

HOCHSTABILER OPTISCHER  
RESONATOR  
IM FALLTURMBETRIEB  
FÜR PRÄZISIONSMESSUNGEN  
IN SCHWERELOSIGKEIT

Dem Fachbereich 1 (Physik und Elektrotechnik)  
der Universität Bremen  
zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)**

vorgelegte Dissertation

von

Dipl. Phys. Andreas Resch

Gutachter:

Prof. Dr. Claus Lämmerzahl (Universität Bremen)

Prof. Dr. Claus Braxmaier (Universität Bremen)

Dissertation eingereicht: November 2016

Kolloquium am 7. Dezember 2016



## Abstract

The development of optical clocks has made a great progress in the past years. Optical atomic clocks have demonstrated higher accuracies and stabilities than state of the art microwave oscillators and show their potential to target fractional frequency inaccuracies below  $10^{-17}$ . This has led to a proposal to redefine the SI second using an optical transition of an atom clock. Possible candidates are evaluated and within the next year one should be elected. Not only for such fundamental definitions of the metric system, but also for tests of the fundamental theories have these clocks provided an astonishing tool. Reaching into the atto-scale of fractional frequency inaccuracy the gravitational redshift is readily measurable within the laboratory. Prospects for tests of the Einstein equivalence principle both earth and space bound will open new boundaries for alternative theories of gravitation. Even the recently observed gravitational waves can be a research target of satellite missions with optical atomic clocks on board.

In this work, a highly stable optical local oscillator for the use in the drop tower Bremen was developed. The drop tower Bremen allows the experimentalist for the use of 4,7s free fall in microgravity. It is a first step in the evolution of experiments outside the laboratory and in terms of technology readiness this presents a first demonstration of an operation of an optical cavity in a relevant environment. Stringent requirements for weight, space and power consumption make it difficult to achieve the world's best performance. In this work the measured frequency stability was found to be  $\sigma_y(3,5\text{s}) < 7,2 \times 10^{-15}$  in the Allan deviation. The optical cavity used in the apparatus is a spherical ULE spacer with fused-silica mirrors. It shows a finesse of  $\mathcal{F} \approx 480.000$  for the reference cavity and  $\mathcal{F} \approx 330.000$  for the dropped cavity. We can report successful drops in the drop tower Bremen with no degeneracy in the performance. A detailed description of both apparatus is given and the special steps taken for the capsule integration are explained.

Another part of this work is the detailed discussion of the mathematical framework for the electric signals of a photo detector, if two laser fields are detected simultaneously. The heterodyne measurement is explained and applied to the case, where the linewidth is to be measure by a self-referencing scheme. This includes both the long known delayed self-heterodyne interferometers as well as the discussion of the possibility for short-delayed self-heterodyne interferometers. A published work is disproved and discussed.

**keywords:** optical cavity, drop tower, microgravity, highly stable laser system

## Mathematische Symbole

$i$	Imaginäre Einheit, meist in Zusammenhang mit der komplexen Darstellung einer ebenen Welle $e^{i\omega t}$
$c.c.$	Substituiert einen Term, der die komplex Konjugierte des vorhergehenden Terms ist
$i$	Meist eine Laufvariable in einer Summe
$h$	Planck-Konstante oder Plancksches Wirkungsquantum $h = 6,626\,070\,040 \times 10^{-34} \text{ J s}$
$c$	Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ , wird bei Abschätzungen auf $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ gerundet
$\nu$	Frequenz, meist eines Laserfeldes in der Größenordnung von Terahertz.
$\nu_0$	Frequenz, meist die Grundfrequenz eines Laserfeldes, wenn weitere Frequenzkomponenten durch Modulation ebenfalls vorhanden sind
$f$	Frequenz, meist elektrisch mit einem Frequenzgenerator erzeugt im Bereich von einigen Hertz bis Gigahertz
$\lambda$	Wellenlänge, meist eines Laserfeldes, mit der Frequenz über $\lambda = \frac{c}{\nu}$ verknüpft
$\mathcal{F}$	Finesse eines Fabry-Perot Interferometers, d.h. eines optischen Resonators
$S_y(f)$	Spektrale Rauschleistungsdichte, spektrale Rauschleistung
$\sigma_y^2(\tau)$	Allan-Varianz
$\tau$	Meist in Zusammenhang mit der Allan-Varianz der Parameter der Mittelung
$\tau_D$	Eine Verzögerungszeit (delay)
$P$	Das Symbol für eine Leistung
$I$	Das Symbol für eine Intensität
$E$	Das Symbol für elektrische Felder
$\mathcal{F}\{\cdot\}$	Bezeichnet die Fourier-Transformation
$\hat{\cdot}$	Bezeichnet eine komplexe Größe



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Aktueller Entwicklungsstand für optische Resonatoren im Weltraum . .	11
1.2. Themenstellung dieser Arbeit . . . . .	15
<b>2. Hochstabile Lasersysteme</b>	<b>19</b>
2.1. Optische Uhren . . . . .	19
2.2. Theorie und Fundamentale Limits . . . . .	21
2.2.1. Rauschen und Messgrößen . . . . .	21
2.2.2. Das Schrotrauschen . . . . .	27
2.2.3. Weitere Störeinflüsse und Rauschquellen . . . . .	29
2.3. Phasenrauschen und Bestimmung von Linienbreiten . . . . .	31
2.3.1. Natürliche Linienbreite . . . . .	31
2.3.2. Linienverbreiterung . . . . .	33
2.3.3. Definitionen . . . . .	34
2.3.4. Korrelationen von thermischem Licht bei zufälligen Stoßprozessen	40
2.3.5. Überlagerung zweier stationärer unkorrelierter Lichtfelder . . .	44
2.3.6. Überlagerung von modulierten Lichtfeldern . . . . .	51
2.3.7. Delayed self-heterodyne interferometer . . . . .	54
2.3.8. Rauschleistungsdichte für zwei überlagerte Felder . . . . .	58
2.3.9. Delayed self-heterodyne interferometer mit teilkorrelierten Feldern	59
2.3.10. Linienbreitenbestimmung mittels einer selbst-heterodynen Mes-	
sung . . . . .	65

2.3.11. Vergleich zweier oder mehrerer Laserquellen mittels eines Frequenzkammes . . . . .	73
2.4. Optische Resonatoren . . . . .	77
2.4.1. Allgemeines zu optischen Resonatoren . . . . .	77
2.4.2. Kenngrößen optischer Resonatoren . . . . .	80
2.4.3. Die Paraxiale Wellengleichung . . . . .	85
2.4.4. Laserstabilisierung mittels Phasenmodulation . . . . .	89
2.4.5. Erreichbare Grenzen . . . . .	99
<b>3. Experimentaufbau</b>	<b>101</b>
3.1. Der Kugel-Resonator . . . . .	101
3.1.1. Numerische Berechnung des „magischen Winkels“ . . . . .	102
3.2. Genereller Aufbau . . . . .	109
3.2.1. Optische Eigenschaften des Resonators . . . . .	111
3.2.2. Lasersysteme . . . . .	111
3.2.3. Vakuum- und Temperatursysteme . . . . .	118
3.2.4. PDH Elektronik . . . . .	123
3.3. Laborbetrieb und Charakterisierung . . . . .	125
3.3.1. Bestimmung der Finesse . . . . .	125
3.3.2. Beschleunigungssensitivität . . . . .	132
3.3.3. Temperatureinflüsse auf das Lasersystem . . . . .	135
3.3.4. Temperaturabhängigkeit der Resonanzen des Labor-Resonators . . . . .	136
3.3.5. Temperaturabhängigkeit der Resonanzen des Kapsel-Resonators . . . . .	138
3.3.6. Temperaturabhängigkeit des Schwebungssignals . . . . .	140
3.3.7. Leistungsinduzierte Frequenzverschiebung . . . . .	146
3.4. Stabilitätsmessungen . . . . .	148
3.5. Resümee des Betriebs im Labor . . . . .	151
3.6. Kapselaufbau und Abwurf . . . . .	152
3.6.1. Fallturm Experimentplattform . . . . .	152
3.6.2. Integration des Experiments . . . . .	155
3.6.3. Vakuumkammer und der optomechanische Aufbau . . . . .	158
3.6.4. Fallturmbabwürfe . . . . .	163
<b>4. Ausblick</b>	<b>171</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>175</b>
A.1. Lemma . . . . .	175
A.2. Berechnung des Phasensprungs von statistischem Licht . . . . .	175
A.3. Berechnung der Intensität in der FMS . . . . .	176
A.4. MAPLE Code zur PSD und weißem Rauschen . . . . .	180
A.5. Berechnung der spektralen Rauschleistungsdichte eines DSHI . . . . .	180

# 1

## Einleitung

*But I rather believe that time is a companion who goes with us on the journey, and reminds us to cherish every moment... because they'll never come again.*

— Capt. Jean-Luc Picard, *Star Trek Generations*

**Einführung in die Zeitmessung** Schon seit Jahrtausenden messen Menschen mit verschiedenen Instrumenten die Zeit. Die historische Entwicklung reicht von einfachen Konstruktionen aus Knochen und Stöcken sowie dem Sonnenstab bis hin zu hochtechnischen Anlagen, in denen atomare Wechselwirkungen als Basis der Zeitmessung genutzt werden. Die modernen Varianten nutzen als Grundlage der Zeitbestimmung Oszillationen, zum Beispiel die eines Quarzkristalls in einer Armbanduhr. Ein Qualitätsmerkmal von Uhren ist, wie groß die Abweichungen von der Nennfrequenz des Oszillators in bestimmten zeitlichen Intervallen ist. In einer Armbanduhr wird üblicherweise ein Uhrenquarz mit einer Nennfrequenz von 32 768 Hz eingesetzt und dieser hat typischerweise einen Gangfehler von  $\pm(10 \text{ s} - 30 \text{ s})$  pro Monat. Die Uhrzeit wird aus der Oszillation abgeleitet, indem die Anzahl der Schwingungen in einer Zeiteinheit gezählt werden. Bei der Armbanduhr wird dies meist mechanisch gelöst, es gibt aber auch elektronische Zähler. Ein Test von Armbanduhren verschiedener Hersteller auf deren Stabilität wurde in 2008 durchgeführt [51]. Dabei wurde zur Auswertung des Tests die Allan-Abweichungen der relativen Frequenzabweichungen herangezogen und gezeigt, dass das Stabilitätsniveau knapp über  $1 \times 10^{-8}$  liegt. Die relativen

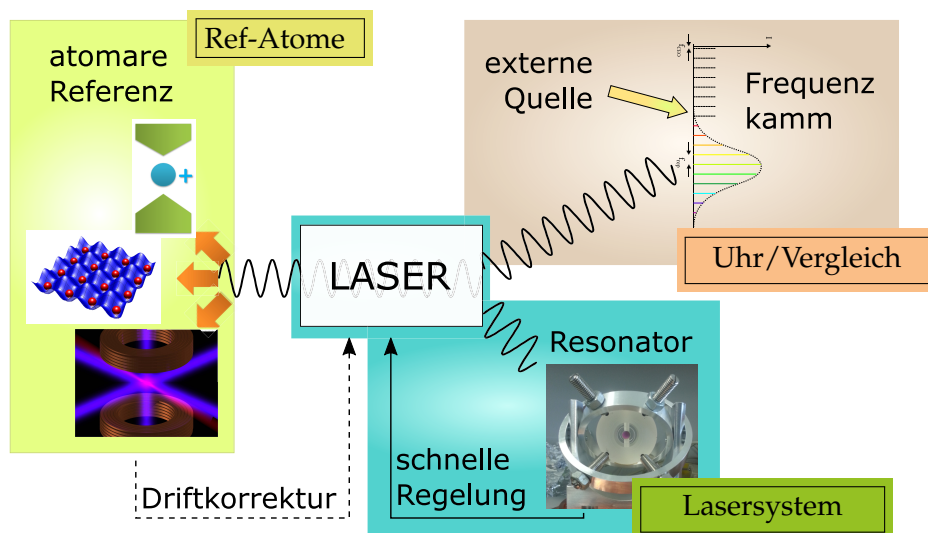
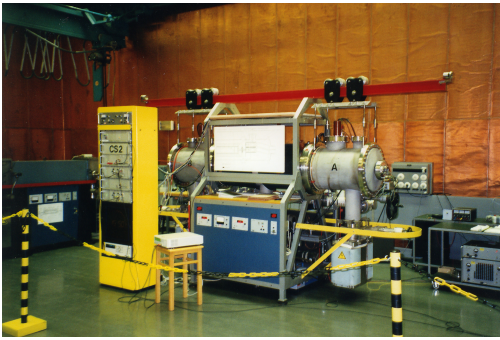


Abbildung 1.1.: Schematische Aufteilung einer modernen optischen Atomuhr in die einzelnen Bestandteile: eine atomare Referenz (oder Ionen), ein hochstabiles Lasersystem und das Vergleichsmodul, um eine Zeit abzuleiten oder die Stabilität zu messen.

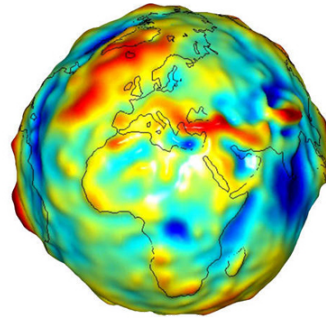
Frequenzabweichungen und die Allan-Abweichungen spielen wichtige Rollen in der Analyse des Frequenzgangs und werden in Kapitel 2 vertieft behandelt.

Die besten heutigen Uhren sind sogenannte Atomuhren. Diese nutzen eine atomare Resonanz im Termschema eines passenden Isotops, auf welche der Oszillator stabilisiert wird. Dabei kann man zwei Arten unterscheiden: Die „Atomuhren“ nutzen einen Übergang, dessen elektromagnetische Anregung im Mikrowellen-Bereich liegt, die „optischen Atomuhren“ einen optischen Übergang im Terahertz- oder Petahertz-Bereich. Mit optischen Oszillatoren sind bessere relative Frequenzabweichungen zu erreichen. Diese werden durch ein hochstabiles Lasersystem realisiert, welches auf den jeweiligen optischen Übergang stabilisiert wird.

In Abbildung 1.1 ist der Aufbau einer modernen Atomuhr schematisch dargestellt. Die einzelnen Teile sind farblich unterlegt. Das hochstabile Lasersystem Lasersystem dient als Oszillator und ist aus einer Laserquelle und einem optischen Resonator aufgebaut. Der Laser wird auf den optischen Resonator mittels des Pound-Drever-Hall-Verfahrens stabilisiert. Da der optische Resonator zwar eine exzellente Kurzzeitstabilität aufweist, jedoch empfindlich auf Umwelteinflüsse reagiert und mit der Zeit einem Alterungsprozess unterworfen ist, wird das hochstabile Laserlicht an eine atomare Referenz Ref-Atome angebunden, zum Beispiel mit einem akustooptischen Modulator. Die Frequenzen der atomaren Übergänge sind absolut und universell, wohingegen bei jedem Resonator die Resonanz produktionsbedingt einzigartig ist. Damit kann das Lasersystem in Verbindung mit der atomaren Referenz eine schmalbandige, absolute Frequenzreferenz erzeugen. Diese wird dann weiteren Experimentteilen bereitgestellt, hier über den Teil



(a) Atomuhr CS-2 der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig. Tag der offenen Tür 1997. Lizenz CC BY-SA 3.0 DE; veröffentlicht von Jörg Behrens; abrufbar bei Wikimedia



(b) Rekonstruktion des Schwerefeldes der Erde aus den Daten der GRACE Mission. Lizenz: public domain; veröffentlicht durch die NASA.

Abbildung 1.2.: Eine Atomuhr im Labor und die Visualisierung der GRACE Daten.

**Uhr/Vergleich** dargestellt.

In dieser Arbeit wurde sich auf ersten Teil konzentriert, und ein hochstabiles Lasersystem mit einer relativen Stabilität der Allan-Abweichung von  $7,2 \times 10^{-15}$  bei 3,5 s aufgebaut.

**Stand der Technik** Der Standard für Atomuhren ist derzeit die sogenannte Cäsium-Fontäne. Sie basiert darauf, einen Mikrowellen-Oszillator genau auf den Hyperfeinstrukturübergang des Grundzustandes von  $^{133}\text{Cs}$  zu stabilisieren. Die derzeitige Definition der Sekunde legt diese als das 9 192 631 770-fache der Periodendauer derjenigen Strahlung fest, welche dem Übergang der beiden Hyperfeinstruktur-Energieniveaus des Grundzustandes des oben genannten Isotops entspricht. Diese Fontänen erreichen relative Stabilitäten von wenigen Teilen in  $10^{-15}$  und werden schrittweise in den Bereich um einige  $10^{-16}$  verbessert [58].

Die Verwendung optischer Frequenzen statt Mikrowellen wurde möglich, da zu Beginn des neuen Jahrtausends optische Frequenzen praktikabel zugänglich wurden. Durch den Aufbau eines optischen Frequenzkamms, der zur Vergabe des Physik Nobelpreises an Theodor W. Hänsch im Jahre 2005 führte, sind Vergleiche von Frequenzen im Terrahertz-Regime und mit Radiofrequenzen enorm vereinfacht worden und auch außerhalb der nationalen Metrologie-Institute möglich.

Die aktuellen Entwicklungen mit optischen Atomuhren zeigen jedoch, dass relative Stabilitäten und Genauigkeiten in der Größenordnung von  $10^{-17}$  bis  $10^{-18}$  möglich sind. Daher wird über eine Neudefinition der Sekunde auf Basis optischer Atomuhren nachgedacht. Die Roadmap<sup>1</sup> des Bureau International de Poids et Mesures aus dem

<sup>1</sup><http://www.bipm.org/en/measurement-units/new-si/>

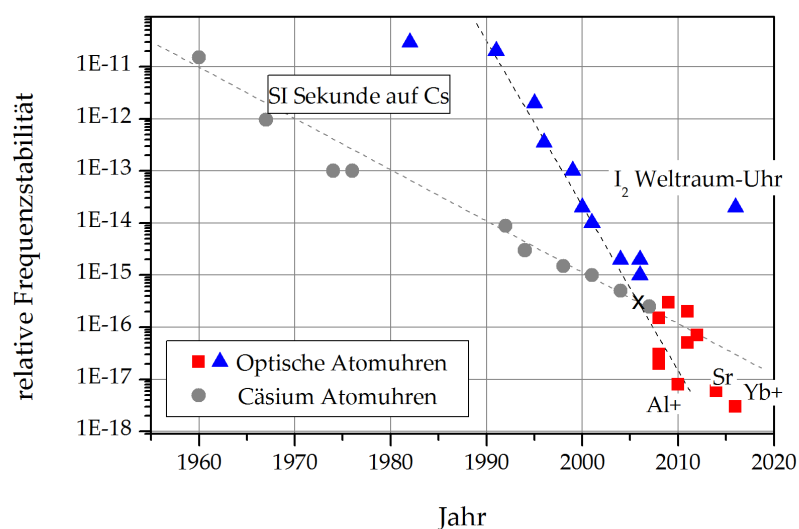


Abbildung 1.3.: Die relativen Frequenzstabilitäten im Vergleich: Mit grauen Punkten ist die Entwicklung der Cäsium-Atomuhren gezeigt, ab 1994 mit Cäsium-Fontänen. Mit blauen Dreiecken ist die Entwicklung der optischen Atomuhren gezeigt, deren Stabilität gegen Cäsium-Atomuhren gemessen wurde. In roten Kästchen sind die optischen Atomuhren nach 2006 gekennzeichnet, die im Trend besser als die Cäsium-Atomuhren arbeiten, und so nicht mehr mit Cäsium-Atomuhren verglichen werden können.

Jahr 2014 sieht eine Neudefinition im vierten Quartal 2018 vor.

In optischen Atomuhren werden Übergänge zwischen Energieniveaus verschiedener Elemente mit Wellenlängen vom infraroten bis zum ultravioletten Spektrum untersucht. Aktuell sind sowohl neutrale Atome als auch Ionen Gegenstand der Forschung.

Die Liste der Elemente für optische Atomuhren umfasst zurzeit Wasserstoff, Kalzium, Ytterbium(-Ionen), Magnesium, Quecksilber(-Ionen), Strontium und Aluminium(-Ionen). In Abbildung 1.3 ist die historische Entwicklung der Mikrowellen- und optischen Atomuhren mit ihrer relativen Frequenzstabilität gezeigt. Die Forschung ist so weit vorgeschritten, dass optische Atomuhren betrieben werden, deren Stabilität so gut ist, dass sie nicht mehr gegen eine Cäsium-Referenz verglichen werden können. Diese sind rot markiert. Die besonders gekennzeichneten Punkte werden kurz erläutert. Das NIST<sup>2</sup> betreibt seit 2010 optische Atomuhren mit einer relativen Frequenzstabilität von  $7 \times 10^{-18}$ , die einen Übergang von Aluminium-Ionen nutzen [19]. Mithilfe von in einem optischen Gitter gefangenen Strontium-Atomen konnte am JILA<sup>3</sup> eine optische

<sup>2</sup>National Institute of Standards and Technology, Boulder USA

<sup>3</sup>Joint Institute for Laboratory Astrophysics, Boulder USA

Atomuhr mit einer relativen Stabilität von  $6,4 \times 10^{-18}$  gezeigt werden [10]. An der PTB<sup>4</sup> wurde eine optische Atomuhr mit einer relativen Stabilität von  $3 \times 10^{-18}$  demonstriert, die den Übergang eines einzelnen Ytterbium-Ions nutzt [37]. Der Iod-Frequenzstandard wird besonders für den Einsatz bei Weltraummissionen entwickelt [78]. Man sieht hier zwei verschiedene Zielsetzungen: Die eine zielt auf eine herausragende Leistung im Laborbetrieb, die andere fokussiert sich auf kompakte und robuste Systeme mit hoher Verlässlichkeit.

**Perspektiven der Anwendungen von optischen Atomuhren im Weltraum** Hochstabile Lasersysteme und Uhren mit den oben genannten Stabilitäten können in einer Vielzahl von Experimenten eingesetzt werden. Darunter fallen die Spektroskopie an verbotenen Übergängen mit Linienbreiten im Sub-Hertz-Bereich, die Bereitstellung einer Technologie zur Bestimmung der Zeit und der Definition der Sekunde, und auch die Vermessung relativistischer Uhreneffekte. Gerade letztere profitiert davon, Experimente im Weltraum an Bord der ISS<sup>5</sup> oder von Satelliten durchzuführen. Damit sind größere Gradienten im Gravitationsfeld zugänglich, und so ein stärkeres Messsignal, welches von den größeren relativen Unterschieden im Gravitationspotential über die Experimentdauer (und Flugbahn) profitiert. Aber auch in anderen Bereichen sind optische Atomuhren (oder zumindest hochstabile Lasersysteme) im Weltraumbetrieb von Nutzen.

Die zentrale Frage ist, welche Messungen mit hochstabilen Lasersystemen oder optischen Uhren durchgeführt werden können, und wie sich diese von anderen Instrumenten abheben. Die Messmethoden umfassen:

1. Laufzeitmessungen,
2. Frequenzmessungen und -vergleiche,
3. Phasenmessungen.

Für Messungen unter dem ersten Punkt gibt es keine prinzipiellen Vorteile für eine der oben genannten Technologien. Dabei spielen vor allen die Sendeleistung, Störsender und Absorption auf dem Weg der Laufzeitmessungen eine Rolle. Historisch verwendet eine Vielzahl an Satelliten-Missionen Mikrowellenstrahlung im K- oder Ka-Band, welche sich grob in den Frequenzbereich von 18 GHz bis 40 GHz einordnen lassen. Genutzt werden die Frequenzen für Experimente, aber auch zur Kommunikation mit der Bodenstation. Die Mikrowellen werden entweder von einem Quarzoszillator, einem Wasserstoffmaser oder einer Atomuhr abgeleitet. Die Mikrowellen-Oszillatoren der Galileo-Satelliten nutzen die beiden letzteren: einen passiven Wasserstoffmaser und eine Rubidium-Atomuhr. Die relative Stabilität dieser Uhren kann durch optische Atomuhren um den Faktor 100 übertroffen werden. Das bedeutet, dass kleinere Frequenzabweichungen (2.) und Phasenverschiebungen (3.) gemessen werden können.

---

<sup>4</sup>Physikalisch-Technische Bundesanstalt

<sup>5</sup>Internationale Raumstation

Es lassen sich drei Säulen identifizieren, welche von einem Einsatz optischer Atomuhren oder hochstabiler Lasersysteme profitieren [5, 32].

**Metrologie** Zentral ist dabei die Rolle einer „master clock in space“, einer Referenzuhr, die ein definiertes Raum-Zeit-Bezugssystem bereitstellen soll. Ein erster Schritt in diese Richtung wird mit der Atomuhr des ACES-Labors<sup>6</sup> an Bord der ISS gestartet. Ihr Uhrensinal wird mittels einer Mikrowellenkommunikation an die Bodenstationen übermittelt. Damit können Frequenzvergleiche durchgeführt werden, obwohl die Uhren in verschiedenen Ländern der Welt stehen. Damit können Genauigkeiten im Bereich von  $10^{-17}$  nach einer Woche Mittelung erreicht werden. Ein theoretischer Vergleich zeigt, dass eine Verbesserung um den Faktor 10 in der Genauigkeit und Mittelungszeit durch den Einsatz einer optischen Atomuhr möglich ist. Ein solcher Uhrenvergleich führt zu einer besseren Definition der nationalen Referenzsysteme.

**Navigation** Damit eng verbunden ist die Säule der satellitengestützten Navigation (GNSS<sup>7</sup>). In die Positionsbestimmung aus den Signalen der GNSS-Satelliten gehen mehrere Faktoren ein: Die Bestimmung der Orbits der Satelliten („orbit determination“), die Signal-Laufzeit (unter Beachtung atmosphärischer Effekte) und die Uhren-Genauigkeiten. Die Genauigkeit der Positionsbestimmung liegt im Bereich einiger Meter mit dem GPS-System, und es wird für das Galileo-System eine kommerziell verfügbare Genauigkeit von etwas unter einem Meter angestrebt. Die Atomuhren der Satelliten haben einen Gangfehler von ungefähr 10 ns pro Tag [32], ohne Synchronisierung der Uhrzeiten im Empfänger entspricht das einer Abweichung von drei Metern pro Tag. Eine Abschätzung, die groß der Gangfehler eines GNSS-Satelliten mit optischen Uhren in den Satelliten sowie in den Bodenstationen ist, liefert einen Wert um den Faktor hundert kleiner. Damit wird das nötige wartungsfreie Intervall für Korrekturen im Uhrengang entsprechend verlängert. Im Zusammenspiel mit einer genaueren Bestimmung der Referenzsysteme wird auch die Unsicherheit in der Trajektorie der Satelliten reduziert, so dass sich für die Benutzer der GNSS ebenfalls eine bessere Positionsbestimmung prognostizieren lässt.

**Erdbeobachtung** Die dritte Säule ist die Erdbeobachtung. Auch diese ist eng mit den anderen beiden Punkten verwoben. Mit einer Referenzuhr im Weltraum und dem damit bereitgestellten Referenzsystem, kann das gravitative Erdpotential mit hoher räumlicher Auflösung vermessen werden. Dieses wurde bisher am genauesten mit der GRACE-Mission<sup>8</sup> der ESA und NASA mit einer räumlichen Auflösung von 400 km vermessen. Für das Experiment fliegen zwei Satelliten auf einer identischen Flugbahn mit einem Abstand von etwa 200 km. Durch eine kontinuierliche Distanzmessung zwischen

---

<sup>6</sup>Atomic clock ensemble in space, Starttermin August 2017

<sup>7</sup>Global navigation satellite system, zum Beispiel GPS oder Galileo

<sup>8</sup>Gravity Recovery And Climate Experiment



den beiden Satelliten ist es möglich, Variationen des Schwerefeldes zu messen. Der Relativabstand ändert sich, während sich die beiden Satelliten einer Massen-anomalie nähern und diese überfliegen. Aus diesen Messdaten lässt sich das Schwerefeld rekonstruieren, siehe Abbildung 1.2b<sup>9</sup>. Mittels der Daten der Mission war es beispielsweise möglich, die Entwicklung der Grundwasservorkommen in einer indischen Provinz über zehn Jahre hinweg zu verfolgen. Damit konnte nachgewiesen werden, dass die Grundwasservorkommen zurückgehen [16]. Die Auflösung der Distanzmessung oder der Relativbeschleunigung kann mit einem Wechsel der Abstandsmessung auf optische Frequenzen (wie mit dem experimentellen Instrument GRACE-follow-on laser ranging instrument demonstriert werden soll) eine Verbesserung um den Faktor Tausend erfahren. Die räumliche Auflösung verbessert sich mit diesem experimentellen Instrument um den Faktor Zwei [81].

**Tests der Allgemeine Relativitätstheorie** Um die allgemeine Relativitätstheorie zu testen, wird nach Verletzungen des Einstein'schen Äquivalenzprinzips gesucht. Dieses ist in drei Aspekten zusammengefasst:

- Schwache Äquivalenzprinzip (*WEP*)<sup>10</sup>: Dieses ist auch als die Universalität des freien Falls bekannt. Galileo Galilei untersuchte es einer Legende nach am schiefen Turm von Pisa mit Fallexperimenten. Stattdessen hat er über Messungen der Zeitspanne<sup>11</sup>, in welcher verschiedene Körper eine Fallrinne hinab rollten (schiefe Ebene), die Unabhängig der Rollzeit von der Masse oder von Bestandteilen der Körper nachgewiesen. Heutzutage wird dieses Prinzip als die Äquivalenz von träger und schwerer Masse formuliert und über den Eötvös-Parameter  $\eta$  dargestellt. Er ist definiert als das Verhältnis der Beschleunigungsdifferenz zweier Körper zu dem Mittelwert der beiden Beschleunigungen:

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \quad (1.0.1)$$

Die Beschleunigungen verbinden träge und schwere Masse über das Newtonsche Kraftgesetz und die Gravitationskraft eines homogenen Potentials:

$$m_t \cdot a = m_s \cdot g \quad (1.0.2)$$

Gilt das schwache Äquivalenzprinzip, dann ist das Verhältnis der schweren und der trägen Masse  $m_s/m_t$  genau Eins. Der Eötvös-Parameter ist aktuell zu einem Wert von  $\eta = (0,3 \pm 1,8) \times 10^{-13}$  bestimmt [77] und bestätigt das schwache Äquivalenzprinzip. Die MICROSCOPE<sup>12</sup>-Mission ist 2016 in den Betrieb gegangen

<sup>9</sup>Abruf August 2016 unter <http://www.jpl.nasa.gov/news/news.php?release=2007-147>

<sup>10</sup>weak equivalence principle

<sup>11</sup>In jener Zeit war die Messung der Zeit eine Herausforderung an sich.

<sup>12</sup>MICRO Satellite à traînée Compensée pour l'Observation du Principe d'Equivalence

und will mit frei fallenden Massen den Faktor mit einer Obergrenze von  $10^{-15}$  bestimmen. Dieser Parameter ist mit Frequenzmessungen nicht zugänglich.

- Lokale Lorentz-Invarianz (*LLI*): Die LLI beschreibt, dass Ergebnisse eines Experiments durch einen Wechsel zwischen frei fallenden Bezugssystemen mittels einer Lorentz-Transformation unverändert bleiben. Die Lichtgeschwindigkeit ist bei Gültigkeit in allen Bezugssystemen gleich. Zur Überprüfung dieser Invarianz werden drei Eigenschaften durch Experimente gemessen: Die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit, die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Eigenbewegung und die Zeit-Dilatation. Diese werden durch die folgenden Experimente überprüft: Michelson-Morley, Kennedy-Thorndike und Ives-Stilwell.

Mit hochstabilen Uhren aus optischen oder Mikrowellen-Resonatoren wurde die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit durch Michelson-Morley Experimente sehr genau bestimmt. Das derzeit beste Ergebnis kommt aus Experimenten, bei denen zwei optische Fabry-Perot-Resonatoren derart auf einer rotierenden Plattform montiert sind, dass ihre optischen Achsen orthogonal zueinanderstehen. Der Wert  $\Delta c/c < 1 \times 10^{-17}$  [63] belegt die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit eindrucksvoll.

Mit kryogenen Resonatoren wurde im Labor ein Kennedy-Thorndike Experiment durchgeführt, welches eine obere Grenze für eine Verletzung von  $\alpha_{KT} = (1,9 \pm 2,1) \times 10^{-5}$  ergab [13]. Die derzeit kleinste obere Grenze wurde mit kryogenen Saphir-Oszillatoren und einem Wasserstoff Maser zu  $\alpha_{KT} = (-1,7 \pm 4,0) \times 10^{-8}$  bestimmt [87].

Um eine Verletzung der Zeitdilatation zu messen, wurden im ersten Experiment von Ives und Stilwell [38] im Jahr 1938 Wasserstoff-Ionen durch eine Spannungsdifferenz beschleunigt und die Wasserstoff- $\beta$  Linien bei 486,1 nm beobachtet. Durch die Geschwindigkeit wird die Frequenz des abgestrahlten Lichts verschoben, welches man sowohl in als auch entgegen der Ausbreitungsrichtung beobachten kann. Durch eine geschickte Anordnung können alle drei Frequenzen gleichzeitig detektiert werden. Ohne die Zeitdilatation sind die beiden verschobenen Frequenzkomponenten symmetrisch um die zentrale (unverschobene) Wellenlänge angeordnet; mit der Zeitdilatation wird die Verteilung unsymmetrisch. Diese Asymmetrie wurde von Ives und Stilwell gemessen und damit die Zeitdilatation bestätigt. Für Ionen mit einer Geschwindigkeit von ca. 33% der Lichtgeschwindigkeit wurde zuletzt als obere Grenze des normierten Ives-Stilwell Parameters für eine Verletzung der Zeitdilatation ein Wert von  $|\epsilon(\beta)/\beta^2| \leq 2 \times 10^{-8}$  [12] gemessen.

- Lokale Positionsinvarianz (*LPI*): Es besagt, dass ein Ergebnis eines Experiments unabhängig von Ort und Zeit der Durchführung ist. Dies wird unter anderem durch astronomische Beobachtungen verifiziert, zum Beispiel an Quasaren (und der Konstanz der Feinstrukturkonstante). Bodengebundene Experimente mit

Atomuhren, die Übergänge verschiedener Elemente verwenden, haben ein oberes Limit im Bereich von  $10^{-6}$  an die Differenz  $\beta_B - \beta_A$  des Verletzungsparameters  $\beta$  gesetzt [30]. Dieser quantifiziert die Gültigkeit der gravitativen Rotverschiebung:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = (1 - \beta) \times \frac{\Delta U}{c^2} \quad (1.0.3)$$

Dabei wurden die Messungen auf dem Weg des Labors im Gravitationsfeld der Sonne an verschiedenen Positionen verglichen.

Einige der oben genannten Experimente profitieren davon, wenn optische Atomuhren auf einer Weltraum-Mission verwendet werden. Denn die relativistischen Effekte werden insbesondere auf Satellitenmissionen groß und mit kleineren Fehlern messbar. Daraus ergibt sich ein Bedarf an hochstabilen Lasersystemen, die für einen Einsatz im Weltraum qualifiziert sind. Da sich diese Technologie in der Entwicklung befindet, sind die Missionen noch in den Anfangsstadien der Evaluation bei den Raumfahrtagenturen.

Für den Fall eines Kennedy-Thorndike-Experiments auf Satelliten wird derzeit die Mission mSTAR [79] zum Test der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit untersucht. Dabei werden die hohen Bewegungsgeschwindigkeiten der Sonne und der Erde relativ zum Mikrowellenhintergrund genutzt, um ein starkes Messsignal zu gewinnen und den Koeffizienten um bis zu einen Faktor Hundert zu verbessern. Eine vergleichbare Mission wird mit der Mission BOOST<sup>13</sup> vorgeschlagen und ebenfalls evaluiert. Beide Missionen vergleichen hochstabile optische Lasersysteme mit einer Iod-Atomuhr und suchen nach Modulationen der Schwebungsfrequenz mit Periodendauern entsprechend des Satellitenorbits und der Umkreisung der Sonne.

In der Parametrisierten-Post-Newtonischen-Beschreibung der Relativitätstheorie wird dem Parameter  $\gamma$  die Bedeutung zugeordnet, wie viel Raumkrümmung pro Masseneinheit verursacht wird. In der ART<sup>14</sup> ist dieser Parameter gleich Eins, so dass meist die Abweichung der Differenz  $\gamma - 1$  von null angegeben wird. Verschiedene Effekte werden unter anderen mit diesem Parameter beschrieben: Der Periheldrehung, die Lichtablenkung und die Shapiro-Zeitverzögerung. Letztere kann über eine Frequenzverschiebung aus dem Dopplereffekt bestimmt werden:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{d(\Delta t)}{dt} = -4(1 + \gamma) \frac{GM_s}{c^3 b(t)} \frac{db}{dt} \quad (1.0.4)$$

Die aktuelle Messung wurde mit der Cassini-Sonde durchgeführt [7] und eine obere Grenze  $\gamma - 1 = (2,1 \pm 2,3) \times 10^{-5}$  gemessen. Die vorgeschlagene SAGAS<sup>15</sup>-Mission plant einen Laserlink zwischen dem Satelliten und der Bodenstation herzustellen. Die-

<sup>13</sup>BOOST Symmetry Test, <https://www.zarm.uni-bremen.de/research/space-technologies/metrology-aivt/projects/the-boost-symmetry-test-boost-satellite-mission-testing-special-relativity.html>

<sup>14</sup>Allgemeine Relativitätstheorie

<sup>15</sup>Search for Anomalous Gravitation using Atomic Sensors

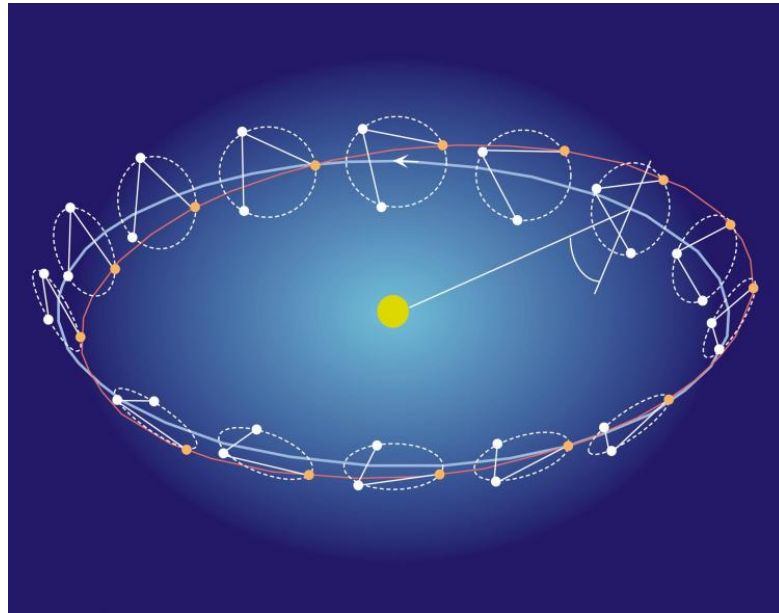


Abbildung 1.4.: Formation der Satelliten der eLISA Mission. Die drei Satelliten formen ein gleichseitiges Dreieck mit einer Kantenlänge von einer Millionen Kilometern. Lizenz: public domain; von NASA, abgerufen von Wikipedia

ser wird auf eine optische Atomuhr stabilisiert und erlaubt eine Zwei-Wege-Verbindung, über die eine klassische Doppler-Messung simuliert werden kann. Damit könnte der obige Wert zumindest um den Faktor Hundert verbessert werden.

Auch die Ives-Stilwell-Experimente können von optischen Atomuhren profitieren [93]. Weitere Satellitenmissionen mit optischen Atomuhren sind STE-QUEST [11] und SOC2<sup>16</sup>.

**Gravitationswellen** Gravitationswellen wurden 2015 erstmals von der LIGO<sup>17</sup> Gruppe direkt nachgewiesen [48]. Das Signal GW150914 wurde dabei von zwei schwarzen Löchern, welche aufeinander in Spiralbahnen zufallen, erzeugt. Dabei wurde eine längenbasierte Messung verwendet, indem ein Laserinterferometer mit zwei langen Armen kontinuierlich vermessen wurde. Sobald die Gravitationswelle durch die beiden Apparate in Hanford und Livingston (USA) lief, änderte sie die Armlänge der Interferometer derart, dass die hochstabilen Lasersysteme basierend auf optischen Resonatoren ein Signal messen konnten. Um die Auflösung und den Frequenzbereich der Sensitivität zu erweitern, werden Satellitenmissionen vorbereitet, bei denen die Armlänge auf astronomische Längen vergrößert werden sollen. Im Projekt LISA<sup>18</sup> wur-

<sup>16</sup>[http://www.exphy.uni-duesseldorf.de/optical\\_clock/index.php](http://www.exphy.uni-duesseldorf.de/optical_clock/index.php)

<sup>17</sup>Laser Interferometer Gravitation Wave Observatory

<sup>18</sup>Laser Interferometer Space Antenna

de ein Laserinterferometer mit drei Satelliten und einer Armlänge von fünf Millionen Kilometern untersucht. Aktuell wird das Projekt in reduzierter Form als eLISA<sup>19</sup> beziehungsweise NGO<sup>20</sup> von der ESA<sup>21</sup> in der weiteren Planung mit einem Starttermin im Jahr 2034 fortgeführt. Die designierte Flugbahn der Satelliten ist in Abbildung 1.4 abgebildet.

Alternativ zu einem Laserinterferometer mit langen Armlängen gibt es einen neuen Vorschlag, den gravitativen Einfluss der Gravitationswelle zu messen. Dazu wird eine Mission vorgeschlagen [40], bei denen zwei Satelliten mit je einer optischen Atomuhr ausgerüstet werden. Dabei tauschen beide Satelliten das stabilisierte Laserlicht aus, so dass sie technisch aufeinander stabilisiert werden. Eine Gravitationswelle führt zu einer kleinen Verschiebung der mit den Satelliten frei fallenden Atomuhren zueinander. Die auftretende Dopplerverschiebung ist dann das Messsignal. Mit dieser Mission könnten Gravitationswellen mit Frequenzen im Bereich 3 mHz – 10 Hz nachgewiesen werden, und damit eine Lücke zwischen erdgebundenen Experimenten und interferometrischen Satellitenmissionen (Frequenzen größer als 10 Hz) füllen.

## 1.1. Aktueller Entwicklungsstand für optische Resonatoren im Weltraum

Mit dem vorangehenden Kapitel ist gezeigt worden, dass optischen Atomuhren von großer Wichtigkeit für kommende Satellitenmissionen sind. Das Herzstück einer optischen Atomuhr ist das hochstabile Lasersystem. Dieses baut zur Stabilisierung auf einem optischen Resonator auf, bevor das Referenzlicht mit einem atomaren Übergang absolut festgelegt wird.

Die Herausforderung bei der Entwicklung optischer Resonatoren für den Weltraumbetrieb besteht darin, dass sich die Justage der Einkopplung durch einen Satellitenstart oder den Betrieb in Schwerelosigkeit nicht ändern darf, um die Stabilisierung durchführen zu können. Eine Folge daraus ist, dass der Resonator fest in allen Raumrichtungen gelagert werden muss. Dies erhöht in vielen Fällen die Sensitivität auf Vibrationen, welche die Stabilität eines Lasersystems verschlechtern. Auch für einen mobilen Einsatz eines Lasersystems auf der Erde ist eine fixierte Lagerung wünschenswert, so dass bei der Entwicklung der Lasersysteme mit fixiertem Resonator auch auf eine geringe Vibrationssensitivität geachtet wurde.

Einen Überblick über verschiedene optische Resonatoren, die eine fixierte Lagerung ermöglichen, ist in Tabelle 1.1 gegeben. Diese Resonatoren werden aus ULE<sup>22</sup> gefertigt, und haben in Demonstrationsaufbauten relative Stabilitäten im Bereich von  $10^{-15}$  erreicht. Aktuell werden zwei Resonatoren aus dieser Liste für Missionen im Weltraum

---

<sup>19</sup>evolved LISA

<sup>20</sup>New Gravitational wave Observatory

<sup>21</sup>European space agency

<sup>22</sup>Eine Glaskeramik mit geringem thermischem Ausdehnungskoeffizienten, ultra low expansion

Formfaktor	Vibrations- sensitivität /g <sup>-1</sup>	größte Abmessung	Referenz
NIST Kugel	$3,1 \times 10^{-11}$	50,8 mm	[46]
JPL GRACE-FO „football“	-	77,5 mm	[85]
NPL „cubic“	$2,5 \times 10^{-11}$	50 mm	[90]
HHUD Zylinder	$39 \times 10^{-11}$	400 mm	[17]
SODERN Zylinder	$40 \times 10^{-11}$	140 mm	[2]

Tabelle 1.1.: Übersicht der verschiedenen Konzepte für optische Resonatoren mit fixierter Lagerung. Die geringe Sensitivität auf Vibrationen ist für einen transportablen Einsatz wichtig. Die Abmessungen spielen für die Auswahl des passenden Resonators in dieser Arbeit eine Rolle, da im Fallturmaufbau der Platz sehr begrenzt ist. Die Resonatoren sind in Abbildung 1.5 und Abbildung 1.6 abgebildet.

eingepplant: Der „football“-Resonator-Typ von JPL<sup>23</sup> ist bei GRACE-follow-on in dem experimentellen Modul für die Abstandsmessung der Satelliten, dem „laser-ranging interferometer“ (LRI), vorgesehen. Der kubische Resonator-Typ vom NPL soll bei der BOOST-Mission<sup>24</sup> zum Einsatz kommen. Die Stabilität der einzelnen Aufbauten wird effektiv durch die Finesse (siehe Kapitel 2.4.2) festgelegt. Diese variiert je nach der Zielsetzung zwischen 160 000 für das LRI und 300 000 für die die BOOST-Mission.

Alle Resonator-Typen in der Tabelle 1.1 sind durch die fixierte Lagerung prinzipiell darauf ausgelegt, außerhalb von Laborumgebungen betrieben zu werden. Die Resonatoren unterscheiden sich in ihrer Geometrie und den Haltevorrichtungen.

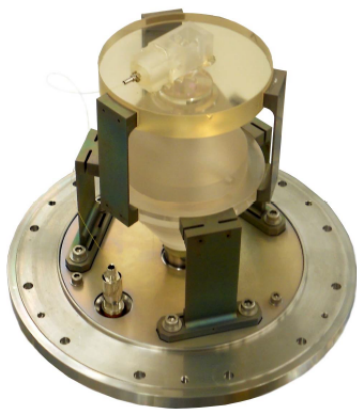
Der zylindrische Resonator der Firma SODERN aus Frankreich wird über einen speziell entwickelten Haltering, dem „cavity fastening device“, fixiert. Bei der Entwicklung wurde insbesondere auf den Materialübergang zwischen dem Resonator aus ULE und der Haltevorrichtung aus Invar geachtet, der nicht nur Vibrationen, sondern auch die Wärmeleitung dämpfen soll.

Für den Resonator am Jet Propulsion Laboratory, dessen Form an einen „football“ erinnert, werden die Haltestützen aus Titan gefertigt. In dem referenzierten Aufbau wird die Einkopplung des Lasers in den Resonator über eine Platte aus Zerodur realisiert, welche innerhalb der Vakuumkammer direkt über dem Resonator sitzt und auf welcher die erforderlichen Optiken verklebt sind. Eine Technik, die auch in anderen Missionen wie der BOOST-Mission genutzt werden soll.

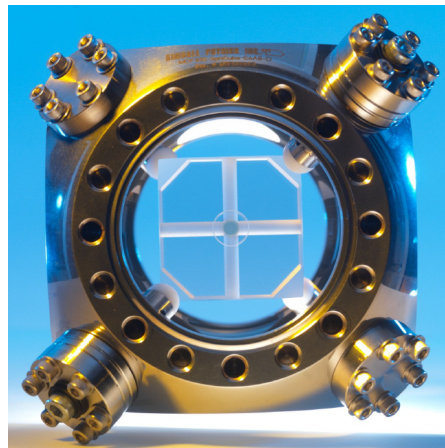
Der Testaufbau des sphärischen Resonators am NIST nutzt zur Vibrationsunter-

<sup>23</sup>Jet propulsion Laboratory

<sup>24</sup>DLR Fördervorhaben 50QT1201



(a) Die „football“-Cavity als Prototyp für die Mission GRACE-FO, umgesetzt am JPL [85].



(b) Optischer Resonator am NPL [90].

Abbildung 1.5.: Zwei designte Resonator-Typen für den Weltraumeinsatz.

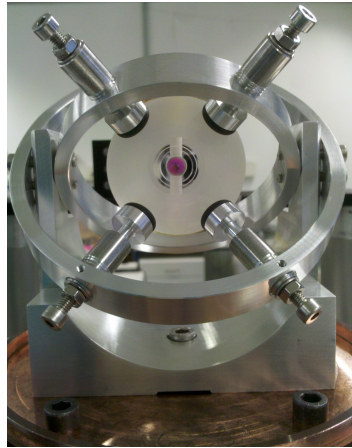
drückung nicht nur besonders günstige Druckpunkte, sondern der Aufbau wurde mit einer aktiven Vibrationsunterdrückung betrieben [86], so dass dieser in dem Kofferraum eines Autos platziert werden konnte. Für diesen Resonator-Typ wurde mit dieser Arbeit ein erfolgreicher Fallturmsabwurf demonstriert. Darüber hinaus ist dieser Resonator mit dieser Dissertation der erste unter Mikrogravitation betriebene optische Resonator.

**Der Fallturm Bremen** Der Fallturm stellt eine Mikrogravitationsumgebung für Experimente bereit. Er gehört zum Institut ZARM<sup>25</sup> an der Universität Bremen (ein Foto des Fallturms ist in Abbildung 1.7 gezeigt). Er hat eine große Bedeutung für die Forschung unter Schwerelosigkeit, da Experimente in eine Fallkapsel integriert werden, die dann in einer evakuierten Fallröhre 110 m frei fallen gelassen wird. Neben vielen anderen Experimenten wird der Fallturm als Testumgebung für Nutzlasten von Satelliten oder Ausrüstung für die ISS genutzt. Der dadurch erlangte Technologie-Reifegrad<sup>26</sup> kann zwischen den Stufen TRL-4 und TRL-5 der ESA und NASA angesiedelt werden.

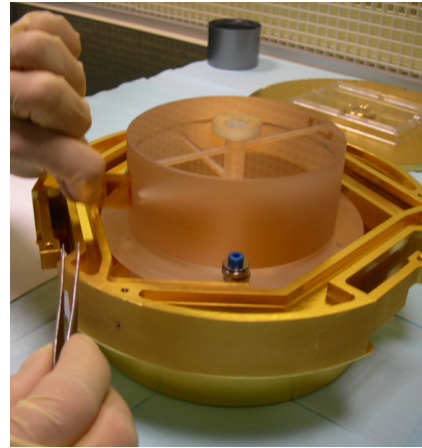
Damit ist der Fallturm eine Einrichtung, welche im Vorfeld einer Satellitenmission genutzt werden kann, um Teile einer Nutzlast auf den Betrieb in Schwerelosigkeit zu testen. Der Aufbau des hochstabilen Lasersystems dieser Arbeit für den Fallturmbetrieb ist ein solcher Test. Die sich daraus ergebenden Fragestellungen betreffen insbesondere die Lagerung des optischen Resonators, sowie der Einkopplung und dem Betrieb der nötigen Komponenten, die nicht alle für einen solchen Einsatz konzipiert wurden.

<sup>25</sup>Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation, Hansestadt Bremen

<sup>26</sup>Technology readiness level, TRL



(a) Sphärischer, vibrationsinsensitiver optischer Resonator, in dieser Arbeit verwendet.



(b) Vibrationsinsensitiver optischer Resonator am CNRS, Paris [2].

Abbildung 1.6.: Zwei weitere Resonator-Typen für den Weltraumeinsatz.



Abbildung 1.7.: Der Fallturm Bremen des Instituts ZARM eingebettet in den Campus der Universität Bremen. Der Fallturm hat eine Gesamthöhe von 146 m und bietet mit der 122 m langen Fallröhre im Inneren eine einzigartige Experimentumgebung unter Mikrogravitation. Die Restbeschleunigung in der evakuierten Röhre (auf 10 Pa) beträgt ein millionstel der Erdbeschleunigung, welche für 4,74 s genutzt werden kann. Diese Zeit kann mittels eines Katapults verdoppelt werden, wenn das Experiment diesen Betrieb zulässt.



## 1.2. Themenstellung dieser Arbeit

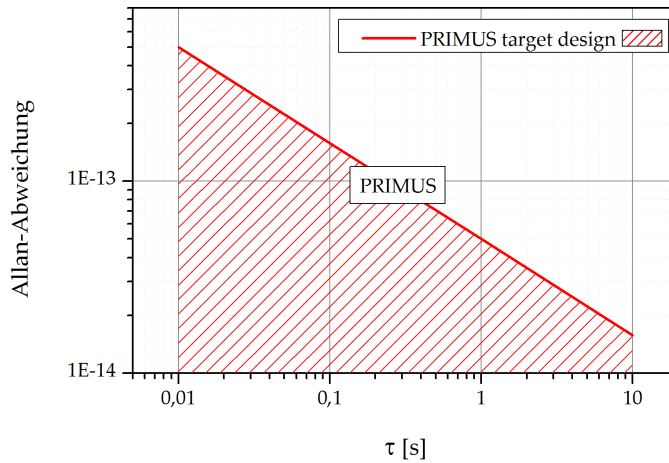


Abbildung 1.8.: Die Anforderungen an die relative Stabilität des hochstabilen Lasersystems im Projekt PRIMUS ergibt sich aus der erforderlichen Qualität der zu Beginn geplanten optischen Mikrowelle. Als Grenze wurde eine Allan-Abweichung von  $5 \times 10^{-14} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$  definiert.

Hochstabile Lasersysteme werden auch an anderen Experimenten eingesetzt. Eines davon ist das PRIMUS Projekt<sup>27</sup>, in dessen Rahmen diese Arbeit entstanden ist. Der Verwendungszweck in diesem Projekt ist, ein hochstabiles Lasersystem in Verbindung mit einem Frequenzkamm zu nutzen, um ein sehr stabiles Mikrowellensignal zu erzeugen [26, 29]. In der schematischen Übersicht in Abbildung 1.1 wird die Mikrowelle im Block „Uhr/Vergleich“ aus der Schwebung zweier Kammlinien erzeugt, und die Repetitionsrate mittels einer Rückkopplung an das Lasersystem angebunden. Eine solche Mikrowelle wurde als Referenzfrequenz für das Projekt PRIMUS geplant. Bei diesem Projekt wird ein Atominterferometer in einer Fallkapsel aufgebaut, welches die Interferometrie mittels optischer Raman-Strahlteiler ermöglicht. Diese verwenden einen Zwei-Photonen-Übergang in den Rubidium-Atomen des Atominterferometers zwischen den beiden Hyperfeinniveaus  $F = 1$  des  $F = 2$  des  $5^2S_{1/2}$  Zustands. Die effektive Übergangsfrequenz liegt bei 6,8GHz. Für die angestrebte Genauigkeit der Interferometrie-Messung war es nötig, die Frequenzen der beiden Raman-Laser mittels einer optisch generierten Mikrowelle auf die Übergangsfrequenz abzustimmen. Die detektierte Schwebungsfrequenz der Raman-Laser wird mit der Referenzfrequenz gemischt, um ein Fehlersignal für einen Regler zu erzeugen und die Schwebungsfrequenz auf der Referenzfrequenz zu halten. Andere Referenzfrequenzen aus einem Quarzos-

<sup>27</sup>Präzisions-Interferometrie-unter-Schwerelosigkeit, DLR Fördervorhaben 50 WM 0842

zillator und einer Frequenzkette [42] waren für das Experiment nicht ausreichend [26, 29].

Die Anforderungen an das Lasersystem in dieser Arbeit stammen aus dem Anwendungsfall, die Raman-Laser des Atominterferometers mit einer abgeleiteten Mikrowelle zu stabilisieren. Diese Mikrowelle sollte besser als kommerziell erhältliche Mikrowellen-Oszillatoren sein [66], so dass für die relative Frequenzstabilität des Lasersystems eine Anforderung definiert wurde, in der Allen-Abweichung unter der Grenze von  $5 \times 10^{-14} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$  zu arbeiten.

Ein solches Lasersystem wird, wie in den vorherigen Kapiteln gezeigt, auch für andere wissenschaftliche Forschung eingesetzt. Gerade der Betrieb im Weltraum ist zurzeit ein intensives Forschungsfeld, in welches sich die Entwicklung eines hochstabilen Lasersystems im Fallturmbetrieb hervorragend einfügt.

Für ein solches Lasersystem ist ein optischer Resonator mit einer Finesse von über 300 000 und eine passende Laserquelle vonnöten. Darüber hinaus ist es für den Fallturmbetrieb essentiell, den Resonator starr zu lagern und die Abmessungen möglichst gering zu halten. In Tabelle 1.1 ist eine Auswahl in Frage kommender Resonatoren gezeigt. Dabei wurde der Kugel-Resonator vom NIST endgültig ausgewählt, da dieser zu jener Zeit verfügbar war, und er alle Anforderungen erfüllt. Bei der Auslegung der Finesse sowie des Lasersystems wurden die erreichbaren Grenzen eines solchen Systems (siehe Kapitel 2.2) in die Entscheidung einbezogen.

Die Entwicklung einer geeigneten Haltevorrichtung orientiert sich an den numerischen Untersuchungen zur Vibrationssensitivität. Als Verallgemeinerung der Zweipunkt-Lagerung vorheriger Aufbauten wird eine Lagerung durch bis zu acht Druckpunkte als Entwicklungsziel für nötig erachtet, um in allen Raumrichtungen eine stabile Halterung zu gewährleisten. Dabei wird erwartet, dass die in der Tabelle genannte Vibrationssensitivität für diesen Resonator-Typ durch die Anzahl der Druckpunkte erhöht werden könnte, jedoch als Kompromiss in Kauf genommen werden muss. Die Einkopplung wird zunächst über kommerziell erhältliche optomechanische Komponenten realisiert und deren Potential evaluiert.

Die optisch generierte Mikrowelle findet in dem Projekt PRIMUS durch die Verwendung der „double diffraction“ erst einmal keine Anwendung mehr, da damit das Phasenrauschen der Raman-Laser differentiell herausfällt. Ein hochstabiles Lasersystem im Fallturmbetrieb ist jedoch ein Meilenstein für den Betrieb optischer Uhren unter Schwerelosigkeit.

**Gliederung der Dissertation** In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen rund um hochstabile Lasersysteme entwickelt. Darin werden wichtige Messgrößen und mögliche Rauschquellen vorgestellt. Als nächstes wird die Linienbreite eingeführt und ausführlich dargelegt, wie aus Messung elektrischer Signale eines Photodetektors auf die Linienbreiten zurückgeschlossen werden kann. Im Anschluss daran werden Fabry-Perot Interferometer oder optische Resonatoren (siehe Abbildung 1.6a) vorge-

stellt. Auch auf die Methoden, Laserquellen auf optische Resonatoren zu stabilisieren, wird am Ende eingegangen.

In Kapitel 3 wird der hier verwendete optische Resonator vorgestellt, der aus einem kugelförmigen Abstandhalter und Fused-Silica Spiegeln aufgebaut ist. Die Designentscheidungen und experimentellen Realisierungen im Labor und in einer Fallkapsel werden erläutert, sowie die Charakterisierung der Aufbauten vorgenommen. Es wird die relative Stabilität der hochstabilen Lasersysteme gemessen und die geforderte relative Stabilität verifiziert. Daran anschließend rückt der Aufbau des Kapselsystems in den Fokus. Der Aufbau wird detailliert erläutert und die Ergebnisse der Fallturmbwürfe vorgestellt.

Kapitel 4 schließt mit einem Ausblick diese Dissertation.



# 2

## Hochstabile Lasersysteme

Der Schwerpunkt dieser Arbeit ist der Aufbau eines hochstabilen Lasersystems für den Fallturmbetrieb. Als Referenz und Demonstrationsaufbau kommt ein zweiter Laboraufbau dazu, an dem die prinzipielle Arbeitsweise getestet werden kann. Daher werden in diesem Kapitel die notwendigen theoretischen Grundlagen erarbeitet, mit einem Fokus auf den Möglichkeiten, die Linienbreite eines Lasersystems zu vermessen. Zunächst aber wird ein Überblick über fundamentale Größen der Stabilität gegeben, unter anderem die spektrale Rauschleistungsdichte, um dann eine Methode zur Linienbreitenbestimmung im Fallturm vorzustellen. Am Ende des Kapitels wird das technische Herzstück des hochstabilen Lasersystems behandelt, in dem die optischen Resonatoren und das Pound-Drever-Hall Verfahren zur Stabilisierung des Lasers behandelt werden.

### 2.1. Optische Uhren

Eine Uhr besteht aus zwei Komponenten: Dem Oszillator, welcher die Frequenz der Uhr bestimmt, und einem Zähler, der nach einer geeigneten Bedingung passend zum Oszillator die Anzahl der Schwingungen zählt. Die Zählung startet mit Beginn einer Messung, d.h. die Zählung der Oszillationen ist nur relativ zu dem Startzeitpunkt möglich. Der Oszillator selbst ist meist aus einem Taktgeber, dem Generator, und einem Diskriminator zusammengesetzt, der als Schnittstelle des Generators zum Zähler die Signale des Generators elektronisch verarbeitbar aufbereitet. Die Hierarchie ist in Abbildung 2.1 gezeigt.

Zwei Arten der Zählung haben sich in der Breite durchgesetzt: Zum einen die mechanische Zählung, wie man sie in Pendeluhrn oder analogen Armbanduhren sehen kann.

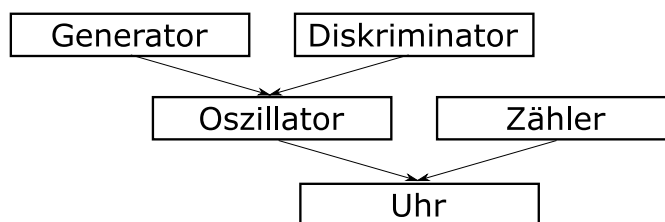


Abbildung 2.1.: Aufbau von Uhren und Oszillatoren.

Zum anderen die elektrische Zählung, bei der die Oszillation in ein elektrisches Signal gewandelt wird (falls erforderlich) und dessen Nulldurchgänge von einer Elektronik gezählt werden. Heutzutage wird auch die Wandlung in ein digitales Rechtecksignal verwendet, welches über einen Interrupt einen Mikrocontroller ansteuert, den Wert einer Variable entsprechend zu erhöhen.

Hier ist jedoch die erste Komponente einer Uhr, der Oszillator, von Interesse. Dieser ist in die zwei Bereiche Generator und Diskriminator unterteilt. Dabei gibt der Generator eine möglichst genaue und stabile Oszillation vor, bezüglich jener der Diskriminator eine Ausgangs-Oszillation ableitet. Letzterer ist meist aktiv geregelt, so dass zum Beispiel auch gewollte Frequenzverschiebungen gegenüber dem Oszillator möglich sind. Der Generator ist zum Beispiel für den Fall eines Rubidium-Oszillators (Rubidium-Atomuhr) ein Hyperfeinübergang ( $5^2S_{1/2}$  von  $F=1$  auf  $F=2$ ). Atomare Übergänge sind gegenüber Umwelteinflüssen sehr resistent, beispielsweise führen unterschiedliche Umgebungstemperaturen nicht zu einer Verschiebung (*drift*) der Übergangsfrequenz. Allerdings wird die elektrische Ausgangsoszillation von einem Quarzkristall erzeugt, der über einen Regelkreis an die fixe Frequenz des Übergangs angebunden wird. Dieser reagiert sehr wohl empfindlich auf Umwelteinflüsse, welche durch die aktive Regelung kompensiert werden. Daher hat sich die Rubidium Atomuhr – mit einer günstigen Produktion – als Referenzsystem mit einer elektrischen Ausgangsoszillation von 10 MHz oder 100 MHz bei einem relativen Fehler in der Größenordnung von  $10^{-15}$  durchgesetzt.

Eine hochstabile optische Atomuhr hat ein Autor in seiner Dissertation [68] vorgestellt. Hier ist der Generator ein optischer Übergang, im Gegensatz zu dem Mikrowellenübergang im obigen Abschnitt. Die Verarbeitung elektrischer Signale mit Schwingungen vergleichbarer Frequenz von optischen elektromagnetischen Wellen (THz aufwärts) ist Gegenstand aktueller Forschung und noch nicht erreicht. Durch das optische Mischen mit einem weiteren hochstabilen Laser ähnlicher Frequenz lässt sich jedoch das Schwebungssignal verarbeiten, das bei geeigneter Wahl wieder im Mikrowellenbereich angesiedelt ist. Damit wurde in der genannten Arbeit eine Stabilität von  $3 \cdot 10^{-16}$  ( $\tau = 1$  s) in der Allan-Abweichung bei einer Sekunde erreicht.

Jede technische Umsetzung einer Uhr ist fehlerbehaftet. Um diesen Fehler zu diskutieren, vergleicht man die Messungen mit dem perfekten Uhrengang einer hypothetischen Uhr mit der gleichen Referenzfrequenz  $\omega_0$  [47, Kap. VIII]. Weiterhin wird

oft die relative Frequenzabweichung  $y = (\omega - \omega_0)/\omega_0$  verwendet, wenn die Uhr eine nominale Frequenz  $\omega_0 = 2\pi f_0$  besitzt. Man kann die Frequenz mit der instantanen Phase  $\phi$  in Zusammenhang setzen.

$$\phi = \int \omega \, dt$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega = 2\pi f$$

Und die relative Frequenzabweichung ist dann, wenn die ideale Uhr mit der Frequenz  $\omega_0$  schwingt:

$$\phi = \int \omega - \omega_0 \, dt$$

$$y = \frac{1}{\omega_0} \frac{d\phi}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Die Notation richtet sich dabei nach dem Standardwerk [74].

## 2.2. Theorie und Fundamentale Limits

In diesem Kapitel wird das nötige Handwerkszeug vorgestellt, mit dem Uhren üblicherweise charakterisiert werden: Dieses wurde im Verlauf der letzten Jahrzehnte entwickelt, als klar wurde, dass man mit den statistischen Methoden der Gleichverteilung – Mittelwert und Standardabweichung – Uhren und ihre Eigenschaften nicht befriedigend beschreiben konnte. Dem liegt zugrunde, dass viele Prozesse, die für die Variation in einer Uhr verantwortlich sind, ebenfalls nicht durch eine gleichverteilte Größe beschreiben werden können.

### 2.2.1. Rauschen und Messgrößen

Die Charakterisierung einer Uhr besteht darin, zu verschiedenen Zeiten  $t_i$  die Frequenz  $\omega_i$  festzustellen. Technisch wird dies durch einen Frequenzzähler gelöst, der z.B. die Anzahl der Nulldurchgänge des elektrischen Signals einer Uhr in einem bestimmten Zeitintervall  $\Delta T$  zählt. Diese Zeit wird auch „Gate“-Zeit genannt, und wenn die Zähl-elektronik ein Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen benötigt, die für diese Messung verloren ist, nennt man diese „Totzeit“  $T_d$ . Sie entsteht zum Beispiel, wenn das Ergebnis der letzten Zählung über einen Computer-Bus übertragen werden muss, bevor der Speicherplatz für die neue Messung verwendet werden kann. Ob die Totzeit eines elektronischen Zählers eine Rolle spielt, und wenn ja wie groß diese ist, wird in der entsprechenden Dokumentation des Geräts vermerkt.

Für die folgenden Betrachtungen wird vereinfachend angenommen, dass die Totzeit vernachlässigbar ist. Für diesen Fall sind die Grundlagen in [74] ausführlich dargestellt.

Die folgenden Absätze beziehen sich zu einem großen Teil auf dieses „Handbuch der Stabilitätsanalyse von Frequenzen“.

Für optische Uhren ist die Oszillatorfrequenz nicht direkt zugänglich, da die optische Frequenz  $\omega_0$  elektronisch nicht verarbeitet werden kann. Diese wird mit geeigneten Techniken in den technisch zugänglichen Bereich transformiert. Dieses „down-sampling“ funktioniert besonders gut durch die optische Überlagerung zweier Laser mit annähernd gleichen Frequenzen. In dem Fall dieser Dissertation, ist die Grundwellenlänge 1550 nm, also 194 THz. Die Messung mit einem weiteren Laser, der eine verstimmbare Abweichung von einigen Megahertz besitzt, bedingt also eine absolute Frequenzdifferenz im 0,00001% Bereich. Im Idealfall sind die Eigenschaften des zweiten Lasers im Vergleich nahe an denen der hypothetischen Uhr, so dass man die Messergebnisse dem zu vermessenden Laser zuordnen kann. Dies äußert sich meist dadurch, dass die Linienbreite der zu untersuchenden Lasers  $\Delta\lambda_1$  viel größer als die des Referenzlasers  $\Delta\lambda_2 \ll \Delta\lambda_1$  ist. Die Untersuchung findet in Form einer Überlagerung der optischen Felder statt, so dass auf einem Photodetektor die Faltung der beiden Lichtfelder gemessen wird. Die resultierende Linienbreite („beat“) ist dann die Summe beider Halbwertsbreiten:  $\Delta\lambda_b = \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 \approx \Delta\lambda_1$ . Diese Hypothese muss natürlich im Vorfeld verifiziert worden sein.

Ob die Messgrößen mit den relativen Frequenzabweichungen  $y_i$  oder mit den relativen Phasen  $x_i$  bezeichnet werden, wechselt durch die Literatur. Für diskrete Messungen werden Messpunkte durch die Zeitpunkte der Messung  $t_i$  gekennzeichnet oder wenn es geeigneter erscheint, über eine Funktion  $f(t_i)$  interpoliert.

Wie eingangs erwähnt, ist die Analyse eines solchen Signals nicht mehr mit den Mitteln der bekannten Fehlerrechnung durchführbar, da keine Gleichverteilung der Messgrößen vorliegt. Damit kann die Standardabweichung zur Analyse nicht verwendet werden. Alternativ wurde daher unter anderem die Allan-Varianz und Allan-Abweichung zur Analyse eingeführt. Im Laufe der Zeit wurde die originale Definition um verschiedene Variationen ergänzt, und man kann in [74, S. 11] eine Liste der modifizierten Allan-Varianzen mit Hinweisen zu ihrer Anwendung sehen. Dort findet man auch die folgenden Definitionen für die Frequenz- oder Phasenmessung einer Uhr:

$$y = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{1}{2\pi\nu_0} \frac{d\phi}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad (2.2.1)$$

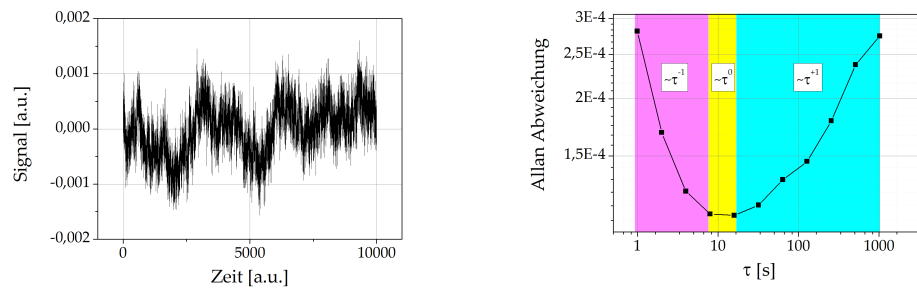
Nach [28] kann man die Allan-Varianz für relative Frequenzmessungen  $y_i$  wie folgt schreiben:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \langle (y_{n+1} - y_n)^2 \rangle \quad (2.2.2)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N-1} (y_{n+1} - y_n)^2 \quad (2.2.3)$$

In einer linearen Näherung kann man die Allan-Varianz aus Phasenmessungen mit





(a) Die Ausgangsdaten aus dem Programm *AlaNoise* mit kleiner Nachbearbeitung als Zeitreihe.

(b) Die aus den (dann normierten) Ausgangsdaten berechnete Allan-Abweichung  $\sigma_y$ .

Abbildung 2.2.: Rauschdaten und Allan-Varianz im Vergleich.

$y = \frac{d}{dt}x$  oder

$$y_i = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\tau} \quad (2.2.4)$$

schreiben (siehe Gleichungen (6) und (7) in Kapitel 5.2.2 [74]), und damit folgt:

$$\sigma_y^2(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{\tau^2} \langle (x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)^2 \rangle \quad (2.2.5)$$

Da später Frequenzmessungen zur Bestimmung der Stabilität des Lasers verwendet werden, basieren die Rechnungen dort auf (2.2.3) beziehungsweise den entsprechenden Varianzen.

Mit den beiden Programmen *AlaNoise*<sup>1</sup> und *AlaVar* 5.2<sup>2</sup> kann man die Analyse anschaulich machen. *AlaNoise* dient dazu, Daten zu verschiedenen Rauschtypen zu generieren. Diese können dann mittels *AlaVar* analysiert werden. *AlaVar* wird später verwendet werden, wenn die Stabilität der Lasersysteme untersucht wird. In Abbildung 2.2 werden generierte Rauschdaten gezeigt, die dann mit dem Programm *AlaVar* analysiert werden. Dabei sind drei Bereiche farblich hinterlegt, die den verwendeten Rauschtypen entsprechen. Pro Bereich kann man eine Gerade mit der Steigung  $\tau^{\mu/2}$  anpassen. Der Exponent in der Allan-Varianz überträgt sich laut folgender Tabelle in Exponenten der spektralen Rauschleistungsdichte mit der Form  $f^\alpha$ :

<sup>1</sup><http://www.alamath.com/alanoise/>

<sup>2</sup><http://www.alamath.com/alavar/>

Rauschtyp	$\alpha$	$\mu$
Weißes Phasenrauschen	2	-2
Flicker Phasenrauschen	1	$\approx -2$
Weißes Frequenzrauschen	0	-1
Flicker Frequenzrauschen	-1	-0
Random-walk Frequenzrauschen	-2	1

Alternativ zur Allan-Varianz ist es gebräuchlich die Rauschleistung zu einer Frequenz zu spezifizieren. Dies wird mit der spektralen Rauschleistungsdichte (PSD) angegeben. Diese gibt an, wie viel Leistung durch das Rauschen in einem Frequenzband  $\Delta\omega$  um eine Frequenz  $\nu$  (oder Kreisfrequenz  $\omega$ ) erzeugt wird. Da Messpunkte in der Regel durch eine zeitliche Angabe  $x_n$  oder  $x(t)$  identifiziert werden, ist auf dem Weg zur spektralen Rauschleistungsdichte eine Fourier-Transformation in den Frequenzraum nötig.

