



PD 12406



003088020

COBISS •

UNIVERZITET U BEOGRADU  
GRAĐEVINSKI FAKULTET

DORDE M. VUKSANOVIĆ

NELINEARNA ANALIZA  
ARMIRANO BETONSKIH PLOČA  
METODOM KONAČNIH ELEMENATA

• DOKTORSKA DISERTACIJA •

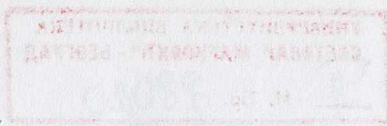
BEOGRAD  
1963







PD 12406



Univerzitet u Beogradu

Gradjevinski fakultet

Djordje M. Vuksanović

**NELINEARNA ANALIZA  
ARMIRANOBETONSKIH PLOČA  
METODOM KONAČNIH ELEMENATA**

Doktorska disertacija

Beograd, 1988. godine



УНИВЕРЗИТЕТСКА БИБЛИОТЕКА  
СВЕТОЗАР МАРКОВИЋ - БЕОГРАД

И. Бр. 88020





Prijatna mi je dužnost da se zahvalim svima koji su mi pomogli pri izradi ove doktorske disertacije i to:

Prof. dr Miodragu Sekuloviću, mentoru ovog rada, na podršci i pomoći pri izradi istog,

Akademiku Prof. dr Nikoli Hajdinu i Prof. O.C. Zienkiewicz-u koji su mi omogućili boravak na Civil Engineering Department, University College, Swansea, U.K., tokom školske 1984/85 godine, gde je znatan deo ove disertacije uradjen,

Republičkoj zajednici nauke SR Srbije koja je finansirala ovaj boravak,

Dr. E. Hinton-u sa kojim je zajednički rad na knjizi "Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells", Pineridge Press, Swansea, 1988, čiji su određeni delovi sastavni deo ove disertacije, bio izuzetno koristan i inspirativan za moj dalji naučni rad,

Osoblju računskih centara na Civil Engineering Department, University College, Swansea i Gradjevinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu na pomoću pri izradi računarskih programa i

sekretarici Nadi Ugrici na uspešnoj obradi teksta.

2.3.4. Modeli sa tri i više parametra	23
2.4. Konstitutivni modeli za beton	32
2.5. Materijalni modeli betona primenjeni ovom radu	37
2.5.1. Kraka uvodne napetosti	37
2.5.2. Elastično ponašanje betona	38
2.5.3. Plastično ponašanje betona	40
2.5.4. Drobiljanje betona	42
2.5.5. Modeliranje prslina u betonu	42
2.5.6. "Tension stiffening" efekat	46
2.5.7. Transfer napetosti	48
2.5.8. Dvostrežno naprezanje betona	52
2.5.9. Modeliranje armiranja	53
2.6. Literatura	54



## S A D R Ž A J

1. UVOD	
1.1. Kratak istorijski pregled primene metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih konstrukcija	1
1.2. Analitički modeli za armiranobetonske konstrukcije	5
1.3. Kratak prikaz sadržaja rada	10
1.4. Literatura	11
2. MATEMATIČKI MODEL PONAŠANJA ARMIRANOG BETONA	
2.1. Uvod	13
2.2. Neke osnovne karakteristike betona i čelika	14
2.3. Teorije loma betona	
2.3.1. Invarijante napona i opšte karakteristike površi loma	20
2.3.2. Modeli sa jednim parametrom	24
2.3.3. Modeli sa dva parametra	26
2.3.4. Modeli sa tri i više parametra	28
2.4. Konstitutivni modeli za beton	32
2.5. Materijalni model betona primenjen u ovom radu	
2.5.1. Neke uvodne napomene	37
2.5.2. Elastično ponašanje betona	39
2.5.3. Plastično ponašanje betona	40
2.5.4. Drobljenje betona	42
2.5.5. Modeliranje prslina u betonu	42
2.5.6. "Tension stiffening" efekat	46
2.5.7. Transfer smičućih sila	48
2.5.8. Dvostruko isprskali beton	49
2.5.9. Modeliranje armature	53
2.6. Literatura	54



3. DISKRETIZACIJA PLOČE KONAČNIM ELEMENTIMA	
3.1. Uvod	57
3.2. Varijaciona formulacija problema	
3.2.1. Osnovne pretpostavke Mindlin-ove teorije ploča	59
3.2.2. Veze između deformacija i pomeranja	60
3.2.3. Inkrementalne veze između napona i deformacija	61
3.2.4. Princip virtualnog rada i princip o minimumu potencijalne energije	62
3.3. Standardna formulacija Mindlin-ovog konačnog elementa ploče	
3.3.1. Izoparametarska formulacija	63
3.3.2. Proračun matrice krutosti elementa	66
3.4. Formulacija novog konačnog elementa ploče	
3.4.1. Pojam "locking"-a i postupci za njegovo eliminisanje	69
3.4.2. Zamenjujuće polje deformacije smicanja	77
3.4.3. Osnovne karakteristike elementa QUAD9*	83
3.4.4. Numerički primeri	86
3.5. Literatura	96
4. POSTUPCI ZA REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH JEDNAČINA	
4.1. Uvod	103
4.2. Newton-Raphson-ove metode	
4.2.1. Standardna Newton-Raphson-ova metoda	104
4.2.2. Modifikovane Newton-Raphson-ove metode	106
4.2.3. Metoda početnog napona	108
4.3. Metode korigovanih matrica	109
4.4. "Arc-length" metode	111
4.5. Kriterijumi konvergencije	114
4.6. Literatura	115
5. STRUKTURA RAČUNARSKOG PROGRAMA I BROJNI PRIMERI	
5.1. Uvodne napomene	117
5.2. Dijagram toka programa	120
5.3. Struktura pojedinih blokova	
5.3.1. Ulazni blok	122



5.3.2. Sračunavanje matrice krutosti	123
5.3.3. Rešavanje sistema jednačina	124
5.3.4. Odredjivanje rezidualnih sila	124
5.3.5. Konvergenција rešenja	125
5.3.6. Izlazni blok	125
5.4. Brojni primer	126
5.5. Literatura	131



## 1. UVOD

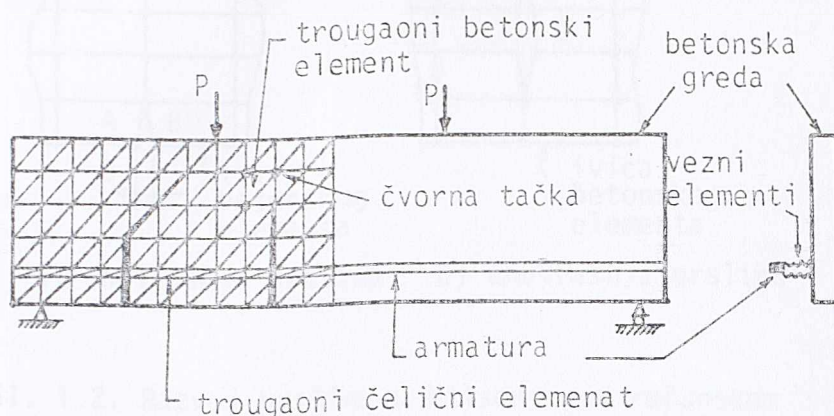
### 1.1. KRATAK ISTORIJSKI PREGLED PRIMENE METODE KONAČNIH ELEMENATA U ANALIZI ARMIRANOBETONSKIH KONSTRUKCIJA

Od početka ovoga veka predmet veoma intenzivnog proučavanja mnogih istraživača jeste ponašanje elemenata i konstrukcija od armiranog betona. Uporedo sa razvojem i sve većom primenom armiranog betona u inženjerskoj praksi razvijali su se i odgovarajući analitički postupci za proračun konstrukcija od ovog materijala. Ovi postupci su uglavnom počivali na jednostavnim uslovima ravnoteže i empirijskim obrascima zasnovanim na rezultatima mnogobrojnih eksperimentalnih istraživanja. Takav pristup, neophodan u prošlosti, pokazao se efikasnim i sigurnim u standardnim inženjerskim problemima, te je stoga poslužio kao osnova za propise o armiranom betonu u nizu zemalja. Pojavom novih numeričkih metoda, u prvom redu metode konačnih elemenata, stvorena je mogućnost za znatno racionalnije i detaljnije istraživanje ponašanja armiranobetonskih konstrukcija. Sada se pojedine osobine materijala i pojave u armiranom betonu, koje su ranije bile zanemarivane ili sasvim aproksimativno uzimane u obzir, mogu potpuno realno modelirati i detaljno proučavati. Ovakve numeričke studije ponašanja armiranog betona, u kojima se značajni parametri mogu sistematski varirati, stvaraju jednu široku osnovu za formiranje odgovarajućih propisa za svakodnevnu inženjersku primenu. Drugi značajan vid primene ovih metoda sastoji se u proračunu specijalnih inženjerskih objekata, kao što su konstrukcije nuklearnih reaktora, platforme za vadjenje nafte iz mora i slično, kod kojih su zahtevi sigurnosti i funkcionalnosti objekta rigorozni.

Prva publikacija<sup>1.1</sup> koja se odnosi na primenu metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih greda potiče od Ngo-a i Scordelis-a iz 1967 godine. U ovoj studiji analiziran je niz prostih greda, sa različitim unapred odredjenim rasporedom prslina, kod kojih su beton i armatura idealizovani sa dvodimenzionalnim trougaonim elementima (sl. 1.1). Veza između beto-



na i armature ostvarena je preko specijalnih veznih elemenata ("linkage elements"). Sprovedena je linearna elastična analiza radi određivanja napona u betonu i armaturi kao i napona prijanjanja između betona i armature a u zavisnosti od usvojenog modela prslina.



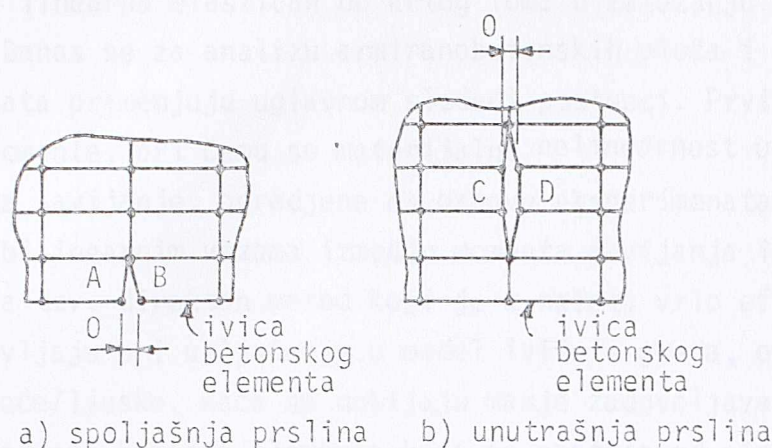
Sl. 1.1. Originalni računski model - prema referenci [1.1]

Nilson<sup>1.2</sup> uvodi u računski model armiranog betona nelinearne materijalne osobine betona i realan transfer napona prijanjanja između betona i armature, određujući ekvivalentnu krutost veznih elemenata iz nelinearne veze između napona prijanjanja i lokalnog proklizavanja armature. Opterećenje se nanosi inkrementalno pri čemu se prslina javlja između dva susedna elementa u kojima prosečne vrednosti glavnih napona zatezanja premašuju čvrstoću betona na zatezanje. Prslina se fizički ostvaruje razdvajanjem ovih elemenata duž njihove zajedničke ivice (sl. 1.2). U ovom modelu, topologija razmatrane konstrukcije mora se za svaki inkrement opterećenja posebno definisati što je svakako limitirajući faktor za njegovu ekonomičnu primenu.

Rashid<sup>1.3</sup> (1986) je predložio model u kome se formiranje prslina prati promenom elemenata matrice materijalnih karakteristika betona. Postupak utvrđivanja nastanka prsline svodi se na sračunavanje glavnih napona ili dilatacija i njihovo upoređenje sa odgovarajućim kriterijumom za prslina. Ukoliko naponi ili dilatacije odgovaraju ili prekoračuju postavljeni kriterijum javlja se prslina, odnosno sistem prslina a krutost upravna na prslinu pada na nulu ili se znatno redukuje. Na taj način dolazi do preraspodele naponskog polja u okolini prslina na preostali deo razmatrane konstrukcije. Selna<sup>1.4</sup> je razvio mo-



del za analizu ramova kao sistema koji se sastoje od niza slojeva ("layered systems") usvajajući beton kao linearno elastičan materijal, do pojave prsline



Sl. 1.2. Razvoj prsline u Nilson-ovom računskom modelu - prema referenci [1.2]

na pri zatezanju, odnosno do uslova idealno plastičnog tečenja pri pritisku.

U poslednjih dvadeset godina primena metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih konstrukcija doživela je izvanredan napredak. O tome svedoči ogroman broj publikovanih radova iz ove oblasti. Nekoliko publikacija<sup>1.5-1.8</sup> daju sveobuhvatan pregled literature koja se odnosi na ovu oblast naučnog istraživanja a i pojedine internacionalne konferencije<sup>1.9</sup> tematski su posvećene ovoj problematici. Veliki broj radova odnosi se na primenu metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih ploča i ljuski, koje se često susreću u svakodnevnoj inženjerskoj praksi, bilo kao posebne konstrukcije bilo kao sastavni delovi drugih konstrukcija. Jofriet i McNiece<sup>1.10</sup> koriste u svom modelu za armiranobetonske ploče bilinearnu vezu između momenta savijanja i krivine. U njihovom radu pretpostavljaju se različite krutosti na savijanje za različita materijalna stanja betona. Krutost na savijanje isprskalog preseka određuje se na osnovu empirijskog efektivnog momenta inercije u kome je sadržan i efekat orijentacije armature u odnosu na pravac prsline. Ovaj postupak ima za nedostatak činjenicu da se promena materijalnih karakteristika po debljini ploče ne uzima u obzir, a to kod debelih ploča može biti od velikog uticaja na tačnost rešenja. Stoga najveći broj autora<sup>1.11-1.13</sup> predlaže slojeviti model ("layered model") gde se konačni element sastoji iz niza slojeva i gde se svakom sloju mogu propisati različite materijalne karakteristike. Na taj način moguće je pratiti razvoj prsline i po visini poprečnog preseka. Bashur i Darwin<sup>1.14</sup> koriste konačne elemente koji sadrže nelinearnu promenu materijal-



nih karakteristika po debljini ploče. Armiranobetonske ploče se u ovom slučaju razmatraju kao inkrementalno elastične anizotropne ploče, gde se ose anizotropije poklapaju sa linijama loma. Beton se tretira kao nelinearan materijal u pritisku i linearno elastičan do krtoog loma u zatezanju.

Danas se za analizu armiranobetonskih ploča i ljuski metodom konačnih elemenata primenjuju uglavnom sledeći postupci. Prvi, koristi standardne konačne elemente, pri čemu se materijalna nelinearnost uvodi primenom efektivne krutosti na savijanje, određene na osnovu eksperimenata i aproksimirane jednostavnim bilinearnim vezama između momenta savijanja i krivine. Ovaj postupak predstavlja tzv. direktan metod koji je u načelu vrlo efikasan. Odredjene teškoće se javljaju pri uključenju u model ivičnih greda, odnosno normalnih sila u ravni ploče/ljuske, kada se dobijaju manje zadovoljavajući rezultati. Drugi postupak koristi konačne elemente koji se sastoje od niza slojeva poredjanih po visini poprečnog preseka i gde svaki od slojeva može imati različite materijalne karakteristike zavisno od nivoa deformacije. U slojevima vlada ravno naponsko stanje definisano biaksijalnom relacijom napon-deformacija. Prednost slojevitog modela leži u činjenici da je moguće progresivno pratiti nastanak prslina i po visini poprečnog preseka i da se ivične grede mogu uključiti u analizu kao elementi koji se takodje sastoje iz niza slojeva. Medjutim ovim modelom nije moguće obuhvatiti lom usled smicanja i nastanak dijagonalnih prslina. Takodje ivične slojevite grede nisu sposobne da odgovore na smicanje, torziju i savijanje oko slabije ose. Ovo je veoma nepovoljna okolnost naročito ako se ovaj model primenjuje u analizi ljuski. Stoga se češće za aproksimaciju grednog, ivičnog nosača ljuske koristi niz vlakana konačnih dimenzija, drugim rečima vrši se diskretizacija i po visini i po širini poprečnog preseka. Kako su armiranobetonske ploče u znatnom broju slučajeva umereno debele to se za njihovu analizu mogu primeniti i trodimenzionalni konačni elementi<sup>1.16</sup>. Ove elemente gotovo redovno primenjujemo i u svim slučajevima gde smicanje ima ključnu ulogu u lomu betona a naročito u blizini oslonaca. Primer efikasne primene trodimenzionalnih konačnih elemenata je istraživanje loma betona, po smicanju, oko glave stuba u ploči medjuspratne tavanice.

Svaki pojedini, od gore navedenih postupaka za analizu armiranobetonskih ploča i ljuski metodom konačnih elemenata, ima određene komparativne prednosti ali i nedostatke u odnosu na druge postupke. Stoga se izbor metode proračuna prepušta istraživačima u zavisnosti od vrste problema, graničnih uslova, vrste opterećenja, konstitutivnih modela betona i armature i ostalih faktora koji utiču na konačan rezultat.



## 1.2. ANALITIČKI MODELI ZA ARMIRANOBETONSKE KONSTRUKCIJE

U poslednje vreme svedoci smo veoma brzog napretka u primeni metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih konstrukcija. Ta primena se može razdvojiti na dva područja. Prvo, je proučavanje lokalnih efekata i ponašanja u armiranom betonu, kao što su fenomen prslina, efekat spoja između betona i čelika, transfer smičućih sila u isprskalom betonu, "tension-stiffening" efekat i slično. Drugo područje analize usmereno je na efikasno i tačno određivanje celokupnih deformacijskih karakteristika i graničnih opterećenja za razmatrane armiranobetonske konstrukcije. Analitički modeli za armirani beton sastoje se u diskretizaciji jednog kompozitnog materijala skupom konačnih elemenata koji reprezentuju beton i armaturu. Ovi modeli su nelinearni, obzirom da se u svim armiranobetonskim konstrukcijama javljaju efekti materijalne nelinearnosti, koji potiču od: prskanja, tečenja i drobljenja betona i tečenja armature; nelinearnih veza napon-deformacija za beton i čelik; nelinearnih veza između napona prijanjanja i lokalnog proklizavanja armature; vremenskih efekata, kao što su skupljanje i puženje betona; temperature i istorije opterećenja. U pojedinim slučajevima (vitki stubovi, fleksibilni lukovi, plitke ljuske) ovi modeli uključuju i efekte geometrijske nelinearnosti. Iz svega ovoga možemo zaključiti da su analitički modeli za armirani beton veoma kompleksni i da je njihova efikasna primena skopčana sa nizom teškoća. Osnovni problem leži u činjenici da beton i čelik kao sastavni delovi armiranog betona imaju različite materijalne karakteristike. Dok su mehaničke osobine čelika uglavnom poznate u uskim granicama za beton to nije slučaj. Karakteristike betona u mnogome zavise od čitavog niza faktora, kao što su:

- vrsta i količina cementa,
- vrsta i granulometrijski sastav agregata,
- vodocementni faktor,
- način spravljanja,
- način ugradjivanja i negovanja,
- starost betona,
- oblik i intenzitet opterećenja i
- uslovi sredine u kojoj se nalazi.

Beton se u konstrukcijama najčešće nalazi u biaksijalnom ili triaksijalnom naponskom stanju, za razliku od armature koja je napregnuta jednoaksijalno. Određivanje adekvatnih konstitutivnih relacija i teorija loma za beton jedan je od ključnih koraka pri formiranju odgovarajućeg analitičkog modela.



Prema načinu na koji su obuhvaćene prslinae u okviru analitičkog modela za armirani beton razlikujemo diskretni model prslina i "razmazani" model prslina ("smeared cracking model").

Diskretni model prslina tretira iste kao pojedinačne prslinae između betonskih elemenata, pri čemu se one ostvaruju razdvajanjem čvornih tačaka. Ovaj model može imati unapred definisanu mrežu prslina<sup>1.1</sup> ili se razvoj prslina vezuje za praćenje polja glavnih napona zatezanja<sup>1.2</sup>. U slučaju kada prosečna vrednost glavnih napona zatezanja između dva susedna elementa premaši čvrstoću betona na zatezanje, dolazi do razdvajanja čvorova i između ta dva elementa fizički se javlja prslina. Za prslinae na ivici nosača samo se spoljašnje čvorne tačke razdvajaju, dok se za prslinae u unutrašnjosti nosača obe čvorne tačke razdvajaju (vidi sl. 1.2). Pošto se pojedinačna prslina formira nosač sa rasterećuje i ponovo definisana struktura nosača opterećuje. Promena topologije u ovim modelima, odnosno ponovno definisanje čvornih tačaka razara uzanu traku koeficijenata u globalnoj matrici krutosti sistema i znatno povećava efektivan rad računara. Uočeno je da se ovim modelom dužina prslinae znatno precenjuje odnosno da je zavisna od izabrane mreže konačnih elemenata. Diskretni model je povoljan za istraživanje lokalnih pojava u betonu, kao što su:

- stvaran raspored napona prijanjanja između betona i armature ("bond effect"),
- prenošenje smičućih sila trenjem agregata u prslinama ("aggregate interlock"),
- prenošenje smičućih sila armaturom ("dowel action"),
- uključivanje uzengija u armiranobetonski model i slično.

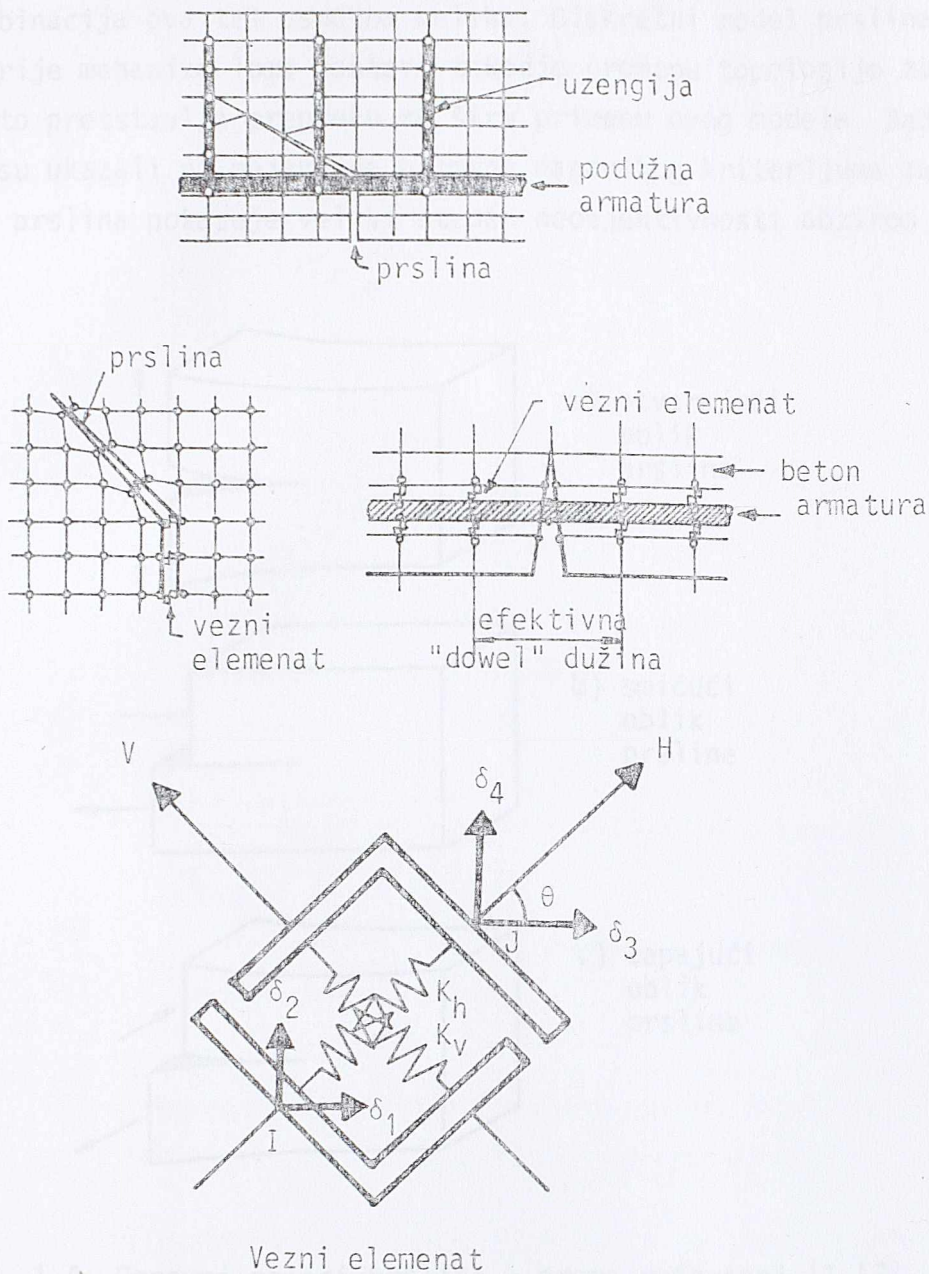
Za simulaciju veze između betona i armature, "aggregate interlock"-a, otvaranja i zatvaranja prslina služe vezni elementi, prikazani zajedno sa odgovarajućim analitičkim modelima na sl. 1.3. Da bi se glavna armatura angažovala u prenošenju smičuće sile konačni elementi koji reprezentuju armaturu razdvajaju se od betonskih elemenata na nekoj efektivnoj dužini, koja pretstavlja ono rastojanje duž koga je prijanjanje između betona i armature razoreno stvaranjem prslinae (vidi sl. 1.3).

Diskretni model ipak nije našao širu primenu, prvenstveno zbog teškoća koje prate promenu topologije razmatrane konstrukcije uporedo sa formiranjem prslinae. Jedan od razloga je i novi trend u metodi konačnih elemenata usmeren na gotovo isključivu primenu izoparametarskih elemenata, kod kojih se u uglovima elemenata dobijaju manje realne vrednosti napona, a oni imaju velikog uticaja na formiranje ivičnih prslina.

Najveći broj analitičkih modela koristi drugi pristup u kome se smatra da su prslinae "razmazane" preko celoga elementa ili na mestima integracionih tačaka unutar elementa. Ovaj model prslina omogućava automatsko generisanje



prslina bez potrebe za promenom topologije razmatrane konstrukcije kao i pot-



Sl. 1.3. Analitički modeli i vezni elementi - prema referenci [1.8].

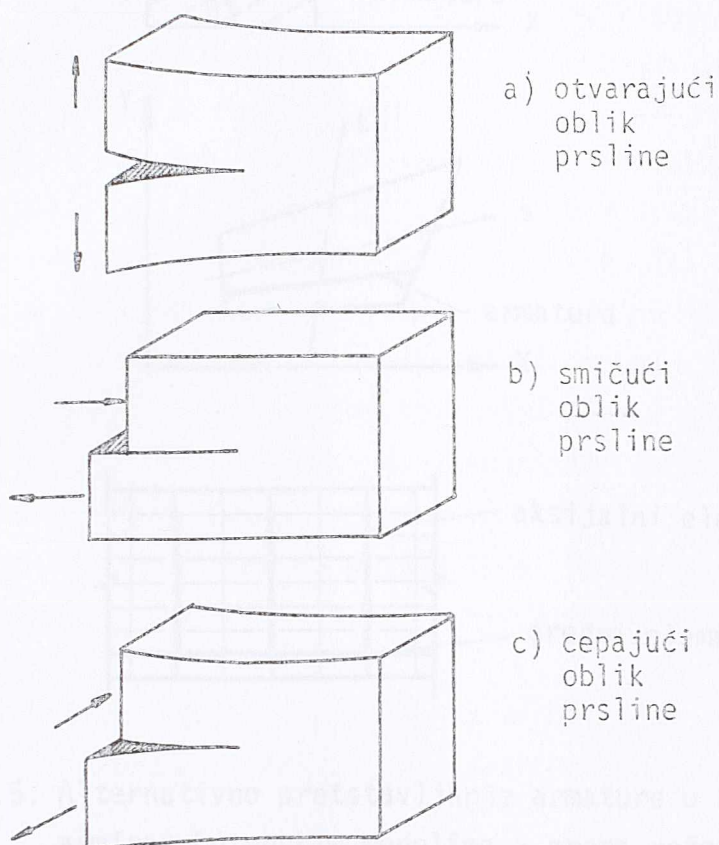
punu slobodu u pogledu pravca moguće prsline. Najčešće se smatra da je i armatura raspoređena preko betonskih elemenata da bi se na odgovarajući način odredila krutost kompozitnog materijala. Pri tome se podrazumeva i idealna veza između betona i armature. U nekim modelima se uzima u obzir i sposobnost betona da nosi na zatezanje između prslina preko "tension stiffening" efekta.

U okviru diskretnog modela prslina postoje pokušaji da se primeni teorija mehanike loma<sup>1.17</sup>. U linearno elastičnoj teoriji mehanike loma merodavni parametri za pojavu i propagaciju prslina su faktor naponskog intenziteta  $K_I$  i njegova kritična vrednost  $K_{IC}$ . Saglasno mehanici loma moguće je primeniti tri





osnovna oblika prslina: otvarajući, smičući i cepajući oblik, koji su prikazani na sl. 1.4. Pri tome se proizvoljan oblik prsline može prikazati kao odgovarajuća kombinacija ova tri osnovna oblika. Diskretni model prslina definisan primenom teorije mehanike loma zahteva takodje promenu topologije za svaki novi inkrement, što predstavlja prepreku za širu primenu ovog modela. Bažant i Cedolin<sup>1.18</sup> su ukazali na pojavu da primena naponskog kriterijuma za određivanje nastanka prslina pokazuje veliki stepen neobjektivnosti obzirom na činjeni-



Sl. 1.4. Osnovni oblici prslina - prema referenci [1.17].

cu da i male promene u dimenzijama konačnih elemenata u zoni prslina imaju značajnog efekta na veličinu napona sračunatih u toj kritičnoj oblasti. U radu se dalje pokazuje da primena faktora stope oslobodjene energije  $G_I$  kao kriterijuma za pojavu prslina, umesto naponskog kriterijuma, uz adekvatno definisanu vezu napon prijanjanja-lokalno proklizavanje armature, daje mnogo objektivniji model.

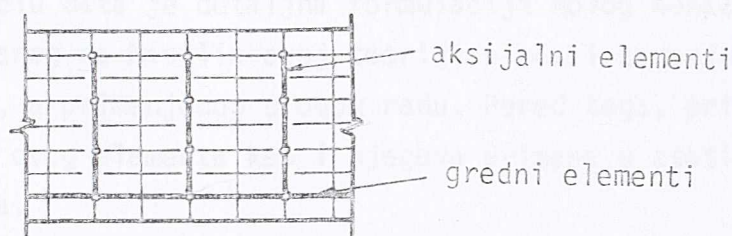
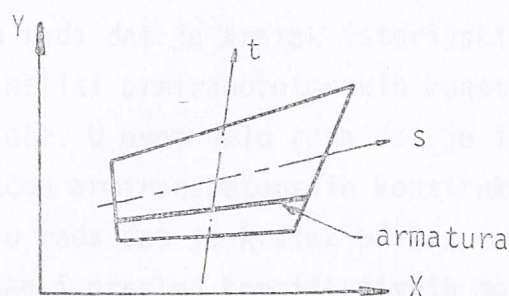
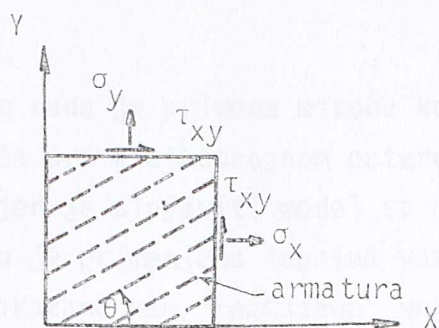
Armatura se u analitičkim modelima armiranog betona može prikazati kao: osrednjena, uklopljena u betonski element i diskretna (sl. 1.5.).

U osrednjenom načinu prikazivanja armature pretpostavlja se da je ista raspoređena preko celokupnog betonskog elementa u pravcu koji je određen uglom  $\theta$  prema referentnom koordinatnom sistemu. Ovaj način prikazivanja arma-



ture podrazumeva idealnu vezu izmedju betona i čelika. Kod slojevitog modela

### 1.3. KONTAK PRIKAZ SADRŽAJA RADA



Sl. 1.5. Alternativno pretstavljanje armature u analitičkim armiranobetonskim modelima - prema referenci [1.8.].

formira se čelični sloj ekvivalentne debljine kojim se zamenjuje stvarna armatura.

Kod izoparametarskih elemenata višega reda kojima se reprezentuje beton armatura se može prikazati aksijalnim elementima koji su uklopljeni u betonski elemenat i čija su pomeranja medjusobno izjednačena. I u ovom slučaju podrazumeva se idealna veza izmedju betona i čelika.

Diskretan model pretstavljanja armature koristi ili aksijalne elemente ili gredne elemente, koji primaju normalne sile, smičuće sile i momente savijanja, ili njihovu kombinaciju. Naprimer, kod grednih armiranobetonskih nosača glavna armatura se može prikazati grednim konačnim elementima dok se uzengije prikazuju aksijalnim elementima. Primenom veznih elemenata moguće je u ovom slučaju uneti u model i stvaran raspored napona prijanjanja izmedju betona i armature.



### 1.3. KRATAK PRIKAZ SADRŽAJA RADA

Predmet ovog rada je primena metode konačnih elemenata u proračunu armiranobetonskih ploča pri kratkotrajnom opterećenju. Za analitički model armiranog betona usvojen je slojeviti model sa osrednjenim načinom prikazivanja armature. U modelu je primenjena idealna veza između betona i čelika/armature. Prsline su prikazane kao "razmazane" unutar elementa pri čemu je uzeta u obzir i sposobnost betona da nosi na zatezanje između prsline.

U prvom delu rada dat je kratak istorijski pregled primene metode konačnih elemenata u analizi armiranobetonskih konstrukcija sa posebnim osyrtom na armiranobetonske ploče. U ovom delu rada dat je i prikaz savremenih analitičkih modela za proračun armiranobetonskih konstrukcija.

U drugom delu rada dat je kratak prikaz nekih osnovnih karakteristika betona i čelika kao i pregled konstitutivnih modela i teorija loma betona. U nastavku je detaljno izložen materijalni model betona primenjen u ovom radu.

U trećem delu data je detaljna formulacija novog konačnog elementa ploče QUAD9\*, zasnovanog na Mindlin-ovoj teoriji ploča i zamenjujućem polju deformacije smicanja, a primenjenog u ovom radu. Pored toga, prikazane su osnovne karakteristike ovog elementa kao i njegova primena u statičkim i dinamičkim proračunima ploča.

U četvrtom delu prikazane su opšte metode i algoritmi za rešavanje nelinearnih jednačina kod statičke analize armiranobetonskih ploča metodom konačnih elemenata.

U petom delu prikazana je globalna organizacija programa sa opisom toka proračuna putem blok dijagrama i prezentiran numerički primer radi ilustracije mogućnosti primene programa.

Iako je pri pisanju svakog od ovih poglavlja učinjen pokušaj da se konsultuje brojna literatura, rad nema pretenzija u smislu davanja kompletnog uvida u ovu materiju, koja je i inače veoma obimna a po sadržaju i dosta raznorodna. Rad više treba shvatiti kao pokušaj da se prikažu mogućnosti primene metode konačnih elemenata, kao trenutno vodeće numeričke metode u inženjerskim proračunima, u analizi armiranobetonskih ploča pod kratkotrajnim opterećenjem. Posebno težište u radu dato je na originalnoj formulaciji novog konačnog elementa ploče QUAD9\*, ispitivanju njegovih osnovnih karakteristika kao i proveriti ponašanja u statičkim i dinamičkim proračunima kao i problemima stabilитета ploča.



## 1.4. LITERATURA

- 1.1 Ngo, D. and Scordelis, A.C.  
"Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams",  
J.ACI, Vol. 64, No.3, 1967, pp. 152-163.
- 1.2 Nilson, A.H.  
"Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method", J.ACI, Vol.65, No. 9, 1968, pp. 757-766
- 1.3 Rashid, Y.R.  
"Ultimate Strength Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels", Nuclear Engng. Design, Vol. 7, 1968
- 1.4 Selna, L.G.  
"Creep, Cracking and Shrinkage in Concrete Frame Structures",  
J. Struc, Div., ASCE, Vol.95, No. ST12, 1969
- 1.5 Argiris, J.H., Faust, G., Szimmat, J., Warnke, E.P. and  
William, K.J.  
"Recent Developments in the Finite Element Analysis of Prestressed  
Concrete Reactor Vessels", Nuclear Engng. Design, Vol. 28, 1974,  
pp. 42-75
- 1.6 Schnobrich, W.C.  
"Behaviour of Reinforced Concrete Structures Predicted by the  
Finite Element Method", Comput. Structures, Vol. 7,  
1977, pp. 365-376.
- 1.7 Bergan, P.G. and Holand, I.  
"Nonlinear Finite Element Analysis of Concrete  
Structures", Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng., 17/18,  
1979, pp. 443-467
- 1.8 "State-of-the-Art Report on Finite Element Analysis of  
Reinforced Concrete" by the Task Committee on Concrete  
and Masonry Structures, ASCE, 1981.
- 1.9 "Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures",  
Proceedings of the International Conference, Split,  
Pineridge Press, Swansea, 1984
- 1.10 Jofriet, J.C. and McNeice, M.  
"Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 97, No. ST3, 1971,  
pp. 785-806.
- 1.11 Hand, R.F., Pecknold, D.A. and Schnobrich, W.C.  
"Nonlinear Layered Analysis of RC Plates and Shells",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST7, 1973,  
pp. 1491-1505.
- 1.12 Wanchoo, M.K. and May, G.W.  
"Cracking Analysis of Reinforced Concrete Plates",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 101, No. ST1, 1975, pp.201-215.





- 1.13 Lin, C.S. and Scordelis, A.C.  
 "Nonlinear Analysis of RC Plates and Shells",  
 J. Struc. Div., ASCE, Vol. 101, No. ST3, 1975, pp. 523-538.
- 1.14 Bashur, F.K. and Darwin, D.  
 "Nonlinear Model for Reinforced Concrete Slabs",  
 J. Struc. Div., ASCE, Vol. 104, No. ST1, 1978, pp. 157-170.
- 1.15 Mehlhorn, G. and Klein, D.  
 "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Panels" in "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics" by W. Wunderlich E., Stein and K.J. Bathe (eds.), Springer-Verlag, 1981, pp. 452-478.
- 1.16 Cervera, M., Hinton, E. and Hassan, O.  
 "Recent Developments in the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures Using Three Dimensional Finite Element Models", Proceedings of International Conference on Numerical Methods for Non-Linear Problems, Dubrovnik, 1986, pp. 323-343.
- 1.17 Owen, D.R.J. and Fawkes, A.J.  
"Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications", Pineridge Press, Swansea, U.K., 1983.
- 1.18 Bažant, Z.P. and Cedolin, L.  
 "Fracture Mechanics of Reinforced Concrete", J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 106, 1980, pp. 1287-1306.
- U ovom radu predstavljamo najnovije rezultate istraživanja u području nelinearne analize i modeliranja ponašanja armiranog betona pri višestrukim naponskim stanjima kao i sve veće mogućnosti elektronskih računara u primeni nelinearne analize za pojedinačnih konstruktivnih betonskih elemenata na veoma složene armiranobetonske konstrukcije kao što su: betonski sudovi nuklearnih reaktora, podzemni sudovi za odlaganje radioaktivnog materijala, potporni konstrukcije, platforme za vođenje nafte iz mora i slično. Iako postoji veliki broj softverskih paketa koji primenjuju konačne elemente u ovom oblasti, analiza nelinearne analize nedostaje detaljniji podaci za najveći broj slučajeva primenjenih materijala za njihovu efikasnu primenu. Ovo može biti za armirani beton, gde ne postoje dobre prikladne konstitutivne jednačine koje bi adekvatno opisale osnovne karakteristike ovog materijala. U poslednje vreme predložen je velik broj modela koji definišu konstitutivne jednačine i karakterizuju ponašanje armiranog betona pod različitim uslovima opterećenja i deformacije. Svi ovi modeli imaju određene prednosti ali i nedostatke što odnosi na njihovu sposobnost da adekvatno opišu ponašanje ovog materijala. Pri razmatranju nelinearnih modela ponašanja armiranog betona, uočavaju se tri osnovna oblasti: ponašanje betona, ponašanje armature i efekat spoja između betona i armature. Pošto je armatura u betonskim konstrukcijama najčešće druga i relativno vitka, to se smatra da ona privlači samo mali deo sile, pa je za većinu potrebnih slučajeva jednodimenzionalni model dovoljan za opis u okviru nelinearnog modela zatimomera za najčešće korišćeni materijal.



## 2. MATEMATIČKI MODEL PONAŠANJA ARMIRANOG BETONA

### 2.1. UVOD

U najvećem broju slučajeva analitičke studije nelinearnog ponašanja armiranobetonskih konstrukcija bile su usmerene na proučavanje jednostavnih konstruktivnih elemenata kao što su gredni nosači ili stubovi, naprimer. Intenzivna eksperimentalna ispitivanja<sup>2.1-2.2</sup> sprovedena u cilju odredjivanja karakteristika betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima ukazala su na značajne disperzije rezultata. Radi definisanja uzroka ovih pojava i njihovog eliminisanja sprovedena su i zajednička eksperimentalna istraživanja<sup>2.3</sup> velikog broja laboratorija širom sveta. Brojne informacije o mehaničkim svojstvima betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima kao i sve veće mogućnosti elektronskih računara proširile su domen primene nelinearne analize sa pojedinačnih konstruktivnih betonskih elemenata na veoma složene armiranobetonske konstrukcije kao što su: betonski sudovi nuklearnih reaktora, podzemni sudovi za odlaganje štetnih materija, potopljene konstrukcije, platforme za vadjenje nafte iz mora i slično. Iako postoji veliki broj software-skih paketa koji primenjuju konačne elemente u gotovo svim oblastima naponske analize neadekvatni materijalni modeli su u najvećem broju slučajeva ograničavajući faktor za njihovu efikasniju primenu. Ovo osobito važi za armirani beton, gde ne postoje opšte prihvaćene konstitutivne relacije koje bi adekvatno opisivale osnovne karakteristike ovog materijala. U poslednje vreme predložen je veliki broj modela koji definišu konstitutivne relacije i kriterijume loma betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima. Svi ovi modeli imaju određene prednosti ali i nedostatke što dobrim delom zavisi i od pojedinačnih slučajeva u kojima se primenjuju.

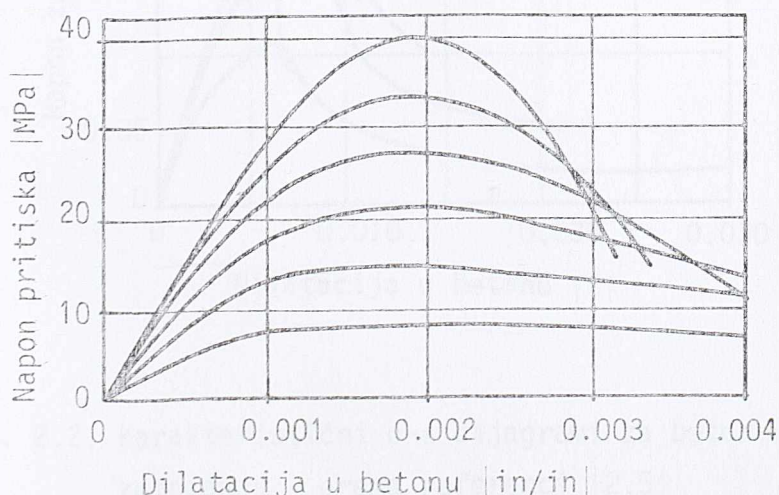
Pri razmatranju matematičkog modela nelinearnog ponašanja armiranog betona uočavaju se tri posebne oblasti: ponašanje betona, ponašanje armature i efekat spoja između betona i armature. Pošto je armatura u betonskim elementima najčešće druga i relativno vitka to se smatra da ona prenosi samo normalne sile, pa je za opštu upotrebu dovoljna jednoaksijalna veza napon-deformacija za čelik. U okviru plastičnog modela za armaturu se najčešće koristi linearno



elastičan-idealno plastičan model koji ignoriše Baushinger-ov efekat ali omogućava elastično rasterećenje. Za beton je neophodno poznavati veze napon-deformacija pri višeaksijalnim naponskim stanjima i kao što smo ranije napomenuli predložen je veliki broj različitih modela. U ovom poglavlju biće dat prikaz nekih od tih modela. Realna procena nosivosti armiranobetonskih konstrukcija u znatnoj meri zavisi i od ostvarene veze izmedju betona i armature i sposobnosti modela da tu vezu adekvatno prikaže. Veze izmedju napona prijanjanja i lokalnog proklizavanja armature su nelinearne i dobijaju se na osnovu eksperimentalnih istraživanja.

