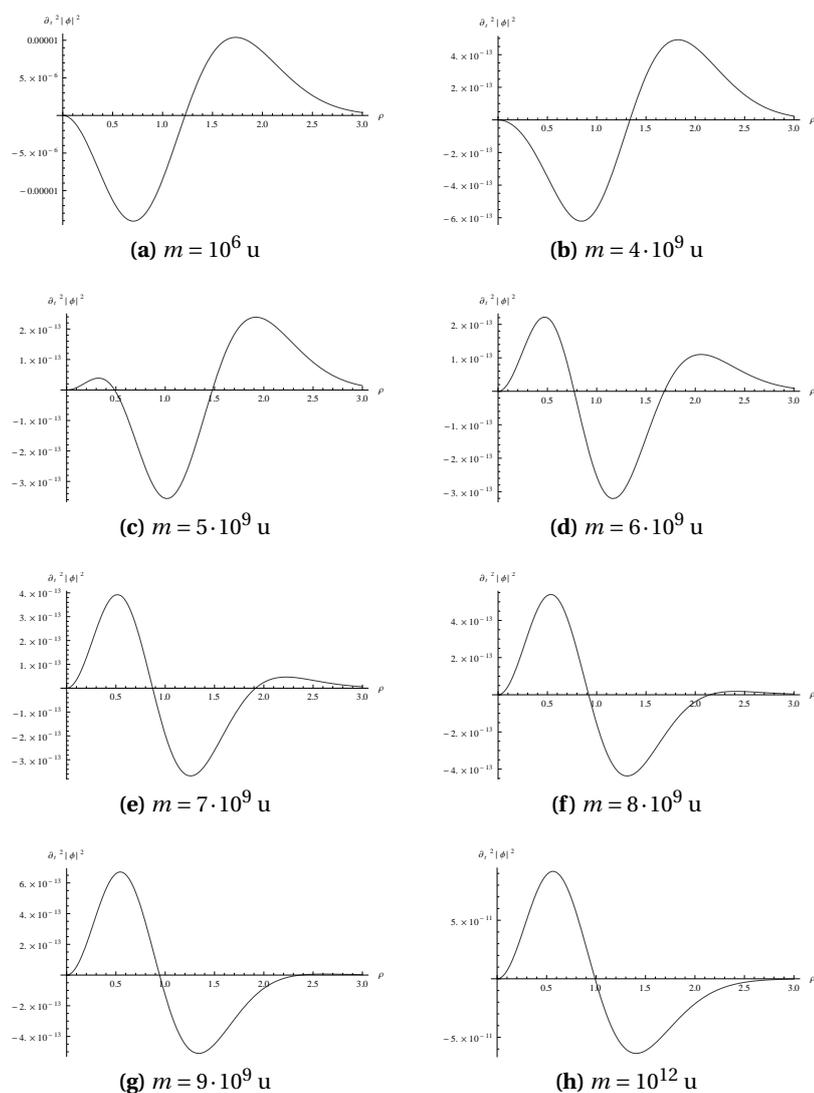


Abbildung 4.3.: Plot von $\partial_t^2 |\phi|^2$ bei $t = 0$ für verschiedene Massen. Für Massen unterhalb von $4 \cdot 10^9 \text{ u}$ und oberhalb von $9 \cdot 10^9 \text{ u}$ ändert sich das Aussehen der Funktion nur quantitativ in der Skalierung. Der qualitative Wechsel von repulsivem hin zu attraktivem Verhalten findet zwischen diesen beiden Massenwerten statt. [46]

4.2.1. Numerisches Verfahren

Zur numerischen Betrachtung des SN-Gleichung müssen wir zunächst Zeit und Raum diskretisieren. Wir betrachten ausschließlich die sphärisch-symmetrische Situation eines Wellenpakets $\psi(t, r)$ mit gegebener Anfangsbedingung $\psi(t = 0, r)$ – in unserem Fall eine Gaußglocke (4.1). Für den sphärisch-symmetrischen Fall vereinfacht sich das Gravitationspotential in der SN-Gleichung zu⁹

$$U(t, r) = -4\pi Gm \left[\frac{1}{r} \int_0^r |\psi(r', t)|^2 r'^2 dr' + \int_r^\infty |\psi(r', t)|^2 r' dr' \right]. \quad (4.26)$$

Wir wählen nun einen zeitlichen und räumlichen Gitterabstand, δt und δr , und schreiben die Wellenfunktion in der Indexnotation

$$\psi_j^n := \psi(n \delta t, j \delta r) \quad (j, n \in \mathbb{Z}). \quad (4.27)$$

Schreibt man die Schrödingergleichung als Operatorgleichung

$$i\hbar \dot{\psi} = H\psi, \quad (4.28)$$

wobei im Falle der SN-Gleichung der Hamiltonoperator,

$$H[\psi] = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + mU[\psi] = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + mU[\psi], \quad (4.29)$$

von ψ abhängt, so lässt sich auf die bekannte Weise die Lösung mithilfe des unitären Zeitentwicklungsoperators angeben:

$$\psi(t + \delta t, r) = \exp\left(-\frac{i\delta t}{\hbar} H\right) \psi(t, r). \quad (4.30)$$

Für das Crank-Nicolson-Verfahren entwickelt man nun jeweils $\psi(t, r)$ und $\psi(t + \delta t, r)$ um $\delta t/2$ in die Zukunft bzw. Vergangenheit, so dass man zu $\psi(t + \delta t/2, r)$ gelangt. Dies führt auf die sogenannte Cayley-Form [22]

$$\exp\left(\frac{i\delta t}{2\hbar} H\right) \psi(t + \delta t, r) = \exp\left(-\frac{i\delta t}{2\hbar} H\right) \psi(t, r), \quad (4.31)$$

die wir auf beiden Seiten linearisieren, so dass wir

$$\left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right) \psi_j^{n+1} = \left(\mathbb{1} - \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right) \psi_j^n \quad (4.32)$$

⁹vgl. Salzman [92, Anhang B]

erhalten. Dabei haben wir die Indexnotation (4.27) verwendet. Man beachte, dass dies nun, da wir auf beiden Seiten linearisiert haben, eine Gleichung ist, die die SN-Gleichung nicht bis zur ersten sondern bis zur zweiten Ordnung in δt approximiert. Gleichung (4.32) nach ψ_j^{n+1} aufgelöst und vereinfacht ergibt

$$\begin{aligned}\psi_j^{n+1} &= \left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right)^{-1} \left(\mathbb{1} - \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right) \psi_j^n \\ &= \left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right)^{-1} \left[2 \cdot \mathbb{1} - \left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right) \right] \psi_j^n \\ &= \left[2 \left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right)^{-1} - \mathbb{1} \right] \psi_j^n.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Wir nennen den inversen Operator im ersten Summanden Q^{-1} , d. h. wir definieren

$$Q = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \frac{i\delta t}{2\hbar} H \right), \quad (4.34)$$

so dass wir mit der Gleichung

$$\psi_j^{n+1} = Q^{-1} \psi_j^n - \psi_j^n = \chi_j^n - \psi_j^n \quad (4.35)$$

enden. Wir müssen also im ersten Schritt das lineare Gleichungssystem $Q\chi^n = \psi^n$ lösen, um im zweiten Schritt die zeitentwickelte Wellenfunktion als $\psi^{n+1} = \chi^n - \psi^n$ zu erhalten. Das Weglassen des räumlichen Index ist dabei so zu verstehen, dass wir es mit Vektoren der Dimension N , der Zahl der räumlichen Gitterpunkte, zu tun haben.

Bestimmung der Komponenten der Matrix Q

Um zu einer $N \times N$ -Matrix zu gelangen, wollen wir als nächstes den Operator Q diskretisieren. Dazu müssen wir sowohl das Potential U als auch den Laplace-Operator diskretisieren.

Für letzteren ist zu berücksichtigen, dass im diskreten Fall bei $r = 0$ nicht durch r dividiert werden darf. Deshalb schreiben wir die Radialkomponente des Laplace-Operators als¹⁰

$$\Delta_r = \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \text{für } r > 0 \\ 3 \frac{\partial^2}{\partial r^2} & \text{für } r = 0. \end{cases} \quad (4.36)$$

¹⁰Für die Form bei $r = 0$ betrachtet man den Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten und beachtet, dass im Ursprung alle Richtungen, x , y und z , radial sind. Siehe [92] für eine umfangreichere Argumentation.

Die Approximation der ersten und zweiten Ableitungen in der diskretisierten Form ist

$$\frac{\partial}{\partial r} \chi_j^n = \frac{\chi_{j+1}^n - \chi_{j-1}^n}{2\delta r} \quad (4.37a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \chi_j^n = \frac{\chi_{j+1}^n - 2\chi_j^n + \chi_{j-1}^n}{(\delta r)^2}, \quad (4.37b)$$

womit wir den diskretisierten Laplace-Operator

$$\Delta \chi_j^n = \begin{cases} \frac{1}{(\delta r)^2} \left(\frac{j-1}{j} \chi_{j-1}^n - 2\chi_j^n + \frac{j+1}{j} \chi_{j+1}^n \right) & \text{für } j > 0 \\ \frac{1}{(\delta r)^2} (-6\chi_0^n + 6\chi_1^n) & \text{für } j = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

erhalten. Dabei haben wir für $j = 0$ ausgenutzt, dass aufgrund der sphärischen Symmetrie $\chi_{-1}^n = \chi_1^n$ ist.

Diskretisierung des Potentials Das Gravitationspotential (4.26) lautet in diskreter Form

$$V_j^n = -4\pi G m^2 (\delta r)^2 v_j^n \quad (4.39)$$

$$v_j^n = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} |\psi_i^n|^2 i^2 + \sum_{i=j}^{N-1} |\psi_i^n|^2 i. \quad (4.40)$$

Setzen wir die diskreten Formen (4.38) des Laplace-Operators und (4.39) des Potentials in (4.34) ein, so nimmt Q die Gestalt einer Tridiagonalmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} & \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

an, wobei die Koeffizienten

$$a_j = \beta \frac{j-1}{j} \quad (0 < j \leq N-1) \quad (4.42a)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} - 6\beta - \gamma v_0 \quad b_j = \frac{1}{2} - 2\beta - \gamma v_j \quad (0 < j \leq N-1) \quad (4.42b)$$

$$c_0 = 6\beta \quad c_j = \beta \frac{j+1}{j} \quad (0 < j < N-1) \quad (4.42c)$$

lauten und wir die folgenden Abkürzungen verwendet haben:

$$\beta = -\frac{i\hbar}{8m} \frac{\delta t}{(\delta r)^2} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{i\pi G}{\hbar} m^2 \delta t (\delta r)^2. \quad (4.43)$$

Lösung des linearen Gleichungssystems

Als nächstes gilt es nun, das lineare Gleichungssystem $Q\chi^n = \psi^n$ zu lösen. Im Allgemeinen skaliert die Laufzeit für das Lösen eines linearen Gleichungssystems, z. B. mit dem Gauß-Algorithmus, kubisch mit der Zahl der Gitterpunkte N . Ist Q jedoch, wie in unserem Fall, eine Tridiagonalmatrix, so bietet der Tridiagonalmatrix-Algorithmus [25] (auch Thomas-Algorithmus genannt) eine Möglichkeit, die nur linear mit N skaliert. Der Algorithmus besteht aus einer Vorwärtersetzung gefolgt von einer Rückwärtersetzung.

Für die Vorwärtersetzung setzen wir zunächst $\tilde{b}_0 = b_0$ und $\tilde{\psi}_0^n = \psi_0^n$ und berechnen rekursiv

$$\tilde{b}_j = b_j - \frac{a_j c_{j-1}}{\tilde{b}_{j-1}} \quad (4.44)$$

$$\tilde{\psi}_j^n = \psi_j^n - \frac{a_j \tilde{\psi}_{j-1}^n}{\tilde{b}_{j-1}}. \quad (4.45)$$

Anschließend erhalten wir in der Rückwärtersetzung die Lösung:

$$\chi_{N-1}^n = \frac{\tilde{\psi}_{N-1}^n}{\tilde{b}_{N-1}} \quad (4.46)$$

$$\chi_j^n = \frac{\tilde{\psi}_j^n - c_j \chi_{j+1}^n}{\tilde{b}_j}. \quad (4.47)$$

Bei der numerischen Umsetzung lässt sich $\psi^{n+1} = \chi^n - \psi^n$ in einer gemeinsamen Schleife mit der Rückwärtersetzung durchführen, so dass tatsächlich nur diese beiden Schleifen benötigt werden.

Berechnung des Potentials

Was die Berechnung des Potentials angeht, so sei bemerkt, dass wir

$$v_j^n = v_0^n + \underbrace{\frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} |\psi_i^n|^2 i^2 - \sum_{i=0}^{j-1} |\psi_i^n|^2 i}_{\tilde{v}_j^n} \quad (4.48)$$

schreiben können. Daraus erhalten wir das Potential, indem wir erst

$$\sigma^{(1)} = \frac{1}{2} |\psi_1^n|^2, \quad v_{0,(1)}^n = |\psi_1^n|^2, \quad \tilde{v}_1^n = 0 \quad (4.49)$$

definieren und dann

$$\tilde{v}_j^n = \sigma^{(j-1)} - v_0^{(j-1)} \quad (4.50a)$$

$$v_{0,(j)}^n = v_{0,(j-1)}^n + |\psi_j^n|^2 j \quad (4.50b)$$

$$\sigma^{(j)} = \frac{j}{j+1} \left(\sigma^{(j-1)} + |\psi_j^n|^2 j \right) \quad (4.50c)$$

iterativ für $2 \leq j \leq N-1$ berechnen. In einer zweiten Schleife können wir dann direkt die Matrixelemente b_j berechnen als

$$b_0 = \frac{1}{2} - 6\beta - \gamma v_{0,(N-1)}^n \quad (4.51a)$$

$$b_j = \frac{1}{2} - 2\beta - \gamma (v_{0,(N-1)}^n + \tilde{v}_j^n) \quad (j = 1 \dots N-1). \quad (4.51b)$$

Numerische Konstanten

Für die numerische Berechnung geben wir die Werte für die Breite a des Wellenpakets und δr in Nanometer, die Masse m in atomaren Masseneinheiten u und δt in Nanosekunden an. In diesen Einheiten haben der dimensionslose Parameter β sowie der Parameter γ in nm^3 folgende Werte:

$$\begin{aligned} \beta &= -i \frac{(\hbar/\text{Js})}{8 \cdot (m/u) \cdot (1 \text{ u/kg})} \frac{10^{-9} (\delta t/\text{ns})}{(10^{-9} (\delta r/\text{nm}))^2} \\ &\approx -7,938474845 i \cdot \frac{(\delta t/\text{ns})}{(m/u) \cdot (\delta r/\text{nm})^2} \end{aligned} \quad (4.52a)$$

$$\begin{aligned} (\gamma/\text{nm}^3) &= 10^{27} i \pi \frac{(G/\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2})}{(\hbar/\text{Js})} \left((m/u) \cdot (1 \text{ u/kg}) \right)^2 \\ &\quad \cdot 10^{-9} (\delta t/\text{ns}) \cdot (10^{-9} (\delta r/\text{nm}))^2 \\ &\approx 5,48247 \cdot 10^{-30} i \cdot (m/u)^2 \cdot (\delta t/\text{ns}) \cdot (\delta r/\text{nm})^2. \end{aligned} \quad (4.52b)$$

Parameterwahl und ihre Abhängigkeit von der Masse Die Zahl der räumlichen Gitterpunkte N muss für eine hohe Genauigkeit der numerischen Untersuchung natürlich möglichst groß gewählt werden. Dem sind aber durch die verwendete Hard- und Software Grenzen gesetzt. Beim von mir benutzten Code waren – ohne größere Modifikationen des Codes – auf dem verwendeten Rechner Gitterpunktzahlen von maximal einigen Zehntausend möglich. Die Zahl der Gitterpunkte ist also durch die gegebenen Umstände bereits relativ stark eingegrenzt. Auch dem Gitterabstand δr bleiben damit wenig Spielräume. Für eine gute

Auflösung der Wellenfunktion muss er möglichst klein gewählt werden, sollte aber groß genug sein, dass die Wellenfunktion am Rand des gewählten Gitters bereits stark abgefallen ist, so dass Effekte am Rand vernachlässigbar bleiben. Als häufigste Parameterwahl in meinen numerischen Analysen bei einem 500 nm breiten Wellenpaket hat sich $N = 5000$ mit $\delta r = 0,6$ nm bewährt.

Für die Abschätzung des zeitlichen Gitterabstands δt sowie der Anzahl der insgesamt untersuchten Zeitschritte bietet sich – zumindest für Massen, für die noch kein Kollaps stattfindet – der Vergleich mit der Lösung der freien Schrödingergleichung (4.3) an. Die Zeitspanne, in der sich der Radius r_p der freien Lösung (4.4) verdoppelt, d. h. $r_p(t = T) = 2a$, beträgt

$$T = \sqrt{3} \frac{ma^2}{\hbar} \approx 2,7 \cdot 10^{-11} \text{ s} \cdot (m/\text{u}) \cdot (a/\text{nm})^2, \quad (4.53)$$

beziehungsweise für eine Breite von $a = 500$ nm

$$(T/\text{s}) \approx 7 \cdot 10^{-6} \cdot (m/\text{u}). \quad (4.54)$$

Zumindest um auch für die freie Schrödingergleichung eine Veränderung zu beobachten, sollte die gesamte betrachtete Zeitspanne also in dieser Größenordnung liegen; wie wir sehen, skaliert der Wert linear mit der Masse. Für kollabierende Wellenpakete kann allerdings auch schon für deutlich kürzere Zeiten eine sichtbare Veränderung eintreten.

Andererseits beschränkt aber die Masse auch den maximalen zeitlichen Gitterabstand δt . Um dies zu verstehen, sei zunächst festgestellt, dass wir

$$Q = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \frac{i \delta t}{2\hbar} H \right) = \frac{1}{m} R + \frac{1}{2} \mathbb{1} + m^2 S, \quad (4.55)$$

mit

$$R = -\frac{i \delta t \hbar}{8} \Delta, \quad (4.56)$$

$$S = -\frac{i \delta t G}{4\hbar} \int \frac{|\psi(\vec{y}, t)|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y, \quad (4.57)$$

nach Potenzen von m sortieren können. Entwickeln wir nun Q^{-1} um $m = \infty$, so erhalten wir

$$Q^{-1} = \frac{1}{m^2} S^{-1} - \frac{1}{2m^4} S^{-2} + \mathcal{O}(m^{-5}) \quad (4.58)$$

und damit

$$\psi_j^{n+1} = -\psi_j^n + \frac{1}{m^2} S^{-1} \psi_j^n + \dots \quad (4.59)$$

Damit $|\psi|^2$ bei der numerischen Evolution nicht stationär wird, muss der zweite Term auf der rechten Seite ausreichend groß werden. Da aber $S^{-1} \propto 1/\delta t$ ist, bedeutet dies, dass $m^2 \delta t$ hinreichend klein sein muss.

Um also bei gleichbleibender Qualität der numerischen Approximation zu höheren Massen zu gelangen, müssen wir demnach die gesamte betrachtete Zeitspanne T mit m und den zeitlichen Gitterabstand δt mit $1/m^2$ skalieren, so dass die Zahl der insgesamt benötigten Iterationsschritte kubisch mit der Masse zunimmt. Die numerische Untersuchung wird also mit zunehmender Masse rechenintensiver.

4.2.2. Massenabhängigkeit der Dynamik der Wellenfunktion

Für die fest gewählte Breite von $a = 500$ nm untersuchen wir numerisch die zeitliche Ausbreitung des gaußschen Wellenpakets (4.1). Insgesamt wurden 28 verschiedene Massenwerte zwischen $5 \cdot 10^8$ u und $3 \cdot 10^{11}$ u untersucht. Zur Analyse wurden für alle betrachteten Massen Videos der Ausbreitung der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit $4\pi r^2 |\psi(r)|^2$ erstellt. Zum Vergleich wurde immer auch die analytische Lösung der freien Schrödingergleichung (4.3) dargestellt. Der Vergleich mit dem numerischen Ergebnis bei abgeschaltetem Potential bietet eine gute Kontrollmöglichkeit für den verwendeten Code. Für die meisten Durchläufe wurden 5000 Gitterpunkte im Abstand von 0,6 nm gewählt, so dass der betrachtete Bereich mit $3 \mu\text{m}$ der sechsfachen Breite des Wellenpakets entsprach. Die zeitliche Entwicklung wurde meist in 10 Millionen Zeitschritten vorgenommen, wobei jeder zehntausendste gespeichert wurde. Der Abstand der Zeitschritte variiert mit der Masse von Mikrosekunden bis zu einigen Hundertstelsekunden.

