

**Modellierung des Ensembleverhaltens  
von sedimentierenden Hydrometeoren  
mittels Momentenverfahren**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
– Dr. rer. nat. –

dem Fachbereich 1 (Physik/Elektrotechnik)  
der Universität Bremen

vorgelegt von

**Corinna Ziemer**

**Tag der Abgabe:** 13. November 2012  
**Tag des Kolloquiums:** 13. Februar 2013

- 1. Gutachter:** Priv.-Doz. Dr. Ulrike Wacker
- 2. Gutachter:** Prof. Dr. Thomas Jung

**Weitere Prüfer:** Prof. Dr. Klaus D. Beheng  
Prof. Dr. Stefan Bornholdt

Corinna Ziemer  
Alfred-Wegener-Institut, Helmholtz-Zentrum für Polar- und Meeresforschung  
Bussestrasse 24, 27570 Bremerhaven

Corinna.Ziemer@awi.de

# Zusammenfassung

---

Die Entwicklung eines Hydrometeor-Ensembles („Wolke“) kann mit einer Bilanzgleichung für dessen Größenspektrum beschrieben werden. In Wetter- oder Klimamodellen ist diese Vorgehensweise jedoch zu rechenzeitaufwändig. Daher ist es nötig, die in der Wolke wirkenden mikrophysikalischen Prozesse in parametrisierter Form approximativ zu erfassen. Schon die Parametrisierung der Sedimentation ist eine anspruchsvolle Aufgabe. In ihrer Standardform führt sie in einem Zwei-Momenten-Verfahren zu mittleren Massen der Hydrometeore, welche zu groß für den wolkenphysikalischen Kontext sind. Bisherige Lösungsansätze zur Vermeidung der übergroßen mittleren Massen ändern die Parametrisierungsannahmen dynamisch im laufenden Modell.

In dieser Arbeit wird ein neuer, fundamentaler Ansatz vorgestellt: An Stelle der Annahme eines alle Größen beinhaltenden Spektrums tritt dessen Beschränkung auf realistisch vorkommende Hydrometeorgrößen. Zur Berechnung der Integrale über das abgeschnittene Spektrum werden neue Techniken notwendig, welche einen erhöhten Rechenaufwand bedingen.

In dieser Arbeit werden Vergleiche der neuen Parametrisierung mit bereits existierenden Parametrisierungen unter Veränderung der Anfangsbedingungen und des Advektionsschemas vorgestellt. Mit der neuen Methode kann der Parametrisierungsfehler um bis zu 50 % reduziert werden. Übertragen auf Hydrometeore der festen Phase stellt die neue Parametrisierung eine deutliche Verbesserung gegenüber der Standardform dar. Dies wird anhand eines in polaren Regionen häufig vorkommenden Eisteilchentyps gezeigt. Weiterhin wird in dieser Arbeit erstmalig eine  $B$ -Verteilungsfunktion als Grundlage für eine Wolkenmikrophysik-Parametrisierung getestet. Sie zeichnet sich durch einen beschränkten Definitionsbereich aus. Es zeigt sich jedoch, dass sie nicht für die Verwendung in Zwei-Momenten-Verfahren geeignet ist, da ein freier Parameter aus den Modellgrößen diagnostiziert werden muss.

Erweitert man das Sedimentationsmodell um Tropfenkollisionen, so ist bei einem aus Wolkentropfen bestehenden Anfangsspektrum keine Aussage über die Güte der Sedimentationsparametrisierungen möglich, da die Wahl der Sedimentationsgeschwindigkeit kleiner Tropfen einen zu großen Einfluss auf die Koagulationsraten ausübt. Enthält das Anfangsspektrum hingegen bereits Regentropfen in hinreichend großer Anzahl, so reduziert sich mit der neuen Methode der Parametrisierungsfehler erneut um bis zu 50 %.



# Summary

---

## **Modelling the development of an ensemble of sedimenting hydrometeors using moment methods**

The evolution of a hydrometeor ensemble („cloud“) can be described using a balance equation for its size spectrum. In numerical weather prediction or climate models, however, this approach is too time consuming. It is therefore necessary to capture, if only approximately, the on-going microphysical processes in a cloud using a parameterised form of modelling. The parameterisation of sedimentation alone is already a demanding task. If its standard form is used in a two-moment scheme, the mean mass of the hydrometeors will be too large for a cloud physics context. Existing approaches try to avoid excessively large mean masses by altering dynamically the parameterisation assumptions in the running model.

In this work, a new fundamental approach is presented: the assumption of a spectrum containing particles of all sizes is replaced by its truncation at a particle size realistic in cloud physics. The calculation of integrals over the truncated spectrum requires a new technique, which demands higher computational effort.

In this work, comparisons of the new parameterisation with already existing parameterisations are made while changing the initial conditions and the advection scheme. With the new method, the parameterisation error is reduced by up to 50%. The new parameterisation also constitutes a great improvement compared to the standard form when transferred to modelling an ensemble of solid hydrometeors. This is illustrated using a particle type commonly found in polar regions. Furthermore, for the first time a  $B$ -distribution is used as a basis for a cloud microphysics parameterisation. Its domain of definition is bounded by construction. This distribution, however, appears not suitable for use in two-moment schemes, because one free parameter has to be derived from model data.

Extending the sedimentation model with drop collisions and starting with a cloud droplet spectrum, it is not possible to judge the quality of the sedimentation parameterisations, because the coagulation rates are dominated by the choice of the sedimentation velocity for small droplets. If the initial spectrum already contains a sufficient number of raindrops, however, application of the new method again reduces the parameterisation error by up to 50%.



# Inhaltsverzeichnis

---

	Seite
<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1. Behandlung der Wolkenmikrophysik . . . . .	2
1.2. Sedimentationsparametrisierung mit Momentenverfahren . . . . .	4
1.3. Bisherige Ansätze und neue Parametrisierung . . . . .	5
1.4. Aufbau der Arbeit . . . . .	6
<b>2. Beschreibung des Ensembleverhaltens von sedimentierenden Hydrometeoren</b>	<b>7</b>
2.1. Spektrale Beschreibung und Ensemblegrößen . . . . .	8
2.2. Parametrisierte Beschreibung (Momentenmethode) . . . . .	10
<b>3. Sedimentationsparametrisierungen</b>	<b>15</b>
3.1. $D_{\max}$ -Parametrisierung . . . . .	15
3.2. Bereits existierende Parametrisierungen . . . . .	20
3.3. Vergleich der mittleren Fallgeschwindigkeiten . . . . .	21
<b>4. Beschreibung der numerischen Modelle</b>	<b>23</b>
4.1. Grundgleichungen . . . . .	23
4.2. Numerische Umsetzung . . . . .	24
4.3. Anfangsbedingungen . . . . .	25
<b>5. Modellrechnungen zur Sedimentation von Regentropfen</b>	<b>27</b>
5.1. Ergebnisse des spektralen Modells . . . . .	27
5.2. Ergebnisse mit SED2MOM . . . . .	29
5.3. Ergebnisse mit RAINSHAFT . . . . .	45
<b>6. Sedimentation von Schnee</b>	<b>51</b>
6.1. Technische Vorbemerkungen . . . . .	52
6.2. Ergebnisse . . . . .	55

<b>7. Alternative Verteilungsfunktion: <i>B</i>-Verteilung</b>	<b>61</b>
7.1. Momentengleichungen . . . . .	61
7.2. Numerische Ergebnisse . . . . .	65
7.3. Schlussfolgerungen und Diskussion . . . . .	68
<b>8. Beschreibung von Tropfenkollisionen</b>	<b>69</b>
8.1. Spektrale Beschreibung . . . . .	71
8.2. Parametrisierte Beschreibung . . . . .	74
8.3. Parametrisierte Beschreibung mit $x_{\max} < \infty$ . . . . .	75
8.4. Parametrisierung nach Seifert u. Beheng (2001, 2006) . . . . .	77
<b>9. Ergebnisse mit Tropfenkollisionen</b>	<b>79</b>
9.1. Entwicklung eines Wolkentropfenspektrums . . . . .	80
9.2. Entwicklung eines Regentropfenspektrums . . . . .	92
<b>10. Vergleich der Rechenzeiten</b>	<b>103</b>
10.1. Spektrales Modell . . . . .	104
10.2. Parametrisiertes Modell: $\Gamma$ -Verteilung . . . . .	104
10.3. Parametrisiertes Modell: <i>B</i> -Verteilung . . . . .	108
<b>11. Zusammenfassung &amp; Diskussion</b>	<b>111</b>
11.1. Neuentwickelte Parametrisierung . . . . .	111
11.2. Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	112
11.3. Diskussion . . . . .	114
11.4. Resümee und Ausblick . . . . .	117
<b>A. Analytische Lösung der Momentengleichungen</b>	<b>121</b>
A.1. Hyperbolizität der Gleichungen für zwei Momente . . . . .	121
A.2. Lösungsstruktur . . . . .	123
<b>B. Formeln für Verteilungsparameter, Momente und Flüsse</b>	<b>135</b>
B.1. Formeln bei Verwendung von $D_{\max} = \infty$ . . . . .	136
B.2. Formeln bei Verwendung von $D_{\max} < \infty$ . . . . .	136
<b>C. Ansätze für die Tropfenfallgeschwindigkeit</b>	<b>139</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>145</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>149</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>152</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>

## Einleitung

---

Wolken sind charakteristisch für die Atmosphäre der Erde. Sie bestehen aus einem Ensemble von Wasserpartikeln in festem oder flüssigen Aggregatzustand, den sogenannten *Hydrometeoren*. Beispiele für Hydrometeore sind Tropfen, Hagel- bzw. Graupelkörner, Eiskristalle und Schneeflocken.

Das Erdsystem wird von Wolken auf vielfältige Weise beeinflusst. Sie absorbieren, streuen und emittieren kurz- bzw. langwellige Strahlung und verändern so Lichtverhältnisse bzw. Temperatur. Ferner wird durch Phasenübergänge der Hydrometeore latente Wärme in die Atmosphäre freigesetzt oder ihr entzogen. Dies führt zu konvektiver Wolkenbildung, welche der Antrieb der allgemeinen Atmosphärenzirkulation ist. Durch fallende Tropfen kommt es zu Niederschlag am Boden. Hiermit wird Wasser der Atmosphäre entzogen und die Aerosolkonzentration durch Auswaschung verringert (Houghton, 2002; Stensrud, 2007).

In der Atmosphäre sind die Hydrometeore verschiedenen Prozessen unterworfen: Sie werden von der umgebenden Luftströmung advehiert, wobei Abweichungen von der Strömung durch Brownsche Bewegung, Turbulenz und *Sedimentation* im Schwerfeld der Erde entstehen (die Relevanz der Prozesse richtet sich nach der Teilchengröße). Je nach Luftfeuchtigkeit der Umgebung wachsen oder schrumpfen die Hydrometeore durch Anlagerung oder Abgabe von Wasserdampf. Bei flüssigen Hydrometeoren (Tropfen) nennt man dies *Kondensation* bzw. *Verdunstung*, bei den festen Hydrometeoren spricht man von *Deposition* oder *Sublimation*. Durch unterschiedliche Geschwindigkeiten der Teilchen kann es zu Kollisionen kommen, wobei sich die Resultate je nach Typ und Größe der beteiligten Hydrometeore unterscheiden. Bei Tropfen führen die Kollisionen zum permanenten Verschmelzen (*Koagulation*), zum Abprallen oder zum Zerfall der Stoßpartner.

Da diese Prozesse sich auf sehr kleinen räumlichen Skalen von der Größe der Teilchenabmessung ( $\mu\text{m}$  –  $\text{mm}$ ) abspielen, bezeichnet man sie als *Wolkenmikrophysik*.

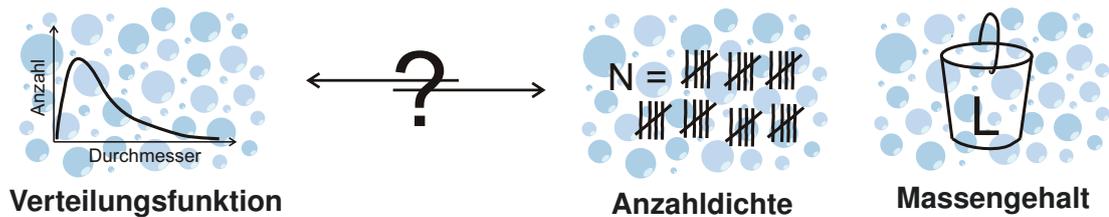


Abbildung 1.1 – Spektrale (li.) und parametrisierte (re.) Behandlung der Wolkenmikrophysik.

## 1.1. Behandlung der Wolkenmikrophysik

In numerischen Wettervorhersage- und Klimamodellen kann die Wolkenmikrophysik mit zwei prinzipiell unterschiedlichen Methoden behandelt werden (Abbildung 1.1):

Eine Möglichkeit ist, die wolkenmikrophysikalischen Prozesse direkt in ihrer Wirkung auf ein Ensemble von einzelnen Hydrometeore zu beschreiben. Hierzu wird die Hydrometeorgrößen-Verteilungsfunktion, *Spektrum* genannt, benutzt. Dieses beschreibt, wie viele Hydrometeore welcher Größenklasse sich in einem Kontrollvolumen befinden. Die zeitlichen Änderungen, welche sich durch die mikrophysikalischen Prozesse in der Tropfenverteilung ergeben, werden im Modell durch eine Bilanzgleichung für das Spektrum wiedergegeben. Man spricht so auch von der *spektralen Methode* bzw. dem spektralen Modell. In der numerischen Umsetzung muss dabei die Größenkoordinate in sehr viele Klassen aufgeteilt werden, um eine ausreichende Genauigkeit zu erreichen. Aus diesem Grund ist der Rechenaufwand der spektralen Methode sehr hoch und beim derzeitigen Stand der Rechnerleistung nicht für eine operationelle Wettervorhersage geeignet (Cotton et al., 2011).

Daher verwendet man in Wettervorhersage- und Klimamodellen eine sogenannte *Parametrisierung*. Ihr Ziel ist es, mit den wenigen vom Modell darstellbaren Größen die mikrophysikalischen Prozesse ähnlich genau wie im spektralen Modell zu erfassen. Eine Parametrisierung wird definiert über die Annahmen, welche vonnöten sind, um die mikrophysikalischen Prozesse mit den Modellgrößen erfassen zu können.

Speziell für Wolken sind die verwendeten Modellvariablen Anzahl und/oder die Masse der Hydrometeore eines Typs pro Kontrollvolumen, die *Anzahldichte* bzw. der *Massengehalt* (Doms et al., 2011). Diese sind *Momente* des Hydrometeorspektrums. Eine Gleichung für die Momente, welche deren zeitliche Änderung beschreibt, erhält man dann über Integration der spektralen Bilanzgleichung. Diese spezielle Art von Parametrisierung wird *Momentenmethode* genannt. Meist werden parallel Bilanzgleichungen für ein bis zwei Momente gelöst (siehe Tabelle 1.1 für eine Übersicht). Des Weiteren kann es notwendig sein, das entstehende Gleichungssystem zu schließen.

Als eine Form der Schließungsbedingung kann eine feste Form der Verteilungsfunktion mit wenigen frei wählbaren Parametern gewählt werden. In der Literatur wird

**Tabelle 1.1** – Übersicht der Wolkenmikrophysik-Schemata aus einigen gebräuchlichen Wettervorhersage- und Klimamodellen. Es gelten die Abkürzungen —  $N$ : Anzahldichte,  $L$ : Massengehalt,  $c$ : Wolkenwasser,  $i$ : Wolkeneis,  $r$ : Regen,  $s$ : Schnee,  $g$ : Graupel,  $h$ : Hagel.

Modell	vorhergesagte Größen	Quellen
COSMO	$L_c, L_r, L_i, L_s$	Doms et al. (2011)
ECHAM5	$L_c, L_i$	Roeckner et al. (2003)
ECMWF	$L_c, L_r, L_i$	Tiedtke (1993), nach Wilson u. Ballard (1999)
MetUM	$L_c, L_i$	Walters et al. (2011) und dortige Referenzen
WRF	$N_r, N_i, N_s, N_{g,h}$ $L_c, L_r, L_i, L_s, L_{g,h}$	Skamarock et al. (2008)

diese Vorgehensweise auch *Presumed number density function Method of Moments*, PMOM, genannt. Üblicherweise wird die Verteilungsfunktion als  $\Gamma$ -Verteilung angesetzt. Ein anderer Schließungsansatz ist die *Quadrature Method of Moments* (QMOM, zum Beispiel Mukhopadhyay et al., 2012), welche die Momente über Stützstellen und Gewichte approximiert. Damit die Ergebnisse des parametrisierten Modells gut mit den aus der Lösung des spektralen Modells berechneten Momenten übereinstimmen, sollte es mit der angenommenen Verteilungsfunktion möglich sein, das sich im spektralen Modell entwickelnde Hydrometeorspektrum nachzubilden. Je mehr Momente vorhergesagt werden, desto mehr freie Parameter darf die angenommene Verteilungsfunktion besitzen und desto kompliziertere Formen kann sie annehmen. Es ist daher zu erwarten, dass mit der Prognose zusätzlicher Momente eine größere Nähe zur Lösung des spektralen Modells erreicht wird. Jedoch wächst auf diese Weise der Rechenaufwand der Momentenmethode. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn, wie in operationellen Modellen benötigt, verschiedene Hydrometeor Typen berücksichtigt werden. Bislang wurden nach Kenntnisstand der Autorin nur Verfahren für die Vorhersage von bis zu drei Momenten entwickelt (Clark (1974) für Wolken; Milbrandt u. Yau (2005b) in einem Mehrphasenmodell für sechs Hydrometeor Typen). Diese dienen Forschungszwecken.

Naturgemäß entstehen durch die lediglich approximative Erfassung der wolkenmikrophysikalischen Prozesse Abweichungen zwischen den Ergebnissen des spektralen und des parametrisierten Modells. Diese *Parametrisierungsfehler* können selbstverstärkender (autokatalytischer) Natur sein.

Eine der ersten Parametrisierungen der Mikrophysik warmer Wolken geht auf Kessler (1969) zurück und beschreibt die Entstehung von Niederschlag aus Wolken. Der Autor präsentiert Gleichungen für die Änderung des Massengehalts der Tropfen (*Flüssigwassergehalt*) durch Sedimentation und Koagulationsprozesse, wobei der Sedimentationsfluss

und die Koagulationsrate allein Funktionen der prognostischen Variablen sind. Der Flüssigwassergehalt wird in einen Wolken- und einen Regenanteil aufgeteilt (man spricht hier vom *Kessler-Schema*). Wolkenwasser besteht dabei aus sehr kleinen Tropfen, welche keine nennenswerte Fallgeschwindigkeit haben und dem umgebenden Luftstrom folgen. Regenwasser besteht aus größeren Tropfen, die eine nicht vernachlässigbare, größenabhängige Fallgeschwindigkeit haben und so Niederschlag verursachen. Durch Koagulationsprozesse wird Wolkenwasser in Regenwasser umgewandelt.

Die von Kessler nur qualitativ gezogene Grenze zwischen Wolken- und Regentropfen wird von Berry u. Reinhardt (1974b); Beheng u. Doms (1986) in spektralen Simulationen von Kollisions-Koaleszenzen genauer ermittelt. Sie erhalten einen Durchmesser von 80 bis 100  $\mu\text{m}$ . Dadurch ist es möglich, beliebige Momente der Wolken- und Regenkatégorie zu berechnen. Diesen Gedanken fortführend parametrisieren Lüpkes (1991); Beheng (1994) Kollisionsprozesse mit Hilfe von Anzahldichte und Flüssigwassergehalt und verbessern durch die Verwendung von zwei Momenten den Kesslerschen Ansatz (Seifert, 2002).

Die parametrisierte Vorhersage von Hydrometeoren der festen Phase (Eis, Schnee, Graupel und Hagel) fußt ebenfalls auf dem Kessler-Schema (Cotton et al., 2011).

## 1.2. Sedimentationsparametrisierung mit Momentenverfahren

Die Sedimentation von Tropfen wird von Kessler (1969) anhand eines eindimensionalen spektralen Modells vorgestellt. Dieses wird mit einer räumlich begrenzten Wolke initialisiert, in der die Tropfengrößenverteilung nicht von der Höhe abhängt. Der Autor stellt fest, dass sich das Tropfenensemble unter der Einwirkung der Gravitation nach der Größe sortiert: Tropfen mit höherem Durchmesser fallen schneller. Daher sind auf einer bestimmten Höhe zunächst große und im weiteren Verlauf des Modells immer kleinere Tropfen zu finden. Dieser Effekt wird von Kessler *gravitational sorting* (dt. Schweresortierung) genannt. Mit diesem Modell kann daher der in der Natur vorkommende Effekt abgebildet werden, dass das Einsetzen des Niederschlages von großen Tropfen begleitet wird. Betrachtet man die mittlere Masse der Tropfen, so drückt sich der Effekt der Schweresortierung dadurch aus, dass die Masse im Modell nach unten hin zunimmt und unterhalb der anfänglichen Wolke den Anfangswert überschreitet. Dieses Verhalten kann von dem in Kessler (1969) vorgestellten Ein-Momenten-Verfahren nicht nachgebildet werden: Die mittlere Masse des Ensembles nimmt zwar nach unten hin zu, überschreitet aber nicht den Anfangswert. Dies wird von späteren Arbeiten bestätigt (Wacker u. Seifert, 2001; Milbrandt u. Yau, 2005a).

In einem Zwei-Momenten-Verfahren bewegen sich die beiden prognostischen Momente mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten fort, so dass die mittlere Masse im zeitlichen Verlauf ihren Anfangswert überschreiten kann. Dies geschieht jedoch in einem zu starken Maße, da das Verhältnis der Geschwindigkeiten zu groß ist. So entsteht eine im wolkenphysikalischen Kontext nicht sinnvolle mittlere Masse. Das

Schweresortierungs-Problem kann also auch mit dem Zwei-Momenten-Verfahren nicht vollständig gelöst werden. Diagnostiziert man des Weiteren aus der mittleren Masse die Radarreflektivität, so ist diese deutlich überschätzt (Wacker u. Lüpkes, 2009). Daher ist bei der Assimilation von Radardaten in Wettervorhersagemodelle Vorsicht geboten (Kumjian u. Ryzhkov, 2012).

Es wird in der vorliegenden Dissertation gezeigt, dass diese Probleme auch dann auftreten, wenn, wie in einem Wettervorhersage- oder Klimamodell benötigt, zusätzlich Kollisionen (mit nachfolgender Koagulation oder Zerfall) in das eindimensionale Modell mit aufgenommen werden. Es zeigt sich, dass die Parametrisierung des kollisionsinduzierten Zerfalls die mittlere Masse nicht auf physikalisch realistische Werte reduziert. Ein Verfahren zur Lösung der oben genannten Probleme muss also an der Sedimentationsparametrisierung ansetzen. Daher soll diese in der vorliegenden Arbeit eingehender untersucht werden.

Morrison (2012) kann durch die Verwendung eines Hybrid-Modells, welches spektrale und parametrisierte Verfahren kombiniert, nur in Sonderfällen Verbesserungen feststellen. Das Schweresortierungs-Problem kann nur in einem aufwändigen Drei-Momenten-Verfahren durch den zusätzlichen Freiheitsgrad der Verteilungsfunktion gelöst werden (Milbrandt u. Yau, 2005a). Einen Vergleich von Momentenverfahren unterschiedlicher Komplexität zeigen Kumjian u. Ryzhkov (2012).

### **1.3. Bisherige Ansätze in Zwei-Momenten-Verfahren und die neue Parametrisierung**

Bisherige Ansätze zur Lösung des Schweresortierungs-Problems im Kontext der Zwei-Momenten-Verfahren verfolgen das Ziel, die Geschwindigkeiten der Momente einander anzugleichen. Sie beruhen jedoch auf empirischen Prinzipien.

Mansell (2010) manipuliert direkt die Geschwindigkeiten der Momente. Andere Ansätze verfahren indirekt und beschränken den Wertebereich der Verteilungsparameter (Seifert u. Beheng, 2006) oder erhöhen künstlich die Tropfenanzahl, um die mittlere Masse zu beschränken (Cohard u. Pinty, 2000). Milbrandt u. Yau (2005a) steuern die Weite der Verteilungsfunktion durch Anpassung an zuvor erzielte Ergebnisse eines spektralen Modells. Diese Methoden greifen in das laufende Modell ein und verändern die Parametrisierungsannahmen im jeweiligen Zeitschritt.

Um die im Zusammenhang mit der Schweresortierung auftretenden Probleme von vornherein zu vermeiden, soll in dieser Arbeit ein fundamentaler Ansatz entwickelt und getestet werden. Er beruht auf physikalischen Überlegungen.

Die bisherigen Momentenmethoden verwenden zur Berechnung der Momente eine obere Integralgrenze, welche einem unendlich großen Hydrometeor entspricht. Die so entstehenden Integrale sind sehr einfach zu berechnen. Hier soll nun eine obere Integralgrenze verwendet werden, die einer endlichen maximalen Hydrometeorabmessung

entspricht, wie sie auch in der Natur vorkommt. So soll eine höhere Übereinstimmung mit den Ergebnissen des spektralen Modells erreicht und unrealistisch große mittlere Tropfenmassen ausgeschlossen werden. Im Gegensatz zu den in diesem Abschnitt vorgestellten Parametrisierungen modifiziert die in dieser Arbeit neu entwickelte Sedimentationsparametrisierung ihre Annahmen während des Modelllaufs nicht.

Die neue Sedimentationsparametrisierung wird in einem Zwei-Momenten-Verfahren anhand eines eindimensionalen Sedimentationsmodells getestet, wie es auch bereits von Kessler (1969) verwendet wurde. Ebenfalls werden Vergleiche mit bereits existierenden Parametrisierungen und mit verschiedenen Prozesskombinationen (Koagulation und Zerfall) angestellt. Eine einfache Konfiguration des Modells ist hilfreich, um die spezifischen Auswirkungen der unterschiedlichen Methoden und Prozesse klar erkennen zu können.

## 1.4. Aufbau der Arbeit

Kapitel 2 stellt die Grundlagen der Beschreibung von Vorgängen in einem Hydrometeor-Ensemble vor. Ausgehend vom spektralen Modell wird die Momentenmethode erklärt. In Kapitel 3 wird die neue Parametrisierung entwickelt und die zum Vergleich benutzten, bereits existierenden Parametrisierungen vorgestellt. Die Konfiguration des Testproblems (Gleichungen, Randbedingungen und Anfangswerte) und eine Beschreibung der verwendeten numerischen Programme sind in Kapitel 4 aufgeführt. Die Untersuchungen zur Sedimentation eines Regentropfen-Ensembles finden sich in Kapitel 5. Hierbei wird zunächst die Lösung des spektralen Referenzmodells vorgestellt, um dann die Lösungen der parametrisierten Gleichungen mittels zweier verschiedener Programme darzustellen. Untersucht werden der Einfluss des maximalen Tropfendurchmessers sowie die Nähe zur Lösung des spektralen Modells.

Kapitel 6 überträgt die neuentwickelte Parametrisierung auf eine Hydrometeorkategorie der festen Phase (dicht bereifte Aggregate von Dendriten). In Kapitel 7 wird ein anderer Typ der angenommenen Verteilungsfunktion, die sogenannte *B*-Verteilung, getestet und die entstehenden Veränderungen in Theorie und Resultaten diskutiert.

Kapitel 8 stellt die Beschreibung von Kollisionsprozessen in spektraler und parametrisierter Betrachtungsweise vor und legt damit die theoretische Basis für Kapitel 9. Hier wird die neue Sedimentationsparametrisierung in einem um kollisionsinduzierte Koagulationen und Zerfall erweiterten Modell getestet. In Kapitel 10 werden die Laufzeiten von spektralem und parametrisiertem Modell zusammengestellt und verglichen. Eine Zusammenfassung und Diskussion der Arbeit findet sich in Kapitel 11.

Die Anhänge beinhalten die analytische Lösung der parametrisierten Sedimentationsgleichungen (A), eine Zusammenstellung wichtiger Formeln (B) sowie eine Übersicht verwendeter Fallgeschwindigkeitsansätze (C).

# 2.

---

## Beschreibung des Ensembleverhaltens von sedimentierenden Hydrometeoren

---

Physikalisch können Wolken als ein Ensemble von Hydrometeoren verschiedener Größen charakterisiert werden. Die Zusammensetzung des Ensembles ändert sich durch *Sedimentation* im Schwerfeld der Erde, Kollisionprozesse (die zu Verschmelzen oder Zerfall von Hydrometeoren führen), sowie Verdunstung bzw. Kondensation. In diesem Kapitel sollen zwei Modelle vorgestellt werden, mit deren Hilfe sich Vorgänge in einem Hydrometeor-Ensemble beschreiben lassen. Begonnen wird mit dem spektralen Modell und der Definition anschaulicher Ensemblegrößen. Davon ausgehend wird dann das parametrisierte Modell entwickelt. Hier beschränken wir uns zunächst auf Sedimentation als einzig wirkenden Prozess. Eine Erweiterung auf Kollisionsprozesse erfolgt in Kapitel 8.

Das spektrale Modell beruht auf der Beschreibung der Wirkung der Prozesse auf einzelne Teilchen. Hierzu wird die Teilchengrößen-Verteilungsfunktion (*Spektrum*) verwendet, welche angibt, wie viele Teilchen welcher Größe sich in einem Volumen befinden. Für eine akkurate numerische Umsetzung aller Vorgänge muss die Teilchengrößen-Koordinate (zum Beispiel Teilchenabmessung oder -masse) in möglichst viele Klassen aufgeteilt werden, üblicherweise über 100. Die freien Variablen des spektralen Modells sind somit die Werte der Verteilungsfunktion an den zahlreichen Klassenmittelpunkten. Dies erfordert einen hohen Rechenaufwand. Im Folgenden wird die Lösung des spektralen Modells auf Grund ihrer Genauigkeit als *Referenzlösung* bezeichnet.

Im parametrisierten Modell erfasst man die auf Teilchenebene stattfindenden Prozesse approximativ über ihre Wirkung auf Ensemblegrößen (engl. *bulk properties*), zum Beispiel Anzahl oder Massengehalt der Hydrometeore pro Volumen. Die zu diesem Modell führenden Annahmen werden *Parametrisierung* genannt. Ziel der Entwicklung von Parametrisierungen ist es, ein Modell zu erhalten, welches in seinen Ergebnissen

möglichst nahe an der Lösung des spektralen Modells liegt. In der numerischen Umsetzung sind die freien Variablen dieses Modells die wenigen Ensemblegrößen. Hierdurch reduzieren sich die Freiheitsgrade und der Rechenaufwand gegenüber dem spektralen Modell deutlich. Dies ist vorteilhaft für die Anwendung in Wetter- oder Klimamodellen.

Bei der Angabe von Zahlenwerten wird im Folgenden, wie in der Wolkenphysik üblich, das cgs-System für die Einheiten verwendet: Längen werden in Zentimetern gemessen, Gewicht in Gramm und Zeit in Sekunden. Eine Ausnahme bildet die Vertikalkoordinate  $z$ : Der Übersichtlichkeit halber wird sie in Kilometern angegeben.

## 2.1. Sedimentation in spektraler Beschreibung und Definition von Ensemblegrößen

Ein Ensemble von Hydrometeoren kann durch seine Teilchengrößen-Verteilungsfunktion  $f = f(t, \vec{r}, D)$  charakterisiert werden. Die Variable  $D$  ist ein Maß für die Teilchengröße und wird *interne Koordinate* genannt. Durch  $f(t, \vec{r}, D)dD$  wird angegeben, wie viele Teilchen im Größenintervall  $[D, D + dD]$  sich zum Zeitpunkt  $t$  in einem Einheitsvolumen um den Ort  $\vec{r} = (x, y, z)$  befinden. Bezeichnet  $D$  eine Länge, ist die Einheit von  $f$  daher  $\text{cm}^{-4}$ .

Alle mikrophysikalischen Prozesse, die das Hydrometeor-Ensemble modifizieren, können in einer Bilanzgleichung für die Verteilungsfunktion im vierdimensionalen  $(\vec{r}, D)$ -Raum erfasst werden (siehe zum Beispiel Seifert, 2002; Hu u. Srivastava, 1995):

$$\partial_t f(t, \vec{r}, D) + \nabla \cdot (\vec{v}(t, \vec{r}, D) f(t, \vec{r}, D)) + \frac{\partial}{\partial D} (\dot{D} f(t, \vec{r}, D)) = \sigma. \quad (2.1)$$

Der erste Term der linken Seite beschreibt die lokale zeitliche Änderung von  $f$ . Der zweite Term stellt die räumliche Divergenz des Flusses  $\vec{v}f$  dar. Hierbei ist  $\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}_{\text{fall}}$  die Eigengeschwindigkeit des Teilchens, welche sich aus der massengewichteten Geschwindigkeit des umgebenden Luftgemisches  $\vec{v}_u$  und der nach unten gerichteten Sedimentationsgeschwindigkeit  $\vec{v}_{\text{fall}} = (0, 0, -v_f)$  ergibt. Der dritte Term auf der linken Seite beschreibt die Divergenz des Flusses  $\dot{D}f$  längs der inneren Koordinate. Ursachen der zeitlichen Änderung der Teilchengröße sind hier graduelle Prozesse wie zum Beispiel bei Tropfen Kondensation oder Verdunstung. Die rechte Seite  $\sigma$  umfasst die Quell- und Senkterme auf Grund von Kollisionsprozessen oder gegebenenfalls Wechselwirkungen mit Teilchen anderer Typen.

Der Fokus der Dissertation liegt auf der Parametrisierung der Sedimentation von Hydrometeor-Ensembles. Zur Vereinfachung werden dabei weder Verdunstung bzw. Kondensation, Kollisionen noch Wechselwirkungen betrachtet. Auch die Umgebungsgeschwindigkeit wird vernachlässigt. Es ist daher möglich, sich auf eine einzige Raumkoordinate, die Höhe  $z$ , zu beschränken.

Für die analytische und numerische Behandlung der Bilanzgleichung ist es nötig,  $v_f$  explizit zu kennen. Als Approximation wird die *terminale* (d. h. unbeschleunigte) Fallgeschwindigkeit des Teilchens, bezeichnet mit  $v_T$ , gewählt, die nicht von der Zeit abhängt. Vernachlässigt man zudem die Änderung des Luftwiderstandes mit der Höhe, so ist die terminale Fallgeschwindigkeit nur von der Größe des Teilchens abhängig. Mehrere empirische Ansätze für  $v_T$  sind in Anhang C zusammengestellt.

Die betrachtete Bilanzgleichung (2.1) im Fall von Sedimentation als einzigem Prozess lautet also

$$\partial_t f(t, z, D) - \partial_z(v_T(D)f(t, z, D)) = 0. \quad (2.2)$$

Nimmt  $v_T$  mit  $D$  zu, so fallen große Teilchen schneller als kleine. Die mittlere Größe bzw. die mittlere Masse des Hydrometeor-Ensembles steigt dadurch in der Anfangsphase der Entwicklung nach unten hin an. In der englischsprachigen Literatur wird dies als *gravitational sorting* (dt. Schweresortierung) bezeichnet.

Nach dem Lösen der spektralen Bilanzgleichung (2.1) bzw. (2.2) ist das Spektrum  $f$  für alle Orts- und Zeitpunkte bekannt. Es ist nun möglich, aus ihm anschauliche Ensemblegrößen zu berechnen. Hierfür bieten sich die *Momente* der Verteilungsfunktion an. Das Moment  $i$ -ter Ordnung von  $f$  ist definiert als

$$M_i(t, z) := \int_0^\infty D^i f(t, z, D) dD \quad [\text{cm}^{i-3}]. \quad (2.3)$$

Für einige Ordnungen liegt eine physikalische Interpretation des Momentes vor. Das nullte Moment beschreibt die *Anzahldichte* (Anzahl der Hydrometeore pro Einheitsvolumen, bezeichnet mit  $N$ ). Der *Massengehalt* (Masse der Hydrometeore pro Einheitsvolumen,  $L$ ) ist gegeben durch  $yM_i$ , wenn die Masse des Teilchens gegeben ist durch

$$m(D) = yD^{\hat{i}}, \quad y, \hat{i} \in \mathbb{R}^+. \quad (2.4)$$

$N$  und  $L$  sind die üblicherweise in Wetter- oder Klimamodellen verwendeten Variablen zur Beschreibung von Wolken. Betrachtet man Tropfen, so wird der Massengehalt auch als *Flüssigwassergehalt* bezeichnet und ist proportional zum dritten Moment ( $L = \frac{\rho_w \pi}{6} M_3$ , mit  $\rho_w$  Dichte von Wasser). Weiterhin ist  $M_6$  bei Tropfen unter Annahme von Rayleigh-Streuung verwandt mit dem *äquivalenten (Radar-) Reflektivitätsfaktor*

$$Z_{\text{eq}} = 10 \log_{10}(10^{12} \text{cm}^{-3} M_6) \quad [\text{dBZ}], \quad (2.5)$$

siehe auch Caumont et al. (2006); Rogers u. Yau (1989). Wir werden  $M_6$  als (*Radar-*) *Reflektivität* bezeichnen.

Ferner gilt für alle aus der Lösung von Gl. (2.2) berechneten Momente eine Erhaltungsbedingung:

$$\int_0^H M_i(T, z) dz = \int_0^H M_i(0, z) dz - \int_0^T \int_0^\infty D^i v_T(D) f(t, 0, D) dD dt, \quad T, H > 0. \quad (2.6)$$

Das vertikal integrierte Moment zu einem Zeitpunkt  $T$  ist also gegeben durch den vertikal integrierten Anfangswert abzüglich des bis zu  $t = T$  über  $z = 0$  ausgefallenen Momentes.

## 2.2. Sedimentation in parametrisierter Beschreibung

Die Lösung der spektralen Bilanzgleichung erfordert auf Grund der vielen Freiheitsgrade einen hohen Rechenaufwand. In Wetter- oder Klimamodellen ist es wünschenswert, nur wenige Ensemblegrößen (wie zum Beispiel die Momente) zu prognostizieren, die Wirkung der mikrophysikalischen Prozesse jedoch im Wesentlichen zu erfassen. Im Falle der hier betrachteten Sedimentation erhält man die hierzu benötigten parametrisierten Gleichungen leicht aus Gl. (2.2) durch Multiplikation mit  $D^i$  und Integration über den gesamten Wertebereich der internen Koordinate:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left( \partial_t D^i f(t, z, D) - \partial_z D^i v_T(D) f(t, z, D) \right) dD = 0, \\ & \underbrace{\partial_t \int_0^\infty D^i f(t, z, D) dD}_{= M_i(t, z)} - \underbrace{\partial_z \int_0^\infty D^i v_T(D) f(t, z, D) dD}_{=: F_i(t, z)} = 0, \quad i \in \mathbb{R}_0^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die Größe  $F_i$  wird als *Fluss* des  $i$ -ten Momentes bezeichnet. Da hier die Sedimentation wirkt, nennt man  $F_i$  auch den *Sedimentationsfluss*. Ist durch  $yD^i$ , Gl. (2.4), die Masse eines Teilchens gegeben so wird über  $F_i$ , den Fluss des  $i$ -ten Momentes (dem sogenannten Massenfluss), eine weitere praxisrelevante Größe, die *Niederschlagsrate*  $\mathcal{R}$ , definiert:

$$\mathcal{R}(t, z) = y F_i(t, z) \quad [\text{g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}]. \quad (2.8)$$

Für Tropfen erhält man durch Verteilung der Masse auf die Grundfläche ( $1 \text{ cm}^2$ ) die Niederschlagshöhe (Wassersäule) pro Zeit. Sie wird in dieser Arbeit zur Darstellung der Niederschlagsrate verwendet:

$$RR(t, z) = 36\,000 \mathcal{R}(t, z) / \rho_w \quad [\text{mm h}^{-1}]. \quad (2.9)$$

Meist ist der zeitliche Verlauf von  $RR$  an einer bestimmten Höhe  $z$  von Interesse. Für  $z = 0$  gibt  $RR$  den Bodenniederschlag an.

Zur tatsächlichen Berechnung des Flusses ist es sinnvoll, einen mathematisch einfachen Ansatz für  $v_T$  zu wählen. Dies erleichtert die Berechnung der Integrale. Im Folgenden soll ein Potenzansatz verwendet werden:

$$v_T(D) = \alpha D^\beta. \quad (2.10)$$

Mit der Wahl  $\alpha = 1300 \text{ cm}^{1/2} \text{ s}^{-1}$  und  $\beta = 0,5$  entspricht dies dem Ansatz für Tropfen von Kessler (1969), Gl. (C.1). Für feste Hydrometeore sei auf die in Locatelli u. Hobbs (1974) angegebenen Geschwindigkeitsbeziehungen verwiesen, die ebenfalls Potenzgesetzen folgen. Es ergibt sich also

$$F_i(t, z) = \int_0^\infty D^i v_T(D) f(t, z, D) dD = \alpha \int_0^\infty D^{i+\beta} f(t, z, D) dD = \alpha M_{i+\beta}(t, z). \quad (2.11)$$

Aus Gl. (2.7) für beliebig viele verschiedene  $i$  wird nun ein Gleichungssystem geformt. Löst man dieses Gleichungssystem, welches wir im Folgenden auch mit (2.7) bezeichnen wollen, so sagt man, dass die entsprechenden Momente *prognostiziert* werden. Da hier die mikrophysikalischen Prozesse approximativ erfasst werden, indem ihre Wirkung auf die Momente der Verteilungsfunktion beschrieben wird, ist diese Parametrisierung vom Typ einer *Momentenmethode*. Die Erhaltungsbedingung (2.6) gilt nur für die prognostischen Momente, nicht für daraus abgeleitete Momente anderer Ordnung. Prognostiziert man  $N$  und  $L$ , so bleiben also die Gesamt-Teilchenanzahl und die Gesamt-Teilchenmasse über die Zeit erhalten.

Aus Gl. (2.7) ist ersichtlich, dass zur Prognose des  $i$ -ten Momentes die Kenntnis von  $F_i$  vorausgesetzt wird. Dies ist problematisch, da hierdurch das Gleichungssystem nicht geschlossen ist. Die auftretenden Probleme sollen für den hier benutzten Potenzansatz erläutert werden, entstehen jedoch für alle  $v_T$ -Ansätze, welche von der Teilchengröße abhängen. Wie in Gl. (2.11) zu erkennen, ist der Fluss proportional zu  $M_{i+\beta}$ . Um  $M_{i+\beta}$  zu kennen, muss Gl. (2.7) für  $i + \beta$  gelöst werden, was die Kenntnis von  $F_{i+\beta} \sim M_{i+2\beta}$  erfordert. Prognostiziert man  $N$  und  $L$ , so sind die Unbekannten  $M_0, M_3, M_\beta$  und  $M_{3+\beta}$ . Daher muss eine Schließungsbedingung eingeführt werden.

Für die Schließung bedient man sich der Annahme, dass die Verteilungsfunktion  $f$  stets einer festen Form mit wenigen Parametern genügt. Die Parameter der Verteilungsfunktion können gemäß den verschiedenen Werten der Momente in Ort und Zeit variieren. Dabei sind der Verteilungsfunktion genau so viele freie Parameter erlaubt, wie Momente prognostiziert werden. Da in dieser Dissertation hauptsächlich die Sedimentation von Tropfen untersucht wird, beschränkt sich die folgende Diskussion auf diesen Hydrometeor-Typ. Die Vorgehensweise ist aber auf Hydrometeore der festen Phase übertragbar (für ein Beispiel siehe Kapitel 6).

Marshall u. Palmer (1948) zeigen, dass gemessene Regentropfenspektren gut durch eine exponentielle Verteilungsfunktion approximiert werden können:

$$\begin{aligned} f(t, z, D) &= 0,08 e^{-\lambda D}, \\ \lambda &= 41RR(z = 0)^{-0,21}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sie koppeln also die Steigung der Verteilungsfunktion an die dazugehörige beobachtete Regenrate am Boden. Für eine hohe Regenrate ist der Abfall der Funktion flach, es existieren also viele große Tropfen. Waldvogel (1974) stellt fest, dass ein konstanter y-Achsen-Abschnitt der Verteilungsfunktion in der Natur nicht beobachtet werden kann.

Cotton (1972); Berry u. Reinhardt (1974a) verwenden Gammaverteilungen, die zusätzliche Freiheitsgrade besitzen. Hierdurch ist es möglich, unimodale Tropfenverteilungen zu beschreiben, wie sie bei der Sedimentation in spektraler Betrachtungsweise annähernd auftreten. In dieser Arbeit wird als Ansatz für die Verteilungsfunktion die Gammaverteilung in folgender Form verwendet:

$$f(t, z, D) = n_0(t, z) D^{\mu(t, z)} e^{-\lambda(t, z)D}. \quad (2.13)$$

$n_0$  bezeichnet man als Achsenabschnitt und  $\lambda$  als Steigung.  $\mu$  heißt Formparameter, da er die Breite der Verteilung steuert (Abbildung 2.1). Für  $\mu = 0$  erhält man Gl. (2.12), jedoch mit frei wählbarem Achsenabschnitt.

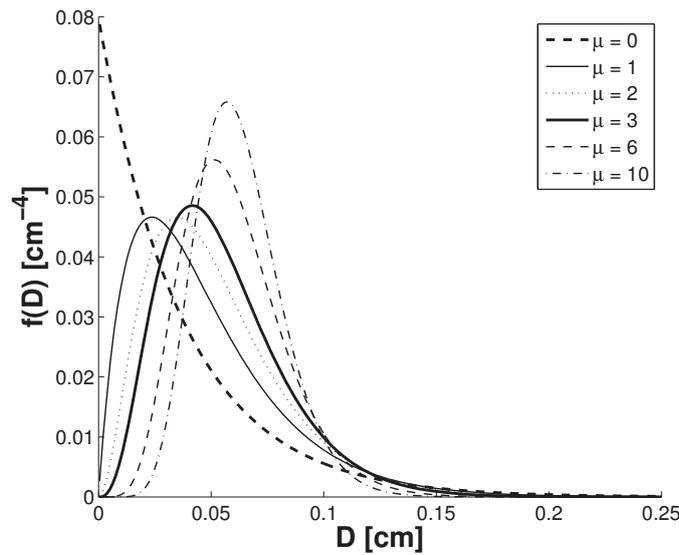
Durch Einsetzen des Ansatzes für die Verteilungsfunktion, Gl. (2.13), in die Definitionen (2.3) und (2.11) kann man die Momente und Flüsse (unter Annahme eines positiven Steigungsparameters) mit Hilfe der freien Parameter ausdrücken:

$$M_i(t, z) = n_0(t, z) \Gamma(i + \mu(t, z) + 1) \lambda(t, z)^{-(i + \mu(t, z) + 1)}, \quad (2.14a)$$

$$F_i(t, z) = n_0(t, z) \Gamma(i + \mu(t, z) + \beta + 1) \lambda(t, z)^{-(i + \mu(t, z) + \beta + 1)}. \quad (2.14b)$$

Es ist möglich, aus den prognostizierten Momenten die Parameter zurückzurechnen. Da die angenommene Verteilungsfunktion drei freie Parameter besitzt, können drei Momente prognostiziert werden (für die Prognose von ein oder zwei Momenten müssen feste Beziehungen für zwei oder einen Parameter gesetzt werden). In einem nächsten Schritt können dann die Flüsse über die Parameter (und somit über die prognostischen Momente) berechnet werden. Das Gleichungssystem (2.7) ist dann geschlossen. Ebenso wie die Flüsse kann man durch die Kenntnis der Verteilungsparameter  $n_0$ ,  $\lambda$  und  $\mu$  jedes beliebige andere Moment ausrechnen (*diagnostizieren*).

Für die Prognose von zwei Momenten der Ordnungen  $j$  und  $k$  sind die Formeln für die Parameter sowie für die Momente und Flüsse in Anhang B.1 aufgeführt.