## 2.2. NEKE OSNOVNE KARAKTERISTIKE BETONA I ČELIKA

Beton je po svom sastavu heterogen materijal. Naime, sveža betonska masa, koja se sastoji od agregata, cementa i vode, vremenom se vezuje i stvrdnjava stvarajući monolitnu celinu. U procesu stvrdnjavanja betona dolazi do kristalizacije ovako formirane mase i obrazovanja čvrstog cementnog skeleta. Beton po svojoj strukturi nije kompaktno već porozno telo sa raznorodnom strukturom koju čine tvrda masa, agregat obavijen cementnim malterom, i vazdušasta, odnosno pore iz kojih je isparila voda. Prema tome u betonu postoje mikroprslinice i pre nanošenja bilo kakvog opterećenja. One se najčešće javljaju na spojevima krupnijih granula agregata i cementnog maltera. Na sl. 2.1 prikazani su tipični dijagrami napon-deformacija za beton pod monotono rastućim jednoaksijal-

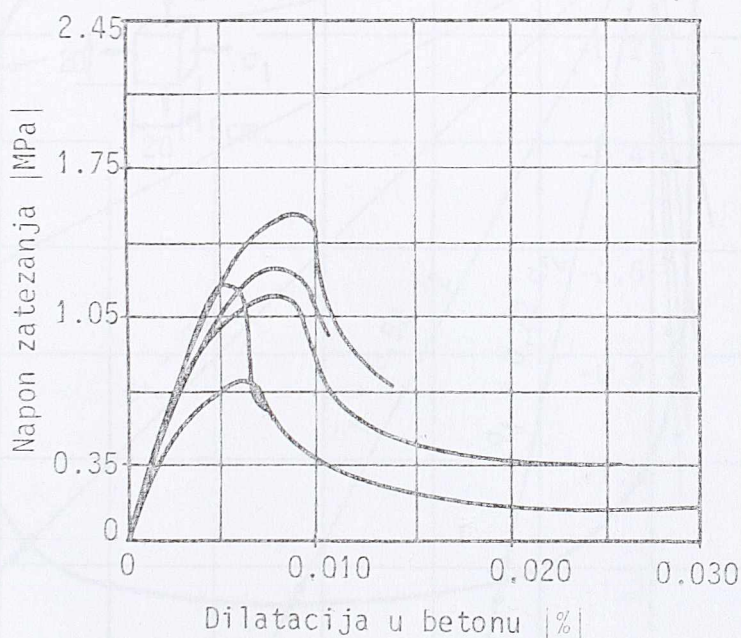


Slika 2.1. Karakteristični  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagrami za beton u pritisku - prema referenci [2.4]



nim pritiskom<sup>2.4</sup>. Sve do 30% od njegove maksimalne čvrstoće na pritisak  $f'_c$  beton se ponaša kao linearno elastičan materijal. Taj naponski nivo predstavlja i početak pojave lokalnih prslina u betonu. Pojava ovih prslina pripisuje se razlici u krutosti između agregata i cementnog maltera. Za napone iznad  $0,3 f'_c$  beton počinje da omekšava, odnosno kriva pokazuje znatno povećanje krivine dok ne dostigne svoju maksimalnu vrednost na  $f'_c$ . Kako se deformacije usled pritiska povećavaju, prsline se proširuju i pretvaraju u makroskopske, oštećenja u betonu se akumuliraju a ponašanje betona predstavljeno je opadajućom granom na dijagramu  $\sigma$ - $\epsilon$ .

Na sl. 2.2 prikazane su naponsko-deformacijske krive za beton pri jednoaksijalnom zatezanju<sup>2.5</sup>. Sve krive su gotovo linearne do relativno visokih naponskih nivoa i pokazuju dosta sličnosti sa krivama  $\sigma$ - $\epsilon$  za beton u pritisku, jasno čvrstoća betona na zatezanje  $f'_t$  je mnogo manja od čvrstoće betona na pritisak. Spoj između agregata i cementnog maltera ima znatno manju čvrstoću na zatezanje od samog cementnog maltera tako da taj spoj predstavlja i najslabiju vezu u kompozitnom materijalu. To je i osnovni razlog za malu čvrstoću betona na zatezanje. Pravac prostiranja prsline pri jednoaksijalnom zatezanju



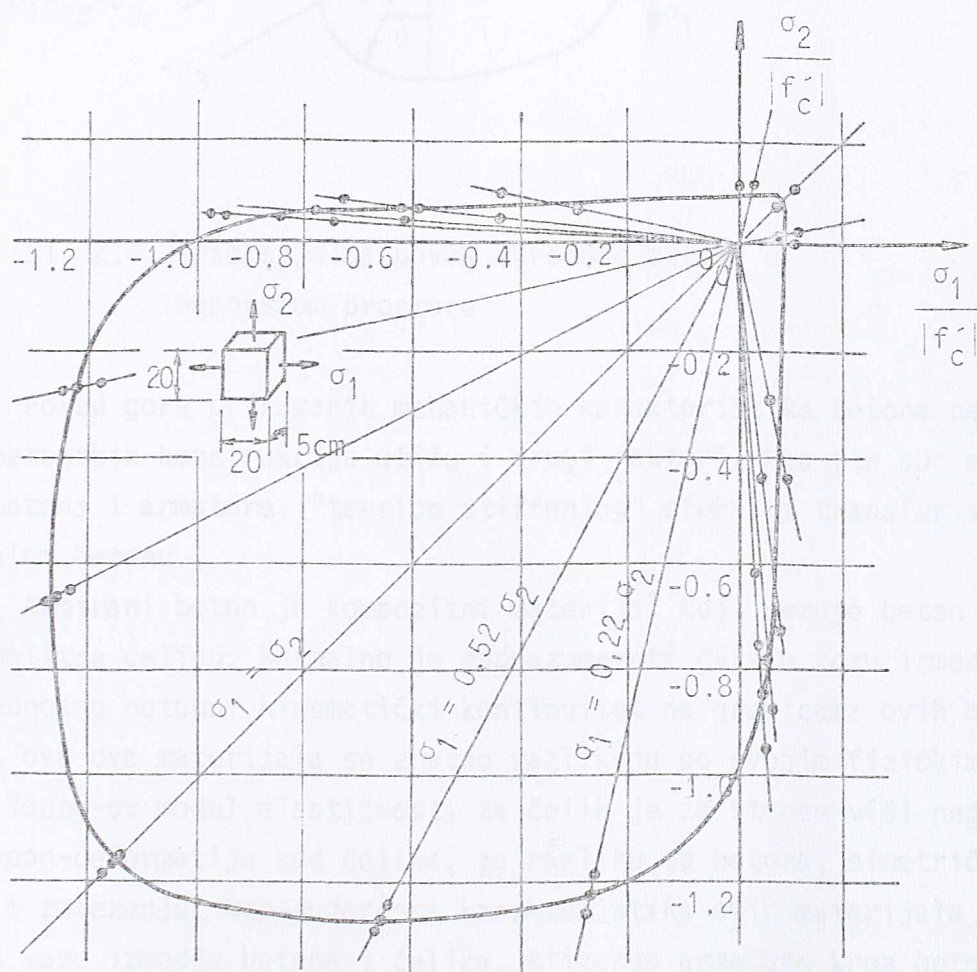
Sl. 2.2. Karakteristični  $\sigma$ - $\epsilon$  dijagrami za beton u zatezanju - prema referenci [2.5]

je upravan na pravac napona. Nivo od  $0.6 f'_t$  predstavlja onaj naponski nivo pri kome mikroskopske prsline počinju da rastu. Pojava novih prslina i njihovo proširenje redukuje noseću površinu poprečnog preseka i dovodi do povećanja



napona na kritičnim vrhovima prslina. Lom betona pri zatezanju prouzrokovan je pojavom nekoliko značajnih prslina za razliku od loma betona pri pritisku gde imamo pojavu brojnih prslina.

Pri različitim kombinacijama biaksijalnog opterećenja beton pokazuje nešto drugačije osobine nego pri jednoaksijalnom testu. Na sl. 2.3 prikazana je karakteristična kriva biaksijalne čvrstoće betona<sup>2.1</sup>. Pod uslovima biaksijalnog pritiska beton pokazuje povećane vrednosti čvrstoće na pritisak do iznosa od  $1.25 f'_c$ . Pri biaksijalnom zatezanju beton pokazuje gotovo konstantnu vrednost čvrstoće na zatezanje koja odgovara jednoaksijalnoj čvrstoći na zatezanje  $f'_t$ . Pri kombinaciji zatezanja i pritiska uočava se postepeno smanjenje čvrstoće betona.

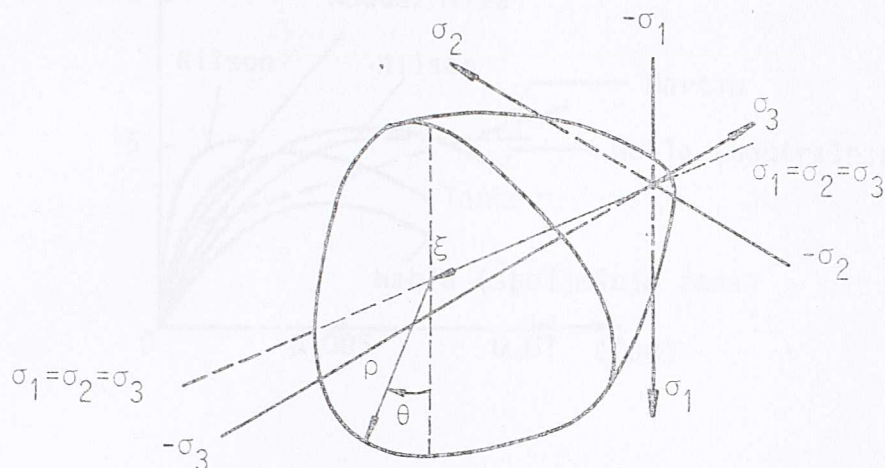


Sl. 2.3. Kriva biaksijalne čvrstoće betona - prema referenci [2.1].

Beton izložen triaksijalnom opterećenju formira površ loma, oblika prikazanog na sl. 2.4, koja je funkcija glavnih napona. Eksperimentalna istra-



živanja pokazuju da se trodimenzionalna površ loma betona može definisati i u funkciji triju naponskih invarijanti  $\xi$ ,  $\rho$  i  $\theta$  koje se mogu smatrati kao cilindrične koordinate površi u trodimenzionalnom naponskom prostoru.



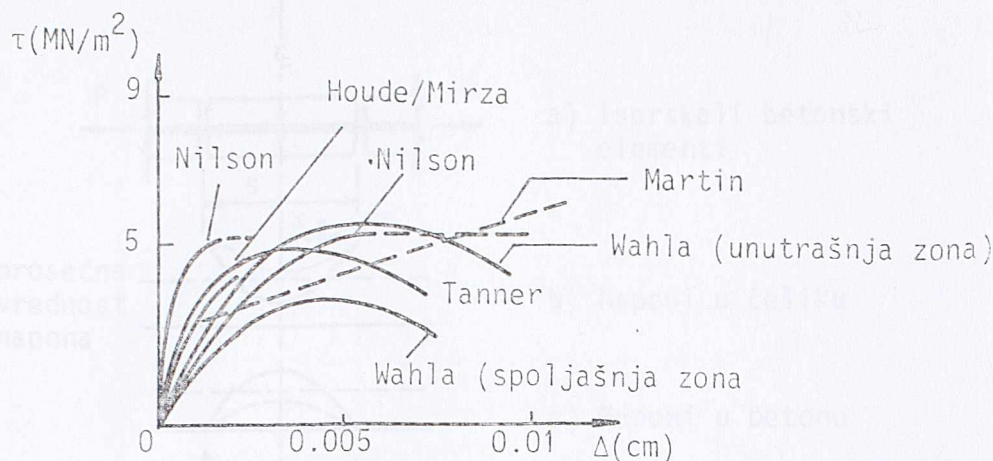
Sl. 2.4. Triaksijalna površ čvrstoće betona u naponskom prostoru

Pored gore prikazanih mehaničkih karakteristika betona na ponašanje armiranobetonskih konstrukcija utiču i drugi faktori, kao što su: efekat spoja između betona i armature, "tension stiffening" efekat i transfer smičućih sila u isprskalom betonu.

Armirani beton je kompozitni materijal koji vezuje beton i čelik u jednu monolitnu celinu. Normalno je podrazumevati čvrstu vezu između betona i čelika, odnosno potpuni kinematički kontinuitet na granicama ovih materijala. Međutim, ova dva materijala se znatno razlikuju po svojim fizičkim karakteristikama: Young-ov modul elastičnosti za čelik je za stepen viši nego za beton i veza napon-deformacija kod čelika, za razliku od betona, simetrična je u pritisku i zatezanju. Nepodudarnost karakteristika ovih materijala dovodi do razaranja veze između betona i čelika, klizanja armature kroz beton, lokalnih deformacija i prslina. Kod armiranobetonskih elemenata izloženih aksijalnom opterećenju ili savijanju armatura pokazuje tendenciju da prokliza u pravcu koji je paralelan sa pravcem šipki. Otpornost na klizanje obezbeđuje se postojanjem sila adhezije između betona i čelika, silama trenja i prirodnim (veštačkim) neravninama šipki armature, kod glatkog (rebrastog) čelika, koje takodje daju otpor izvlačenju armature iz betona. Na osnovu različitih eksperimentalnih opita predložene su brojne veze između napona prijanjanja i lokalnog klizanja armatu-



re. Sa sl. 2.5 gde je izvršeno uporedjenje različitih predloga<sup>1.8</sup> može se zapaziti znatna disperzija rezultata.



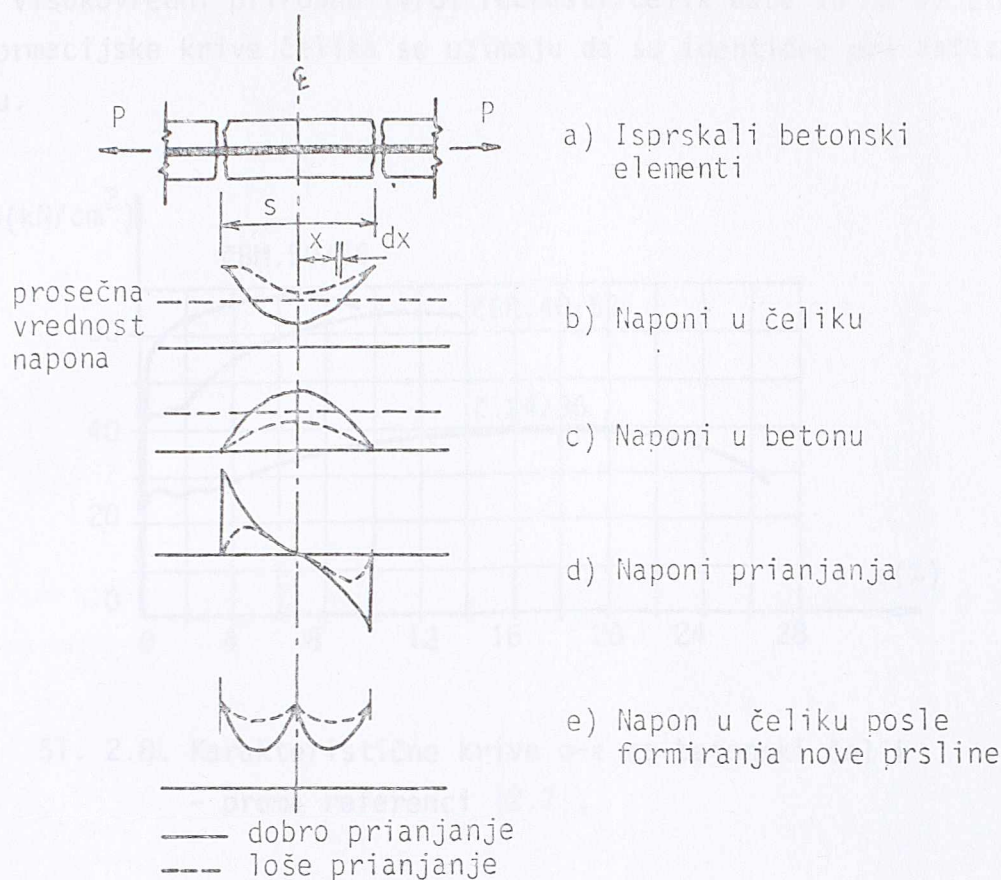
Sl. 2.5. Uporedjenje različitih veza napon prljanjanja - lokalno klizanje armature - prema referenci [1.8].

Pojava prslina je od velikog značaja na nelinearno ponašanje armiranobetonskih konstrukcija. Kada glavni napon zatezanja prekorači čvrstoću betona na zatezanje  $f_t$  formira se prslina u pravcu koji je upravan na pravac delovanja tog glavnog napona. Na mestu prslina celokupno opterećenje preuzima armatura dok se na delu između prslina opterećenje deli između betona i armature. Sposobnost betona da nosi na zatezanje između prslina, odnosno da deli to opterećenje sa armaturom naziva se "tension stiffening" efekat. Na sl. 2.6 prikazan je raspored napona u betonu i armaturi u okolini prslina u armiranobetonskom elementu izloženom zatezanju<sup>2.6</sup>. Sa sl. 2.6 vidimo da iako je napon u betonu na mestu prslina jednak nuli ipak je prosečna vrednost napona u tom regionu različita od nule. Pri povećanju opterećenja povećava se i napon u betonu između prslina, dostiže svoju kritičnu vrednost i javlja se nova prslina. Prema tome sa povećanjem opterećenja napon u isprskalom betonu progresivno opada.

Do pojave prslina raspored smičućih napona u armiranobetonskim elementima jednak je onom koji dobijamo kada ove elemente tretiramo kao homogena, elastična i izotropna tela. Posle pojave prslina dolazi do preraspodele unutrašnjih sila a ukupna otpornost na smicanje ostvaruje se kao zbir više faktora. Tako se deo smičućih sila prenosi preko neisprskalog betona. Kako su površine prslina koje se javljaju u betonu nepravilne i rapave deo smičućih sila se prenosi se i trenjem u prslinama, koje je izazvano postojanjem napona pritiska u betonu. Ovaj način prenošenja smičućih sila u isprskalom betonu naziva se "aggregate interlock". Deo smičućih sila prenosi se i preko armature čije šipke

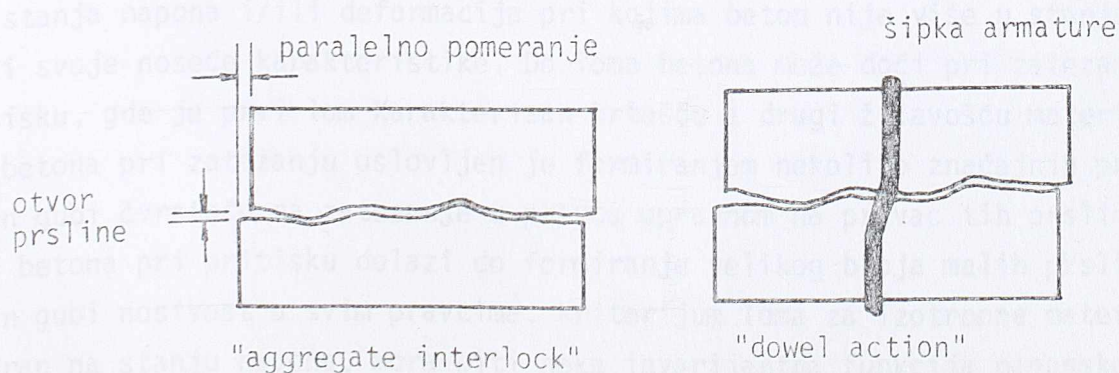


presecaju prsline izložene smicanju. U zavisnosti od dimenzija šipki i nji-



Sl. 2.6. Raspored napona u isprskalom armiranobetonskom elementu - prema referenci [2.6].

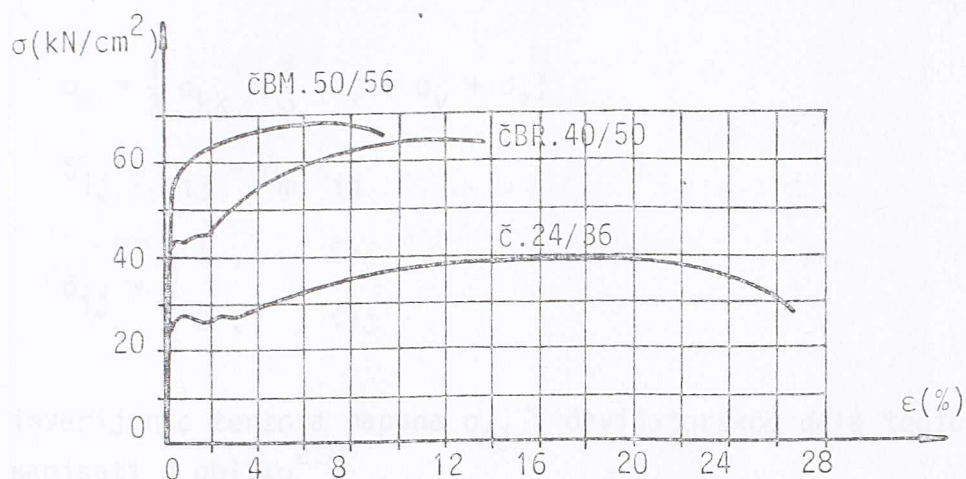
hovorog međusobnog rastojanja znatan deo smičućih sila prenosi se i na ovaj način, koji se u literaturi naziva "dowel action". Na sl. 2.7 šematski su prikazane pojave "aggregate interlock"-a i "dowel action" šipki armature.



Sl. 2.7. Šematski prikaz pojava "agregate interlock"-a i "dowel action" armature



Za razliku od betona mehaničke karakteristike betonskog čelika odnosno armature su dobro poznate. Karakteristične krive  $\sigma$ - $\epsilon$  za meki betonski čelik i visokovredni prirodno tvrdi rebrasti čelik date su na sl.2.8. Naponsko-deformacijske krive čelika se uzimaju da su identične pri zatezanju i pritisku.



Sl. 2.8. Karakteristične krive  $\sigma$ - $\epsilon$  za betonski čelik  
- prema referenci [2.7].

## 2.3. TEORIJE LOMA BETONA

### 2.3.1. Invarijante napona i opšte karakteristike površi loma

Pod lomom betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima podrazumevamo ona stanja napona i/ili deformacija pri kojima beton nije više u stanju da održi svoje noseće karakteristike. Do loma betona može doći pri zatezanju i pri pritisku, gde je prvi lom karakterisan krtošću a drugi žilavošću materijala. Lom betona pri zatezanju uslovljen je formiranjem nekoliko značajnih prslina i beton gubi čvrstoću na zatezanje u pravcu upravnom na pravac tih prslina. Kod loma betona pri pritisku dolazi do formiranja velikog broja malih prslina a beton gubi nosivost u svim pravcima. Kriterijum loma za izotropne materijale, baziran na stanju napona, mora biti neka invarijantna funkcija naponskog stanja, odnosno funkcija nezavisna od izbora koordinatnog sistema u kome su naponi definisani. U opštem slučaju kriterijum loma se može prikazati kao funkcija glavnih napona ili što je najčešće slučaj kao funkcija naponskih invarijanti.

Stanje napona u nekoj tački unutar betonskog elementa u potpunosti



je definisano tenzorom napona  $\sigma_{ij}$  u trodimenzionalnom prostoru. U opštem slučaju tenzor napona možemo razložiti na njegov sferni deo (hidrostatički pritisak),  $\sigma_m$  i devijatorski deo,  $S_{ij}$  tako da je

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.1)$$

gde su

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Glavne invarijante tenzora napona  $\sigma_{ij}$  i devijatorskog dela tenzora napona  $S_{ij}$  možemo napisati u obliku<sup>2.8</sup>

$$I_1 = \sigma_{kk} = 3\sigma_m$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 - \sigma_{ij} \sigma_{ij})$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ki} - \frac{1}{2} I_1 \sigma_{ij} \sigma_{ji} + \frac{1}{6} I_1^3 \quad (2.5)$$

(2.2)

$$J_1 = S_{kk} = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ji}$$

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$$

gde su  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  prva, druga i treća invarijanta tenzora napona  $\sigma_{ij}$  a  $J_1$ ,  $J_2$  i  $J_3$  prva, druga i treća invarijanta devijatorskog tenzora napona  $S_{ij}$ . Ove invarijante izražene preko glavnih napona tenzora  $\sigma_{ij}$  odnosno  $S_{ij}$  glase

$$I_1 = 3\sigma_m = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

(2.3)



$$J_1 = S_1 + S_2 + S_3 = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

$$= \frac{1}{6} \left| (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right|$$

$$J_3 = S_1 S_2 S_3$$

Naponske invarijante mogu se izraziti i preko oktaedarskih napona, koji su vezani za ravan koja sa pravcima glavnih napona zaklapa jednake uglove. Oktaedarski normalni napon  $\sigma_0$  i oktaedarski smičući napon  $\tau_0$  prikazuju se preko  $I_1$  i  $J_2$  na sledeći način

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{3} I_1 = \sigma_m \\ \tau_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pravac oktaedarskog smičućeg napona definisan je uglom  $\theta$ , koji izražen preko invarijanti  $J_2$  i  $J_3$  glasi

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} = \frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_0^3} \tag{2.5}$$

pri čemu se  $\theta$  kreće u granicama,  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ . Kao što je napomenuto u prethodnom odeljku invarijante napona  $I_1$ ,  $J_2$  i  $J_3$  (ili što je jednako  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\cos 3\theta$ ) mogu se izraziti preko veličina  $\xi$ ,  $\rho$  i  $\theta$  čije je geometrijsko značenje dato na sl. 2.9. Stanje napona u tački P ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) definisano je vektorom  $\vec{OP}$  koji možemo razložiti na vektore  $\vec{ON}$  i  $\vec{NP}$  čije su dužine  $\xi$  i  $\rho$  date izrazima

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} \sigma_m = \sqrt{3} \sigma_0 \\ \rho &= \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \tau_0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kao što se sa sl. 2.9 vidi  $\xi$  definiše hidrostatički deo naponskog stanja duž dijagonale  $d$  (hidrostatička osa), koja sa sve tri koordinatne ose zaklapa jednake uglove; dok  $\rho$  definiše devijatorski deo napona u devijatorskoj ravni upravnoj na  $d$ . Ugao sličnosti  $\theta$  definiše pravac vektora  $\vec{NP}$  u devijatorskoj ravni. Prema tome površ loma betona može se alternativno prikazati nekom od funkcija



$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$$

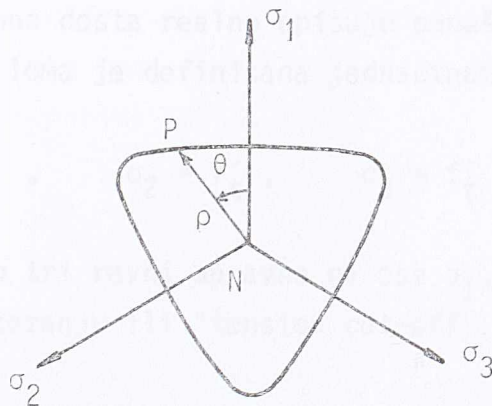
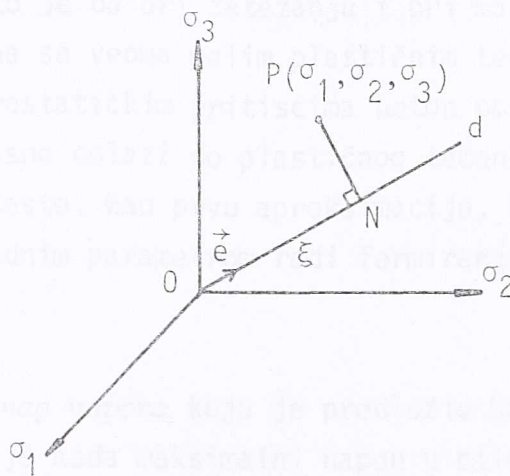
$$f(I_1, J_2, J_3) = 0$$

$$f(\sigma_0, \tau_0, \theta) = 0$$

$$f(\xi, \rho, \theta) = 0$$

(2.7)

pri čemu dve poslednje imaju jasnu fizičku i geometrijsku interpretaciju. U slučaju izotropnog materijala indeksi 1, 2 i 3 dati koordinatnim osama su pro-



Sl. 2.9. Geometrijska interpretacija veličina

$\xi$ ,  $\rho$  i  $\theta$  u naponskom prostoru

izvoljni što znači da poprečni preseći površi loma betona, koje čine presečne krive između površi loma i devijatorskih ravni  $\xi = \text{const}$ , moraju da imaju trostruku simetriju. Eksperimentalni podaci ukazuju da su krive loma u devija-



torskim ravnima glatke krive, konveksne, oblika bliskog trougaonoma u zatezanju i pri malim naponima pritiska da bi pri višim naponima pritiska postale više zaobljene, težeći ka kružnom obliku. U literaturi postoji veliki broj kriterijuma loma betona, počev od onih sa jednim parametrom pa do više-parametarskih modela. U sledećem ćemo ukratko prikazati neke od tih modela.

### 2.3.2. Modeli sa jednim parametrom

Poznato je da pri zatezanju i pri malim naponima pritiska dolazi do krtoćeg loma betona sa veoma malim plastičnim tečenjem pre loma. Sa druge strane pri visokim hidrostatičkim pritiscima beton pokazuje karakteristike žilavog materijala, odnosno dolazi do plastičnog tečenja kada stanje napona zadovolji uslov tečenja. Često, kao prvu aproksimaciju, koristimo kombinacije jednostavnih modela sa jednim parametrom radi formiranja kompletne površi loma u naponskom prostoru.

*Teorija maksimalnog napona* koju je predložio Rankine (1876) pretpostavlja da materijal otkazuje kada maksimalni napon u bilo kom pravcu prekorači graničnu vrednost za taj materijal. Za razliku od ponašanja betona pri biaksijalnom i triaksijalnom pritisku gde se rezultati ove teorije ne poklapaju sa eksperimentalnim podacima, ona dosta realno opisuje ponašanje betona pri zatezanju. U tom slučaju površ loma je definisana jednačinama

$$\sigma_1 = f'_t, \quad \sigma_2 = f'_t, \quad \sigma_3 = f'_t \quad (2.8)$$

koje predstavljaju tri ravni upravne na ose  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ . Ova površ se naziva površ loma pri zatezanju ili "tension cut-off".

*Teorija maksimalnog smičućeg napona* koju je predložio Tresca (1864) pretpostavlja da će do plastičnog tečenja materijala doći kada maksimalan napon smicanja dostigne vrednost maksimalnog napona smicanja pri jednoaksijalnom zatezanju za krte odnosno pritisku za žilave materijale. Ova teorija se može primeniti za metale i za beton pri veoma visokim pritiscima, gde se efekat hidrostatičkog pritiska na smičuću čvrstoću betona može zanemariti, ali nije realna za beton pri malim pritiscima, gde je taj efekat značajan i gde su trajne deformacije betona često praćene i znatnom promenom zapremine. Površ loma se može izraziti u funkciji naponskih invarijanti kao



$$f(J_2, \theta) = \sqrt{J_2} \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - k = 0 \quad (2.9)$$

ili

$$f(\rho, \theta) = \rho \sin\left(\theta + \frac{1}{3}\pi\right) - \sqrt{2} k = 0 \quad (2.10)$$

gde je  $k = \frac{1}{2} \sigma_T$ ,  $\sigma_T$  - napon tečenja za jednoaksijalno zatezanje

ili  $k = \frac{1}{2} f'_c$ ,  $f'_c$  - čvrstoća betona pri jednoaksijalnom pritisku

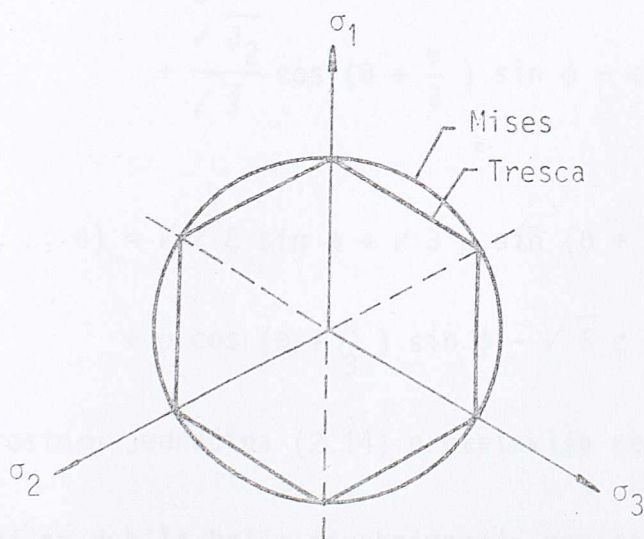
Von Mises-ov kriterijum (1913) pretpostavlja da tečenje nastaje kada oktaedarski smičući napon dostigne kritičnu vrednost  $k$  i može se napisati u obliku

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (2.11)$$

gde je

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_T$$

U naponskom prostoru površ tečenja po Mises-u pretstavlja cilindar dok je površ tečenja po Tresca-i šestougona prizma upisana u ovaj cilindar. Na sl. 2.10 prikazane su projekcije ovih površi na  $\pi$ -ravan (devijatorska ravan koja prolazi kroz koordinatni početak). Iako je razlika između ova dva uslova neznatna, Mises-ov uslov ima znatno veću primenu zbog jednostavnosti pri praktičnoj upotrebi dok se kod prizme mogu javiti numeričke teškoće vezane za uglove prizme gde se javljaju singularne tačke.



Sl. 2.10. Projekcije površi tečenja na  $\pi$ -ravan



U mnogim analizama armiranobetonskih konstrukcija konačnim elementima korišćen je von Mises-ov uslov tečenja kombinovan sa "tension cut-off" površi pri zatezanju. Obzirom na ograničen duktilitet betona pri pritisku von Mises-ov uslov se kombinuje sa kriterijumom maksimalnih glavnih dilatacija pritiska  $\epsilon_{cu}$ . Kada beton dostigne ove dilatacije podrazumeva se drobljenje betona i matrica materijalnih karakteristika betona dobija vrednost nula matrice.

### 2.3.3. Modeli sa dva parametra

Mohr-Coulomb-ov kriterijum predstavlja generalizaciju Coulomb-ove čvrstoće na smicanje (1773) date jednačinom

$$|\tau| = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (2.12)$$

gde su  $\tau$  - čvrstoća na smicanje

$c$  - kohezija

$\sigma$  - normalni napon

$\phi$  - ugao unutrašnjeg trenja

Grafička interpretacija jednačine (2.12), koja predstavlja pravu liniju koja tangira najveći krug glavnih napona, prikazana je na sl. 2.11. Mohr-Coulomb-ov kriterijum može se izraziti i u funkciji naponskih invarijanti kao

$$\begin{aligned} f(I_1, J_2, \theta) = & \frac{1}{3} I_1 \sin \phi + \sqrt{J_2} \sin \left( \theta + \frac{1}{3} \pi \right) \\ & + \frac{\sqrt{J_2}}{\sqrt{3}} \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - c \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

ili

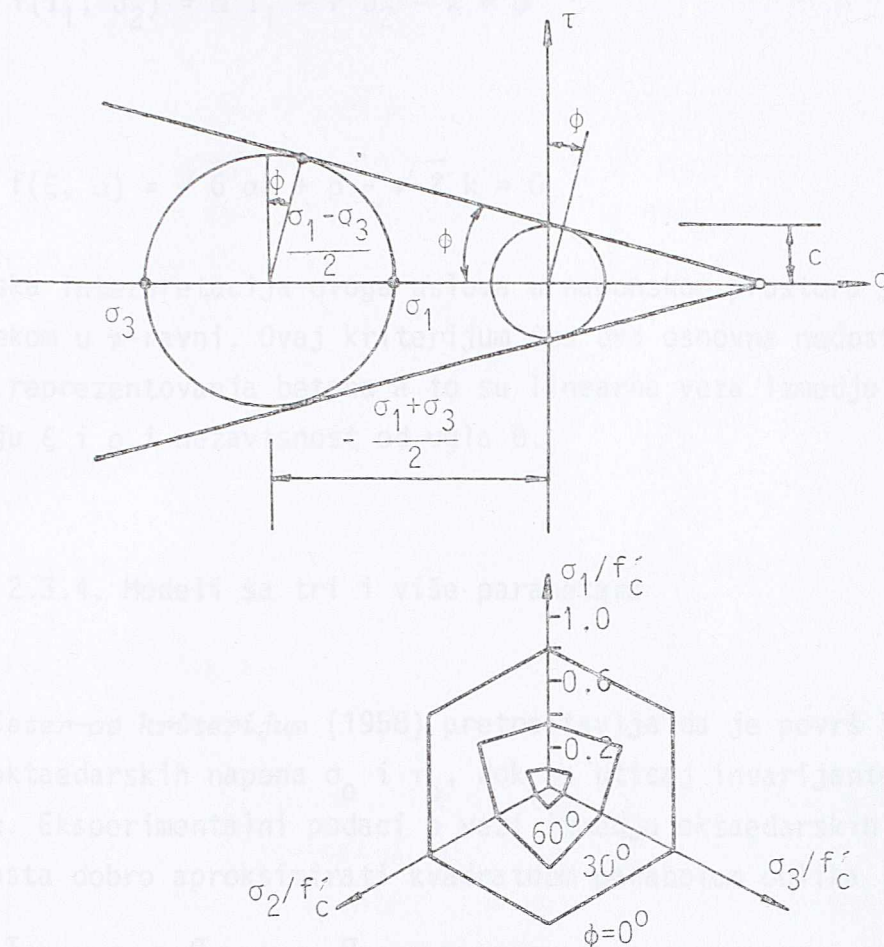
$$\begin{aligned} f(\xi, \rho, \theta) = & \sqrt{2} \xi \sin \phi + \sqrt{3} \rho \sin \left( \theta + \frac{1}{3} \pi \right) \\ & + \rho \cos \left( \theta + \frac{\pi}{3} \right) \sin \phi - \sqrt{6} c \cos \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

U naponskom prostoru jednačina (2.14) predstavlja neregularnu šestougao nu piramidu.

Da bi se dobila bolja aproksimacija ponašanja betona pri zatezanju najčešće se Mohr-Coulomb-ov kriterijum koristi zajedno sa teorijom maksimalnog



napona zatezanja ("tension cut-off"). Ovaj model ima dosta nedostataka kao



Sl. 2.11. Grafička interpretacija Mohr-Coulomb-ovog kriterijuma

što su:

- Meridijani površi loma (krive koje predstavljaju presek površi loma i ravni koje sadrže hidrostatičku osu sa  $\theta = \text{const.}$ ) su prave linije što u slučaju betona nije tačno.
- Površ loma nije glatka površ (vidi sl. 2.11) tako da se u uglovima javljaju singularne tačke.
- Krive loma u devijatorskim ravnima su po obliku slične što je u suprotnosti sa ranijom diskusijom o njihovom obliku.

Obzirom na sve ove nedostatke Mohr-Coulomb-ov kriterijum sa "tension cut-off"-om može se primeniti samo kao prva aproksimacija nekog detaljnijeg proračuna.

*Drucker-Prager-ov kriterijum* (1952) predstavlja glatku aproksimaciju Mohr-Cou-



lomb-ovog uslova, a nastao je kao modifikacija von Mises-ovog uslova tečenja, i može se izraziti u obliku

$$f(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (2.15)$$

ili

$$f(\xi, \rho) = \sqrt{6} \alpha \xi + \rho - \sqrt{2} k = 0 \quad (2.16)$$

Geometrijska interpretacija ovoga uslova u naponskom prostoru je konus sa kružnim presekom u  $\pi$ -ravni. Ovaj kriterijum ima dva osnovna nedostatka u pogledu efikasnog reprezentovanja betona a to su linearna veza izmedju  $I_1$  i  $\sqrt{J_2}$  odnosno izmedju  $\xi$  i  $\rho$  i nezavisnost od ugla  $\theta$ .

#### 2.3.4. Modeli sa tri i više parametara

*Bresler-Pister-ov kriterijum* (1958) pretpostavlja da je površ loma betona samo funkcija oktaedarskih napona  $\sigma_0$  i  $\tau_0$ , dok se uticaj invarijante  $J_3$  odnosno  $\theta$  zanemaruje. Eksperimentalni podaci o vezi izmedju oktaedarskih napona  $\sigma_0$  i  $\tau_0$  mogu se dosta dobro aproksimirati kvadratnom parabolom oblika

$$\frac{\tau_0}{f'_c} = a - b \frac{\sigma_0}{f'_c} + c \left( \frac{\sigma_0}{f'_c} \right)^2 \quad (2.17)$$

gde je  $\sigma_0$  pozitivno pri zatezanju a  $f'_c$  je uvek pozitivno. Konstante  $a$ ,  $b$  i  $c$  odredjuju se iz karakterističnih testova betona, kao što su: test na jednoaksijalno zatezanje  $f'_t$ , test na jednoaksijalan pritisak  $f'_c$  i test na ekvivalentan biaksijalni pritisak  $f'_{bc}$ . Oktaedarske komponente napona u ova tri eksperimenta prikazane su u Tabeli 2.1.

Tabela 2.1

Test	$\sigma_0/f'_c$	$\tau_0/f'_c$
$\sigma_1 = f'_t$	$\frac{1}{3} \bar{f}'_t$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{f}'_t$
$\sigma_3 = -f'_c$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\sigma_2 = \sigma_3 = -f'_{bc}$	$-\frac{2}{3} \bar{f}'_{bc}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} \bar{f}'_{bc}$



pri čemu su

$$\bar{f}'_t = \frac{f'_t}{f'_c} \quad \bar{f}'_{bc} = \frac{f'_{bc}}{f'_c} \quad (2.18)$$

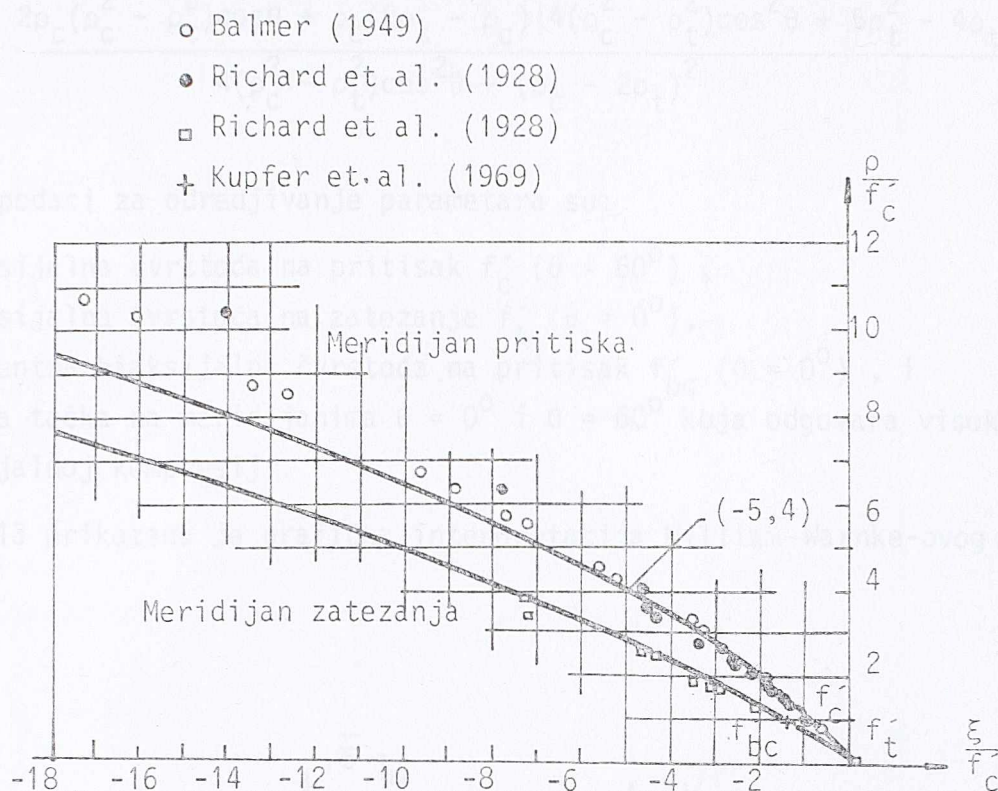
Kada vrednosti oktaedarskih napona iz Tabele 2.1 unesemo u jednačine (2.17) možemo lako odrediti konstante  $a$ ,  $b$  i  $c$  u funkciji normiranih čvrstoća  $\bar{f}'_t$  i  $\bar{f}'_{bc}$ . Bez obzira na to koju ćemo vezu između  $\sigma_0$  i  $\tau_0$  pretpostaviti, krive loma u devijatorskim ravnima biće krugovi, što ne odgovara test rezultatima za beton osobito pri malim naponima gde su ove krive bliške trougaonom obliku. Osnovni nedostatak ove teorije je što ne uzima u obzir efekat treće naponske invarijante. Najnovija istraživanja pokazuju da se realne površi loma betona mogu dobiti samo uključivanjem svih triju naponskih invarijanti.