Das Ergebnis stellt sich dabei wie folgt dar: Bis zu einer Masse von $2 \cdot 10^9$ u ist kein sichtbarer Unterschied der Lösung der SN-Gleichung zur freien Lösung zu erkennen. Für größere Massen findet die Expansion des Wellenpakets nach und nach langsamer (im Vergleich zur freien Lösung) statt. Schließlich ist für Massen ab etwa $6,5 \cdot 10^9$ u das Verhalten zu beobachten, das wir als einen „Kollaps“ des Wellenpakets bezeichnen. Es zeigt dann (zumindest anfänglich) eine Tendenz zum Ursprung hin. Ein typisches Beispiel für dieses Verhalten ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Bei einer längeren Beobachtung zeigt sich allerdings ein oszillatorisches

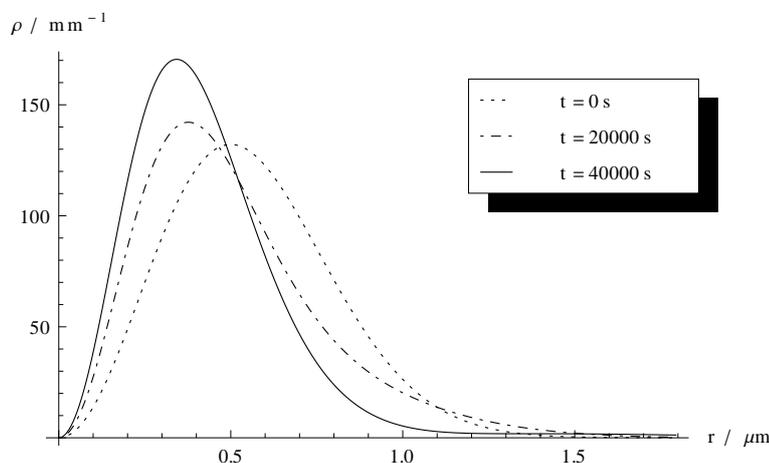


Abbildung 4.4.: Kollabierendes Wellenpaket für $m = 7 \cdot 10^9 \text{ u}$. Dargestellt ist die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\rho = 4\pi r^2 |\psi|^2$ über r für drei verschiedene Zeitpunkte.

Verhalten; das anfänglich schrumpfende Wellenpaket nimmt dabei wieder an Breite zu, um schließlich erneut zu kollabieren.

Während dieser Oszillationen wird ein Teil der Wahrscheinlichkeit zu großen Abständen vom Ursprung weg abgestrahlt. Diese Abstrahlung beobachten auch schon Harrison u. a. [53] und sie wird von Guzmán u. Ureña-López [50, 51] sowie van Meter [101] bestätigt. Wie Harrison u. a. feststellen, hinterlässt die Oszillation einen reskalierten Grundzustand, der zu einer anderen Masse bzw. Gesamtaufenthaltswahrscheinlichkeit gehört. Dieses Verhalten ist für die hier betrachtete Fragestellung, inwieweit eine nichtlineare Modifikation der linearen Schrödingergleichung zu SN-Gleichung experimentell beobachtbar ist, nicht von besonderer Relevanz. Für die Interpretation der SN-Gleichung als Kollapsmodell im Sinne von Penrose [82] (vgl. Abschnitt 3.2.1) stellt sie allerdings ein potentiell Problem dar, denn diese erfordert, dass die gesamte Aufenthaltswahrscheinlichkeit in einer stationären Lösung der SN-Gleichung gebunden wird. Zwar ist denkbar, dass die Abstrahlung von Wahrscheinlichkeit ins Unendliche aufgrund der Wechselwirkung mit umgebender Materie ohne praktische Konsequenz ist, für die Interpretation als Kollapsmodell muss man diese Eigenschaft der SN-Gleichung allerdings als unbefriedigend betrachten.

In Abbildung 4.5 ist die Position des Maximums der radialen Aufent-

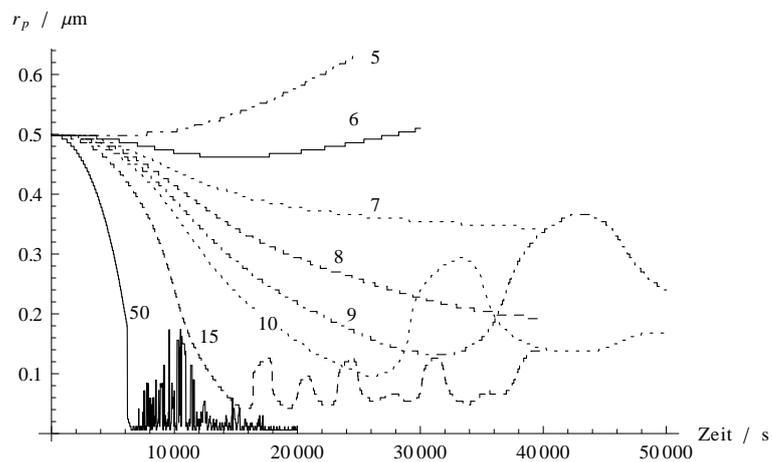


Abbildung 4.5.: Peak der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit über der Zeit geplotet für verschiedene Massenwerte. Die Kurven sind mit den jeweiligen Massen in Einheiten von 10^9 u markiert. [46]

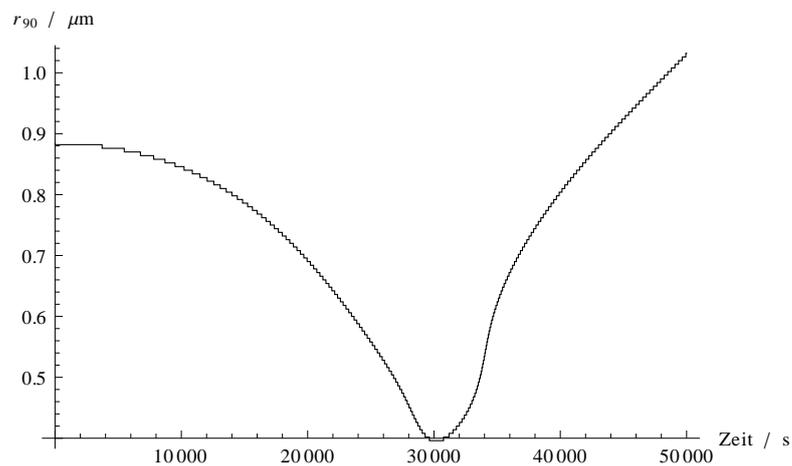


Abbildung 4.6.: Radius r_{90} , innerhalb dessen 90 % der Gesamtaufenthaltswahrscheinlichkeit liegen, über der Zeit geplotet für eine Masse von $m = 10^{10}$ u. Man beachte, dass die Zeitachse *nicht* durch Null sondern durch 400 nm verläuft. [46]

haltungswahrscheinlichkeit, $4\pi r^2 |\psi|^2$, für verschiedene Massen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass für $5 \cdot 10^9$ u die Wellenfunktion über den beobachteten Zeitraum noch expandiert, ab $7 \cdot 10^9$ u ist eindeutig ein kollabierendes Verhalten festzustellen. Für größere Massenwerte sind die Oszillationen klar zu erkennen. Ihre Frequenz nimmt, ebenso wie die Kollapseschwindigkeit, mit der Masse zu. Man beachte jedoch, dass selbst für die größte dargestellte Masse von $5 \cdot 10^{10}$ u die minimale Breite des Wellenpakets erst nach über einer Stunde erreicht wird; die Kollapszeiten in diesem Parameterbereich scheinen für eine experimentelle Überprüfung also kaum geeignet.

Abbildung 4.6 zeigt, dass nicht nur das Maximum der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit für Massen ab etwa $7 \cdot 10^9$ u eine Tendenz zum Ursprung hin zeigt. Hier ist der Radius r_{90} dargestellt, innerhalb dessen sich 90 % der gesamten Aufenthaltswahrscheinlichkeit befinden, in Formeln also

$$4\pi \int_0^{r_{90}} |\psi(r)|^2 r^2 dr = 0,9. \quad (4.60)$$

Auch dieser Wert zeigt ab einer Masse von etwa $7 \cdot 10^9$ u eine klare kollabierende Tendenz. In der Abbildung ist das Verhalten für eine Masse von 10^{10} u zu sehen. Auch hier zeigen sich die Oszillationen in einem etwa acht Stunden andauernden Kollaps gefolgt von einem erneuten Anwachsen des Wertes von r_{90} .

Der Vergleich der Abbildungen 4.5 und 4.6 legt außerdem bereits die Abstrahlung von Wahrscheinlichkeit ins Unendliche nahe: Während die Kurve für 10^{10} u in Abbildung 4.5 nach der ersten Oszillation bei etwa 33 000 Sekunden eine erneute Umkehr und ein Kollabieren des Maximums der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeigt, wächst der Radius, innerhalb dessen 90 % der Aufenthaltswahrscheinlichkeit liegen, nach dem ersten Kollaps kontinuierlich an. Im Video erkennt man neben dem Hauptmaximum mehrere kleine, ins Unendliche laufende Nebenmaxima. Dies ist auch in Abbildung 4.7 dargestellt. Das Hauptmaximum tendiert zwar wieder zum Ursprung, es beinhaltet aber keine 90 % der gesamten Aufenthaltswahrscheinlichkeit mehr.

4.2.3. Die Phase der Wellenfunktion

Da die nichtlineare Entwicklung der Wellenfunktion natürlich auch die Phase betrifft, liegt der Gedanke nahe, für einen experimentellen Test der SN-Gleichung diese anstelle des Betragsquadrats heranzuziehen. In

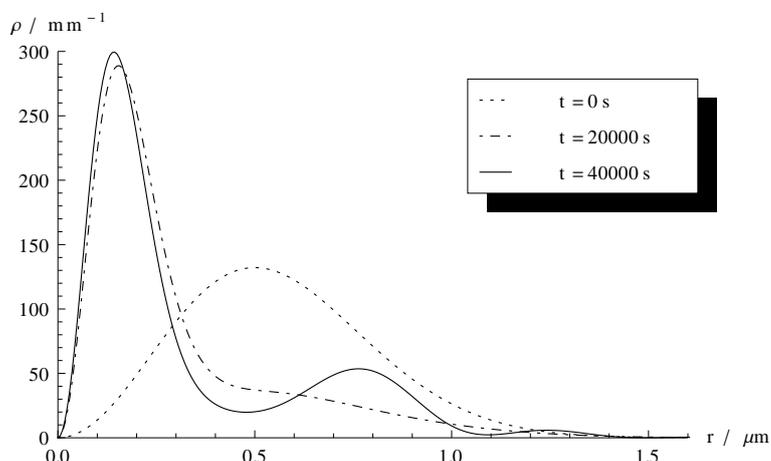


Abbildung 4.7.: Kollabierendes Wellenpaket für $m = 10^{10}$ u. Dargestellt ist die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für drei verschiedene Zeitpunkte wie in Abbildung 4.4. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich neben dem Hauptmaximum weitere Maxima bilden.

der numerischen Analyse stellt sich heraus, dass eine signifikante Veränderung der Phase etwa im selben Massenbereich auftritt, in dem auch Abweichungen für das Betragsquadrat zu erwarten sind. Für eine Masse von $7 \cdot 10^9$ u ist bei $r = 0$ beispielsweise nach 20 000 Sekunden in etwa eine Phasendifferenz von π im Vergleich zur freien Schrödingergleichung zu beobachten (siehe Abbildung 4.8). Für diese Masse, für die bereits ein kollabierendes Verhalten auftritt, zeigt allerdings auch das Betragsquadrat bereits ein sich deutlich von der freien Schrödingergleichung unterscheidendes Verhalten: Das sich nach der SN-Gleichung ausbreitende Wellenpaket verringert sich in seiner Breite über 20 000 Sekunden von 500 auf etwa 400 nm, während es nach der freien Schrödingergleichung auf etwa 650 nm anwächst (vergleiche auch Abbildung 4.4). Andererseits beträgt für eine Masse von $4 \cdot 10^9$ u, für die noch kaum ein Unterschied zur freien Schrödingergleichung in der Evolution der Aufenthaltswahrscheinlichkeit zu beobachten ist (nach 20 000 Sekunden unterscheiden sich beide Wellenpakete um etwa 100 nm in ihrer Breite), die Phasendifferenz nach 20 000 Sekunden immerhin fast $\pi/4$. Je nach experimentellen Voraussetzungen könnte eine Untersuchung, die auf der Phase beruht, also leichter durchzuführen sein. Die Größenordnung, für welche Massen ein Effekt der SN-Gleichung zu erwarten ist, bleibt allerdings dieselbe.

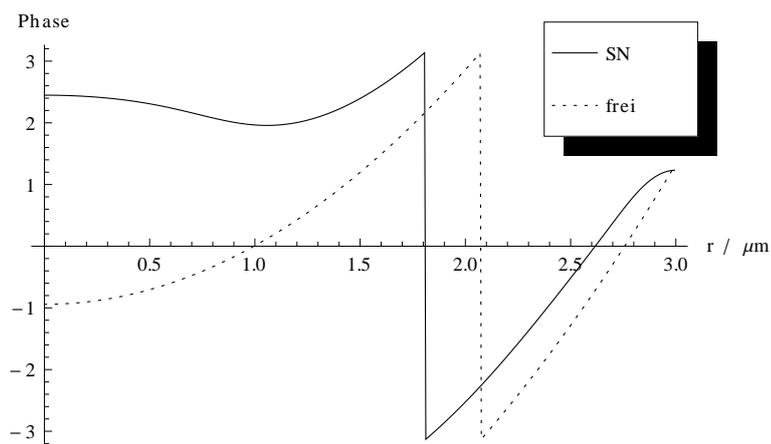
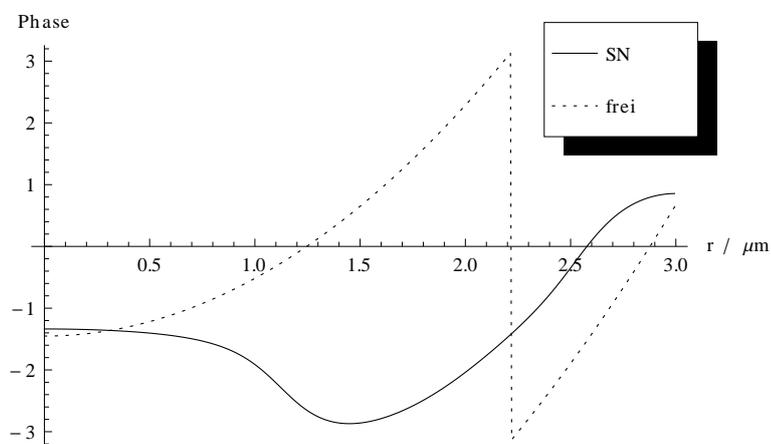
(a) $t = 20000$ s(b) $t = 40000$ s

Abbildung 4.8.: Phase der Wellenfunktion für $m = 7 \cdot 10^9$ u nach 20 000 bzw. 40 000 Sekunden. Die Lösung der SN-Gleichung ist durchgezogen, die der freien Schrödingergleichung zum Vergleich gepunktet eingezeichnet.

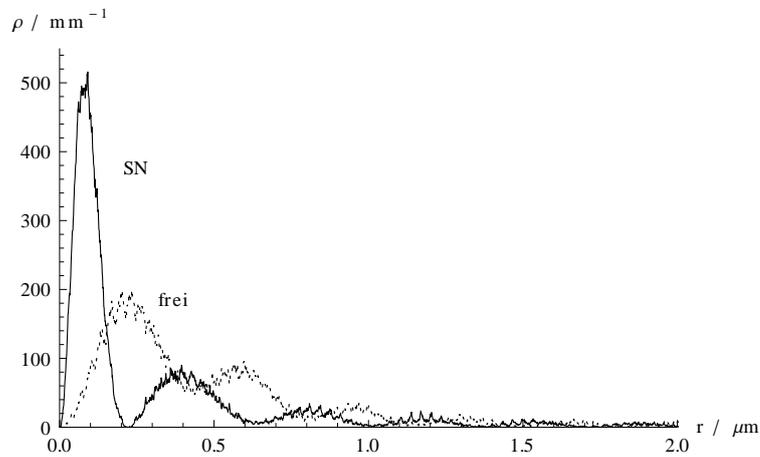


Abbildung 4.9.: Radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit für eine Rechteckfunktion mit einer Masse von $1,2 \cdot 10^{10}$ u nach 10000 s für die freie Schrödingergleichung und die SN-Gleichung.

4.2.4. Nicht-gaußförmiger Anfangszustand

Die Wahl der Anfangsbedingung fiel natürlich vor allem aufgrund dessen einfacher mathematischer Struktur und der Kenntnis der analytischen Lösung in Abwesenheit des Potentials auf das gaußförmige Wellenpaket. Realistische Wellenpakete in experimentellen Szenarien werden in der Regel eine andere Form aufweisen. Insofern ist interessant, welchen Einfluss die Form des Wellenpakets auf die Kollapsmasse hat. Ich habe dies für die Rechteckfunktion¹¹

$$\psi(r) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4\pi a^3}} & \text{für } r < a \\ 0 & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad (4.61)$$

mit Breite $a = 500$ nm untersucht.

In Abbildung 4.9 ist für eine Masse von $1,2 \cdot 10^{10}$ u die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit nach 10000 s entwickelt nach der SN-Gleichung geplottet. Zum Vergleich ist das Ergebnis der Entwicklung nach der freien Schrödingergleichung ebenfalls eingezeichnet. Man sieht auch hier ein deutliches kollabierendes Verhalten. Die Masse, ab welcher ein solches zu beobachten ist, unterscheidet sich zumindest der Größenord-

¹¹die natürlich für das Experiment nicht realistischer ist als die Gaußfunktion, sondern hier nur als zweites Modell dient, um die Abhängigkeit der Kollapsmasse vom Anfangszustand zu studieren

nung nach nicht wesentlich vom für die Gaußfunktion ermittelten Wert. Allerdings ist eine Grenzziehung zwischen Expansion und Kollaps für die Rechteckfunktion deutlich schwieriger als für das gaußsche Wellenpaket.

4.2.5. Unterscheidung von physikalischen und numerischen Effekten

Wie bereits weiter oben bemerkt, wurde zur Kontrolle des Codes das Ergebnis bei abgeschaltetem Potential betrachtet und mit der analytischen Lösung der freien Schrödingergleichung verglichen. Auf diese Weise erhält man auch einen Eindruck davon, von welcher Größenordnung Effekte sind, die durch die numerisch notwendige Beschränkung der Gleichung auf ein endliches Raumgebiet verursacht werden. Wie sich zeigt, führen Reflexionen vom Rand erst dann zu sichtbaren Effekten, wenn auch sichtbare Teile der Wellenfunktion zum Rand hin expandiert sind.

Da das nichtlineare Potential aber gerade die wesentliche Besonderheit der SN-Gleichung darstellt, kann die Abschaltung desselben jedoch nur eine unbefriedigende Antwort auf die Frage geben, wie zuverlässig das numerisch gefundene Verhalten ist. Einen besseren Eindruck erhält man durch Variation der Parameter, z. B. Halbierung oder Verdopplung des räumlichen Gitterabstands δr (bei gleichzeitiger Verdopplung bzw. Halbierung der Zahl der Gitterpunkte), Veränderung der Zahl N der Gitterpunkte (bei konstantem Gitterabstand) oder Veränderung des Zeitschritts δt (bei entsprechender Skalierung der Zahl der Entwicklungsschritte). Von physikalischen Effekten erwartet man, dass sie sich bei einer solchen Variation der Parameter nicht verändern, während für rein numerische Effekte eine Abhängigkeit zu erwarten ist.