**Abbildung 2.1** – Verteilungsfunktion (2.13) bei Variation von  $\mu$  zu  $M_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  und  $M_3 = \frac{6}{\rho_w \pi} 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^0$  (nach Wacker u. Lüpkes (2009), Abb. 1).

Im Fall von Tropfen als Hydrometeoren kann man unter den oben gemachten Annahmen zeigen, dass das Gleichungssystem (2.7) hyperbolisch ist (siehe auch die analytische Lösung des Gleichungssystems in Anhang A).

Im mathematischen Sinne ist die Bilanzgleichung im Falle von Sedimentation als einzigem Prozess, Gl. (2.2), eine Advektionsgleichung. Die daraus abgeleitete parametrisierte Gleichung (2.7) kann ebenfalls in eine (mathematische) Advektionsgleichung umformuliert werden, Gl. (A.2).

Da es für die späteren Untersuchungen zweckdienlich ist, benutzen wir Gl. (2.7) in der speziellen Form

$$\begin{aligned} \partial_t M_i(t, z) - \partial_z (\bar{v}_i(t, z) M_i(t, z)) &= 0, \\ \text{mit } \bar{v}_i(t, z) = \bar{v}_i(\lambda, \mu, v_T) &:= \frac{F_i(t, z)}{M_i(t, z)}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei  $\bar{v}_i$  als *mittlere (Moment-gewichtete) Sedimentations- oder Fallgeschwindigkeit* bezeichnet wird.

Im Laufe dieses Kapitels haben wir gesehen, dass Ansätze für die terminale Fallgeschwindigkeit  $v_T$  und die Verteilungsfunktion gemacht werden müssen, um  $F_i$  berechnen zu können. Man sagt, dass der Sedimentationsfluss über diese Annahmen parametrisiert wurde. Es ist nun möglich, verschiedene Sedimentationsparametrisierungen zu

definieren, indem man die Annahmen variiert (siehe Kapitel 3). Die unterschiedlichen Sedimentationsparametrisierungen werden daher durch die Berechnung von  $\bar{v}_i$  charakterisiert.

Zu einer gegebenen Kombination der prognostischen Momente unterscheiden sich die mittleren Sedimentationsgeschwindigkeiten durch ihre Abhängigkeit von der Momentenordnung  $i$ . Die prognostischen Momente werden also zu jedem Orts- und Zeitpunkt unterschiedlich schnell verlagert. Steigt die terminale Fallgeschwindigkeit  $v_T$  mit der Teilchengröße an, so werden Momente höherer Ordnung schneller fortbewegt.

Anhand der Prognose von zwei Momenten, Anzahldichte  $N$  und Flüssigwassergehalt  $L$ , soll das entstehende Problem veranschaulicht werden. Das  $L$ -Signal wird schneller verlagert als das  $N$ -Signal. So steigt die mittlere Tropfenmasse  $x := L/N$  nach unten hin an (Schweresortierung). An sich ist dies ein gewünschter Effekt, da er auch im spektralen Referenzmodell auftritt. Bei der Konzeption einer Sedimentationsparametrisierung im Kontext der Wolkenmikrophysik muss jedoch darauf geachtet werden, dass die prognostischen Momente nicht beliebig weit „auseinanderlaufen“, so dass die mittlere Masse in physikalisch sinnvollen Wertebereichen bleibt. Dies kann realisiert werden, indem sich die mittleren Fallgeschwindigkeiten der prognostischen Momente immer weiter annähern (ihre Verhältnisse also gegen 1 streben), je größer die mittlere Masse wird.

# 3.

---

## Beschreibung der Sedimentationsparametrisierungen

---

In diesem Kapitel soll zunächst die Parametrisierung des Sedimentationsflusses, welche in dieser Dissertation neu entwickelt wurde, vorgestellt werden. Im Gegensatz zu bereits existierenden Parametrisierungen beruht sie auf der Annahme eines Spektrums, in dem die maximale Teilchenabmessung begrenzt ist (siehe auch Ziemer u. Wacker, 2012). Auf diese Weise wird die maximale mittlere Tropfenmasse beschränkt und es soll eine höhere Konsistenz zum spektralen Modell erreicht werden.

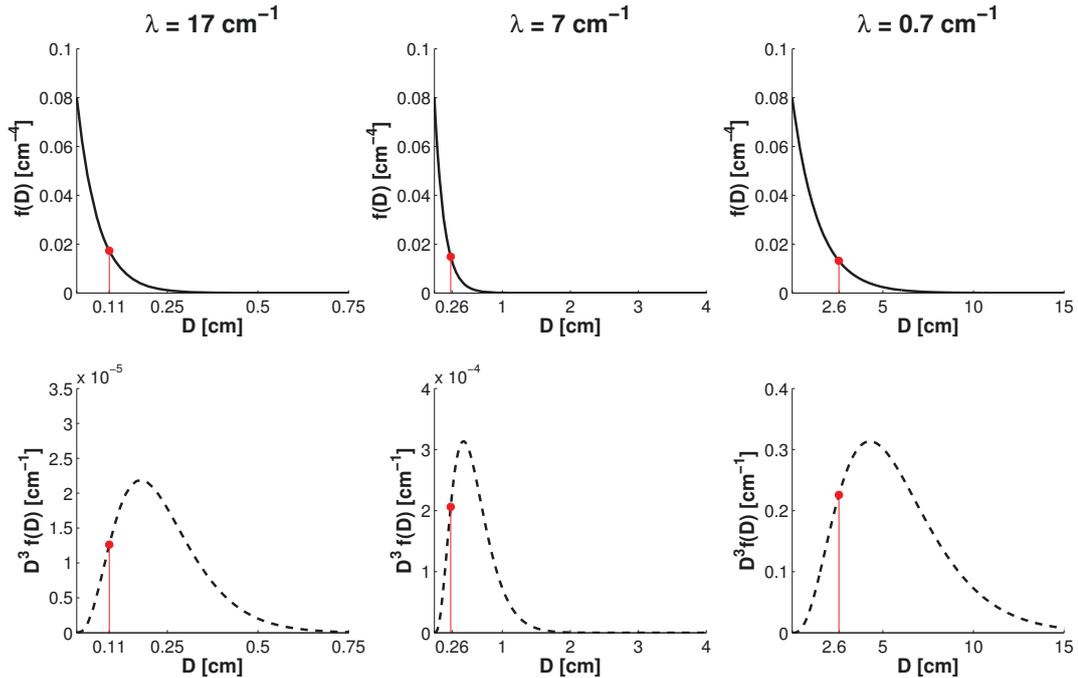
Im zweiten Teil dieses Kapitels werden einige andere Sedimentationsparametrisierungen (Milbrandt u. Yau, 2005a; Seifert u. Beheng, 2006; Wacker u. Lüpkes, 2009) vorgestellt, welche dann in Kapitel 5 zum Vergleich mit der neuentwickelten Parametrisierung herangezogen werden.

Alle Parametrisierungen werden für Tropfen als Hydrometeor-Kategorie vorgestellt, sind jedoch auch auf Typen der festen Phase übertragbar (für ein Beispiel siehe Kapitel 6). Des Weiteren beschränken wir uns auf die Prognose von zwei Momenten. Für einen Parameter der Verteilungsfunktion (hier den Formparameter) muss also eine feste Beziehung vorgegeben werden.

### 3.1. Sedimentationsparametrisierung mit $D_{\max}$

In Kapitel 2 wurde bei der Berechnung der Momente angenommen, dass die zu Grunde liegende Verteilungsfunktion  $f$  für Tropfen aller Durchmesser definiert ist. Hier wird nun der Definitionsbereich eingeschränkt und angenommen, dass dieser sich nur auf Tropfen mit einem Durchmesser unterhalb eines gewissen  $D_{\max}$  erstreckt. Die Momente werden daher definiert als

$$M_i(t, z) = \int_0^{D_{\max}} D^i f(t, z, D) dD = n_0(t, z) \frac{\gamma(\lambda(t, z) D_{\max}, i + \mu + 1)}{\lambda(t, z)^{i + \mu + 1}}, \quad (3.1)$$



**Abbildung 3.1** – Dichtefunktionen für die Momente  $M_0$  ( $f(D)$ , oben) und  $M_3$  ( $D^3 f(D)$ , unten) zu  $D_{\max} = \infty$ ,  $n_0 = 0,08 \text{ cm}^{-4}$ ,  $\mu = 0$  und drei verschiedenen  $\lambda$ . Rote Linien: zur mittleren Masse gehöriger Tropfendurchmesser  $\bar{D}_{03}$ . Beachte die unterschiedlichen Skalen der Achsen.

wobei  $D_{\max}$  eine zunächst frei wählbare, positive Größe ist.  $\mu$  ist konstant gewählt.  $\gamma$  bezeichnet die unvollständige Gammafunktion

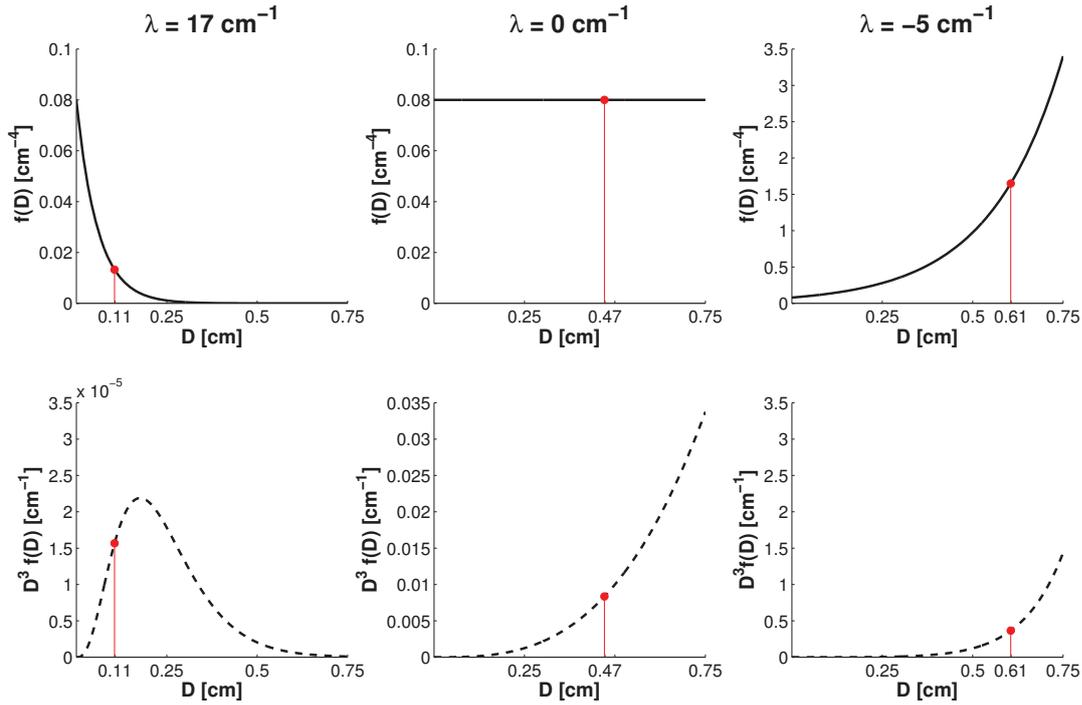
$$\gamma(y, a) = \int_0^y t^{a-1} e^{-t} dt, \quad y > 0, a > -1, \quad (3.2a)$$

$$\text{mit } \lim_{y \rightarrow \infty} \gamma(y, a) = \Gamma(a). \quad (3.2b)$$

Falls  $a \in \mathbb{N}$ , kann das Integral in Gl. (3.1) auch über eine Kette partieller Integrationen gelöst werden (Lüpkes et al., 1989). Die bisherige Momentdefinition (2.3) benutzt einen unendlich großen maximalen Tropfendurchmesser, also  $D_{\max} = \infty$ .

Im Folgenden sollen die Änderungen und Probleme beschrieben werden, die sich durch die Einführung von  $D_{\max} < \infty$  bei der Prognose von zwei Momenten ergeben. Um eine große Allgemeingültigkeit zu erhalten, wird dabei angenommen, dass die prognostischen Momente von beliebiger Ordnung  $j$ ,  $k \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $j < k$ , sind.

Wir benötigen für die weiteren Überlegungen den Begriff der *verallgemeinerten mittleren Tropfenmasse*. Dieser ist eine Erweiterung des Begriffs der mittleren Tropfenmasse



**Abbildung 3.2** – Wie Abb. 3.1, jedoch für  $D_{\max} = 0,75$  cm. Beachte die unterschiedlichen Skalen der y-Achsen.

$x = L/N$  auf prognostische Momente beliebiger Ordnung:

$$\bar{\epsilon}_{jk} := M_k/M_j, \quad (3.3a)$$

$$\bar{D}_{jk} := (\bar{\epsilon}_{jk})^{1/(k-j)} = (M_k/M_j)^{1/(k-j)}, \quad (3.3b)$$

wobei  $\bar{D}_{jk}$  den zugehörigen mittleren Durchmesser bezeichnet. Für  $j = 0$  und  $k = 3$  ist  $\bar{\epsilon}_{jk}$  gerade proportional zu  $x$ :

$$\bar{\epsilon}_{03} = \frac{6}{\rho_w \pi} x. \quad (3.4)$$

Da die verallgemeinerte mittlere Tropfenmasse durch das Verhältnis der Momente gegeben ist, ist sie unabhängig von  $n_0$ .  $\bar{\epsilon}_{jk}$  wird also nur vom Steigungsparameter  $\lambda$  und dem Formparameter  $\mu$  beeinflusst.

Im Fall von  $D_{\max} = \infty$  sind  $\bar{\epsilon}_{jk}$  und  $\bar{D}_{jk}$  gegeben durch

$$\bar{\epsilon}_{jk}(\lambda) = \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(j + \mu + 1)} \lambda^{-(k-j)}, \quad (3.5a)$$

$$\bar{D}_{jk}(\lambda) = \left( \frac{\Gamma(k + \mu + 1)}{\Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{1/(k-j)} \lambda^{-1}. \quad (3.5b)$$

Für der Grenzfall  $\lambda \rightarrow 0$  ergibt sich  $\bar{\epsilon}_{jk}(\lambda), \bar{D}_{jk}(\lambda) \rightarrow \infty$  (Abbildung 3.1). Der Fall  $\lambda < 0$  ist auf Grund von  $\lim_{D \rightarrow \infty} f(D) = \infty$  auszuschließen.

Anders ist die Situation bei der Wahl von  $D_{\max} < \infty$ : Es ergibt sich

$$\bar{\epsilon}_{jk}(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda D_{\max}, k + \mu + 1)}{\gamma(\lambda D_{\max}, j + \mu + 1)} \lambda^{-(k-j)}, \quad (3.6a)$$

$$\bar{D}_{jk}(\lambda) = \left( \frac{\gamma(\lambda D_{\max}, k + \mu + 1)}{\gamma(\lambda D_{\max}, j + \mu + 1)} \right)^{1/(k-j)} \lambda^{-1}. \quad (3.6b)$$

Man stellt fest, dass  $\bar{\epsilon}_{jk}$  für  $\lambda \rightarrow 0$  in Abhängigkeit von  $D_{\max}$  wächst und beschränkt ist. Für  $\lambda = 17 \text{ cm}^{-1}$  und  $\lambda = 0 \text{ cm}^{-1}$  ist dies in Abbildung 3.2 dargestellt. Die zu  $\lambda = 0 \text{ cm}^{-1}$  gehörige verallgemeinerte mittlere Masse und den mittleren Durchmesser bezeichnen wir als *kritisch*:

$$\bar{\epsilon}_{jk, \text{krit}} := \left. \frac{M_k}{M_j} \right|_{\lambda=0} = D_{\max}^{k-j} \frac{j + \mu + 1}{k + \mu + 1}, \quad (3.7a)$$

$$\bar{D}_{jk, \text{krit}} := D_{\max} \left( \frac{j + \mu + 1}{k + \mu + 1} \right)^{1/(k-j)}. \quad (3.7b)$$

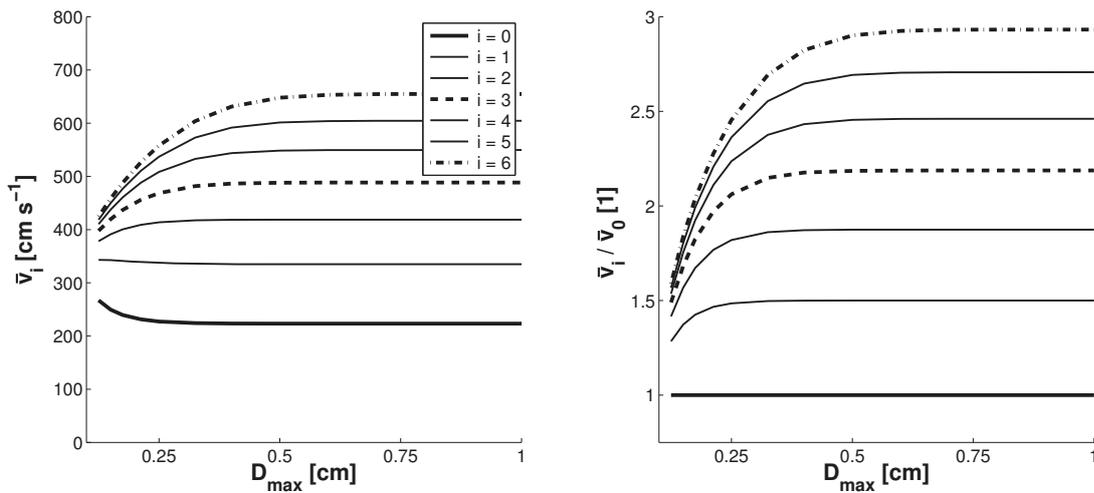
In Abbildung 3.2 sieht man jedoch, dass durch Verteilungsfunktionen mit einem negativen  $\lambda$  eine noch größere mittlere Masse beschrieben werden kann. Da die unvollständige Gammafunktion  $\gamma$  keine negativen Argumente erlaubt, ist es allerdings nicht ohne weiteres möglich, Momente und Flüsse aus einer Verteilungsfunktion mit negativem Steigungsparameter zu berechnen.

Um diese Hürde zu umgehen, macht man sich zu Nutze, dass das Integral einer Funktion in einer Variablen invariant ist unter Spiegelung des Integranden um den Mittelpunkt des Integrationsbereiches (hier  $D_{\max}/2$ ). Ein gespiegelter Integrand lässt sich hingegen mit einem positiven Steigungsparameter beschreiben.

Für  $\lambda < 0$  ergibt sich bei der Momentdefinition also

$$\begin{aligned} M_i(\lambda) &= \int_0^{D_{\max}} n_0 D^{i+\mu} e^{-\lambda D} dD = \int_0^{D_{\max}} n_0 (D_{\max} - \hat{D})^{i+\mu} e^{-\lambda(D_{\max} - \hat{D})} d\hat{D} \\ &= n_0 e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{i+\mu}{n} D_{\max}^{i+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Der Schritt vom ersten auf das zweite Integral stellt die Spiegelung dar. Das resultierende Integral wird dann durch Reihenentwicklung gelöst (Newtons Verallgemeinerung des Binomischen Lehrsatzes). Falls  $i + \mu \in \mathbb{N}_0$ , dann ist  $\mathcal{N}_{\max} = i + \mu$ , sonst  $\mathcal{N}_{\max} = \infty$ . Aus Gl. (3.8) für  $i = j, k$  ergeben sich dann analog zu Gl. (3.3) die verallgemeinerte mittlere Masse bzw. der Durchmesser für  $\lambda < 0$ . Die Formeln für  $n_0$  und  $\lambda$  im Fall von  $D_{\max} < \infty$  sind in Anhang B.2 aufgeführt.



**Abbildung 3.3** – Mittlere Moment-gewichtete Fallgeschwindigkeiten (links) und deren Verhältnis zu  $\bar{v}_0$  (rechts) in Abhängigkeit von  $D_{\max}$ , berechnet zu  $M_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  und  $M_3 = \frac{6}{\rho_w \pi} 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^0$ .

Über die ermittelten Parameter können die Sedimentationsflüsse berechnet werden. Also ist die mittlere Moment-gewichtete Fallgeschwindigkeit  $\bar{v}_i$ , Gl. (2.15), bekannt, welche die Sedimentationsparametrisierung charakterisiert. Unter Verwendung des Geschwindigkeitsansatzes nach Kessler (1969) ergibt sie sich hier für  $\lambda > 0$  zu

$$\bar{v}_i(\lambda, D_{\max}) = \alpha \frac{\gamma(\lambda D_{\max}, i + \mu + \beta + 1)}{\gamma(\lambda D_{\max}, i + \mu + 1)} \lambda^{-\beta}. \quad (3.9)$$

Der Ausdruck für  $\bar{v}_i$  im Fall von  $\lambda < 0$  ist komplizierter und kann gemäß  $\bar{v}_i = F_i/M_i$  aus den Gl. (B.9b) und (B.10b) gewonnen werden.

Die so entstehende Parametrisierung wird im Folgenden  $D_{\max}$ -Parametrisierung genannt (siehe auch Ziemer u. Wacker, 2012). Sie wird mit  $\mu = 0$  benutzt, da so der Effekt eines  $D_{\max} < \infty$  am deutlichsten zu sehen ist. Im Text wird sie mit ZW und in den Abbildungen mit ZW - K, 0 abgekürzt.

Aus Gl. (3.9) ist ersichtlich, dass die mittleren Fallgeschwindigkeiten durch  $D_{\max}$  beeinflusst werden können. Es stellt sich heraus, dass die Veränderung der  $\bar{v}_i$  mit  $D_{\max}$  von ihrer Ordnung  $i$  abhängt (Abbildung 3.3, links). Bei der Reduktion von  $D_{\max}$  steigt die mittlere Fallgeschwindigkeit von Momenten mit Ordnung  $i \leq 1$ , während sie bei Momenten anderer Ordnung sinkt. Zusätzlich reduziert sich auch ihr Verhältnis, welches in Abbildung 3.3 (rechts) exemplarisch für  $\bar{v}_i/\bar{v}_0$  dargestellt ist. Dies bedeutet, dass sich die Geschwindigkeiten der prognostischen Momente bei kleinerem  $D_{\max}$  annähern.

In numerischen Experimenten zeigt sich, dass die verallgemeinerte mittlere Masse für  $\lambda \rightarrow -\infty$  beschränkt ist:

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \bar{\epsilon}_{jk}(\lambda) = \bar{\epsilon}_{jk, \max} = D_{\max}^{k-j}. \quad (3.10)$$

Dementsprechend ist im parametrisierten Modell der zur verallgemeinerten mittleren Masse gehörige Durchmesser  $\bar{D}_{jk}$  durch  $D_{\max}$  beschränkt.

Dies ist konsistent mit den entsprechenden Größen im spektralen Modell. In der dortigen Betrachtungsweise ist ein Spektrum mit größtmöglicher mittlerer Masse gegeben, wenn alle Tropfen den größtmöglichen Durchmesser haben. Dann ergibt sich

$$\bar{\epsilon}_{jk, \max} = \frac{\int_0^{D_{\max}} D^{k+\mu} \delta(D - D_{\max}) dD}{\int_0^{D_{\max}} D^{j+\mu} \delta(D - D_{\max}) dD} = D_{\max}^{k-j}, \quad (3.11a)$$

$$\bar{D}_{jk, \max} = D_{\max}. \quad (3.11b)$$

Es bleibt zu bemerken, dass die Einführung eines endlichen maximalen Tropfendurchmessers den Beweis der Hyperbolizität des parametrisierten Gleichungssystems (2.7), wie noch im Fall  $D_{\max} = \infty$ , unmöglich macht.

## 3.2. Bereits existierende Sedimentationsparametrisierungen

Im Folgenden werden die Sedimentationsparametrisierungen vorgestellt, welche in Kapitel 5 zum Vergleich herangezogen werden. Sie alle verwenden die Momentdefinition nach Gl. (2.3), benutzen also  $D_{\max} = \infty$ . Sie unterscheiden sich jedoch im Ansatz für die Fallgeschwindigkeit der Tropfen (Anhang C) und im verwendeten Formparameter. Alle Größen sind in cgs-Einheiten angegeben.

**Geschwindigkeit nach Kessler, konstantes  $\mu$**  Diese Sedimentationsparametrisierung findet sich zum Beispiel bei Wacker u. Lüpkes (2009) und verwendet den Fallgeschwindigkeitsansatz nach Kessler (1969). Wählt man  $\mu = 0$ , so ergibt sich für die mittleren Fallgeschwindigkeiten

$$\bar{v}_i(\lambda) = 1300 \frac{\Gamma(i+1,5)}{\Gamma(i+1)} \lambda^{-0,5}. \quad (3.12)$$

Diese Parametrisierung wird im Text mit  $WL_0$  und in den Abbildungen mit  $WL - K, 0$  abgekürzt.

Wählt man  $\mu = 3$ , so ergibt sich für die mittleren Fallgeschwindigkeiten

$$\bar{v}_i(\lambda) = 1300 \frac{\Gamma(i+4,5)}{\Gamma(i+4)} \lambda^{-0,5}. \quad (3.13)$$

Diese Parametrisierung wird mit  $WL_3$  bzw. mit  $WL - K, 3$  abgekürzt.

**Geschwindigkeit nach Kessler, diagnostisches  $\mu$**  Der Formparameter  $\mu$  wird über eine diagnostische Gleichung nach Milbrandt u. Yau (2005a) aus der mittleren Masse berechnet.  $\mu_{\text{diag}}$  wird an Ergebnisse für  $\mu$  aus Rechnungen mit einem Drei-Momenten-Schema angepasst und nimmt mit größer werdender mittlerer Masse zu. Den Berechnungen im Drei-Momenten-Schema liegt der Geschwindigkeitsansatz von Ferrier (1994) zu Grunde. Hier ergeben sich die mittleren Fallgeschwindigkeiten unter der Verwendung von  $v_T$  nach Kessler (1969) zu

$$\bar{v}_i(\lambda, \mu_{\text{diag}}) = 1300 \frac{\Gamma(i + \mu_{\text{diag}} + 1,5)}{\Gamma(i + \mu_{\text{diag}} + 1)} \lambda^{-0,5}, \quad (3.14a)$$

$$\mu_{\text{diag}}(\bar{D}_{03}) = 19 \tanh(6(\bar{D}_{03} - 0,18)) + 17. \quad (3.14b)$$

Diese Parametrisierung wird mit MY bzw. mit MY - K, diag abgekürzt.

**Geschwindigkeit nach Rogers, diagnostisches  $\mu$**  Diese Parametrisierung wird in Seifert u. Beheng (2006) vorgestellt. Die mittleren Fallgeschwindigkeiten berechnen sich auf Grundlage des Geschwindigkeitsansatzes von Rogers et al. (1993, zur Wahl der Koeffizienten siehe Anhang C). Zusätzlich wird der Formparameter  $\mu$  an den mittleren Durchmesser  $\bar{D}_{03}$  angepasst:

$$\bar{v}_i(\lambda, \mu_{\text{diag}}) = 965 - 979,6 \left(1 + \frac{6}{\lambda}\right)^{-(\mu+i+1)}, \quad (3.15a)$$

$$\mu_{\text{diag}}(\bar{D}_{03}) = \begin{cases} 6 \tanh(40(\bar{D}_{03} - 0,11))^2 + 1, & \bar{D}_{03} \leq 0,11 \\ 30 \tanh(10(\bar{D}_{03} - 0,11))^2 + 1, & \bar{D}_{03} > 0,11. \end{cases} \quad (3.15b)$$

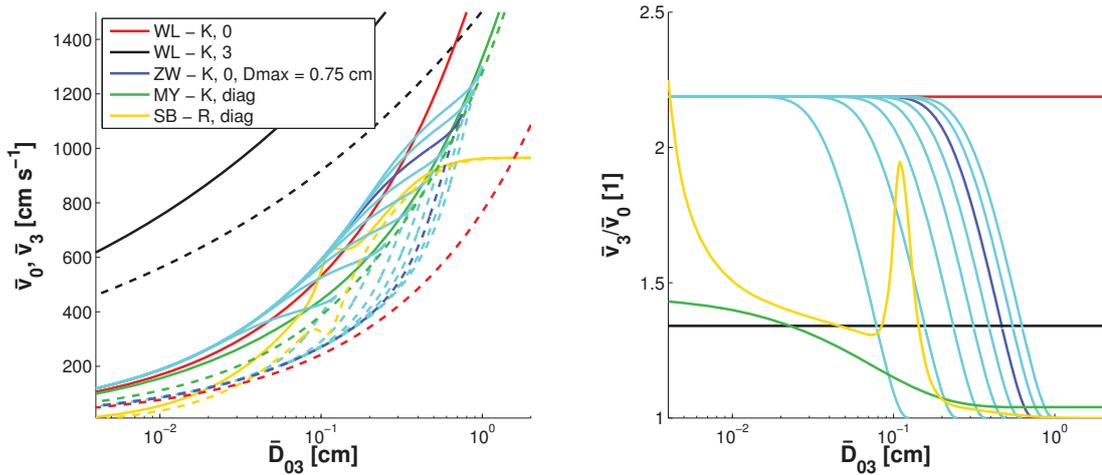
Die Anpassung des Formparameters  $\mu$  an  $\bar{D}_{03}$  erfolgt über spektrale Rechnungen mit Koagulation, Zerfall und Verdunstung von Tropfen (Seifert, 2008). Diese Parametrisierung wird mit SB bzw. mit SB - R, diag abgekürzt.

### 3.3. Vergleich der mittleren Fallgeschwindigkeiten

Nun sollen die sich aus den verschiedenen Parametrisierungen ergebenden mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeiten verglichen werden.

Abbildung 3.4 (links) zeigt den Verlauf der mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeiten für das nullte und dritte Moment (gestrichelte bzw. durchgezogene Linie) in Abhängigkeit von  $\bar{D}_{03}$  für WL<sub>0</sub>, WL<sub>3</sub>, ZW, MY und SB. Der Steigungsparameter  $\lambda$  geht für wachsendes  $\bar{D}_{03}$  gegen 0 oder  $-\infty$  (ZW). Die Umrechnung von  $\lambda$  auf  $\bar{D}_{03}$  erfolgt für jede Parametrisierung über die spezifische Relation für  $\mu$ .

Man kann erkennen, dass die mittlere Fallgeschwindigkeit der drei Parametrisierungen WL<sub>0</sub>, WL<sub>3</sub> und MY für wachsenden mittleren Durchmesser unbeschränkt wächst. Dies ist nicht der Fall bei ZW und SB. Die mittlere Moment-gewichtete Fallgeschwindigkeit, berechnet mit SB, beträgt für mittlere Durchmesser größer als 1 cm konstant



**Abbildung 3.4** – Vergleich der mittleren Fallgeschwindigkeiten der verschiedenen Parametrisierungen in Abhängigkeit vom mittleren Durchmesser  $\bar{D}_{03}$ . Links:  $\bar{v}_0$  (---) und  $\bar{v}_3$  (—); rechts:  $\bar{v}_3/\bar{v}_0$ . —:  $D_{\max}$ -Werte von 0,125 bis 1,00 cm im Abstand von 0,125 cm.

$965 \text{ cm s}^{-1}$ , Gl. (3.15a). Dieser Wert ist unabhängig von der Ordnung des Momentes. Auffallend bei SB ist der nicht-monotone Verlauf von  $\bar{v}$  um  $\bar{D}_{03} = 0,11 \text{ cm}$ . Hier ändert sich die Definition des Formparameters  $\mu_{\text{diag}}$ , Gl. (3.15b). Bei der ZW-Parametrisierung sind die Fallgeschwindigkeiten für mittlere Durchmesser, welche größer sind als das jeweilige  $D_{\max}$ , nicht definiert. Für  $\bar{D}_{03}$  gegen  $D_{\max}$  sind die mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeiten auch hier unabhängig von der Ordnung beschränkt. Der Maximalwert ist gegeben durch  $1300\sqrt{D_{\max}}$ .

Abbildung 3.4 (rechts) zeigt das Verhältnis  $\bar{v}_3/\bar{v}_0$ , welches für alle Parametrisierungen größer gleich 1 ist. Unabhängig vom aktuellen mittleren Durchmesser wird also das Signal des Flüssigwassergehaltes schneller verlagert als das der Anzahldichte.  $WL_0$  und  $WL_3$  haben ein konstantes Verhältnis der mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeiten, welches kleiner ist für die Parametrisierung mit höherem  $\mu$ . Bei den anderen Parametrisierung ist dagegen das Verhältnis  $\bar{v}_3/\bar{v}_0$  vom mittleren Durchmesser abhängig. Bei MY beträgt der Grenzwert für  $\bar{D}_{03} \rightarrow \infty$  ca. 1,04, bei ZW und SB geht das Verhältnis sogar gegen 1. Beide Momente werden dann annähernd gleich schnell verlagert.

# 4.

---

## Beschreibung der numerischen Modelle

---

In diesem Kapitel werden die in dieser Arbeit verwendeten numerischen Modelle mit ihren Grundgleichungen, der Diskretisierung, den Advektionsschemata und den Anfangsbedingungen vorgestellt.

Die Darstellung der Gleichungen beschränkt sich zunächst nur auf die Sedimentation. Kollisionsprozesse werden in Kapitel 8 hinzugefügt.

### 4.1. Die Grundgleichungen

**Das spektrale Referenzmodell** Hier verwenden wir die spektrale Bilanzgleichung im Fall von Sedimentation, Gl. (2.2):

$$\partial_t f(t, z, D) - v_T(D) \partial_z f(t, z, D) = 0. \quad (4.1)$$

Die maximale Abmessung der betrachteten Hydrometeore richtet sich nach dem jeweiligen Typ. Für Tropfen beträgt der maximale Durchmesser 0,75 cm. Dies ist konform mit Beobachtungen (Rogers u. Yau, 1989; Pruppacher u. Klett, 1997; Wallace u. Hobbs, 2006), welche eine physikalischen oberen Schranke für den Tropfendurchmesser von 0,45 bis 1 cm angeben. Der Geschwindigkeitsansatz  $v_T$  muss auf den betrachteten Hydrometeortyp abgestimmt werden. Für Tropfen wird hier der Ansatz von Beard (1976) verwendet (siehe Anhang C). Für feste Hydrometeore siehe Kapitel 6.

**Das parametrisierte Modell** In dieser Arbeit sollen Zwei-Momenten-Verfahren untersucht werden. Die Ordnungen der prognostischen Momente werden so gewählt, dass Anzahldichte und Massengehalt vorhergesagt werden. Für Tropfen ergibt dies  $j = 0$  und  $k = 3$  (für feste Hydrometeore siehe Kapitel 6). Die so entstehenden Variablen  $M_0$  und  $M_3$  entsprechen (bis auf einen konstanten Vorfaktor  $\frac{\rho_w \pi}{6}$  für  $M_3$ ) den in der Wettervorhersage üblichen prognostischen Größen  $N$  und  $L$ .

Aus Gl. (2.7) ergibt sich dann folgendes Gleichungssystem:

$$\partial_t M_0(t, z) - \partial_z F_0(t, z) = 0, \quad (4.2a)$$

$$\frac{\rho_w \pi}{6} (\partial_t M_3(t, z) - \partial_z F_3(t, z)) = 0. \quad (4.2b)$$

Für die Verteilungsfunktion  $f$  wird die Gammaverteilung (2.13) angenommen. Da in einem Zwei-Momenten-Verfahren nur zwei Parameter der Verteilungsfunktion variieren können, wird der Formparameter  $\mu$  vorgeschrieben. Seine Wahl ist dabei abhängig von der verwendeten Sedimentationsparametrisierung (Kapitel 3).

In Anhang A wird gezeigt, dass man für die Parametrisierungen  $WL_0$  bzw.  $WL_3$  ein zwei-dimensionales hyperbolisches System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung erhält.

## 4.2. Die numerische Umsetzung

**Orts- und Zeitdiskretisierung** Das numerische Gebiet ist eine eindimensionale Säule von 10 km Höhe, gemessen in der Vertikalkoordinate  $z$ , welche in Abständen von  $\Delta z = 25$  m diskretisiert wird. Am oberen Rand herrschen *no-flux*-Randbedingungen, da das Gebiet nach oben hin abgeschlossen sein soll. Am unteren Rand werden transmissive Randbedingungen angenommen. Das Gebiet ist so an  $z = 0$  durchlässig. Um eine große Genauigkeit bei vertretbarem Rechenaufwand zu erhalten, wird der Zeitschritt auf 0,125 s gesetzt.

**Verwendete Programme** In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Programme eingesetzt. Sie unterscheiden sich im verwendeten Advektionsschema und in den berücksichtigten Prozessen und Sedimentationsparametrisierungen.

SED2MOM ist ein eindimensionales numerisches Modell zur Beschreibung der Sedimentation in parametrisierter Form (ebenfalls verwendet in Wacker u. Lüpkes, 2009). Es löst die Momentengleichung (2.7) für zwei Momente beliebiger Ordnung. Dies geschieht mit dem MUSCL-Hancock-Verfahren (Monotone Upstream-centered Scheme for Conservation Laws) nach Toro (1999), welches zur Klasse der Finite-Volumen-Methoden gehört. Es berechnet die Flüsse zwischen den Gitterpunkten, indem einzelne lokale Riemannprobleme gelöst werden. Durch die geringe numerische Diffusivität ist es gut geeignet, die in hyperbolischen Systemen auftretenden Stoßwellen numerisch aufzulösen.

Die im Programm bereits existierende Berechnung der Sedimentationsflüsse nach Wacker u. Lüpkes (2009) ( $v_T$  nach Kessler (1969) mit konstantem, frei wählbarem  $\mu$ , d. h. insbes.  $WL_0, WL_3$ ) wurde um die Parametrisierungen MY und ZW erweitert.

RAINSHAFT ist ein eindimensionales Wolkenmodell, welches von K. D. Beheng (Institut für Meteorologie und Klimaforschung des KIT Karlsruhe) entwickelt wurde. Es dient zur Berechnung der Entwicklung eines Tropfenensembles unter Einwirkung von Sedimentation, Koagulation und Zerfall, jeweils in spektraler und parametrisierter

Beschreibung. Als Anfangsbedingungen können Tropfenspektren verschiedener Gestalt angesetzt werden. Durch Integration über das Spektrum ergeben sich hieraus die Anfangswerte der Momente für das parametrisierte Modell.

Im spektralen Modus stehen diverse Fallgeschwindigkeitsansätze zur Verfügung, so zum Beispiel nach Kessler (1969); Beard (1976); Rogers et al. (1993, siehe Anhang C). Die Koagulation von Tropfen wird nach Bott (1998) und der kollisionsinduzierte Zerfall von Tropfen nach Bleck (1970) berechnet. Die interne Koordinate wird logarithmisch diskretisiert, wobei sich die Masse der Tropfen nach jeweils  $J$  Klassen verdoppelt. Hier wird  $J = 4$  verwendet.

Im parametrisierten Modus wird die Sedimentation nach Seifert u. Beheng (2006, in Kapitel 3.2: SB) verwendet. Zusätzlich wurden die Parametrisierungen  $WL_0$ ,  $WL_3$ ,  $MY$  und  $ZW$  implementiert. Die Koagulation wird nach Seifert u. Beheng (2001) berechnet und der Zerfall als Rückführung auf einen Gleichgewichtszustand angesetzt (Seifert u. Beheng, 2006). Die prognostischen Momente sind Anzahldichte und Flüssigwassergehalt.

Die Sedimentation, d. h. die Verlagerung der einzelnen Tropfenklassen (spektral) bzw. der Momente (parametrisiert), wird mit dem Upstream-Schema gerechnet (Toro, 1999). Es ist von geringerer Genauigkeit als das MUSCL-Hancock-Schema.

### 4.3. Die Anfangsbedingungen

Als Anfangsbedingung wird zwischen zwei Höhenabschnitten ( $z_u = 8,25$  km und  $z_o = 9,75$  km) ein Tropfenspektrum vorgegeben, welches sich nicht mit der Höhe ändert. Hieraus werden die Momente berechnet, die als Anfangszustand für das parametrisierte Modell dienen. Es entsteht so eine idealisierte „Wolke“ mit homogenen Bedingungen. Aus numerischen Gründen müssen im parametrisierten Modell außerhalb der Anfangswolke von Null verschiedene Minimalwerte vorgegeben werden.

Mathematisch entspricht diese Konfiguration einem Riemann-Problem (siehe Anhang A oder zum Beispiel LeVeque, 1992; Toro, 1999). Solche idealisierten Bedingungen haben den Vorteil, dass in Spezialfällen ( $D_{\max} = \infty$  und ein einfacher Ansatz für  $v_T$ ) eine analytische Lösung der Momentengleichungen möglich ist (siehe Wacker u. Seifert (2001) oder Anhang A). So können die numerischen Ergebnisse gut verifiziert werden.

Die Fallstrecke des Hydrometeor-Ensembles im Modell beträgt 8,25 km. Für Tropfen ist sie somit wesentlich länger als in der Natur, wo Wolken ohne feste Hydrometeore nur bis in eine Höhe von 2 – 3 km vorkommen (Houze, 1993). Diese Modellkonfiguration macht es jedoch möglich, die Entwicklung der Momente über eine möglichst lange Zeitspanne und Fallstrecke zu beobachten.

In dieser Arbeit werden für Tropfen zwei unterschiedliche Spektren als Anfangsbedingung vorgegeben. Diese werden im Folgenden beschrieben. Auf die Anfangsbedingungen für feste Hydrometeore (Schnee) wird in Kapitel 6 eingegangen.

**Tabelle 4.1** – Anfangsbedingungen für den Fall „Regentropfenspektrum“ in spektralem und parametrisiertem Modell bei Variation der anfänglichen mittleren Masse.

	$x_{\text{init}}$ [g]	$N$ [cm <sup>-3</sup> ]	$L$ [g cm <sup>-3</sup> ]	$n_0$ [cm <sup>-4</sup> ]	$\lambda$ [cm <sup>-1</sup> ]
$x_0/4$ :=	$4,167 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,5070	42,2461
$x_0/2$ :=	$8,33 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,2012	33,5308
$x_0$ :=	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0798	26,6134
$2x_0$ :=	$3,33 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0317	21,1223
$4x_0$ :=	$6,67 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-7}$	0,0126	16,7639

**Tabelle 4.2** – Anfangsbedingungen für den Fall „Wolkentropfenspektrum“.

$x_{\text{init}}$ [g]	$N$ [cm <sup>-3</sup> ]	$L$ [g cm <sup>-3</sup> ]	$n_0$ [cm <sup>-4</sup> ]	$\lambda$ [cm <sup>-1</sup> ]
$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^2$	$1 \cdot 10^{-6}$	$2,073 \cdot 10^{26}$	$2,9772 \cdot 10^3$

**Regentropfenspektrum** Dieses beinhaltet Tropfen mit einem Durchmesser kleiner als 0,75 cm. Die Verteilungsfunktion wird exponentiell angesetzt (Gl. (2.13) mit  $\mu = 0$ ). Die sich für das spektrale und das parametrisierte Modell ergebenden Werte sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Hierbei entspricht  $x_0 = 1,66 \cdot 10^{-4}$  g den Bedingungen von ausgedehntem Regen („widespread rain“, Pruppacher u. Klett (1997), Tabelle 2.1, basierend auf Waldvogel (1974)). Der sich daraus ergebende äquivalente Reflektivitätsfaktor ist  $Z_{\text{eq}} = 32,5$  dBZ, welcher im Bereich von Beobachtungen bei stratiformen Regen liegt (20-35 dBZ, siehe Rico-Ramirez et al., 2007). Zusätzlich wird die mittlere Masse des Anfangszustandes variiert, um ihren Einfluss zu untersuchen. Die Minimalwerte sind  $N_{\text{min}} = 1 \cdot 10^{-12}$  cm<sup>-3</sup> und  $L_{\text{min}} = 1 \cdot 10^{-17}$  g cm<sup>-3</sup>. Diese wurden unter der Bedingung  $L_{\text{min}}/N_{\text{min}} < x_{\text{init}}$  willkürlich gesetzt.

Diese Anfangsbedingung wird in den Kapiteln 5, 7 und 9 verwendet.

**Wolkentropfenspektrum** Dieses beinhaltet Tropfen mit einem Durchmesser kleiner als 80  $\mu\text{m}$ . Die Verteilungsfunktion wird nach Cotton (1972) als eine Gammaverteilung angesetzt (Gl. (2.13) mit  $\mu = 6$ ). Die mittlere Masse des Anfangszustandes ist  $1 \cdot 10^{-8}$  g (Lüpkes (1991), Spektrum S2, nach Beheng u. Doms (1986)). Die sich für das spektrale und das parametrisierte Modell ergebenden Werte sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Die Minimalwerte sind hier  $N_{\text{min}} = 3 \cdot 10^{-8}$  cm<sup>-3</sup> und  $L_{\text{min}} = 1 \cdot 10^{-17}$  g cm<sup>-3</sup>, sodass das gleiche Verhältnis von Anfangs- zu Minimalwerten wie beim Regentropfenspektrum ( $x_{\text{init}} = x_0$ ) herrscht.

Diese Anfangsbedingung wird in Kapitel 9 verwendet.

# 5.

---

## Modellrechnungen zur Sedimentation von Regentropfen

---

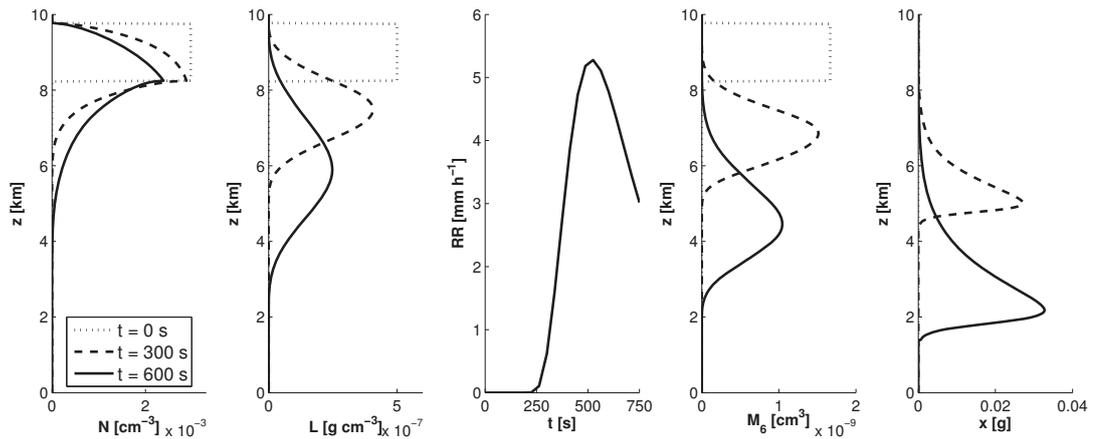
In diesem Kapitel werden die Ergebnisse des spektralen Referenzmodells und des parametrisierten Modells für Tropfen als Hydrometeor-Typ vorgestellt. Die Momentengleichungen (4.2) werden dabei unter Verwendung von SED2MOM und RAINSHAFT gelöst. Präsentiert werden die Ergebnisse für die prognostischen Momente  $N$  und  $L$ , sowie die Regenrate  $RR$ , das sechste Moment  $M_6$  als Maß der Radarreflektivität und die mittlere Masse  $x$ . Hierbei werden die Bezüge zwischen der analytischen Lösung der Momentengleichungen für  $D_{\max} = \infty$  (siehe Anhang A) und der Lösung des parametrisierten Modells für beschränktes  $D_{\max}$  hergestellt.

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf den Ergebnissen der  $D_{\max}$ -Parametrisierung und deren Beeinflussung durch die Tropfenobergrenze  $D_{\max}$ . Daran anknüpfend werden Untersuchungen zur Optimierung von  $D_{\max}$  vorgestellt. Zu diesem Zweck wird eine Fehlernorm definiert, welche die „Nähe“ der Ergebnisse des parametrisierten Modells zur Referenzlösung angibt. Ein Vergleich der  $D_{\max}$ -Parametrisierung mit den in Kapitel 3.2 vorgestellten bereits existierenden Parametrisierungen schließt die Betrachtungen ab.