*Ottosen-ov kriterijum*<sup>2.9</sup> (1977) sa četiri parametra može se prikazati u obliku

$$f(I_1, J_2, \cos 3\theta) = a \frac{J_2}{f'^2_c} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f'_c} + b \frac{I_1}{f'_c} - 1 = 0 \quad (2.19)$$

gde je  $\lambda = \lambda(\cos 3\theta) > 0$  dok su  $a$  i  $b$  konstante. Površ loma prikazana jednačinom (2.19) ima krivolinijske meridijane i poprečne preseke u devijatorskim ravnima koji nisu kružnice. Konstante  $a$  i  $b$  koje određuju krivolinijske meridijane i konstante  $\lambda_t = 1/\rho_t$  i  $\lambda_c = 1/\rho_c$  koje definišu krive loma u devijatorskim ravnima određujemo iz karakterističnih podataka za beton: jednoaksijalne čvrstoće na pritisak  $f'_c(\theta = 60^\circ)$ , jednoaksijalne čvrstoće na zatezanje  $f'_t(\theta = 0^\circ)$ , biaksijalne čvrstoće na pritisak ( $\theta = 0^\circ$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = -1.16 f'_c$ ,  $\sigma_3 = 0$  odnosno  $f'_{bc} = 1.16 f'_c$ ) i triaksijalnog stanja napona ( $\theta = 60^\circ$ ,  $(\xi/f'_c, \rho/f'_c) = (-5, 4)$  na meridijanu koji odgovara pritisku). Na sl. 2.12 prikazano je uporedjenje Ottosen-ovog kriterijuma sa različitim eksperimentalnim podacima triakcijalnih opita. Površ loma definisana jednačinom (2.19) formira u devijatorskim ravnima presek oblika bliskog trougaonom za male vrednosti napona, dok za veoma visoke napone pritiska (kada  $I_1 \rightarrow -\infty$ ) krive loma postaju gotovo kružnog oblika (ili  $\rho_t/\rho_c \rightarrow 1$ ). Ottosen-ov kriterijum sadrži u sebi nekoliko ranije navedenih kriterijuma, Drucker-Prager-ov za  $a = 0$  i  $\lambda = \text{const.}$ , odnosno von Mises-ov za  $a = b = 0$  i  $\lambda = \text{const.}$





Sl. 2.12 Uporedjenje Ottosen-ovog kriterijuma sa različitim podacima triaksijalnih opita - prema referenci [2.9]

*William-Warnke-ov kriterijum* (1975) sa pet parametara pretstavlja proširenje modela sa tri parametra, istih autora. Ovaj kriterijum prikazuje površ loma u funkciji prosečnih napona, hidrostatičkog  $\sigma_m$  i smičućeg  $\tau_m$  kao i ugla  $\theta$ . Za razliku od pravolinijskih meridijana, kod tri-parametarskog modela, u ovom kriterijumu meridijani su krivolinijski i dati izrazima

$$\frac{p_t}{\sqrt{5} f'_c} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + a_2 \left( \frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2, \quad \text{za } \theta = 0^\circ \quad (2.20)$$

$$\frac{p_c}{\sqrt{5} f'_c} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_m}{f'_c} + b_2 \left( \frac{\sigma_m}{f'_c} \right)^2, \quad \text{za } \theta = 60^\circ \quad (2.21)$$

Obzirom da se ovi meridijani seku u istoj tački na hidrostatičkoj osi broj parametara se redukuje na pet. Kada su ovi parametri odredjeni iz eksperimentalnih podataka, površ loma se dobija prvo konstruisanjem meridijana za  $\theta = 0^\circ$



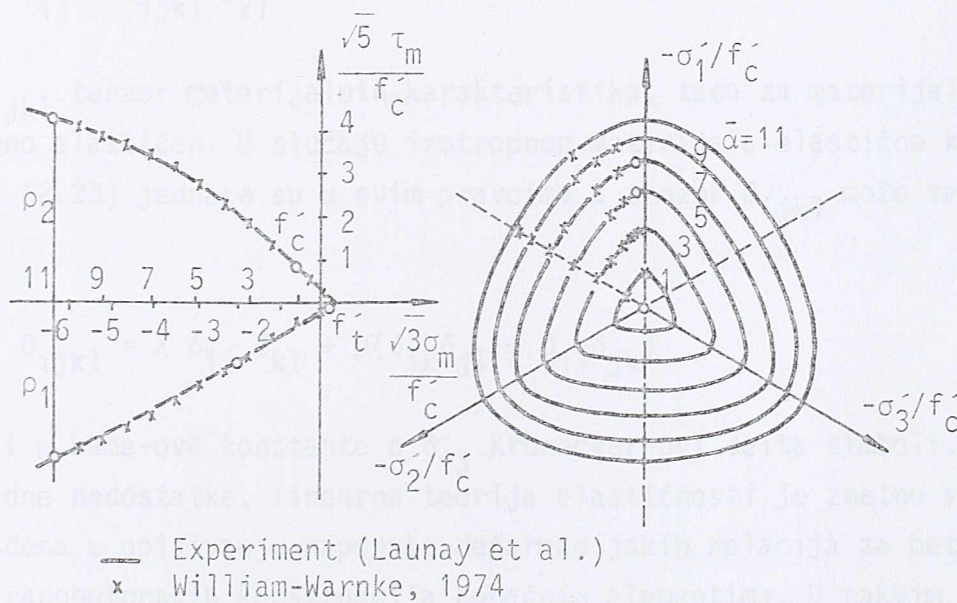
i  $\theta = 60^\circ$  a zatim se ovi meridijani povezuju elipsoidnom površi koja je data izrazom

$$r(\sigma_m, \theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)\sqrt{4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2}^{1/2} \quad (2.22)$$

Potrebni podaci za određivanje parametara su:

- jednoaksijalna čvrstoća na pritisak  $f'_c$  ( $\theta = 60^\circ$ ),
- jednoaksijalna čvrstoća na zatezanje  $f'_t$  ( $\theta = 0^\circ$ ),
- ekvivalentna biaksijalna čvrstoća na pritisak  $f'_{bc}$  ( $\theta = 0^\circ$ ), i
- po jedna tačka na meridijanima  $\theta = 0^\circ$  i  $\theta = 60^\circ$  koja odgovara visokoj triaksijalnoj kompresiji.

Na sl. 2.13 prikazana je grafička interpretacija William-Warneke-ovog modela.



Sl. 2.13. Grafička interpretacija William-Warneke-ovog modela - prema referenci [2.8].

Pored ovih nabrojanih kriterijuma loma betona postoji jasno i veliki broj drugih (Reimann (1965), Hsieh-Ting-Chen (1979), Kupfer-Gerstle (1973) i drugi) koji se u manjoj ili većoj meri uspešno primenjuju. U ovom odeljku je učinjen pokušaj da se da kratak pregled najpoznatijih teorija loma betona bez pretenzija da se učini kompletan uvid u ovu materiju.



## 2.4. KONSTITUTIVNI MODELI ZA BETON

Postoji veliki broj različitih teorija, zasnovanih uglavnom na rezultatima eksperimentalnih opita, kojima se opisuju konstitutivne veze za beton pri pojedinim naponskim stanjima. One se uglavnom mogu podeliti u sledeće četiri grupe:

- (1) linearne i nelinearne elastične teorije,<sup>1.5, 2.10-2.13</sup>
- (2) teorije plastičnosti sa i bez ojačanja,<sup>1.13, 2.14-2.15</sup>
- (3) endohrona teorija plastičnosti<sup>2.16</sup> i
- (4) plastična teorija mehanike loma<sup>2.17</sup>.

U osnovi svih elastičnih teorija, bez obzira na njihove različite formulacije, nalazi se generalisani Hooke-ov zakon u totalnom ili inkrementalnom obliku. Kada je veza izmedju napona i deformacije linearna

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.23)$$

gde je  $D_{ijkl}$  tenzor materijalnih karakteristika, tada za materijal kažemo da je linearno elastičan. U slučaju izotropnog materijala elastične konstante u jednačini (2.23) jednake su u svim pravcima a tenzor  $D_{ijkl}$  može se prikazati u obliku

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.24)$$

gde su  $\lambda$  i  $\mu$  Lamé-ove konstante a  $\delta_{ij}$  Kronecker-ovi delta simboli. Bez obzira na očigledne nedostatke, linearna teorija elastičnosti je znatno više od ostalih korišćena u opisivanju naponsko-deformacijskih relacija za beton, pri analizi armiranobetonskih konstrukcija konačnim elementima. U takvim modelima beton bez prslina tretira se kao linearno-elastičan, izotropan materijal dok sa pojavom prslina on postaje ortotropan (transverzalno izotropan) materijal, sa osama koje su paralelne i normalne na pravac prslina. Linearno-elastični modeli ne odgovaraju realnom ponašanju betona u pritisku i mogu se znatno popraviti korišćenjem različitih nelinearno-elastičnih konstitutivnih veza za beton. U svakom slučaju elastični modeli se moraju kombinovati sa nekim od kriterijuma koji definišu lom betona. U formulaciji nelinearno-elastičnih modela uočavamo dva pristupa kojima se opisuje degradacija krutosti betona pri opterećenju.

To su:

- (a) totalan (sekantni) naponsko-deformacijski model i



(b) inkrementalni (tangencijalni) naponsko-deformacijski model

U sekantnom modelu tekuće stanje napona  $\sigma_{ij}$  jednoznačno je određeno kao funkcija tekućeg stanja deformacije  $\epsilon_{ij}$  i obrnuto. Konstitutivne relacije obično se mogu izraziti u obliku

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\epsilon_{kl}) \quad (2.25)$$

gde je  $F_{ij}$  tenzorska funkcija materijalnih karakteristika. Elastično ponašanje opisano jednačinom (2.25) je reverzibilno i nezavisno od putanje kojom se prelazi iz jednog u drugo naponsko/deformacijsko stanje. To u opštem slučaju nije tačno za beton, pa je domen primene ovog modela ograničen na monotona opterećenja. Bez obzira na nedostatke sekantni tip formulacije dosta se primenjuje za opisivanje nelinearnog ponašanja betona pri biaksijalnim i triaksijalnim naponima pritiska. Najveći broj sekantnih konstitutivnih modela za beton formulisan je kao jednostavno proširenje izotropnih linearno elastičnih veza napon-deformacija zamenom konstanti  $E$  i  $\nu$  ili  $K$  i  $G$  sa sekantnim modulima  $E_s$  i  $\nu_s$  odnosno  $K_s$  i  $G_s$ , za koje se pretpostavlja da su funkcija naponskih ili deformacijskih invarijanti.

Inkrementalni model, koji se naziva još i hipoelastični, koristi se za opisivanje ponašanja materijala kod koga stanje napona zavisi ne samo od tekućeg stanja deformacije već i od naponske putanje kojom se dostiže to stanje. U hipoelastičnom materijalnom modelu inkrementalni tenzori  $d\sigma_{ij}$  i  $d\epsilon_{ij}$  povezani su sledećom relacijom

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (2.26)$$

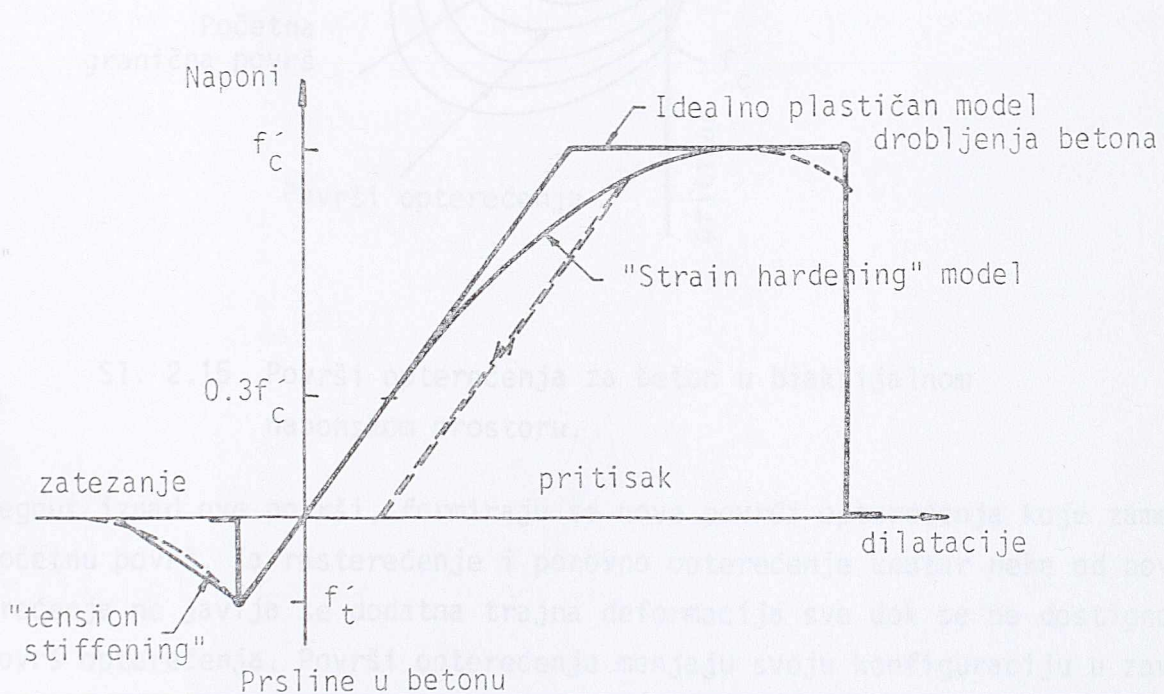
gde je  $D_{ijkl}$  tenzor tangentne materijalne krutosti i zavisi od naponskog i/ili deformacijskog tenzora. Obzirom da hipoelastični model zavisi i od naponske putanje to obezbeđuje mnogo realnije opisivanje ponašanja betona pri opštim uslovima opterećenja.

Eksperimentalni podaci o ponašanju betona u pritisku ukazuju da je nelinearna deformacija betona u osnovi neelastična, obzirom na činjenicu da se pri rasterećenju samo deo ukupne deformacije vraća (elastična deformacija  $\epsilon_{e1}$ ), dok drugi deo trajno ostaje (plastična deformacija  $\epsilon_{p1}$ ). Prema tome, deformacija betona sastoji se iz dve komponente, povratne i nepovratne. Svaka od ovih komponenti može se tretirati individualno; povratna deformacija se razmatra u okviru teorije elastičnosti, dok se nepovratna deformacija razmatra u okviru teorije plastičnosti. Modeli bazirani na teoriji plastičnosti opisuju beton kao:



- (a) idealan elasto-plastičan materijal ("perfect plasticity") ili  
 (b) elasto-plastični materijal sa ojačanjem ("strain-hardening plasticity").

Poznato je da pri triaksijalnom pritisku beton može teći kao žilav materijal, kada se dostigne površ tečenja ili loma betona, a pre nastanka onih dilatacija pri kojima dolazi do njegovog drobljenja i otkazivanja nosivosti. Ova sposobnost betona da teče pre konačnog sloma može se opisati idealno plastičnim modelom (sl. 2.14). Do granice plastičnog tečenja smatramo da se beton ponaša kao elastičan materijal, u tom smislu možemo iskoristiti različite linearne i nelinearne elastične modele, napred opisane. Za vreme plastičnog tečenja ponašanje betona opisano je plastičnim vezama između napona i deformacija. Da bi se uspostavile ove veze moraju se definisati uslov plastičnog tečenja kao i deformacijski kriterijum drobljenja betona ("crushing condition"). U najvećem broju idealno plastičnih modela uzima se da su kriterijumi loma betona, opisani u odeljku 2.3., identični sa uslovima plastičnog tečenja. Pošto se ne raspolaže

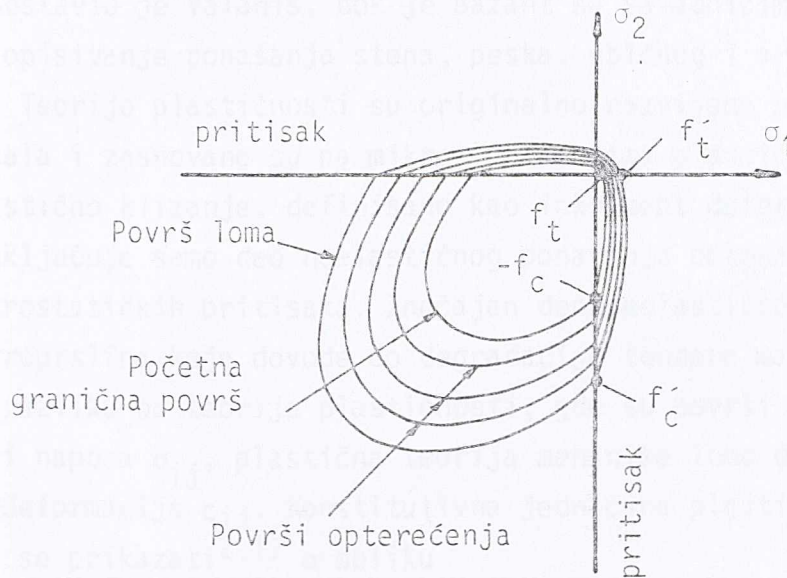


Sl. 2.14. Jednodimenzionalni prikaz konstitutivnih modela za beton

sa dovoljnim eksperimentalnim podacima o graničnim deformacijskim karakteristikama betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima, deformacijski kriterijumi drobljenja betona pri naponima pritiska obično se dobijaju jednostavnom konverzijom uslova tečenja, izraženog u naponima, u deformacije. Znatno realniji model ponašanja betona dobija se primenom elasto-plastičnog modela sa ojačanjem



(sl. 2.15). Ovaj model može se smatrati kao generalizacija svih prethodnih, pri čemu zadovoljava osnovne principe mehanike kontinuuma i uslove o jednoznačnosti rešenja. Granica elastičnog ponašanja materijala definisana je početnom graničnom površi koja je slična sa površi loma betona ali na određenom rastojanju od nje. Kada je stanje napona unutar početne granične površi za beton se mogu primeniti linearno-elastične konstitutivne jednačine. Ako je beton



Sl. 2.15. Površ opterećenja za beton u biaksijalnom naponskom prostoru.

napregnut iznad ove površi, formiraju se nove površi opterećenja koje zamenjuju početnu površ. Za rasterećenje i ponovno opterećenje unutar neke od površi opterećenja ne javlja se dodatna trajna deformacija sve dok se ne dostigne nova površ opterećenja. Površ opterećenja menjaju svoju konfiguraciju u zavisnosti od usvojenog zakona ojačanja materijala. Razlikujemo tri vrste ojačanja materijala:

- (a) izotropno,
- (b) kinematičko i
- (c) mešovito ojačanje.

Kod izotropnog ojačanja se pretpostavlja da se početna granična površ širi uniformno, ostajući slična sama sebi. Kinematičko ojačanje podrazumeva da se površi opterećenja translatorno pomeraju u naponskom prostoru zadržavajući veličinu i oblik početne granične površi, dok se kod mešovitog ojačanja smatra da se površi opterećenja i translatorno pomeraju i istovremeno uniformno šire. Sa sl. 2.14



i sl. 2.15 uočava se da dostizanjem površi loma dobijamo idealno plastičan odgovor materijala do ispunjenja deformacijskog kriterijuma loma betona kada nastaje konačan kolaps.

Endohrona teorija plastičnosti za razliku od drugih gore pomenutih teorija je inkrementalno nelinearna. Koncept ove teorije zasniva se na postojanju pseudo-vremena ("intrinsic" ili "endochronic time") definisanog u funkciji deformacija ili napona, koje se koristi za merenje stepena promene ili oštećenja unutrašnje strukture materijala izloženog deformaciji. Osnovu ove teorije postavio je Valanis, dok je Bažant sa saradnicima istu proširio i primenio za opisivanje ponašanja stena, peska, običnog i armiranog betona.

Teorije plastičnosti su originalno razvijene u cilju opisivanja ponašanja metala i zasnovane su na mikro-mehanizmima plastičnog klizanja u kristalima. Plastično klizanje, definisano kao inkrement deformacije pri konstantnom naponu, uključuje samo deo neelastičnog ponašanja betona i to pri uslovima visokih hidrostatičkih pritisaka. Značajan deo neelastičnog ponašanja betona potiče od mikroprslina koje dovode do degradacije tenzora materijalnih karakteristika. Za razliku od teorije plastičnosti, gde su površi opterećenja definisane u funkciji napona  $\sigma_{ij}$ , plastična teorija mehanike loma definiše ove površi u funkciji deformacija  $\epsilon_{ij}$ . Konstitutivna jednačina plastične teorije mehanike loma može se prikazati<sup>2.17</sup> u obliku

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^t d\epsilon_{km} \quad (2.27)$$

gde je

$$D_{ijkl}^t = D_{ijkl} - D_{ijkl}^{pl} - D_{ijkl}^{fr}$$

Tenzor  $D_{ijkl}$  dat je izrazom

$$D_{ijkl} = G(\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + (K - \frac{2G}{3}) \delta_{ij} \delta_{km} \quad (2.28)$$

a tenzori  $D_{ijkl}^{pl}$  i  $D_{ijkl}^{fr}$  definišu smanjenje krutosti usled plastičnog tečenja i mikroprslina u betonu.



## 2.5. MATERIJALNI MODEL BETONA PRIMENJEN U OVOM RADU

### 2.5.1. Neke uvodne napomene

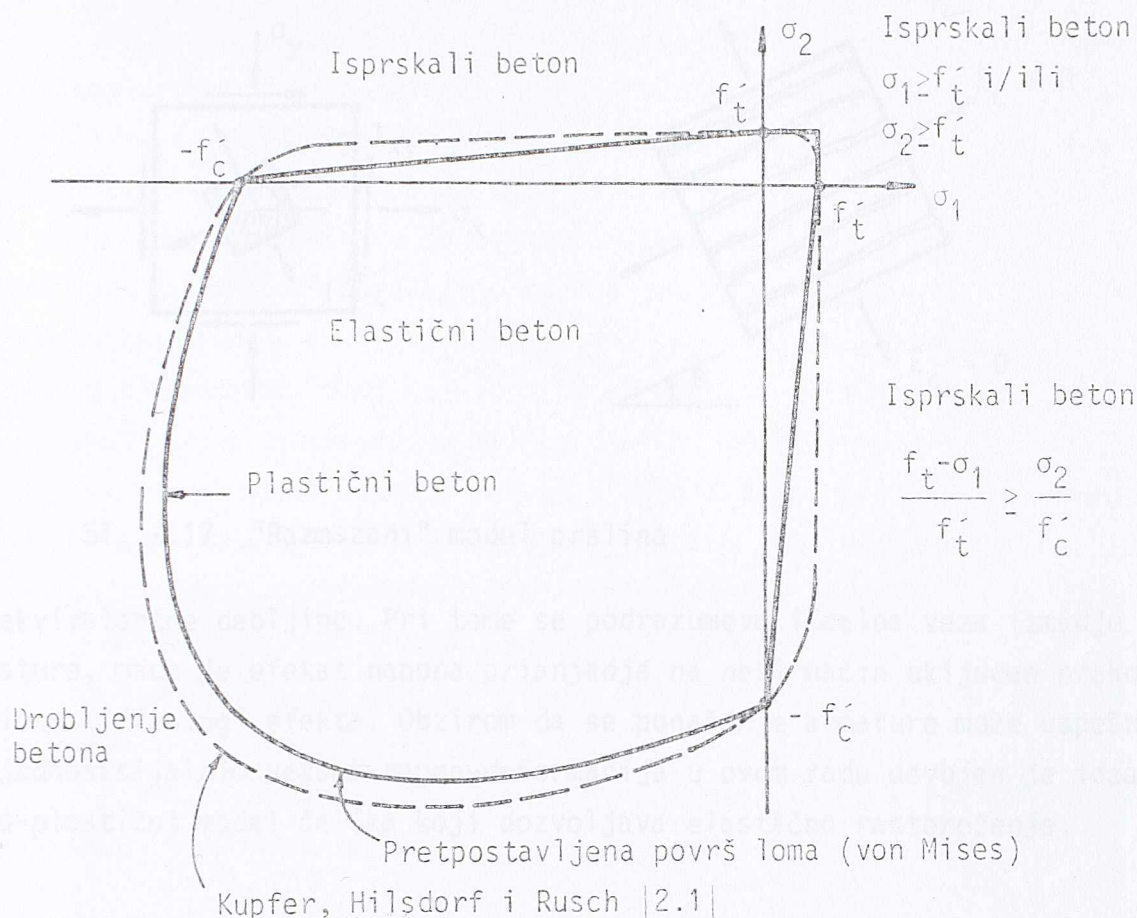
U ovom radu prikazan je računski model za analizu armiranobetonskih ploča konačnim elementima pri kratkotrajnom opterećenju. U cilju obuhvatanja promena materijalnog stanja po debljini ploče usvojen je slojeviti model. Konačni element ploče sastoji se od niza slojeva raspoređenih po debljini ploče, pri čemu u svakom od slojeva vlada ravno naponsko stanje. Pretpostavlja se da naponi u sredini sloja reprezentuju napone u celom sloju. Pri odredjivanju matrice krutosti konačnog elementa, odnosno krutosti pojedinih slojeva, kao i pri sračunavanju napona, neophodno je za svaki individualni sloj uspostaviti odgovarajuće konstitutivne relacije u skladu sa materijalnim stanjem u kome se on nalazi.

Ponašanje betona pri biaksijalnim naponskim stanjima može se uspešno opisati koristeći modifikovanu verziju dobro poznate anvelope loma betona, koju su odredili Kupfer i ostali<sup>2.1</sup> (vidi sl. 2.3). Na sl. 2.16 prikazana je ova anvelopa zajedno sa krivama loma predloženim u ovom radu. Krive loma su definisane za svaku karakterističnu oblast pojedinačno, i to za: oblast biaksijalne kompresije, oblast biaksijalnog zatezanja i mešovitu oblast zatezanje-pritisak. U slučaju kada se tačka koja reprezentuje stanje napona u betonu nalazi unutar ove anvelope smatramo da se materijal ponaša elastično.

U oblasti biaksijalnog pritiska beton napregnut iznad elastične granice počinje da teče a za uspostavljanje plastičnih veza napon-deformacija koristimo teoriju idealne plastičnosti. U radu je prikazana formulacija von Mises-ovog uslova tečenja u okviru asocijativne teorije plastičnosti. Bez obzira na izvesne nedostatke, o kojima će docnije biti reči, primena von Mises-ovog uslova na beton daje zadovoljavajuće rezultate. Za razliku od von Mises-ovog uslova, gde smičući naponi  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  ne ulaze u uslov tečenja, Owen i Figueras<sup>2.18</sup> su postavili kriterijum koji uključuje i ove napone. Nakon izvesnog plastičnog tečenja beton dostiže svoje granične deformacije pri biaksijalnoj kompresiji. One su definisane deformacijskim kriterijumom loma u deformacijskom prostoru i svako prekoračenje ovog kriterijuma podrazumeva da je došlo do drobljenja betona, pri čemu on gubi svu svoju čvrstoću.

Pri biaksijalnom zatezanju u betonu se javljaju prsline u pravcu koji





Sl. 2.16. Usporedjenje biaksijalne anvelope loma betona sa predloženim krivama loma

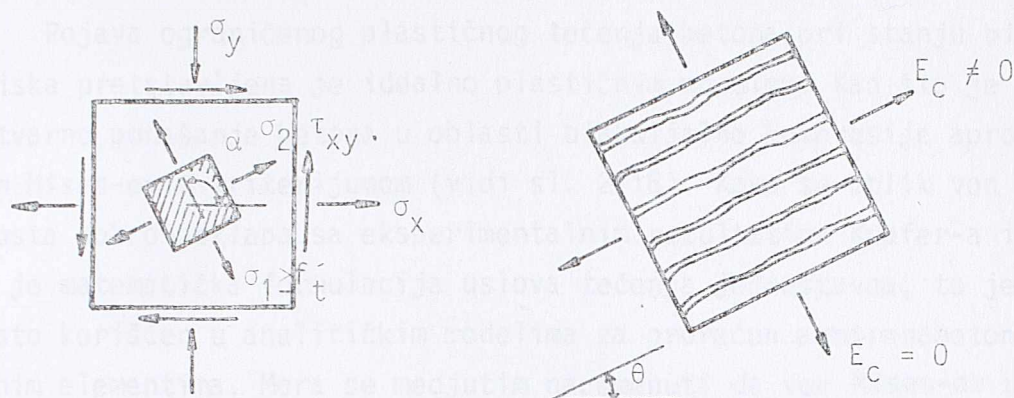
je upravan na pravac glavnog napona i to u trenutku kada ovaj napon prekorači čvrstoću betona na zatezanje. Do formiranja prslina dolazi i u onim tačkama u betonu čije stanje napona odgovara oblasti zatezanje-pritisak, a koje izlaze izvan utvrdjene anvelope.

Kako su prsline u betonu jedan od glavnih uzroka nelinearnog ponašanja većine armiranobetonskih konstrukcija to je od velikog značaja da se što realnije prikažu u računskom modelu. U ovom radu primenjen je "razmazani" model prslina, kod koga se prsline uključuju u rad promenom vrednosti elastičnih koeficijenata u matrici materijalnih karakteristika betona. Ovaj model ne podrazumeva formiranje individualne prslina već niza finih prslina raspoređenih po čitavom elementu u odgovarajućem pravcu (sl. 2.17).

Računski model armiranog betona primenjen u ovom radu uključuje "tension stiffening" efekat kao i transfer smičućih sila u isprskalom betonu. U



modelu je usvojen osrednjeni način prikazivanja armature, preko čeličnih slo-



Sl. 2.17. "Razmazani" model prslina

jeva ekvivalentne debljine. Pri tome se podrazumeva idealna veza izmedju betona i armature, mada je efekat napona prianjanja na neki način uključen preko "tension stiffening" efekta. Obzirom da se ponašanje armature može uspešno opisati jednoaksijalnim vezama napon-deformacija u ovom radu usvojen je idealno elasto-plastični model čelika koji dozvoljava elastično rasterećenje.

### 2.5.2. Elastično ponašanje betona

Pod pretpostavkom ravnog stanja napora inkrementalne veze napon-deformacija za izotropan elastičan betonski sloj glase

$$\Delta \underline{\sigma}_1 = \underline{D}_1^{el} \Delta \underline{\epsilon}_1 \quad (2.29)$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} \Delta \sigma_x \\ \Delta \sigma_y \\ \Delta \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E_c}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \epsilon_x \\ \Delta \epsilon_y \\ \Delta \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

gde je  $E_c$  modul elastičnosti a  $\nu$  Poisson-ov koeficijent za beton.



### 2.5.3. Plastično ponašanje betona

Pojava ograničenog plastičnog tečenja betona pri stanju biaksijalnog pritiska predstavljena je idealno plastičnim modelom. Kao što je napred rečeno stvarno ponašanje betona u oblasti biaksijalne kompresije aproksimirano je von Mises-ovim kriterijumom (vidi sl. 2.16). Kako se oblik von Mises-ove površi dosta dobro poklapa sa eksperimentalnim rezultatima Kupfer-a i ostalih, pri čemu je matematička formulacija uslova tečenja jednostavna, to je ovaj uslov često korišćen u analitičkim modelima za proračun armiranobetonskih ploča konačnim elementima. Mora se međjutim napomenuti da von Mises-ov uslov ne sadrži u sebi uticaj srednjeg normalnog napona, odnosno invarijante  $I_1$ , pa se stoga efekat povećanja zapremine betona ("dilatancy") pri visokim naponima pritiska ne može obuhvatiti ovim uslovom. Obzirom na činjenicu da su u najvećem broju slučajeva samo manji delovi armiranobetonskih konstrukcija izloženi biaksijalnoj kompresiji, pri opterećenjima bliskim onima koja dovode do loma, to se upotreba von Mises-ovog uslova tečenja može u inženjerskom smislu smatrati zadovoljavajućom.

Prema von Mises-ovom uslovu u betonskom sloju dolazi do tečenja koja naponi zadovolje sledeću relaciju

$$f = f(\underline{\sigma}_1) = |\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2|^{1/2} - f_c = 0 \quad (2.31)$$

gde je  $f_c$  jednoaksijalna čvrstoća betona na pritisak a  $\underline{\sigma}_1$  vektor napona u betonskom sloju.

Posle početnog tečenja ponašanje materijala je delimično elastično a delimično plastično. Promena deformacije, tokom nekog inkrementa napona, može se stoga podeliti na elastičnu i plastičnu komponentu

$$d\underline{\varepsilon}_1 = d\underline{\varepsilon}_1^{el} + d\underline{\varepsilon}_1^{pl} \quad (2.32)$$

Veza inkrementa elastične deformacije i inkrementa napona data je vezom (2.30), odnosno

$$d\underline{\varepsilon}_1^{el} = (\underline{D}_1^{el})^{-1} d\underline{\sigma}_1 \quad (2.33)$$

Vežu izmedju inkrementa plastične deformacije  $d\underline{\varepsilon}_1^{pl}$  i inkrementa napona  $d\underline{\sigma}_1$  uspostavljamo koristeći asocijativnu teoriju plastičnosti za koju je zadovoljen uslov normalnosti



$$d\varepsilon_1^{pl} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_1} \quad (2.34)$$

Jednačina (2.34) predstavlja matematičku formulaciju uslova da je inkrement plastične deformacije  $d\varepsilon_1^{pl}$  upravan na površ tečenja  $f(\underline{\sigma}_1)$ . Plastični multiplikator  $d\lambda$  ima pozitivnu vrednost pri opterećenju odnosno negativnu pri rasterećenju. Kompletna inkrementalna veza napon-deformacija za elasto-plastičnu deformaciju može se napisati u obliku

$$d\varepsilon_1 = (\underline{D}_1^{el})^{-1} d\underline{\sigma}_1 + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_1} \quad (2.35)$$

Diferencirajući jednačinu (2.31) po  $\underline{\sigma}_1$  dobijamo

$$df = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_1} d\underline{\sigma}_1 = 0 \quad (2.36)$$

Ako uvedemo obeležavanje

$$\underline{a}^T = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_1} = \left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (2.37)$$

gde vektor  $\underline{a}$  nazivamo vektorom tečenja, to koristeći (2.37) izraz (2.36) možemo napisati u obliku

$$\underline{a}^T d\underline{\sigma}_1 = 0 \quad (2.38)$$

Množenjem jednačine (2.35) sa  $\underline{a}^T \underline{D}_1^{el}$  i korišćenjem izraza (2.38) možemo konstantu proporcionalnosti  $d\lambda$  izraziti kao

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \underline{D}_1^{el}}{\underline{a}^T \underline{D}_1^{el} \underline{a}} d\varepsilon_1 \quad (2.39)$$

Zamenom izraza (2.39) u (2.35) dobija se kompletna elasto-plastična inkrementalna veza napon-deformacija u obliku

$$d\underline{\sigma}_1 = \underline{D}_1^{ep} d\varepsilon_1 \quad (2.40)$$

gde je  $\underline{D}_1^{ep}$  elasto-plastična modularna matrica data izrazom

$$\underline{D}_1^{ep} = \underline{D}_1^{el} - \underline{D}_1^{el} \frac{\underline{a} \underline{a}^T \underline{D}_1^{el}}{\underline{a}^T \underline{D}_1^{el} \underline{a}} \quad (2.41)$$



Jasno gornji izrazi važe za beskonačno male inkremente napona. U slučaju da inkrementi opterećenja koje nanosimo nisu dovoljno mali tačka u naponskom prostoru može da izadje izvan površi tečenja. Postupak vraćanja na površ tečenja u potpunosti je usvojen kako su to predložili i programirali Owen i Hinton<sup>2.19</sup>.

Za slučaj rasterećenja, kada je konstanta  $d\lambda$  (2.39) negativna, smatramo da je ono elastično, pa stoga važe u potpunosti relacije (2.30).

#### 2.5.4. Drobljenje betona

Drobljenje plastičnog betona pri biaksijalnoj kompresiji može se definisati deformacijskim kriterijumom. U nedostatku eksperimentalnih podataka kojima bi se detaljnije opisale granične deformacijske karakteristike betona pri višeaksijalnim naponskim stanjima deformacijski kriterijum izvodimo jednostavnom konverzijom von Mises-ovog uslova tečenja iz naponskog u deformacijski prostor. Drobljenje betona nastaje kada ekvivalentna deformacija  $\bar{\epsilon}$  u betonskom sloju dostigne svoju graničnu vrednost  $\epsilon_{cu}$ . Ekvivalentna deformacija data je izrazom

$$\bar{\epsilon} = \left| \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 - \epsilon_x \epsilon_y + \frac{3}{4} \gamma_{xy}^2 \right|^{1/2} \quad (2.42)$$

Pošto je došlo do drobljenja betona smatra se da je isti izgubio svu svoju krutost i čvrstoću, odnosno naponi padaju na nulu

$$\sigma_1 = |0| \epsilon_1 \quad (2.43)$$

#### 2.5.5. Modeliranje prslina u betonu

Kao što je napred pomenuto u ovom radu primenjen je "razmazani" ili osrednjeni način prikazivanja prslina. Ovaj model omogućava automatsko generisanje prslina i potpunu slobodu u pogledu pravca moguće prslina. Obzirom da je primenjen slojeviti model za svaki betonski sloj su dozvoljeni različiti pravci prslina, pri čemu se prslina mogu otvarati i zatvarati za vreme inkrementa opterećenja pri kome su nastale. Prslina se mogu javiti u jednom ili dva pravca koji su fiksirani pošto je postignuta konvergencija unutar nekog inkrementa opterećenja. Pri rasterećenju može doći do delimičnog ili potpunog zatvaranja



već formiranih prslina.

Prsline u betonu nastaju ako tačka koja reprezentuje stanje napona u betonskom sloju dostigne ili izadje izvan biaksijalne anvelope loma betona u zonama biaksijalnog zatezanja i zatezanje-pritisak. Pri biaksijalnom zatezanju prslina u betonskom sloju se javlja kada glavni napon prekorači čvrstoću betona na zatezanje. Pravac tako formirane prsline upravan je na pravac glavnog napona. U slučaju da su oba glavna napona istovremeno veća od  $f'_t$  javljaju se dve međusobno ortogonalne prsline. Pri stanju napona koje odgovara oblasti zatezanje-pritisak prsline se javljaju ako je zadovoljen uslov

$$\frac{(f'_t - \sigma_1)}{f'_t} \geq \frac{\sigma_2}{f'_c} \quad (2.44)$$

Pravac prsline je u ovom slučaju normalan na pravac glavnog napona zatezanja  $\sigma_1$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ). Za elastičan betonski sloj inkrement napona  $\Delta\sigma_1$  možemo sračunati iz relacije (2.29). Ukupan vektor napona  $\sigma_1$  dobijamo kao zbir vektora napona  $\sigma_1^C$  koji smo sračunali na kraju prethodnog inkrementa opterećenja i  $\Delta\sigma_1$ , odnosno

$$\sigma_1 = \sigma_1^C + \Delta\sigma_1 \quad (2.45)$$

Provera naponskog stanja u svim betonskim slojevima vrši se sračunavanjem vrednosti glavnih napona  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ) na mestima Gauss-ovih tačaka izabranog konačnog elementa ploče. Glavni naponi dati su izrazom

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2.46)$$

a ugao  $\alpha$  koji zaklapa pravac glavnog napona  $\sigma_1$  sa x-osom može se sračunati kao

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2.47)$$

Za slučaj kada je  $\sigma_x - \sigma_y = 0$  ugao  $\alpha$  odredjujemo kao

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad \text{za} \quad \tau_{xy} > 0 \quad (2.48)$$

ili  $\alpha = -\frac{\pi}{4}$  za  $\tau_{xy} < 0$

U slučaju kada je  $\tau_{xy} = 0$  ugao  $\alpha$  odredjujemo kao

$\alpha = 0$  za  $\sigma_x - \sigma_y > 0$



$$\text{ili} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{za} \quad \sigma_x - \sigma_y < 0 \quad (2.49)$$

Kao što smo već rekli prsline u betonskom sloju na mestu Gauss-ovih tačaka numeričke integracije javiće se kada je  $\sigma_1 > f'_t$ , odnosno kada je zadovoljen uslov (2.44). Po formiranju prsline smatramo da se naponi zatezanja ne prenose preko iste, pa stoga krutost materijala u tom pravcu redukujemo na nulu. Sa druge strane materijal paralelan sa prslinom još uvek je sposoban da prenosi napone. Stoga jednostruko isprskali beton tretiramo kao ortotropan materijal sa koordinatnim osama koje su paralelne odnosno upravne na pravac prsline. Kako nakon prskanja betona prestaje interakcija između dva ortogonalna pravca to zanemarujemo Poisson-ov koeficijent. Prema tome vektor napona, pri pojavi prsline, dat je u lokalnom koordinatnom sistemu  $\bar{x}\bar{y}$  (sl. 2.18) izrazom

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_{\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

gde su

$E_c$  - modul elastičnosti betona

$\beta$  - faktor smičuće retenzije za beton ( $0 < \beta \leq 1$ )

$G_c$  - modul klizanja betona, u ovom slučaju  $G_c = \frac{E_c}{2}$

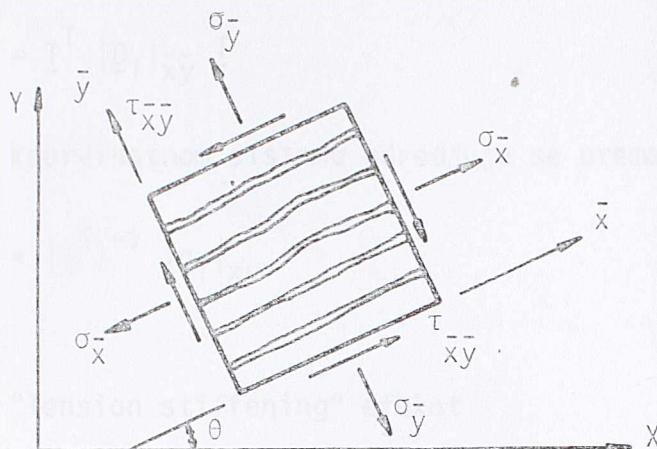
Na isti način mogu se uspostaviti i inkrementalne veze napon-deformacija za jednostruko isprskali betonski sloj u obliku

$$\begin{vmatrix} \Delta\sigma_{\bar{x}} \\ \Delta\sigma_{\bar{y}} \\ \Delta\tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta G_c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta\epsilon_{\bar{x}} \\ \Delta\epsilon_{\bar{y}} \\ \Delta\gamma_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} \quad (2.51)$$

Iz jednačine (2.51) vidimo da se modul elastičnosti betona u pravcu upravnom na pravac prsline uzima da je jednak nuli. Na taj način se izbegava upotreba negativnog modula elastičnosti za beton, koji bi odgovarao opadajućim granama na dijagramu  $\sigma$ - $\epsilon$  za beton u zatezanju (vidi sl. 2.2). Sposobnost betona da nosi na zatezanje između prsline dovodi do toga da se efektivno napon u betonu upravna na pravac prsline postepeno, u koracima, redukuje na nulu prema



pretpostavljenoj krivoj kojom se opisuje "tension stiffening" efekat (sl. 2.19).