In Abbildung 4.10 ist die Kurve mit dem Peak der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit, wie sie bereits in Abbildung 4.5 zu sehen ist, für den Massenwert $1,5 \cdot 10^{10}$ u bei verschiedenen Werten der Zahl N der räumlichen Gitterpunkte dargestellt. Man erkennt einen deutlichen Unterschied zwischen den numerischen Ungenauigkeiten, die sich für größere N auflösen, und den Oszillationen der Wellenfunktion, die physikalischer Natur sind. Auch die Erhöhung von N auf 10 000 bzw. den Maximalwert von 30 000 verändert das Bild nicht. Zudem ergeben Plots für deutlich verschiedene zeitliche Auflösungen δt keinerlei sichtbare Veränderung; erst für ein δt , das etwa fünf Größenordnungen über dem in Abbildungen 4.5 und 4.10 verwendeten Wert ($\delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s) liegt, sind

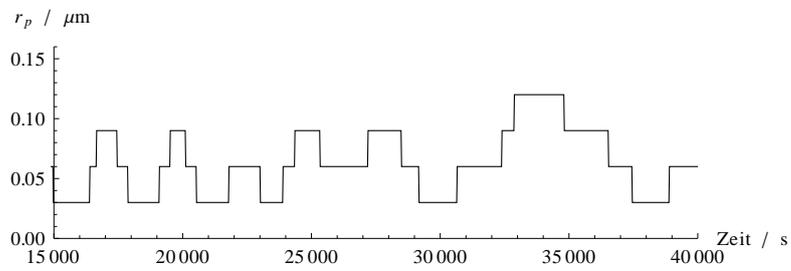
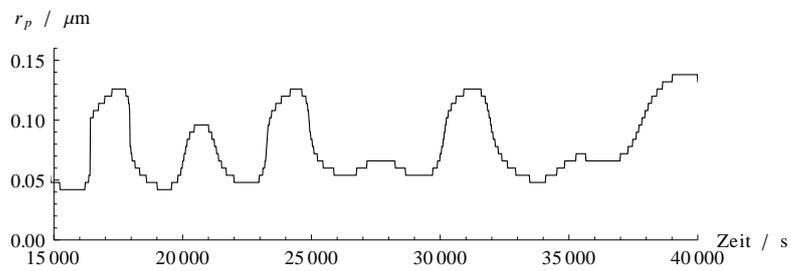
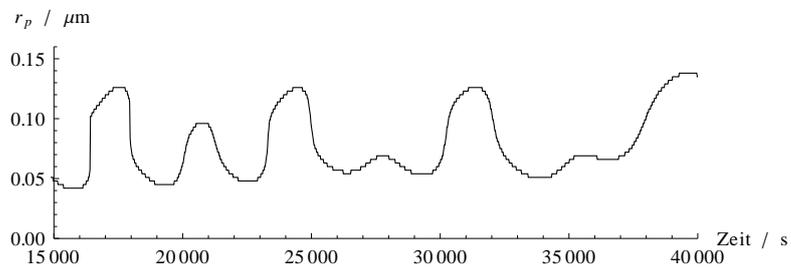
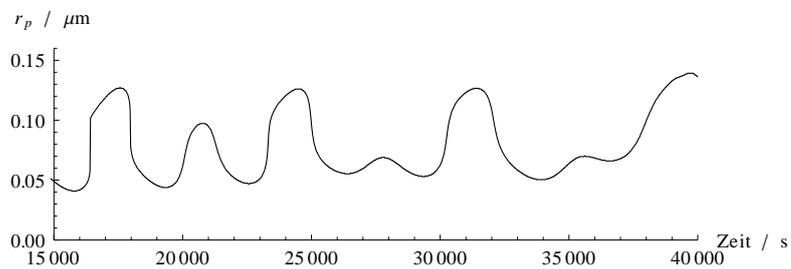
(a) $N = 100$ Gitterpunkte(b) $N = 500$ Gitterpunkte(c) $N = 1000$ Gitterpunkte(d) $N = 5000$ Gitterpunkte

Abbildung 4.10.: Plot des Peaks der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit wie in Abbildung 4.5 für eine Masse von $1,5 \cdot 10^{10}$ u für verschiedene Dichten des räumlichen Gitters.

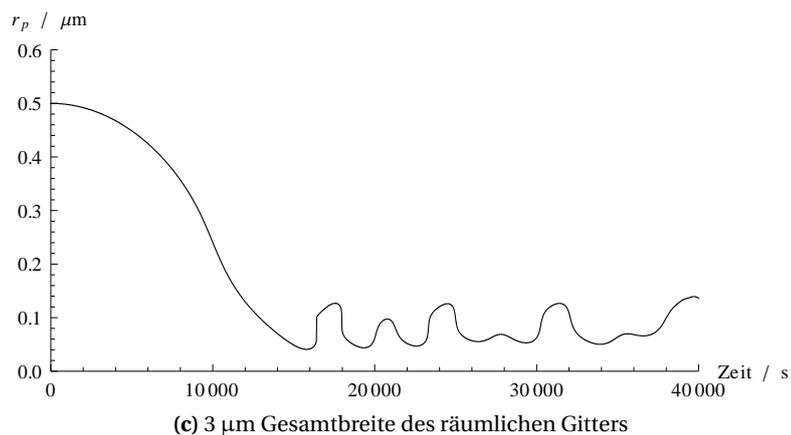
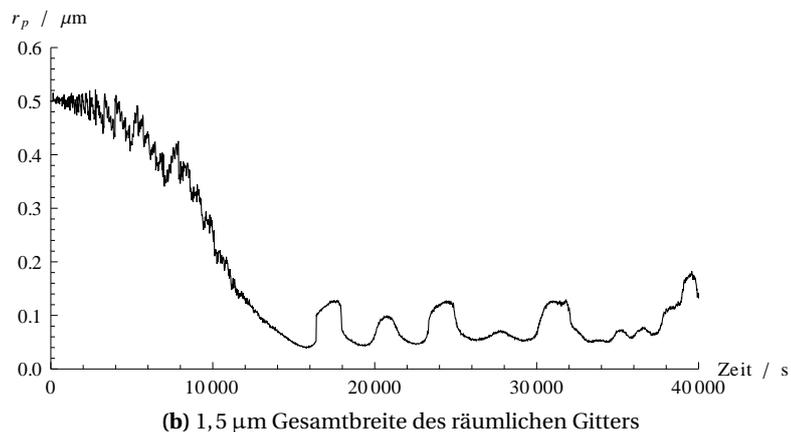
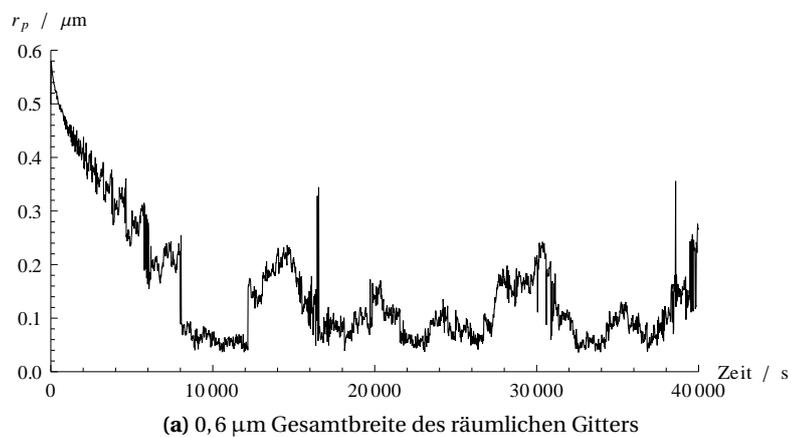


Abbildung 4.11.: Plot des Peaks der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit wie in Abbildung 4.5 für eine Masse von $1,5 \cdot 10^{10}$ u bei einer räumlichen Auflösung von 0,6 nm für verschiedene Zahlen von Gitterpunkten, d. h. verschiedene Breiten des betrachteten Raumbereichs.

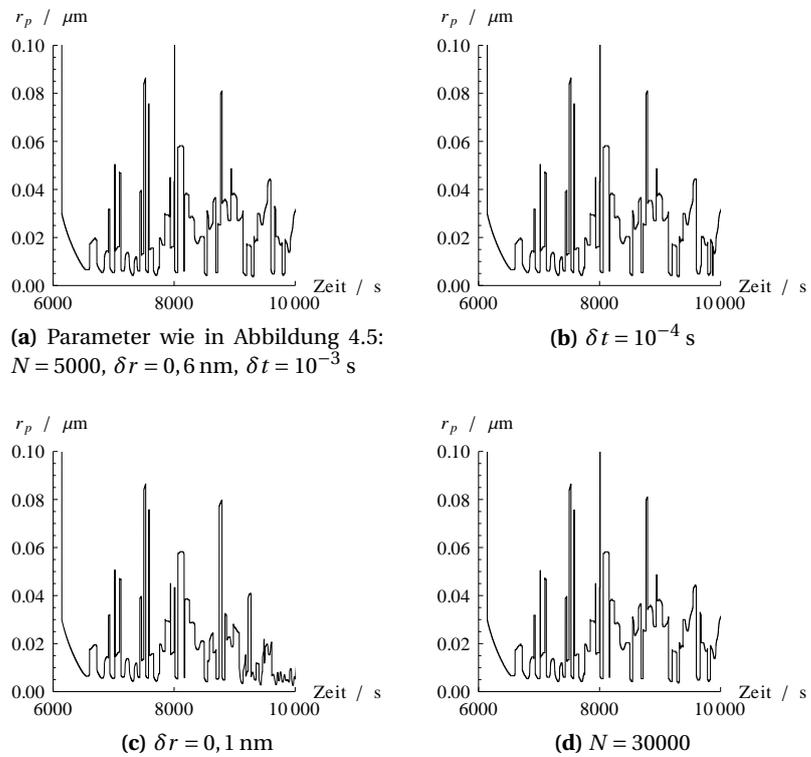


Abbildung 4.12.: Plot des Peaks der radialen Aufenthaltswahrscheinlichkeit wie in Abbildung 4.5 für eine Masse von $5 \cdot 10^{10} \text{ u}$ mit verschiedenen Parametern.

Auswirkungen erkennbar.

Abbildung 4.11 zeigt, wie sich Reflexionen am Rand des numerisch betrachteten, endlichen Raumbereichs auswirken. Für eine Breite des räumlichen Gitters von 600 nm und 1,5 μm sind noch deutlich Interferenzen mit dem am Rand reflektierten Teil der Wellenfunktion zu erkennen. Für die in der Analyse verwendete Breite von 3 μm sind diese Interferenzen nicht mehr nachweisbar.

Auch die scheinbar chaotischen Oszillationen, die in Abbildung 4.5 für eine Masse von $5 \cdot 10^{10}$ u zu sehen sind, lassen sich auf diese Weise analysieren. In Abbildung 4.12 erkennt man, dass zumindest die ersten Peaks unempfindlich gegenüber Veränderungen der numerischen Parameter sind, was die Vermutung nahelegt, dass es sich tatsächlich um einen physikalischen Effekt handelt.

4.3. Modifizierte SN-Gleichung für Vielteilchensysteme

Wie wir im Abschnitt 3.5 festgestellt haben, ist bei der Betrachtung von Vielteilchensystemen anstelle des coulombschen $1/r$ -Potentials das Potential der mit dem betrachteten Objekt assoziierten Materiedichte im Faltungsintegral, $\Phi * |\psi|^2$, anzuwenden. Dies stellt auch Jääskeläinen [59] fest, und modelliert das Vielteilchensystem als homogene Vollkugel mit dem Potential

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM^2}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & \text{für } r < R \\ -\frac{GM^2}{r} & \text{für } r \geq R. \end{cases} \quad (4.62)$$

Für dieses Potential betrachtet er dann die modifizierte stationäre SN-Gleichung

$$E\varphi(\vec{x}) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta\varphi(\vec{x}) + \left(\Phi * |\varphi|^2 \right)(\vec{x}) \varphi(\vec{x}). \quad (4.63)$$

Die freien Parameter dieser Gleichung sind die Masse M und der Radius R der Vollkugel, an dessen Stelle man auch die Dichte $\rho = 3M/(4\pi R^3)$ wählen kann.

Als Maß dafür, wie sich der stationäre Grundzustand mit der Masse und Dichte ändert, betrachtet Jääskeläinen für den Grundzustand den Erwartungswert des Radius,

$$\langle r \rangle = 4\pi \int_0^\infty |\varphi|^2 r^3 dr, \quad (4.64)$$

in Abhängigkeit der Masse M für verschiedene Dichten. Für die SN-Gleichung ist wegen der Skaleninvarianz (2.27) $\langle r \rangle \propto 1/M^3$, wobei in [59] numerisch die Proportionalität zu $\hbar^2 GM^3 \langle r \rangle \approx 4,194$ bestimmt wird. Für große Massen M dagegen ist die Wellenfunktion stark lokalisiert, weshalb sie effektiv das Potential eines harmonischen Oszillators sieht. Der Grundzustand entspricht also näherungsweise dem des harmonischen Oszillators, womit $\langle r \rangle \propto 1/\sqrt{M}$ ist. Jääskeläinen untersucht nun numerisch für zwei verschiedene Dichten, nämlich die des leichtesten festen Elements Lithium ($\rho = 534 \text{ kg/m}^3$) und die des schwersten festen Elements Osmium ($\rho = 22610 \text{ kg/m}^3$), $\langle r \rangle$ in Abhängigkeit von M . Das beobachtete Verhalten ist wie vorhergesagt: Für kleine Massen findet sich die $1/M^3$ -Proportionalität nach der SN-Gleichung und für große Massen die $1/\sqrt{M}$ -Proportionalität des harmonischen Oszillators. Für die betrachteten Dichten findet der Übergang zwischen beiden Verhaltensweisen für Massen zwischen etwa $9 \cdot 10^9 \text{ u}$ und $3 \cdot 10^{10} \text{ u}$ statt, die zugehörigen mittleren Radien liegen zwischen 50 und 300 nm, beide Parameter also in derselben Größenordnung, für die auch Effekte der SN-Gleichung auf das Dispersionsverhalten zum Vorschein treten.

4.3.1. Numerische Analyse mit modifiziertem Potential

Die Annahme liegt demnach nahe, dass die Notwendigkeit, für Vielteilchensysteme das Potential der SN-Gleichung zu modifizieren, auch Auswirkungen auf die von uns im vorigen Abschnitt bestimmte Kollapsmasse hat. Dem wollen wir nun nachgehen und unsere vorherige numerische Analyse für das modifizierte Potential wiederholen. Ich habe dazu im Wesentlichen denselben Programmcode verwendet, lediglich die Prozedur zur Berechnung des Potentials wird durch die Berechnung des mit dem Vollkugelpotential (4.62) gefalteten Betragsquadrats ersetzt. In Ergänzung zum von Jääskeläinen [59] betrachteten Vollkugelpotential habe ich dabei auch das Potential einer Hohlkugel

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM^2}{R} & \text{für } r < R \\ -\frac{GM^2}{r} & \text{für } r \geq R \end{cases} \quad (4.65)$$

betrachtet. Zumindest für die in bisherigen molekulinterferometrischen Experimenten verwendeten Fluorofullerene stellt es ein realistischeres Modell dar als die Vollkugel. Die im Folgenden geschilderten Ergebnisse sind auch in [48] veröffentlicht.

Wir untersuchen, wie von Jääskeläinen vorgeschlagen, die Vollkugel

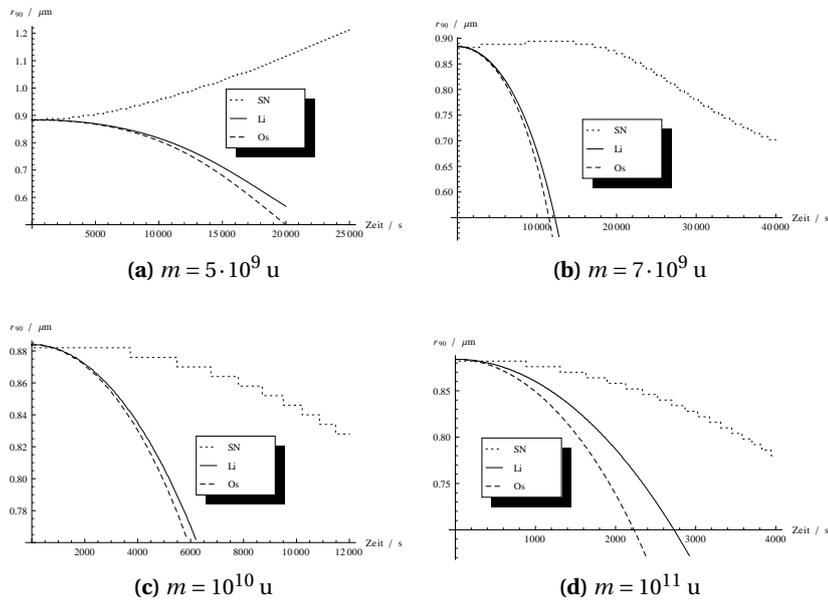


Abbildung 4.13.: Radius r_{90} , innerhalb dessen 90% der Gesamtaufenthalts-wahrscheinlichkeit liegen, über der Zeit geplottet für verschiedene Massen. Dargestellt sind jeweils die Kurve für die SN-Gleichung mit Coulomb-artigem Potential wie in Abbildung 4.6 und die Kurven für eine Vollkugel mit der Dichte von Lithium (Li) bzw. Osmium (Os). [48]

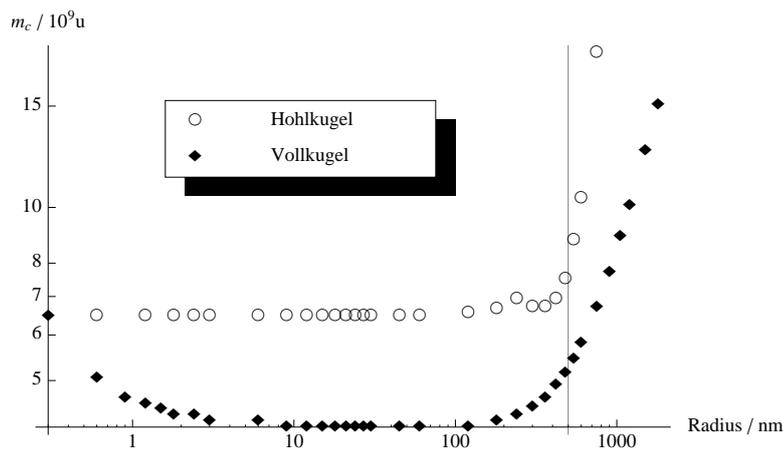


Abbildung 4.14.: Die kritische Masse, ab der das Wellenpaket ein kollabierendes Verhalten aufweist, geplottet über dem Radius der Voll- bzw. Hohlkugel im Potentialterm. [48]

mit der Dichte von Lithium bzw. Osmium. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Obwohl man intuitiv vermuten könnte, dass die Verteilung der Masse auf ein größeres Volumen zu einer Abschwächung der Selbstgravitation führt, stellt sich heraus, dass für diese Dichten das kollabierende Verhalten sogar noch verstärkt wird. Für alle betrachteten Massen findet der Kollaps schneller statt als für die SN-Gleichung mit Coulomb-artigem Potential. Im Falle einer Masse von $5 \cdot 10^9$ u, bei der für das Coulomb-artige Potential noch kein Kollaps zu beobachten war, findet nun bereits ein solcher statt.

Einen besseren Eindruck davon, wie die Ersetzung des Potentials die Dynamik des gaußschen Wellenpakets verändert, erhält man in Abbildung 4.14. Sie zeigt die Kollapsmasse in Abhängigkeit vom Radius der Voll- bzw. Hohlkugel im Potentialterm. Zur Bestimmung der Kollapsmasse wurde die Gleichung über den relevanten Massenbereich mit einer Schrittweite von 0,1 u numerisch analysiert. Anschließend wurde anhand der daraus entstehenden Videosequenzen abgelesen, ab welcher Masse das Wellenpaket anfänglich zum Ursprung hin tendiert.

Im Plot ist klar zu sehen, dass für Radien oberhalb der Breite des Wellenpakets von 500 nm tatsächlich das intuitiv erwartete Verhalten auftritt und die für einen Kollaps nötige Masse rasch anwächst. Unterhalb dieses Werts zeigt sich für das Hohlkugelpotential eine annähernd konstante Kollapsmasse. Für die Vollkugel jedoch liegt die Kollapsmasse im Bereich bis 500 nm sogar unter dem Wert für das Coulomb-artige Potential. Damit erklärt sich auch das Verhalten, welches wir für die Dichten von Lithium und Osmium beobachten. Bei einer Masse von 10^{10} u entspricht die Dichte von Lithium einem Kugelradius von knapp 200 nm (der Radius für Osmium liegt bei etwa einem Drittel davon). Eine Abschwächung des kollabierenden Verhaltens ist erst für Dichten, die etwa zwei Größenordnungen darüber liegen, zu erwarten.

Es sei jedoch angemerkt, dass alle Aussagen über Kugelradien oberhalb von 500 nm mit Vorsicht zu genießen sind, soweit es um die experimentelle Relevanz geht. Als wir in Abschnitt 3.5 die Vielteilchen-SN-Gleichung motiviert haben, mussten wir schließlich die einschränkende Annahme machen, dass die Schwerpunktswellenfunktion in ihrer Ausdehnung die Abmessungen des betrachteten Vielteilchensystems überschreitet.