In den Anfangsbedingungen wird stets ein Regentropfenspektrum verwendet (Tabelle 4.1). Die Zeitspanne der Simulation beträgt 750 s.

### 5.1. Ergebnisse des spektralen Modells

Zunächst betrachten wir die Ergebnisse des spektralen Referenzmodells, welches das Tropfenspektrum  $f$  verlagert. Unterhalb der durch die Anfangsbedingungen gegebenen idealisierten Wolke befindet sich in jedem Höhenniveau nur ein Ausschnitt des Tropfenspektrums, da die nach unten gerichtete Sedimentationsgeschwindigkeit von der Tropfengröße abhängt. Kleinster und größter vorkommender Tropfendurchmesser sind



**Abbildung 5.1** – Ergebnisse des spektralen Referenzmodells, dargestellt für die Größen  $N$ ,  $L$ ,  $RR(z = 5,75 \text{ km})$ ,  $M_6$  und  $x$

dabei durch die betrachtete Höhe, die vergangene Modellzeit und den Fallgeschwindigkeitsansatz gegeben (siehe Wacker u. Seifert (2001) für eine analytische Lösung der spektralen Bilanzgleichung (4.1)).

Abbildung 5.1 zeigt die Momente  $N$ ,  $L$  und  $M_6$  sowie die Regenrate  $RR$  und die mittlere Tropfenmasse  $x$ . Alle Größen außer der Regenrate sind gegen die Höhe aufgetragen, die Linientypen geben dabei die unterschiedlichen Zeitpunkte an. Die Regenrate an der Höhe  $z = 5,75$  km ist in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt.

Es ist zu sehen, dass durch die Sedimentation des Tropfenensembles das anfänglich diskontinuierliche Signal der Momente nach unten verlagert wird und für  $L$  und  $M_6$  eine asymmetrische, annähernd glockenförmige Gestalt erhält. Da größere Tropfen schneller fallen als kleine, erstreckt sich das Ensemble mit der Zeit über einen immer größer werdenden Höhenbereich. Dies und die geltende Erhaltungsbedingung für alle Momente führt dazu, dass der maximal erreichbare Wert von Anzahldichte, Flüssigwassergehalt und Reflektivität mit der Zeit abnimmt. Das Signal von Momenten höherer Ordnung breitet sich schneller aus, da in ihnen die größeren und somit schnelleren Tropfen mehr Gewicht haben.

Die mittlere Masse der Hydrometeore nimmt, wie zu erwarten ist, nach unten hin zu. Sie erreicht aber während der Modelllaufzeit von 750 s bei weitem nicht den theoretisch möglichen Maximalwert von  $x_{\text{max}} = \frac{\rho_w \pi}{6} (0,75 \text{ cm})^3 = 0,221 \text{ g}$ , welcher durch die Masse des größten im Spektrum vorkommenden Tropfens gegeben ist. Ein möglicher Grund ist der Verlauf des hier verwendeten Geschwindigkeitsansatzes (Beard, 1976): Für Tropfen mit einem Durchmesser größer als 0,5 cm liegt die Geschwindigkeit nahezu konstant bei 900 bis 910  $\text{cm s}^{-1}$  (Abbildung C.1). So kann der größte Tropfen nicht isoliert in einer Höhenlage auftreten.

Da die Regenrate  $RR$  auf der Höhe  $z = 5,75$  km gemessen wird, ergibt sich eine Fallstrecke von 2,5 km ab der anfänglichen Wolkenunterkante. Dieses ist eine typische

Größenordnung für die beobachteten Unterkanten von Regen- oder Mischwolken in mittleren Breiten (Houze, 1993). Der Niederschlag setzt im spektralen Modell nach 250 s ein. Er erreicht seinen Maximalwert von  $5,277 \text{ mm h}^{-1}$  bei  $t = 500 \text{ s}$  und klingt dann ab. Bei 1125 s liegt die Regenrate bei unter  $1 \text{ mm h}^{-1}$ , bei 2062,5 s unter  $0,1 \text{ mm h}^{-1}$ .

## 5.2. Ergebnisse mit SED2MOM

Die im folgenden Abschnitt gezeigten Resultate sind mit SED2MOM berechnet, welches das wenig diffusive MUSCL-Hancock-Advektionsschema verwendet.

Eine genaue analytische Betrachtung zeigt, dass die prognostischen und auch diagnostischen Momente gleich schnell verlagert werden (siehe Anhang A, insbesondere Abbildung A.6). Nur die Form der Signale unterscheidet sich, weshalb der Eindruck unterschiedlicher Geschwindigkeiten entsteht. Um in der folgenden Diskussion der Ergebnisse begründet von „schnelleren“ oder „langsameren“ Momenten sprechen zu können, definieren wir die *mittlere Moment-gewichtete Höhe*

$$\bar{z}_i(t) := \int_0^H z M_i(t, z) dz / \int_0^H M_i(t, z) dz, \quad (5.1)$$

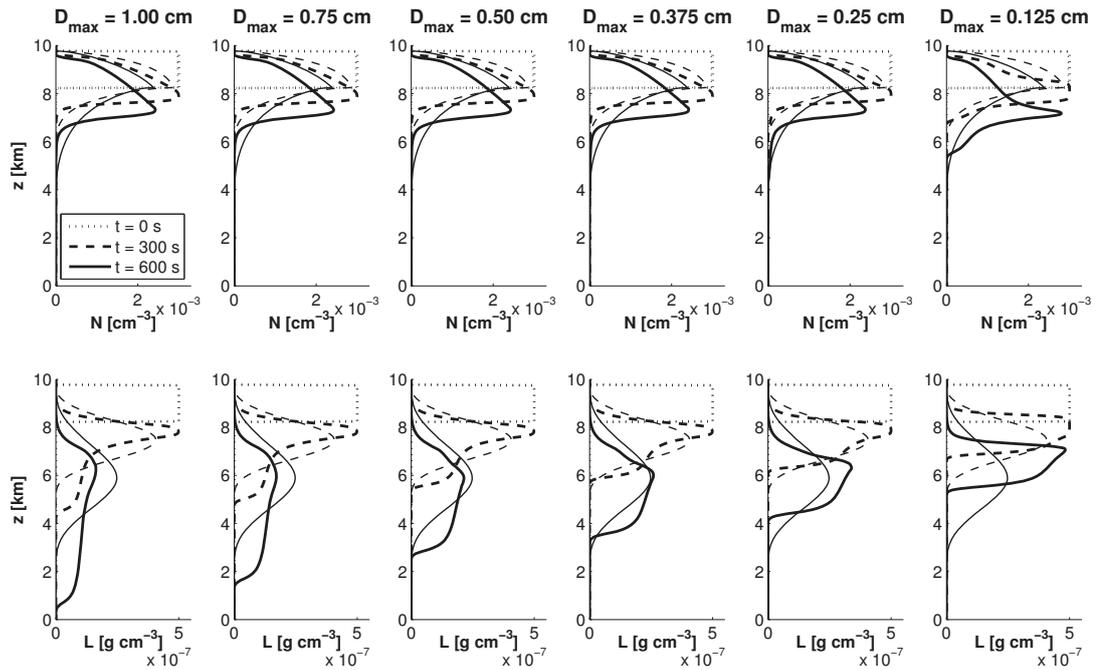
mit  $H = 10 \text{ km}$ . Sie beschreibt, an welcher Höhe sich der Hauptanteil des Momentwertes befindet. Gilt  $\bar{z}_{i_1}(t) < \bar{z}_{i_2}(t)$ , so wollen wir  $M_{i_1}$  als schneller und  $M_{i_2}$  als langsamer verlagert bezeichnen.

### 5.2.1. Ergebnisse der ZW-Parametrisierung

Die Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen den zeitlichen Verlauf der prognostischen Momente  $N$  und  $L$  sowie der abgeleiteten Größen  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$ , berechnet mit dem parametrisierten Modell unter Verwendung von ZW für verschiedene Werte von  $D_{\max}$  (1,00, 0,75, 0,50, 0,375, 0,25 und 0,125 cm). Sie enthalten zudem die spektrale Referenzlösung. Die unterschiedlichen Linientypen geben die verschiedenen Zeitpunkte an.

Es ist zu erkennen, dass die Ergebnisse des parametrisierten Modells (für alle  $D_{\max}$ ) und die Lösung des spektralen Referenzmodells nicht in allen Aspekten identisch sind. Lediglich die Abhängigkeit der Verlagerungsgeschwindigkeit von der Momentordnung wird vom parametrisierten Modell reproduziert. Die Form der Signale hingegen unterscheidet sich von denen der Referenzlösung. Darauf soll im Folgenden eingegangen werden.

Das Signal der Anzahldichte  $N$  zeigt einen starken Abfall im Wert an der Unterkante (für  $D_{\max} = 1 \text{ cm}$ ,  $t = 600 \text{ s}$  auf Höhe von 6,5 – 7 km). Die Herkunft dieses Abfalls findet sich in der Struktur der analytischen Lösung der Momentengleichungen (4.2) mit Riemann-Anfangsbedingungen, welche ein hyperbolisches Gleichungssystem mit unstetigen Anfangsdaten darstellen. Die analytische Lösung eines hyperbolischen Gleichungssystems ist aus Stoß- und Verdünnungswellen zusammengesetzt (siehe Anhang



**Abbildung 5.2** – Prognostische Momente  $N$  und  $L$  als Lösung des parametrisierten Modells mit variablem  $D_{\max}$  (dicke Linien) und die Ergebnisse des spektralen Referenzmodells (dünne Linien).

A für  $D_{\max} = \infty$ ). Für  $j = 0$  besitzt die Verdünnungswelle der Signal-Unterkante eine sehr starke Krümmung (Abbildung A.8), was sich im Signal durch einen starken Wertverlust über einen geringen Höhenbereich zeigt. Die starke Krümmung im  $N$ -Signal, berechnet mit  $ZW$ , ist ein Indiz dafür, dass die Grundstrukturen der analytischen Lösung für  $D_{\max} = \infty$  aus Anhang A auch auf die Ergebnisse der  $D_{\max}$ -Parametrisierung übertragbar sind.

Die Verdünnungswelle des  $L$ -Signals (für  $D_{\max} = 1$  cm,  $t = 600$  s im Bereich von 1,5 – 6,5 km) ist geringer gekrümmt, was im Signal den Eindruck eines nahezu konstanten Momentverlaufs in diesem Bereich erweckt. Klar erkennbar ist ein starker Gradient des Signals an der unteren Kante (für  $D_{\max} = 1$  cm,  $t = 600$  s auf Höhe von 1 – 1,5 km). Dieser soll im Folgenden als *untere Front* bezeichnet werden. Diese untere Front hat ihren Ursprung in der Beschränktheit der mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeit für  $D_{\max} < \infty$  (Abbildung 3.3). Die Amplitude der Front bleibt zeitlich annähernd gleich, verringert sich aber mit größerem maximalen Tropfendurchmesser, während sich die Geschwindigkeit erhöht. Im Grenzfall  $D_{\max} = \infty$  erhält man dann ein weit auseinandergezogenes Signal ohne eine erkennbare untere Front. Vergleiche hierzu die Ergebnisse von  $WL_0$  in Abbildung 5.9.

In Abbildung 5.3 sind die Regenrate  $RR$  (gemessen an  $z = 5,75$  km), das diagnostische Moment  $M_6$  sowie die mittlere Masse  $x$  abgebildet.

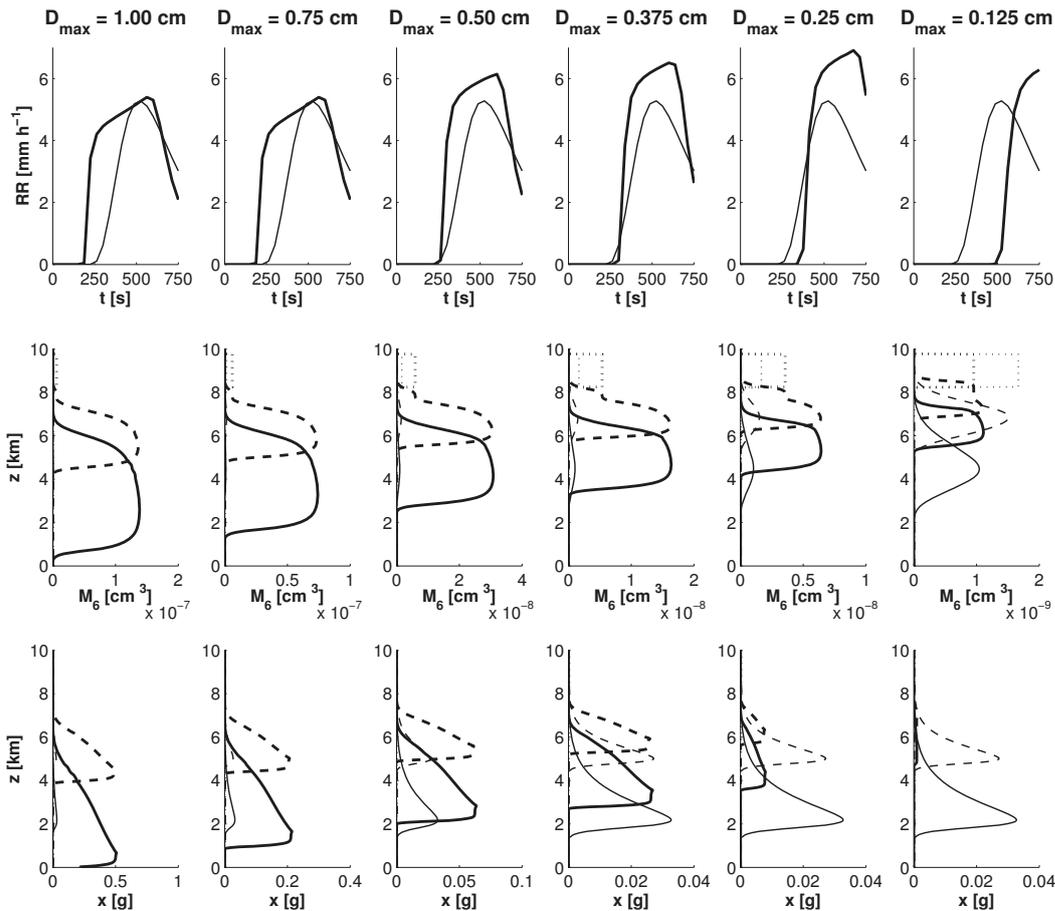


Abbildung 5.3 – Wie Abb. 5.2, aber für die abgeleiteten Größen  $RR(5,75\text{ km})$ ,  $M_6$  und  $x$ .

Das Referenz-Signal der Regenrate steigt gleichmäßig an und fällt ebenso wieder ab. Das Signal des parametrisierten Modells hingegen ist gekennzeichnet durch Bereiche mit steilem An- und Abstieg des Signals. Dazwischen befindet sich ein Bereich mit hoher Niederschlagsrate, welche verglichen mit dem Einsetzen und Abklingen des Regens zeitlich fast konstant verläuft. Das plötzliche Einsetzen des Niederschlags im parametrisierten Modell ist auf die untere Front im  $L$ -Signal zurückzuführen.

Bei  $M_6$  sieht man, dass der Wert des diagnostizierten Momentes sich mit dem verwendeten  $D_{\max}$  ändert. Er entspricht schon im Anfangszustand nicht dem der Referenzlösung, wenn  $D_{\max}$  nicht 0,75 cm beträgt. Zu diesem sogenannten *Diagnosefehler* kommt es, weil in diesen Fällen  $D_{\max}$  nicht mit dem maximalen Tropfendurchmesser des spektralen Modells übereinstimmt. Des Weiteren übersteigt das  $M_6$ -Signal aus der  $D_{\max}$ -Parametrisierung im zeitlichen Verlauf seinen Anfangswert, was in der spektralen Referenzlösung nicht der Fall ist. Dies führt dazu, dass für manche  $D_{\max}$  das diagnostizierte Moment und die Referenzlösung um bis zu zwei Größenordnungen voneinander abweichen. Dieses Verhalten wird von Wacker u. Lüpkes (2009) als *Überschießen* bezeichnet.

**Tabelle 5.1** – Überschießen der Reflektivität  $M_6$  zum Zeitpunkt  $t = 300$  s, äquivalenter Reflektivitätsfaktor  $Z_{\text{eq}}$  (2.5) und Geschwindigkeit der Signalunterkante  $\tilde{s}_2$  in Abhängigkeit von  $D_{\text{max}}$ .  $M_{6,\text{init}}$ : von  $D_{\text{max}}$  abhängiger Anfangswert von  $M_6$  im parametrisierten Modell.

$D_{\text{max}}$ [cm]	1,000	0,500	0,125
$\max M_6/M_{6,\text{init}}$ [1]	22,5	5,08	1,168
$Z_{\text{eq}}(M_{6,\text{init}})$ [dBZ]	38	38	29
$Z_{\text{eq}}(\max M_6)$ [dBZ]	51	44	30
$\tilde{s}_2$ [cm s <sup>-1</sup> ]	1450	1042	608

net. Den Autoren zu Folge tritt dieser Effekt auf, wenn die Ordnung des diagnostischen Momentes größer ist als  $k$ , die Ordnung des höheren prognostischen Momentes. Das Signal von  $M_{3,5}$ , welches der Berechnung der Regenrate zu Grunde liegt, zeigt jedoch keinerlei Überschießen (ohne Abbildung). Möglicherweise ist also die Klassifikation der Autoren zu streng.

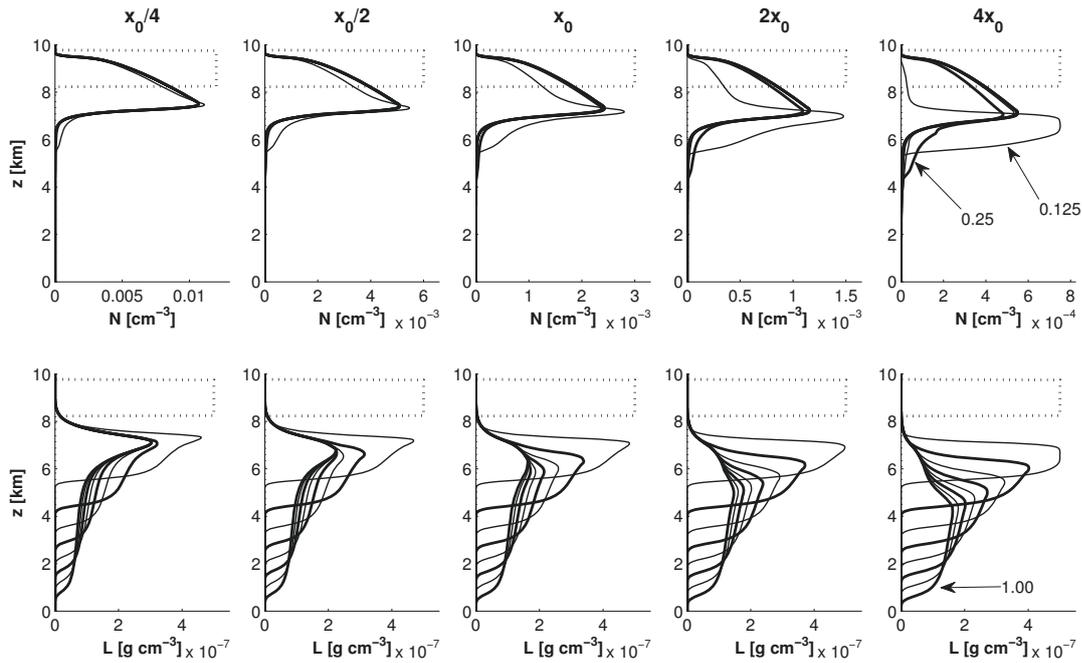
Der Wert der mittleren Masse  $x$  nimmt für jeden Zeitpunkt nach unten hin zu. Die mittlere Masse ist beschränkt durch  $x_{\text{max}} = \frac{\rho_w \pi}{6} D_{\text{max}}^3$ . Der in Gl. (3.10) angegebene Grenzwert für  $\bar{\epsilon}_{jk}$  wird also im laufenden Modell fast erreicht.

**Systematischer Einfluss von  $D_{\text{max}}$**  Bei einer Vergrößerung des maximalen Tropfendurchmessers kann man beobachten, dass das  $N$ -Signal langsamer wird und die Signale von  $L$  und  $M_6$  schneller werden. Für die prognostischen Momente kann dies mit der Abhängigkeit  $\bar{v}_i = \bar{v}_i(D_{\text{max}})$  erklärt werden (Abbildung 3.3). Das Maximum der Signale der prognostischen Momente wird mit der Zeit umso weniger gedämpft, je kleiner  $D_{\text{max}}$  ist.

Der Niederschlag setzt für größeres  $D_{\text{max}}$  eher ein als für kleineres  $D_{\text{max}}$ . Gleichzeitig sinkt die maximale Niederschlagsrate. Durch die geltende Massenerhaltung wird das Signal breiter, was bedeutet, dass die Phase mit stärkstem Niederschlag länger anhält.

Der Diagnosefehler in den Anfangsbedingungen bei  $M_6$  ändert sich für kleine  $D_{\text{max}}$  am stärksten. In Tabelle 5.1 ist dargestellt, dass mit kleinerem  $D_{\text{max}}$  das Überschießen reduziert wird. Zudem liegen sowohl der initiale als auch der maximale äquivalente Reflektivitätsfaktor nur für  $D_{\text{max}}$  um 0,125 cm in Bereichen, die auch in stratiformem Regen beobachtet werden (Rico-Ramirez et al., 2007).

Bei der mittleren Masse macht sich eine Variation von  $D_{\text{max}}$  hauptsächlich an der Unterkante des Signals bemerkbar. Für größere  $D_{\text{max}}$  bewegt sie sich schneller fort. Im Grenzfall von  $D_{\text{max}} = \infty$  ist eine analytische Lösung der Momentengleichungen (4.2) möglich (siehe Anhang A). Die dort berechnete Geschwindigkeit der unteren Stoßwelle stimmt mit der numerisch ermittelten Position der Unterkante des Signals der mittleren Masse in diesem Fall überein (vgl. auch die Ergebnisse für  $WL_0$  in Kapitel 5.2.2). Anhand der Unterkante des  $x$ -Signals kann man also im Fall von  $D_{\text{max}} < \infty$  ein



**Abbildung 5.4** – Ergebnisse für  $N$  und  $L$  zu den Zeitpunkten  $t = 0$  s (gepunktete Linie) und  $t = 600$  s (durchgezogene Linien). Die anfängliche mittlere Masse  $x_{\text{init}}$  nimmt von links nach rechts zu. Jeweils für  $D_{\text{max}} = 1,00, 0,75, 0,50$  und  $0,25$  cm (dicke Linien) und  $D_{\text{max}} = 0,875, 0,625, 0,375$  und  $0,125$  cm (dünne Linien). Die Unterschiede der Resultate für  $N$  bei  $D_{\text{max}} \geq 0,375$  cm sind unterhalb der Zeichengenauigkeit.

Analogon  $\tilde{s}_2$  zur Geschwindigkeit der Stoßwelle,  $s_2$ , Gl. (A.15), ablesen (siehe Tabelle 5.1). Im Grenzfall  $D_{\text{max}} = \infty$  hat man  $s_2 = 7800 \text{ cm s}^{-1}$ .

Man sieht, dass durch einen sinkenden maximalen Tropfendurchmesser die Momente höherer Ordnung eher beeinflusst werden als Momente niedriger Ordnung (das Signal von  $N$  verändert sich erst beim Übergang zu  $D_{\text{max}} = 0,125$  cm, während sich das  $L$ -Signal für alle hier gezeigten  $D_{\text{max}}$  verändert). Dies liegt daran, dass Momente höherer Ordnung das Maximum ihres Integranden in höheren Durchmesserbereichen haben als Momente niedriger Ordnung. Aufgrund der speziellen Form der Verteilungsfunktion konzentriert sich auch der größte Anteil des Momentwertes um die Maximalstelle und wird bei Veränderung von  $D_{\text{max}}$  eventuell abgeschnitten.

**Variation der anfänglichen mittleren Masse** Nun sollen die Ergebnisse des Sedimentationsmodells mit der  $D_{\text{max}}$ -Parametrisierung bei Variation der anfänglichen mittleren Masse  $x_{\text{init}}$  untersucht werden. Die Variation von  $x_{\text{init}}$  erfolgt durch Änderung von  $N$  bei konstantem  $L = 5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  (Tabelle 4.1). Zur Verdeutlichung der Sensitivität

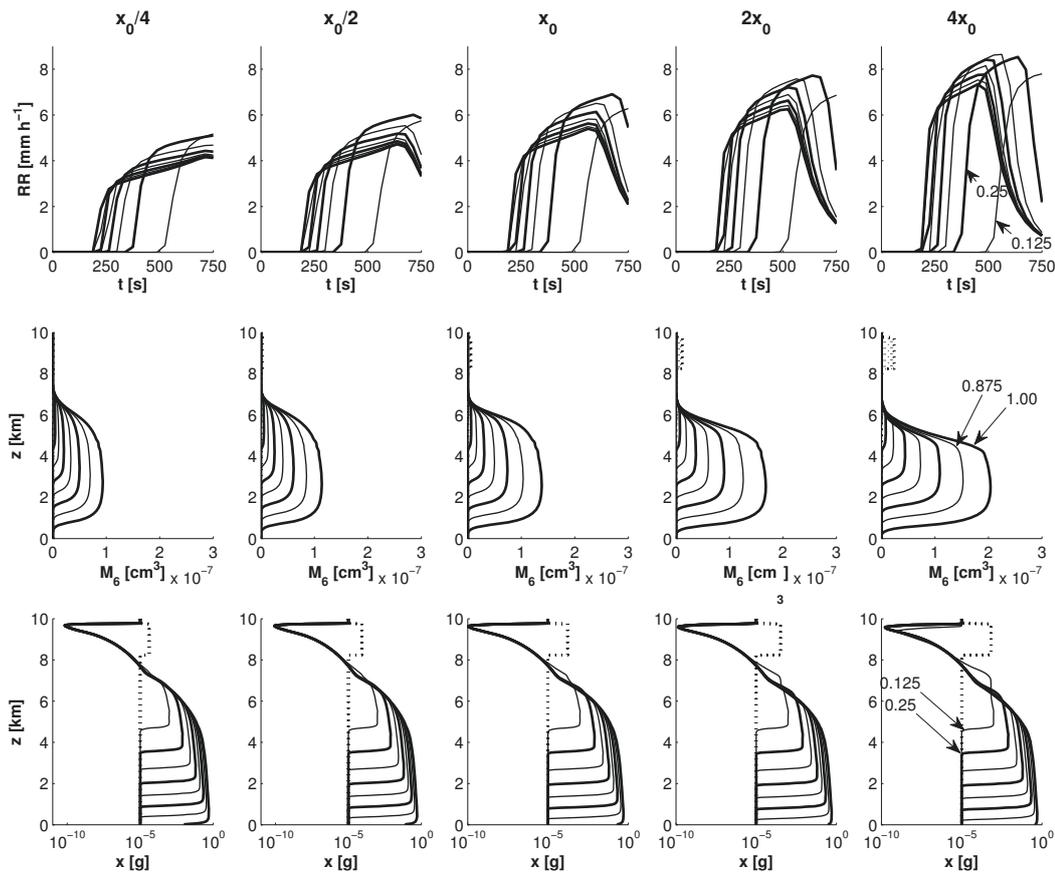


Abbildung 5.5 – Wie Abb. 5.4, aber für die Größen  $RR(5,75 \text{ km})$ ,  $M_6$  und  $x$ .

der Ergebnisse auf den maximalen Tropfendurchmesser wird nur ein Zeitpunkt für eine große Bandbreite von  $D_{\max}$  dargestellt.

Die Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigen die Resultate für die prognostischen Momente  $N$  und  $L$  sowie für die Regenrate  $RR$ , das diagnostische Moment  $M_6$  und die mittlere Masse  $x$  zu den Zeitpunkten 0 und 600 s. Die mittlere Masse des Anfangszustandes erhöht sich von links nach rechts jeweils um einen Faktor 2. Die verschiedenen durchgezogenen Linien einer Grafik beschreiben die Ergebnisse des parametrisierten Modells bei Variation von  $D_{\max}$  (Schrittweite 0,125 cm).

Abbildung 5.4 zeigt, dass auch bei Anfangszuständen mit anderer mittlerer Masse das niedrigere prognostische Moment  $N$  wesentlich weniger sensitiv auf Veränderungen in  $D_{\max}$  ist als das höhere Moment  $L$ . In beiden Fällen nimmt die Sensitivität ab, je größer  $D_{\max}$  wird und sie nimmt zu, je größer die anfängliche mittlere Masse  $x_{\text{init}}$  ist. Des Weiteren verlagert sich für größere  $x_{\text{init}}$  das Moment schneller.

Der Zeitpunkt des Einsetzens des Niederschlags ist bei festem  $D_{\max}$  für alle  $x_{\text{init}}$  nahezu gleich (Abbildung 5.5, oben). Je größer die mittlere Masse des Anfangszustandes jedoch ist, desto schmaler wird das Signal und desto höher wird der Maximalnieder-

**Tabelle 5.2** – Überschießen der Reflektivität  $M_6(t = 600 \text{ s})$  bei Variation von  $D_{\max}$  und  $x_{\text{init}}$ .

$x_{\text{init}}$	$x_0/4$		$x_0$		$4x_0$	
$D_{\max}$ [cm]	1,000	0,125	1,000	0,125	1,000	0,125
$\max M_6/M_{6,\text{init}}$	65	1,667	22,5	1,168	8	1,166

schlag, da in diesen Fällen das  $L$ -Signal kompakter ist. Bei dem diagnostischen Moment  $M_6$  nimmt das Überschießen mit größerem  $x_{\text{init}}$  und erneut mit kleinerem  $D_{\max}$  ab (Tabelle 5.2). In der dritten Zeile von Abbildung 5.5 ist die mittlere Masse des Tropfensembles dargestellt. Man kann erkennen, dass sich die Geschwindigkeit der unteren Signalkante mit wachsendem  $x_{\text{init}}$  nur geringfügig erhöht. Das gesamte Signal breitet sich also nur minimal schneller aus.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass der systematische Einfluss von  $D_{\max}$  auf die Ergebnisse unabhängig von  $x_{\text{init}}$  ist.

**Quantifizierung der Sensitivität** Die Veränderung der Ergebnisse durch Änderung von  $D_{\max}$  ist bereits mehrmals angesprochen worden. Im Folgenden soll die Sensitivität, der Grad der Veränderung der Ergebnisse bei Variation von  $D_{\max}$ , quantifiziert werden.

Hierzu wird die Sensitivitätsnorm  $Z$  eingeführt. Sie ist definiert über das zeitliche Mittel der quadratischen Norm der räumlichen Differenz der Ergebnisse. In der folgenden Definition ist durch  $\Delta D_{\max} = 0,125 \text{ cm}$  die Schrittweite in  $D_{\max}$ -Richtung gegeben.  $\mathcal{M}_{i,n}(D_{\max}) := \mathcal{M}(t_i, z_n; D_{\max})$  bezeichnet die Größe  $\mathcal{M}$ , welche mit einem maximalen Tropfendurchmesser von  $D_{\max}$  berechnet wurde.  $z_n \in [0, 0,025, \dots, 10] \text{ km}$  sind die Höheniveaus und  $\mathcal{N} = 21$  die Anzahl der berücksichtigten Zeitpunkte  $t_i \in [0, 37,5, \dots, 750] \text{ s}$ . Eine Entdimensionalisierung findet statt durch Division mit dem Anfangswert ( $\mathcal{M}$  an  $\hat{t} = 0 \text{ s}$  und  $\hat{z} = 8,5 \text{ km}$ ).

$$Z_{\mathcal{M}}(D_{\max}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \left( \sum_n \left( \frac{\mathcal{M}_{i,n}(D_{\max} + \Delta D_{\max}) - \mathcal{M}_{i,n}(D_{\max})}{\mathcal{M}(\hat{t}, \hat{z}; D_{\max}) \Delta D_{\max}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

Die durchschnittliche Sensitivität des Modells für ein bestimmtes  $D_{\max}$  ergibt sich nun aus der Mittelung über verschiedene Komponenten  $Z_{\mathcal{M}}$ . Hierzu werden die vorgestellten Größen Anzahldichte, Flüssigwassergehalt, Radarreflektivität und mittlere Masse berücksichtigt. Zudem wird noch die Änderung der Regenrate mit  $D_{\max}$  an der Höhe  $z_{n_{RR}} = 5,75 \text{ km}$  über die Zeit gemittelt:

$$Z_{RR}(D_{\max}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \frac{RR_{i,n_{RR}}(D_{\max} + \Delta D_{\max}) - RR_{i,n_{RR}}(D_{\max})}{RR(\hat{t}, \hat{z}; D_{\max}) \Delta D_{\max}} \quad (5.3)$$

Die Kombination der einzelnen Komponenten erfolgt durch

$$Z = \frac{1}{4}Z_N + \frac{1}{20}Z_L + \frac{1}{2}Z_{RR} + \frac{1}{10} \log(Z_{M_6}) + \frac{1}{10} \log(Z_x). \quad (5.4)$$

Hierbei wurden die Vorfaktoren empirisch gewählt und die Beiträge von  $M_6$  und  $x$  logarithmiert, um eine vergleichbare Größenordnung der Einzelbeiträge zu gewährleisten. Die berücksichtigte Fallstrecke und der berücksichtigte Zeitraum beeinflussen das Verhalten der Norm mit  $D_{\max}$  nur schwach (ohne Abbildung).

Abbildung 5.6 zeigt die Sensitivitätsnorm  $Z$  (unten Mitte), sowie die einzelnen Komponenten  $Z_{\mathcal{M}}$ . Sie bestätigt die Eindrücke der Abbildungen 5.4 und 5.5: die Sensitivität von  $N$  und  $L$  auf  $D_{\max}$  nimmt für wachsendes  $D_{\max}$  ab, gleiches gilt für die Regenrate. Diese Sensitivitäten sind im allgemeinen größer für größere anfängliche mittlere Massen  $x_{\text{init}}$ . Zudem ist, wie schon erwähnt, bei großen  $D_{\max}$  für  $N = M_0$  die Sensitivität geringer als bei  $L \sim M_3$ . Wählt man also  $D_{\max}$  in Bereichen von 0,125 bis 0,375 cm, so ändern sich die Ergebnisse für die prognostischen Momente stark, wenn man die Tropfendurchmesser-Obergrenze leicht variiert.

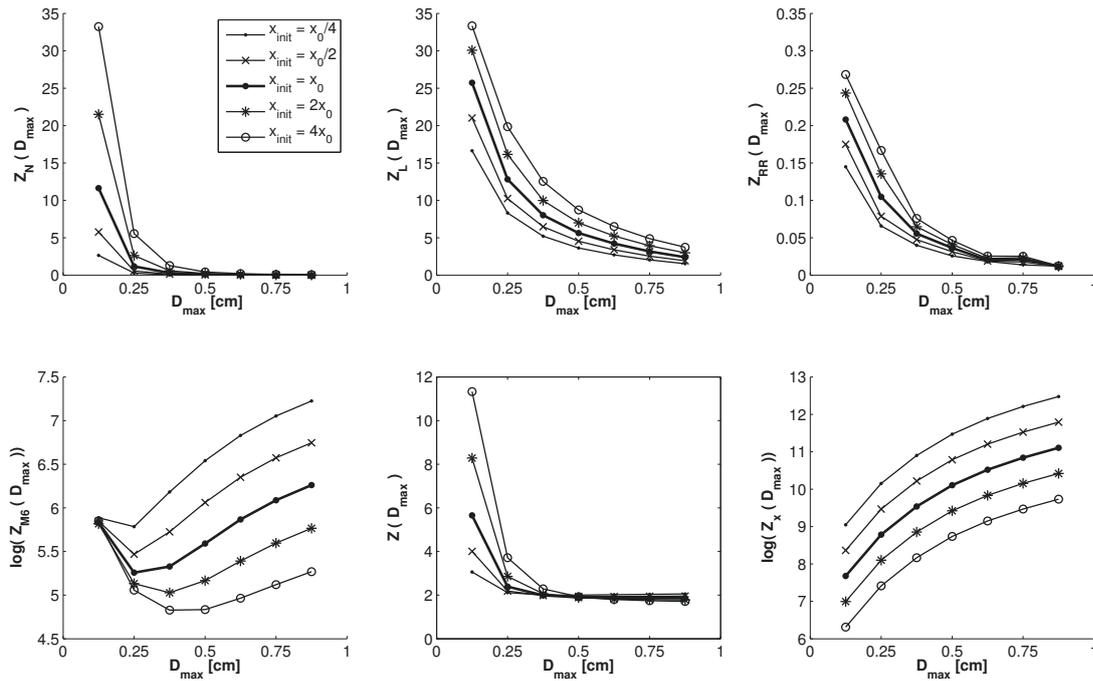
Im Gegensatz dazu nimmt bei  $M_6$  und  $x$  die Sensitivität mit größer werdendem  $D_{\max}$  zu und für größere  $x_{\text{init}}$  ab.

Die Sensitivität der Resultate auf  $D_{\max}$ , gemessen mit  $Z_{\mathcal{M}}$  nach (5.2), ist also abhängig von der gewählten Größe  $\mathcal{M}$ , der Integralobergrenze  $D_{\max}$  sowie der mittleren Masse des Anfangszustandes,  $x_{\text{init}}$ . Für die prognostischen Momente nimmt die Sensitivität für größere  $D_{\max}$  ab und erhöht sich mit  $x_{\text{init}}$ . Bei den hier verwendeten mittleren Massen des Anfangszustandes ist  $Z$  sehr gering, wenn für  $D_{\max}$  ein physikalisch realistischer Wert von über 0,5 cm angenommen wird.

**Fehlerbetrachtungen – Optimale Wahl von  $D_{\max}$**  Der endliche maximale Tropfendurchmesser  $D_{\max}$  wurde ursprünglich eingeführt, um unphysikalisch große Tropfen aus der Momentdefinition (2.3) zu eliminieren. Der vorangegangene Abschnitt hat gezeigt, dass  $D_{\max}$  die Ergebnisse für die prognostischen Momente und die abgeleiteten Größen beeinflusst, weil damit effektiv die mittlere Moment-gewichtete Fallgeschwindigkeit manipuliert wird. So liegt es nahe, nicht nur physikalisch realistische Werte für  $D_{\max}$  zu verwenden, sondern zu untersuchen, mit welchem  $D_{\max}$  die größte Nähe zur Referenzlösung erreicht werden kann.

Als Maß der Differenz von spektraler Referenzlösung und Lösung des parametrisierten Modells wird (analog zur Sensitivitätsnorm (5.2)) die Fehlernorm  $X$  eingeführt. Hierzu wird die zeitlich gemittelte Summe der räumlichen Fehlerquadrate, normiert mit dem Anfangswert der Referenzlösung, verwendet:

$$X_{\mathcal{M}}(D_{\max}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i \left( \sum_n \left( \frac{\mathcal{M}_{i,n}^{\text{param}}(D_{\max}) - \mathcal{M}_{i,n}^{\text{spek}}(0,75)}{\mathcal{M}^{\text{spek}}(\hat{t}, \hat{z}; 0,75)} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5.5)$$



**Abbildung 5.6** – Sensitivitätsnorm  $Z$  (5.4) (unten Mitte) sowie deren einzelnen Komponenten in Abhängigkeit von  $D_{\max}$ , jeweils für fünf verschiedene  $x_{\text{init}}$ .

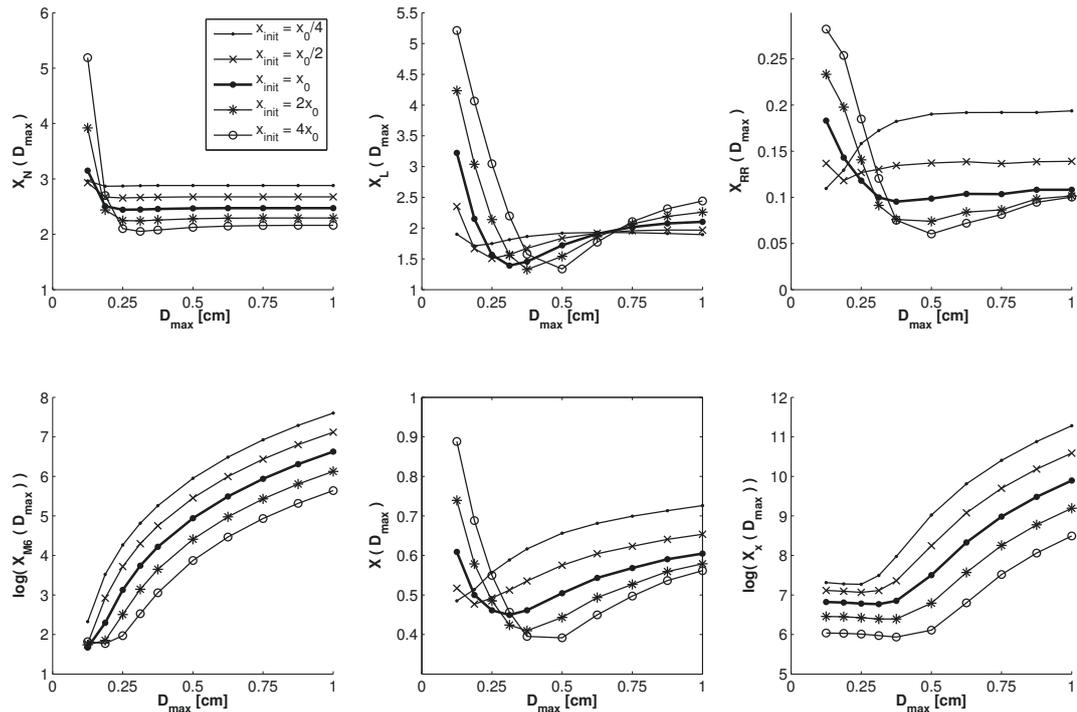
Die Mittelung über verschiedene Komponenten erfolgt durch:

$$X = \frac{16}{360} X_N + \frac{20}{360} X_L + \frac{311}{360} X_{RR} + \frac{8}{360} \log(X_{M_6}) + \frac{5}{360} \log(X_x). \quad (5.6)$$

Die berücksichtigte Fallstrecke und der berücksichtigte Zeitraum beeinflussen das Verhalten der Norm mit  $D_{\max}$  nur schwach (ohne Abbildung).

Abbildung 5.7 zeigt nun, analog zu Abbildung 5.6, die einzelnen Komponenten des Fehlermaßes und deren gewichtete Summe. Wird im parametrisierten Modell das zum Minimum des Fehlers gehörige  $D_{\max}$  verwendet, ist die jeweilige Größe am dichtesten an der Referenzlösung.

Die Komponente  $X_N$  hat kein ausgezeichnetes Minimum und der Fehler ist für alle großen  $D_{\max}$  klein.  $X_L$  und  $X_{RR}$  hingegen besitzen ein deutliches Minimum. Der Fehler steigt jeweils in Richtung der kleineren  $D_{\max}$  stärker an als für größere  $D_{\max}$ . Wählt man also  $D_{\max}$  eher kleiner, so macht man potentiell einen größeren Fehler, als wenn man  $D_{\max}$  eher größer wählt. Bei  $M_6$  wächst dagegen der Fehler stark für größer werdendes  $D_{\max}$ , was dem verstärkten Überschießen für große  $D_{\max}$  geschuldet ist. Auch bei  $x$  wächst der Fehler stark für größer werdendes  $D_{\max}$ , hier jedoch liegt es daran, dass die mittlere Masse der Lösung des parametrisierten Modells stets den maximal möglichen Wert erreicht, während in der spektralen Referenzlösung das Maximum von  $x$  immer weit unterhalb des theoretischen Wertes bleibt.



**Abbildung 5.7** – Fehlnorm  $X$  (5.6) (unten Mitte) sowie deren einzelnen Komponenten in Abhängigkeit von  $D_{\max}$ , jeweils für fünf verschiedene  $x_{\text{init}}$ .

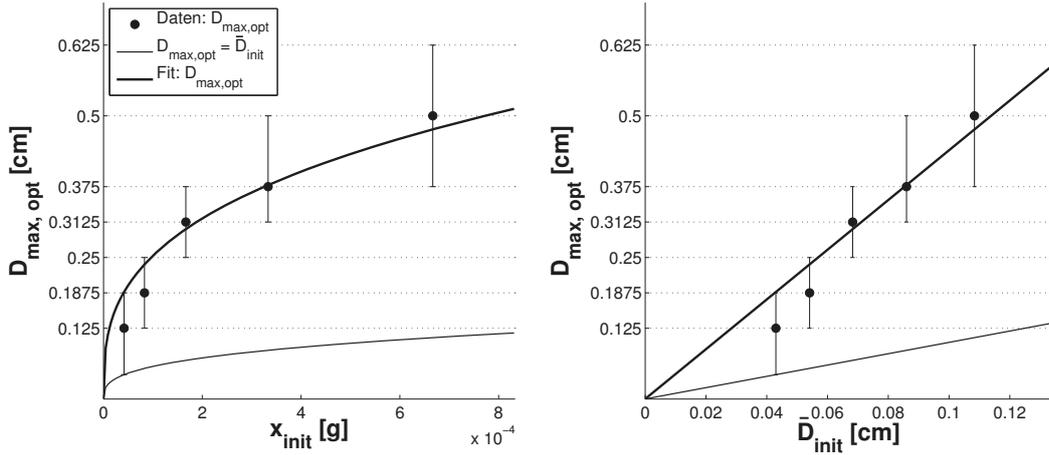
Für wachsende anfängliche mittlere Tropfenmasse nimmt der minimale Fehler  $X$  ab. Die Ergebnisse des Modells mit der  $D_{\max}$ -Parametrisierung sind also mit wachsendem  $x_{\text{init}}$  näher an der Referenzlösung, wenn jeweils das zum Minimum gehörige  $D_{\max}$  gewählt wird. Gleichzeitig steigt aber mit wachsendem  $x_{\text{init}}$  der Fehler, welchen man bei Wahl eines zu kleinen  $D_{\max}$  treffen kann, deutlich an.

Im spektralen Referenzmodell wurde aus physikalischen Gründen  $D_{\max} = 0,75$  cm gewählt. Betrachtet man den mittleren Fehler  $X$ , so stellt sich heraus, dass dieses  $D_{\max}$  nicht die besten Ergebnisse liefert. Das optimale  $D_{\max}$ , bezeichnet mit  $D_{\max, \text{opt}}$ , ist für die betrachteten  $x_{\text{init}}$  kleiner zu wählen. Die hier ermittelten optimalen Werte liegen zwischen 0,125 und 0,5 cm (Tabelle 5.3). Insbesondere die Signale der höheren Momente ähneln dem spektralen Signal bei kleinen  $D_{\max}$  stärker als bei größerem  $D_{\max}$ , da sie im ersten Fall eine ausgeprägte untere Front besitzen und nicht so weit auseinandergezogen sind. Zudem erkennt man, dass  $D_{\max, \text{opt}}$  mit  $x_{\text{init}}$  wächst.

Um eine generelle Empfehlung für  $D_{\max, \text{opt}}$  aussprechen zu können, wird an die fünf Datenpunkte ( $x_{\text{init}}, D_{\max, \text{opt}}$  aus Tabelle 5.3) eine Ausgleichskurve angepasst (Abbildung 5.8). Die Fehlerbalken in der Grafik bezeichnen die Unsicherheiten der Bestimmung von  $D_{\max, \text{opt}}$ , da diese Größe nur aus diskreten Werten abgelesen werden kann. Sie

**Tabelle 5.3** – Optimales  $D_{\max}$  in Abhängigkeit von  $x_{\text{init}}$  und  $\bar{D}_{\text{init}} = (\frac{6}{\rho_w \pi} x_{\text{init}})^{1/3}$ .