Sl. 2.18. Lokalni koordinatni sistem za isprskali beton

Pošto su veze između vektora napona i deformacije za isprskali beton definisane u lokalnom koordinatnom sistemu to moramo izvršiti njihovu transformaciju u globalni koordinatni sistem. Transformacija se obavlja preko matrice  $\underline{I}$  koja je funkcija ugla  $\theta$  između osa lokalnog ( $0\bar{x}\bar{y}$ ) i globalnog ( $0xy$ ) koordinatnog sistema, pri čemu važe relacije

$$|\underline{\varepsilon}_1|_{\bar{x}\bar{y}} = \underline{I} \cdot |\underline{\varepsilon}_1|_{xy} \quad (2.52)$$

$$|\underline{\sigma}_1|_{xy} = \underline{I}^T \cdot |\underline{\sigma}_1|_{\bar{x}\bar{y}} \quad (2.53)$$

Matrica  $\underline{I}$  definisana je kao

$$\underline{I} = \begin{vmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{vmatrix} \quad (2.54)$$

Kako važi relacija

$$|\underline{\sigma}_1|_{\bar{x}\bar{y}} = |\underline{D}_1|_{\bar{x}\bar{y}} \cdot |\underline{\varepsilon}_1|_{\bar{x}\bar{y}} \quad (2.55)$$

to koristeći (2.52) i (2.53) dobijamo da je

$$|\underline{\sigma}_1|_{xy} = \underline{I}^T |\underline{D}_1|_{\bar{x}\bar{y}} \underline{I} |\underline{\varepsilon}_1|_{xy} \quad (2.56)$$



pri čemu se matrica materijalnih karakteristika betona  $|D_1|_{xy}$  može odrediti kao

$$|D_1|_{xy} = \underline{T}^T |D_1|_{\bar{x}\bar{y}} \underline{T} \quad (2.57)$$

Naponi u lokalnom koordinatnom sistemu određuju se prema jednačini (2.53) kao

$$|\underline{\sigma}_1|_{\bar{x}\bar{y}} = |T^T|^{-1} |\underline{\sigma}_1|_{xy} \quad (2.58)$$

#### 2.5.6. "Tension stiffening" efekat

Uvodjenje "tension stiffening" efekta u osrednjeni model prslina do- vodi do znatno boljih poklapanja numeričkih i eksperimentalnih rezultata. Uklju- čenje ovog efekta u računski model armiranobetonskih ploča ne samo da doprinosi boljem reprezentovanju stvarnog ponašanja betona već i povećava stabilnost numeričkog postupka. U ovom radu "tension stiffening" efekat uzet je u obzir uvođenjem opadajuće grane dodate na jednoaksijalnu naponsko-deformacijsku kri- vu betona pri zatezanju, kako je to prikazano na sl. 2.19. Ova pretpostavka do- sta realno opisuje stvarno ponašanje betona (sl. 2.2).

Prema tome napon  $\sigma$  upravan na prslinu određujemo sa "tension stiffening" krive koristeći ukupnu dilataciju  $\epsilon$  upravnu na pravac prsline. Za- visno od zadatog broja tačaka koje definišu opadajuću krivu ona može biti li- nearna, kvadratna ili kubna. Za kvadratnu krivu

$$\sigma = a_0 + a_1\epsilon + a_2\epsilon^2 \quad (2.59)$$

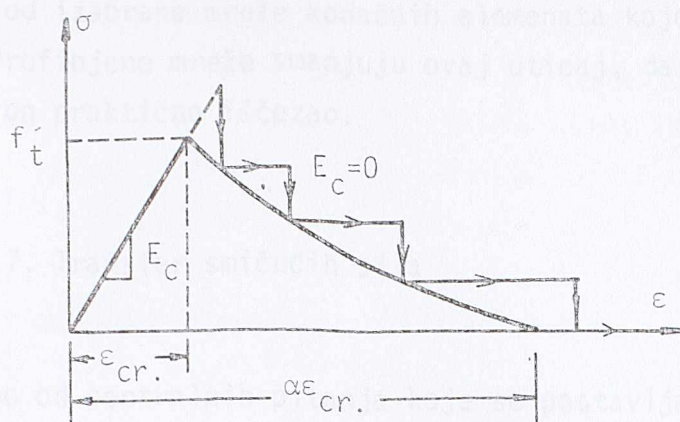
potrebno je definisati tri tačke, naprimer  $(\sigma_1, \epsilon_1)$ ,  $(\sigma_2, \epsilon_2)$  i  $(\sigma_3, \epsilon_3)$ , tako da se Lagrange-ovom interpolacijom dobija

$$\begin{aligned} \sigma = & \sigma_1 \frac{(\epsilon - \epsilon_2)(\epsilon - \epsilon_3)}{(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_1 - \epsilon_3)} + \sigma_2 \frac{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_3)}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)} + \\ & + \sigma_3 \frac{(\epsilon - \epsilon_1)(\epsilon - \epsilon_2)}{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)} \end{aligned} \quad (2.60)$$

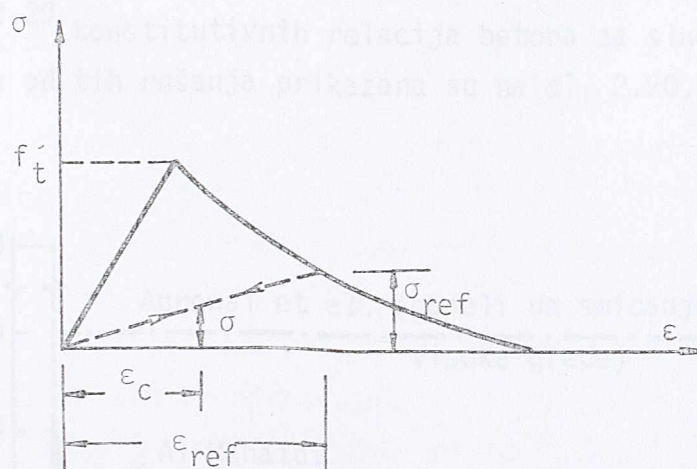
U slučaju kada je  $\epsilon < \epsilon_{cr}$  usvaja se da je napon  $\sigma$  jednak čvrstoći betona na zatezanje  $f'_t$ , a ako je  $\epsilon > \alpha\epsilon_{cr}$  usvaja se da je napon  $\sigma$  jednak nuli. Faktor  $\alpha$  definiše dužinu opadajuće grane na sl. 2.19 i njegova vrednost može imati znat-



nog uticaja na rezultate proračuna. U literaturi se predlažu različite vred-



a) opterećenje



b) rasterećenje

Sl. 2.19. Model "tension stiffening" efekta pretpostavljen u ovom radu

nosti faktora  $\alpha$  mada najčešće bez adekvatnog opravdanja. Može se smatrati da vrednost  $\alpha = 10$  pretstavlja neki kompromis medju različitim rešenjima<sup>2,21</sup>.

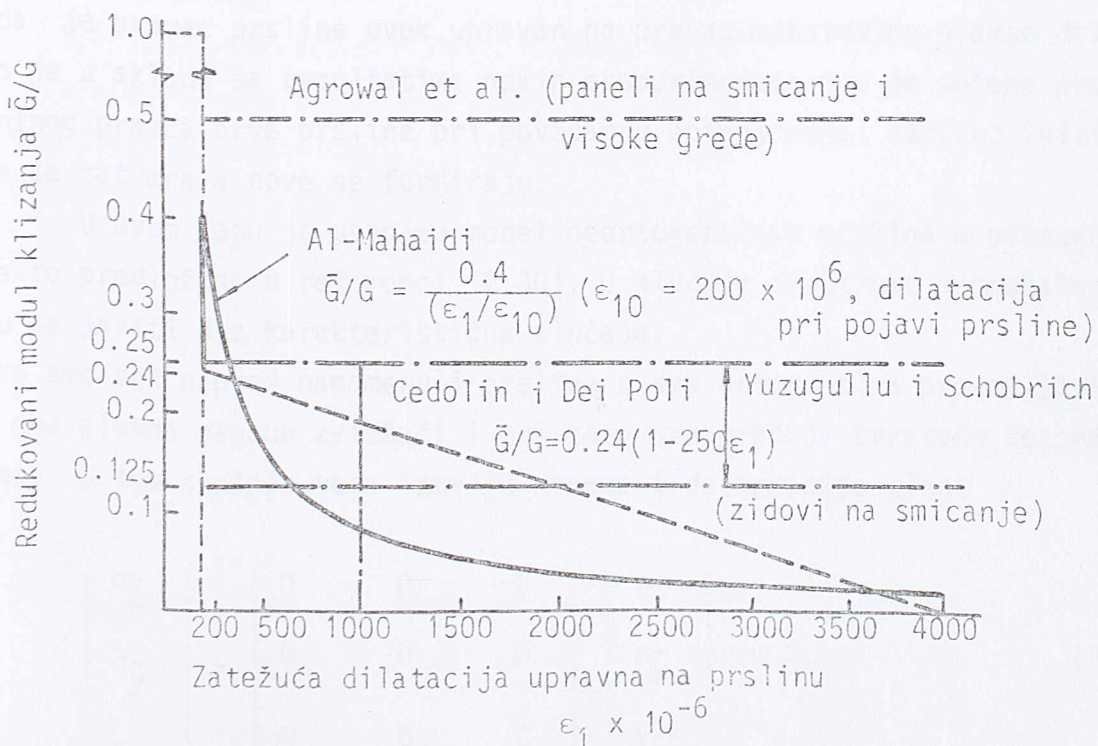
Poznato je da "tension stiffening" efekat zavisi od položaja betonskog sloja prema armaturi, sa povećanjem rastojanja on se smanjuje. Da bi se na neki način uključila promena ovog efekta po debljini ploče u ovom modelu moguće je definisati tri različite krive; prva kriva odgovara onim betonskim slojevima koji sadrže armaturu, druga kriva odgovara betonskim slojevima koji



su susedni sa onima koji sadrže armaturu, dok se treća kriva može primeniti za sve ostale slojeve. Treba napomenuti da "tension stiffening" efekat zavisi u velikoj meri od izabrane mreže konačnih elemenata kojom aproksimiramo datu konstrukciju. Profinjene mreže smanjuju ovaj uticaj, da bi pri beskonačno malim elementima on praktično iščezao.

### 2.5.7. Transfer smičućih sila

Jedno od centralnih pitanja koje se postavlja pri razmatranju ponašanja armiranobetonskih konstrukcija jeste problem transfera smičućih sila u isprskalom betonu<sup>2.22-2.23</sup>. Eksperimentalni rezultati<sup>2.24</sup> pokazuju da se znaatan deo smičućih napona može preneti preko rapavih površina isprskalog betona. Jasno ovi testovi ukazuju na zavisnost mehanizma prenosa smičućih napona od veličine otvora prsline, granulometrijskog sastava agregata, procenta armiranja, kao i prečnika pojedinih šipki armature. U literaturu su predložena brojna rešenja<sup>2.26-2.29</sup> konstitutivnih relacija betona za slučaj transfera smičućih napona. Neka od tih rešenja prikazana su na sl. 2.20.



Sl. 2.20. Uporedjenje različitih predloga za redukovanu krutost betona na smicanje - prema referenci [1.8].



U cilju obuhvatanja pojava "aggregate interlock"-a i "dowel action"-a uvodimo redukovani modul klizanja betona, koji je jednak  $\bar{G}_C = \beta G_C$ . Konstanta  $\beta$  naziva se faktor smičuće retenzije i uglavnom se kreće u granicama  $0 \leq \beta \leq 1$ . Hand i ostali<sup>1.11</sup> predlažu za  $\bar{G}_C$  konstantnu vrednost, dok Cedolin i Dei Poli<sup>2.26</sup> usvajaju linearnu zavisnost redukovanog modula klizanja  $G_C$  od fiktivne dilatacije upravne na pravac prslina, odnosno drugim rečima od veličine otvora prslina. Al-Mahaidi<sup>1.8</sup> predlaže ovu zavisnost u obliku hiperbole. U ovom radu usvojena je konstantna vrednost za  $\bar{G}_C = \beta G_C$ , pri čemu vrednost  $\beta = 0.5$  daje najbolje slaganje sa eksperimentalnim rezultatima.

### 2.5.8. Dvostruko isprskali beton

Pri daljem opterećenju jednostruko isprskali beton počinje da prska i u drugim pravcima. U pogledu matematičkog modeliranja prslina u armiranom betonu razlikujemo dva pristupa. Tradicionalni pristup podrazumeva da je posle nastanka prve prslina njen pravac fiksiran, s tim da se pojava sledeće prslina ograničava na pravac koji je upravan na pravac prve prslina. Neki radovi<sup>2.30-2.31</sup> predlažu modele prslina koje nisu medjusobno ortogonalne. Drugi pristup podrazumeva primenu "rotirajućih" prslina<sup>2.32</sup> i baziran je na pretpostavci da je pravac prslina uvek upravan na pravac maksimalne glavne dilatacije. Ovo je u skladu sa rezultatima nekih eksperimenata gde je uočena promena dominantnog pravca prve prslina pri povećanju opterećenja, odnosno inicijalna prslina se zatvara a nove se formiraju.

U ovom radu je usvojen model neortogonalnih prslina u potpunosti kako je to predloženo u referenci [2.30]. U slučaju dvostruko isprskalog betona mogu se javiti dva karakteristična slučaja:

(1) Kako smo već napred napomenuli prslina u dva ortogonalna pravca javiće se ako su oba glavna napona zatežujući i pri tome prekoračuju čvrstoću betona na zatezanje. U tom slučaju veza između napona i deformacije glasi

$$\begin{vmatrix} \sigma_{\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{y}} \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_C \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_{\bar{x}} \\ \epsilon_{\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \end{vmatrix} \quad (2.61)$$

Naponi  $\sigma_{\bar{x}}$  i  $\sigma_{\bar{y}}$  određuju se iz "tension stiffening" krivih na način koji je napred izložen.



(2) Dalje opterećenje jednostruko isprskalog sloja dovodi do pojave prslina i u nekom drugom pravcu, i to kada stanje napona u posmatranoj tački formira glavne napone zatezanja koji prekoračuju čvrstoću betona na zatezanje. Ovim modelom se ograničava formiranje novih prslina na uglove koji su veći od  $30^{\circ}$  prema pravcu inicijalnih prslina. Na taj način se izbegava nerealan model, jer bi se u suprotnom dogodilo da beton bude izložen visokim naponima pritiska u pravcima koji su skoro paralelni sa pravcem prslina, pri čemu bi došlo do tečenja pa zatim i drobljenja betona. U nastojanju da se zadrži konzistentan model smičuće retenzije u slučaju neortogonalnih prslina, koji podrazumeva jednake napone smicanja na neortogonalnim površinama prslina, mora se izvršiti ponovno definisanje referentnih koordinatnih osa (sl. 2.21). Koordinatni sistem  $Ox''y''$  dobija se na taj način što jedna od koordinatnih osa polovi neortogonalne pravce prslina. Ugao  $\theta_3$  možemo definisati kao

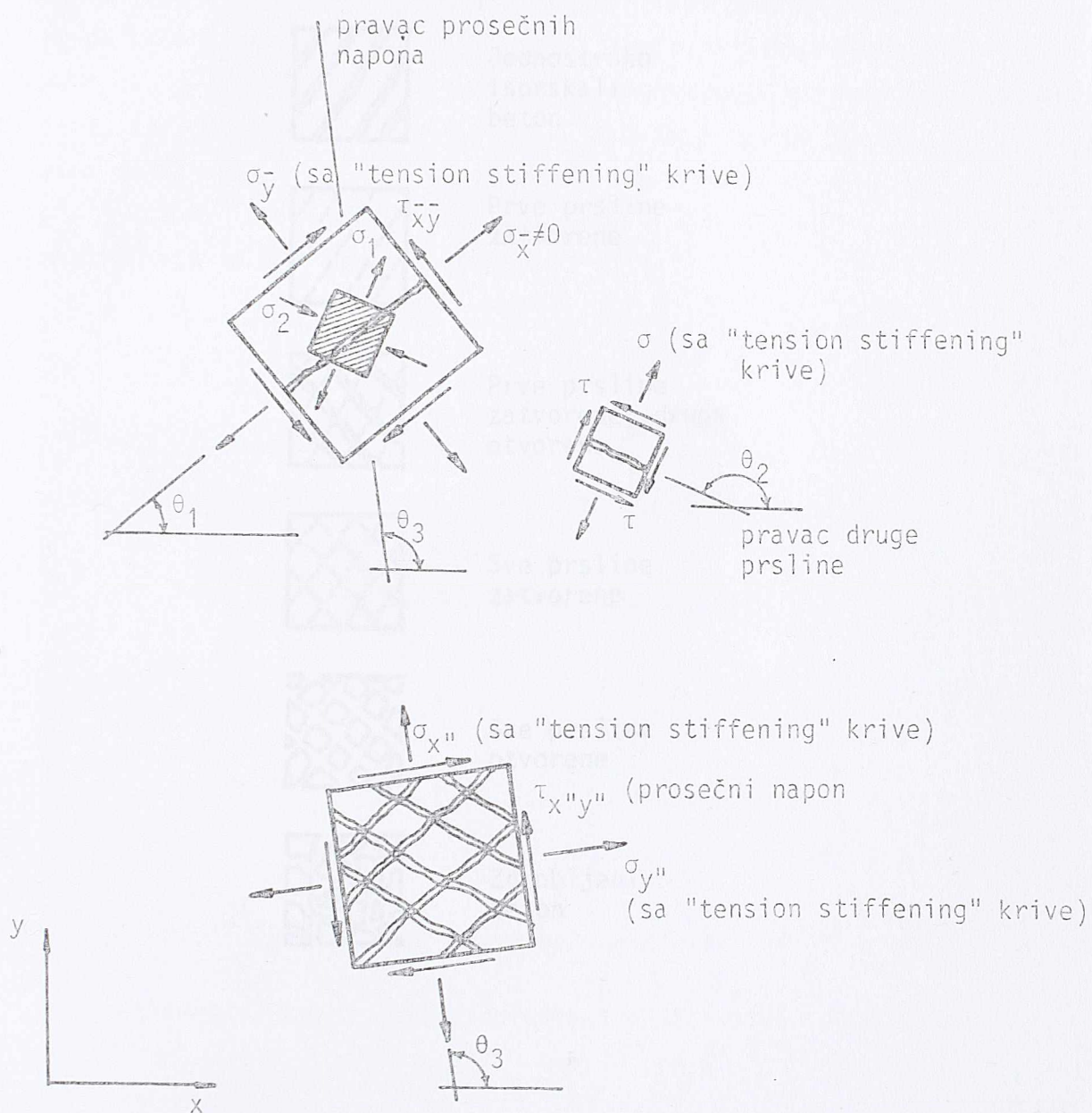
$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2} \quad (2.62)$$

gde su  $\theta_1$  i  $\theta_2$  uglovi između x-ose globalnog koordinatnog sistema i pravaca prvog odnosno drugog niza prslina. Stanje napona u dvostruko isprskalom betonu određuje se sračunavanjem vektora totalnih deformacija  $|\underline{\epsilon}_1|_{x''y''}^T = |\epsilon_{x''} \epsilon_{y''} \gamma_{x''y''}|$ , tako što se iz (2.61) određuje napon  $\tau_{x''y''}$  dok se  $\sigma_{x''}$  i  $\sigma_{y''}$  određuju iz "tension stiffening" krivih.

Za vreme iteracija u okviru nekog inkrementa opterećenja ili pri daljem opterećenju može usled preraspodele napona doći do delimičnog ili potpunog zatvaranja prslina. Na sl. 2.22 prikazani su slučajevi koji se mogu javiti pri analizi armiranobetonskih konstrukcija ovim modelom. Parametar kojim utvrdjujemo stanje prslina u isprskalom betonu je fiktivna dilatacija upravna na pravac prslina. Ako ova dilatacija ima negativnu vrednost smatra se da je prslina potpuno zatvorena. U tom slučaju vraća se u konstitutivne veze modul elastičnosti betona  $E_c$  u pravcu koji je upravna na pravac prslina, dok Poisson-ov efekat i dalje zanemarujemo. Ako se trenutna dilatacija normalna na pravac prslina smanjuje, ali je još uvek pozitivna, smatra se da je prslina delimično zatvorena. Do ove situacije dolazi kada je  $\epsilon_c < \epsilon_{ref}$  ( $\epsilon_c$  - trenutna dilatacija,  $\epsilon_{ref}$  - dilatacija određena u poslednjoj konvergentnoj konfiguraciji). U tom slučaju napon normalan na prslinu sračunavamo (vidi sl. 2.19) prema izrazu

$$\sigma = \frac{\sigma_{ref}}{\epsilon_{ref}} \cdot \epsilon_c \quad (2.63)$$

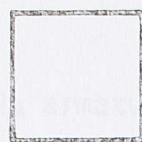




Slika 2.21. Naponi u dvostruko isprskalom betonu - prema referenci [2.30].

gde je  $\sigma_{ref}$  određujemo sa "tension stiffening" krive.

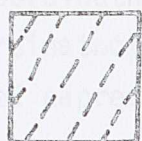




Neisprskali  
beton



Jednostruko  
isprskali  
beton



Prve prsline  
zatvorene



Prve prsline  
zatvorene, druge  
otvorene



Sve prsline  
zatvorene



Sve prsline  
otvorene



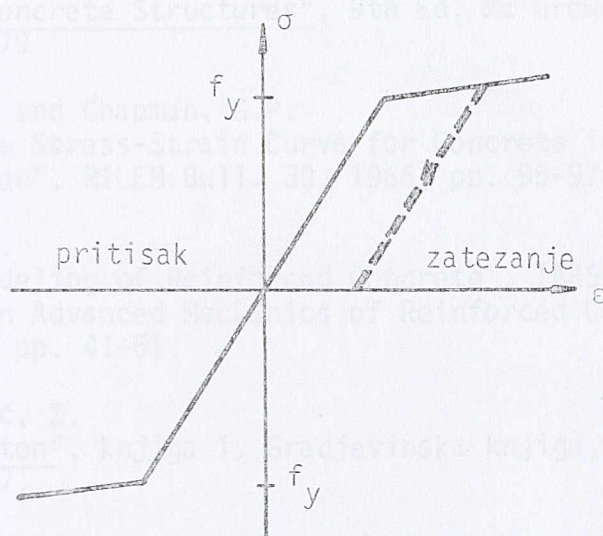
Zdrobljeni  
beton

S1. 2.22. Moguća stanja u modeliranju ponašanja betona



## 2.5.9. Modeliranje armature

U ovom modelu armatura je predstavljena preko čeličnih slojeva ekvivalentne debljine u kojima vlada jednoosijalno naponsko stanje. Stvarne naponsko-deformacijske krive za čelik (vidi sl. 2.8) idealizuju se krivom prikazanom na sl. 2.23. Znači ponašanje čelika se opisuje elasto-plastičnim modelom sa ojačanjem. Kako se pravac šipki armature u opštem slučaju ne poklapa sa pravcem globalnog koordinatnog sistema to se ponašanje čeličnog sloja prvo opisuje u lokalnom koordinatnom sistemu, pa se zatim prevodi u globalni sistem na način koji je već napred prikazan.



Sl. 2.23. Idealizovana kriva napon-deformacija za čelik

Inkrementalna veza napon-deformacija za čelični sloj glasi

$$\Delta\sigma_{\bar{x}} = E_s \cdot \Delta\epsilon_{\bar{x}} \quad (2.64)$$

gde je  $E_s$  modul elastičnosti čelika.

Kada napon u čeliku dostigne graničnu vrednost  $f_y$ , inkrementalna elasto-plastična veza napon-deformacija dobija se u obliku<sup>2.19</sup>

$$\Delta\sigma_{\bar{x}} = E_s \left| 1 - \frac{E_s}{E_s + H'} \right| \Delta\epsilon_{\bar{x}} \quad (2.65)$$

gde je  $H'$  parametar ojačanja za čelik.



## 2.6. LITERATURA

- 2.1 Kupfer, H., Hilsdorf, H.K. and Rusch, H.  
"Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses",  
J.ACI, Vol. 66, No. 8, 1969, pp. 656-666.
- 2.2 Mills, L.L. and Zimmerman, R.M.  
"Compressive Strength of Plain Concrete Under  
Multiaxial Loading Conditions", J.ACI, Vol. 67, M-10,  
1970, pp. 802-807.
- 2.3 Gerstle, K.H. et al.  
"Behaviour of Concrete Under Multiaxial Stress States",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 106, No. EM6, 1980,  
pp. 1383-1403.
- 2.4 Winter, G. and Nilson, A.H.  
"Design of Concrete Structures", 9th Ed. Mc Grow-Hill,  
New York, 1979
- 2.5 Hughes, B.P. and Chapman, G.P.  
"The Complete Stress-Strain Curve for Concrete in  
Direct Tension", RILEM Bull. 30, 1966, pp. 95-97.
- 2.6 Gerstle, K.H.  
"Material Modeling of Reinforced Concrete", IABSE  
Colloquium on Advanced Mechanics of Reinforced Concrete,  
Delft, 1981, pp. 41-61.
- 2.7 Radosavljević, Ž.  
"Armirani beton", knjiga 1. Gradjevinska knjiga,  
Beograd, 1977.
- 2.8 Chen, W.F.  
"Plasticity in Reinforced Concrete", Mc Graw-Hill, 1982
- 2.9 Ottosen, N.S.  
"A Failure Criterion for Concrete", J. Engng. Mech. Div.,  
ASCE, Vol. 103, No. EM4, 1977, pp. 527-535.
- 2.10 Popovics, S.  
"A Review of Stress-Strain Relationships for Concrete",  
J. ACI, Vol. 67, No. 3, 1970, pp. 243-248.
- 2.11 Cedolin, L., Crutzen, Y.R.J. and Dei Poli, S.  
"Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 103, No. EM3, 1977,  
pp. 423-439.
- 2.12 Bathe, K.J. and Ramaswamy, S.  
"On Three-Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures",  
Nuclear Engng. Design, Vol. 52, 1979, pp. 385-409.
- 2.13 Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H.  
"Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 99, No. EM4, 1973, pp. 853-866.



- 2.14 Chen, A.C.T. and Chen, W.F.  
"Constitutive Relations for Concrete",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 101, No. EM4, 1975,  
pp. 465-481.
- 2.15 Murray, D. et al.  
"Concrete Plasticity Theory for Biaxial Stress Analysis",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 105, No. EM6, 1979,  
pp. 989-1006.
- 2.16 Bažant, Z.P. and Bhat, P.D.  
"Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 102, No. EM4, 1976, pp. 701-722.
- 2.17 Bažant, Z.P. and Kim, S.S.  
"Plastic-Fracturing Theory for Concrete",  
J. Engng. Mech. Div., Vol. 105, No. EM3, 1979, pp. 407-428.
- 2.18 Owen, D.R.J. and Figueiras, J.A.  
"Ultimate Load Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells  
Including Geometric Nonlinear Effects", in  
"Finite Element Software for Plates and Shells"  
by E.Hinton and D.R.J. Owen (eds.), Pineridge Press, Swansea, 1984,  
pp. 327-396.
- 2.19 Owen, D.R.J. and Hinton, E.  
"Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice",  
Pineridge Press, Swansea, U.K., 1980
- 2.20 Floegl, H. and Mang, H.  
"On Tension Stiffening in Cracked Reinforced Concrete Slabs and  
Shells Considering Geometric and Physical Nonlinearity",  
Ingenieur-Archiv 51, 1981, pp. 215-242.
- 2.21 Gilbert, R.I. and Warner, R.F.  
"Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 104, ST12, 1978,  
pp. 1885-1900.
- 2.22 ASCE-ACI Task Committee 426:  
"The Shear Strength of Reinforced Concrete Members",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 99, No. ST6, 1973, pp. 1091-1187.
- 2.23 ASCE-ACI Task Committee 426:  
"The Shear Strength of Reinforced Concrete Members - Slabs",  
J. Struc. Div., ASCE, Vol. 100, No. ST8, 1974, pp. 1543-1591.
- 2.24 Hofbeck, J.A., Ibrahim, I.O. and Mattok, A.H.  
"Shear Transfer in Reinforced Concrete", ACI Journal, 1969,  
pp. 119-128.
- 2.25 Bresler, B. and Scordelis, A.C.  
"Shear Strength of Reinforced Concrete Beams", ACI Journal, 1963,  
pp. 51-73.
- 2.26 Cedolin, L. and Dei Poli, S.  
"Finite Element Studies of Shear-Critical R/C Beams",  
J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 103, No. EM3, 1977, pp. 395-410.



- 2.27 Bažant, P.Z. and Gambarova, P.  
"Rough Cracks in Reinforced Concrete",  
J. Struct. Div., ASCE, Vol. 106, No. ST4, 1980, pp. 819-842.
- 2.28 Faradis, M.N. and Buyukozturk, O.  
"Shear Stiffness of Concrete by Finite Elements",  
J. Struct. Div., ASCE, Vol. 106, No. ST6, 1980,  
pp. 1311-1327.
- 2.29 Bažant, P.Z. and Tsubaki, T.  
"Slip-Dilatancy Model for Cracked Reinforced Concrete",  
J. Struct. Div., ASCE, Vol. 106, No. ST9, 1980, pp. 1947-1966.
- 2.30 Abdel Rahman, H.H.  
"Computational Models for the Nonlinear Analysis of  
Reinforced Flexural Slab Systems",  
Ph. D. Thesis, University College of Swansea, University of Wales,  
1982.
- 2.31 de Borst, R. and Nauta, P.  
"Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model",  
Eng. Comput., Vol. 2, 1985, pp. 35-46.
- 2.32 Milford, R.V. and Schnobrich, W.C.  
"The Application of the Rotating Crack Model to the Analysis of  
Reinforced Concrete Shells", Comp. Structures, Vol. 20, No.1-3, 1985,  
pp. 225-234.



### 3. DISKRETIZACIJA PLOČE KONAČNIM ELEMENTIMA

#### 3.1. UVOD

U poslednje vreme uočava se značajan istraživački napor usmeren na formulisanje efikasnog i pouzdanog konačnog elementa ploče o čemu svedoči i veliki broj publikovanih radova iz te oblasti. Dva su osnovna razloga za povećan interes istraživača da se bave ovom problematikom. Prvi, činjenica da se mnoge inženjerske konstrukcije ili njihovi delovi mogu uspešno modelirati pločastim konačnim elementima i drugi, da proučavanje numeričkih karakteristika ovih elemenata predstavlja dragocenu osnovu za razvoj odgovarajućeg konačnog elementa ljuske.

U formulaciji konačnog elementa ploče uočavamo dva različita pristupa. Prvi je baziran na klasičnoj Kirchhoff-ovoj teoriji tankih ploča<sup>3.1</sup> u kojoj je uticaj smičućih sila na deformaciju klizanja zanemaren. U tom slučaju, varijaciona formulacija definiše funkcional koji sadrži druge izvode nepoznatih funkcija te je za potpun kontinuitet elementa potrebna jednakost i funkcije i njenih prvih izvoda -  $C(1)$  kontinuitet. Teškoće koje se javljaju pri zadovoljenju  $C(1)$  kontinuiteta dovele su do primene nekonformnih elemenata<sup>3.8-3.9</sup>, koji pod odredjenim uslovima mogu da daju zadovoljavajuće rezultate. U ranoj fazi razvoja konačnih elemenata ovaj pristup bio je dominantan. Drugi pristup u formulaciji konačnog elementa ploče polazi od strožije teorije ploča poznatije u literaturi kao Reissner/Mindlin-ova teorija<sup>3.2-3.7</sup>. Ova teorija obuhvata uticaj transverzalnih sila na deformaciju ploče a varijaciona formulacija zahteva samo  $C(0)$  kontinuitet nezavisnih interpolacionih funkcija. Dodatna prednost ovako formulisanog konačnog elementa ploče je i ta da se uspešno može primeniti kako u analizi tankih tako i debelih, sendvič i kompozitnih ploča. Ove činjenice dovele su do proširenja navedene formulacije i na teoriju ljuski što je rezultiralo razvojem tzv. degenerativnog elementa ljuske<sup>3.12</sup>. U novije vreme ovaj pristup je gotovo isključiv u razvoju novih konačnih elemenata ploča odnosno ljuski<sup>3.13-3.19</sup>.

Po načinu izbora osnovnih nepoznatih veličina pri formulaciji konač-



nog elementa ploče razlikujemo metodu deformacije, metodu sila i mešovitu ili hibridnu metodu<sup>3.20</sup>. U metodi deformacije polazi se od principa o minimumu potencijalne energije i za osnovne nepoznate usvajaju se kinematičke (deformacijske) veličine. Metoda deformacije je zbog svoje jednostavnosti i matematičke elegancije svakako najviše primenjivana metoda, ne samo u razvoju konačnog elementa ploče, već i uopšte u metodi konačnih elemenata. U metodi sila polazi se od principa o minimumu komplementarne energije a za osnovne nepoznate se usvajaju statičke veličine. Mešovita metoda zasniva se na varijacionom principu Hellinger-Reissner-a koji je funkcija i pomeranja i napona. Za razliku od metode sila koje se dosta retko primenjuje kod ploča primena mešovite/hibridne metode je u velikom porastu, osobito u poslednje vreme<sup>3.46-3.53</sup>.

Napred navedene činjenice daju objašnjenje zašto se najveći broj istraživača u formulaciji konačnog elementa ploče opredeljuje za metodu deformacije i Reissner/Mindlin-ovu teoriju ploča. Medjutim, kada se ovako formulisani elementi primene kod veoma tankih ploča ili ljuski, javlja se problem tačnosti odredjivanja matrice krutosti elementa, pogotovo kod elemenata sa nižim stepenom interpolacije. U tom slučaju ovi elementi su suviše kruti i dobijeni rezultati ne odgovaraju realnom ponašanju konstrukcija. Uzrok ove pojave poznate u literaturi kao "shear-locking" je preveliko učešće deformacije smicanja u ukupnoj energiji deformacije. Kao dodatna pojava kod ljuski se javlja "membrane-locking" kao posledica precenjenog učešća membranske krutosti u ukupnoj krutosti elementa. Fenomen "locking"-a je predmet intenzivnog proučavanja i čitav niz različitih postupaka za njegovo eliminisanje je predložen. Medjutim, uz najveći broj ovih postupaka javljaju se dodatne teškoće tako da možemo slobodno reći da je ovo polje naučnog istraživanja i dalje otvoreno.

U ovom poglavlju krenućemo od varijacione formulacije problema i prikazati standardnu izoparametarsku formulaciju Mindlin-ovog konačnog elementa ploče. Posle prikaza mogućih postupaka za otklanjanje pojave "locking"-a izložiće se formulacija novog konačnog elementa ploče zasnovanog na zamjenjujućem polju deformacije smicanja. Na kraju biće prikazane numeričke karakteristike elementa kao i njegova primena u statičkim i dinamičkim proračunima konstrukcija.



### 3.2. VARIJACIONA FORMULACIJA PROBLEMA

#### 3.2.1. Osnovne pretpostavke Mindlin-ove teorije ploča

Mindlin-ova teorija ploča<sup>3.7</sup>, koja uzima u obzir uticaj transverzalnih sila na deformaciju ploče, zasniva se na sledećim pretpostavkama:

- (a) pomeranja su mala u poredjenju sa debljinom ploče,
- (b) normalni naponi u ravnima paralelnim srednjoj ravni ploče, u poredjenju sa ostalim naponima su mali, tako da se mogu zanemariti i
- (c) linijski element ploče, koji je pre deformacije upravan na srednju ravan ploče, ostaje i posle deformacije prav i nepromenjene dužine, ali ne i upravan na deformisanu srednju ravan ploče.

Na osnovu treće pretpostavke sledi da su pomeranja  $w$  i obrtanja poprečnih preseka  $\theta_x$  i  $\theta_y$  medjusobno nezavisna, za razliku od klasične teorije ploča<sup>3.1</sup> gde su obrtanja data kao prvi izvodi pomeranja  $w$  po koordinatama  $x$  odnosno  $y$ . Stvarni raspored smičućih napona po debljini ploče takav je da dovodi do krivljenja poprečnog preseka (sl. 3.1). Medjutim, na osnovu ove pretpostavke umesto stvarne deformacije poprečnog preseka uvodimo prosečnu deformaciju, tako da poprečni presek ostaje prav, ali ne i upravan na deformisanu srednju ravan ploče. Prema tome, za opisivanje obrtanja svakog poprečnog preseka dovoljna je samo po jedna veličina. Na taj način Mindlin je trodimenzionalan problem sveo na područje dvodimenzionalne analize, pošto sve veličine zavise samo od dva argumenta.

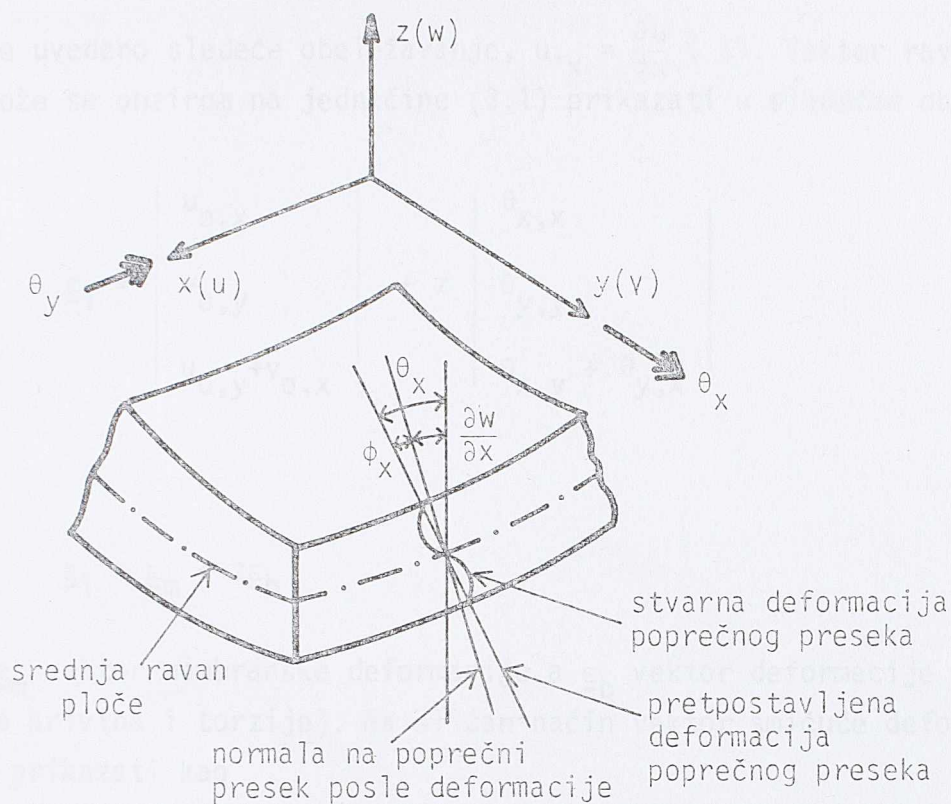
Na osnovu gore iznetih pretpostavki komponentalna pomeranja  $u$ ,  $v$  i  $w$  proizvoljne tačke ploče sa koordinatama  $(x,y,z)$  možemo izraziti kao

$$\begin{vmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x,y) + z\theta_x(x,y) \\ v_0(x,y) + z\theta_y(x,y) \\ w_0(x,y) \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

gde su  $u_0$ ,  $v_0$  i  $w_0$  pomeranja tačaka srednje ravni ploče ( $xy$  ravan) a  $\theta_x$  i  $\theta_y$



obrtanja normale u ravnima xz odnosno yz. Na sl. 3.1 prikazana je pozitivna konvencija uvedenih deformacijskih veličina.



Sl. 3.1. Deformacija poprečnog preseka u Mindlin-ovoj teoriji ploča

### 3.2.2. Veze između deformacija i pomeranja

Vektor deformacije možemo razdvojiti na vektor ravne deformacije  $\underline{\epsilon}_1$  i vektor smičuće deformacije  $\underline{\epsilon}_2$  koji su dati izrazima

$$\underline{\epsilon}_1 = \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{,x} + u_{,z} \\ w_{,y} + v_{,z} \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

i gde je uvedeno sledeće obeležavanje,  $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$  i sl. Vektor ravne deformacije  $\underline{\varepsilon}_1$  može se obzirom na jednačine (3.1) prikazati u sledećem obliku

$$\underline{\varepsilon}_1 = \begin{vmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

odnosno

$$\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_m + z\underline{\varepsilon}_b$$

gde je  $\underline{\varepsilon}_m$  vektor membranske deformacije a  $\underline{\varepsilon}_b$  vektor deformacije savijanja (promene krivina i torzije). Na sličan način vektor smičuće deformacije  $\underline{\varepsilon}_2$  može se prikazati kao

$$\underline{\varepsilon}_2 = \begin{vmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

### 3.2.3. Inkrementalne veze izmedju napona i deformacija

Vektor napona se takodje može razdvojiti na vektor  $\underline{\sigma}_1$  koji odgovara ravnom stanju napona i vektor  $\underline{\sigma}_2$  koji sadrži transverzalne smičuće napone. Inkrementalne veze napon-deformacija date su izrazima

$$\Delta \underline{\sigma}_1 = \underline{D}_1 \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_1 \quad (3.6)$$

$$\Delta \underline{\sigma}_2 = \underline{D}_2 \cdot \Delta \underline{\varepsilon}_2 \quad (3.7)$$

gde su

$$\Delta \underline{\sigma}_1 = (\Delta \sigma_x, \Delta \sigma_y, \Delta \tau_{xy})^T \quad (3.8)$$



$$\Delta \underline{\sigma}_2 = (\Delta \tau_{xz}, \Delta \tau_{yz})^T \quad (3.9)$$

inkrementalni vektori napona a matrice  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$  reprezentuju ponašanje materijala i zavisno od stanja u kome se on nalazi imaju različiti oblik (Poglavlje 2). Za slučaj elastičnog ponašanja materijala matrice  $\underline{D}_1$  i  $\underline{D}_2$  date su izrazima

$$\underline{D}_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

$$\underline{D}_2 = \begin{vmatrix} G/k & 0 \\ 0 & G/k \end{vmatrix} \quad (3.11)$$

gde je k-koeficijent pomoću koga se uzima u obzir uticaj napona smicanja na krivljenje preseka i za pune ploče uobičajno se uzima  $k=1.2$ .

### 3.2.4. Princip virtualnog rada i princip o

#### minimumu potencijalne energije

##### ELEMENTA PLOČE

Osnovne jednačine metode konačnih elemenata možemo izvesti polazeći ili od principa virtualnog rada ili koristeći stav o minimumu potencijalne energije sistema. Princip virtualnog rada, koji glasi da je algebarski zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na neko telo, pri virtualnim pomeranjima  $\delta u_i$  i odgovarajućim virtualnim deformacijama  $\delta \epsilon_{ij}$ , jednak nuli, može se prikazati izrazom

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ij} dV - \int_V \delta u_i F_i dV - \int_S \delta u_i p_i ds = 0 \quad (3.12)$$

Izraz (3.12) možemo napisati i u matričnom obliku kao

$$\int_V \delta \underline{\epsilon}_1^T \underline{\sigma}_1 dV + \int_V \delta \underline{\epsilon}_2^T \underline{\sigma}_2 dV - \int_V \delta \underline{u}^T \underline{F} dV - \int_S \delta \underline{u}^T \underline{p} ds = 0 \quad (3.13)$$

gde su

$$\underline{F} = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y)^T \quad - \text{vektor zapreminskih sila}$$

$$\underline{p} = (p_x, p_y, p_z, p_{mx}, p_{my})^T \quad - \text{vektor površinskih sila}$$

$$\underline{\delta u} = (\delta u, \delta v, \delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y)^T \quad - \text{vektor virtualnih pomeranja}$$

Ukupna potencijalna energija  $\pi$  tela jednaka je zbiru potencijalne energije deformacije i potencijalu sila, odnosno

$$\pi = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}_1^T \underline{D}_1 \underline{\varepsilon}_1 dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}_2^T \underline{D}_2 \underline{\varepsilon}_2 dV - \int_V \underline{u}^T \underline{F} dV - \int_S \underline{u}^T \underline{p} ds \quad (3.14)$$

Izrazom (3.14) potencijalna energija  $\pi$  prikazana je, obzirom na izraze (3.2) i (3.3), kao funkcija deformacijskih veličina i predstavlja funkcional Lagrange-a prikazan u matricnom obliku. Koristeći se principom o minimumu potencijalne energije sistema

$$\frac{\partial \pi}{\partial \underline{u}} = 0 \quad (3.15)$$

formiramo sistem uslovnih jednačina metode konačnih elemenata.