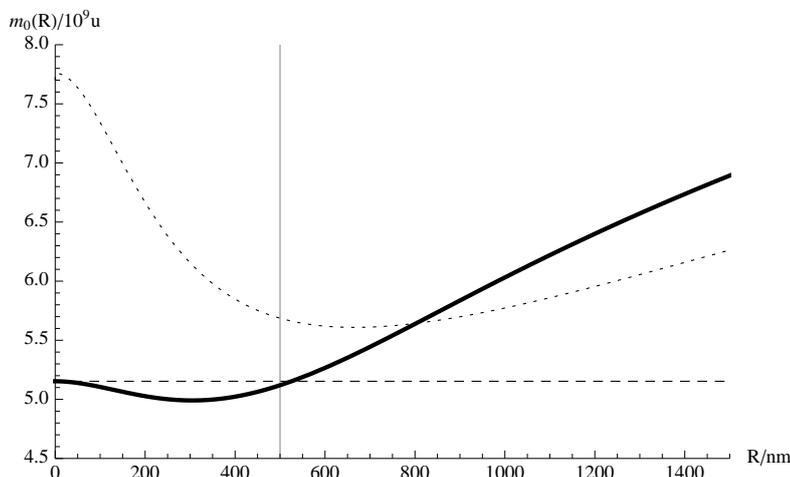


Abbildung 4.15.: Masse $m_0(R)$, bei der die Gesamtenergie das Vorzeichen wechselt, geplottet über dem Radius der Voll- bzw. Hohlkugel im Potentialterm. Dargestellt sind die Kurve für die SN-Gleichung mit Coulomb-Potential (gestrichelte Gerade), für das Vollkugelpotential (gepunktete Linie) und für das Hohlkugelpotential (durchgezogene Linie). [48]

Ein Erklärungsversuch für die geringere Kollapsmasse bei kleinen Radien

Wie erwähnt entspricht das Abnehmen der Kollapsmasse für das Vollkugelpotential auf etwa zwei Drittel des Wertes für die SN-Gleichung nicht unmittelbar der intuitiven Erwartung. Dieses Ergebnis lässt sich allerdings untermauern, wenn wir uns an die Betrachtung in Abschnitt 4.1.2 erinnern. Dort hatten wir festgestellt, dass ein Kollaps (im Sinne eines endlich bleibenden zweiten Moments) nur bei negativer Gesamtenergie möglich ist, und hieraus einen Schätzwert für die Kollapsmasse abgeleitet.

Nun ist Gleichung (4.9) für das modifizierte Potential nicht mehr korrekt. Vielmehr ist \ddot{Q} für ein beliebiges Potential U gegeben durch

$$\ddot{Q} = \frac{1}{m} \left(4T - 2 \int |\psi(t, \vec{x})|^2 \vec{x} \cdot \vec{\nabla} U(t, \vec{x}) d^3x \right). \quad (4.66)$$

Nur wenn das Potential eine Poisson-Gleichung, $\Delta U \propto |\psi|^2$, erfüllt, ist der Integralterm gleich V und es gilt (4.9).

Auch wenn die Gesamtenergie aus diesem Grunde keine Massenuntergrenze für ein endlich bleibendes zweites Moment liefert, liegt aber

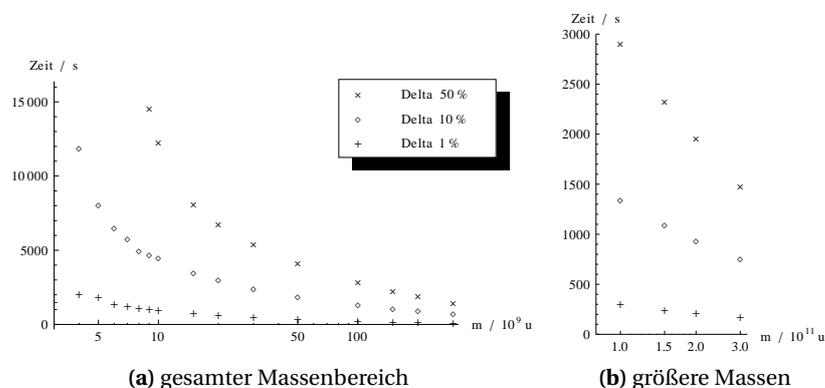


Abbildung 4.16.: Plot der Zeitdauer, bis sich die Lösung der SN-Gleichung in ihrer Halbwertsbreite um 1%, 10% bzw. 50% von der Lösung der freien Schrödingergleichung unterscheidet für verschiedene Massen. Rechts eine vergrößerte Abbildung für die vier größten Massenwerte. [46]

die Vermutung nahe, dass die Masse m_0 , für welche die Gesamtenergie null wird, qualitativ eine ähnliche Abhängigkeit vom Radius R der Hohl- bzw. Vollkugel zeigt wie die Kollapsmasse. Diese Masse $m_0(R)$ ist sowohl für das Hohl- wie auch für das Vollkugelpotential in Abbildung 4.15 dargestellt. Während für die Hohlkugel (durchgezogene Linie) nur ein leichter Rückgang des Wertes von $m_0(R)$ zwischen null und 500 nm zu erkennen ist, ist dieser für die Vollkugel (gestrichelte Linie) sehr viel ausgeprägter, was sich mit dem numerisch gefundenen Verhalten der Kollapsmasse deckt.

Man beachte aber, dass nur für die SN-Gleichung und das Hohlkugelpotential $m_0(R)$ im gesamten betrachteten Bereich unterhalb der Kollapsmasse (vgl. Abbildung 4.14) liegt. Für die Vollkugel verläuft $m_0(R)$ bei kleinen Radien deutlich oberhalb der Kollapsmasse und kann demnach keinesfalls als Untergrenze interpretiert werden.

4.4. Kollapszeiten und experimentelle Tests

In der vorangegangenen Analyse in Abschnitt 4.2.2 hat sich ein weiteres Problem offenbart: Schaut man etwa auf Abbildung 4.6, so sieht man, dass der dort dargestellte Kollaps eines gaußschen Wellenpakets etwa 30 000 Sekunden – also mehr als acht Stunden – andauert. Eine Zeitspanne, die kaum realistisch für einen experimentellen Nachweis erscheint. Lassen sich dennoch Effekte der SN-Gleichung im Experiment beobach-

ten?

Wie bereits in Abbildung 4.5 zu sehen ist, kollabiert das 500 nm breite Wellenpaket für größere Massen schneller. So erreicht der Peak der Aufenthaltswahrscheinlichkeit sein Minimum für eine Masse von $1,5 \cdot 10^9$ u bereits nach vier Stunden, für $5 \cdot 10^{10}$ u sogar bereits nach eineinhalb Stunden.

Abhängig vom Experiment, das durchgeführt werden soll, ist allerdings ein vollständiger Kollaps gar nicht zwingend erforderlich. Interessanter für die experimentelle Überprüfung der SN-Gleichung ist die Frage, wie sehr das von der SN-Gleichung vorhergesagte Verhalten von dem nach der freien Schrödingergleichung abweicht. Als Kriterium für die Abweichung betrachten wir die Halbwertsbreite des Wellenpakets. In Abbildung 4.16 ist für verschiedene Massen dargestellt, nach welcher Zeit sich die Halbwertsbreiten für SN-Gleichung und freie Schrödingergleichung voneinander jeweils um 1 %, 10 % bzw. 50 % unterscheiden. Eine einprozentige Abweichung bei einer Masse von $3 \cdot 10^{11}$ u erreicht man demnach nach zwei bis drei Minuten, was einer realistischen Zeitspanne für Experimente schon näher kommt.

Wesentlich deutlicher ließe sich die Kollapszeit mithilfe der Skaleninvarianz (2.27) reduzieren. Man nutzt dabei aus, dass bei einer linearen Skalierung der Masse, $m \rightarrow \mu m$, Längen mit μ^{-3} , Zeiten aber sogar mit μ^{-5} mit zu transformieren sind. Haben wir also für eine Masse m eines Wellenpakets der Breite a eine Kollapszeit T gefunden, so kollabiert das Wellenpaket der Masse μm mit Breite $\mu^{-3} a$ ebenfalls, und zwar innerhalb der Zeit $\mu^{-5} T$. In Abbildung 4.6 haben wir für $m = 10^{10}$ u und $a = 500$ nm eine Kollapszeit von $T = 30\,000$ s gefunden. Bei einer Masse von 10^{11} u und einer Breite von einem halben Nanometer würde die Kollapszeit also schon auf 300 ms reduziert. Allerdings ist dabei natürlich zu beachten, dass im Sinne der in Abschnitt 3.5 gegebenen Herleitung die Breite des Wellenpakets nicht kleiner werden darf als die physikalischen Abmessungen des betrachteten Systems. Nimmt man den Grenzfall an, dass die Abmessungen gerade übereinstimmen, und berücksichtigt, dass das Volumen wie a^3 , die Dichte folglich mit μ^{10} skaliert, so sieht man, dass diese Erfordernis sehr schnell zu unrealistisch großen Dichten führt. Ein Molekül mit einem Durchmesser von 500 nm hat bei einer Masse von 10^{11} u bereits eine Dichte von etwa $2,5 \text{ g/cm}^3$, das Fluorofulleren $\text{C}_{60}\text{F}_{48}$ hat etwa die zehnfache Dichte [52, 96]. Möchte man diese Dichte nicht wesentlich überschreiten, lässt sich durch Ausnutzung der Skaleninvarianz also im Vergleich zu dieser Masse die Kollapszeit nicht

auf viel weniger als ein Drittel reduzieren.

5. Schlussfolgerungen und Ausblick

Die SN-Gleichung liefert, neben der ihr von Diósi und Penrose zugeordneten Rolle als Modell für eine gravitativ bedingte quantenmechanische Zustandsreduktion, auch einen alternativen Zugang, um sich dem Problem der Quantengravitation zu nähern. Zum einen stellt sie eine experimentelle Überprüfung der von Carlip [20] (und zuvor von Rosenfeld [88]) aufgeworfenen Frage in Aussicht, ob Gravitation überhaupt quantisiert werden muss. Zum anderen bietet sie, auch wenn man von der Notwendigkeit einer Quantisierung ausgeht, die Möglichkeit einer Unterscheidung originärer Effekte einer solchen Quantengravitationstheorie von Effekten, die auch nach den zurzeit bekannten physikalischen Gesetzen zu erwarten sind.

Im Verlauf dieser Arbeit habe ich dargelegt, dass die SN-Gleichung einen naheliegenden Ansatz zur Modifikation der Schrödingergleichung darstellt, möchte man die Wechselwirkung mit dem von der Quantenmaterie erzeugten Gravitationsfeld mit berücksichtigen. Misst man der Ableitung der Schrödingergleichung aus der Klein-Gordon-Gleichung, bzw. der Ableitung der Pauli- aus der Dirac-Gleichung, wie man sie in vielen Lehrbüchern der Quantenmechanik findet, eine Bedeutung zu, die über bloße Rechengymnastik hinaus geht, so sollte man auch der in Abschnitt 3.4 vorgeführten Ableitung der SN-Gleichung Beachtung schenken.

In diesem Sinne ist die SN-Gleichung als nicht-relativistischer Grenzfall der semiklassischen Einstein-Gleichungen (1.1) – also einer fundamental semiklassischen Theorie – zu verstehen. Die Kontroverse um diese Idee habe ich in Kapitel 3 zusammengefasst. Wie dort erläutert wurde, gibt es zwar ernstzunehmende Fragen in Zusammenhang mit dem Ansatz einer fundamental semiklassischen Theorie der Gravitation, zu all diesen Bedenken können jedoch gute Gegenargumente ins Feld geführt werden. Ähnliches gilt für die Einwände gegen nichtlineare Schrödingergleichungen, wie sie in Abschnitt 3.3 dargelegt sind. Die von Gisin [41] vorgetragene Argumente, dass eine deterministische¹ nichtlineare

¹d. h. nicht stochastische, vgl. [43]

Schrödingergleichung immer zur Möglichkeit überlichtschneller Signalausbreitung führt, geben zwar Anlass, die Gültigkeit der SN-Gleichung kritisch zu hinterfragen, letztlich setzt Gisin's Argument allerdings die Gültigkeit der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik implizit voraus. Dabei ist gerade die Möglichkeit, sie im Sinne der Vorschläge von Diósi [29] und Penrose [82] als Modell für die quantenmechanische Zustandsreduktion betrachten zu können – und damit die Kopenhagener Deutung samt des sogenannten „Messproblems“ der Quantenmechanik loszuwerden – eines der stärksten Argumente für die SN-Gleichung. Am Ende muss die Frage ihrer Relevanz vom Experiment beantwortet werden: Liefert die SN-Gleichung für Experimente mit massiven Quantenobjekten genauere Vorhersagen als es die lineare Schrödingergleichung vermag?

Welche Schlüsse lassen sich nun aus den numerischen Ergebnissen, die ich in Kapitel 4 vorgestellt habe, für experimentelle Tests der SN-Gleichung ziehen? Zunächst können wir feststellen, dass ein Kollaps eines gaußförmigen Wellenpakets mit einer Ausdehnung von einem halben Mikrometer bei einer Masse von 6 bis $7 \cdot 10^9$ u zu erwarten ist. Dieser Wert liegt zwar um Größenordnungen über den heute bereits in Molekülinterferometrieexperimenten realisierbaren Massen, liegt aber noch innerhalb der Grenzen des für die nicht allzu ferne Zukunft Vorstellbaren [3].

Die Herleitung der SN-Gleichung für die Schwerpunktswellenfunktion eines Vielteilchensystems in Abschnitt 3.5 hat zusammen mit der numerischen Untersuchung in 4.3 gezeigt, dass es tatsächlich zutreffend ist, die SN-Gleichung auch zur Beschreibung eines komplexen Moleküls heranzuziehen – zumindest näherungsweise und solange die Schwerpunktswellenfunktion in ihren Abmessungen die Größe des Moleküls überschreitet. Allerdings zeigt die numerische Analyse auch, dass für experimentelle Tests zunächst das in Abschnitt 4.4 geschilderte Problem der großen Kollapszeiten in den Griff zu bekommen ist. Außerdem lässt sich die Annahme der sphärischen Symmetrie für realistische experimentelle Szenarien nicht aufrecht erhalten. Erste, nicht abgeschlossene Untersuchungen legen nahe, dass sich die Kollapsmasse bei einer axialsymmetrischen Verzerrung des Wellenpakets um einen Faktor zwei oder drei nur unwesentlich vergrößert. Hier bedarf es aber weiterer Analysen, idealerweise anhand eines konkreten experimentellen Szenarios, um die Auswirkungen realistischer Anfangsbedingungen zu überprüfen. Das gilt auch für Abweichungen der Form des anfänglichen Wellenpa-

kets von der Gaußkurve.

Auf experimenteller Seite lässt sich unter Umständen eine Alternative zu molekülinterferometrischen Tests finden. Eine Möglichkeit sind quantenoptomechanische Experimente, wie sie zum Test der Planck-Skala von Pikovski u. a. [84] vorgeschlagen wurden. Dabei werden die Schwerpunktswellenfunktionen massiver optischer Resonatoren zur Interferenz gebracht. Auch eine vollständige Abkehr von interferometrischen Methoden ist denkbar. Die zu beobachtende Eigenschaft der SN-Gleichung, die Abweichung der dynamischen Ausbreitung eines Wellenpakets im Vergleich zur linearen Schrödingergleichung, lässt sich prinzipiell auch aus einer einfachen statistischen Auswertung des Aufenthaltsortes in Abhängigkeit von der Zeit nachweisen. Interessant ist etwa der Vorschlag von Aspelmeyer², ein Molekül in einem Fallenpotential auf einen gaußförmigen Anfangszustand zu präparieren. Nach Abschaltung des Fallenpotentials befindet sich das Molekül im freien Fall und man kann nach einer gewissen Zeitdauer³ freier Ausbreitung die räumliche Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte vermessen. In diesem Fall ließen sich wegen des gaußschen Anfangszustands die hier gewonnenen Ergebnisse unmittelbar übertragen. Achtet man darauf, dass die Schwerpunktswellenfunktion die Abmessungen des Moleküls nicht unterschreitet, und dass die Dichte des Moleküls im Bereich realistischer Dichten bleibt, so sagt, wie wir am Ende des Kapitels 4 festgestellt haben, die SN-Gleichung für Massen von rund 10^{11} u eine einprozentige Abweichung zur linearen Schrödingergleichung innerhalb etwas mehr als einer Minute voraus. Zumindest in Satellitenexperimenten könnte unter diesen Vorzeichen ein Test der SN-Gleichung möglich sein.

²private Korrespondenz

³Bei einem Laborexperiment ist die Dauer hauptsächlich durch die Höhe des Experiments begrenzt, bei üblichen Raumhöhen sind also Fallzeiten von einigen hundert Millisekunden möglich.

Anhang

A. Konventionen und Notationen

Ich verwende in dieser Arbeit – wo es von Relevanz ist – eine Metrikkonvention mit mehrheitlich positivem Vorzeichen, $(-, +, +, +)$. Sofern nichts anderes angegeben ist, gilt die einsteinsche Summenkonvention, dass über als ko- und kontravariant auftauchende, doppelte Indizes zu summieren ist.

A.1. Physikalische Größen

Symbol	Bedeutung
\hbar	Plancksches Wirkungsquantum dividiert durch 2π , $\hbar = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Js
c	Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458$ m/s
G	Gravitationskonstante $G = 6,674 \cdot 10^{-11}$ m ³ /kg s ²
m_P	Planckmasse $m_P = \sqrt{\hbar c / G} = 2,177 \cdot 10^{-8}$ kg
l_P	Plancklänge $l_P = \sqrt{\hbar G / c^3} = 1,616 \cdot 10^{-35}$ m
$R_{\mu\nu}$	Ricci-Tensor
$g_{\mu\nu}$	Metrik-Tensor
R	Krümmungsskalar / Ricci-Skalar
Ψ	Zustandsvektor im Phasenraum
$T_{\mu\nu}$	Energie-Impuls-Tensor
ψ	komplexwertige Wellenfunktion $\psi(t, \vec{x})$
U	Gravitationspotential $U(t, \vec{x})$, nichtlinearer Term in der Schrödingergleichung

Symbol	Bedeutung
V	je nach Kontext ortsabhängiges Potential , $V(\vec{x})$ (linearer Term in der Schrödingergleichung) oder potentielle Energie der SN-Gleichung, $V = m \int U \psi ^2 d^3x$
Φ	ortsabhängiges Potential $\Phi(\vec{x})$, aus dessen Faltung mit $ \psi ^2$ das Gravitationspotential $U = \Phi * \psi ^2$ resultiert
K	dimensionslose Kopplungskonstante $K = \frac{2l}{l_p} \left(\frac{m}{m_p} \right)^3$
\mathcal{L}	Lagrange-Dichte
S	Wirkung $S = \iint \mathcal{L} dt d^3x$
\vec{j}	Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi)$
\mathcal{E}	erhaltene Energie der Hartree- bzw. SN-Gleichung, $\mathcal{E} = \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi ^2 + V \psi ^2 + \frac{1}{2} (\Phi * \psi ^2) \psi ^2 \right) d^3x$
μ	Skalierungsfaktor bei Massenreskalierung, $m \rightarrow \mu m$
φ	räumliche Wellenfunktion $\varphi(\vec{x})$ (in stationärer Gleichung)
E	Energie der stationären SN-Gleichung, $E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\varphi + mU\varphi$
T	kinetische Energie der SN-Gleichung, $T = \frac{\hbar^2}{2m} \int \vec{\nabla} \psi ^2 d^3x$
$G_{\mu\nu}$	Einstein-Tensor $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$
$\{ \psi_i\rangle\}$	Gemisch von Zuständen $ \psi_i\rangle$
ϕ	elektrisches Potential
\vec{A}	elektromagnetisches Vektorpotential
e	Elementarladung , $e = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Ψ_N	N-Teilchen-Wellenfunktion
χ	Wellenfunktion der Relativkoordinaten