Weil die Messung in einem zeitlich abgeschlossenen Intervall erfolgt, nutzt man die abgeschnittene Fourier-Transformation mit den Integrationsgrenzen  $\pm T$ . Sonst würde man implizit über ein unendlich langes Signal integrieren müssen, welches als Energie oder Leistung überall positiv ist, und ein divergierendes Ergebnis erhalten ([43, 44]).

So betrachtet man zuerst die gemittelte Leistung  $P$  des Signals  $x(t)$ :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E}{2T} \quad (2.2.6)$$

Zum Vergleich ist die Energie eines Signals durch

$$E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.2.7)$$

gegeben und damit durchaus möglicherweise unbeschränkt. Für bestimmte Signalformen existiert das Integral der Energie, und man kann dann statt der spektralen Rauschleistungsdichte die spektrale Energiedichte berechnen.

Die symmetrische abgeschnittene Fourier-Transformation mit den Integrationsgrenzen  $\pm T$  ist wie folgt definiert:

$$\hat{x}(\omega) = \mathcal{F}\{x\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.2.8)$$

Die Definition der spektralen Rauschleistungsdichte als Erwartungswert des Betragsquadrates der obigen Fourier Transformierten schreibt sich folgendermaßen:

$$S_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ |\hat{x}(\omega)|^2 \right] \quad (2.2.9)$$

Die rechte Seite wird im Folgenden ausgeschrieben, und der Erwartungswert unter die Integrale gezogen:

$$\mathbb{E} \left[ |\hat{x}(\omega)|^2 \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \mathbb{E} [x(t)^* x(t')] e^{i\omega(t-t')} dt dt' \quad (2.2.10)$$

Dabei ist offensichtlich, dass unter dem äußeren Integral die Autokorrelation  $R_X$  (siehe (2.3.27)) steht. Für stationäre Prozesse (WSS, wide sense stationary process) gilt dann, dass die spektrale Rauschleistungsdichte gleich der Fourier-Transformation der Autokorrelation ist:

$$S_{xx}(\omega) = \hat{R}_X(\omega) = \mathcal{F} \{R_X(\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \mathbb{E} [x(0)^* x(\tau)] e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.2.11)$$

Dies wird als Wiener-Chintchine-Theorem (siehe (2.3.2)) bezeichnet (die Schreibweise ist oft nicht eindeutig: Khinchin (im engl.), Chintschin, Khintchine,...). Dafür wird  $t' = t + \tau$  substituiert und die Eigenschaft der WSS-Prozesse genutzt, dass für die Berechnung der Autokorrelation nur der zeitliche Abstand  $\tau$  eine Rolle spielt. Dadurch kann das Integral über  $t$  ausgeführt werden, es ergibt  $2T$ . Das zweite Integral ist dann die Fourier-Transformation mit der Integrationsvariablen  $\tau$ .

Für die Einheiten der spektralen Rauschleistungsdichte sei die kurze Wiederholung der Symbole aus [74] gegeben:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt} && [\text{Hz}] \\ y(t) &= \frac{v(t) - v_0}{v_0} = \frac{dx}{dt} && [ ] \\ x(t) &= \frac{\phi(t)}{\omega_0} && \left[ \frac{1}{\text{Hz}}; \frac{\text{rad}}{\text{Hz}} \right] \end{aligned}$$

Damit sind die Einheiten der verschiedenen PSDs:

$$\begin{aligned} [S_x(f)] &= s^3 = \frac{s^2}{\text{Hz}} \\ [S_y(f)] &= s = \frac{\text{rad}^2}{\text{Hz}} \\ [S_\phi(f)] &= [S_\nu(f)] = s = \frac{\text{rad}^2}{\text{Hz}} \end{aligned}$$

und die Umrechnung untereinander erfolgt mit diesen Gleichungen:

$$S_\phi(f) = (2\pi\nu_0)^2 \cdot S_x(f) = \left(\frac{\nu_0}{f}\right)^2 \cdot S_y(f) \quad (2.2.12)$$

Dabei ist zu beachten, dass häufig die Verdopplung der Bezeichner im Index weggelassen wird. Die Literatur ist jedoch nicht eindeutig und man sollte immer nach den gegebenen Definitionen suchen.

Außerdem findet man dort den Zusammenhang zwischen der spektralen Rauschleistungsdichte und der Allan-Varianz für relative Frequenzdifferenzen. Dabei wählt man je nach gewünschtem Typ der Allan-Varianz eine Transferfunktion  $H(f)$  aus, um die entsprechende Allan-Varianz aus der PSD zu berechnen:

$$\sigma^2(\tau) = \int_0^{f_{\max}} S_{xx} |H(f)|^2 df \quad (2.2.13)$$

In der Literatur wird ebenfalls die Wurzel aus Gleichung (2.2.13) verwendet, welche analog zur Varianz und Standardabweichung mit Allan-Abweichung  $\sigma$  bezeichnet wird.

Die Rauschleistungsdichte wird oft auch verkürzt als Rauschleistung bezeichnet. Diese ist aber streng genommen die Rauschleistungsdichte multipliziert mit dem interessierenden Bandbereich  $\Delta\omega$ :

$$P_{\Delta\omega} = \int_{\omega}^{\omega+\Delta\omega} S_{xx} d\omega = S_{xx}(\omega)\Delta\omega \quad (2.2.14)$$

Diese Rechnungen können mit verschiedenen Programmen, z.B. MatLab, Mathematica oder MAPLE, nachvollzogen werden. Für die folgenden Bilder (siehe Abbildung 2.3) wurde MAPLE verwendet, der Code des Worksheets findet sich im Anhang (A.4). Für die Bilder wird zunächst ein Datensatz für weißes Rauschen mit Mittelwert null und einer Varianz von einhalb erzeugt. Die Datensatzlänge beträgt 2000. Dann wird die Autokorrelation berechnet und mit der diskreten Fourier-Transformation schließlich

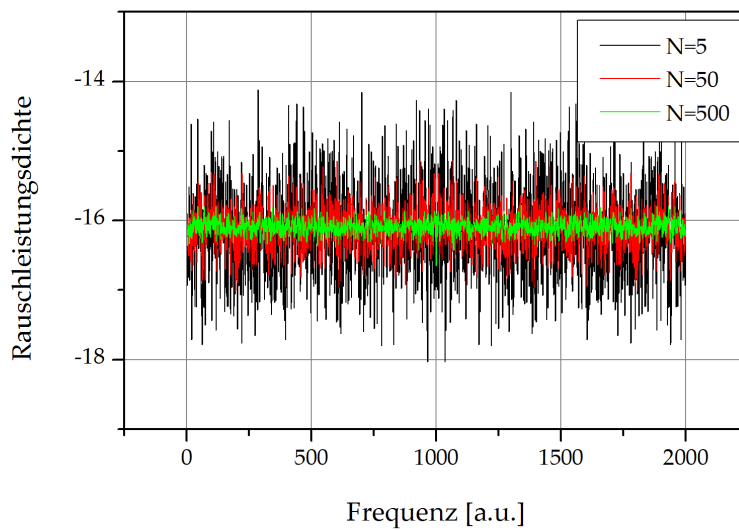


Abbildung 2.3.: Gemittelte PSDs über weißes Rauschen mit verschiedener Anzahl generierter Rauschdatensätze. Die Mittelung glättet Einmaleffekte durch die endliche Anzahl der Datenpunkte und durch den Prozess der Generierung der Zufallszahlen.

die spektrale Rauschleistungsdichte. Weißes Rauschen ist unabhängig von der Frequenz und damit theoretisch eine einzelne Linie. Man erkennt in der Abbildung, dass eine Mittelung eine großen Anzahl Datensätze mit den gleichen Eigenschaften über den Erzeugungsprozess einen erheblichen Einfluss auf die Amplitude der spektralen Rauschleistungsdichte hat. Die Gründe dafür sind die endliche Anzahl der Datenpunkte in Verbindung mit der Fourier-Transformation, und dass die Datenpunkte für das Rauschen keine exakte Gaußsche Verteilung besitzen. Mittelt man über viele Datensätze, nähert man sich der Gaußschen Verteilung und damit in der PSD der Linienform an.

### 2.2.2. Das Schrotrauschen

Die Betrachtung der Stabilität eines Lasers erfordert in letzter Konsequenz die Einbeziehung des gesamten Aufbaus und der (Labor-) Umgebung. Ein fundamentales Limit wird dabei immer wieder eine Rolle spielen, das sog. Schrotrauschen, im Englischen „shot noise“. Dieses gibt eine Grenze der erreichbaren (Mess-) Genauigkeit vor, das sog. „shot noise limit“.

Das Schrotrauschen ist ein quantenmechanisches Limit, welches der Quantennatur des Lichts geschuldet ist. Dazu muss man sich vor Augen halten, dass der Emissionsprozess ein Zufallsprozess ist. Analog ist die Absorption in einem Photodetektor der

inverse Prozess und unterliegt ebenfalls den statistischen Eigenschaften.

Die Regelung wird maßgeblich von den Eigenschaften des Detektors bestimmt. Daher begrenzt das Schrotrauschen des eingesetzten PDH-Detektors<sup>3</sup> die bestmögliche Performance des gesamten Aufbaus. Das Schrotrauschen einer Halbleiterdiode ist gegeben durch:

$$S[A] = \sqrt{4eI} \quad (2.2.15)$$

wobei  $I$  den durch das Laserlicht erzeugten Photostrom des Detektors beschreibt. Dieser kann durch die Empfindlichkeit des Detektors  $\eta$  und der optischen Leistung  $P$  ausgedrückt werden ( $e$  ist die Elementarladung der Elektrons und  $N_e$  die Anzahl der Elektronen):

$$I = \eta e N_e = \eta e \frac{P}{h\nu} \quad (2.2.16)$$

Im Resonanzfall wird je nach dem Grad der Einkopplung in den Resonator ein großer Teil des Trägers transmittiert, so dass die Leistung auf dem PDH-Detektor im Wesentlichen durch die Leistung der Seitenbänder definiert ist:

$$P = 2 J_1^2 P_0 \quad (2.2.17)$$

Das Frequenzrauschen des oben in der Einheit Ampere angegebenen Schrotrauschens muss mittels der Umrechnung aus der Flanke des Fehlersignals gewonnen werden. Der Photodetektor wandelt mittels eines Strom-Spannungs-Wandler den Photostrom in eine elektrische Spannung, welche dann mit der Theorie der Pound-Drever-Hall-Stabilisierung in die entsprechende Antwort des Fehlersignals umgerechnet. Der Umrechnungsfaktor ist in (2.4.53) gegeben.

Das Frequenzrauschen aus dem Schrotrauschen ist damit nach [9] gegeben als:

$$S_f(f) = \frac{\sqrt{hc^3}}{8} \frac{1}{\mathcal{F}L\sqrt{\lambda P_c}} \quad (2.2.18)$$

Dabei ist  $\mathcal{F}$  die Finesse und  $L$  die optische Länge des optischen Resonators,  $\lambda$  die Wellenlänge des stabilisierten Lasers und  $P_c$  die Leistung der nicht modulierten Frequenzkomponente des Laserlichts. Mit beispielhaften Werten ( $\mathcal{F} \approx 400.000$ ,  $L = 48$  mm,  $\lambda = 1550$  nm und  $P_c \approx 50$   $\mu$ W) für die beiden Experimente (Labor- und Fallturmaufbau) folgt damit:

$$S_f(f) \lesssim 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Hz}^2}{\text{Hz}} \quad (2.2.19)$$

<sup>3</sup>PDH bezeichnet das Pound-Drever-Hall-Verfahren zur Laser Stabilisierung und wird in Kapitel (2.4.4) beschrieben

Die Umrechnung in relatives Frequenzrauschen erfordert den Faktor <sup>4</sup>  $\frac{1}{v_0^2}$ :

$$S_y(f) = \frac{1}{v_0^2} S_f(f) \quad (2.2.20)$$

Mit der in [74, Kapitel 7.1] gegebenen Umrechnungstabelle der Konvertierung zwischen Allan-Varianz und spektraler Rauschleistungsdichte kann man die zugehörige Allan-Varianz berechnen. Da Schrotrauschen weißes Frequenzrauschen ist (keine Abhängigkeit von  $f$ ), ist der Faktor  $C = \frac{1}{2}$  und die Konvertierung lautet:

$$\sigma_y^2(\tau) = C \cdot f^0 S_y(f) \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2} \frac{1}{v_0^2 \tau} S_f(f) \quad (2.2.21)$$

Die Allan-Standardabweichung ist damit:

$$\sigma_y(\tau) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{S_f(f)}{v_0^2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \approx 2,6 \cdot 10^{-17} \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\tau}} \quad (2.2.22)$$

Dies ist das bestmögliche Ergebnis, welches mit den oben genannten Parametern von dem Lasersystem erreicht werden kann, und liegt damit weit unter der erreichten Stabilität der Lasersysteme in dieser Arbeit.

### 2.2.3. Weitere Störeinflüsse und Rauschquellen

Es gibt eine Vielzahl an Umwelteinflüssen, welche die Stabilität eines Lasersystems verringern können. Als Lasersystem wird hier ein Aufbau bezeichnet, welcher durch einen optischen Resonator als Referenz für eine aktiv stabilisierte Laserquelle gekennzeichnet ist. Das stabilisierte Laserlicht ist dabei das Objekt der Untersuchung.

Für die folgende Untersuchung wird vorgegriffen auf Kapitel 2.4. Das zentrale Ergebnis dieses Kapitels ist die folgende Formel (2.4.54) für das Fehlersignal  $\epsilon$  der aktiven Stabilisierung [9]:

$$\epsilon = 2\pi C \frac{2d}{\lambda} \left( \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta d}{d} \right) \quad (2.2.23)$$

Dabei ist  $C$  eine Konstante, die individuell den Experimentaufbau charakterisiert,  $d$  der Abstand der beiden Spiegel des Resonators, während die Größen  $\Delta f$  und  $\Delta d$  die Abweichung von den ungestörten Größen der Laserfrequenz beziehungsweise des Abstands der Spiegel angeben. Man erkennt auch hier schon, dass eine Regelung aktiv wird, wenn entweder eine Verstimmung des Laserlichts  $\Delta f$  oder eine Verschiebung der Resonanz des optischen Resonators eintritt. Letztere wird durch eine Längenänderung  $\Delta d$  subsumiert, da die Resonanzfrequenzen über den Zusammenhang (2.4.4)  $q\lambda = 2d$

<sup>4</sup>Die Quadratur ist notwendig, da durch die Autokorrelation die Frequenzdifferenz ebenfalls quadriert wird.

mit dem Abstand der Spiegel  $d$  (gleichbedeutend mit der Länge des Resonators) direkt verknüpft sind.

In der Tat ist es so, dass auch die Laserquelle einen optischen Resonator besitzt, der von dem aktiven Medium gefüllt wird. Daher sind viele Rauschquellen sowohl für die Lasererzeugung wie auch für den optischen Resonator als Referenz gleich. Das Hauptaugenmerk wird sich im Folgenden daher auf den zweiten Summanden der obigen Gleichung konzentrieren.

Der Einfluss von Rauschquellen wird gebräuchlich in der korrespondierenden Rauschleistungsdichte (2.2.9) angegeben. Dabei liefert die Summe aller Rauschleistungsdichten dann das theoretische Limit an die Stabilität des Aufbaus. Für die Umrechnung der Rauschleistungsdichte der Längenänderungen sind folgende Formeln zu verwenden:

$$\Delta\nu = \frac{\nu_0}{L_0} \Delta L \quad (2.2.24)$$

$$S_\nu(f) = \frac{\nu_0^2}{L_0^2} S_L(f) \quad (2.2.25)$$

Dies folgt direkt aus der Beziehung zwischen  $\nu$  und  $L$ :<sup>5</sup>  $\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{c}{2L} - \frac{c}{2L_0}$  mit  $L = L_0 + \Delta L$ .

Die nun folgenden Rauschquellen wurden schon in vielen Arbeiten ausführlich behandelt, so zum Beispiel in [68] oder [61]. Die Ergebnisse des hier behandelten Aufbaus werden in den Kapiteln 3.3.2 und 3.3.3 vorgestellt.

## Vibrationen

Vibrationen greifen an der Grundplatte der Vakuumkammer an und pflanzen sich dann im Inneren bis zu dem Halter und dem sphärischen Abstandshalter fort. Zwei Effekte spielen dabei eine Rolle: Zum einen kann dieser in Schwingung versetzt werden, zum anderen können die unterschiedlichen Kräfte an seinen Haltepunkten den Resonator verformen.

Die erste Analyse des hier verwendeten sphärischen Abstandshalters für den optischen Resonator zeigt einen Wert für die Beschleunigungssensitivität in Richtung der optischen Achse von  $4,0 \times 10^{-11} / g$  und in zwei dazu senkrechte Richtungen von  $1,6 \times 10^{-10} / g$  und  $3,1 \times 10^{-10} / g$  [46]. Außerdem messen die Autoren eine Unterdrückung der Längenänderung der optischen Achse um den Faktor 100, wenn der sphärische Abstandshalter mit seinem „magischen Winkel“ (siehe Kapitel 3.1.1) gehalten wird.

<sup>5</sup>Es wird eine Näherung gemacht:  $L^2 \gg LL_0$



### Thermische Stabilität

Temperaturschwankungen sind immer dann ein Problem, wenn diese den Abstandshalter betreffen. Allgemein ist der lineare Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$  wie folgt definiert:

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \quad (2.2.26)$$

Er ist der Proportionalitätsfaktor, welcher die Längenänderung mit einer Temperaturdifferenz verknüpft. Für die meisten Materialien wird der lineare Ausdehnungskoeffizient  $\alpha(T)$  linear genähert und durch eine Materialkonstante  $a$  ausgedrückt:

$$\alpha_{ULE}(T) = a (T - T_0)$$

Dabei ist  $T_0$  die Nulldurchgangstemperatur, an der das Material das Vorzeichen des Ausdehnungskoeffizienten wechselt. Der verwendete Abstandshalter ist kugelförmig und aus ULE (*ultra low expansion*) Glas der Firma Corning. Der Koeffizient  $a$  kann aus dem Experiment bestimmt werden (siehe Kapitel 3.3.5).

Damit kann die theoretische Frequenzverschiebung durch eine Temperatur- und Längenänderung des Abstandshalters für einen Temperatursprung von  $\Delta T = 1$  K berechnet werden:

$$\Delta \nu = \frac{\nu_0}{L_0} \alpha(T) L_0 \Delta T = \frac{\nu_0}{L_0} a (T - T_0) L_0 \Delta T = 10,9 \text{ MHz} \quad (2.2.27)$$

mit folgenden Daten aus dem hier verwendeten Lasersystem:  $\nu_0 = 1,9 \times 10^{14}$  Hz,  $L_0 = 48,5$  mm,  $a = 2,2 \times 10^{-9} \text{ K}^{-1}$ , der Raumtemperatur  $T = 19,5$  °C und der Nulldurchgangstemperatur  $T_0 = -6$  °C für einen Resonator aus ULE mit *Fused Silica*-Spiegeln. Die Messungen dazu finden sich in Kapitel 3.3.3.

## 2.3. Phasenrauschen und Bestimmung von Linienbreiten

### 2.3.1. Natürliche Linienbreite

Der Inhalt des folgenden Abschnitts ist aus der einschlägigen Literatur bekannt, z.B. in Demtröder, *Experimentalphysik 2 Kap. 3*[24], und soll nur zur Erinnerung und Vollständigkeit stark verkürzt wiedergegeben werden.

Ausgangspunkt der Überlegung ist ein Zwei-Niveau-Energiesystem. Ein Atom kann sich in dem energetisch niedrigeren Zustand  $|\psi_1\rangle$  mit der Energie  $E_1$  oder dem Zustand  $|\psi_2\rangle$  mit der Energie  $E_2$  befinden, der um die Energie  $\Delta E$  höher liegt. Die Vermittlung zwischen den beiden Energieniveaus findet mit Photonen  $\gamma$  statt, deren Energie  $E_\gamma = \hbar\omega$  der Energiedifferenz entspricht. Dabei wird das Photon absorbiert, damit das Atom von dem Zustand  $E_1$  in den Zustand  $E_2$  wechseln kann, oder umgekehrt emittiert.

Der Vorgang lässt sich durch eine gedämpfte Schwingung modellieren:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0 \quad (2.3.1)$$

Die Lösung der Differentialgleichung kann im Allgemeinen durch die Kleinwinkel-Näherung gefunden werden, und ist:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma/2 t} \cos \omega t \quad (2.3.2)$$

mit der Dämpfungskonstante  $\gamma$ .

Die gedämpfte Schwingung ist im Gegensatz zur harmonischen Schwingung nicht mehr monochromatisch, sondern hat eine Frequenzverteilung  $A(\omega)$  im Frequenzraum. Diese kann aus der Lösung  $x(t)$  durch eine Fourier-Transformation berechnet werden:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.3.3)$$

Die explizite Rechnung und Bestimmung der Fourier Koeffizienten  $A(\omega)$  in einem besonderen Fall wird in Kapitel 2.3.10 ausgeführt. Hier soll das Ergebnis für die Intensität  $I = A(\omega)A^*(\omega)$  aus der Literatur genügen:

$$I(\omega - \omega_0) = \frac{C}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (2.3.4)$$

mit der Normierungskonstante  $C$ . Wird diese so gewählt, dass das Integral über alle  $\omega - \omega_0$  genau die Gesamtintensität  $i_0$  ergibt, wird die Intensitätsverteilung ohne den Vorfaktor  $I_0$  das „Lorentz-Profil“  $g(\omega - \omega_0)$  genannt:

$$g(\omega - \omega_0) = \frac{\gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2} \quad (2.3.5)$$

Die Linienbreite  $\delta\omega$  wird nun wie folgt definiert:

„Das Frequenzintervall  $\delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$  zwischen den beiden Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  bei denen die Intensität  $I(\omega)$  auf den Wert  $I(\omega_0)/2$  abgesunken ist, heißt die volle Halbwertsbreite (engl. FWHM)“, angelehnt an [25]. Die volle Halbwertsbreite lässt sich aus der Formel für die Verteilungsfunktion  $g$  ablesen:

$$\delta\omega = \gamma \quad \text{oder} \quad \delta\nu = \gamma/2\pi \quad (2.3.6)$$

Die relativen Halbwertsbreiten sind für die verschiedenen Darstellungen gleich:

$$\left| \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right| = \left| \frac{\delta\nu}{\nu_0} \right| = \left| \frac{\delta\lambda}{\lambda_0} \right| \quad (2.3.7)$$

Die Messung und Bestimmung der Linienbreite ist dennoch nicht trivial. Die opti-

schen Frequenzen im Terahertz-Bereich mit einigen  $10^{14}$  Hz sind noch nicht elektrisch detektierbar und nicht verarbeitbar. Daher wurden verschiedene Methoden entwickelt, die Linienbreite durch indirekte Messungen abzuleiten.

Eine Messung des elektrischen Schwebungssignals eines Photodetektors, welches durch die Überlagerung von zwei Lasersystemen erzeugt wird, gibt dann einen Wert für die Linienbreite eines der beiden Lasersysteme, wenn das andere bekanntermaßen eine sehr viel kleinere Linienbreite aufweist. Dies ist der Fall, wenn das stabilere System als Referenz genutzt wird um neue Experimente zu charakterisieren.

Alternativ können Laser gleicher Linienbreite verwendet werden, dann muss die gemessene Linienbreite halbiert werden, siehe auch 2.3.10. Wenn man einen unbekanntem Laser vermessen soll, ist es allerdings schwierig die gemessene gemeinsame Linienbreite den beteiligten Lasersystemen zuzuordnen. Aus dieser Schwierigkeit heraus sind andere Methoden zur Messung entwickelt worden. Zwei Verfahren werden beginnend ab Kapitel 2.3.4 behandelt.

### 2.3.2. Linienverbreiterung

Neben der inhärenten Linienverbreiterung durch die endliche Emissionszeit gibt neben anderen zwei weitere, bekannte Verbreiterungsmechanismen:

- Kollisionen zwischen Atomen eines Gases: Bei einem Gasentladungslaser emittieren Gasatome das Laserlicht, die durch den Gasdruck miteinander kollidieren. Bei der Kollision zweier Atome und gleichzeitiger Emission eines Lichtquants wird dieses bei einem inelastischen Stoß um die Frequenz des Wellenzugs verschoben, oder bei einem elastischen Stoß einen zufälligen Phasensprung erfahren. Durch die Stöße findet eine Linienverbreiterung statt, deren Form wie folgt gegeben ist:

$$F_L(\omega) = \frac{\frac{\gamma}{\pi}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \quad (2.3.8)$$

wobei  $\gamma = 1/\tau_0$  und  $\tau_0$  die mittlere Stoßzeit der Atome im Gas ist. (vergleiche z.B. [41])

- Bewegung der Atome in einem Gas: Diese Bewegung führt zu einer Frequenzverschiebung, dem Dopplereffekt. Da die Funktionsweise eines Lasers auf der angeregten Emission beruht, wirkt sich der Dopplereffekt doppelt aus: Bei der angeregten Emission ist das eintreffende Photon für das bewegte Atom frequenzverschoben und bei der Emission ist die Frequenz gegenüber dem Laborsystem verschoben. Die Formel für den Dopplereffekt eines Atoms lautet:

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (2.3.9)$$

Der Effekt verschmiert im Mittel über alle Atome und viele Geschwindigkeiten

und führt zu einer Verteilungsfunktion, welche die Frequenzverschiebungen gewichtet, einer Gaußverteilung:

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi\delta} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\delta^2}} \quad (2.3.10)$$

(siehe z.B. [25, Kap. 7.4.2])

Sollten beide Effekte zum Tragen kommen, ist die resultierende spektrale Verteilung eine Faltung der beiden Verteilungsfunktionen  $F_L$  und  $F_G$ . Bei einem Lorentz- und Gauß-Profil, wie hier aufgeführt, liefert die Faltung das Voigt-Profil.

$$V(\omega) = (F_G * F_L)(\omega) = \int F_G(\omega') F_L(\omega - \omega') d\omega' \quad (2.3.11)$$

Dieses Integral hat keine analytische Lösung, es wird gemeinhin:

$$V(\omega) = \frac{\operatorname{Re}\{w(z(\omega))\}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (2.3.12)$$

als Näherungslösung angegeben, wobei  $w(z)$  die Faddeeva-Funktion ist und die Frequenz als Parameter von dem Parameter  $z = (x + i\gamma_L)/(\sigma\sqrt{2})$  absorbiert wird.

### 2.3.3. Definitionen

In diesem Kapiteln werden Größen und Operationen definiert, mit denen eine mathematische Beschreibung der Korrelationen von Licht und seiner Intensität möglich wird. In den folgenden Kapiteln werden die hier gemachten Definitionen verwendet, um die spektralen Rauschleistungen verschiedener Anwendungsfälle zu berechnen.

**Definition 2.3.1 (Signal).** Das Signal einer elektromagnetischen ebenen Welle ist eine reelle Funktion und im Allgemeinen von der Form:

$$y(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi(t)) \quad (2.3.13)$$

Da viele Rechnungen leichter fallen, wenn man die Exponentialfunktion nutzt (die in enger Beziehung mit den Winkelfunktionen steht), definiert man das analytische Signal:

**Definition 2.3.2 (Analytisches Signal).** Das analytische Signal ist die Erweiterung des Signals (im Reellen) in den Raum der komplexen Funktionen:

$$\hat{y}(t) = \tilde{y}(t) e^{i\omega t} \quad (2.3.14)$$

mit der komplexen Amplitude  $\tilde{y}(t) = A(t) e^{i\phi(t)}$ .

Der Realteil des analytischen Signals entspricht dem reellen Signal:

$$y(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{y}(t) \} = \frac{1}{2} (\hat{y}(t) + \hat{y}(t)^*) \quad (2.3.15)$$

**Definition 2.3.3 (Intensität):** Die Intensität einer elektromagnetischen Welle ist gegeben durch das Quadrat der Feldstärke. Die Intensität kann zeitabhängig sein:

$$I(t) = E^2(t) = \operatorname{Re} \{ \hat{E} \}^2 \quad (2.3.16)$$

Diese Intensität wird auf einem Photodetektor gemessen. In der komplexen Schreibweise des reellen Signals führt das zu mehreren Termen:

$$I(t) = \left( \frac{1}{2} \hat{y}(t) + \frac{1}{2} \hat{y}(t)^* \right)^2 \quad (2.3.17)$$

Die Photodetektoren können nur Frequenzen bis zu ihrer Bandbreite als elektronisches Signal weitergeben. Daher ist bei der Intensitätsberechnung darauf zu achten, schnellere Frequenzen mit einem Zeitmittel heraus zu rechnen.

**Definition 2.3.4 (Faltung):** Die Faltung zweier komplexwertiger Funktionen  $f$  und  $g$  ist wie folgt definiert:

$$(f * g)(\tau) = f(t) * g(t)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(\tau - t) dt \quad (2.3.18)$$

Per Definition ist die Faltung kommutativ. Sollten für Funktionen nur auf  $[0, \infty)$  definiert sein, wird die untere Grenze im Integral ebenfalls auf null gesetzt.

**Definition 2.3.5 (Erwartungswert):** Der Mittelwert oder Erwartungswert ist bei diskreten Werten eines Zufallsprozesses entweder als Scharmittelwert definiert:

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_i Y_i p_i \quad (2.3.19)$$

sowie bei einer kontinuierlichen Verteilung:

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} p(Y)Y dY \quad (2.3.20)$$

oder als Zeitmittel

$$\mathbb{E}[y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(t) dt \quad (2.3.21)$$

Dieses wird bei den in dieser Arbeit betrachteten Zeitreihen der Fall sein. Damit wird die Zufallsvariable  $Y$  in eine zeitabhängige Variable  $y(t)$  absorbiert. Die Summe und

das Integral werden dann nicht mehr über die Zufallswerte selbst geführt, sondern über den Parameter Zeit  $t$ . Damit leitet sich die obige Formel über die Analogie  $p = \frac{1}{N} \rightarrow \frac{1}{T}$  ab:

$$\mathbb{E}[y_i] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N y_i \quad (2.3.22)$$

wird zu

$$\mathbb{E}[y(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T y(t) dt \quad (2.3.23)$$

Allerdings werden in Veröffentlichungen sowohl das Scharmittel als auch das Zeitmittel angewendet, da mit geeigneter Wahl der Rechenaufwand verringert werden kann. Leider wird nicht immer kenntlich gemacht ist, welche Methode gewählt wird. Da allerdings die betrachteten Prozesse ergodisch sind und nach der Ergodenhypothese die Ergebnisse für beide Mittelwerte übereinstimmen, sind die Methoden austauschbar.

**Definition 2.3.6 (Autokorrelation).** Die Autokorrelation stellt einen Zusammenhang zwischen Messwerten oder Signalen zu verschiedenen Zeiten  $t$  und  $t + \tau$  her. Sie ist für Rauschsignale mit der Rauschleistungsdichte verknüpft und wird daher zur Signalanalyse verwendet.

Für eine Zufallsvariable  $X$ , die einen Zufallsprozess mit den Eigenschaften – Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma$  sind zeitunabhängig – beschreibt, ist die Autokorrelation beziehungsweise der Autokorrelationskoeffizient (beide Namen sind äquivalent) wie folgt über den Erwartungswert definiert. Gebräuchlich sind dafür die äquivalenten Symbole  $R_X(\tau)$  und  $\Gamma_X(\tau)$ .

$$R_X(\tau) = \Gamma_X(\tau) = \frac{\mathbb{E}[(X(t) - \mu)(X(t + \tau) - \mu)]}{\sigma^2} \quad (2.3.24)$$

Für schwach stationäre Prozesse mit dem Erwartungswert  $\mu = 0$  gilt damit:

$$R_X(\tau) = \Gamma_X(\tau) = \frac{\mathbb{E}[X^*(t)X(t + \tau)]}{\mathbb{E}[X(t)^*X(t)]} \quad (2.3.25)$$

Die Autokorrelation wird durch spitze Klammern gekennzeichnet:

$$R_X(\tau) = \langle X^*(t)X(t + \tau) \rangle \quad (2.3.26)$$

Oft wird die Normalisierung auch weggelassen, dann erhält man die Autokovarianz<sup>6</sup>:

$$R_X(\tau) = \Gamma_X(\tau) = \mathbb{E}[X^*(t)X(t+\tau)]$$

$$\stackrel{\text{erg.}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T X^*(t)X(t+\tau) dt \quad (2.3.27)$$

Man kann die Autokovarianz auch über das Operatorsymbol  $\star$  ausdrücken:

$$R_X(\tau) = (X \star X)(\tau) \quad (2.3.28)$$

Es ist auch Möglich mit dem Faltungsoperator  $*$  die Autokovarianz zu beschreiben:

$$R_X(\tau) = X^*(-t) * X(t)(\tau) \quad (2.3.29)$$

ausgedrückt werden kann.

*Man beachte, dass man bei vielen Veröffentlichungen aus dem Kontext ableiten muss, ob die Autokovarianz anstatt der normierten Autokorrelation verwendet wird!*

Da die Autokorrelation aus dem Erwartungswert gebildet wird, kann es auch hier zu zwei verschiedenen Methoden der Berechnung kommen: Mit der Wahl zwischen dem Zeit- und dem Scharmittel. Wie zuvor beschrieben ist es meist günstig, erst im letzten Schritt die Mittelwertbildung durchzuführen.

Die Autokorrelation ist ein Spezialfall der Kreuzkorrelation:

**Definition 2.3.7 (Kreuzkorrelation).** Die Kreuzkorrelation ist eine Verallgemeinerung der Autokorrelation. Dabei werden zwei Signale mit den Mittelwerten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  sowie den Varianzen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  an unterschiedlichen Zeiten  $t$  und  $t + \tau$  miteinander multipliziert:

$$R_{XY}(\tau) = \Gamma_{XY}(\tau) = \frac{\mathbb{E}[(X(t) - \mu_X)(Y(t+\tau) - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.3.30)$$

oder mit dem Stern-Operator:

$$(f \star g)(x) = (f(y) \star g(y))(x) = f^*(-y) * g(y)(x) \quad (2.3.31)$$

Es gelten die folgenden Konventionen zur Darstellung:

$$(f \star g)(x) = (f(y) \star g(y))(x)$$

$$(f(A) \star g(B))(x) = \int f^*(-\text{sgn}(A) \cdot \xi) g(\text{sgn}(B) \cdot (\text{sgn}(x)x - \xi)) d\xi$$

<sup>6</sup>Die zweite Zeile gilt dann, wenn der Prozess ergodisch ist.

Für den Stern-Operator gilt außerdem:

$$(g \star f)(x) = g^*(-y) * f(y)(x) = (f \star g)^*(-x) \quad (2.3.32)$$

$$(f(-y) \star g(-y))(x) = (f(y) \star g(y))(-x) \quad (2.3.33)$$

Außerdem gibt es einen Zusammenhang mit der Fourier-Transformation:

**Theorem 2.3.1 (Kreuz-Korrelation Theorem).** Für die Fourier-Transformation gilt:

$$\mathcal{F}\{f^*(\tau)g(\tau)\}(\omega) = (\mathcal{F}\{f(\tau)\} \star \mathcal{F}\{g(\tau)\})(\omega) \quad (2.3.34)$$

Man beachte insbesondere, dass auf der linken Seite die Funktion  $f$  komplex konjugiert ist.

Einen Zusammenhang zwischen der Autokorrelation und dem Leistungsspektrum eines Signals stellt das Wiener-Chintchine-Theorem her. Es gilt für den Fall eines stationären Rauschprozesses.

**Theorem 2.3.2 (Wiener-Chintchine-Theorem).** Für einen stationären Rauschprozess lässt sich das das Leistungsspektrum mittels einer Fourier-Transformation aus der Autokorrelation ableiten:

$$S_Z(f) = \mathcal{F}\{R_Z(\tau)\} \quad (2.3.35)$$

**Definition 2.3.8 (Korrelationsfunktionen).** Für die Autokovarianz 2.3.6 einer Funktion  $X(t)$  können die (un)normierten Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung aufgestellt werden:

$$g_{\text{nn}}^{(1)}(\tau) = \mathbb{E}[X^*(t)X(t+\tau)] \quad (\text{nicht normiert}) \quad (2.3.36)$$

$$g^{(1)}(\tau) = \langle X^*(t)X(t+\tau) \rangle = R_E(\tau) \quad (\text{normiert}) \quad (2.3.37)$$

$$g_{\text{nn}}^{(2)}(\tau) = \mathbb{E}[X^*(t)X^*(t+\tau)X(t+\tau)X(t)] \quad (\text{nicht normiert}) \quad (2.3.38)$$

$$g^{(2)}(\tau) = \langle X^*(t)X^*(t+\tau)X(t+\tau)X(t) \rangle \quad (\text{normiert}) \quad (2.3.39)$$

Im Falle des elektrischen Felds  $X(t) = E(t)$  mit der Intensität  $I(t) = |E(t)|^2$  ist die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung des Feldes gleich der ersten Ordnung der Intensität:

$$g^{(1)}[I(t)] = g^{(2)}[E(t)] \quad (2.3.40)$$

Für ein Laserfeld  $E(t)$ , das die Summe vieler Einzelfelder der aktiven Atome ist, gilt weiterhin:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left|g^{(1)}(\tau)\right|^2 \quad (2.3.41)$$

Der Bezug der statistischen Betrachtung zu den folgenden Kapiteln liegt in dem sog. „thermischen“ oder „statistischen“ Licht. Eine Idealisierung von Laserlicht besteht



darin, dieses als ebene Welle der Form:

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} \quad (2.3.42)$$

darzustellen. Damit lassen sich viele Rechnungen durchführen, allerdings werden dabei viele wichtige physikalische Eigenschaften vernachlässigt. Jeder Laser beruht auf dem optischen Übergang verschiedener Energieniveaus beteiligter Atome. Aus der Lebensdauer dieser Niveaus folgt eine gedämpfte Schwingung, die sich in einer spektralen Verteilung der Frequenz äußert, weshalb Laserlicht per se nicht streng monochromatisch ist.

Die obigen Definitionen können jetzt dazu genutzt werden, die Eigenschaften von statistischem Licht zu berechnen. Ein Mechanismus, der die Linienbreite eines Lasers über die natürliche Linienbreite durch die endliche Emissionszeit des Lichtquants verbreitert, sind Stöße innerhalb der aktiven Atome. Diese wirken direkt auf die Phase der Lichtquanten, so dass die obige Gleichung (2.3.42) um einen Phasenterm erweitert werden muss:

**Definition 2.3.9 (Statistisches Licht).** Laserlicht hat nicht nur eine spektrale Verteilung der Frequenz aufgrund des Emissionsprozesses, sondern jedes Atom emittiert sein Quant  $E_i$  mit einer beliebigen Phase relativ zu den anderen beteiligten Atomen. Die Summe der Quanten nennt man „chaotisches“ oder „statistisches“ Licht.

$$\hat{E}(t) = \sum_i \hat{E}_i(t) = \sum_i E_0 e^{i\omega_0 t} e^{i\phi_i(t)} \quad (2.3.43)$$

wobei  $\phi_i(t)$  eine Zufallsvariable abhängig von der Zeit ist und einen beliebigen Wert zwischen  $[0; 2\pi)$  annehmen kann. Die Summation kann als Vektorsumme im Komplexen interpretiert werden und als Gesamtamplitude  $a(t)$  und -Phase  $\phi(t)$  geschrieben werden [53, Kap. 3]:

$$\sum_i e^{i\phi_i(t)} = a(t) e^{i\phi(t)} = \tilde{E}(t) \quad (2.3.44)$$

Im Folgenden wird diese Darstellung verwendet:

$$E(t) = \text{Re} \{ \hat{E}(t) \} = \text{Re} \left\{ E_0 \tilde{E}(t) e^{i\omega_0 t} \right\} \quad (2.3.45)$$

mit

- $E$ : reelles elektrisches Feld,
- $\hat{E}$ : komplexes elektrisches Feld,
- $E_0(t)$ : reelle zeitabhängige Amplitude (falls nötig),
- $E_0$ : reelle zeitunabhängige Amplitude (wird hier im Allgemeinen verwendet),

- $\tilde{E}$ : komplexe Amplitude des komplexen Feldes inklusive der zeitabhängigen Phase.

**Definition 2.3.10 (Photostrom).** Das elektrische Feld wird von einem Photodetektor in ein elektrisches Signal umgewandelt. Dabei werden durch die Atom-Licht Wechselwirkung Elektronen gelöst, so dass typische Halbleiter Detektoren einen Strom erzeugen, der dann über nachgeschaltete Elektronik in Spannungen übersetzt wird. Aus der Wechselwirkung

$$H(t) = \frac{e}{mc} \mathbf{A}(r, t) \cdot \mathbf{p}$$

folgt nach [57] und [21], dass der Photostrom des Detektors proportional zum Betrag des analytischen Signals (2.3.2) ist:

$$I(t) = \sigma e \hat{E}^*(t) \hat{E}(t) \quad (2.3.46)$$

Im Folgenden werden die Einheiten so gewählt, dass der Proportionalitätsfaktor  $\sigma$  – in dem auch die Quanteneffizienz erfasst wird – und die Ladung des Elektrons  $e$  entfallen ( $\sigma = 1, e = 1$ ).

### 2.3.4. Korrelationen von thermischem Licht bei zufälligen Stoßprozessen

Um die Funktionen  $g^{(1)}(\tau)$  und  $g^{(2)}(\tau)$  von statistischem Licht zu berechnen, wird das Laserfeld als Summe der Einzelfelder expandiert, die statistisch unabhängig voneinander sind. Jedes Atom emittiert seinen Wellenzug mit einer beliebigen relativen Phasenverschiebung.

$$\begin{aligned} \langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle &= \left\langle \sum_i E_0 e^{-i\omega_0 t - i\phi_i(t)} \sum_i E_0 e^{i\omega_0(t+\tau) + i\phi_i(t+\tau)} \right\rangle \\ &= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} \left\langle \sum_i e^{-i\phi_i(t)} \cdot \sum_i e^{+i\phi_i(t+\tau)} \right\rangle \\ &= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} \left\langle \sum_i e^{i\phi_i(t+\tau) - i\phi_i(t)} \right\rangle + \left\langle \sum_{n,m;n \neq m} e^{-i\phi_n(t) + i\phi_m(t+\tau)} \right\rangle \quad (2.3.47) \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Doppelsumme in zwei Teile gespalten: im ersten Teil wird über den Erwartungswert der Phasen zu verschiedenen Zeiten desselben –  $i$ -ten – Atoms summiert, im zweiten über den Erwartungswert der Phasenunterschiede der verschiedenen Atome  $n$  und  $m$ . Statt nun im zweiten Term das Integral des Erwartungswerts auszuführen, wird die Ergodenhypothese angewendet<sup>7</sup>. Dann definiert man die relative Phasendifferenz  $\Delta\phi_{mn} = \phi_m(t + \tau) - \phi_n(t)$  zu genau einem Zeitpunkt

<sup>7</sup>Dies ist im vorliegenden Fall möglich, da die Phasenverteilung eines Atoms in der Zeit durch Stöße genauso zufällig ist, als wenn man zu einem Zeitpunkt viele Atome betrachtet. Der Zeitbereich beziehungsweise die Anzahl der Atome müssen dafür groß genug gewählt werden.

$t$  (Scharmittel). Der Wertebereich dieser Differenz ist

$$\Delta\phi_{mn} \in (-2\pi, 2\pi)$$

da man zu den beiden Zeitpunkten  $t$  und  $t + \tau$  durch die große Anzahl Atome immer den ganzen Wertebereich für  $\phi_n$  ausschöpfen kann. Es gilt:

$$e^{ix} + e^{i(x+\pi)} = 0$$

Aufgrund der Gleichverteilung findet man immer Paare  $\Delta\phi_{m_1n_1}$  und  $\Delta\phi_{m_2n_2}$ , die um  $\pi$  phasenverschoben sind. Wegen der obigen Formel verschwindet folglich die Summe über die Phasendifferenzen verschiedener Atome, und damit auch das Scharmittel:

$$\left\langle \sum_{n,m;n \neq m} e^{-i\phi_n(t) + i\phi_m(t+\tau)} \right\rangle = \left\langle \sum_k e^{i\Delta\phi_{nm,k}} \right\rangle = 0 \quad (2.3.48)$$

Diese Argumentation kann im ersten Term von Gleichung (2.3.47) nicht greifen, da es von der mittleren freien Weglänge beziehungsweise Stoßzeit anhängt, ob die Phasendifferenz  $\Delta\phi_{ii}$  so verteilt ist, dass das Scharmittel null ergibt. Für Zeiten  $\tau$  größer als die mittlere Stoßzeit ist dies aufgrund der zufälligen Phasendifferenz nach dem Stoß der Fall, und die Beiträge heben sich auf. Für kurze Zeiten  $\tau$  kann es sein, dass noch kein einziges Atom einen Phasensprung durchgeführt hat, dann wäre der Wertebereich genau  $\{0\}$ . Daher muss dieser Term gesondert berechnet werden. In jedem Fall hängt der Mittelwert dieses Terms von  $\tau$  ab, aber nicht von der Atom-Nummer. Daher hat er für alle Atome den gleichen Wert und es folgt nach der Summation für  $N$  Atome, nachdem der Erwartungswert mit der Summe vertauscht <sup>8</sup>:

$$\begin{aligned} \langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle &= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N \langle E_i^*(t) E_i(t + \tau) \rangle \\ &= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N \frac{1}{T} \int_T e^{i(\phi_i(t+\tau) - \phi_i(t))} dt \end{aligned} \quad (2.3.49)$$

wobei hier der Index innerhalb der Autokorrelation darauf hinweist, dass diese für die Phase von genau einem Atom anstatt des gesamten Laserlichts durchgeführt werden soll.

Gemäß Gleichung (3.4.3) in [57] kann man das Integral umformen zu (siehe auch Anhang A.2 für weitere Details):

$$\int_T e^{i(\phi_i(t+\tau) - \phi_i(t))} dt = T \int p(\tau') d\tau' = T e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

<sup>8</sup>Der Erwartungswert ist linear in dem Parameter.

Man erhält nun für die Autokovarianz das Ergebnis:

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (2.3.50)$$

Die normalisierte Autokorrelation lautet dann:

$$\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle = g^{(1)}(\tau) = e^{i\omega_0 \tau - \frac{\tau}{\tau_0}} \quad (2.3.51)$$

Die Korrelationsfunktion erster Ordnung erlaubt eine Klassifizierung von statistischem Licht:

$$|g^{(1)}| = \begin{cases} 1 & \text{kohärente Zustände} \\ 0 & \text{nicht kohärente Zustände} \\ \in (0, 1] & \text{teilweise kohärente Zustände} \end{cases}$$

Setzt man das Ergebnis nun in das Wiener-Chintchine-Theorem ein, erhält man die spektrale Verteilung der Feldkomponenten<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= \mathcal{F} \left\{ g^{(1)}(\tau) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 \tau - \frac{|\tau|}{\tau_0}} e^{-i\omega \tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{\tau(i(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{\tau_0})} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{\tau(i(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{\tau_0})} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - 0}{i(\omega_0 - \omega) + \frac{1}{\tau_0}} + \frac{1}{2\pi} \frac{0 - 1}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{1}{\tau_0}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{2/\tau_0}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{1}{\tau_0^2}} = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2} \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Das Ergebnis ist bekannt als Lorentz-Kurve.

In jedem Medium, in dem es zu spontanen Phasensprüngen kommen kann, führen diese zu einer Verbreiterung wie oben berechnet. Der englische Begriff „phasor-theory“ greift die Tatsache auf, dass das Feld als komplexe Größe mit einem Phasenterm begriffen wird. Verallgemeinert man die Überlegungen dieses Kapitels auf Lasermedien, so leitet sich die Phase aus einem stochastischen Prozess  $F(t)$  ab, wobei in diesem Fall<sup>10</sup>

<sup>9</sup>Implizit wurde bei der Rechnung davon ausgegangen, dass  $\tau \geq 0$  ist. In der Fourier-Transformation nimmt  $\tau$  allerdings negative Werte an. Daher muss der Betrag von  $\tau$  verwendet werden.

<sup>10</sup>Die spontanen Phasenänderungen müssen sich gegenüber der induzierten Phase des Lasers durchsetzen, so dass effektiv ein random-walk Verhalten des Phasors entsteht.

die Langevin-Gleichung die Verbindung herstellt:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \beta \frac{d\phi}{dt} = \beta F(t) \quad (2.3.53)$$

Dabei ist der Prozess  $F(t)$  ein Gaußsches Rauschen mit dem Mittelwert null. Einen idealen Laser, der nicht von solchen Verbreiterungsmechanismen beeinflusst wird, gibt es nicht. Ein idealer Laser hätte eine unendliche Kohärenzzeit und als Linienbreite einen Delta-Peak. Daher kann die obige Rechnung mit der Begründung eines stochastischen Prozesses auf jeden Laser angewandt werden.

Damit können auch in einem allgemeinen Fall die Autokorrelation und die spektrale Rauschleistungsdichte berechnet werden, da der kritische Punkt die Berechnung der Autokovarianz in Gleichung (2.3.49) ist. Denn es gilt nach [59]:

$$\langle \Delta\phi_{ii}^2(\tau) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) S_{\phi}(\omega) \frac{d\omega}{\omega^2} \quad (2.3.54)$$

Es tritt hier die spektrale Rauschleistung des Phasenrauschens  $S_{\phi}(\omega)$  auf. Diese wird für Laserquellen im Allgemeinen wie folgt klassifiziert:

- Weißes Rauschen mit  $S_{\phi}(\tau) = S_{\phi} = \text{const.}$  Das Integral liefert damit den Wert:

$$\langle \Delta\phi_{ii}^2(\tau) \rangle = S_0 |\tau| = \Delta\omega |\tau| = 2 \frac{|\tau|}{\tau_0} \quad (2.3.55)$$

mit  $\Delta\omega$  als die volle Halbwertsbreite<sup>11</sup>

- $1/f$  Rauschen mit  $S_{\phi}(\tau) = \frac{k}{|\omega|}$ .

Nach [59] lässt sich bei Halbleiterlasern das Phasenrauschen tatsächlich durch eine Summe beider Rauschverhalten beschreiben:  $S_{\phi}(\tau) = S_{\phi} + \frac{k}{|\omega|}$ .

Für den Fall des weißen Rauschens kann die Autokovarianz berechnet werden, wenn man eine weitere Beziehung nutzt, die für stationäre Rauschprozesse mit Gaußscher Verteilung gilt [59]:

$$\langle e^{\pm i\Delta\phi_{ii}(\tau)} \rangle = e^{-\langle \Delta\phi_{ii}^2(\tau) \rangle / 2} \quad (2.3.56)$$

<sup>11</sup>  $\Delta\omega = 2\gamma$ , wenn bei der Definition der Lorentz-Kurve der Nenner als  $(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2$  geschrieben wird.

Weiter:

$$\begin{aligned}
\langle E^*(t) E(t + \tau) \rangle &= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N \langle E_i^*(t) E_i(t + \tau) \rangle \\
&= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N \langle e^{i\Delta\phi_{ii}(\tau)} \rangle \\
&= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N e^{-\langle \Delta\phi_{ii}^2(\tau) \rangle / 2} \\
&= E_0^2 e^{i\omega_0 \tau} N e^{-\frac{|\tau|}{T_0}} \\
&= E_0^2 N e^{i\omega_0 \tau - \frac{|\tau|}{T_0}} \tag{2.3.57}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (2.3.50) überein, was durch die Annahmen bei der Rechnung über die Phasensprünge auch zu erwarten war.

Um bei einem Gasentladungslaser die Dopplerverbreiterung zu berechnen, wird in Gleichung (2.3.43) die Grundfrequenz  $\omega_0$  durch eine variable Kreisfrequenz  $\omega_0 + \delta\omega_i = \omega_i$  verallgemeinert. Auf diese Art und Weise kann man praktische alle Rausch- und Störeinflüsse in die Rechnung bringen und ihren Einfluss auf die Linienform berechnen.

Mit einem Photodetektor wird allerdings nicht die spektrale Rauschleistungsdichte des elektrischen Feldes gemessen, sondern die des Photostroms, der wiederum proportional zur Leistung (Quadrat des elektrischen Feldes) ist. Für die Autokovarianz ergibt sich:

$$\langle I^*(t) I(t + \tau) \rangle = \langle E^*(t) E^*(t + \tau) E(t + \tau) E(t) \rangle \tag{2.3.58}$$

Die Autokovarianz der Intensität ist also gleich der Korrelationsfunktion zweiter Ordnung für das elektrische Feld. Wiederholt man die obigen Rechnungen für die Autokovarianz der Intensität, stellt man einen Zusammenhang zwischen den Korrelationsfunktionen erster und zweiter Ordnung des elektrischen Feldes fest:

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + |g^{(1)}(\tau)|^2 \tag{2.3.59}$$

### 2.3.5. Überlagerung zweier stationärer unkorrelierter Lichtfelder

Zunächst wird gezeigt, wie die spektrale Rauschleistungsdichte zweier stationärer und unkorrelierter Lichtfelder berechnet wird. Diese Rechnungen lassen sich dann auf weitere Fälle erweitern [64].

Die Autokorrelation des analytischen Signals  $\hat{E}_i$  ist mit  $E_0 = 1$ :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\hat{E}_i}(\tau) &= \langle \hat{E}_i^*(t) \hat{E}_i(t + \tau) \rangle \\
&= \langle \tilde{E}_i^*(t) \tilde{E}_i(t + \tau) \rangle e^{-i\omega_i \tau} \\
&= \Gamma_{\tilde{E}_i} e^{-i\omega_i \tau} \tag{2.3.60}
\end{aligned}$$

Die Autokorrelation des reellen Signals kann daraus mit der Gleichung (4-28) aus [1]

gewonnen werden:

$$\begin{aligned}\Gamma_{E_i}(\tau) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \Gamma_{\hat{E}_i} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left( \Gamma_{\hat{E}_i} + \Gamma_{\hat{E}_i}^* \right)\end{aligned}\quad (2.3.61)$$

Das Leistungsspektrum wird mit dem Wiener-Chintchine-Theorem berechnet:

$$\begin{aligned}S_{E_i}(f) &= \frac{1}{4} \left( S_{\hat{E}_i}(f) + S_{\hat{E}_i}^*(-f) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( S_{\hat{E}_i}(f) + S_{\hat{E}_i}(-f) \right)\end{aligned}\quad (2.3.62)$$

Für die letzte Zeile wurde verwendet, dass Leistungsspektren reell sind: Diese sind definiert als das Betragsquadrat der Fourier-Transformierte einer Funktion  $x(t)$ , solange die Fourier-Transformierte existiert:

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |\mathcal{F}\{x(t)\}|^2 \quad (2.3.63)$$

### Korrelationen und Leistungsspektrum des Interferenzterms auf dem Detektor

Die Rechnung folgt der Veröffentlichung von Nazarathy [64]. Die beiden Felder werden mit den Indizes  $A$  und  $B$  identifiziert. Das Ziel der folgenden Rechnung ist es, aus den Feldern über die Intensität das spektrale Leistungsspektrum der Intensität des Interferenzterms  $I_x$  (siehe unten) zu berechnen und daraus einen Zusammenhang mit den spektralen Korrelationen der ursprünglichen Felder herzustellen. Da die Felder  $E_A(t)$  und  $E_B(t)$  reell sind, ist die Berechnung der Intensität trivial:

$$I(t) = (E_A(t) + E_B(t))^2 = I_A(t) + I_B(t) + I_x(t) \quad (2.3.64)$$

mit dem Interferenzterm  $I_x(t) = 2E_A(t)E_B(t)$ , dem heterodynen „cross“-Term. Letzterer lässt sich mit (A.1.1) aus Lemma A.1.1

$$\operatorname{Re}\{X\} \operatorname{Re}\{Z\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{XZ^*\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{XZ\}$$

bei konstanter Amplitude schreiben als

$$\begin{aligned}I_x(t) &= \operatorname{Re}\{XZ^*\} + \operatorname{Re}\{XZ\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ E_{A0}E_{B0}e^{i\omega_A t + i\phi_A(t)} e^{-i\omega_B t - i\phi_B(t)} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ E_{A0}E_{B0}e^{i\omega_A t + i\phi_A(t)} e^{i\omega_B t + i\phi_B(t)} \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ E_{A0}E_{B0}e^{i(\omega_A - \omega_B)t} e^{i\phi_A(t) - i\phi_B(t)} \right\} \\ &\quad + \operatorname{Re}\left\{ E_{A0}E_{B0}e^{i(\omega_A + \omega_B)t} e^{i(\phi_A(t) + \phi_B(t))} \right\}\end{aligned}\quad (2.3.65)$$

An dieser Stelle des Rechenwegs ist es sinnvoll, das Verhalten des Detektors hinzuzunehmen. Dieser hat eine begrenzte Bandbreite, unterhalb derer Schwingungen des Lichts in elektrische Signale umgesetzt werden, oberhalb jedoch herausgefiltert werden. Der zweite Term kann mit diesem Hintergrund für die weitere Rechnung vernachlässigt werden. Mit der Definition der Frequenzdifferenz:

$$\Delta\omega = \omega_A - \omega_B \quad (2.3.66)$$

bleibt dann übrig:

$$I_x(t) = \text{Re} \left\{ E_{A0} E_{B0} e^{i\Delta\omega t} e^{i\phi_A(t) - i\phi_B(t)} \right\} \quad (2.3.67)$$

Dieser Interferenzterm erzeugt ein zeitabhängiges (heterodynes) Signal auf dem Photodetektor, solange die Frequenzdifferenz größer null und kleiner der Bandbreite des Detektors ist. In der Autokovarianz von (2.3.64) wird auf jeden Fall auch die Autokorrelation von diesem „cross“-Term auftauchen:

$$\begin{aligned} R_{I_x}(\tau) &= \langle I_x(t)^* I_x(t+\tau) \rangle \\ &= E_{A0}^2 E_{B0}^2 \left\langle \text{Re} \left\{ e^{i\Delta\omega t} e^{i\phi_A(t) - i\phi_B(t)} \right\} \text{Re} \left\{ e^{i\Delta\omega(t+\tau)} e^{i\phi_A(t+\tau) - i\phi_B(t+\tau)} \right\} \right\rangle \end{aligned} \quad (2.3.68)$$

Die komplexe Konjugation in der ersten Zeile ist hinfällig, da  $I_x$  als Realteil einer komplexen Größe definiert ist. Die konstanten Vorfaktoren werden im Folgenden nicht mehr mitgeschrieben. Jetzt wird wieder Lemma A.1.1 eingesetzt und man erhält als Zwischenergebnis eine Summe aus zwei Termen, da der Operator für den Realteil  $\text{Re} \{ \cdot \}$  und das Integral der Autokorrelation vertauschen:

$$\begin{aligned} R_{I_x}(\tau) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i\Delta\omega t} e^{i\phi_A(t) - i\phi_B(t)} e^{-i\Delta\omega(t+\tau)} e^{-i\phi_A(t+\tau) + i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \left\langle e^{i\Delta\omega t} e^{i\phi_A(t) - i\phi_B(t)} e^{i\Delta\omega(t+\tau)} e^{i\phi_A(t+\tau) - i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \textcircled{1} \right\} + \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \textcircled{2} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

Es werden im Folgenden die beiden Terme getrennt betrachtet. Der erste Term lässt sich auf die Autokovarianzen der beiden Felder  $A$  und  $B$  zurückführen. Das ist möglich, da der Erwartungswert eines Produktes statistisch unabhängiger Größen – was hier im Falle der beiden Felder gegeben ist – durch das Produkt der einzelnen Erwartungswerte



ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= \left\langle e^{-i\Delta\omega\tau} e^{i\phi_A(t)-i\phi_A(t+\tau)} e^{i\phi_B(t+\tau)-i\phi_B(t)} \right\rangle \\
&= e^{-i\Delta\omega\tau} \left\langle e^{-i\phi_A(t)+i\phi_A(t+\tau)} \right\rangle^* \left\langle e^{-i\phi_B(t)+i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle \\
&= e^{-i\Delta\omega\tau} R_{\phi,A}(\tau)^* R_{\phi,B}(\tau) \\
&= R_{\hat{A}}(\tau)^* R_{\hat{B}}(\tau)
\end{aligned} \tag{2.3.70}$$

Das Dach über den Buchstaben soll daran erinnern, dass in die Autokovarianz an dieser Stelle die komplexen Felder eingesetzt werden, da der Realteil-Operator erst später auf das gesamte Ergebnis wirkt.

Für den zweiten Term wird die analoge Rechnung versucht:

$$\textcircled{2} = \left\langle e^{2i\Delta\omega t} e^{i\Delta\omega\tau} e^{i\phi_A(t)+i\phi_A(t+\tau)} e^{-i\phi_B(t)-i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle \tag{2.3.71}$$

Der Unterschied bei der Berechnung der Autokovarianz zwischen den beiden Teilen wird hier deutlich: Der Erwartungswert wird im zweiten Fall über einen zeitabhängigen Term gebildet. Dieser ist damit in dieser Form nicht mehr stationär, und die Autokovarianz kann mit der bisherigen Definition nicht mehr angegeben werden. Abhilfe schafft eine alternative Definition der Autokorrelation/-kovarianz und eine Verallgemeinerung des Wiener-Chintchine-Theorems, die in [68] vorgenommen wird. Dabei wird eine explizite Zeitmittelung hinzugefügt und die zeitabhängigen Terme dürfen aus dem Erwartungswert gezogen werden, wenn dieser ohne Zufallsabhängigkeiten beschaffen ist:

$$\mathcal{R}_y(\tau) = \mathcal{R}_y(t, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle y^*(t) y(t + \tau) \rangle dt \tag{2.3.72}$$

$$\mathcal{S}_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left| \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle \tag{2.3.73}$$

Die Formulierung aus (2.3.72) wird jetzt für die Berechnung adaptiert. Für (2.3.71) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} &= e^{i\Delta\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{2i\omega t} \left\langle e^{i\phi_A(t)+i\phi_A(t+\tau)} e^{-i\phi_B(t)-i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle \\
&= e^{i\Delta\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{2i\omega t} \left\langle e^{i\phi_A(t)+i\phi_A(t+\tau)} \right\rangle \left\langle e^{-i\phi_B(t)-i\phi_B(t+\tau)} \right\rangle
\end{aligned} \tag{2.3.74}$$

Die beiden Erwartungswerte können auseinandergezogen werden, da die beiden Größen statistisch unabhängig sind. Da die Summen der Phasen nur von dem Parameter  $\tau$  abhängig sind (zum Beispiel  $\phi_A(t) + \phi_A(t + \tau) = \Delta\Phi_A(\tau)$ ), werden die Mittelwerte mit den beiden komplexwertigen Funktionen  $M(\tau)$  und  $N(\tau)$  bezeichnet, die nur noch den Parameter  $\tau$  als Argument haben und so aus dem Integral heraus gezogen werden können.

$$\textcircled{2} = e^{i\Delta\omega\tau} M(\tau) N(\tau) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{2i\omega t} \quad (2.3.75)$$

Da die Zeitabhängigkeit im Exponenten steht, kann die Integration ausgeführt werden:

$$\textcircled{2} = e^{i\Delta\omega\tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[ \propto e^{i k t} \right]_{-T/2}^{T/2} \quad (2.3.76)$$

Führt man nun die Grenzwertbildung aus, bleibt die komplexe Größe nach der Integration im Betrag beschränkt. Geht man in die Polardarstellung, wird der Zeiger in der Grenzwertbildung beliebig rotieren, aber in der Länge beschränkt sein. Das bedeutet, dass der Term  $1/T$  der dominante Term wird. Im Grenzwert wird dieser Teil das Ergebnis auf null drücken:

$$\textcircled{2} = 0 \quad (2.3.77)$$

Der erste Term  $\textcircled{1}$  hat keine explizite Zeitabhängigkeit, d.h. es bleibt durch die Erweiterung auf die neue Definition ein Produkt aus dem bekannten Ergebnis mit dem Zeitintegral:

$$\textcircled{1} \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} 1 dt = \textcircled{1} \cdot 1 = \textcircled{1} \quad (2.3.78)$$

Als Ergebnis kann für den „cross“-Term festgehalten werden:

$$R_{I_x}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \textcircled{1} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ R_{\hat{A}}(\tau)^* R_{\hat{B}}(\tau) \right\} \quad (2.3.79)$$

Die Berechnung der Autokovarianz der Felder  $A$  und  $B$  ermöglicht es über das Wiener-Chintchine-Theorem das Leistungsspektrum des Gesamtfeldes zu berechnen.

$$S_{I_x} = \mathcal{F} \left\{ R_{I_x}(\tau) \right\} = \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ \text{Re} \left\{ R_{\hat{A}}(\tau)^* R_{\hat{B}}(\tau) \right\} \right\} \quad (2.3.80)$$

Als letzter Schritt soll das Leistungsspektrum des Gesamtfeldes mit den Leistungsspektren seiner Konstituenten in Verbindung gebracht werden. Dazu benötigt man zunächst die einfache Umformung des Produkts innerhalb der Fourier-Transformation

(siehe (A.1.1)):

$$2 \operatorname{Re} \{Y^* Z\} = Y^* Z + Y Z^*$$

Damit stehen nun zwei Summanden anstelle des Realteils, und da Fourier-Transformation dem Distributivgesetz gehorcht, kann man für jeden Summanden das Kreuz-Korrelation Theorem (2.3.1) anwenden:

$$\begin{aligned} S_{I_x}(\omega) &= \frac{1}{4} \mathcal{F} \{R_{\hat{A}}(\tau)^* R_{\hat{B}}(\tau)\} + \frac{1}{4} \mathcal{F} \{R_{\hat{A}}(\tau) R_{\hat{B}}(\tau)^*\} \\ &= \frac{1}{4} (\mathcal{F} \{R_{\hat{A}}\} \star \mathcal{F} \{R_{\hat{B}}\}) (\omega) + \frac{1}{4} (\mathcal{F} \{R_{\hat{B}}\} \star \mathcal{F} \{R_{\hat{A}}\}) (\omega) \\ &= \frac{1}{4} (S_{\hat{A}} \star S_{\hat{B}}) (\omega) + \frac{1}{4} (S_{\hat{B}} \star S_{\hat{A}}) (\omega) \end{aligned} \quad (2.3.81)$$

Dies ist ein wichtiges Ergebnis. Es besagt, dass das Leistungsspektrum auf dem Photodetektor (ohne die konstanten Terme) aus der Frequenzverteilung der konstituierenden Felder in ihrer komplexen Schreibweise bestimmt werden kann. Dieses Ergebnis ist sehr weit gültig, da es nur auf der Statistik der Phasenterme der Felder beruht. So ist hier z.B. noch nicht eingegangen, welche Frequenzverteilung die einzelnen Felder konkret besitzen.

Über die Gleichung (2.3.62) wird das Leistungsspektrum des reellen und analytischen Signals verknüpft. Im Folgenden betrachtet man die Kreuzkorrelation der beiden Leistungsspektren:

$$\begin{aligned} 4 (S_{E_A} \star S_{E_B}) (\omega) &= \frac{1}{4} ((S_{\hat{A}}(\omega) + S_{\hat{A}}(-\omega)) \star (S_{\hat{B}}(\omega) + S_{\hat{B}}(-\omega))) \\ &= \frac{1}{4} [(S_{\hat{A}}(\omega) \star S_{\hat{B}}(\omega)) + (S_{\hat{A}}(-\omega) \star S_{\hat{B}}(-\omega)) + \\ &\quad + (S_{\hat{A}}(-\omega) \star S_{\hat{B}}(\omega)) + (S_{\hat{A}}(\omega) \star S_{\hat{B}}(-\omega))] \end{aligned} \quad (2.3.82)$$

Das Ergebnis aus (2.3.81) kann mit Definition 2.3.7 in eine Ordnung gebracht werden, und da die Leistungsspektren reell sind kann die komplexe Konjugation weggelassen werden:

$$S_{I_x}(\omega) = \frac{1}{4} (S_{\hat{A}} \star S_{\hat{B}}) (\omega) + \frac{1}{4} (S_{\hat{A}} \star S_{\hat{B}}) (-\omega) \quad (2.3.83)$$

Ein Vergleich mit (2.3.82) zeigt, dass die ersten beiden Terme mit denen aus (2.3.83) übereinstimmen. Die weiteren Terme führen zu Anteilen im Spektrum bei den Frequenzen  $\pm(\omega_1 + \omega_2)$ , die von dem Photodetektor herausgefiltert werden, analog eines Tiefpasses TP.

$$S_{I_x}(f) = 4 (S_{\hat{A}} \star S_{\hat{B}}) (f) |^{TP} \quad (2.3.84)$$

Und aufgrund der Eigenschaften des Leistungsspektrums kann die Korrelation durch

eine Faltung ersetzt werden:

$$S_{I_x}(f) = 4 S_{\hat{A}}(f) * S_{\hat{B}}(f) |^{TP} \quad (2.3.85)$$

Ein wichtiges Ergebnis aus [64] ist nun, dass mit einem Spektrumanalysator eben nicht direkt die Linienbreite gemessen wird, sondern deren Autokorrelation beziehungsweise deren Faltung. Für bestimmte Linienformen, die invariant unter der Autokorrelation sind, wird so eine skalierte Version auf dem Spektrumanalysator wiedergegeben. Solche Linienformen sind das Lorentz- oder das Gaußprofil.

### Leistungsspektrum der Gesamtleistung auf dem Detektor

Um das Leistungsspektrum des Photostroms zu berechnen, reicht es nicht aus, nur die Autokorrelation des „cross“-Terms zu berechnen (2.3.68). Man muss die Autokorrelation von Gleichung (2.3.64) berechnen. Bei der folgenden Rechnung wird wieder von dem Verhalten des Detektors ausgegangen, hohe Frequenzen heraus zu filtern.

So ist dann die Autokorrelation der Intensität

$$R_I(\tau) = \langle I(t)^* I(t + \tau) \rangle \quad (2.3.86)$$

Ausgeschrieben ergibt die Gleichung neun Terme, von denen die ersten drei schon bekannt sind:

$$R_I(\tau) = R_{I_A}(\tau) + R_{I_B}(\tau) + R_{I_x}(\tau) + \dots \quad (2.3.87)$$

Als nächstes betrachtet man die folgenden zwei Terme:

$$R_I(\tau) = \dots + \langle I_A(t) I_B(t + \tau) \rangle + \langle I_B(t) I_A(t + \tau) \rangle + \dots \quad (2.3.88)$$

Für die Prozesse gilt, dass die Kreuzkorrelation durch den Erwartungswert  $\mathbb{E}[\ ]$  ausgedrückt werden kann:

$$R_I(\tau) = \dots + \mathbb{E}[I_A(t) I_B(t + \tau)] + \mathbb{E}[I_B(t) I_A(t + \tau)] + \dots \quad (2.3.89)$$

Der Erwartungswert des Produkts zerfällt für statistisch unabhängige Variablen in das Produkt der Erwartungswerte:

$$R_I(\tau) = \dots + 2 \mathbb{E}[I_A(t)] \mathbb{E}[I_B(t + \tau)] + \dots \quad (2.3.90)$$

Die vier Mischterme der Intensitäten mit dem „cross“-Term verschwinden:

$$\langle I_I(t_1) I_x(t_2) \rangle = 0 \quad (2.3.91)$$

Denn werden die Intensitäten als das Produkt der elektrischen Felder ausgeschrieben, erkennt man, dass immer ein Faktor statistisch unabhängig von den restlichen drei ist,

z.B.:

$$\langle I_A(t)I_x(t + \tau) \rangle = \mathbb{E} [E_A(t)E_A(t)E_A(t + \tau)] \mathbb{E} [E_B(t + \tau)] \quad (2.3.92)$$

Dabei verschwindet nun der letzte Faktor für alle vier betrachteten Terme aufgrund der Eigenschaften des Lichtfeldes.

Insgesamt bleibt also als Ergebnis:

$$R_I(\tau) = \langle I(t)^*I(t + \tau) \rangle = R_{I_A}(\tau) + R_{I_B}(\tau) + R_{I_x}(\tau) + 2 \mathbb{E} [I_A(t)] \mathbb{E} [I_B(t + \tau)] \quad (2.3.93)$$

### 2.3.6. Überlagerung von modulierten Lichtfeldern

In [33] wird die Gesamtenergie der spektralen Rauschleistungsdichte von statistischen Prozessen definiert, die nicht Fourier-integrierbar sind, jedoch endliche mittlere Energie besitzen. Dabei wird ausgenutzt, dass eine abgeschnittene Version einer Funktion, die nicht Fourier-integrierbar ist, diese Eigenschaft gewinnt:

$$y_T(t) = \begin{cases} y(t) & |t| < T/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.3.94)$$

mit der Fouriertransformierten  $Y(\omega)$ . Dann werden die Gesamtenergie und die spektrale Rauschleistungsdichte wie folgt definiert [33, Kap. 3.3.2]:

$$\mathcal{E} = \mathbb{E} [ |Y_T(\omega)|^2 ] \quad (2.3.95)$$

$$\mathcal{S} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [ |Y_T(\omega)|^2 ]}{T} \quad (2.3.96)$$

Die spektrale Rauschleistungsdichte existiert also als Grenzwert einer abgeschnittenen Definition, in der die Schnittgrenze immer weiter nach außen geschoben wird. Ausgehend von diesen Definitionen findet man in [64] die Definition der gemittelten allgemeinen Autokovarianz (2.3.73).