### 3.3. STANDARDNA FORMULACIJA MINDLIN-OVOG KONAČNOG ELEMENTA PLOČE

#### 3.3.1. Izoparametarska formulacija

Konačni elementi formulisani prema Mindlin-ovoj teoriji ploča imaju očitu prednost u odnosu na elemente zasnovane na klasičnoj teoriji tankih ploča. Naime, Mindlin-ovi elementi zahtevaju samo ispunjenje  $C(0)$  kontinuiteta pomeranja  $u$  i  $v$  u ravni ploče, ugiba ploče  $w$  i nezavisnih obrtanja poprečnih preseka  $\theta_x$  i  $\theta_y$ . Nasuprot tome elementi bazirani na klasičnoj teoriji tankih ploča zahtevaju zadovoljenje  $C(1)$  kontinuiteta, dakle ne samo  $u$ ,  $v$  i  $w$  već i parcijalni izvodi  $w_{,x}$  i  $w_{,y}$  moraju biti idealno kontinualni na granicama između pojedinih elemenata. Osim toga Mindlin-ovi elementi se mogu koristiti kako u proračunu tankih tako isto i debelih, sendvič i kompozitnih ploča. U sledećem ćemo prikazati standardnu izoparametarsku formulaciju Mindlin-ovog konačnog elementa ploče.



U opštem slučaju konačnog elementa sa  $n$  čvorova polje pomeranja  $\underline{u}$  unutar elementa može se prikazati kao

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ili

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^n N_i \underline{a}_i$$

gde su,

$\underline{a}_i = (u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi})^T$  - vektor pomeranja koji odgovara čvoru  $i$

$N_i = N_i(\xi, \eta)$  - interpolacione funkcije (funkcije oblika) pridružene čvoru  $i$

Imajući u vidu jednačine (3.4), (3.5) i (3.16) vektore ravne deformacije  $\underline{\varepsilon}_1$  i smičuće deformacije  $\underline{\varepsilon}_2$  možemo prikazati u sledećem obliku

$$\underline{\varepsilon}_1 = \sum_{i=1}^n \underline{B}_{1i} \underline{a}_i \quad (3.17)$$

$$\underline{\varepsilon}_2 = \sum_{i=1}^n \underline{B}_{2i} \underline{a}_i \quad (3.18)$$

Matrice  $\underline{B}_{1i}$  i  $\underline{B}_{2i}$  uspostavljaju vezu izmedju deformacija i pomeranja, odnose se na čvor  $i$  i imaju sledeću strukturu

$$\underline{B}_{1i} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{mi} \\ \underline{B}_{bi} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

gde je

$$\underline{B}_{mi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

izracunavanje u sistemu lokalnih koordinata, iznosi

$$\underline{B}_{-2i} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

Izvodi funkcija oblika  $N_i$  po koordinatama  $x$  i  $y$  mogu se prikazati na sledeći način

$$N_{i,x} = N_{i,\xi} \cdot \xi_{,x} + N_{i,\eta} \cdot \eta_{,x} \quad (3.22)$$

$$N_{i,y} = N_{i,\xi} \cdot \xi_{,y} + N_{i,\eta} \cdot \eta_{,y}$$

U standardnoj izoparametarskoj formulaciji koristimo iste interpolacione funkcije  $N_i$  za opisivanje polja pomeranja i za opisivanje geometrije elementa. Stoga važi

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

gde su  $x_i$  i  $y_i$  koordinate čvora  $i$ . U tom slučaju Jacobian-ova matrica transformacije glasi

$$\underline{J} = \begin{vmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,\xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} x_i & \sum_{i=1}^n N_{i,\eta} y_i \end{vmatrix} \quad (3.24)$$

Inverzna matrica Jacobian-ove matrice transformacije data je izrazom

$$\underline{J}^{-1} = \begin{vmatrix} \xi_{,x} & \eta_{,x} \\ \xi_{,y} & \eta_{,y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det \underline{J}} \begin{vmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{vmatrix} \quad (3.25)$$

gde je  $\det \underline{J}$  determinanta Jacobian-ove matrice. Prema tome, koristeći izraze (3.22) i (3.25) možemo sračunati izvode interpolacionih funkcija u sistemu globalnih koordinata. Integracija po zapremini krivolinijskog elementa u sistemu globalnih koordinata, prevodi se na poznat način, pomoću  $\det \underline{J}$  na inte-



graciju u sistemu lokalnih koordinata, odnosno

$$dV = (dx \cdot dy)dz = (\det \underline{J} d\xi d\eta)dz \quad (3.26)$$

Koristeći izraz za virtualni rad (3.13), linearne veze napon-deformacija (3.6) i (3.7), vektor pomeranja dat izrazom (3.16) i veze deformacija-pomeranje (3.17) i (3.18), dobijamo sledeći sistem linearnih jednačina

$$\sum_j \underline{K}_{ij} \underline{a}_j - \underline{f}_i = 0 \quad (3.27)$$

Do sistema jednačina (3.27) možemo doći i polazeći od potencijalne energije sistema  $\pi$  uz uslov (3.15) o minimumu iste. Submatrica  $\underline{K}_{ij}$ , matrice krutosti  $\underline{K}$ , koja povezuje čvorove  $i$  i  $j$  može se prikazati kao

$$\underline{K}_{ij} = |\underline{K}_1|_{ij} + |\underline{K}_2|_{ij} \quad (3.28)$$

gde  $|\underline{K}_1|_{ij}$  odgovara deformacionoj energiji savijanja i  $|\underline{K}_2|_{ij}$  potiče od deformacione energije smicanja.

### 3.3.2. Proračun matrice krutosti elementa

Slično izrazu (3.28) submatrica  $\underline{K}_{ij}^e$ , matrice krutosti elementa  $K^e$ , koja povezuje čvorove  $i$  i  $j$  može se prikazati u obliku

$$\underline{K}_{ij}^e = |\underline{K}_1^e|_{ij} + |\underline{K}_2^e|_{ij} \quad (3.29)$$

gde su

$$|\underline{K}_1^e|_{ij} = \int_V \underline{B}_{1i}^T \underline{D}_1 \underline{B}_{1j} dV \quad (3.30)$$

$$|\underline{K}_2^e|_{ij} = \int_V \underline{B}_{2i}^T \underline{D}_2 \underline{B}_{2j} dV \quad (3.31)$$

Obzirom na strukturu matrice  $\underline{B}_{1i}$ , (3.19) i (3.20), matrica  $|\underline{K}_1^e|_{ij}$  može se prikazati kao

$$|K_1^e|_{ij} = \begin{vmatrix} |K_{mm}^e|_{ij} & |K_{mb}^e|_{ij} \\ |K_{bm}^e|_{ij} & |K_{bb}^e|_{ij} \end{vmatrix} \quad (3.32)$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} |K_{mm}^e|_{ij} &= \int_V \underline{B}_{mi}^T \underline{D}_1 \underline{B}_{mj} dV = \int_A \underline{B}_{mi}^T \left( \int_{-t/2}^{+t/2} \underline{D}_1 dz \right) \underline{B}_{mj} dA = \\ &= \int_A \underline{B}_{mi}^T \underline{D}_{mm} \underline{B}_{mj} dA \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} |K_{mb}^e|_{ij} &= \int_V \underline{B}_{mi}^T z \underline{D}_1 \underline{B}_{bj} dV = \int_A \underline{B}_{mi}^T \left( \int_{-t/2}^{+t/2} z \underline{D}_1 dz \right) \underline{B}_{bj} dA = \\ &= \int_A \underline{B}_{mi}^T \underline{D}_{mb} \underline{B}_{bj} dA \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} |K_{bm}^e|_{ij} &= \int_V \underline{B}_{bi}^T z \underline{D}_1 \underline{B}_{mj} dV = \int_A \underline{B}_{bi}^T \left( \int_{-t/2}^{+t/2} z \underline{D}_1 dz \right) \underline{B}_{mj} dA = \\ &= \int_A \underline{B}_{bi}^T \underline{D}_{bm} \underline{B}_{mj} dA \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} |K_{bb}^e|_{ij} &= \int_V \underline{B}_{bi}^T z^2 \underline{D}_1 \underline{B}_{bj} dV = \int_A \underline{B}_{bi}^T \left( \int_{-t/2}^{+t/2} z^2 \underline{D}_1 dz \right) \underline{B}_{bj} dA = \\ &= \int_A \underline{B}_{bi}^T \underline{D}_{bb} \underline{B}_{bj} dA \end{aligned} \quad (3.36)$$

Na sličan način  $|K_2^e|_{ij}$  može se prikazati kao

$$\begin{aligned} |K_2^e|_{ij} &= \int_V \underline{B}_{2i}^T \underline{D}_2 \underline{B}_{2j} dV = \int_A \underline{B}_{2i}^T \left( \int_{-t/2}^{+t/2} \underline{D}_2 dz \right) \underline{B}_{2j} dA = \\ &= \int_A \underline{B}_{2i}^T \underline{D}_{ss} \underline{B}_{2j} dA \end{aligned} \quad (3.37)$$

Imajući u vidu da se konačni element ploče po visini poprečnog preseka sastoji iz niza betonskih i čeličnih slojeva, koji aproksimiraju armaturu, pri integraciji po debljini ploče moramo sumirati doprinos svih ovih slojeva. Stoga se konstitutivne matrice  $\underline{D}_{mm}$ ,  $\underline{D}_{mb}$ ,  $\underline{D}_{bm}$ ,  $\underline{D}_{bb}$  i  $\underline{D}_{ss}$  mogu sračunati kao

$$\underline{D}_{mm} = \int_{-t/2}^{+t/2} \underline{D}_1 dz = \sum_{i=1}^{n_c} |D_1|_i t_i + \sum_{j=1}^{n_s} |D_1|_j t_j \quad (3.38)$$

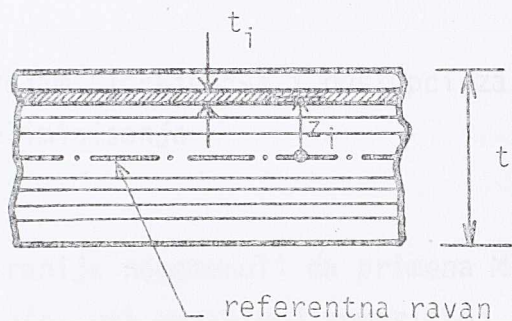


$$\underline{D}_{mb} = \underline{D}_{bm} = \int_{-t/2}^{+t/2} z \underline{D}_1 dz = \sum_{i=1}^{n_c} |\underline{D}_1|_i z_i t_i + \sum_{j=1}^{n_s} |\underline{D}_1|_j z_j t_j \quad (3.39)$$

$$\underline{D}_{bb} = \int_{-t/2}^{+t/2} z^2 \underline{D}_1 dz = \sum_{i=1}^{n_c} |\underline{D}_1|_i z_i^2 t_i + \sum_{j=1}^{n_s} |\underline{D}_1|_j z_j^2 t_j \quad (3.40)$$

$$\underline{D}_{ss} = \int_{-t/2}^{+t/2} \underline{D}_2 dz = \sum_{i=1}^{n_c} |\underline{D}_2|_i t_i \quad (3.41)$$

gde  $n_c$  i  $n_s$  predstavljaju ukupan broj betonskih i čeličnih slojeva respektivno,  $z_i$  je odstojanje od središta  $i$ -tog sloja do srednje ravne ploče a  $t_i$  je debljina  $i$ -tog sloja (sl. 3.2).



Sl. 3.2. Slojevita diskretizacija po visini poprečnog preseka ploče

Obzirom na izraz (3.26) elementi submatrice  $\underline{K}_{ij}^e$ , matrice krutosti elementa, mogu se prikazati kao

$$|\underline{K}_{mm}^e|_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_{mi}^T \underline{D}_{mm} \underline{B}_{mj} \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (3.42)$$

$$|\underline{K}_{mb}^e|_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_{mi}^T \underline{D}_{mb} \underline{B}_{bj} \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (3.43)$$

$$|\underline{K}_{bm}^e|_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_{bi}^T \underline{D}_{bm} \underline{B}_{mj} \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (3.44)$$

$$|\underline{K}_{bb}^e|_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_{bi}^T \underline{D}_{bb} \underline{B}_{bj} \det \underline{J} d\xi d\eta \quad (3.45)$$

$$|K_{22}^e|_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_{2i}^T \underline{D}_{ss} \underline{B}_{2j} \det \underline{J} \, d\xi d\eta \quad (3.46)$$

čime je sračunavanje integrala u sistemu globalnih koordinata prevedeno na sračunavanje odgovarajućih integrala u sistemu lokalnih prirodnih koordinata, koje se kreću u granicama od  $-1$  do  $+1$ . Integrali dati izrazima (3.42)–(3.46) mogu se jednostavno sračunati koristeći Gauss-Legendre-ov postupak numeričke integracije. Medjutim tačna numerička integracija često dovodi do pojave "locking"-a o čemu će biti reči u sledećem odeljku.

### 3.4. FORMULACIJA NOVOG KONAČNOG ELEMENTA PLOČE

#### 3.4.1. Pojam "locking"-a i postupci za njegovo eliminisanje

Već smo ranije napomenuli da primena Mindlin-ovog konačnog elementa kod veoma tankih ploča, pri egzaktnoj numeričkoj integraciji matrice krutosti elementa, dovodi do pogrešnih rezultata. Ova pojava, nazvana "locking", posledica je prevelikog učešća deformacije smicanja u ukupnoj energiji deformacije i nesposobnosti elementa da realno opiše ponašanje ploče u domenu Kirchhoff-ove teorije tankih ploča. Fenomen "locking"-a jednostavno je objasniti razmatrajući izraz za potencijalnu energiju deformacije  $\pi_e$ , elementa konstantne debljine  $t$ , kod koga su uprošćenja radi zanemarena pomeranja u ravni ploče.

$$\pi_e = \frac{1}{2} \int_A \underline{\varepsilon}_b^T \underline{D}_{bb} \underline{\varepsilon}_b \, dA + \frac{1}{2} \int_A \underline{\varepsilon}_s^T \underline{D}_{ss} \underline{\varepsilon}_s \, dA \quad (3.47)$$

gde su

$$\underline{\varepsilon}_b = \begin{pmatrix} \theta_{x,x} \\ \theta_{y,y} \\ \theta_{x,y} + \theta_{y,x} \end{pmatrix}, \quad \underline{\varepsilon}_s = \begin{pmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{pmatrix}$$

$$\underline{D}_{bb} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}, \quad \underline{D}_{ss} = \frac{Et}{2k(1+\nu)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Preuredjenjem izraza (3.47) dobijamo

$$\pi_e = \frac{t^3}{2} \left| \int_A \underline{\underline{\epsilon}}_b^T \hat{\underline{\underline{D}}}_{bb} \underline{\underline{\epsilon}}_b dA + \alpha \int_A \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_s^T \hat{\underline{\underline{D}}}_{ss} \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_s dA \right| \quad (3.48)$$

gde su  $\alpha = \left(\frac{L}{t}\right)^2$ ,  $L$  - karakteristična dužina elementa

$$\hat{\underline{\underline{D}}}_{bb} = \frac{1}{t^3} \underline{\underline{D}}_{bb}, \quad \hat{\underline{\underline{D}}}_{ss} = \frac{1}{t} \underline{\underline{D}}_{ss}, \quad \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}_s = \frac{1}{L} \underline{\underline{\epsilon}}_s$$

Prvi član u izrazu (3.48) odnosi se na energiju deformacije savijanja a drugi član istog izraza na energiju deformacije smicanja. Očigledno, da faktor  $\alpha = \left(\frac{L}{t}\right)^2$  za veoma tanke ploče postaje jako veliki, odnosno  $\alpha \rightarrow \infty$  kada  $t \rightarrow 0$ , zbog čega mora biti ispunjeno da  $\underline{\underline{\epsilon}}_s \rightarrow \underline{\underline{0}}$  kada  $t \rightarrow 0$ . Drugim rečima, analitičko rešenje Mindlin-ove teorije ploča mora da konvergira prema rešenju Kirchhoff-ove teorije tankih ploča, kada se debljina ploče smanjuje. Razmatrajući sada diskretizaciju ploče konačnim elementima zaključujemo da interpolacione funkcije za  $w$ ,  $\theta_x$  i  $\theta_y$  moraju tako da budu izabrane da zadovolje uslov

$$\left| \begin{array}{c} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{array} \right| \rightarrow \underline{\underline{0}} \quad (3.49)$$

za slučaj tankih ploča. Ako uslov dat izrazom (3.49) nije zadovoljen dolazi do povećanja greške u članu koji se odnosi na energiju deformacije smicanja i to proporcionalno faktoru  $\alpha$ , pa se dobija elemenat koji je previše krut i nije u stanju da reprezentuje stvarno ponašanje ploče. Iz izraza (3.48) jasno sledi da je "locking" osobina elementa, tačnije odnosa  $L/t$ , ali i drugi faktori, naprimera distorzija elementa, mogu biti od presudnog značaja za njegovo ponašanje.

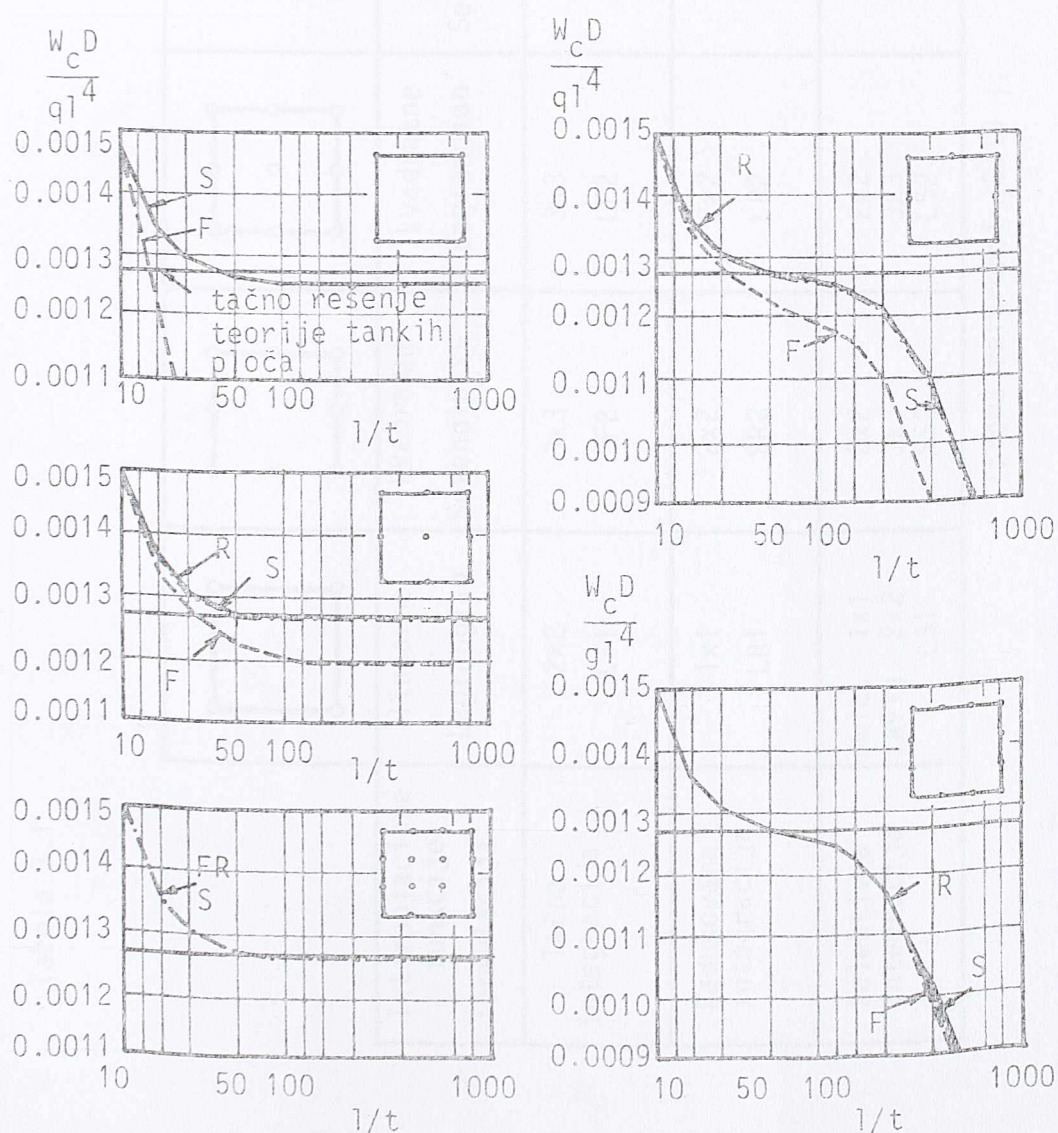
U cilju eliminisanja problema "shear-locking"-a predložen je niz manje ili više efikasnih postupaka koje ćemo u sledećem ukratko izložiti.

(1) Jedan od jednostavnih postupaka je primena elemenata sa visokim stepenom interpolacije polja pomeranja. Veoma uspešno se u tom smislu pokazao Lagrange-ov bikubni elemenat sa 16 čvorova<sup>3.42, 3.44</sup>. Medjutim, veliki utrošak mašinskog vremena potrebnog za proračun matrice krutosti ovoga elementa limitirajući je faktor za njegovu upotrebu u praktičnim problemima.

(2) Drugi efikasan pristup problemu "locking"-a je primena redukovane i selektivne integracije<sup>3.28-3.35</sup>. Redukovanu integraciju prvi je uveo Zienkiewicz i




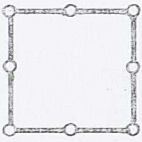
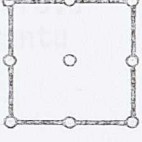
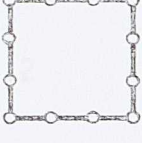
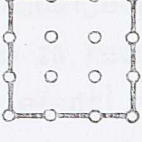
i ostali<sup>3.28</sup> primenjujući Gauss-ovu integraciju 2x2 na Serendipity elementu sa 8 čvorova. Primena redukovane integracije u mnogim slučajevima poboljšava ponašanje elementa, ali dovodi do formiranja matrice krutosti elementa čiji je rang niži od stvarnog, odnosno do pojave suvišnih nultih svojstvenih oblika, čiji je broj veći od onog koji odgovara krutom telu. Da bi se eliminisala ova pojava uvedena je selektivna integracija<sup>3.32</sup>, pri čemu se niži red integracije primenjuje na deo koji potiče od deformacije smicanja dok se na preostali deo (deformacija savijanja) primenjuje tačna integracija. Tabela 3.1 prikazuje red integracija za matricu krutosti elementa, za slučaj redukovane i selektivne integracije Serendipity i Lagrange-ovih konačnih elemenata ploče sa različitim brojem čvorova. Na sl. 3.3 prikazano je ponašanje kvadratne



Sl. 3.3. "Locking"-test za Lagrangian-ove i Serendipity elemente (prema referenci [3.30])



Tabela 3.1

					
Interpolacione funkcije formulacija	linearne Lagrangian	kvadratne Serendipity	kvadratne Lagrangian	kubne Serendipity	kubne Lagrangian
Tačna integracija	2x2 LF1	3x3 SF2	3x3 LF2	4x4 SF3	4x4 LF3
Redukovana integracija	1x1 LR1	2x2 SR2	2x2 LR2	3x3 SR3	3x3 LR3
Selektivna integracija	smic. 1x1 savij. 2x2 LS1	2x2 3x3 SS2	2x2 3x3 LS2	3x3 4x4 SS3	3x3 4x4 LS3

(prema referenci [3.19])



ploče, uklještene po konturi i opterećene jednako podeljenim opterećenjem a aproksimirane mrežom od 8x8 konačnih elemenata. Rezultati ove analize, sprovedene za elemente sa 4, 8, 9, 12 i 16 čvorova koristeći tačku, redukovanu i selektivnu integraciju, upoređeni su sa analitičkim rešenjem teorije tankih ploča. Sa sl. 3.3 lako je uočiti da Lagrange-ovi elementi sa selektivnom integracijom daju najbolje rezultate. U Tabeli 3.2 dat je broj nultih energetskih modova uporedno za redukovanu i selektivnu integraciju, odakle vidimo da Lagrangian-ovi elementi imaju i pri selektivnoj integraciji suvišan broj nultih energetskih modova i to, linearni element dva a elementi višeg reda interpolacije po jedan.

Tabela 3.2

Broj čvorova po elementu	Broj nultih energetskih modova matrice krutosti elementa		
	tačna integracija	redukovana integracija	selektivna integracija
4	3	7	5
8	3	4	3
9	3	7	4
12	3	3	3
16	3	7	4

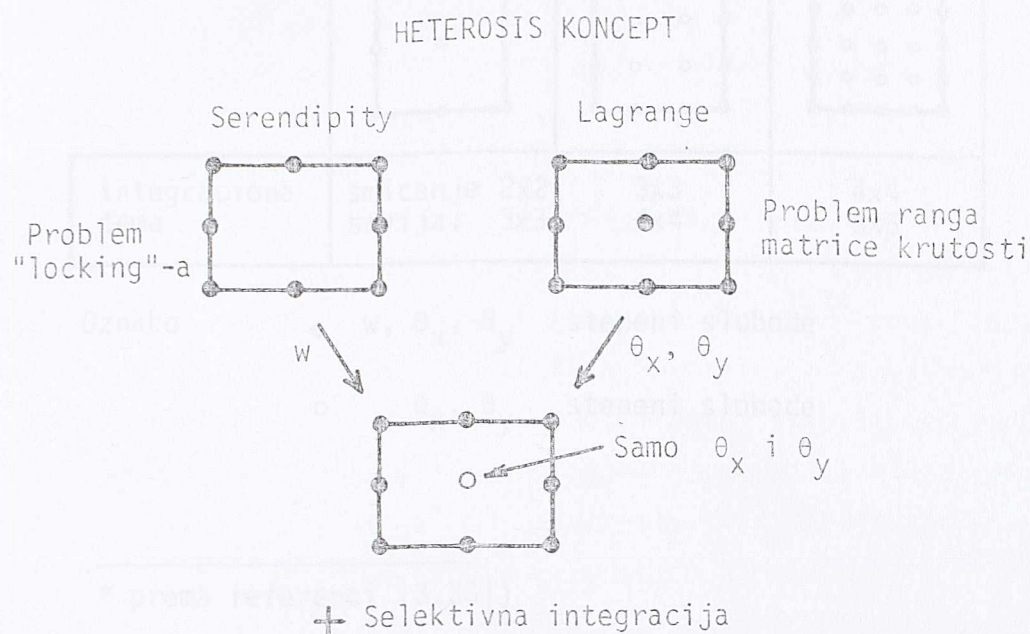
(prema referenci [3.19])

Postojanje suvišnih energetskih modova mora se uvek sa oprezom prihvatiti jer primena selektivne integracije može dovesti do nerealnih rezultata pri određenim graničnim uslovima.

(3) Veoma efikasna familija elemenata sa selektivnom integracijom jesu "heterosis" elementi<sup>3.33,3.35</sup> koje je razvio Hughes sa saradnicima. Osnovna ideja u razvoju "heterosis" elementa sa 9-čvorova jeste da se suvišni energetski mod koji poseduje LS2 element može eliminisati ako se za w-interpolacione funkcije iskoriste Serendipity funkcije elementa sa 8 čvorova. Na taj način dobijen je element kod koga su rotacije  $\theta_x$  i  $\theta_y$  opisane Lagrange-ovim interpolacionim funkcijama elementa sa 9 čvorova a pomeranje w Serendipity funkcijama elementa sa 8 čvorova. Ovaj element ima poboljšane karakteristike u odnosu na elemente iz kojih je nastao, pri selektivnoj integraciji prolazi "locking"-test i za razliku od LS2 elementa matrica krutosti ima korektan rang. Na sl.



3.4 prikazan je koncept formiranja baznog "heterosis" elementa.



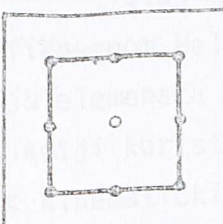
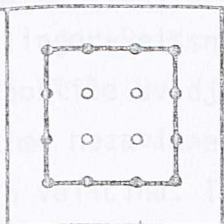
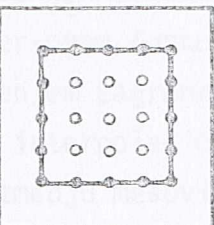
Sl. 3.4. Šematski prikaz formiranja "heterosis" elementa (prema referenci [3.35])

U praktičnim primenama "heterosis" elementa sa 9 čvorova najčešće se primenjuje hijerarhijski koncept koji nam omogućava da sa malim izmenama u ulaznim podacima možemo koristiti u istom programu:

- a) Serendipity element sa 8 čvorova (svi stepeni slobode u čvoru 9 su sprečeni)
- b) Lagrange-ov element sa 9 čvorova (svi stepeni slobode u čvoru 9 su ostavljeni slobodni)
- c) heterosis element (vertikalno pomeranje u čvoru 9 -  $w_9^e$  je sprečeno)

Ovaj koncept može se proširiti i na kubne i elemente višeg reda što pokazuje Tabela 3.3.

Tabela 3.3\*

			
integraciona šema	smicanje 2x2 savija. 3x3	3x3 4x4	4x4 5x5

Oznake      ●  $w, \theta_x, \theta_y$     stepeni slobode  
                  ○       $\theta_x, \theta_y$     stepeni slobode

\* prema referenci [3.35]

(4) Alternativni pristup rešenju problema "locking"-a baziran je na konceptu stabilizirajućih matrica koji su predložili Belytschko, Liu i ostali<sup>3.36-3.39</sup>. Ovaj postupak svodi se na uvođenje generalisanih deformacija, izazvanih suvišnim kinematičkim modovima, koje u slučaju pomeranja elementa kao krutog tela iščezavaju. Rezultat je stabilizirajuća matrica krutosti, koja kontroliše suvišne modove, a dodaje se matrici krutosti elementa, formiranoj redukovanom integracijom, radi zadržavanja korektnog ranga. Postupak je uspešan, ali dosta komplikovan za praktične primene, pogotovu što je potrebno u svakom posebnom slučaju definisati jasno fizičko značenje stabilizirajućih faktora, generalisanih deformacija, napona i konstitutivnih veza.

(5) Jedan od uspešnih pristupa u formulaciji elemenata tankih ploča je primena diskretne Kirchhoff-ove teorije<sup>3.40-3.45</sup>. Ovaj pristup zasnovan je na pretpostavci zanemarenja energije deformacije smicanja u funkcionalu ukupne energije. Kako je u tom slučaju, prema izrazu (3.47), energija deformacije savijanja prikazana samo preko prvih izvoda rotacija  $\theta_x$  i  $\theta_y$ , potrebno je dovesti u vezu rotacije normala srednje površi sa ugibom  $w$  koji se ne pojavljuje u pomenutom izrazu. Dodatni uslovi kojima se ova veza ostvaruje jesu: deformacije smicanja jednake su nuli u odredjenim diskretnim tačkama elementa. Na taj na-



čin ispunjena je Kirchhoff-ova hipoteza samo u izabranim tačkama a ne u celom području elementa.

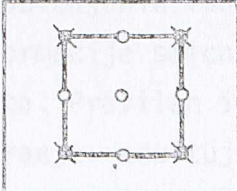
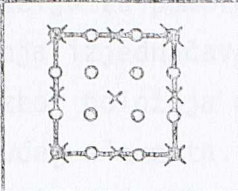
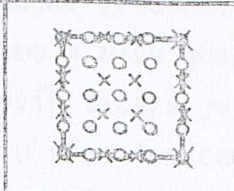
(6) U formulaciji konačnih elemenata ploča i ljuski često se primenjuje mešoviti/hibridni metod<sup>3.46-3.53</sup>. Ovaj metod zasniva se na Hellinger-Reissner-ovom funkcionalu ili modifikovanom Hellinger-Reissner-ovom funkcionalu, kod koga se kontinuitet između elemenata postiže uvodjenjem Lagrange-ovih parametara. U mešovitoj formulaciji koristimo nezavisne interpolacione funkcije za polje statičkih i polje kinematičkih veličina. Između mešovitih konačnih elemenata baziranih na modifikovanom Hellinger-Reissner-ovom funkcionalu i konačnih elemenata metode deformacije dobijenih selektivnom integracijom moguće je uspostaviti jednakost. To su pokazali Hinton i Owen za linijski element<sup>3.54</sup>, odnosno Malkus i Hughes za element ploče<sup>3.55</sup>. Ova jednakost je veoma značajna iz više razloga; selektivna integracija dobija svoje teorijsko objašnjenje a postupci razvijeni za mešoviti metod, kao što su dokaz konvergencije, procena greške i slično, mogu se uspešno primeniti i kod selektivno integrisanih elemenata. Posledica ove jednakosti je i verifikacija upotrebe postupka ekstrapolacije lokalnih napona u konačnim elementima<sup>3.56,3.57</sup>. U ovom postupku se vrednosti transverzalnih sila iz integracionih tačaka, gde su najtačnije određene, ekstrapoliraju unutar svakog elementa. Čvorne vrednosti sila dobijamo kao prosečnu vrednost doprinosa iz elemenata koji se susstiču u tom čvoru. Ako vrednosti sila u integracionim tačkama shvatimo kao nepoznate u mešovitoj formulaciji tada je raspodela sila dobijena ekstrapolacijom identična sa funkcijom raspodele transverzalnih sila u mešovitoj metodi.

(7) Kao osnovu za formulaciju efikasnog Mindlin-ovog konačnog elementa ploče Hughes<sup>3.60</sup> uvodi pojam "Kirchhoff-mode" kriterijuma. Pošto su prema Kirchhoff-ovoj teoriji ploča rotacije normala prvi izvodi ugiba ploče to se one ne mogu smatrati kao nezavisne veličine. Osnovna ideja gore pomenutog kriterijuma je da se izaberu takve interpolacione funkcije koje zadovoljavaju Kirchhoff-ove uslove u celom području elementa. Prema "Kirchhoff mode" kriterijumu interpolacione funkcije koje opisuju ugibe moraju biti za stepen više od funkcija koje opisuju rotacije. Jasno ovo uslovljava ne samo različite interpolacione polinome za ugibe i rotacije već i različit raspored čvorova u kojima su nepoznati ugibi odnosno rotacije normala (vidi Tabelu 3.4). Ovi elementi sa različitim šemama čvorova su nepogodni za praktičnu primenu, iako efikasno eliminišu problem "locking"-a.

Na osnovu preghodnog izlaganja moguće je izdvojiti osnovne karaktere-



Tabela 3.4.

			
$w$ (interpolacioni polinomi)	bikvadratni	bikubni	četvrtog stepena u dva pravca
$\theta$	bilinearni	bikvadratni	bikubni
Tačnost u odnosu na "Kirchhoff-modes"	kvadratne	kubna	četvrtog stepena

(prema referenci [3.60])

ristike koje bi trebalo da poseduje idealan Mindlin-ov konačni element ploče:

- Element mora da bude tako formulisan da u slučaju tankih ploča ne dodje do "locking"-a.
- Element ne može da sadrži suvišne nulte energetske modove.
- Element mora da zadovoljava uobičajene uslove konvergencije.
- Formulacija elementa ne može da se bazira na nekim unapred odredjenim numeričkim faktorima.
- Element treba da omogući dobijanje što tačnijih statičkih i deformacijskih veličina a da bude čim manje osetljiv na distorziju.
- Element treba da bude formulisan tako da omogući jednostavnu i efikasnu primenu.

### 3.4.2. Zamenjujuće polje deformacije smicanja

Jedan od veoma uspešnih postupaka za eliminisanje pojave "shear locking"-a jeste i primena elemenata sa zamenjujućim poljem deformacije smicanja. Ovu ideju, koja potiče od MacNeal-a<sup>3.59</sup>, koristilo je više autora<sup>3.60-3.71</sup> formulišući konačne elemente ploča odnosno ljuski, koji je u manjoj ili većoj



meri zadovoljavaju napred iznete uslove idealnog Mindlin-ovog elementa. Suština postupka je u primeni nezavisnih interpolacionih funkcija za smičuće deformacije, pored već uobičajenih funkcija za pomeranja. Vrednosti zamjenjujućeg i stvarnog polja deformacije smicanja izjednačavamo u nizu unapred izabranih tačaka unutar elementa. Pravilan izbor položaja ovih tačaka je od presudnog značaja za uspešno formiranje rezultujućeg elementa. U sledećem ćemo prikazati formulaciju Mindlin-ovog konačnog elementa ploče sa 9 čvorova i poboljšanom interpolacijom smičućih deformacija (QUAD9\*)<sup>3.71</sup>, a slična formulacija važi i za ostale elemente iz ove familije<sup>3.67</sup>.

U slučaju tankih ploča vektor smičućih deformacija mora da teži nuli, odnosno važi relacija (3.49)

$$\begin{vmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{,x} + \theta_x \\ w_{,y} + \theta_y \end{vmatrix} \rightarrow \underline{0}$$

Ova relacija mora biti zadovoljena i u sistemu prirodnih koordinata tako da važi

$$\begin{vmatrix} \gamma_{\xi\zeta} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_{,\xi} + \theta_{\xi} \\ w_{,\eta} + \theta_{\eta} \end{vmatrix} \rightarrow \underline{0} \quad (3.50)$$

Za Lagrange-ov element sa 9 čvorova polja pomeranja i rotacija prikazana su sledećim polinomima

$$\begin{aligned} w &= a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\xi^2 + a_6\eta^2 + a_7\xi^2\eta + a_8\xi\eta^2 + a_9\xi^2\eta^2 \\ \theta_{\xi} &= b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\eta^2 + b_7\xi^2\eta + b_8\xi\eta^2 + b_9\xi^2\eta^2 \\ \theta_{\eta} &= c_1 + c_2\xi + c_3\eta + c_4\xi\eta + c_5\xi^2 + c_6\eta^2 + c_7\xi^2\eta + c_8\xi\eta^2 + c_9\xi^2\eta^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Izvodi pomeranja  $w$  po prirodnim koordinatama  $\xi$  i  $\eta$  glase

$$\begin{aligned} w_{,\xi} &= a_2 + a_4\eta + 2a_5\xi + 2a_7\xi\eta + a_8\eta^2 + 2a_9\xi\eta^2 \\ w_{,\eta} &= a_3 + a_4\xi + 2a_6\eta + a_7\xi^2 + 2a_8\xi\eta + 2a_9\xi^2\eta \end{aligned} \quad (3.52)$$

Imajući u vidu izraze (3.50-3.52) dobijamo u slučaju kada  $h \rightarrow 0$  sledeće rela-

cije

$$\begin{aligned} \gamma_{\xi\zeta} = w_{,\xi} + \theta_{\xi} = & |(a_2+b_1) + (a_4+b_3)\eta + (2a_5 + b_2)\xi + \\ & + (2a_7+b_4)\xi\eta + b_5\xi^2 + (a_8+b_6)\eta^2 + b_7\xi^2\eta + \\ & + (2a_9+b_8)\xi\eta^2 + b_9\xi^2\eta^2| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\eta\zeta} = w_{,\eta} + \theta_{\eta} = & |(a_3+c_1) + (a_4+c_2)\xi + (2a_6+c_3)\eta + \\ & + (2a_8+c_4)\xi\eta + (a_7+c_7)\xi^2 + c_6\eta^2 + (2a_9+c_7)\xi^2\eta + \\ & + c_8\xi\eta^2 + c_9\xi^2\eta^2| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Očigledno je da one mogu biti zadovoljene samo u slučaju kada su konstante

$$b_5 = b_7 = b_9 = 0 \quad (3.54)$$

$$c_6 = c_8 = c_9 = 0$$

Prema tome zamenjujuće polje deformacije smicanja može se prikazati sledećim polinomima

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\xi\zeta} &= d_1 + d_2\xi + d_3\eta + d_4\xi\eta + d_5\eta^2 + d_6\xi\eta^2 \\ \bar{\gamma}_{\eta\zeta} &= e_1 + e_2\xi + e_3\eta + e_4\xi\eta + e_5\xi^2 + e_6\xi^2\eta \end{aligned} \quad (3.55)$$

U tom slučaju umesto izraza za ukupnu potencijalnu energiju sistema  $\pi$  (3.14) imamo modifikovani funkcional potencijalne energije  $\bar{\pi}$  u obliku

$$\bar{\pi} = \pi + \int_A \lambda_{\xi\zeta} (\bar{\gamma}_{\xi\zeta} - \gamma_{\xi\zeta}) dA + \int_A \lambda_{\eta\zeta} (\bar{\gamma}_{\eta\zeta} - \gamma_{\eta\zeta}) dA \quad (3.56)$$

gde su  $\lambda_{\xi\zeta}$  i  $\lambda_{\eta\zeta}$  Lagrange-ovi multiplikatori a  $\gamma_{\xi\zeta}$  i  $\gamma_{\eta\zeta}$  klizanja sračunata iz polja pomeranja i rotacija (3.51). Zamenjujuće polje deformacije smicanja pretpostavljamo u obliku

$$\bar{\gamma}_{\xi\zeta} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 P_i(\xi) Q_j(\eta) \bar{\gamma}_{\xi\zeta}^{ji} \quad (3.57)$$



$$\bar{\gamma}_{\eta\zeta} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 Q_i(\xi) P_j(\eta) \bar{\gamma}_{\eta\zeta}^{-ij}$$

gde su  $Q_1(s) = s(1+s)/2$ ,  $a = 1/\sqrt{3}$

$$Q_2(s) = 1 - s^2$$

$$Q_3(s) = s(s-1)/2$$

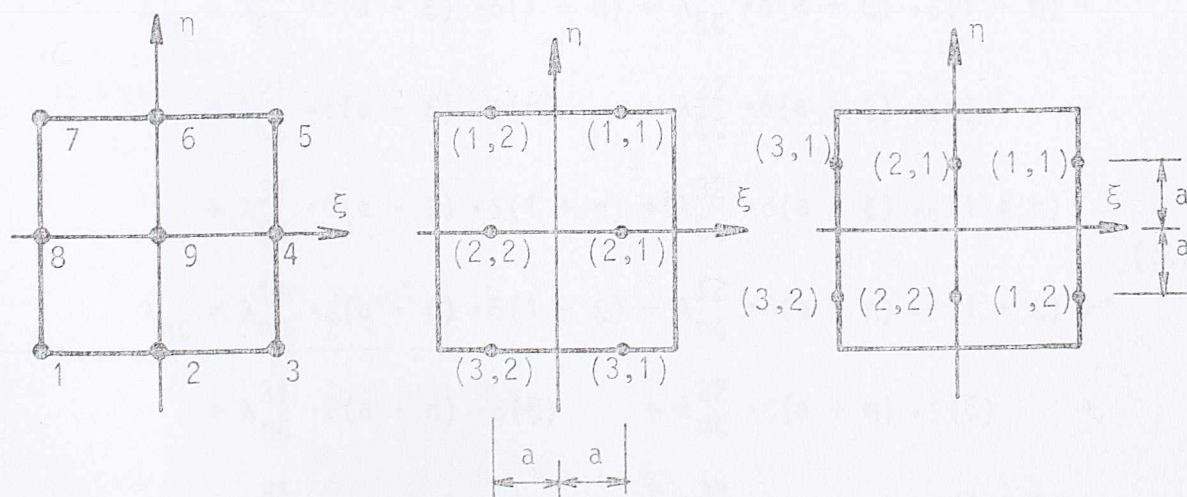
$$P_1(s) = (1+s/a)/2$$

$$P_2(s) = (1-s/a)/2$$

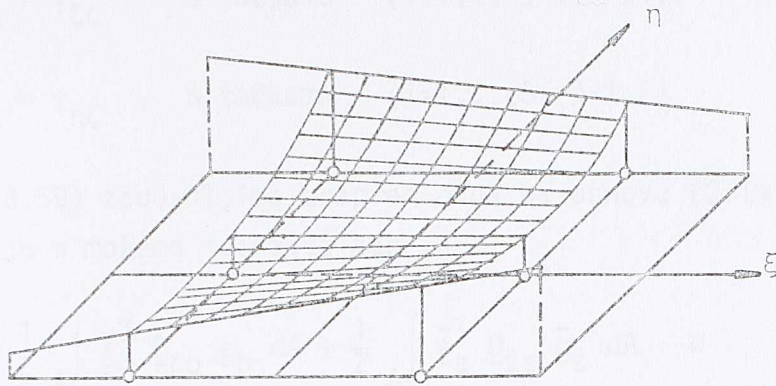
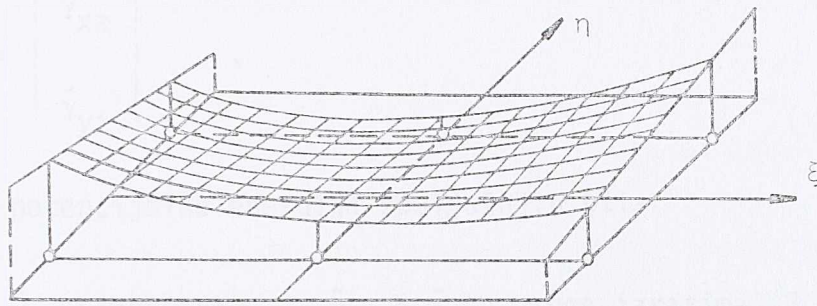
a položaj tačaka interpolacije  $(i,j)$  prikazan je na sl. 3.5. Prema tome  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$  imaju oblik koji je predložen izrazima (3.55), odnosno  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  je linearno u  $\xi$ -pravcu a kvadratno u  $\eta$ -pravcu, dok je  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$  linearno u  $\eta$ -pravcu a kvadratno u  $\xi$ -pravcu (vidi sl. 3.6). U izrazu za  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  pojavljuje se šest nepoznatih parametara a to su vrednosti  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}^{-ji}$  ( $i=1,2$ ;  $j=1,\dots,3$ ) na mestima Gauss-ovih tačaka integracije ( $\xi=\pm a$ ) i na linijama  $\eta=1$ ,  $\eta=0$  i  $\eta=-1$ . Isto tako u izrazu za  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$  pojavljuje se šest nepoznatih parametara a to su vrednosti  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}^{-ij}$  ( $i=1,\dots,3$ ,  $j=1,2$ ) na mestima Gauss-ovih tačaka integracije ( $\eta=\pm a$ ) i na linijama  $\xi=1$ ,  $\xi=0$  i  $\xi=-1$ .