A.2. Mathematische Notationen

Symbol	Bedeutung
i	imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$
$\vec{\nabla}$	Gradient in drei Dimensionen
Δ	Laplace-Operator $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ in drei Dimensionen
$ \otimes $	Betrag komplexer Zahlen $ \otimes = \sqrt{\otimes \otimes^*}$
$*$	Faltungsintegral $(u * v)(\vec{x}) := \int u(\vec{x} - \vec{y})v(\vec{y})d^3y$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$H^k(\mathbb{R}^3)$	Sobolev-Raum $H^k(\mathbb{R}^3) := W^{k,2}(\mathbb{R}^3)$, d. h. der Raum der Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, deren schwache partielle Ableitungen bis zur Ordnung k in $L^2(\mathbb{R}^3)$ liegen
$L^p(\mathbb{R}^3)$	Lebesgue-Raum der p -fach integrierbaren Funktionen
Δ_{\otimes}	Laplace-Operator bezüglich \otimes
Δ_r	radiale Komponente des Laplace-Operators
\otimes^*	komplexe Konjugation von \otimes
$\dot{\otimes}$	Zeitableitung $\dot{\otimes} := \frac{\partial}{\partial t} \otimes$
\otimes'	je nach Kontext eine Variable oder eindimensionale Ortsableitung
$\langle \otimes \rangle$	Ortserwartungswert $\langle \otimes \rangle = \int \otimes(\vec{x}) \psi(t, \vec{x}) ^2 d^3x$
$\ \otimes\ $	L^2-Norm $\ \otimes\ = (\int \otimes(\vec{x}) ^2 d^3x)^{1/2}$
\propto	proportional
\inf	Infimum
$\delta_{ij} / \delta_{\mu}^{\nu}$	Kronecker-Delta
∇_{μ}	kovariante Ableitung nach x^{μ}
\otimes	direktes Produkt von Hilberträumen (bzw. Zuständen verschiedener Hilberträume)
$\text{Tr}(\otimes)$	Spur einer Matrix \otimes
∂_{μ}	Ableitung $\partial_{\mu} = \partial / \partial x^{\mu}$
\square	d'Alembert Operator $\square = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \Delta$

Symbol	Bedeutung
$\mathbb{1}$	Identitätsoperator bzw. Einheitsmatrix
σ^i	Pauli-Matrizen $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
γ^μ	Dirac-Matrizen , $\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$
γ^5	zusätzliche Dirac-Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
Γ^μ	Raumzeit-abhängige Dirac-Matrizen
\otimes^\dagger	adjungierter Operator bzw. adjungierte Matrix $\otimes^\dagger = (\otimes^*)^T$
$\overline{\otimes}$	adjungierter Spinor $\overline{\otimes} = \otimes^\dagger \gamma_0$
Ker	Kern einer Abbildung, $\text{Ker } \otimes := \{x \mid \otimes(x) = 0\}$
Im	Bildmenge einer Abbildung
\otimes^\perp	orthogonales Komplement
div	Divergenz eines Vektorfeldes
$B_{\mathbb{R}^3}$	(dreidimensionale) Einheitskugel
$\partial\otimes$	Rand des Gebiets \otimes
D	Dirac-Operator
$[A, B]$	Kommutator $[A, B] = AB - BA$
$\{A, B\}$	Antikommutator $\{A, B\} = AB + BA$
$\text{Re } \otimes$	Realteil von \otimes
$\mathcal{O}(\otimes)$	Landau-Symbol „Groß-O“
\vec{r}^N	N-Teilchen-Koordinaten , kurz für $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$
dV^N	$3N$ -dimensionales Volumenelement $d^3 r_1 \cdots d^3 r_N$
$\delta(\otimes)$	Delta-Distribution
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

B. Galilei-Invarianz der Schrödinger-Newton-Gleichung

Wir betrachten die Galilei-Gruppe, deren Elemente wir – den Überlegungen in [44] folgend – durch einen \mathbb{R}^4 -Isomorphismus g beschreiben:

$$g : (t, \vec{x}) \mapsto g(t, \vec{x}) := (t + b, \mathbf{R}\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}). \quad (\text{B.1})$$

Die Abbildung bewirkt eine Phasentransformation der Wellenfunktion

$$\psi(t, \vec{x}) \rightarrow T_g \psi(t, \vec{x}) := \exp(i f(t, \vec{x})) (\psi \circ g^{-1})(t, \vec{x}), \quad (\text{B.2})$$

die wir zunächst unbestimmt lassen möchten. Um die Transformation der Lagrange-Dichte (2.6) (hier ohne das Potential V und nur für ein Coulomb-artiges Potential Φ)

$$\mathcal{L}[\psi, \dot{\psi}] = \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) - \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla} \psi|^2 - \frac{1}{2} m U[\psi] |\psi|^2 \quad (\text{B.3})$$

mit dem Gravitationspotential

$$U[\psi](t, \vec{x}) = -Gm \int \frac{|\psi(t, \vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \quad (\text{B.4})$$

zu betrachten, benötigen wir die Transformationen

$$\dot{\psi}(t, \vec{x}) \rightarrow e^{i f(t, \vec{x})} (\dot{\psi} \circ g^{-1} - \vec{v} \cdot \mathbf{R} \vec{\nabla} \psi \circ g^{-1} + i \dot{f}(\psi \circ g^{-1}))(t, \vec{x}) \quad (\text{B.5})$$

$$\vec{\nabla} \psi(t, \vec{x}) \rightarrow e^{i f(t, \vec{x})} (\mathbf{R} \vec{\nabla} \psi \circ g^{-1} + i \mathbf{R} \vec{\nabla} f(\psi \circ g^{-1}))(t, \vec{x}), \quad (\text{B.6})$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die inverse Matrix zur Rotation \mathbf{R} der transponierten Matrix entspricht.

Das Gravitationspotential transformiert sich kovariant (wie ein Skalar) unter Galilei-Transformationen. Um das zu sehen, bezeichnen wir die Einschränkung des Gruppenelements g auf die räumlichen Komponenten mit $\tilde{g}_t : \vec{x} \mapsto \mathbf{R}\vec{x} + \vec{v}t + \vec{a}$. Die Transformation des Gravitationspotentials ist dann

$$\begin{aligned} U[\psi](t, \vec{x}) &\rightarrow U[T_g \psi](t, \vec{x}) = -Gm \int \frac{|T_g \psi(t, \vec{y})|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \\ &= -Gm \int \frac{|\psi(t - b, \tilde{g}_t^{-1}(\vec{y}))|^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -Gm \int \frac{|\psi(t-b, \vec{z})|^2}{|\tilde{g}_t^{-1}(\vec{x}) - \vec{z}|} d^3 z \\
&= U[\psi] \circ g^{-1}(t, \vec{x}), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

wobei wir vom zweiten zum dritten Schritt \vec{y} durch $\vec{z} := \tilde{g}_t^{-1}(\vec{y})$ substituiert haben und davon Verwendung machen, dass die Funktionaldeterminante $\det \mathbf{R} = 1$ ist.

Die Transformation der Lagrange-Dichte ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \circ g^{-1} - \hbar \left(\dot{f} + \frac{\hbar}{2m} (\vec{\nabla} f)^2 \right) (|\psi|^2 \circ g^{-1}) \\
+ \frac{i\hbar^2}{2m} \left(\vec{\nabla} f - \frac{m}{\hbar} \vec{v} \right) (\psi^* \mathbf{R} \vec{\nabla} \psi - \psi \mathbf{R} \vec{\nabla} \psi^*) \circ g^{-1}. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Wie man sofort sieht, transformiert diese für eine Phase

$$f(t, \vec{x}) = \frac{m}{\hbar} \vec{v} \cdot \vec{x} - \frac{m\vec{v}^2}{2\hbar} t + \text{konst.} \tag{B.9}$$

wie ein Skalar, so dass die SN-Gleichung für diese Phase forminvariant unter Galilei-Transformationen ist. Stellen wir die Rotation in der Basis der Rotationen um die x -, y - und z -Achse dar (wir kürzen $\cos \theta$ mit $c\theta$ und $\sin \theta$ mit $s\theta$ ab),

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_1 & -s\theta_1 \\ 0 & s\theta_1 & c\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_2 & 0 & s\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & 0 & c\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.10}$$

und entwickeln die Transformation der Wellenfunktion ψ in erster Ordnung in den Parametern der Galilei-Transformation, so erhalten wir

$$\psi \rightarrow \psi - b\dot{\psi} - \vec{\theta} \cdot \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi + \vec{v} \cdot \left(\frac{im}{\hbar} \vec{x} \psi - t \vec{\nabla} \psi \right) - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi. \tag{B.11}$$

Die Noether-Ladungen erhält man auf die übliche Weise als räumliches Integral der zeitlichen Komponente

$$J^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \delta \psi^* + \mathcal{L} \delta b \tag{B.12}$$

des Noether-Stroms [95]. Für die Zeittranslation liefert das

$$Q_b = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial b} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} \frac{\partial \psi^*}{\partial b} + \mathcal{L} \right) d^3 x = \int \left[-\frac{i\hbar}{2} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi} \psi^*) + \mathcal{L} \right] d^3 x$$

$$= \int \left[-\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2 - \frac{1}{2} m U[\psi] |\psi|^2 \right] d^3x = -\mathcal{E}[\psi]. \quad (\text{B.13})$$

Die übrigen neun erhaltenen Ladungen bekommt man analog, wobei der letzte, zu \mathcal{L} proportionale Term in (B.12) bei der Variation keine Rolle mehr spielt:

$$Q_a = \frac{i\hbar}{2} \int (\psi \vec{\nabla}\psi^* - \psi^* \vec{\nabla}\psi) d^3x = m \int \vec{j} d^3x = \langle \vec{p} \rangle, \quad (\text{B.14})$$

$$Q_\theta = \frac{i\hbar}{2} \int \vec{x} \times (\psi \vec{\nabla}\psi^* - \psi^* \vec{\nabla}\psi) d^3x = m \int \vec{x} \times \vec{j} d^3x, \quad (\text{B.15})$$

$$Q_v = -m \int \vec{x} |\psi|^2 d^3x + m t \int \vec{j} d^3x = -m \langle \vec{x} \rangle + \langle \vec{p} \rangle t. \quad (\text{B.16})$$

Wie man sieht, handelt es sich um Drehimpuls, Impuls und den Erwartungswert des Ortes.

C. Realität sphärisch-symmetrischer Lösungen

Wir wollen zeigen, dass sphärisch-symmetrische Lösungen der stationären SN-Gleichung ohne Einschränkung als reell angenommen werden können. Dazu betrachten wir eine sphärisch-symmetrische Wellenfunktion $\psi(r)$ und die stationäre SN-Gleichung

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + U\psi. \quad (\text{C.1})$$

Wir bezeichnen Ableitungen nach r mit einem Strich (') und stellen fest, dass (außerhalb des Punktes $r = 0$) wegen der sphärischen Symmetrie

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2} (r^2\psi')' = \frac{2}{r}\psi' + \psi'' = \frac{1}{r} (r\psi' + \psi)' = \frac{1}{r} (r\psi)'', \quad (\text{C.2})$$

das heißt

$$(r\psi)'' = \frac{2mr}{\hbar^2} (U - E)\psi. \quad (\text{C.3})$$

Wir zerlegen nun die Wellenfunktion $\psi = X + iY$ in ihren Realteil X und Imaginärteil Y und erhalten die SN-Gleichung

$$(rX)'' + i(rY)'' = \frac{2mr}{\hbar^2} (U - E)(X + iY), \quad (\text{C.4})$$

woraus die beiden unabhängigen Gleichungen

$$(rX)'' = \frac{2mr}{\hbar^2}(U - E)X \quad (\text{C.5a})$$

$$(rY)'' = \frac{2mr}{\hbar^2}(U - E)Y \quad (\text{C.5b})$$

folgen, da das Potential U reell ist. Multiplikation der ersten Gleichung mit rY und der zweiten mit rX ergibt nach anschließender Subtraktion beider Gleichungen voneinander

$$(rX)''(rY) - (rX)(rY)'' = 0. \quad (\text{C.6})$$

Das Integral der linken Seite

$$\begin{aligned} \int_0^r [(\rho X)''(\rho Y) - (\rho X)(\rho Y)'] d\rho &= (rX)'(rY) - \int_0^r (\rho X)'(\rho Y)' d\rho \\ &\quad - (rX)(rY)' + \int_0^r (\rho X)'(\rho Y)' d\rho \\ &= (rX)'(rY) - (rX)(rY)' \\ &= rXY + r^2X'Y - rXY - r^2XY' \\ &= r^2(X'Y - XY') \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

muss daher eine Konstante sein, und um die stetige Fortsetzbarkeit zu $r = 0$ zu gewährleisten, ist diese Konstante Null. Damit folgt für $r > 0$

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} \Rightarrow \ln X = \ln Y + \text{konst.} \Rightarrow X \propto Y. \quad (\text{C.8})$$

Das heißt, Real- und Imaginärteil der stationären Lösung stehen an jedem Ort im selben Verhältnis zueinander. Da die SN-Gleichung invariant unter konstanten Phasenverschiebungen ist, lässt sich durch eine geeignete Phasenverschiebung der Imaginärteil zu Null wählen, und die Lösung kann außerhalb des Ursprungs reell angenommen werden. Da sie stetig fortsetzbar sein muss, gilt das auch für den Ursprung.

D. Herleitung der BMT-Gleichung

Die Bargmann-Michel-Telegdi-Gleichung, kurz BMT-Gleichung [5], lässt sich als notwendige Bedingung aus dem semiklassischen Grenzfall der

Dirac-Gleichung in zweiter Ordnung (3.36)

$$(mc - \pi_\mu \gamma^\mu) a_2 = -ic^2 \gamma^\mu \partial_\mu a_0 \quad (\text{D.1})$$

ableiten. Dazu multipliziert man von links mit $(mc + \pi_\mu \gamma^\mu)$. Das führt dazu, dass die linke Seite verschwindet:

$$(mc + \pi_\mu \gamma^\mu) \gamma^\nu \partial_\nu a_0 = 0. \quad (\text{D.2})$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned} -2\pi^\mu \partial_\mu a_0 &= \pi_\mu (-2\eta^{\mu\nu}) \partial_\nu a_0 \\ &= \pi_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \partial_\nu a_0 + \pi_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \partial_\nu a_0 \\ &= -mc \gamma^\nu \partial_\nu a_0 + \partial_\nu (\gamma^\nu \pi_\mu \gamma^\mu a_0) - (\partial_\nu \pi_\mu) \gamma^\nu \gamma^\mu a_0 \\ &= -(\gamma^\nu \partial_\nu \pi_\mu) a_0 \\ &= \left(\partial_\mu \pi^\mu - \vec{\alpha} \cdot \left(\frac{1}{c} \dot{\vec{\pi}} - \vec{\nabla} \pi_0 \right) + i\gamma^5 \vec{\alpha} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{\pi}) \right) a_0 \\ &= (\partial_\mu \pi^\mu) a_0 - e \left(\frac{1}{c} \vec{\alpha} \cdot (\vec{E} - \dot{\vec{A}}) + i\gamma^5 \vec{\alpha} \cdot \vec{B} \right) a_0 \\ &= (\partial_\mu \pi^\mu) a_0 + \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu a_0, \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

wobei $\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ ist. Wir haben dabei in der dritten Zeile die Gleichung (D.2) und in der vierte die Gleichung (3.32) verwendet. Für den adjungierten Spinor \bar{a}_0 lässt sich dieser Rechnung wiederholen und ergibt

$$-2\pi^\mu \partial_\mu \bar{a}_0 = (\partial_\mu \pi^\mu) \bar{a}_0 - \frac{e}{2} F_{\mu\nu} \bar{a}_0 \gamma^\mu \gamma^\nu. \quad (\text{D.4})$$

Wie bei Rafanelli u. Schiller [86] definieren wir die „Spin-Dichte“

$$S^\mu = \bar{a}_0 \gamma^5 \gamma^\mu a_0. \quad (\text{D.5})$$

Aus den Gleichungen (D.3) und (D.4) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \pi^\mu \partial_\mu S^\nu &= \pi^\mu (\partial_\mu \bar{a}_0) \gamma^5 \gamma^\nu a_0 + \bar{a}_0 \gamma^5 \gamma^\nu \pi^\mu \partial_\mu a_0 \\ &= -(\partial_\mu \pi^\mu) S^\nu + \frac{e}{4} F_{\rho\sigma} \bar{a}_0 (\gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5 \gamma^\nu - \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) a_0 \\ &= -(\partial_\mu \pi^\mu) S^\nu + \frac{e}{4} F_{\rho\sigma} \bar{a}_0 \gamma^5 (2\eta^{\rho\nu} \gamma^\sigma - 2\eta^{\sigma\nu} \gamma^\rho) a_0 \\ &= -(\partial_\mu \pi^\mu) S^\nu + e F^\nu{}_\rho S^\rho. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Für die normierte Spin-Dichte

$$\hat{S}^\mu = \frac{1}{\sqrt{-S_\nu S^\nu}} S^\mu \quad (\text{D.7})$$

verschwindet der erste Term. Damit erhalten wir schließlich die BMT-Gleichung für den g -Faktor $g = 2$:

$$\frac{d}{d\tau} \hat{S}^\nu = \frac{1}{m} \pi^\mu \partial_\mu \hat{S}^\nu = \frac{e}{m} F^\nu{}_\rho \hat{S}^\rho. \quad (\text{D.8})$$

Dabei gilt die erste Gleichheit wegen $\pi^\mu = m v^\mu$, wobei v^μ die Vierergeschwindigkeit für ein relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld ist.

Hier habe ich die BMT-Gleichung nur als notwendige Bedingung aus Gleichung (3.36) abgeleitet. Eine vollständigere Herleitung mithilfe matrixwertiger Wigner-Funktionen findet sich bei Spohn [97].

E. Herleitung des Dirac-Operators im gekrümmten Raum

In Finster u. a. [34] wird der Dirac-Operator definiert als

$$D = i\Gamma^\mu(x)\partial_\mu + Y(x) \quad (\text{E.1})$$

$$Y(x) = \Gamma^\mu(x)Z_\mu(x) \quad (\text{E.2})$$

$$Z_\mu = \frac{i}{2}\rho\partial_\mu\rho - \frac{i}{16}\text{Tr}(\Gamma^\nu\nabla_\mu\Gamma^\rho)\Gamma_\nu\Gamma_\rho + \frac{i}{8}\text{Tr}(\rho\Gamma_\mu\nabla_\nu\Gamma^\nu)\rho \quad (\text{E.3})$$

$$\rho = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\sigma, \quad (\text{E.4})$$

wobei ∇ die kovariante Ableitung bezeichnet und $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ das Levi-Civita-Symbol, welches durch

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ gerade/} \\ -1 & \text{ungerade Permutation von } (tr\theta\varphi), \\ 0 & \text{falls zwei oder mehr Indizes gleich sind} \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

definiert ist. Tr bezeichnet die Spur. Als Darstellung der Raumzeit-abhängigen Dirac-Matrizen wählen wir

$$\Gamma^t = e^{-A}c^{-1}\gamma^0 \quad (\text{E.6})$$

$$\Gamma^r = e^{-B} (\gamma^1 \cos \theta + \gamma^2 \sin \theta \cos \varphi + \gamma^3 \sin \theta \sin \varphi) \quad (\text{E.7})$$

$$\Gamma^\theta = \frac{1}{r} (-\gamma^1 \sin \theta + \gamma^2 \cos \theta \cos \varphi + \gamma^3 \cos \theta \sin \varphi) \quad (\text{E.8})$$

$$\Gamma^\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (-\gamma^2 \sin \varphi + \gamma^3 \cos \varphi). \quad (\text{E.9})$$

In dieser Darstellung ist $\rho = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, also eine Konstante, womit der erste Summand von Z_μ verschwindet. Die Γ^μ sind Linearkombinationen der Raumzeit-unabhängigen Dirac-Matrizen γ^μ und ihre kovarianten Ableitungen ebenfalls. Nun verschwindet aber auch $\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu)$ für beliebige Werte von μ und ν . Um dies zu zeigen, wählt man ein von μ und ν verschiedenes α , dann ist $\gamma^\alpha\gamma^\alpha = \pm 1$ und damit

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) &= \text{Tr}(\pm\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= \text{Tr}(\pm\gamma^\alpha\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha) \\ &= \text{Tr}(\mp\gamma^\alpha\gamma^\alpha\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= \text{Tr}(-\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

wobei wir in der zweiten Zeile ausgenutzt haben, dass die Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen ist, und in der dritten Zeile, dass die Dirac-Matrizen wechselseitig und mit γ^5 antikommutieren. Damit verschwindet auch der dritte Summand von Z^μ und wir verbleiben mit

$$Y = -\frac{i}{16} \text{Tr}(\Gamma^\nu \nabla_\mu \Gamma^\rho) \Gamma^\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho. \quad (\text{E.11})$$