	$x_0/4$	$x_0/2$	$x_0$	$2x_0$	$4x_0$
$x_{\text{init}}$ [g]	$4,167 \cdot 10^{-5}$	$8,33 \cdot 10^{-5}$	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$3,33 \cdot 10^{-4}$	$6,67 \cdot 10^{-4}$
$\bar{D}_{\text{init}}$ [cm]	0,043	0,0542	0,0682	0,086	0,11
$D_{\max, \text{opt}}$ [cm]	0,125	0,1875	0,3125	0,375	0,50
$D_{\max, \text{opt}}/\bar{D}_{\text{init}}$ [1]	2,907	3,4594	4,582	4,36	4,55

**Abbildung 5.8** – Ausgleichskurve für  $D_{\max, \text{opt}}$  in Abhängigkeit von  $x_{\text{init}}$  und  $\bar{D}_{\text{init}}$ 

erstrecken sich über die Spanne der jeweils benachbarten verwendeten  $D_{\max}$ -Werte. Eine Ausnahme ist  $x_{\text{init}} = x_0/4$ : hier liegt der optimale Wert für  $D_{\max}$  möglicherweise unter 0,125 cm, der minimale Wert ist aber durch die Bedingung gegeben, dass  $D_{\max, \text{opt}}$  größer sein muss als der zu  $x_{\text{init}}$  gehörige Durchmesser  $\bar{D}_{\text{init}} = (\frac{6}{\rho_w \pi} x_{\text{init}})^{1/3}$ .

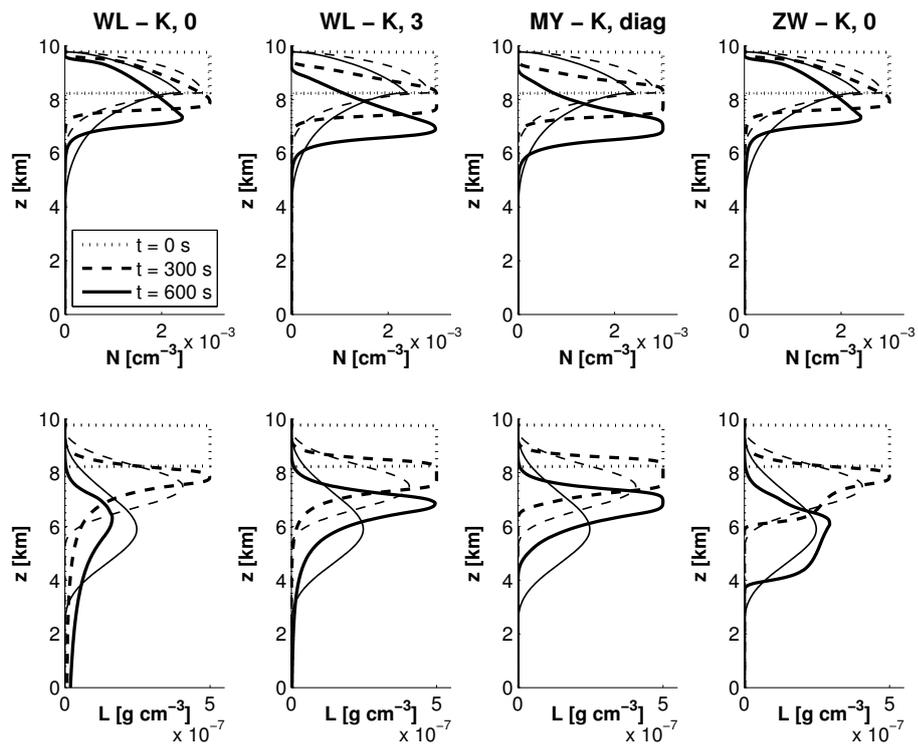
Um die Ausgleichskurve  $f_{\text{fit}}(x_{\text{init}})$  zu erhalten, wird folgender Ausdruck minimiert:

$$\sqrt{\sum_{x_{\text{init}}} \left( f_{\text{fit}}(x_{\text{init}}) - \frac{1}{2}(D_{\max, \text{opt}}^+(x_{\text{init}}) + D_{\max, \text{opt}}^-(x_{\text{init}})) \right)^2}. \quad (5.7)$$

Hierbei bezeichnen  $D_{\max, \text{opt}}^+$  und  $D_{\max, \text{opt}}^-$  die oberen bzw. unteren Enden der Fehlerbalken. Wählt man für  $f_{\text{fit}}$  einen Potenzansatz in der mittleren Masse, so erhält man aus (5.7):

$$D_{\max, \text{opt}}(x_{\text{init}}) \approx f_{\text{fit}}(x_{\text{init}}) = 5,45 x_{\text{init}}^{1/3} = 4,3927 \bar{D}_{\text{init}}. \quad (5.8)$$

Diese Empfehlung ist nur gültig für ein Zwei-Momenten-Verfahren bei Verwendung der prognostischen Momente  $M_0 = N$  und  $M_3 \sim L$ , da sich bei der Verwendung anderer prognostischer Momente die Ergebnisse des parametrisierten Modells ändern (Wacker u. Lüpkes, 2009).  $N$  und  $L$  sind die üblichen prognostischen Variablen der numerischen Wettervorhersage. Für andere prognostische Momente muss die Optimierungsprozedur wiederholt werden.



**Abbildung 5.9** –  $N$  und  $L$ , berechnet mit den verschiedenen Parametrisierungen (dicke Linien) und dem Referenzmodell (dünne Linien).

Für die Praxis bedeutet dies Folgendes: Simuliert man Wolken in den Tropen, wo größtenteils Konvektionswolken mit großen Tropfen zu erwarten sind, so erzielt man mit der Verwendung eines großen  $D_{\max}$  in den meisten Fällen gute Ergebnisse. Bei kontinentalen/maritimen Wolken der mittleren Breiten ist zu erwarten, dass die mittlere Tropfenmasse kleiner ist, und so wird man dort mit einem kleineren  $D_{\max}$  meist gute Ergebnisse erzielen.

### 5.2.2. Vergleich mit anderen Parametrisierungen

In diesem Abschnitt soll die  $D_{\max}$ -Parametrisierung ZW in optimierter Form (benannt mit  $ZW_{\text{opt}}$ ) mit den in Kapitel 3.2 vorgestellten bereits existierenden Sedimentationsparametrisierungen verglichen werden. Die mittlere Masse des Anfangszustandes entspricht  $x_0$ , daher wird für  $ZW_{\text{opt}}$  ein  $D_{\max}$  von 0,3125 cm verwendet.

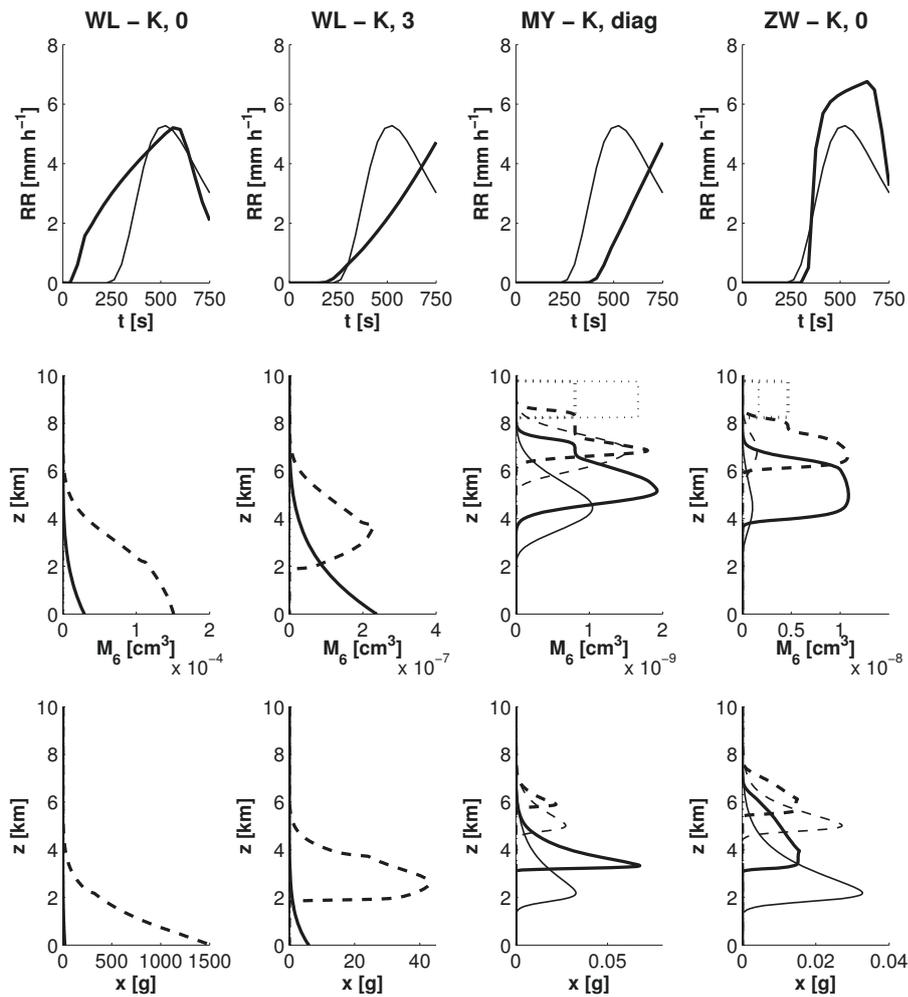
In den folgenden Abbildungen sind in den Spalten die Ergebnisse der verschiedenen Parametrisierungen dargestellt. Diese sind von links nach rechts: WL - K, 0 (Abkürzung im Text  $WL_0$ ), WL - K, 3 ( $WL_3$ ), MY - K, diag (MY) und ZW - K, 0 ( $ZW_{\text{opt}}$ ).

Abbildung 5.9 zeigt den Verlauf der prognostischen Momente  $N$  und  $L$ . Man erkennt einen systematischen Unterschied zwischen den Parametrisierungen, die einen hohen (MY,  $WL_3$ ) oder einen verschwindenden ( $ZW_{opt}$ ,  $WL_0$ ) Formparameter  $\mu$  verwenden.

Die Parametrisierungen MY und  $WL_3$  zeigen einen engen Signalverlauf für  $N$  und  $L$ , dessen Maximum, im Gegensatz zu dem der Referenzlösung, mit der Zeit kaum abnimmt. Dies lässt sich analytisch begründen: Für ein hohes  $\mu$  nähern sich die Geschwindigkeiten der den Anfangszustand einrahmenden Seiten der Verdünnungswelle an (siehe Anhang A und dort insbesondere Abbildung A.5). Eine Dämpfung des Signals kann jedoch erst eintreten, wenn die obere Verdünnungswelle die untere eingeholt hat. Dieses ist bei hohem  $\mu$  später der Fall als bei  $\mu = 0$  (Abbildung A.7). Des Weiteren wird bei der Anzahldichte  $N$  die Höhe des Maximums von allen Parametrisierungen unterschätzt, das Signal aus dem parametrisierten Modell bewegt sich also schneller als das der Referenzlösung. Beim Flüssigwassergehalt ist dies umgekehrt. Die mittleren Geschwindigkeiten der beiden prognostischen Momente unterscheiden sich bei hohem  $\mu$  weniger als im Falle  $\mu = 0$  (Abbildung 3.4), so dass sich hier die Signale gleich schnell zu verlagern scheinen.

Das Maximum der Signale nimmt bei den Parametrisierungen mit  $\mu = 0$  im zeitlichen Verlauf deutlich ab, was eine Folge der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der oberen bzw. unteren Verdünnungswelle ist. Das Signal des Flüssigwassergehaltes bei Verwendung von  $WL_0$  zeigt dies besonders deutlich. Infolge der Erhaltungsbedingung (2.6) für die prognostischen Momente ist das Signal weiter auseinandergezogen als für hohes  $\mu$ . Dies spiegelt sich auch in der Geschwindigkeit der Unterkante der unteren Verdünnungswelle wieder (Abbildung A.6): Für  $\mu = 0$  ist diese um eine Größenordnung höher als für hohes  $\mu$ . Bei  $ZW_{opt}$  wird das  $L$ -Signal im zeitlichen Verlauf nicht so stark gedämpft bzw. nicht so stark auseinandergezogen wie bei  $WL_0$ . Dies liegt an der Beschränkung von  $\bar{v}_3$  für endliche  $D_{max}$ . Für die Anzahldichte  $N$  liefert  $ZW_{opt}$  ähnliche Ergebnisse wie  $WL_0$ , da, wie schon in Abbildung 5.2 und 5.4 gesehen, das  $N$ -Signal in Bereichen von großen  $D_{max}$  hiervon unabhängig ist. Es wird die Amplitude (wenn auch nicht die Position) des Signals der Referenzlösung gut wiedergegeben.

In Abbildung 5.10 sind die abgeleiteten Größen  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$  dargestellt. Wir haben gesehen, dass das Flüssigwassergehalt-Signal der Parametrisierungen MY und  $WL_3$  im Vergleich mit der Referenzlösung zu langsam ist. Dies spiegelt sich auch in der Regenrate wieder, wo für diese beiden Parametrisierungen der Niederschlag nicht korrekt reproduziert wird. Bei  $WL_3$  setzt der Niederschlag zum richtigen Zeitpunkt ein, steigt dann aber zu langsam an. MY hingegen gibt den Anstieg der Regenrate annähernd korrekt wieder, jedoch mit einer Zeitverzögerung von 125 s. Bei  $WL_0$  setzt der Niederschlag fast sofort, also 240 s zu früh ein, der Maximalniederschlag wird aber in Wert und Zeitpunkt gut wiedergegeben. Als einzige der vier verglichenen Parametrisierungen reproduziert  $ZW_{opt}$  das Einsetzen des Niederschlages und Anstieg der Regenrate annähernd korrekt. Das Maximum wird jedoch deutlich überschätzt.



**Abbildung 5.10** – Wie Abbildung 5.9, jedoch für  $RR(5,75 \text{ km})$ ,  $M_6$  und  $x$ . Beachte die unterschiedlichen Skalen der  $x$ -Achse bei  $M_6$  und  $x$ .

Der Initialwert von  $M_6$ ,  $M_{6,\text{init}}$ , wird von allen Parametrisierungen falsch diagnostiziert, da sich das Referenzmodell und die Parametrisierungen im angenommenen Formparameter bzw. im maximalen Tropfendurchmesser unterscheiden. Diese Diskrepanz zieht sich durch den ganzen Modelllauf. In allen Parametrisierungen zeigt sich ein Überschießen des  $M_6$ -Signales, welches aber unterschiedlich stark ausgeprägt ist (Tabelle 5.4). Durch den anfänglichen Diagnosefehler resultiert das leichte Überschießen bei  $ZW_{\text{opt}}$  in einer deutlichen Überschätzung der Referenzlösung, während sich bei  $MY$  die beiden Fehler zu einer guten Repräsentation des Reflektivitätssignals ausgleichen.  $WL_0$  und  $WL_3$ , welche ein konstantes  $\mu$  benutzen, überschätzen  $M_6$  um bis zu 5 Größenordnungen und zeigen ein deutliches Überschießen. Berechnet man hierzu den

**Tabelle 5.4** – Überschießen von  $M_6$  und Überschätzung der mittleren Masse  $x$  im Parametrisierungsvergleich zum Zeitpunkt  $t = 300$  s.  $M_{6,\text{init}}$  bezeichnet den Anfangswert von  $M_6$ , abhängig vom jeweiligen parametrisierten Modell.

	WL <sub>0</sub>	WL <sub>3</sub>	MY	ZW <sub>opt</sub>
$\max M_6/M_{6,\text{init}}$	$> 26,67 \cdot 10^3$	176,9	2,25	2,00
$\max x^{\text{param}} / \max x^{\text{spek}}$	$> 50 \cdot 10^3$	$1,43 \cdot 10^3$	0,81	0,59

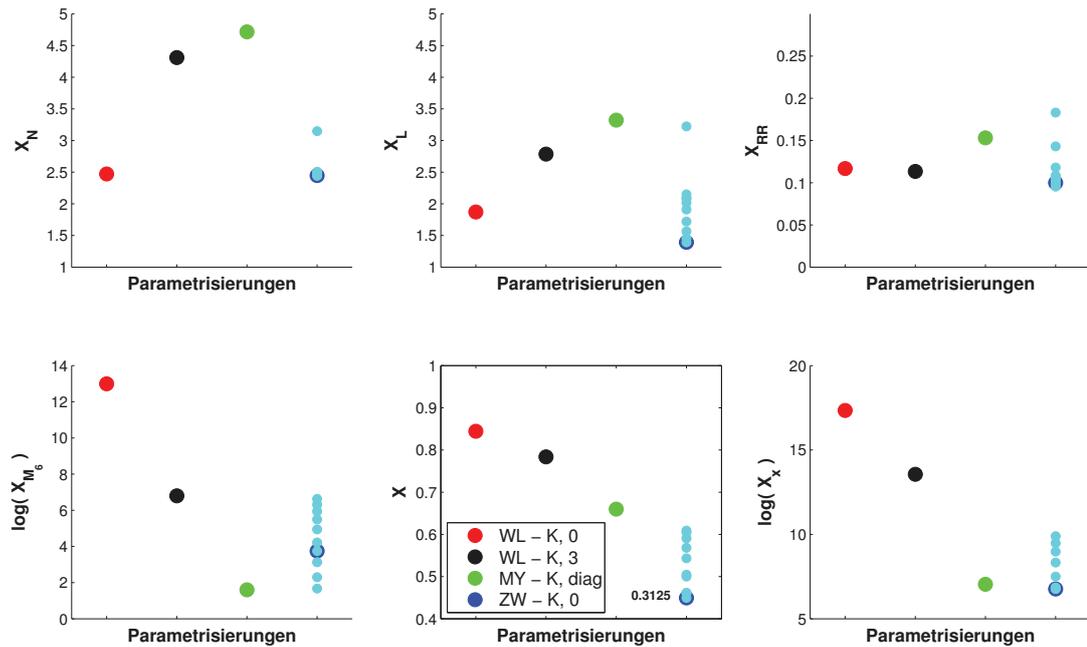
Reflektivitätsfaktor  $Z_{\text{eq}}$ , so ergibt dies 80 bzw. 54 dBZ. Diese Werte übersteigen deutlich die in gleichförmigem Regen gemessenen Werte von 20-35 dBZ (Rico-Ramirez et al., 2007). Daher kann eine Radar-Verifikation zu einem Verlust an Vertrauen in die Modellergebnisse führen, obwohl Anzahldichte und Flüssigwassergehalt gut vorhergesagt wurden.

Auch im Hinblick auf die mittlere Masse  $x$  zeigen die Parametrisierungen WL<sub>0</sub> und WL<sub>3</sub> eine deutliche Überschätzung der Referenzlösung, welche für die Parametrisierung mit kleinerem  $\mu$  größer ausfällt (Tabelle 5.4). Der Bereich der maximalen mittleren Masse für beide Modelle liegt in Größenbereichen, die im wolkenphysikalischen Kontext nicht sinnvoll sind. Bei MY nimmt die maximale mittlere Masse im zeitlichen Verlauf zu, wohingegen die Amplitude der mittleren Masse bei ZW<sub>opt</sub> schon bei  $t = 300$  s auf ihrem Maximalwert ist.

Das Überschießen bei  $M_6$  und das Überschätzen von  $x$  in den Ergebnissen der Parametrisierungen WL<sub>0</sub> und WL<sub>3</sub> ist auf deren konstantes Verhältnis der mittleren Fallgeschwindigkeiten der prognostischen Momente zurückzuführen (Abbildung 3.4, rechts). Bei den Parametrisierungen MY und ZW<sub>opt</sub> hingegen verringert sich das Verhältnis  $\bar{v}_3/\bar{v}_0$  für große mittlere Massen bzw. Durchmesser. Dadurch werden dann die prognostischen Momente annähernd gleich schnell verlagert und der Zuwachs der mittleren Masse wird beschränkt.

Abschließend sollen nun die qualitativen Eindrücke aus den Abbildungen 5.9 und 5.10 quantifiziert werden. Die Differenzen zur Referenzlösung können wieder mit der Norm  $X$ , Gl. (5.6), gemessen werden. An Stelle der verschiedenen  $D_{\text{max}}$  treten die verschiedenen Parametrisierungen. Abbildung 5.11 stellt die Fehlernormen grafisch dar.

Es zeigt sich, dass die obigen Eindrücke der Güte der einzelnen Parametrisierungen mit den durch die Norm  $X$  ermittelten Fehlern übereinstimmen. Auf eine Diskussion der einzelnen Fehler wird daher verzichtet. Betrachtet man die Fehlernorm  $X$  bezogen auf alle Testgrößen, dann hat die  $D_{\text{max}}$ -Parametrisierung in optimierter Form (ZW<sub>opt</sub>) die kleinste Fehlernorm. Sie ist nur halb so groß wie die von WL<sub>0</sub>, das  $D_{\text{max}} = \infty$  verwendet. ZW<sub>opt</sub> kommt also der Referenzlösung von allen vier Parametrisierungen

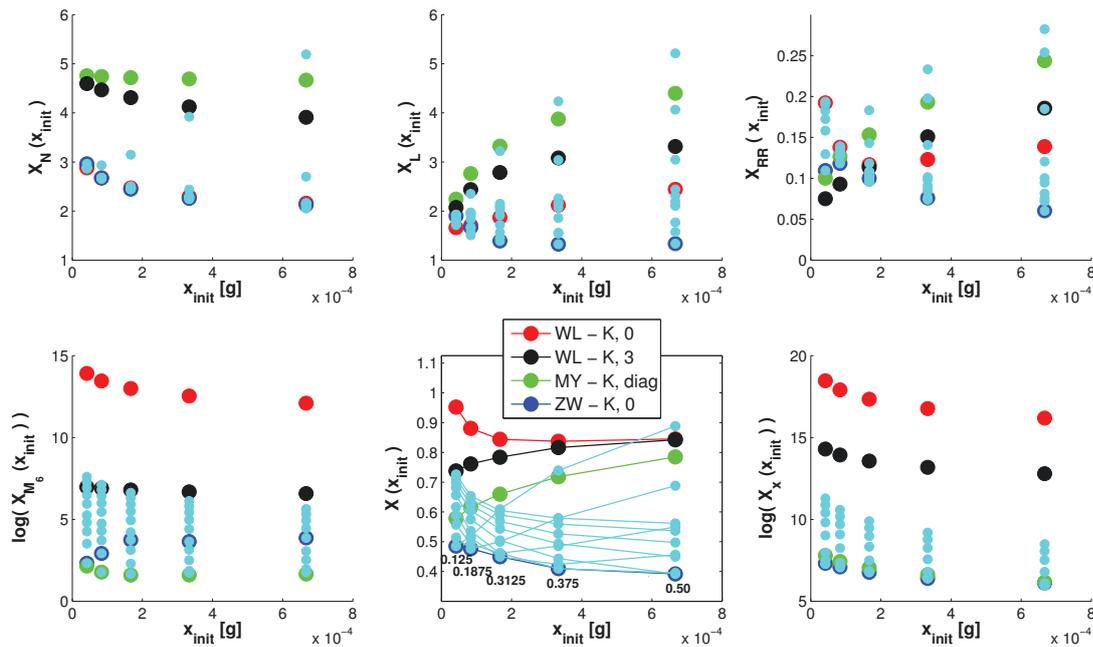


**Abbildung 5.11** – Fehlernorm  $X$  (unten Mitte) und deren Komponenten für verschiedene Parametrisierungen. Punkte  $\bullet$ :  $D_{\max}$  von 0,125 cm bis 1,00 cm.

am nächsten. Auch die Fehlernormen der Parametrisierungen mit anderen  $D_{\max}$  liegen noch unter der Fehlernorm von MY. Also sind die Ergebnisse der neuentwickelten  $D_{\max}$ -Parametrisierung selbst bei Verwendung eines nicht-optimierten  $D_{\max}$  besser als alle anderen betrachteten Parametrisierungen.

Abbildung 5.12 zeigt einen Vergleich der selben Parametrisierungen wie Abbildung 5.11. Zusätzlich wird nun aber die mittlere Masse des Anfangszustandes,  $x_{\text{init}}$ , variiert. Für wachsendes  $x_{\text{init}}$  kann beobachtet werden, dass sich die Ergebnisse der Parametrisierungen mit einem hohen  $\mu$  weiter von der Referenzlösung entfernen, wohingegen sich die Ergebnisse der Parametrisierungen mit  $\mu = 0$  sich ihr annähern. Ist also bekannt, dass die mittlere Tropfenmasse des zu simulierenden Ensembles eher hoch sein wird, so sollte man  $\mu$  eher klein wählen.

Bei ZW streut der Fehler bei Variation von  $D_{\max}$  über einen weiten Bereich. Der Mittelwert der Fehler nimmt ab, obwohl sehr kleine  $D_{\max}$  Ausreißer mit sehr hohen Fehlerwerten produzieren (vergleiche hierzu auch Abbildung 5.7). Ist  $x_{\text{init}}$  (bzw. die in der zu simulierenden Wetterlage vorherrschende mittlere Tropfenmasse) nicht bekannt, ist es also empfehlenswert,  $D_{\max}$  eher etwas höher anzusetzen.



**Abbildung 5.12** – Wie Abb. 5.11, jedoch bei Variation von  $x_{\text{init}}$ . Die Ziffern bei ZW - K, 0 geben  $D_{\text{max,opt}}(x_{\text{init}})$  an.

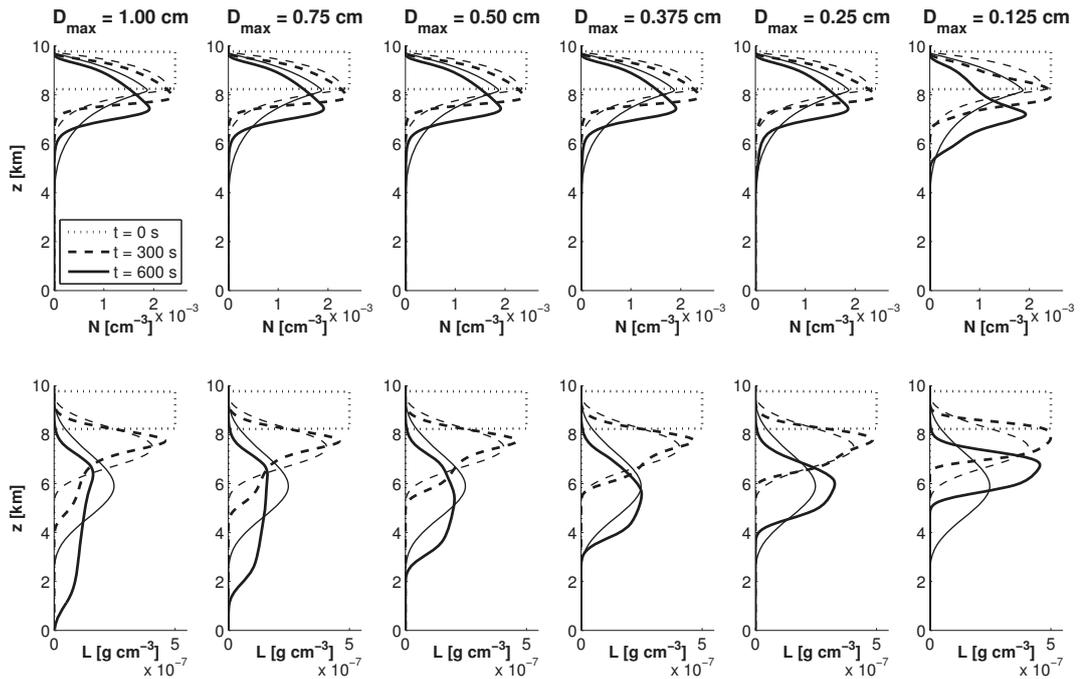
### 5.3. Ergebnisse mit RAINSHAFT

In diesem Abschnitt werden die Momentengleichungen (4.2) mit RAINSHAFT gelöst. Es wird also statt des MUSCL-Hancock-Advektionsschemas das Upstream-Verfahren eingesetzt. Es soll untersucht werden, ob sich die Erkenntnisse des vorangegangenen Abschnitts übertragen lassen.

RAINSHAFT teilt die Momente in einen nicht-sedimentierenden Wolkenanteil und einen sedimentierenden Regenanteil auf (siehe auch Kapitel 8). Werden die zu  $x_{\text{init}} = x_0$  gehörenden Anfangsbedingungen für die Momente über das gesamte Tropfenspektrum angesetzt, so ist der Regenanteil der Anzahldichte etwas kleiner ( $2,43 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ). Der Regenanteil des Flüssigwassergehaltes bleibt nahezu gleich bei  $5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$ , da der zugehörige Wolkenanteil um mehrere Größenordnungen kleiner ist. Hierdurch beträgt die mittlere Masse des Anfangszustandes  $2,06 \cdot 10^{-4} \text{ g}$  und liegt somit zwischen  $x_0 = 1,67 \cdot 10^{-4} \text{ g}$  und  $2x_0 = 3,34 \cdot 10^{-4} \text{ g}$  (Tabelle 4.1).

#### 5.3.1. Ergebnisse der ZW-Parametrisierung

Die Abbildungen 5.13 und 5.14 zeigen den zeitlichen Verlauf der prognostischen Momente sowie der abgeleiteten Größen, berechnet mit der ZW-Parametrisierung in RAINSHAFT. Die Darstellung ist analog zu den Abbildungen 5.2 und 5.3, welche die selben Größen unter Verwendung des MUSCL-Hancock-Schemas zeigen.



**Abbildung 5.13** – Verlauf von  $N$  und  $L$  für die  $D_{\max}$ -Parametrisierung (mit RAINSHAFT berechnet, dicke Linien) und das Referenzmodell (dünne Linien).

Man kann erkennen, dass der bereits ausführlich diskutierte systematische Einfluss, welcher  $D_{\max}$  auf die Ergebnisse ausübt, auch unter einem anderen Advektionsschema erhalten bleibt. Für kleinere  $D_{\max}$  wird das Signal der Anzahldichte leicht schneller, während sich das Signal des Flüssigwassergehaltes langsamer verlagert.

Im Unterschied zu den Signalen, welche mit dem MUSCL-Hancock-Schema berechnet wurden, wirken die Momentverläufe deutlich glatter, da das Upstream-Schema sehr viel diffusiver ist. Dadurch ist zum Beispiel die untere Front im  $L$ -Signal nicht mehr so ausgeprägt erkennbar. Die Signale sind etwas schneller als bei Lösung mit dem MUSCL-Hancock-Schema. Dies bedeutet zum Beispiel, dass hier der simulierte Niederschlag den Boden eher erreicht, als wenn das MUSCL-Hancock-Verfahren zur Lösung der prognostischen Gleichungen verwendet würde.

Bei der mittleren Masse ist auffällig, dass der Maximalwert  $x_{\max} = \frac{\rho_w \pi}{6} D_{\max}^3$  im Gegensatz zur Berechnung mit SED2MOM nicht ganz erreicht wird.

Abbildung 5.15 zeigt nun den Fehler  $X$  bezüglich der Referenzlösung der mit RAINSHAFT berechneten Läufe bei variierendem  $D_{\max}$ . Zum Vergleich sind außerdem die Fehler der mit SED2MOM berechneten Läufe zu den Anfangsbedingungen  $x_{\text{init}} = x_0$  und  $x_{\text{init}} = 2x_0$  eingezeichnet. Abbildung 5.7 folgend, welche den Gesamtfehler  $X$  in

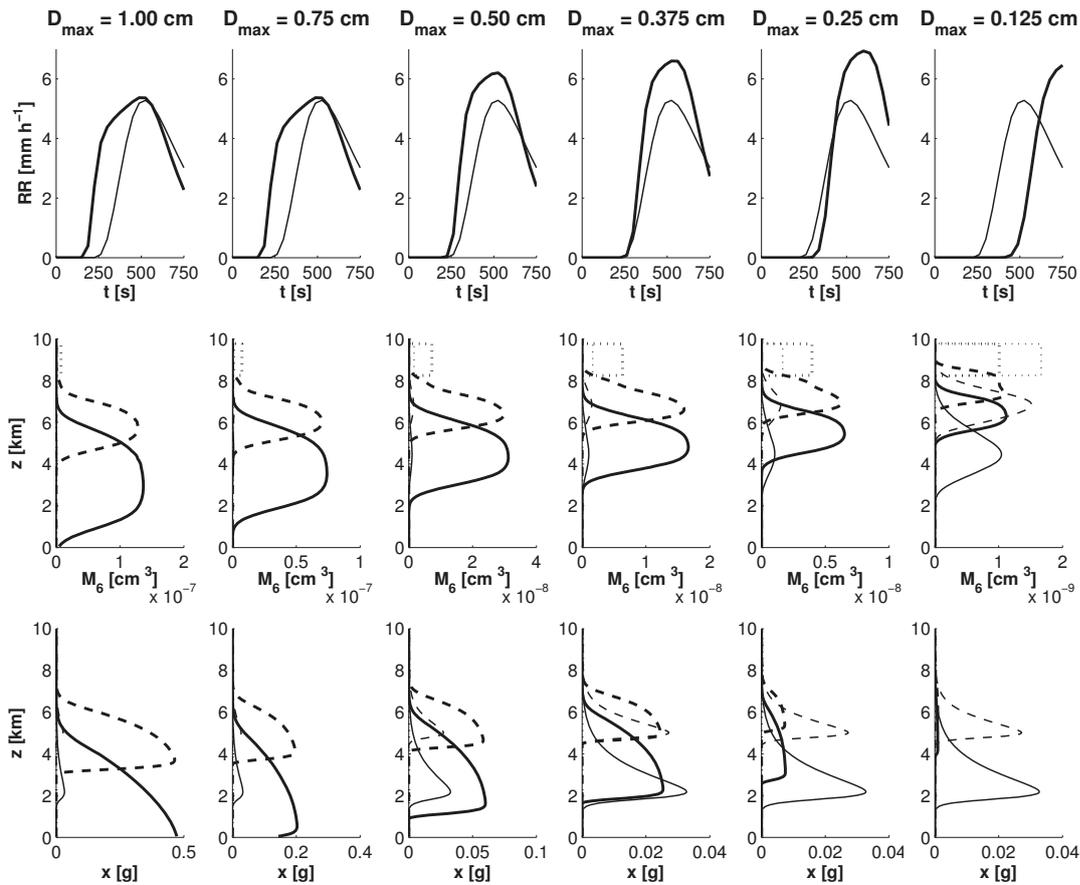
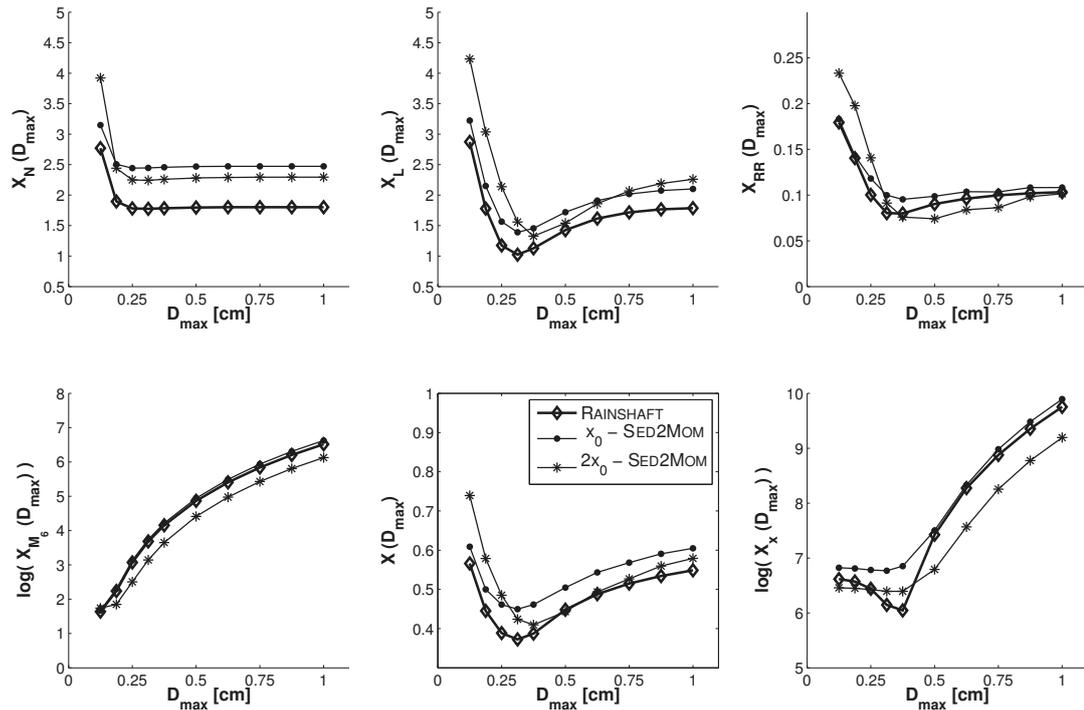


Abbildung 5.14 – Wie Abb. 5.13, aber für die abgeleiteten Größen  $RR(5,75\text{ km})$ ,  $M_6$  und  $x$ .

Abhängigkeit von  $D_{\max}$  für verschiedene  $x_{\text{init}}$  zeigt, ist zu erwarten, dass der Fehler des RAINSHAFT-Laufes „zwischen“ dem der beiden SED2MOM-Läufe liegt.

Man erkennt, dass der Fehler für  $N$  und  $L$  geringer ist als beim SED2MOM-Lauf mit  $x_{\text{init}} = 2x_0$ . Dies mag daran liegen, dass die untere Front der Signale geringer ausgeprägt ist, und die Referenzlösung keine untere Front zeigt. Bei den anderen Komponenten des Fehlers sind die Abweichungen vom erwarteten Verhalten nicht so markant. Auffällig ist jedoch das ausgezeichnete Minimum von  $X_x$  bei  $D_{\max} = 0,375\text{ cm}$ , welches innerhalb der verwendeten  $D_{\max}$ -Diskretisierung bei den SED2MOM-Läufen nicht vorhanden ist.

Der Gesamtfehler der RAINSHAFT-Läufe ist wegen des niedrigen Fehlers für  $N$  und  $L$  ebenfalls niedriger als aus der Abhängigkeit des Fehlers von  $x_{\text{init}}$  in SED2MOM erwartet. Die Minimalstelle bei  $D_{\max} = 0,3125\text{ cm}$  liegt jedoch zwischen den Minimalstellen der anderen Fehlerkurven ( $0,3125\text{ cm}$  und  $0,375\text{ cm}$ ). Dies ist ein Indiz dafür, dass die in Gl. (5.8) dargestellte Beziehung zwischen  $D_{\max,\text{opt}}$  und  $x_{\text{init}}$  auch unter Variation des Advektionsschemas Gültigkeit hat.

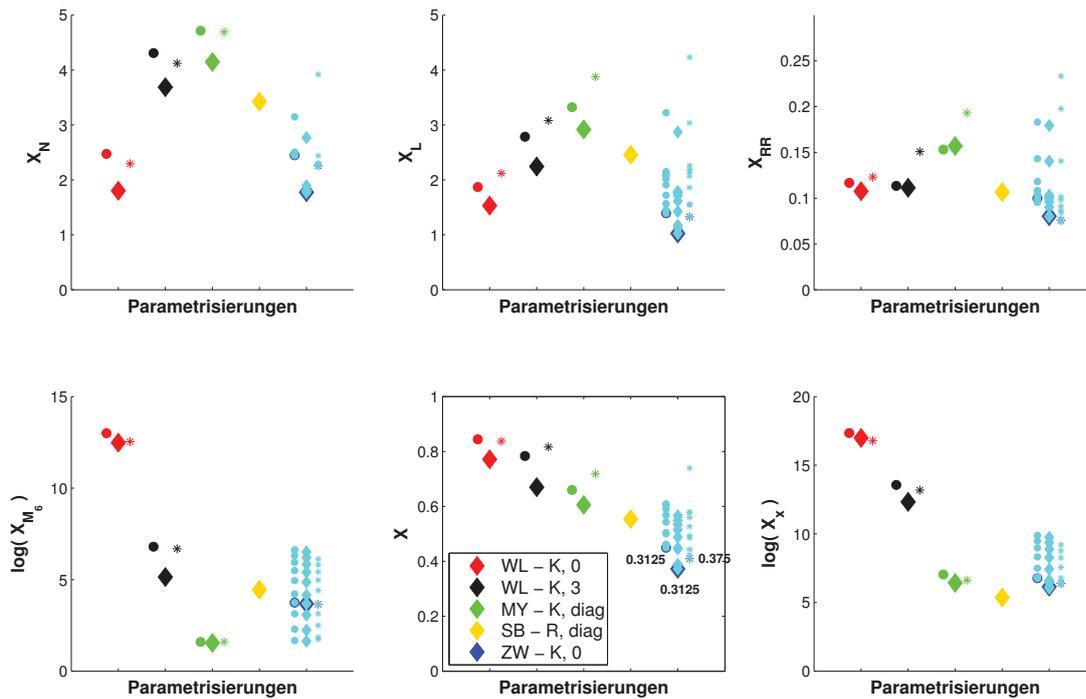


**Abbildung 5.15** – Fehlernorm  $X$  (unten Mitte) und deren Komponenten für die  $D_{\max}$ -Parametrisierung, berechnet mit RAINSHAFT ( $\diamond$ ) sowie mit SED2MOM ( $\bullet$ :  $x_{\text{init}} = x_0$ ;  $*$ :  $x_{\text{init}} = 2x_0$ ).

### 5.3.2. Vergleich mit anderen Parametrisierungen

In Analogie zur Abbildung 5.11 vergleicht Abbildung 5.16 den Fehler der  $D_{\max}$ -Parametrisierung (ZW) mit dem der anderen Sedimentationsparametrisierungen. Die Läufe wurden jeweils mit RAINSHAFT und mit SED2MOM (zu zwei verschiedenen Anfangszuständen) gerechnet. Eine Ausnahme ist die Parametrisierung SB (Seifert u. Beheng, 2006), welche nur in RAINSHAFT implementiert ist. Die unterschiedlichen Konfigurationen sind durch unterschiedliche Symbolformen ( $x_{\text{init}}$ ) und -größen (Advektionsschemata) gekennzeichnet.

Aus Abbildung 5.16 kann man ersehen, dass die Rangfolge der Parametrisierungen bei Variation von  $x_{\text{init}}$  und auch bei Variation des Advektionsschemas erhalten bleibt. Dies gilt sowohl für den Gesamtfehler als auch für die einzelnen Komponenten. Bei Verwendung des RAINSHAFT-Programms mit Upstream-Advektionsschema sind für alle betrachteten Sedimentationsparametrisierungen die Fehler geringer, als man aus den Vorüberlegungen in Kapitel 5.3.1 schließen konnte: Sie liegen nicht zwischen den Fehlern der Läufe mit  $x_{\text{init}} = x_0$  und  $x_{\text{init}} = 2x_0$  aus SED2MOM, sondern darunter.



**Abbildung 5.16** – Fehlnorm  $X$  (unten Mitte) und ihre Komponenten im Parametrisierungsvergleich.  $\blacklozenge$ : RAINSHAFT.  $\bullet$ : SED2MOM ( $x_{\text{init}} = x_0$ ).  $*$ : SED2MOM ( $x_{\text{init}} = 2x_0$ ). Die Ziffern bei ZW - K, 0 geben  $D_{\text{max,opt}}$  in cm an.

Die neuentwickelte  $D_{\text{max}}$ -Parametrisierung  $ZW_{\text{opt}}$  hat von allen hier betrachteten Parametrisierungen auch bei Verwendung des Upstream-Schemas die geringste Fehlernorm (50% des Fehlers von  $WL_0$ ). Ihre Ergebnisse liegen also am dichtesten bei der Referenzlösung. Für ein nicht-optimierte  $D_{\text{max}}$  sind die Fehler von ZW ebenfalls noch sehr gering, reichen aber schon in den Bereich des Fehlers der Parametrisierungen MY und SB hinein.



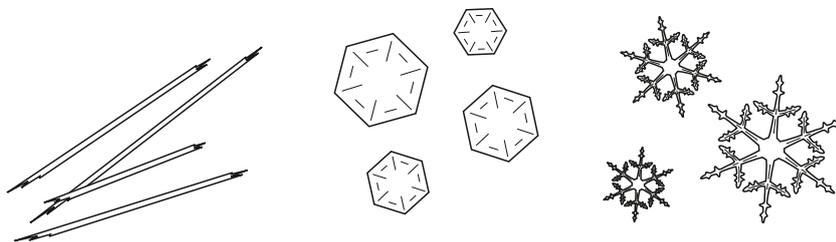
---

## Sedimentation von Schnee

---

Im vorangegangenen Kapitel haben wir uns mit der Sedimentation von Regentropfen in warmen Wolken beschäftigt. In der Atmosphäre erstrecken sich Wolken jedoch auch in Höhen, in denen Temperaturen unter  $0^{\circ}\text{C}$  vorherrschen. Hier existieren dann neben unterkühlten Tropfen auch Hydrometeore der festen Phase.

Die Grundlage für das Entstehen von festen Hydrometeoren ist die *Nukleation*. Diese kann *homogen* durch Gefrieren unterkühlter Wassertropfen bei Temperaturen von unter ca.  $-40^{\circ}\text{C}$  geschehen (Cotton et al., 2011). Bedeutsamer ist jedoch die *heterogene* Nukleation, bei der ein Wassertropfen durch Kontakt mit einem Nukleationskeim gefriert oder sich Wasserdampf an diesen anlagert (Depositions-Nukleation). Nach der Nukleation wachsen die Kristalle durch Deposition von Wasserdampf. Je nach Umgebungstemperatur und vorherrschender Luftfeuchtigkeit erhalten die Kristalle eine andere Struktur. Beispiele sind Nadeln, hexagonale Plättchen oder sternförmige Dendriten (Abbildung 6.1). Eine Klassifikation der Kristalltypen wurde zum Beispiel von Magono u. Lee (1966) erstellt. Wechseln die Umgebungsbedingungen des Kristalls während seines Wachstums, so entstehen Mischformen. Dies erschwert eine stringente Klassifikation. Das weitere Wachstum der Kristalle ist bestimmt von *Bereifen* durch Kollision mit unter-



**Abbildung 6.1** – Formen typischer Eiskristalle: Nadeln, hexagonale Plättchen und Dendriten (v. l. n. r.). Die Größenverhältnisse sind nicht naturgetreu.

kühlten Tropfen oder Kollisionen mit anderen Eisteilchen, der sogenannten *Aggregation*. Beide Prozesse tragen maßgeblich zum Entstehen der sogenannten *Schneeflocken* bei (Pruppacher u. Klett, 1997; Rogers u. Yau, 1989).

In Wettervorhersage- und Klimamodellen, die flüssige und feste Hydrometeore berücksichtigen, ist man gezwungen, sich auf einige wenige bestimmte Typen von Eiskristallen bzw. Schneeflocken festzulegen. Die Simulation wird umso realistischer, jedoch auch rechenaufwändiger, je mehr Typen im Modell verwendet werden (Cotton et al., 2011). Im Zwei-Kategorie-Eisschema von Cosmo (Atmosphärenmodell des „Consortium for Small Scale Modelling“, vom Deutschen Wetterdienst verwendet und weiterentwickelt) sind dies kleine, nicht sedimentierende hexagonale Plättchen und große, sedimentierende dicht bereifte Aggregate von Dendriten (Doms et al., 2011). Heymsfield u. Iaquina (2000) weisen darauf hin, dass in Klimamodellen der ausgewählte Kristalltyp in Cirruswolken (und insbesondere die angenommene Teilchengeschwindigkeit) einen großen Einfluss auf den Wolkenbedeckungsgrad und die Strahlungsbilanz hat. Die in polaren Gebieten vorherrschenden Niederschlagsteile der festen Phase sind irregulär geformte Eiskristalle und bereifte Aggregate von Dendriten (H. W. Jacobi, pers. Mitteilung; Korolev u. Isaac, 1999; Gayet et al., 2007).