Damit (und den weiteren Hilfsformeln in [64]) ist es möglich, die Rechnungen aus dem vorherigen Kapitel für Felder  $A$  und  $B$  durchzuführen, mit der einzigen verbleibenden Anforderung, dass diese statistisch unabhängig voneinander sind.

Im Folgenden soll die spektrale Rauschleistungsdichte des Signals des Photodetektors berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{I(t)} &= \mathcal{S} \{ I_A(t) + I_B(t) + I_x(t) \} \\ &= \mathcal{S}_{I_A}(\omega) + \mathcal{S}_{I_B}(\omega) + \mathcal{S}_{I_x}(\omega) + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{S}_{I_A I_B}(\omega) \} + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{S}_{I_A I_x}(\omega) \} + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{S}_{I_B I_x}(\omega) \} \end{aligned} \quad (2.3.97)$$

Die letzten beiden Terme sind genau dann null, wenn der Erwartungswert  $\mathbb{E} [ e^{i\phi(t)} ]$  gleich null ist. Dies ist hier der Fall, da man den Erwartungswert als Vektorsumme

aller möglichen Vektoren in der Polardarstellung der Exponentialfunktion sehen kann, wobei jede Position gleichverteilt angenommen wird. Die Größe  $\mathcal{S}_{I_A I_X}(\omega)$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{I_A I_X}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} [\mathcal{F} \{I_A\} (\mathcal{F} \{I_B\})^*] \\ &= \mathcal{F} \{\mathcal{R}_{I_A I_X}(\tau)\}\end{aligned}\quad (2.3.98)$$

Betrachtet man nun die Kreuzkovarianz<sup>12</sup>:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{I_A I_X}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_A(t) I_B(t + \tau) \rangle dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{Re} \{ \langle \hat{E}_A(t) \hat{E}_A^*(t) \hat{E}_X(t + \tau) \hat{E}_X(t + \tau) \rangle \} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{Re} \{ \langle \hat{E}_A(t) \hat{E}_A^*(t) \hat{E}_X(t + \tau) \rangle \langle \hat{E}_X(t + \tau) \rangle \} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{Re} \{ \alpha \mathbb{E} [e^{i\phi_B(t)}] \} = 0\end{aligned}\quad (2.3.99)$$

Ebenso verschwindet die Kreuzkovarianz  $\mathcal{R}_{I_B I_X}(\tau)$ .

Die beiden Kovarianzen der einzelnen Felder sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{I_A}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_A(t) I_A(t + \tau) \rangle dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_A I_A \rangle dt \\ &= I_A^2\end{aligned}\quad (2.3.100)$$

Da die gemischten Kovarianzen in (2.3.97) verschwinden, bleiben folgende vier Terme übrig:

$$\mathcal{S}_{I(t)} = \mathcal{S}_{I_A}(\omega) + \mathcal{S}_{I_B}(\omega) + \mathcal{S}_{I_X}(\omega) + 2 \text{Re} \{ \mathcal{S}_{I_A I_B}(\omega) \}\quad (2.3.101)$$

Nun betrachtet man den dritten Term genauer:

$$\mathcal{S}_{I_X}(\omega) = \mathcal{S}_{I_X I_X}(\omega) = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{I_X I_X}(\tau) \}\quad (2.3.102)$$

<sup>12</sup>Die Intensitäten sind reell und damit kann auf die komplexe Konjugation verzichtet werden

Die Autokovarianz berechnet sich wie oben im Beispiel für  $\mathcal{R}_{I_A I_x}(\tau)$  gezeigt. Zur Erinnerung:

$$I_x = 2 \operatorname{Re} \{ \hat{E}_A \hat{E}_B \} \quad (2.3.103)$$

wobei hier schon der zweite Term der Summe weggelassen wurde, da dieser von dem Tiefpassverhalten des Photodetektors herausgefiltert wird. Im Wesentlichen kann  $I_x$  einfach in die obige Rechnung eingesetzt werden<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{I_x I_x}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_x(t) I_x(t + \tau) \rangle dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{Re} \{ \langle \hat{E}_A^*(t) \hat{E}_A(t + \tau) \rangle \langle \hat{E}_B^*(t) \hat{E}_B(t + \tau) \rangle \} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{Re} \{ R_{\hat{E}_A}(t, \tau) \} \operatorname{Re} \{ R_{\hat{E}_B}(t, \tau) \} dt \\ &= \overline{\operatorname{Re} \{ R_{\hat{E}_A}(t, \tau) \} \operatorname{Re} \{ R_{\hat{E}_B}(t, \tau) \}} = \overline{4R_A(t, \tau)R_B(t, \tau)} \end{aligned} \quad (2.3.104)$$

Eine Linie oberhalb der Korrelationen weist auf die explizite Zeitmittelung hin, vgl. [33]. Damit ist die spektrale Rauschleistungsdichte dieses Terms:

$$S_{I_x} = S_{I_x I_x}(\omega) = 4\mathcal{F} \left\{ \overline{R_A(t, \tau)R_B(t, \tau)} \right\} \quad (2.3.105)$$

Es bleibt noch  $2 \operatorname{Re} \{ S_{I_A I_B}(\omega) \}$  zu berechnen. Dafür muss man wieder die Autokovarianz betrachten. Da die Felder statistisch unabhängig sein sollen, sind es auch die zugehörigen Intensitäten:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{I_A I_B}(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_A(t) I_B(t + \tau) \rangle dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \langle I_A(t) \rangle \langle I_B(t + \tau) \rangle dt \\ &= (\langle I_A(\tau) \rangle \star \langle I_B(\tau) \rangle) \end{aligned} \quad (2.3.106)$$

Zusammengefasst lautet das allgemeine Ergebnis der spektralen Rauschleistungs-

<sup>13</sup>Dabei wird verwendet, dass die Autokovarianz des analytischen und des reellen Signals über:  $2R_E = \operatorname{Re} \{ R_{\hat{E}} \}$  miteinander zusammenhängen, sowie dass innerhalb des Realteiloperators beliebige komplexe Konjugationen eingefügt werden dürfen.

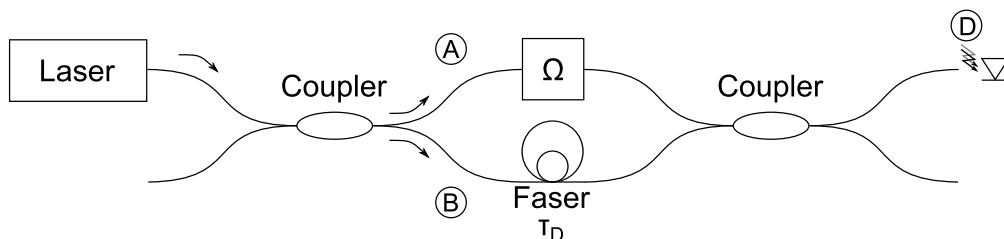


Abbildung 2.4.: Schematischer Aufbau eines DSHI.

dichte für beliebige, nicht korrelierte Felder:

$$S_{I(t)} = S_{I_A}(\omega) + S_{I_B}(\omega) + 4\mathcal{F} \left\{ \overline{R_A(t, \tau) R_B(t, \tau)} \right\} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{F} \left\{ \langle I_A(\tau) \rangle \star \langle I_B(\tau) \rangle \right\} \right\} \quad (2.3.107)$$

Das Ergebnis präsentiert eine Formel, die spektrale Rauschleistungsdichte aus den Parametern der Felder zu bestimmen. Umgekehrt ermöglicht es die Messung der Rauschleistungsdichte, auf die Parameter zurück zu schließen. Das folgende Kapitel wird sich um einen Spezialfall drehen, in dem die obige Formel weiter vereinfacht werden kann und die Parameter deutlich sichtbar werden.

### 2.3.7. Delayed self-heterodyne interferometer

Ein lang entwickeltes Verfahren die Linienbreite eines Lasers zu bestimmen, ist das sogenannte selbst-heterodyne Interferometer mit Verzögerungsstrecke (delayed self heterodyn interferometer), kurz DSHI.

Eine Auswahl an Publikationen, welche sich mit dem DSHI beschäftigen, bietet folgende Liste: [3, 14, 15, 18, 23, 34, 36, 39, 42, 50, 56, 59, 61, 64, 70, 73, 74, 91, 94, 96]. Der Inhalt dieses Kapitels baut auf diesen Publikationen auf.

Ganz besonders muss die Publikation von Nazarathy et al. [64] herausgehoben werden, die im Detail die allgemeinen Fälle berechnet. Denn die zuvor genannten Veröffentlichungen beschränken die Rechnungen auf Laser mit Lorentz-Profil, während Nazarathy et al. die spektrale Verteilung nicht für den Rechenweg heranzieht. Diese eher allgemeine Rechnung wurde im vorhergehenden Kapitel für den Fall zweier unkorrelierter Lichtfelder nachvollzogen und dient als Grundlage für die folgenden Rechnungen.

#### Prinzip

Das Schema eines DSHI ist in Abbildung 2.4 gezeigt: Eine Laserquelle emittiert CW-Strahlung einer bestimmten Wellenlänge. Dieses Licht wird am Strahlteiler („coupler“) zu gleichen Teilen auf die beiden Pfade (A) und (B) verteilt. Diese werden vor dem Detektor („D“) mit einem weiteren Strahlteiler („coupler“) wiedervereinigt und zum Überlapp gebracht. Auf dem Detektor wird dadurch das kombinierte Signal aus den



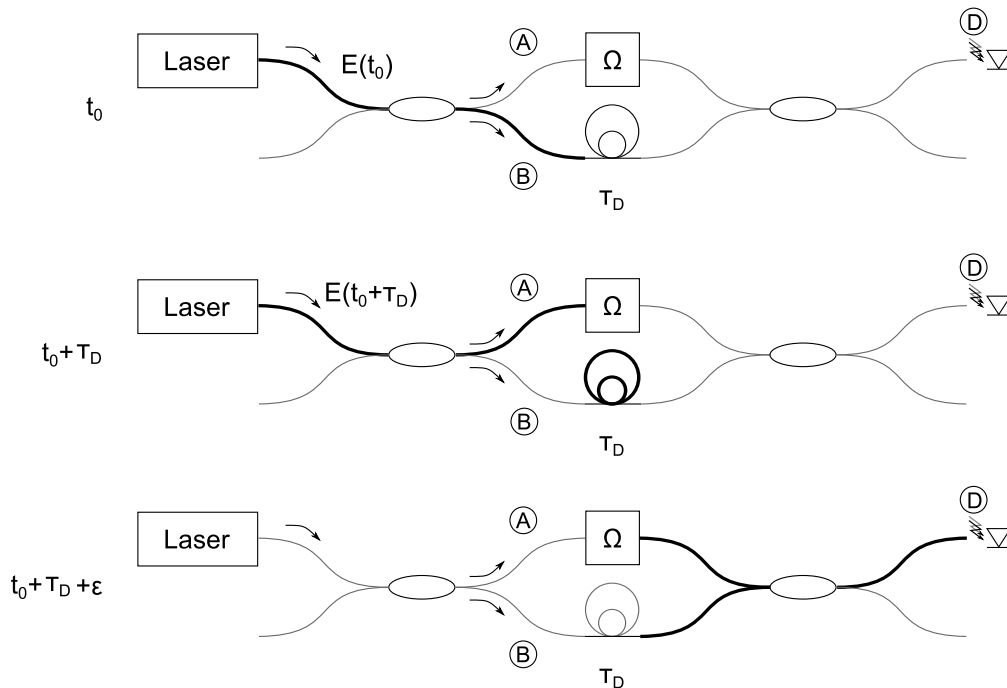


Abbildung 2.5.: Zeitfolge und zugehörige Lichtläufe zur Erklärung, welches Licht am Detektor (D) interferiert.

Wegen (A) und (B) gemessen. Je nach dem, was das Licht auf den unterschiedlichen Wegen erfährt, ändert sich das Signal von dem Detektor.

Bei dem Aufbau des DSHI werden in einen Pfad zwei Elemente eingebracht:

- Eine Verzögerungsstrecke, die „delay line“. Realisiert wird das durch eine optische Faser. Typischerweise hat diese eine Länge von einigen Kilometern, da die Strecke größer der Kohärenzlänge sein soll. Das Lichtfeld am Detektor interferiert so mit Licht aus dem anderen Pfad, dass zur Zeit  $t + \tau_D$  von der Lichtquelle emittiert wurde. Da die Faser länger als die Kohärenzlänge ist, ist die Interferenz auf dem Detektor gleich der Interferenz zweier unabhängiger Laserquellen [18].
- Einen Frequenzschieber, der typischerweise mittels eines akusto-optischen-Modulators (AOM) realisiert wird. Dieser verändert die Wellenlänge um seine Anregungsfrequenz  $\Omega$ , die im RF-Bereich liegt, z.B. 20 MHz. Die unveränderte Frequenzkomponente - Nullte Ordnung - wird gefiltert. Das Lichtfeld ist nach dem AOM um die Frequenz  $\Omega$  von der Grundfrequenz  $\omega_0$  verschoben:  $\exp i(\omega \pm \Omega)$ , je nachdem ob die Ordnung  $-1$  oder  $+1$  gewählt wurde.

Licht, welches vom Laser zum Zeitpunkt  $t = t_0 + \tau_D$  ausgesandt wurde und den Weg (A) entlang läuft, interferiert mit Licht, welches zum Zeitpunkt  $t_0$  ausgesandt

wurde und den Weg  $\textcircled{B}$  nimmt. Zeichnung Abbildung 2.5 zeigt wann welches Licht ausgesandt wird<sup>14</sup>.

Für das Lichtfeld am Detektor eines DSHI Aufbaus wird also die Zeitverzögerung und die Frequenzverschiebung betrachtet. Das Licht entlang des Weges  $\textcircled{A}$  wird wie folgt geschrieben:

$$E_A(t) = \text{Re} \{ \hat{E}_A \} = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i\omega_A(t+\tau_D)} e^{i\phi_A(t+\tau_D)} e^{i\Omega t} \right\} \quad (2.3.108)$$

und entlang des Weges  $\textcircled{B}$ :

$$E_B(t) = \text{Re} \{ \hat{E}_B \} = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i\omega_A t} e^{i\phi_A(t)} \right\} \quad (2.3.109)$$

wobei mit  $E_0$  die Feldamplitude beider Pfade gleich sein soll,  $\omega_A$  die Grundfrequenz des Lasers sein soll,  $\Omega$  die Frequenz des AOM-Treibers und  $\omega_B = \omega_A + \Omega$ .

### DSHI mit unkorrelierten Signalen

Es werden nun die Autokovarianzen der beiden Felder  $E_A$  und  $E_B$  berechnet, um daraus die jeweiligen spektralen Leistungsdichten anzugeben. Im Folgenden wird die Rechnung einmalig vollständig ausgeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\hat{E}_A} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \langle \hat{E}_A^*(t) \hat{E}_A(t+\tau) \rangle dt \\ &= E_0^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left\langle e^{-i\omega_A t} e^{-i\omega_A \tau_D} e^{-i\phi_A(t+\tau_D)} e^{i\omega_A t} e^{i\omega_A \tau} e^{i\omega_A \tau_D} e^{i\phi_A(t+\tau_D+\tau)} \right\rangle dt \\ &= E_0^2 e^{i\omega_A \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left\langle e^{i \overbrace{(\phi_A(t+\tau_D+\tau) - \phi_A(t+\tau_D))}^{=\Delta\phi_A(t+\tau_D,\tau)}} \right\rangle dt \\ &= E_0^2 e^{i\omega_A \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \left\langle e^{i\Delta\phi_A(t+\tau_D,\tau)} \right\rangle dt \\ &\stackrel{(2.3.56)}{=} E_0^2 e^{i\omega_A \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-\frac{1}{2} \langle \Delta\phi_A^2(t+\tau_D,\tau) \rangle} \end{aligned}$$

<sup>14</sup>Die Literatur ist in dieser Berechnung nicht immer einheitlich und so können dort andere Vorzeichen auftreten.

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.3.55)}{=} E_0^2 e^{i\omega_A \tau} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-\frac{1}{2} S_0 |\tau|} dt \\
& = E_0^2 e^{i\omega_A \tau - \frac{1}{2} S_0 \tau} \tag{2.3.110}
\end{aligned}$$

Die spektrale Rauschleistungsdichte ist die Fourier-Transformierte der Autokovarianz. Für das obige Ergebnis wurde die Rechnung schon in (2.3.52) erledigt, d.h. die Gleichheit der Ansätze für den Fall des weißen Phasenrauschens gezeigt. Das Ergebnis ist ein Lorentz-Profil:

$$\begin{aligned}
S_{E_A} &= \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_{E_A} \} = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathcal{R}_{\hat{E}_A} \} \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega_A - \omega)^2 + \gamma^2} \tag{2.3.111}
\end{aligned}$$

Der Faktor einhalb kommt daher, dass hier mit den reellen Felder gerechnet wurde. Analog wird die spektrale Rauschleistungsdichte für das Feld  $B$  bestimmt.

Die Autokovarianzen sind zeitunabhängig, so dass eine Fourier-Transformation des Produkts der beiden Kovarianzen nach dem Faltungstheorem in eine Faltung über die einzelnen Fouriertransformierten der Kovarianzen umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left\{ \overline{R_A(t, \tau) R_B(t, \tau)} \right\} &= \mathcal{F} \{ R_A(\tau) R_B(\tau) \} \\
&= (\mathcal{F} \{ R_A \} * \mathcal{F} \{ R_B \}) (\tau) = (\mathcal{S}_A * \mathcal{S}_B) (\tau) \tag{2.3.112}
\end{aligned}$$

Die Faltung der beiden spektralen Rauschleistungsdichten führt mit  $\omega_A = \omega_B + \Delta\omega$  zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}_A * \mathcal{S}_B) (\tau) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{(\omega - \Delta\omega)^2 + 4\gamma^2} \\
&= \frac{1}{4\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \Delta\omega)^2 + \Gamma^2} \tag{2.3.113}
\end{aligned}$$

Die halbe Halbwertsbreite  $\gamma$  der einzelnen Rauschleistungsdichten konstituieren die neue halbe Halbwertsbreite  $\Gamma = 2\gamma$ . Die Faltung zweier Lorentz-Verteilungen führt zu einer neuen Lorentz-Verteilung mit der doppelten Halbwertsbreite als zuvor. Außerdem wird das Maximum der Verteilung von den optischen Frequenzen  $\omega_A$  und  $\omega_B$  in den Frequenzbereich des AOM  $\Delta\omega$  gebracht.

Die (zeitlich gemittelten) Erwartungswerte der Intensitäten sind  $I = \frac{1}{2} E_0^2$  und unabhängig von  $t$ , da die Felder stationär sind. Damit ist der entsprechende Term in (2.3.107) die Fourier-Transformation über ein Produkt aus Konstanten, was durch eine Dirac Distribution angedeutet werden kann:  $\frac{1}{4} E_0^4 \delta(\omega)$ .

Setzt man alle Teilergebnisse<sup>15</sup> in (2.3.107) ein, so erhält man für das delay self-heterodyne interferometer das Ergebnis für die spektrale Rauschleistungsdichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 2 I_0^2 \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \Delta\omega)^2 + \Gamma^2} + \frac{1}{2} E_0^4 \delta(\omega) \\ &= E_0^4 \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{(\omega - \Delta\omega)^2 + \Gamma^2} \end{aligned} \quad (2.3.114)$$

Bei allen Rechnungen bisher wurde darauf hingewiesen, dass die Felder unkorreliert sein sollen. Das Ergebnis zeigt durch die Unabhängigkeit von  $\tau_D$  genau diesen Sachverhalt. Da die hier betrachteten Lichtfelder jedoch aus ein und derselben Laserquelle stammen, können diese aber erst nach einer genügend großen Verzögerungszeit  $\tau$  als unkorreliert angesehen werden. Empirisch ist diese erfüllt, wenn die Verzögerungszeit deutlich größer als die Kohärenzzeit  $\tau_c$  der Lichtfelder ist:

$$\tau > 6 \cdot \tau_c \quad (2.3.115)$$

Dieser Befund wird durch eigene Rechnungen, die in Abbildung 2.8 gezeigt sind, gestützt.

### 2.3.8. Rauschleistungsdichte für zwei überlagerte Felder

Als Ergänzung zum vorhergehenden Kapitel wird der Vollständigkeit halber noch erwähnt, wie die spektrale Rauschleistungsdichte für zwei Felder mit den beiden Frequenzen  $\omega_A$  und  $\omega_B$  aussieht, wenn beide selbst für die Linienbreite ein Lorentz-Profil aufweisen. Dabei kann man direkt in den Rechnungen auf die Einführung von  $\Delta\omega$  verzichten und erhält das Endergebnis:

$$\mathcal{S} = I_A^2 \delta(\omega) + I_B^2 \delta(\omega) + \frac{1}{\pi} \frac{\gamma_A + \gamma_B}{(\omega - \omega_A + \omega_B)^2 + (\gamma_A + \gamma_B)^2} + \frac{1}{2} E_0^4 \delta(\omega) \quad (2.3.116)$$

Da für die Berechnung die statistische Unabhängigkeit der Felder gefordert wurde, ist es verständlich, dass die Verzögerungsparameter  $\tau$  am Ende nicht mehr in das Ergebnis eingeht. Dieser Idealfall entspricht dann der Überlagerung zweier nicht korrelierter Felder aus verschiedenen Quellen.

Es zeigt sich aber, dass es bei schmalbandigen Lasern zu Problemen führt, die Länge der Verzögerungsstrecke adäquat im Experiment aufzubauen. Daher wird ein kleiner Rest der Korrelation das Ergebnis beeinflussen.

<sup>15</sup>Und beachtet, dass die spektralen Rauschleistungsdichten der Pfade  $A$  und  $B$  gleich sind, da dieselbe Quelle zum Einsatz kommt:  $\mathcal{S}_{E_A} = \mathcal{S}_{E_B}$ .

### 2.3.9. Delayed self-heterodyne interferometer mit teilkorrelierten Feldern

Die Formel (2.3.85) hat eine beschränkte Gültigkeit. Empirisch wurde die Regel etabliert, dass die Verzögerungszeit  $\tau$  groß gegenüber der Kohärenzzeit  $\tau_C$  sein muss. Der Weg zu dieser Erkenntnis sowie die Folgen für Messungen mit kürzeren Verzögerungszeiten werden im folgenden Kapitel dargestellt. Dabei basiert das Kapitel auf [3, 4, 18, 31, 39, 55, 56, 59, 64, 69, 73]. Die genannten Veröffentlichungen wurden im Zeitraum von 1966 bis 2013 publiziert, woran man ablesen kann, dass das Interesse an kürzeren Verzögerungsstrecken seit fünfzig Jahren Bestand hat.

Leider ist damit die Herleitung in den vorherigen Kapiteln hinfällig, da an einigen zentralen Stellen die statistische Unabhängigkeit gefordert wird. Die dadurch nötige neue Herleitung für korrelierte Felder ist im Anhang A.5 ausführlich dargestellt.

Folgende spektrale Rauschleistungsdichte ist das Ergebnis der Berechnung dieser für das gesamte Feld der beiden Wege des Interferometers (siehe (A.5.29)).

$$\begin{aligned}
 S(\omega) = & 4A\delta(\omega) + 2Ae^{-S_0\tau_D} \left( \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) \right) \\
 & + 2A \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \left( 1 - e^{-S_0\tau_D} \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \right. \\
 & \left. - e^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{\omega - \Omega} \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \right) \quad (2.3.117)
 \end{aligned}$$

Ein Problem bei dem obigen Ergebnis ist, dass es zwei Terme mit je einer Dirac-Distribution enthält. Diese werden die Analyse verkomplizieren. Eine Möglichkeit diese Probleme zu beheben besteht darin, die Funktion mit einer Analysefunktion zu falten. Dies passiert praktisch bei einer Messung im Labor, dort wird meist ein Spektrumanalysator eingesetzt, um solche Signale dazustellen. Der Spektrumanalysator mischt das Eingangssignal mit einem verstellbaren lokalen Oszillator und stellt die gemessene Leistung pro Frequenz des lokalen Oszillators auf einem Display dar. Diese Filterung entspricht dabei der Faltung der obigen Funktion  $S(\omega)$  mit einer Gaußkurve. Die Breite der Gaußkurve entspricht dabei den verschiedenen Einstellungen des Spektrumanalysators bezüglich der Auflösungsbandbreite. Die Gaußkurve wird hier gegeben:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}} \quad (2.3.118)$$

Die Faltung ist dann:

$$\mathfrak{S}(\omega) = S * G(\omega) = \int_{\mathbb{R}} S(\omega') G(\omega - \omega') d\omega' \quad (2.3.119)$$

Aufgrund der Schwierigkeiten, dabei die komplette Rauschleistungsdichte zu falten, wird nur der zweite Term in (2.3.117) gefaltet. Der erste Term wird weg gelassen, da

er nur einen Beitrag bei  $\omega = 0$  liefert, der im Allgemeinen nicht von Interesse ist. Es wird später noch in einem anderen Verfahren die Faltung über alle Terme<sup>16</sup> numerisch integriert werden. Der Faltungsterm lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_1(\omega) &= Ae^{-S_0\tau_D} \int_{\mathbb{R}} \delta(\omega' - \Omega) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\omega')^2}{2\sigma^2}} d\omega' \\ &= Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\Omega)^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}\quad (2.3.120)$$

Damit ist die Rauschleistungsdichte im ersten Ansatz:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\Omega)^2}{2\sigma^2}} \\ &\quad + 2A \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \left( 1 - e^{-S_0\tau_D} \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \right. \\ &\quad \left. - e^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{\omega - \Omega} \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \right)\end{aligned}\quad (2.3.121)$$

Diese Funktion hat keine Irregularitäten und kann wie in Abbildung 2.6 geplottet werden. Dabei wird der dimensionslose Parameter  $k = S_0\tau_D = \frac{\tau_D}{\tau_C}$  eingeführt, um die verschiedenen Verzögerungsparameter zu vergleichen. In der Abbildung wurde noch ein Lorentz-Profil passend zur gewählten wahren Linienbreite von 100 Hz eingezeichnet. Wie man sehen kann, stimmt eine lange Verzögerungszeit  $k = 10$  sehr gut mit der Näherung durch eine Lorentz-Kurve überein. Je kürzer die Verzögerungszeit wird, umso mehr dominieren sowohl die Sinus- und Kosinus-Terme, aber auch die gefaltete Dirac-Distribution durch einen ausgeprägten Peak bei der Resonanzfrequenz. Durch die Faltung mit der Gaußkurve, wird in diesem Bereich der Delta-Peak zu eben dieser Gaußkurve verschmiert.

Daraus kann man ableiten, dass man bei ausreichend großer Verzögerungsstrecke an die gemessene Rauschleistungsdichte eine Lorentz-Kurve anfitten kann, um damit die Linienbreite des Systems zu bestimmen.

Interessant wird es dann, wenn in einem Experiment lange Verzögerungsstrecken nicht möglich sind. Für einen Laser mit einer Linienbreite (FWHM) von 200 Hz ist eine Verzögerungsstrecke von mehr als 2000 km erforderlich. Nicht nur die Dämpfung des Lichts kann dabei zu Problemen führen, auch der erforderliche Platz für eine Faserrolle dieser Länge in einer Fallkapsel bringt neue Schwierigkeiten. So wurde in [69] eine Möglichkeit präsentiert, mit kurzen Verzögerungsstrecken die Linienbreite näherungsweise zu bestimmen. Das soll im Folgenden untersucht werden.

Dazu wird zunächst bei einem festen Verzögerungsparameter  $k = 0.1$  der Einfluss der Linienbreite auf die Kurven studiert. Die Rauschleistungsdichten für verschiedene

<sup>16</sup>Außer dem ersten Term.

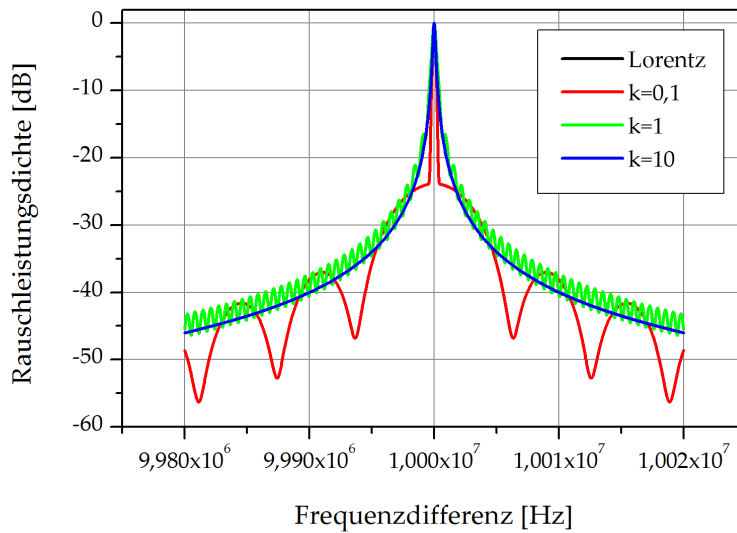


Abbildung 2.6.: Plot der normierten spektralen Rauschleistungsdichte  $\mathcal{S}$  für verschiedene Verzögerungsparameter  $\tau_D$ . Dabei wurde  $\Omega = 10$  MHz,  $\Delta\omega = 100$  Hz und  $\sigma = 100$  Hz gewählt. Die zum Vergleich gezeichnete Lorentz-Kurve verschwindet hinter der blauen Kurve.

Parameter  $\Delta\omega$  sind in Abbildung 2.7 gezeigt. Da  $k = \tau_D/\tau_C = \tau_D \Delta\omega$  ist, ist es klar ersichtlich, dass sich die beiden Plots ähnlich bezüglich der Variablenveränderung zeigen.

Die Linienbreite  $\Delta\omega$  als FWHM der Kurven wird als die halbe Breite der Kurven bei der Leistung  $-3$  dB gemessen. Da die Faltung mit der Gaußkurve einen großen Einfluss auf das Verschmieren des Delta-Peaks hat, ist in Abbildung 2.8 gezeigt, welchen Einfluss der Parameter  $k$  und auch die Breite der Gaußkurve  $\sigma$  auf die Breite hat. Man erkennt, dass die Abhängigkeit der (normierten) Linienbreite  $\Delta\omega$  von  $k$  deutlich von der gewählten Faltungsbreite  $\sigma$  abhängt. Dies ist besonders in Hinblick auf die Studie von [69] interessant, da dort nur eine einzelne Kurve mit der Abhängigkeit von  $\Delta\omega$  von  $k$  abgebildet ist. Dabei ist es in diesem speziellen Fall gelungen, dass die Kurve der normierten Linienbreite den Wert eins bei kleinen Verzögerungsparametern  $k$  wieder schneidet. Wie in Abbildung 2.8 zu sehen, kann man dieses Verhalten in den hier gezeigten Berechnungen ebenfalls erhalten, wenn die Faltungsbreite  $\sigma$  geschickt gewählt wird. Da nicht beschrieben wurde, auf welche Art und Weise der Graph in [69] berechnet wurde, bleibt die Spekulation, dass hier ein besonderer Parametersatz gewählt wurde, um das gewünschte Verhalten zu zeigen. Abbildung 2.9 zeigt ganz besonders gut, dass für  $k > 10$  die Abhängigkeit von  $\sigma$  nicht mehr gegeben ist, da der Einfluss des Delta-Peaks unterdrückt wird.

Es ist leider nicht möglich, die Verzögerungsstrecke  $\tau_D$  ohne a priori Wissen des Lini-

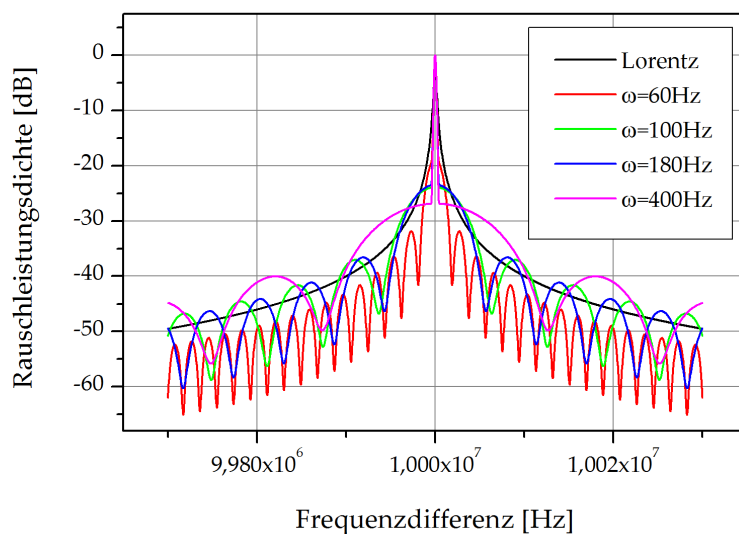


Abbildung 2.7.: Plot der normierten spektralen Rauschleistungsdichte  $\mathfrak{S}$  für verschiedene Linienbreiten  $\Delta\omega$ . Dabei wurde  $\Omega = 10\text{ MHz}$ ,  $k = 0.1$  und  $\sigma = 100\text{ Hz}$  gewählt. Zum Vergleich ist eine Lorentz-Kurve (schwarz) mit gezeichnet.

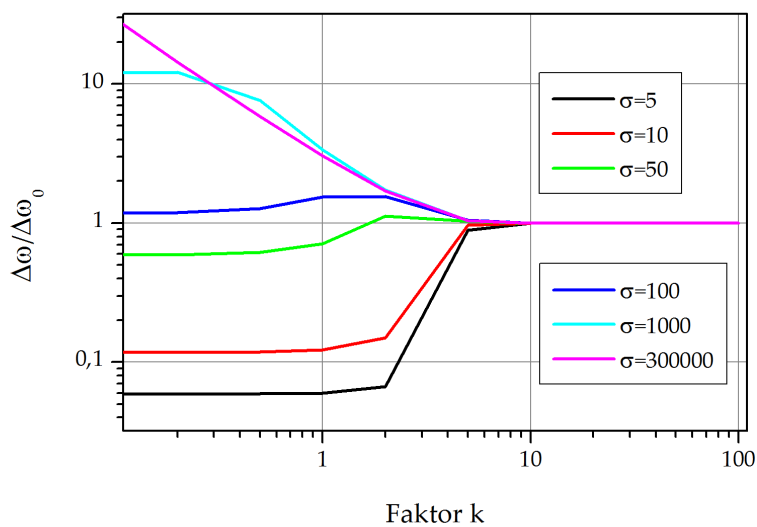


Abbildung 2.8.: Plot der normierten spektralen Rauschleistungsdichte  $\mathfrak{S}$  für verschiedene Verzögerungsparameter  $k$  und Breiten der Gaußkurve  $\sigma$ . Dabei wurde  $\Omega = 10\text{ MHz}$  gewählt. Die Breiten sind normiert auf die  $-3\text{ dB}$  halbe Breite einer Lorentz-Kurve.



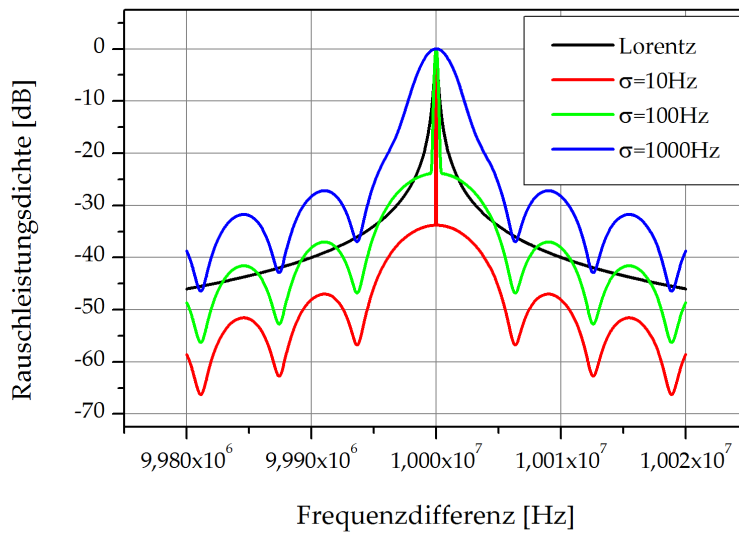


Abbildung 2.9.: Plot der normierten spektralen Rauschleistungsdichte  $\mathcal{S}$  für verschiedene Faltungsbreiten  $\sigma$ . Dabei wurde  $\Omega = 10$  MHz,  $k = 0.1$  und  $\Delta\omega = 200$  Hz gewählt. Zum Vergleich ist in schwarz eine Lorentz-Kurve gezeichnet.

enbreite  $\Delta\omega$  so zu wählen, dass ein kleiner Verzögerungsparameter  $k$  die Abschätzung der Linienbreite ermöglicht.

Allerdings ist es durchaus erlaubt, das Spektrum bei kurzen Verzögerungsstrecken aufzunehmen und einen Parameterfit der obigen Rauschleistungsdichte an die gemessenen Daten vorzunehmen. Da hierbei die Verzögerungszeit  $\tau_D$  bekannt ist, bleibt die  $k$ -Abhängigkeit, die gleichzeitig nur eine  $\Delta\omega$ -Abhängigkeit besitzt. Damit kann durch einen Parameterfit die Linienbreite  $\Delta\omega$  bestimmt werden. Dass die Wahl der Faltungsbreite  $\sigma$  kein Hindernis ist, ist in Abbildung 2.9 gezeigt. Der Einfluss von  $\sigma$  ist auf die zentrale Region beschränkt, und wenn das Spektrum genügend breit aufgenommen wurde, wird der Parameterfit von den Ausläufern bestimmt.

Es wird nun das Faltungsintegral auf alle Terme angewendet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 2.10 gezeigt. Dabei zeigt sich, dass die numerische Integration vor große Probleme gestellt wird. Trotz der Faltung mit der Gaußkurve bleibt der Delta-Peak ein unlösbares Problem für die hier gewählten Integrationsmethoden, die MapleSoft MAPLE von Haus aus bietet. Es werden pro Punkt bis zu drei verschiedene numerische Integrationsmethoden probiert: Zuerst die Standardmethode DEFAULT, die per se schon drei Methoden probiert, danach die Methoden `d01ajc` und `ncrule`. Die Form der Ausläufer, abseits der kritischen Stelle, wird korrekt berechnet (als Vergleich dient die vereinfachte Faltung). Aus diesen Schwierigkeiten heraus wurde die vereinfachte Faltung bevorzugt.

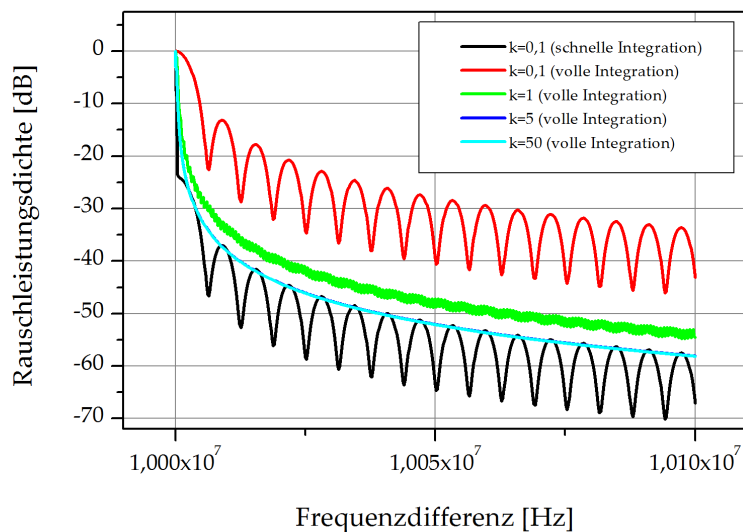


Abbildung 2.10.: Plot der normierten spektralen Rauschleistungsdichte  $\mathcal{S}$  für verschiedene Verzögerungsparameter  $k$ . Dabei wurde  $\Omega = 10$  MHz,  $k = 0.1$  und  $\Delta\omega = 200$  Hz gewählt. In schwarzer Farbe ist die entsprechende Funktion mit der vereinfachten Faltung gezeigt.

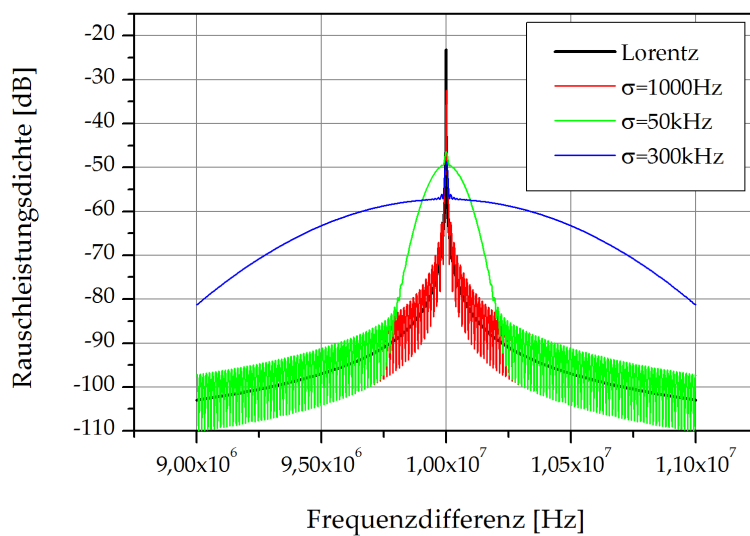


Abbildung 2.11.: Nicht normierte Rauschleistungsdichten bei verschiedenen Faltungsbreiten  $\sigma$ , welche zum Test für die nichtlineare Anpassung verwendet werden.

Es wird als Letztes die Frage untersucht, ob man aus einem aufgenommenen Bild eines Spektrumanalysators durch einen direkten Lorentz-Fit auch die Linienbreite bestimmen kann. Solch ein Parameterfit könnte schneller berechnet werden, als das Spektrum an die komplette Funktion anzupassen. Gestützt wird die Vermutung, wenn man die Rauschleistungsdichten in einem Plot mit logarithmischer Achse betrachtet, siehe Abbildung 2.11.

Man erkennt, dass die Form der Flanken für das Auge im Falle der nicht normierten PSDs gut mit der Lorentz-Kurve übereinstimmen. Daher wurde an diese Daten ein Parameterfit mit der folgenden Fit-Funktion vorgenommen:

$$\mathfrak{F} = 10 \log_{10} \left( y_0 + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}w}{(\omega - \omega_c)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2} \right) \quad (2.3.122)$$

Der Parameter  $w$  ist damit die volle Halbwertsbreite (FWHM)  $\Delta\omega = w$ .

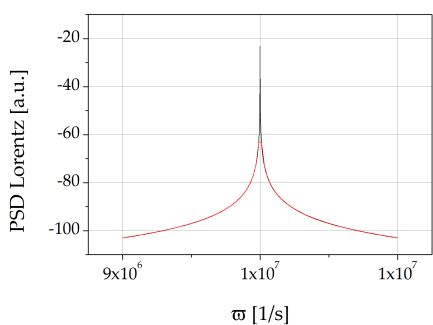
In Abbildung 2.12 sieht man, dass es möglich ist, eine Abschätzung der Linienbreite aus einem Parameterfit an die Daten aus einem Spektrumanalysator zu erhalten, auch wenn man nur eine Lorentz-Kurve zur Anpassung verwendet. Allerdings sind die Abweichungen in diesen Fällen bis zu 27%. Weiterhin ist zu beachten, dass das zentrale Gebiet durch die Faltung den Parameterfit verschlechtert. Bessere Ergebnisse erhält man, indem man nur die Flanken für die Anpassung auswählt.

Abschließend lässt sich feststellen, dass bei kurzen Verzögerungsstrecken die Linienbreite nur dann verlässlich festgestellt werden kann, wenn man an das gemessene Spektrum die Funktion (2.3.121) anpassen kann.

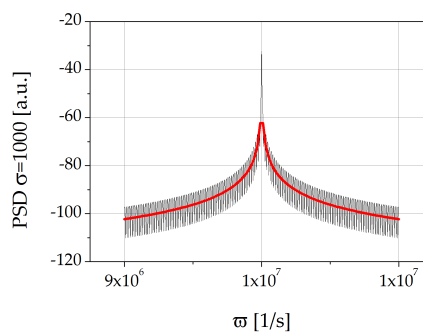
### 2.3.10. Linienbreitenbestimmung mittels einer selbst-heterodynen Messung

Ein Nachteil des „delayed self heterodyn interferometer“ (DSHI) ist es, eine geeignete Verzögerungsstrecke vorzuhalten, um die Bedingung  $\tau \gg t_c$  zu erfüllen und unkorreliertes Licht auf dem Detektor zu mischen. Diese kann durch eine Faser realisiert werden und leicht die Länge einiger Kilometer betragen. Für kompakte Aufbauten, wie sie im Fallturm verwendet werden, ist eine solche Faser nicht die beste Wahl, da diese Faser Platz und Gewicht benötigt. Zusätzlich ist eine solche lange Faser anfällig für externe Störungen und hat eine Dämpfung. Diese Nachteile können durchaus verschmerzbar sein oder technisch mit Material-, Platz- und Energieaufwand umgangen werden.

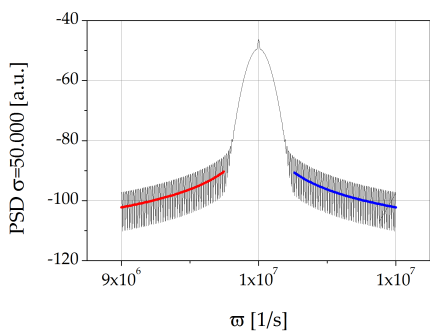
Eine Alternative, um gezielt die Linienbreite eines Lasers zu messen, wurde von [94] in den „Laser Physics Letters“ publiziert. Diese Methode schlägt zur Linienbreitenbestimmung die Auswertung der Interferenz zweier modulierter Seitenbänder vor. Der angesprochene Nachteil eines DSHI entfällt hier in Form der nicht benötigten langen Faser. Dafür werden zwei Phasen-Modulatoren anstatt des Amplituden-Modulators benötigt. Ein prinzipieller Aufbau ist in Abbildung 2.13 sowie in Abbildung 3.12 gezeigt. Da das Licht nur entlang eines Pfades wandert, ist dies kein Interferometer mehr.



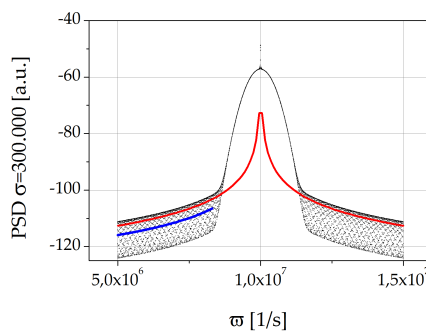
(a) Kontrolle des Parameterfits mit der Lorentz-Kurve, in beiden Fällen ist die FWHM  $\Delta\omega = 200$  Hz.



(b) Fit an alle Punkte des Plots.  $\Delta\omega = (238 \pm 7)$  Hz.



(c) Fit an die einzelnen Flanken der Punkte.  $\Delta\omega = (239 \pm 49)$  Hz und  $\Delta\omega = (235 \pm 15)$  Hz.



(d) Fit an eine Flanke  $\Delta\omega = (255 \pm 66)$  Hz sowie an alle Punkte  $\Delta\omega = (547 \pm 60)$  Hz.

Abbildung 2.12.: Parameteranpassung an verschiedene Rauschleistungsdichten  $\mathcal{G}$  mit unterschiedlichen Faltungsbreiten  $\sigma$ . Diese wird typischerweise an dem Spektrumanalysator in den Einstellungen gewählt.

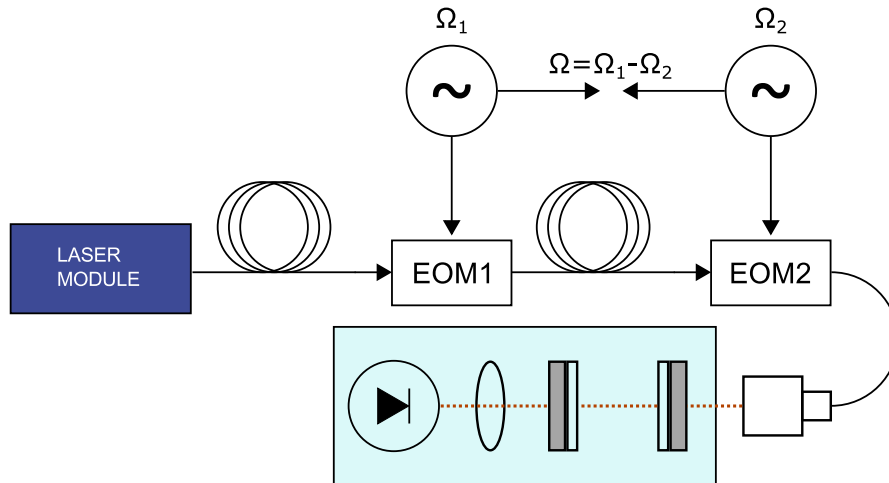


Abbildung 2.13.: Prinzip der selbst-heterodynen Messung der Linienbreite.

Wie im vorangehenden Kapitel gezeigt, die die Verzögerungsstrecke essentiell für eine Linienbreitenbestimmung, um die Phasenfluktuationen  $\phi(t_0 + \tau) - \phi(\tau)$  bei genügend großem  $\tau$  zu untersuchen, was letztlich die Bestimmung der Linienbreite ermöglicht. Da das Verfahren publiziert wurde und damit die Schwierigkeiten eines DHSI im Fallturmbetrieb auflöst werden würden, wurde dieses – entgegen der prinzipiellen Einwände – ebenfalls aufgebaut und getestet.

Zunächst wird die Funktionsweise nachvollzogen. Ein Phasen-Modulator erzeugt symmetrische Seitenbänder um die Trägerfrequenz  $\omega_0$  im Frequenzabstand  $\pm\Omega$ . Idealerweise wird dabei keine Amplitudenmodulation aufgeprägt, was sich im Alltag aber kaum vermeiden lässt. Die elektrischen Felder der Seitenbänder ( $+\Omega$  und  $-\Omega$ ) sind um  $180^\circ$  phasenverschoben, so dass das elektrische Schwebungssignal zwischen den Seitenbändern mit dem Träger auf dem Detektor kein Signal erzeugt. Will man die Seitenbänder beobachten, muss man ein Schwebungssignal im RF-Bereich mit einem zweiten Laser herstellen. Der Träger und die beiden Seitenbänder erzeugen dann eine analoge Struktur im RF-Bereich. Sollte bei der Treiberfrequenz der Modulatoren eine Frequenzkomponente durch den Detektor gemessen werden, ist das die verbleibende Amplitudenmodulation. Um diese Limitierung zu umgehen, ist in dem Aufbau ein Fabry-Perot Interferometer (FPI, in Abbildung 2.13 farbig hinterlegt) vor dem Detektor platziert, welches nur die Felder der beiden Oberbänder (oder wahlweise Unterbänder; im Aufbau befinden sich zwei Phasen-Modulatoren) passieren können. Die Symmetrie der Seitenbänder wird dadurch gebrochen und das Schwebungssignal zwischen beiden gefilterten Bändern wird als Signal von dem Detektor ausgegeben.

### Intensitätssignal des Detektors

Der Laser emittiert das elektrische Feld  $E_L(t)$ :

$$E_L(t) = \frac{1}{2}E_0 e^{i\omega_0 t} + c.c. \quad (2.3.123)$$

Der Phasen-Modulator fügt dem elektrischen Feld einen modulierten Phasenteil hinzu:

$$E_1(t) = \frac{1}{2}E_0 e^{i\omega_0 t} e^{i m_1 \sin(\Omega_1 t + \phi_1)} + c.c. \quad (2.3.124)$$

wobei der Parameter  $m$  die Modulationstiefe ist. Diese wird in der Literatur auch häufig mit  $\beta$  bezeichnet. Terme von der Form

$$e^{iA \sin(\theta)}$$

können als eine Reihenentwicklung mit Bessel-Funktionen  $J_n$  geschrieben werden:

$$e^{iA \sin(\theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(A) e^{i n \theta} \quad (2.3.125)$$

Da die Bessel-Funktionen mit Index  $n$  proportional zu  $A^n$  sind, reicht es bei kleinem  $m$  in (2.3.124) aus, nur die ersten Ordnungen zu betrachten und  $n$  auf  $-1; 0; 1$  zu limitieren. Höhere Ordnungen  $m \geq 2$  werden dann ignoriert. Damit erhält man:

$$E_1(t) = \frac{1}{2}E_0 e^{i\omega_0 t} \left( J_{-1}(m_1) e^{-i(\Omega_1 t + \phi_1)} + J_0(m_1) + J_1(m_1) e^{i(\Omega_1 t + \phi_1)} \right) + c.c. \quad (2.3.126)$$

Die verwendeten Bessel-Funktionen sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} J_0(A) &= \frac{1}{4} \left( 1 + \cos(x) + 2 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) \approx 1 \\ J_1(A) &= \frac{1}{4} \left( \sin(x) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right) \approx \frac{1}{2}A \end{aligned} \quad (2.3.127)$$

mit der Relation:

$$J_{-n}(A) = J_n(-A) \quad (2.3.128)$$

Aus (2.3.126) wird damit:

$$E_1(t) = E_L(t) \pm \frac{1}{2}E_0 m_1 e^{i((\omega_0 \pm \Omega_1)t \pm \phi_1)} + c.c. \quad (2.3.129)$$

Der erste Term beschreibt den Träger, dessen Lichtfeld durch die kleine Modulationstiefe annähernd nicht verändert wird. Die beiden weiteren Terme beschreiben das erste Ober (+) sowie das erste Unterband (-). Im Exponenten wird die Frequenzver-

schiebung deutlich.

Für die Beschreibung des weiteren Aufbaus ist es zweckmäßig, die höheren angeregten Seitenbänder  $m^n$  mit  $n > 1$  zu ignorieren, da gelten soll  $m_1^2 \approx m_1 \cdot m_2 \approx m_2^2 \approx 0$ .

Dann folgt sofort, dass nach dem Durchgang des zweiten Phasen-Modulators gilt:

$$E_2(t) = E_L(t) \pm \frac{1}{2} E_0 m_1 e^{i((\omega_0 \pm \Omega_1)t \pm \phi_1)} \pm \frac{1}{2} E_0 m_2 e^{i((\omega_0 \pm \Omega_2)t \pm \phi_2)} + c.c. \quad (2.3.130)$$

Das Fabry-Perot Interferometer filtert das Licht derart, dass die beiden oberen Seitenbänder auf den Detektor treffen:

$$E_{FP}(t) = \frac{1}{2} E_0 m_1 e^{i((\omega_0 + \Omega_1)t + \phi_1)} + c.c. + \frac{1}{2} E_0 m_2 e^{i((\omega_0 + \Omega_2)t + \phi_2)} + c.c. \quad (2.3.131)$$

$E_{FP}$  beschreibt zwei Seitenbänder, die auf dem Detektor zusammenfallen und dieser ein elektrisches Signal entsprechend der Intensität (DC) und des Frequenzunterschieds (AC) erzeugt. In vielen Anwendungen liegt der Frequenzunterschied bei mehreren Megahertz, hier jedoch wird diese Unterscheidung vermieden, da  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  in der gleichen Größenordnung liegen.

Um die Intensität zu berechnen, wird (2.3.131), schon in der Form  $E_1 + E_2$ , in (2.3.64) eingesetzt:

$$I = I_1 + I_2 + I_x \quad (2.3.132)$$

Die ersten beiden Terme beschreiben die Intensitäten der einzelnen Seitenbänder auf dem Detektor. Interessant ist der „cross“-Term  $I_x$ . Dieser beinhaltet die Mischterme, in denen beide Indizes 1 und 2 auftauchen. Für die weitere Rechnung wird o.B.d.A.  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  gesetzt und die reellen Felder zur Berechnung genutzt. Aus (2.3.131) wird damit für das Licht auf dem Detektor  $E_D$ :

$$E_D = \frac{1}{2} E_0 \left( 2 \cos((\omega_0 + \Omega_1)t) + 2 \cos((\omega_0 + \Omega_2)t) \right) \quad (2.3.133)$$

Der Term  $E^*E$  ist dann gleich  $E^2$  und man erhält die oben genannten drei Terme:

$$I_D = \langle E^2(t) \rangle = \langle E_0^2 m_1^2 \cos^2((\omega_0 + \Omega_1)t) \rangle + \langle E_0^2 m_2^2 \cos^2((\omega_0 + \Omega_2)t) \rangle + 2 \langle E_0^2 m_1 m_2 \cos((\omega_0 + \Omega_1)t) \cos((\omega_0 + \Omega_2)t) \rangle \quad (2.3.134)$$

Für die Mittelung des dritten Terms benutzt man die Relationen

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

und

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2(\alpha) - 1$$

So ist nur der „cross“-Term:

$$I_x = E_0^2 m_1 m_2 \langle \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) + \cos((2\omega_0 + \Omega_2 + \Omega_1)t) \rangle \quad (2.3.135)$$

$$= E_0^2 m_1 m_2 \left\langle \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) + 2 \cos^2 \left( \left( \omega_0 + \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} \right) t \right) - 1 \right\rangle \quad (2.3.136)$$

Der erste Term in der Klammer ist so langsam, dass der Detektor der Schwingung folgt. Daher kann dieser Term aus der Mittelung herausgezogen werden, ebenso der konstante Term:

$$I_x = E_0^2 m_1 m_2 \left( \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) + 2 \left\langle \cos^2 \left( \left( \omega_0 + \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} \right) t \right) \right\rangle - 1 \right) \quad (2.3.137)$$

$$= E_0^2 m_1 m_2 (\cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) + 1 - 1) \quad (2.3.138)$$

$$= E_0^2 m_1 m_2 \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) \quad (2.3.139)$$

Die Intensität lautet also:

$$I_D = \frac{1}{2} E_0^2 (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos((\Omega_2 - \Omega_1)t)) \quad (2.3.140)$$

Wird das Signal auf einem Oszilloskop betrachtet, kann die Schwingung der Schwebung direkt als Schwingung der Intensität abgelesen werden. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der Rechnung für ein DSHI (2.3.67), sieht man, dass beide Rechnungen für das Signal in der Zeitdomäne ein strukturell gleiches Ergebnis liefern.

Die Korrelationsfunktion und die Berechnung der spektralen Rauschleistungsdichte lassen sich demnach analog der Rechnung für ein DSHI umsetzen. Dabei muss man beachten, dass der Verzögerungsparameter  $\tau$  durch die fehlende Verzögerungsstrecke gleich null gesetzt wird. Damit wird das Ergebnis zu einer Delta-Funktion, und ist theoretisch nicht verwertbar (siehe auch (2.3.117)).

### Experimentelle Überprüfung

Um die Ergebnisse der Publikation [94] zu überprüfen, wird das Licht – wie in Abbildung 3.12 gezeigt – zuerst mit einem Phasenmodulator  $PM_1$  moduliert. Dieses Licht wird geteilt, eine Hälfte wird für die Pound-Drever-Hall-Stabilisierung verwendet, während die zweite Hälfte durch einen zweiten Phasenmodulator  $PM_2$  geschickt. Beide Phasenmodulatoren werden über aufeinander phasenstabilisierte Frequenzgeneratoren<sup>17</sup> getrieben. Da die PPG-Chips nur eine Frequenzen bis 20 MHz ausgeben können, wurden diese in manchen Fällen durch die Frequenzkarten von National Instruments ersetzt. Nach dem Durchgang durch das Fabry-Perot Interferometer können die Seitenbänder interferieren.

<sup>17</sup>Zum Einsatz kommen programmierbare Phasengeneratoren PPG-20 sowie die Einschubkarten PXI-5404 von National Instruments.



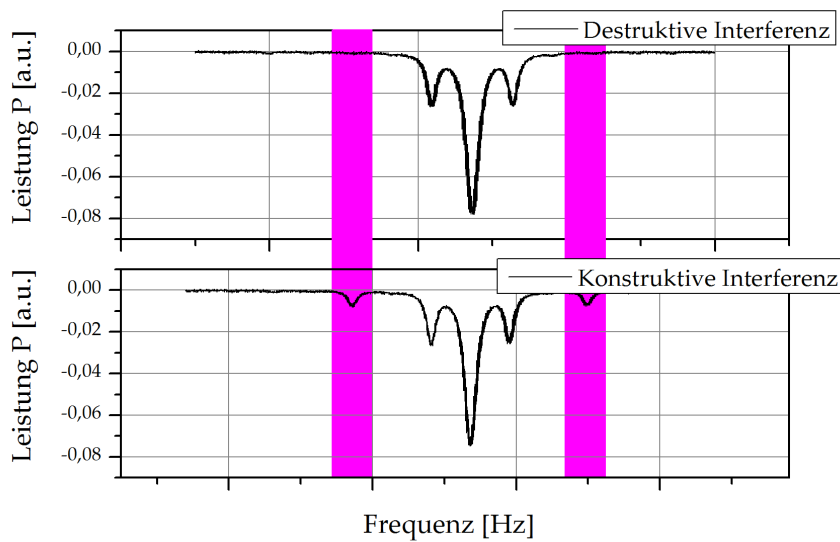


Abbildung 2.14.: Leistung der Photodiode in dem Fabry-Perot-Interferometer über der Spannung an dem Piezoaktuator. Die Leistung ist proportional zum Absolutwert der angezeigten Spannung. Oben: destruktive Interferenz der beiden Seitenbänder, unten: konstruktive.

R / $\Omega$	w /Hz	$f_c$ /Hz
500	1280k	16M
5000	161k	1,6M
50000	96k	160k

Tabelle 2.1.: Breiten der Lorentz-Kurven aus den Parameterfits in Abbildung 2.17.

Wenn der Frequenzunterschied  $\Delta\Omega$  gleich null gesetzt wird, interferieren die Seitenbänder konstruktiv, wenn der Phasenunterschied gleich null ist, und destruktiv, wenn das elektrische Feld genau  $180^\circ$  phasenverschoben ist. Dies ist in Abbildung 2.14 gezeigt: Die Seitenbänder dritter Ordnung des  $PM_1$  (dessen Grundfrequenz  $\Omega_1 = 20$  MHz für die Pound-Drever-Hall-Stabilisierung eingesetzt wird) und die Seitenbänder erster Ordnung des  $PM_2$  mit  $\Omega_2 \approx 60$  MHz interferieren sowohl destruktiv als auch konstruktiv. Wenn der Frequenzunterschied ungleich null ist, wird auf dem Oszilloskop die Schwingung (Schwebung)  $\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$  (siehe (2.3.140)) gemessen. Ist diese geschickt in Bezug auf die Periodendauer der Spannungsrampe am Piezoaktuator gewählt, kann diese während des Scans von der Elektronik aufgenommen werden, wie in Abbildung 2.15 zu sehen ist.

Es wird nun überprüft, ob ein Zusammenhang zwischen dem Kontrast der elektri-

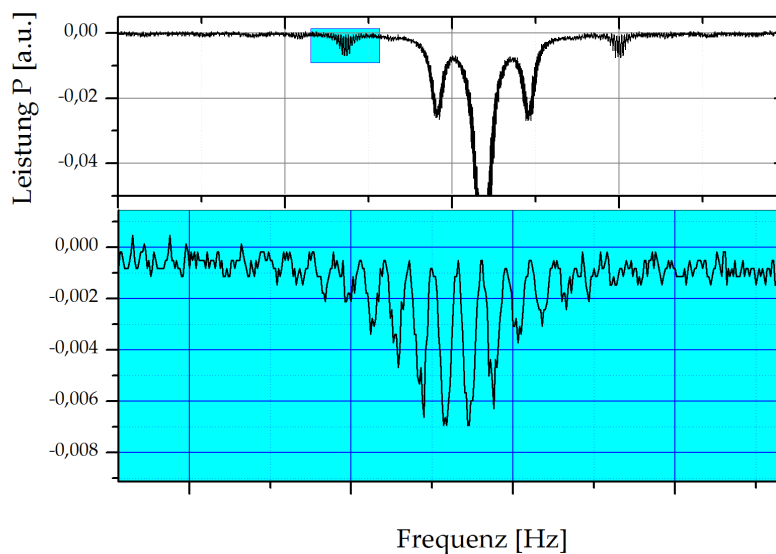


Abbildung 2.15.: Leistung der Photodiode in dem Fabry-Perot-Interferometer über der Spannung an dem Piezoaktuator. Der markierte Bereich zeigt eine Schwebung, deren Frequenz genau der Verstimmung der beiden Lichtfelder entspricht.

schen Schwingung und der Linienbreite gegeben ist, wie publiziert wurde [94]. Im Allgemeinen ist der Kontrast der genormte Intensitätsunterschied der gemessenen Intensität in der Zeitdomäne. Die Rechnung dazu findet man in [41]:

$$K = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |g^{(1)}(\tau)| \quad (2.3.141)$$

Welchen Zusammenhang die Autoren in [94] zwischen dem Kontrast und der Linienbreite sehen, darüber kann nur gerätselt werden, aber es liegt der Verdacht nahe, dass einfach die bekannten Formeln zum Beispiel des DSHI auf den neuen Fall umgemünzt wurden. Dies führt allerdings zu falschen Ergebnissen, da ohne Verzögerungsstrecke und geteilten Pfaden die Verzögerungszeit  $\tau_D$  gleich null ist und damit die gemessene Rauschleistungsdichte eine Delta-Distribution darstellt.

Der Kontrast wird auch hier nicht über verschiedene  $\tau$  ermittelt, sondern über das Detuning  $\Omega$  des zweiten Phasenmodulators. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.16 gezeigt. Man kann in der Tat eine Lorentzfunktion anpassen und Parameter wie die Breite dieser Lorentz-Kurve ermitteln, die aber nicht mit dem Laserfeld in Verbindung steht.

In Abbildung 2.17 wird die eigene Messung präsentiert. Dabei ist zu erkennen, dass – statt der Linienbreite – die Frequenzantwort der Photodiode im Detektor vermessen wird. Dies wird daran ersichtlich, dass der Kontrast bei kleiner Verstimmung konstant bleibt und die Frequenzbreite dieses Plateaus von dem gewählten Lastwiderstand

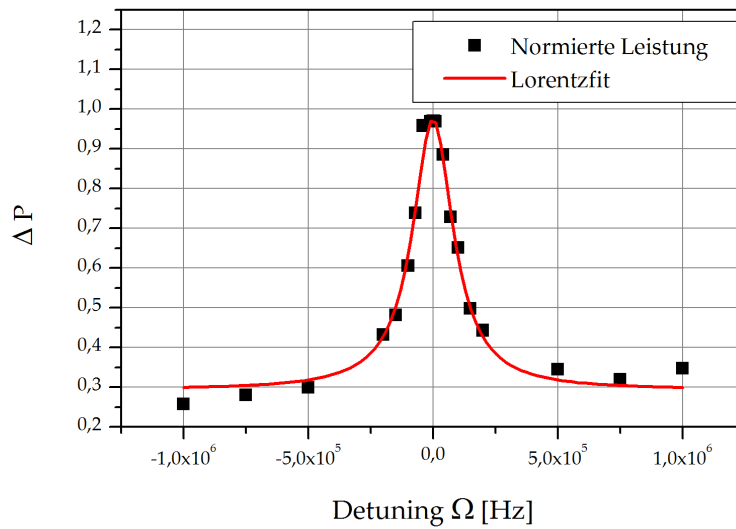


Abbildung 2.16.: Messung des Kontrastes über dem Detuning  $\Omega$  des zweiten Phasenmodulators.

abhängt. Eine Abhängigkeit von der Linienbreite konnte nicht bestätigt werden. Die Abhängigkeit von dem gewählten Lastwiderstand ist in Tabelle 2.1 gegeben.

Aufgrund der mangelnden theoretischen Untermauerung sowie der fehlenden Verifikation durch das Experiment, kommt man zu dem Schluss, dass die publizierte Methode nicht tragfähig ist. Damit kann diese Methode für die Zukunft ausgeschlossen werden.

### 2.3.11. Vergleich zweier oder mehrerer Laserquellen mittels eines Frequenzkammes

Das wichtigste Ergebnis der Theorie des „delay self heterodyn interferometer“ ist in der Formel (2.3.85) gegeben: Die spektrale Rauschleistungsdichte des heterodynen Beatsignals zweier statistisch unabhängigen Laser (d.h. bei nur einer Laserquelle  $\tau \gg \tau_{\text{coh}}$ ) ist gegeben als Faltung der einzelnen spektralen Verteilungen. Im besonderen Fall der Lorentz-Verteilung ist das Ergebnis wieder eine Lorentz-Verteilung.

Zu Beginn des Kapitels 2 wurde erläutert, inwieweit es möglich ist, die Linienbreite von Lasersystemen zu bestimmen, wenn diese je Lasersystem vergleichbare Werte annimmt. Sollten dies der Fall sein, addieren sich die einzelnen Linienbreite und die gemessene ist doppelt so groß wie eine einzelne. In der Anwendung hier werden die Laser aus den beiden Aufbauten miteinander verglichen. Da beide Laser während der Stabilisierung eine vergleichbare Linienbreite haben sollten, lässt sich aus der gemeinsamen spektralen Rauschleistungsdichte eine obere Grenze für die Linienbreite

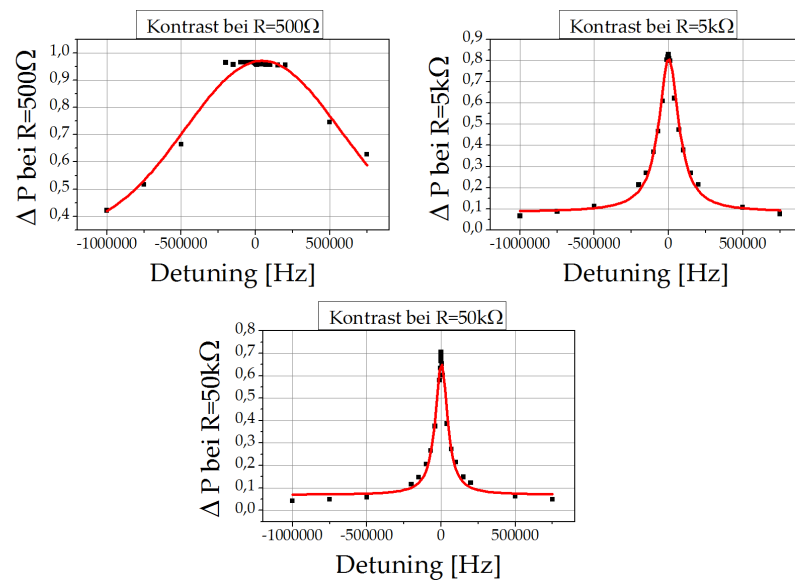


Abbildung 2.17.: Messung des Kontrastes über dem Detuning  $\Omega$  für verschiedene Abschlusswiderstände des eingebauten Detektors im Fabry-Perot Interferometer. Je geringer die Abschlusswiderstände, umso größer wird die Breite der Lorentz-Kurve.

angeben.

Da die Laserquelle des Laboraufbaus bei einer Wellenlänge von 1560 nm und die des Fallkapselaufbaus bei 1550 nm arbeiten, muss der heterodyne Beat mittels eines Frequenzkamms in den RF-Bereich gebracht werden. Das Verfahren ist in [84] beschrieben, und die Grundlagen werden hier kurz vorgestellt. Der verwendete Frequenzkamm<sup>18</sup> stellt in dem Wellenlängenbereich von 1500 nm bis 1600 nm ein Frequenzlineal zur Verfügung. Seine Offsetfrequenz beträgt 20 MHz und die Repetitionsrate  $\approx 250$  MHz<sup>19</sup>.

Ein Frequenzkamm ist ein gepulster Femtosekunden-Laser. Betrachtet man über einen längeren Zeitraum das Lichtfeld und überträgt dieses in den Frequenzraum, wird dieses durch diskrete Frequenzkomponenten mit dem Abstand der Repetitionsrate beschrieben. Das Spektrum wird von zwei Zeitskalen beschrieben (Abbildung 2.18):

- Der Pulsdauer: Diese liegt üblicherweise bei einigen Femtosekunden. Die Gesamtbreite des Spektrums ist proportional zum Kehrwert der Pulsdauer, d.h. je kürzer die Pulsdauer, umso breiter wird der spektrale Kamm ([72]).
- Der Pulswiederholrate  $f_{\text{rep}}$ : Diese definiert den Frequenzabstand benachbarter Moden.

<sup>18</sup>Von Menlo Systems.

<sup>19</sup>Im Auslieferungszustand wurde die Frequenz zwar auf 250 MHz festgelegt, im Betrieb je nach Bedarf angepasst.

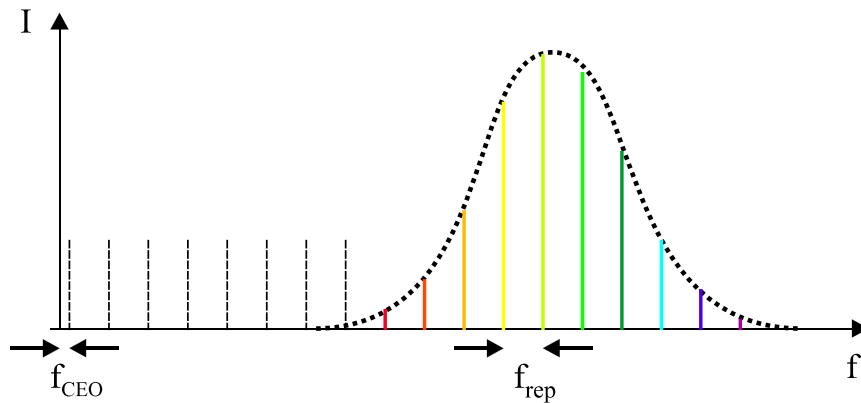


Abbildung 2.18.: Frequenzspektrum eines Frequenzkamms. Der Frequenzoffset und die Repetitionsfrequenz sind markiert.

Technisch sind die Offsetfrequenz  $f_{\text{ceo}}$  und die Pulswiederholrate (Repetitionsfrequenz)  $f_{\text{rep}}$  die Regelparameter eines Frequenzkamms. Die Offsetfrequenz bestimmt als Ableitung der Phase die Phasenbeziehung zwischen der einhüllenden Kurve der sich zu einem Puls verstärkenden schnellen Lichtfeldoszillation und eben dieser Lichtfelder.