Sl. 3.5. Interpolacione funkcije za  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$

Parametri  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}^{-ji}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}^{-ij}$  imaju kao Dirac-ove delta funkcije u obliku



Sl. 3.5. Raspored interpolacionih tačaka  $(i,j)$

Interpolacija za  $\bar{y}_{\xi\zeta}$ Interpolacija za  $\bar{y}_{\eta\zeta}$ 

### Sl. 3.6. Interpolacione funkcije za $\bar{y}_{\xi\zeta}$ i $\bar{y}_{\eta\zeta}$

Parametre  $\lambda_{\xi\zeta}$  i  $\lambda_{\eta\zeta}$  biramo kao Dirac-ove delta funkcije u obliku

$$\begin{aligned} \lambda_{\xi\eta} = & \lambda_{\xi\zeta}^{11} \cdot \delta(a - \xi) \cdot \delta(1 - \eta) + \lambda_{\xi\zeta}^{12} \cdot \delta(a + \xi) \cdot \delta(1 - \eta) + \\ & + \lambda_{\xi\zeta}^{21} \cdot \delta(a - \xi) \cdot \delta(\eta) + \lambda_{\xi\zeta}^{22} \cdot \delta(a + \xi) \cdot \delta(\eta) + \\ & + \lambda_{\xi\zeta}^{31} \cdot \delta(a - \xi) \cdot \delta(1 + \eta) + \lambda_{\xi\zeta}^{32} \cdot \delta(a + \xi) \cdot \delta(1 + \eta) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{\eta\zeta} = & \lambda_{\eta\zeta}^{11} \cdot \delta(a - \eta) \cdot \delta(1 - \xi) + \lambda_{\eta\zeta}^{12} \cdot \delta(a + \eta) \cdot \delta(1 - \xi) + \\ & + \lambda_{\eta\zeta}^{21} \cdot \delta(a - \eta) \cdot \delta(\xi) + \lambda_{\eta\zeta}^{22} \cdot \delta(a + \eta) \cdot \delta(\xi) + \\ & + \lambda_{\eta\zeta}^{31} \cdot \delta(a - \eta) \cdot \delta(1 + \xi) + \lambda_{\eta\zeta}^{32} \cdot \delta(a + \eta) \cdot \delta(1 + \xi) \end{aligned}$$

Posle zamene (3.58) u (3.56) i zadovoljenja uslova o stacionarnosti potencijalne energije  $\bar{\pi}$  dobijamo sledeće relacije



$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{\xi\zeta} &= \gamma_{\xi\zeta} && \text{u tačkama } (i=1,2; j=1,\dots,3) \\ \bar{\gamma}_{\eta\zeta} &= \gamma_{\eta\zeta} && \text{u tačkama } (i=1,\dots,3; j=1,2)\end{aligned}\quad (3.59)$$

Ako relacije (3.59) zadovoljimo unapred onda na osnovu (3.14) i (3.47) potencijalnu energiju  $\pi$  možemo izraziti kao

$$\pi = \frac{1}{2} \int_A \underline{\underline{\epsilon}}_b^T \underline{\underline{D}}_{bb} \underline{\underline{\epsilon}}_b \, dA + \frac{1}{2} \int_A \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_s^T \underline{\underline{D}}_{ss} \underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_s \, dA - W \quad (3.60)$$

gde je

$$\underline{\underline{\bar{\epsilon}}}_s = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{pmatrix},$$

$W$  - potencijalna energija spoljašnjih sila

Pri tome  $\bar{\gamma}_{xz}$  i  $\bar{\gamma}_{yz}$  sračunavamo iz  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$ , prema izrazima (3.57), primenjujući tenzorsku transformaciju u sistemu krivolinijskih koordinata.

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \epsilon_{ij} \quad (3.61)$$

gde su

$e_{\alpha\beta}$  - tenzor deformacije u  $(\xi, \eta)$  sistemu

$\epsilon_{ij}$  - tenzor deformacije u  $(x, y)$  sistemu

Pošto za ploču važe sledeće relacije

$$x_{,\zeta} = y_{,\zeta} = z_{,\xi} = z_{,\eta} = 0 \quad (3.62)$$

to prema (3.61) možemo pisati

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{\xi\zeta} \\ \bar{\gamma}_{\eta\zeta} \end{pmatrix} = z_{,\zeta} \begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} = \frac{h}{2} \underline{\underline{J}} \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

Iz relacije (3.63) lako se dobija da je



$$\begin{vmatrix} \bar{\gamma}_{xz} \\ \bar{\gamma}_{yz} \end{vmatrix} = \frac{2}{h} \underline{J}^{-1} \begin{vmatrix} \bar{\gamma}_{\xi\zeta} \\ \bar{\gamma}_{\eta\zeta} \end{vmatrix} \quad (3.64)$$

Pri određivanju matrice krutosti elementa deo koji odgovara deformacionoj energiji smicanja sračunavamo shodno izrazima (3.37) i (3.60) kao

$$|K_S^e|_{ij} = \int_A \bar{B}_{Si}^T D_{SS} \bar{B}_{Sj} dA \quad (3.65)$$

gde je  $\bar{B}_{Si}$  odgovarajuća zamenjujuća matrica deformacije. Potpuna numerička integracija koju primenjujemo pri sračunavanju  $|K_D^e|$  može se sada primeniti i pri određivanju  $|K_S^e|$ .

Veoma je važno napomenuti da se selektivno integrisani Mindlin-ovi elementi mogu smatrati kao specijalan slučaj elemenata sa zamenjujućim poljem smičuće deformacije. Naprimer, element LS2 (Tabela 3.1) možemo smatrati kao element kod koga su klizanja interpolovana kroz (2x2) Gauss-Lagrandre-ove tačke redukovane integracije i pri čemu se za određivanje matrice krutosti elementa primenjuje potpuna integracija. Jednakost ova dva postupka potpuna je za slučaj elemenata oblika paralelograma ili ako se izvrši interpolacija klizanja  $\gamma_{xz}$  i  $\gamma_{yz}$  umesto  $\gamma_{\xi\zeta}$  i  $\gamma_{\eta\zeta}$ .<sup>3.67</sup>

### 3.4.3. Osnovne karakteristike elementa QUAD9\*

U sledećem ćemo se upoznati sa nekim osnovnim karakteristikama novog Mindlin-ovog elementa ploče sa 9 čvorova i zamenjujućim poljem smičuće deformacije (QUAD9\*). Poznato je da za konvergenciju rešenja po metodi konačnih elemenata pored ostalog mora biti zadovoljen i uslov kompletnosti elementa, koji znači da pomeranja u elementu moraju biti tako opisana da sadrže u sebi i pomeranja elementa kao krutog tela a istovremeno da obezbeđuju stanje konstantne deformacije elementa. Za proveru ispunjenja prvog uslova koristi se test svojstvenih vrednosti za matricu krutosti elementa, dok se ispunjenje drugog uslova proverava pomoću "patch test"-ova.

Za element QUAD9\* sprovedena je detaljna analiza svojstvenih vrednosti za matrice krutosti različitih elemenata. U svakom od ovih slučajeva postojale su samo po tri nulte svojstvene vrednosti koje odgovaraju formama pomeranja elementa kao krutog tela. Identično se pri ovoj analizi ponaša i "heterosis" element sa 9 čvorova (QUADH), dok element LS2 ima jedan suvišan nulti energetski mod.



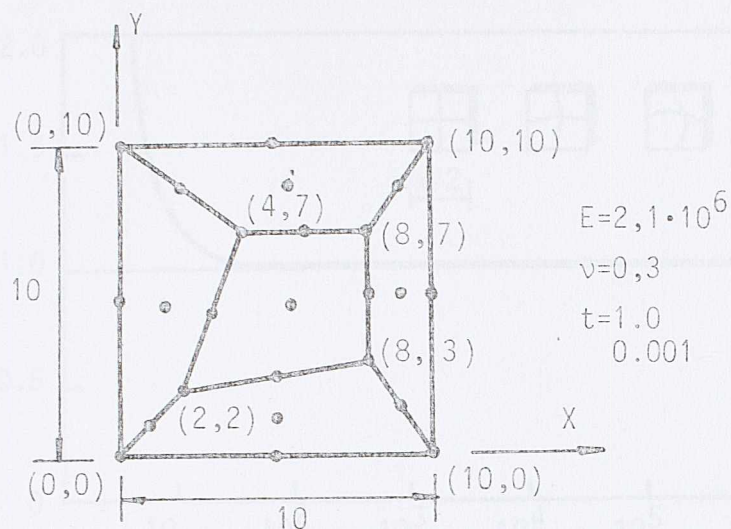
Proširenje Irons-ovog "patch test"-a<sup>3.16</sup> sa jednoga elementa na grupu elemenata obezbedjuje ne samo proveru uslova kompletnosti elementa već isto tako i uslova komfornosti elemenata. Danas je opšte prihvaćeno mišljenje da konačni elementi moraju da prodju odgovarajuće "patch test"-ove. Postoje dva načina primene ovih testova. Prvi, se sastoji u izboru takvog polja pomeranja koje odgovara traženom stanju konstantne deformacije elementa. Odgovarajuće vrednosti pomeranja čvorova na granicama grupe elemenata unosimo kao poznata pomeranja u kompjuterski program. Sračunata pomeranja unutrašnjih tačaka moraju se tačno poklopiti sa pretpostavljenim poljem pomeranja. Drugi, obezbedjuje konstantnu deformaciju elemenata izborom odgovarajućeg opterećenja kao i načina oslanjanja grupe elemenata koju testiramo. Element QUAD9\* podvrgnut je "patch test"-ovima za savijanje, torziju i smicanje koristeći drugi od dva gore izneta postupka. "Patch test"-ovi su sprovedeni za mrežu elemenata, proizvoljnog četvorougaoanog oblika, sa opterećenjem i graničnim uslovima prikazanim na sl. 3.7, a za slučajeve debelih i tankih ploča respektivno. Svi testovi su egzaktno zadovoljeni, pokazujući da QUAD9\* može uspešno reprezentovati stanja konstantnog momenta savijanja, momenta torzije i smičuće sile kako u slučajevima tankih tako i debelih ploča.

Element QUAD9\* podvrgnut je i "locking" testu, pri čemu je razmatrana kvadratna ploča uklještena po konturi, opterećena jednako podeljenim opterećenjem i aproksimirana sa 2x2 elementa. Pri tome, mreža konačnih elemenata sastoji se iz:

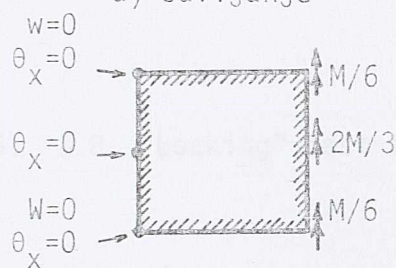
- (1) kvadratnih elemenata,
- (2) četvorougaoanih elemenata sa pravim stranama i
- (3) četvorougaoanih elemenata sa kombinacijom krivolinijskih i pravih strana.

Rezultati ove analize, prikazani na sl. 3.8, potvrđuju da QUAD9\* efikasno eliminiše pojavu "locking"-a a ugib centralne tačke asimptotski teži rešenju Kirchhoff-ove teorije tankih ploča. Inače sve tri mreže konačnih elemenata daju gotovo identične rezultate.

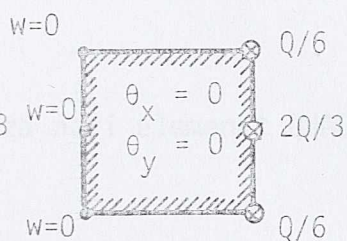
Na osnovu rezultata prethodnih ispitivanja možemo zaključiti da QUAD9\* zadovoljava većinu uslova idealnog Mindlin-ovog konačnog elementa ploče. Ovaj element ima potreban broj nultih energetskih modova, egzaktno prolazi odgovarajuće "patch test"-ove i eliminiše u potpunosti pojavu "locking"-a. U sledećem odeljku prikazaćemo izvestan broj numeričkih primera koji se odnose na primenu elementa QUAD9\* u statičkim, dinamičkim i problemima stabilnosti ploča.



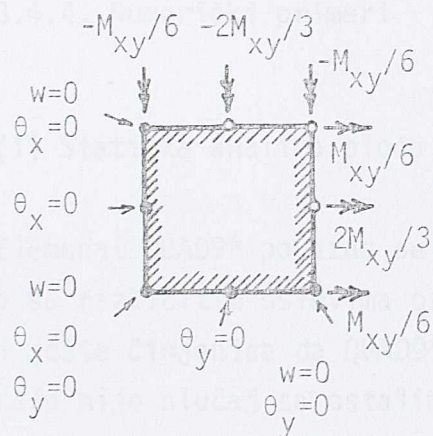
a) savijanje



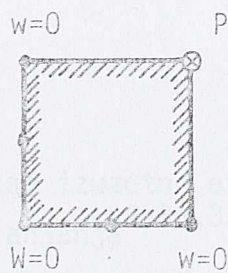
b) smicanje



c) torzija (Mindlin)



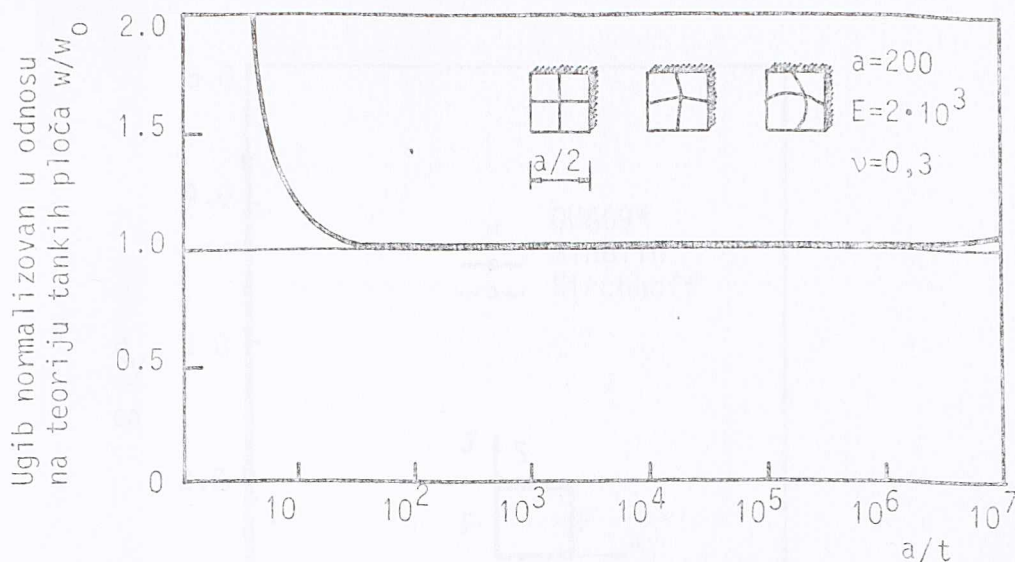
d) torzija (Kirchhoff)



c) torzija (Mindlin) d) torzija (Kirchhoff)

Sl. 3.7. Uslovi oslanjanja i opterećenja za grupu elemenata podvrgnutu "patch test"-ovima



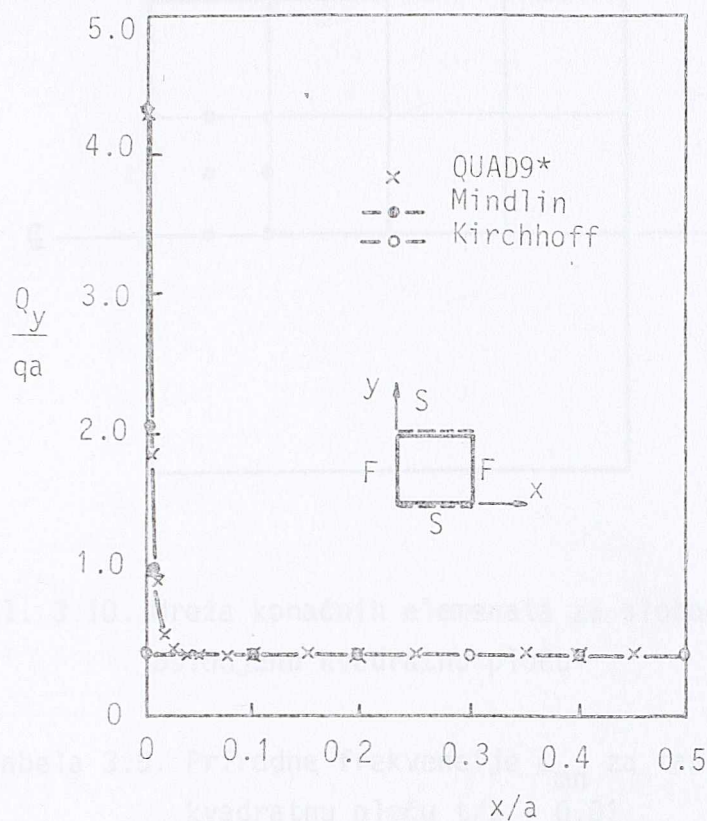


Sl. 3.8. "Locking" test za novi elemenat QUAD9\*

#### 3.4.4. Numerički primeri

##### (1) Statička analiza ploča

Element QUAD9\* pokazao se kao izuzetno efikasan u statičkim analizama ploča sa različitim uslovima oslanjanja<sup>3.66,3.67,3.69</sup>. Ono što je značajno istaći jeste činjenica da QUAD9\* veoma pouzdano reprezentuje smičuće sile, što inače nije slučaj sa ostalim konačnim elementima ploča. Poseban problem u određivanju smičućih sila konačnim elementima čine područja u blizini uglova ploče, gde se javljaju strmi gradijenti naponskih rezultanti, i gde rešenja često imaju divergentan karakter. Sledeći primer<sup>3.69</sup> ukazuje da i u ovim područjima QUAD9\* sa jednom razumnom mrežom konačnih elemenata daje izvanredne rezultate. Na sl. 3.9 prikazana je promena transverzalne sile  $Q_y$  duž linije  $y=0$ , kvadratne ploče slobodno oslonjene duž dve naspramne strane i slobodnih ivica na preostalim stranama a opterećene jednako podeljenim opterećenjem intenziteta  $q$ . Prema Mindlin-ovoj teoriji, za razliku od Kirchhoff-ove teorije ploča, u uglu ploče dobijamo veliku vrednost transverzalne sile  $Q_y$  što je sasvim dobro pokriveno rešenjem konačnim elementima.



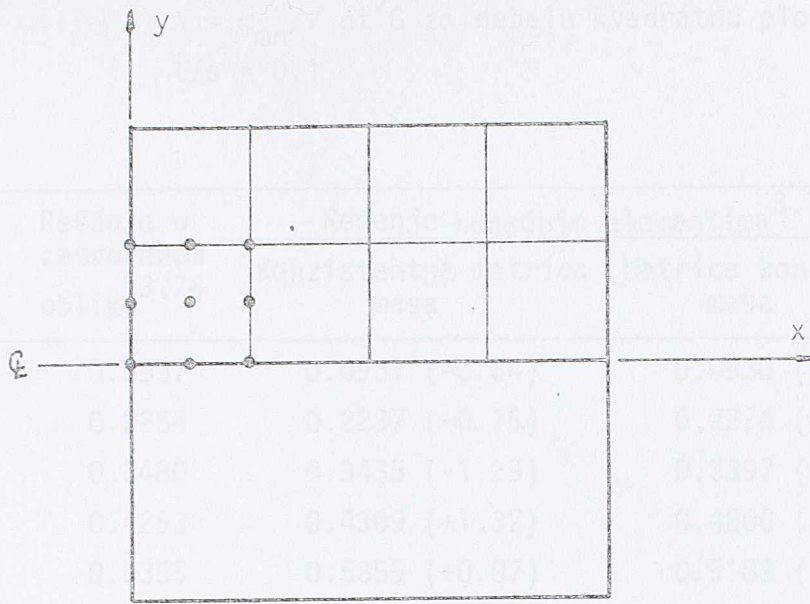
Sl. 3.9. Promena sile  $Q_y$  duž linije  $y=0$  za kvadratnu ploču strane  $a$  (prema referenci [3.69])

(2) Slobodne vibracije i stabilnost ploča

Element QUAD9\* ugrađen je u program VIBUK<sup>3.77</sup> za analizu slobodnih vibracija i izvijanja ploča inicijalno opterećenih u svojoj ravni. Element je potvrdio svoju efikasnost ne samo u rešavanju jednostavnih test primera već isto tako i u stvarnim inženjerskim problemima<sup>3.74</sup>. U sledećem ćemo prikazati deo rezultata dobijenih za slobodno oslonjenu kvadratnu ploču, aproksimiranu mrežom konačnih elemenata koja je prikazana na sl. 3.10. Kako je razmatrana samo polovina ploče korišćeni su uslovi simetrije i antimetrije duž centralne linije.



Tabela 3.6. Rezultantni prirodne vrednosti frekvencije



Sl. 3.10. Mreža konačnih elemenata za slobodno oslonjenu kvadratnu ploču

Tabela 3.5. Prirodne frekvencije  $\omega_{mn}$  za tanku kvadratnu ploču  $t/a = 0.01$

Modovi m n	Rešenje u zatvorenom obliku <sup>3.76</sup>	Rešenje konačnim elementima <sup>3.77</sup>	
		Konzistentna matrica masa	Matrica koncentrisanih masa
1 1	19.73	19.75 (+0.10)	19.73 (0.00)
1 2	49.35	49.75 (+0.87)	49.46 (+0.28)
2 2	78.88	79.67 (+1.00)	78.80 (-0.10)
1 3	98.58	103.13 (+4.62)	100.56 (+2.01)
2 3	128.11	132.79 (+3.65)	128.71 (+0.47)

( $\omega_{mn}$  u rad/sec)

Vrednosti u zagradama su procentualne greške u odnosu na rešenja dobijena u zatvorenom obliku<sup>3.72,3.76</sup>.

Tabela 3.6. Bezdimenzionalne vrednosti frekvencija

$$\lambda = \omega_{mn} / \sqrt{\rho t^2 G} \text{ za debelu kvadratnu ploču}$$

$$t/a = 0.1$$

Modovi m	n	Rešenje u zatvorenom obliku <sup>3.76</sup>	Rešenje konačnim elementima <sup>3.77</sup>	
			Konzistentna matrica masa	Matrica koncentrisanih masa
1	1	0.0937	0.0931 (-0.64)	0.0930 (-0.75)
2	1	0.2254	0.2237 (-0.75)	0.2224 (-1.33)
2	2	0.3480	0.3435 (-1.29)	0.3397 (-2.39)
3	1	0.4253	0.4309 (+1.32)	0.4200 (-1.25)
3	2	0.5355	0.5359 (+0.07)	0.5189 (-3.10)
3	3	0.7060	0.7074 (+0.20)	0.6687 (-5.28)

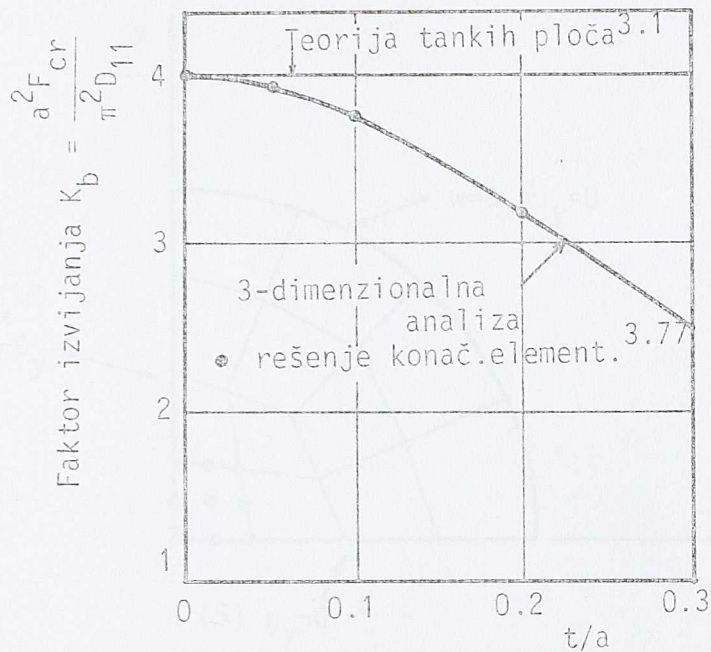
( $\omega_{mn}$  u rad/sec)

Tabela 3.7. Vrednosti faktora izvijanja  $K_D = a^2 F_{kr.} / \pi^2 D_{11}$   
za slobodno oslonjenu kvadratnu ploču pritisnutu  
u jednom pravcu ( $\nu = 0.3$ )

t/a	Rešenje u zatvorenom obliku <sup>3.76</sup>	Rešenje konačnim elementima <sup>3.77</sup>
0.001	4.000	4.000 ( 0.00)
0.05	3.944	3.932 (-0.30)
0.10	3.786	3.734 (-1.37)
0.20	3.264	3.128 (-4.16)

Rezultati iz Tabele 3.7 interpretirani su grafički na sl. 3.11, odakle možemo uočiti da tačna rešenja faktora izvijanja odstupaju od rešenja Kirchhoff-ove teorije ploča utoliko više ukoliko je odnos  $t/a$  veći.





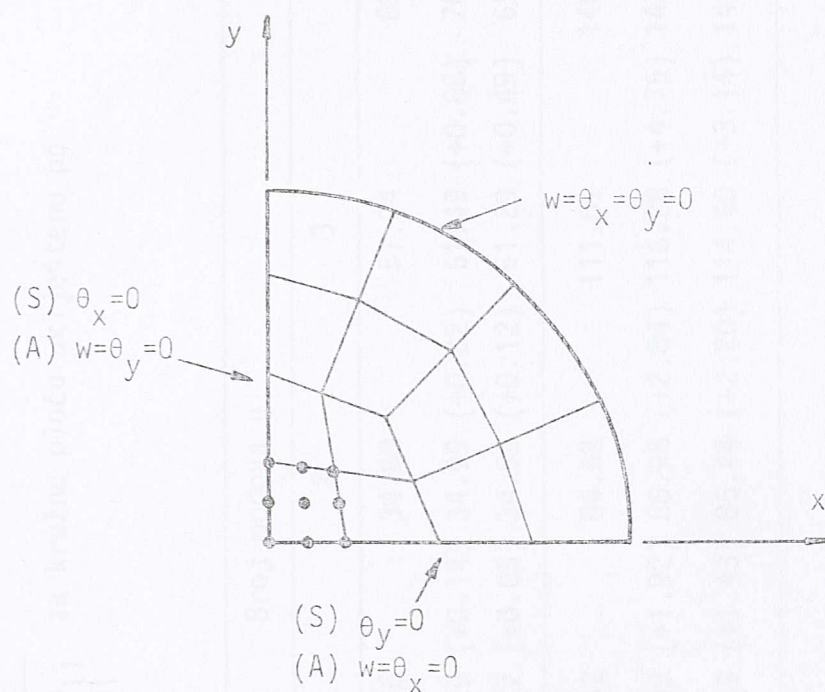
Sl. 3.11. Faktori izvijanja kvadratne ploče pritiskute u jednom pravcu u funkciji odnosa  $t/a$  ( $\nu = 0.3$ )

### (3) Dinamički analiza ploče

Rezultati prikazani u Tabeli 3.8 odnose se na slobodne vibracije kružne ploče uklještene po konturi. Kako je analizirana samo četvrtina ploče, duž osa simetrije razmatrana su sledeća tri slučaja graničnih uslova:

- uslovi simetrije duž obe ivice (SS),
- uslovi simetrije odnosno antimetrije duž svake od ivica respektivno (SA), i
- uslovi antimetrije duž obe ivice (AA).

Mreža konačnih elemenata razvijena za četvrtinu ploče prikazana je na sl. 3.12.



Sl. 3.12. Mreža konačnih elemenata za četvrtinu kružne ploče uklještene po konturi

### (3) Dinamička analiza ploča

Element QUAD9\* ugrađen je i u program DYNAM<sup>3.78</sup> za dinamičku analizu ploča inicijalno opterećenih u svojoj ravni. Integracija po vremenu sprovedena je koristeći eksplicitni postupak integracije a pošto je reč o dijagonalnoj matrici masa nije potrebna matricna faktorizacija. Prvi primer<sup>3.75</sup> prikazuje uticaj sila u ravni ploče na dinamički odgovor ploče, slobodno oslonjene po konturi i izložene pravougaonom impulsu (Heaviside-ova funkcija) u obliku ravnomerno podeljenog opterećenja preko centralnog dela ploče. Simetrična četvrtina ploče, odnosa  $t/a = 0.1$ , idealizovana je sa 12 elemenata kako je to prikazano na Sl. 3.13. Promena ugiba srednje tačke ploče kao i momenta savijanja u funkciji vremena prikazana je na sl. 3.14 i



Tabela 3.8. Vrednosti  $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_{11}}$  za kružnu ploču uklještenu po konturi odnosa  $t/a = 0.01$

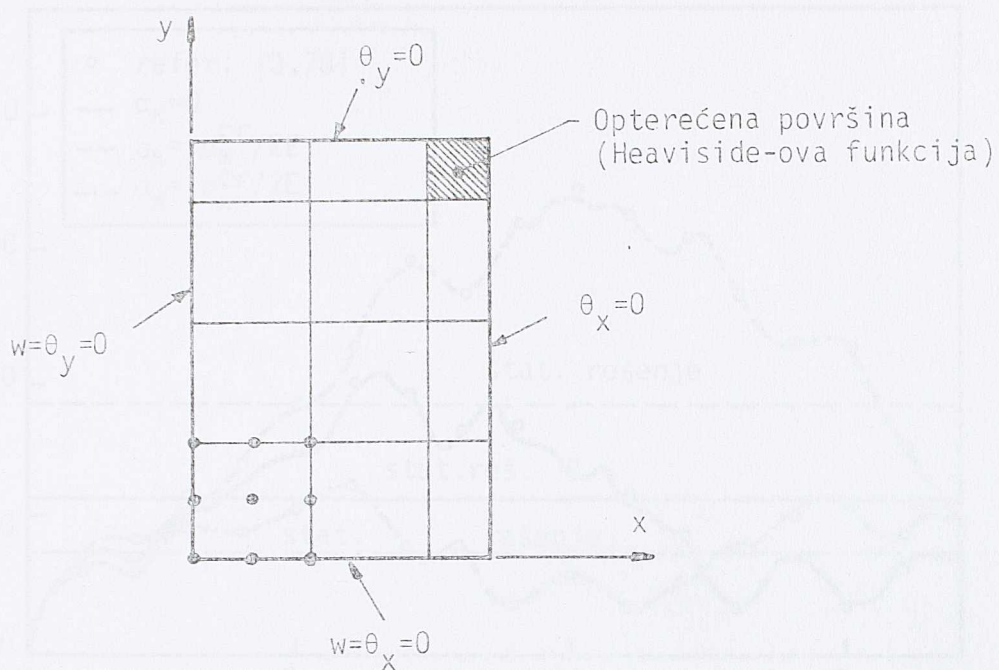
Broj prevojnih krugova s	Vrsta analize	Broj modova n				
		0	1	2	3	4
0	A.R.	10.2158	21.26	34.88	51.04	69.6659
	K.M.M.	10.2185 (+0.03)	21.29 (+0.14)	34.99 (+0.32)	51.49 (+0.88)	70.4071 (+1.06)
	M.K.M.	10.2184 (+0.03)	21.27 (+0.05)	34.92 (+0.12)	51.29 (+0.49)	69.6513 (-0.02)
1	A.R.	39.771	60.82	84.58	111.01	140.1079
	K.M.M.	40.099 (+0.82)	61.99 (+1.92)	86.98 (+2.84)	116.28 (+4.75)	147.4777 (+5.26)
	M.K.M.	40.022 (+0.63)	61.69 (+1.43)	86.44 (+2.20)	114.50 (+3.14)	142.9976 (+2.06)

A.R. - Analitičko rešenje 3.79

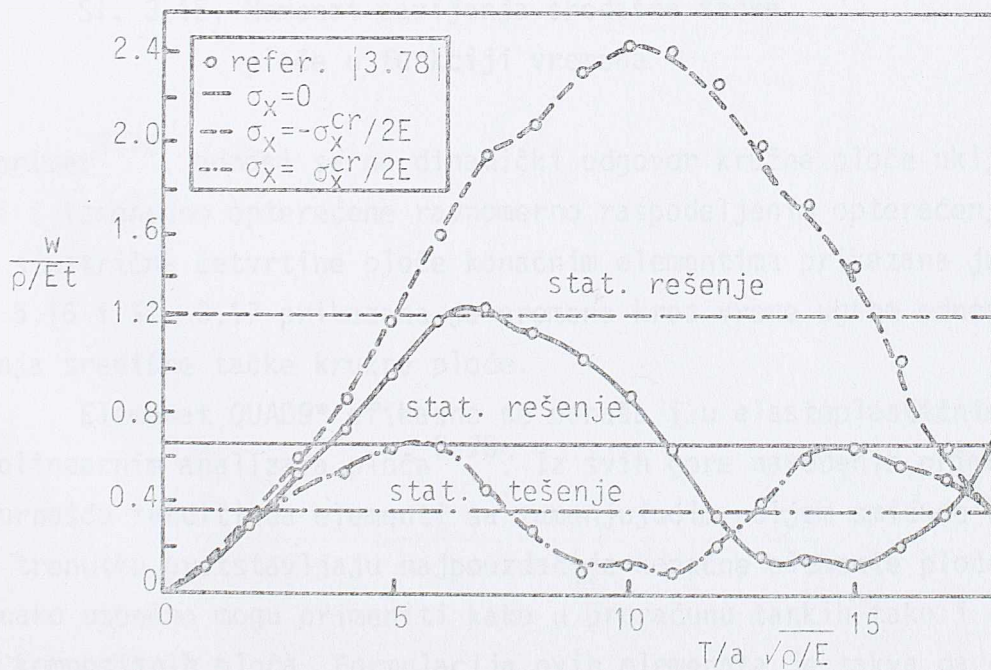
K.M.M. - Rešenje konačnim elementima sa konzistentnom matricom masa 3.77

M.K.M. - Rešenje konačnim elementima sa matricom koncentrisanih masa 3.77

Sl. 3.15 respektivno. Rezultati su prezentirani u bezdimenzionalnoj formi i upoređeni sa rešenjem u zatvorenom obliku<sup>3.80</sup>.

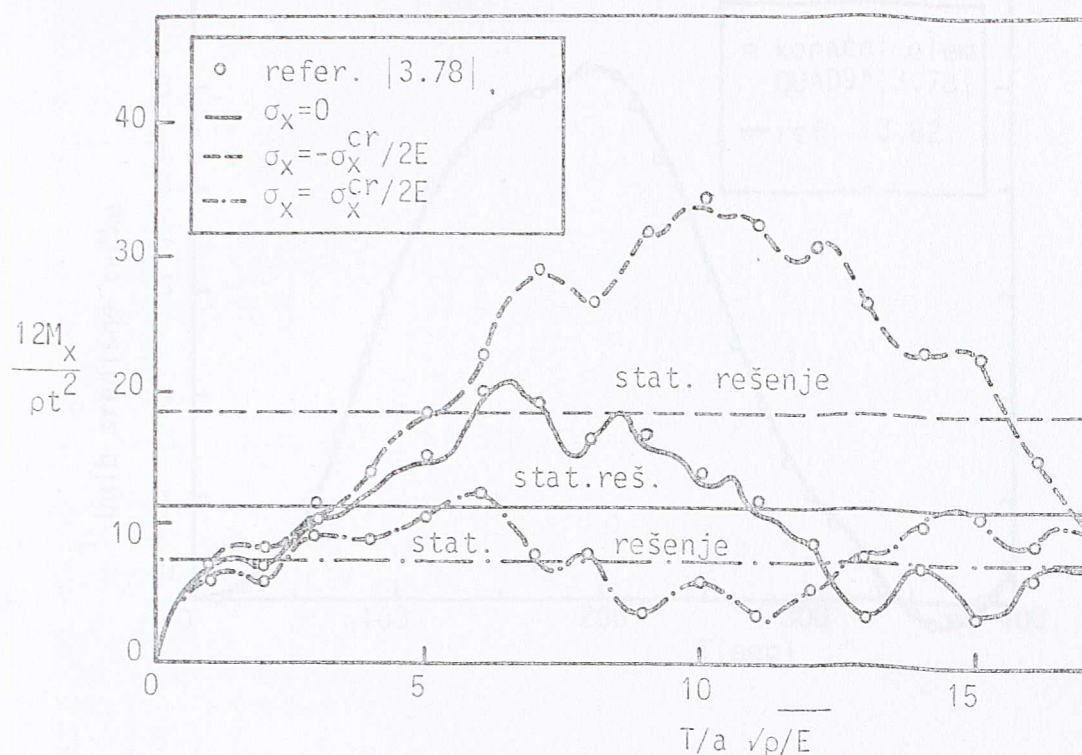


Sl. 3.13. Mreža konačnih elemenata za četvrtinu ploče slobodno oslonjene po konturi



Sl. 3.14. Ugib središnje tačke ploče u funkciji vremena



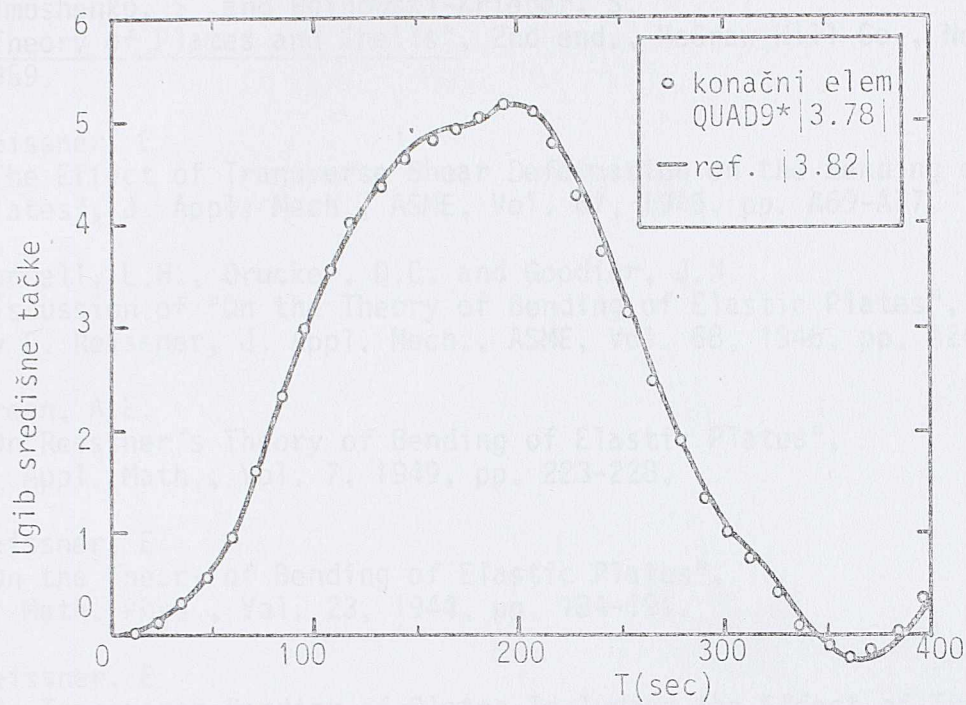


Sl. 3.15. Momenat savijanja središnje tačke ploče u funkciji vremena

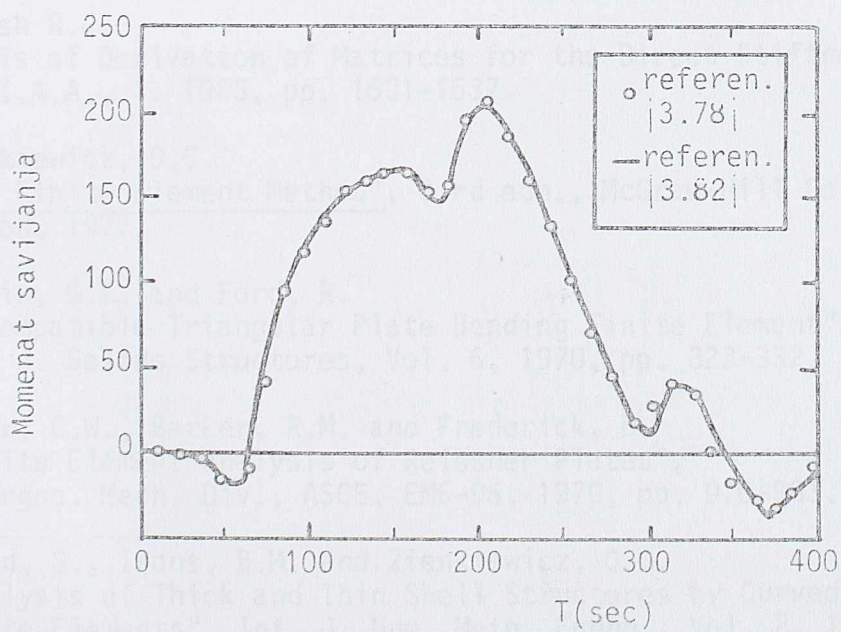
Drugi primer<sup>3,78</sup>, odnosi se na dinamički odgovor kružne ploče uklještene po konturi i iznenadno opterećene ravnomerno raspodeljenim opterećenje. Idealizacija simetrične četvrtine ploče konačnim elementima prikazana je na sl. 3.12. Na sl. 3.16 i Sl. 3.17 prikazana je promena kroz vreme ugiba odnosno momenta savijanja središnje tačke kružne ploče.

Element QUAD9\* efikasno se ponaša i u elastoplastičnim i geometrijskim nelinearnim analizama ploča<sup>3,70</sup>. Iz svih gore navedenih primera može se sa sigurnošću tvrditi da elementi sa zamenjujućim poljem smičuće deformacije u ovom trenutku predstavljaju najpouzdanije konačne elemente ploče, koji se podjednako uspešno mogu primeniti kako u proračunu tankih tako i debelih, sendvič i kompozitnih ploča. Formulacija ovih elemenata je takva da omogućava njihovo jednostavno programiranje za elektronski računar. Za element QUAD9\* kompletan program zajedno sa detaljnim objašnjenjima i nizom brojnih primera dat je u referenci |3,77|.