Wir demonstrieren nun, dass das Produkt der drei Dirac-Matrizen

$$\Gamma^\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho = \delta_\rho^\mu \Gamma_\nu - \delta_\nu^\mu \Gamma_\rho - \Gamma^\mu g_{\nu\rho} + i\epsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \Gamma^\sigma \gamma^5 \quad (\text{E.12})$$

ist. Wir bezeichnen den Kommutator mit $[\cdot, \cdot]$ und den Antikommutator mit $\{\cdot, \cdot\}$ und betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho + \Gamma^\mu g_{\nu\rho} - \delta_\rho^\mu \Gamma_\nu + \delta_\nu^\mu \Gamma_\rho &= \Gamma^\mu \Gamma_\nu \Gamma_\rho - \frac{1}{2} \Gamma^\mu \{\Gamma_\nu, \Gamma_\rho\} - \delta_\rho^\mu \Gamma_\nu + \delta_\nu^\mu \Gamma_\rho \\ &= \frac{1}{2} \Gamma^\mu [\Gamma_\nu, \Gamma_\rho] - \delta_\rho^\mu \Gamma_\nu + \delta_\nu^\mu \Gamma_\rho. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Wir wollen zeigen, dass dies gleich $i\epsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \Gamma^\sigma \gamma^5$ ist. Für $\nu = \rho$ verschwin-

det (E.13) offensichtlich, sei also $\nu \neq \rho$, dann haben wir

$$[\Gamma_\nu, \Gamma_\rho] = 2\Gamma_\nu\Gamma_\rho = -2\Gamma_\rho\Gamma_\nu, \quad (\text{E.14})$$

weil die Dirac-Matrizen antikommutieren. Wenn wir *nicht* über den Index μ summieren, dann ist

$$\Gamma^\mu\Gamma_\mu = g_{\mu\mu}\Gamma^\mu\Gamma^\mu = -g_{\mu\mu}g^{\mu\mu} = -1. \quad (\text{E.15})$$

Damit verschwindet (E.13) auch für $\mu = \nu \neq \rho$ und $\mu = \rho \neq \nu$. Es bleibt also noch zu zeigen, dass im Fall paarweise verschiedener Indizes

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^\sigma\gamma^5. \quad (\text{E.16})$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\gamma^5 = \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\sigma = i\sqrt{-g}\Gamma^t\Gamma^r\Gamma^\theta\Gamma^\varphi = -\frac{i}{\sqrt{-g}}\Gamma_t\Gamma_r\Gamma_\theta\Gamma_\varphi, \quad (\text{E.17})$$

womit wir noch zeigen müssen, dass

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu\Gamma_\rho = \frac{1}{\sqrt{-g}}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Gamma^\sigma\Gamma_t\Gamma_r\Gamma_\theta\Gamma_\varphi. \quad (\text{E.18})$$

Da die Dirac-Matrizen antikommutieren, führt das Sortieren der linken Seite in die Reihenfolge t, r, θ, φ (wobei einer der Indizes fehlt) zum selben Vorzeichen wie die Permutation der Indizes des Epsilon-Symbols zu dieser Reihenfolge. Das Permutieren des Index σ an die richtige Stelle dieser Reihenfolge benötigt dann eine gerade (ungerade) Zahl von Paarvertauschungen, wenn die Permutation von Γ^σ zu Γ_σ eine ungerade (gerade) Zahl von Paarvertauschungen benötigt. Verwendet man dann (E.5) und (E.15), so erhält man das gewünschte Ergebnis (E.12).

Wir haben also

$$Y = -\frac{i}{16}\text{Tr}(\Gamma^\nu\nabla_\mu\Gamma^\rho)(\delta_\rho^\mu\Gamma_\nu - \delta_\nu^\mu\Gamma_\rho - \Gamma^\mu g_{\nu\rho} + i\epsilon^\mu{}_{\nu\rho\sigma}\Gamma^\sigma\gamma^5). \quad (\text{E.19})$$

Wegen der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Gamma^\mu\Gamma^\nu) &= \frac{1}{2}\text{Tr}(\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\}) + \frac{1}{2}\text{Tr}([\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]) \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}(\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\}) = -g^{\mu\nu}\text{Tr}(\mathbb{1}) = -4g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

und damit

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\Gamma^\mu \nabla_\nu \Gamma^\rho) &= \nabla_\nu \text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\rho) - \text{Tr}(\Gamma^\rho \nabla_\nu \Gamma^\mu) \\
&= -4\nabla_\nu g^{\mu\rho} - \text{Tr}(\Gamma^\rho \nabla_\nu \Gamma^\mu) \\
&= -\text{Tr}(\Gamma^\rho \nabla_\nu \Gamma^\mu). \tag{E.21}
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die beiden Terme mit δ_ν^μ und δ_ρ^μ in (E.19) identisch sind, während der Term mit $g_{\nu\rho}$ wegen der Symmetrie der Metrik verschwindet. Das heißt

$$Y = -\frac{i}{8} \text{Tr}(\Gamma^\nu \nabla_\rho \Gamma^\rho) \Gamma_\nu + \frac{1}{16} e^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \text{Tr}(\Gamma^\nu \nabla_\mu \Gamma^\rho) \Gamma^\sigma \gamma^5. \tag{E.22}$$

Schließlich stellen wir fest, dass bei unserer Wahl der Dirac-Matrizen und aufgrund der sphärischen Symmetrie der Metrik die kovariante Ableitung $\nabla_\mu \Gamma^\rho$ für $\mu \neq \rho$ nur Terme enthält, die entweder proportional zu Γ^μ oder zu Γ^ρ sind. Für zwei verschiedene Indizes $\mu \neq \nu$ ist aber wegen der Invarianz der Spur unter zyklischen Vertauschungen und des Antikommutierens der Dirac-Matrizen

$$\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu) = \text{Tr}(\Gamma^\nu \Gamma^\mu) = -\text{Tr}(\Gamma^\mu \Gamma^\nu) = 0. \tag{E.23}$$

Damit verschwindet auch $\text{Tr}(\Gamma^\nu \nabla_\mu \Gamma^\rho)$ für drei paarweise verschiedene Indizes, womit der zweite Summand in (E.22) verschwindet. Nutzen wir nun aus, dass auch $\nabla_\rho \Gamma^\rho = \alpha_\rho \Gamma^\rho$ eine Linearkombination der Dirac-Matrizen ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\Gamma^\nu \nabla_\rho \Gamma^\rho) &= \alpha_\rho \text{Tr}(\Gamma^\nu \Gamma^\rho) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_\rho \text{Tr}(\{\Gamma^\nu, \Gamma^\rho\} + [\Gamma^\nu, \Gamma^\rho]) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_\rho (\text{Tr}(\{\Gamma^\nu, \Gamma^\rho\}) + \text{Tr}(\Gamma^\nu \Gamma^\rho) - \text{Tr}(\Gamma^\rho \Gamma^\nu)) \\
&= \frac{1}{2} \alpha_\rho (\text{Tr}(-2g^{\nu\rho} \mathbb{1}_{4 \times 4}) + \text{Tr}(\Gamma^\nu \Gamma^\rho) - \text{Tr}(\Gamma^\nu \Gamma^\rho)) \\
&= -\alpha_\rho g^{\nu\rho} \text{Tr}(\mathbb{1}_{4 \times 4}) \\
&= -4\alpha^\nu. \tag{E.24}
\end{aligned}$$

Damit vereinfacht sich der Ausdruck für Y schließlich zu

$$Y = \frac{i}{2} \nabla_\mu \Gamma^\mu \tag{E.25}$$

und der Dirac-Operator ist

$$D = i\Gamma^\mu \partial_\mu + \frac{i}{2} \nabla_\mu \Gamma^\mu. \quad (\text{E.26})$$

F. Energie-Impuls-Tensor für das Dirac-Feld

Wir wollen die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} [\bar{\psi} (i\Gamma_\nu \partial_\mu + i\Gamma_\mu \partial_\nu) \psi] + \frac{\hbar c}{8} \epsilon^{\alpha\lambda\rho\beta} [g_{\mu\lambda} \text{Tr}(\Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\rho) + g_{\nu\lambda} \text{Tr}(\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma_\rho)] \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma_\beta \psi \quad (\text{E.1})$$

für das Dirac-Feld berechnen.

Zunächst betrachten wir die Spurterme, die für eine diagonale Metrik

$$\epsilon^{\alpha\lambda\rho\beta} g_{\mu\lambda} \text{Tr}(\Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\rho) = \epsilon^{\alpha\mu\rho\beta} g_{\mu\mu} \text{Tr}(\Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\rho), \quad (\text{E.2})$$

ergeben, wobei *nicht* über μ und ν zu summieren ist. Wegen der Antisymmetrie des Levi-Civita-Symbols müssen μ , α und ρ paarweise verschieden sein. Deshalb tragen für $\mu = \nu$ die Terme unter der Spur drei verschiedene Indizes, was das Verschwinden des Spurterms zur Folge hat, wie wir in Anhang E gesehen haben. Ist $\mu \neq \nu$, dann liefern die Fälle $\alpha = \nu$ und $\rho = \nu$ nicht verschwindende Beiträge. Entsprechendes gilt für den Beitrag mit vertauschtem μ und ν . Wenn wir voraussetzen, dass $\mu \neq \nu$ ist, lauten die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors also

$$T_{\mu\mu} = -\hbar c \text{Re} [i\bar{\psi} \Gamma_\mu \partial_\mu \psi] \quad (\text{E.3})$$

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} [i\bar{\psi} (\Gamma_\nu \partial_\mu + \Gamma_\mu \partial_\nu) \psi] - \frac{\hbar c}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left[g_{\mu\mu} \text{Tr}(\Gamma_\nu \partial_\nu \Gamma_\alpha) - g_{\mu\mu} \text{Tr}(\Gamma_\nu \partial_\alpha \Gamma_\nu) - g_{\nu\nu} \text{Tr}(\Gamma_\mu \partial_\mu \Gamma_\alpha) + g_{\nu\nu} \text{Tr}(\Gamma_\mu \partial_\alpha \Gamma_\mu) \right] \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma_\beta \psi, \quad (\text{E.4})$$

wobei $\mu \neq \alpha \neq \nu$ ist.

Da $\text{Tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta) = 0$ für $\alpha \neq \beta$, tragen nur solche Spurterme bei, für die entweder $\partial_\alpha \Gamma_\beta \propto \Gamma_\alpha$ oder $\partial_\alpha \Gamma_\beta \propto \Gamma_\beta$ ist. Das sind

$$\begin{aligned} \partial_r \Gamma_t &= A' \Gamma_t, & \partial_t \Gamma_r &= \dot{B} \Gamma_r, & \partial_r \Gamma_\theta &= \frac{1}{r} \Gamma_\theta, & \partial_\theta \Gamma_r &= \frac{e^B}{r} \Gamma_\theta, \\ \partial_r \Gamma_\varphi &= \frac{1}{r} \Gamma_\varphi, & \partial_\theta \Gamma_\varphi &= \cot \theta \Gamma_\varphi, & \partial_\varphi \Gamma_r &= \frac{e^B}{r} \Gamma_\varphi, & \partial_\varphi \Gamma_\theta &= \cot \theta \Gamma_\varphi. \end{aligned}$$

Die zugehörigen Spurterme lauten (es gilt $\text{Tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\alpha) = -4g_{\alpha\alpha}$)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Gamma_t \partial_r \Gamma_t) &= 4e^{2A} c^2 A', & \text{Tr}(\Gamma_r \partial_t \Gamma_r) &= -4e^{2B} \dot{B}, \\ \text{Tr}(\Gamma_\theta \partial_r \Gamma_\theta) &= -4r, & \text{Tr}(\Gamma_\theta \partial_\theta \Gamma_r) &= -4re^B, \\ \text{Tr}(\Gamma_\varphi \partial_r \Gamma_\varphi) &= -4r \sin^2 \theta, & \text{Tr}(\Gamma_\varphi \partial_\theta \Gamma_\varphi) &= -4r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \text{Tr}(\Gamma_\varphi \partial_\varphi \Gamma_r) &= -4re^B \sin^2 \theta, & \text{Tr}(\Gamma_\varphi \partial_\varphi \Gamma_\theta) &= -4r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Damit können wir nun alle Komponenten des Energie-Impuls-Tensors berechnen:

$$T_{tt} = -\hbar c \text{Re} \left[-ie^{2A} c^2 \bar{\psi} \Gamma^t \dot{\psi} \right] \quad (\text{E5a})$$

$$T_{rr} = -\hbar c \text{Re} \left[ie^{2B} \bar{\psi} \Gamma^r \psi' \right] \quad (\text{E5b})$$

$$T_{tr} = -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[-ie^{2A} c^2 \bar{\psi} \Gamma^t \psi' + ie^{2B} \bar{\psi} \Gamma^r \dot{\psi} \right] \quad (\text{E5c})$$

$$\begin{aligned} T_{t\theta} &= -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[ir^2 \bar{\psi} \Gamma^\theta \dot{\psi} - ie^{2A} c^2 \bar{\psi} \Gamma^t \partial_\theta \psi \right] \\ &\quad - \frac{\hbar c^2}{2} e^{A-B} r^2 \sin \theta \left(A' - \frac{1-e^B}{r} \right) \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma^\theta \psi \end{aligned} \quad (\text{E5d})$$

$$\begin{aligned} T_{t\varphi} &= -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[ir^2 \sin^2 \theta \bar{\psi} \Gamma^\varphi \dot{\psi} - ie^{2A} c^2 \bar{\psi} \Gamma^t \partial_\varphi \psi \right] \\ &\quad + \frac{\hbar c^2}{2} e^{A-B} r^2 \sin \theta \left(A' - \frac{1-e^B}{r} \right) \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma^\theta \psi \end{aligned} \quad (\text{E5e})$$

$$\begin{aligned} T_{r\theta} &= -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[ir^2 \bar{\psi} \Gamma^\theta \psi' + ie^{2B} \bar{\psi} \Gamma^r \partial_\theta \psi \right] \\ &\quad - \frac{\hbar}{2} e^{B-A} r^2 \sin \theta \dot{B} \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma^\theta \psi \end{aligned} \quad (\text{E5f})$$

$$\begin{aligned} T_{r\varphi} &= -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[ir^2 \sin^2 \theta \bar{\psi} \Gamma^\varphi \psi' + ie^{2B} \bar{\psi} \Gamma^r \partial_\varphi \psi \right] \\ &\quad + \frac{\hbar}{2} e^{B-A} r^2 \sin \theta \dot{B} \bar{\psi} \gamma^5 \Gamma^\theta \psi \end{aligned} \quad (\text{E5g})$$

$$T_{\theta\theta} = -\hbar c \text{Re} \left[ir^2 \bar{\psi} \Gamma^\theta \partial_\theta \psi \right] \quad (\text{E5h})$$

$$T_{\theta\varphi} = -\frac{\hbar c}{2} \text{Re} \left[ir^2 \bar{\psi} \Gamma^\theta \partial_\varphi \psi + ir^2 \sin^2 \theta \bar{\psi} \Gamma^\varphi \partial_\theta \psi \right] \quad (\text{E5i})$$

$$T_{\varphi\varphi} = -\hbar c \text{Re} \left[ir^2 \sin^2 \theta \bar{\psi} \Gamma^\varphi \partial_\varphi \psi \right]. \quad (\text{E5j})$$

Man beachte, dass die Ableitungen $\dot{\psi}$ und ψ' von der Ordnung c^2 sind, während A' , \dot{B} und $1 - e^B$ von der Ordnung c^{-1} sind. In den Gleichungen (E5d), (E5e), (E5f) und (E5g) ist deshalb die erste Zeile jeweils von der Ordnung c^3 , die zweite Zeile von der Ordnung c bzw. c^{-1} . Bei der

Betrachtung bis zur Ordnung einschließlich c^2 treten deshalb nur die jeweils ersten Zeilen auf.

G. Entwicklung der Einstein-Gleichungen mit Mathematica

Die Entwicklung des Einstein-Tensors (3.60) mit Hilfe der Funktion „Series“ von MATHEMATICA ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} G_{tt} &= \frac{2\hbar}{r^2} (B_1 + rB'_1) + \frac{\hbar^{3/2}}{cr^2} (2B_2 - 3B_1 (B_1 + 2rB'_1) + 2rB'_2) \\
&\quad + \frac{2\hbar^2}{c^2 r^2} (2A_2 (B_1 + rB'_1) + 2B_1^3 + 6rB'_1 B_1^2 - 3(B_2 + rB'_2) B_1 + B_3 \\
&\quad - 3rB_2 B'_1 + rB'_3) \\
&\quad + \frac{\hbar^{5/2}}{c^3 r^2} (4A_3 (B_1 + rB'_1) + A_2 (4B_2 - 6B_1 (B_1 + 2rB'_1) + 4rB'_2) - 5B_1^4 \\
&\quad - 20rB'_1 B_1^3 + 12B_2 B_1^2 + 12rB'_2 B_1^2 - 6B_3 B_1 + 24rB_2 B'_1 B_1 - 6rB'_3 B_1 \\
&\quad - 3B_2^2 + 2B_4 - 6rB_3 B'_1 - 6rB_2 B'_2 + 2rB'_4) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} G_{rr} &= -\frac{2\hbar B_1}{c^2 r^2} - \frac{\hbar^{3/2}}{c^3 r^2} (-2rA'_2 + B_1^2 + 2B_2) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} G_{\theta\theta} &= -\frac{\hbar r B'_1}{c^2} + \frac{\hbar^{3/2} r}{c^3} (A'_2 + rA''_2 + 3B_1 B'_1 - B'_2) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} G_{tr} &= \frac{2\hbar \dot{B}_1}{c^2 r} + \frac{2\hbar^{3/2} (\dot{B}_2 - B_1 \dot{B}_1)}{c^3 r} + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)
\end{aligned}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor (3.62) des Klein-Gordon-Felds erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{tt} &= \frac{8\pi G m \sqrt{\hbar}}{c} a_0 a_0^* + \frac{8\pi G m \hbar}{c^2} (a_1 a_0^* + a_0 a_1^*) \\
&\quad + \frac{4\pi G \hbar^{3/2}}{c^3 m} \left(\hbar a'_0 a_0^* + m \left(a_0 (2m (A_2 a_0^* + a_2^*) - i \dot{a}_0^*) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2m a_2 a_0^* + 2m a_1 a_1^* + i \dot{a}_0 a_0^* \right) \right) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{rr} &= O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^5\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\theta\theta} &= O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^5\right) \\
\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{tr} &= \frac{4i\pi G \hbar^{3/2}}{c^3} (a'_0 a_0^* - a_0 a_0^*) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)
\end{aligned}$$

Für den Energie-Impuls-Tensor (3.97) des Dirac-Felds erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{tt} = & \operatorname{Re} \left[\frac{8\pi G m \sqrt{\hbar}}{c} (a_{0,1} a_{0,1}^* + a_{0,2} a_{0,2}^*) \right. \\ & + \frac{8\pi G m \hbar}{c^2} (a_{1,1} a_{0,1}^* + a_{0,1} a_{1,1}^* + a_{1,2} a_{0,2}^* + a_{0,2} a_{1,2}^*) \\ & + \frac{8\pi G \hbar^{3/2}}{c^3} (m A_2(r, t) (a_{0,1} a_{0,1}^* + a_{0,2} a_{0,2}^*) + m(a_{1,1} a_{1,1}^* + a_{0,1} a_{2,1}^* \\ & + a_{2,2} a_{0,2}^* + a_{1,2} a_{1,2}^* + a_{0,2} a_{2,2}^* + a_{1,3} a_{1,3}^* + a_{1,4} a_{1,4}^*) + m a_{2,1} a_{0,1}^* \\ & \left. + i \dot{a}_{0,1} a_{0,1}^* + i \dot{a}_{0,2} a_{0,2}^*) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{rr} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^5\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{tr} = & \operatorname{Re} \left[\frac{8i\pi G \hbar^{3/2}}{c^3} (a'_{0,1} a_{0,1}^* + a'_{0,2} a_{0,2}^*) \right. \\ & + \frac{8i\pi G m \hbar}{c^3} (-a_{1,3}^* (\sin \varphi \sin \theta a_{0,1} + (\cos \theta - i \cos \varphi \sin \theta) a_{0,2}) \\ & + a_{1,4}^* (\sin \varphi \sin \theta a_{0,2} - (\cos \theta + i \cos \varphi \sin \theta) a_{0,1}) \\ & - a_{1,3} (\sin \varphi \sin \theta a_{0,1}^* + (\cos \theta + i \cos \varphi \sin \theta) a_{0,2}^*) \\ & \left. + a_{1,4} (\sin \varphi \sin \theta a_{0,2}^* - (\cos \theta - i \cos \varphi \sin \theta) a_{0,1}^*) \right) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{t\theta} = & \operatorname{Re} \left[\frac{4\pi G m r \hbar}{c^3} (a_{1,3}^* (-\sin \varphi \cos \theta a_{0,1} + (\sin \theta + i \cos \varphi \cos \theta) a_{0,2}) \right. \\ & + a_{1,4} (\sin \varphi \cos \theta a_{0,2} + (\sin \theta - i \cos \varphi \cos \theta) a_{0,1}) \\ & + a_{1,3} (-\sin \varphi \cos \theta a_{0,1}^* + (\sin \theta - i \cos \varphi \cos \theta) a_{0,2}^*) \\ & \left. + a_{1,4} (\sin \varphi \cos \theta a_{0,2}^* + (\sin \theta + i \cos \varphi \cos \theta) a_{0,1}^*) \right) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{r\theta} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{t\varphi} = & \operatorname{Re} \left[\frac{4\pi G m r \sin \theta \hbar}{c^3} (-a_{1,3}^* (\cos \varphi a_{0,1} + i \sin \varphi a_{0,2}) + \right. \\ & a_{1,4}^* (\cos \varphi a_{0,2} + i \sin \varphi a_{0,1}) + a_{1,3} (-\cos \varphi a_{0,1}^* + i \sin \varphi a_{0,2}^*) \\ & \left. + a_{1,4} (\cos \varphi a_{0,2}^* - i \sin \varphi a_{0,1}^*) \right) + O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right) \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{r\varphi} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\theta\theta} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\theta\varphi} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)$$

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \frac{8\pi G}{c^4} T_{\varphi\varphi} = O\left(\left(\sqrt{\hbar}/c\right)^4\right)$$

H. Programmcodes

Hier liste ich den für die numerischen Berechnungen verwendeten C-Code auf. Das Programm besteht aus einer Hauptroutine (sne.c), diversen Hilfsfunktionen (helpers.c), den Wellenfunktionen (wf.c) sowie einer Datei mit den verwendeten Parametern (param.h).