Der große Nutzen des Frequenzkamms liegt in der Art und Weise, die Frequenz einer Mode mit den drei Parametern Offsetfrequenz  $f_{\text{ceo}}$ , Repetitionsrate  $f_{\text{rep}}$  und Modennummer  $m$  angeben zu können:

$$\nu = f_{\text{ceo}} + m \cdot f_{\text{rep}} \quad (2.3.142)$$

Mischt man nun ein externes Lichtfeld mit dem Kammspektrum, wird der Photodetektor für jede Kamm-Mode die entsprechende Frequenzdifferenz als Frequenzkomponente im Photostrom generieren<sup>20</sup>. Bei dem verwendeten Frequenzkamm liegt die Mischfrequenz der benachbarten Moden  $f_{\text{beat}}$  im Bereich  $-125$  MHz bis  $125$  MHz, bedingt durch die verwendete Repetitionsrate von  $250$  MHz. Dazu kommen Anteile aus Moden mit größerer Frequenzdifferenz. Ist  $n$  der Index der benachbarten Mode und  $m$  der Index einer Mode in größerem Frequenzabstand, dann ist mit  $i = m - n$  die Mischfrequenz:  $i \cdot 250$  MHz  $+ f_{\text{beat}}$ . Umgekehrt kann man nun durch Messen der beiden Parameter Modennummer  $m$  und Schwebungsfrequenz  $f_{\text{beat}}$  zusammen mit den Regelparametern  $f_{\text{ceo}}$  und  $f_{\text{rep}}$  die Wellenlänge eines Lasers bestimmen. Die Messung der Modennummer  $m$  ist ausführlich in [92, Kap. 5.2] erklärt. Die Frequenz des zu vermessenden Lasers ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\nu = f_{\text{ceo}} + m \cdot f_{\text{rep}} + f_{\text{beat}} \quad (2.3.143)$$

<sup>20</sup>Aus dem Mischprodukt überlebt aufgrund der Bandbreite des Detektors nur die Differenz der beteiligten Frequenzen.

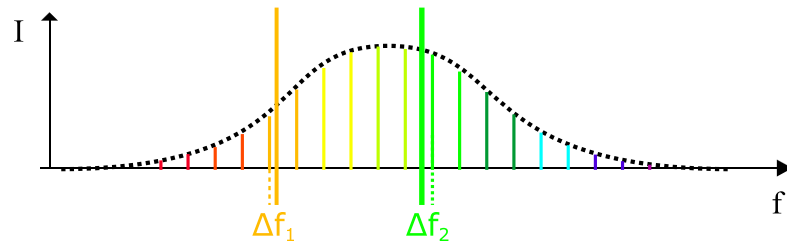


Abbildung 2.19.: Frequenzspektrum eines Frequenzkamms. Zwei weitere Lichtfelder interferieren mit dem Kammspektrum. Dabei werden von dem Photodetektor im Photostrom die Frequenzkomponenten  $\Delta f_1$  und  $\Delta f_2$  erzeugt.

### Transfer-Oszillator

Die Beatfrequenz eines Lichtfeldes mit dem Kammspektrum wird auch mit  $\Delta f_i$  bezeichnet. Diese kann sowohl positives als auch negatives Vorzeichen haben. Somit ist es nach [49, 65, 84, 89] möglich, die Eigenschaften von Lasern zu vergleichen, deren Wellenlängenunterschied zu groß ist, um ein direktes Beatsignal zu erhalten.

Im Falle von zwei unterschiedlichen Laserquellen erhält man so zwei Parametersätze ( $m_i$  und  $\Delta f_i$ ):

$$\begin{aligned} \nu_1 &= f_{\text{ceo}} + m_1 \cdot f_{\text{rep}} + \Delta f_1 \\ \nu_2 &= f_{\text{ceo}} + m_2 \cdot f_{\text{rep}} + \Delta f_2 \end{aligned}$$

Das Ziel ist es, durch eine geschickte elektronische Anordnung die Größen aus dem Frequenzkamm  $f_{\text{ceo}}$  und  $f_{\text{rep}}$  aus der Messung zu eliminieren. Es bleibt dann ein Zusammenhang zwischen den beiden Lichtfeldern.

Stellt man Gleichung (2.3.143) nach der Beatfrequenz um, erhält man:

$$\Delta f_i = \nu_i - f_{\text{ceo}} - m_i \cdot f_{\text{rep}} \quad (2.3.144)$$

Da die Parameter des Frequenzkamms derart gewählt werden können, dass alle Größen positiv sind, wird im Folgenden o.B.d.A.  $\Delta f_i > 0$  angenommen. Zur weiteren Verarbeitung wird diese Frequenz mit der Offsetfrequenz des Frequenzkamms elektrisch gemischt und das Ergebnis mit einem Hochpassfilter passend gefiltert:

$$\begin{aligned} \Delta f_i' &= \nu_i - f_{\text{ceo}} - m_i \cdot f_{\text{rep}} \pm f_{\text{ceo}} \\ &\stackrel{\text{HP}}{=} \nu_i - m_i \cdot f_{\text{rep}} \end{aligned} \quad (2.3.145)$$

Nachdem ein Signal, zum Beispiel  $\Delta f_1'$ , durch einen Frequenzteiler derart manipuliert worden ist, dass die beiden Modenummern im Produkt mit  $f_{\text{rep}}$  ausgetauscht werden

$(m_1 f_{\text{rep}} \rightarrow m_2 f_{\text{rep}})$

$$\Delta f_1'' = \frac{m_2}{m_1} \nu_1 - m_2 \cdot f_{\text{rep}} \quad (2.3.146)$$

kann man die beiden bearbeiteten Signale zusammen mischen:

$$\Delta = \Delta f_1'' \pm \Delta f_2' = \frac{m_2}{m_1} \nu_1 - m_2 \cdot f_{\text{rep}} \mp \nu_2 \pm m_2 \cdot f_{\text{rep}} \quad (2.3.147)$$

Und nach einem weiteren Hochpassfilter erhält man:

$$\Delta = \frac{m_2}{m_1} \nu_1 + \nu_2 \quad (2.3.148)$$

Dies gibt einen Zusammenhang zwischen den beiden Laserfeldern an, der nur von den Frequenzen und den zugehörigen Zinkennummern abhängt. Das Frequenzrauschen der Laser überträgt sich direkt in das Frequenzrauschen des gemeinsamen Beatsignals, wobei das Rauschen des mit dem Index „1“ versehenen Lasers durch den Frequenzteiler verkleinert oder vergrößert wird.

## 2.4. Optische Resonatoren

### 2.4.1. Allgemeines zu optischen Resonatoren

Viele kennen aus Kaufhäusern und Aufzügen eine Spiegelanordnung, in der sich zwei Spiegelflächen direkt gegenüberstehen. Durch geschickte Platzwahl oder Schrägstellungen der Spiegel ist es meist möglich, „unendliche“ Reflexionen des eigenen Spiegelbildes zu erhalten. Das Bild in Abbildung 2.20 zeigt eine solche Anordnung, die das Erlebnis dem Besucher vermitteln soll.

Eine Anordnung aus zwei Spiegeln, deren (hoch-)reflektierenden Schichten sich gegenüberstehen, nennt man einen optischen Resonator, oder eine „optical cavity“. Licht, das in diese Anordnung geleitet wird, kann bei vorsichtiger Justage wieder in sich zurück reflektiert werden. Auf diese Weise fliegt bildlich gesprochen ein Lichtquant immer denselben Weg zwischen den beiden Spiegeln ab. Je nach der Reflektivität der Spiegelflächen kommt es zu weniger oder mehr Durchläufen, und diese Anzahl bestimmt die Güte des Resonators. Entscheidend ist in der Praxis, die Spiegelflächen genau aufeinander auszurichten und deren Position zu halten. Dafür wird ein Abstandshalter verwendet.

Einen guten Überblick bieten verschiedene Lehrbücher, hier werden insbesondere die beiden Werke [75, Kap. 19] und [82, Kap. 2, 3 und 10] für die folgenden Erläuterungen herangezogen.

Abbildung 2.21 zeigt beispielhaft eine zylindrische Resonator-Geometrie. Die beiden Spiegel werden mit der spiegelnden Fläche nach innen an dem Abstandshalter



Abbildung 2.20.: Eine Anordnung von zwei Spiegeln im National Science Center Fort Discovery in Augusta, GA, USA. Ein Spiegel hat ein leicht aus der Mitte versetztes Schauloch. Lizenz: CC BY-SA 2.0; Titel: Dave playing with mirrors; von Dave Matos; abrufbar unter <https://www.flickr.com/photos/dmatos/3015458505>

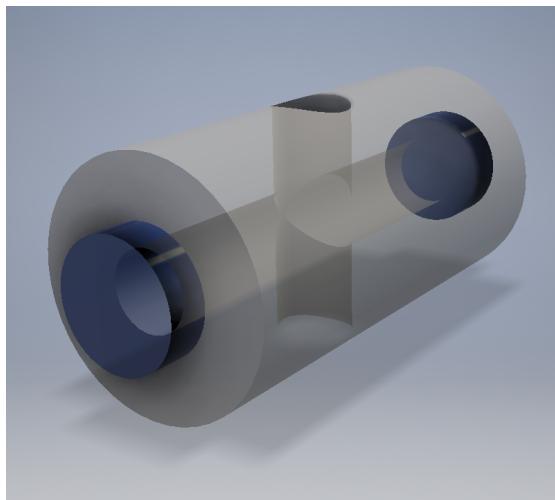


Abbildung 2.21.: Ein Zylinderresonator als Beispiel: Ein Abstandshalter in der Mitte ist mit zwei Bohrungen versehen. Vertikal zur Entlüftung im Vakuumbetrieb, horizontal entlang der designierten optischen Achse. Die beiden Spiegel sind links und rechts kontaktiert.



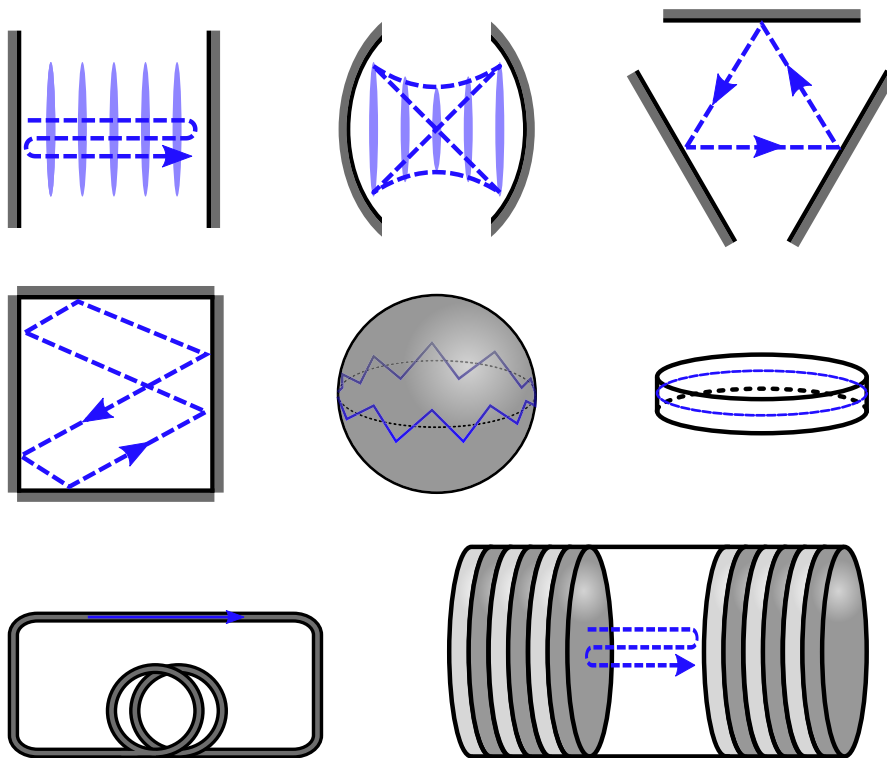


Abbildung 2.22.: Eine Auswahl verschiedener Resonatorgeometrien, die stabile Lasermoden ermöglichen (nach [82, Abb. 10.0-1]). Von oben links nach unten rechts: Zwei Spiegel plan; zwei Spiegel gekrümmt; drei und mehr Spiegel; „whispering gallery mode“ an Sphäre und Scheibe; geschlossene Faser mit Einkopplung; Reflexion an periodischer Struktur, z.B. Bragg Grating oder Kristallstrukturen.

befestigt. Sollte dieser ein Vollkörper sein, wird – wenn nötig – eine Bohrung zwischen den beiden Spiegeln eingebracht. Sinn und Zweck ist es, dass Licht zwischen den beiden Spiegeln ohne äußere Störung reflektiert werden kann. Da der dabei entstehende Hohlraum von den Spiegeln wieder versiegelt wird, gibt es meist noch eine weitere Bohrung, die einen Atmosphären austausch mit der Umgebung zulässt. Resonatoren werden oft unter Vakuum betrieben, und der beim Zusammenbau herrschende Druck innerhalb des Resonators muss ebenfalls entlüftet werden.

Natürlich gibt es viele weitere und verschiedene Möglichkeiten, Licht „einzufangen“. Eine Übersicht ist in Abbildung 2.22 gezeigt. Nicht jeder Aufbau erlaubt das stabile Ausbilden von Resonatormoden. Sollte sich innerhalb des Resonators ein aktives Medium befinden, so wird aus dem optischen Resonator ein Laser, dessen Lasermoden den Resonatormoden entsprechen.

In dieser Arbeit werden Resonatoren in der folgenden Konfiguration verwendet:

- Zwei-Spiegel-Anordnung mit einem planen und einem konvexen Spiegel,
- Die Brennweite des gekrümmten Spiegels ist  $f = 500$  mm,
- Der Abstand beträgt  $d = 48$  mm.

### 2.4.2. Kenngrößen optischer Resonatoren

Zur Analyse eines Resonators vergleicht man ein elektrisches Feld nach einem Umlauf  $E_2$  mit dem vor dem Umlauf eingestrahltten Feld  $E_1$ :

$$E_2 = \sqrt{R_1 R_2} E_1 e^{ik2d} \quad (2.4.1)$$

wobei nach einem Umlauf der Phasenterm  $e^{ik2d}$  gesammelt wird. Verluste während des Umlaufs werden hier nur an den Spiegelflächen einbezogen (mittels der Reflektivität  $R_i$ ) und sonstige Verluste vernachlässigt. Die Phasensprünge an den Spiegeln addieren sich zu dem reellen Faktor 1. Die Wellenzahl  $k$  ist  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}$ . Für den stationären Fall bildet sich eine stehende Welle aus, die durch folgende Bedingung charakterisiert wird:

$$\frac{E_2}{E_1} = 1 \quad (2.4.2)$$

Daraus leitet man eine Bedingung an die *Phasen-Verschiebung* ab:

$$e^{ik2d} = 1 = e^{iq2\pi}, \quad q \in \mathbb{N} \quad (2.4.3)$$

oder

$$q\lambda = 2d \quad \text{und} \quad \nu = q \frac{c}{2d} \quad (2.4.4)$$

Stationäre Felder sind demnach an die Bedingung geknüpft, dass deren Wellenlängen ein ganzzahliger Teiler der Umlaufstrecke sind. Die Zahl  $q$  wird auch *Modenzahl* genannt.

Im Frequenzraum ordnen sich die möglichen Frequenzen so an, dass zwischen zwei möglichen Frequenzen der Abstand:

$$\Delta\nu = \frac{c}{2d} \quad (2.4.5)$$

herrscht. Die Zahl  $\Delta\nu$  heißt *Freier Spektralbereich*, kurz *FSB* oder englisch *FSR*. Im Fall des dieser Arbeit zugrunde liegenden Aufbaus beträgt dieser Wert  $\Delta\nu \approx 3,1$  GHz.

Führt man den Abschwächungskoeffizienten  $h = \sqrt{R_1 R_2} e^{i(k2d + \phi)} = \sqrt{R_1 R_2} e^{i\delta}$  ein, kann der darin enthaltene Parameter  $\delta$  auch durch die Kreisfrequenz  $\omega$  des Feldes ausgedrückt werden:

$$\delta(k) = 2kd + \phi = 2 \frac{\omega}{c} d + \phi = \frac{\omega}{\Delta\nu} + \phi = \delta(\omega)$$

Damit kann man das stationäre Feld als Überlagerung vieler reflektierter Felder  $E_i = hE_{i-1}$  auffassen:

$$E = \sum_i E_i = \sum_i h^i \sqrt{T_1} E_0 \quad (2.4.6)$$

wobei  $E_0$  das einfallende Feld durch einen der beiden Spiegel sein soll ( $T_1 = 1 - R_1$ ). In der Variable  $\phi$  werden nun explizit alle möglichen Störungen, die auf die Phase des Feldes pro Umlauf wirken, subsummiert<sup>21</sup>. Die unendliche Reihe ist aufgrund von  $|h| < 1$  eine geometrische Reihe und kann elementar gelöst werden:

$$\sum_i h^i = \frac{1}{1-h} = \frac{1}{1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i\delta}} \quad (2.4.7)$$

Damit wird das Feld in dem Resonator (engl. „cavity“) geschrieben als:

$$E_C = \frac{\sqrt{T_1}}{1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i\delta}} E_0 \quad (2.4.8)$$

Da der Betrag der Reflektivität immer kleiner als eins ist, wird ein Teil des zirkulierenden Lichtes transmittiert (Verluste). Wird die Intensität hinter dem Resonator gemessen, muss noch der Transmission durch diesen Spiegel und dem halben Phasenschub Rechnung getragen werden:

$$E_T = \frac{\sqrt{T_1 T_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2} e^{i\delta}} e^{i\frac{1}{2}\delta} E_0 \quad (2.4.9)$$

Ein Teil des Feldes wird direkt am ersten Spiegel des Resonators reflektiert, bevor es in den Resonator gelangen kann. Dieses überlagert sich mit dem Licht, welches aus dem Resonator durch den ersten Spiegel transmittiert wird.

$$E_R = \sqrt{R_1} E_0 - \sqrt{T_1} e^{i\frac{1}{2}\delta} \sqrt{R_2} e^{i\frac{1}{2}\delta} \cdot E_C \quad (2.4.10)$$

Die Faktoren des zweiten Summanden sind dabei zeitlich von rechts nach links sortiert: Phasenschub für eine halbe Zirkulation, Reflexion am zweiten Spiegel, Phasenschub für die zweite Hälfte der Zirkulation und am Ende die Transmission durch den ersten Spiegel. Das Vorzeichen des zweiten Terms resultiert daraus, dass die Reflexion am ersten Spiegel und zweiten Spiegel in jeweils entgegengesetzten Anordnungen des Substrats (fused silica) und der Umgebung erfolgt. Eine ausführliche Darstellung findet man in [71]. Mit den zuvor eingeführten Bezeichnungen lässt sich  $E_R$  nun schreiben

<sup>21</sup>Dabei wird angenommen, dass die Störungen für hin und weglauende Wellen gleich sind.

als

$$\begin{aligned}
E_R &= \sqrt{R_1}E_0 - \sqrt{T_1R_2}e^{i\delta}E_C \\
&= \sqrt{R_2}E_0 - \frac{\sqrt{R_2}e^{i\delta}}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}} \sqrt{T_1^2}E_0 \\
&= \frac{\sqrt{R_1}E_0 - R_1\sqrt{R_2}e^{i\delta}E_0}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}} - \frac{T_1\sqrt{R_2}e^{i\delta}}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}}E_0 \\
&= \frac{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}e^{i\delta}(R_1 + T_1)}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}}E_0 \\
&= \frac{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}e^{i\delta}}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}}E_0
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Die Transferfunktion bekommt folgende Gestalt:

$$H_{RE}(k) = \frac{E_R}{E_0} = \frac{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}e^{i\delta}}{1 - \sqrt{R_1R_2}e^{i\delta}} \tag{2.4.12}$$

Die Intensitäten sind die Betragsquadrate der elektrischen Felder  $I_R = |E_R|^2$  und  $I_0 = |E_0|^2$ . Die Transferfunktion für die Intensitäten lautet dann<sup>22</sup>:

$$H_{RI}(k) = \frac{I_R}{I_0} = |F(k)|^2 = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}{(1 - \sqrt{R_1R_2})^2 + 4\sqrt{R_1R_2} \sin^2 \frac{\delta}{2}} + \frac{\mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}} \tag{2.4.13}$$

wobei der Faktor  $\mathfrak{F}$  eingeführt wurde:

$$\mathfrak{F} = \frac{4\sqrt{R_1R_2}}{(1 - \sqrt{R_1R_2})^2} \tag{2.4.14}$$

Für den Fall (der eine gute Näherung der meisten Aufbauten darstellt), dass die Reflektivitäten der Spiegel gleich sind  $R = R_1 = R_2$ , reduzieren sich die beiden letzten Gleichungen auf:

$$H_{RI}(k) = \frac{\mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + \mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}} \tag{2.4.15}$$

und

$$\mathfrak{F} = \frac{4R}{(1 - R)^2} \tag{2.4.16}$$

Der Plot 2.23 der Transferfunktion  $F_I(k)$  zeigt, wie sich die reflektierte Intensität bezüglich der Einfallenden verhält. Die Frequenzabhängigkeit ist derart, dass nur um bestimmte Frequenzen die Intensität des reflektierten Lichts stark abnimmt. Der Wer-

<sup>22</sup>Dabei wurde von folgender Relation Gebrauch gemacht:  $\sin^2 \frac{x}{2} = -\frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix} - 2)$ .

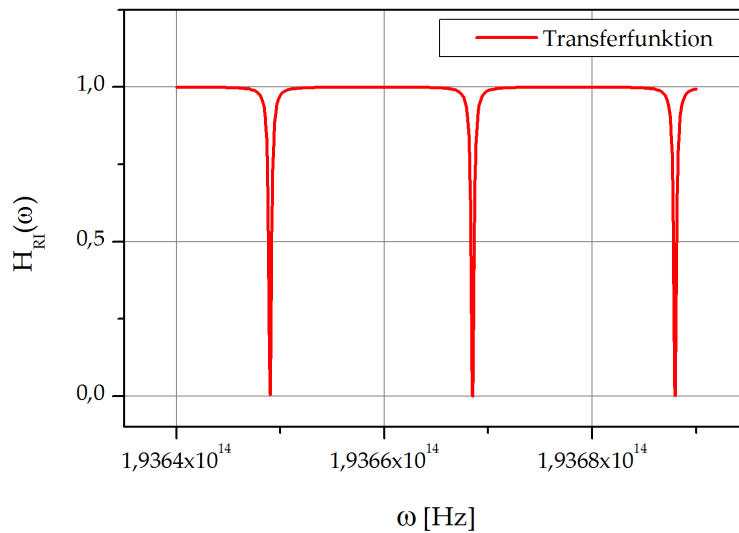


Abbildung 2.23.: Plot der Transferfunktion  $H_{RI}$  über der Frequenz. Außerhalb der Resonanzen wird die Intensität mit dem maximalen Wert  $\frac{\mathfrak{F}}{1+\mathfrak{F}}$  reflektiert, bei Vielfachen von  $\frac{c}{2d}$  tritt eine Resonanz auf, in der die Reflektivität des Resonators auf Null abfällt. Die Finesse ist  $\mathcal{F} = 1520$  und der freie Spektralbereich  $\delta\nu = 3,1$  GHz.

tebereich der Intensität ist:

$$I_R \in \left[ 0; \frac{\mathfrak{F}}{1+\mathfrak{F}} \right] \quad (2.4.17)$$

Analog verhält es sich mit der Intensität  $I_T$  des transmittierten Lichtes, da  $I_0 = I_R + I_T$  gilt.

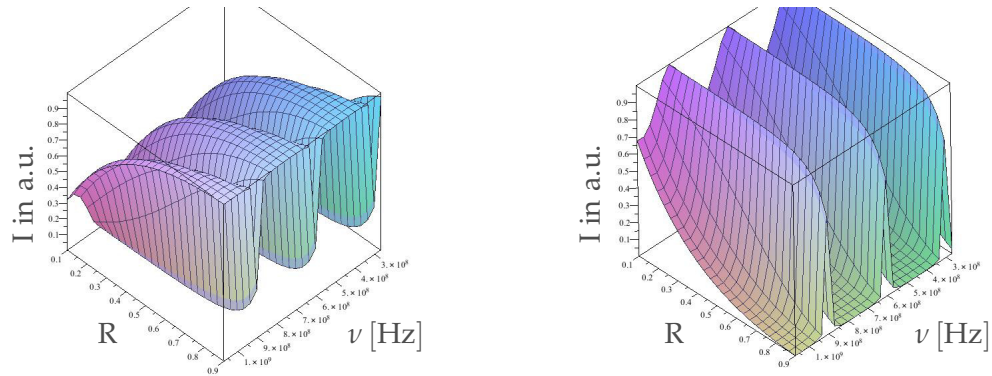
$$I_T = H_{TI}(k) I_0; \quad H_{TI}(k) = \frac{1}{1 + \mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (2.4.18)$$

Immer wenn die Bedingung  $\frac{1}{2}\delta = q\pi$  erfüllt ist, ist die Frequenz resonant. Diese Frequenzen nennt man Resonanzfrequenz(en) des optischen Resonators. Wichtig dabei ist vor allen Dingen der Abstand der Resonanzen, der *freien Spektralbereich* (engl. free spectral range, FSR), heißt. Aus der obigen Bedingung folgt, dass zwei aufeinander folgende Resonanzfrequenzen mit der Differenzfrequenz

$$\Delta\nu = \Delta_{FSR} = \frac{c}{2d} \quad (2.4.19)$$

getrennt werden, wenn  $d$  der Abstand der beiden Spiegel ist.

Die Halbwertsbreite der Maxima in der transmittierten Intensität entsprechen denen der reflektierten Intensität. Ausgehend von der Transferfunktion der transmittierten



(a) Intensität des reflektierten Lichts

(b) Intensität des transmittierten Lichts

Abbildung 2.24.: Intensitäten  $I$  bei verschiedenen Reflektivitäten  $R$  der Spiegel und verschiedenen Frequenzen  $\nu$  über drei Resonanzen. Je höher die Reflektivität ist, umso ausgeprägter stellen sich die Resonanzen dar. Hohe Reflektivität korreliert mit niedriger Transmission.

Intensität (2.4.18) kann man die Halbwertsbreite berechnen:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \mathfrak{F} \sin^2 \frac{\delta_{1/2}}{2}} \quad (2.4.20)$$

Es ist sofort zu sehen, dass folgende Relation gilt:

$$\sin \frac{\delta_{1/2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{F}}} \quad (2.4.21)$$

Entwickelt man die Sinusfunktion für kleine Werte von  $\delta$ , kann die Funktion durch ihr Argument ersetzt werden. Dies ist für Reflektivitäten größer als einhalb (mit einem Fehler kleiner 2%) der Fall. Setzt man noch  $\delta = \frac{\omega}{\Delta\nu}$  mit verschwindendem Phasenterm ein, kann man nach  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  in  $\delta$  lösen:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta_{\text{FSR}}}{\pi\sqrt{\mathfrak{F}}} \quad (2.4.22)$$

Die volle Halbwertsbreite ist der doppelte Wert der einseitigen Lösung:

$$\Delta_{1/2} = 2\Delta\nu_{1/2} = \frac{\Delta_{\text{FSR}}(1-R)}{\pi\sqrt{R}} \quad (2.4.23)$$

Die beiden Größen  $\Delta_{1/2}$  und  $\Delta_{\text{FSR}}$  sind wichtige Kenngrößen eines Resonators, die bildlich gesprochen die Steilheit der Flanken beschreiben sowie deren Häufigkeit. Der folgende Quotient kombiniert beide Größen zur sog. Finesse  $\mathcal{F}$ , die im Allgemeinen

als charakteristische Größe zur Beschreibung eines Resonators verwendet wird:

$$\mathcal{F} := \frac{\Delta_{\text{FSR}}}{\Delta_{1/2}} = \frac{\pi\sqrt{R}}{(1-R)} \quad (2.4.24)$$

### 2.4.3. Die Paraxiale Wellengleichung

Es ist naheliegend, das Problem des stationären Feldes innerhalb eines Resonators in der paraxialen Wellengleichung zu formulieren und zu lösen, wenn die Konfiguration des Resonators aus zwei gegenüberliegenden Spiegeln besteht. Durch die Spiegel wird die Verbindungslinie eine ausgezeichnete Achse, die im Folgenden die *z-Achse* der paraxialen Wellengleichung sein soll.

Die paraxiale Wellengleichung ist eine Näherungsgleichung, die die Ausbreitung einer fast ebenen Welle beschreibt:

$$E(x, t) = A(x)e^{ik_z z} e^{i\omega t} \quad (2.4.25)$$

Dieses wird in die Wellengleichung

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0 \quad (2.4.26)$$

eingesetzt und nach Ausführen der partiellen Differentiation nach  $t$  bleibt mit der Wellenzahl  $k = \omega/c$  die Helmholtz-Gleichung

$$\nabla^2 E - k^2 E = 0 \quad (2.4.27)$$

$A(x)$  ist die komplexe Einhüllende der Welle. Wird diese in die Helmholtz-Gleichung mit eingesetzt, resultiert eine Differentialgleichung alleine für die Einhüllende. An diese werden zuvor folgende Bedingungen gestellt, so dass das Feld den Charakter der ebenen Welle trotz leichter Deformation behält: Die Funktion  $A(x)$  soll entlang der  $z$ -Achse auf Skalen  $\Delta z$  der Wellenlänge  $\lambda$  nur kleine Änderungen durchlaufen. Dies bedeutet mathematisch:

$$\begin{aligned} \Delta A &\ll A \\ \Delta A &= \frac{\partial A}{\partial z} \delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda \\ \frac{\partial A}{\partial z} &\ll A/\lambda \ll kA \\ \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} &\ll k^2 A \end{aligned}$$

Aus diesen Ungleichungen resultiert die paraxiale Helmholtz-Gleichung für die kom-

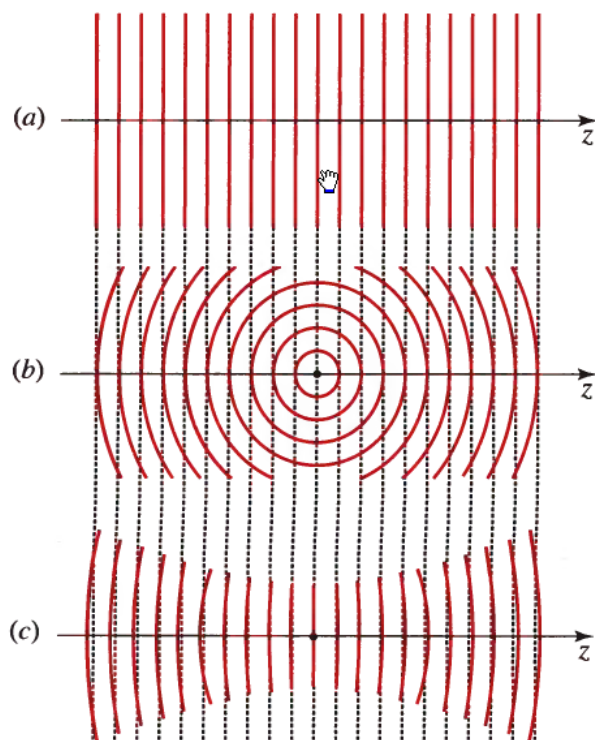


Abbildung 2.25.: Zeigt die Wellenmaxima a) einer ebenen Welle, b) einer sphärischen Welle, c) einer Gauß-Welle.

plexe Einhüllende:

$$\nabla_{\perp}^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad (2.4.28)$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist das Gaußsche Feld, welches häufig Anwendung in der Optik findet:

$$A(x) = A_1 \frac{1}{q(z)} e^{-ik \frac{\rho^2}{2q(z)}} \quad (2.4.29)$$

mit  $\rho = x^2 + y^2$  und dem q-Parameter  $q = z + iz_0$  mit der Rayleigh-Länge  $z_0$ .

Um die Amplitude und die Phase dieser Lösung zu trennen, wird der komplexe Faktor  $1/q(z) = 1/(z - iz_0)$  in seinen reellen und komplexen Teil aufgespalten. Dabei werden der reelle Radius  $R(z)$  und die reelle Krümmung  $W(z)$  eingeführt:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi W^2(z)} \quad (2.4.30)$$



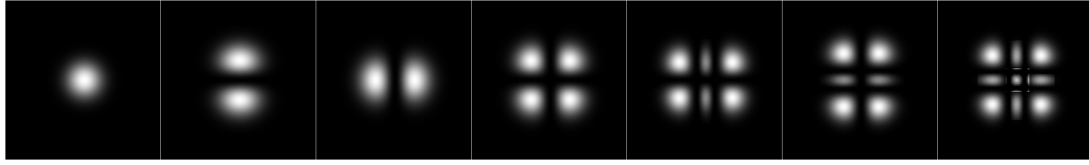


Abbildung 2.26.: Intensitätsprofile der niedrigen TEM Moden. Von links nach rechts: TEM<sub>00</sub>, TEM<sub>10</sub>, TEM<sub>01</sub>, TEM<sub>11</sub>, TEM<sub>12</sub>, TEM<sub>21</sub> und TEM<sub>22</sub>.

Ihre Definitionen sind:

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \quad (2.4.31)$$

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \quad \text{mit} \quad (2.4.32)$$

$$W_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_0}{z_0}} \quad (2.4.33)$$

Die Wellenlänge des Feldes  $\lambda$  sowie die Rayleigh-Länge  $z_0$  definieren als Randbedingungen alle anderen Größen. Die komplexe Amplitude schreibt sich dann mit  $\zeta(z) = \tan^{-1} \frac{z}{z_0}$ :

$$A(x) = \frac{1}{iz_0} \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{\rho^2}{W^2(z)}} e^{-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z)} \quad (2.4.34)$$

Die Eigenschaften des Gaußschen Feldes sind in Abbildung 2.25 bildlich dargestellt.

Das Gaußsche Feld ist der Spezialfall einer ganzen Klasse von Lösungen, die als *Hermite-Gauß-Funktionen* und als *Laguerre-Gauß-Funktionen* bezeichnet werden. Dabei unterscheiden sich die beiden Funktionsklassen durch ihren Parametersatz: für die Hermite-Gauß-Funktionen wird das Problem in kartesischen Koordinaten formuliert, bei den Laguerre-Gauß-Funktionen in Zylinderkoordinaten.

Die Entwicklung dieser erweiterten Lösungen folgt in [82] dem Ansatz über Differentialgleichungen, in [75] einem geschickten Ansatz für die erweiterte Klasse. Detaillierte Rechnungen zur Herleitung findet man in [67]. Hier werden die Ergebnisse präsentiert.

Für zwei unabhängige Dimensionen lotrecht zur Ausbreitungsrichtung lautet die

Formel für Hermite-Gauß-Funktionen:

$$E_{mn} \propto \underbrace{\frac{1}{\omega(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{\omega^2(z)}} e^{-ikz} e^{i(m+n+1)\zeta(z)}}_{\text{Welle mit Gaußscher Verteilung in x-y-Richtung}} \quad (2.4.35)$$

Welle mit Gaußscher Verteilung in x-y-Richtung

$$\underbrace{H_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right)}_{\text{Modenstruktur in x-Richtung}} \quad (2.4.36)$$

Modenstruktur in x-Richtung

$$\underbrace{H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right)}_{\text{Modenstruktur in y-Richtung}} \quad (2.4.37)$$

Modenstruktur in y-Richtung

$$\underbrace{e^{ik\frac{x^2+y^2}{2R(z)}}}_{\text{Fokus der Welle bei } z_0} \quad (2.4.38)$$

Fokus der Welle bei  $z_0$

wobei die verschiedenen Größen durch folgende Beziehungen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \omega_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2} \\ R(z) &= z \left( 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right) \\ \zeta(z) &= \arctan \left( \frac{z}{z_0} \right) \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

Die ersten Hermite-Polynome sind:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \end{aligned}$$

Daran erkennt man, dass für die Grundmode ( $m = n = 0$ ) die Hermite-Gauß-Funktionen zu den Gauß-Feldern kollabieren.

Die Größe  $\zeta(z)$  in (2.4.39) wird Gouy-Phase (engl. *gouy-phase-shift*) genannt. Sie sorgt dafür, dass eine Gaußsche Welle in Bezug zur ebenen Welle einen extra Phasenterm akkumuliert, wenn sie durch den Fokus läuft. Louise-Gerges Gouy hat diesen Effekt im Jahr 1890 gemessen. Dabei hat er das Licht einer Punktequelle (z.B. Lochblende) mittels zweier Spiegel derart überlappt, dass ein Strahl kollimiert durch den Treffpunkt geht, der andere jedoch an diesem Punkt einen Fokus besitzt. Ein Schirm dient dazu, Interferenzringe zu visualisieren, und wenn der Schirm über den Fokuspunkt bewegt wird, ändert sich die Helligkeit in der Ringmitte von hell zu dunkel, was den zusätzlichen

Phasenterm beim Durchlaufen des Fokus bildlich macht.

Trotz der langen Zeit seit Gouy hat die Interpretation und Erklärung dieser Phase immer wieder das Interesse und damit neue Erklärungs-Ansätze geweckt. Eine kleine Auswahl ist in [27] gegeben: In [6] wurde vorgeschlagen, dass die Gouy-Phase eine Manifestation einer allgemeinen Berry-Phase sein könnte (weiter ausgeführt in [83]), oder nach [35] eine geometrische Erklärung des Phasenversatzes. In [27] wird ein intuitives Verfahren beschreiben, mit dem die Gouy-Phase natürlich aus der Betrachtung der Ausbreitung der Gaußschen Welle auftritt. Insbesondere liegt die Ursache für den Phasenterm in der räumlichen Begrenzung der Welle, wenn diese durch ihren Fokus läuft. Die Rechnungen zeigen außerdem, dass diese Betrachtung universal ist und sich ebenfalls der korrekte Phasenterm für Hermite-Gauß-Wellen auch höherer Ordnung berechnen lässt.

Der Ausgangspunkt ist die Überlegung, dass in einer Gauß-Welle durch die Krümmung  $R(z)$  schräglauende Komponenten des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  existieren. Da trotz des endlichen Ausbreitungswinkels im Unendlichen die Zahl der schrägen Komponenten nicht beschränkt ist, werden Mittelwerte oder Erwartungswerte für den Anteil  $k_z$  des Wellenvektors berechnet. Über das zweite Moment und den geometrischen Betrag  $|\mathbf{k}|^2 = k_z^2 + k_x^2 + k_y^2 = k^2$  wird eine Konstante  $\bar{k}_z$  definiert:

$$\bar{k}_z \equiv \frac{\langle k_z^2 \rangle}{k} = k - \frac{\langle k_x^2 \rangle}{k} - \frac{\langle k_y^2 \rangle}{k} \quad (2.4.40)$$

Die damit zusammenhängende Phase berechnet sich aus dem Integral dieser Größe:

$$\phi_G = kz - \frac{1}{k} \int_z \langle k_x^2 \rangle + \langle k_y^2 \rangle dz \quad (2.4.41)$$

wobei für den ersten Term die Integration schon ausgeführt wurde. Das Ergebnis ist bekannt und lautet in allgemeiner Form für Hermite-Gauß-Wellen:

$$\phi_G = - (m + n + 1) \arctan \frac{z}{z_G} \quad (2.4.42)$$

Die Gouy-Phase kann laut [62] genutzt werden, um die Modenkopplung in situ zu untersuchen und zu optimieren. Dabei demonstrieren sie eine Einkopplung des Lasers von ca. 98.7%. Dies wird bei den nächsten Generationen von Gravitationswellen-Detektoren wichtig werden. Die experimentellen Aufbauten in der vorliegenden Arbeit lassen aus Platz- und Kostengründen leider nicht zu, das genannte Verfahren zu nutzen.

#### 2.4.4. Laserstabilisierung mittels Phasenmodulation

Stabilisierung von Oszillatoren und Lasern ist das Herz im Feld der Metrologie. Verschiedene Verfahren wurden in der Vergangenheit entwickelt und verbessert. In dieser

Arbeit wird wie in vielen anderen Experimenten eine aktive Regelung zur Stabilisierung verwendet. Im speziellen wird das Verfahren nach Pound-Drever-Hall (PHD) verwendet, um die Laser auf der Resonanz des stabilen Resonators zu halten. Somit überträgt sich im besten Fall dessen Stabilität auf die Laserquelle.

In der Regelungstechnik werden für die verschiedenen Komponenten eines Regelkreises, wie es das hier beschriebene System aus Laser und Resonator ist, bestimmt Begriffe eingeführt:

- Der Laser stellt das zu regelnde System dar,
- der optische Resonator ist der Diskriminator oder Istwertgeber, der das Fehlersignal erzeugt,
- die Elektronik erzeugt aus dem Fehlersignal und dem Sollwert das Regel-Differenzsignal, sowie die Stellgröße, die auf das System, den Laser, einwirkt. Der Sollwert ist bei dem Pound-Drever-Hall-Verfahren der Nulldurchgang.

Mathematisch kann der Weg des Fehlers mit verschiedenen Transferfunktionen beschrieben werden:

$$\lambda \rightarrow D \left[ \text{nm} \rightarrow \frac{\text{V}}{\text{Hz}} \right] \rightarrow G [\text{V} \rightarrow \text{V}] \rightarrow K \left[ \text{V} \rightarrow \frac{\text{Hz}}{\text{V}} \right] \rightarrow \lambda \quad (2.4.43)$$

dabei bezeichnen die Buchstaben die Transferfunktionen der Komponenten: D des Diskriminators, G des Regeldifferenzsignals und K für den Aktuator (z.B. Laserstrom).

Wie bei jedem Regelsystem ist es erforderlich, entweder durch technische Dokumentation oder Vermessen der Komponenten die Transferfunktionen zu kennen. Wichtig dabei sind natürlich die frequenzabhängigen Pol- oder Resonanzstellen, an denen das System instabil werden kann. Häufig gibt es aus diesem Grund auch zwei Regelkreise, wenn ein Aktuator im Lasersystem eine niedrige 3-dB-Frequenz aufweist, z.B. ein Piezo. Diese Frequenz ergibt sich aus der Transferfunktion und ist die kleinste Frequenz, bei der das Verhältnis der aus- und eingehenden Leistungen gerade  $\frac{1}{2}$  ist, die eingehende Leistung bei dieser Frequenz also halbiert weitergegeben wird.

Abgesehen von den technischen Komponenten muss man sich vorher überlegen, was für ein Signal, z.B. optisches, der Diskriminator in eine verarbeitbare Spannung übertragen soll. Eine kleine Auswahl von Möglichkeiten in dem Anwendungsgebiet dieser Arbeit:

- Helligkeit/Leistung: Sie wird als Gleichstromanteil der Photodiode gemessen. Die Photodiode arbeitet der Diskriminator. Auch ein einfaches Spektroskopiesignal fällt darunter.
- Dual-Balanced Leistungsmessung: Hier werden die zwei zirkularen Polarisationszustände des Lichts genutzt, um eine Spektroskopie durchzuführen, und ein differentielles Signal erzeugt.

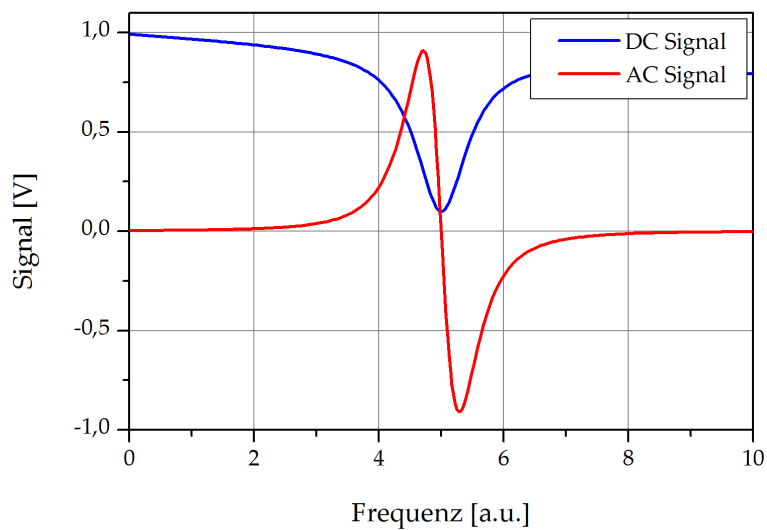


Abbildung 2.27.: Eine Abbildung eines Spektroskopiesignals. Überlagert ist ein in dieser Umgebung linearer Abfall der transmittierten Intensität. Als zweite Kurve ist die Ableitung dieser Funktion gezeigt.

- Ableitungen der Leistung: Über Lichtmodulationen erhält man analog elektrische Frequenzbeiträge, wenn der Photodetektor schnell arbeitet und diese auflösen kann. Durch Demodulation erhält man das elektronische Signal der mathematischen Ableitung des Signals. Dieses wird beim Pound-Drever-Hall-Verfahren verwendet.

Bei den oben genannten Punkten unterscheidet man zwischen Gleichstromsignalen, die eine geringe Bandbreite aufweisen, und Wechselstromsignalen, welche eine optische Schwebung ab einigen hundert Kilohertz messen. Werden letztere von einem Photodetektor gemessen, spricht man von „AC“- oder „schnellen“ Signalen. Kann man über ein geeignetes Verfahren zur Regelung „AC“-Signale verwenden, hat einige Vorteile gegenüber einer Verwendung der Detektion der Gleichstromsignale. In Abbildung 2.27 ist ein typischer Signalverlauf einer Spektroskopie gezeigt. Ein Lamb-Dip wird durch die dopplerfreie Sättigungsspektroskopie in den Intensitätsverlauf (blaue Kurve) gebrannt. Eine Möglichkeit der Stabilisierung würde nun sein, auf das Minimum zu regeln. Dies ist nicht so einfach möglich: So ist es aufgrund der Symmetrie des Spektroskopiesignals nicht klar ersichtlich, welche der beiden Flanke der Mulde zu einer Änderung des Messwerts führt.

Die zweite Kurve (rot) beseitigt dieses Problem. Sie entspricht der mathematischen Ableitung des Intensitätssignals und wird durch die verwendete Elektronik erzeugt. Hier ist das Vorzeichen des elektrischen Signals klar durch den Arbeitspunkt in positiv und negativ geteilt. Diese Information ermöglicht die Frequenz abhängig von diesem

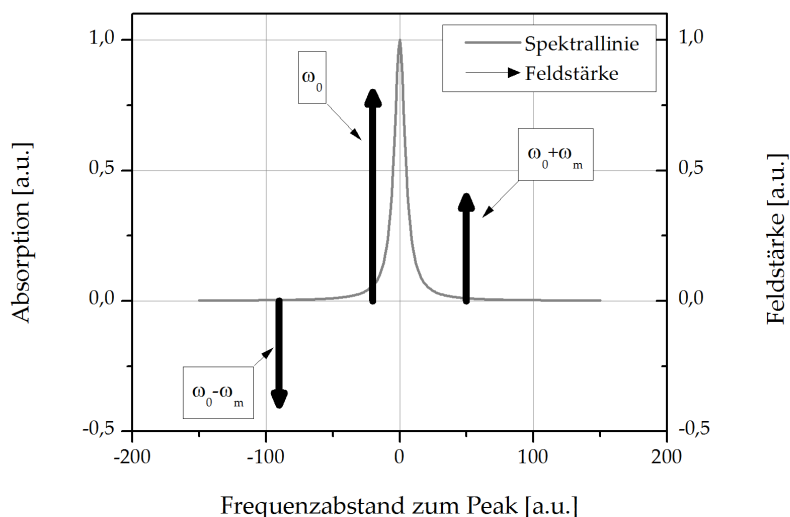


Abbildung 2.28.: Die Feldstärke des elektrischen Feldes ist mit schwarzen Pfeilen markiert. Um die Trägerwelle bei der Frequenz  $\omega_0$  sind die beiden Seitenbänder  $\pm\omega_m$  mit einem relativen Phasenunterschied von  $\pi$  zueinander angeordnet. Die Absorption einer Spektrallinie ist mit einer Linie gezeichnet.

Vorzeichen in die richtige Richtung zu regeln.

### Frequenz-Modulations-Spektroskopie

Die hier beschriebene Form der Modulations-Spektroskopie wurde 1980 von [8] erstmals eingesetzt, um Spektroskopiesignale von verschiedenen Stoffen genau zu vermessen. Dabei setzt sich diese Methode von vorhergehenden Studien der Modulations-Spektroskopie ab, indem gefordert wird, dass die Modulationsfrequenz groß gegenüber den Breiten der Spektrallinien sein soll. Damit wird sichergestellt, dass immer nur eines der beiden Seitenbänder mit der Spektrallinie interagiert.

Die Modulation des Lasers mittels eines Phasen- oder Amplitudenmodulators erzeugt anti-symmetrische Seitenbänder, d.h. frequenzverschobene Komponenten, die einen relativen Phasenunterschied von  $\pi$  ausweisen. Die Modulationstiefe wird derart gewählt, dass die Seitenbänder die halbe Amplitude der Trägerwelle besitzen und damit die höheren Ordnungen verschwindend klein sind und vernachlässigt werden. In Abbildung 2.28 ist dargestellt, dass dieses Trio eine Spektrallinie abtasten kann, wenn man die Trägerfrequenz entsprechend durchstimmt.

Zur Erklärung wird wieder die Definition (2.3.124) des reellen Signals in der Schreibweise mit der Exponentialfunktion herangezogen. Eine Phasenmodulation wurde mit

Gleichung (2.3.124) vorgestellt und mittels der Bessel-Funktionen (2.3.125) in einer Reihe entwickelt. Das Ergebnis der Näherungen auf die ersten Seitenbänder führt zu dem Ergebnis aus (2.3.129). Die instantane Phase  $\phi_{\pm 1}$  wird im Folgenden nicht beachtet und weggelassen.

Nun betrachtet man zusätzlich die Wechselwirkung des Lichts mit dem Probematerial. Dieses zeichnet sich durch eine lineare Absorption  $\delta = \delta(\omega)$  und eine Dispersionskurve  $\phi = \phi(\omega)$  aus. Diese Terme führen zu einer Abschwächung und einem weiteren Phasenterm:

$$E(t) = E_0(t)e^{-\delta_0} \pm \frac{1}{2}E_0 m e^{-\delta_{\pm 1}} e^{-i\phi_{\pm 1}(\omega)} e^{i((\omega_0 \pm \Omega)t)} + \overleftarrow{c.c.} \quad (2.4.44)$$

wobei hier  $\overleftarrow{c.c.}$  als Platzhalter für die Wiederholung *aller* voranstehenden Terme unter komplexer Konjugation steht. Der Photodetektor misst aufgrund seiner physikalischen Limitierung wieder das zeitlich gemittelte Betragsquadrat des Lichtfeldes (siehe Gleichung (2.3.3) und (2.3.5)). Die Berechnung ist in Anhang (A.3) Schritt für Schritt aufgeführt. Das Ergebnis lautet mit  $\Delta T = e^{-\delta_1} - e^{-\delta_2}$  und  $\Delta\phi = e^{-\delta_1}(\phi_1 - \phi_0) + e^{-\delta_2}(\phi_2 - \phi_0)$ :

$$I(t) = \frac{1}{4}E_0^2 \cdot \left[ 2e^{-2\delta_0} + 4me^{-\delta_0} \cos(\Omega t)\Delta T + 4me^{-\delta_0} \sin(\Omega t)\Delta\phi \right] \quad (2.4.45)$$

Das elektrische Signal des Photodetektors ist proportional zur gemessenen Intensität:

$$U_{PD}(t) \propto I(t)$$

Dieses Signal ist moduliert mit der Modulationsfrequenz  $\Omega$ . Um das Fehlersignal zu extrahieren, wird es in einem Mischer mit eben dieser Frequenz überlagert. Dabei bleibt ein beliebig wählbarer Phasenterm als Parameter offen. Der physikalische Prozess wird mathematisch durch eine Multiplikation dargestellt:

$$U(t) = U_{PD} \cdot U_{VCO}$$

dabei ist

$$U_{VCO} = \cos(\Omega t + \varphi)$$

Das zeitabhängige Signal hat Anteile bei der Modulationsfrequenz sowie der zweifachen Modulationsfrequenz. Von Interesse ist allerdings der Gleichspannungsanteil. Das wird durch einen Tiefpass mit geringer Grenzfrequenz erreicht. Die frequenzabhängigen Terme verschwinden demnach und es bleibt:

$$U = 2me^{-\delta_0}\Delta T \cos \varphi - 2me^{-\delta_0}\Delta\phi \sin \varphi \quad (2.4.46)$$

Dabei ist zu beachten, dass  $\delta_i = \delta_i(\omega)$  und  $\phi_i = \phi_i(\omega)$  ist, die Absorption und die Dispersion also frequenzabhängig ist. (Die Rechnung dazu ist ebenfalls im Anhang A.3 ausgeführt.)

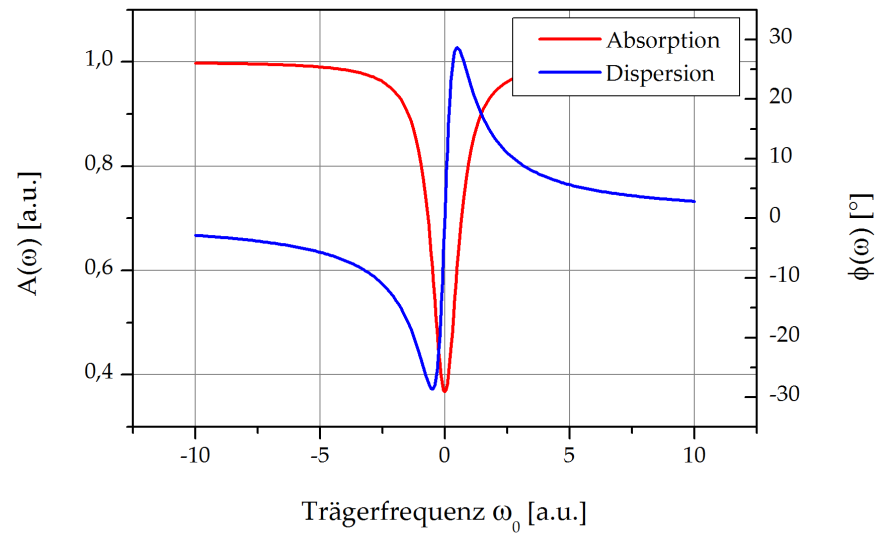


Abbildung 2.29.: Absorption (rot) und Dispersion (blau) einer Frequenz-Modulations-Spektroskopie. Wenn die Laserfrequenz resonant ist, wird ein signifikanter Anteil absorbiert. An dieser Stelle besitzt die Dispersion einen Nulldurchgang.

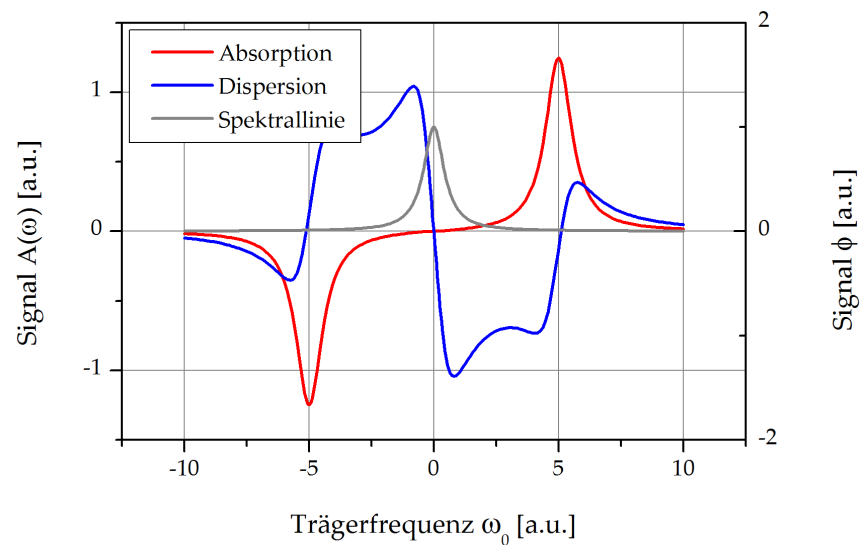


Abbildung 2.30.: Die Signale der Abtastung einer Spektrallinie mit einer Frequenz-Modulations-Spektroskopie. Die Spektrallinie ist in grau gezeichnet.



Durch den freien Parameter  $\varphi$  in der obigen Gleichung ist es möglich, einen der beiden Summanden zu unterdrücken: So misst man entweder nur die Absorption  $\Delta T$  bei  $\varphi = 0$ , oder nur die Dispersion  $\Delta\phi$  bei  $\varphi = \pi/2$ . Technisch wird dies realisiert, indem man die Frequenzgeneratoren für den Modulator und den Mischer koppelt und somit die Phasenbeziehung einstellen kann.

Nach Gleichung (2.12) in der Diplomarbeit [80] sind die Absorption und die Dispersion für ein Zwei-Niveau-System gegeben als:

$$A = e^{-\delta} = \exp\left(-\delta_{\max} \frac{1}{\left(\frac{2(\omega-\omega_0)}{\Gamma}\right)^2 + 1}\right) \quad \phi = \delta_{\max} \frac{\frac{2(\omega-\omega_0)}{\Gamma}}{\left(\frac{2(\omega-\omega_0)}{\Gamma}\right)^2 + 1}$$

Mit diesen Relationen kann man das Absorptions- und Dispersionssignal einer Spektrallinie zeichnen, siehe Abbildung 2.29. Man erkennt, dass das Dispersionssignal eine steile Flanke mit Vorzeichenwechsel genau bei der Frequenz der Spektrallinie aufweist. Diese taucht ebenfalls im Signal des Photodetektors auf, siehe Abbildung 2.30. Damit ist dieses Signal geeignet in einem elektronischen Regelkreis als Maß für eine Frequenzabweichung zu funktionieren. Daher nennt man es auch das Fehlersignal.

### Pound-Drever-Hall-Verfahren

Das folgende Kapitel orientiert sich stark an den folgenden Quellen: [9], [20], [54] und [76].

Auch das Pound-Drever-Hall-Verfahren wird genutzt, um ein Fehlersignal für eine Stabilisierung eines Lasers zu generieren. Analog zum vorangegangenen Kapitel der Frequenz-Modulations-Spektroskopie nutzt man die Dispersionsrelation des Fabry-Perot-Resonators, welche mit einem Seitenband-modulierten Probelaser abgefahren wird. Das dabei entstehende Fehlersignal kann dann zur Stabilisierung genutzt werden.

Zunächst müssen aber die Absorptions- und Dispersionsrelation berechnet werden. Dafür wird in den folgenden Absätzen das elektrische Signal des Detektors ausgerechnet. Der Detektor misst die Intensität des reflektierten Feldes. Dieses ist aber selbst eine Überlagerung zweier Felder:

- Das einfallende Feld, reflektiert an der Außenseite des ersten Spiegels des Fabry-Perot-Resonators. Es wird „prompt“ reflektiert, ohne jemals im Inneren des Resonators gewesen zu sein, und wird im Englischen als das *promptly reflected* Feld genannt.
- Das „leckende“ Feld (engl. *leakage field*), welches durch die von eins verschiedene Reflektivität der Spiegel aus dem Resonator an beiden Spiegeln austritt. Dieses Licht hat einige Zeit im Resonator (die Abklingzeit) zirkuliert und daher unter Umständen eine ältere Phase als das prompte Feld.

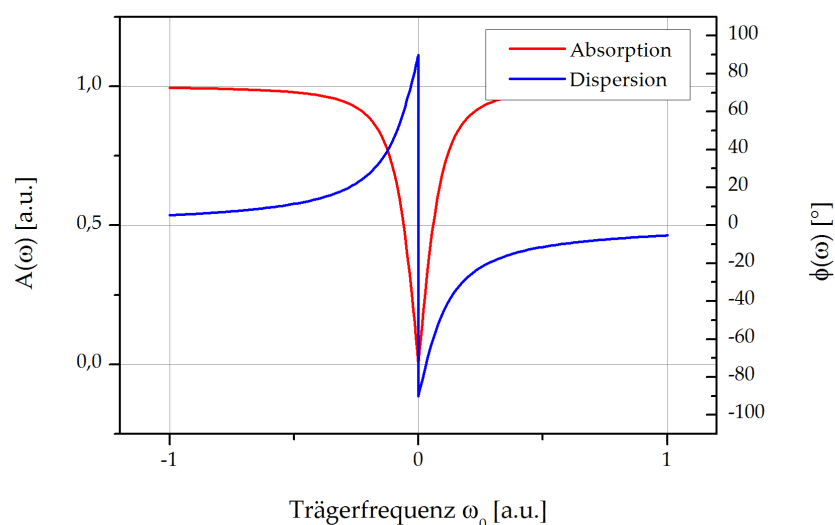


Abbildung 2.31.: Das Absorptionssignal (rot) des Detektors zeigt, dass auf der Resonanz des Fabry-Perot-Resonators kein Licht mehr reflektiert wird. Das Dispersionssignal (blau) der reflektierten Welle. Nach dem Abscannen der Resonanz hat das reflektierte Licht eine Phasenverschiebung von  $180^\circ$  erfahren. Zu beachten ist, dass man bei der Resonanz auf einen anderen Ast des arctan wechselt.

Für ein monochromatisches Feld ist das reflektierte Feld in (2.4.11) gegeben, und die Transferfunktion in (2.4.12). Für ein solches Feld kann o.B.d.A. die lokale Phase in (2.4.2) gleich null gesetzt werden. Im idealisierten Fall sind die Reflektivitäten der Spiegel ebenfalls gleich und damit  $\sqrt{R_1} = \sqrt{R_2} = r$ . Die Transferfunktion lautet damit:

$$H_{\text{RE}}(k) = \frac{E_R}{E_0} = \frac{r \left(1 - e^{t \frac{\omega}{\Delta\nu}}\right)}{1 - r^2 e^{t \frac{\omega}{\Delta\nu}}} \quad (2.4.47)$$

Aus dieser Funktion kann die Absorptions- und die Dispersionsrelation abgeleitet werden:

- Die Absorption  $e^{-\delta}$  ist durch den Betrag der Transferfunktion gegeben:

$$A = e^{-\delta} = \sqrt{|H_{\text{RE}}(k)|^2} = \sqrt{\frac{2r^2 - 2r^2 \cos \frac{\omega}{\Delta\nu}}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \frac{\omega}{\Delta\nu}}} \quad (2.4.48)$$

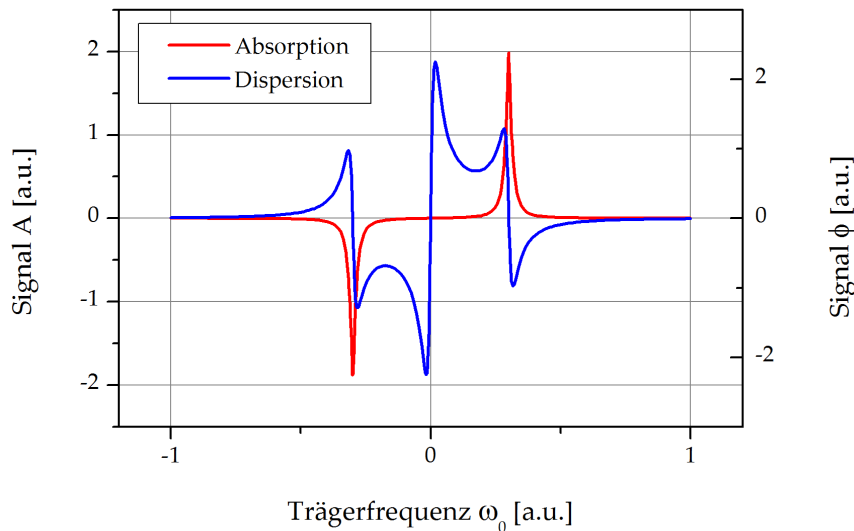


Abbildung 2.32.: Die Signale der Abtastung der Resonanz des Fabry-Perot-Resonators. Man sieht das Signal des Absorptionsterms  $\Delta T$  (rot) sowie des Dispersionssterms (blau). Die Parameter für den Plot sind  $r = 0.99$  und  $\Omega = 0.3\Delta\nu$ .

- Die Dispersion ist durch das Argument der Transferfunktion gegeben:<sup>23</sup>

$$\phi = \arg H_{\text{RE}}(k) = \arctan \frac{-(1-r^2) \sin \frac{\omega}{\Delta\nu}}{(1+r^2)(1-\cos \frac{\omega}{\Delta\nu})} \quad (2.4.49)$$

In Abbildung 2.31 sind die Plots der beiden Funktionen für einen Resonator mit generischen Werten gezeigt.

Für die Ableitung des Fehlersignals wird das Laserlicht phasenmoduliert, wie es in Kapitel über die Frequenz-Modulations-Spektroskopie vorgemacht wurde. In den verwendeten Formeln wurden die Absorptions- und Dispersionsrelation bis zuletzt nicht ausgeschrieben, so dass diese Formeln (2.4.45) für das Pound-Drever-Hall-Verfahren direkt übernommen werden können. Mit den neuen Relationen kann das Fehlersignal ebenfalls geplottet werden und ist in Abbildung 2.32 in der Farbe blau für den Fall gezeigt, dass aus Formel (2.4.46) nur der Term mit  $\Delta\phi$  übrig bleibt, und in rot für den Term mit  $\Delta T$ .<sup>24</sup>

<sup>23</sup>Hinweise für die Rechnung: Mit  $\arg z = \arctan \frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}$  erweitert man den Bruch der Transferfunktion mit dem komplex konjugierten Nenner und kann somit leicht den Real- und Imaginärteil ablesen.

<sup>24</sup>Man verwendet:

$$\Delta\phi = e^{-\delta_0} (e^{-\delta_1} (\phi_1 - \phi_0) + e^{-\delta_2} (\phi_2 - \phi_0))$$

und setzt entsprechend ein.

In der Literatur wird häufig die Rechnung aus dem vorangehenden Kapitel mit der Transferfunktion  $F(\omega)$  durchgeführt und das Ergebnis präsentiert. Man sieht leicht, dass die Darstellung der Funktion  $F$  in einen Absorptions- und Dispersions-  
 teil  $F(\omega) = e^{-\delta(\omega)} e^{-i\phi(\omega)}$  zu gleichen Ergebnissen führt. Das Fehlersignal wird nach [9] im Wesentlichen durch den Imaginärteil der Terme  $F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega)$  bestimmt. Mit der neuen Darstellung folgt sofort die bekannte Relation, da der Imaginärteil nichts anderes als  $e^{-\delta_0}(e^{-\delta_1}(\phi_1 - \phi_0) + e^{-\delta_2}(\phi_2 - \phi_0))$  ist. Dieser Ausdruck wurde in Anhang (A.3.4) als  $\Delta\phi$  definiert und bestimmt im Wesentlichen die Form des Fehlersignals. Beide Ansätze sind also äquivalent.

Es kann die Steigung der mittleren Flanke in Abbildung 2.32 berechnet werden, wenn die Seitenbandmodulation so groß ist, dass man setzen darf:

$$e^{i\delta_{1,2}} \approx 1, \quad \text{und} \quad \Phi_{1,2} \approx 0.$$

Von dem ursprünglichen  $\Delta\phi$  bleibt dann effektiv nur folgendes übrig:

$$\Delta\phi \approx -2 e^{-\delta_0} \phi_0 \quad (2.4.50)$$

Für kleine Abweichungen von der Resonanz ist es möglich die Arkustangensfunktion der Dispersion durch ihr Argument zu nähern, ebenso den darin enthaltenen Sinus mit seinem Argument und den Kosinus durch  $\approx 1$ . Damit wird mit  $C = \frac{-(1-r^2)}{(1+r^2)} \approx 0 \gg 1$ :

$$\begin{aligned} \phi_0 &\approx C \cdot \frac{\omega}{\Delta_{\text{FSR}}} \Big|_{\omega < \epsilon} \\ &\propto \frac{\omega}{\Delta_{\text{FSR}}} \Big|_{\omega < \epsilon} \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

Die Steigung der Flanke ist demnach proportional zur Frequenzabweichung von der Resonanz und invers proportional zum freien Spektralbereich  $\Delta_{\text{FSR}}$ , eingeführt in Gleichung (2.4.19). Die Standardliteratur führt den Proportionalitätsfaktor  $D$  ein, der das Fehlersignal  $\epsilon$  – hier durch die Näherungen durch  $\phi_0$  gegeben – mit der Frequenzabweichung  $\delta f$  verknüpft. Hierbei ist  $\delta f$  eine Frequenz, welche in einer Epsilon-Umgebung um  $\omega_0/2\pi$  liegt:

$$\epsilon = D\delta f \quad (2.4.52)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $D$  wird auch als Frequenzdiskriminante bezeichnet und ist mit den Bessel-Funktionen  $J_i$  und die Halbwertsbreite  $\Delta_{1/2}$  wie folgt definiert:

$$D = 8 \frac{J_0(\beta) J_1(\beta) I_0}{\Delta_{1/2}} \quad (2.4.53)$$

### 2.4.5. Erreichbare Grenzen

Das Ziel der Laserstabilisierung, welches im vorangegangenen Abschnitt mit dem Pound-Drever-Hall-Verfahren vorgestellt wurde, ist die Stabilität und die Genauigkeit eines Lasers zu verbessern. Jedes der beiden Ziele wird unabhängig voneinander adressiert und durch unterschiedliche Lösungen erreicht.

Analysiert man die Folgen der Pound-Drever-Hall-Stabilisierung im Hinblick auf die beiden zu erreichenden Ziele, kommt man zu folgenden Schlussfolgerungen:

- **Stabilität:** Die erreichbare Stabilität hängt von vielen Faktoren in einem typischen PDH-Aufbau ab. Zuerst ist es nach (2.4.51) offensichtlich, dass der Proportionalitätsfaktor  $C$  (oder  $D$ ) eine große Rolle spielt, da das Fehlersignal das direkte Feedback Signal zur Stabilisierung darstellt. Je größer der Proportionalitätsfaktor, umso stärker werden Abweichungen vom Arbeitspunkt gewichtet und erlauben einer entsprechenden Regelelektronik die Abweichungen schneller zu korrigieren. Eine steilere Flanke geht dabei einher mit einer höheren Finesse des Resonators.

In dem Proportionalitätsfaktor wurde der freie Spektralbereich  $\Delta\nu$  absorbiert, der direkt mit dem Spiegelabstand  $d$  zusammenhängt (2.4.5). Dies führt dazu, dass Frequenzrauschen und Längenrauschen nicht unterscheidbar werden. Jeder Einfluss, der den Spiegelabstand  $d$  beeinflusst, wirkt damit direkt auf das Fehlersignal. Es gibt leider viele Einflüsse, die sich nicht immer abschirmen lassen. Ein prominentes Beispiel sind externe Vibrationen, die sich durch die Lagerung des Abstandshalters auf den Spiegelabstand übertragen. Diese versucht man durch Federungen und geschickte Lagerung so gut wie möglich zu unterdrücken.

Weiterhin spielt die elektronische Natur der Regelaktivität eine Rolle, da in jeder Schaltung Leckströme auftreten, die zu einem Rauschen während der Verarbeitung des Fehlersignals führen, welches auch das Regelsignal betrifft.

- **Genauigkeit:** Im Gegensatz zur Stabilität ist die Genauigkeit sehr von einer relativen Sichtweise abhängig. So ist es möglich, mit der Frequenz-Modulations-Spektroskopie sehr gut eine absolute Genauigkeit zu erreichen, da diese den Laser an einen atomaren Übergang bindet. Mit dem Pound-Drever-Hall-Verfahren wird der Laser allerdings auf eine veränderliche Referenz stabilisiert, die im Wesentlichen von dem Abstand der beiden Spiegel abhängt. Für den Abstandhalter werden spezielle Werkstoffe eingesetzt, die für diese Anwendung günstige thermische und mechanische Eigenschaften besitzen. Im Normalfall wird es trotzdem zu Effekten kommen, die die Resonanzfrequenz des Resonators verschieben werden. Diese Drift stammt hauptsächlich von thermischen Veränderungen und variiert mit der Abschirmung von der Außenwelt. Aber auch Spannungen in dem Material des Abstandshalters können sich mit der Zeit lösen und so zu spontanen Änderungen der Resonanzfrequenz führen.

Man muss bei der Anwendung eines Lasers, der auf einen optischen Resonator

stabilisiert wird, darauf achten, dass sich dessen Genauigkeit mit der Zeit ändern wird, auch wenn eine hohe Stabilität erreicht wird. Absolute Genauigkeit lässt sich nur über atomare Resonanzen erreichen.

### Grenzen der Pound-Drever-Hall-Stabilisierung

Um die Grenzen der Stabilität einer Pound-Drever-Hall-Stabilisierung mathematisch auszuloten, muss in Gleichung (2.4.52) noch abgebildet werden, dass der Spiegelabstand  $d$  ebenfalls anfällig für Änderungen ist:  $d = d + \frac{\delta d}{d}$ . Ausgehend von (2.4.51) wird noch der freie Spektralbereich durch (2.4.5) ersetzt, um den Spiegelabstand in das Fehlersignal einzubauen. Mit der obigen Definition eines schwankenden Abstands kann man damit schreiben:

$$\epsilon = 2\pi C \frac{2d}{\lambda} \left( \frac{\Delta f}{f} + \frac{\Delta d}{d} \right) \quad (2.4.54)$$

Daraus wird abgeleitet, dass das Fehlersignal zu gleichen Teilen auf Frequenz- und Längenänderungen des Resonators reagiert.

Überlegungen zu den limitierenden Faktoren der Stabilisierung schließen einige Einflüsse sehr schnell aus. Da auf (oder in unmittelbarer Nähe) der Resonanzfrequenz die reflektierte Leistung (fast) auf null abfällt, können alle Effekte, welche direkt mit dem reflektierten Träger zusammenhängen, in erster Ordnung vernachlässigt werden. In diesem Fall treffen nur noch die reflektierten Seitenbänder auf den Photodetektor.