Sekhon u. Srivastava (1970) untersuchen die Diagnose von Anzahldichte, Massengehalt und Reflektivität aus der Niederschlagsrate von Schneeflocken mittels einer angenommenen exponentiellen Größen-Verteilungsfunktion. Die Autoren vergleichen die analytisch diagnostizierten Werte mit Beobachtungen und stellen fest, dass für die berechneten Werte ein „Korrekturfaktor“ benutzt werden muss, um eine gute Übereinstimmung mit den beobachteten Werten zu erhalten. Effektiv bedeutet dieser Korrekturfaktor, dass die diagnostischen Größen über ein Spektrum von Teilchen mit beschränkter Abmessung berechnet werden. Die Einführung eines  $D_{\max}$  führt also zu verbesserten Ergebnissen in der Diagnose. Hier soll daher die in Kapitel 3.1 neu entwickelte Sedimentationsparametrisierung an der Hydrometeorokategorie „bereifte Aggregate von Dendriten“ getestet werden. Die Ergebnisse werden dabei mit denen der Parametrisierung von Wacker u. Lüpkes (2009) verglichen, welche  $D_{\max} = \infty$  verwendet.

## 6.1. Technische Vorbemerkungen

Da Schneeteilchen andere Eigenschaften haben als Wassertropfen, sind einige technische Änderungen am Modell nötig. Diese sollen im Folgenden besprochen werden:

**Interne Koordinate** Ein Maß der Größe von Wassertropfen ist ihr Durchmesser, da sie näherungsweise als sphärisch angenommen werden können. Eisteilchen hingegen sind irregulär geformt. Hinsichtlich der für die Momentenmethode notwendigen Größencharakterisierung gibt es zwei Möglichkeiten.

*Charakteristische Länge  $\mathcal{L}$*  – Beispiele hierfür sind die längste Querabmessung bei hexagonalen Plättchen oder die Länge des längsten Astes bei Dendriten. Bei komplexer aufgebauten Teilchen wie den hier verwendeten Aggregaten von Kristallen ist die

**Tabelle 6.1** – Maximaler Durchmesser und Beziehungen für Masse und Geschwindigkeit für die internen Koordinaten  $\mathcal{L}$  und  $D$ , nach Locatelli u. Hobbs (1974).

max. Abmessung	Masse [g]	Geschwindigkeit [ $\text{cm s}^{-1}$ ]
$\mathcal{L}_{\max} = 1,2 \text{ cm}$	$\hat{m}(\mathcal{L}) = 2,94 \cdot 10^{-3} \mathcal{L}^{1,9}$	$\hat{v}_T(\mathcal{L}) = 147,105 \mathcal{L}^{0,270}$
$D_{\max} = 0,1995 \text{ cm}$	$m(D) = \frac{\rho_w \pi}{6} D^{3,0}$	$v_T(D) = 306,866 D^{0,426}$

Definition einer charakteristischen Länge weniger intuitiv. Hier benutzt man den Durchmesser des kleinsten Kreises, in den das Schneeteilchen durch Zerlegung eingepasst werden kann, ohne seine Dichte zu verändern (Locatelli u. Hobbs, 1974). Ein Nachteil der Verwendung der charakteristischen Länge als interner Koordinate ist, dass  $M_6$  nicht als Reflektivität interpretierbar ist. Die Ordnung des zur Reflektivität gehörigen Momentes ändert sich mit der mittleren Masse des Teilchenensembles (Matrosov et al., 2002). Die Niederschlagsrate  $\mathcal{R}$  kann weiterhin in  $\text{g cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$  angegeben werden, die Größe  $RR$ , Gl. (2.9), ist dann aber nicht als Höhe des gefallen festes Niederschlags zu verstehen, sondern als Höhe des Niederschlags *in Wasseräquivalent* (gleichbedeutend mit dem Niederschlag der festen Phase in geschmolzener Form).

*Äquivalenter Durchmesser  $D$*  – Hierbei wird das Eisteilchen geschmolzen und dann der Durchmesser  $D$  des entstehenden Wassertropfens bestimmt. Reflektivität  $M_6$  und die Niederschlagsrate  $RR$  sind so als Wasseräquivalent zu interpretieren.

**Beziehungen für Masse und Geschwindigkeit** Für die Anwendung der Momentenmethode benötigt man Beziehungen zwischen interner Koordinate und der Masse sowie der Geschwindigkeit des Teilchens, zum Beispiel als Potenzansätze, Gl. (2.4) oder (2.10). Die Herleitung dieser Beziehungen über geometrische Betrachtungen ist nur für kompakte Kristalle von einfacher Gestalt möglich. Zudem kann die Berechnung der benötigten Dichte der Kristalle fehlerbehaftet sein. Anpassungen an Beobachtungsdaten liefern präzisere Relationen für alle Eisteilchentypen (Pruppacher u. Klett, 1997). Solche aus Beobachtungen hergeleitete Beziehungen für Masse und Geschwindigkeit sowie die maximale Abmessung finden sich zum Beispiel in Locatelli u. Hobbs (1974). In Tabelle 6.1 sind diese Beziehungen für den Teilchentyp „dicht bereifte Aggregate von Dendriten“, der in diesem Kapitel verwendet wird, aufgeführt.

Heymsfield u. Westbrook (2010) merken an, dass die in Publikationen angegebenen Masse- und Geschwindigkeitsrelationen für einen bestimmten Eisteilchentyp im Allgemeinen nur für dasjenige Teilchenensemble gelten, welches den Messungen zu Grunde lag. Da insbesondere komplexe Teilchentypen schwer zu klassifizieren sind, ist eine Übertragung auf andere Eisteilchenpopulationen problematisch.

**Verteilungsfunktion** Auch im Falle von Schneeteilchen als Hydrometeor-Kategorie unterstützen Beobachtungen die Verwendung einer exponentiellen Verteilungsfunktion, sowohl in der charakteristischen Länge  $\mathcal{L}$  (Sekhon u. Srivastava, 1970) als auch im

**Tabelle 6.2** – Anfangswerte für Anzahldichte und Massengehalt sowie für die Parameter der Verteilungsfunktion in den internen Koordinaten  $\mathcal{L}$  und  $D$ . Anfängliche mittlere Masse:  $5,2725 \cdot 10^{-5} \text{ g}$ . Minimalwerte:  $N_{\min} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^{-3}$ ,  $L_{\min} = 1 \cdot 10^{-22} \text{ cm}^{-3}$ .

progn. Momente	Parameter von $\hat{f}(\mathcal{L})$	Parameter von $f(D)$
$N = 3,5088 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$	$\hat{n}_0 = 0,004 \text{ cm}^{-4}$	$n_0 = 1,3466 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-4}$
$L = 1,85 \cdot 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$	$\hat{\lambda} = 11,4 \text{ cm}^{-1}$	$\lambda = 38,3549 \text{ cm}^{-1}$

äquivalenten Durchmesser  $D$  (Heymsfield et al., 2008). Erstere Beziehung wurde von Gunn u. Marshall (1958) entdeckt, die sowohl den Achsenabschnitt als auch die Steigung an die Niederschlagsrate koppeln. Man spricht daher von der *Gunn-Marshall-Verteilung*.

Die Anfangswerte für Anzahldichte  $N$  und Massengehalt  $L$  wurden über die aus Pruppacher u. Klett (1997) entnommenen Werte für die Verteilungsparameter der Gunn-Marshall-Verteilung

$$\hat{f}(\mathcal{L}) = \hat{n}_0 e^{-\hat{\lambda}\mathcal{L}} \quad (6.1)$$

berechnet. Auf Grund der Massen-Größenbeziehung für die charakteristische Länge  $\mathcal{L}$  als interne Koordinate gilt

$$N = \hat{M}_0 \quad \text{und} \quad L = 2,94 \cdot 10^{-3} \hat{M}_{1,9}. \quad (6.2)$$

Dies ergibt mit  $\mathcal{L}_{\max} = 1,2 \text{ cm}$  die in Tabelle 6.2 aufgeführten Anfangswerte für  $N$  und  $L$ . Für  $D$  als interne Koordinate gilt jedoch wie gehabt

$$N = M_0 \quad \text{und} \quad L = \frac{\rho_w \pi}{6} M_3. \quad (6.3)$$

Hierüber erhält man mit  $D_{\max} = 0,1995 \text{ cm}$  die Parameter für  $f(D) = n_0 e^{-\lambda D}$ . Alle Werte sind in Tabelle 6.2 gesammelt.

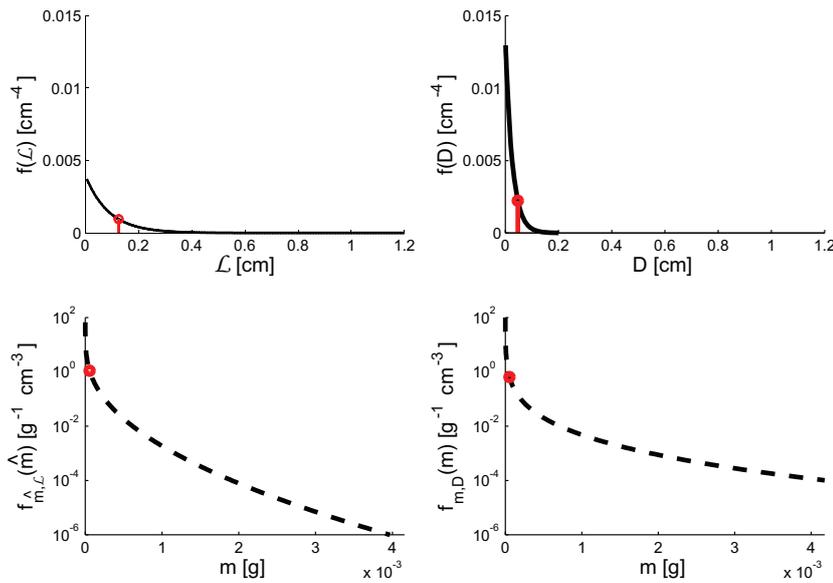
Mit der Massenrelation (Tabelle 6.1) erhält man ferner eine eindeutige Beziehung zwischen  $D$  und  $\mathcal{L}$ :

$$2,94 \cdot 10^{-3} \mathcal{L}^{1,9} = \frac{\rho_w \pi}{6} D^{3,0}. \quad (6.4)$$

Daraus folgt

$$M_i \sim \hat{M}_{19/30i}. \quad (6.5)$$

**Numerische Umsetzung** Beide Betrachtungsweisen der charakteristischen Abmessung sind in den numerischen Modellen implementiert. Das spektrale Modell wird sowohl mit  $\hat{f}(\mathcal{L}) = \hat{n}_0 e^{-\hat{\lambda}\mathcal{L}}$  ( $\mathcal{L} \leq 1,2 \text{ cm}$ ) als auch mit  $f(D) = n_0 e^{-\lambda D}$  ( $D \leq 0,1995 \text{ cm}$ )



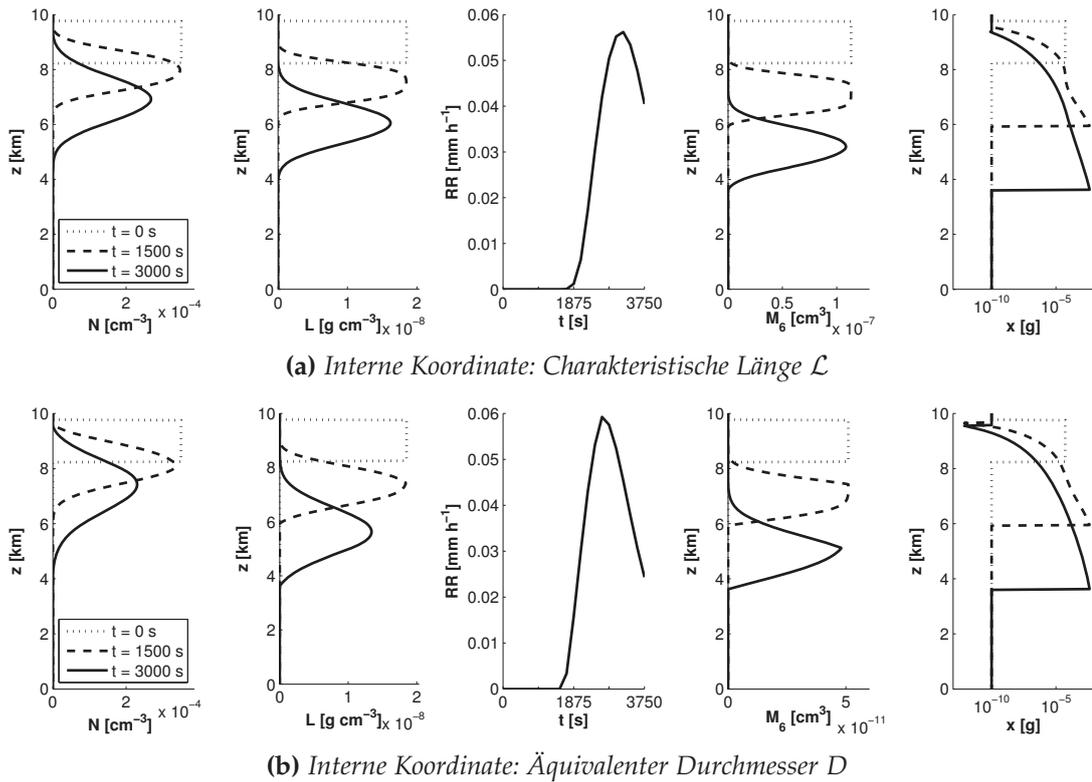
**Abbildung 6.2** – Spektren des Anfangszustandes, dargestellt in der Längen (oben) und in der Masse (unten), jeweils in interner Koordinate  $\mathcal{L}$  (links) und  $D$  (rechts). Rote Linien: zur mittleren Masse gehörige Abmessung (oben) bzw. mittlere Masse (unten, logarithmische Aufteilung der y-Achse). Es gilt  $\hat{f}(\mathcal{L})d\mathcal{L} = f_{\hat{m},\mathcal{L}}(\hat{m})d\hat{m}$  bzw.  $f(D)dD = f_{m,D}(m)dm$ .

initialisiert (Abbildung 6.2, oben). Im parametrisierten Modell sind die Anfangswerte für Anzahldichte  $N$  und Massengehalt  $L$  für beide internen Koordinaten gleich. Soll  $D$  als interne Koordinate verwendet werden, so wird  $N$  als  $M_0$  und  $L$  als proportional zu  $M_3$  interpretiert. Die prognostischen Ordnungen sind also  $j = 0$  und  $k = 3$ . Soll hingegen  $\mathcal{L}$  als interne Koordinate verwendet werden, so wird  $L$  als proportional zu  $\hat{M}_{1,9}$  interpretiert. Die prognostischen Ordnungen sind dann  $j = 0$  und  $k = 1,9$ .

Im Gegensatz zu den Simulationen von warmen Wolken aus Kapitel 5 beträgt die Modelllaufzeit hier 3750 s, um trotz der geringeren Fallgeschwindigkeit der Schneeteilchen die Momentausbreitung adäquat darstellen zu können. Die Niederschlagsrate  $RR$  wird wie gehabt 2,5 km unterhalb der anfänglichen Wolkenunterkante gemessen.

## 6.2. Ergebnisse

Da das RAINSHAFT-Programm nur auf Tropfen als Hydrometeor-Kategorie ausgelegt ist, wird die spektrale Bilanzgleichung analytisch gelöst (für die Vorgehensweise siehe Wacker u. Seifert, 2001). Die parametrisierten Gleichungen werden mit SED2MOM unter Verwendung von ZW ( $D_{\max} = 0,1995$  cm,  $\mathcal{L}_{\max} = 1,2$  cm) und WL<sub>0</sub> ( $D_{\max} = \infty$ ,  $\mathcal{L}_{\max} = \infty$ ) gelöst. Die Darstellungszeitpunkte sind 0, 1500 und 3000 s.



**Abbildung 6.3** – Analytische Lösung des spektralen Referenzmodells für die Größen Anzahl- und Massengehalt  $L$ , Niederschlagsrate  $RR$  in Wasseräquivalent,  $M_6$  und mittlere Teilchenmasse  $x$  (v. l. n. r.).

### 6.2.1. Ergebnisse der spektralen Modelle

Abbildung 6.3 zeigt die analytische Lösung des spektralen Referenzmodells für die internen Koordinaten  $\mathcal{L}$  und  $D$ .

Auf den ersten Blick ersichtlich ist, dass die Abbildungen 6.3a und 6.3b nicht identisch sind. Die Anzahl- und Massengehalt  $N$  bewegt sich bei Verwendung von  $\mathcal{L}$  schneller fort als bei Verwendung von  $D$ . Für den Massengehalt  $L$  gilt dies umgekehrt. Dieses Verhalten ist in den unterschiedlichen anfänglichen Verteilungen von Anzahl- und Masse begründet (Abbildung 6.2): Bei  $\mathcal{L}$  als interner Koordinate befinden sich mehr Teilchen mit großem Durchmesser in der Größenverteilung, während sich bei  $D$  als interner Koordinate mehr Teilchen mit hoher Masse im Massenspektrum befinden. Des Weiteren verlagert sich der Massengehalt relativ zur Anzahl- und Masse bei Verwendung von  $D$  schneller als bei Verwendung von  $\mathcal{L}$ , da hier die Masse über eine höhere Potenz der internen Koordinate gebildet wird ( $\hat{i} = 3$  im Gegensatz zu  $\hat{i} = 1,9$  in der Nomenklatur von Gl. (2.4)). Die Unterkante des Ensembles befindet sich jedoch in beiden Darstellungen immer auf der gleichen Höhe (ersichtlich aus den Profilen für  $x$ ). Dort befindet

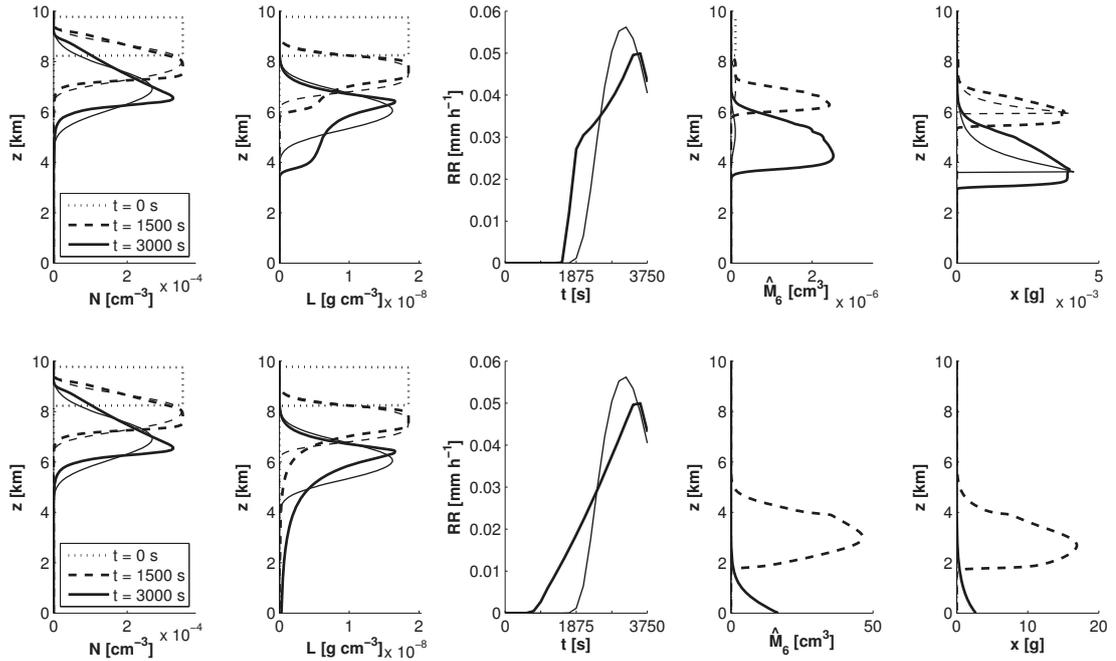
sich das größte vorkommende Teilchen und dieses hat in beiden Darstellungen die gleiche Masse und somit auch die gleiche Geschwindigkeit. Der Niederschlag setzt bei Verwendung von  $D$  früher ein und erreicht auch früher sein Maximum, welches mit  $0,06 \text{ mm h}^{-1}$  höher ist als die maximale Niederschlagsrate bei Verwendung von  $\mathcal{L}$  ( $0,056 \text{ mm h}^{-1}$ ). Es zeigt sich also, dass bei Simulation derselben Situation durch unterschiedliche interne Koordinaten unterschiedliche Ergebnisse entstehen.

Im Vergleich zum spektralen Modell für die Sedimentation von Tropfen (Kapitel 5.1) sind hier die mittlere Masse in der Anfangswolke und die Fallgeschwindigkeit der einzelnen Teilchen (in beiden Größencharakterisierungen) wesentlich kleiner. Durch die geringere Fallgeschwindigkeit setzt der Niederschlag erst nach einer längeren Zeitspanne ein (1875 s in Vergleich zu 250 s), und erstreckt sich über einen längeren Zeitraum. Daher ist die maximale Niederschlagsrate sehr viel geringer. Im Gegensatz zu den Simulationen des spektralen Modelles für Tropfen in Kapitel 5.1 wird hier die maximal mögliche mittlere Masse tatsächlich angenommen, da der hier verwendete Potenzansatz für  $v_T$  im Gegensatz zum Ansatz nach Beard (1976) keinen konstanten Bereich für große Hydrometeore besitzt.

### 6.2.2. Ergebnisse der parametrisierten Modelle

Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen die Ergebnisse der parametrisierten Modelle unter Verwendung der beiden unterschiedlichen internen Koordinaten. Wie im spektralen Referenzmodell führt die Verwendung von unterschiedlichen internen Koordinaten zu unterschiedlichen Ergebnissen. Auch im Fall der hier verwendeten Hydrometeor-Kategorie zeigt sich, dass die Benutzung der ZW-Parametrisierung (also eines endlichen maximalen Tropfendurchmessers in der Momentdefinition) für beide interne Koordinaten die Ergebnisse verbessert. Insbesondere die abgeleiteten Größen  $M_6$  und  $x$  befinden sich bei Verwendung von ZW in realistischen Wertebereichen. Auch der Zeitpunkt des Einsetzens des Niederschlages wird mit ZW relativ genau nachgebildet, wohingegen bei  $WL_0$  das Einsetzen um bis zu 1000 s verfrüht ist.

Vergleicht man die Stärke des Überschießens in  $M_6$  bei Verwendung der beiden internen Koordinaten, so stellt man fest, dass das Überschießen bei  $\mathcal{L}$  viel stärker ist als bei  $D$  (Tabelle 6.3). Dies wird von Wacker u. Lüpkes (2009) unterstützt: Die Autoren zeigen, dass die Stärke des Überschießens von der Differenz der Ordnungen von diagnostischem und (hier) höherem prognostischen Moment abhängen. Für  $\mathcal{L}$  ist diese Differenz  $6 - 1,9$ , für  $D$  hingegen nur  $6 - 3$ . Des Weiteren folgt aus Gl. (6.5), dass  $\hat{M}_6 \sim M_{9,5}$  bzw.  $M_6 \sim \hat{M}_{3,8}$ . Ein Moment über  $\mathcal{L}$  ist also proportional zu einem Moment höherer Ordnung über  $D$ . Dadurch wird bei Verwendung von  $\mathcal{L}$  das Überschießen im Vergleich zur Verwendung von  $D$  verstärkt.

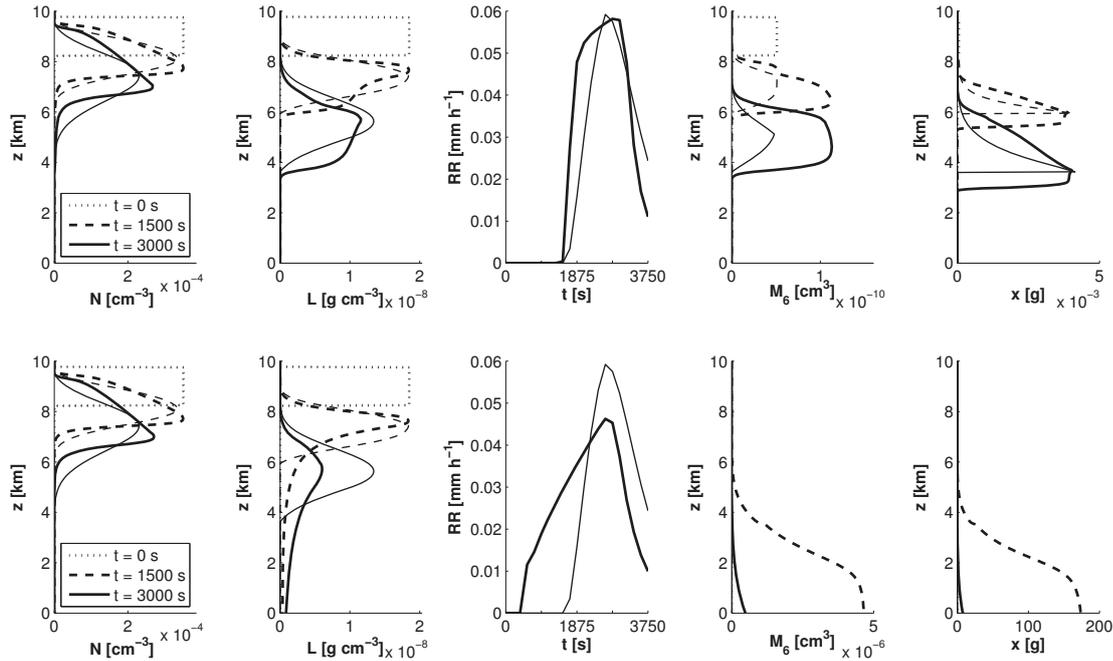


**Abbildung 6.4** – Ergebnisse des parametrisierten Modells (dicke Linien) in interner Koordinate  $\mathcal{L}$  mit  $\mathcal{L}_{\max} = 1,2 \text{ cm}$  (ZW, oben) und  $\mathcal{L}_{\max} = \infty$  ( $WL_0$ , unten) sowie des spektralen Referenzmodells (dünne Linien).

Die hier verwendeten prognostischen Momente und die Koeffizienten des Geschwindigkeitsansatzes unterscheiden sich von denen, welche in Kapitel 5 benutzt wurden. Dies bietet eine gute Gelegenheit, verschiedene theoretische Aspekte der Lösung des parametrisierten Modells zu studieren.

Zunächst betrachten wir die Krümmung der Oberkante des  $N$ -Signals bei Verwendung von  $WL_0$ . Die maßgebliche Größe ist hier  $\kappa_0 = \kappa_0(k, \beta, \mu, 1)$ , Gl. (A.22a). Für  $\mathcal{L}$  als interne Koordinate (Abbildung 6.4) beobachtet man einen nahezu linearen Verlauf der Signaloberkante. Es muss also gelten  $\kappa_0(1,9, 0,27, 0,1) \approx 1$ . Für  $D$  (Abbildung 6.5) ist die Signaloberkante stärker gekrümmt und so gilt  $\kappa_0(3, 0,426, 0,1) < 1$ . Die analytischen Ergebnisse aus Anhang A, die sich hauptsächlich im verwendeten Geschwindigkeitsansatz unterscheiden, zeigen ein ähnliches Muster: Es gilt  $\kappa_0(2, 0,5, 0,1) = 0,79$  und  $\kappa_0(3, 0,5, 0,1) = 0,66$  (betrachte hierzu auch die Ergebnisse von  $WL_0$  mit  $k = 3$ , Abbildung A.9). In Abbildung A.8, links, ist zu sehen, dass für  $\beta = 0,5$  die Krümmung der Oberkante des  $N$ -Signals bei  $j = 0$  für größeres  $k$  von 1 gegen 0 geht. Die vorangegangenen Betrachtungen deuten nun darauf hin, dass dieses Verhalten unabhängig von den verwendeten Werten des Geschwindigkeitsparameters  $\beta$  ist.

Vergleicht man den Signalverlauf der prognostischen Momente bei Verwendung von  $WL_0$  in den Abbildungen 6.4, 6.5 sowie A.9 (Tropfen), so beobachtet man, dass in den ersten beiden Fällen das Signal erst ab ca. 1500 s gedämpft wird, während die Dämpfung im letzteren Fall zwischen 300 und 600 s eintritt. Die maßgebliche analytische Größe ist



**Abbildung 6.5** – Wie Abb. 6.4, aber in interner Koordinate  $D$  mit  $D_{\max} = 0,1995 \text{ cm}$  (ZW, oben) und  $D_{\max} = \infty$  (WL<sub>0</sub>, unten).

hier  $t_{\text{end}}$ , die Zeit des Treffens der von Ober- und Unterkante des anfänglichen Signales ausgehenden Verdünnungswellen (Gl. (A.18) und Abbildung A.7). Durch einfache Umformungen erhält man

$$t_{\text{end}} = \frac{z_o - z_u}{v_1(\lambda_{\text{init}}) - v_2(\lambda_{\text{init}})} \sim \alpha^{-1} \lambda_{\text{init}}^{\beta}. \quad (6.6)$$

Dieser Proportionalitätsfaktor hängt nur vom Geschwindigkeitsansatz und  $\lambda_{\text{init}}$  ab. Für das Schnee-Modell mit  $\mathcal{L}$  beträgt er  $1,32 \cdot 10^{-3}$ , für  $D$  ergibt sich  $1,54 \cdot 10^{-2}$ . In dem in Abbildung A.9 dargestellten Fall (WL<sub>0</sub>,  $x_{\text{init}} = x_0$ ) beträgt der entsprechende Proportionalitätsfaktor  $3,96 \cdot 10^{-3}$ . Er ist also 3 – 4 mal so groß wie im Schnee-Modell. Die beobachteten Dämpfungszeitpunkte weisen ein ähnlich großes Verhältnis von 2,5 – 5 auf. Die analytische Lösung ist also auch in diesem Punkt auf die numerischen Ergebnisse des parametrisierten Modells bei Verwendung von WL<sub>0</sub> übertragbar.

Nun betrachten wir die Ergebnisse des ZW-Laufs mit interner Koordinate  $D$ . Im Vergleich zu Kapitel 5.2.1 (Sedimentation eines Regentropfenspektrums) unterscheiden sich die maximale Teilchenabmessung sowie das Verhältnis von mittlerer Masse des Anfangszustands  $x_{\text{init}}$  zur Masse der Teilchenobergrenze  $x(D_{\max})$ . Ebenfalls sind die Vorfaktoren des Geschwindigkeitsansatzes verschieden.  $\beta = 0,426$  und  $\beta = 0,5$  können als hinreichend identisch angesehen werden und die Ordnungen der prognostischen Momente sind gleich. Betrachtet man die Ergebnisse für  $N$  und  $L$  aus Abbildung 5.2, so kann man bei  $D_{\max} = 0,375 \text{ cm}$  und  $0,25 \text{ cm}$  eine gewisse Ähnlichkeit der Signalstruk-

**Tabelle 6.3** – Überschießen in  $M_6$  für die internen Koordinaten  $\mathcal{L}$  und  $D$ .

interne Koordinaten	$\mathcal{L}$	$D$
$\max M_6^{(\wedge)} / M_{6,\text{init}}^{(\wedge)}(t = 300 \text{ s})$	$4 \cdot 10^8$	$6,64 \cdot 10^4$
6 - k	4,1	3

**Tabelle 6.4** – Verhältnisse von Anfangs- und Maximalwert der mittleren Masse sowie des zugehörigen Durchmessers.

	Anfangswert	Maximalwert	Verhältnis
$x$	$5,2725 \cdot 10^{-5} \text{ g}$	$4,157 \cdot 10^{-3} \text{ g}$	0,012 68
$D$	0,0465 cm	0,1995 cm	0,2331

tur mit denen aus Abbildung 6.5 feststellen. Insbesondere ist die relative Stärke der unteren Front bei  $L$ , welche sich mit der Zeit nicht ändert, von vergleichbarer Größe. Das Verhältnis vom Anfangswert  $x_{\text{init}}$  zum Maximalwert  $x(D_{\text{max}})$  ist in Tabelle 6.4 dargestellt. Verwendet man dieses Verhältnis für die mittlere Masse des Anfangszustands aus Kapitel 5 ( $x_0 = 1,667 \cdot 10^{-4} \text{ g}$ ), so erhält man eine maximale mittlere Tropfenmasse von  $x_{\text{max}} = x_0 / 0,01268 = 0,01314 \text{ g}$ , was einem maximalen Tropfendurchmesser von 0,2928 cm entspricht. Dies liegt genau zwischen den aus Abbildung 5.2 identifizierten  $D_{\text{max}}$  von 0,375 und 0,25 cm. Für einen Geschwindigkeitsansatz mit nahezu gleichem  $\beta$  und gleichen Ordnungen der prognostischen Momente ist also das Verhältnis von  $x_{\text{init}}$  zu  $x(D_{\text{max}})$  entscheidend für die Struktur des Signals. Die Stärke des Überschießens bei  $M_6$  ist ebenfalls vergleichbar.

Es zeigt sich, wie auch schon von Sekhon u. Srivastava (1970) in Beobachtungen festgestellt, dass die Einführung eines endlichen maximalen Teilchendurchmessers die Diagnose anderer Momente verbessert. Da hierdurch auch die Diagnose der Sedimentationsflüsse an Qualität gewinnt, erzielt man in der Vorhersage des parametrisierten Modells bessere Ergebnisse.

Aus den hier präsentierten Testfällen kann jedoch nicht ermittelt werden, welcher der beiden internen Koordinaten zur Größenbeschreibung der Schneeteilchen der Vorzug zu geben ist. Betrachtet man die Ergebnisse der ZW-Parametrisierung, so ist für  $RR$  und  $M_6$  die Beschreibung mit  $D$  vorzuziehen, da die Ergebnisse dichter an der Referenzlösung liegen. Bei den prognostischen Momenten  $N$  und  $L$  ist hingegen kein großer Unterschied der Güte festzustellen. Weitere Simulationen mit variierender mittlerer Masse des Anfangszustands und variierenden Teilchentypen sind nötig, um zu entscheiden, ob es eine interne Koordinate gibt, unter deren Verwendung die Ergebnisse des parametrisierten Modells besonders häufig sehr dicht an der Referenzlösung sind.

# 7.

---

## Die Momentenmethode auf Grundlage der $B$ -Verteilung

---

In Kapitel 3.1 wurde gezeigt, dass das künstliche Kappen der  $\Gamma$ -Verteilung bei  $D_{\max}$  zu einigen technischen Problemen führt. Des Weiteren wird der Rechenaufwand im Vergleich zu Parametrisierungen mit  $D_{\max} = \infty$  deutlich erhöht (Kapitel 10). Die  $B$ -Verteilung, wie sie auch bereits zur Sprühnebelmodellierung getestet wurde (J. Carneiro, pers. Mitteilung; Watkins, 2005), ist nur in einem beschränkten Durchmesserbereich definiert. Daher ist es nicht nötig, sie künstlich zu kappen.

In diesem Kapitel wird die Sedimentation von Tropfen mit der  $B$ -Verteilung modelliert. Hierzu werden zunächst die Veränderungen in den Momentengleichungen (im Vergleich zu Kapitel 3.1) besprochen und anschließend die numerischen Ergebnisse vorgestellt und diskutiert.

### 7.1. Die Momentengleichungen

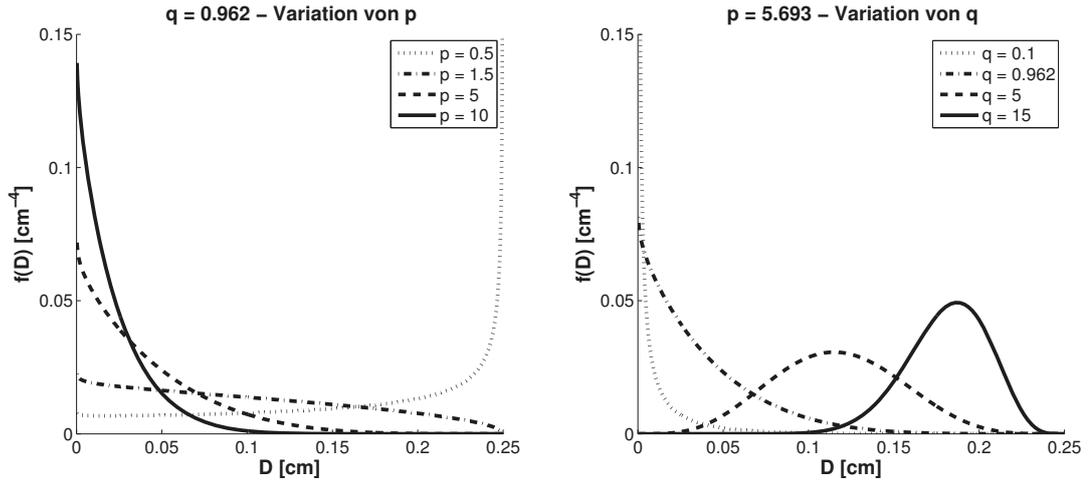
Die  $B$ -Verteilung (hier in normierter Form) ist gegeben durch

$$f(D) = \frac{C_0}{D_{\max}^{p+q-1}} \cdot D^{q-1} \frac{(D_{\max} - D)^{p-1}}{B(p, q)}, \quad 0 < D < D_{\max}. \quad (7.1)$$

$C_0$ ,  $p$ ,  $q$  und  $D_{\max}$  sind vier frei wählbare Parameter. Die  $B$ -Funktion  $B$  ist definiert als

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0. \quad (7.2)$$

Sie ist symmetrisch in ihren Argumenten. In Abbildung 7.1 ist die  $B$ -Verteilung für verschiedene Werte von  $p$  und  $q$  dargestellt. Ist  $q$  kleiner als 1 (Abbildung 7.1, links), so hat die Verteilungsfunktion an  $D = 0$  für alle  $p$  eine Polstelle. Umgekehrt ergibt sich für



**Abbildung 7.1** – B-Verteilungsfunktion (7.1) für verschiedene Werte von  $p$  und  $q$ .  $C_0 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ,  $D_{\max} = 0,25 \text{ cm}$ . Die konstant gehaltenen Werte für  $q = 0,962$  und  $p = 5,693$  sind im Vorgriff auf Tab. 7.1 gewählt.

$p < 1$  an  $D = D_{\max}$  eine Polstelle für alle  $q$ . Sind  $p$  und  $q$  größer als 1, so ist das durch  $f$  gegebene Spektrum umso enger, je höher  $p$  und  $q$  sind (Abbildung 7.1, rechts). Im Gegensatz zur  $\Gamma$ -Verteilung mit  $\mu = 0$  ist es mit der B-Verteilung möglich, Verteilungen mit einem lokalen Maximum darzustellen. Dies ist vorteilhaft, da die Lösung  $f$  der spektralen Bilanzgleichung ein solches lokales Maximum besitzt (Abbildung 11.1), das sich mit fortschreitender Zeit und größerer Fallstrecke zu größeren Durchmessern verschiebt.

Die Momente und Flüsse ergeben sich mit dem Kesslerschen Potenzansatz (C.1) für die Fallgeschwindigkeit  $v_T$  zu

$$M_i(t, z) = C_0(t, z) D_{\max}^i \frac{B(p(t, z), q(t, z) + i)}{B(p(t, z), q(t, z))}, \quad (7.3a)$$

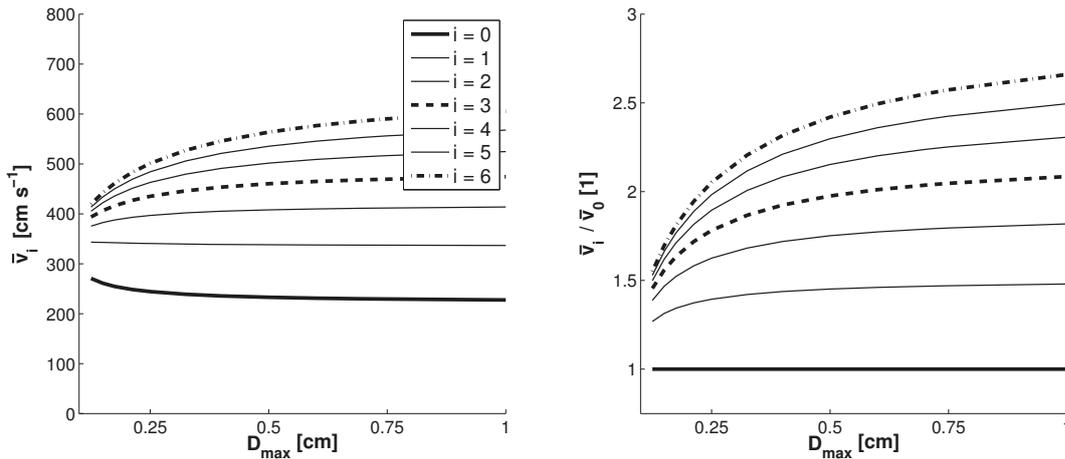
$$F_i(t, z) = \alpha M_i(t, z) D_{\max}^\beta \frac{B(p(t, z), q(t, z) + i + \beta)}{B(p(t, z), q(t, z) + i)}. \quad (7.3b)$$

Es gilt also  $C_0 = M_0 = N$ . Ebenso können die diagnostischen Momente und Flüsse mit Hilfe der Parameter und der prognostischen Momente dargestellt werden:

$$M_i = D_{\max}^{i-j} M_j \frac{B(p, q + i)}{B(p, q + j)} = D_{\max}^{i-k} M_k \frac{B(p, q + i)}{B(p, q + k)}, \quad (7.4a)$$

$$F_i = \alpha D_{\max}^{i+\beta-j} M_j \frac{B(p, q + i + \beta)}{B(p, q + j)} = \alpha D_{\max}^{i+\beta-k} M_k \frac{B(p, q + i + \beta)}{B(p, q + k)}. \quad (7.4b)$$

Es ist also möglich, die Momente und Flüsse ohne Verwendung der unvollständigen Gammafunktion  $\gamma$  auszudrücken. Auf Grund der Definition der B-Funktion, Gl. (7.2), wird lediglich die vollständige Gammafunktion  $\Gamma$  benötigt, deren Berechnung auch für



**Abbildung 7.2** – Mittlere Moment-gewichtete Fallgeschwindigkeiten (links) und deren Verhältnis zu  $\bar{v}_0$  (rechts), analog zu Abb. 3.3, berechnet zu  $C_0 = N = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ,  $L = 5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  und  $q_{\text{init}}$  aus Tab. 7.1.

reelle Argumente weniger aufwändig ist als die von  $\gamma$ . Dies reduziert die Rechenzeit um 50% gegenüber der ZW-Parametrisierung auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung (siehe Kapitel 10.3).

Für die mittleren Moment-gewichteten Fallgeschwindigkeiten erhält man

$$\bar{v}_i = \frac{F_i}{M_i} = \alpha D_{\text{max}}^\beta \frac{B(p, q + i + \beta)}{B(p, q + i)}. \quad (7.5)$$

Abbildung 7.2 zeigt die mittleren Fallgeschwindigkeiten (links) und deren Verhältnis zu  $\bar{v}_0$  (rechts). Wie schon in Abbildung 3.3 für die Parametrisierung auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung gesehen, nehmen die mittleren Fallgeschwindigkeiten für größere Momentenordnung zu. Ebenfalls werden bei Verringerung von  $D_{\text{max}}$  Momente mit Ordnung  $i \leq 1$  im Mittel schneller und Momente mit Ordnung  $i > 1$  langsamer. Im Vergleich zu den  $\bar{v}_i$  auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung verlagern sich Momente mit Ordnung  $i > 3$  schneller und Momente mit Ordnung  $i \leq 3$  langsamer. Dies gilt für alle hier dargestellten  $D_{\text{max}}$ . Die Verhältnisse der Fallgeschwindigkeiten (Abbildung 7.2, rechts) sind kleiner als bei Verwendung des  $\Gamma$ -Verteilungsfunktions-Ansatzes.

Nachdem  $D_{\text{max}}$  als obere Grenze des Tropendurchmessers von außen festgelegt wird, verbleiben drei freie Parameter. Für die Verwendung im Zwei-Momenten-Schema muss einer der Parameter durch die Modellgrößen ausgedrückt werden. Da  $C_0$  die Anzahldichte darstellt und somit prognostiziert werden muss, wird  $q$  als Funktion von  $C_0$  und  $p$  (bzw.  $M_j$  und  $M_k$ ) diagnostiziert. Im verbleibenden Teil dieses Abschnittes werden mögliche Ansätze für eine Diagnosefunktion für  $q$  diskutiert.

In Abbildung 7.1 kann man erkennen, dass sich für größeres  $q$  die Maximalstelle der Verteilungsfunktion in Bereiche größeren Durchmessers verschiebt. Dadurch erhöht

**Tabelle 7.1** – Im Minimierungsprozess gewonnene Parameter der B-Verteilung zu  $N = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  und  $L = 5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$ . Details siehe Text.

$D_{\max}$ [cm]	0,125	0,25	0,5	0,75	1,00
$p_{\text{init}}$	1,365	5,693	12,422	18,866	18,866
$q_{\text{init}}$	0,905	0,962	0,978	0,982	0,982

sich die mittlere Masse des Ensembles, welches durch eine solche Verteilungsfunktion beschrieben wird. Dies legt nahe,  $q$  mit der mittleren Masse wachsen zu lassen.

Um eine Vergleichbarkeit der Anfangsbedingungen bei B- und  $\Gamma$ -Ansatz zu erreichen, wurden diejenigen Parameter  $p_{\text{init}}$  und  $q_{\text{init}}$  ermittelt, welche zu einem gegebenen  $D_{\max}$  und den Anfangsbedingungen  $N = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$  und  $L = 5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  ( $x_{\text{init}} = x_0$  aus Tabelle 4.1) die quadrierten Differenzen der beiden Verteilungsfunktionen minimieren (Tabelle 7.1). Die Ansätze für die Diagnosefunktion stützen sich auf das im Minimierungsprozess gewonnene  $q_{\text{init}}(D_{\max})$ . Um seinen Einfluss auf die Ergebnisse des parametrisierten Modells zu testen, wird der freie Parameter  $q$  als konstant und als lineare bzw. quadratische Funktion der mittleren Masse angesetzt:

$$q(y, D_{\max}) = q_{\text{init}}(D_{\max}), \quad (7.6a)$$

$$q(y, D_{\max}) = q_{\text{init}}(D_{\max}) y, \quad (7.6b)$$

$$q(y, D_{\max}) = q_{\text{init}}(D_{\max}) (ay^2 + by + 0,5), \quad (7.6c)$$

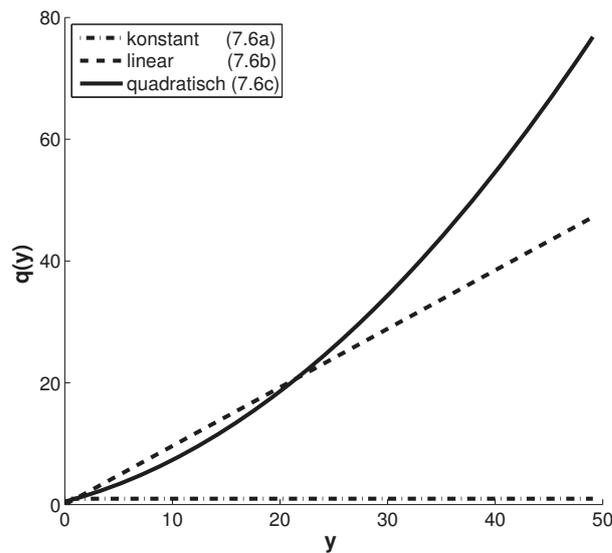
mit  $y = \frac{M_k}{M_j} / \frac{M_{k,\text{init}}}{M_{j,\text{init}}}$  und  $y_{\max} = D_{\max}^{k-j} / \frac{M_{k,\text{init}}}{M_{j,\text{init}}}$  sowie

$$a = \left( y_{\max}^{1,125} - 0,5(1 + y_{\max}) \right) / (y_{\max}^2 - y_{\max}),$$

$$b = \left( 0,5y_{\max}^2 - y_{\max}^{1,125} + 0,5 \right) / (y_{\max}^2 - y_{\max}).$$

Die Konstanten 1,125 und 0,5 sind empirisch für  $j = 0, k = 3$  ermittelt. Eine graphische Darstellung findet sich in Abbildung 7.3. Alle drei Ansätze sind konsistent mit den Anfangsbedingungen: Für eine mittlere Masse, die der des Anfangszustandes entspricht ( $y = 1$ ), beträgt  $q$  gerade  $q_{\text{init}}$ .