Listing 5.1: sne.c

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <complex.h>
#include <math.h>
#include <fenv.h>
/* Parameters for the run are in param.h */
#include "param.h"
/* Wave function shapes */
#include "wf.h"
/* Helper functions */
#include "helpers.h"

/* pi * G / hbar * (1u)^2 */
#define PIGOHBAR 5.4824699260461014e-30L
/* -hbar / 8 * 10^9 / (1u in kg) */
#define MHBAROEI -7.9384748449675167L
/* prefactor: -i hbar/(8m) dt/(dr)^2 */
static const long double complex pre_beta = MHBAROEI *
    I / M / DR / DR * DT;
/* prefactors for b */
static const long double complex b_pre = 0.5L - 2.0L *
    MHBAROEI * I / M / DR / DR * DT;
static const long double complex bn_pre = 0.5L - 6.0L
    * MHBAROEI * I / M / DR / DR * DT;
/* prefactor for gravitation potential: V = (-) i * (
    pi G / hbar) dt (m dr)^2 * coupling constant */
static const long double complex v_pre = I * COUP *
    PIGOHBAR * DT * M * DR * M * DR;

/* Calculate the potential */
void grav_potential ( long double complex psi[N], long
    double complex b[N] )
{

```

```

long double v[N];
long double psisq;
long double qi_sum;
long double ldi;
int i;

/* Calculate v - v0 in first loop making use of
   v_j = v_0 + 1/j sum psi^2 i^2 - sum psi^2 i
   */
psisq = cabs1 ( psi[1] );
psisq *= psisq;
qi_sum = 0.5L * psisq;
v[0] = psisq;
v[1] = 0.0L;
for ( i=2; i<=(N-2); ++i )
{
    ldi = (long double) i;
    psisq = cabs1 ( psi[i] );
    psisq *= psisq;
    psisq *= ldi;
    v[i] = qi_sum - v[0];
    v[0] += psisq;
    ldi /= ( ldi + 1.0L );
    qi_sum += psisq;
    qi_sum *= ldi;
}
psisq = cabs1 ( psi[N-1] );
psisq *= psisq;
v[N-1] = qi_sum - v[0];
v[0] += psisq * (long double) (N-1);

/* Calculate b, the real v_i is v_i + v_0 */
b[0] = bn_pre - v_pre * v[0];
for ( i=1; i<N; ++i )
{
    b[i] = b_pre - v_pre * ( v[0] + v[i] );
}

/* Calculate inital Q matrix off-diagonals */
void q_init ( long double complex a[N], long double
complex c[N] )
{
    long double iinv;

```

```

int i;

/* a (subdiagonal), b (diagonal), c (superdiagonal) */
c[0] = 6.0L * pre_beta;
for ( i=1; i<N; ++i )
{
    iinv = 1.0L / (long double) i;
    a[i] = pre_beta * (1.0L - iinv);
    c[i] = pre_beta * (1.0L + iinv);
}
}

/* Solve the system of linear equations with a
tridiagonal matrix */
void solve_linear_system ( long double complex a[N],
long double complex b[N], long double complex c[N]
], long double complex psi[N] )
{
    long double complex bb[N];
    long double complex d[N];
    long double complex x[N];
    int i;

    /* Transform the matrix */
    bb[0] = b[0];
    d[0] = psi[0];
    for ( i=1; i<N; ++i )
    {
        bb[i] = b[i] - a[i] * c[i-1] / bb[i-1];
        d[i] = psi[i] - a[i] * d[i-1] / bb[i-1];
    }
    /* Form the solution x and psi_new = x - psi */
    x[N-1] = d[N-1] / bb[N-1];
    psi[N-1] = x[N-1] - psi[N-1];
    for ( i=N-2; i>=0; --i )
    {
        x[i] = ( d[i] - c[i]*x[i+1] ) / bb[i];
        psi[i] = x[i] - psi[i];
    }
}

/* Main routine */
int main ( int argc, char *argv[] )

```

```
{
    long double complex psi[N];
    long double complex a[N];
    long double complex b[N];
    long double complex c[N];
    unsigned long t = 0;
    char path[238];

    /* Create output directory */
    make_outpath ( path, OUTDIR );
    /* Initialise wave function */
    wave_function ( psi );
    /* save the parameters */
    save_settings ( path, t );
    /* Initialise Q matrix */
    q_init ( a, c );
    /* iterate wave function */
    while ( t++ < MAXT )
    {
        grav_potential ( psi, b );
        solve_linear_system ( a, b, c, psi );
        if ( ! ( int ) ( t % SAVEEVERY ) )
        {
            /* Save this step */
            save_wf ( t, psi, path );
        }
    }
    /* Save final wavefunction if not already done */
    if ( ( int ) ( --t % SAVEEVERY ) )
    {
        save_wf ( t, psi, path );
    }
    return ( 0 );
}
```

Listing 5.2: helpers.c

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <complex.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <fcntl.h>
#include <string.h>
#include <dirent.h>
```

```

#include <sys/stat.h>
#include <unistd.h>
/* Parameters for the run are in param.h */
#include "param.h"

/* Build path name */
void outpath_name ( char opath[238], const char *path,
                  const char timestr[14] )
{
    char first[222];
    size_t len;

    strncpy ( first, path, sizeof( first ) );
    len = strlen ( first );
    /* cut final / */
    if ( opath[len - 1] == '/' )
    {
        opath[len - 1] = '\0';
    }
    /* append timestring */
    sprintf ( opath, "%s/%s", first, timestr );
}

/* Create path for output */
void make_outpath ( char opath[238], const char *path
                  )
{
    char *p;
    char timestr[14];
    char dpath[243];
    size_t len;
    time_t rawtime;
    int i = 0;

    /* get date and time */
    time ( &rawtime );
    strftime ( timestr, 14, "%Y%m%d-%H%M", localtime (
        &rawtime ) );
    /* append date and time to path */
    outpath_name( opath, path, timestr );
    len = strlen ( opath );
    /* make sure that two instances of the program
       will not use the same path */

```

```
while ( ! access ( opath, F_OK ) ) /* as long as
directory exists */
{
    /* append number to path */
    opath[len] = '\0';
    sprintf ( opath, "%s-%ld", opath, ++i );
    if ( i>9 )
    {
        printf ( "Error: Too many identical
directory names. Quitting." );
        exit( 0 );
    }
}
/* subpath for data */
sprintf ( dpath, "%s/data", opath );
/* create subdirectories */
for ( p = opath; *p; p++ )
{
    if ( *p == '/' )
    {
        *p = '\0';
        if ( access ( opath, F_OK ) ) /* returns 0
if successfully accessed */
        {
            mkdir ( opath, S_IRWXU ); /* read,
write, execute by user */
        }
        *p = '/';
    }
}
/* create final directory */
if ( access ( opath, F_OK ) )
{
    mkdir ( opath, S_IRWXU );
}
/* create data directory */
if ( access ( dpath, F_OK ) )
{
    mkdir ( dpath, S_IRWXU );
}
}

/* Write the parameters to param.txt */
```

```

void save_settings( const char *path, unsigned long t
)
{
    FILE *fp;
    char filename[256];
    char timestr[14];
    time_t rawtime;
    static const long double totaltime = 1e-9L * DT *
        MAXT;

    sprintf ( filename, "%s/param.txt" , path );
    time ( &rawtime );
    strftime ( timestr, 14, "%Y%m%d-%H%M", localtime (
        &rawtime ) );
    /* Open file to append, for each continuation the
       settings will be saved */
    if ( ( fp = fopen ( filename, "a" ) ) == NULL )
    {
        printf ( "Cannot open file. Quitting.\n" );
        exit( 0 );
    }
    else /* write data */
    {
        fprintf ( fp, "
            *****\n" );
        fprintf ( fp, "SETTINGS_FOR_RUN_@_s\n",
            timestr);
        fprintf ( fp, "
            *****\n" );
        fprintf ( fp, "width_in_nm:_%20Lg\n", W );
        fprintf ( fp, "mass_in_u:_%20Lg\n", M );
        fprintf ( fp, "grid_size:_%20d\n", N );
        fprintf ( fp, "dr_in_nm:_%20Lg\n", DR );
        fprintf ( fp, "dt_in_ns:_%20Lg\n", DT );
        fprintf ( fp, "max_time:_%20lu\n", MAXT );
        fprintf ( fp, "save_every:_%20lu\n",
            SAVEEVERY );
        fprintf ( fp, "coupling:_%20Lg\n", COUP );
        fprintf ( fp, "wave_funct.:_%20c\n",
            WAVEFUNCT );
        fprintf ( fp, "\n");
    }
    fclose ( fp );
}

```

```

/* Open wave function file */
static FILE *open_wf_file ( int write, unsigned long t
, const char *path )
{
    FILE *fp;
    char filename[256];
    char rwmode[3];

    strcpy ( rwmode, write ? "wb" : "rb");
    sprintf ( filename, "%s/data/w%014lu.dat" , path,
        t );
    if ( ( fp = fopen ( filename, rwmode ) ) == NULL )
    {
        printf ( "Cannot_open_file._Quitting.\n" );
        exit( 0 );
    }
    return ( fp );
}

/* Save wave function */
void save_wf ( unsigned long t, long double complex
psi[N], const char *path )
{
    FILE *fp;
    fp = open_wf_file ( 1, t, path );
    if ( fwrite ( psi, sizeof ( long double complex ),
        N, fp ) != N )
    {
        printf ( "File_read_error._Quitting.\n" );
        exit( 0 );
    }
    fclose ( fp );
}

```

Listing 5.3: wf.c

```

#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <complex.h>
#include <math.h>
#define M_2_SQRTPI
1.1283791670955125738961589031215452L /* 2/sqrt(pi)
*/
/* Parameters for the run are in param.h */

```

```

#include "param.h"

/* All wave functions are in nm(-3/2) */

/* Gaussian wave package */
static void gaussian_wf ( long double complex psi[N] )
{
    static long double prefact;
    static const long double exp_pre = -.5L * DR / W *
        DR / W;
    int i;

    prefact = sqrtl ( M_2_SQRTPI1 / W * M_2_SQRTPI1 /
        W * M_2_SQRTPI1 / W / 8.0L );
    for ( i=0; i<N; ++i )
    {
        psi[i] = ( long double complex ) ( prefact *
            expl( ( ( long double ) ( i*i ) ) *
                exp_pre ) );
    }
}

/* Rect wave package */
static void rect_wf ( long double complex psi[N] )
{
    static const int rect_index = ( int ) ( W / DR );
    static long double complex rect_value;
    rect_value = 0.48860251190291992 / W / sqrtl ( W )
        ;
    int i = 0;
    while ( i<=rect_index )
    {
        psi[i++] = rect_value;
    }
    while ( i<N )
    {
        psi[i++] = 0.0L;
    }
}

/* Current wave function */
void wave_function ( long double complex psi[N] )
{
    switch ( WAVEFUNCT )

```

```

    {
        case 'r':
            rect_wf( psi );
            break;
        default:
            gaussian_wf( psi );
    }
}

```

Listing 5.4: param.h

```

#define W      500.0L // width in nm (long double)
#define M      7.0e9L // mass in u (long double)
#define N      5000 // grid size (int)
#define DR     1.0L // dr in nm (long double)
#define DT     10000000.0L // dt in ns (long
double)
#define MAXT   1000000UL // number of time steps
#define COUP   1.0L // coupling constant
#define SAVEEVERY 5000UL // save every X time steps
#define OUTDIR  "/" // directory for output
#define WAVEFUNCT 'g' // initial wave function

```

H.1. Modifizierte Potentiale

Dies sind die modifizierten Funktionen ‚grav_potential‘ für das Voll- sowie das Hohlkugelpotential aus Abschnitt 4.3:

Listing 5.5: Vollkugelpotential

```

void grav_potential ( long double complex psi[N], long
double complex b[N] )
{
    long double f[N-2];
    long double g[N-2];
    long double hk;
    long double complex u;
    long double complex w;
    long double ru;
    long double rw;
    long double complex z;
    long double ldi;
    long double dreidzweik;
    long double psisq;
    long double psidiff;
}

```

```

int i;

dreidzweik = 1.5L / ( (long double) RADIUS );

/* Calculate f, g, h */
psisq = cabs1 ( psi[1] );
psisq *= psisq;
f[0] = psisq;
g[0] = psisq;
hk = psisq;

for ( i=2; i < RADIUS; ++i )
{
    ldi = (long double) i;
    psisq = cabs1 ( psi[i] );
    psisq *= psisq;
    f[i-1] = f[i-2] + ldi * psisq;
    ldi *= ldi;
    g[i-1] = g[i-2] + ldi * psisq;
    hk += ldi * ldi * psisq;
}
for ( ; i<=(N-2); ++i )
{
    ldi = (long double) i;
    psisq = cabs1 ( psi[i] );
    psisq *= psisq;
    f[i-1] = f[i-2] + ldi * psisq;
    ldi *= ldi;
    g[i-1] = g[i-2] + ldi * psisq;
}

ru = f[N-2] - f[RADIUS-2] + ( dreikzwei * g[RADIUS
-2] - hk ) / zweikdrei;
rw = f[N-2] - hk / zweikdrei;

u = v_pre * ru;
w = v_pre * rw;
z = v_pre * ( g[RADIUS-2] / zweikdrei );

/* Calculate b */
b[0] = bn_pre - u;
for ( i=1; i<=RADIUS; ++i )
{
    ldi = (long double complex) i;

```

```

        b[i] = b_pre - u + ldi * ldi * z;
    }
    for ( ; i<N; ++i )
    {
        ldi = (long double complex) i;
        b[i] = b_pre - w + ( ldi * ldi - dreikzwei +
            zweikdrei / ldi ) * z - v_pre * g[i-2] /
            ldi + v_pre * f[i-2];
    }
}

```

Listing 5.6: Hohlkugelpotential

```

void grav_potential ( long double complex psi[N], long
    double complex b[N] )
{
    long double f[N-2];
    long double g[N-2];
    long double complex u;
    long double complex w;
    long double complex z;
    long double ldi;
    long double psisq;
    int i;

    /* Calculate f, g */
    psisq = cabs1 ( psi[1] );
    psisq *= psisq;
    f[0] = psisq;
    g[0] = psisq;

    for ( i=2; i < RADIUS; ++i )
    {
        ldi = (long double) i;
        psisq = cabs1 ( psi[i] );
        psisq *= psisq;
        f[i-1] = f[i-2] + ldi * psisq;
        ldi *= ldi;
        g[i-1] = g[i-2] + ldi * psisq;
    }
    for ( ; i<=(N-2); ++i )
    {
        ldi = (long double) i;
        psisq = cabs1 ( psi[i] );
        psisq *= psisq;

```

```
        f[i-1] = f[i-2] + ldi * psisq;
        ldi *= ldi;
        g[i-1] = g[i-2] + ldi * psisq;
    }

    u = v_pre * ( f[N-2] - f[RADIUS-2] + g[RADIUS-2] /
        ((long double) RADIUS) );
    w = b_pre - u;
    z = v_pre * f[RADIUS-2];

    /* Calculate b */
    b[0] = bn_pre - u;
    for ( i=1; i<=RADIUS; ++i )
    {
        b[i] = w;
    }
    for ( ; i<N; ++i )
    {
        ldi = (long double complex) i;
        b[i] = w - z + v_pre * ( g[RADIUS-2] - g[i-2]
            ) / ldi + v_pre * f[i-2];
    }
}
```

Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, Stephen L.: Comments on proposed gravitational modifications of Schrödinger dynamics and their experimental implications. In: *J. Phys. A* 40 (2007), S. 755–763
- [2] ALBERS, Mark ; KIEFER, Claus ; REGINATTO, Marcel: Measurement analysis and quantum gravity. In: *Phys. Rev. D* 78 (2008), S. 064051
- [3] ARNDT, Markus ; HORNBERGER, Klaus: *Quantum interferometry with complex molecules*. 2009. – arXiv: 0903.1614
- [4] ARNDT, Markus ; HORNBERGER, Klaus ; ZEILINGER, Anton: Probing the limits of the quantum world. In: *Phys. World* 18 (2005), S. 35–40
- [5] BARGMANN, V. ; MICHEL, Louis ; TELEGDI, V. L.: Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field. In: *Phys. Rev. Lett.* 2 (1959), S. 435–436
- [6] BARUT, A. O.: Quantum-Electrodynamics Based on Self-Energy. In: *Phys. Scripta*. T21 (1988), S. 18–21
- [7] BARUT, A. O.: The Revival of Schrödinger's Interpretation of Quantum Mechanics. In: *Found. Phys. Lett.* 1 (1988), S. 47–55
- [8] BARUT, A. O.: Schrödinger's Interpretation of ψ as a Continuous Charge Distribution. In: *Ann. Phys. Leipzig* 500 (1988), S. 31–36. – 7. Folge, Band 45, Heft 1
- [9] BARUT, A. O. ; KRAUS, J.: Nonperturbative Quantum Electrodynamics: The Lamb Shift. In: *Found. Phys.* 13 (1983), S. 189–194
- [10] BARUT, A. O. ; VAN HUELE, J. E: Quantum electrodynamics based on self-energy: Lamb shift and spontaneous emission without field quantization. In: *Phys. Rev. A* 32 (1985), S. 3187–3195
- [11] BASSI, Angelo ; DÜRR, Detlef ; HINRICHS, Günter: *On the uniqueness of the equation for state-vector collapse*. 2013. – arXiv:1303.4284

- [12] BASSI, Angelo ; HEJAZI, Kasra: *No-faster-than-light-signaling implies linear evolutions. A re-derivation*. 2013. – Unveröffentlichtes Review der Argumente von Gisin in *Helv. Phys. Acta* 62 (1989), S. 363–371
- [13] BASSI, Angelo ; LOCHAN, Kinjalk ; SATIN, Seema ; SINGH, Tejinder P. ; ULBRICHT, Hendrik: Models of wave-function collapse, underlying theories, and experimental tests. In: *Rev. Mod. Phys.* 85 (2013), S. 471–527
- [14] BIRRELL, N. D. ; DAVIES, P. C. W.: *Quantum fields in curved space*. Cambridge : Cambridge University Press, 1982
- [15] BOHR, N.: The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. In: *Nature* 121 (1928), S. 580–590
- [16] BOHR, N. ; ROSENFELD, L.: Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen. In: *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser* 12 (1933), S. 3–65
- [17] BORISOV, A. B.: Convergence of symmetric Crank-Nicolson type numerical methods for the nonlinear Schrödinger equation. In: *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling* 5 (1990), S. 445–463
- [18] BUTTERFIELD, Jeremy ; ISHAM, Christopher: Spacetime and the philosophical challenge of quantum gravity. In: CALLENDER, Craig (Hrsg.) ; HUGGETT, Nick (Hrsg.): *Physics meets philosophy at the Planck scale. Contemporary theories in quantum gravity*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, Kapitel 2, S. 33–89
- [19] CALLENDER, Craig ; HUGGETT, Nick: Introduction. In: CALLENDER, Craig (Hrsg.) ; HUGGETT, Nick (Hrsg.): *Physics meets philosophy at the Planck scale. Contemporary theories in quantum gravity*. Cambridge : Cambridge University Press, 2001, Kapitel 1, S. 1–30
- [20] CARLIP, S.: Is Quantum Gravity Necessary? In: *Class. Quant. Grav.* 25 (2008), S. 154010
- [21] CARTAN, Elie: Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). In: *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 40 (1923), Nr. 3, S. 325–412