# 3

## Experimentaufbau

### 3.1. Der Kugel-Resonator

Der in dieser Arbeit verwendete optische Resonator ist aus einem kugelförmigen Abstandshalter („spherical spacer“) und zwei Spiegeln aus Quarzglas („fused silica“) aufgebaut. Die technischen Daten sind in Tabelle (3.1) aufgeführt. Hergestellt wurde der Resonator von der Firma ATFilms (Advanced Thin Films). Die erste Publikation zu diesem Resonator wurde 2011 vom NIST<sup>1</sup> veröffentlicht [46].

Die Idee eine Kugel als Abstandshalter zu nutzen, ist besonders attraktiv. Der zugrundeliegende Gedankengang ist in Abbildung 3.1 illustriert. Dazu drückt man an zwei gegenüberliegenden Stellen auf den kugelförmigen Abstandshalter. Sind die Druckpunkte gerade entlang der optischen Achse, wird man diese durch den Druck quetschen ( $\Delta L/L < 0$ ). Wenn man die Druckpunkte nun entlang eines Großkreises auf der Kugel verschiebt, wird die Quetschung abnehmen, oder anders gesprochen die Dehnung zunehmen, bis die Dehnung nach einer Drehung um  $90^\circ$  ihren maximalen Wert erreicht ( $\Delta L/L > 0$ ). An einem Punkt dazwischen ist die Dehnung unter Druckeinwirkung gerade null ( $\Delta L/L = 0$ ).

Was bedeutet dieser „magische Winkel“? Idealerweise kann man an diesen Druckpunkten eine Kraft anbringen, ohne dass die optische Achse deformiert wird. Der Betrag der Kraft ist dabei offen. Das bedeutet, eine symmetrische äußere Krafteinwirkung hat keinen Einfluss auf die Länge der optischen Achse, und damit auf die Resonanzwellenlänge. In [46] sind einige erste Ergebnisse numerischer Rechnung zu dem Winkel der Aufhängung veröffentlicht.

---

<sup>1</sup>National Institute of Standards and Time

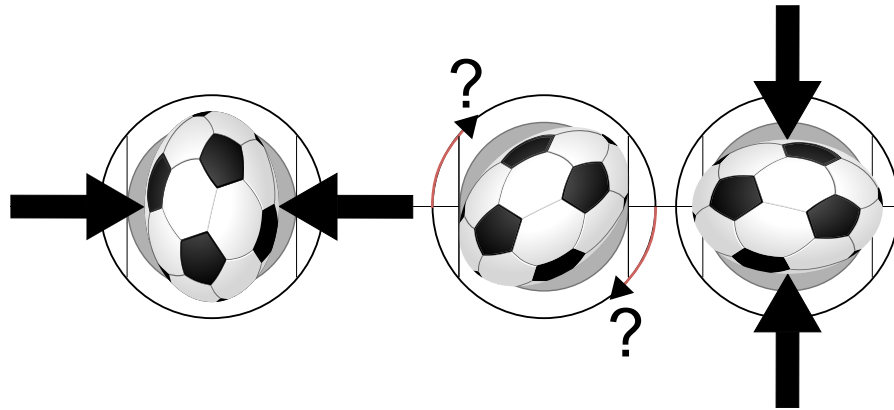


Abbildung 3.1.: Linkes Bild: Symmetrischer Druck auf den Fußball in der Horizontalen quetscht diese Achse und streckt den Ball senkrecht dazu. Rechtes Bild: Analog stellt sich die Situation dar, wenn die Kräfte um  $90^\circ$  gedreht werden. Dazwischen liegt ein Winkel, in dem die Horizontale keine Längenänderung erfährt.

Da der Abstandshalter irgendwo befestigt werden muss, wird im Folgenden dessen Kugelform für die Lagerung recycelt: Mittels zwei Ringen aus Aluminium wird der Abstandshalter von acht Gewindestangen gehalten, an deren Ende eine Viton-Kugel ( $R = 3 \text{ mm}$ ) zum Schutz vor Kratzern und zur Vibrationsdämpfung sitzt. Außerdem besitzt das Material der Kugeln eine Wärmeleitfähigkeit, die um den Faktor Tausend kleiner ist als von Aluminium. Die Eigenschaften der Lagerung werden im nächsten Kapitel besprochen. Da die endgültige Befestigung an dem Boden der Vakuumkammer über plane Flächen erfolgt, werden die Halteringe an einem U-förmigen Halter aus Aluminium<sup>2</sup> aufgehängt. Durchaus denkbar wäre auch ein massives Bauteil für den Übergang plan zu sphärisch, indem aus einem Block ein entsprechendes Kugelstück ausgefräst wird und Gewindelöcher für die Stempel vorgesehen werden. Sollte man einen solchen Block z.B. aus Kupfer derart formen, dass mit einem Gegenstück der Abstandshalter komplett eingeschlossen ist, würde der Abstandshalter eine isotrope Hohlraumstrahlung sehen und homogen auf Temperaturschwankungen reagieren.

### 3.1.1. Numerische Berechnung des „magischen Winkels“

In der Veröffentlichung [46] wurde der gleiche Abstandshalter verwendet. Dieser wurde dabei an zwei gegenüberliegenden Punkten gehalten, die einfachste Methode der Lagerung, die Idee des „magischen Winkels“ aus Abbildung 3.1 zu realisieren und zu überprüfen. Insofern bestand der Ansatz, als ersten Schritt diese Modellierung nachzuvollziehen und das Ergebnis zu bestätigen. Daher wurde die Geometrie in Au-

<sup>2</sup>Aufgrund der besseren thermischen Eigenschaften war ein U-förmiger Halter aus MACOR® vorgesehen, konnte jedoch aus Kostengründen nicht realisiert werden.



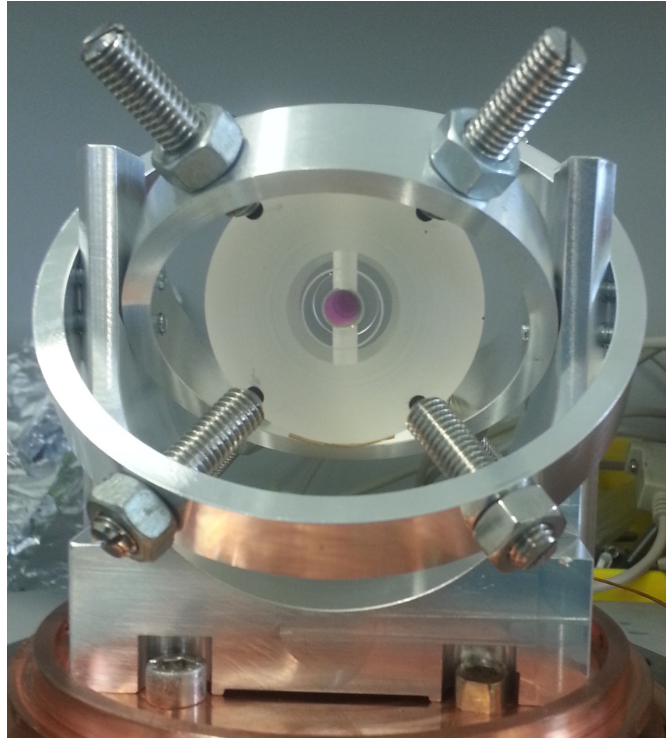


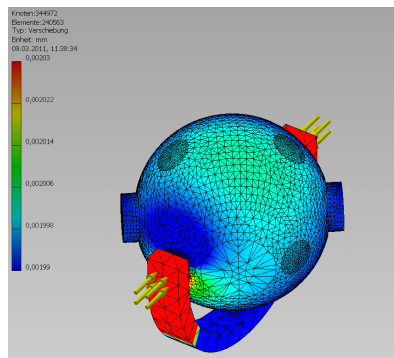
Abbildung 3.2.: Der Kugel-Resonator eingebaut in der Fallturm-Halterung. Zu erkennen ist die Färbung (lila) der optischen Achse, welche durch die Antireflex-Beschichtung der Spiegel entsteht. Außerdem ist die vertikale Bohrung gut sichtbar. Die glatt polierten Flächen sind durchsichtig, man erkennt dabei den Rand der etwas kleineren Spiegel. Gehalten wird der Abstandhalter von acht M8 Gewindestangen, deren Ende wie ein Kegel geschliffen ist und in deren Spitze eine 3mm Viton-Kugel als Dämpfer sitzt.

Material Abstandshalter	(premium grade) ULE (ATF-6301)
Material Spiegel	Quarzglas (Fused silica)
Finesse (Design)	$\mathcal{F} = 400\,000$
Halbwertsbreite FWHM (Design)	$\Delta_{1/2} = 8\text{ kHz}$
Länge optische Achse	$L = 48,5\text{ mm}$
Form Abstandshalter	Kugel $R = 25,4\text{ mm}$
Durchmesser Spiegel	12,5 mm
Reflektivität @1550 nm	99,9992 %
Reflektivität @1560 nm	99,9991 % (target design)
Radii 1./2. Spiegel	$\infty/500\text{ mm}$

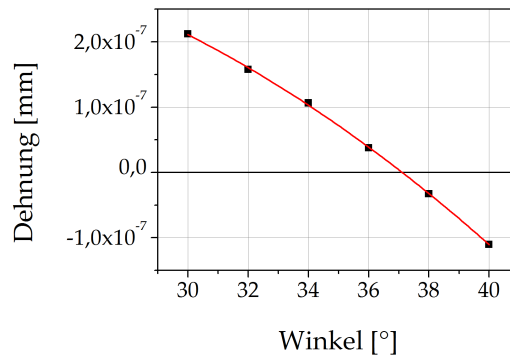
Tabelle 3.1.: Technische Daten des Kugel-Resonators.

todesk Inventor als 3D Modell gezeichnet und mit dem integrierten „Finite Elemente Modeller“ einem Druck bei verschiedenen Winkeln ausgesetzt. Das 3D Modell ist in Abbildung 3.3a zu sehen. Insgesamt wurde die numerische Rechnung für sechs Winkel ausgeführt, und die jeweilige Verformung der optischen Achse simuliert. Die Deformation an diesen Punkten ist in Abbildung 3.3b gezeigt. Durch eine nichtlineare Anpassung der Datenpunkte kann eine Fitfunktion bestimmt werden, bei deren Null-durchgang keine Deformation der optischen Achse zu erwarten ist. Der zugehörige Winkel beträgt  $37,1^\circ$  zum Pol oder entsprechend  $52,9^\circ$  zur optischen Achse.

Bei dem Design einer Halterung des optischen Resonators für den Fallturmbetrieb ist ein weiterer Punkt zu beachten. Dazu muss man sich vor Augen halten, dass – bis vor kurzem wie der oben gezeigte Aufbau – die besten Resonatoren für den Laborbetrieb durch ihr Eigengewicht auf speziell ihrer Geometrie angepassten Haltern schlicht aufliegen. Im Fallturmbetrieb wirken durch das Fallen-Lassen und das Abbremsen im Auffangbehälter hohe Kräfte in verschiedene Richtungen. Diese Anforderung bestimmt, dass es nicht ausreicht, den Abstandshalter an seinen Punkten der kleinsten Sensitivität auf Vibrationen und kinematisch stabil zu lagern, sondern im Besonderen fest und eingespannt. Sollte man die Haltevorrichtung mit dem Abstandshalter gedanklich frei in allen Raumrichtungen schütteln können, ohne dass der Abstandshalter herausfällt, kann die Vorrichtung im Fallturmbetrieb getestet werden. Aus den numerischen FEM Simulationen sind die Punkte der kleinsten Sensitivität durch den „magischen Winkel“ bestimmt. Die gezeigte Variante mit zwei Druckpunkten bestimmt allerdings die translatorischen Freiheitsgrade nicht vollständig, so dass durch die Zylindersymmetrie um die optische Achse (oder zumindest eine Spiegelsymmetrie an einer Ebene, in welcher die optische Achse liegt), es nahe liegt, acht Druckpunkte durch Stempel



(a) Das 3D Modell des Abstandshalter mit Spiegeln in einem U-Halter, an dessen Enden Druckpunkte in einer FEM Simulation berechnet werden.



(b) Ergebnisse der Deformation der optischen Achse entlang der z-Richtung bei verschiedenen Winkeln des U-Halters. Der magische Winkel ist nach dem Fit 37,1°.

Abbildung 3.3.: Erste FEM Simulationen mit Autodesk Inventor zum „magischen Winkel“.

auf den Abstandshalter aufzuprägen. Die Stempel werden aufgrund der sphärischen Symmetrie des Abstandshalters in zwei Halteringe montiert. Der endgültige Aufbau ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Nachfolgend wird untersucht, ob die Erweiterung auf mehrere Haltepunkte ebenfalls den „magischen Winkel“ bestätigen kann.

Der „magische Winkel“ wird oft doppeldeutig verwendet. In Abbildung 3.4 ist der Komplementärwinkel zu 90° eingezeichnet: 52,9°, sowie die Winkalebene in Farbe angedeutet.

Für die 3D Modellierung sind zwei andere Winkel ( $\alpha$  und  $\beta$ ) anzugeben, welche in bestimmten Kombinationen dazu führen, dass der Stempel genau den eingezeichneten „magische Winkel“  $\gamma$  einnimmt. Den Zusammenhang leitet man einfach mittels Drehmatrizen her. Das Koordinatensystem ist in Abbildung 3.6 gegeben, die optische Achse soll auf der Y-Achse liegen und der Mittelpunkt des Abstandshalters mit dem Ursprung zusammenfallen. Um den Abstandshalter endgültig zu fixieren soll die Entlüftungsbohrung (senkrecht auf der optischen Achse) auf der Z-Achse liegen. Ziel der folgenden Rechnung ist es, aus zwei gegebenen Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  den Winkel  $\gamma$  zu berechnen, den ein Einheitsvektor nach den beiden Drehungen mit der Y-Achse einschließt. Wenn dieser Winkel den Wert des „magische Winkels“ annimmt, dann hat man bei symmetrischer Anordnung den druckinsensitiven Punkt erreicht.

Um die Vektordarstellung des blauen Vektors aus den Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$  zu berechnen, folgt man diesem Algorithmus:

- Als erstes benötigt man einen Hilfsvektor, den man aus der Drehung  $R_x(\alpha)$  des Einheitsvektors der Z-Achse  $\hat{z}$  um die X-Achse mit dem Winkel  $\alpha$  erhält.
- Dann dreht man  $R_{z'}(\beta')$  den Einheitsvektor der X-Achse  $\hat{x}$  um den Hilfsvektor

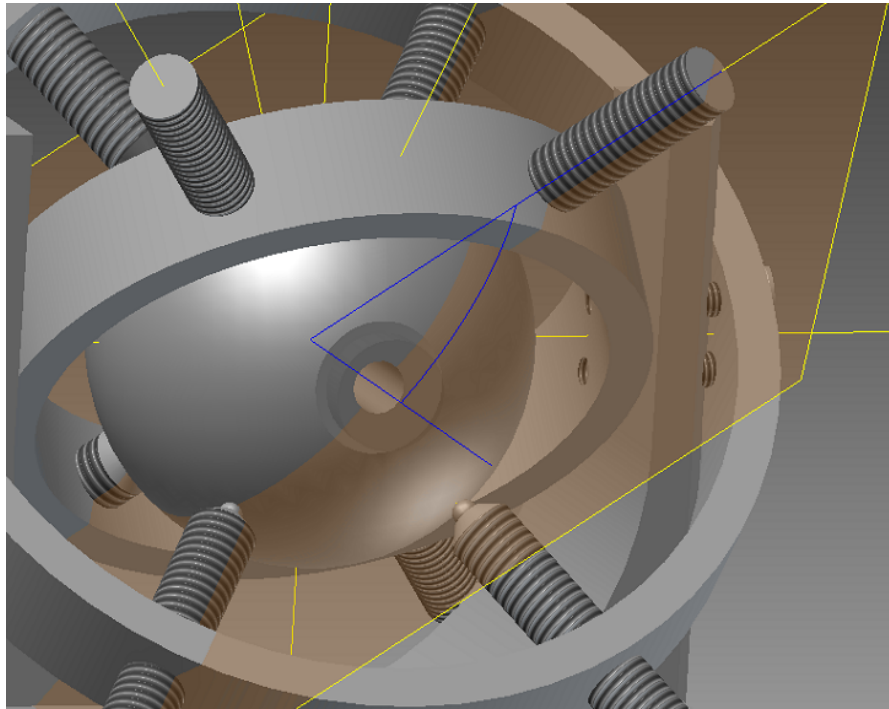
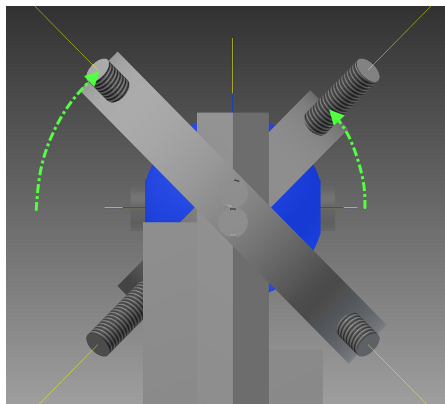
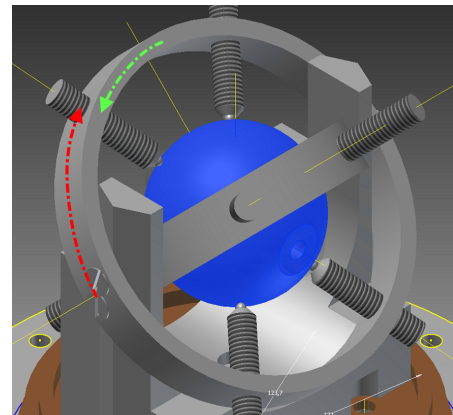


Abbildung 3.4.: Komplementärwinkel des „magische Winkel“ zu  $90^\circ$  für einen der acht Stempel.



(a) Die Halteringe werden unter dem Winkel  $\alpha = 45^\circ$  (grün) zur optischen Achse (Horizontale) angebracht.



(b) Der zweite Winkel  $\beta$  (grün) bestimmt, wo auf dem Haltering die Bohrung für den Stempel angebracht wird. Durch die sphärische Form steht der Stempel für jeden Winkel senkrecht auf dem Abstandshalter. Oft wird auch der Komplementärwinkel (rot) verwendet.

Abbildung 3.5.: CAD 3D Winkel als Parameter.

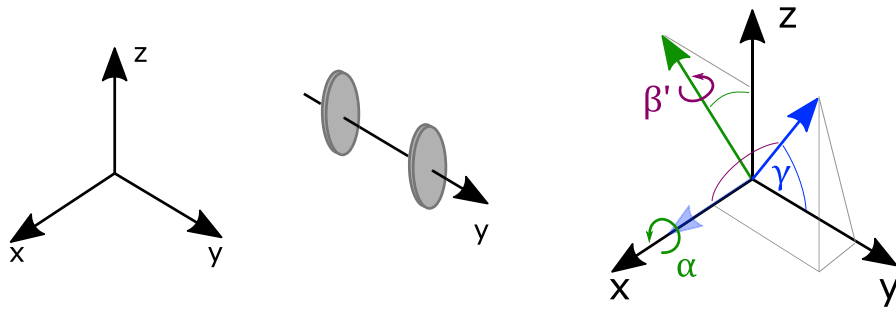


Abbildung 3.6.: Koordinatensystem, optische Achse und Winkel mit Drehungen für die Berechnung des „magischen Winkels“ aus den CAD Winkeln  $\alpha$  und  $\beta$ .

mit dem Winkel  $\beta'$ .<sup>3</sup>

- Der gesuchte Winkel ist dann über das Skalarprodukt zweier Vektoren einfach zu finden.

Mathematisch ist die Formel dann:

$$x' = R_{z'}(\beta'; \alpha) \cdot \hat{x} \quad (3.1.1)$$

Die Drehmatrizen lauten:

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$R_{z'}(\beta; \alpha) = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin^2 \alpha (1 - \cos \beta) + \cos \beta & -\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \beta) \\ \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \beta) & \cos^2 \alpha (1 - \cos \beta) + \cos \beta \end{pmatrix}$$

Die Vektordarstellung des Vektors  $x'$  ist dann:

$$x' = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \end{pmatrix}$$

<sup>3</sup>Historisch ist der Winkel  $\beta$  im 3D Modell genau als  $90^\circ - \beta'$  definiert.

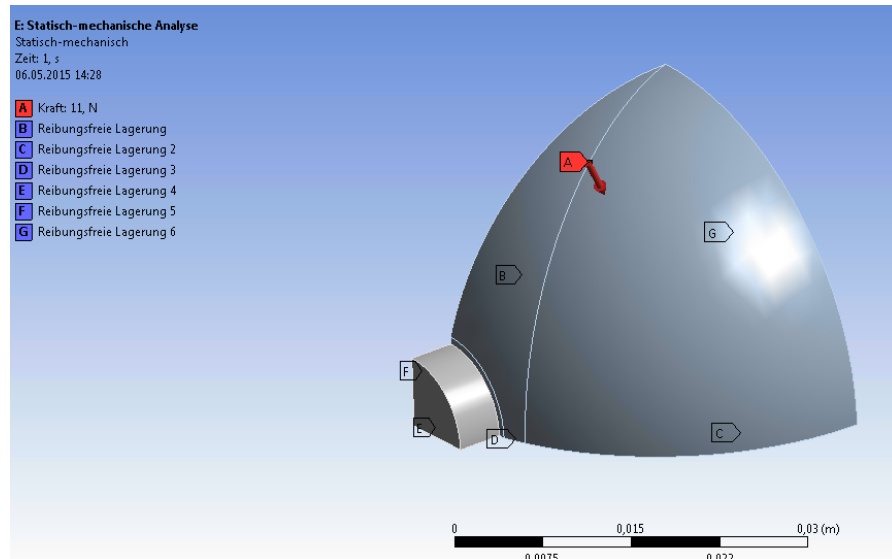


Abbildung 3.7.: Einfacher Teilkörper des Abstandshalters für die Berechnung eines Parametersatzes der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ . Die rote Markierung (A) entspricht dem Zielvektor und ist damit auch Angriffspunkt der Kraft für die FEM Simulation.

Das Skalarprodukt liefert den gesuchten Winkel  $\gamma$  (die Länge aller Vektoren ist eins.):

$$\cos \gamma = \langle x', y \rangle = \cos \alpha \sin \beta \quad (3.1.2)$$

Damit ist es möglich, einen Parametersatz im 3D Modell auf die Deformation der optischen Achse zu testen. Dazu wird die Symmetrie ausgenutzt und ein einfacher geometrischer Teilkörper verwendet, der in Abbildung 3.7 abgebildet ist. Der Parametersatz beinhaltet 49 Winkelkombinationen in folgenden Intervallen ([von..bis; $\Delta$ ):

$$\alpha \in [30^\circ..60^\circ; \Delta = 5^\circ]$$

$$\beta \in [25,45^\circ..37,45^\circ; \Delta = 2^\circ]$$

In Abbildung 3.8 ist das Ergebnis der Parameterauswertung gezeigt. Die verschiedenen Farben geben die Deformation der optischen Achse an. Mit der schwarzen Linie ist eine Kurve beschrieben, die diejenigen Winkelkombinationen angibt, bei denen die Deformation gerade null ist. Diese wird aus dem Parameter  $\alpha$  und dem festen schon berechneten idealen Winkel  $\gamma = 52,9^\circ$  berechnet. Dabei sieht man eine sehr gute Übereinstimmung mit den neuen FEM Ergebnissen (zu sehen an der Farbskala und dem Vorzeichenwechsel). Es zeigt sich dabei die Symmetrie des Abstandshalters, so dass man den Druckpunkt entlang dieser Kurve auf einem Achtel der Kugel wählen kann, und die restlichen sieben Druckpunkte sich durch Spiegelungen ergeben.

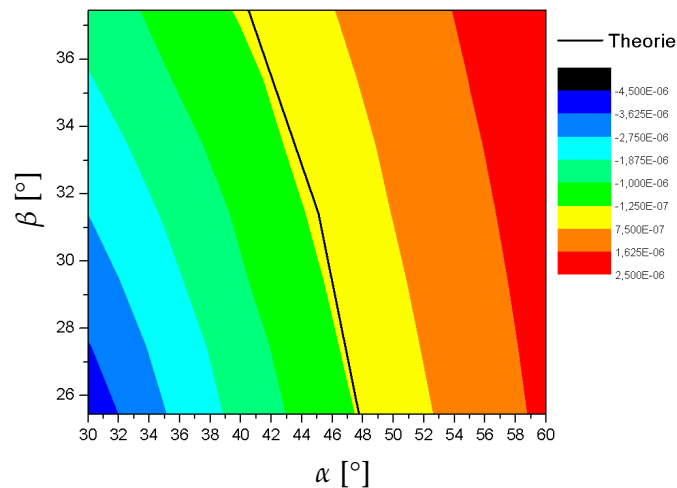
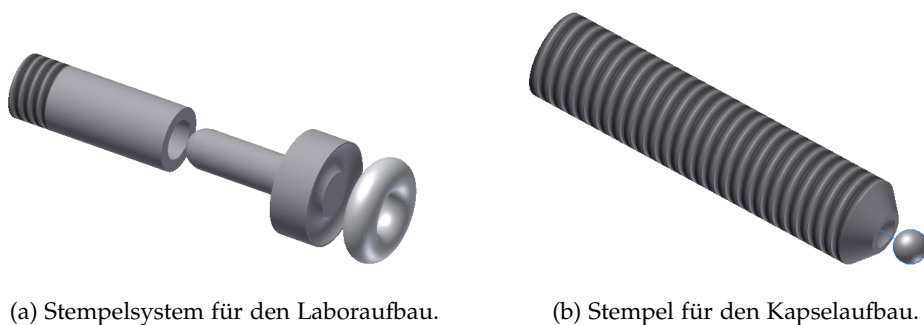


Abbildung 3.8.: Ein Kontur-Plot der Verformung der optischen Achse durch FEM 3D Simulationen. Die schwarze durchgehende Linie markiert diejenigen Winkelpaarungen, bei denen ein „magischer Winkel“ erreicht wird und die Dehnung kraftunabhängig gleich null ist.

### 3.2. Genereller Aufbau

Im Rahmen dieser Arbeit sind zwei Experimentaufbauten mit je einem Kugel-Resonator aufgebaut worden. Beide benutzen zwei Halteringe zur Lagerung des Abstandshalters. Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden besteht in dem Design der Stempel, siehe dazu Abbildung 3.9.

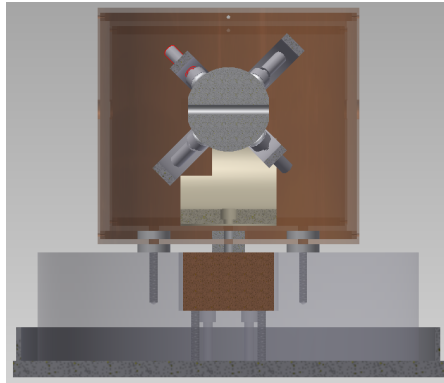
- Laboraufbau Abbildung 3.9a: Das Stempelsystem besitzt den höchsten Schutzfaktor für das empfindliche ULE Material des Abstandshalters, indem Viton-O-Ringe zur Verbindung zwischen diesem und dem Stempel genutzt werden. Der O-Ring



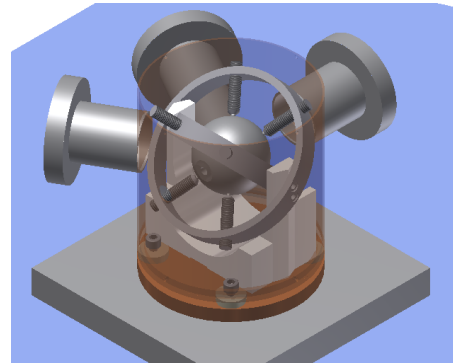
(a) Stempelsystem für den Laboraufbau.

(b) Stempel für den Kapselaufbau.

Abbildung 3.9.: Verschiedene Stempel für den Labor- und Fallturm-Aufbau. Die Halteringe für die Stempel sind mit beiden Stempelvarianten gleich.



(a) Schnitt durch das Laborsystem. Dieser Aufbau besitzt zwei Temperaturschilde aus dünnem Kupferblech.



(b) Schnitt durch den Kapselaufbau. Das Temperaturschild ist ein Kupferrohr-Stück mit 4 mm Wandstärke.

Abbildung 3.10.: Die Abbildungen zeigen Schnitte durch das 3D CAD-Modell der jeweiligen Aufbauten. Deutlich sind die massiven Kupferblöcke als Wärmereservoir zu erkennen, die Temperaturschilde hingegen sind nur leicht transparent angedeutet.

wird von einem radial beweglichen Stempel mittels einer Fixierschraube gedrückt. Die Führung übernimmt ein Zylinder, der auch in den Haltering eingeschraubt wird. Dieser Ansatz mit seinen vielen Teilen vermeidet zwar eine Beschädigung des Abstandshalters, gleichzeitig führt er aber auch an manchen Stellen zu Instabilitäten, wenn der Überlapp zwischen Führungsrohr und Stempel zu klein wird. Daher wurde für den Fallturm-Betrieb zu einem robusten System gewechselt.

- Kapselaufbau Abbildung 3.9b: Um für die Stempel aus dem äußeren Haltering genügend Stabilität zu haben, wurde das System aus dem Labor vereinfacht und durch eine massive M8-Gewindestange ersetzt. Durch eine Konterschraube erhält diese genügend Stabilität in dem Haltering. Der Kontakt mit dem Abstandshalter wird durch eine Viton-Kugel mit dem Radius  $r = 3 \text{ mm}$  hergestellt. Diese liegt in einer Kuhle in dem zu einer Kegelspitze geschliffenen Ende der Gewindestange. Durch die geringe Dimension der Kugel ist der Schutz des Abstandshalters deutlich verringert. Nach den ersten Abwürfen hat sich allerdings keine Verschlechterung der Qualität des Kugel-Resonators gezeigt, so dass – wenn überhaupt – nur von vernachlässigbaren Schäden ausgegangen werden kann.

Der realisierte Aufbau ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

Beide Aufbauten haben einen oder mehrere Temperaturschilde und stehen in einer Vakuumkammer. Der Druck in den Kammern ist Hochvakuum in der Größenordnung  $10^{-7} \text{ mbar}$ . Der Temperaturschild ist an ein Wärmereservoir durch ein Peltier-Element gekoppelt, so dass die Temperatur des Schilds aktiv geregelt werden kann.



### 3.2.1. Optische Eigenschaften des Resonators

Das Herzstück des hochstabilen Lasersystems ist der optische Resonator. Dieser wurde bei ATFilms<sup>4</sup> eingekauft. Die Spezifikation beschreibt einen Abstandshalter aus ULE<sup>5</sup>, der eine sphärische Form besitzt. An den Durchstoßpunkten der Bohrung für die optische Achse ist die Kugel plan abgeschliffen und poliert, um die Fused-Silica Spiegel optisch kontaktieren zu können. Der Aufbau des Resonators ist dabei hemisphärisch, mit den beiden Spiegelradien  $R_1 = \infty$  und  $R_2 = 50$  cm. Im Kapitel 3.1 wird der Kugel-Resonator detailliert beschrieben.

Die technischen Eigenschaften des optischen Resonators sind in Tabelle 3.1 gezeigt. Mit einer geplanten Finesse von knapp 400 000 beträgt die volle Halbwertsbreite knapp 8 kHz. Durch den hemisphärischen Aufbau des Resonators, liegt die Strahltille des Gauß-Strahls auf dem planen Spiegel. Der Resonator wird im Aufbau derart orientiert, dass das Licht durch den konkaven Spiegel in den Resonator gekoppelt wird und bei resonantem Licht durch den planen Spiegel auf der Rückseite austreten kann.

Einkoppelspiegel $g_2$	0,4
Auskoppelspiegel $g_1$	1
Spotgröße Einkoppelspiegel	570 $\mu\text{m}$
Spotgröße Auskoppelspiegel	542 $\mu\text{m}$

Tabelle 3.2.: G-Faktoren des Gauß-Strahls innerhalb des Resonators sowie die Spotgrößen auf den Spiegeln.

Die g-Faktoren und die Größe des Gauß-Strahls auf den Spiegeln sind in Tabelle 3.2 gelistet. Mit diesen Parametern wird der Laserstrahl vor dem Einkoppeln derart geformt, dass dieser dem Modenprofil des Resonators – gegeben durch die Spotgrößen auf den Spiegelflächen – angepasst wird. Dafür wird eine Linse auf dem Einkoppel-Breadboard in den Strahlengang platziert, deren Brennpunkt auf dem Auskoppelspiegel liegt. Durch die Modenanpassung wird ein hoher Anteil der Leistung in den Resonator eingekoppelt. Die Folge ist eine hohe transmittierte Leistung sowie eine große Amplitude des Fehlersignals. Die Effizienz liegt in beiden Aufbauten bei  $> 70\%$ .

### 3.2.2. Lasersysteme

Die Lasersysteme der beiden Aufbauten (Labor und Fallturm) sind fast identisch. Abgesehen von den unterschiedlichen Laserquellen, sind die optoelektrischen und -mechanischen Komponenten doppelt vorhanden. In Abbildung 3.11 ist das Lasersystem des Laboraufbaus gezeigt.

<sup>4</sup><http://www.atfilms.com>

<sup>5</sup>Ultra low expansion Glas, ULE® Corning

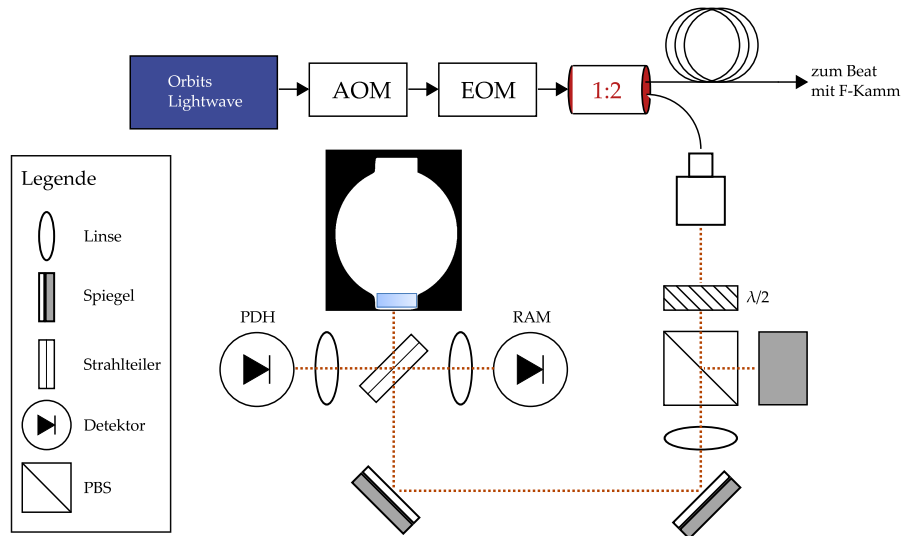


Abbildung 3.11.: Schema des Labor-Lasersystems

Anhand dieses Schemas wird auch gleich der Fallturm-Aufbau erklärt werden:

1. Das Licht wird von einer Laserquelle erzeugt. Diese ist im Schema oben links blau unterlegt abgebildet. Für das Lasersystem 1 wurde ein Laser von Orbits Lightwave verwendet, nach dem Austausch sowie im Kapselsystem wird je ein Laser von RIO verwendet.
2. → Leistungsstabilisierung: Mittels eines akustooptischen Modulators (AOM) wird die Frequenz des Laserlichts nicht nur um eine bestimmte Frequenz verschoben, sondern die Intensität der verwendeten ersten Ordnung hängt von einer Steuerspannung  $U_I$  ab. Über diese kann die Intensität des eingekoppelten Lichts konstant gehalten werden – und damit die Steigung der Flanke im Pound-Drever-Hall Fehlersignal, siehe auch Kapitel 2.4.5.
3. → Generieren der Seitenbänder für das PDH Verfahren. Der elektrooptische Modulator (EOM) generiert aus einem Prozentsatz des eingestrahlt Laserlichts zwei frequenzverschobene Komponenten, die symmetrisch um den Träger im Abstand der Modulationsfrequenzen  $\pm\Omega$  angeordnet sind. Dabei sind die beiden Seitenbänder um  $180^\circ$  phasenverschoben. Je nach Modulationstiefe werden auch höhere Ordnungen der Seitenbänder angeregt. Hier ist diese allerdings derart eingestellt, dass diese höheren Ordnungen vernachlässigt werden können,
4. → Fasersplitter: Das phasenmodulierte Licht wird in zwei Teile aufgeteilt: Der erste Teil wird genutzt, um eine Schwebung mit dem Licht eines Frequenzkamms zu generieren. Diese Schwebung dient in erste Linie der Diagnose des Systems, wird aber auch als Transfer-Beat genutzt (siehe (2.3.11)). Der zweite Teil wird zu

dem Freistrah-Breadboard geschickt, auf dem die optomechanischen Komponenten aufgebaut sind, um das Licht in den optischen Resonator einzukoppeln und die Signale auf Photodioden aufzunehmen.

5. → Einkoppel-Breadboard: Als erstes wird auf dem Breadboard das Licht aus der Faser mittels eines Kollimators in einen Freistrah überführt. Dieser wird dann mit einer Kombination aus einer  $\lambda/2$ -Platte und einem folgenden Polarisationsstrahlteiler (PBS) in seiner Intensität auf die gewünschte Ausgangsleistung ( $\approx 50\mu\text{W}$ ) eingestellt. Im folgenden Strahlengang wird eine Linse mit einer Brennweite von  $f = 300\text{ mm}$  platziert, um die Modenanpassung zu gewährleisten. Der Freistrah hat einen Durchmesser von  $\approx 10\text{ mm}$ , so dass diese Linse die passenden Spotgrößen formen kann<sup>6</sup>. Mit zwei justierbaren Spiegeln wird der Strahl so geleitet, dass er zentral und rechtwinklig auf den ersten Spiegel des optischen Resonators trifft, um maximal viel Licht einzukoppeln. Dabei wird vor dem optischen Resonator ein 50:50 Strahlteiler platziert, der das einfallende Licht auf eine Photodiode ablenkt, um damit die residuelle Amplituden- Modulation (RAM) auszugleichen. Von dem optischen Resonator reflektiertes Licht wird zur Photodiode für das PDH Verfahren abgelenkt. Weiterhin sind zwei Linsen mit kurzer Brennweite eingezeichnet, um das Licht auf die relativ kleinen Photodioden zu sammeln, und eine weitere für das Modematching am optischen Resonator.
6. → optischer Resonator: Der optische Resonator sitzt innerhalb einer Vakuumkammer. Das Laserlicht wird daher durch ein Fenster in die Vakuumkammer eingestrahlt. Sollte die Frequenz des Lasers nicht zufällig oder gewollt mit einer Resonanzfrequenz übereinstimmen, wird das Licht reflektiert werden. Durch den 1:1 Strahlteiler wird somit am Ende  $\frac{1}{4}$  der Leistung nach dem PBS zurück zu diesem Element wandern. Um eine gute Einkopplung zu erreichen, ist es ratsam diesen Rückreflex mit dem einfallenden Licht so gut wie möglich zur Deckung zu bringen. Das kann z.B. durch zwei Lochblenden, eine vor dem Fenster der Vakuumkammer und eine zwischen PBS und ersten Spiegel, kontrolliert werden. In diesen Aufbauten wird die Überlagerung damit typischerweise über eine Strecke von 30 cm - 40 cm sichergestellt. Bei der angestrebten Finesse von  $\approx 300000$  ist damit schon ein hoher Grad korrekter Justage sichergestellt, wenn man die Lochblende am Vakuumfenster schon so angebracht hat, dass das Loch durch den optischen Resonator betrachtet in der Mitte der optischen Achse liegt. Die gewünschte  $\text{TEM}_{00}$  Mode sollte damit schon sichtbar angeregt werden. Eine sorgfältige Vorjustage erspart damit viel Arbeit.

Der Aufbau des Fallturm-Systems ist prinzipiell gleich, die Laserquelle ist eine andere und zusätzlich wurde hier ein weiteres Subsystem eingebaut. Dieses ist modular an den Fallturmaufbau gekoppelt und kann ebenso an dem Laboraufbau angebunden

---

<sup>6</sup>Rechnet man vom Resonator zurück, würde an der Stelle der Linse der Gauß-Strahl einen Durchmesser von 11 mm besitzen.

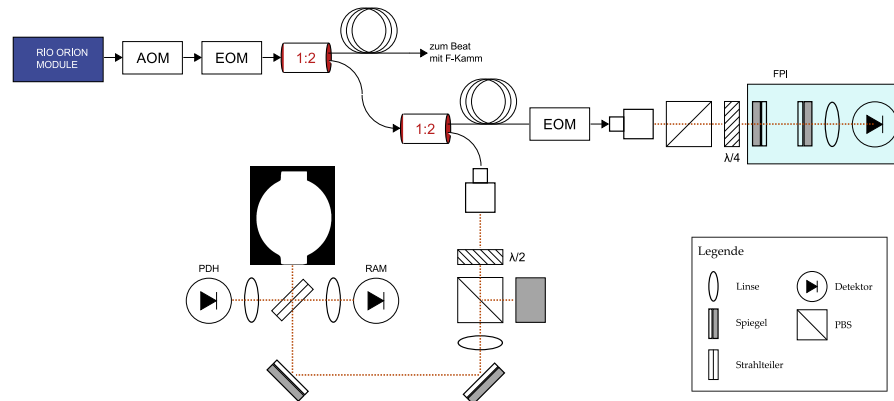


Abbildung 3.12.: Schema des Fallkapsel-Lasersystems

werden. Es ist das Modul zur selbstreferenzierten heterodynen Bestimmung der Linienbreiten (siehe Kap. (2.3.10), SHLM). Dieses Modul reinigt die Polarisation mittels eines PBS, der ebenfalls zur Kontrolle der eingestrahlten Leistung verwendet wird. Als optischer Filter wird ein Fabry-Perot Interferometer<sup>7</sup> verwendet. Dieses hat laut Spezifikation einen freien Spektralbereich von 1,5 GHz und die Resonanzfrequenz ist über eine Spannung verschiebbar.

Da der Großteil des Lasersystems fasergekoppelt ist, fällt es sehr leicht z.B. das SHLM-Modul zwischen den Lasersystemen zu wechseln. Auch bestehen hohe Chancen, falls man bei einem Umbau das Breadboard nicht antastet, die Einkopplung in den Resonator nicht zu verlieren (dafür muss die gleiche Faser am Kollimator verwendet werden).

### Laserquellen

Eine Übersicht der beiden verwendeten Laserquellen findet man in Tabelle (3.3). Die Laserquelle im Lasersystem 1 ist ein hochstabiler Faserlaser von Orbits Lightwave (Eternal™ Slowlight™ fiber laser) mit einer Zentralwellenlänge bei 1560 nm und einer Linienbreite von  $< 400$  Hz. Die Ausgangsleistung ist fest und liegt bei 100 mW, mehr als nötig, so dass ein großer Teil auf einen Strahlblocker geleitet wird. Die Wellenlänge des Lasers kann über zwei externe Spannungen beeinflusst werden, die beide an einen Piezoaktuator angeschlossen sind, der den Laserresonator entsprechend anpasst. Mit der Kontrolle des Piezoaktuators ist es nicht möglich, den Laser modensprungfrei über den freien Spektralbereich zu fahren. In Abbildung 3.13 ist das Modensprungverhalten gezeigt. Der Abstand zwischen den Modensprüngen beträgt ungefähr 800 MHz. Der Laser kann über eine serielle Verbindung mit einem PC verbunden werden, um den Arbeitspunkt der Temperatursteuerung zu verändern. Damit muss der Laser in einen Bereich gefahren werden, in dem es möglich ist mit dem Piezo eine Resonanz zu

<sup>7</sup>Thorlabs SA200-12B

	Labor (veraltet)	Labor und Fallturm
Hersteller	Orbits Lightwave	RIO Redfern Integrated Optics
Modell	Ethernal Slowlight	ORION Module
zentrale Wellenlänge	1560 nm	1550 nm
Linienbreite	< 400 Hz	< 1000 Hz
Leistung	≈ 100 mW	≈ 10 mW
externe Regelung 1/ Bandbreite	Piezo/900 Hz	direct modulation/ DC – 100 kHz
externe Regelung 2/ Bandbreite	-	extended modulation/ AC gekoppelt

Tabelle 3.3.: Technische Daten der Laserquellen.

finden. Auch mit der Temperatursteuerung ist es nicht möglich, ohne Modensprung einen freien Spektralbereich abzufahren.

Der Piezoaktuator wird mit einer Spannung von bis zu 200 V betrieben. Diese Spannung wird von einer eigenen Elektronik bereitgestellt. Diese bietet die Möglichkeit, die Ausgangsspannung mittels eines Drehknopfpotentiometers einzustellen, sowie wahlweise über eine externe Spannung zwischen 0 – 10 V. Diese Steuerspannung wird von einem Embedded-PXI System mittels einer Analog/Digital Karte<sup>9</sup> generiert und durch ein LabView Programm gesteuert. Für eine grobe Abschätzung des Frequenzsprungs pro diskretem Schritt der Spannung um 0,01 V wurde die Position des Fehlersignals mit einer PDH Modulation von 3,8 MHz aufgezeichnet, während zwischen zwei Werten für die Steuerspannung gewechselt wurde. Die Daten sind in Abbildung 3.14 gezeigt. Die Auswertung führt zu dem Umrechnungsfaktor:

$$\begin{aligned}
 F & : \text{ Sprung Steuerspannung } \longrightarrow \text{ Frequenzverschiebung} \\
 F & = (335 \pm 50) \text{ MHz V}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Die große Unsicherheit bestätigt den Charakter der Auswertung als grobe, aber hilfreiche Schätzung. Das große Problem besteht in der Drift des optischen Resonators, die sowohl während des Abfahrens einer einzelnen Rampe als auch zwischen den beiden Werten der Steuerspannung zu Fehlern führt. Vertrauen in die oben genannte Zahl ergibt sich daraus, dass zwei unabhängige Messungen im Abstand einiger Tage einen vergleichbaren Wert mit einer Abweichung kleiner als  $\pm 1 \text{ MHz V}^{-1}$  ergaben (bei

<sup>9</sup>Natinoal Instruments PXI-6259

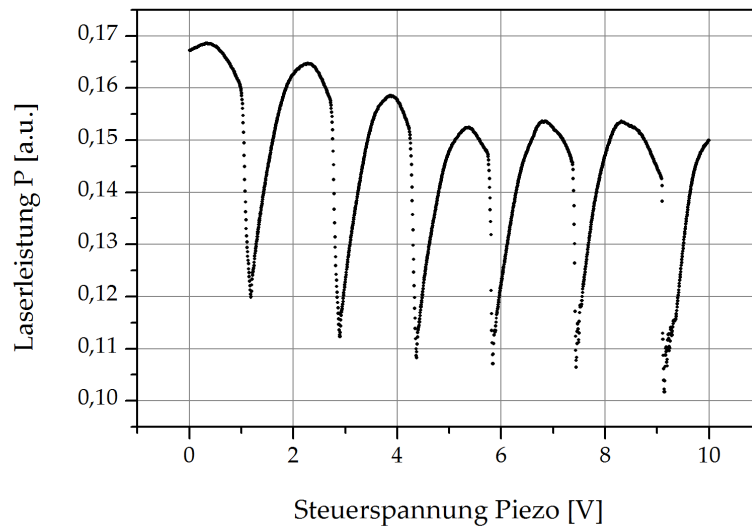


Abbildung 3.13.: Auf der Y-Achse ist die Intensität des Laserlichts des Laborlasers<sup>8</sup> über der Steuerspannung am Piezotreiber abgebildet. Jeder Einbruch der Leistung geht mit einem Modensprung einher. Der Bereich zwischen den Modensprüngen umfasst ungefähr 800 MHz.

jeweiligem großen individuellen Fehlerbalken).

Aufgrund der oben beschriebenen Unzulänglichkeiten wurde zunächst für das Kapselfsystem als auch folgend für das Laborsystem eine andere Laserquelle verwendet. Weitere Recherchen mit den Kriterien ausreichender Tuningbereich und Haltbarkeit führten zu dem Lasermodul von RIO - ORION Module. Der Laser wurde durch den Hersteller zwar nicht als explizit Fallturm-tauglich spezifiziert, wurde aber im Dezember 2009 nach den Methoden „MIL-STD-883, Method 2002a“ und „MIL-STD-883, Method 2007a“ auf die Einwirkung von Schocks und Vibrationen (20g bis 20 kHz) erfolgreich getestet. Im Fallturm können zwar kurzzeitige Beschleunigungen von bis zu 40g auftreten, jedoch ist dieser Report die beste Empfehlung für eine Laserquelle aktuell am Markt mit den geforderten Spezifikationen. Das Modul besitzt einen eingebauten Mikrocontroller, der eine USB-Verbindung bereitstellt und über das SPI-Protokoll<sup>10</sup> kommuniziert.

Dieses Lasermodul hat verschiedene Stellparameter:

- Der **Strom** mit dem die Laserdiode betrieben wird. Dieser wird fest auf 110 mA eingestellt. Änderungen haben große, im Weiteren nicht verwertbare Frequenzverschiebungen zur Folge. Dieser kann nur über die USB-Schnittstelle über einem angeschlossenen PC verändert werden.

<sup>10</sup>Serial Peripheral Interface, serielle Kommunikation

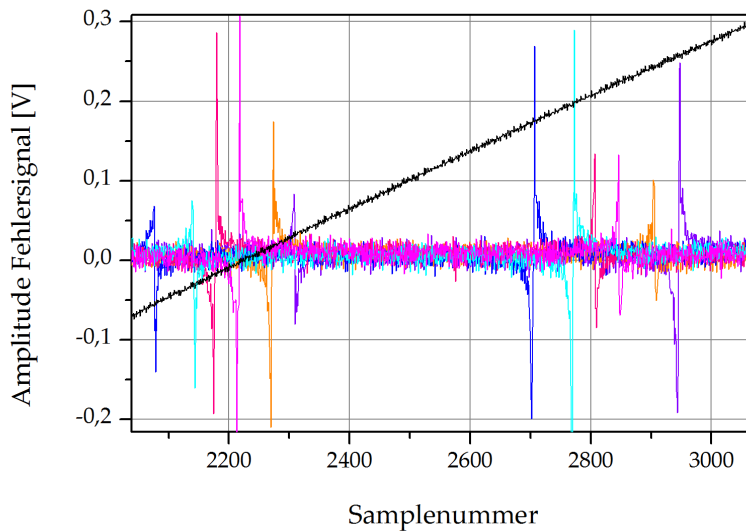


Abbildung 3.14.: Jede Farbe steht für eine Aufnahme des Fehlersignals über einer Spannungsrampe. Zwischen jeder Aufnahme alternierend ein Offset von 0 mV und 10 mV auf den Piezotreiber addiert. Im Mittel springt das Fehlersignal dabei um  $(335 \pm 50) \text{ MHz V}^{-1}$ .

- Mit dem Arbeitspunkt der **Temperatur** wird die Wellenlänge in den Bereich der Resonanz geschoben. Auch dieser kann nur über die USB-Schnittstelle über einem angeschlossenen PC verändert werden. In der Experimentsteuerung, welche in LabView realisiert wurde, ist die Bedienung der Temperatur eingebaut.
- Zwei elektrische Eingänge, mit denen die Frequenz über jeweils eigene Transferfunktionen verschoben werden kann. Diese beiden Zugänge werden passend mit den beiden Ausgängen der Regelelektronik verschaltet.

Um den richtigen Arbeitspunkt der Temperaturregelung zu finden, muss zunächst einmal eine Übersicht erstellt werden, bei welchen Einstellungen sich die Frequenz des Lasers überhaupt in der Nähe einer Resonanz befindet. Ein solches Abfahren des Parameterraumes für die Temperaturregelung in dem Lasermodul ist in Abbildung 3.15 gezeigt. In dieser Abbildung ist auf der rechten Achse in orange der Temperatur-Sollwert eingetragen. Dieser entspricht im Wesentlichen dem Widerstand des Thermistors, ist aber ohne Signifikanz über den hier behandelten Aspekt hinaus. Auf der anderen Achse ist das Signal des Kanals mit dem Fehlersignal gezeichnet. Da die Temperaturänderungen langsam erfolgen, wird das Fehlersignal mit einer Rate von zwei Hertz über den Piezo mit einer Rampenspannung erfasst. Wenn dessen Amplitude einen bestimmten Sollwert überschreitet, wird das zugehörige Abbild mit dem Temperaturwert erfasst. So ergibt sich die Abbildung als eine Aneinanderreihung von Scans über das

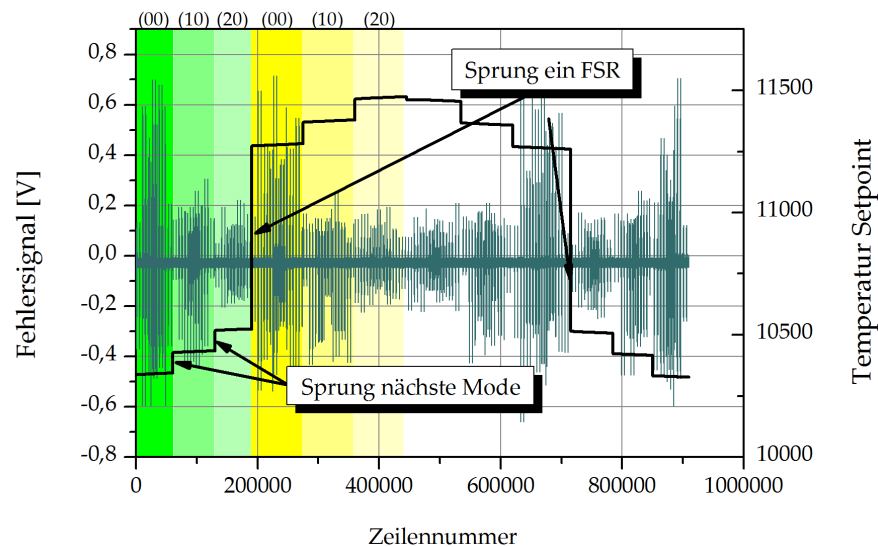


Abbildung 3.15.: Scan über den Arbeitspunkt der Temperatursteuerung des RIO ORI-ON Moduls. In schwarz das gemessene Fehlersignal, interessant ist nur die Amplitude, und der dazu gehörige Temperatur-Arbeitspunkt (blau). Scanbereich ist mehr als ein freier Spektralbereich, so dass insgesamt zweimal pro Richtung die TEM-00, TEM-10 und TEM-20 Moden zu sehen sind. In den Bereichen dazwischen ist kein Fehlersignal mit ausreichender Amplitude vorhanden, um zu dem Datensatz hinzugefügt zu werden. Zur Mitte wechselt das Vorzeichen der Scanrichtung, man erkennt eine kleine Hysterese.

Fehlersignal. Dabei ist der Schwellwert so gewählt, dass nicht nur die TEM-00 Mode gespeichert wird, sondern auch noch die TEM-10 und TEM-20 Mode. Diese beiden erscheinen mit einer geringeren Amplitude. Die Wiederholung des Musters in der Abbildung liegt daran, dass dann einmal der freie Spektralbereich komplett mit der Temperatureinstellung abgefahren wurde. Wechselt man die Richtung der Temperaturänderung, wird eine kleine Hysterese sichtbar. Man wählt daraufhin eine der beiden TEM-00 Moden als Arbeitspunkt aus.

### 3.2.3. Vakuum- und Temperatursysteme

Sowohl im Labor- als auch im Fallturm-Aufbau wird der jeweilige optische Resonator in einem Hochvakuum in der Größenordnung  $10^{-7}$  mbar platziert. Das Vakuum sorgt für eine Entkopplung von Störeinflüssen von der Umgebung. Dies hat diverse Vorteile für das Experiment:

- Normalerweise sorgt Luft bei Normaldruck für Schwankungen im Brechungs-



index, die durch lokale Druck- und Temperaturunterschiede zustande kommen. Dieses will man im Resonatorvolumen vermeiden, da dadurch die Resonanzfrequenz leicht verschoben wird. Da diese Störung stochastischer Natur ist, äußert sie sich als Instabilität des Laser-Resonator-Systems, insbesondere in einer schlechteren Langzeitperformance.

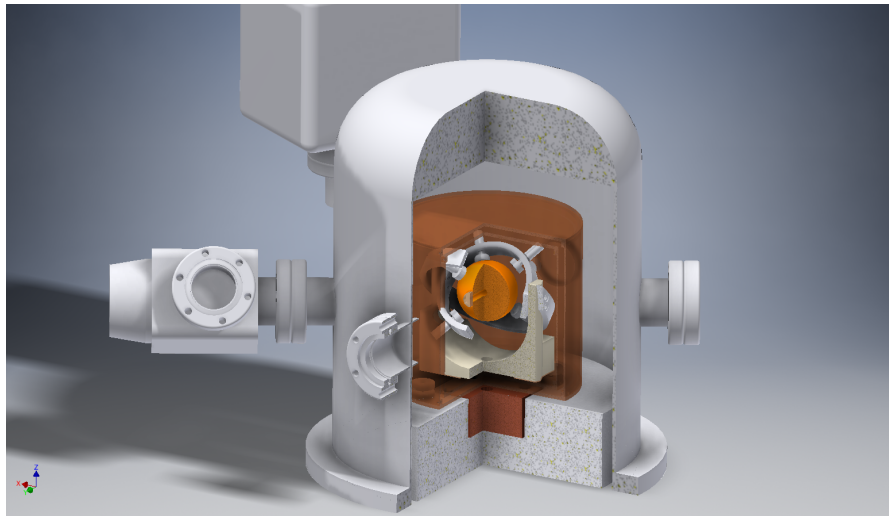
- Luft ist Überträger von Schall. Damit würden akustische Wellen der Umgebung auf den Abstandshalter deutlich leichter übertragen. Die optische Weglänge im Resonator würde sich durch die induzierten mechanischen Schwingungen ebenfalls verändern.
- Weiterhin wird durch das Vakuum verhindert, dass Wärme von der Umgebung durch Wärmeleitung (Wärmeleitfähigkeit von Luft:  $\lambda = 0,0262 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) von außen an den Abstandshalter und die Spiegel gebracht wird. Damit bleiben als thermische Störleitungen nur Wärmestrahlung und Wärmeleitung durch die massiven Bauteile.

Die Vakuumkammern sind aus Edelstahl-Zylinder mit je sechs CF40 Zugängen – gleichmäßig in einer horizontalen Ebene verteilt – gefertigt. Dazu kommt ein Flansch am Boden mit Gewindebohrungen auf der Vakuumseite, um die Halter, Kupfer-Wärmereservoirs und Temperaturschilde aufzunehmen. Einer der Zugänge wird mit einem Durchführungsflansch verschlossen, der neun Kontakte mit einer D-Sub 9poligen Buchse nach außen/innen führt. Dabei sind zwei Adern direkt mit einem PT100 Temperatursensor verbunden, und je zwei Adern für den positiven und negativen Pol eines Peltier-Elements zur Temperaturregulierung der Temperaturschilde. Da beim Laboraufbau zwei Temperaturschilde verwendet werden, hat dieser Durchführungsflansch zwei D-Sub 9 Buchsen.

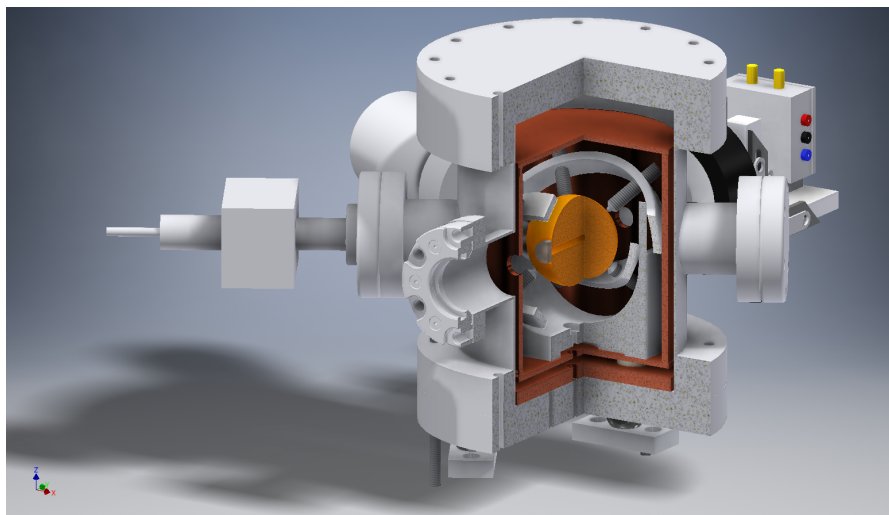
Zwei gegenüberliegende Flansche sind mit anti-reflex-beschichteten Fenstern bestückt, um das Laserlicht von außen in den optischen Resonator einzukoppeln. Das transmittierte Licht kann dann auf der gegenüberliegenden Seite aus dem zweiten Fenster austreten und detektiert werden.

An den weiteren Zugängen sind folgende Geräte montiert: ein Drucksensor, eine Ionen-Getter-Pumpe und ein Ventil, an dem die Vorpumpe angeschlossen wird. In Abbildung 3.16a und Abbildung 3.16b sind die CAD Zeichnungen beider Vakuumkammern mit allen Geräten gezeigt. Dabei wurde versucht, den Abstandshalter als Größenreferenz gleich abzubilden. Dadurch kann man erkennen, dass die Vakuumkammer für den Kapselaufbau ein deutlich kleineres Volumen hat. Dadurch ergeben sich zwei große Änderungen:

1. Eine deutlich kleinere Ionen-Getter Pumpe mit  $21 \text{ s}^{-1}$ , die damit auch für den Fallturmbetrieb tauglich ist.
2. Ein anderes Temperaturschild. Statt zwei dünner Lagen aus Kupferblech wird ein dickwandiges (4 mm) Stück aus einem Kupferrohr mit einem Außendurchmes-



(a) Schnitt durch das Laborsystem. Dieser Aufbau besitzt zwei Temperaturschilde aus dünnem Kupferblech.



(b) Schnitt durch den Kapselaufbau. Das Temperaturschild ist ein Kupferrohr-Stück mit 4 mm Wandstärke.

Abbildung 3.16.: Die Abbildungen zeigen Schnitte durch das 3D CAD-Modell der jeweiligen Aufbauten. Deutlich sind die massiven Kupferblöcke als Wärmereservoir zu erkennen, die Temperaturschilde hingegen sind nur leicht transparent angedeutet.

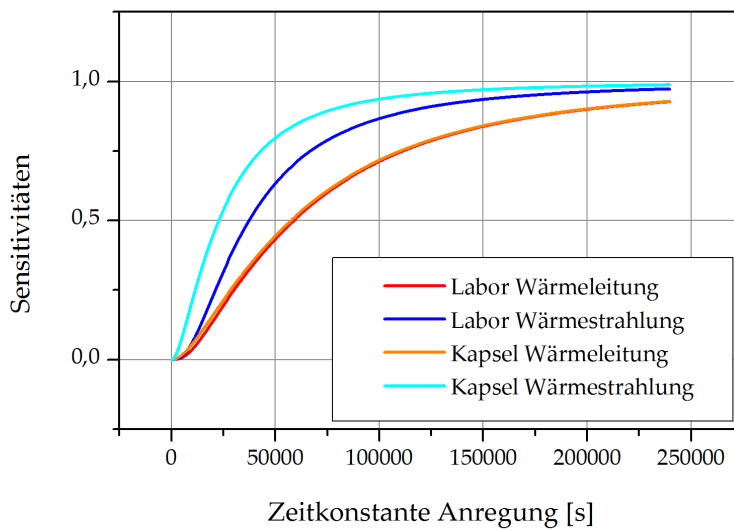


Abbildung 3.17.: Gezeigt sind die Sensitivitäten der beiden Aufbauten über der Zeitkonstanten der Anregung der Temperatur. Der Transport durch Strahlung ist in beiden Aufbauten größer als durch die Wärmeleitung.

ser von 116 mm verwendet. Die Vakuumkammer ist im Wesentlichen ein CF130 Flansch mit einem Innendurchmesser von 123,7 mm. Der Abstand zwischen Edelstahlflansch und Kupferrohr beträgt somit ca. 4 mm. Eine weitere Miniaturisierung ist mit der gewählten Haltergeometrie (Haltringe) nicht mehr möglich, da bei kleineren Ringdurchmessern der Abstandshalter nicht mehr montiert werden kann.

3. Beide Temperaturschilde sind über Peltier-Elemente an ein Wärmebad gekoppelt, welches den Wärmeaustausch mit dem Edelstahl der Vakuumkammer puffert. Dieses fällt in der Version für den Fallturm kleiner und leichter aus: Im Laboraufbau wird ein Kupferquader mit den Kantenlängen  $l_1 = 75$  mm,  $l_2 = 55$  mm und  $l_3 = 35$  mm eingebaut, während für die Version in der Kapsel ein Scheibe aus Kupfer mit einem Durchmesser von 120 mm und einer Höhe von 8 mm verwendet wird.

Die Temperaturschilde sind aktiv mittels Peltier-Elemente stabilisiert. Dazu ist neben jedem Peltier-Element ein PT100 Thermistor angebracht, dessen Messwert als Regelsignal in eine PI-Regelelektronik eingeht. Dadurch sollen die Abstandshalter und die Spiegel idealerweise von einem Schwarzkörperstrahler definierter Temperatur umgeben sein. Um den Wärmefluss von den Bauteilen untereinander zu hemmen, sind die Schilde durch Abstandshalter aus MACOR® voneinander und dem Wärmebad getrennt. Diese Abstandshalter sind Scheiben mit einem Radius von 20 mm und einer

Leitung durch	Ziel	Zeitkonstante
Abstandshalter	Kupferschild groß, Labor	$\tau = 2460$ s
Abstandshalter	Kupferschild klein, Labor	$\tau = 1990$ s
Abstandshalter	Kupferschild, Kapsel	$\tau = 2580$ s
Viton	ULE Resonator	$\tau = 15\,060$ s
Strahlung von	Ziel	Zeitkonstante
Labor Vakuumkammer	Kupferschild groß, Labor	$\tau = 4490$ s
Kupferschild groß, Labor	Kupferschild klein, Labor	$\tau = 8250$ s
Kupferschild klein, Labor	ULE Resonator	$\tau = 1520$ s
Kapsel Vakuumkammer	Kupferschild, Kapsel	$\tau = 8260$ s
Kupferschild, Kapsel	ULE Resonator	$\tau = 1690$ s

Tabelle 3.4.: Zeitkonstanten der Wärmeübertragung in den beiden Aufbauten.

Dicke von 5 mm. Die Wärmeleitfähigkeit ist vergleichbar mit Zement: ca  $1,4 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

Die Zeitkonstante für die Wärmeleitung durch einen Körper (x) in einen weiteren (y) ist gegeben zu:

$$\tau_L = \frac{C_y m_y L_x}{k_x A_x} \quad (3.2.2)$$

wobei  $C$  die Wärmekapazität,  $m$  die Masse,  $L$  die Höhe,  $k$  die Wärmeleitfähigkeit und  $A$  der Querschnitt ist. Für einen Wärmeübertrag durch Strahlung ist die Zeitkonstante gegeben durch:

$$\tau_S = \frac{1}{4T_f \beta_{xy}} \quad (3.2.3)$$

Dabei ist der Faktor  $\beta_{xy}$  aus den Materialkonstanten der emittierenden (x) und absorbierenden (y) Körper zusammengesetzt:

$$\beta_{xy} = \frac{\sigma A_x}{C_y m_y \left[ \left( \frac{1}{\epsilon_x} - 1 \right) + \frac{A_x}{A_y} \frac{1}{\epsilon_y} \right]} \quad (3.2.4)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten  $\sigma$  und den Emissionskoeffizienten  $\epsilon$ . In Tabelle 3.4 sind die im Aufbau relevanten Zeitkonstanten gegeben.

Für die Berechnung der Sensitivitäten wird ein Modell verwendet, bei dem die

Raumtemperatur um einen Mittelwert schwankt (siehe [22]):

$$T = T_0 + \Delta T_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau_A}\right) \quad (3.2.5)$$

wobei  $\tau_A$  die Zeitkonstante der Anregung ist. Bei kaskadierender Übertragungen durch Wärmeleitung oder Wärmestrahlung gilt ein einfacher Zusammenhang für beide Sensitivitäten, wenn für den Platzhalter  $\tau_i$  entsprechende Zeitkonstanten eingesetzt werden:

$$S_{L/S} = \prod_i \frac{\tau_A}{\sqrt{\tau_A^2 + 4\pi^2\tau_i^2}} \quad (3.2.6)$$

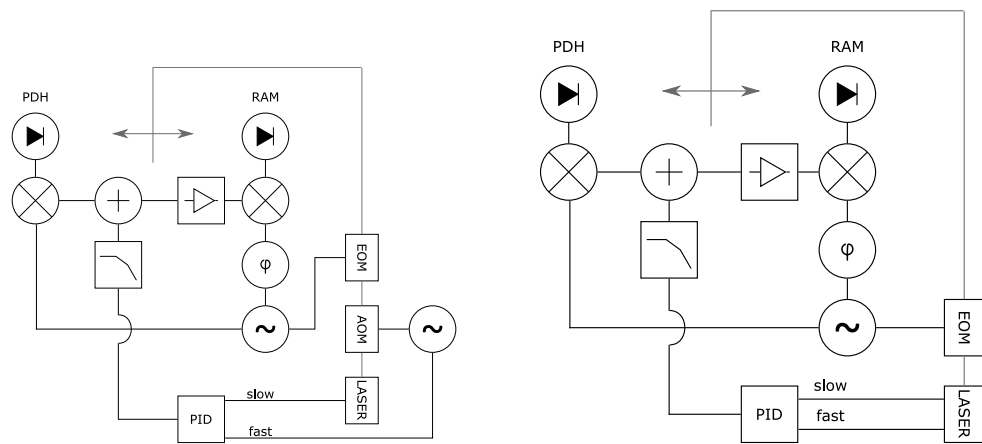
In Abbildung 3.17 sind die Sensitivitäten der Aufbauten aus Wärmeschwankungen gezeigt. Man erkennt, dass kleine Temperaturschwankungen gefiltert werden, und je länger die Periode der Anregung wird, die Sensitivitäten steigen. Ebenfalls lässt sich ablesen, dass der Wärmetransport in beiden Aufbauten durch die Wärmestrahlung dominiert wird. Deutlich wird der Unterschied im Aufbau, der schon in Abbildung 3.16 gezeigt wurde: Die beiden Kupferschilde des Laboraufbaus ermöglichen eine wesentlich geringere Sensitivität bei kleinen Zeitkonstanten  $\tau_A$ , diese liegt bis zu einer Anregungskonstante von  $\tau_A = 19200$  s unter 0,5 Bis einer Anregungskonstante von  $\tau_A = 86400$  s nähern sich die Sensitivitäten an, und dort ist die Sensitivität des Laboraufbaus gegenüber dem Kapselaufbau noch bei 90%. Jedes weitere Temperaturschild verringert die Sensitivität noch mehr. Da in dem Kapselaufbau der Platz sehr limitiert ist, konnte nur ein Hitzeschild implementiert werden. Dieser wurde möglichst massiv gewählt, um die Zeitkonstante des Strahlungstransports in den gegebenen Grenzen zu maximieren.

Wichtig ist ebenfalls der sehr geringe Wärmeausdehnungskoeffizient von MACOR® mit  $9,3 \times 10^{-6} \text{ m m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Damit bleiben an dieser Stelle Verschiebungen des Aufbaus aufgrund thermischer Fluktuationen auf ein Minimum reduziert.

### 3.2.4. PDH Elektronik

An dem Pound-Drever-Hall-Verfahren sind mehrere Komponenten beteiligt. Mittels eines Phasenmodulators werden auf das Laserlicht Seitenbänder moduliert. Dieser wird von einem Frequenzgenerator getrieben, mit dessen Frequenz dann auch die Signale der beiden Photodetektoren PDH und RAM (siehe Abbildung 3.11) mit einem Mischer wieder demoduliert werden. Das Fehlersignal wird nach einem Tiefpassfilter abgegriffen und zur Regelelektronik als Eingangssignal gegeben. Das Feedback wird nach dem PID-Regler an den Regeleingang der Laserquelle angeschlossen.

Die in dieser Arbeit verwendeten Laserquellen erfordern es, zwei Regelsignale aus dem Fehlersignal abzuleiten. Diese decken verschiedene Frequenzbereiche ab: Die mit „slow“ bezeichneten Signale regeln den Bereich  $[0; 700 \text{ Hz}]$ , die mit „fast“ den Bereich ab ca. 700 Hz. Abbildungen Abbildung 3.18a und Abbildung 3.18b zeigen, wie die



(a) PDH Elektronik des Laboraufbaus mit einem schnellen und langsamen Regelkreis. Der langsame Pfad regelt den Piezo der Orbits Lightwave Laserquelle, der schnelle führt die AOM-Frequenz nach, so dass die Frequenz des Laserlichts nach dem AOM immer auf die Resonanz stabilisiert ist.

(b) PDH Elektronik des Kapselaufbaus. Der Laser bietet zwei Regeleingänge, die verschiedene Regel-Frequenzen abdecken. Dieser Aufbau wird auch für den aktualisierten Laboraufbau verwendet, da dieser für die Laserquelle von RIO entworfen wurde.

Abbildung 3.18.: PDH Elektronik der beiden Aufbauten.

unterschiedlichen Regelstrecken in den Aufbauten realisiert werden.

Dabei bietet der Laser von RIO für den Fallturmaufbau gleich die beiden erforderlichen Regeleingänge, um den Laser direkt mit den Ausgängen des PID Reglers zu verbinden. Da insbesondere der „fast“-Eingang sehr empfindlich auf Regelspannungen reagiert, müssen zusätzliche Abschwächer den Pegel nach dem Regler deutlich absenken.