Sl. 3.16. Ugib centra kružne ploče u funkciji vremena



Sl. 3.17. Momenat savijanja u centru kružne ploče u funkciji vremena



## 3.5. LITERATURA

- 3.1 Timoshenko, S. and Woinowski-Krieger, S.  
"Theory of Plates and Shells", 2nd ed., McGraw-Hill Co., New York, 1959.
- 3.2 Reissner, E.  
 "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", J. Appl. Mech., ASME, Vol. 67, 1945, pp. A69-A77.
- 3.3 Donnell, L.H., Drucker, D.C. and Goodier, J.N.  
 discussion of "On the Theory of Bending of Elastic Plates",  
 by E. Reissner, J. Appl. Mech., ASME, Vol. 68, 1946, pp. A249-A252.
- 3.4 Green, A.E.  
 "On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates",  
 Q. Appl. Math., Vol. 7, 1949, pp. 223-228.
- 3.5 Reissner, E.  
 "On the Theory of Bending of Elastic Plates",  
 J. Math. Phys., Vol. 23, 1944, pp. 184-191.
- 3.6 Reissner, E.  
 "On Transverse Bending of Plates Including the Effect of Transverse Shear Deformation", Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 1975, pp. 569-573.
- 3.7 Mindlin, R.D.  
 "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates", J. Appl. Mech., ASME, Vol. 18, 1951, pp. 31-38.
- 3.8 Melosh R.J.  
 "Basis of Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method", J.A.I.A.A., 1, 1963, pp. 1631-1637.
- 3.9 Zienkiewicz, O.C.  
"The Finite Element Method", 3rd edn., McGraw-Hill Co., London, 1977.
- 3.10 Butlin, G.A. and Ford, R.  
 "A Compatible Triangular Plate Bending Finite Element", Int. J. Solids Structures, Vol. 6, 1970, pp. 323-332.
- 3.11 Pryor, C.W., Barker, R.M. and Frederick, D.  
 "Finite Element Analysis of Reissner Plates", J. Engng. Mech. Div., ASCE, EM6-96, 1970, pp. 976-983.
- 3.12 Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C.  
 "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 2, 1970, pp. 419-451.
- 3.13 Bathe, K.J. and Bolourchi, S.A.  
 "A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element", Comput. Structures, Vol. 11, 1980, pp. 23-48.

- 3.14 Ashwell, D.G. and Gallagher, R.H. (eds.)  
"Finite Elements for Thin Shells and Curved Members",  
 Wiley, London, 1976.
- 3.15 Bathe, K.J.  
"Finite Element Procedures in Engineering Analysis",  
 Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1982.
- 3.16 Irons, B. and Ahmad, S.  
"Techniques of Finite Elements", Ellis Horwood, Chichester, 1980.
- 3.17 Hinton, E. and Owen, D.R.J.  
"Finite Element Programming", Academic, London, 1977.
- 3.18 Crisfield, M.A.  
"Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis  
 - Volume 1: Linear Analysis", Pineridge Press, Swansea, U.K., 1986.
- 3.19 Hinton, E. and Owen, D.R.J. (eds.)  
"Finite Element Software for Plates and Shells",  
 Pineridge Press, Swansea, U.K., 1984.
- 3.20 Sekulović, M.  
"Metod konačnih elemenata", Gradjevinska knjiga, Beograd, 1984.
- 3.21 Rock, T. and Hinton, E.  
 "Free Vibration and Transient Response of Thick and Thin Plates  
 Using the Finite Element Method", *Earthquake Engng. Struct. Dynamics*,  
 Vol. 3, 1974, pp. 51-63.
- 3.22 Hinton, E.  
 "The Dynamic Transient Analysis of Axisymmetric Circular Plates  
 by the Finite Element Method", *J. Sound Vibr.*, Vol. 46, 1976,  
 pp. 465-472.
- 3.23 Rock, T.A. and Hinton, E.  
 "A Finite Element Method for the Free Vibration of Plates  
 Allowing for Transverse Shear Deformation", *Comput. Structures*,  
 Vol. 6, 1976, pp. 37-44.
- 3.24 Pica, A. and Hinton, E.  
 "Transient and Pseudo-Transient Analysis of Mindlin Plates",  
*Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 1980, pp. 189-208.
- 3.25 Kanaka Raju, K. and Hinton, E.  
 "Nonlinear Vibrations of Thick Plates using Mindlin  
 Plate Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 1980,  
 pp. 249-257.
- 3.26 Pica, A. and Wood, R.D.  
 "Postbuckling Behaviour of Plates and Shells Using  
 a Mindlin Shallow Shell Formulation", *Compt. Structures*,  
 Vol. 12, 1980, pp. 759-786.
- 3.27 Crisfield, M.A.  
 "Numerical Analysis of Structures" in, "Developments in  
 Thin-Walled Structures - 1" by J. Rhodes and A.C. Walker  
 (eds.), Applied Science Publishers, England, pp. 235-284.



- 3.28 Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M.  
"Reduced Integration in General Analysis of Plates and Shells",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3, 1971, pp. 275-290.
- 3.29 Pugh, E.D.L., Hinton, E. and Zienkiewicz, O.C.  
"A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements with Reduced Integration",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 12, 1978, pp. 1059-1079.
- 3.30 Hinton, E. and Bićanić, N:  
"A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin  
Plate Elements for Free Vibration Analysis", Comput. Structures,  
Vol. 10, 1979, pp. 483-493.
- 3.31 Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknukulchai, W.  
"A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, 1977, pp. 1529-1543.
- 3.32 Hughes, T.J.R., Cohen, M. and Haroun, M.  
"Reduced and Selective Integration Techniques in  
Finite Element Analysis of Plates", Nuclear Engng. Design,  
Vol. 46, 1978, pp. 203-222.
- 3.33 Hughes, T.J.R. and Cohen, M.  
"The 'Heterosis' Finite Element for Plate Bending",  
Comput. Structures, Vol. 9, 1978, pp. 445-450.
- 3.34 Hughes, T.J.R.  
"Generalization of Selective Integration Procedures to  
Anisotropic and Nonlinear Media", Int. J. Num. Meth. Engng.,  
Vol. 15, 1980, pp. 1413-1418
- 3.35 Hughes, T.J.R.  
"Recent Developments in Computer Methods for Structural Analysis",  
Nuclear Engng. Design, Vol. 57, 1980, pp. 427-439.
- 3.36 Belytschko, T. and Tsay, C.S.  
"A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with  
One-Point Quadrature", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19, 1983,  
pp. 405-419.
- 3.37 Belytschko, T., Stolarski, H. and Carpenter, N.  
"A C<sup>0</sup> Triangular Plate Element with One-Point Quadrature",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 20, 1984, pp. 787-802.
- 3.38 Belytschko, T., Ong, J.S.J. and Liu, W.K.  
"A Consistent Control of Spurious Singular Modes in the 9-Node Lagrange  
Element for the Laplace and Mindlin Plate Equations",  
Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng., Vol. 44, 1984, pp. 269-295.
- 3.39 Liu, W.K., Ong, J.S.J. and Uras, R.A.  
"Finite Element Stabilization Matrices-A Unification Approach",  
Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng., Vol. 53, 1985, pp. 13-46.
- 3.40 Batoz, J.L., Bathe, K.J. and Ho, L.W.  
"A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 15, 1980, pp. 1771-1812.



- 3.41 Batoz, J.L.  
"An Explicit Formulation of an Efficient Triangular Plate-Bending Element", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, 1982, pp. 1077-1089.
- 3.42 Bathe, K.J. and Ho, L.W.  
"Some Results in the Analysis of Thin Shell Structures" in *"Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics"* by W. Wunderlich., E.Stein and K.J. Bathe, (eds), Springer-Verlag, 1981, pp. 122-150.
- 3.43 Bathe, K.J. and Ho, L.W.  
"A Simple and Effective Element for Analysis of General Shell Structures", *Comput. Structures*, Vol. 13, 1981, pp. 673-681.
- 3.44 Bathe, K.J., Dvorkin, E. and Ho, L.W.  
"Our Discrete-Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonlinear Analysis - An Assessment", *Comput. Structures*, Vol. 16, 1983, pp. 89-98.
- 3.45 Dhatt, G., Marcotte, L. and Matte, Y.  
"A New Triangular Discrete Kirchhoff Plate/Shell Element", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, 1986. pp. 453-470.
- 3.46 Cook, R.D.  
"Two Hybrid Elements for Analysis of Thick, Thin and Sandwich Plates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 5, 1972, pp. 277-288.
- 3.47 Spilker, R.L. and Munir, N.I.  
"The Hybrid-Stress Model for Thin Plates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 1980, pp. 1239-1260.
- 3.48 Spilker, R.L. and Munir, N.I.  
"A Serendipity Cubic-Displacement Hybrid-Stress Element for Thin and Moderately Thick Plates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 15, 1980, pp. 1261-1278.
- 3.49 Spilker, R.L.  
"Invariant 8-Node Hybrid-Stress Elements for Thin and Moderately Thick Plates", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, 1982, pp. 1153-1178.
- 3.50 Lee, S.W. and Wong, S.C.  
"Mixed Formulation Finite Elements for Mindlin Theory Plate Bending", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 18, 1982, pp. 1297-1311.
- 3.51 Lee, S.W. and Zhang, J.C.  
"A Six-Node Finite Element for Plate Bending", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, 1985, pp. 131-143.
- 3.52 Lee, S.W., Dai C.C. and Yeom, C.H.  
"A Triangular Finite Element for Thin Plates and Shells", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, 1985, pp. 1813-1831.
- 3.53 Saleeb, A.F. and Chang, T.Y.  
"An Efficient Quadrilateral Element for Plate Bending Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, 1987, pp. 1123-1155.



- 3.54 Hinton, E. and Owen, D.R.J.  
 "An Introduction to Finite Element Computations",  
 Pineridge Press, Swansea, U.K., 1979.
- 3.55 Malkus, D.S. and Hughes, T.J.R.  
 "Mixed Finite Element Methods-Reduced and Selective  
 Integration Techniques: A Unification of Concepts",  
 Comput. Meth. in Appl. Mech. Engng., Vol. 15, 1978, pp. 63-81.
- 3.56 Hinton, E. and Campbell, J.S.  
 "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite  
 Element Functions Using a Least Squares Method",  
 Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 8, 1974, pp. 461-480.
- 3.57 Hinton, E., Scott, F.C. and Ricketts, R.E.  
 "Local Least Square Stress Smoothing for Parabolic  
 Isoparametric Elements", Int. J. Num. Meth. Engng.,  
 Vol. 9, 1975, pp. 235-256.
- 3.58 MacNeal, R.H.  
 "A Simple Quadrilateral Shell Element",  
 Comput. Structures, Vol. 8, 1978, pp. 175-183.
- 3.59 MacNeal, R.H.  
 "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Strain Distributions",  
 Nuclear Engng. Design, Vol. 70, 1982, pp. 3-12.
- 3.60 Hughes, T.J.R. and Tezduyar, T.E.  
 "Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular  
 Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element",  
 J. Appl. Mech., ASME, Vol. 48, 1981, pp. 587-596.
- 3.61 Crisfield, M.A.  
 "A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints",  
 Comput. Structures, Vol. 18, 1984, pp. 833-852.
- 3.62 Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J.  
 "A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General  
 Non-Linear Analysis", Eng. Comput., Vol. 1, 1984, pp. 77-88.
- 3.63 Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N.  
 "A Formulation of General Shell Elements-The Use of Mixed Interpolation  
 of Tensorial Components", Proceedings of the NUMETA '85 Conference,  
 Swansea, 1985, pp. 551-563.
- 3.64 Bathe, K.J. and Dvorkin, E.N.  
 "A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate  
 Theory and a Mixed Interpolation", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 21,  
 1985, pp. 367-382.
- 3.65 Huang, H.C. and Hinton, E.  
 "An Improved Lagrangian 9-Node Mindlin Plate Element",  
 Proceedings of the NUMETA '85 Conference, Swansea, 1985, pp. 707-713.
- 3.66 Huang, H.C. and Hinton, E.  
 "A Nine-Node Lagrangian Mindlin Plate Element with  
 Enhanced Shear Interpolation", Eng. Comput., Vol. 1, 1984, pp. 369-379.



- 3.67 Hinton, E. and Huang, H.C.  
 "A Family of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields", *Comput. Structures*, Vol. 23, 1986, pp. 409-431.
- 3.68 Huang, H.C. and Hinton, E.  
 "A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 22, 1986, pp. 73-92.
- 3.69 Hinton, E. and Huang, H.C.  
 "Shear Forces and Twisting Moments in Plates Using Mindlin Elements", *Eng. Comput.* Vol. 3, 1986, pp. 129-142.
- 3.70 Huang, H.C. and Hinton, E.  
 "Elastic-Plastic and Geometrically Nonlinear Analysis of Plates and Shells Using a New Nine Node Element" in "Finite Element Methods for Nonlinear Problems" by P.G. Bergan, K.J. Bathe and W. Wunderlich (eds.), Springer-Verlag, 1986, pp. 283-297.
- 3.71 Vuksanović, Dj.  
 "Konačni elemenat ploče sa poboljšanom interpolacijom smičućih deformacija", *Materijali XVII Jugoslovenskog kongresa teorijske i primenjene mehanike*, knjiga C2, Zadar, 1986, str. 131-136.
- 3.72 Vuksanović, Dj.  
 "Dinamička analiza slobodno oslonjenih debelih ploča-analitičko rešenje", *materijali Simpozijuma '85 - "Savremeni problemi nelinearne mehanike kontinuumu"*, Vrnjačka Banja, 1985, str. 296-304.
- 3.73 Vuksanović, Dj.  
 "Stabilnost limova primenom metode konačnih elemenata", *materijali VIII Kongresa društava građevinskih konstruktora Jugoslavije*, knjiga T2, Cavtat, 1987, str. 219-222.
- 3.74 Vuksanović, Dj., Pujević, B. and Hinton, E.  
 "Nonlinear Finite Element Analysis of Welded Gusset Plates", *Proceedings of the First International Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, 1987, pp. 791-804.
- 3.75 Vuksanović, Dj.  
 "Dynamic Analysis of Mindlin Plates Using the Finite Element Method", *Proceedings of XVIII Yugoslav Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, Vrnjačka Banja, 1988.
- 3.76 Hinton, E. and Vuksanović, Dj.  
 "Closed Form Solutions for Dynamic Analysis of Simply Supported Mindlin Plates" in "Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells" by E. Hinton (ed.), Pineridge Press, Swansea, 1988, pp. 1-47.
- 3.77 Hinton, E., Vuksanović, Dj. and Huang, H.C.  
 "Finite Element Free Vibration and Buckling Analysis of Initially Stressed Mindlin Plates", in "Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells" by E. Hinton (ed.), Pineridge Press, Swansea, 1988, pp. 93-166.



- 3.78 Hinton, E. and Vuksanović, Dj.  
 "Explicit Transient Dynamic Finite Element Analysis of Initially Stressed Mindlin Plates" in "Numerical Methods and Software for Dynamic Analysis of Plates and Shells" by E. Hinton (ed.), Pineridge Press, Swansea, 1988, pp. 205-259.
- 3.79 Leissa, A.W.  
"Vibration of Plates". NASA SP-160, Washington, D.C., 1969.
- 3.80 Reissman, H. and Tendorf, Z.A.  
 "Dynamics of Initially Stressed Plates", J. Appl. Mech., ASME, Vol. 6, 1979, pp. 304-308.
- 3.81 Kant, T. and Hinton, E.  
 "Mindlin Plate Analysis by Segmentation Method", J. Engng. Mech. Div, ASCE, Vol. 109, 1983, pp. 537-556.
- 3.82 Hinton, E., Owen, D.R.J. and Shantaram, D.  
 "Dynamic Transient Linear and Nonlinear Behaviour of Thick and Thin Plates", in "The Mathematics of Finite Element and Applications 11" (MAFELAP 1975), Academic Press, New York and London, 1976.
- 3.83 Jang, J. and Pinsky, P.M.  
 "An Assumed Covariant Strain Based 9-Node Shell Element", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 24, 1987, pp. 2389-2411.

## 4. POSTUPCI ZA REŠAVANJE SISTEMA NELINEARNIH JEDNAČINA

### 4.1. UVOD

Za razliku od linearnih problema teorije konstrukcija, gde do rešenja sistema jednačina metode konačnih elemenata dolazimo direktno, bez nekih većih teškoća, u slučaju nelinearnih problema moraju se primeniti znatno složenije metode rešavanja. U suštini rešavanje sistema nelinearnih jednačina u većini slučajeva je najskuplji a ujedno i najosetljiviji deo neke nelinearne analize. Pravilan izbor metode rešavanja, u zavisnosti od vrste problema koji se razmatra, ključni je faktor za obezbedjenje numeričke stabilnosti postupka za rešavanje sistema nelinearnih jednačina. U analizi armiranobetonskih konstrukcija javljaju se dodatne teškoće izazvane naglim promenama krutosti pojedinih konačnih elemenata, usled prskanja i drobljenja betona i tečenja armature. Sve ovo ukazuje na ogroman značaj pravilnog izbora pouzdanog, tačnog i efikasnog metoda za rešavanja nelinearnih jednačina pri analizi armiranobetonskih konstrukcija.

Metode za rešavanje sistema nelinearnih jednačina mogu se svrstati u tri osnovne grupe:

- (a) inkrementalne metode
- (b) iterativne (Newton-ove) metode
- (c) mešovite (inkrementalno-iterativne) metode

Suština inkrementalne metode sastoji se u podeli ukupnog opterećenja na niz manjih delova, inkremenata, pri čemu se pretpostavlja da je u okviru svakog od njih sistem jednačina linearan. Na taj način, rešenje nelinearnog problema dobija se kao zbir niza linearnih rešenja. Jasno da izbor veličine inkrementa opterećenja ima odlučujuću ulogu na tačnost dobijenog rešenja. Sa jedne strane izborom što manjeg inkrementa opterećenja dobija se rešenje koje konvergira ka tačnom, međutim sa druge strane mali inkrementi znatno povećavaju ukupne troškove rada računara.

Kod iterativnih metoda, za razliku od inkrementalnih, postupak



aproksimacije izvodi se pri ukupnom opterećenju. U svakom koraku iteracije tangentna matrica krutosti ima konstantnu vrednost, što ima za posledicu pojavu neuravnoteženog opterećenja. Neuravnotežena (rezidualna) opterećenja računavaju se posle svake iteracije i uzimaju u obzir pri sledećoj iteraciji. Na taj način sukcesivno se vrši korekcija rešenja dok se ne ispune uslovi ravnoteže.

U praktičnim rešenjima nelinearnih problema najčešće se koriste mešovite metode, koje predstavljaju kombinaciju inkrementalnih i iterativnih metoda. Opterećenje se deli na niz inkremenata  $a$  u okviru svakog od njih vrše se iteracije, kako bi se izbalansiralo neuravnoteženo opterećenje. Zavisno od načina iteracije imamo različite mešovite metode.

U prethodnim poglavljima izložena je inkrementalna formulacija za analizu armiranobetonskih ploča konačnim elementima. Ona omogućava praćenje kompletnog odgovora konstrukcije sve do konačnog kolapsa. U sledećem će biti izložene neke od metoda za rešavanje nelinearnih jednačina koje se formiraju pri ovoj analizi.

## 4.2. NEWTON-RAPHSON-OVE METODE

### 4.2.1. Standardna Newton-Raphson-ova metoda

Kao što smo već napomenuli najveći broj inkrementalnih postupaka za rešavanje nelinearnih jednačina kombinuje se sa iterativnim metodama da bi se izbalansiralo neuravnoteženo opterećenje ( $\underline{\psi}$ ). Sistem nelinearnih jednačina, za neki inkrement opterećenja  $n$ , u opštem slučaju možemo predstaviti kao

$$\underline{\psi}(\underline{\hat{a}}^n) = \underline{0} \quad (4.1)$$

gde su

$$\underline{\psi}(\underline{\hat{a}}^n) = \underline{r}(\underline{\hat{a}}^n) - \underline{f}^n \quad (4.2)$$

$\underline{\psi}$  - vektor neuravnoteženog (rezidualnog) opterećenja,

$\underline{f}^n$  - vektor spoljašnjih sila u čvorovima pri inkrementu opterećenja  $n$ ,

$\underline{r}^n$  - vektor unutrašnjih sila u čvorovima, koje su ekvivalentne naponima u elementima na kraju inkrementa opterećenja  $n$  i

$\hat{\underline{a}}^n$  - vektor pomeranja koji želimo da odredimo.

Vektor  $\underline{r}^n$  se u skladu sa definicijom vektora napona iz Poglavlja 3 može izraziti kao

$$\underline{r}^n = \int_V (\underline{B}_1^n)^T \underline{\sigma}_1^n dV + \int_V (\underline{B}_2^n)^T \underline{\sigma}_2^n dV \quad (4.3)$$

Neka je u iterativnom procesu određeno aproksimativno rešenje  $\underline{a}_i^n$  jednačine (4.1), gde indeks  $i$  označava broj tekuće iteracije. Razvijanjem funkcije  $\psi(\underline{a}^n)$  u Taylor-ov red dobijamo

$$\psi(\hat{\underline{a}}^n) = \psi(\underline{a}_i^n) + \left| \frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} \right|_{\underline{a}_i^n} \delta \underline{a}_i^n \quad (4.4)$$

gde su članovi višeg reda zanemareni. Izraz

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \underline{a}} \right|_{\underline{a}_i^n} = \underline{k}_T^n \quad (4.5)$$

pretstavlja tangentnu matricu krutosti u  $i$ -toj iteraciji. Ako umesto vektora  $\hat{\underline{a}}^n$  iskoristimo njegovu aproksimaciju  $\underline{a}_{i+1}^n$  koristeći jednačine (4.1) i (4.4) dobijamo

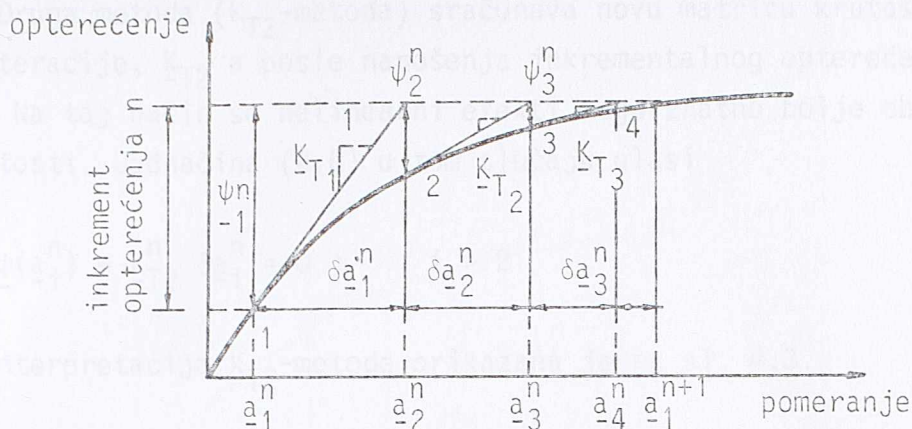
$$\psi(\underline{a}_i^n) + \underline{k}_T^n \delta \underline{a}_i^n = 0 \quad (4.6)$$

odakle računavamo priraštaj pomeranja  $\delta \underline{a}_i^n$ . Sledeću aproksimaciju pomeranja određujemo kao

$$\underline{a}_{i+1}^n = \underline{a}_i^n + \eta_i^n \delta \underline{a}_i^n \quad (4.7)$$

gde je  $\eta_i^n$  skalarni multiplikator, koji se naziva dužina koraka, a može se odrediti posebnim postupkom ispitivanja ("line search") duž pravca  $\delta \underline{a}_i^n$  u cilju redukovanja veličine  $\psi_{i+1}^n$ . U slučajevima kada se ovaj postupak ne sprovodi skalar  $\eta_i^n$  jednak je jedinici. Jednačinama (4.6) i (4.7) definisan je Newton-Raphson-ov metod rešavanja jednačina (4.1). Grafička interpretacija ovog metoda za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja prikazana je na sl. 4.1.





Sl. 4.1. Standardna Newton-Raphson-ova metoda za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

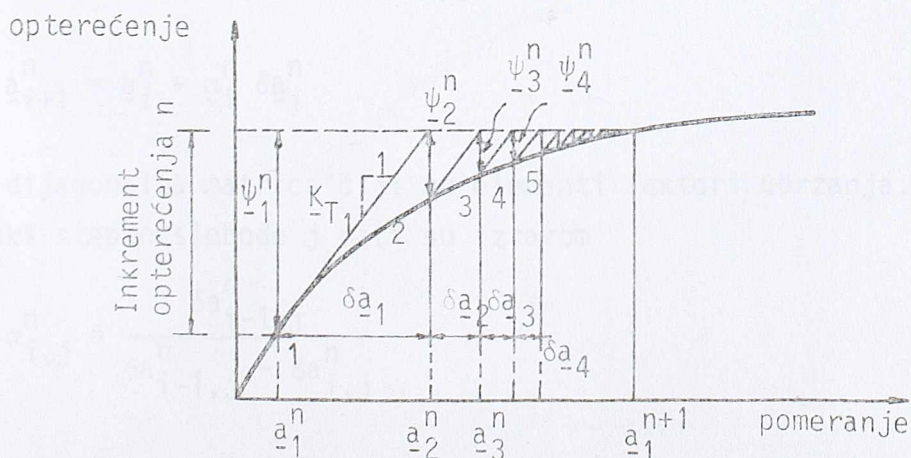
#### 4.2.2. Modifikovane Newton-Raphson-ove metode

U standardnoj Newton-Raphson-ovoj metodi, kao što je prikazano na sl. 4.1, u svakoj iteraciji sračunavamo novu tangencijalnu matricu krutosti i rešavamo kompletno nov sistem jednačina. To značajno poskupljuje troškove rada računara. Da bi se otklonio ovaj nedostatak predložene su različite modifikovane metode, koje se baziraju samo na povremenoj promeni matrice krutosti.

Prva od modifikovanih Newton-Raphson-ovih metoda je ona u kojoj se matrica krutosti sračunava na početku svakog inkrementa,  $K_{T1}$  i zadržava konstantnom tokom iteracija. U tom slučaju jednačina (4.6) glasi

$$\psi(\underline{a}_i^n) + K_{T1}^n \delta \underline{a}_i^n = 0, \quad i > 1 \quad (4.8)$$

Grafička interpretacija  $K_{T1}$ -metode prikazana je na sl. 4.2.

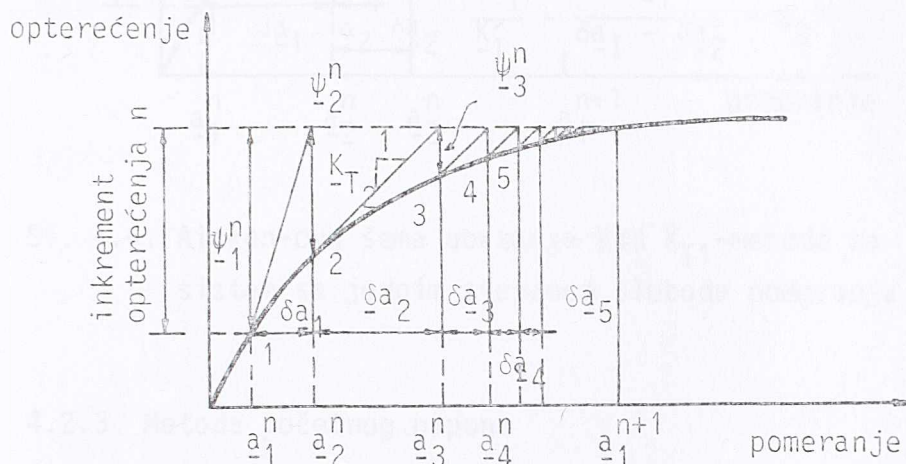


Sl. 4.2. Modifikovana Newton-Raphson-ova  $K_{T1}$ -metoda za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

Druga metoda ( $K_{T2}$ -metoda) sračunava novu matricu krutosti na početku druge iteracije,  $K_{T2}$  a posle nanošenja inkrementalnog opterećenja u prvoj iteraciji. Na taj način se nelinearni efekti mogu znatno bolje obuhvatiti matricom krutosti. Jednačina (4.6) u tom slučaju glasi

$$\psi(\underline{a}_i^n) + K_{T2}^n \delta \underline{a}_i^n = 0 ; \quad i > 2 \quad (4.9)$$

Grafička interpretacija  $K_{T2}$ -metode prikazana je na sl. 4.3.



Sl. 4.3. Modifikovana Newton-Raphson-ova  $K_{T2}$ -metoda za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

Primenom modifikovanih metoda postiže se ekonomičnost u pogledu formiranja matrica krutosti ali se usporava konvergencija procesa, odnosno potreban je znatno veći broj iteracija. Da bi modifikovane metode bile efikasnije primenjuju se šeme za ubrzanje iterativnog procesa. Jedna od najčešće primenjivanih šema za ubrzanje je Aitken-ova šema, gde se umesto izraza (4.7) koristi

$$\underline{a}_{i+1}^n = \underline{a}_i^n + \alpha_i^n \delta \underline{a}_i^n \quad (4.10)$$

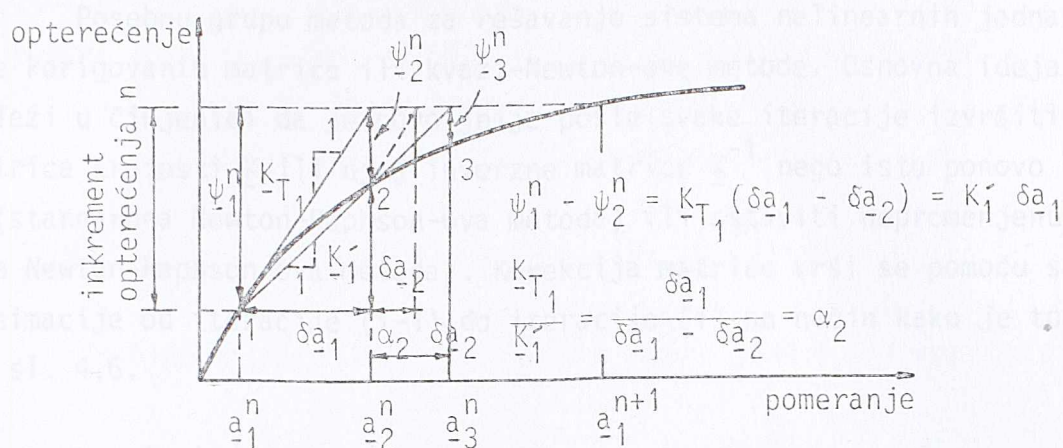
gde je  $\alpha_i^n$  dijagonalna matrica čiji su elementi faktori ubrzanja. Faktori ubrzanja za svaki stepen slobode  $j$  dati su izrazom

$$\alpha_{i,j}^n = \frac{\delta a_{i-1,j}^n}{\delta a_{i-1,j}^n - \delta a_{i,j}^n} \quad (4.11)$$

Ovo ubrzanje može se primeniti samo posle svake druge iteracije, pošto šema ubrzanja procenjuje odnos originalne tangencijalne krutosti prema lokalnoj se-



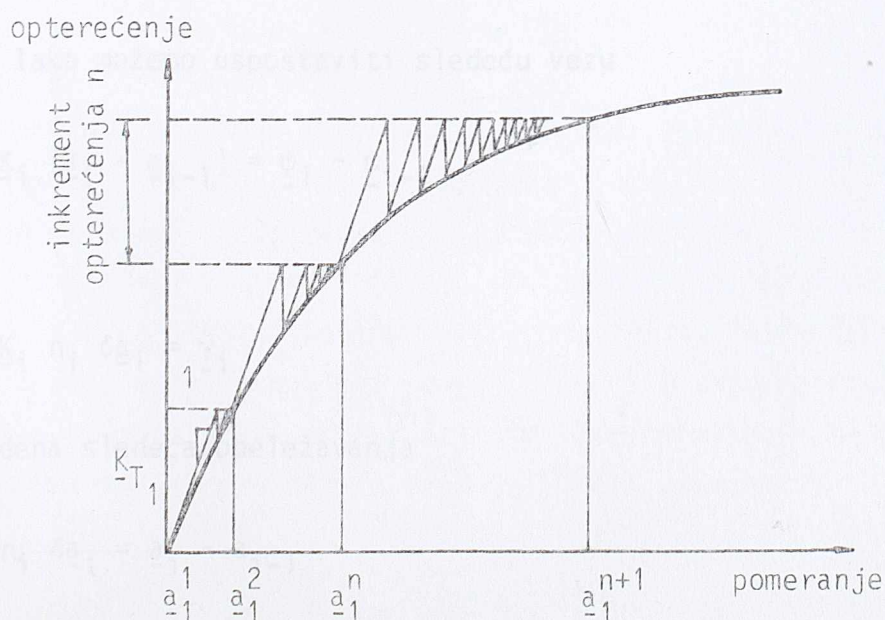
kantnoj krutosti. Na sl. 4.4 prikazana je grafička interpretacija Aitken-ove šeme ubrzanja kod  $K_{T1}$ -metode.



Sl. 4.4. Aitken-ova šema ubrzanja kod  $K_{T1}$ -metode za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

#### 4.2.3. Metoda početnog napona

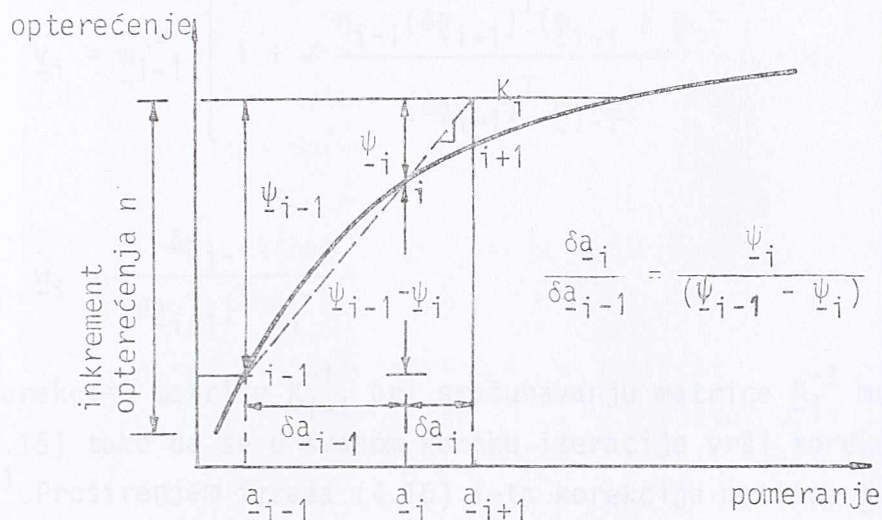
Iako su ovu metodu predložili Zienkiewicz i ostali<sup>4.1</sup> ona se može smatrati kao modifikacija Newton-Raphson-ovog algoritma, gde se umesto matrice  $K_{T1}^n$  u izrazu (4.6) usvaja početna matrica krutosti  $K_{T1}^1 = K_0$ , koja se zadržava konstantnom pri svakom inkrementu opterećenja i pri svakoj iteraciji (sl. 4.5). Kako ovaj metod pretstavlja linearizaciju rešenja prema početnoj elastičnoj matrici krutosti to za posledicu ima veoma sporu konvergenciju.



Sl. 4.5. Metoda početnog napona za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

## 4.3. METODE KORIGOVANIH MATRICA

Posebnu grupu metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina čine metode korigovanih matrica ili kvazi-Newton-ove metode. Osnovna ideja ovih metoda leži u činjenici da je povoljnije posle svake iteracije izvršiti korekciju matrice krutosti  $\underline{K}$  ili njoj inverzne matrice  $\underline{K}^{-1}$  nego istu ponovo sračunavati (standardna Newton-Raphson-ova metoda) ili ostaviti nepromenjenu (modifikovana Newton-Raphson-ova metoda). Korekcija matrice vrši se pomoću sekantne aproksimacije od iteracije  $(i-1)$  do iteracije  $(i)$  na način kako je to prikazano na sl. 4.6.



Sl. 4.6. Sekantna aproksimacija za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja

Sa sl. 4.6 lako možemo uspostaviti sledeću vezu

$$\underline{K}_i (a_i - a_{i-1}) = \underline{\psi}_i - \underline{\psi}_{i-1} \quad (4.12)$$

ili

$$\underline{K}_i \eta_i \delta a_i = \underline{\gamma}_i \quad (4.13)$$

gde su uvedena sledeća obeležavanja

$$\eta_i \delta a_i = a_i - a_{i-1} \quad (4.14)$$



$$\underline{\gamma}_i = \underline{\psi}_i - \underline{\psi}_{i-1} \quad (4.15)$$

Korigovana matrica  $\underline{K}_i$  mora da zadovolji relacije definisane jednačinom (4.12) odnosno (4.13). Postoji niz formula na osnovu kojih se vrši korekcija matrice  $\underline{K}_i$ . Najpoznatija medju njima je BFGS formula (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) koju su uveli u metodu konačnih elemenata Matthies i Strang<sup>4.2</sup>. Po njoj, korigovana matrica krutosti može se prikazati u obliku

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{A}_i^T (\underline{K}_{i-1})^{-1} \underline{A}_i = (\underline{I} + \underline{w}_i \underline{v}_i^T) (\underline{K}_{i-1})^{-1} (\underline{I} + \underline{v}_i \underline{w}_i^T) \quad (4.16)$$

gde je  $\underline{I}$  jednačina matrica. Vektori  $\underline{v}_i$  i  $\underline{w}_i$  definisani su sledećim izrazima

$$\underline{v}_i = \underline{\psi}_{i-1} \left[ 1 + \sqrt{\frac{\eta_{i-1} (\delta \underline{a}_{i-1})^T (\underline{\psi}_{i-1} - \underline{\psi}_i)}{(\delta \underline{a}_{i-1})^T \underline{\psi}_{i-1}}} \right] - \underline{\psi}_i \quad (4.17)$$

i

$$\underline{w}_i = \frac{\delta \underline{a}_{i-1}}{(\delta \underline{a}_{i-1})^T \underline{\gamma}_i} \quad (4.18)$$

Umesto korekcije matrice  $\underline{K}_{i-1}^{-1}$  pri sračunavanju matrice  $\underline{K}_i^{-1}$  možemo proširiti izraz (4.16) tako da se u svakom koraku iteracije vrši korekcija početne matrice  $\underline{K}_1^{-1}$ . Proširenjem izraza (4.16) i-ta korekcija matrice  $\hat{\underline{K}}_1^{-1}$  glasi

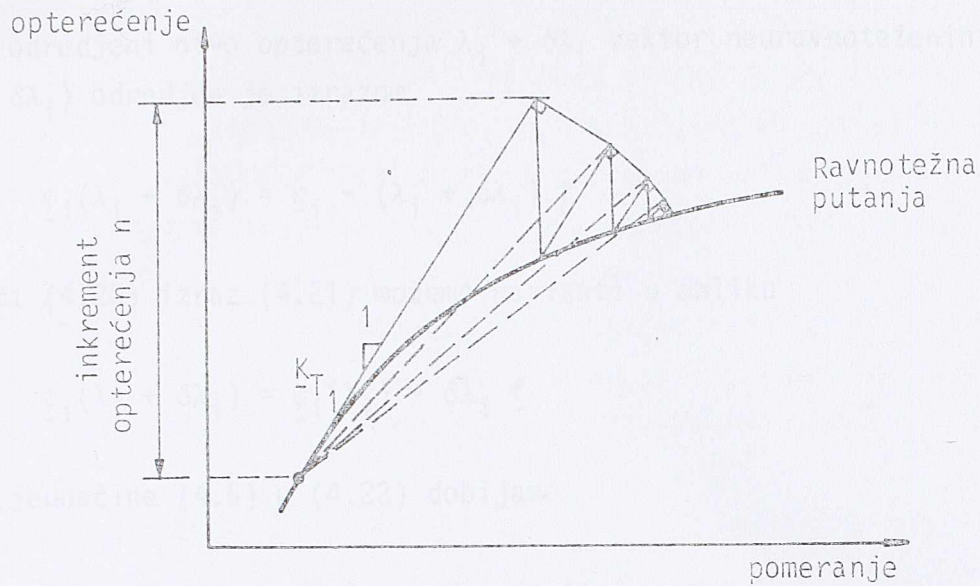
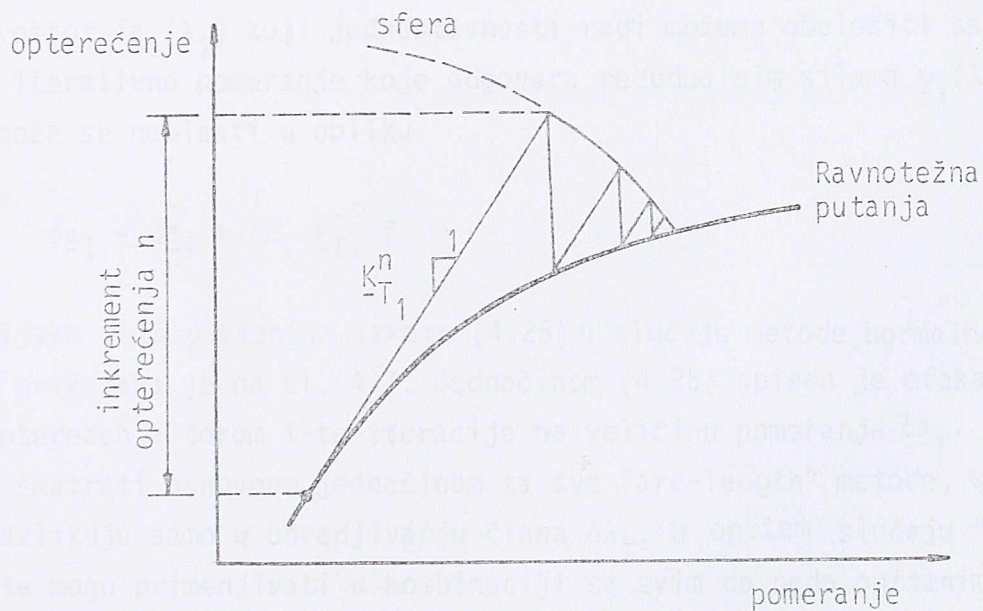
$$\underline{K}_i^{-1} = \left| \prod_{j=i}^2 (\underline{I} + \underline{w}_j \underline{v}_j^T) \right| (\hat{\underline{K}}_1)^{-1} \left| \prod_{j=2}^i (\underline{I} + \underline{v}_j \underline{w}_j^T) \right| \quad (4.19)$$

pri čemu korekcije počinju od druge iteracije ( $i=2$ ) ako je  $\hat{\underline{K}}_1 = \underline{K}_0$  ili  $\hat{\underline{K}}_1 = \underline{K}_{T1}$  odnosno od treće ( $k=3$ ) ako je  $\hat{\underline{K}}_1 = \underline{K}_{T2}$ .

U ovu grupu metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina spadaju i sekant-Newton-ove metode, koje je predložio Crisfield<sup>4.3-4.4</sup>. Osnovna razlika sa prethodnim metodama je da se korekcija matrice krutosti u bilo kojoj iteraciji  $i$  vrši na matrici krutosti koja je sračunata na početku inkrementa opterećenja  $\underline{K}_{T1}$ , umesto na matrici korigovanoj u prethodnoj iteraciji  $\underline{K}_{i-1}$  (4.16). Za razliku od BFGS metode koja pri svakoj iteraciji zahteva sračunavanje i smeštanje u memoriju novog para vektora ( $\underline{v}, \underline{w}$ ) u Sekant-Newton-ovim metodama nema potrebe za memorisanjem prethodnih vrednosti ovih vektora.





Sl. 4.8. Metoda tangentnog luka (sa  $K_{T1}$ )Sl. 4.9. Metoda sfernog luka (sa  $K_{T1}^n$ )

U "arc-length" metodama pretpostavljamo da je spoljašnje opterećenje proporcionalno faktoru opterećenja  $\lambda$ . Vektor neuravnoteženih sila  $\underline{\psi}_i$ , za nivo opterećenja  $\lambda_i$ , glasi

$$\underline{\psi}_i = \underline{r}_i - \lambda_i \underline{f} \quad (4.20)$$

Za neki odredjeni nivo opterećenja  $\lambda_i + \delta\lambda_i$  vektor neuravnoteženih sila  $\underline{\psi}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i)$  odredjen je izrazom

$$\underline{\psi}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \underline{r}_i - (\lambda_i + \delta\lambda_i) \underline{f} \quad (4.21)$$

Koristeći (4.20) izraz (4.21) možemo napisati u obliku

$$\underline{\psi}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \underline{\psi}_i(\lambda_i) - \delta\lambda_i \underline{f} \quad (4.22)$$

Zamenom jednačine (4.6) u (4.22) dobijamo

$$- \underline{K}_{Ti} \delta \underline{a}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = - \underline{K}_{Ti} \delta \underline{a}_i(\lambda_i) - \delta\lambda_i \underline{f} \quad (4.23)$$

Ako (4.23) pomnožimo sa  $(- \underline{K}_{Ti}^{-1})$  sledi izraz

$$\delta \underline{a}_i(\lambda_i + \delta\lambda_i) = \delta \underline{a}_i(\lambda_i) + \delta\lambda_i \underline{K}_{Ti}^{-1} \underline{f} \quad (4.24)$$

U kome vektor  $\delta \underline{a}_i(\lambda_i)$  koji jednostavnosti radi možemo obeležiti sa  $\hat{\delta \underline{a}}_i$ , predstavljajući iterativno pomeranje koje odgovara rezidualnim silama  $\underline{\psi}_i(\lambda_i)$ . Izraz (4.24) može se napisati u obliku

$$\delta \underline{a}_i = \hat{\delta \underline{a}}_i + \delta\lambda_i \underline{K}_{Ti}^{-1} \underline{f} \quad (4.25)$$

Geometrijska interpretacija izraza (4.25) u slučaju metode normalne ravni sa  $\underline{K}_{Ti}$ -metodom prikazana je na sl. 4.7. Jednačinom (4.25) opisan je efekat promene nivoa opterećenja tokom  $i$ -te iteracije na veličinu pomeranja  $\delta \underline{a}_i$ . Ova jednačina se može smatrati osnovnom jednačinom za sve "arc-length" metode, koje se praktično razlikuju samo u odredjivanju člana  $\delta\lambda_i$ . U opštem slučaju "arc-length" metode se mogu primenjivati u kombinaciji sa svim do sada opisanim metodama; standardnim i modifikovanim Newton-Raphson-ovim, kvazi-Newton-ovim BFGS ili sekant-Newton-ovim metodama.