Der konstante Ansatz (7.6a) soll im Folgenden der Vollständigkeit halber getestet werden, hat aber zwei Nachteile. Die maximale mittlere Masse des Ensembles, welches die Verteilungsfunktion darstellt, wird umso größer, je kleiner  $p$  wird. Ist  $p < 1$ , so entsteht eine zusätzliche Polstelle der Verteilungsfunktion an  $D = D_{\max}$ . Da eine solche Form der Verteilungsfunktion aus physikalischen Gründen nicht zulässig ist, wird ein Minimalwert von  $p_{\min} = 1$  substituiert. Zudem kann die Lösung der spektralen Bilanzgleichung, welche ein lokales Maximum besitzt, mit dem hier gewählten Wert für  $q$  in der Parametrisierung nicht nachgebildet werden, da  $q = q_{\text{init}} < 1$ .



**Abbildung 7.3** – Diagnostische Verhältnisse für den abhängigen Parameter  $q$ , Gl. (7.6), zu  $D_{\max} = 0,25 \text{ cm}$ .  $y_{\max} = 49,0889$ .

## 7.2. Numerische Ergebnisse

Die nun folgenden numerischen Resultate wurden mit einer adaptierten Version von SED2MOM berechnet. Die mittlere Masse des Anfangszustandes ist  $x_0$  (Tabelle 4.1). Der Fokus dieses Abschnittes liegt auf den Auswirkungen der unterschiedlichen Diagnoseansätze für  $q$ . Vergleiche werden sowohl mit den Ergebnissen der ZW-Parametrisierung aus Kapitel 5 als auch mit der spektralen Referenzlösung angestellt. Daher werden in Abbildung 7.4 nur die Ergebnisse der Parametrisierung auf Grundlage der  $B$ -Verteilungsfunktion dargestellt.

Abbildung 7.4 zeigt die Ergebnisse für  $N$ ,  $L$ ,  $p$  und  $q$  (links) sowie für  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$  (rechts) bei Verwendung von  $D_{\max} = 0,25 \text{ cm}$ . Die drei Spalten jeder Grafik unterscheiden sich in dem für  $q$  benutzten Ansatz. Man erkennt auf den ersten Blick, dass er einen deutlichen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Im Folgenden sollen nun für jede Diagnosefunktion separat die Ergebnisse des parametrisierten Modells diskutiert werden.

**Konstanter Ansatz für  $q$  – Gl. (7.6a):** Betrachtet man den Verlauf der prognostischen Momente, so haben sie Ähnlichkeit mit denen aus Abbildung 5.2 für  $D_{\max} = 0,375 \text{ cm}$  oder  $0,25 \text{ cm}$ , welche auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung berechnet wurden. Die untere Front im Signal für  $L$  ist jedoch stärker ausgeprägt. Dies führt zu einem plötzlichen Einsetzen des Niederschlages, wie es so in Abbildung 5.3 weder für die Referenzlösung noch die Lösung des parametrisierten Modells auftritt.

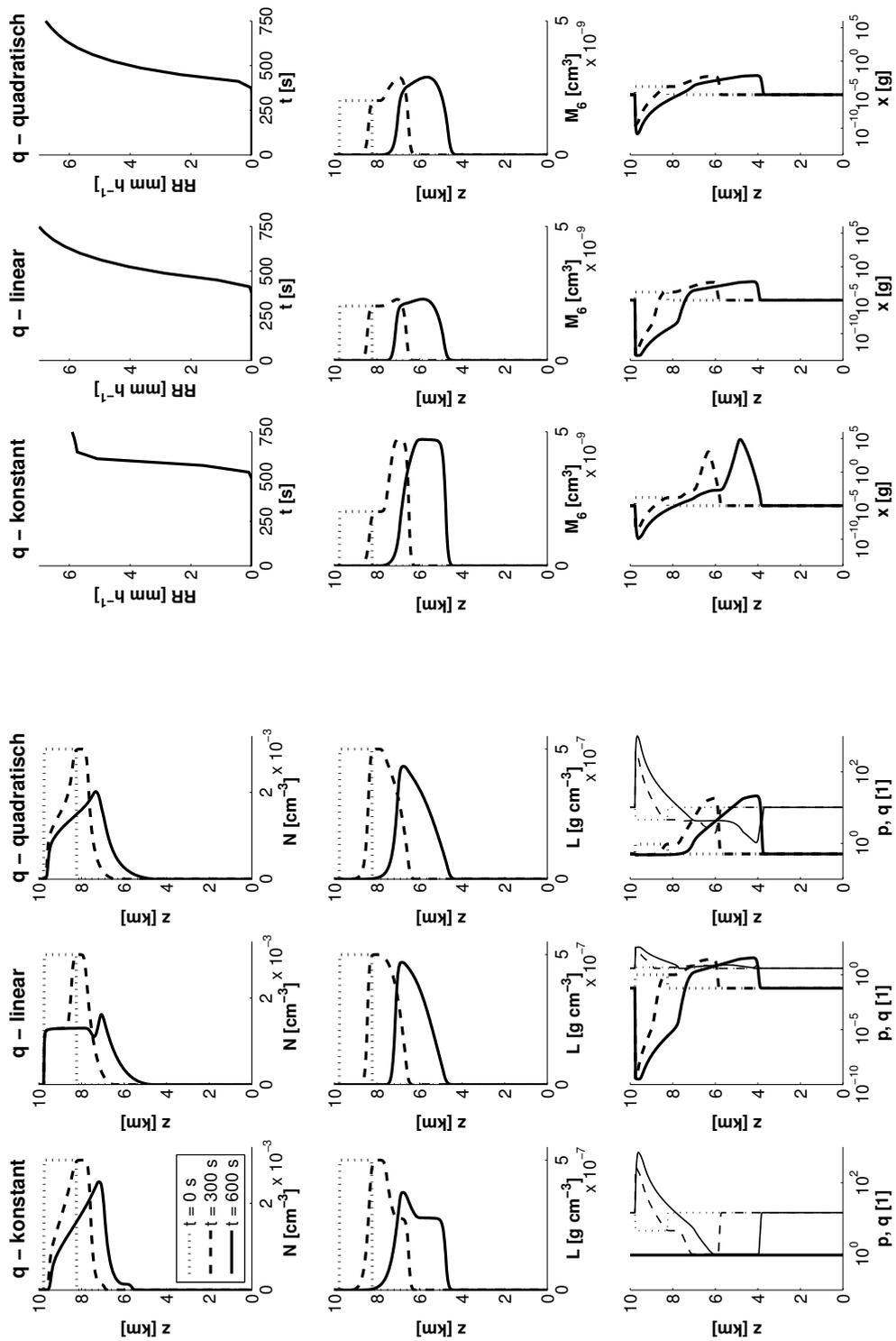


Abbildung 7.4 – Links: Resultate des B-Modells für die prognostischen Momente  $N$  und  $L$  und die in Gl. (7.6) angegebenen diagnostischen Beziehungen für  $q$  (dicke Linien; dünne Linien für  $p$ ). Rechts: Ergebnisse für die abgeleiteten Größen  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$ .

Die Radarreflektivität zeigt ein deutliches Überschießen. Das Verhältnis von maximalem zu anfänglichen Wert beträgt unabhängig von den hier dargestellten Zeitpunkten 2,35. Dies liegt in Bereichen, wie es auch bei der Verwendung der  $\Gamma$ -Verteilung für die oben zitierten  $D_{\max}$  auftritt (Tabelle 5.1). Die mittlere Masse  $x$  ist für den wolkenphysikalischen Kontext deutlich zu groß (bei  $t = 600$  s ist  $\max(x) = 80$  kg) und überschreitet auch die mit der  $B$ -Verteilung theoretisch maximal darstellbare mittlere Masse von  $\frac{\rho_w \pi}{6} D_{\max}^{k-j}$  (hier  $8,18 \cdot 10^{-3}$  g). Dies ist jedoch nur in solchen Höhen der Fall, wo für den Parameter  $p$  der Minimalwert substituiert werden musste. Numerische Experimente zeigen, dass durch die Verwendung eines  $p_{\min} < 1$  die maximale mittlere Masse reduziert wird, jedoch immer noch  $8,18 \cdot 10^{-3}$  g überschreitet. Allerdings führt  $p < 1$  bei diesem Ansatz für  $q$  zu einer Verteilungsfunktion, die im Kontext der Tropfensedimentation nicht physikalisch ist.

**Linearer Ansatz für  $q$  – Gl. (7.6b):** Hier ist auffällig, dass das Signal der Anzahldichte an der Oberkante über weite Strecken konstant ist (für  $t = 600$  s zwischen 7,5 und 10 km). Betrachtet man den Verlauf der mittleren Masse, so ist diese dort sehr klein. Aufgrund des linearen Ansatzes hat  $q$  dort ebenfalls sehr kleine Werte. Zusammen mit  $j = 0$  ist dann das Verhältnis der  $B$ -Funktionen in  $F_0$ , Gl. (7.3b), nahezu konstant (auch bei Variation von  $p$ ). Die so berechneten Flüsse sind ebenfalls nahezu konstant, und somit sind die räumlichen Flussdifferenzen sehr klein.  $M_0$  wird also in diesem Bereich nur geringfügig geändert. Im selben Höhenbereich ist auch der Flüssigwassergehalt konstant und von sehr geringem Wert. Der plötzliche Anstieg von  $L$  bei 7,5 km wird im Gegenzug zu einem abrupten Aussetzen des Niederschlags bei  $t > 750$  s führen. In der Referenzlösung treten keine konstanten Abschnitte der Signale auf. Das Verhalten der prognostischen Momente des parametrisierten Modells kann somit als unphysikalisch klassifiziert werden.

Das Überschießen in  $M_6$  wird mit einem linearen Fit für  $q$  deutlich reduziert. Es gilt unabhängig vom betrachteten Zeitpunkt  $M_{6,\max}/M_{6,\text{init}} = 1,138$ , was noch unter dem Wert für den  $\Gamma$ -Ansatz mit  $D_{\max} = 0,125$  cm liegt (Tabelle 5.1). Die mittlere Masse  $x$  bewegt sich in physikalisch realistischen Wertebereichen und ist beschränkt durch  $x_{\max} = 8,18 \cdot 10^{-3}$  g.

**Quadratischer Ansatz für  $q$  – Gl. (7.6c):** Die quadratische Ansatzfunktion für  $q$  hat einen positiven  $y$ -Achsen-Abschnitt. So wird vermieden, bei sehr kleinen mittleren Massen ein sehr kleines  $q$  zu diagnostizieren. Der positive Effekt dieses Ansatzes wird besonders an Anzahldichte und Flüssigwassergehalt deutlich: Der Signalverlauf an den Oberkanten ist nicht konstant, sondern graduell wie in der Referenzlösung und der Lösung des parametrisierten Modells auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung.

Das Überschießen von  $M_6$  ist etwas stärker ( $M_{6,\max}/M_{6,\text{init}} = 1,45$ ) als für den linearen Ansatz. Die mittlere Masse wird vergleichbar gut reproduziert.

### 7.3. Schlussfolgerungen und Diskussion

Wir haben gesehen, dass es bei einem Zwei-Momenten-Verfahren auf Grundlage der *B*-Verteilung nötig ist, einen freien Parameter (hier  $q$ ) aus den anderen Modellgrößen zu diagnostizieren. Die numerischen Simulationen zeigen, dass die Diagnosefunktion die Ergebnisse des Parametrisierungsmodells stark beeinflusst.

Ein konstanter Ansatz für  $q$  liefert augenscheinlich akzeptable Ergebnisse für die prognostischen Momente. Wie bereits am Ende von Kapitel 7.1 diskutiert, ist er jedoch aus physikalischen Gründen nicht geeignet: Durch die nötige Substitution eines Minimalwertes für  $p$  bewegt sich die mittlere Masse in unphysikalischen Größenbereichen. Bei dem Vergleich von linearem und quadratischem Ansatz für  $q$  sind die teilweise konstanten Signalverläufe von  $N$  bzw.  $L$  und das etwas stärkere Überschießen in  $M_6$  gegeneinander abzuwägen. Auf Grund der physikalischeren Repräsentation der prognostischen Momente wird dem quadratischen Ansatz (7.6c) der Vorzug gegeben. Allerdings ist zu bemerken, dass durch  $q(1) = q_{\text{init}}$  nur eine von drei für eine quadratische Funktion nötigen Bedingungen gegeben ist. In numerischen Experimenten wurde deutlich, dass die Ergebnisse durch eine andere quadratische Ansatzfunktion für  $q$  verändert werden.

Analytische Betrachtungen haben gezeigt, dass die hier ermittelten Verhältnisse  $\bar{v}_i/\bar{v}_0$  kleiner sind als diejenigen auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung. Die Ergebnisse aus Kapitel 5.2 deuten zwar darauf hin, dass die diagnostischen Probleme (Überschießen in  $M_6$  und unrealistisch große  $x$ ) durch ein kleineres Verhältnis der mittleren Fallgeschwindigkeiten reduziert werden, jedoch kann diese Argumentation nicht auf das Modell auf Grundlage der *B*-Verteilung übertragen werden, da die Diagnose von  $q$  einen entscheidenden Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Die Implementierung der *B*-Verteilung in ein Zwei-Momenten-Schema ist also problematisch. Es ist jedoch zu vermuten, dass dieser Ansatz in einem Drei-Momenten-Modell gute Ergebnisse liefert, da dann auch  $q$  ein eigenständiger freier Parameter sein kann. Dies wird von Watkins (2005) unterstützt, welcher die *B*-Verteilung zur Modellierung von Sprühnebel in einem Drei-Momenten-Schema benutzt. In seinen Simulationen kann der Autor keine Unterschiede zwischen den Resultaten der Parametrisierungen auf Grundlage der  $\Gamma$ -Verteilung bzw. der *B*-Verteilung feststellen.

# 8.

---

## Beschreibung von Tropfenkollisionen

---

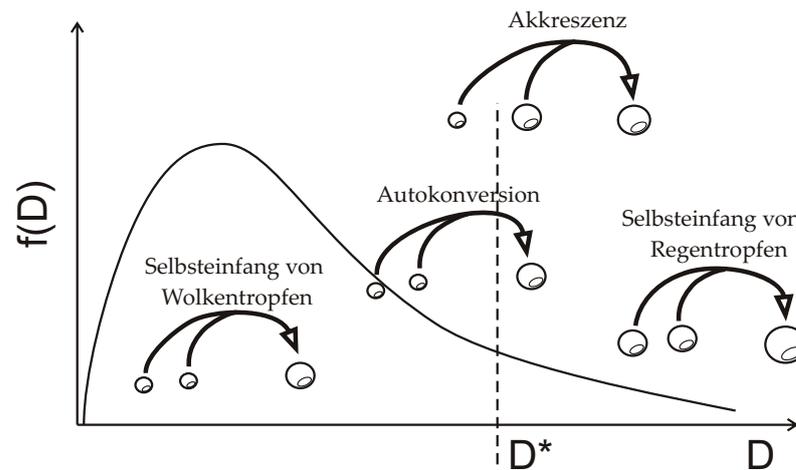
In den vorangegangenen Kapiteln war stets Sedimentation der einzige Prozess, welcher das Hydrometeorensemble modifizierte. Hierfür wurde eine verbesserte Parametrisierung neu entwickelt. In numerischen Wettervorhersage- und Klimamodellen sind jedoch auch die in der Natur vorkommenden Kollisionen zwischen den Hydrometeoren zu berücksichtigen. Diese treten unter anderem auf, da die Hydrometeore unterschiedliche Geschwindigkeiten besitzen (siehe auch Kapitel 1).

In diesem Kapitel sollen nun Kollisionsprozesse am Beispiel von Tropfen betrachtet werden. Nach einer Kollision sind hier vier verschiedene Zustände möglich (Rogers u. Yau, 1989). Die beiden an der Kollision beteiligten Tropfen

1. prallen voneinander ab,
2. verschmelzen kurzzeitig und zerfallen in zwei Tropfen der ursprünglichen Größe,
3. verschmelzen permanent, um einen großen Tropfen zu formen,
4. verschmelzen und zerfallen dann in mehrere kleinere Tropfen.

Des Weiteren können große Tropfen durch hydrodynamische Instabilität *spontan* zerfallen (Srivastava, 1971). Dieser Zerfall wird hier vernachlässigt, da er von geringer Bedeutung ist (Low u. List, 1982a; Hu u. Srivastava, 1995). In diesem Kapitel werden nur die Fälle 3 und 4 betrachtet. Das permanente Verschmelzen nennt man *Koaleszenz*. In der Wolkenphysik bezeichnet man Kollision und anschließende Koaleszenz als *Koagulation*, so dass wir im Folgenden immer von „Koagulation“ zweier Tropfen sprechen werden, wenn Fall 3 gemeint ist. Fall 4 wird kurz als „Zerfall“ bezeichnet.

Für die Beschreibung der Koagulation wird das Tropfenspektrum durch einen Grenzdurchmesser  $D^*$  in zwei *Regimes* oder *Kategorien* aufgeteilt: Tropfen mit einem Durchmesser kleiner als  $D^*$  werden der Wolken-, Tropfen mit einem größeren Durchmesser der Regen-kategorie zugeordnet. Durch Integration über den entsprechenden Spektrumsbereich kann man Momente  $i$ -ter Ordnung der Wolkenkategorie ( $M_{i,c}$ ) und der



Prozess	Index	Stoßpartner	Resultat
Selbsteinfang (Wolkentropfen)	sc,c	W + W	W
Autokonversion	au	W + W	R
Akkreszenz	ac	W + R	R
Selbsteinfang (Regentropfen)	sc,r	R + R	R

**Abbildung 8.1** – Umwandlungsprozesse. W: Wolkentropfen, R: Regentropfen. Im Hintergrund das Spektrum  $f$  im Durchmesser  $D$ .

Regenkategorie ( $M_{i,r}$ ) definieren. Auf diesen beruht das parametrisierte Modell. Der Wert von  $D^*$  ist abhängig vom betrachteten Wolkentyp: Während Beheng u. Doms (1986); Milbrandt u. Yau (2005b); Shipway u. Hill (2012) 80 bis 100  $\mu\text{m}$  verwenden, benutzen Khairoutdinov u. Kogan (2000) in ihrer speziell für maritime Stratocumulus entwickelten Parametrisierung  $D^* = 50 \mu\text{m}$  (siehe Morrison u. Grabowski (2007) für einen Vergleich).

Die Koagulations- und Zerfallsvorgänge ändern nun die Größe der beteiligten Tropfen und somit Anzahl und Masse der Tropfen in den unterschiedlichen Regimes. Bei Koagulationen können – je nach Kategorie der beteiligten Tropfen und des resultierenden Tropfens – mehrere Prozesse unterschieden werden. In Abbildung 8.1 sind die Prozesse skizzenhaft und tabellarisch dargestellt. Man spricht dabei auch von der *Umwandlung* von Wolken- in Regenwasser. Eine Parametrisierung dieser Prozesse muss versuchen, deren Auswirkungen auf  $M_{i,c}$  und  $M_{i,r}$  zu erfassen.

In diesem Kapitel wird zunächst die spektrale Beschreibung der Kollisionsprozesse vorgestellt. Davon ausgehend werden die Änderungsraten der Momente hergeleitet. Es wird aufgezeigt, dass das Konzept eines beschränkten maximalen Tropfendurch-

messers (wie es in Kapitel 3.1 für die Sedimentation vorgestellt wurde) nicht auf Kollisionsprozesse übertragbar ist. Abschließend wird die in Kapitel 9 verwendete und in RAINSHAFT implementierte Kollisionsparametrisierung von Seifert u. Beheng (2001, 2006) vorgestellt.

## 8.1. Spektrale Beschreibung

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen verwenden wir die Tropfenmasse anstelle des Tropfendurchmessers als interne Koordinate der Verteilungsfunktion. Unter Missbrauch der Notation wird auch diese Verteilungsfunktion mit  $f$  bezeichnet. Die Masse des größten Tropfens der Wolkenkategorie mit Durchmesser  $D^*$  nennen wir  $x^*$ .

Die Änderung des Tropfenspektrums durch Kollisionen wird beschrieben durch

$$\partial_t f(x)|_{\text{Koag., Zerf.}} = \frac{1}{2} \int_0^x f(x-x')f(x')K(x-x', x') dx' \quad (8.1a)$$

$$- f(x) \int_0^\infty f(x')K(x, x') dx' \quad (8.1b)$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^{x'} f(x')f(x'')B(x', x'')P(x; x', x'') dx'' dx' \quad (8.1c)$$

$$- f(x) \int_0^\infty f(x')B(x, x') dx', \quad (8.1d)$$

siehe zum Beispiel Doms u. Herbert (1985) für (8.1a), (8.1b) und Hu u. Srivastava (1995) für (8.1c), (8.1d). Die Terme beschreiben für die Klasse der Tropfen mit Masse  $x$ :

- (8.1a)** Zuwachs durch Koagulation zweier Tropfen der Massen  $x'$  und  $x - x'$ ,
- (8.1b)** Verlust durch Koagulation eines Tropfens der Masse  $x$  mit einem anderen Tropfen beliebiger Masse,
- (8.1c)** Zuwachs durch Kollision zweier Tropfen der Massen  $x'$  und  $x''$  mit anschließendem Zerfall, wobei auch Bruchstücke der Masse  $x$  entstehen,
- (8.1d)** Verlust durch Kollision eines Tropfens der Masse  $x$  mit einem anderen Tropfen beliebiger Masse und anschließendem Zerfall.

Der *Koagulationskern*  $K$  und der *Zerfallskern*  $B$  geben die Wahrscheinlichkeit an, dass zwei Tropfen der Massen  $x$  und  $x'$  kollidieren und anschließend verschmelzen bzw.

in mehrere Bruchstücke zerfallen. Hier wird angenommen, dass die Tropfenkollisionen durch unterschiedliche Fallgeschwindigkeiten entstehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x > x'$ .

$$K(x, x') = \pi (r(x) + r(x'))^2 |v_T(x) - v_T(x')| E_{\text{coll}}(x, x') E_{\text{coal}}(x, x') \quad (8.2a)$$

$$B(x, x') = \underbrace{\pi (r(x) + r(x'))^2 |v_T(x) - v_T(x')|}_{=: V} E_{\text{coll}}(x, x') (1 - E_{\text{coal}}(x, x')) \quad (8.2b)$$

$V$  ist das größte Volumen pro Zeiteinheit, in dem der Tropfen mit Masse  $x$  einen Tropfen der Masse  $x'$  einfangen kann, wenn beide Tropfen in ruhender, ungestörter Umgebung fallen. Der größere Tropfen wird daher auch als *Fängertropfen* bezeichnet.

Die Kollisionseffizienz  $E_{\text{coll}}$  ist ein Korrekturfaktor, der angibt, ob die beiden Tropfen auf Grund von Strömungseffekten tatsächlich kollidieren. Sie hängt von der Größe der beiden Tropfen und vom Durchmesser Verhältnis ab. Ist dieses sehr klein, d. h. ist der Fängertropfen viel größer als der Tropfen im Fallweg, so ist die Kollisionseffizienz ebenfalls sehr klein, da der kleinere Tropfen mit der Strömung um der Fängertropfen herumgeleitet wird. Bei wachsendem Durchmesser Verhältnis steigt  $E_{\text{coll}}$  an (Rogers u. Yau, 1989).

Die Koaleszenzeffizienz  $E_{\text{coal}}$  gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die beteiligten Tropfen nach dem Stoß tatsächlich verschmelzen. Sie hängt von der Stoßenergie und der Oberflächenspannungsdifferenz ab (Low u. List, 1982a) und ist gemeinhin kleiner als 1 (Beard u. Ochs, 1984). Die Bestimmung von  $E_{\text{coll}}$  und  $E_{\text{coal}}$  erfolgt über Experimente und hochdetaillierte Modellrechnungen.

Ein weiterer Bestandteil der Zerfallsintegrale ist die *Bruchstückverteilungsfunktion*  $P$ . Durch  $P(x; x', x'') dx$  wird die mittlere Anzahl von Bruchstücken angegeben, die im Intervall  $[x, x + dx]$  durch Kollision von Teilchen der Massen  $x'$  und  $x''$  entstehen. Die Bruchstückverteilungsfunktion wird aus experimentellen Daten rekonstruiert (Low u. List, 1982a,b). Durch die Forderungen „sinnvolle Bruchstückgrößen“, „Massenerhaltung“ und „mehr als zwei Bruchstücke bei einer Kollision“ können drei Bedingungen hergeleitet werden, welche die Bruchstückverteilungsfunktion erfüllen muss:

$$P(x; x', x'') = 0 \quad \text{für } x \geq x' + x'', \quad (8.3a)$$

$$\int_0^{x'+x''} x P(x; x', x'') dx = x' + x'', \quad (8.3b)$$

$$\int_0^{x'+x''} P(x; x', x'') dx \geq 2. \quad (8.3c)$$

Für die numerische Umsetzung des spektralen Koagulations- und Zerfallsmodells in RAINSHAFT werden die Gleichungen (8.1) benutzt.  $E_{\text{coll}}$  wird nach Hall (1980, Tabelle 1) berechnet und  $E_{\text{coal}}$  nach Seifert et al. (2005) als Kombination der Koaleszenzeffizienzen

von Low u. List (1982a) und Beard u. Ochs (1995) angesetzt.  $P$  wird nach Low u. List (1982b) verwendet.

Die Änderungsraten von  $N_c$  oder  $N_r$  durch Koagulation bzw. Zerfall erhält man, indem man Gl. (8.1) über das Intervall  $[0, x^*]$  oder  $[x^*, \infty]$  integriert. Analog ergeben sich die entsprechenden Änderungsraten von  $L_c$  oder  $L_r$ , wenn man Gl. (8.1) zuvor mit  $x$  multipliziert (Raten für beliebige Momente finden sich in Beheng u. Doms, 1986). Im Folgenden werden wir nur die Änderungsraten für Koagulationsprozesse betrachten, da der zur Berechnung der Änderungsraten für Zerfallsprozesse benötigte Ausdruck für die Bruchstückverteilungsfunktion sehr kompliziert ist (Low u. List, 1982b).

Durch die Wahl der Integrationsgrenzen kann man die Änderungsraten bezüglich der einzelnen Umwandlungsprozesse (Abbildung 8.1) aufschlüsseln. Diese bezeichnet man dann als *Umwandlungsrate* für den jeweiligen Prozess. Hierzu passt man die Integralgrenzen der integrierten Form von Gl. (8.1a) und (8.1b) so an, dass die jeweiligen Stoßpartner aus den entsprechenden Tropfenbereich stammen. Somit ergibt sich unter Vernachlässigung der zu Null verschwindenden Terme:

### Selbsteinfang von Wolkentropfen

$$\partial_t N_{c|sc,c} = -\frac{1}{2} \int_0^{x^*} \int_0^{x^*-x} f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.4)$$

### Autokonversion

$$\partial_t N_{c|au} = -\int_0^{x^*} \int_{x^*-x}^{x^*} f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.5a)$$

$$\partial_t L_{c|au} = -\int_0^{x^*} \int_{x^*-x}^{x^*} x' f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.5b)$$

$$\partial_t N_{r|au} = -\frac{1}{2} \partial_t N_{c|au} \quad (8.5c)$$

$$\partial_t L_{r|au} = -\partial_t L_{c|au} \quad (8.5d)$$

### Akkreszenz

$$\partial_t N_{c|ac} = -\int_{x^*}^{\infty} \int_0^{x^*} f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.6a)$$

$$\partial_t L_{c|ac} = -\int_{x^*}^{\infty} \int_0^{x^*} x' f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.6b)$$

$$\partial_t L_{r|ac} = -\partial_t L_{c|ac} \quad (8.6c)$$

### Selbsteinfang von Regentropfen

$$\partial_t N_{r|sc,r} = -\frac{1}{2} \int_{x^*}^{\infty} \int_{x^*}^{\infty} f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \quad (8.7)$$

## 8.2. Parametrisierte Beschreibung

Für die Parametrisierung ist es notwendig, die Umwandlungsraten auf die Momente zurückzuführen. Hierfür wird nach Seifert u. Beheng (2001) eine Approximation für den Koagulationskern  $\mathcal{K}$  eingeführt (Long, 1974). Dabei ist nach der Größe der beteiligten Tropfen zu unterscheiden:

$$\mathcal{K}(x, x') = \begin{cases} k_c(x^2 + x'^2), & x, x' < x^*, \\ k_r(x + x'), & \text{sonst,} \end{cases} \quad (8.8)$$

mit  $k_c = 9,44 \cdot 10^9 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-2} \text{ s}^{-1}$  und  $k_r = 5,78 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

### Selbsteinfang von Wolkentropfen

$$\partial_t N_{c|sc,c} = -\frac{1}{2} \int_0^{x^*} \int_0^{x^*-x} f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \quad (8.9)$$

### Autokonversion

$$\begin{aligned} \partial_t N_{c|au} &= - \int_0^{x^*} \int_{x^*-x}^{x^*} f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \\ &= -2k_c N_c M_{6,c} - 2\partial_t N_{c|sc,c} \end{aligned} \quad (8.10a)$$

$$\partial_t L_{c|au} = - \int_0^{x^*} \int_{x^*-x}^{x^*} x' f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \quad (8.10b)$$

$$\partial_t N_{r|au} = -\frac{1}{2} \partial_t N_{c|au} \quad (8.10c)$$

$$\partial_t L_{r|au} = -\partial_t L_{c|au} \quad (8.10d)$$

### Akkreszenz

$$\begin{aligned} \partial_t N_{c|lac} &= - \int_{x^*}^{\infty} \int_0^{x^*} f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \\ &= -k_r L_c N_r - k_r L_r N_c \end{aligned} \quad (8.11a)$$

$$\begin{aligned}\partial_t L_{c|ac} &= - \int_{x^*}^{\infty} \int_0^{x^*} x' f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \\ &= k_r M_{6,c} N_r + k_r L_c L_r\end{aligned}\quad (8.11b)$$

$$\partial_t L_{r|ac} = -\partial_t L_{c|ac} \quad (8.11c)$$

### Selbsteinfang von Regentropfen

$$\begin{aligned}\partial_t N_{r|sc,r} &= -\frac{1}{2} \int_{x^*}^{\infty} \int_{x^*}^{\infty} f(x) f(x') \mathcal{K}(x, x') dx' dx \\ &= -k_r N_r L_r\end{aligned}\quad (8.12)$$

Auf diesen Umwandlungsraten baut die Parametrisierung von Seifert u. Beheng (2001) auf, welche im RAINSHAFT-Modell verwendet wird (Kapitel 8.4). Die Berechnung der Raten (8.10a) und (8.11b) benötigt auf Grund der Präsenz des nicht-prognostischen Moments  $M_{6,c}$  weitere Schließungsbedingungen wie zum Beispiel Annahmen über die Form von  $f$ .

Neben dem Ansatz von Long (1974), Gl. (8.8), existieren noch weitere Approximationen des Koagulationskerns: Murakami (1990) zum Beispiel nähert die Differenz der Tropfengeschwindigkeiten  $|v_T(x) - v_T(x')|$  in der Umwandlungsrate für  $L$  durch  $0,2\bar{v}_3$ , während Lüpkes et al. (1989) verschiedene Approximationen von  $K$  für verschiedene Raten ansetzen.

### 8.3. Parametrisierte Beschreibung mit $x_{\max} < \infty$

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass durch die Einführung eines endlichen maximalen Tropfendurchmessers die Parametrisierung der Tropfensedimentation verbessert wird. Im Folgenden wird der Versuch geschildert, das Konzept einer endlichen maximalen Tropfenmasse  $x_{\max}$  auf die Umwandlungsraten zu übertragen. Da diese Herangehensweise keine Tropfen mit Masse größer als  $x_{\max}$  erlaubt, muss nach dem Stoß zweier Tropfen ein Zerfall stattfinden, wenn deren Gesamtmasse diese Schranke übersteigt. Der Einfachheit halber wird ein Zerfall in  $n$  gleich große Bruchstücke angenommen, welcher die Bedingungen (8.3) erfüllt:

$$P(x; x', x'') = n \delta\left(x - \frac{x' + x''}{n}\right), \quad n \geq 2. \quad (8.13)$$

Die entstehenden Tropfen fallen in die Regenkatgorie, falls  $n < x_{\max}/x^*$ . Dies entspricht für  $D^* = 80 \mu\text{m}$  der Bedingung  $n < 3,73 \cdot 10^6 \text{g}^{-1} x_{\max}$ , welche als gegeben vorausgesetzt werden kann.  $N_c$  bzw.  $L_c$  werden also durch den Zerfall nicht beeinflusst. Der Koagulationskern  $K$  ist wieder allgemein gehalten. Damit ergeben sich folgende Umwandlungsraten:

**Selbsteinfang von Wolkentropfen** wie in Gl. (8.9).

**Autokonversion** wie in Gl. (8.10).

**Akkreszenz**

$$\partial_t N_{c|ac} = - \int_0^{x^*} \int_{x^*}^{x_{\max}-x} f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.14a)$$

$$\partial_t L_{c|ac} = - \int_0^{x^*} \int_{x^*}^{x_{\max}-x} x f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.14b)$$

$$\partial_t L_{r|ac} = -\partial_t L_{c|ac} \quad (8.14c)$$

**Zerfall durch Akkreszenz und Überschreitung von  $x_{\max}$**

$$\partial_t N_{c|ac} = - \int_0^{x^*} \int_{x_{\max}-x}^{x_{\max}} f(x)f(x')B(x,x') dx' dx \quad (8.15a)$$

$$\partial_t L_{c|ac} = - \int_0^{x^*} \int_{x_{\max}-x}^{x_{\max}} x' f(x)f(x')B(x,x') dx' dx \quad (8.15b)$$

$$\partial_t N_{r|ac} = -(n-1) \partial_t N_{c|ac} \quad (8.15c)$$

$$\partial_t L_{r|ac} = -\partial_t L_{c|ac} \quad (8.15d)$$

**Selbsteinfang von Regentropfen**

$$\partial_t N_{r|sc,r} = -\frac{1}{2} \int_{x^*}^{x_{\max}-x^*} \int_{x^*}^{x_{\max}-x} f(x)f(x')K(x,x') dx' dx \quad (8.16)$$

**Zerfall durch Selbsteinfang von Regentropfen und Überschreitung von  $x_{\max}$**

$$\partial_t N_{r|sc,r} = +\frac{n-2}{2} \int_{x^*}^{x_{\max}} \int_a^{x_{\max}} f(x)f(x')B(x,x') dx' dx \quad (8.17)$$

$$a = \max\{x_{\max} - x, x^*\}$$

Zur Parametrisierung (d. h. der Rückführung der Raten auf die Momente) werden die Spektren für Wolken- und Regentropfen jeweils mit einer eigenen Exponentialverteilung modelliert (siehe zum Beispiel Seifert u. Beheng, 2001). Zur Vereinfachung wird  $E_{coal}$  als Sprungfunktion angesetzt: Tropfenpaare mit einer Gesamtmasse kleiner als  $x_{\max}$  koagulieren immer, während sie im anderen Fall zerplatzen.

Es stellt sich heraus, dass durch parameterabhängige Integrationsgrenzen, zum Beispiel in Gl. (8.15a), (8.16) und (8.17), keine geschlossenen Ausdrücke für die Integrale gefunden werden können. Daher müssen sie zur Berechnung der Umwandlungsraten explizit ausgewertet werden. Dies bedingt die Kenntnis der Verteilungsparameter  $n_{0,c}$ ,  $n_{0,r}$  und  $\lambda_c$ ,  $\lambda_r$ . Deren Berechnung ist zeitaufwändig und wird in der numerischen Umsetzung nach Berücksichtigung jedes Koagulationsprozesses nötig.

Dieser Ansatz ist daher nicht praktikabel und wird nicht weiter verfolgt.

## 8.4. Parametrisierte Beschreibung nach Seifert u. Beheng (2001, 2006)

Zum Schluss seien kurz die Parametrisierungen von Koagulation und Zerfall nach Seifert u. Beheng (2001, 2006) in der Form vorgestellt, wie sie in RAINSHAFT implementiert sind. Die Trennmasse zwischen Wolken- und Regenregime beträgt  $x^* = 2,68 \cdot 10^{-7}$  g.

Die Koagulation von Tropfen wird mit den in Kapitel 8.2 angegebenen Gleichungen approximiert. Teilweise werden sie in modifizierter Form verwendet:

$$\partial_t N_{c|sc,c} = -2k_c L_c^2 - \partial_t N_{c|au}, \quad (8.9)$$

$$\partial_t N_{c|au} = \frac{2}{x^*} \partial_t L_{c|au}, \quad \text{RAINSHAFT: falls } \tau < 0,99, \quad (8.10a)$$

$$\partial_t N_{c|ac} = \frac{1}{x_c} \partial_t L_{c|ac}, \quad (8.11a)$$

$$\partial_t L_{c|au} = -\frac{8k_c}{20 x^*} L_c^2 x_c^2 \left( 1 + \frac{\Phi_{au}(\tau)}{(1-\tau)^2} \right), \quad \text{RAINSHAFT: falls } \tau < 0,99, \quad (8.10d)$$

$$\partial_t L_{r|ac} = k_r L_c L_r \Phi_{ac}(\tau). \quad (8.11c)$$

Hierbei wird auf zwei empirisch angepasste Funktionen,  $\Phi_{au}$  und  $\Phi_{ac}$ , zurückgegriffen. Deren Argument  $\tau = L_r/L$  ist eine Kenngröße für den Anteil von Regenwasser. Für Details siehe Seifert u. Beheng (2001).

Zur Modellierung des Zerfalls wird angenommen, dass durch ihn nur der Regenanteil der Anzahldichte,  $N_r$ , modifiziert wird.

$$\partial_t N_{r|br} = - (10(\bar{D}_{03,r} - \bar{D}_{eq}) + 1) \partial_t N_{r|sc,r}, \quad \text{RAINSHAFT: falls } \bar{D}_{03,r} > 0,03 \text{ cm} \quad (8.19)$$

$\bar{D}_{eq} = 0,09$  cm ist der mittlere Durchmesser der Tropfen in einem Gleichgewichtszustand, wie er sich durch Koagulation und Zerfall nach einer gewissen Zeit unabhängig von den Anfangsbedingungen einstellt (Seifert u. Beheng, 2006). Hiervon abweichend ist in RAINSHAFT  $\bar{D}_{eq} = 0,11$  cm gesetzt. Dies ist der Gleichgewichts-Durchmesser, welcher von der SB-Parametrisierung in der diagnostischen Beziehung für  $\mu$ , Gl. (3.15b), verwendet wird.



# 9.

---

## Ergebnisse mit Tropfenkollisionen

---

In diesem Kapitel wird die nur Sedimentation beinhaltende Modellkonfiguration (Kapitel 5) um die in Kapitel 8 vorgestellten Prozesse Koagulation und Zerfall erweitert. Durch deren Parametrisierung entsteht eine zusätzliche Quelle von Abweichungen zwischen den Ergebnissen des parametrisierten Modells und der Referenzlösung.

Zunächst betrachten wir, um die Wirkung der Prozesse deutlich zu machen, die Entwicklung eines Wolkentropfenspektrums. Wir werden sehen, dass in diesem Fall der Einfluss der Kollisionsprozesse und der Einfluss der Sedimentation auf das Tropfensemble von gleicher Größenordnung sind. Weiterhin übt für kleine mittlere Tropfenmassen die Wahl der Sedimentationsgeschwindigkeit einen großen Einfluss auf die wirkenden Umwandlungsraten nach Seifert u. Beheng (2006) aus. Hierdurch sind die Ergebnisse der parametrisierten Modelle, welche auf dem Geschwindigkeitsansatz nach Kessler (1969) aufbauen ( $WL_0$ ,  $WL_3$ ,  $ZW$ ,  $MY$ ), mangelhaft. Daher wird in diesem Abschnitt darauf verzichtet, wie in Kapitel 5 ein optimales  $D_{\max}$  zu bestimmen sowie eine Rangfolge der Sedimentationsparametrisierungen aufzustellen.

Im zweiten Teil des Kapitels wird der Frage nachgegangen, wie sich die Evolution eines Regentropfenspektrums im Vergleich zum Sedimentations-Fall (bei Verwendung des Upstream-Advektionsschemas, Kapitel 5.3) ändert, wenn zusätzlich Koagulation und Zerfall wirken. Unter diesen Anfangsbedingungen ist die Sedimentation der einflussreichste Prozess. Es wird untersucht, ob der Optimalwert für  $D_{\max}$  in der  $ZW$ -Parametrisierung und die Rangfolge der Sedimentationsparametrisierungen bei Hinzunahme der anderen Prozesse unverändert bleiben. Eine positive Antwort hierauf bedeutet, dass man bei den hier gewählten Anfangsbedingungen von der Güte der Sedimentationsparametrisierung im Sedimentations-Fall auf die Güte in einem Modell mit allen Prozessen schließen kann.

Zur Vereinfachung werden folgende Abkürzungen benutzt: S (Sedimentation), SC (S mit Koagulation, engl. *Coagulation*) sowie SCB (SC mit Zerfall, engl. *Breakup*).

## 9.1. Entwicklung eines Wolkentropfenspektrums

In diesem Abschnitt wird als Anfangsbedingung ein Wolkentropfenspektrum vorgegeben (Tabelle 4.2). Im Unterschied zum bisher verwendeten Regentropfenspektrum existieren zu Beginn keine Tropfen mit einem Durchmesser über  $80 \mu\text{m}$ . Dementsprechend werden auch die Anfangsbedingungen des parametrisierten Modells aufgesetzt: Nur die Wolkenanteile der Momente haben einen nicht-verschwindenden Wert. Wie in Kessler (1969); Ferrier (1994); Cohard u. Pinty (2000) wird angenommen, dass sie nicht sedimentieren, da die Fallgeschwindigkeit der Wolkentropfen sehr gering ist. Die alleinig sedimentierenden Regenanteile der prognostischen Momente müssen sich also erst durch Umwandlungsprozesse bilden. Aus diesem Grund werden bei diesen Anfangsbedingungen nur die Prozesskombinationen Sedimentation und Koagulation (SC) sowie Sedimentation, Koagulation und Zerfall (SCB) betrachtet und die Laufzeit des Modells auf  $2000 \text{ s}$  erhöht.

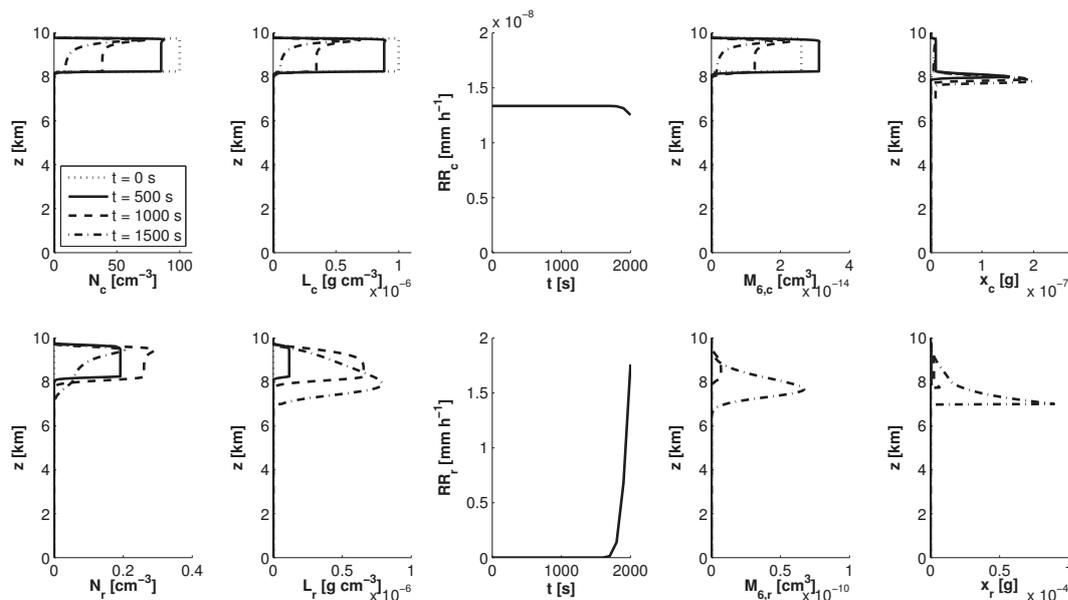
Sowohl für das spektrale als auch das parametrisierte Modell zeigt sich, dass sich die numerischen Resultate im SC- und SCB-Fall nur geringfügig unterscheiden. In der Parametrisierung wird Zerfall, Gl. (8.19), erst bei  $\bar{D}_{03,r} > 0,03 \text{ cm}$  berechnet. Diese Schranke entspricht einer mittleren Masse von  $x_r = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ g}$ , welches um mehrere Größenordnungen größer ist als  $x^* = 2,68 \cdot 10^{-7} \text{ g}$ . Das spektrale Modell benutzt für Tropfen mit Durchmessern unter  $D^*$  eine Koaleszenzeffizienz von über 80% (Seifert et al., 2005, Abb. 3). Der Zerfall von Tropfen spielt also bei einem gering ausgebildeten Regenregime eine untergeordnete Rolle. Daher werden die Ergebnisse des Referenzmodells und der Einfluss der verschiedenen Sedimentationsparametrisierungen hier nur im SC-Fall dargestellt.

### 9.1.1. Ergebnisse des spektralen Modells

Abbildung 9.1 zeigt die Auswirkungen der Koagulation auf ein Tropfenspektrum, dem anfänglich nur Wolkentropfen angehören, anhand der Größen  $N$ ,  $L$ ,  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$ ; jeweils für die Wolken- und die Regenategorie. Zunächst diskutieren wir die Entwicklung von  $N$  und  $L$ , um danach auf deren Umwandlungsraten einzugehen. Anschließend werden die restlichen Größen besprochen.

In den Verläufen der Momente  $N$  und  $L$  der Wolken- und der Regenategorie ist erkennbar, dass über den Fallgeschwindigkeitsansatz nach Beard (1976) Regentropfen eine höhere Fallgeschwindigkeit als Wolkentropfen zugewiesen wird:  $N_r$  und  $L_r$  werden durch die Sedimentation deutlich nach unten verlagert, wohingegen sich die Position der Signale von  $N_c$  und  $L_c$  kaum ändert.

Die Anzahldichte der Wolkenategorie,  $N_c$ , nimmt zeitlich und nach unten hin ab. Dies geschieht aus zwei Gründen. Zum einen wird durch Koagulationsprozesse die Wolkentropfenanzahl immer verringert. Zum anderen ist in der Anfangsphase des Modells eine Tropfenkollision an einer festen Höhe und zu einem festen Zeitpunkt



**Abbildung 9.1** – Ergebnisse des spektralen Referenzmodells für Sedimentation und Koagulation zu verschiedenen Zeitpunkten (Linientypen), jeweils für den Wolken- (oben) und den Regenanteil (unten). Zur Interpretation von  $RR_c$  siehe Text.