- [22] CAYLEY, Arthur: Sur quelques propriétés des déterminants gauches. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 32 (1846), S. 119–123
- [23] CHRISTIAN, Joy: Exactly soluble sector of quantum gravity. In: *Phys. Rev. D* 56 (1997), S. 4844–4877
- [24] COLELLA, R. ; OVERHAUSER, A. W. ; WERNER, S. A.: Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference. In: *Phys. Rev. Lett.* 34 (1975), S. 1472–1474
- [25] CONTE, S. D. ; BOOR, Carl de ; SPRINGER, G. (Hrsg.): *Elementary Numerical Analysis. An Algorithmic Approach*. 3. Auflage. New York : McGraw-Hill, 1980 (International Series in Pure and Applied Mathematics)
- [26] CRANK, J. ; NICOLSON, P.: A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. In: *Proc. Camb. Phil. Soc.* 43 (1947), S. 50–67. – Neuveröffentlichte Version in: *Advances in Computational Mathematics* 6 (1996), S. 207–226
- [27] CZACHOR, Marek ; DOEBNER, H.-D.: Correlation experiments in nonlinear quantum mechanics. In: *Phys. Lett. A* 301 (2002), S. 139–152
- [28] DE OLIVEIRA, C. G. ; TIOMNO, J.: Representations of Dirac Equation in General Relativity. In: *Il Nuovo Cimento* 24 (1962), S. 1876–1891
- [29] DIÓSI, L.: Gravitation and quantum-mechanical localization of macro-objects. In: *Phys. Lett. A* 105 (1984), S. 199–202
- [30] DIÓSI, L.: Models for universal reduction of macroscopic quantum fluctuations. In: *Phys. Rev. A* 40 (1989), S. 1165–1174
- [31] DRAGON, Norbert: *Anmerkungen zur Quantenmechanik*. Vorlesungsskript, abrufbar unter: <http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/stonehenge/qm.pdf>,
- [32] EPPLEY, Kenneth ; HANNAH, Eric: The necessity of quantizing the gravitational field. In: *Found. Phys.* 7 (1977), S. 51–68
- [33] FINSTER, Felix: Local $U(2,2)$ symmetry in relativistic quantum mechanics. In: *J. Math. Phys.* 39 (1998), S. 6276–6290

- [34] FINSTER, Felix ; SMOLLER, Joel ; YAU, Shing-Tung: Particlelike solutions of the Einstein-Dirac equations. In: *Phys. Rev. D* 59 (1999), S. 104020
- [35] FOLDY, Leslie L. ; WOUTHUYSEN, Siegfried A.: On the Dirac Theory of Spin 1/2 Particles and Its Non-Relativistic Limit. In: *Phys. Rev.* 78 (1950), S. 29–36
- [36] FREDENHAGEN, K. ; REHREN, K.-H. ; SEILER, E.: Quantum Field Theory: Where We Are. In: STAMATESCU, Ion-Olimpiu (Hrsg.) ; SEILER, Erhard (Hrsg.): *Approaches to Fundamental Physics. An Assessment of Current Theoretical Ideas*. Berlin : Springer, 2007 (Lecture Notes in Physics), S. 61–87
- [37] FRIEDRICHS, Kurt: Eine invariante Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes und des Grenzüberganges vom Einsteinschen zum Newtonschen Gesetz. In: *Mathematische Annalen* 98 (1928), S. 566–575
- [38] FRÖHLICH, Jürg ; LENZMANN, Enno: Mean-Field Limit of Quantum Bose Gases and Nonlinear Hartree Equation. In: *Seminaire EDP, Ecole Polytechnique XVIII* (2003-2004), S. 1–26
- [39] GAO, Shan: Does gravity induce wavefunction collapse? An examination of Penrose's conjecture. In: *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 44 (2013), S. 148–151
- [40] GHIRARDI, GianCarlo ; GRASSI, Renata ; RIMINI, Alberto: Continuous-spontaneous-reduction model involving gravity. In: *Phys. Rev. A* 42 (1990), S. 1057–1064
- [41] GISIN, N.: Stochastic quantum dynamics and relativity. In: *Helv. Phys. Acta.* 62 (1989), S. 363–371
- [42] GISIN, N.: Weinberg's non-linear quantum mechanics and superluminal communications. In: *Phys. Lett. A* 143 (1990), S. 1–2
- [43] GISIN, N. ; RIGO, M.: Relevant and irrelevant nonlinear Schrödinger equations. In: *J. Phys. A* 28 (1995), S. 7375–7390
- [44] GIULINI, Domenico: On Galilei Invariance in Quantum Mechanics and the Bargmann Superselection Rule. In: *Ann. Phys. New York* 249 (1996), S. 222–235

- [45] GIULINI, Domenico: Equivalence Principle, Quantum Mechanics, and Atom-interferometric Tests. In: FINSTER, Felix (Hrsg.) ; MÜLLER, Olaf (Hrsg.) ; NARDMANN, Marc (Hrsg.) ; TOLKSDORF, Jürgen (Hrsg.) ; ZEIDLER, Eberhard (Hrsg.): *Quantum Field Theory and Gravity. Conceptual and Mathematical Advances in the Search for a Unified Framework*. Basel : Birkhäuser/Springer, 2012, S. 345–370
- [46] GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to the Schrödinger-Newton equation. In: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), S. 195026
- [47] GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: The Schrödinger-Newton equation as nonrelativistic limit of gravitating Klein-Gordon and Dirac fields. In: *Class. Quant. Grav.* 29 (2012), S. 215010
- [48] GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to a modified Schrödinger-Newton equation for a homogeneous-sphere potential. In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013), S. 155018
- [49] GUZMÁN, F. S. ; UREÑA-LÓPEZ, L. A.: Newtonian collapse of scalar field dark matter. In: *Phys. Rev. D* 68 (2003), S. 024023
- [50] GUZMÁN, F. S. ; UREÑA-LÓPEZ, L. A.: Evolution of the Schrödinger-Newton system for a self-gravitating scalar field. In: *Phys. Rev. D* 69 (2004), S. 124033
- [51] GUZMÁN, F. S. ; UREÑA-LÓPEZ, L. A.: Gravitational Cooling of Self-Gravitating Bose Condensates. In: *Astrophys. J.* 645 (2006), S. 814–819
- [52] HACKERMÜLLER, Lucia ; UTTENTHALER, Stefan ; HORNBERGER, Klaus ; REIGER, Elisabeth ; BREZGER, Björn ; ZEILINGER, Anton ; ARNDT, Markus: Wave Nature of Biomolecules and Fluorofullerenes. In: *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), S. 090408
- [53] HARRISON, R. ; MOROZ, I. ; TOD, K. P.: A numerical study of the Schrödinger-Newton equations. In: *Nonlinearity* 16 (2003), S. 101
- [54] HEISENBERG, W.: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. In: *Z. Phys.* 43 (1927), S. 172–198

- [55] HORNBERGER, Klaus ; GERLICH, Stefan ; HASLINGER, Philipp ; NIMMRICHTER, Stefan ; ARNDT, Markus: Colloquium: Quantum interference of clusters and molecules. In: *Rev. Mod. Phys.* 84 (2012), S. 157–173
- [56] HUGHSTON, Lane P. ; JOZSA, Richard ; WOOTTERS, William K.: A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix. In: *Phys. Lett. A* 183 (1993), S. 14–18
- [57] ILLNER, Reinhard ; ZWEIFEL, Paul F.: Global Existence, Uniqueness and Asymptotic Behaviour of Solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson Systems. In: *Math. Method. Appl. Sci.* 17 (1994), S. 349–376
- [58] JORDAN, Thomas F.: Why quantum dynamics is linear. In: *J. of Phys.: Conf. Ser.* 196 (2009), S. 012010
- [59] JÄÄSKELÄINEN, Markku: Gravitational self-localization for spherical masses. In: *Phys. Rev. A* 86 (2012), S. 052105
- [60] KÁROLYHÁZY, F.: Gravitation and Quantum Mechanics of Macroscopic Objects. In: *Il Nuovo Cimento A* 42 (1966), S. 390–402
- [61] KÁROLYHÁZY, F. ; FRENKEL, A. ; LUKÁCS, B.: On the possible role of gravity in the reduction of the wave function. In: PENROSE, R. (Hrsg.) ; ISHAM, C. J. (Hrsg.): *Quantum Concepts in Space and Time*, 1986, S. 109–128
- [62] KIBBLE, T. W. B.: Is a Semi-Classical Theory of Gravity Viable? In: ISHAM, C. J. (Hrsg.) ; PENROSE, R. (Hrsg.) ; SCIAMA, D. W. (Hrsg.): *Quantum Gravity 2. A Second Oxford Symposium*, Oxford University Press, 1981, S. 63–80
- [63] KIEFER, Claus: *International Series of Monographs on Physics*. Bd. 124: *Quantum Gravity*. 2. Auflage. Oxford : Clarendon Press, 2007
- [64] KIEFER, Claus ; SINGH, Tejinder P.: Quantum gravitational corrections to the functional Schrödinger equation. In: *Phys. Rev. D* 44 (1991), S. 1067–1076
- [65] KLEIN, O.: Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. In: *Z. Phys.* 53 (1929), S. 157–165

- [66] KUMAR, Deepak ; SONI, Vikram: Single particle Schrödinger equation with gravitational self-interaction. In: *Phys. Lett. A* 271 (2000), S. 157–166
- [67] LANDAU, L. ; PEIERLS, R.: Erweiterung des Unbestimmtheitsprinzips für die relativistische Quantentheorie. In: *Z. Phys.* 69 (1931), S. 56–69
- [68] LIEB, Elliott H.: Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. In: *Stud. Appl. Math.* 57 (1977), S. 93–105
- [69] LINDBLAD, G.: On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups. In: *Commun. Math. Phys.* 48 (1976), S. 119–130
- [70] LOCHAN, Kinjalk ; SINGH, T. P.: Nonlinear quantum mechanics, the superposition principle, and the quantum measurement problem. In: *Pramana-J. Phys.* 76 (2011), S. 67–91
- [71] MATTINGLY, James: Is Quantum Gravity Necessary? In: KOX, A. J. (Hrsg.) ; EISENSTAEDT, Jean (Hrsg.): *Einstein Studies Volume 11. The Universe of General Relativity*. Boston : Birkhäuser, 2005 (Einstein Studies), Kapitel 17, S. 327–338
- [72] MATTINGLY, James: Why Eppley and Hannah's thought experiment fails. In: *Phys. Rev. D* 73 (2006), S. 064025
- [73] MØLLER, C.: Les Théories Relativistes de la Gravitation. In: TONNELAT, A. Lichnerowicz & M.-A. (Hrsg.): *Colloques Internationaux CNRS Bd. 91*, CNRS, Paris, 1962
- [74] MOROZ, Irene M. ; PENROSE, Roger ; TOD, Paul: Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations. In: *Class. Quant. Grav.* 15 (1998), S. 2733–2742
- [75] NESVIZHEVSKY, V. V. ; BÖRNER, H. G. ; GAGARSKI, A. M. ; PETOUKHOV, A. K. ; PETROV, G. A. ; ABELE, H. ; BAESSLER, S. ; DIVKOVIC, G. ; RUESS, F. J. ; STÖFERLE, Th. ; WESTPHAL, A. ; STRELKOV, A. V. ; PROTASOV, K. V. ; VORONIN, A. Y.: Measurement of quantum states of neutrons in the Earth's gravitational field. In: *Phys. Rev. D* 67 (2003), S. 102002

- [76] PADMANABHAN, Hamsa ; PADMANABHAN, T.: Nonrelativistic limit of quantum field theory in inertial and noninertial frames and the principle of equivalence. In: *Phys. Rev. D* 84 (2011), S. 085018
- [77] PAGE, Don N. ; GEILKER, C. D.: Indirect Evidence for Quantum Gravity. In: *Phys. Rev. Lett.* 47 (1981), S. 979–982
- [78] PAGE, Don N. ; GEILKER, C. D.: An Experimental Test of Quantum Gravity. In: DUFF, M. J. (Hrsg.) ; ISHAM, C. J. (Hrsg.): *Quantum structure of space and time. Proceedings of the Nuffield Workshop, Imperial College London, 3-21 August 1981.* Cambridge : Cambridge University Press, 1982, S. 11–21
- [79] PARDY, Miroslav: Classical Motions of Spin 1/2 Particles with Zero Anomalous Magnetic Moment. In: *Acta. Phys. Slovaca.* 23 (1973), S. 5–12
- [80] PAULI, W.: Diracs Wellengleichung des Elektrons und geometrische Optik. In: *Helv. Phys. Acta.* 5 (1932), S. 179–199
- [81] PENROSE, Roger: On gravity's role in quantum state reduction. In: *Gen. Relat. Gravit.* 28 (1996), S. 581–600
- [82] PENROSE, Roger: Quantum computation, entanglement and state reduction. In: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.* 356 (1998), S. 1927–1939
- [83] PERES, Asher: Nonlinear variants of Schrödinger's equation violate the second law of thermodynamics. In: *Phys. Rev. Lett.* 63 (1989), S. 1114
- [84] PIKOVSKI, Igor ; VANNER, Michael R. ; ASPELMEYER, Markus ; KIM, M. S. ; BRUKNER Časlav: Probing Planck-scale physics with quantum optics. In: *Nat. Phys.* 8 (2012), S. 393–397
- [85] POLCHINSKI, Joseph: Weinberg's Nonlinear Quantum Mechanics and the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. In: *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991), S. 397–400
- [86] RAFANELLI, Kenneth ; SCHILLER, Ralph: Classical Motions of Spin-1/2 Particles. In: *Phys. Rev. B* 135 (1964), S. 279–281
- [87] ROBERTSHAW, Oliver ; TOD, Paul: Lie point symmetries and an approximate solution for the Schrödinger-Newton equations. In: *Nonlinearity* 19 (2006), S. 1507–1514

- [88] ROSENFELD, L.: On quantization of fields. In: *Nucl. Phys.* 40 (1963), S. 353–356
- [89] RUBINOW, S. I. ; KELLER, Joseph B.: Asymptotic Solution of the Dirac Equation. In: *Phys. Rev.* 131 (1963), S. 2789–2796
- [90] RUFFINI, Remo ; BONAZZOLA, Silvano: Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the Concept of an Equation of State. In: *Phys. Rev.* 187 (1969), S. 1767–1783
- [91] SALZMAN, P. J. ; CARLIP, S.: *A possible experimental test of quantized gravity*. 2006. – arXiv: gr-qc/0606120
- [92] SALZMAN, Peter J.: *Investigation of the Time Dependent Schrödinger-Newton Equation*, University of California, Davis, Diss., 2005
- [93] SCHRÖDINGER, E.: Der Energieimpulssatz der Materiewellen. In: *Ann. Phys. Leipzig* 387 (1927), S. 265–272
- [94] SEIDEL, Edward ; SUEN, Wai-Mo: Dynamical evolution of boson stars: Perturbating the ground state. In: *Phys. Rev. D* 42 (1990), S. 384–403
- [95] SEXL, Roman U. ; URBANTKE, Helmuth K.: *Relativity, Groups, Particles. Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics*. Wien : Springer, 2001
- [96] SHEKA, E. F.: Stepwise Computational Synthesis of Fullerene C₆₀ Derivatives. Fluorinated Fullerenes C₆₀F_{2k}. In: *J. Exp. Theor. Phys.* 111 (2010), S. 397–414
- [97] SPOHN, Herbert: Semiclassical Limit of the Dirac Equation and Spin Precession. In: *Ann. Phys. New York* 282 (2000), S. 420–431
- [98] STRAUMANN, Norbert ; BALIAN, R. (Hrsg.) ; BEIGLBÖCK, W. (Hrsg.) ; GROSSE, H. (Hrsg.) ; LIEB, E. H. (Hrsg.) ; RESHETIKHIN, N. (Hrsg.) ; SPOHN, H. (Hrsg.) ; THIRRING, W. (Hrsg.): *General Relativity. With Applications to Astrophysics*. Berlin : Springer, 2004 (Texts and Monographs in Physics)
- [99] TOD, K. P.: The ground state energy of the Schrödinger-Newton equation. In: *Phys. Lett. A* 280 (2001), S. 173–176

- [100] TOD, Paul ; MOROZ, Irene M.: An analytical approach to the Schrödinger-Newton equations. In: *Nonlinearity* 12 (1999), S. 201
- [101] VAN METER, J. R.: Schrödinger-Newton 'collapse' of the wavefunction. In: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), S. 215013
- [102] WALD, Robert M. ; WALD, Robert M. (Hrsg.) ; FRISCH, Henry J. (Hrsg.) ; MAZENKO, Gene F. (Hrsg.) ; NAGEL, Sidney R. (Hrsg.): *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago : The University of Chicago Press, 1994 (Chicago Lectures in Physics)
- [103] WEINBERG, Steven: Precision Tests of Quantum Mechanics. In: *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989), S. 485–488
- [104] WEINBERG, Steven: Testing Quantum Mechanics. In: *Ann. Phys. New York* 194 (1989), S. 336–386
- [105] WENTZEL, Gregor: Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik. In: *Z. Phys. A* 38 (1926), S. 518–529
- [106] WIGNER, E. P.: *Gruppentheorie*. Braunschweig : Friedrich Vieweg und Sohn, 1931

Lebenslauf

André Matthias Großardt

geboren am 9. Oktober 1984 in Offenburg

Akademische Tätigkeiten

- seit Nov. 2013: Wiss. Mitarbeiter (Postdoc),
Università degli Studi di Trieste
- Feb. bis Okt. 2010: Wiss. Mitarbeiter,
Bernstein Center for Computational Neuroscience Berlin

Bildungsgang

- Dez. 2013: Promotion, Physik,
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover sowie
Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und
Mikrogravitation (ZARM) Bremen
mit Stipendium des HALOSTAR-Promotionsprogramms des
Exzellenzclusters QUEST an der Leibniz Universität
Hannover
- Apr. 2010: Diplom, Physik,
Humboldt-Universität zu Berlin,
Thema der Diplomarbeit: „*Three-Point Functions in
Superconformal Field Theories*“
- Okt. 2006: Vordiplom in Physik,
Universität Konstanz,
- Okt. 2004 bis Mrz. 2005: Fernstudium Physik und
Mathematik,
Technische Universität Kaiserslautern
(während des Zivildiensts)
- Jun. 2004: Abitur,
Christoph-Schrempf-Gymnasium Besigheim,

Publikationen

- GROSSARDT, André ; GIULINI, Domenico: The Schrödinger-Newton equation as a model for self-gravitating systems. In: JANTZEN, Robert T. (Hrsg.); ROSQUIST, Kjell (Hrsg.); RUFFINI, Remo (Hrsg.): *Proceedings of the Thirteenth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*. Singapur : World Scientific, 2014. Veröffentlichung ausstehend, Vorabversion unter `robot.icra.it:8080/store/1599.pdf`.
- GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to a modified Schrödinger-Newton equation for a homogeneous-sphere potential. In: *Class. Quant. Grav.* 30 (2013) S. 155018 [arXiv:1212.5146 [gr-qc]]
- GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: The Schrödinger-Newton equation as a non-relativistic limit of self-gravitating Klein–Gordon and Dirac fields. In: *Class. Quant. Grav.* 29 (2012) S. 215010 [arXiv:1206.4250 [gr-qc]]
- GEORGIU, George ; GILI, Valeria ; GROSSARDT, André ; PLEFKA, Jan: Three-point functions in planar $N = 4$ super Yang-Mills Theory for scalar operators up to length five at the one-loop order. In: *J. High Energy Phys.* 1204 (2012) S. 038 [arXiv:1201.0992 [hep-th]]
- GIULINI, Domenico ; GROSSARDT, André: Gravitationally induced inhibitions of dispersion according to the Schrödinger-Newton equation. In: *Class. Quant. Grav.* 28 (2011), S. 195026 [arXiv:1105.1921 [gr-qc]]