## 4.5. KRITERIJUMI KONVERGENCIJE

Inkrementalno iterativni postupak rešavanja sistema nelinearnih jednačina zahtevaju definisanje pogodnih kriterijuma za završetak iterativnog postupka. Na kraju svake iteracije proverava se da li dobijeno rešenje konvergira u odredjenim granicama tolerancije ili divergira. Granice tolerancije se moraju realno postaviti; ako je tolerancija suviše gruba dobijaju se nedovoljno tačni rezultati a ako je pak suviše fina nepotrebno se povećavaju troškovi računara. Uslovi konvergencije, koji se primenjuju u nelinearnim analizama, definišu se po pomeranjima, po neuravnoteženim (rezidualnim) silama i po unutrašnjoj energiji.

Standardni kriterijum konvergencije po pomeranjima glasi

$$e_j = \frac{\|\delta a\|_i^j}{\|a\|_i^j} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (4.26)$$

ili

$$e_t = \frac{\|\delta a\|_i}{\|a\|_i} \times 100 \leq (\text{TOLER})_t \quad (4.27)$$

pri čemu je  $\|\delta a\|_i^j$  Euclidean-ova norma vektora  $\delta \underline{a}$  data u obliku

$$\|\delta a\|_i^j = \left( \sum_{n=1}^{NP} \delta a_n^2 \right)^{1/2} \quad (4.28)$$

gde je

$$\delta \underline{a}^T = |\delta a_1 \ \delta a_2 \ \dots \ \delta a_{NP}| \quad (4.29)$$

Indeksi  $i$  i  $j$  odnose se na broj iteracije, odnosno na pravac pomeranja a NP je ukupan broj čvornih tačaka. Veličina  $(\text{TOLER})_j$  je dozvoljena procentualna tolerancija pomeranja za pravac  $j$ . Izraz (4.26) je kriterijum konvergencije pomeranja za pravac  $j$ , dok je (4.27) kriterijum konvergencije za sve stepene slobode pomeranja.

Standardni kriterijum konvergencije po rezidualnim silama glasi

$$e_j = \frac{\|\psi\|_i^j}{\|f\|_i^j} \times 100 \leq (\text{TOLER})_j \quad (4.30)$$

ili

$$e_t = \frac{\|\psi\|_i}{\|f\|_i} \times 100 \leq (\text{TOLER})_t \quad (4.31)$$

gde  $\underline{\psi}$  predstavlja vektor neuravnoteženih (rezidualnih) sila a  $\underline{f}$  vektor opterećenja.

Kriterijum konvergencije po unutrašnjoj energiji dobija se upoređenjem inkrementa unutrašnje energije u  $i$ -toj iteraciji sa početnim inkrementom unutrašnje energije. Ovaj kriterijum možemo napisati u obliku

$$e = \frac{\underline{\psi}_i^T \delta \underline{a}_i}{\underline{\psi}_1^T \delta \underline{a}_1} \times 100 \leq \text{TOLER} \quad (4.32)$$

#### 4.3 Crisfield, N.A.

"An Incremental Solution Procedure for Non-Linear Problems" in "Numerical Methods for Non-Linear Problems" by C. Taylor, E. Hinton and D.R.J. Owen (eds.), Pitman Press, Swansea, U.K., 1980, pp. 281-290.

#### 4.4 Crisfield, N.A.

"Solution Procedures for Non-Linear Structures" in "Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics" by E. Hinton, D.R.J. Owen and C. Taylor (eds.), Pitman Press, Swansea, U.K., 1982, pp. 1-40.

#### 4.5 Wagner, G.A.

"Discrete Approximations Related to Nonlinear Properties of Solids" Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1971, pp. 1581-1599.

#### 4.6 Riks, E.

"An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 15, 1979, pp. 529-551.

#### 4.7 Crisfield, N.A.

"An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations" Int. J. Num. Meth. Engrg., Vol. 19, 1983, pp. 1269-1291.

#### 4.8 Riks, E.

"The Riks/Amptol Approach - An Extension of the Displacement Control Method to Non-Linear Analysis" in "Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics" by E. Hinton, D.R.J. Owen and C. Taylor (eds.) Pitman Press, Swansea, U.K., 1982, pp. 53-76.



## 4.6. LITERATURA

- 4.1 Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S. and King, I.P.  
"Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems  
'Initial Stress' Finite Element Approach",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 1, 1969, pp. 75-100.
- 4.2 Matthies, H. and Strang, G.  
"The Solution of Nonlinear Finite Element Equations",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, 1979, pp. 1613-1626.
- 4.3 Crisfield, M.A.  
"Incremental/Iterative Solution Procedure for  
Nonlinear Structural Analysis" in  
"Numerical Methods for Nonlinear Problems" by  
C. Taylor, E. Hinton and D.R.J. Owen (eds.), Pineridge Press, Swansea,  
U.K., 1980, pp. 261-290.
- 4.4 Crisfield, M.A.  
"Solution Procedures for Non-Linear Structural Problems"  
in "Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics"  
by E. Hinton, D.R.J. Owen and C. Taylor (eds.), Pineridge Press,  
Swansea, U.K., 1982, pp. 1-40.
- 4.5 Wempner, G.A.  
"Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids",  
Int. J. Solids Structures, Vol. 7, 1971, pp. 1581-1599.
- 4.6 Riks, E.  
"An Incremental Approach to the Solution of Snapping  
and Buckling Problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 15,  
1979, pp. 529-551.
- 4.7 Crisfield, M.A.  
"An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations",  
Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 19, 1983, pp. 1269-1289.
- 4.8 Ramm, E.  
"The Riks/Wempner Approach - An Extension of the Displacement Control  
Method in Nonlinear Analysis", in "Recent Advances in Non-Linear  
Computational Mechanics" by E. Hinton, D.R.J. Owen and C. Taylor (eds.)  
Pineridge, Press, Swansea, U.K., 1982, pp. 63-86.

## 5. STRUKTURA RAČUNARSKOG PROGRAMA I BROJNI PRIMERI

### 5.1. UVODNE NAPOMENE

Na osnovu teorijskih razmatranja iznetih u Poglavljima 2 do 4 napisan je program CONPLAT (CONcrete PLATes) za nelinearnu analizu armiranobetonskih ploča metodom konačnih elemenata. Program je napisan na standardnom programskom jeziku FORTRAN, a po obliku je modularan tako da se zamene pojedinih modula (potprograma) mogu vrlo jednostavno izvršiti. U tom smislu usvojen je postupak dinamičkog dimenzionisanja<sup>3.77</sup> gde se DIMENSION naredbe fiksiraju u glavnom programu a sve potrebne informacije izmedju potprograma prenose se preko liste argumenata. Prednost ovog postupka leži u činjenici da se proširenje programa može veoma jednostavno sprovesti, potrebno je samo modifikovati DIMENSION naredbe u glavnom programu. U sledećem ćemo se upoznati sa glavnim karakteristikama programa.

U programu se koriste tri koordinatna sistema:

- (a) Globalni koordinatni sistem (XYZ) je desno orjentisani koordinatni sistem (vidi sl. 3.1) u kome su opisane koordinate čvorova, pomeranja i presečne sile. U programu je usvojena modifikovana definicija rotacija prema kojoj je

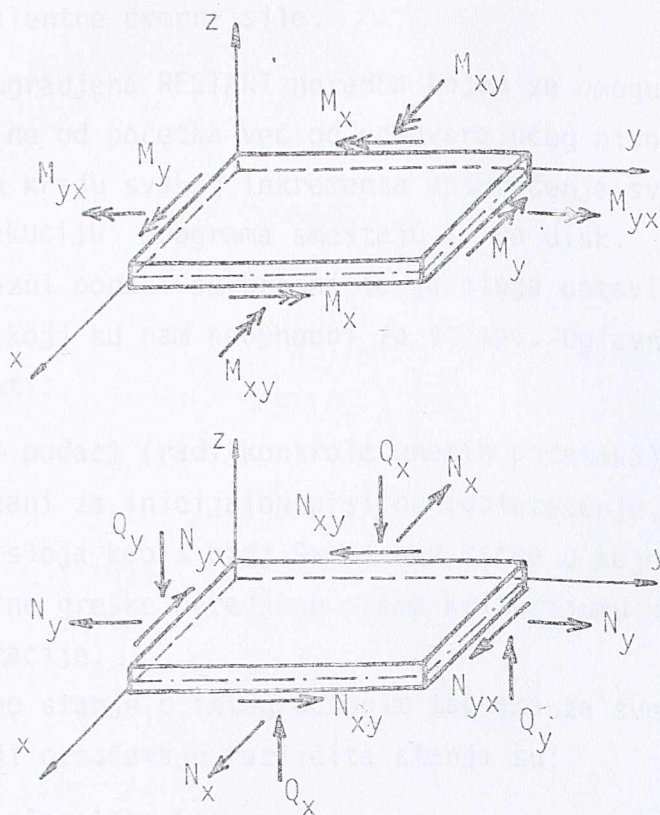
$$\begin{vmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{vmatrix}$$

- (b) Lokalni koordinatni sistem ( $\bar{x} \bar{y} z$ ) je desno orjentisani koordinatni sistem (vidi sl. 2.18) koji se koristi za definisanje karakteristika isprskalog betona i čija se  $\bar{x}$ -osa poklapa sa pravcem prsline.
- (c) Prirodni koordinatni sistem ( $\xi, \eta$ ) primenjuje se u formulaciji konačnog elementa (vidi sl. 3.5).



Pozitivna konvencija za pomeranja i rotacije prikazana je na sl. 3.1.

Pozitivna konvencija za presečne sile prikazana je na sl. 5.1.



Sl. 5.1. Pozitivna konvencija za presečne sile

čvorovi elemenata se obeležavaju u smeru suprotnom od smeru kazaljke na satu na način kako je to prikazano na sl. 3.5.

Elementi se proizvoljno obeležavaju ali vodeći računa da se dobije što manja širina trake u globalnoj matrici krutosti.

U okviru ulaznih podataka definišemo:

- Kontrolne parametre koji određuju problem i način njihovog rešavanja (izbor algoritma).
- Geometrijske podatke o elementima (način povezivanja), čvornim tačkama (za elemente sa pravim stranama dovoljno je definisati samo ugaone tačke), kao i o betonskim i čeličnim slojevima.
- Podatke o graničnim uslovima, u čvoru može biti sprečen jedan ili više ( $u, v, w, \psi_x, \psi_y$ ) stepeni slobode (celobrojna 1 označava sprečeno a 0 slobodno pomeranje).
- Fizičke karakteristike materijala (betona i čelika) kao i podatke o "tension stiffening" krivama.



- (f) Podatke o izboru kriterijuma konvergencije.
- (g) Podatke o opterećenju, pri čemu možemo direktno učitati čvorne sile, jednako raspodeljeno opterećenje po elementu ili zadato pomeranje čvora (sleganje oslonca). Sve druge vrste opterećenja mogu se uneti u program kao ekvivalentne čvorne sile.

U program je ugrađena RESTART naredba kojom se omogućava ponovno izvršenje programa i to ne od početka već od odgovarajućeg nivoa na kome je ono prekinuto. Naime na kraju svakog inkrementa opterećenja sve potrebne informacije za dalju egzekuciju programa smeštaju se na disk.

Izlazni podaci su brojni te je stoga ostavljena mogućnost izbora onih podataka koji su nam neophodni za štampu. Uglavnom kao izlazni podaci mogu se štampati:

- (a) Svi ulazni podaci (radi kontrole unetih podataka).
- (b) Podaci vezani za inicijalnu prslinu (opterećenje, broj elementa, broj betonskog sloja kao i broj Gauss-ove tačke u kojoj se ona pojavila).
- (c) Procentualne greške određene prema kriterijumu konvergencije na kraju svake iteracije.
- (d) Materijalno stanje u integracionim tačkama za sve slojeve i elemente. Kodovi koji označavaju različita stanja su:
  - (1) elastičan beton
  - (2) jednostruko isprskali beton
  - (3) dvostruko isprskali beton
  - (6) plastični beton
  - (7) zdrobljeni beton
  - (8) elastični čelik
  - (9) plastični čelik
- (e) Generalisana pomeranja ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ) u svim unapred specificiranim čvornim tačkama.
- (f) Reakcije u svim oslonačnim tačkama.
- (g) Naponi  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  u Gauss-ovim tačkama za sve slojeve unapred specificiranih elemenata.
- (h) Presečne sile  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  kao i  $Q_x$  i  $Q_y$  u Gauss-ovim tačkama za unapred specificirane elemente.
- (i) Pravci prslina u Gauss-ovim tačkama za gornju i donju površ ploče za unapred specificirane elemente.

Svi ovi podaci mogu se dobiti na početku i na kraju svakog inkrementa opterećenja.



Ograničenja unutar programa odnose se na broj: konačnih elemenata (max 150), čvorova (325), sprečenih pomeranja (50), grupa materijalnih karakteristika (10), različitih šema slojeva (5), betonskih slojeva (10) i čeličnih slojeva (4).

U program je ugradjen niz potprograma koji su ranije publikovani (vidi reference [2.19], [3.17]; [3.19], [5.3-5.5]).

## 5.2. DIJAGRAM TOKA PROGRAMA

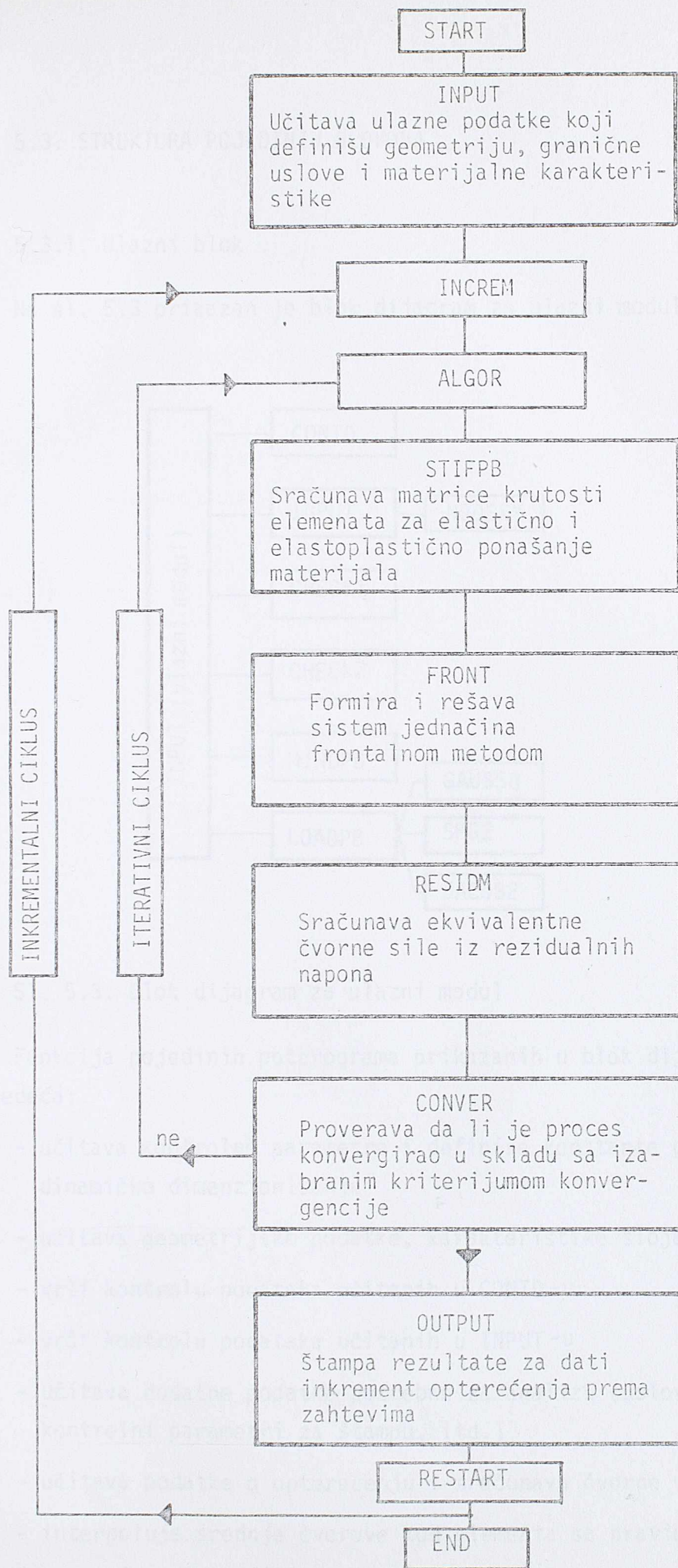
Program se sastoji iz glavnog programa i niza potprograma koji se mogu podeliti u šest glavnih delova, i to:

- (a) ulazni blok,
- (b) formiranje matrica krutosti elemenata,
- (c) formiranje i rešavanje sistema jednačina,
- (d) računanje napona i rezidualnih sila,
- (e) provera konvergencije i
- (f) izlazni blok (štampanje rezultata)

Opšta struktura programa data je na sl. 5.2.



Sl. 5.2. Blok dijagram programa STPIA



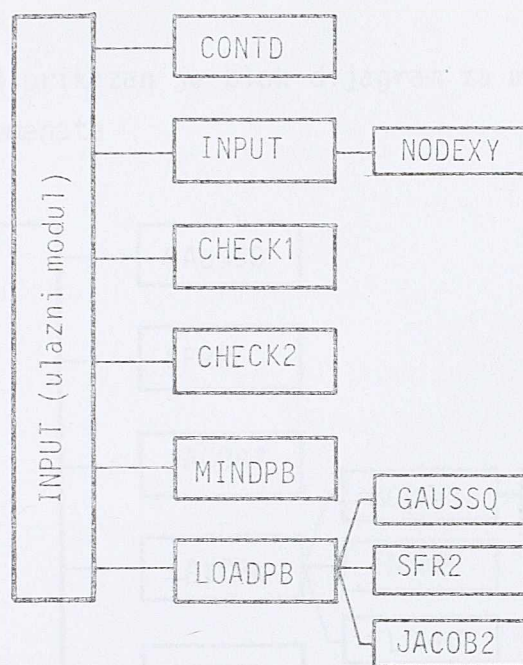
S1. 5.2. Blok dijagram programa CONPLAT



### 5.3. STRUKTURA POJEDINIH BLOKOVA

#### 5.3.1. Ulazni blok

Na sl. 5.3 prikazan je blok dijagram za ulazni modul INPUT.



Sl. 5.3. Blok dijagram za ulazni modul

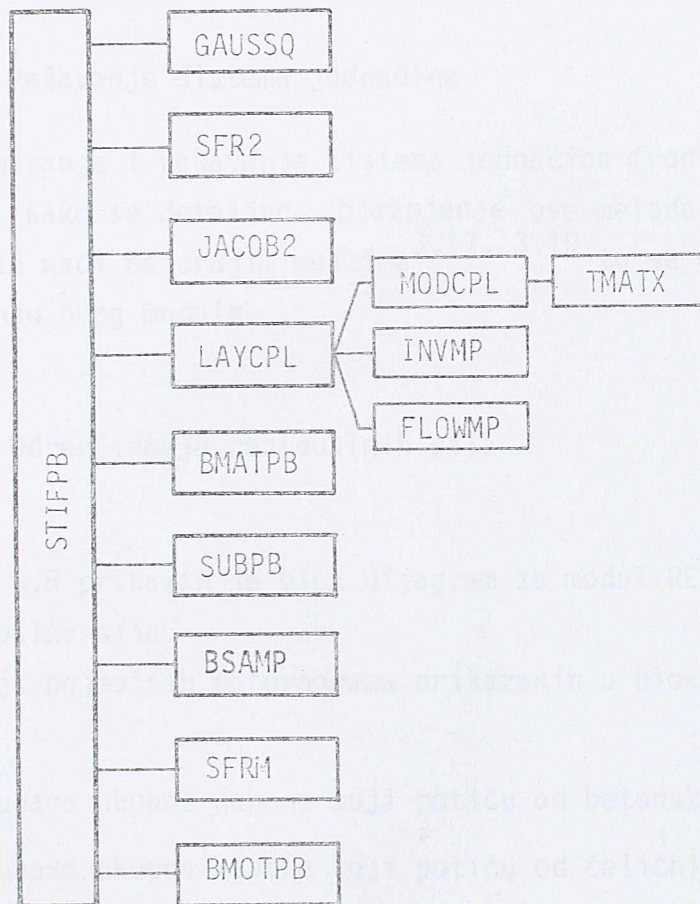
Funkcija pojedinih potprograma prikazanih u blok dijagramu na sl. 5.3 je sledeća:

- CONTD - učitava kontrolne parametre i definiše konstante potrebne za dinamičko dimenzionisanje
- INPUT - učitava geometrijske podatke, karakteristike slojeva i materijala
- CHECK1 - vrši kontrolu podataka učitanih u CONTD-u
- CHECK2 - vrši kontrolu podataka učitanih u INPUT-u
- MINDPB - učitava dodatne podatke potrebne za analizu (uslovi konvergencije, kontrolni parametri za štampu, itd.)
- LOADPB - učitava podatke o opterećenju i sračunava čvorne sile
- NODEXY - interpoluje srednje čvorove kod elementa sa pravim stranama
- GAUSSQ - utvrđuje položaj integracionih tačaka i vrednosti koeficijenata za Gauss-Legendre-ovu numeričku integraciju

- SFR2 - sračunava funkcije oblika  $N_i$  kao i izvode  $N_{i,\xi}$  i  $N_{i,\eta}$  u Gauss-ovim tačkama
- JACOB2 - sračunava vrednost Jacobian-ove matrice  $\underline{J}$  kao i  $\underline{J}^{-1}$ ,  $\det \underline{J}$ ,  $N_{i,x}$ ,  $N_{i,y}$  i koordinate Gauss-ovih tačaka.

### 5.3.2. Sračunavanje matrice krutosti

Na sl. 5.4 prikazan je blok dijagram za modul STIFPB, koji sračunava matrice krutosti elemenata



Sl. 5.4. Blok dijagram za modul STIFPB

Funkcija pojedinih potprograma prikazanih u blok dijagramu na sl. 5.4 je sledeća:

- LAYCPL - formira  $\underline{D}$ -matrice uzimajući u obzir doprinos svakog pojedinog sloja
- BMATPB - formira  $\underline{B}$ -matrice za Mindlin-ove ploče



- SUBPB - sprovodi množenje matrica ( $\underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j$ )
- BSAMP - sračunava  $\underline{B}$ -matricu u 12 tačaka (vidi sl. 3.5)
- SFRM - sračunava funkcije oblika za smicanje  $\bar{\gamma}_{\xi\zeta}$  i  $\bar{\gamma}_{\eta\zeta}$  prema izrazima (3.57)
- BMOTPB - sračunava zamenjujuću  $\bar{\underline{B}}$ -matricu
- MODCPL - sračunava  $\underline{D}$ -matricu za svaki sloj
- INVMP - sračunava invarijante napona i tekuću vrednost funkcije tečenja
- FLOWMP - sračunava vektor tečenja  $\underline{a}$
- TMATX - formira matricu transformacije  $\underline{T}$

### 5.3.3. Rešavanje sistema jednačina

Za formiranje i rešavanje sistema jednačina frontalnom metodom služi blok FRONT. Kako se detaljno objašnjenje ove metode zajedno sa kompletnim programom može naći na drugim mestima<sup>3.17, 3.19</sup> to se ovde nećemo zadržavati na objašnjenju ovog modula.

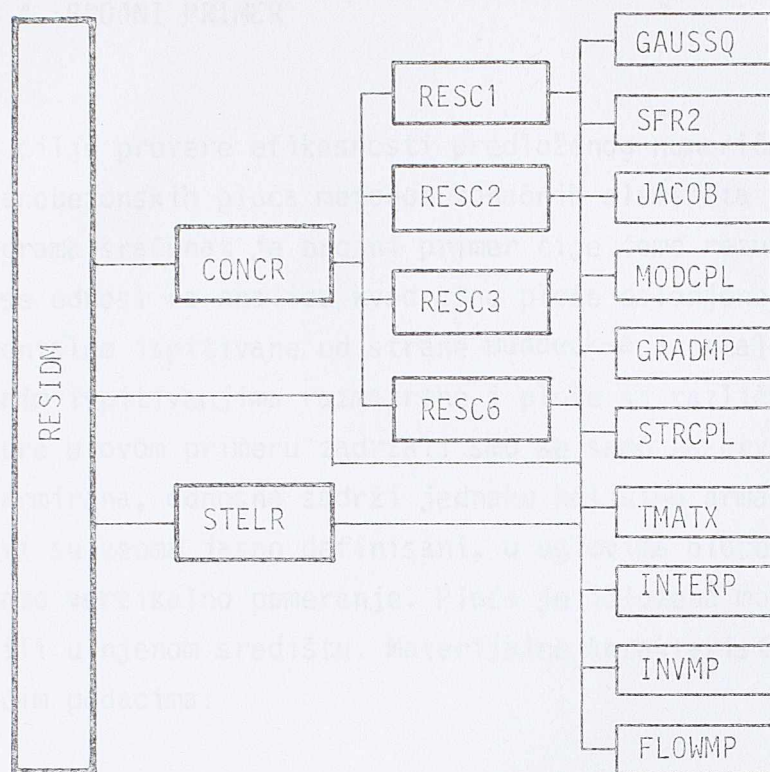
### 5.3.4. Odredjivanje rezidualnih sila

Na sl. 5.5 prikazan je blok dijagram za modul RESIDM, koji sračunava napon i rezidualne sile.

Funkcija pojedinih potprograma prikazanih u blok dijagramu na sl. 5.5 je sledeća:

- CONCR - sračunava ukupne napone koji potiču od betonskih slojeva
- STELR - sračunava ukupne napone koji potiču od čeličnih slojeva
- RESC1 - sračunava napone u elastičnom betonu
- RESC2 - sračunava napone u jednostruko isprskalom betonu
- RESC3 - sračunava napone u dvostruko isprskalom betonu
- RESC6 - sračunava napone u plastičnom betonu
- GRADMP - sračunava ukupne gradijente pomeranja
- STRCPL - sračunava napone u betonskoj ploči
- INTERP - interpoluje napone sa "tension stiffening" krivih.





Sl. 5.5. Blok dijagram za modul RESIDM

### 5.3.5. Konvergencija rešenja

Potprogram CONVER proverava da li je iterativni ciklus konvergirao u skladu sa izabranim kriterijumima konvergencije o kojima je bilo reči u Odeljku 4.5 a u granicama zadatih tolerancija.

### 5.3.6. Izlazni blok

Potprogram OUTPUT kontroliše štampanje izlaznih rezultata u skladu sa zahtevima definisanim u potprogramu MINDPB. Rezultati neophodni za RESTART naredbu smeštaju se na traku (disk) br. 16.



## 5.4. BROJNI PRIMER

U cilju provere efikasnosti predloženog numeričkog postupka za analizu armiranobetonskih ploča metodom konačnih elemenata kao i verifikacije računskog programa sračunat je brojni primer čije ćemo rezultate u sledećem izložiti. On se odnosi na analizu kvadratne ploče oslonjene tačkasto u uglovima a eksperimentalno ispitivane od strane Duddeck-a i ostalih. Iako su pri eksperimentalnim ispitivanjima razmatrane i ploče sa različitim stepenom ortotropije armature u ovom primeru zadržali smo se samo na prvoj ploči S1, koja je izotropno armirana, odnosno sadrži jednaku količinu armature u oba pravca. Granični uslovi su veoma jasno definisani, u uglovima ploče na mestima oslonaca sprečeno je samo vertikalno pomeranje. Ploča je izložena monotono rastućoj koncentrisanoj sili u njenom središtu. Materijalne karakteristike betona i čelika date su sledećim podacima:

## Beton

modul elastičnosti	$E = 16400. \text{ N/mm}^2$
Poisson-ov koeficijent	$\nu = 0.15$
granična čvrstoća na pritisak	$f'_c = 43. \text{ N/mm}^2$
granična čvrstoća na zatezanje	$f'_t = 2.0 \text{ N/mm}^2$
granična dilatacija pri pritisku	$\epsilon_{cu} = 0.0027$
faktor smičuće retenzije	$\beta = 0.5$
"tension-stiffening" kriva	$\alpha = 25.$

## čelik

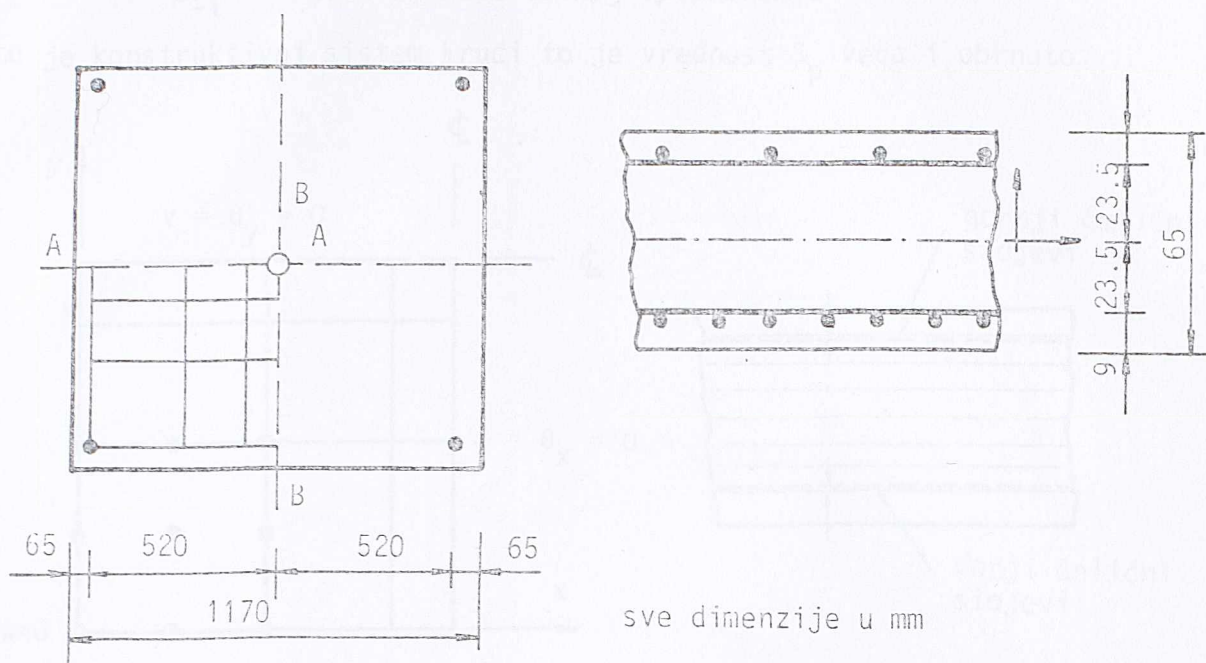
modul elastičnosti	$E = 201000. \text{ N/mm}^2$
granični napon	$f_y = 670. \text{ N/mm}^2$

Dimenzije ploče, način oslanjanja i raspored armature prikazani su na sl. 5.6.

Obzirom na simetriju ploče pri analizi konačnim elementima samo je jedna četvrtina iste razmatrana. Diskretizacija četvrtine ploče mrežom konačnih elemenata (3x3) i granični uslovi duž osa simetrije prikazani su na sl.

5.7. Mreža je progušćena u blizini središta ploče gde se očekuju znatniji nelinearni efekti obzirom na karakter zadatog opterećenja. Po debljini ploča je

aproksimirana sa 8 betonskih slojeva i sa po dva čelična sloja koji reprezen-



Sl. 5.6. Geometrijske karakteristike  
Duddeck-ove ploče

tuju gornju odnosno donju armaturu u x i y pravcu respektivno. Ekvivalentne debljine čeličnih slojeva su:

gornji slojevi  $t_s = 0.193$  mm

donji slojevi  $t_s = 0.397$  mm

Nelinearan problem rešavan je primenom BFGS metode (4.19) sa  $\hat{K}_{-1} = \underline{K}_{-T_1}$  a korišćen je kriterijum konvergencije po rezidualnim silama (4.31) sa dozvoljenom tolerancijom od 1%. Konačan kolaps nastupa kada je tekuća vrednost parametra krutosti manja od 0.01. Parametar krutosti  $S_p$  je skalarna veličina kojom na jednostavan način definišemo krutost konstrukcije tokom inkrementa opterećenja  $n$ . Vrednost parametra  $S_p$  u  $i$ -toj iteraciji definisana je izrazom

$$(S_p)_i^n = \frac{(\|\Delta \underline{f}_{-1}^n\|)^2}{\Delta \underline{a}_{-1}^n \Delta \underline{f}_{-1}^n} \quad (5.1)$$

gde su

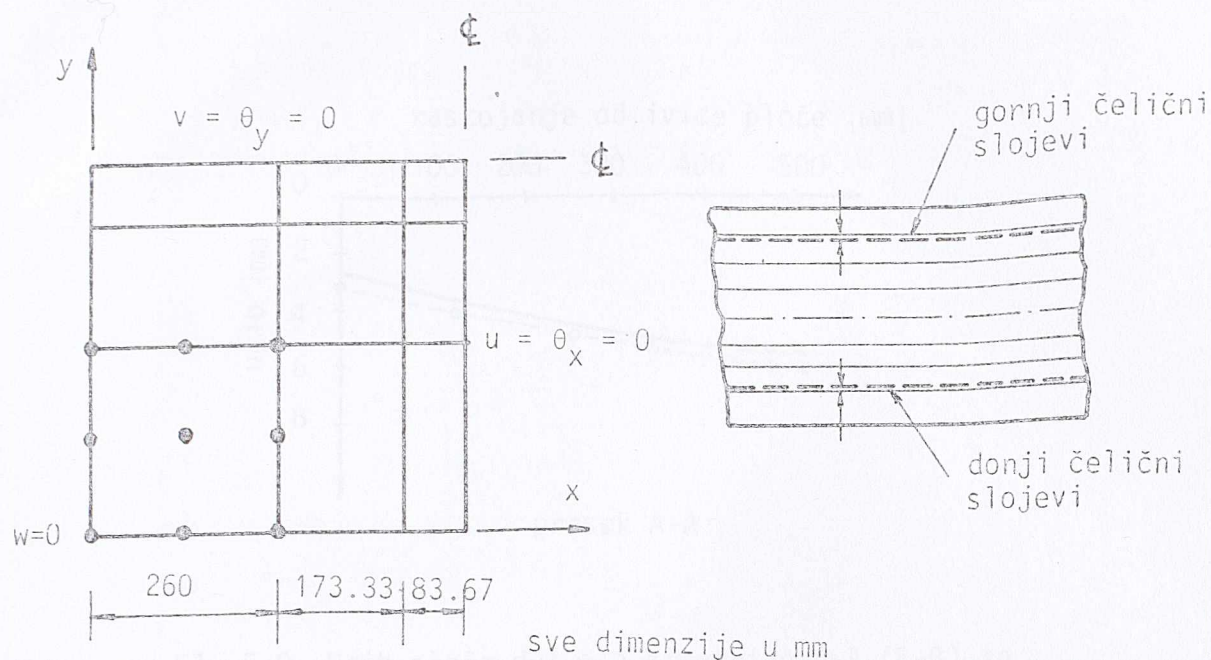
$\|\Delta \underline{f}_{-1}^n\|$  - Euclidean-ova norma vektora inkrementalnog opterećenja  $\Delta \underline{f}_{-1}^n$



$\Delta \underline{a}_i^n$  - vektor inkrementalnih pomeranja

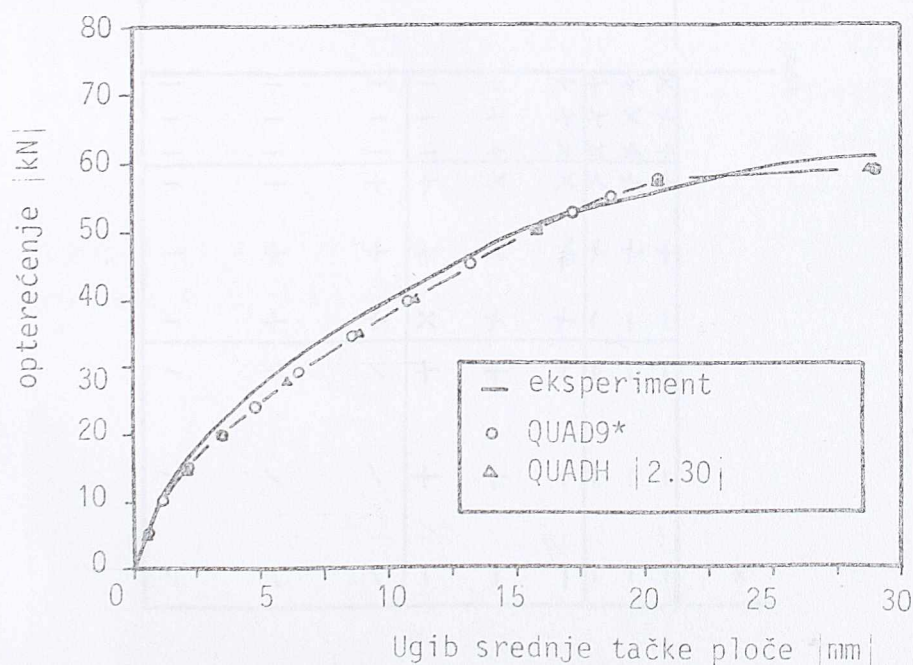
$\Delta \underline{f}_i^n$  - vektor inkrementalnog opterećenja

Što je konstruktivni sistem krući to je vrednost  $S_p$  veća i obrnuto.



S1. 5.7. Idealizacija ploče konačnim elementima

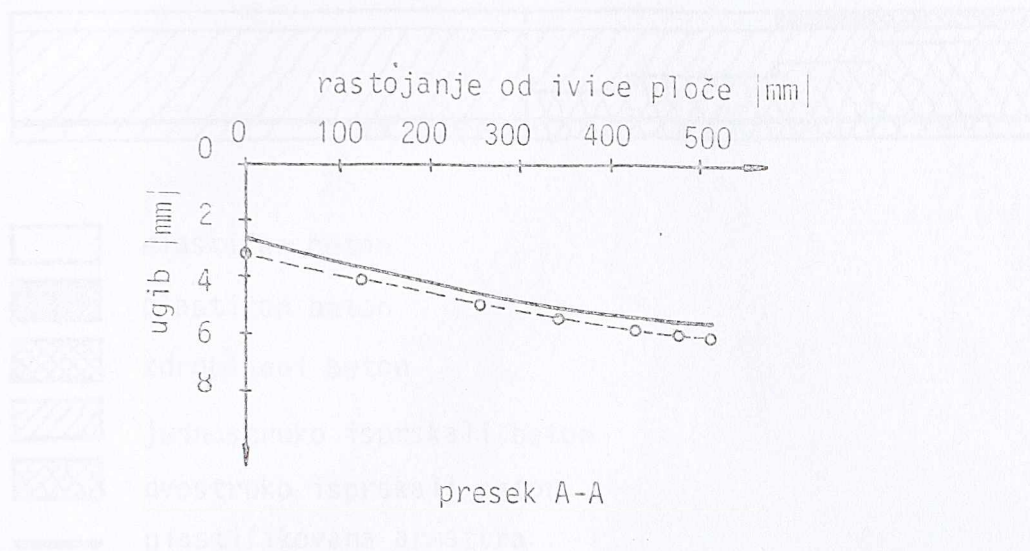
Na sl. 5.8 prikazane su krive opterećenje-ugib srednje tačke ploče dobijene eksperimentalno i numerički. Poredjenje ovih numeričkih rezultata sa



S1. 5.8. Krive opterećenje-ugib srednje tačke za Duddeck-ovu ploču  $S_1$

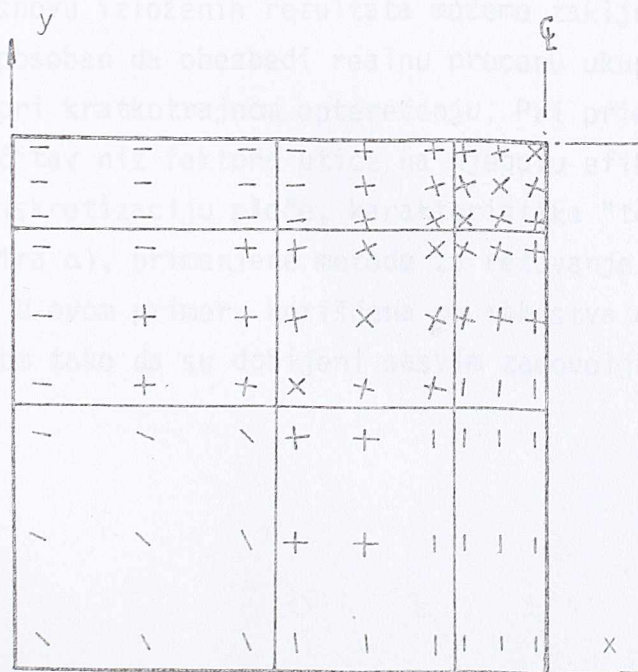
rezultatima<sup>2.30</sup> dobijenim primenom HETEROSIS elementa sa 9 čvorova ukazuje na veoma male, gotovo neznatne razlike.

Na sl. 5.9 prikazana je promena ugiba ploče duž ose simetrije A-A (B-B) pri nivou opterećenja od 27.8 kN.



Sl. 5.9. Ugib ploče duž ose simetrije A-A (B-B) za  $P = 27.8$  kN

Na sl. 5.10 prikazani su pravci prslina pri opterećenju od  $P = 27.8$  kN za donju (zategnutu) stranu ploče.



Sl. 5.10. Pravci prslina za donju stranu ploče pri opterećenju od  $P = 27.8$  kN



Na sl. 5.11 prikazano je materijalno stanje u svim slojevima po debljini ploče a za presek A-A (B-B) neposredno pred slom ploče.



Sl. 5.11. Materijalno stanje po debljini ploče neposredno pred slom

Opterećenje pri kome dolazi do konačnog sloma ploče iznosi  $P_N = 60.5$  kN u odnosu na  $P_E = 61.66$  kN koje je određeno eksperimentalnim putem.

Na osnovu izloženih rezultata možemo zaključiti da je predloženi računski model sposoban da obezbedi realnu procenu ukupnog ponašanja armirano-betonskih ploča pri kratkotrajnom opterećenju. Pri primeni ovog modela treba imati u vidu da čitav niz faktora utiče na njegovu efikasnost, počev od načina na koji vršimo diskretizaciju ploče, karakteristika "tension stiffening" krive (vrednost parametra  $\alpha$ ), primenjene metode za rešavanje nelinearnog sistema jednačina i drugih. U ovom primeru korišćena su iskustva drugih koji su se bavili ovom problematikom tako da su dobijeni sasvim zadovoljavajući rezultati.

## 5.5. LITERATURA

- 5.1 ADINA - Users manual, report AE81-1, ADINA Engineering, 1981.
- 5.2 ADINA - System theory and modeling guide, report AE83-4, ADINA Engineering, 1983.
- 5.3 Abdel Rahman, H.H. and Hinton, E.  
PLASAN - Users manual, Report, Department of Civil Engineering,  
University College, Swansea, U.K., 1983.
- 5.4 Figueiras, J.A. and Owen, D.R.J.  
CONSHELL - User instructions in "Finite Element Software for Plates  
and Shells" by E. Hinton and D.R.J. Owen (eds.) Pineridge Press,  
Swansea, U.K., 1984.
- 5.5 Hinton, E., Vuksanović, Dj. and Huang, H.C.  
VIBUK - User instructions in "Numerical Methods and Software for  
Dynamic Analysis of Plates and Shells" by E. Hinton (ed.),  
Pineridge Press, Swansea, U.K., 1988.