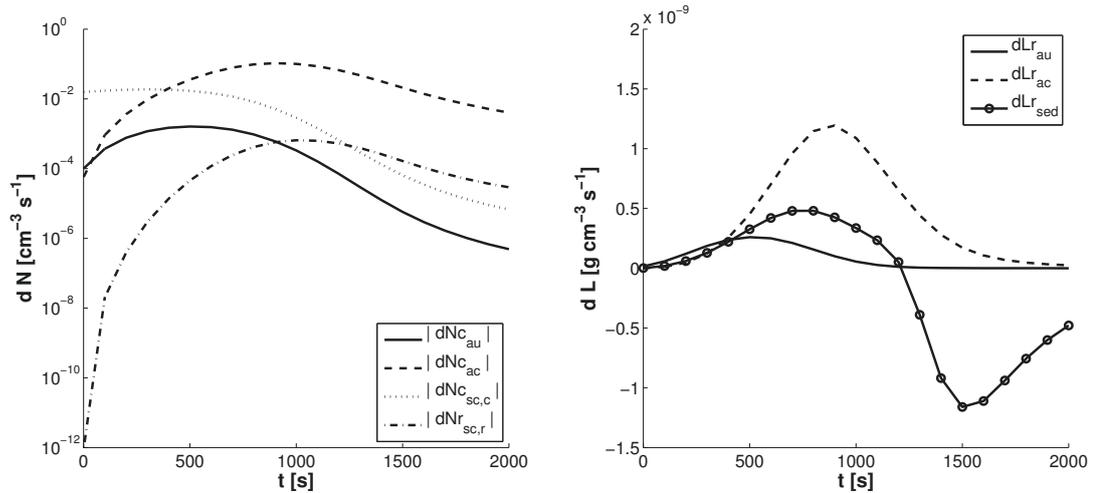
umso wahrscheinlicher, je dicker die darüberliegende Wolkenschicht ist und je mehr Zeit seit Beginn des Modells verstrichen ist. Es können dann Tropfen aus einem größeren Durchmesserintervall dieses Höhenniveau erreicht haben.

Der Wolkenanteil des Flüssigwassergehaltes,  $L_c$ , zeigt dasselbe zeitliche und räumliche Verhalten wie  $N_c$ . Die Abnahme des Flüssigwassergehaltes ist jedoch hier darin begründet, dass durch die stattfindenden Koagulationen die Durchmesser der entstehenden Tropfen den Wert  $D^*$  überschreiten und dann zur Regenkategorie zählen. Dies geschieht nur durch Autokonversion und Akkreszenz.

Die Anzahldichte der Regenkategorie,  $N_r$ , steigt bis zum Zeitpunkt  $t = 1000$  s an und nimmt dann wieder ab. Die Bildung von Regentropfen schlägt sich in einer steten Erhöhung von  $L_r$  nieder. Nur im oberen Wolkenbereich nimmt  $L_r$  nach  $t = 1000$  s durch Sedimentation ab.

Diese Beobachtungen wollen wir nachvollziehen, indem wir den Einfluss der verschiedenen Koagulationsprozesse auf  $N$  und  $L$  betrachten. Abbildung 9.2 zeigt den zeitlichen Verlauf der Umwandlungsraten, Gl. (8.4) – (8.7), sowie der Massensedimentationsrate an der Unterkante der anfänglichen Wolke.

Wir betrachten zunächst die Wirkung der Umwandlungsprozesse auf die Anzahldichte. Zu Beginn ist Selbsteinfang von Wolkentropfen der dominierende Prozess. Durch ihn wird die Anzahl der Wolkentropfen abgebaut. Mit der Zeit nimmt die Autokonversi-



**Abbildung 9.2** – Änderungsraten bezüglich der einzelnen Prozesse für Anzahldichte  $N$  (links) und Flüssigwassergehalt  $L$  (rechts) in  $z_u = 8,25$  km für das spektrale Referenzmodell (SC-Fall). Wegen der notwendigen logarithmischen Skalierung der  $y$ -Achse bei  $dN$  sind dort die Beträge der Raten dargestellt.

onsrate zu, da durch den Selbsteinfang mehr größere Wolkentropfen produziert werden, welche durch Koagulation mit ihresgleichen zu Regentropfen werden können. Sind dann Regentropfen vorhanden, so wird eine immer größere Anzahl von Wolkentropfen durch Akkreszenz abgebaut. Akkreszenz erhöht die Anzahl der Regentropfen nicht, dies geschieht nur durch Autokonversion. Verringert wird die Anzahl der Regentropfen nur durch Selbsteinfang. Dieser ist zunächst gering, da für diesen Prozess erst Regentropfen vorhanden sein müssen. Die Selbsteinfangrate erreicht bei  $t = 1000$  s ihr Maximum. Die Autokonversion, durch welche sich die Regentropfenanzahl erhöht, kann den Verlust durch Selbsteinfang nicht ausgleichen. Daher nimmt die Anzahl der Regentropfen nach diesem Zeitpunkt ab (Abbildung 9.1).

Der Flüssigwassergehalt eines Regimes wird nur durch Akkreszenz und Autokonversion geändert. Hierbei ist der Verlust des Wolkentropfen- der Gewinn des Regentropfenregimes, siehe Gl. (8.5d) und (8.6c). Zu Beginn dominiert die Autokonversion die Umwandlung von Wolken- in Regenwasser. Sobald nach einer gewissen Zeit Regentropfen vorhanden sind, wird Wolkenwasser hauptsächlich durch Akkreszenz abgebaut. Beide Prozesse verlieren mit dem Rückgang von Wolkenwasser an Bedeutung.

Zuletzt sei noch auf die Massensedimentationsrate eingegangen, welche nur den Regenanteil beeinflusst. Zunächst ist die Rate positiv, da von oben aus der Anfangswolke Regentropfen in das Niveau  $z = z_u$  fallen. Ab  $t = 1250$  s fallen mehr Regentropfen aus dem Niveau  $z_u$  nach unten als von oben einfallen, die Sedimentationsrate ist dann also negativ. Die Umwandlungsraten sind bei den hier gewählten Anfangsbedingungen von der selben Größenordnung wie die Sedimentationsrate.

**Tabelle 9.1** – Unterschiede zwischen  $RR_r$  und  $x_r$  im SC- und im SCB-Fall.

	SC	SCB
$\max RR_r$ [mm h <sup>-1</sup> ]	1,7	1,4
$\max x_r(1500\text{ s})$ [g]	$9 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$

Abschließend wenden wir uns den restlichen Größen des spektralen Modells aus Abbildung 9.1 zu, welche in den Betrachtungen noch fehlen.

Aus den Signalen von  $N_c$  und  $L_c$  ist ersichtlich, dass die Wolkentropfen die Höhe  $z = 5,75$  km, an der die Regenrate gemessen wird, zum Zeitpunkt  $t = 2000$  s noch nicht erreicht haben. Die sich ergebende Niederschlagsrate ist also eine Auswertung der vorgeschriebenen Minimalwerte von  $N_c$  und  $L_c$ , die aufgrund der geringen Größenordnung von  $1 \cdot 10^{-8}$  mm h<sup>-1</sup> vernachlässigbar ist. Sie nimmt mit der Zeit ab, da durch die stattfindenden Koagulationen einige der entstehenden Tropfen in die Regenkategorie fallen. Der Niederschlag der Regentropfen,  $RR_r$ , setzt bei ca.  $t = 1700$  s ein und erreicht innerhalb der simulierten Zeit einen Wert von  $1,4$  mm h<sup>-1</sup>. Dies ist später und geringer als im Sedimentations-Fall (Kapitel 5.1), da hier die Tropfen der Regenkategorie nicht schon von Beginn an im Modell vorhanden sind.

Die mittlere Masse  $x_c$  und die Reflektivität  $M_{6,c}$  der Wolkenkategorie zeigen im Bereich der Anfangswolke ein ähnliches Verhalten. Sie nehmen zunächst zu, da durch Selbsteinfang große Wolkentropfen entstehen. Im weiteren zeitlichen Verlauf nimmt die mittlere Masse auf Grund der Umwandlungsprozesse ab (hier schwer sichtbar), da auf Grund von Akkreszenz und Autokonversion große Wolkentropfen abgebaut werden und kleine Wolkentropfen auf Grund der für sie sehr kleinen Werten des Koagulationskerns  $K$ , Gl. (8.2a), von Kollisionen nicht betroffen sind. Die Verringerung der mittleren Masse zieht auch eine Reduktion der Reflektivität nach sich. Unterhalb der Anfangswolke befinden sich auf Grund der wirkenden Sedimentation die größten Wolkentropfen mit einer maximalen Masse von  $x^* = 2,68 \cdot 10^{-7}$  g.

Analog zu  $L_r$  nimmt der Regenanteil der Reflektivität,  $M_{6,r}$ , mit der Zeit zu. Die Zunahme ist hier aber deutlicher als bei  $L_r$ , da bei  $M_{6,r}$  die Tropfengröße zur sechsten Potenz eingeht und größere Tropfen so verstärkt ins Gewicht fallen. Die mittlere Masse  $x_r$  der Regenkategorie erhöht sich mit der Zeit stark, da immer größere Tropfen gebildet werden.

Zum Abschluss sei in Tabelle 9.1 kurz auf die geringen Unterschiede zwischen den Resultaten im SC- und im SCB-Fall eingegangen. Sie manifestieren sich am deutlichsten in der Regenrate und der maximalen mittleren Masse des Regenregimes. Das spektrale Modell gibt also den physikalischen Sachverhalt wieder, dass Niederschlagsrate und mittlere Masse des Regenregimes kleiner sind, wenn der Zerfall von Tropfen mitbetrachtet wird.

### 9.1.2. Ergebnisse der parametrisierten Modelle

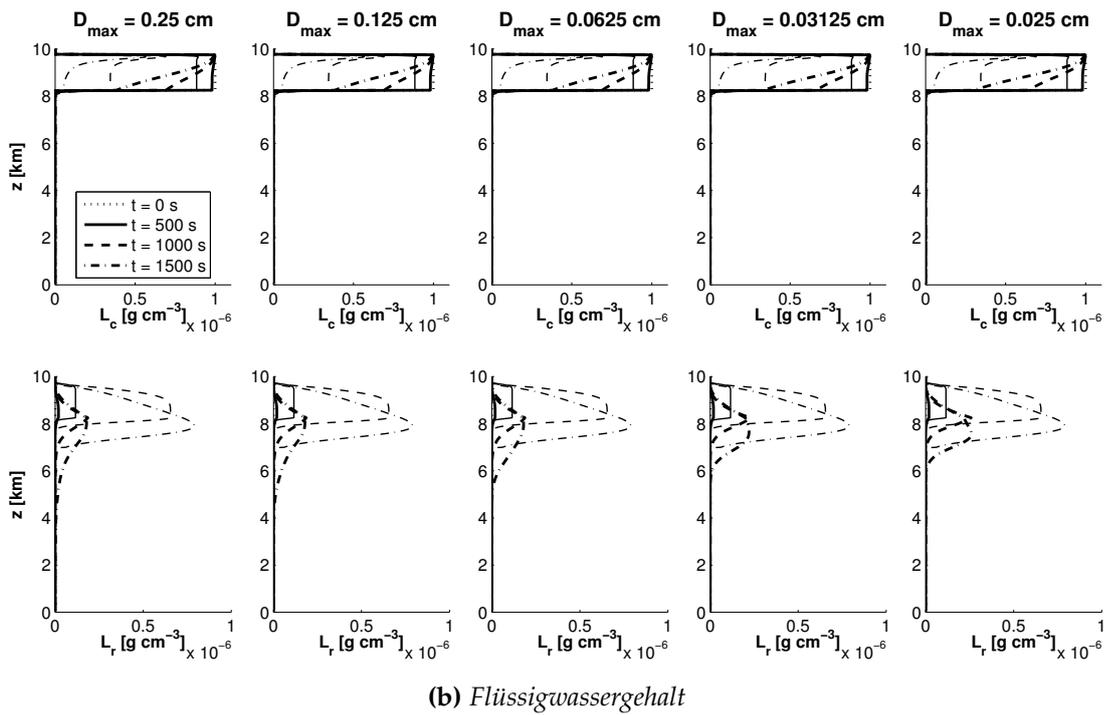
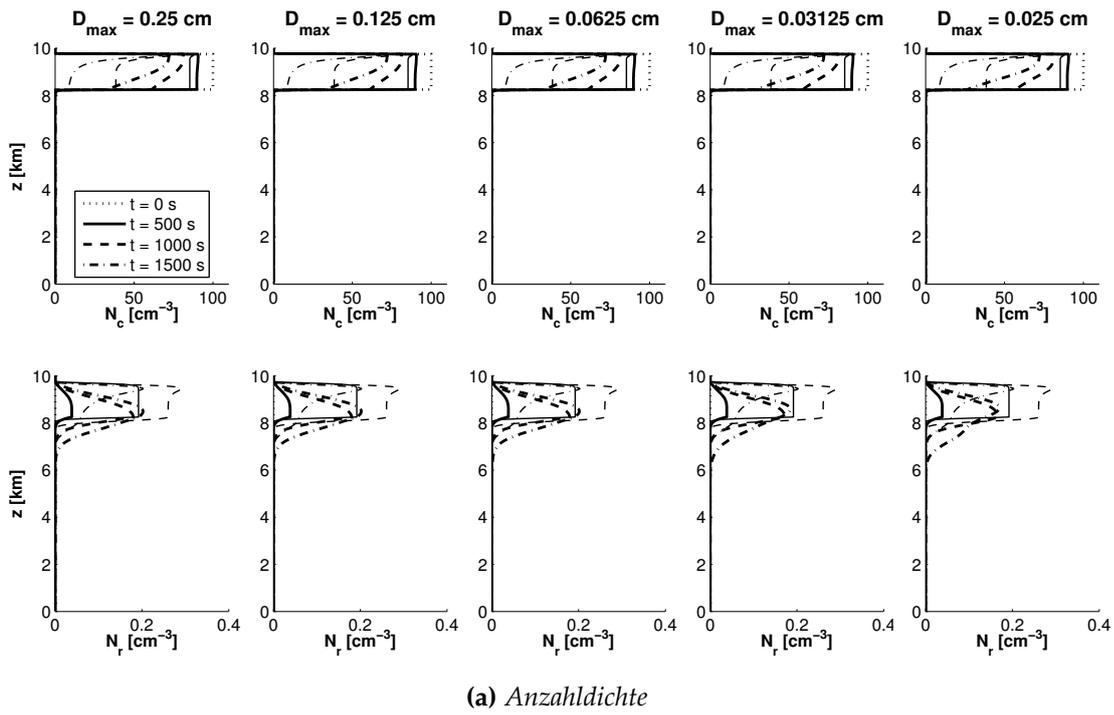
Zunächst betrachten wir die Ergebnisse der ZW-Parametrisierung und deren Abhängigkeit von  $D_{\max}$ . Anschließend werden die verschiedenen Sedimentationsparametrisierungen verglichen.

**ZW-Parametrisierung** Hier stellt sich zunächst die Frage, in welchen Bereichen  $D_{\max}$  gewählt werden soll, da der sedimentierende Regenanteil der prognostischen Momente im Anfangszustand nicht vorhanden ist. So fehlt auch ein  $x_{r,init}$ , anhand dessen man mit Hilfe von Gl. (5.7) ein geeignetes  $D_{\max}$  festlegen könnte. Die spektrale Referenzlösung ergibt jedoch Maximalwerte der mittleren Masse des Regenregimes, die in der Größenordnung deutlich unter denen liegen, welche sich aus dem mit einem Regentropfenspektrum initialisierten Sedimentations-Fall (Kapitel 5) ergeben. Aus diesem Grund wurden im folgenden für die Sedimentationsparametrisierung ZW im Vergleich zu Kapitel 5 wesentlich kleinere maximale Tropfendurchmesser verwendet:  $D_{\max} = 0,25 \text{ cm}, 0,125 \text{ cm}, 0,0625 \text{ cm}, 0,03125 \text{ cm}$  und  $0,025 \text{ cm}$ .

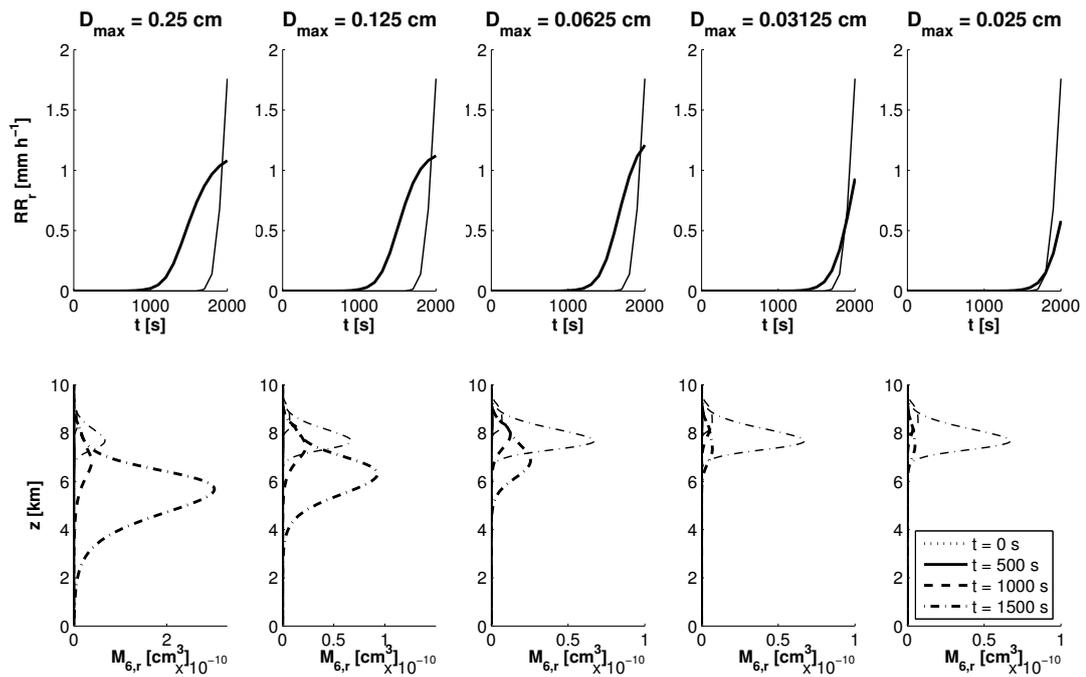
Die Abbildungen 9.3 und 9.4 zeigen die üblichen Größen bei Verwendung der ZW-Parametrisierung für die verschiedenen  $D_{\max}$  sowie die Referenzlösung. Für die Regenrate und die Reflektivität ist nur der Regenanteil dargestellt, da alleine er von nicht-vernachlässigbarer Größenordnung ist.

Wir betrachten zunächst die Wolkenanteile von Anzahldichte und Flüssigwassergehalt. Im Gegensatz zum spektralen Modell findet hier keine Sedimentation statt. Auf Grund der geringen Fallgeschwindigkeit der Wolkentropfen ist der Unterschied in den Ergebnissen jedoch sehr gering. Es ist deutlich zu sehen, dass sowohl  $N_c$  als auch  $L_c$  vom parametrisierten Modell nicht genügend reduziert werden. Abbildung 9.5 zeigt die Umwandlungsraten von ZW für  $D_{\max} = 0,03125 \text{ cm}$  und begründet dies: Die Autokonversions- und Akkreszenzraten für  $N$  und  $L$  sind in der Anfangsphase viel geringer als die entsprechenden Raten aus dem spektralen Modell. Einhergehend mit der zu geringen Reduktion von  $N_c$  und  $L_c$  werden die Regenanteile von Anzahldichte und Flüssigwassergehalt nicht genügend produziert.  $N_r$  und  $L_r$  des parametrisierten Modells sind stets geringer als die jeweilige Referenzgröße. Wie schon in Kapitel 5 gesehen, wird die Sedimentationsgeschwindigkeit bei  $L_r$  im Vergleich zur Referenz überschätzt. Eine Diskussion des Zusammenhangs von Sedimentationsgeschwindigkeit und Wirkung der Umwandlungsraten findet sich weiter unten im Abschnitt „Vergleich der Sedimentationsparametrisierungen“ dieses Unterkapitels.

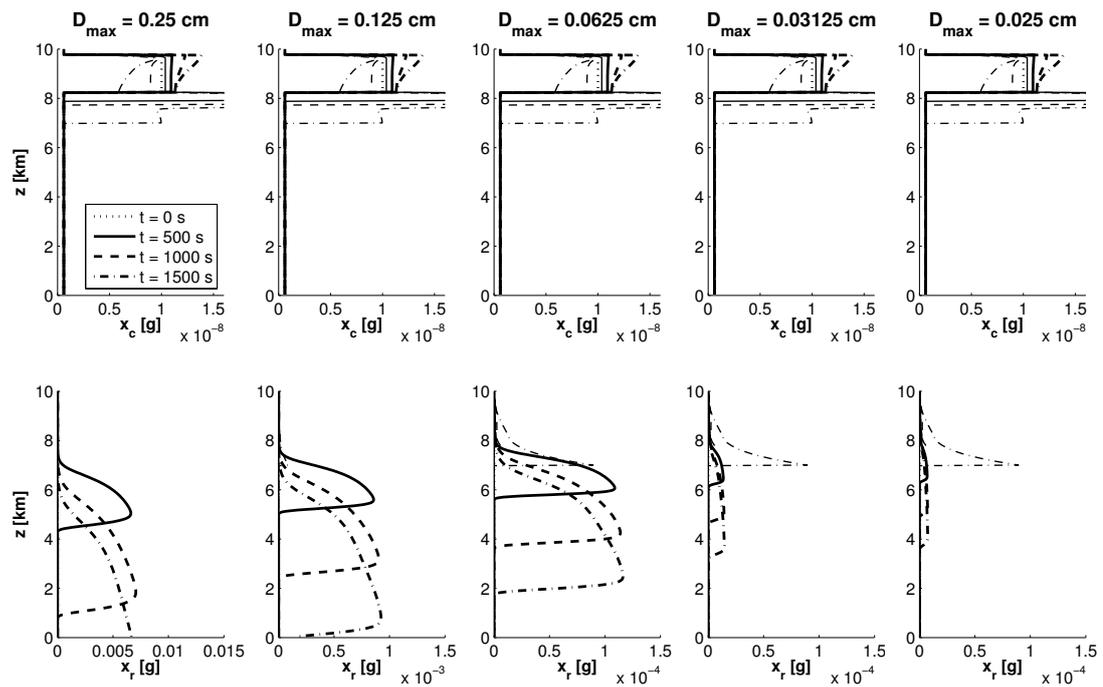
Die Regenrate  $RR_r$  ist eng an das Verhalten von  $L_r$  gekoppelt. Da die Sedimentationsgeschwindigkeit von  $L_r$  in der Parametrisierung überschätzt wird, setzt auch der Niederschlag zu früh ein. Die maximale Regenrate ist zu gering, da die Produktion des Regenwassers nicht hinreichend stark erfasst wird. Die Reflektivität  $M_{6,r}$  hängt stark von dem jeweiligen  $D_{\max}$  ab. Ihr Signal ist im Vergleich zur Referenzlösung zu schnell. Die mittlere Masse des Wolkentropfenregimes  $x_c$  nimmt in der Referenzlösung



**Abbildung 9.3** – Anzahldichte und Flüssigwassergehalt bei Sedimentation und Koagulation für verschiedene  $D_{\max}$  und verschiedene Zeitschritte. Lösung des parametrisierten Modells (dicke Linien) und des Referenzmodells (dünne Linien).

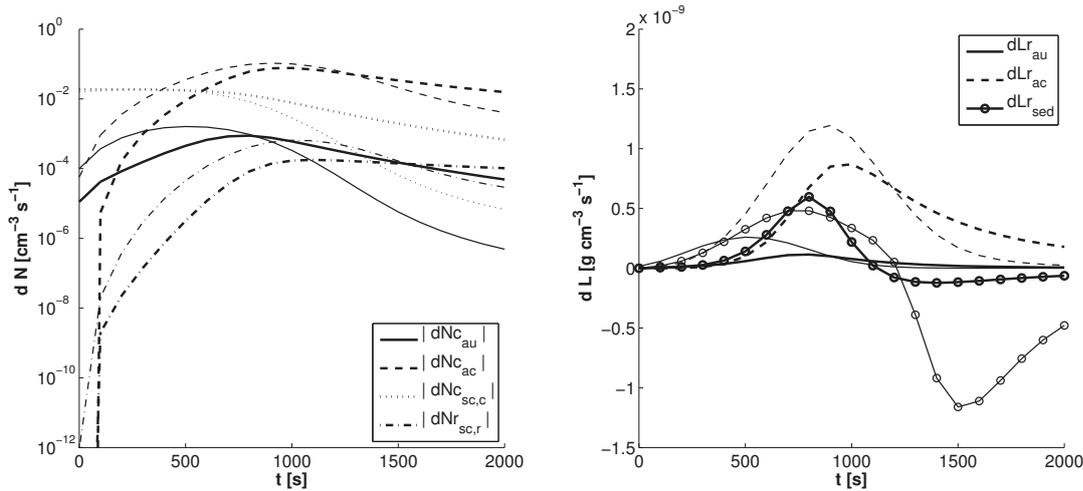


(a) Regenrate und Reflektivität



(b) mittlere Masse

Abbildung 9.4 – Wie Abb. 9.3, aber für die abgeleiteten Größen Regenrate, Reflektivität und mittlere Masse. Beachte die unterschiedlichen Skalen der  $x$ -Achsen bei  $x_r$ .



**Abbildung 9.5** – Wie Abb. 9.2, aber zusätzlich mit den Raten des parametrisierten Modells unter Verwendung von ZW mit  $D_{\max} = 0,03125 \text{ cm}$  (dicke Linien; dünne Linien: spektrale Referenzlösung). Die sehr geringen Werte von  $\partial_t N_{c|ac}^{\text{param}}$ ,  $\partial_t N_{r|sc,r}^{\text{param}}$  zu  $t = 0 \text{ s}$  resultieren aus der Verwendung der Minimalwerte von  $N_r$ ,  $L_r$  und dem sehr kleinen  $\tau = L_r/L$  (siehe Kap. 8.4).

innerhalb der Anfangswolke ab. In parametrisierter Berechnung erhöht sie sich jedoch. Aufgrund der fehlenden Sedimentation kann auch die Ansammlung größerer Tropfen unterhalb der Wolkenunterkante nicht reproduziert werden. Der Regenanteil der mittleren Masse hängt, ebenso wie die Reflektivität, von  $D_{\max}$  ab.

Die schon aus dem Sedimentations-Fall (Kapitel 5) bekannten Effekte bei der Variation von  $D_{\max}$  treten auch bei der Hinzunahme von Koagulation in Erscheinung.  $L_r$  zeigt sich bei deutlich höheren  $D_{\max}$  sensitiv auf eine Veränderung des maximalen Durchmessers als die Anzahldichte  $N_r$ : Das Signal von  $L_r$  verändert sich an der Unterseite schon beim Übergang von  $D_{\max} = 0,125 \text{ cm}$  zu  $D_{\max} = 0,0625 \text{ cm}$ , während  $N_r$  sich erst leicht von  $D_{\max} = 0,0625 \text{ cm}$  zu  $D_{\max} = 0,03125 \text{ cm}$  ändert. Ebenfalls ist in Abbildung 9.3a zu sehen, dass  $\bar{v}_0$  mit steigendem  $D_{\max}$  abnimmt (das  $N_r$ -Signal wird langsamer), während  $\bar{v}_3$  mit steigendem  $D_{\max}$  zunimmt (das  $L_r$ -Signal wird schneller) – siehe auch Abbildung 3.3. Dadurch verringert sich der zeitliche Versatz von  $RR_r$  zur Referenzlösung mit kleiner werdendem maximalen Durchmesser und ist für  $D_{\max} = 0,03125 \text{ cm}$  oder  $D_{\max} = 0,025 \text{ cm}$  fast verschwunden.  $M_{6,r}$  wird mit wachsendem  $D_{\max}$  schneller verlagert. Der Regenanteil der mittleren Masse wird von  $\frac{\rho_w \pi}{6} D_{\max}^3$  beschränkt, so dass zum Teil große (positive und negative) Differenzen zur Referenzlösung entstehen.

Wir haben gesehen, dass die Hinzunahme der Koagulation eine weitere Quelle für Abweichungen zwischen spektraler Referenz und Ergebnissen des parametrisierten Modells darstellt. In der hier gezeigten Modellkonfiguration sind die Abweichungen so

groß, dass auch eine Änderung der Sedimentationsparametrisierung durch eine Variation von  $D_{\max}$  die Ergebnisse nicht für alle hier gezeigten Größen gleichzeitig verbessert. Die Wahl von  $D_{\max}$  beeinflusst zwar erneut systematisch die Ergebnisse, aber kein maximaler Tropfendurchmesser liefert Resultate, die annähernd optimal wären. Es wird daher darauf verzichtet, ein optimales  $D_{\max}$  zu bestimmen und einen Zusammenhang zu den Anfangsbedingungen herzustellen.

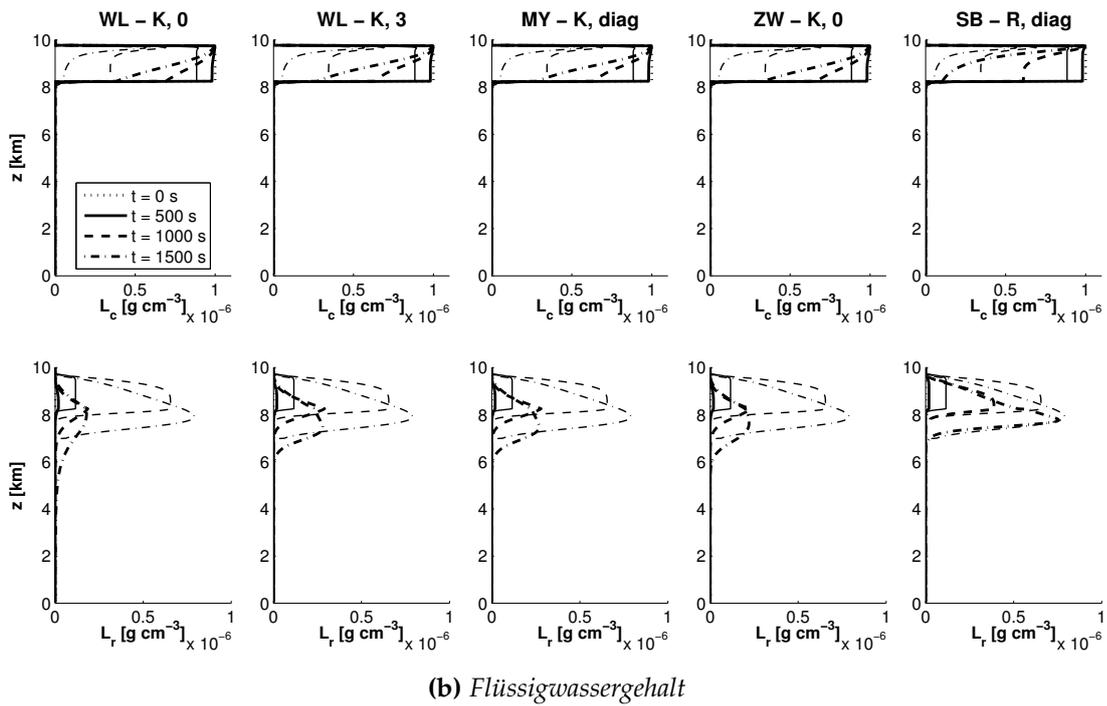
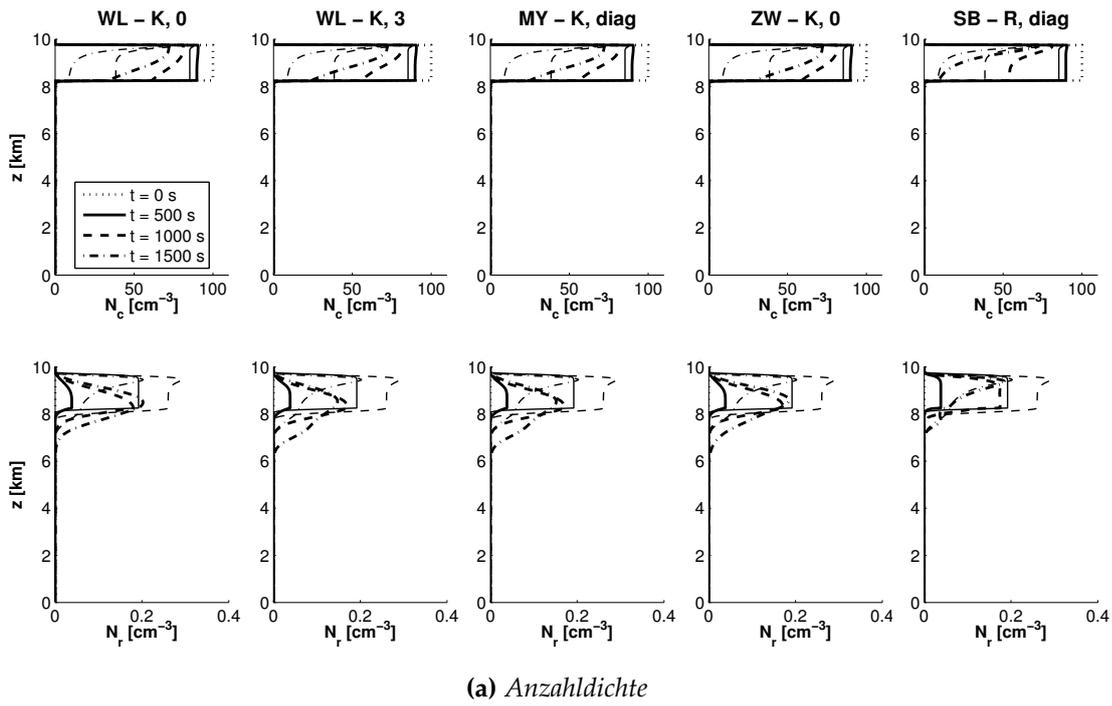
**Vergleich der Sedimentationsparametrisierungen** In diesem Abschnitt werden die Parametrisierungen  $WL_0$ ,  $WL_3$ ,  $MY$ ,  $ZW$  und  $SB$  verglichen. Für  $ZW$  wurde ein  $D_{\max}$  von 0,031 25 cm gewählt. Die Resultate sind in den Abbildungen 9.6 und 9.7 dargestellt.

Betrachtet man die prognostischen Momente in Abbildung 9.6, so unterscheiden sich diejenigen, welche mit  $SB$  erzeugt wurden, systematisch von den anderen.

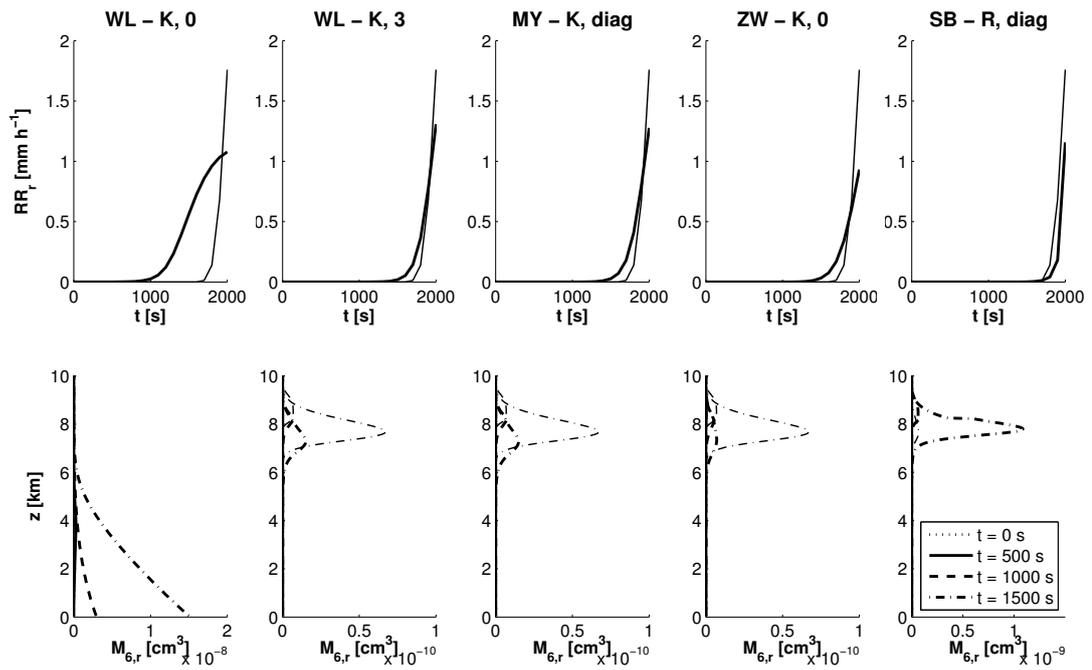
Für die Wolkenanteile der prognostischen Momente,  $N_c$  und  $L_c$ , ist  $SB$  die einzige Sedimentationsparametrisierung, mit deren Verwendung der korrekte Verlauf der Abnahme der Momente reproduziert wird. In den Ergebnissen der Referenzlösung nehmen die Wolkenanteile der Anzahldichte und des Flüssigwassergehalts im oberen Teil der Anfangswolke stark ab. Dies wird prinzipiell von  $SB$  (basierend auf  $v_T$  nach Rogers et al., 1993) wiedergegeben, wenn auch die Reduktion der Größen nicht stark genug ist. Alle anderen Parametrisierungen, basierend auf  $v_T$  nach Kessler (1969), zeigen eine gleichmäßige und zu schwache Abnahme der prognostischen Momente  $N_c$  und  $L_c$  über das gesamte Gebiet der Anfangswolke.

Vergleicht man die mittleren Fallgeschwindigkeiten von  $SB$  und den anderen Parametrisierungen, so sind für kleine mittlere Massen, wie sie an der Wolkenoberkante auftreten ( $x_r \approx 5 \cdot 10^{-6}$  g,  $\bar{D}_{03} \approx 0,02$  cm),  $\bar{v}_0$  und  $\bar{v}_3$  berechnet nach den Parametrisierungen mit  $v_T$  nach Kessler (1969) um ein Vielfaches größer (Abbildung 3.4). In der Konsequenz verweilt das Tropfenensemble bei Benutzung der auf  $v_T$  nach Kessler (1969) basierenden Parametrisierungen nicht lange genug an der Wolkenoberkante, so dass Autokonversion und Akkreszenz nicht genügend Zeit haben, die Wolkenanteile von Anzahldichte bzw. Flüssigwassergehalt entsprechend der Referenzlösung zu reduzieren. In einem Vergleichslauf mit  $WL_0$  (ohne Abbildung) und  $\alpha = 130$  cm s<sup>-1</sup> in  $\bar{v}_i$ , Gl. (3.12), war das Verhalten der Wolkenanteile  $N_c$  und  $L_c$  ähnlich zu dem der Läufe mit  $SB$ , da die Sedimentationsgeschwindigkeit auf 10 % des ursprünglichen Wertes verringert wurde. Dies unterstützt die These, dass die Parametrisierung der Sedimentationsgeschwindigkeit für kleine mittlere Massen von großer Bedeutung für die korrekte Wiedergabe der Umwandlungsprozesse ist.

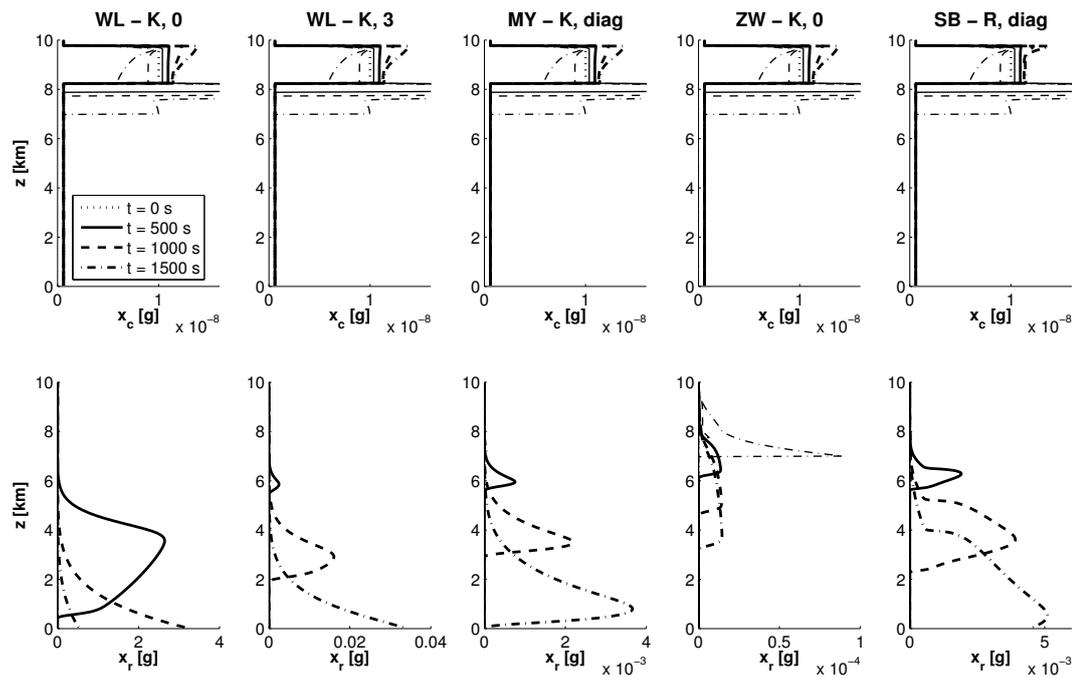
Für die Regenanteile der prognostischen Momente,  $N_r$  und  $L_r$ , gibt ebenfalls alleinig  $SB$  ihre räumliche Verteilung gut wieder. Die anderen Parametrisierungen, welche den Geschwindigkeitsansatz von Kessler benutzen, zeigen zu starke Sedimentation. Abbildung 9.9 zeigt die vertikal integrierten  $N_c$ ,  $L_c$ ,  $N_r$  und  $L_r$  in Abhängigkeit von der Zeit unter Verwendung der  $SB$ -Parametrisierung (mit Geschwindigkeit nach Rogers



**Abbildung 9.6** – Anzahldichte und Flüssigwassergehalt bei Sedimentation und Koagulation für verschiedene Parametrisierungen und Zeitschritte. Lösung des parametrisierten Modells (dicke Linien) und des Referenzmodells (dünne Linien).

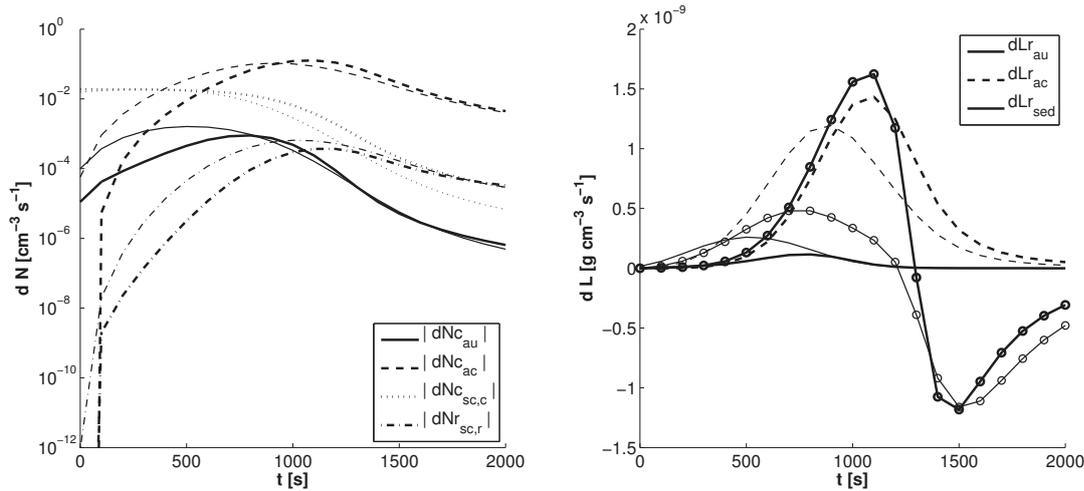


(a) Regenrate und Reflektivität



(b) mittlere Masse

Abbildung 9.7 – Wie Abb. 9.6, aber für Regenrate, Reflektivität und mittlere Masse. Beachte die unterschiedlichen Skalen der  $x$ -Achsen bei  $x_r$ .



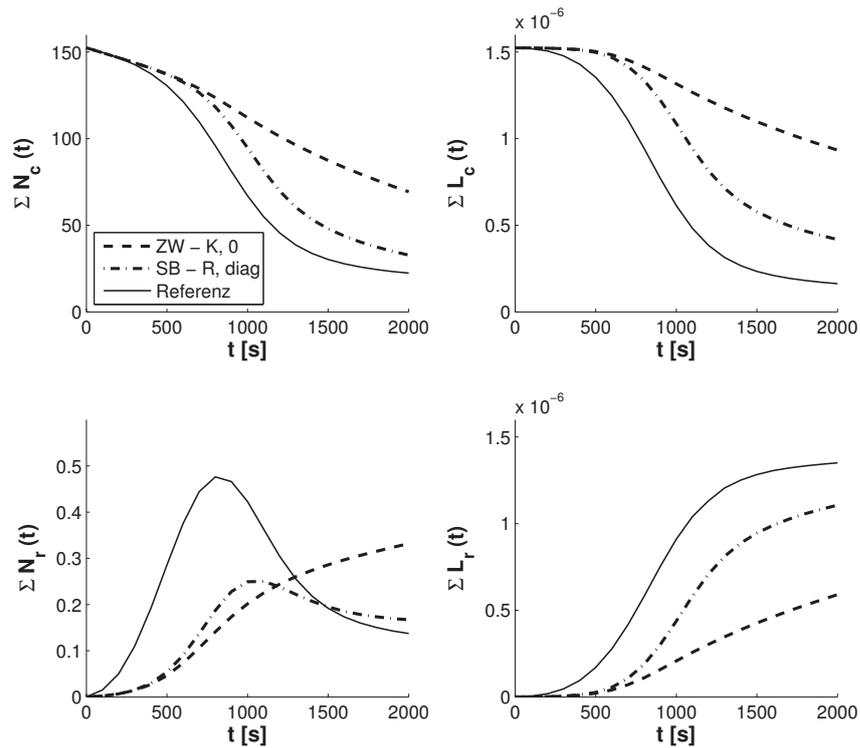
**Abbildung 9.8** – Wie Abb. 9.2, aber zusätzlich mit den Raten des parametrisierten Modells unter Verwendung von SB (dicke Linien). Dünne Linien: spektrale Referenzlösung. Bezüglich  $\partial_t N_{c|ac}^{param}$  und  $\partial_t N_{r|sc,r}^{param}$  siehe Abb. 9.5.

et al., 1993) und der ZW-Parametrisierung, exemplarisch für die Parametrisierungen mit Geschwindigkeitsansatz nach Kessler (1969). Man sieht, dass die Wolkenanteile der Momente insbesondere bei ZW nicht genügend reduziert werden und die Regenanteile nicht genügend erzeugt werden. Weiterhin wird die im spektralen Modell auftretende Abnahme von  $N_r$  durch Koagulationen ab ca.  $t = 1000$  s nur mit SB und nicht mit ZW erfasst. Dies deutet darauf hin, dass über das ganze Modellgebiet betrachtet bei ZW die Autokonversionsrate größer ist als die Selbsteinfangrate der Regentropfen.

Das Einsetzen des Niederschlags und der Anstieg der Niederschlagsmenge wird ebenfalls nur von SB korrekt reproduziert (Abbildung 9.7). Bei den anderen Parametrisierungen setzt auf Grund der Überschätzung der Sedimentation der Niederschlag mindestens 200 s zu früh ein. Besonders extrem ist dies bei  $WL_0$ .

Bei der Radarreflektivität müssen die Sedimentationsparametrisierungen anhand ihrer Ergebnisse anders gruppiert werden als bisher.  $M_{6,r}$  wird von  $WL_3$ , MY und ZW unterschätzt, während SB und  $WL_0$  sie überschätzen. Das Überschätzen bei  $WL_0$  ist dabei um eine Größenordnung höher als bei SB.