Die Laserquelle von Orbits Lightwave bietet hingegen nur einen Regeleingang für die Spannung, die an den integrierten Piezo zur Frequenzänderung angreift. Die Resonanz des Piezos liegt bei 10 kHz, es hat sich aber beim Einsatz im Experiment herausgestellt, dass ein PID Regler ab einer Grenzfrequenz von ca. 700 Hz ausreicht und schnellere Regler keine Verbesserung bringen. Damit kann der Laser zwar an die Resonanz gebunden werden, so dass er der Drift folgen kann, aber keine Reduktion der Linienbreite erfolgt („lazy lock“). Wie in Abbildung 3.18a gezeigt, wird daher ein akustooptischer Modulator (AOM) direkt nach der Laserquelle in den optischen Pfad eingebaut. Dieser stammt von Gooch-and-Housego und wird von einem mitgelieferten Treiber mit einer Zentralfrequenz von 50 MHz angesteuert. Diese Frequenz kann über eine Regelspannung („fast“) verschoben werden, was dazu genutzt wird, die Laserfrequenz nach dem AOM auf die Resonanz zu stabilisieren und die Linienbreite zu verringern.

Auch im Kapselaufbau sowie im verbesserten Laboraufbau kommt je ein akustooptischer Modulator zum Einsatz. Da dieser jedoch eine andere Aufgabe erfüllt und nicht

zu schnellen Regelung verwendet wird, ist dieser in Abbildung 3.18b nicht abgebildet. Mittels einer Spannung wird der Pegel des Frequenzverstärkers in dem AOM-Treiber gesteuert. Eine geringere Leistung am Ausgang des AOM-Treibers führt zu einer geringeren Beugungseffizienz, was in eine geringere optische Leistung in der Ausgangsfaser des akustooptischen Modulators resultiert. Zur Bestimmung der Finesse (siehe 3.3.1) wird dieser Eingang verwendet, um die Leistung des Laserlichts durch eine Rechteckspannung in eben diese Form zu modulieren.

Die PID-Regler sind zum Teil in der hauseigenen Elektronikwerkstatt gefertigt worden, zusätzlich kommt ein kommerzielles Produkt<sup>11</sup> in der Regelelektronik zum Einsatz.

Ebenfalls aus der hauseigenen Elektronikwerkstatt kommen die Photodetektoren. Die Entwicklung und der Test der verwendeten Detektoren wurde in Hannover am Institut für Quantenoptik durchgeführt und freundlicherweise zur Verfügung gestellt (genutzt unter anderem von [68]). Die Detektoren besitzen eine Bandbreite von 30 MHz.

### 3.3. Laborbetrieb und Charakterisierung

In diesem Kapitel werden verschiedene Messergebnisse zur Charakterisierung der Lasersysteme präsentiert. Zunächst wird die Finesse der beiden Aufbauten gemessen. Mittels angeregter mechanischer Vibrationen wird das induzierte Frequenzrauschen untersucht. Außerdem wird die Temperaturabhängigkeit der Aufbauten ermittelt und die leistungsinduzierte Frequenzverschiebung gemessen.

#### 3.3.1. Bestimmung der Finesse

Die charakteristischen Kenngrößen des optischen Resonators können experimentell bestimmt werden. Die Finesse als wichtige Größe kann aus der Linienbreite bestimmt werden, wenn die geometrischen Eigenschaften als gegeben angenommen werden (siehe (2.4.24)). Dabei wird im Folgenden die Linienbreite gemessen und daraus mit dem freien Spektralbereich die Finesse berechnet.

#### Direkte Bestimmung der Linienbreite

Eine grobe Abschätzung der Linienbreite kann aus dem Pound-Drever-Hall-Fehlersignal gewonnen werden. Dieses ist in Abbildung 3.19 gezeigt. Die Auswertung erfolgt mit dem Programm *Origin* und beruht darauf, aus dem Abstand der Seitenbänder zum Träger einen Faktor zu bestimmen, der ein Intervall an Messpunkten mit der entsprechenden Frequenzverschiebung assoziiert, da der Abstand sowohl in Messpunkten als auch in der zugehörigen Frequenz (Modulationsfrequenz) bekannt ist. Man bestimmt die Anzahl der Messpunkte für die zentrale Flanke des Fehlersignals und benutzt den

---

<sup>11</sup>FALC100 von Toptica

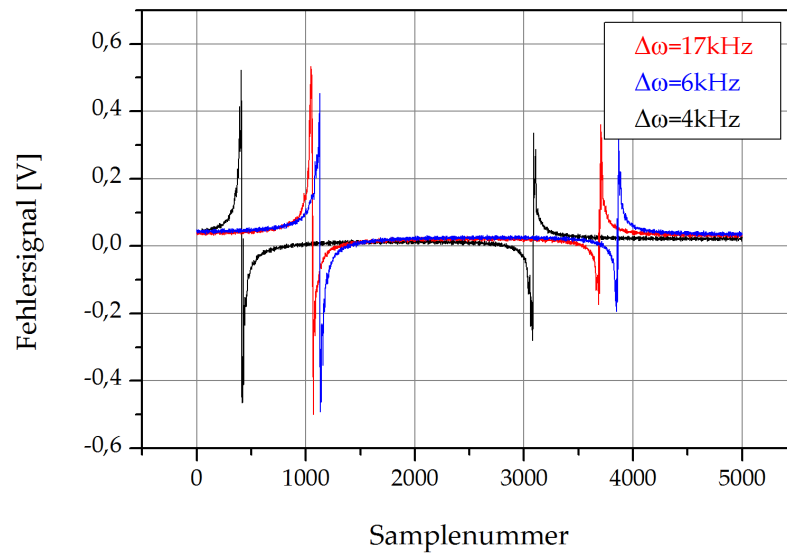


Abbildung 3.19.: Verschiedene Aufzeichnungen des Fehlersignals, wenn die Laserfrequenz über die Resonanz mit einer Dreiecksrampe gefahren wird. Dabei wird die Anzahl der jeweiligen Samples für die zentrale Flanke sowie für den Abstand des Seitenbandes (2,7 MHz) zur zentralen Flanke bestimmt. Die korrespondierenden Linienbreiten sind angegeben. Die Daten wurden mit einer Samplerate von 40 kSamples/s erfasst. Die Auswertung ist in Tabelle 3.5 gegeben.

Messung	Punkt zw. Flanken	Breite zentrale Flanke	Linienbreite
schwarz	$2675 \pm 4$	$4 \pm 1$	$(4 \pm 1)$ kHz
rot	$2634 \pm 4$	$20 \pm 2$	$(17 \pm 2)$ kHz
blau	$2733 \pm 4$	$6 \pm 1$	$(6 \pm 1)$ kHz

Tabelle 3.5.: Daten aus Abbildung 3.19: Abstand der Flanken sowie die Breite in Samples der zentralen Flanke des Fehlersignals. Daraus werden die Linienbreiten errechnet.

Umrechnungsfaktor, um die entsprechende Linienbreite zu gewinnen. Diese grobe Abschätzung unterliegt je nach der Wiederholrate der angelegten Rampe durchaus schon einem Laser- oder Resonanzdrift, da der Laser nicht auf die Resonanz stabilisiert ist. Aus den drei abgebildeten Werten kann ein Mittelwert von  $\approx 10$  kHz abgeleitet werden. Dies würde einer Finesse von 310 000 entsprechen.



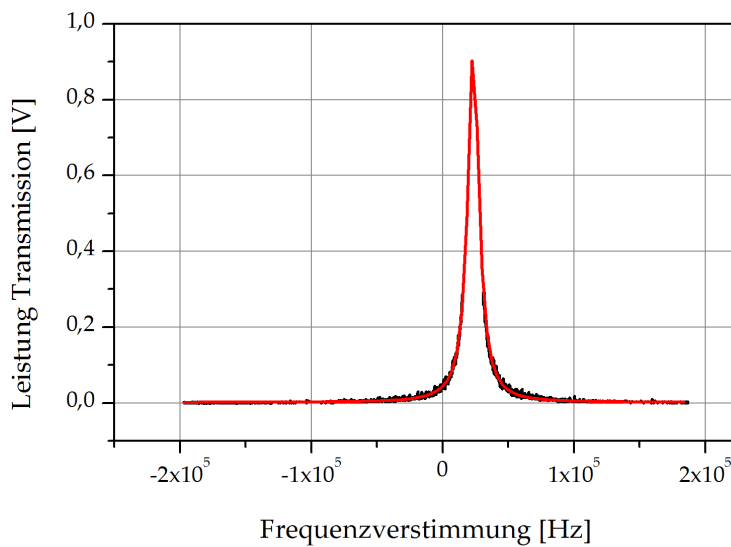


Abbildung 3.20.: Scan des Transmissionssignals für den Kapselaufbau. Ein Lorentz-Fit ergibt die Linienbreite von  $(10\,260 \pm 125)$  Hz.

Die grobe Abschätzung oben leidet daran, dass durch die Frequenzrampe und der Breite des erforderlichen Intervalls die Pixelanzahl der Breite des Fehlersignals im einstelligen Bereich anfällig für die Messgenauigkeit ist, da ein Ablesefehler von einem Sample bereits einem Fehler für die Breite des Fehlersignals von über 10% entspricht.

Eine alternative Methode ist es, einen der beiden Laser auf den anderen zu stabilisieren. Diese werden dann über eine Frequenzrampe gegeneinander verstimmte. Dabei ist es möglich, die Transmissionskurven direkt über der Verstimmung aufzuzeichnen.

In den Abbildungen 3.20 und 3.21 ist exemplarisch jeweils ein Scan der Transmission gezeigt. Dabei stellte sich insbesondere bei der Untersuchung der Resonanz am Labor-Lasersystem heraus, dass die Qualität des Fits von der Zeitskala des Scans abhängig ist (siehe Abbildung 3.22). Der Grund dafür liegt in der qualitativ schlechteren Anbindung des Kapsel Lasersystems, welches hierfür als Referenz dient.

Messung	Linienbreite /Hz
Kapsel	$10\,260 \pm 125$
Labor	$15\,900 \pm 200$

Tabelle 3.6.: Auswertung des Scans der Transmissionen, siehe Abbildung 3.20 und Abbildung 3.21.

Ebenso kann die zentrale Flanke des Fehlersignals aufgezeichnet werden. Dies ist

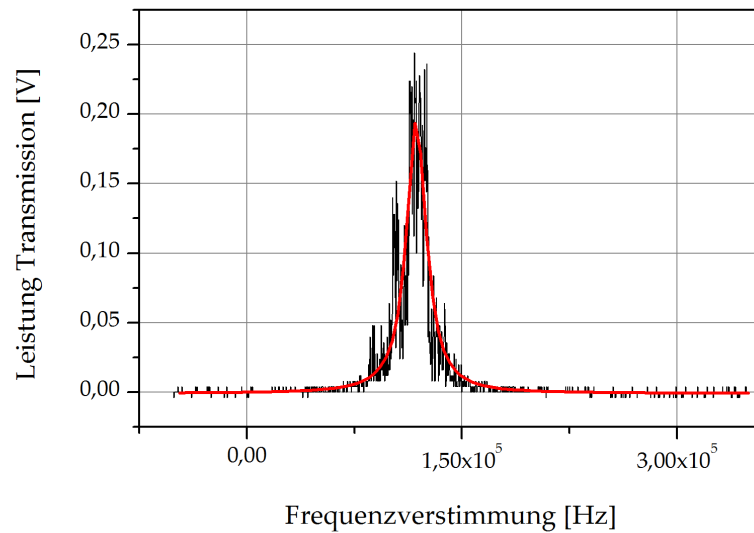


Abbildung 3.21.: Scan des Transmissionssignals für den Laboraufbau. Ein Lorentz-Fit ergibt die Linienbreite von  $(16\,500 \pm 370)$  Hz.

Aufbau	Frequenz für Maximum Hz	für Minimum /Hz	Differenz /Hz
Labor (blau)	$146\,300 \pm 750$	$121\,200 \pm 750$	$25\,000 \pm 1500$
Labor (rot)	$-115\,100 \pm 700$	$-95\,300 \pm 700$	$20\,000 \pm 1400$
Kapsel	$17\,200 \pm 100$	$27\,000 \pm 100$	$9700 \pm 200$

Tabelle 3.7.: Auswertung der Scans der Fehlersignale in Abbildung 3.23.

in Abbildung 3.23 gezeigt. Aus der angepassten Kurve kann man die Maxima und Minima des Fehlersignals extrahieren, welche in Tabelle (3.7) gegeben sind.

### Bestimmung der Abklingzeiten

Durch die Zirkulation des Lichtfeldes im Resonator kommt es zu einer Leistungsüberhöhung proportional zur Finesse. Diese wird ebenso mit dem „Einschalten“ des Lasers aufgebaut wie sie beim „Ausschalten“ wieder abgebaut wird. Der Abfall der Leistung folgt dabei einem Exponentialgesetz mit einer charakteristischen Zeitkonstante  $\tau$ . Das Abfallen der Leistung im Resonator wird im englischen als „cavity-ringdown“ bezeichnet.

Pro Aufbau wurde dafür jeweils der Laser auf die TEM<sub>00</sub> Mode stabilisiert. Der Treiber für den AOM bietet einen Eingang für die spannungsgesteuerte Ausgangsleistung.

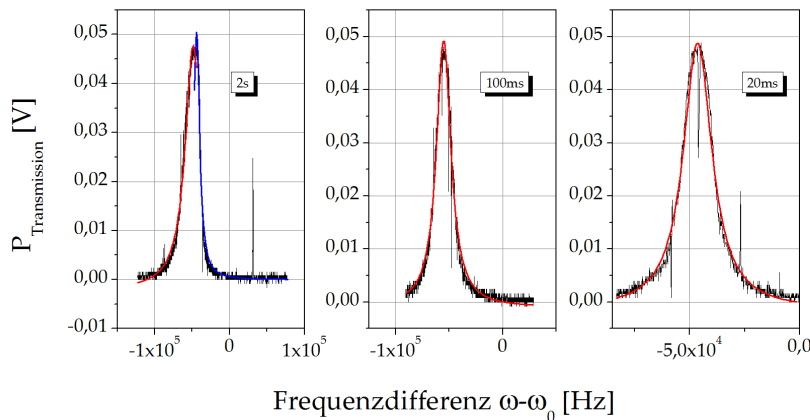


Abbildung 3.22.: Verschiedene Scans des Transmissionssignals für den Kapselaufbau mit verschiedenen Zeitskalen für einen vollständigen Frequenzscan. Mit ausreichender Geschwindigkeit des Abfahrens wird die Drift des Beatsignals verschwindend gering, so dass eine Lorentz-Kurve gemessen werden kann. Von links nach rechts:  $\Delta\omega = (26\,300 \pm 300)$  Hz,  $\Delta\omega = (10\,000 \pm 125)$  Hz,  $\Delta\omega = (16\,500 \pm 100)$  Hz und  $\Delta\omega = (15\,900 \pm 200)$  Hz.

An diesen Eingang wurde eine Rechteckspannung angelegt, so dass die eingekoppelte Leistung mit einer Frequenz von 2 Hz entsprechend zwischen zwei Leistungsniveaus sprang. Dabei wird der Laser durch die Regelung immer auf dem Transmissionsmaximum gehalten.

Die transmittierte Intensität wird von einem Photodetektor aufgenommen und an einem Oszilloskop betrachtet. Die angezeigten Daten wurden anschließend als Datenpunkte exportiert und mittels des Programms Origin analysiert. Die Daten und deren Auswertung sind in Abbildung 3.24 gezeigt.

Aus dem Fit der Daten in dem durch zwei Pfeile markierten Bereich findet man für den Laboraufbau eine Zerfallszeit von  $\tau_L = (25,00 \pm 0,25)$   $\mu$ s. Der Zusammenhang mit der Linienbreite ist gegeben durch [60]:<sup>12</sup>:

$$\Delta_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi\tau_L} = (6370 \pm 64) \text{ Hz} \quad (3.3.1)$$

Die aus dieser Linienbreite von 6,4 kHz berechnete Finesse ist dann  $\mathcal{F} \approx 490\,000 \pm 5000$ .

Entsprechend ist die gemessene Zerfallszeit des optischen Resonators in der Fallkapsel durch die Anpassung mit dem Wert  $\tau_L = (17,00 \pm 0,18)$   $\mu$ s bestimmt. Die resultierende Linienbreite und die Finesse sind damit  $\Delta_{\frac{1}{2}} = (9400 \pm 100)$  Hz und  $\mathcal{F} \approx 330\,000 \pm 3500$ .

<sup>12</sup>Zur Definition der Linienbreite siehe (2.4.23).

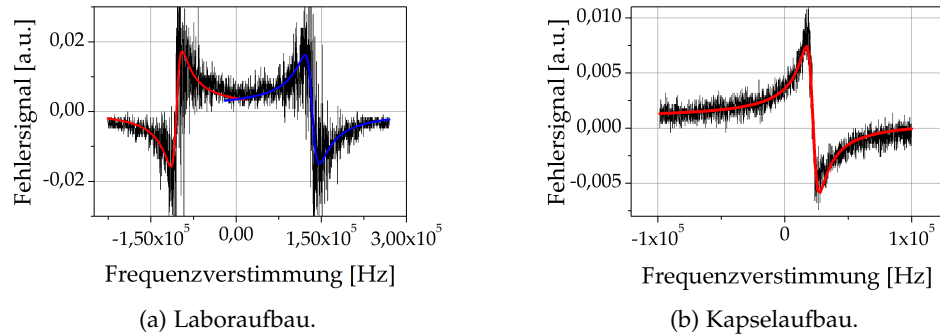


Abbildung 3.23.: Scan der zentralen Flanke des Fehlersignals und Fit der Dispersionskurve. Dabei wurde an die Messdaten die Dispersionskurve angepasst und die Maxima und Minima bestimmt. Über diese wird dann die Breite des Resonators bestimmt.

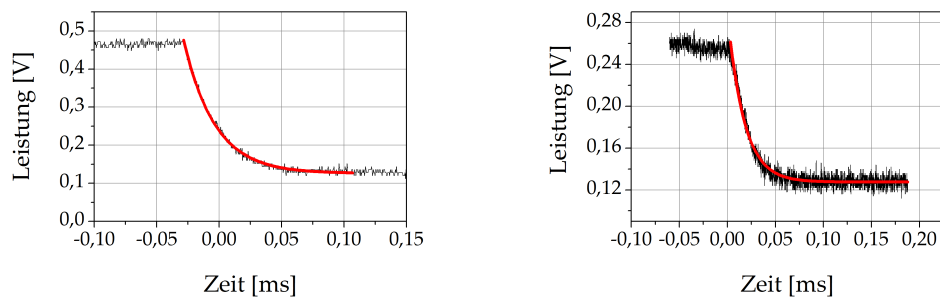


Abbildung 3.24.: Experimentelle Bestimmung der Abklingzeit durch Messung der Leistung des transmittierten Signals.

## Diskussion

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Bestimmung der Linienbreite führen zu verschiedenen Ergebnissen. Zur Übersicht werden diese hier mit der daraus resultierenden Finesse noch einmal einzeln aufgeführt und diskutiert.

Für das Laborsystem wurde zunächst eine grobe Abschätzung anhand einer Frequenzrampe über die Piezospannung<sup>13</sup> erstellt, bei welcher der Faktor zur Umrechnung von Spannung am Piezo zur entsprechenden Frequenzrampe aus der Messung selbst bestimmt werden musste. Dazu wurde sowohl die zentrale Flanke als auch das Nebensignal aufgenommen, deren Abstand der verwendeten Pound-Drever-Hall-Frequenz entspricht. Diese Methode ist nur mit einem großen Ablesefehler möglich, da das Fehlersignal nur einige wenige Samples breit ist. Ein Ablesefehler von Eins führt damit schon zu prozentual großen Abweichungen. Die Vermessung mittels eines Offsetlocks an eine optische Referenz, und einer definierten Frequenzrampe zum Scan über das Fehlersignal und die Leistungskurven, führt aufgrund der schlechten Referenz (hier Kapsel Lasersystem) leider zu gemischten Ergebnissen. Für bestimmte Aufnahmen konnte durch einen Wechsel der Parameter eine Verbesserung erzielt werden, die Messungen bleiben aber mit einem großen Rauschen behaftet. Im Gegensatz dazu ist die Messung der Abklingzeit sehr gut gelungen und noch darüber hinaus nicht von externen Parametern wie Samplingrate oder der Anbindung an eine Referenz abhängig. Dieses Ergebnis wird damit als besonders vertrauensvoll angesehen. In Tabelle 3.8 ist eine Auflistung der Methoden mit dem jeweiligen Ergebnis gezeigt.

Method	Linienbreite $\Delta\omega$ /Hz	Finesse $\mathcal{F}$
Design	8000	400 000
Sampling	$\approx 10\,000$	$\approx 310\,000$
Transmission	$16\,000 \pm 200$	$194\,000 \pm 2400$
Fehlersignal	$22\,500 \pm 1400$	$137\,000 \pm 8900$
<b>Abklingzeit</b>	$6370 \pm 64$	$485\,000 \pm 4800$

Tabelle 3.8.: Ergebnisse des Labor-Lasersystems.

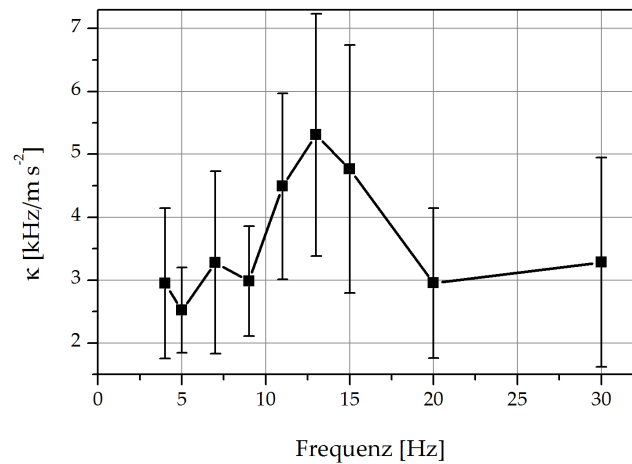
Für das Kapselsystem zeigte sich, dass das Laborsystem eine gute Referenz für die Frequenzrampe darstellt. Daher sind die Messungen des Fehlersignals und der Leistungskurven mit einem deutlich besseren Signal-zu-Rausch Verhältnis aufgenommen worden. In Tabelle 3.9 sind die Ergebnisse für das Kapselsystem zusammengefasst.

Man kann hier sehen, dass alle Ergebnisse für die Finesse innerhalb  $1\sigma$  miteinander

<sup>13</sup>Noch mit einem Laser von Orbits Lightwave als Quelle.

Method	Linienbreite $\Delta\omega$ /Hz	Finesse $\mathcal{F}$
Design	8000	400 000
Transmission	$10\,260 \pm 125$	$301\,000 \pm 3600$
Fehlersignal	$9750 \pm 200$	$317\,000 \pm 7000$
Abklingzeit	$9360 \pm 100$	$330\,000 \pm 3500$

Tabelle 3.9.: Ergebnisse des Kapsel-Lasersystems.

Abbildung 3.25.: Experimentelle Bestimmung des Koeffizienten  $\kappa$ , der das Verhältnis von Frequenzverschiebung zu vertikaler Beschleunigung beschreibt.

verträglich sind. Die Linienbreite kann damit zu  $\Delta\omega = (9800 \pm 460)$  Hz und die Finesse zu  $\mathcal{F} = 316\,000 \pm 4700$  angegeben werden.

### 3.3.2. Beschleunigungssensitivität

In Kapitel 3.1.1 wurde gezeigt, dass die Isolation des Abstandshalters von den Umgebungsvibrationen stark mit dem magischen Winkel zusammenhängt. Dabei wurden Winkel für die Halter berechnet, mit denen theoretisch die Unterdrückung externer Vibrationen möglich sein sollte. Da die Realisierung aber immer fehlerbehaftet ist, wurde die Sensitivität auf externe Beschleunigungen gemessen, die Ergebnisse werden im Folgenden dargestellt.

Für die Messungen wurde zunächst eine Beschleunigungsquelle neben die Vakuumkammer auf der entsprechenden Plattform (siehe (3.6.3)) angesetzt. Diese ist ein

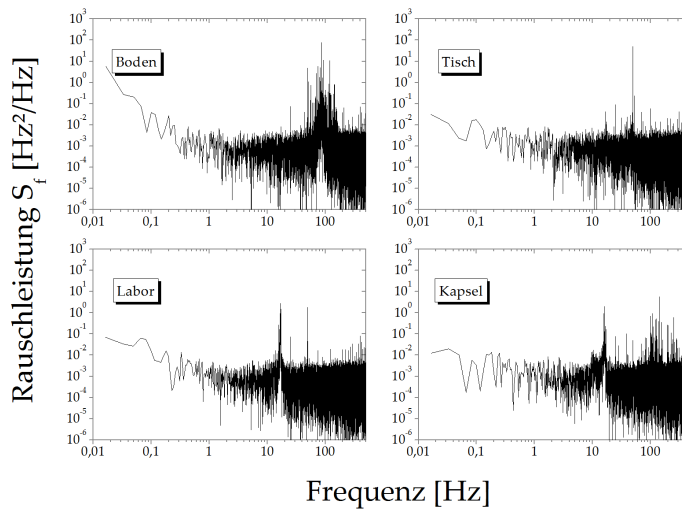
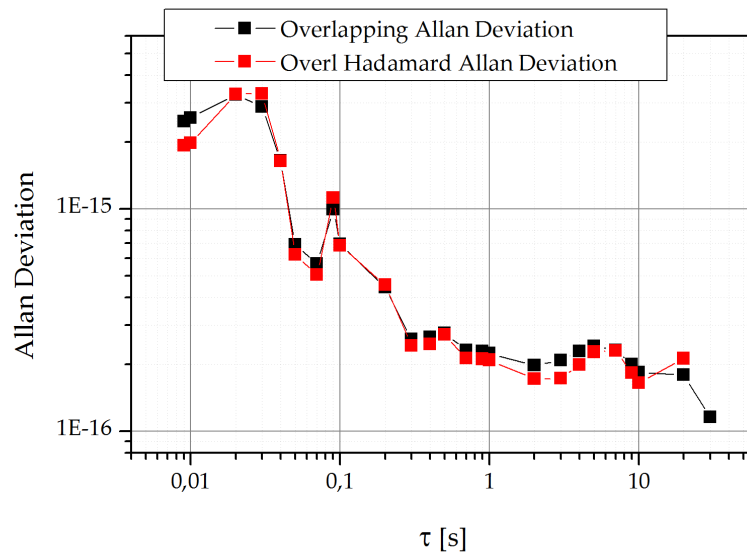


Abbildung 3.26.: Spektrale Rauschleistung der Vibrationen, die von einem Beschleunigungssensor in der Z-Achse gemessen wurden. Von links oben nach rechts unten: Auf dem Laborboden, auf dem Labortisch, auf dem Laboraufbau und auf dem Kapselaufbau.

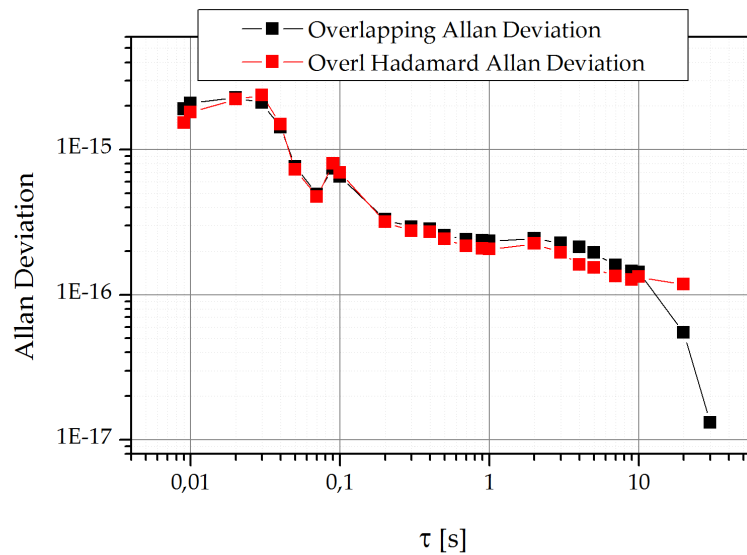
Linearmotor, der ein kleines Gewicht vertikal bewegen kann. Getrieben wird der Motor mit einer Spannung in Form eines Sinus, welche von einem Frequenzgenerator erzeugt und über einen Treiber in eine Hochspannung verstärkt wird.

Als Detektor für die Beschleunigungen kommt ein Eigenbau zum Einsatz, der im Rahmen einer Bachelorarbeit am Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation entwickelt wurde. Der Beschleunigungssensor wurde auf einem der sechs Flansche der Vakuumkammer platziert, der als einziger baulich zugänglich ist. Die Anregung der Beschleunigungsquelle wirkt auf die Plattform. Über die Lagerung der Vakuumkammer wird diese selbst in Vibrationen versetzt, bis der Sensor die Beschleunigungen messen kann. Im Inneren sind alle Teile fest verschraubt, nur der Abstandhalter wird durch die Viton-Kugeln gedämpft gelagert. Die Transferfunktion sowohl für die Vibrationen bis zum Sensor als auch bis zum Haltesystem des Resonators sind unbekannt, und werden hier als konstant 1 angenommen. Diese grobe Näherung erlaubt eine Abschätzung der Messungen mit dem Sensor.

In Abbildung 3.25 ist das Ergebnis der Messungen gezeigt. Dafür wurden für verschiedene Anregungsfrequenzen im Bereich von 4 Hz bis 30 Hz das Schwebungssignal und simultan der Wert des Beschleunigungssensors aufgezeichnet. Dieser Bereich ist durch die Beschleunigungsquelle vorgegeben. Kleinere Frequenzen produzierten keine messbare Anregung im Schwebungssignal, und höhere Frequenzen könnten zur Beschädigung der Quelle führen, so dass die Obergrenze noch im Bereich des sicheren Betriebs liegt. Aus den Daten wurde dann die jeweilige Amplitude extrahiert und der



(a) Laboraufbau.



(b) Kapselaufbau.

Abbildung 3.27.: Beschleunigungsinduziertes Frequenzrauschen der beiden Resonatoren durch die Restvibrationen der beiden Aufbauten. Hierzu wurden die Beschleunigungen mit dem Koeffizienten  $\kappa$  zwischen Beschleunigung und Frequenzantwort in eine Frequenzverschiebung umgerechnet. Aus diesem Rauschen wurde die jeweilige Allan-Abweichung berechnet.



Quotient gebildet. Es scheint eine mechanische Resonanz bei 13 Hz zu geben, welche wahrscheinlich durch die passive Schwingungsisolation herrührt. In diesem Fall beträgt der Koeffizient  $\kappa$  zwischen Beschleunigung und Frequenzantwort  $5,3 \text{ kHz m}^{-1} \text{ s}^2$ . Der Mittelwert von  $(3,6 \pm 1,0) \text{ kHz m}^{-1} \text{ s}^2$  ist mit allen Messwerten innerhalb der Fehlergrenzen verträglich und wird in der Folge verwendet werden. Die Sensitivität liegt damit bei  $(18,6 \pm 0,5) \times 10^{-11} / \text{g}$ . Ähnliche Werte wurden in [46] für den sphärischen Resonator gemessen. Arbeiten mit zylindrischen Resonatoren im Laborbetrieb kommen auf ähnliche Werte, so zum Beispiel [68].

Mit diesem Koeffizienten ist es möglich, die residuellen Vibrationen in ein Frequenzrauschen umzurechnen. Dieses wird damit ein unteres Limit der Stabilität definieren, welches man nur mit einer verbesserten Isolation von der Umgebung unterbieten kann.

### Diskussion

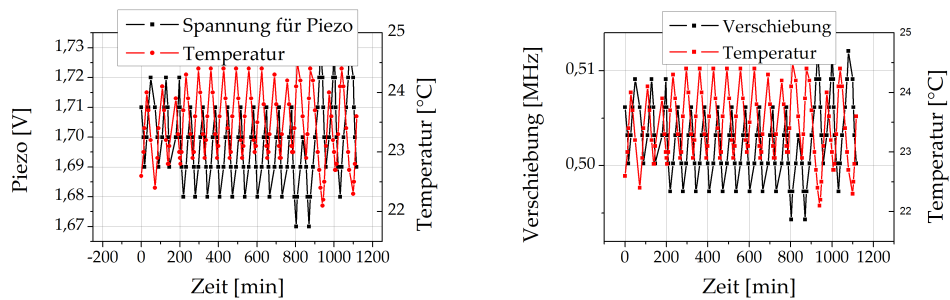
In Abbildung 3.26 sind die Leistungsspektren der gemessenen Beschleunigungen abgebildet, die an den folgenden vier Orten gemessen wurden: Der Laborboden, auf dem Labortisch, auf der Vakuumkammer des Laborsystems sowie auf der Vakuumkammer des Kapselaufbaus. Dabei zeigen sich im Bereich bis 500 Hz akustische Resonanzen, insbesondere gibt es eine ausgeprägte Resonanz bei 17 Hz. Diese bleibt auch nach dem Abschalten der Klimaanlage bestehen, die damit als Ursache dafür nicht in Frage kommt. Es scheint sich um eine anderweitig im Gebäude präsenzte Frequenz zu handeln.

Für die beiden Messungen auf den Vakuumkammern wurden ihre Spektren mittels der gemessenen Sensitivität in das entsprechende Frequenzrauschen übertragen und eine Allan-Abweichung berechnet (siehe Abbildung 3.27). In beiden Messungen ist die Allan-Abweichung über einen weiten Bereich unter  $1 \cdot 10^{-15}$  und damit deutlich unter der in dieser Arbeit erreichten Stabilität von  $7,2 \times 10^{-15}$  bei 3,5 s.

### 3.3.3. Temperatureinflüsse auf das Lasersystem

Wie in Kapitel 3.2.2 erwähnt, wurde als erste Laserquelle ein Laser von Orbits Lightwave zum Einsatz. Mit diesem Gerät erfolgten die in diesem Kapitel gezeigten Messungen. Später wurde der Laser ausgetauscht und gleicht der Laserquelle im Kapselaufbau. Abbildung 3.28 zeigt eine grobe Temperaturabhängigkeit des Lasersystems mit den Temperaturschwankungen der Raumluft durch die Klimaautomatik, welche durch die Messung des Steuersignals für den Piezotreiber festgestellt wurde. Diese Daten zeigen, dass die elektrische Regelung den Einflüssen der Temperaturschwankungen während der Stabilisierung entgegenwirkt.

Zu den aufgezeichneten Daten muss die Regelung mit Details erläutert werden: Der PID-Regler hat nicht nur eine beschränkte Regelbandbreite von 900 Hz im hier betrachteten langsamen Regelpfad, sondern auch eine endliche Regelamplitude. Bevor die erforderliche Regelspannung an die Grenzen des technisch machbaren stößt, wird pro-



(a) Diskretes Steuersignal für den Piezotreiber kombiniert mit der Umgebungstemperatur.

(b) Errechnete Frequenzverschiebung kombiniert mit der Umgebungstemperatur.

Abbildung 3.28.: 18 Stunden Messung des Steuersignals für den Piezotreiber.

grammatisch der Arbeitspunkt der Laserquelle derart angepasst, dass der PID-Regler entlastet wird und die Regelspannung wieder in einen Bereich geführt wird, der einen normalen Betrieb ermöglicht. Der Arbeitspunkt wird über eine weitere Steuerspannung für den Piezotreiber bestimmt, und wird von einem Embedded-PXI System im Bereich von 0 – 10 V generiert. Ein auf diesem System laufendes Programm misst während der Laserstabilisierung das Regelsignal des PID-Reglers. Überschreitet dessen Wert (absolut) einen Schwellwert, wird das Steuersignal für den Piezotreiber aktualisiert, so dass der Schwellwert wieder unterschritten wird. Sobald eine Korrektur des Arbeitspunktes notwendig wird, wird die Umgebungstemperatur sowie die aktuelle Steuerspannung aufgezeichnet. Die Schrittweite ist im Programm auf den Wert 0,01 V festgelegt. Damit werden die Datenpunkte in der genannten Abbildung für dieses Signal diskret. Die beiden gezeigten Graphen verhalten sich dabei invers zueinander. Dabei ist es dem Aufbau geschuldet, dass Änderungen der Raumtemperatur zuerst von dem Lasermodul registriert und mit einer Frequenzverschiebung beantwortet werden, bevor diese von dem Temperatursensor in der Breakout Box (NI SCB-68) gemessen werden kann, da dieser im Inneren der Box angebracht ist. Der Vorlauf beträgt ungefähr 5-10 Minuten. Der Umrechnungsfaktor für die Kurve in Abbildung 3.28b ist in (3.2.1) gegeben.

Da in Abbildung 3.28 die Korrektursignale der Piezospannung über die Zeit dargestellt wurden, also der Laser auf der Resonanz gehalten wurde, ist keine Aussage über die Temperaturabhängigkeit des Resonators selbst möglich. Die ausgeglichenen Änderungen betreffen die Temperaturabhängigkeiten innerhalb der Laserquelle.

### 3.3.4. Temperaturabhängigkeit der Resonanzen des Labor-Resonators

Im Folgenden wird untersucht, ob die Abhängigkeit der Resonanzen von der Umgebungstemperatur oder der Temperaturregelung mittels der Hitzeschilder gemessen werden kann. Verändert sich die Temperatur des Resonators, wird sich durch die thermische Ausdehnung die Resonanzwellenlänge ändern. Dabei haben die in dieser Arbeit

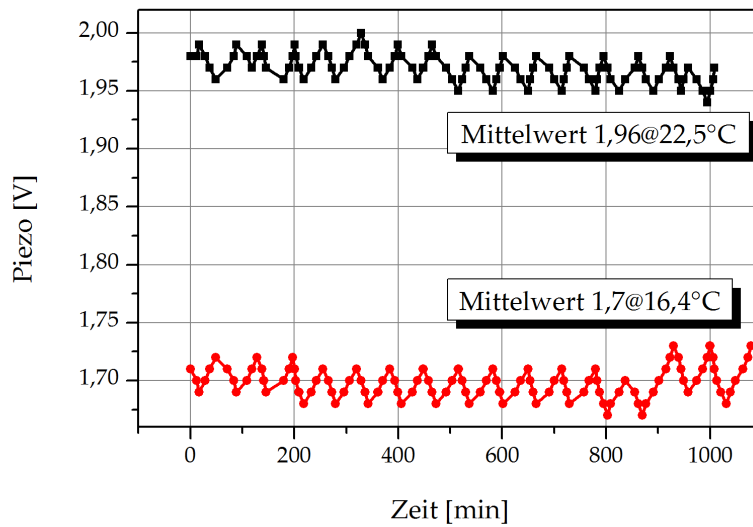


Abbildung 3.29.: Zwei Messungen mit je 18 Stunden Dauer über Nacht bei verschiedenen Einstellungen der aktiven Temperaturkontrolle für die Kupferschilde des Laboraufbaus.

verwendeten Resonatoren die Eigenschaft, dass ein Nulldurchgang des thermischen Ausdehnungskoeffizienten deutlich unter dem Gefrierpunkt für Wasser vorliegt. Dies ist konsistent mit anderen Arbeiten, zum Beispiel [68].

In Abbildung 3.29 sind zwei Langzeitmessungen gezeigt. Die beiden Messungen finden bei unterschiedlichen Temperaturen der Kupferschilde statt. Die Differenz beträgt  $\Delta T = (6,1 \pm 0,2)^\circ\text{C}$ . Die Mittelwerte dieser Oszillationen unterscheiden sich um 260 mV. Die entsprechende Frequenzverschiebung kann wieder mit (3.2.1) geschätzt werden und ist demnach:  $(87 \pm 1) \text{ MHz}$ .

Damit ist es möglich, die Nulldurchgangstemperatur und den Ausdehnungskoeffizienten zu bestimmen. In linearer Näherung sind die erforderlichen Beziehungen (siehe (2.2.27)):

$$\alpha(T) = a \cdot (T - T_0) = -\frac{1}{\nu} \frac{\Delta\nu}{\Delta T} \quad (3.3.2)$$

mit den Größen:  $T$  Referenztemperatur,  $T_0$  Nulldurchgangstemperatur,  $\nu$  Laserfrequenz und  $\Delta\nu$  der Frequenzverschiebung bei der Temperaturdifferenz  $\Delta T$ . Für die Referenztemperatur  $T = 19,5^\circ\text{C}$  kann ein Ausdehnungskoeffizient bei dieser Temperatur angegeben werden:

$$\alpha(19,5^\circ\text{C}) = (7,37 \pm 0,16) \times 10^{-8} \text{ K}^{-1} \quad (3.3.3)$$

Mit dem Wert ( $a = 2,2 \times 10^{-9} / \text{K}^2$ ) aus [68] für ULE-Resonatoren mit Fused Silica Spiegeln kommt man auf eine Nulldurchgangstemperatur von  $T_0 = (-14,0 \pm 0,7)^\circ\text{C}$ .

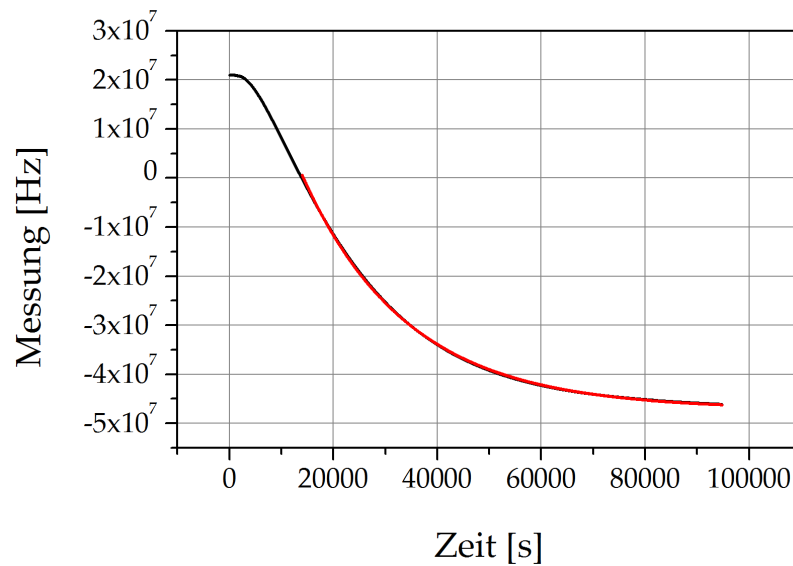


Abbildung 3.30.: Antwort der Resonanzfrequenz auf Änderung der Solltemperatur von 22,4 °C auf 16,4 °C.

### 3.3.5. Temperaturabhängigkeit der Resonanzen des Kapsel-Resonators

Messpunkt	Temperatur /°C	Frequenz /Hz
Start	22,40 ± 0,25	20 950 000 ± 2000
Ende	16,40 ± 0,25	-47 107 400 ± 1300
Differenz	6,0 ± 0,2	68 057 000 ± 3300

Tabelle 3.10.: Auswerten des Übergangs der Temperaturumstellung.

Analog zum vorhergehenden Kapitel kann man ebenfalls nach (2.2.27) die Null-durchgangstemperatur des zweiten Resonators berechnen. Dafür benötigt man die Daten aus Tabelle (3.10). Der Ausdehnungskoeffizient für diesen Aufbau ist damit:

$$\alpha(19,4\text{ °C}) = (5,8 \pm 0,2) \times 10^{-8} \text{ K}^{-1} \quad (3.3.4)$$

Mit dem Wert aus [68] ( $a = 2,2 \times 10^{-9} / \text{K}^2$ ) für ULE-Resonatoren mit Fused Silica Spiegeln kommt man auf eine Nulldurchgangstemperatur von  $T_0 = (-6,0 \pm 0,9) \text{ °C}$ .

Der Wert für den Parameter  $a$  aus der Gleichung (3.3.2) kann experimentell bestimmt werden. Dafür bestimmt man bei verschiedenen Ausgangstemperaturen  $T$  den zu einer Temperaturverschiebung korrespondierenden Frequenzversatz. Dabei wurde das

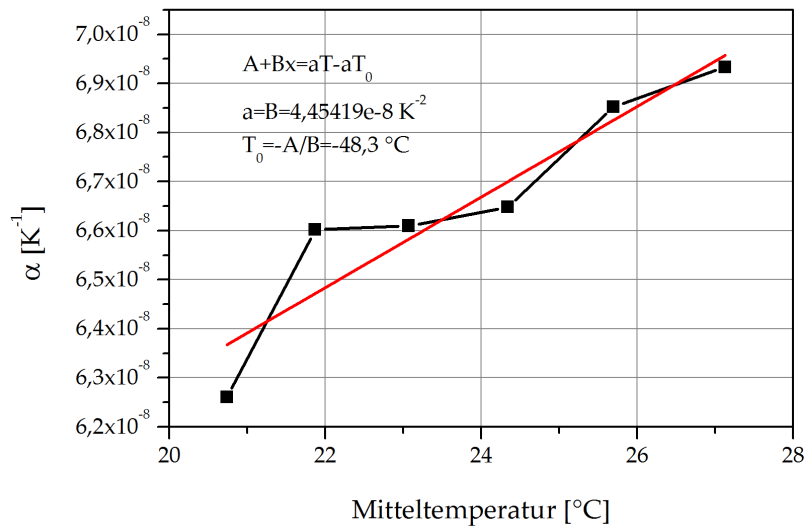


Abbildung 3.31.: Bestimmung des Parameters  $a$  und der Nulldurchgangstemperatur  $T_0$  aus verschiedenen Messungen.

Schwebungssignal der beiden Resonatoren genutzt. Der Laboraufbau blieb während der ganzen Messung unberührt, so dass die Änderungen der Schwebungsfrequenz ganz dem Kapselaufbau und der Temperaturumstellung (siehe Abbildung 3.30) zugeschrieben werden können. Diese Punkte sind in Abbildung 3.31 gezeigt. Eine lineare Anpassung liefert dann direkt die Werte für  $a$  und  $T_0$ . Da in dieser Arbeit nur relativ wenige Punkte in diese Messung eingeflossen sind, weichen die ermittelten Werte deutlich von den oben verwendeten Werten ab: Der Wert für  $a$  ist  $a = (45 \pm 4) \times 10^{-9} \text{ K}^{-1}$  und für die Nulldurchgangstemperatur  $T_0 = (-48 \pm 4) \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Diese passen nicht zu den aus der Literatur bekannten Werten. Der Wert aus [68] klingt ganz vernünftig und wird daher in dieser Arbeit verwendet.

Dabei wurde das Schwebungssignal der beiden Resonatoren genutzt. Der Laboraufbau blieb während der ganzen Messung unberührt, so dass die Änderungen der Schwebungsfrequenz ganz dem Kapselaufbau und der Temperaturumstellung (siehe Abbildung 3.30) zugeschrieben werden können.

Die Nulldurchgangstemperatur ist von dem Zusammenspiel des ULE-Materials mit den Fused-Silica-Spiegeln abhängig. Dabei spielen außerdem Drücke, wie sie zum Beispiel durch die Halterung aufgebracht werden, ebenfalls eine Rolle. Die verschiedenen Nulldurchgangstemperaturen ergeben sich aus den verschiedenen Lagerungen und den individuellen Verbindungen der Spiegel an den ULE-Abstandshalter.

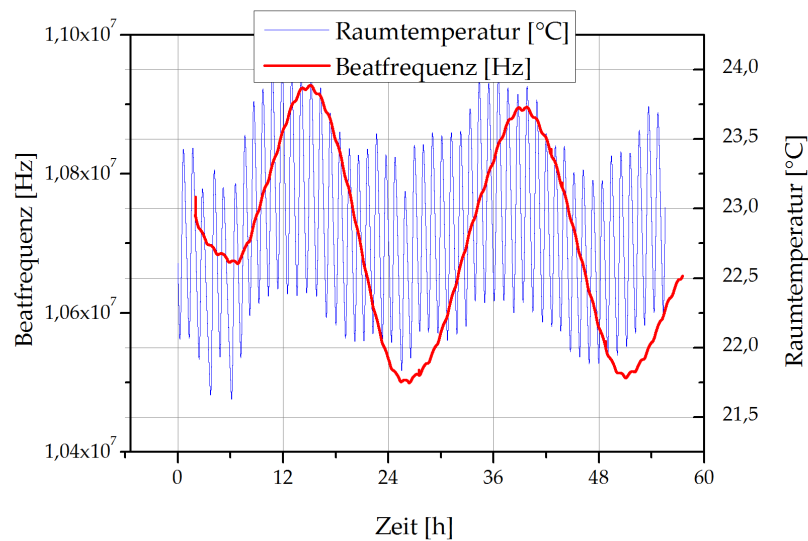


Abbildung 3.32.: Schwankungen der Raumtemperatur (blau) und der Beatfrequenz (rot) bei den folgenden Wärmebadaten: Labor  $16,4\text{ }^{\circ}\text{C}$  und Kapsel  $22,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### 3.3.6. Temperaturabhängigkeit des Schwebungssignals

Die Temperaturabhängigkeit des Schwebungssignals wurde sowohl vor als auch nach der Umstellung der Temperatur des Wärmebads für den Kapselaufbau gemessen. Die Umgebungstemperatur und auch das Schwebungssignal schwanken bei zwei Frequenzen mit unterschiedlicher Amplitude. Diese Modulation ist in Abbildung 3.32 gezeigt, wobei die Umgebungstemperatur in blau gezeichnet ist.

Zunächst wird der Temperaturverlauf mit der folgenden Funktion angepasst:

$$T(t) = T_0 + A_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}(t - t_0) + \phi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2}(t - t_0) + \phi_2\right) \quad (3.3.5)$$

wobei  $T(t)$  die Raumtemperatur zum Zeitpunkt  $t$  und  $T_0$  die konstante gemittelte Raumtemperatur ist. Die Größen  $A_1$ ,  $T_1$  und  $A_2$ ,  $T_2$  beschreiben die Amplituden und die Periodendauern der Schwingungen. Für die Phasenbeziehung sind noch die beiden konstanten Phasenterme  $\phi_1$  und  $\phi_2$  zugelassen. Der Fit ist in Abbildung 3.33 gezeigt. Die wesentlichen Daten sind in Tabelle 3.11 zusammengefasst.

Es zeigt sich, dass die Modulation mit dem Index 2 eine schnelle Modulation der Klimaregelung mit einer Periodendauer von  $T_2 = 64\text{ min}$  ist. Die langsame Schwingung mit einer Periodendauer von  $T_1 = 22\text{ h}$  entspricht ungefähr dem Tag-Nacht-Wechsel. Die gemessenen Modulationen sind pro Periode leicht unterschiedlich, so dass der Fit eine Abweichung von den zu erwartenden 24 Stunden aufweist, welche in an-

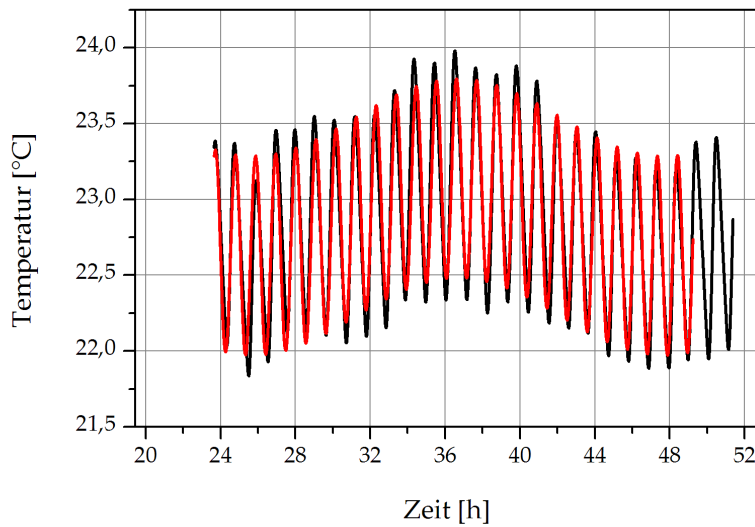


Abbildung 3.33.: Anpassung der Raumtemperatur mit der Fitfunktion gegeben in (3.3.5).

	$i = 1$	$i = 2$
$A_i$	$(0,2549 \pm 0,0007) \text{ } ^\circ\text{C}$	$(0,6569 \pm 0,0008) \text{ } ^\circ\text{C}$
$T_i$	$(79\,370 \pm 120) \text{ s}$	$(3863,87 \pm 0,08) \text{ s}$
$\phi_i$	$4,140 \pm 0,007$	$0,220 \pm 0,002$

Tabelle 3.11.: Fitparameter einer Anpassung an die Daten in Abbildung 3.33.

deren Datensätzen entsprechend aufgefüllt werden würden. Mit den Erkenntnissen aus 3.2.3 lässt sich eine Abschätzung für die induzierte Frequenzverschiebung aus dem Wechsel der Raumtemperatur berechnen, wenn keine aktive Temperaturstabilisierung vorhanden ist: Dazu liest man die Sensitivitäten bei  $\tau_A = 24 \text{ h}$  ab und berechnet die Längenänderung des Abstandshalters. Daraus folgt die Frequenzverschiebung zu  $(1,29 \pm 0,06) \text{ MHz}$  als Mittel über beide Aufbauten.

Die gleiche Analyse wird mit dem Beatsignal gemacht. Da hier eine Asymmetrie zwischen den Flanken, die den Tag-Nacht- beziehungsweise dem Nacht-Tag-Wechsel entsprechen, herrscht, wird jede Flanke für sich gefittet.

Um den Koeffizienten der Frequenzverschiebung pro Kelvin zu berechnen, kombiniert man die Ergebnisse aus den Tabellen 3.11 und 3.12 mittels einer einfachen Mittelwertbildung (siehe 3.13). Der Koeffizient  $k$  der Frequenzverschiebung pro Kelvin

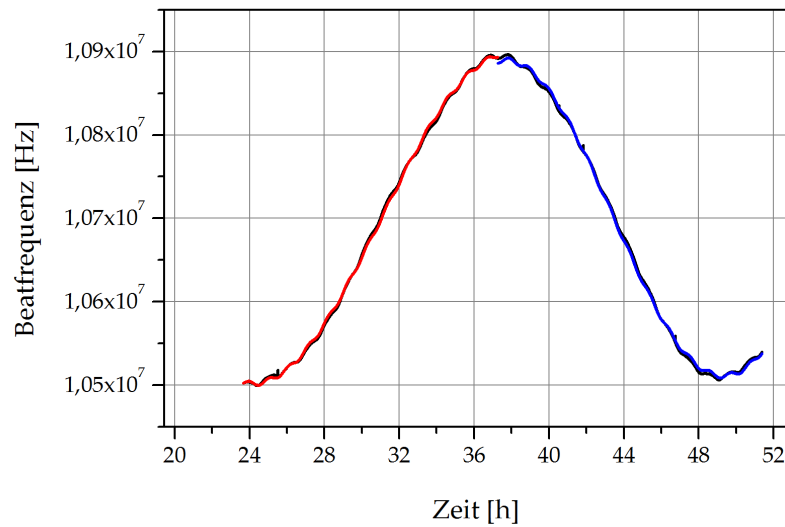


Abbildung 3.34.: Schwankungen der Beatfrequenz über eine Dauer von einem Tag bei den folgenden Wärmebadaten: Labor  $16,4\text{ }^{\circ}\text{C}$  und Kapsel  $22,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ . In rot und blau sind Parameterfits an die Daten angepasst.

	$i = 1$	$i = 2$
linke Flanke (rot) $A_i$	$(197\,958 \pm 28)\text{ Hz}$	$(2655 \pm 15)\text{ Hz}$
linke Flanke (rot) $T_i$	$(99\,164 \pm 29)\text{ s}$	$(3816,1 \pm 9,0)\text{ s}$
linke Flanke (rot) $\phi_i$	$4,6029 \pm 0,0004$	$-0,19 \pm 0,01$
rechte Flanke (blau) $A_i$	$(189\,301 \pm 27)\text{ Hz}$	$(2744 \pm 35)\text{ Hz}$
rechte Flanke (blau) $T_i$	$(83\,842 \pm 18)\text{ s}$	$(3871 \pm 1)\text{ s}$
rechte Flanke (blau) $\phi_i$	$4,081 \pm 0,001$	$0,38 \pm 0,03$

Tabelle 3.12.: Fitparameter einer Anpassung an die Daten in Abbildung 3.34.

berechnet sich dann zu  $(760 \pm 26)\text{ kHz K}^{-1}$  für die langsame Modulation und  $(4,1 \pm 0,1)\text{ kHz K}^{-1}$  für die Schnelle.

In Abbildung 3.35 sind die Schwankungen für einen längeren Zeitraum von mehr als 95 Stunden gezeigt. Neben den Oszillationen, von denen eine zuvor analysiert wurde, sieht man eine zufällige Drift in der Beatfrequenz, der einem Random-Walk ähnelt und unvorhersehbar wandert. Diesen Random-Walk sieht man ebenfalls in Abbildung 3.37, nachdem das Wärmebad in der Kapsel ebenfalls auf  $16,4\text{ }^{\circ}\text{C}$  abgesenkt wurde.



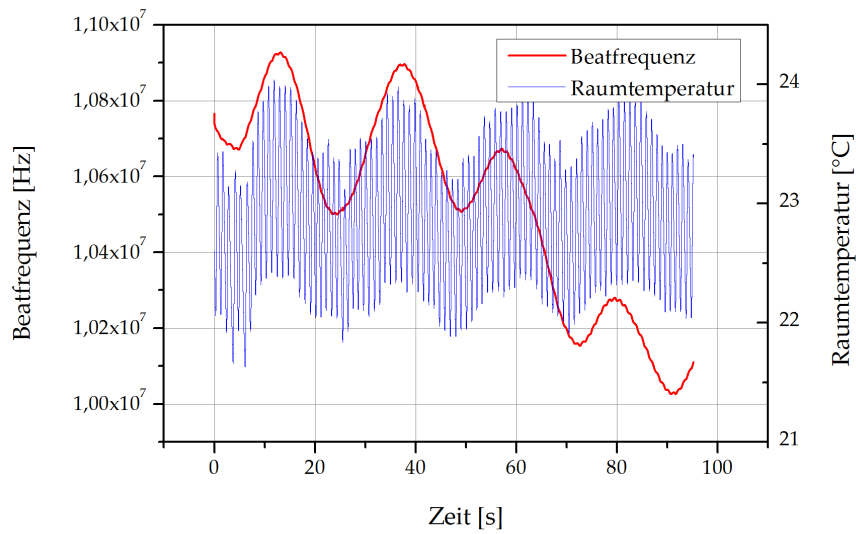


Abbildung 3.35.: Schwankungen der Raumtemperatur (blau) und der Beatfrequenz (rot) über einen längeren Zeitraum von knapp 100 Stunden bei den folgenden Wärmebaddaten: Labor 16,4 °C und Kapsel 22,4 °C.

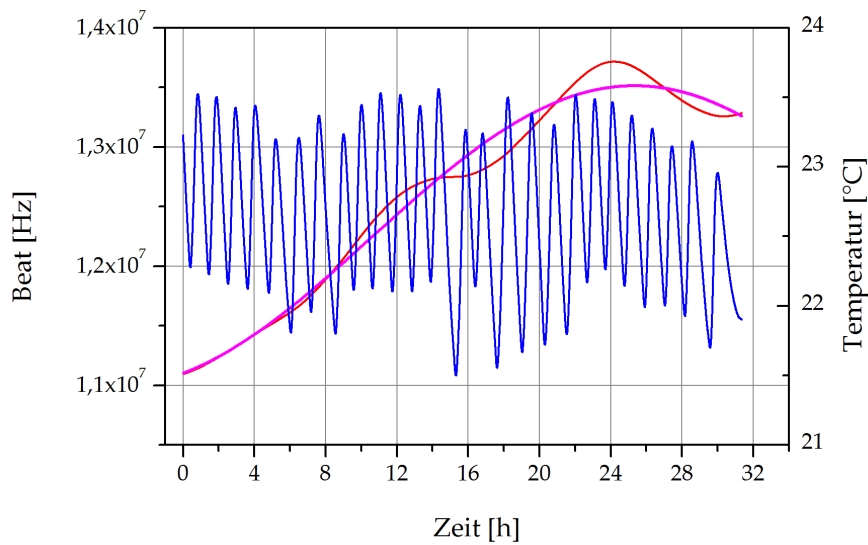


Abbildung 3.36.: Schwankungen der Raumtemperatur (blau) und der Beatfrequenz (rot) über einen längeren Zeitraum bei den Wärmebaddaten: Labor 16,4 °C und Kapsel 16,4 °C. An die Frequenz wird eine Sinusfunktion angepasst.

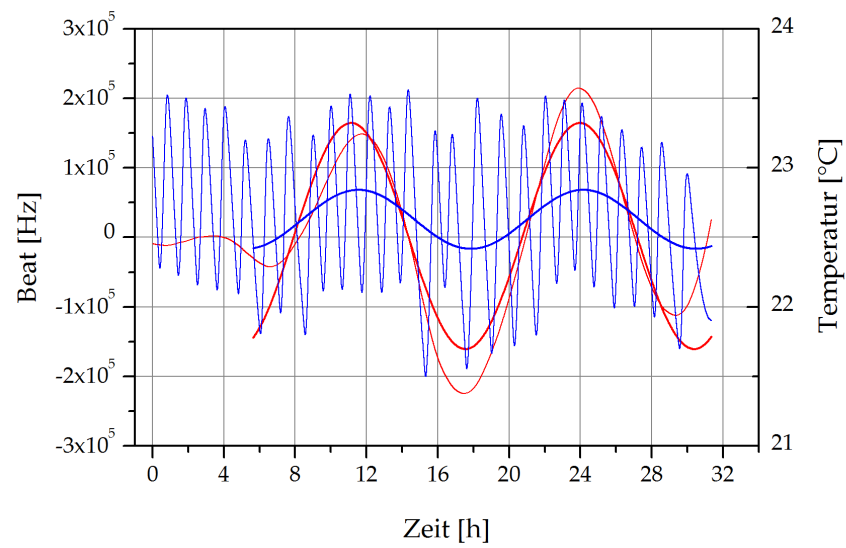


Abbildung 3.37.: Schwankungen der Raumtemperatur (blau) und der Beatfrequenz (rot) innerhalb von 31 Stunden, nachdem eine angepasste Sinusfunktion von den Daten in Abbildung 3.36 abgezogen wurde. Die helleren Farbtöne markieren die Daten, die satteren Farbtöne die Fitfunktionen.

$T/s$	$A_{\text{Beat}}/\text{Hz}$	$A_{\text{Temp}}/m^{\circ}\text{C}$
87 460	$19\,400 \pm 6000$	$255,0 \pm 0,7$
3850	$2700 \pm 60$	$657,0 \pm 0,7$

Tabelle 3.13.: Mittelwerte der Fitparameter.

$T/s$	$k/\text{kHz K}^{-1}$
87 460	$760 \pm 26$
3850	$4,1 \pm 0,1$

Tabelle 3.14.: Bestimmung des Koeffizienten  $k$  zwischen Temperaturschwankung und Frequenzschwankung.

Für 31 Stunden mit den neuen Einstellungen wurde zur Analyse eine angepasste Sinus-Funktion als Näherung abgezogen, wie in Abbildung 3.37 gezeigt. Die Analyse zeigt bei dem ausgewählten Datensatz eine Periodendauer der Schwankungen in der Raumtemperatur durch die Klimaautomatik von 75 Minuten, das ist etwas länger als in den Daten, welche zuvor gefittet wurden. Diese Abweichungen sind den Außentemperaturen sowie der Regelung der Klimaanlage geschuldet, aber die Größenordnungen stimmen überein.

Interessant ist die Analyse des Schwebungssignals, welches jetzt zwei Änderungen gegenüber der vorherigen Analyse aufweist:

- Die langsame Modulation zeigt eine Halbierung der Periodendauer und ist jetzt bei ca. 12,7 Stunden, sowohl im Schwebungssignal als auch in der Raumtemperatur. Da zur Zeit der Messung die Außentemperaturen ebenfalls deutlich schwankten, ist die Klimaautomatik von ihrer vorherigen Periodendauer abgewichen.
- Die durchschnittliche Amplitude ist mit einem Wert von  $(163,0 \pm 0,2)$  kHz in derselben Größenordnung als die zuvor gemessenen  $(194 \pm 6)$  kHz. Der Koeffizient  $k$  bleibt mit  $(767 \pm 9)$  kHz K<sup>-1</sup> dicht an dem vorher gemessenen Wert von  $(760 \pm 30)$  kHz K<sup>-1</sup>. Dies deutet auf eine Unabhängigkeit von den Lasersystemen hin, da ansonsten ein kleinerer Wert des Koeffizienten zu erwarten gewesen wäre. Unter Umständen reagiert der verwendete Frequenzgenerator der Referenzfrequenz auf diesen Zeitskalen auf Temperaturunterschiede in der Umgebungstemperatur.

- Die schnelle Modulation wird nicht mehr signifikant gemessen und verschwindet im Rauschen der Signalerfassung. Hier zeigt sich, dass eine Absenkung der Temperatur des Wärmebades – und damit auch des Abstandshalters – zu einer niedrigeren Sensitivität auf Temperaturschwankungen führt. Dies ist damit erklärbar, dass sich der Abstandshalter aus ULE bei dieser Temperatur der materialintrinsicen Eigenschaft des Nulldurchgangs der Sensitivität annähert.

Die Absenkung der Temperatur des Wärmebades hat also auch zu einer erhöhten Qualität des Schwebungssignals über lange Zeiträume (in Bereich mehrerer Stunden und darüber) geführt.

### 3.3.7. Leistungsinduzierte Frequenzverschiebung

Licht, welches in den optischen Resonator eingekoppelt wird, zirkuliert mehrere hunderttausend Mal zwischen den Spiegeln, bevor die Energie aus dem Resonator entweichen ist. Die gesamte Leistung  $P$  im Resonator ist dadurch in gleichem Maße überhöht. Sie kann mit der folgenden Formel über die Finesse  $\mathcal{F}$  mit der eingekoppelten Leistung  $P_{\text{in}}$  verknüpft werden:

$$P \approx \frac{\mathcal{F}}{\pi} P_{\text{in}} \quad (3.3.6)$$

In dieser Arbeit werden typischerweise Leistungen der Größenordnung  $P_{\text{in}} = 70 \mu\text{W}$  genutzt. In Kapitel 3.3.1 wurden die Finessen der beiden Resonatoren zu  $\mathcal{F}_{\text{Lab}} = 485\,000 \pm 5\,000$  und  $\mathcal{F}_{\text{Kapsel}} = 330\,000 \pm 3\,400$  bestimmt. Die zirkulierenden Leistungen sind dabei  $\approx 10 \text{ W}$  und  $\approx 7 \text{ W}$ . Diese Leistung konzentriert sich auf dem konkaven Spiegel auf einer Fläche, die über den Strahldurchmesser  $\omega_0 = 271 \mu\text{m}$  definiert ist. Auf dieser Fläche ist für die TEM<sub>00</sub>-Mode die Intensität im ersten Fall  $14 \frac{\text{kW}}{\text{cm}^2}$  und im Zweiten  $9 \frac{\text{kW}}{\text{cm}^2}$ . Ein kleiner Teil dieser Leistung wird von der Beschichtung der Spiegel absorbiert und führt zu einer lokalen Erwärmung. Über den thermischen Ausdehnungskoeffizienten wird somit ebenfalls die Resonatorlänge in Abhängigkeit der Leistung verändert. Ein Leistungsrauschen des Lasers übersetzt sich damit direkt in ein Frequenzrauschen der Resonanzfrequenz.

#### Transferkoeffizient

Um den Transferkoeffizienten zu ermitteln, wird der Einfluss der zirkulierenden Leistung auf die Resonanz der Resonatoren untersucht. Dabei wird ein Resonator als Referenz betrieben, und der zweite dient zur Bestimmung des Koeffizienten. Hierzu wird die Leistung über den AOM moduliert. Die Ansteuerung des AOMs wird von einem Funktionsgenerator übernommen, der den AOM mit einer Rechteckspannung betreibt. Die optische Leistung wurde für diese Messung erhöht, und die Lock-Parameter so eingestellt, dass sie an ein Optimum für beide Situationen angepasst wurden. Die optischen Leistungen bei den jeweiligen Spannungen wurden mit einem Tastkopf gemessen. Gleichzeitig mit dem Rechtecksignal des Funktionsgenerators wurde das

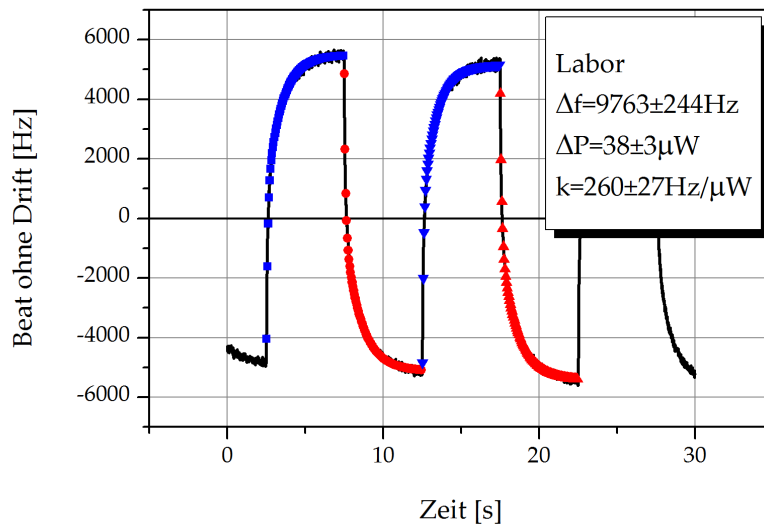


Abbildung 3.38.: Bestimmung des Leistungskoeffizienten, indem der Sprung des Schwebungssignals aufgrund einer Leistungsmodulation gemessen wird. Hier die Daten für das Laborsystem.

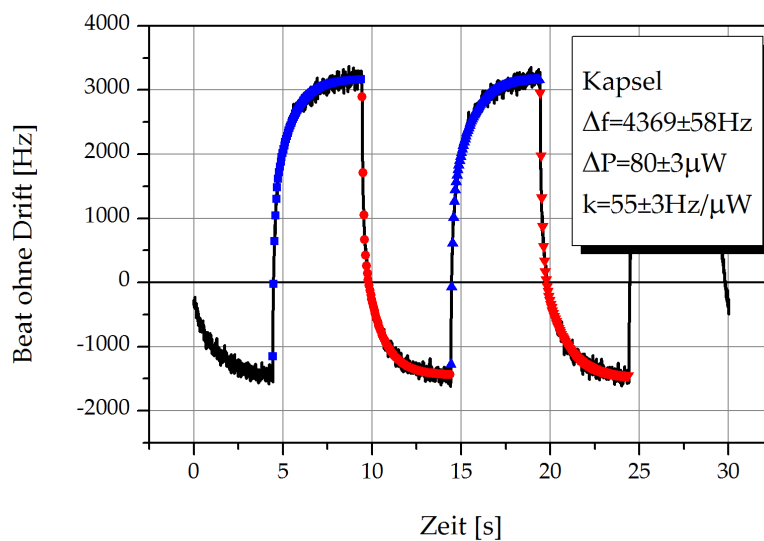


Abbildung 3.39.: Bestimmung des Leistungskoeffizienten, indem der Sprung des Schwebungssignals aufgrund einer Leistungsmodulation gemessen wird. Hier die Daten für das Kapselsystem.

Schwebungssignal aufgezeichnet. Die Daten werden durch den doppelt exponentiellen Zerfall

$$v(t) = v_0 + A e^{-\frac{x-x_0}{B}} + C e^{-\frac{x-x_0}{D}} \quad (3.3.7)$$

angepasst.

In Abbildung 3.38 sind die Daten für das Laborlasersystem gezeigt. Die Zeitkonstanten sind  $t_1 = (1,77 \pm 0,14)$  s und  $t_2 = (0,27 \pm 0,07)$  s. Ebenso sind in Abbildung 3.39 die Daten für das Kapselsystem gezeigt.

Aufbau	Leistung $\Delta P$	Frequenz $\Delta \nu$	Transferkoeffizient
Labor	$(37,5 \pm 3,0) \mu\text{W}$	$(9800 \pm 250) \text{ Hz}$	$(260 \pm 27) \text{ Hz } \mu\text{W}^{-1}$
Kapsel	$(80 \pm 3) \mu\text{W}$	$(4370 \pm 60) \text{ Hz}$	$(55 \pm 3) \text{ Hz } \mu\text{W}^{-1}$

Tabelle 3.15.: Transferkoeffizienten der leistungsinduzierten Frequenzverschiebung.

Zur Berechnung der Transferkoeffizienten ist aus den Daten nur noch der Frequenzsprung zu extrahieren und durch den Sprung in der Leistung zu teilen. Die Werte sind in der Tabelle 3.15 gegeben. Um die leistungsinduzierte Frequenzverschiebung auf 1 Hz zu limitieren, ist es also erforderlich, die Laserleistung für das Laborsystem auf maximal 4 pW und für das Kapselsystem auf maximal 18 pW zu kontrollieren. Für diese Kontrolle ist ein Regelkreis für die Laserleistung implementiert und bei den Messungen aktiviert. Da dieses Niveau der Stabilisierung der Lasersysteme nicht erreicht wurde, ist der Effekt nicht eindeutig messbar. In einer anderen Arbeit wurde der Koeffizient zu  $(143 \pm 9) \text{ Hz } \mu\text{W}^{-1}$  bestimmt [68].

### 3.4. Stabilitätsmessungen

In Abschnitt 3.3 wurden die Messergebnisse für die beiden Systeme vorgestellt. Wie zuvor erwähnt, werden dazu die beiden Laser auf die jeweiligen Resonatoren stabilisiert und ein Schwebungssignal hergestellt. Pro Aufbau wird das Licht nach dem EOM über einen Faserteiler<sup>14</sup> geteilt und ein Teil zur Detektion geleitet. Eine unabhängige Charakterisierung der einzelnen Systeme ist damit nicht möglich. Die Überlagerung erfolgt in einem weiteren Faserteiler, bevor das Licht von der schnellen Photodiode<sup>15</sup> detektiert wird. Bei den Messungen war die Leistungsstabilisierung immer aktiviert. Im Folgenden wird das Schwebungssignal der beiden Aufbauten analysiert werden. Dabei wird eine relative Stabilität der gemeinsamen Messung von  $1,02 \times 10^{-14}$  (OAD<sup>16</sup>)

<sup>14</sup>Thorlabs PMC1550-90B-APC

<sup>15</sup>Discovery Semiconductors DSC30S

<sup>16</sup>Overlapping Allan Deviation

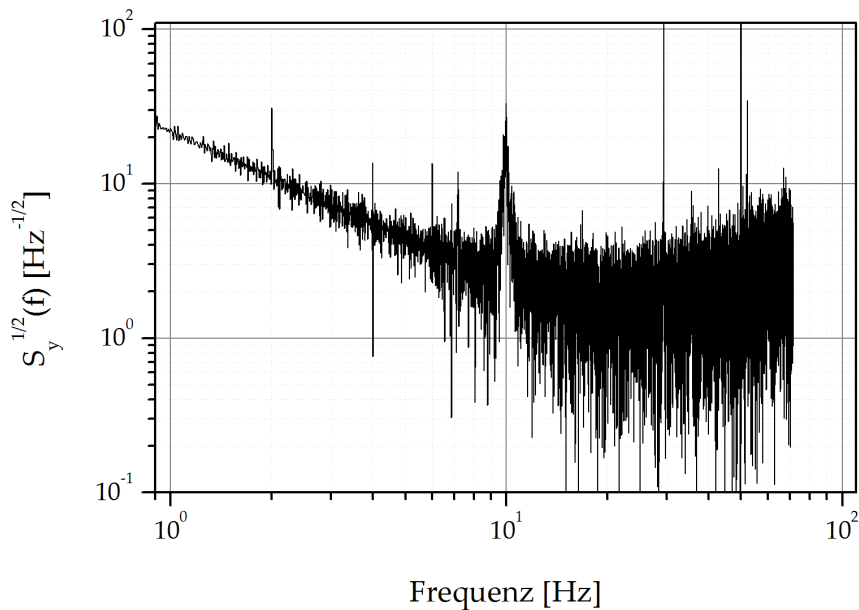


Abbildung 3.40.: Spektrale Rauschleistungsdichte für die gemeinsame Messung zwischen dem Laser- und dem Kapselaufbau.

beziehungsweise  $8,9 \times 10^{-15}$  (OHAD<sup>17</sup>) bei 3,5 s erreicht, siehe Abbildung 3.41. Die gemessene Stabilität errechnet sich aus den einzelnen durch Addition. Dadurch wird die Stabilität der einzelnen Systeme durch den Faktor 2 für die Allan-Variation beziehungsweise  $\sqrt{2}$  für die Allan-Standardabweichung abgeschätzt, da die beiden Systeme ungefähr die gleiche Stabilität haben. Damit wird für die einzelnen Systeme eine Stabilität von unter  $7,2 \times 10^{-15}$  erreicht wird.

Um die Allan-Standardabweichung aufzunehmen, wird das Schwebungssignal des Detektors mit einem externen Lokaloszillator<sup>18</sup> von über 1,5 GHz in einen Frequenzbereich typischerweise von  $(20 \pm 15)$  MHz herunter gemischt. Diese Frequenz kann dann mit einer Zählerkarte<sup>19</sup> und einem Computer verarbeitet werden. Der Frequenzsynthesizer sowie die Zählerkarte werden mit derselben externen Referenz bei 10 MHz betrieben, um die beiden Lokaloszillatoren in den Geräten zu synchronisieren. Die Randbedingungen des Frequenzzählers sind durch die PC-Hardware limitiert, welches ein fallturmtauglicher Embedded-PC<sup>20</sup> mit Dual-Core Prozessor ist. Das Auslesen und der Datentransfer von der Zählerkarte fordert den Prozessor derart, dass die Frequenz nicht schneller als mit  $\approx 142$  Hz gesampelt werden kann, beziehungsweise

<sup>17</sup>Overlapping Hadamard Allan Deviation

<sup>18</sup>Agilent Technologies HP 8664A

<sup>19</sup>GeoTest GTX 2220

<sup>20</sup>Auf Basis von National Instruments PXI.

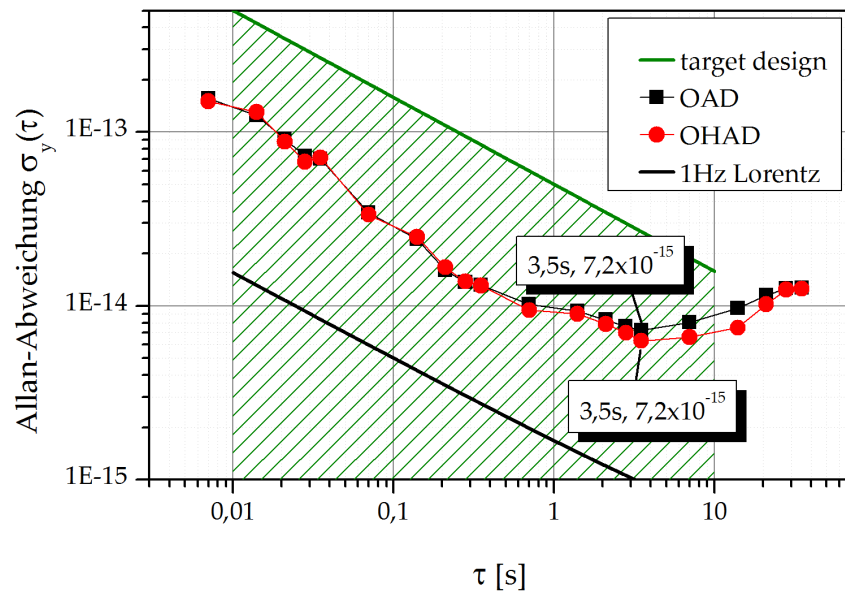


Abbildung 3.41.: Allan-Standardabweichung eines Lasersystems aus der Messung zwischen dem Laser- und dem Kapselaufbau. Es wurde eine lineare Drift vom Schwebungssignal abgezogen.



genau 7 ms zwischen der Erfassung von zwei Messpunkten liegen. Damit werden typischerweise Messreihen von 180 s aufgezeichnet, da bei diesem Zeitintervall in der Allan-Standardabweichung für hohe Werte von  $\tau > 7$  s das zu erwartende Random-Walk Verhalten sichtbar wird.

In Abbildung 3.41 ist die Allan-Varianz einer Messung gezeigt, in der die Stabilität eines der beiden Laser den Wert  $7,2 \times 10^{-15}$  Hz bei 3,5 s in der überlappenden Allan-Varianz erreicht wurde. Ebenfalls wurde die theoretische Allan-Varianz für einen Laser mit der vollen Linienbreite von 1,6 Hz (FWHM) eingezeichnet, dessen Allan-Standardabweichung einem Wert von  $1,2 \times 10^{-15} \frac{1}{\sqrt{\tau}}$  entspricht.

### 3.5. Resümee des Betriebs im Labor

Im Folgenden wird die Charakterisierung der Lasersysteme zusammengefasst. Dabei wurden die Temperatureinflüsse auf das Laborsystem zunächst mit einer Laserquelle (Orbits Lightwave) untersucht, die später jedoch gegen eine neue Laserquelle (RIO) ausgetauscht wurde.

Zunächst wurde in Kapitel 3.3.1 die Linienbreite und die Finesse der beiden Aufbauten untersucht. Laut Datenblatt sollen die beiden Resonatoren eine volle Linienbreite  $\Delta_{1/2}$  von 8 kHz und eine Finesse zu 400 000 besitzen. Die Messungen zeigen für das Laborsystem einen Wert für die volle Linienbreite von  $\Delta_{1/2} = (6370 \pm 60)$  Hz und für das Kapselsystem  $\Delta_{1/2} = (9800 \pm 500)$  Hz. Die berechneten Finessen ergeben sich für das Laborsystem zu  $\mathcal{F} = 485\,000 \pm 5000$  und für das Kapselsystem zu  $\mathcal{F} = 316\,000 \pm 4700$ . Man sieht, dass das Laborsystem die Spezifikationen übertrifft, das Kapselsystem jedoch schlechter abschneidet. Als Ursache kommen Verunreinigungen der Spiegelflächen und damit eine Reduzierung der Reflektivität auf 99,999 01 % in Frage, was einer relativen Verschlechterung von 2 ppm entspricht. Die Resonatoren erfüllen damit ihr Design für diese Arbeit.

Die Resonatoren werden durch aktiv geregelte Temperaturschilde von den Schwankungen der Umgebungstemperatur abgeschirmt. Die erforderliche theoretische Abschätzung der Sensitivitäten wurde in Kapitel 3.2.3 vorgenommen. Die Zeitkonstanten für einen passiven Betrieb und daraus die Sensitivitäten auf Temperaturschwankungen wurden berechnet. Die Hitzeschilde wirken im passiven Betrieb als Tiefpassfilter, welche effektiv Temperaturschwankungen mit Periodendauern unterdrücken, die über einen Fallturmeinsatz auftreten. Im aktiven Betrieb wird in Kapitel 3.3.3 trotzdem eine Abhängigkeit von einer Schwingung der Umgebungstemperatur festgestellt, der mit einer Absenkung des Temperaturbades des Resonators begegnet werden kann, da der thermale Ausdehnungskoeffizient (CTE) näher an den Nulldurchgang heranrückt.

Die Sensitivitäten auf externe Vibrationen wurden in Kapitel 3.3.2 untersucht. Das beschleunigungsinduzierte Frequenzrauschen für den Laboraufbau und den Kapselaufbau wurde in einer Allan-Standardabweichung dargestellt. Dabei wurde gezeigt, dass die externen Vibrationen ein Frequenzrauschen erzeugen, dass eine Größenordnung

unter dem gemessenen Wert für die Lasersysteme liegt.

Die leistungsinduzierten Frequenzverschiebungen sind in Kapitel 3.3.7 bestimmt worden. Dabei wurden als Ergebnis die Transferkoeffizienten für den Laboraufbau zu  $k = (260 \pm 30) \text{ Hz pW}^{-1}$  und für den Kapselaufbau zu  $k = (55 \pm 3) \text{ Hz pW}^{-1}$  gemessen. Daraus resultiert, dass die Leistungen der Laserquellen für das erreichte Niveau auf eine Leistungsabweichung von  $\Delta P < 3 \text{ nW}$  gehalten werden müssen. Die Spezifikation der verwendeten Laserquellen sieht einen Wert für das relative Frequenzrauschen von  $RIN < -130 \text{ dB Hz}^{-1}$  ab  $100 \text{ Hz}$  vor. Für kleinere Frequenzen ist kein Wert verfügbar. Es konnte kein signifikantes Leistungsrauschen aus dem Detektor abgeleitet werden, da ein Signal im Signal-zu-Rausch-Verhältnis des Detektors liegen müsste.

Das thermische Rauschen wurde analog zu [68] mit einer Allan-Standardabweichung von  $\sigma_y(\tau) = 5,4 \times 10^{-16}$  bestimmt. Es liegt damit eine Zehnerpotenz unter dem in dieser Arbeit erreichten Wert in der Stabilität.

### 3.6. Kapselaufbau und Abwurf

Die Besonderheit dieser Arbeit ist die kompakte Integration eines Resonatoraufbaus in eine Fallkapsel des ZARM für den Betrieb im Fallturm. Dabei wurde in einem Abwurf ein hochstabiles Lasersystem mit einem optischen Resonator unter Mikrogravitation mit der im vorherigen Kapitel genannten Stabilität von  $7,2 \times 10^{-15}$  bei  $3,5 \text{ s}$  demonstriert.

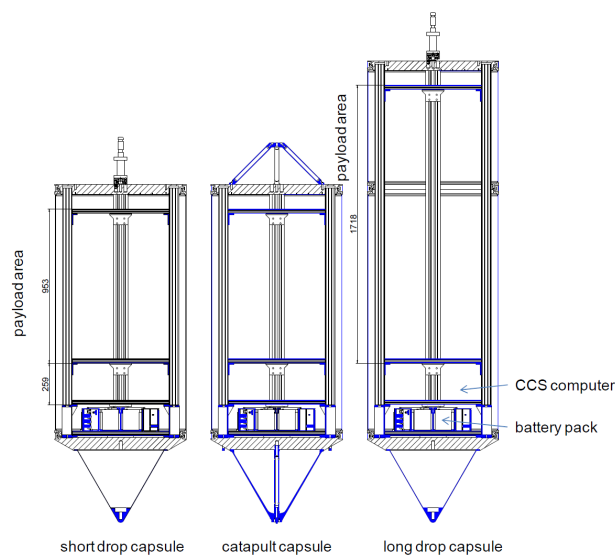
Durch den kompakten Aufbau mussten Kompromisse in der Gestaltung des Experiments vorgenommen werden, da die Fallkapsel den äußeren Abmessungen sowie dem Gewicht und der Leistungsaufnahme enge Grenzen setzt. Im Folgenden wird die Fallkapsel als Experimentumgebung vorgestellt und die technische Umsetzung des Lasersystems erläutert.

#### 3.6.1. Fallturm Experimentplattform

Die Informationen und technischen Zeichnungen stammen aus dem Handbuch für den Fallturmbetrieb [95].

Das Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation bietet mit dem Fallturm (siehe Abbildung 3.42b) eine in Europa einzigartige Plattform für Experimente unter Mikrogravitation. Der Bau des Fallturms Bremen als Teil des Instituts ZARM wurde von seinem Gründer und Leiter Hans Rath initiiert.

Der Fallturm ist mit seiner Höhe von  $146 \text{ m}$  durch den weißen Turm mit Glasspitze ein Wahrzeichen der Hansestadt Bremen geworden. Er besitzt eine  $122 \text{ m}$  hohe Stahlröhre, in welcher eine Fallkapsel  $110 \text{ m}$  hinunterfällt, bevor sie nach  $4,74 \text{ Sekunden}$  in einem Auffangbehälter abgebremst wird. Die Fallröhre wird auf  $10 \text{ Pa}$  evakuiert, so dass die Kapsel durch den Luftwiderstand nur noch eine Restbeschleunigung in der Größenordnung von  $10 \times 10^{-6} \text{ g}$  erfährt. Daher kann davon gesprochen werden, dass



(a) Diskretes Steuersignal für den Piezotreiber kombiniert mit der Umgebungstemperatur.



(b) Errechnete Frequenzverschiebung kombiniert mit der Umgebungstemperatur.

Abbildung 3.42.: Kapselstrukturen für den Betrieb im Fallturm. In der Mitte die modifizierte kurze Fallkapsel, welche für den Katapulteinsatz bereit ist.

der Fallturm eine Umgebung in Mikrogravitation für Experimente bereitstellt. Dieses Angebot wird rege angenommen, und so werden jährlich ca. 400 Abwürfe realisiert.

Im Jahr 2004 wurde die Technik des Fallturms um eine Katapultanlage erweitert. Hierbei wird die Fallkapsel nicht mehr an einem Kran auf die Höhe gezogen und fallen gelassen, sondern aus der Abbremskammer mit einem hydraulisch getriebenen Kolben nach oben beschleunigt und freigegeben. Die Flugbahn beschreibt eine senkrechte Wurfparabel mit der doppelten Wegstrecke des Fallexperiments, da deren Scheitelpunkt nahe der Turmspitze liegt.

Aufgefangen werden die Kapseln in beiden Fällen von einem Abbremsbehälter, der mit Styroporkugeln gefüllt ist. Die Kapseln werden innerhalb von wenigen hundert Millisekunden mit bis zu vierzigfacher Erdbeschleunigung abgebremst und kommen in diesem Styroporbad zur Ruhe.

Für den Katapult- oder Fallturmbetrieb kommen unterschiedliche Kapselstrukturen zum Einsatz, wobei die Katapultkapsel auch uneingeschränkt für den Fallturmbetrieb genutzt werden kann. In Abbildung 3.42a sind die drei Kapselstrukturen für die verschiedenen Anwendungen gezeigt. Man kann sofort erkennen, dass es zwei unterschiedliche Größen (Höhen) der Kapselstrukturen gibt. Die kurze Höhe ist dabei sowohl für den Fall- als auch den Katapultbetrieb geeignet, die lange jedoch ausschließlich für den Fallbetrieb.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde bei der Projektplanung als Zielplattform die kleine

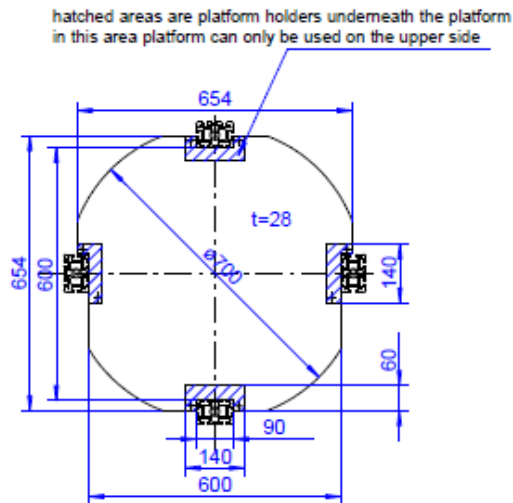


Abbildung 3.43.: Kapsel Plattform.

Fallkapsel gewählt, da zu diesem Zeitpunkt das größere Platzangebot in einer langen Kapsel als nicht notwendig erschien. Damit stehen für das Experiment eine maximale vertikale Abmessung von 95 cm zur Verfügung. Da die Kapseln zylindrisch geformt sind, ist in Abbildung 3.43 die Dimension der eingezogenen Plattformen gezeigt. Von dem Außendurchmesser mit einem Wert von 70 cm bleibt durch die Aussparungen der vertikalen Regalstruktur nur eine durchgängige Fläche mit dem Radius von 60 cm.

Laut dem Handbuch für den Fallturmbetrieb ist das maximale Gewicht der kurzen Kapsel für den Fallbetrieb auf 500 kg limitiert. Abzüglich der für den Betrieb notwendigen Komponenten bleiben für die Nutzlast, sprich das eigentliche Experiment, noch etwas mehr als 260 kg.

Für den elektrischen Betrieb der Komponenten stehen Batterien bereit, die dem Experimentator eine Versorgungsspannung von 22,5 V bis 30 V mit einer maximalen Stromstärke von 40 A anbieten. Werden weitere Spannungen benötigt, wie zum Beispiel in dieser Arbeit<sup>21</sup>, dann müssen diese aus der Kapsel-Versorgungsspannung abgeleitet werden. Dazu kommen entweder einfache Spannungsteiler oder DC/DC Wandler zum Einsatz. In dieser Arbeit werden DC/DC Wandler mit 24 V Eingangsspannung verwendet, die sowohl  $\pm 15$  V als auch 5 V erzeugen. Die letztgenannte Spannung wird unter anderen für die Laserquelle verwendet.

Zur Kontrolle des Experiments ist ein Embedded-PC erforderlich, da manuelle Zugriffe während dem Fallturmbetrieb offensichtlich nicht möglich sind. Zu diesem Zweck wird jede Kapsel mit einem Kapselkontrollsystem<sup>22</sup> ausgestattet, welches ein Computersystem von National Instruments ist, auf dem LabView Realtime läuft. Zusätzlich sind verschiedene analoge und digitale Ein- und Ausgänge eingebaut und für

<sup>21</sup>Die Eigenbau-Elektronik benötigt in der Regel zwei Versorgungsspannungen:  $\pm 15$  V.

<sup>22</sup>CCS: Capsule Control System

den Experimentator nutzbar. Die Programmierung erfolgt per National Instruments LabView.

### 3.6.2. Integration des Experiments

In Abbildung 3.44 ist die vollständig integrierte Fallkapsel mit dem hochstabilen Lasersystem gezeigt. Man erkennt die Stützstruktur (Stringer), an welchen die insgesamt sechs Plattformen mit den jeweiligen Komponenten angebracht sind. Diese werden im Folgenden ausführlich vorgestellt. Zusätzlich zu der Nutzlast auf den Plattformen ist es nötig, für eine Abführung der Abwärme der elektrischen Komponenten zu sorgen. Dafür wurde eine Wasserkühlung implementiert. Während der Vorbereitung am Boden oder in der Wartestellung am Kran in der Turmspitze (bis kurz vor dem Abwurf) ist ein Kaltwasseranschluss vorhanden. Dieses strömt durch Wärmetauscher aus Kupfer, welche die Stützstruktur und die Plattformen sowie die Laserquelle für das Lasersystem kühlen. Da die Kapsel trotz des umgebenden Vakuums unter Atmosphärendruck gehalten wird, sind Radiatoren mit Ventilatoren angebracht, um die Lufttemperatur kühl zu halten. Der Temperaturunterschied zwischen Vor- und Nachlauf beträgt ungefähr ein Grad Celsius, wenn der Vorlauf mit  $\approx 23^\circ\text{C}$  erfolgt. Die Vorlauftemperatur wurde gewählt, um die Arbeitspunkte des Lasers nicht neu suchen zu müssen.

Die vertikale Aufteilung lässt drei Bereiche erkennen (von unten nach oben):

- **FAB** Zwei Plattformen für Equipment der ZARM Fallturmbetriebsgesellschaft (FAB). Dazu gehört als unterste Plattform diejenige mit den Akkus, welche den Betrieb der Kapsel während dem Abwurf ermöglichen. Diese sind Blei-Gel Akkus mit einer Spannung von 24 V und einer Nennladung von 25 Ah. Diese Plattform ist gleichzeitig auch der Boden, an welchen die Spitze der Kapsel befestigt wird. Die Stützstruktur steht auf diesem Boden und wird fest verbunden.

Darüber befindet sich das Computersystem CCS mit der Messtechnik. Das verwendete Bussystem in dem Embedded PC nennt sich „PXI“<sup>23</sup> in Anlehnung an das weit verbreitete PCI-Bussystem. Auf diesem Rechner läuft das National Instruments Real-Time System. Ein Bodenprogramm stellt über eine verteilte Architektur Echtzeitdaten der Sensoren aus der Fallkapsel im Kontrollraum bereit. Es kontrolliert und protokolliert dabei die Systemparameter, wie den Beschleunigungssensor und die Temperatur der Wasserkühlung. Ebenfalls ist darin das Bedienfeld zum Abwurf untergebracht.

- **Frequenzkamm** Direkt über der Ausrüstung der Fallturm-Betriebsgesellschaft ist in der Mitte der Fallkapsel der fallturmtaugliche Frequenzkamm<sup>24</sup> untergebracht.

<sup>23</sup>Es ist ein PCI-Bus mit einem eigenen Stecker und PIN-Belegung. Dadurch kann ein Gehäuse verwendet werden, in welchem Erweiterungskarten eingeschoben und leicht ausgetauscht werden können.

<sup>24</sup>Menlo Systems FC1500

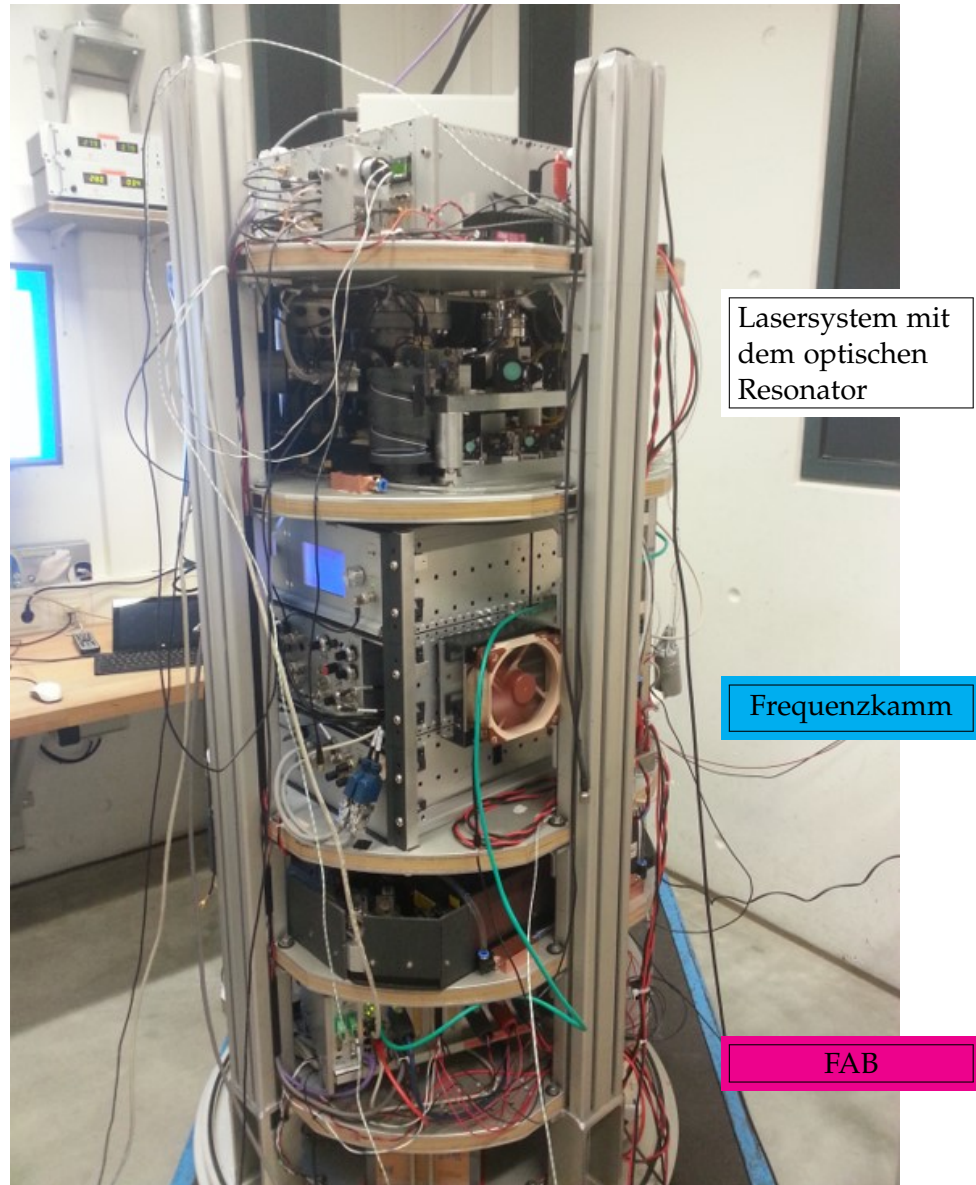


Abbildung 3.44.: Voll integrierte Fallkapsel mit dem hochstabilen Lasersystem.

Dieser wurde im Rahmen des Projekts PRIMUS<sup>25</sup> beschafft, und war der erste Frequenzkamm, der unter Mikrogravitation in Betrieb war. Die dazu speziell angefertigten Module wurden an die Fallturmbedingungen angepasst. Mit drei Modulen wird ein optischer Frequenzkamm im Bereich von 1050 nm bis 2100 nm mit einer Repetitionsrate von 250 MHz aufgespannt. Außerdem wird mit einer Frequenzverdopplungseinheit ein optischer Frequenzkamm im sichtbaren Spektrum um die beiden Wellenlängen 766 nm und 780 nm erzeugt. Beide Wellenlängen ergeben sich aus dem Vorhabenteil mit dem Atom-Interferometer. Die Abwürfe und Tests waren allesamt erfolgreich.

Der Frequenzkamm wird in diesem Aufbau vor allem als Diagnosegerät eingesetzt. Durch eine Schwebungsmessung zwischen dem optischen Frequenzkamm und den jeweiligen Laserquellen der hochstabilen Lasersysteme kann ein Signal zur Diagnose abgeleitet werden. So konnte das Verhalten des Lasersystems während dem Ausklinken und dem Abwurf beobachtet werden.

- Lasersystem Die beiden oberen Plattformen gehören zu dem hochstabilen Lasersystem mit dem optischen Resonator. Dieses wird im Folgenden noch detailliert beschrieben werden. Man erkennt auf der obersten Plattform die Elektronik zur Stabilisierung des Lasersystems. Ebenfalls ist dort die Hochvoltquelle für die Ionen-Getter-Pumpe untergebracht. Die Abwärme dieser Elektronik wird durch einen wassergekühlten Radiator mit einem Ventilator in der Zeit vor dem Abwurf abgeführt.

Darunter befindet sich die Vakuumkammer mit dem optischen Resonator. Zwischen der Oberkante der Vakuumkammer und der darüber liegenden Plattform bleiben lediglich 3 mm aufgrund des limitierten Platzangebots. Ebenfalls wassergekühlt ist das Lasermodul<sup>26</sup> neben der Vakuumkammer zu finden. Fast der gesamte optische Aufbau ist fasergebunden und die Fasern werden in schwarzen Führungsbottichen aus POM<sup>27</sup> durch den Aufbau gelegt. Die Spiegel zur Einkopplung des Laserlichts in den optischen Resonator stehen außerhalb der Vakuumkammer und sind in justierbaren Spiegelhaltern<sup>28</sup> gelagert. Dabei musste das Breadboard mit der Freistrah-Optomechanik durch Zylinder auf die benötigte vertikale Ausrichtung angehoben werden. Der darunter freiwerdende Platz wurde für ein Breadboard zur Überlagerung des Lichts aus dem Lasersystem und dem Frequenzkamm genutzt. Dies ist in Abbildung 3.45 zu sehen.



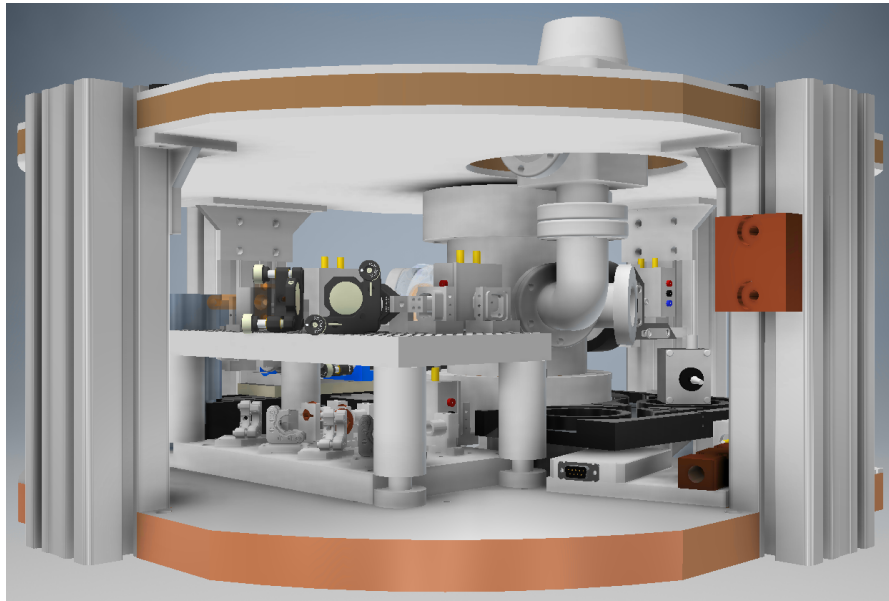


Abbildung 3.45.: CAD-Modell der optomechanischen Plattform. Man erkennt die beschränkten Platzverhältnisse und die notwendige Bohrung in der oberen Plattform für das Ventil. Unten rechts ist das Lasermodul an dem D-Sub Stecker zu erkennen, der AOM steht über den schwarzen Faserbottichen zwischen der Vakuumkammer und dem rechten Stringer.

### 3.6.3. Vakuumkammer und der optomechanische Aufbau

Um den Aufbau der Vakuumkammer zu verdeutlichen, ist in Abbildung 3.46 eine Explosionsansicht der Vakuumkammer aus dem CAD-Modell der Kapsel gezeigt. Zur besseren Sichtbarkeit ist der Resonator in hellem Orange gefärbt. Man findet ihn direkt unter zwei Deckeln: Der eine schließt die Vakuumkammer nach oben ab, der andere ist der Deckel des Kupferzylinders zur Temperaturstabilisierung. Der Aufbau mit den Halteringen ist nicht explodiert dargestellt und kann in Abbildung 3.2 betrachtet werden.

Für die Vakuumkammer<sup>29</sup> wurde als Grundkörper ein CF130 Stahlrohr mit einer Länge von 120 mm genommen. Der Innendurchmesser beträgt 123,7 mm, was wenig Platz für den geplanten Kupferzylinder lässt, der einen Außendurchmesser von 116 mm besitzt und aus einem vollen Rohr geschnitten wird. Das Rohr steht auf einem CF130 Blindflansch, in welchen extra M6 Gewindebohrungen eingebracht sind, um die im Inneren des Rohrs gestapelten Komponenten fixieren zu können. Der Bodenflansch

<sup>25</sup>DLR Fördervorhaben 50 WM 0842

<sup>26</sup>RIO ORION Module

<sup>27</sup>Polyoxymethylen, Herstellung durch die Institutseigene Werkstatt

<sup>28</sup>Thorlabs KM100

<sup>29</sup>Pfeiffer Vakuum



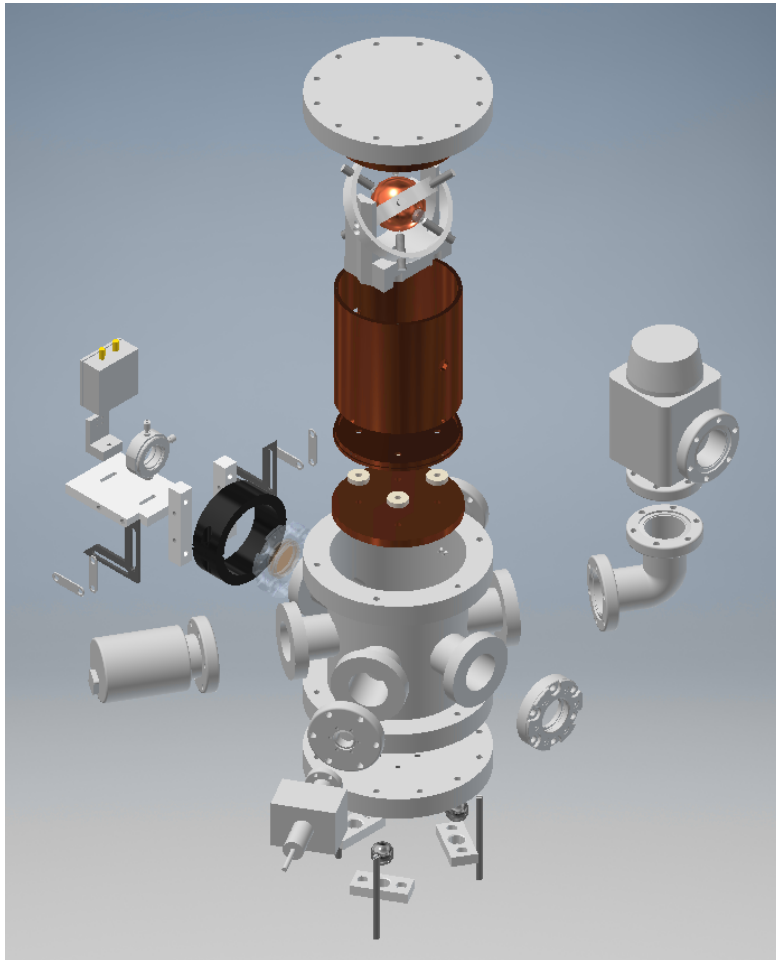


Abbildung 3.46.: Explosionsansicht des CAD-Modells der Vakuumkammer des Kapselaufbaus. Die einzelnen Komponenten werden im Text erläutert.

ruht auf drei Stahlkugeln, die ihrerseits über einen Kreiskontakt mit an der Plattform fixierten Bottichen gelagert sind. Für die Fixierung in der Vertikalen, die für den Fallturmbetrieb essentiell ist, reicht das Eigengewicht der Komponenten nicht aus. So wird über drei Gewindestangen ein Druck auf den unteren Flansch des Rohrs ausgeübt, der damit fest auf die Plattform gedrückt wird. Alle Komponenten sind so starr mit der Plattform verbunden.

Als Zugänge wurden sechs CF40 Flansche ringförmig und gleichverteilt in der vertikalen Mitte angeschweißt. Die Belegung der Ports ist schon in Kapitel 3.2.3 angeklungen. Beginnend rechts außen auf dem Bild ist die Bestückung im Uhrzeigersinn:

- Ein Winkelstück ermöglicht den Einbau eines CF40 Ventils, das in horizontaler Ausrichtung über den Rand der Kapselplattform herausragen würde. Dieses Ventil wurde genutzt mit einer Turbo-Pumpe das Vakuum innerhalb der Kammer herzustellen. Bei einem Druck von unter  $1 \times 10^{-5}$  mbar wurde die Ionen-Getter-Pumpe aktiviert und das Ventil geschlossen.
- Ein Fensterflansch<sup>30</sup>, der als Eintrittsfenster für das Laserlicht in die Vakuumkammer fungiert. Das Fenster ist beidseitig anti-reflex beschichtet.
- Am Zugang vorne im Bild wird die Ionen-Getter-Pumpe<sup>31</sup> betrieben. Diese ist eine miniaturisierte Ionen-Getter-Pumpe, welche von einem HV-Treiber<sup>32</sup> mit einer Hochspannung versorgt wird. Die Pumpe hält einen Druck von  $1 \times 10^{-7}$  mbar aufrecht.
- Der Port auf der linken Seite dient zum Anschluss eines Drucksensors<sup>33</sup>, um den Druck in der Vakuumkammer zu messen. Der Druck wird mit dem zugehörigen Controller überwacht. Während des Abwurfs wird die Druckanzeige über eine Gleichspannung mit dem Embedded PC aufgezeichnet.
- Hinten links befindet sich der Anbau zur Detektion des transmittierten Lichts. Aus Platzgründen kann dieser Aufbau nicht von unten unterstützt werden, da sich dort die Faserbottiche befinden. Daher wird ein Mini-Breadboard an den zweiten Fensterflansch übergestülpt. Der Fensterflansch hat ebenfalls ein beidseitig anti-reflex beschichtetes Fenster. Über den Flansch wird ein Ring aus Kunststoff geschoben, an dem die Konstruktion befestigt wird. Auf dem Mini-Breadboard wurde dann eine Linse in einem verschiebbaren Linsenhalter<sup>34</sup> befestigt, um das transmittierte Licht auf den folgenden Photodetektor zu fokussieren. Dieser ist fest verbaut, so dass mit der Verschiebung der Linse der Fokus auf die kleine aktive Fläche des Detektors justiert werden kann.

---

<sup>30</sup>Thorlabs VPCH42-C

<sup>31</sup>Agilent Technologies,  $21\text{s}^{-1}$  Pump

<sup>32</sup>Agilent Technologies MiniVac Controller

<sup>33</sup>Vacom PENNINGVAC PTR 90

<sup>34</sup>Thorlabs LM1XY/M

- Kaum sichtbar ist hinten der Blindflansch mit einer D-Sub Durchführung. Diese Durchführung ist für die aktive Temperaturregelung wichtig. Dabei werden PINs für den Sensor-Widerstand<sup>35</sup> und die Stromversorgung des Peltier-Elements verwendet. Der Sensor kann nur punktuell die Temperatur des Kupferzylinders messen. Daher ist er in der Nähe des Peltier-Elements gesetzt, um ein Aufschwingen der Regelung durch die Temperaturträgheit des Kupfers zu unterbinden. Im Kupferzylinder bildet sich dann ein Gleichgewichtszustand aus, der in einem Temperaturgradienten über die Höhe des Zylinders resultiert.

Das in der obigen Aufzählung im letzten Punkt erwähnte Peltier-Element regelt einen Wärmeenergiefluss zwischen seinen Endflächen. Die eine Seite ist mit dem Boden des Kupferzylinders über eine Wärmeleitkeramik<sup>36</sup> kontaktiert. Als Wärmebad/-Reservoir kommt nicht direkt der Bodenflansch der Kammer zum Einsatz, sondern eine dazwischen gelegte Kupferscheibe, welche in der Abbildung in der Mitte direkt über der Vakuummkammer zu sehen ist. So kann das Peltier-Element auf beiden Seiten aus zwei thermisch leitfähigen Materialien die Wärme entnehmen oder in diese einbringen. Der Abstand zwischen dem Kupferzylinder und der Kupferscheibe beträgt die Höhe des Peltier-Elements zuzüglich der Wärmeleitkeramik auf beiden Flächen, und wird durch vier Scheiben aus MACOR® sichergestellt.

Der Kupferzylinder ist aus einem 4 mm starkem Kupferrohr geschnitten und hat eine Höhe von 120 mm zuzüglich der Dicke des Bodens und Deckels, was eine Höhe von insgesamt 126 mm ergibt. An den designierten Punkten, an denen der Laserstrahl durch die Abschirmung zum Resonator gelangen soll, sind Bohrungen mit einem Durchmesser von 12 mm angebracht. Des Weiteren sind Löcher im Rohr und Gewinde in dem Boden und Deckel vorhanden, um den Zylinder zu verschließen und zu verschrauben. Im Boden befinden sich weiterhin Löcher für den Durchlass der Befestigungsschraube des Halters und der Schrauben, die den Kupferzylinder im Bodenflansch verankern.

In dem Vakuumzylinder ruht auf dem Kupferboden der Halter mit dem Resonator in den Halteringen. Dieser konnte projektbedingt nicht aus MACOR® gefertigt werden, sondern es ist weiterhin der Prototyp aus Aluminium im Einsatz. Unter dem Resonator ist eine Bohrung, in der der Kopf einer M6 Schraube verschwindet, die den Halter auf den Kupferboden drückt und im Bodenflansch verschraubt wird. Die Ringe selbst sind aus 5 mm starken Aluminiumringen, wobei der kleinere mit Gewindebohrungen an dem Berührungspunkt mit dem Halter ausgestattet ist, der Große mit Senkbohrungen an der äquivalenten Position, um alle drei Elemente miteinander zu verschrauben. Der Halter besitzt dafür Bohrungen an den Stellen. Die Ringe stehen dabei zueinander in einem rechten Winkel. In jedem Ring befinden sich je vier Gewindebohrungen mit M8 Gewinde. In diese werden die Stempel eingedreht und mit einer Mutter auf der Außenseite der Ringe gekontert. Zwischen dem Resonator und den Stempeln ist je eine Viton-Kugel mit einem Durchmesser von 3 mm gelagert. Diese dienen zum einen als

---

<sup>35</sup>Bürklin B 57703 M 703

<sup>36</sup>Kerafol

Schutz des Glaskeramik-Resonators vor Beschädigungen beim Abbremsen im Fallturm durch die Stempel aus Stahl, zum anderen dienen sie als Federn zum Dämpfen externer Vibrationen.

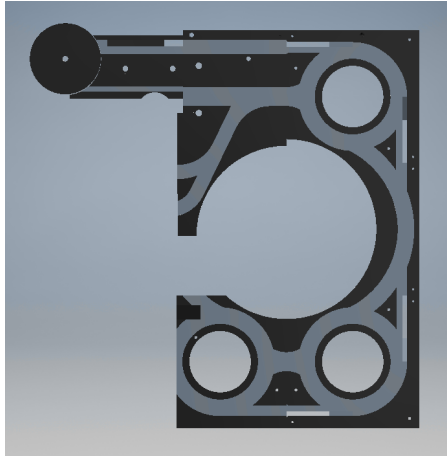


Abbildung 3.47.: CAD-Modell der Faserbottiche.

Da ein Großteil des Aufbaus das Licht in Fasern führt, ist eine ordentliche Verlegung der optischen Fasern für die Stabilität der Laseranbindung essentiell. Dabei sind die Fasern vor vielen äußeren Einflüssen geschützt, und damit sind induzierte Änderungen des Lichts, zum Beispiel der Polarisation, reduziert. Es wurde darauf geachtet, dass der minimale Biegeradius von 40 mm nicht unterschritten wird<sup>37</sup>. Das CAD Modell ist in Abbildung 3.47 gezeichnet, die Faserführung in Abbildung 3.48. Durch die Gestaltung der Bottiche ist es möglich, die Fasern passend zu den Komponenten zu verlegen und trotzdem sehr flexibel auf Änderungen reagieren zu können. Insgesamt besteht die Führung aus sieben Faserbottichen.

Die faseroptischen Komponenten (Laser und Modulatoren) sind unter den Faserbottichen untergebracht. Dafür bieten die Bottiche an passenden Stellen eine Rampe nach unten, um Fasern von der oberen Ebene durch den Bottich nach unten zu führen. Der verwendete akustooptische Modulator konnte aufgrund seiner Abmessungen nur oberhalb der Faserbottiche platziert werden (in Abbildung 3.50 als weißer Kasten rechts neben der Vakuumkammer), so dass hier ein Teil der Fasern aus den Bottichen nach oben zu dem Gerät führen. Die Ebene des Freistrahls zur Einkopplung befindet sich 93 mm über den Böden der Faserbottiche. Daher wird die Faser über einen vertikalen Zylinder entlang einer gewundenen Führung nach oben gelegt, so dass kein Knick entstehen kann.

Das Licht verlässt die Faser mittels eines Kollimators<sup>38</sup> in einem Abstand von 20 mm zur Oberfläche des Breadboards. Der Strahlengang ist in Abbildung 3.49 als roter Strahl zu sehen. Zunächst wird eine Justage der Einkoppelleistung bei gleichzeitiger Polarisationsbereinigung ermöglicht, indem als erstes nach dem Auskoppeln eine Kombination aus drehbarer  $\lambda/2$  Platte mit folgendem Polarisationsstrahlteiler im Lichtweg steht. Der zur Seite abgelenkte Teil des Lichts wird von einem Strahlblocker<sup>39</sup> aufgefangen. Da der Strahl insgesamt um  $270^\circ$  umgelenkt wird, sind drei Spiegel erforderlich. Der erste ist ein halbzölliger fest montierter Spiegel (Turmspiegel), der den Strahl auf die beiden

<sup>37</sup>Da keine Angaben des Herstellers vorlagen, wurde der Radius aus der Verpackung bei der Lieferung abgeleitet

<sup>38</sup>Schäfter+Kirchhoff 60FC-...

<sup>39</sup>Thorlabs LB1/M

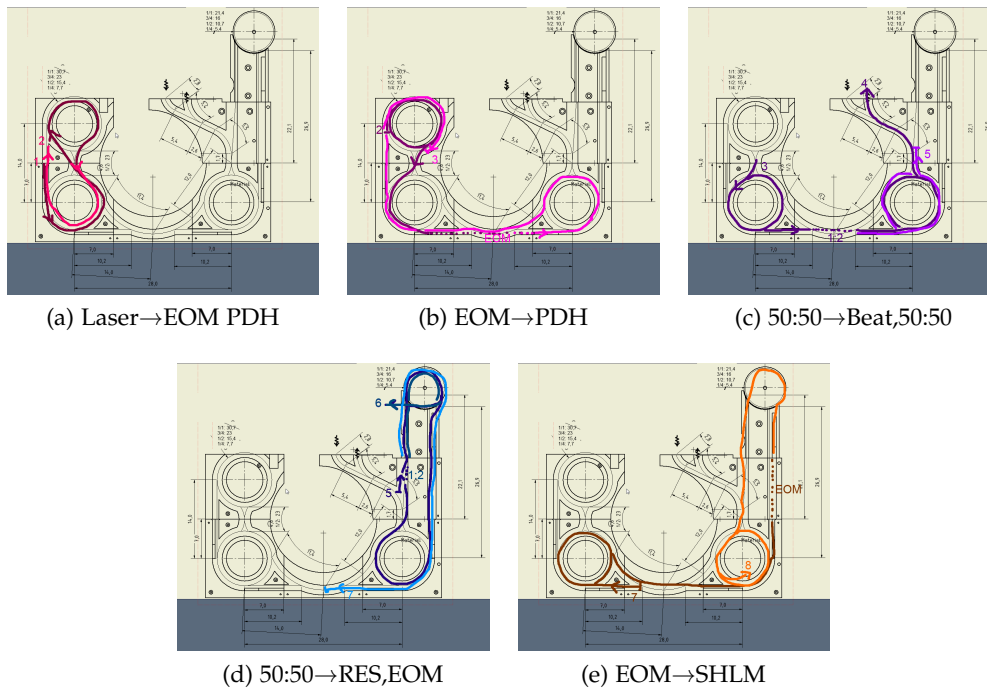


Abbildung 3.48.: Planung der Faserführung in den Faserbottichen rund um die Vakuumkammer.

justierbaren Spiegel<sup>40</sup> zur Justage der Einkopplung leitet. Direkt nach dem Turmspiegel wird der Strahl jedoch durch eine Fokussierlinse mit der Brennweite  $f = 300$  mm geleitet, um eine Modenanpassung an den Resonator zu gewährleisten. Vor dem Fenster zur Vakuumkammer steht ein 50/50 Strahlteiler, der das reflektierte Licht auf den Photodetektor der PDH-Regelung und das einfallende Licht auf den Photodetektor zur Auswertung der residuellen Amplitudenmodulation wirft. Vor jedem Detektor steht ein Linsenhalter mit einer Linse, die das Licht auf die aktive Fläche des Detektors fokussiert.

### 3.6.4. Fallturmabwürfe

Mit der kompletten Integration des Experiments in die Fallkapsel wurde die Fallturmkampagne geplant und durchgeführt. Die Integration wurde im letzten Schritt in enger Zusammenarbeit mit der Fallturm Betriebsgesellschaft abgeschlossen. Es wurde die Wasserkühlung implementiert und das Zusammenspiel mit dem Equipment der Fallturm-Betriebsgesellschaft hergestellt.

Die Ziele der Fallturmabwürfe waren:

1. Konstruktive Haltbarkeit und Funktionstests,

<sup>40</sup>Thorlabs KM100

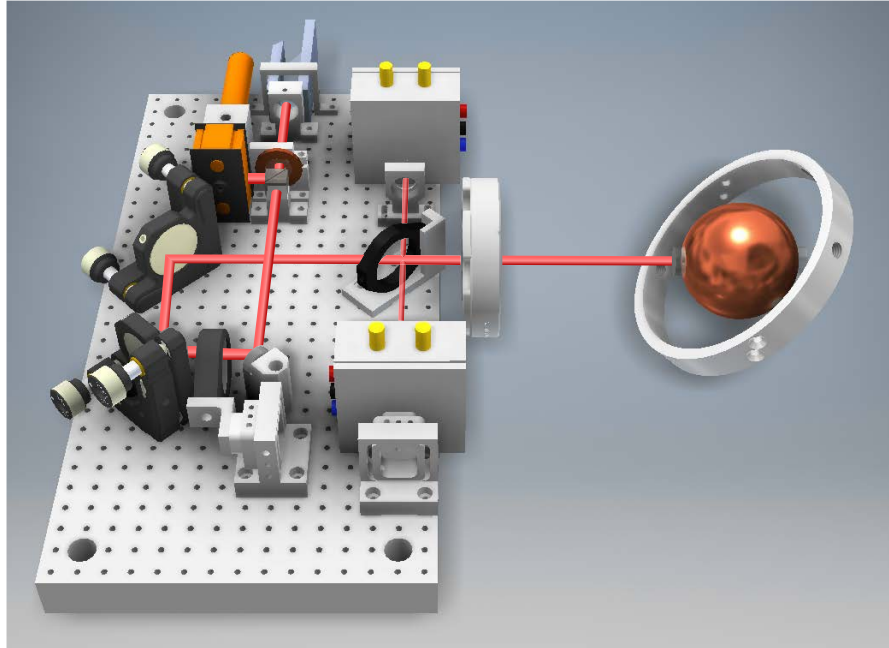
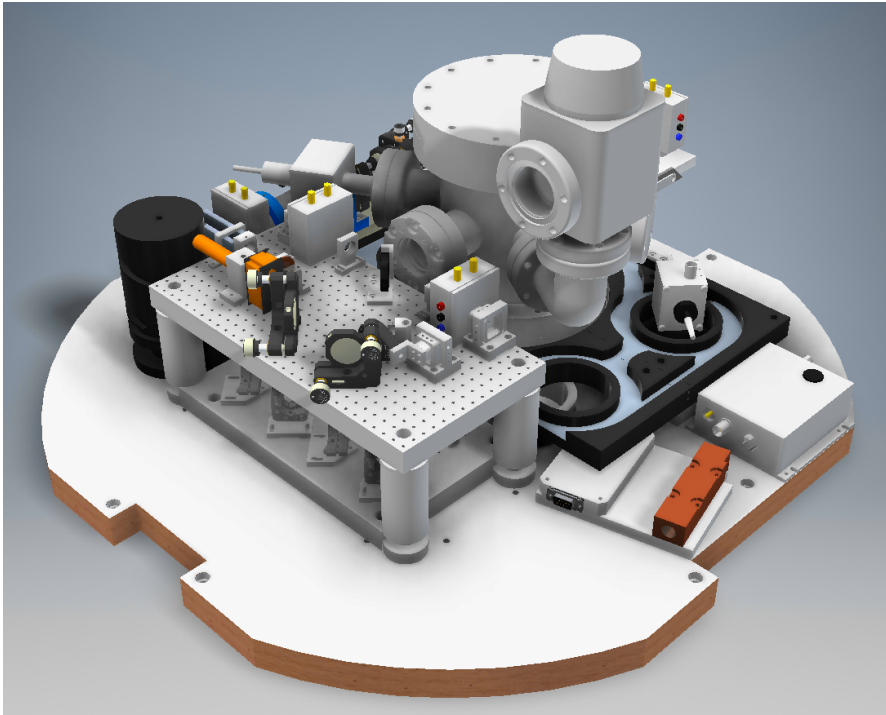


Abbildung 3.49.: CAD-Modell mit eingezeichnetem (Frei-)Strahlengang des Lasers von dem Kollimator, der das Licht aus der Faser führt, bis zum ersten Spiegel des Resonators. Ausgeblendet sind die meisten anderen Elemente, wie zum Beispiel die Vakuumkammer.

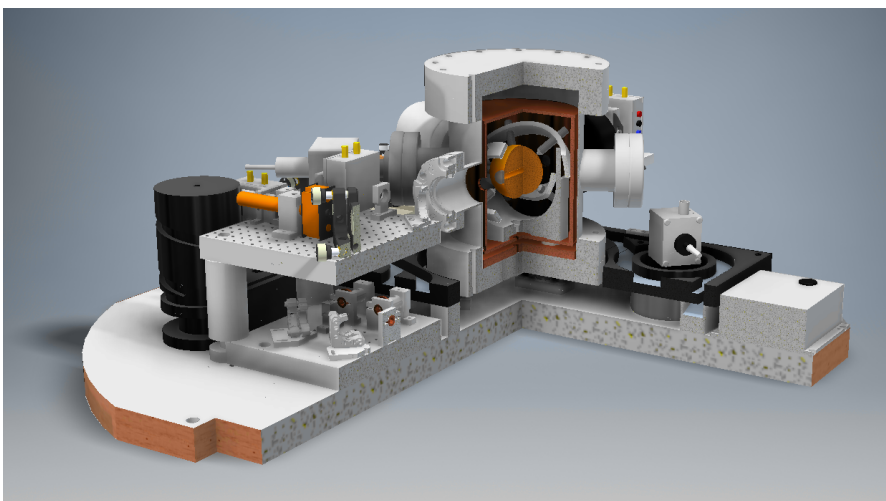
2. Studieren des Verhaltens des Experiments beim Übergang in den freien Fall (1g auf 0g),
3. Laufende Stabilisierung des Lasers auf den Resonator während eines Abwurfs.

Der erste Abwurf ist dafür da, die konstruktive Haltbarkeit zu zeigen. Insbesondere für die Vakuumkammer ist jeder Abwurf eine große Belastung, und der erste Abbremsvorgang deckt Mängel in der Montage offen. Hierfür muss man sich vorstellen, welche Kräfte auf die sechs CF40 Flansche wirken können. Daher wurde bei der Planung darauf geachtet, große Drehmomente möglichst zu vermeiden. Diese werden durch geringe Gewichte klein gehalten, wie zum Beispiel der Einbau einer sehr kleinen Ionen-Getter Pumpe. Im Falle des Vakuumventils, welches nicht kleiner oder leichter im Vergleich zum Laboraufbau beschafft werden konnte, kommt der beschränkte Platz der Fallkapsel dieses Mal positiv zu Geltung, indem durch den Knick nach oben und das vertikale Anbringen des Ventils der Hebelarm deutlich verkürzt wird. Aber auch die Wasserkühlung unterliegt einem Härtetest bei einer Abbremsbeschleunigung von bis zu 40g, und es zeigt sich ob alle Schlauchverbindungen dichthalten.

Für das Lasersystem ist es sehr wichtig, ob sich der Strahlengang in dem nicht fasergebundenen Teil des optischen Aufbaus durch das Fallenlassen verändert. Durch die Entspannung der Plattformen in Mikrogravitation und Breadboards kann die Justage



(a) Komplettansicht



(b) Dreiviertelschnitt

Abbildung 3.50.: CAD-Modell des Lasersystems auf der optomechanischen Plattform.

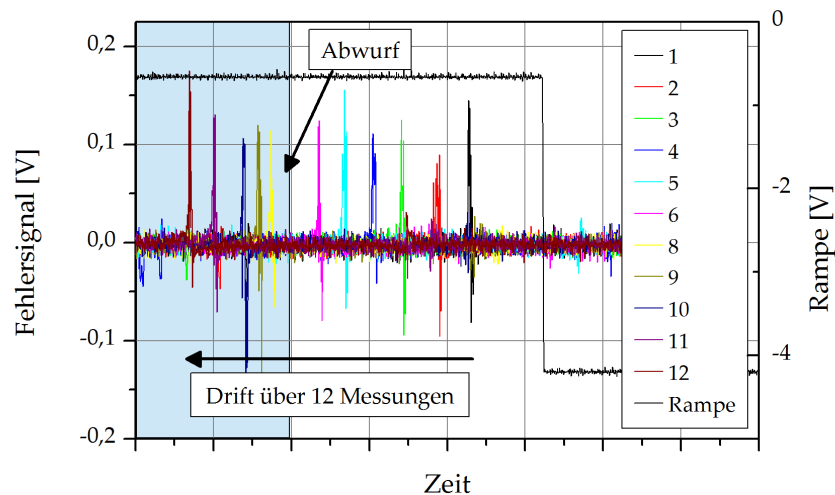


Abbildung 3.51.: Aufzeichnungen des PDH Signals als Scan über die Resonanz. Insgesamt wurden 12 Messungen nacheinander durchgeführt und es wird eine Drift gemessen. Die Zeitachse verläuft nach links und die Messungen während des Abwurfs sind blau hinterlegt.

zum Einkoppeln in den optischen Resonator so abgelenkt werden, dass ein Betrieb nicht möglich wäre. Nicht zuletzt kann sich die Lage und Ausrichtung des Resonators verändern, wenn die Erdbeschleunigung nicht mehr wirksam angreift. Die Spotgrößen des Gauß-Bündels auf den Spiegel innerhalb des Resonators wurden in Kapitel 3.2.1 zu einem halben Millimeter bestimmt. Die Verschiebungen müssen demnach deutlich kleiner ausfallen, und nicht größer als einige Mikrometer sein. Weiterhin besteht das Risiko, dass durch den Abbremsvorgang der Abstandshalter beschädigt wird, wenn die Viton-Kugeln keinen ausreichenden Schutz zwischen der Glaskeramik und den Stahlstangen bieten. Eine Beschädigung wird man erst nach Öffnen der Vakuumkammer definitiv feststellen können, sollte sich jedoch der Betrieb des Lasersystems nicht verändern, kann man eine signifikante Beschädigung ausschließen.

Nach dem ersten Abwurf kann festgestellt werden, dass das erste Ziel, die Überprüfung der konstruktiven Haltbarkeit, voll umfänglich erfüllt wurde. Insbesondere bei der Verwendung der justierbaren Spiegelhalter – welche nicht für den Fallturmbetrieb spezifiziert sind – wurde befürchtet, dass diese sich bei dem Abwurf beziehungsweise nach dem Abbremsen so verstellen würden, dass eine Messung unmöglich oder eine langwierige Neuausrichtung des Laserstrahls auf den Resonator nötig wird. Tatsächlich aber sind die Verkippungen durch den Abwurf und das Abbremsen sehr gering und leicht korrigierbar, so dass einem Betrieb im Fallturm nichts entgegensteht.

Solange die Kapsel unter der Erdbeschleunigung gehalten wird, stehen alle Kom-



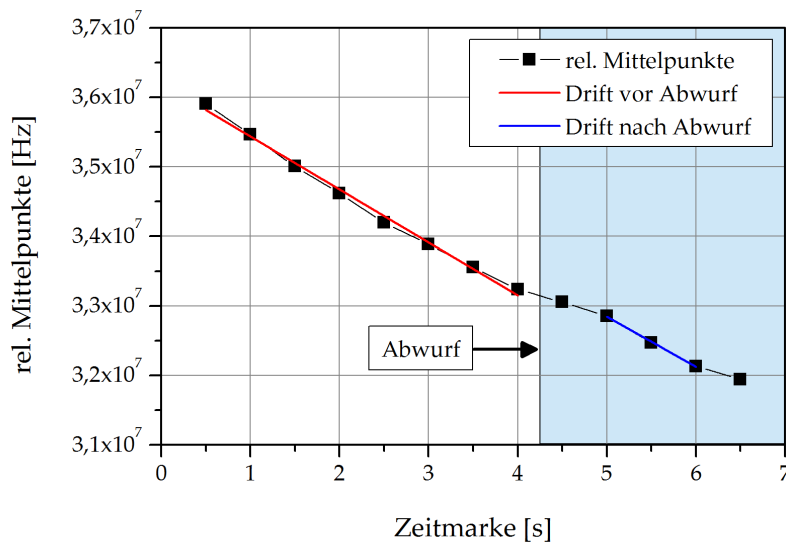


Abbildung 3.52.: Auswertung der Mittelpunkte der Fehlersignale aus Abbildung 3.51. Die Verschiebung wird aus einem linearen Fit an die Datenpunkte vor und nach dem Abwurf bestimmt zu  $(460 \pm 50)$  kHz.

ponenten unter Spannung. Insbesondere die Plattformen schwingen nach dem Fallenlassen eine kurze Zeit (bis zu 400 ms) gedämpft. Auch der Abstandshalter, obwohl vorgespannt gelagert, kann eine Verschiebung durch das Wegfallen der Erdbeschleunigung erfahren. Weitere kritische Stellen sind alle Faserkupplungen und frei hängende Faser (zum Beispiel bei dem AOM).

Der erste Abwurf wurde dazu genutzt, das Verhalten des gesamten Lasersystems zu bestimmen. Dazu wurde das System nicht stabilisiert. Daher wird von der Datenerfassung das Fehlersignal aufgezeichnet. Dieses ist messbar, wenn die Laserfrequenz mittels einer Spannungsrampe am Piezo über die Resonanz gefahren wird. Die Rampe hat eine Frequenz von 2 Hz. Die Datenerfassung umfasst mehrere Datenpakete mit einer Länge von 3500 Punkten bei einer Samplingrate von 7,5 kHz. Nach dem Abtrennen des Kühlkreislaufes von der Kapsel unterliegt das Fehlersignal bei diesem Abwurf einer Drift von  $(760 \pm 22)$  kHz  $s^{-1}$  (siehe Abbildung 3.51 und Abbildung 3.52). Da die Sensitivität der Temperaturstabilisierung in diesen Zeitskalen sehr gering ist, stammt die Verschiebung aus der Laserquelle. Die von der Laserquelle erzeugte Wärme kann ohne laufende Wasserkühlung nicht mehr ausreichend abgeführt werden. Die Temperaturregelung des Lasermoduls reagiert auf die Änderung der Umgebungstemperatur mit einer Verschiebung der Laserwellenlänge. Nach dem Übergang zur Mikrogravitation kann ein Frequenzsprung von  $(460 \pm 50)$  kHz aus den Residuen bezüglich der abgebildeten linearen Anpassungen gemessen werden. Wichtig ist diese Messung vor allen Dingen, um abzuschätzen, ob die Regelelektronik diese Frequenzverschiebungen

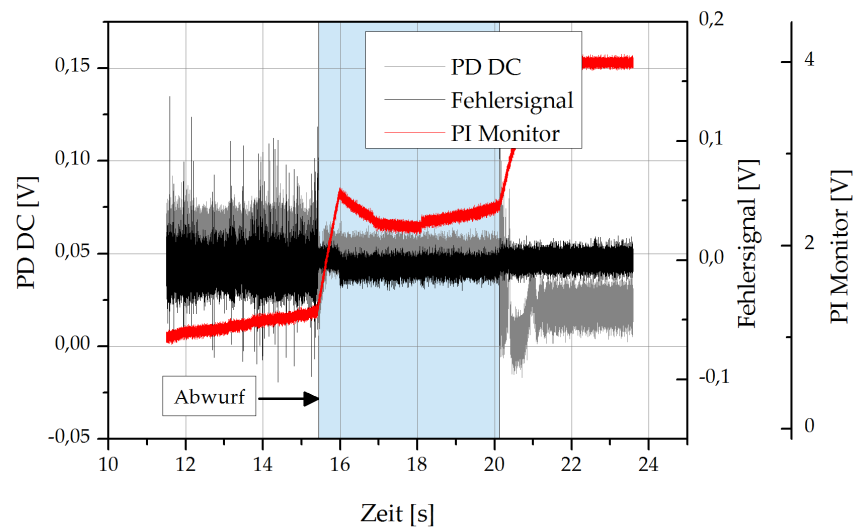


Abbildung 3.53.: Daten eines Abwurfs: Das Fehlersignal in schwarz, das Regelsignal des PI-Reglers in rot und im Hintergrund die Spannung des Photodetektors zur optischen Leistung in grau.

kompensieren kann, ohne an ihre elektronischen Grenzen zu kommen. Als Ergebnis lässt sich festhalten, dass eine Stabilisierung über das Ausklinken hinweg technisch möglich ist.

In Abbildung 3.53 sind verschiedene Daten abgebildet, die während eines Abwurfs aufgezeichnet wurden. Dabei ist im Hintergrund in grau das Signal des Photodetektors abgebildet, der die optische Leistung misst. Der Wert bricht bei dieser Messung bei dem Fallenlassen auf 78% des Werts unter Erdbeschleunigung ein. Der Monitorausgang des Reglers (PI Monitor) gibt einen normierten Wert des Integratorgliedes aus. Dieser Regelkreis sorgt für einen Ausgleich der Temperaturdrifts mit einer geringen Bandbreite. Zieht man den vorher beschriebenen Abwurf als Referenz heran, bei welchem die Driftraten vor den Abwürfen korreliert wurden, zeichnet sich ein Frequenzsprung der Resonanz von  $\approx 6,6$  MHz ab. Dieser Schätzwert ist aus den in beiden Fällen gleichen Umgebungsbedingungen zu akzeptieren, liegt aber um den Faktor 30 über dem Sprung aus der vorhergehenden Messung. Ein kleiner Teil kann durch die geringere Leistung im Resonator ( $\approx 200$  kHz) und dem bekannten Sprung erklärt werden. Für die große Amplitude des Sprungs kann momentan keine Ursache benannt werden.

Wichtig für das Lasersystem ist insbesondere, dass der Sprung durch die Regelelektronik aufgefangen werden kann. Für einen Zeitraum von 500 ms fällt das System aus der Regelung, bis es ab der Zeitmarke 16 s wieder in den stabilisierten Betrieb wechselt. Die Daten der Leistung des transmittierten Lichts sowie das Fehlersignal zeigen ein deutlich abgeschwächtes Rauschen, welches durch die Qualität der Mikrogravitation

und dementsprechend geringere Vibrationen zurückgeht. Bei der Zeitmarke 20 s erfolgt der Einschlag in den Abbremsbehälter, der das Lasersystem aus der Regelung bringt. Das Monitorsignal des Integratorglied des Reglers läuft bis zu seinem Maximalwert von 4 V.

Als Zusammenfassung folgt daraus: In dieser Arbeit wurde erfolgreich ein hochstabiles Lasersystem mit einem optischen Resonator unter Mikrogravitation gezeigt. Da das Lasersystem nach verschiedenen Abwürfen und in dem nachfolgenden Betrieb am Boden ohne Veränderungen geblieben ist, kann eine kritische Beschädigung trotz des großen Frequenzsprungs ausgeschlossen werden. Die am Boden gemessene Stabilität  $7,2 \times 10^{-15}$  bei 3,5 s in der relativen Allan-Abweichung kann auch für den Betrieb unter Schwerelosigkeit als Obergrenze angenommen werden. Dieses Ergebnis ist bemerkenswert, weil damit erstmalig ein hochstabiles Lasersystem mit einem optischen Resonator im Fallturmbetrieb demonstriert wurde, und auch erstmalig unter Schwerelosigkeit im Allgemeinen.



# 4

## Ausblick

In dieser Arbeit wurde erstmals ein hochstabiles Lasersystem mit einem optischen Resonator für den Betrieb im Fallturm Bremen entwickelt. Es wurde für den Einsatz in Mikrogravitation aufgebaut und die Funktion unter Mikrogravitation getestet. Dabei wurde eine relative Stabilität von  $7,2 \times 10^{-15}$  bei 3,5 s demonstriert. Ein solches Lasersystem ist eine Schlüsselkomponente für den Bau künftiger kompakter und robuster optischer Atomuhren. Damit werden neue Ergebnisse in verschiedenen Feldern erwartet: Von der Metrologie und Vermessung des Schwerefeldes der Erde, über Tests der Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie bis zur Detektion von Gravitationswellen profitieren Experimente von robusten, hochstabilen Lasersystemen und optischen Atomuhren. Darüber hinaus ist ein solches Lasersystem auch für sich ein wichtiges Instrument: Die Detektion der Gravitationswellen während der eLISA-Mission beruht beispielsweise auf einer interferometrischen Abstandsmessung mit hochstabilen Lasersystemen.

Diese Arbeit leistet einen wichtigen Entwicklungsschritt hin zu künftigen Anwendungen hochstabiler Lasersysteme auf der ISS oder in Satelliten. Im Einzelnen wurden folgende Ziele erreicht:

- Die relative Stabilität des Lasersystems liegt unterhalb der Zieldesignkurve und erfüllt den geforderten Wert.
- Alle verwendeten Komponenten wurden soweit wie möglich in Größe und Gewicht reduziert, und eine Vakuumkammer mit aktiver Temperaturregelung realisiert.

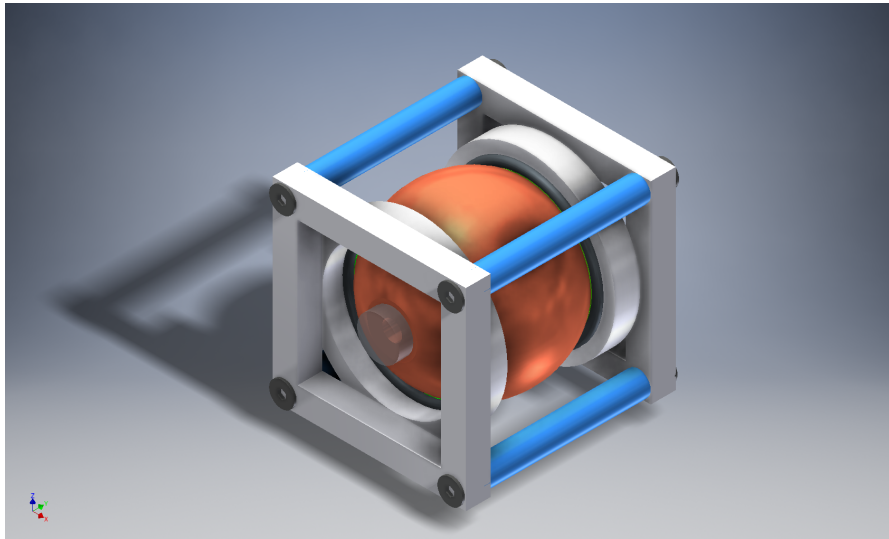


Abbildung 4.1.: Entwurf einer neuen Haltevorrichtung für den sphärischen Resonator. In grau sind die Viton- oder Teflon-O-Ringe als Dämpfung und Schutz zwischen dem Resonator und den zwei Halteringen eingebracht. Diese werden durch einen Käfig aus MACOR® (grau) und Invar (blau) Elementen an den Resonator gepresst, so dass dieser starr gelagert ist.

- Der erfolgreiche Test eines optischen Resonators unter Mikrogravitation und hohen Beschleunigungen bis zu 40 g beim Abbremsen. Der sphärische Resonator wurde dafür in allen Raumrichtungen durch eine Acht-Punkte-Lagerung fixiert.
- Halbautonome Experimentsteuerung, die eine Bedienung des Experiments komplett über ein Computer-Netzwerk ermöglicht.

Der erfolgreiche Betrieb im Fallturm zeigt, dass Aufbauten mit optische Resonatoren die mechanischen Herausforderungen dieser Testumgebung meistern können. Gleichzeitig setzen die Limitierungen des derzeitigen Kapselaufbaus deutliche Grenzen. Die nächsten Schritte für die Weiterentwicklung des hier verwendeten Aufbaus sind vielfältig. Das erste Ziel einer Fortsetzung der Arbeit wird sein, direkt die Linienbreite zu messen und die Charakterisierung der Stabilität während des Fallturmbetriebs zu ermöglichen. Voraussetzung dafür ist, den Kapselaufbau um mindestens einen weiteren optischen Resonator mitsamt dem zugehörigen Lasersystem zu erweitern. Aufgrund des Platzbedarfs wird das Experiment dann in einer großen Fallkapsel aufgebaut werden. Da das bisherige System sich sehr daran orientiert, die Plattformen funktional sauber zu trennen, ist ein Duplizieren der Plattformen leicht möglich. Je nach Auslegung ist es allerdings geschickter, die neuen Resonatoren gemeinsam in einer Vakuumkammer zu platzieren. Es wird so nicht nur Gewicht und Platz gespart, sondern auch eine gleiche Umgebung für alle Resonatoren bereitgestellt. Neben der Charakterisierung ist so auch ein Vergleich verschiedener Konzepte der Halterung möglich.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die Weiterentwicklung der Haltevorrichtung, welche derzeit durch Halteringe und einer U-förmigen Basis realisiert ist. Im Vordergrund steht dabei eine Verbesserung der Sensitivität auf Vibrationen, sowie eine leichtere Handhabung im Aufbau und bessere Einbaumöglichkeiten. Anstelle der derzeitigen zwei Halteringen (siehe Abbildung 3.10) ist eine Option, die Halteringe entlang der optischen Achse des Resonators anzuordnen. In der neuen Variante sind diese symmetrisch angeordnet, was möglichen Nachteilen durch die Hebelwirkungen der unterschiedlich langen Stempel aufgrund des inneren und äußeren Halterings entgegenwirkt. Der Kontakt zum Resonator kann sowohl mit den bisher verwendeten Stempeln als auch über einen Ringkontakt hergestellt werden. Die neuen Halteringe werden in einem Haltekäfig untergebracht, wie in Abbildung 4.1 gezeigt. Für diesen kann die Möglichkeit ausgelotet werden, die Konstruktion der Halteringe passiv über Federsysteme von Umgebungsschwingungen zu isolieren [45] oder den Haltekäfig selbst von Vibrationen abzuschirmen.

Für Satellitenmissionen rückt vor allem die Langzeitstabilität in den Fokus. Die Sensitivität auf Temperaturschwankungen steigt mit langen Zeitskalen und wird dann zur größten Störquelle für die Stabilität. Aus den Missionsanforderungen leitet sich die Auslegung der Thermalkontrolle ab, so dass beispielsweise in der Missionsskizze für mSTAR sechs Thermalschilde aus Kupfer geplant werden [79]. Da die Sensitivität durch ein Produkt mit den Zeitkonstanten der einzelnen Übergänge gebildet wird, trägt jeder Hitzeschild zu einer Verringerung der Sensitivität bei. Das Ziel eines Aufbaus ist, dass der Wärmetransport durch Wärmestrahlung dominiert ist. Um dies zu erreichen, muss die Wärmeleitung durch eine geeignete Materialauswahl und Geometrie der Abstandshalter geringgehalten werden. Die Zeitkonstante ist proportional zur Dimension der Abstandshalter. Darüber hinaus sind die Zeitkonstanten der Wärmestrahlung proportional zur Masse der Schilde. Es gilt einen Kompromiss zwischen dem zur Verfügung stehenden Volumen und der Dimensionierung der Abstandshalter und Schilde zu finden.

Im Bereich der Strahlführung und Einkopplung des Lichts in den Resonator ist es denkbar, Technologie aus der LISA-Pathfinder-Mission anzuwenden. Die optomechanischen Komponenten der optischen Bänke werden aus einer Glaskeramik gefertigt und mit dieser fest verklebt. Als Material wird aufgrund der hervorragenden thermischen Eigenschaften Zerodur oder Clearceram verwendet. Damit ist eine Dejustierung im Einsatzzweck nahezu ausgeschlossen und die Technologie sehr geeignet für den autonomen Einsatz auf einer Satellitenmission. Einen optischen Iod-Frequenzstandard, der diese Technik verwendet, ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Alternativ dazu ist es denkbar, ein aktiv geregeltes Einkoppelsystem zu verwenden. Auf diese Weise würde die Einkopplung in den Resonator über Piezo-getriebene Spiegelhalter erfolgen. Die Ausrichtung des Laserstrahls für den Resonator muss dann über Regelgrößen eingestellt werden. Der Fehler der Modenanpassung [62, 88] kommt dafür in Frage. Selbst eine autonome Erstjustage der Einkopplung scheint damit möglich. Es ergibt sich dar-

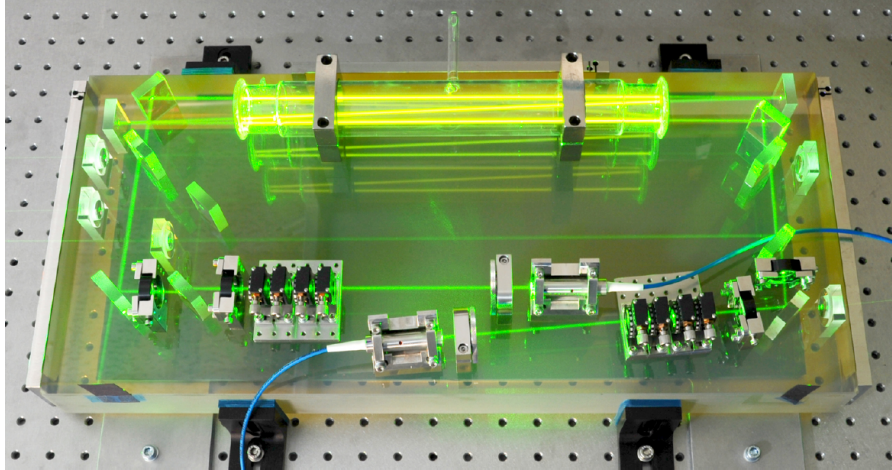


Abbildung 4.2.: Die optische Bank einer Iod-Uhr als optischer Frequenzstandard für Weltraumanwendungen verwendet sowohl für die Grundplatte als auch einige Optiken eine Glaskeramik (Clearceram-Z HS, vergleichbar mit Zerodur). Diese werden mit einem Harzkleber fixiert. Aus [78].

aus der Vorteil, die optimale Transmission bei eventueller Degeneration der optischen Bänke halten zu können. Der Nachteil dieser Technologie ist die nötige Versorgung der elektrischen Bauteile.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der erfolgreiche Abwurf eines hochstabilen Lasersystems ein Meilenstein in der Entwicklung dieser Instrumente ist. Eine schrittweise Weiterentwicklung wurde oben skizziert, so dass eine Qualifizierung für den Weltraumeinsatz möglich wird. Als folgende Testumgebung bietet sich eine Höhenforschungsrakete an. Als Technologiedemonstrator müssen die technischen Herausforderungen der Lagerung und thermischen Stabilisierung untersucht werden. Die dabei gewonnenen Erfahrungen sind wichtig für den Einsatz in Instrumenten an Bord der ISS oder eines Satelliten. Die nachfolgende Verwendung in wissenschaftlichen Experimenten und auch in optischen Atomuhren ist vielfältig und öffnet neue Perspektiven für die Erforschung und Überprüfung fundamentaler Theorien.

Es steht außer Frage, dass die nächsten Jahre und Jahrzehnte spannend bleiben. Hochstabile optische Atomuhren werden zum ersten Mal auf Missionen an Bord der ISS oder Satelliten Messungen vornehmen, die das Verständnis von Raum und Zeit verändern können. Die geplanten Tests des Einstein'schen Äquivalenzprinzips stellen die Allgemeine Relativitätstheorie auf die Probe. Überraschungen sind nicht auszuschließen, und die Zeit wird zeigen, ob sich die Allgemeine Relativitätstheorie aufs Neue bewähren kann.



# A

## Anhang

### A.1. Lemma

**Lemma A.1.1.** Seien  $A, B \in \mathbb{C}$ , dann gilt:

$$\operatorname{Re}\{A\} \operatorname{Re}\{B\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{AB^*\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{AB\} \quad (\text{A.1.1})$$

### A.2. Berechnung des Phasensprungs von statistischem Licht

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom in einer Zeitspanne  $\tau$  noch keinen Stoß erfahren hat und somit noch keinen Phasensprung durchgeführt hat, ist gegeben durch:

$$p(\tau)d\tau = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} d\tau \quad (\text{A.2.1})$$

wobei z.B. nach [52, Gleichung (2.9.2)]  $\frac{1}{\tau_0} = \frac{4d^2N}{V} \left(\frac{\pi k_B T}{M}\right)^{1/2}$  mit den entsprechenden Größen aus der Gastheorie ist. In einem Festkörperlaser führen Wechselwirkungen mit Phononen der Gitterschwingungen zu dieser Art der Verbreiterung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Atom zu einer Zeit  $\tau$  noch keinen Phasensprung ausgeführt hat, ist aus Abbildung A.1 ersichtlich:

$$\int_{\tau}^{\infty} p(\tau)d\tau = \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau'}{\tau_0}} d\tau' = e^{-\frac{\tau}{\tau_0}}$$

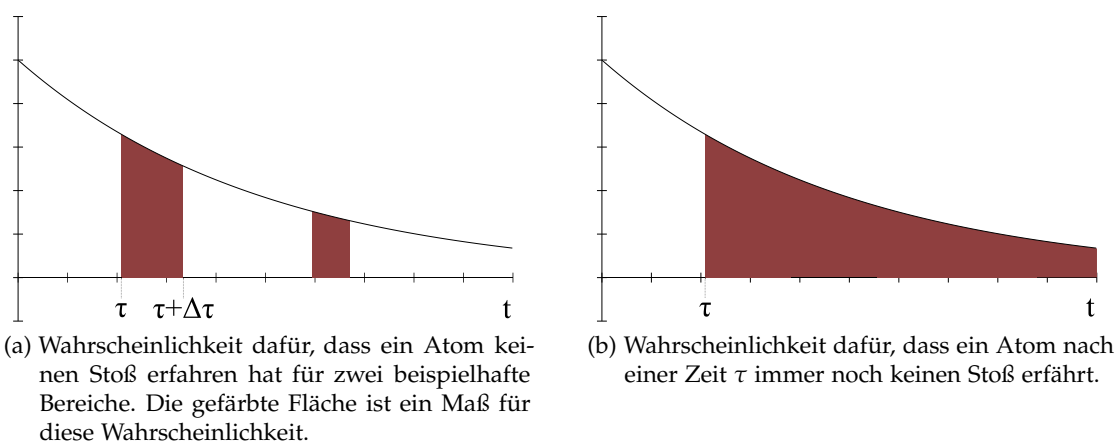


Abbildung A.1.: Graphische Darstellung der Überlegung zur Wahrscheinlichkeit der stoßfreien Zeit  $\tau$  in einem atomaren Gas.

### A.3. Berechnung der Intensität in der FMS

Die Berechnung der Intensität aus dem phasenmoduliertem Licht erfolgt nach Gleichung (2.4.44). Der folgenden Berechnung geschuldet werden die einzelnen Terme mit den Buchstaben A, B und C bezeichnet:

$$E(t) = A + A^* + B + B^* + C + C^* \quad (\text{A.3.1})$$

mit

$$\begin{aligned} A &= e^{-\delta_0} e^{-i\phi_0} e^{i\omega_0 t} \\ B &= e^{-\delta_1} e^{-i\phi_1} e^{i(\omega_0 + \Omega)t} \\ C &= e^{-\delta_2} e^{-i\phi_2} e^{i(\omega_0 - \Omega)t} e^{i\pi} \end{aligned}$$

Die Intensität ist nach (2.3.3) das Amplitudenquadrat des Feldes. Dieses führt zu 36 Termen mit Paarungen z.B.  $AB^*$ . Ein paar Terme werden hier exemplarisch vorgestellt:

- DC (konstante Terme):

$$\begin{aligned} AA^* &= A^* A = e^{-2\delta_0} \\ BB^* &= B^* B = m^2 e^{-2\delta_1} \\ CC^* &= C^* C = m^2 e^{-2\delta_2} \end{aligned}$$

- Gemischte Termtypen:

$$\begin{aligned} AB^* &= me^{-\delta_1 - \delta_0} e^{i(\phi_1 + \phi_0)} e^{-i\Omega t} \\ B^* A &= me^{-\delta_1 - \delta_0} e^{i(\phi_1 + \phi_0)} e^{-i\Omega t} \\ \hline \sum &= 2 \cdot me^{-\delta_1 - \delta_0} e^{i(\phi_1 + \phi_0)} e^{-i\Omega t} \end{aligned}$$

- Gleiche Termtypen:

$$\begin{aligned} AA &= e^{-2\delta_0} e^{-i2\phi_0} e^{i2\omega_0 t} \\ A^* A^* &= e^{-2\delta_0} e^{i2\phi_0} e^{-i2\omega_0 t} \\ \hline \sum &= 0 \end{aligned} \tag{A.3.2}$$

Es soll hier die Rechnung gezeigt werden, warum Gleichung (A.3.2) gleich null ergibt, da diese typisch für Rechnungen im Umfeld der Intensität mit Feldern ist:

1. Ausschreiben der Exponentialfunktion als cos und  $i$  sin:

$$\begin{aligned} AA &= e^{-2\delta_0} (\cos(2\omega_0 t - 2\phi_0) + i \sin(2\omega_0 t + 2\phi_0)) \\ A^* A^* &= e^{-2\delta_0} (\cos(-2\omega_0 t + 2\phi_0) + i \sin(-2\omega_0 t - 2\phi_0)) \\ &= e^{-2\delta_0} (\cos(2\omega_0 t - 2\phi_0) - i \sin(2\omega_0 t + 2\phi_0)) \end{aligned}$$

2. Summieren der beiden Terme

$$\sum = 2e^{-2\delta_0} \cos(2\omega_0 t - 2\phi_0)$$

3. Umschreiben des Kosinus des doppelten Winkels:

$$\sum = 2e^{-2\delta_0} (2 \cos^2(\omega_0 t - 2\phi_0) - 1)$$

4. Ausführen der Mittelung des Detektors über schnelle Frequenzen (siehe Gleichung (2.3.5)):  $\overline{\cos^2 A} = \frac{1}{2}$

$$\sum = 0$$

Auf diesem Weg erhält man 18 Paarungen, von denen die Hälfte nicht null ergibt:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{E_0}\right)^2 |E|^2 &= 2e^{-2\delta_0} + 2m^2 \left( e^{-2\delta_1} + e^{-2\delta_2} \right) \\
 &+ 2me^{-\delta_1-\delta_0} e^{-i(\phi_1+\phi_0)} e^{i\Omega t} \\
 &+ 2me^{-\delta_1-\delta_0} e^{i(\phi_1+\phi_0)} e^{-i\Omega t} \\
 &+ 2me^{-\delta_2-\delta_0} e^{i(\phi_2+\phi_0)} e^{i\Omega t} e^{-i\pi} \\
 &+ 2me^{-\delta_2-\delta_0} e^{-i(\phi_2+\phi_0)} e^{-i\Omega t} e^{i\pi} \\
 &+ 2m^2 e^{-\delta_2-\delta_1} e^{i(\phi_1+\phi_0)} e^{i2\Omega t} \\
 &+ 2m^2 e^{-\delta_2-\delta_1} e^{i(\phi_1+\phi_0)} e^{-i2\Omega t}
 \end{aligned}$$

Alle Terme mit  $m^2$  werden nun gegenüber den anderen Termen vernachlässigt, da  $m \ll 1$ . Es bleibt mit  $DC = 2e^{-2\delta_0}$ :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{E_0}\right)^2 |E|^2 &\approx DC + 2me^{-\delta_1-\delta_0} \underbrace{\left( e^{i[(\phi_1-\phi_0)-\Omega t]} + e^{-i[(\phi_1-\phi_0)-\Omega t]} \right)}_{2 \cos((\phi_1-\phi_0)-\Omega t)} \\
 &+ 2me^{-\delta_2-\delta_0} \underbrace{\left( e^{i[(\phi_2-\phi_0)+\Omega t]-\pi} + e^{-i[(\phi_2-\phi_0)+\Omega t]+\pi} \right)}_{2 \cos((\phi_2-\phi_0)+\Omega t-\pi)}
 \end{aligned}$$

Mithilfe der Formel für Winkelsummen der trigonometrischen Funktionen kommt man zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{E_0}\right)^2 |E|^2 &= DC + 4me^{-\delta_1-\delta_0} \left( \cos(\phi_1 - \phi_0) \cos \Omega t + \sin(\phi_1 - \phi_0) \sin \Omega t \right) \\
 &+ 4me^{-\delta_2-\delta_0} \left( \cos(\phi_2 - \phi_0) \cos(\Omega t - \pi) - \sin(\phi_2 - \phi_0) \sin(\Omega t - \pi) \right)
 \end{aligned}$$

Man führt nun noch eine Näherung durch, in der man sagt  $\phi_{\pm 1} - \phi_0 \ll 1$ , da die Dispersionsrelation sich in einer hinreichend kleinen Umgebung um  $\omega_0$ , innerhalb derer sich die Seitenbändern befinden sollen, diese Bedingung erlauben sollen. Dann kann der Kosinus und Sinus genähert werden:  $\cos(\phi_{\pm 1} - \phi_0) \approx 1$  und  $\sin(\phi_{\pm 1} - \phi_0) \approx$

$\phi_{\pm 1} - \phi_0$ . Damit ist dann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{E_0}\right)^2 |E|^2 &\approx \text{DC} + 4me^{-\delta_1 - \delta_0} (\cos \Omega t + (\phi_1 - \phi_0) \sin \Omega t) \\ &\quad + 4me^{-\delta_2 - \delta_0} (-\cos \Omega t + (\phi_2 - \phi_0) \sin \Omega t) \\ &= \text{DC} + 4me^{-\delta_0} \cos \Omega t \underbrace{(e^{-\delta_1} - e^{-\delta_2})}_{\Delta T} \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

$$+ 4me^{-\delta_0} \sin \Omega t \underbrace{(e^{-\delta_1}(\phi_1 - \phi_0) + e^{-\delta_2}(\phi_2 - \phi_0))}_{\Delta \Phi} \quad (\text{A.3.4})$$

Damit ist die Rechnung zur Gleichung (2.4.45) abgeschlossen.

Die Extraktion des gesuchten Fehlersignals gelingt mit dem demodulieren des Signals:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_{\text{PD}} \cdot U_{\text{VCO}} \\ &= \text{DC} \cos(\omega_0 t + \varphi) + 4me^{-\delta_0} \cos \Omega t \Delta T \cos(\Omega t + \varphi) \\ &\quad + 4me^{-\delta_0} \sin \Omega t \Delta \phi \cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$

In den Faktoren der Demodulation werden die Winkelfunktionen wie folgt expandiert:

$$\begin{aligned} U(t) &= \text{DC} \cos(\omega_0 t + \varphi) + 4me^{-\delta_0} \Delta T (\cos^2 \Omega t \cos \varphi - \cos \Omega t \sin \Omega t \sin \varphi) \\ &\quad + 4me^{-\delta_0} \Delta \phi (\sin \Omega t \cos \Omega t \cos \varphi - \sin^2 \Omega t \sin \varphi) \end{aligned}$$

Mit den folgenden Relationen kann man die Terme umformen:

$$\begin{aligned} \cos^2 A &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2A \\ \sin A \cos A &= \frac{1}{2} \sin 2A \\ \sin^2 A &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2A \end{aligned}$$

Damit kann die Spannung folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} U(t) &= \text{DC} \cos(\omega_0 t + \varphi) + 4me^{-\delta_0} \Delta T \left( \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\Omega t) \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin(2\Omega t) \sin \varphi \right) \\ &\quad + 4me^{-\delta_0} \Delta \phi \left( \frac{1}{2} \sin(2\Omega t) \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi + \frac{1}{2} \cos(2\Omega t) \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

Der Tiefpassfilter lässt nun nur Komponenten durch, deren Frequenz wesentlich kleiner als die Modulationsfrequenz ist. Es bleiben somit nur die Terme ohne Frequenzkomponente übrig:

$$U(t) = 2m e^{-\delta_0} \Delta T \cos \varphi - 2m e^{-\delta_0} \Delta \phi \sin \varphi$$

## A.4. MAPLE Code zur PSD und weißem Rauschen

```

restart;
with(Statistics):

mmax := 2000:
NVars := 500:

Noise := Sample(RandomVariable(Normal(0, .5))):
PureNoiseVectors := [seq(Noise(mmax), u=1..NVars)]:
PureSinVectors := [seq(<seq(sin(i/10), i=1..mmax)>, u=1..NVars)]:

G := plot([seq([i/1000, evalf(1/.5/sqrt(2*Pi)*exp(-i^2/2/0.5
/0.5/1000/1000))], i=-mmax..mmax)], color="red");
H := Histogram(PureNoiseVectors[1], averageshifted=4, color="LightSlateGrey",
style=polygon);
HH := Histogram(PureNoiseVectors[2], averageshifted=4, color="AliceBlue",
style=line);
plots[display](G, HH, H);

Rxxs := [seq(Statistics[AutoCorrelation](PureNoiseVectors[u]), u=1..NVars)]:
plot([seq([i, Rxxs[1][i]], i=1..mmax)]);

Sxxs := [seq(DiscreteTransforms[FourierTransform](Rxxs[u]), u=1..NVars)]:
plot([seq([i, sqrt(Re(Sxxs[2][i])^2 + Im(Sxxs[2][i])^2)], i=1..mmax)]);

SxxAva := Array(1..mmax, fill=0):
for i from 1 to mmax do
  msum := 0:
  for u from 1 to NVars do
    msum := msum + sqrt(Re(Sxxs[u][i])^2 + Im(Sxxs[u][i])^2):
  end do:
  msum := msum/NVars:
  SxxAva[i] := msum:
end do:
plot([seq([i, 10*log10(SxxAva[i])], i=1..mmax)]);

```

## A.5. Berechnung der spektralen Rauschleistungsdichte eines DSHI

In diesem Anhang wird die Berechnung der PSD eines DSHI gegeben. Ausgangspunkt ist der Photostrom  $I(t)$  (2.3.10):

$$I(t) = \sigma e \hat{E}^*(t) \hat{E}(t) \quad (\text{A.5.1})$$

mit dem elektrischen Feld  $E(t)$ :

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} e^{i\phi(t)}$$

Für das DSHI werden zwei Felder auf dem Photodetektor überlagert:

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t} e^{i\phi(t)} + E_0 e^{i\omega(t+\tau_D)} e^{i\Omega t} e^{i\phi(t+\tau_D)} \quad (\text{A.5.2})$$

$$E^*(t) = E_0 e^{-i\omega t} e^{-i\phi(t)} + E_0 e^{-i\omega(t+\tau_D)} e^{-i\Omega t} e^{-i\phi(t+\tau_D)} \quad (\text{A.5.3})$$

Der Photostrom wird damit zu:

$$I(t) = \sigma e E_0^2 \left( 1 + 1 + e^{i\Omega t} e^{i\omega\tau_D} e^{i\phi(t+\tau_D)} e^{-i\phi(t)} + \overleftarrow{\text{c.c.}} \right) \quad (\text{A.5.4})$$

$$= \sigma e E_0^2 (2 + 2 \cos(\omega t + \omega\tau_D + \phi(t + \tau_D) - \phi(t))) \quad (\text{A.5.5})$$

Die Autokovarianz des Photostroms lautet<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{E_0^4 \sigma^2 e^2} &= 4 + \left\langle 2e^{i\Omega t} e^{i\Omega\tau} e^{i\omega\tau_D} e^{i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{-i\phi(t+\tau)} \right. \\ &\quad + 2e^{-i\Omega t} e^{-i\Omega\tau} e^{-i\omega\tau_D} e^{-i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{+i\phi(t+\tau)} \\ &\quad + 2e^{i\Omega t} e^{i\omega\tau_D} e^{i\phi(t+\tau_D)} e^{-i\phi(t)} \\ &\quad + 2e^{-i\Omega t} e^{-i\omega\tau_D} e^{-i\phi(t+\tau_D)} e^{i\phi(t)} \\ &\quad + e^{i2\Omega t} e^{i\Omega\tau} e^{i2\omega\tau_D} e^{i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{i\phi(t+\tau_D)} e^{-i\phi(t+\tau)} e^{-i\phi(t)} \\ &\quad + e^{-i\Omega\tau} e^{i\phi(t+\tau_D)} e^{i\phi(t+\tau)} e^{-i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{-i\phi(t)} \\ &\quad + e^{i\Omega\tau} e^{-i\phi(t+\tau_D)} e^{-i\phi(t+\tau)} e^{i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{i\phi(t)} \\ &\quad \left. + e^{-i2\Omega t} e^{-i\Omega\tau} e^{-i2\omega\tau_D} e^{-i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{-i\phi(t+\tau_D)} e^{i\phi(t+\tau)} e^{i\phi(t)} \right\rangle \quad (\text{A.5.6}) \end{aligned}$$

Das Mittel ist hier eine Zeitmittelung (siehe (2.3.23)), so dass alle Terme mit expliziter  $t$ -Abhängigkeit zu null gemittelt werden:

$$\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{E_0^4 \sigma^2 e^2} = 4 + \left\langle e^{i\Omega\tau} e^{-i\phi(t+\tau_D)} e^{-i\phi(t+\tau)} e^{i\phi(t+\tau+\tau_D)} e^{i\phi(t)} \right\rangle + \overleftarrow{\text{c.c.}} \quad (\text{A.5.7})$$

An dieser Stelle wird eine neue Größe definiert:

$$\Phi(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \phi(t+\tau) - \phi(t) \quad (\text{A.5.8})$$

Damit folgt direkt:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(t; \tau_D) &= \Phi(t + \tau_D) - \Phi(t) \\ &= \phi(t + \tau + \tau_D) - \phi(t + \tau_D) - \phi(t + \tau) + \phi(t) \end{aligned} \quad (\text{A.5.9})$$

<sup>1</sup>Die komplexe Konjugation wird nicht angegeben, da der Strom reell ist.

Damit wird die obige Rechnung weitergeführt:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{E_0^4 \sigma^2 e^2} &= 4 + e^{i\Omega\tau} \langle e^{i\Delta\Phi(t;\tau_D)} \rangle + \text{c.c.} \\
&= 4 + e^{i\Omega\tau} e^{-\frac{1}{2}\langle \Delta\Phi^2(t;\tau_D) \rangle} + \text{c.c.} \\
&= 4 + 2 \cos(\Omega\tau) e^{-\frac{1}{2}\langle \Phi(t+\tau_D)^2 - 2\Phi(t+\tau_D)\Phi(t) + \Phi(t)^2 \rangle} \quad (\text{A.5.10})
\end{aligned}$$

Jetzt wird der Term in der Mittelung ausführlich ermittelt:

$$\begin{aligned}
&\Phi(t+\tau_D)^2 - 2\Phi(t+\tau_D)\Phi(t) + \Phi(t)^2 = \\
&= \Phi(t+\tau_D)^2 - 2(\phi(t+\tau+\tau_D) - \phi(t+\tau_D))(\phi(t+\tau) - \phi(t)) + \Phi(t)^2 \\
&= \phi(t+\tau+\tau_D)^2 - 2\phi(t+\tau+\tau_D)\phi(t+\tau_D) + \phi(t+\tau_D)^2 \\
&\quad + \phi(t+\tau+\tau_D)^2 - 2\phi(t+\tau+\tau_D)\phi(t+\tau) + \phi(t+\tau)^2 \\
&\quad - \phi(t+\tau+\tau_D)^2 + 2\phi(t+\tau+\tau_D)\phi(t) - \phi(t)^2 \\
&\quad \quad - \phi(t+\tau_D)^2 + 2\phi(t+\tau_D)\phi(t+\tau) - \phi(t+\tau)^2 \\
&\quad \quad + \phi(t+\tau_D)^2 - 2\phi(t+\tau_D)\phi(t) + \phi(t)^2 \\
&+ \Delta\phi(t)^2 \quad (\text{A.5.11})
\end{aligned}$$

jetzt ist:

$$\Delta\phi(x) = \phi(t+x) - \phi(t) \quad (\text{A.5.12})$$

$$\Delta\phi(x) = \Phi(t) \quad (\text{A.5.13})$$

$$\begin{aligned}
(\phi(t+\tau+\tau_D) - \phi(t+\tau_D))^2 &\xrightarrow{t'=t+\tau_D} \Delta\phi(\tau)^2 \\
(\phi(t+\tau+\tau_D) - \phi(t+\tau))^2 &\xrightarrow{t'=t+\tau} \Delta\phi(\tau_D)^2 \\
-(\phi(t+\tau_D) - \phi(t+\tau))^2 &\xrightarrow{t'=t+\tau_D} \Delta\phi(\tau - \tau_D)^2
\end{aligned} \quad (\text{A.5.14})$$

Damit:

$$\begin{aligned}
&\Phi(t+\tau_D)^2 - 2\Phi(t+\tau_D)\Phi(t) + \Phi(t)^2 = \\
&= 2\Delta\phi(\tau)^2 + 2\Delta\phi(\tau_D)^2 - \Delta\phi(\tau_D + \tau)^2 - \Delta\phi(\tau_D - \tau)^2 \quad (\text{A.5.15})
\end{aligned}$$

Hiervon ist also eine Mittelung zu nehmen. Für den Fall von weißem Rauschen ohne  $1/f$  Anteil ist die Varianz bekannt:

$$\langle \Delta\phi(x)^2 \rangle = S_0 |x| \quad (\text{A.5.16})$$



Damit:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{E_0^4 \sigma^2 e^2} &= 4 + 2\cos(\Omega\tau) e^{-\langle \Delta\phi(\tau)^2 \rangle} e^{-\langle \Delta\phi(\tau_D)^2 \rangle} e^{\frac{1}{2}\langle \Delta\phi(\tau_D-\tau)^2 \rangle} e^{\frac{1}{2}\langle \Delta\phi(\tau_D+\tau)^2 \rangle} \\
&= 4 + 2\cos(\Omega\tau) e^{-S_0|\tau|} e^{-S_0\tau_D} e^{\frac{1}{2}S_0|\tau_D+\tau|} e^{\frac{1}{2}S_0|\tau_D-\tau|} \\
&= 4 + 2\cos(\Omega\tau) \begin{cases} e^{-S_0|\tau|} & |\tau| < \tau_D \\ e^{-S_0\tau_D} & |\tau| > \tau_D \end{cases} \quad (\text{A.5.17})
\end{aligned}$$

Dies ist das Ergebnis der Autokovarianz. Um die Fallunterscheidung zu vermeiden, wird auf die rect-Funktion zurückgegriffen. Diese ist wie folgt definiert:

$$\text{rect}_{\Delta x}(x) = \begin{cases} 1 & |x| < \Delta x/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.5.18})$$

Dabei gibt  $\Delta x$  die Breite des Intervalls an, in dem die Funktion den Wert eins annimmt. Damit kann die Fallunterscheidung  $|\tau| < \tau_D$  beschrieben werden, das Intervall ist dabei  $2\tau_D$  breit:

$$\begin{aligned}
\frac{\langle I(t)I(t+\tau) \rangle}{E_0^4 \sigma^2 e^2} &= 4 + 2\cos(\Omega\tau) \cdot \\
&\cdot \left( e^{-S_0|\tau|} \cdot \text{rect}_{2\tau_D}(\tau) + e^{-S_0\tau_D} (1 - \text{rect}_{2\tau_D}(\tau)) \right) \quad (\text{A.5.19})
\end{aligned}$$

Die spektrale Rauschleistungsdichte ist nun:

$$S(\omega) = \mathcal{F} \{ \langle I(t)I(t+\tau) \rangle \} \quad (\text{A.5.20})$$

Dabei wird nun die Abkürzung  $A = E_0^4 \sigma^2 e^2$  eingeführt. Die Fourier-Transformation erfolgt über vier Terme:

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} &= 4A \\
\textcircled{2} &= 2A e^{-S_0\tau_D} \cos(\Omega\tau) \\
\textcircled{3} &= 2A e^{-S_0\tau_D} \cos(\Omega\tau) \text{rect}_{2\tau_D}(\tau) \\
\textcircled{4} &= 2A e^{-S_0|\tau|} \cos(\Omega\tau) \text{rect}_{2\tau_D}(\tau)
\end{aligned}$$

zur Erinnerung einige Eigenschaften der Fourier-Transformation sowie einige einfache Beispiele:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{A+B\} &= \mathcal{F}\{A\} + \mathcal{F}\{B\} \\ \mathcal{F}\{A \cdot B\} &= \mathcal{F}\{A\} \star \mathcal{F}\{B\} \quad (\text{Faltungstheorem}) \\ \mathcal{F}\{\text{const}\} &= \delta(\omega) \\ \mathcal{F}\{\cos(\Omega\tau)\} &= \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega)\end{aligned}$$

Damit findet man sofort:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\textcircled{1}\} &= 4A\delta(\omega) \\ \mathcal{F}\{\textcircled{2}\} &= 2A e^{-s_0\tau_D} \left( \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega) \right)\end{aligned}\tag{A.5.21}$$

Für den dritten Term berechnet man:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\textcircled{3}\} &= 2A e^{-s_0\tau_D} \mathcal{F}\{\cos(\Omega\tau)\} \star \mathcal{F}\{\text{rect}_{2\tau_D}(\tau)\} \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} \left[ \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega) \right] \star \int_{-\tau_D}^{\tau_D} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} \left[ \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega) \right] \star \frac{2}{\omega} \frac{e^{-i\omega\tau_D} - e^{i\omega\tau_D}}{2i} \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} \left[ \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega) \right] \star -\frac{2}{\omega} \sin(\omega\tau_D) \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} \left[ \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) + \frac{1}{2}\delta(\omega + \Omega) \right] \star -2\tau_D \text{sinc}(\omega\tau_D) \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} [-\tau_D \text{sinc}((\Omega - \omega)\tau_D) - \tau_D \text{sinc}((-\Omega - \omega)\tau_D)] \\ &= 2A e^{-s_0\tau_D} [-\tau_D \text{sinc}((\omega - \Omega)\tau_D) - \tau_D \text{sinc}((\omega + \Omega)\tau_D)]\end{aligned}\tag{A.5.22}$$

Der vierte Term berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\textcircled{4}\} &= 2A \mathcal{F}\{\cos(\Omega\tau) e^{-s_0|\tau|} \text{rect}_{2\tau_D}(\tau)\} \\ &= 2A \underbrace{\mathcal{F}\{\cos(\Omega\tau) e^{-s_0|\tau|}\}}_{\textcircled{5}} \star \mathcal{F}\{\text{rect}_{2\tau_D}(\tau)\}\end{aligned}\tag{A.5.23}$$

Als Zwischenrechnung:

$$\begin{aligned}
\textcircled{5} &= \mathcal{F} \{ \cos(\Omega\tau) \} \star \mathcal{F} \left\{ e^{-S_0|\tau|} \right\} \\
&= \mathcal{F} \{ \cos(\Omega\tau) \} \star \left[ \int_{-\infty}^0 e^{S_0\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-S_0\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \right] \\
&= \mathcal{F} \{ \cos(\Omega\tau) \} \star \left[ \frac{1-0}{S_0-i\omega} + \frac{0-1}{-S_0-i\omega} \right] \\
&= \mathcal{F} \{ \cos(\Omega\tau) \} \star \left[ \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega)^2} \right] \\
&= \frac{S_0}{S_0^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{S_0}{S_0^2 + (-\Omega - \omega)^2} \\
&= \frac{S_0}{S_0^2 + (\Omega - \omega)^2} + \frac{S_0}{S_0^2 + (\Omega + \omega)^2} \\
&= \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ e^{-S_0|\tau|} e^{-i\Omega\tau} \right\} + \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ e^{-S_0|\tau|} e^{i\Omega\tau} \right\} \tag{A.5.24}
\end{aligned}$$

Damit geht es weiter (nur mit den Termen mit  $(\omega - \Omega)^2$ ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left\{ \textcircled{4} \right\} &= A \mathcal{F} \left\{ e^{-S_0|\tau|} e^{i\Omega\tau} \right\} \star \mathcal{F} \left\{ \text{rect}_{2\tau_D}(\tau) \right\} \\
&= A \mathcal{F} \left\{ e^{-S_0|\tau|} e^{i\Omega\tau} \text{rect}_{2\tau_D}(\tau) \right\} \\
&= A \int_{-\tau_D}^{\tau_D} e^{-S_0|\tau|} e^{i\Omega\tau} d\tau \\
&= A \int_{-\tau_D}^0 e^{S_0\tau} e^{i\Omega\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + A \int_0^{\tau_D} e^{-S_0\tau} e^{i\Omega\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\
&= A \frac{1 - e^{-S_0\tau_D} e^{i(\omega-\Omega)\tau_D}}{S_0 - i(\omega - \Omega)} + A \frac{e^{-S_0\tau_D} e^{-i(\omega-\Omega)\tau_D} - 1}{-S_0 - i(\omega - \Omega)} \\
&= A \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - \frac{e^{-S_0\tau_D} e^{-i(\omega-\Omega)\tau_D}}{S_0 + i(\omega - \Omega)} - \frac{e^{-S_0\tau_D} e^{i(\omega-\Omega)\tau_D}}{S_0 - i(\omega - \Omega)} \\
&= A \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - A \frac{S_0 e^{-S_0\tau_D} e^{-i\tau_D(\omega-\Omega)}}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} + A \frac{i(\omega - \Omega) e^{-S_0\tau_D} e^{-i\tau_D(\omega-\Omega)}}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \\
&\quad - A \frac{S_0 e^{-S_0\tau_D} e^{i\tau_D(\omega-\Omega)}}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - A \frac{i(\omega - \Omega) e^{-S_0\tau_D} e^{i\tau_D(\omega-\Omega)}}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} 2 \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \\
&\quad + Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} (\omega - \Omega) \frac{1}{2i} \left[ e^{i\tau_D(\omega - \Omega)} - e^{-i\tau_D(\omega - \Omega)} \right] \\
&= A \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} 2 \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \\
&\quad + Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} (\omega - \Omega) 2 \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \quad (\text{A.5.25})
\end{aligned}$$

Nun setzt man alle Teile zusammen, und betrachtet nur die Terme mit  $(\omega - \Omega)^2$  (one-sided PSD):

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= \mathcal{F} \{ \textcircled{1} \} + \mathcal{F} \{ \textcircled{2} \} + \mathcal{F} \{ \textcircled{3} \} + \mathcal{F} \{ \textcircled{4} \} \\
&= 4A\delta(\omega) + 2Ae^{-S_0\tau_D} \left( \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) \right) \\
&\quad + 2Ae^{-S_0\tau_D} (-\tau_D \text{sinc}((\omega - \Omega)\tau_D)) \\
&\quad + A \frac{2S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} 2 \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \\
&\quad + Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} (\omega - \Omega) 2 \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \quad (\text{A.5.26})
\end{aligned}$$

Nun sammelt man die Terme mit sin und sinc:

$$\begin{aligned}
&- 2Ae^{-S_0\tau_D} \tau_D \text{sinc}((\omega - \Omega)\tau_D) + Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} (\omega - \Omega) 2 \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \\
&= -2Ae^{-S_0\tau_D} \frac{\text{sin}((\omega - \Omega)\tau_D)}{\omega - \Omega} + Ae^{-S_0\tau_D} \frac{1}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} (\omega - \Omega) 2 \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \\
&= 2Ae^{-S_0\tau_D} \text{sin}((\omega - \Omega)\tau_D) \left( \frac{-1}{\omega - \Omega} + \frac{\omega - \Omega}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \right) \\
&= 2Ae^{-S_0\tau_D} \text{sin}((\omega - \Omega)\tau_D) \left( \frac{-S_0^2 - (\omega - \Omega)^2 + (\omega - \Omega)^2}{(\omega - \Omega)(S_0^2 + (\omega - \Omega)^2)} \right) \\
&= -2Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0^2}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \frac{\text{sin}((\omega - \Omega)\tau_D)}{\omega - \Omega} \quad (\text{A.5.27})
\end{aligned}$$

Als Endergebnis erhält man damit:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) = & 4A\delta(\omega) + 2Ae^{-S_0\tau_D} \left( \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) \right) \\
 & + 2A \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} - 2Ae^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \\
 & - 2A e^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{S_0 + (\omega - \Omega)^2} \frac{S_0}{\omega - \Omega} \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \quad (\text{A.5.28})
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 S(\omega) = & 4A\delta(\omega) + 2Ae^{-S_0\tau_D} \left( \frac{1}{2}\delta(\omega - \Omega) \right) \\
 & + 2A \frac{S_0}{S_0^2 + (\omega - \Omega)^2} \left( 1 - e^{-S_0\tau_D} \cos((\omega - \Omega)\tau_D) \right. \\
 & \left. - e^{-S_0\tau_D} \frac{S_0}{\omega - \Omega} \sin((\omega - \Omega)\tau_D) \right) \quad (\text{A.5.29})
 \end{aligned}$$



# Literaturverzeichnis

- [1] Mohammad Mehdi Alavi-Sereshki. „Analytic signals and Hilbert transforms“. In: (1972).
- [2] B. Argence u. a. „Prototype of an ultra-stable optical cavity for space applications“. In: *Optics Express* 20.23 (2012), S. 25409. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.20.025409.
- [3] J. a. Armstrong. „Theory of Interferometric Analysis of Laser Phase Noise“. In: *Journal of the Optical Society of America* 56.8 (1966), S. 1024. ISSN: 0030-3941. DOI: 10.1364/JOSA.56.001024.
- [4] Shayne Bennetts u. a. „External cavity diode lasers with 5kHz linewidth and 200nm tuning range at 155 $\mu$ m and methods for linewidth measurement“. In: *Optics Express* 22.9 (Mai 2014), S. 10642. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.22.010642.
- [5] P Berceau u. a. „Space-time reference with an optical link“. In: *Classical and Quantum Gravity* 33.13 (Juli 2016), S. 135007. ISSN: 0264-9381. DOI: 10.1088/0264-9381/33/13/135007.
- [6] M. V. Berry. „Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes“. In: *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 392.1802 (1984), S. 45–57. ISSN: 1364-5021. DOI: 10.1098/rspa.1984.0023.
- [7] B. Bertotti, L. Iess und P. Tortora. „A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft“. In: *Nature* 425.6956 (2003), S. 374–376. ISSN: 0028-0836. DOI: 10.1038/nature01997.

- [8] G C Bjorklund. „Frequency-modulation spectroscopy: a new method for measuring weak absorptions and dispersions.“ In: *Optics letters* 5.1 (1980), S. 15. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.5.000015.
- [9] Eric D. Black. „An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization“. In: *American Journal of Physics* 69.1 (2001), S. 79. ISSN: 00029505. DOI: 10.1119/1.1286663.
- [10] B J Bloom u. a. „An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10(-18) level.“ In: *Nature* 506.7486 (2014), S. 71–5. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature12941. arXiv: 1309.1137.
- [11] Kai Bongs u. a. „STE-QUEST Assessment Study Report“. In: *ESA December* (2013), S. 100. DOI: ESA/SRE(2013)6.
- [12] Benjamin Botermann u. a. „Test of time dilation using stored Li+ ions as clocks at relativistic speed“. In: *Physical Review Letters* 113.12 (2014), S. 1–5. ISSN: 10797114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.120405.
- [13] Claus Braxmaier u. a. „Tests of Relativity Using a Cryogenic Optical Resonator“. In: *Physical Review Letters* 88.1 (Dez. 2001), S. 010401. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.010401.
- [14] Albert Canagasabay u. a. „A comparison of delayed self-heterodyne interference measurement of laser linewidth using mach-zehnder and Michelson interferometers“. In: *Sensors* 11.10 (2011), S. 9233–9241. ISSN: 14248220. DOI: 10.3390/s111009233.
- [15] C E Carroll und F T Hioe. „Analytic solutions for three-state systems with overlapping pulses“. In: *Physical Review A* 42.3 (1990), S. 1522–1531. ISSN: 10502947. DOI: 10.1103/PhysRevA.42.1522.
- [16] Jianli Chen u. a. „Long-term groundwater variations in Northwest India from satellite gravity measurements“. In: *Global and Planetary Change* 116 (2014), S. 130–138. ISSN: 09218181. DOI: 10.1016/j.gloplacha.2014.02.007.
- [17] Qun-Feng Chen u. a. „A compact, robust, and transportable ultra-stable laser with a fractional frequency instability of  $1 \times 10^{-15}$ “. In: *Review of Scientific Instruments* 85.11 (Nov. 2014), S. 113107. ISSN: 0034-6748. DOI: 10.1063/1.4898334. arXiv: 1410.5453.
- [18] Xiaopei Chen. „Ultra-Narrow Laser Linewidth Measurement“. Diss. 2006.
- [19] C. W. Chou u. a. „Frequency comparison of two high-accuracy Al+ optical clocks“. In: *Physical Review Letters* 104.7 (2010), S. 1–4. ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.070802. arXiv: 0911.4527.
- [20] Jong H Chow u. a. „Using active resonator impedance matching for shot-noise limited, cavity enhanced amplitude modulated laser absorption spectroscopy.“ In: *Optics express* 16.11 (2008), S. 7726–7738. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.16.007726.



- [21] Herman Z. Cummins und Harry L. Swinney. „Light Beating Spectroscopy“. In: *Progress in Optics* 8 (1970). DOI: 10.1007/978-1-4615-8906-8.
- [22] Xiaojiao Dai u. a. „Thermal analysis of optical reference cavities for low sensitivity to environmental temperature fluctuations“. In: *Optics Express* 23.4 (2015), S. 5134. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.23.005134.
- [23] Jay W. Dawson, Namkyoo Park und Kerry J. Vahala. „An improved delayed self-heterodyne interferometer for linewidth measurements“. In: *IEEE Photonics Technology Letters* 4.9 (1992), S. 1063–1066. ISSN: 10411135. DOI: 10.1109/68.157150.
- [24] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 2*. 2013, S. 495. ISBN: 978-3-642-29943-8. DOI: 10.1007/978-3-642-29944-5.
- [25] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3*. ISBN: 9783540792949.
- [26] Alexandre Didier u. a. „Ultra-low phase noise all-optical microwave generation setup based on commercial devices“. In: (2015), S. 1–8. DOI: 10.1364/AO.54.003682. arXiv: 1503.06038.
- [27] S Feng und H G Winful. „Physical origin of the Gouy phase shift.“ In: *Optics letters* 26.8 (2001), S. 485–487. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.26.000485.
- [28] S M Foreman. „Femtosecond Frequency Combs for Optical Clocks and Timing Transfer“. In: *PhD Thesis* (2007), S. 1–265. ISSN: 054913994X.
- [29] T. M. Fortier u. a. „Generation of Ultrastable Microwaves via Optical Frequency Division“. In: *Nature Photonics* June (2011), S. 1–5. ISSN: 1749-4885. DOI: 10.1038/nphoton.2011.121. arXiv: 1101.3616.
- [30] T. M. Fortier u. a. „Improved limits on variation of the fine structure constant and violation of Local Position Invariance“. In: *Proceedings of the IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition 070801*. February (2007), S. 663–665. ISSN: 00319007. DOI: 10.1109/FREQ.2007.4319157.
- [31] P. Gallion und G. Debarge. „Quantum phase noise and field correlation in single frequency semiconductor laser systems“. In: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 20.4 (1984), S. 343–349. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/JQE.1984.1072399.
- [32] P Gill u. a. „Optical Atomic Clocks for Space“. In: *NPL 1.21641* (2008), S. 1–145.
- [33] Joseph W. Goodman. *Statistical Optics*. 2000.
- [34] M. Han und A. Wang. „Analysis of a loss-compensated recirculating delayed self-heterodyne interferometer for laser linewidth measurement“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 81.1 (2005), S. 53–58. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/s00340-005-1871-9.
- [35] P. Hariharan. „Letter The Gouy phase shift as a geometrical quantum effect“. In: *Journal of Modern Optics* 43.2 (1996), S. 219–222. ISSN: 0950-0340. DOI: 10.1080/095003496156093.

- [36] Peter Horak und Wei H Loh. „On the delayed self-heterodyne interferometric technique for determining the linewidth of fiber lasers.“ In: *Optics express* 14.9 (2006), S. 3923–3928. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.14.003923.
- [37] N. Huntemann u. a. „Single-Ion Atomic Clock with  $3 \times 10^{-18}$  Systematic Uncertainty“. In: *Physical Review Letters* 116.6 (2016), S. 063001. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.063001.
- [38] Herbert E. Ives und G. R. Stilwell. „An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock“. In: *Journal of the Optical Society of America* 28.7 (Juli 1938), S. 215. ISSN: 0030-3941. DOI: 10.1364/JOSA.28.000215.
- [39] Kazuro Kikuchi. „Effect of  $1/f$ -type FM noise on semiconductor-laser linewidth residual in high-power limit.“ In: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 25.4 (1989), S. 684–688. ISSN: 00189197. DOI: 10.1109/3.17331.
- [40] Shimon Kolkowitz u. a. „Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks“. In: *ArXiv* (2016). arXiv: 1606.01859.
- [41] Matthias Kronseder. „Fluktuationseigenschaften von chaotischem Licht – eine klassische Betrachtung –“. In: (2006).
- [42] J. Le Gouët u. a. „Limits to the sensitivity of a low noise compact atomic gravimeter“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 92.2 (2008), S. 133–144. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/s00340-008-3088-1. arXiv: 0801.1270.
- [43] „Lecture 6 : Spectral Densities and All That Power and Energy in a Signal Parseval’s Theorem“. In: *University of Western Australia* 2 (2005).
- [44] „Lecture notes: Power Spectrum Density“. In: *Caltech* (), S. 1–14.
- [45] David R Leibbrandt, James C. Bergquist und Till Rosenband. „Cavity-stabilized laser with acceleration sensitivity below  $10^{-12} \text{ g}^{-1}$ “. In: *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics* 87.2 (2013), S. 1–7. ISSN: 10502947. DOI: 10.1103/PhysRevA.87.023829. arXiv: 1301.0022.
- [46] David R Leibbrandt u. a. „Spherical reference cavities for frequency stabilization of lasers in non-laboratory environments.“ In: *Optics express* 19.4 (2011), S. 3471–3482. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.19.003471.
- [47] J Levine. „Introduction to time and frequency metrology“. In: *Review of Scientific Instruments* 70.6 (1999), S. 2567–2596. ISSN: 00346748. DOI: 10.1063/1.1149844.
- [48] LIGO Group. „Observation of gravitational waves from a binary black hole merger“. In: *Physical Review Letters* 116.6 (2016), S. 1–16. ISSN: 10797114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837.
- [49] Burghard Lipphardt u. a. „The stability of an optical clock laser transferred to the interrogation oscillator for a Cs fountain“. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 58.4 (2009), S. 1258–1262. ISSN: 00189456. DOI: 10.1109/TIM.2008.2007051. arXiv: 0809.2150.

- [50] O Llopis u. a. „Phase noise measurement of a narrow linewidth CW laser using delay line approaches.“ In: *Optics letters* 36.14 (2011), S. 2713–2715. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.36.002713.
- [51] Michael Lombardi. „The Accuracy & Stability of Quartz Watches“. In: *Horological Journal* February (2008), S. 57–59.
- [52] Rodney Loudon. *The quantum theory of light*. third edit. 2000.
- [53] Rodney Loudon. *The quantum theory of light chapter on chaotic light*.
- [54] Andrew D. Ludlow u. a. „Compact, thermal-noise-limited optical cavity for diode laser stabilization at  $1 \times 10^{-15}$ “. In: *Optics letters* 32.6 (2007), S. 641–643. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.32.000641. arXiv: 0610274 [physics].
- [55] Hanne Ludvigsen und Erik Bødtker. „New method for self-homodyne laser linewidth measurements with a short delay fiber“. In: *Optics Communications* 110.5-6 (1994), S. 595–598. ISSN: 00304018. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90257-7.
- [56] Hanne Ludvigsen, Mika Tossavainen und Matti Kaivola. „Laser linewidth measurements using self-homodyne detection with short delay“. In: *Optics Communications* 155.1-3 (1998), S. 180–186. ISSN: 00304018. DOI: 10.1016/S0030-4018(98)00355-1.
- [57] L Mandel, E C G Sudarshan und E Wolf. „Theory of photoelectric detection of light fluctuations“. In: *Proceedings of the Physical Society* 84.3 (2002), S. 435–444. ISSN: 0370-1328. DOI: 10.1088/0370-1328/84/3/313.
- [58] Tanja E. Mehlstäubler. „Atomic Clocks Tutorial 1“. In: *unknown* (2009).
- [59] L.B. Mercer. „1/f frequency noise effects on self-heterodyne linewidth measurements“. In: *Journal of Lightwave Technology* 9.4 (Apr. 1991), S. 485–493. ISSN: 07338724. DOI: 10.1109/50.76663.
- [60] Dieter Meschede. *Optik, Licht und Laser*. 2008.
- [61] Katharina Möhle. „Piezoelectric-Tunable Optical Cavities for the Gravitational Wave Detector LISA“. Diss. 2013.
- [62] G Mueller u. a. „Determination and optimization of mode matching into optical cavities by heterodyne detection.“ In: *Optics letters* 25.4 (2000), S. 266–268. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.25.000266.
- [63] Moritz Nagel u. a. „Direct terrestrial test of Lorentz symmetry in electrodynamics to  $10^{-18}$ “. In: *Nature communications* 6 (2015), S. 8174. ISSN: 2041-1723. DOI: 10.1038/ncomms9174. arXiv: arXiv:1412.6954v2.
- [64] Moshe Nazarathy u. a. „Spectral analysis of optical mixing measurements“. In: *Journal of Lightwave Technology* 7.7 (1989), S. 1083–1096. ISSN: 07338724. DOI: 10.1109/50.29635.

- [65] Daniele Nicolodi u. a. „Spectral purity transfer between optical wavelengths at the  $10^{-18}$  level“. In: *Nature Photonics* 8.3 (2014), S. 219–223. ISSN: 1749-4885. DOI: 10.1038/nphoton.2013.361. arXiv: arXiv:1311.4378v1.
- [66] R. a. Nyman u. a. „I.C.E.: A transportable atomic inertial sensor for test in microgravity“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 84.4 (2006), S. 673–681. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/s00340-006-2395-7. arXiv: 0605057 [cond-mat].
- [67] Francesco Pampaloni und Joerg Enderlein. „Gaussian, Hermite-Gaussian, and Laguerre-Gaussian beams: A primer“. In: (2004), S. 29. ISSN: 0030-400X. DOI: 10.1134/S0030400X06090190. arXiv: 0410021 [physics].
- [68] Andre Pape. „Hochstabiler Lokalszillator für einen optischen Magnesium-Frequenzstandard“. In: (2012).
- [69] Yu Peng. „A Novel Scheme for Hundred-Hertz Linewidth Measurements with the Self-Heterodyne Method“. In: *Chinese Physics Letters* 30.8 (2013), S. 084208. ISSN: 0256-307X. DOI: 10.1088/0256-307X/30/8/084208.
- [70] Plamen Petrov. „Quantum noise limited light interferometry with cold trapped atoms“. In: (2006).
- [71] Christophe Peucheret. „Note on Fabry-Perot Interferometers“. In: 1.1 (), S. 1–9.
- [72] Jörg Reichert. „Präzise optische Frequenzmessungen mit modengekoppelten Lasern“. Diss. 2000.
- [73] L. Richter u. a. „Linewidth determination from self-heterodyne measurements with subcoherence delay times“. In: *IEEE Journal of Quantum Electronics* 22.11 (Nov. 1986), S. 2070–2074. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/JQE.1986.1072909.
- [74] W J Riley. *Handbook of Frequency Stability Analysis*. Bd. 31. 1. 1994, A49. ISBN: 3019753058. DOI: 10.1016/0148-9062(94)92706-5.
- [75] Bahaa E. A. Saleh und Malvin Carl Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley, 2007.
- [76] Ch. Salomon, D. Hils und J. L. Hall. „Laser stabilization at the millihertz level“. In: *Journal of the Optical Society of America B* 5.8 (Aug. 1988), S. 1576. ISSN: 0740-3224. DOI: 10.1364/JOSAB.5.001576.
- [77] S. Schlamminger u. a. „Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance“. In: *Physical Review Letters* 100.4 (2008), S. 1–4. ISSN: 00319007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.041101. arXiv: 0712.0607.
- [78] Thilo Schuldt u. a. „High-Performance Optical Frequency References for Space“. In: *Journal of Physics: Conference Series* 723 (Juni 2016), S. 012047. ISSN: 1742-6588. DOI: 10.1088/1742-6596/723/1/012047.
- [79] Thilo Schuldt u. a. „mSTAR : Testing Special Relativity in Space Using High Performance Optical Frequency References“. In: *IEEE* (2015), S. 2–5.
- [80] Joachim Schulz. „Inhaltsverzeichnis“. In: (1998).

- [81] B. S. Sheard u. a. „Intersatellite laser ranging instrument for the GRACE follow-on mission“. In: *Journal of Geodesy* 86.12 (Dez. 2012), S. 1083–1095. ISSN: 0949-7714. DOI: 10.1007/s00190-012-0566-3.
- [82] A. E. Siegmann. *Siegman A.* 1986.
- [83] D Subbarao. „Topological phase in Gaussian beam optics.“ In: *Optics letters* 20.21 (1995), S. 2162. ISSN: 0146-9592. DOI: 10.1364/OL.20.002162.
- [84] H. R. Telle, B. Lipphardt und J. Stenger. „Kerr-lens, mode-locked lasers as transfer oscillators for optical frequency measurements“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 74.1 (2002), S. 1–6. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/s003400100735. arXiv: 0107037 [physics].
- [85] R. Thompson u. a. „A flight-like optical reference cavity for GRACE follow-on laser frequency stabilization“. In: *Proceedings of the IEEE International Frequency Control Symposium and Exposition* (2011). ISSN: 1075-6787. DOI: 10.1109/FCS.2011.5977873.
- [86] Michael J Thorpe u. a. „Measurement and real-time cancellation of vibration-induced phase noise in a cavity-stabilized laser.“ In: *Optics express* 18.18 (2010), S. 18744–18751. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.18.018744.
- [87] Michael Edmund Tobar u. a. „Testing local Lorentz and position invariance and variation of fundamental constants by searching the derivative of the comparison frequency between a cryogenic sapphire oscillator and hydrogen maser“. In: *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology* 81.2 (2010), S. 1–10. ISSN: 15507998. DOI: 10.1103/PhysRevD.81.022003. arXiv: 0912.2803.
- [88] T. D. Visser und E. Wolf. „The origin of the Gouy phase anomaly and its generalization to astigmatic wavefields“. In: *Optics Communications* 283.18 (2010), S. 3371–3375. ISSN: 00304018. DOI: 10.1016/j.optcom.2010.04.099.
- [89] S. Vogt u. a. „Demonstration of a transportable 1 Hz-linewidth laser“. In: *Applied Physics B: Lasers and Optics* 104.4 (2011), S. 741–745. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/s00340-011-4652-7. arXiv: 1010.2685.
- [90] Stephen Webster und Patrick Gill. „Force-insensitive optical cavity“. In: (2011), S. 3. ISSN: 1539-4794. DOI: 10.1364/OL.36.003572. arXiv: 1108.4819.
- [91] D. S. Weiss, B. C. Young und S. Chu. „Precision measurement of  $\hbar/mCs$  based on photon recoil using laser-cooled atoms and atomic interferometry“. In: *Applied Physics B Lasers and Optics* 59.3 (1994), S. 217–256. ISSN: 09462171. DOI: 10.1007/BF01081393.
- [92] Sören Wengerowsky. „Aufbau und Charakterisierung eines External Cavity Diode Lasers zur Rubidium-Spektroskopie“. Diss. 2011.
- [93] P. Wolf u. a. „Quantum physics exploring gravity in the outer solar system: The SAGAS project“. In: *Experimental Astronomy* 23.2 (2009), S. 651–687. ISSN: 09226435. DOI: 10.1007/s10686-008-9118-5. arXiv: 0711.0304.

- [94] Bo Yu u. a. „Direct measurement of DBR fiber laser linewidth based on the sidebands' interference“. In: *Laser Physics Letters* 10.7 (2013), S. 075007. ISSN: 1612-2011. DOI: 10.1088/1612-2011/10/7/075007.
- [95] ZARM. *Drop Tower Bremen User Manual*. 2012.
- [96] Y N Zhao u. a. „A vibration-insensitive optical cavity and absolute determination of its ultrahigh stability.“ In: *Optics express* 17.11 (2009), S. 8970–8982. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.17.008970. arXiv: 0904.0865.

# Abbildungsverzeichnis

1.1. Das Schema einer modernen Atomuhr . . . . .	2
1.2. Eine Atomuhr und Visualisierung der GRACE Daten . . . . .	3
1.3. Geschichte der rel. Frequenzstabilitäten. . . . .	4
1.4. Formation der Satelliten der eLISA Mission. . . . .	10
1.5. Zwei designierte Resonator-Typen für den Weltraumeinsatz. . . . .	13
1.6. Zwei weitere Resonator-Typen für den Weltraumeinsatz. . . . .	14
1.7. Der Fallturm Bremen . . . . .	14
1.8. Anforderungen an die Stabilität des hochstabilen Lasersystems. . . . .	15
2.1. Aufbau von Uhren und Oszillatoren. . . . .	20
2.2. Rauschdaten und Allan-Varianz im Vergleich. . . . .	23
2.3. Einfluss der Mittelung auf PSDs . . . . .	27
2.4. Schematischer Aufbau eines DSHI. . . . .	54
2.5. Zeitabfolge in einem DSHI. . . . .	55
2.6. Plot von $\mathfrak{S}$ für verschiedene Verzögerungsparameter $k$ . . . . .	61
2.7. Plot von $\mathfrak{S}$ für verschiedene Linienbreite $\Delta\omega$ . . . . .	62
2.8. Plot von $\mathfrak{S}$ für verschiedene Verzögerungsparameter $k$ und Breiten der Gaußkurve $\sigma$ . . . . .	62
2.9. Plot von $\mathfrak{S}$ für verschiedene Faltungsbreiten $\sigma$ . . . . .	63
2.10. Plot von $\mathfrak{S}$ für verschiedene Verzögerungsparameter $k$ . . . . .	64
2.11. Verschiedene Rauschleistungsdichten mit verschiedenen Faltungsbreiten $\sigma$ . . . . .	64

2.12. Parameteranpassung an verschiedene Rauschleistungsdichten $\mathcal{S}$ mit unterschiedlichen Faltungsbreiten $\sigma$ . . . . .	66
2.13. Prinzip der selbst-heterodynem Messung der Linienbreite. . . . .	67
2.14. Interferenz der Seitenbänder im Fabry-Perot-Interferometer. . . . .	71
2.15. Schwebung der Interferenz der Seitenbänder im Fabry-Perot-Interferometer. . . . .	72
2.16. Messung des Kontrastes über dem Detuning $\Omega$ des zweiten Phasenmodulators. . . . .	73
2.17. Messung des Kontrastes über dem Detuning $\Omega$ für verschiedene Abschlusswiderstände. . . . .	74
2.18. Frequenzspektrum eines Frequenzkamms. . . . .	75
2.19. Frequenzvergleich mittels eines Frequenzkamms. . . . .	76
2.20. Eine Exponat mit Spiegeln im National Science Center Fort Discovery in Augusta, GA, USA. . . . .	78
2.21. Ein schematischer Zylinderresonator mit Transparenz. . . . .	78
2.22. Eine Auswahl verschiedener Resonatorgeometrien. . . . .	79
2.23. Die Transferfunktion $H_{RI}$ eines optischen Resonators. . . . .	83
2.24. Plot der Transferfunktion eines Resonators bei verschiedenen Parametern. . . . .	84
2.25. Zeigt die Wellenmaxima a) einer ebenen Welle, b) einer sphärischen Welle, c) einer Gauß-Welle. . . . .	86
2.26. Intensitätsprofile der niedrigen TEM Moden. . . . .	87
2.27. Hole-burning der dopplerfreie Sättigungsspektroskopie. . . . .	91
2.28. Die Anordnung im Frequenzraum der Seitenbänder bei der FMS. . . . .	92
2.29. Absorption und Dispersion der FMS. . . . .	94
2.30. Signale einer FMS. . . . .	94
2.31. Absorption und Dispersion des PDH Verfahrens. . . . .	96
2.32. Die Signale der Absorption und Dispersion des PDH Verfahrens. . . . .	97
3.1. Verformung eines Fussballs unter Druck. . . . .	102
3.2. Der Kugel-Resonator eingebaut in der Fallturm-Halterung. . . . .	103
3.3. Erste FEM Simulationen mit Autodesk Inventor zum „magischen Winkel“. . . . .	105
3.4. Komplementärwinkel des „magische Winkel“ zu $90^\circ$ für einen der acht Stempel. . . . .	106
3.5. CAD 3D Winkel als Parameter. . . . .	106
3.6. Koordinatensystem, optische Achse und Winkel mit Drehungen für die Berechnung des „magischen Winkels“ aus den CAD Winkeln $\alpha$ und $\beta$ . . . . .	107
3.7. CAD-Modell zur Berechnung des „magische Winkels“. . . . .	108
3.8. Kontour-Plot der Verformung der optischen Achse durch FEM 3D Simulationen. . . . .	109
3.9. Verschiedene Stempel für den Labor- und Fallturm-Aufbau. . . . .	109
3.10. Schnitte durch die CAD-Modelle der beiden Aufbauten. . . . .	110
3.11. Schema des Labor-Lasersystems . . . . .	112
3.12. Schema das Fallkapsel-Lasersystems . . . . .	114



---

3.13. Modensprungverhalten der Orbits Lightwave Laserquelle. . . . .	116
3.14. Bestimmung des Faktors zwischen Steuerspannung am Piezotreiber und der zugehörigen Frequenzverschiebung. . . . .	117
3.15. Auffinden der Arbeitspunkte, an welchen TEM Moden sichtbar werden.	118
3.16. Die Abbildungen zeigen Schnitte durch das 3D CAD-Modell der jeweiligen Aufbauten. Deutlich sind die massiven Kupferblöcke als Wärmereservoir zu erkennen, die Temperaturschilde hingegen sind nur leicht transparent angedeutet. . . . .	120
3.17. Thermale Sensitivitäten des Labor- und Kapselaufbaus. . . . .	121
3.18. PDH Elektronik der beiden Aufbauten. . . . .	124
3.19. Auswertung der Aufnahmen von Fehlersignalen. . . . .	126
3.20. Scan des Transmissionssignals für den Kapselaufbau. . . . .	127
3.21. Scan des Transmissionssignals für den Laboraufbau. . . . .	128
3.22. Verschiedene des Transmissionssignals für den Kapselaufbau mit verschiedenen Zeitskalen. . . . .	129
3.23. Scan der zentralen Flanke des Fehlersignals und Fit der Dispersionskurve.	130
3.24. Experimentelle Bestimmung der Abklingzeit durch Messung der Leistung des transmittierten Signals. . . . .	130
3.25. Experimentelle Bestimmung des Koeffizienten $\kappa$ . . . . .	132
3.26. Spektrale Rauschleistung der Vibrationen. . . . .	133
3.27. Beschleunigungsinduziertes Frequenzrauschen der beiden Resonatoren durch die Restvibrationen der beiden Aufbauten. . . . .	134
3.28. 18 Stunden Messung des Steuersignals für den Piezotreiber. . . . .	136
3.29. Zwei Messungen über je 18 Stunden bei unterschiedlicher Temperatur im Laboraufbau. . . . .	137
3.30. Antwort der Resonanzfrequenz auf Änderung der Solltemperatur von 22,4 °C auf 16,4 °C. . . . .	138
3.31. Bestimmung des Parameters $a$ und der Nulldurchgangstemperatur $T_0$ aus verschiedenen Messungen. . . . .	139
3.32. Schwankungen der Raumtemperatur und der Beatfrequenz bei verschiedenen Wärmebadtemperaturen. . . . .	140
3.33. Anpassung der Raumtemperatur mit einer Fitfunktion. . . . .	141
3.34. Schwankungen der Beatfrequenz über einen Tag. . . . .	142
3.35. Schwankungen der Raumtemperatur und der Beatfrequenz über einen längeren Zeitraum. . . . .	143
3.36. Schwankungen der Raumtemperatur und der Beatfrequenz über einen längeren Zeitraum. . . . .	143
3.37. Schwankungen der Raumtemperatur und der Beatfrequenz innerhalb von 31 Stunden. . . . .	144
3.38. Bestimmung des Leistungskoeffizienten für das Laborsystem. . . . .	147
3.39. Bestimmung des Leistungskoeffizienten für das Kapselsystem. . . . .	147

---

3.40. Spektrale Rauschleistungsdichte für die gemeinsame Messung zwischen dem Laser- und dem Kapselaufbau. . . . .	149
3.41. Allan-Standardabweichung eines Lasersystems aus der Messung zwischen dem Laser- und dem Kapselaufbau. . . . .	150
3.42. Kapselstrukturen für den Betrieb im Fallturm. In der Mitte die modifizierte kurze Fallkapsel, welche für den Katapulteinsatz bereit ist. . . . .	153
3.43. Kapsel Plattform. . . . .	154
3.44. Voll integrierte Fallkapsel mit dem hochstabilen Lasersystem. . . . .	156
3.45. CAD-Modell der optomechanischen Plattform. . . . .	158
3.46. Explosionsansicht des CAD-Modells der Vakuumkammer des Kapselaufbaus. . . . .	159
3.47. CAD-Modell der Faserbottiche. . . . .	162
3.48. Planung der Faserführung in den Faserbottichen rund um die Vakuumkammer. . . . .	163
3.49. CAD-Modell mit eingezeichnetem (Frei-)Strahlengang des Lasers vor dem Resonator. . . . .	164
3.50. CAD-Modell des Lasersystems auf der optomechanischen Plattform. . . . .	165
3.51. Aufzeichnungen des PDH Signals als Scan über die Resonanz. . . . .	166
3.52. Auswertung der Mittelpunkte der Fehlersignale aus Abbildung 3.51. . . . .	167
3.53. Die aufgezeichneten Daten eines Abwurfs. . . . .	168
4.1. Entwurf eines neuen Halters. . . . .	172
4.2. Optische Bank aus einer Glaskeramik. . . . .	174
A.1. Graphische Darstellung der Überlegung zur Wahrscheinlichkeit der stoßfreien Zeit $\tau$ in einem atomaren Gas. . . . .	176

# Tabellenverzeichnis

1.1. Übersicht der verschiedenen Konzepte für optische Resonatoren mit fixierter Lagerung. Die geringe Sensitivität auf Vibrationen ist für einen transportablen Einsatz wichtig. Die Abmessungen spielen für die Auswahl des passenden Resonators in dieser Arbeit eine Rolle, da im Fallturmaufbau der Platz sehr begrenzt ist. Die Resonatoren sind in Abbildung 1.5 und Abbildung 1.6 abgebildet. . . . .	12
2.1. Breiten der Lorentz-Kurven aus den Parameterfits in Abbildung 2.17. . . . .	71
3.1. Technische Daten des Kugel-Resonators. . . . .	104
3.2. G-Faktoren des Gauß-Strahls innerhalb des Resonators sowie die Spotgrößen auf den Spiegeln. . . . .	111
3.3. Technische Daten der Laserquellen. . . . .	115
3.4. Zeitkonstanten der Wärmeübertragung in den beiden Aufbauten. . . . .	122
3.5. Daten aus Abbildung 3.19: Abstand der Flanken sowie die Breite in Samples der zentralen Flanke des Fehlersignals. Daraus werden die Linienbreiten errechnet. . . . .	126
3.6. Auswertung des Scans der Transmissionen, siehe Abbildung 3.20 und Abbildung 3.21. . . . .	127
3.7. Auswertung der Scans der Fehlersignale in Abbildung 3.23. . . . .	128
3.8. Ergebnisse des Labor-Lasersystems. . . . .	131
3.9. Ergebnisse des Kapsel-Lasersystems. . . . .	132
3.10. Auswerten des Übergangs der Temperaturumstellung. . . . .	138

3.11. Fitparameter einer Anpassung an die Daten in Abbildung 3.33. . . . .	141
3.12. Fitparameter einer Anpassung an die Daten in Abbildung 3.34. . . . .	142
3.13. Mittelwerte der Fitparameter. . . . .	145
3.14. Bestimmung des Koeffizienten $k$ zwischen Temperaturschwankung und Frequenzschwankung. . . . .	145
3.15. Transferkoeffizienten der leistungsinduzierten Frequenzverschiebung. .	148

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mich während der Zeit meiner Promotion begleitet und unterstützt haben.

Zuerst möchte ich bei Sven Herrmann erwähnen, dem der größte Dank für seine fachliche Unterstützung, seine Leitung und seine Hilfe im Labor gebührt. Viele Probleme wurden nach unseren Gesprächen aus dem Weg geräumt. Durch das stete Vertrauen, das er mir entgegen brachte, konnte ich frei und mit eigenen Ideen die Umsetzung des Projekts angehen. Das Gelingen dieser Arbeit ist nicht zuletzt seinem Bemühen um die Finanzierung zu verdanken.

Sehr gerne danke ich Claus Lämmerzahl, meinem Erstgutachter und langjährigen Mentor. Dass er als Leiter der Arbeitsgruppe und zeitweise des Instituts für die Einwerbung der Projektmittel erfolgreich war, ermöglichte erst diese Arbeit zu beginnen und abzuschließen. Ich danke ihm dafür, dass er als Gutachter dieser Arbeit zur Verfügung steht.

Auch geht mein Dank an Claus Braxmaier und seiner Arbeitsgruppe, die mir fachlich zur Seite standen und mit ihrer Expertise helfen konnten. Insbesondere aber muss hervorgehoben werden, dass durch eine Leihgabe eines Lasermoduls der Abschluss dieser Arbeit erst möglich wurde. Vielen Dank dafür! Ebenfalls danke ich ihm dafür, dass er als Gutachter dieser Arbeit zur Verfügung steht.

Weiterhin danke ich herzlichst Ernst Rasel von dem Institut für Quantenoptik an der Leibniz Universität Hannover, für die konstruktiven Gespräche, die Kooperation zwischen den beiden Arbeitsgruppen und die Möglichkeiten, in Hannover mit seinen Mitarbeitern zu forschen und zu lernen. In diesem Zusammenhang möchte ich mich bei den damaligen Mitarbeitern in Hannover bedanken: Andre Pape, Steffen Rühmann

und Andre Kulosa, für die schöne Zeit im Labor.

Meinen Projektkollegen Sascha Kulas und Christian Vogt gebührt ebenfalls mein großer Dank für die schöne Zeit und tolle Zusammenarbeit. Sie waren immer da, wenn Hilfe gebraucht wurde und sorgten dafür, dass meine außeruniversitären Fähigkeiten im Tischfußball wieder gefördert wurden.

Genauso geht mein Dank an die gesamte Arbeitsgruppe, die für den nötigen Spaß an der Beschäftigung und ein tolles Arbeitsklima gesorgt haben. Ganz besonders möchte ich Arne Grenzebach und Christian Vogt hervorheben, mit denen ich das Büro teilen durfte und dies sehr genossen habe.

Ich danke der Deutschen Luft und Raumfahrt Agentur (DLR), deren Bereich Raumfahrtmanagement die Finanzierung der Projekte PRIMUS und PRIMUS2 übernommen haben, in deren Rahmen diese Arbeit erstellt werden konnte. Ganz herzlich grüße ich dabei Rainer Kuhl, Rainer Forke, Thomas Driebe und Tobias Saltzmann .

Ganz herzlich bedanke ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden, welche immer ein offenes Ohr für mich hatten. Ihr Einfühlungsvermögen und ihre Unterstützung war ein steter Quell der Motivation.

Meinen Korrekturlesern gilt ein ganz besonderer Dank: Sabrina Hintz, Sascha Kulas, Sven Herrmann und Arne Grenzebach.