Der Wolkenanteil der mittleren Masse,  $x_c$ , wird von allen Parametrisierungen nicht korrekt wiedergegeben, da sie, im Gegensatz zu der der Referenzlösung, im Bereich der Anfangswolke ansteigt. An der Unterkante des  $x_r$ -Signals ist abzulesen, dass die tatsächliche Sedimentationsgeschwindigkeit in allen Parametrisierungen überschätzt wird. Des Weiteren liegen die mittleren Massen um bis zu 4 Größenordnungen zu hoch. Allein bei ZW ist  $x_r$  beschränkt, wenn auch wegen des speziell gewählten  $D_{max}$  zu gering.

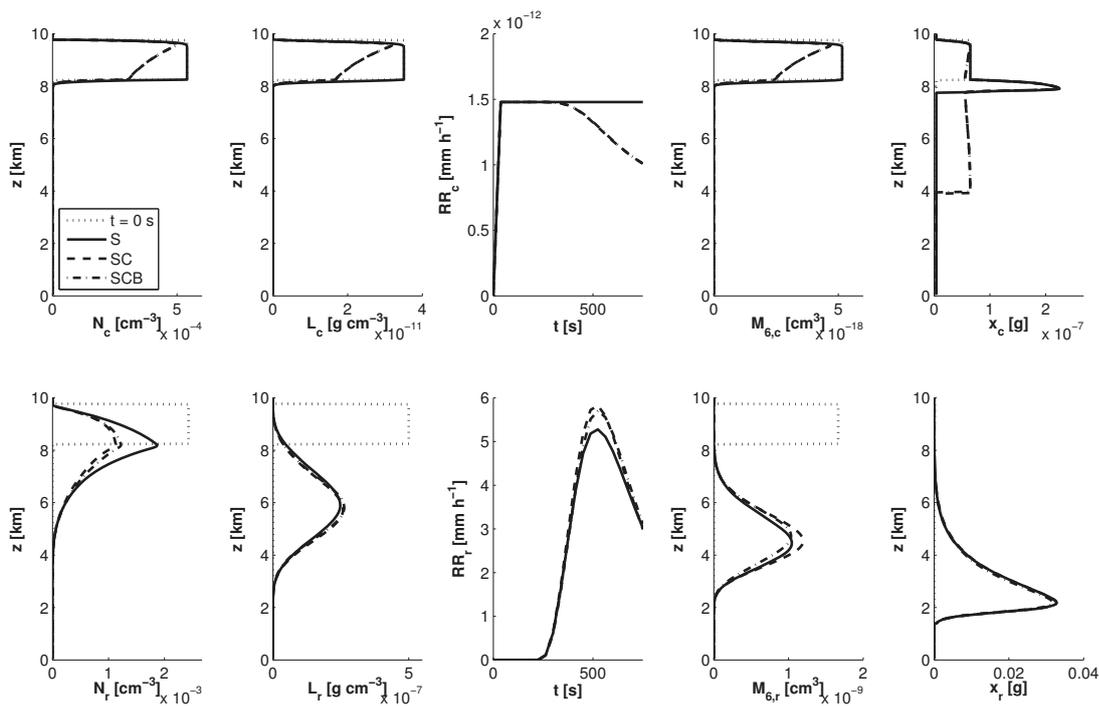


**Abbildung 9.9** – Vertikal integrierte Gesamtanzahlen (rechts) und -flüssigwassergehalte (links) gegen die Zeit für das parametrisierte Modell mit ZW ( $D_{\max} = 0,03125 \text{ cm}$ ) und SB sowie das spektrale Referenzmodell. Oben: Wolkenanteile, unten: Regenanteile.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die mit dem parametrisierten Modell berechneten Anzahldichten und Flüssigwassergehalte am dichtesten an der Referenzlösung liegen, wenn die SB-Sedimentationsparametrisierung verwendet wird. Ein möglicher Grund ist die spezielle Wahl des Formparameters  $\mu$ , Gl. (3.15b), in der mittleren Momentengewichteten Fallgeschwindigkeit: Er ist an Ergebnisse spektraler Rechnungen angepasst, deren Konfiguration ( $v_T$ ,  $E_{\text{coll}}$ ,  $E_{\text{coal}}$ ) genau derjenigen entspricht, welche auch für das spektrale Referenzmodell verwendet wurde.

## 9.2. Entwicklung eines Regentropfenspektrums

In diesem Abschnitt wird die anfängliche „Wolke“ mit einem Regentropfenspektrum initialisiert ( $x_{\text{init}} = x_0$ , siehe Tabelle 4.1). Die Lösung der Momentengleichung im S-Fall ist für diese Anfangsbedingung schon aus Kapitel 5.3 bekannt. Im Folgenden werden daher die Modellgrößen nur zu einem Zeitpunkt dargestellt, jedoch für die verschiedenen Prozesskombinationen S (als Vergleich), SC und SCB. Wie in Kapitel 5 beträgt die Modelllaufzeit 750 s.

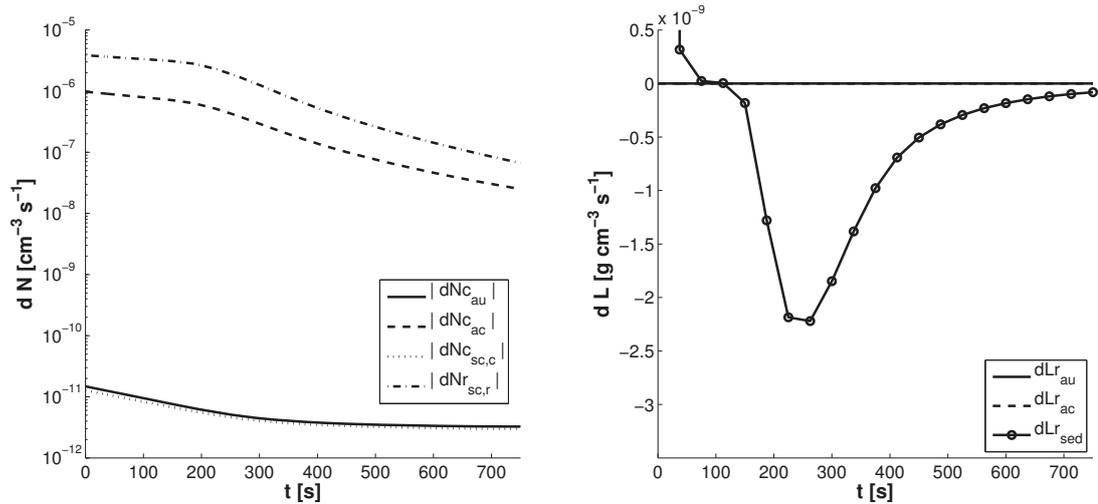


**Abbildung 9.10** – Ergebnisse des Referenzmodells für  $N$ ,  $L$ ,  $RR$ ,  $M_6$  und  $x$  bei Wirkung verschiedener Prozesse (dargestellt durch die Linientypen) zum Zeitpunkt  $t = 600$  s. Oben: Wolkenanteile, unten: Regenanteile.

Zunächst wird die Veränderung der Ergebnisse des Referenzmodells unter Wirkung der unterschiedlichen Prozesse diskutiert. Anschließend werden die Ergebnisse der  $D_{\max}$ -Parametrisierung vorgestellt und  $D_{\max,\text{opt}}$  untersucht. Ein Vergleich der verschiedenen Sedimentationsparametrisierungen schließt diesen Abschnitt ab.

### 9.2.1. Ergebnisse des spektralen Modells

Abbildung 9.10 zeigt die Ergebnisse des spektralen Referenzmodells für die verschiedenen Prozesse zu  $t = 600$  s. Auf eine ausführliche Diskussion der Ergebnisse für die Größen der Wolkenkategorie wird hier verzichtet, da die Ergebnisse denen aus Kapitel 9.1.1 ähneln. Darüber hinaus ist in Abbildung 9.10 zu erkennen, welchen geringen Einfluss die Sedimentation auf die Wolkentropfen hat: Die Profile haben sich auch nach 600 s Modelllaufzeit nicht grundlegend geändert. Die erhöhte mittlere Masse von  $x_c$  im SC- und SCB-Fall im Bereich von 4 bis 7,5 km ist ein numerisches Artefakt, welches aus der automatischen Setzung der Minimalwerte des spektralen Modells stammt. Da  $x_c$  nicht in die Fehlernorm zur Bewertung der Sedimentationsparametrisierungen eingeht, sind diese Artefakte nicht von Belang.



**Abbildung 9.11** – Änderungsraten für die Anzahldichte  $N$  (links) und den Flüssigwassergehalt  $L$  (rechts) an  $z_u = 8,25$  km für das spektrale Referenzmodell (SCB-Fall). Wegen der notwendigen logarithmischen Skalierung der  $y$ -Achse bei  $dN$  sind dort die Beträge der Raten dargestellt.  $\partial_t L_{r,au}$ ,  $\partial_t L_{r,ac}$  sind innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht von 0 zu unterscheiden.  $\partial_t L_{r,scd}(t = 0 \text{ s}) = 1 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$ , da die Differenz zwischen Minimal- und Anfangswert von  $L_r$  in die Berechnung eingeht.

In Abbildung 9.11 sind die Umwandlungsraten von Wolken- zu Regenregime und die Massensedimentationsrate exemplarisch für den SCB-Fall dargestellt. Im Vergleich zur vorherigen Modellkonfiguration (Initialisierung mit einem Wolkenpektrum) sind die Umwandlungsraten der Anzahldichte, welche nur die Wolkenkategorie betreffen (Selbsteinfang von Wolkentropfen und Autokonversion), um mehrere Größenordnungen kleiner als die Raten, welche auch die Regenkategorie betreffen. Die Sedimentation ist der einflussreichste Prozess für den Flüssigwassergehalt und dominiert die Raten von Autokonversion und Akkreszenz deutlich.

Nun betrachten wir die Signalverläufe der Größen der Regenkategorie in Abbildung 9.10. Die Profile im Fall der reinen Sedimentation sind schon aus Kapitel 5.3 bekannt. Sie werden im Folgenden als Vergleichsbasis genommen, um zu beschreiben, wie sich die Ergebnisse durch Koagulation und Zerfall verändern. Da die Sedimentationsrate die Umwandlungsraten dominiert, wird durch die zusätzlichen Prozesse das Ergebnis nur geringfügig verändert.

Die Regentropfenanzahl  $N_r$  sinkt unter dem Einfluss der Koagulation. Wird Zerfall hinzugenommen, so erhöht sich die Tropfenanzahl wieder leicht. Im SC-Fall fallen die Tropfen auf Grund ihrer erhöhten Größe schneller. Dadurch wird auch der Flüssigwas-

sergehalt schneller verlagert und das Maximum ist etwas größer als im Fall der reinen Sedimentation. Ein zusätzlicher Tropfenzerfall hat hier geringeren Einfluss als bei der Anzahldichte. Die Regenrate  $RR_r$  verhält sich analog zu  $L_r$ . Im SC-Fall ist die maximale Regenrate im Vergleich zu der im Falle der reinen Sedimentation deutlich erhöht. Fügt man des Weiteren noch Zerfall hinzu, so nimmt das Maximum der Regenrate wieder etwas ab, da die Tropfen dann kleiner sind, somit weniger Masse haben und nicht so schnell fallen. Der Zeitpunkt des stärksten Niederschlags ändert sich innerhalb des Ausgabeintervalls von 37,5 s nicht.

Bei der Reflektivität  $M_{6,r}$  ist zu beobachten, dass diese im SC-Fall auf Grund der größeren Tropfen deutlich erhöht wird. Bei zusätzlichem Zerfall sind die auftretenden Tropfen wieder etwas kleiner und das Signal ist nun genauso stark wie im Fall der reinen Sedimentation, jedoch etwas langsamer. In der hier gewählten linearen Darstellung ist die mittlere Masse  $x_r$  von der Änderung der Prozesse nahezu unbeeinflusst. Betrachtet man aber die relativen Unterschiede zur mittleren Masse im Fall der reinen Sedimentation, so erkennt man, dass die mittlere Masse im SC-Fall stets größer ist. Dies entspricht auch den physikalischen Erwartungen. Unter dem zusätzlichen Einfluss von Zerfall hängt der relative Unterschied von der Höhe ab.

### 9.2.2. Ergebnisse der parametrisierten Modelle

Zunächst werden die Ergebnisse der  $D_{\max}$ -Parametrisierung vorgestellt und die Umwandlungsraten verglichen. In Kapitel 5 wurde der Einfluss von  $D_{\max}$  auf die Momentprofile schon eingehend besprochen. Hier ist nun von Interesse, ob das dort ermittelte  $D_{\max, \text{opt}}$  unter dem Einfluss von Koagulation und Zerfall erhalten bleibt. Deswegen werden nicht die Momentprofile, sondern nur der Verlauf der Fehlernorm mit  $D_{\max}$  dargestellt. Die Momentprofile für die ZW-Parametrisierung mit optimalem  $D_{\max}$  sind dann im anschließenden Parametrisierungsvergleich zu sehen. Dort wird untersucht, ob die Rangfolge der Parametrisierungen unter dem Einfluss von Koagulation und Zerfall ebenfalls bestehen bleibt. Hierzu werden die relevanten Größen zum Zeitpunkt  $t = 600$  s dargestellt und mit der Referenzlösung verglichen. Dies geschieht sowohl qualitativ als auch quantitativ mit der Fehlernorm  $X$ , Gl. (5.6).

Zum Vergleich von Referenz und Parametrisierung werden nur die Regenanteile der Momente herangezogen, da nur diese direkt von der Sedimentationsparametrisierung beeinflusst sind. Die Wolkenanteile der Momente werden nur indirekt (über die Umwandlungsraten, welche von den Regenanteilen der Momente abhängen) von ihr beeinflusst. Die Darstellungen beschränken sich daher auf die Regenanteile der Momente.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Wolkenanteile der prognostischen Momente sich im S-Fall nicht ändern und im SC- und SCB-Fall abgebaut werden. Der räumliche Verlauf ist ähnlich zu den Momenten der Wolkenkategorie der Referenzlö-

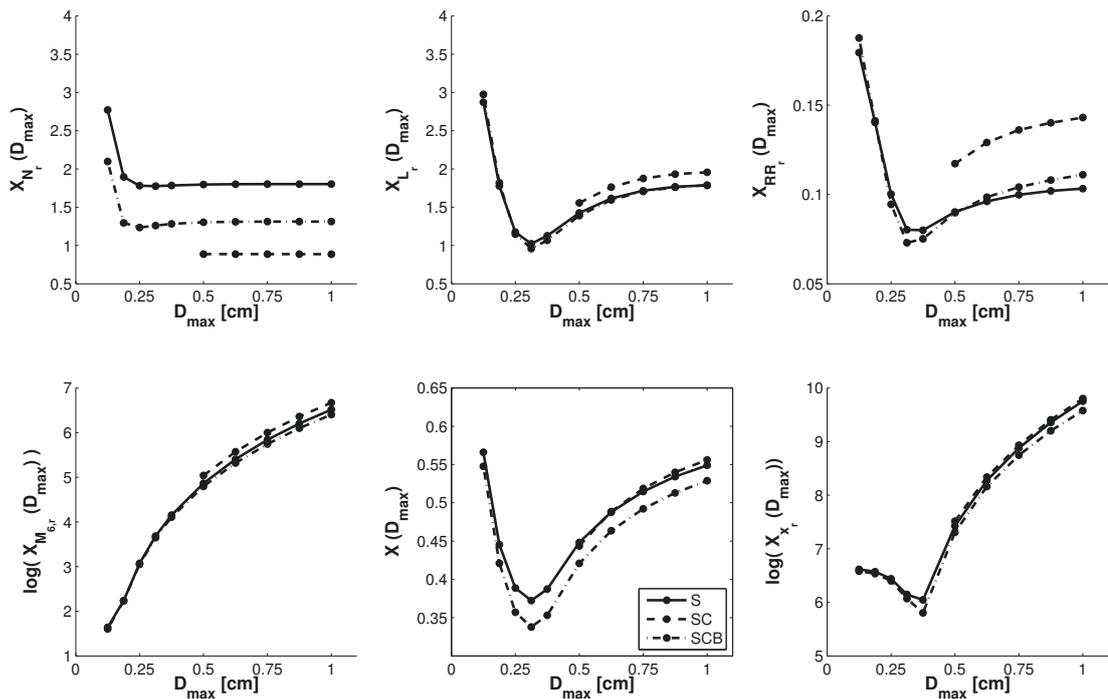


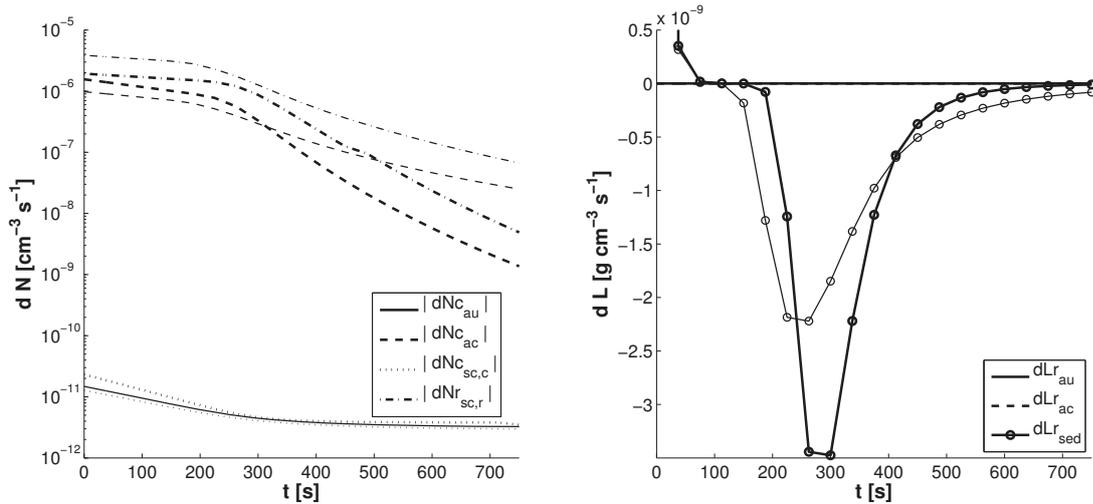
Abbildung 9.12 – Fehlernorm  $X$  (unten Mitte) und deren Komponenten für verschiedene Prozesskombinationen (Linientypen) bei Variation von  $D_{\max}$ .

sung (Abbildung 9.10), jedoch ist die Abnahme bis  $t = 1000$  s deutlich stärker als in der Referenz und stagniert dann. Die mittlere Masse  $x_c$  ist nahezu konstant mit der Höhe und nimmt mit der Zeit geringfügig zu.

Wir werden sehen, dass es für kleine  $D_{\max}$  bei der ZW-Sedimentationsparametrisierung passieren kann, dass durch Koagulationen die mittlere Masse des Modells zu groß wird ( $L_r/N_r > x_{\max}$ ). Da die  $D_{\max}$ -Parametrisierung keine künstliche Erniedrigung der mittleren Masse vorsieht, wird der Lauf dann abgebrochen und nicht ausgewertet.

**ZW-Parametrisierung** In Abbildung 9.12 ist anhand der Fehlernorm  $X(D_{\max})$  der Vergleich der Ergebnisse des Modells mit der  $D_{\max}$ -Parametrisierung mit der Referenzlösung für unterschiedliche Prozesskombinationen dargestellt.

Der Verlauf des Fehlers mit  $D_{\max}$  ist für alle Prozesskombinationen ähnlich. Dies gilt sowohl für die Einzelbeiträge  $X_M$  als auch für die Gesamtsumme  $X$ . Man kann erkennen, dass das optimale  $D_{\max}$  ( $0,3125$  cm für  $x_{\text{init}} = x_0$ , Tabelle 5.3) auch im SCB-Fall erhalten bleibt. Im SC-Fall ist dieses  $D_{\max, \text{opt}}$ , welches im Sedimentationsfall ermittelt wurde, zu klein, und die mittlere Masse  $x_r$  überschreitet innerhalb der Simulationszeit von  $750$  s das zugehörige  $x_{\max}$ . Bei einer Initialisierung des um Kollisionen erweiterten



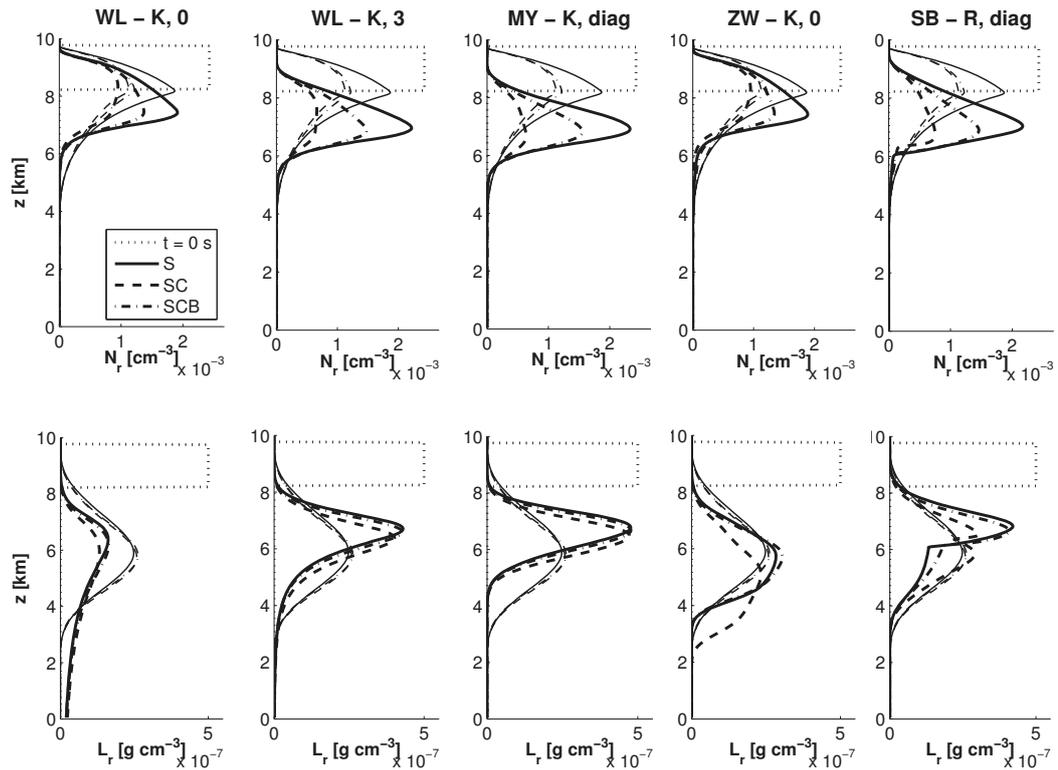
**Abbildung 9.13** – Wie Abb. 9.11 (SCB-Fall), aber zusätzlich mit den Raten des parametrisierten Modells unter Verwendung von ZW mit  $D_{\max} = 0,3125 \text{ cm}$ . Zu  $\partial_t L_{r_{\text{au}}}$ ,  $\partial_t L_{r_{\text{ac}}}$ ,  $\partial_t L_{r_{\text{sed}}}$  siehe Abb. 9.11. Für alle  $t$  gilt  $\partial_t N_{c_{\text{au}}}^{\text{param}} = 0$ , da  $\tau > 0,99$  (siehe Kap. 8.4).

Modells mit einem Regentropfenspektrum gilt also der in Kapitel 5.2 ermittelte Zusammenhang zwischen  $x_{\text{init}}$  und  $D_{\max, \text{opt}}$  weiterhin. Ein möglicher Grund ist die Tatsache, dass die Sedimentation auch im parametrisierten Modell der einflussreichste Prozess ist (Abbildung 9.13).

**Vergleich der Sedimentationsparametrisierungen** Die Abbildungen 9.14 und 9.15 zeigen die Ergebnisse des Parametrisierungsvergleiches zum Zeitpunkt  $t = 600 \text{ s}$  für die verschiedenen Prozesskombinationen. Für ZW wurde im S- und SCB-Fall  $D_{\max} = D_{\max, \text{opt}} = 0,3125 \text{ cm}$  verwendet. Im SC-Fall wird bei  $D_{\max} < 0,5 \text{ cm}$  der Lauf innerhalb der Modelllaufzeit von 750 s abgebrochen. Da der Fehler bei  $D_{\max} = 0,5 \text{ cm}$  am geringsten ist, wird dieser Wert als „optimal“ eingestuft und zum Vergleich verwendet. Die Parametrisierung SB zeigt in ihren Profilen einen deutlichen Knick (an  $t = 600 \text{ s}$  bei ca. 6 – 6,5 km). Dieser hat seinen Ursprung in dem in Kapitel 3.3 angesprochenen Wechsel der Definition des verwendeten Formparameters  $\mu_{\text{diag}}$ . Aus Abbildung 9.16 ist ersichtlich, dass auch bei Verwendung der SB-Parametrisierung die Massensedimentationsrate die Entwicklung des Flüssigwassergehaltes dominiert.

Der Fokus der folgenden Diskussion liegt auf der Nähe der Ergebnisse der parametrisierten Modelle zur Referenzlösung und die sich durch eine andere Kombination der Prozesse ergebenden Änderungen in den Resultaten.

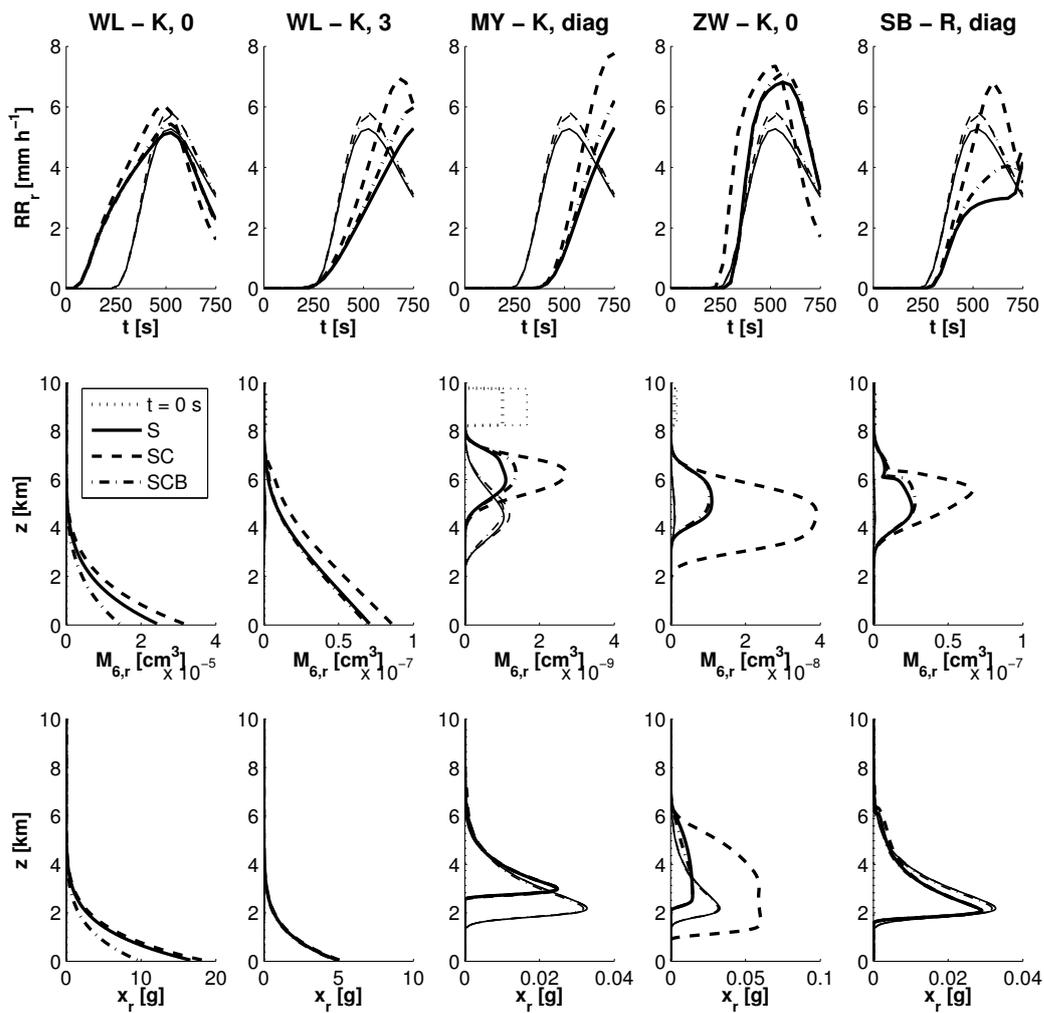
Abbildung 9.14 zeigt, dass das Verhalten der Referenzlösung durch die parametrisierten Modelle prinzipiell nachgebildet wird: Die Anzahldichte  $N_r$  nimmt deutlich bei Hinzunahme von Koagulation ab und erhöht sich bei zusätzlichem Zerfall wieder



**Abbildung 9.14** – Momentprofile von  $N_r$  und  $L_r$  für verschiedene Prozesse (Linientypen) und verschiedene Parametrisierungen zum Zeitpunkt  $t = 600$  s. Lösung des parametrisierten Modells (dicke Linien) und des Referenzmodells (dünne Linien).

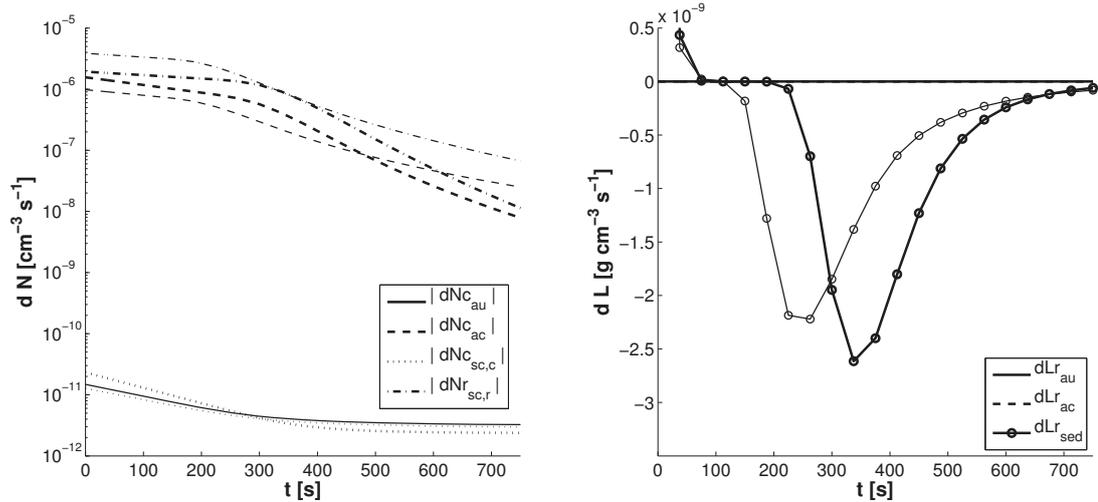
etwas, bleibt aber noch unter der jeweiligen Signalstärke im Falle von Sedimentation. Der Rückgang der Anzahldichte durch Koagulation ist unter Verwendung der Sedimentationsparametrisierungen mit hohem oder diagnostischem  $\mu$  (WL<sub>3</sub>, MY und SB) zu hoch. Der Anstieg der Anzahldichte durch zusätzlichen Zerfall ist jedoch allgemein im Vergleich mit der Referenzlösung zu stark. Da dies für alle Sedimentationsparametrisierungen gilt, ist zu vermuten, dass in der Parametrisierung von Seifert u. Beheng (2006) der Zerfall überschätzt wird.

Beim Flüssigwassergehalt  $L_r$  werden durch eine andere Kombination der Prozesse hauptsächlich Änderungen in der Geschwindigkeit des Signals hervorgerufen. Diese sind konsistent mit den Änderungen in der Referenzlösung. Ausnahmen sind ZW, wo für den SC-Fall ein höheres  $D_{\max}$  verwendet wurde und das  $L_r$ -Signal hier deutlich schneller ist, sowie SB, wo im SC-Fall das Signal gedämpfter und dadurch schneller ist als für die anderen Prozesse.



**Abbildung 9.15** – Wie Abb. 9.14, aber für die abgeleiteten Größen  $RR_r$ ,  $M_{6,r}$  und  $x_r$ . Beachte die unterschiedlichen Skalen der  $x$ -Achsen bei  $x_r$ .

In Abbildung 9.15, oben, ist die Niederschlagsrate  $RR_r$  dargestellt. Hier ist die Wirkung der unterschiedlichen Prozesse bei allen Sedimentationsparametrisierungen gleich: Am größten ist die Regenrate im SC-Fall, es folgen SCB und schließlich S. Der Zeitpunkt des Einsetzens des Niederschlages ist nicht von den gewählten Prozessen beeinflusst. Der gegenteilige Eindruck entsteht bei ZW, hier jedoch wurde im SC-Fall ein größeres  $D_{\max}$  verwendet, welches bewirkt, dass der Niederschlag früher einsetzt. Im Vergleich zur Referenzlösung unterscheiden sich die Ergebnisse, wie schon bei  $N_r$  und  $L_r$ , bei Berücksichtigung der verschiedenen Prozesse deutlicher. Insbesondere ist der Unterschied zwischen dem SC- und dem SCB-Fall zu groß.



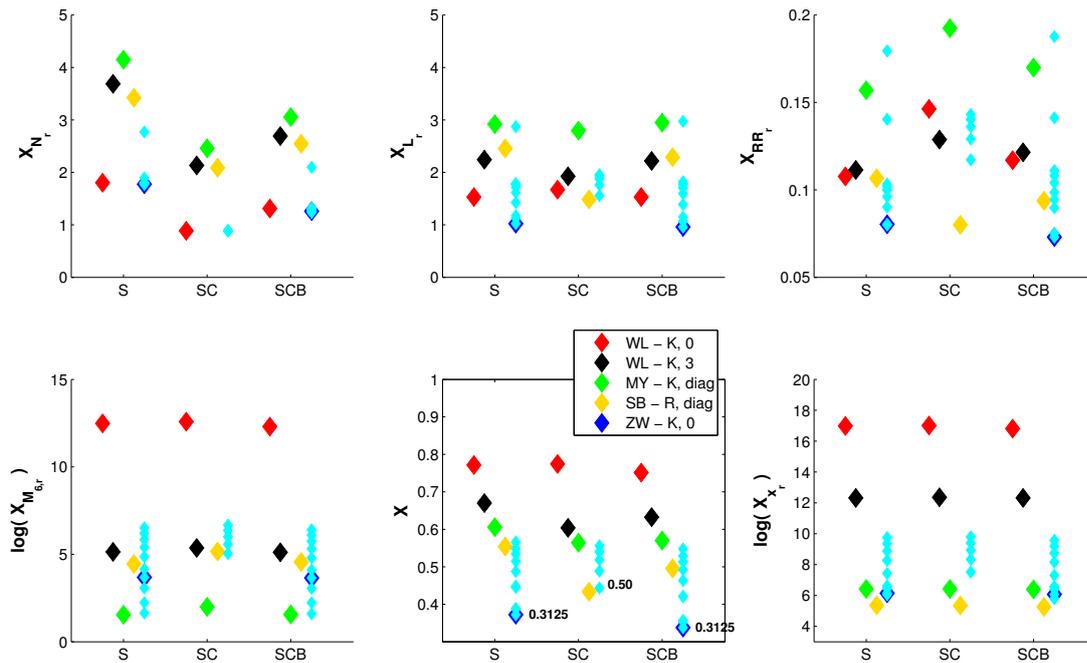
**Abbildung 9.16** – Wie Abb. 9.11, aber zusätzlich mit den Raten des parametrisierten Modells unter Verwendung von SB. Zu  $\partial_t N_{c|au}^{param}$  siehe Abb. 9.13. Zu  $\partial_t L_{r,au}$ ,  $\partial_t L_{r,ac}$  siehe Abb. 9.11.

Für die Reflektivität  $M_{6,r}$  wird das Verhalten der Referenzlösung reproduziert: das Signal ist im SC-Fall am stärksten. Die Unterschiede zwischen den Signalstärken im S- und im SCB-Fall hängen jedoch von der gewählten Sedimentationsparametrisierung ab. Insbesondere kann man hier nach der gewählten Beziehung für den Formparameter der Verteilungsfunktion unterscheiden: bei konstantem  $\mu$  ( $WL_0$ ,  $WL_3$  und  $ZW$ ) ist das Signal bei reiner Sedimentation stärker als im SCB-Fall; für die Sedimentationsparametrisierungen mit diagnostischem  $\mu$  ( $MY$  und  $SB$ ) verhält es sich umgekehrt. Auffällig bei  $ZW$  ist der große Unterschied in den Signalstärken im S/SCB- und im SC-Fall. Dies liegt an dem höheren  $D_{max}$  für den Lauf mit Sedimentation und Koagulation. Kapitel 5.3 und insbesondere Abbildung 5.14 haben gezeigt, dass die Wahl von  $D_{max}$  die Signalstärke der Reflektivität bzw. ihr Überschießen stark beeinflusst.

Die mittlere Masse  $x_r$  ist in dieser Darstellung kaum sichtbar von den verschiedenen Prozessen beeinflusst. Der SC-Fall bei  $ZW$  ist aufgrund des höheren  $D_{max}$  wieder ein Sonderfall. Mit der Sedimentationsparametrisierung  $SB$  wird die mittlere Masse fast exakt wiedergegeben.

Wir sehen, dass die „unmodifizierte Form“ der Sedimentationsparametrisierung,  $WL_0$ , auch bei Hinzunahme von Tropfenkollisionen unphysikalisch große mittlere Tropfenmassen ergibt. Dies bestätigt die in Kapitel 1 aufgestellte Hypothese, dass es sinnvoll ist, zur Vermeidung der übergroßen mittleren Massen an der Parametrisierung der Sedimentation anzusetzen.

In Kapitel 5.2 wurde gezeigt, dass die Rangfolge der Sedimentationsparametrisierungen unter Variation der anfänglichen mittleren Masse unverändert ist. In Abbildung



**Abbildung 9.17** – Vergleich der Sedimentationsparametrisierungen anhand der Fehlernorm  $X$  (unten Mitte) und ihrer Komponenten für verschiedene berücksichtigte Prozesse.  $\blacklozenge$ : ZW-Parametrisierung mit anderen  $D_{\max}$ .

9.17 kann man nun erkennen, dass auch eine Hinzunahme von Kollisionen die Rangfolge nicht wesentlich ändert, wenn das Modell zu Beginn schon nicht-verschwindende Momente der Regenategorie enthält und so die Sedimentation der einflussreichste Prozess ist. Um die Güte zweier Sedimentationsparametrisierungen gegeneinander abzuwägen, ist es also bei geeigneten Anfangsbedingungen ausreichend, ihr Abschneiden im Fall der reinen Sedimentation zu betrachten.



# 10.

---

## Vergleich der Rechenzeiten

---

Der Fokus der vorangegangenen Kapitel lag auf der Nähe der Ergebnisse des spektralen Referenzmodells und der parametrisierten Modelle. Zum Abschluss sollen die Rechenzeiten der in den Kapiteln 5, 7 und 9 verwendeten Modelle verglichen werden. Hierbei liegt das Augenmerk auf der Veränderung der Rechenzeit des Modells durch Variation der eingesetzten Sedimentationsparametrisierung. Zur Vereinfachung der Ausdrucksweise werden wir die „Schnelligkeit einer Sedimentationsparametrisierung“ mit der „Schnelligkeit des Modells, welches diese Sedimentationsparametrisierung benutzt“ identifizieren.

Die relevanten Größen sind hierbei das Verhältnis der Rechenzeit (CPU-Zeit)  $T_R$  des Programms, in dem das entsprechende Modell implementiert ist, zur Zeitspanne der Simulation  $T_M$  (interne maximale Modellzeit) sowie das Verhältnis der Rechenzeiten von spektralem und parametrisiertem Modell:

$$T_{RM} := T_R/T_M, \quad T^{PS} := T_R^{\text{param}}/T_R^{\text{spek}}. \quad (10.1)$$

Eine Sedimentationsparametrisierung ist umso effizienter, je kleiner die beiden Kennziffern für das Modell sind, in dem sie verwendet wurde.

Es ist bei der Interpretation der Rechenzeit zu beachten, dass SED2MOM und RAINSHAFT in der Implementierung, unabhängig von der Sedimentationsparametrisierung, noch Optimierungspotential besitzen.

Die numerischen Simulationen wurden durchgeführt auf einem 4 X Dual Core AMD Opteron Prozessor mit 2412 MHz (Sun Fire Z4600). Die Zeitschrittweite beträgt in allen Fällen 0,125 s. Pro Lauf erfolgen jeweils 21 Aufrufe der Ausgaberroutine. Für die parametrisierten Modelle sind die prognostischen Momente  $M_0$  und  $M_3$ . Alle Zeiten sind in [h : min : s] angegeben.

**Tabelle 10.1** – Rechenzeiten des spektralen Referenzmodells.

Anfangsspektrum	Prozesse	$T_M$	$T_R$	$T_{RM}$
Regentropfen ( $x_{\text{init}} = x_0$ )	S	0:12:30	1:31:--	7,28
	SC	0:12:30	1:45:--	8,40
	SCB	0:12:30	4:03:--	19,44
Wolkentropfen	SC	0:33:20	4:40:--	7,32
	SCB	0:33:20	10:50:--	19,50

## 10.1. Spektrales Modell (RAINSHAFT)

Im spektralen Referenzmodell wird die Durchmesserkoordinate in 131 Klassen aufgeteilt. Ausgehend von einem minimalen Tropfendurchmesser von  $D_{\text{min}} = 3,9372 \cdot 10^{-4}$  cm verdoppelt sich die Masse der Teilchen in jeder 4. Klasse, bis ein maximaler Tropfendurchmesser von 0,75 cm erreicht ist. Wird die interne Koordinate in weniger Klassen aufgeteilt, so verringert sich die Rechenzeit. Dies geht jedoch zu Lasten der Genauigkeit. Das Modell wird mit zwei verschiedenen Anfangsspektren initialisiert (Tabellen 4.1 und 4.2). Für das Regentropfenspektrum liegt die Modellzeit  $T_M$  bei 750 s, für das Wolkentropfenspektrum beträgt sie 2000 s.

In Tabelle 10.1 sind die Rechenzeiten des spektralen Modells für die verschiedenen Anfangsspektren und die verschiedenen berücksichtigten Prozesse aufgeführt. Es ist klar zu erkennen, dass sich die Rechenzeit mit der Anzahl der verwendeten Prozesse erhöht. Insbesondere die Zunahme von Zerfall verlängert  $T_R$  deutlich. Dies ist in der aufwändigen spektralen Beschreibung von Koagulation und Zerfall begründet: Die Koagulationen sind als zwei ineinander verschachtelte Schleifen über alle Tropfenklassen implementiert, sodass  $131^2$  Aufrufe der Koagulationsroutine nötig sind. Der Zerfall betrifft nur die Regentropfen, jedoch ist hier eine zusätzliche Schleife über die Klassen der entstehenden Bruchstücke nötig.

Für alle Konfigurationen gilt  $T_{RM} > 1$ , das Modell ist also immer langsamer als die Realität. Das Verhältnis von  $T_R$  zu  $T_M$  liegt für Sedimentation (S) sowie Sedimentation und Koagulation (SC) bei ungefähr 8. Mit zusätzlichen Zerfall (SCB) beträgt  $T_{RM}$  ungefähr 20. Diese Verhältnisse sind weitestgehend unabhängig vom Anfangsspektrum.

## 10.2. Parametrisierung auf Grundlage der $\Gamma$ -Verteilung

In diesem Abschnitt werden die Rechenzeiten der in den Kapiteln 5 und 9 verwendeten Modellkonfigurationen verglichen. Diese unterscheiden sich im verwendeten Advektionsschema und in den verwendeten Sedimentationsparametrisierungen. Zunächst soll kurz auf die Implementierung eingegangen werden.

Das MUSCL-Hancock-Advektionsschema aus SED2MOM ist deutlich aufwändiger als das Upstream-Schema aus RAINSHAFT. Ersteres berechnet den Advektionsterm über die Lösung lokaler Riemannprobleme, während das Zweite eine einfache Differenz benutzt. Jedoch ist das Upstream-Schema von geringerer Genauigkeit als das MUSCL-Hancock-Verfahren (Toro, 1999). Die verschiedenen Parametrisierungen unterscheiden sich im Ansatz für die Fallgeschwindigkeit und im Ansatz für  $\mu$ . Hier ist ein diagnostischer Parameter geringfügig rechenzeitintensiver als ein konstanter. Die Fallgeschwindigkeiten zeigen keine nennenswerten Komplexitätsunterschiede in ihrer Berechnung.

Der Einfluss von  $D_{\max}$  auf die Rechenzeit der ZW-Parametrisierung ist schwer zu quantifizieren und hängt von unterschiedlichen, sich gegenseitig beeinflussenden Faktoren ab. Zunächst muss für jede Berechnung des Flusses  $F_i$  der Steigungsparameter  $\lambda$  iterativ mit dem Newton-Verfahren (siehe zum Beispiel Stoer, 2005) bestimmt werden. Ist der mittlere Durchmesser größer als der kritische Wert  $\bar{D}_{jk,\text{krit}}$ , Gl. (3.7), so muss zusätzlich die Spiegelungstechnik angewendet werden, die eine alternative Berechnung der Integrale und der Suchfunktion bedingt. Im Folgenden werden vier Punkte aufgelistet, auf welche sich eine Veränderung von  $D_{\max}$  auswirkt. Es bedeutet „ $\searrow$ “ eine Erhöhung der Rechenzeit für kleinere  $D_{\max}$ . Entgegengesetzt ist ein „ $\swarrow$ “ zu verstehen.

- $\searrow$  **Verhältnis  $D_{\max}$  zu  $\bar{D}(x_{\text{init}})$ :** Je kleiner  $D_{\max}$ , desto eher wird  $\lambda$  für eine feste mittlere Anfangsmasse negativ, da der kritische Durchmesser überschritten wird.
- $\searrow$  **Geschwindigkeit:** Für kleinere  $D_{\max}$  ist die mittlere Fallgeschwindigkeit  $\bar{v}$  der Momente hoher Ordnung kleiner, und die Bereiche, in denen  $\bar{D}_{jk,\text{krit}}$  überschritten wird, verlassen langsamer das Simulationsgebiet als für größere  $D_{\max}$ .
- $\swarrow$  **Ausbreitung:** Je kleiner  $D_{\max}$ , desto enger ist das Signal des Momentes. Der Bereich, wo die Minimalwerte des Modells durch Werte des Momentsignals ersetzt werden und eventuell  $\lambda$  negativ ist, ist dann kleiner.
- $\downarrow\uparrow$  **Numerische Implementierung von  $\gamma$ :** Die unvollständige Gammafunktion ist als iterative Summe implementiert. Die Anzahl der zur Konvergenz nötigen Iterationsschritte hängt von  $\lambda D_{\max}$  und der Ordnung des betrachteten Momentes ab. Sie ist auf analytischem Wege nicht zu ermitteln.

Der Einfluss von  $D_{\max}$  auf die Rechenzeit der ZW-Parametrisierung soll daher auf Grund der unsicheren Argumentationslage im Weiteren nicht diskutiert werden.

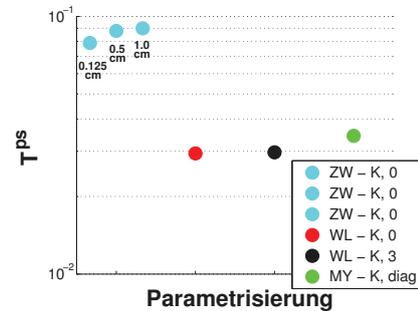
### 10.2.1. SED2MOM

Zunächst betrachten wir die Rechenzeiten der Sedimentationsparametrisierungen bei Verwendung des MUSCL-Hancock-Advektionsschemas und der Initialisierung mit einem Regentropfenspektrum (Tabelle 10.2).

Für alle Parametrisierungen gilt  $T_{\text{RM}} < 1$ , das Modell ist also schneller als die Realität. Bei ZW nimmt die Rechenzeit  $T_{\text{R}}$  mit größerem  $D_{\max}$  zu. Die Parametrisierungen WL<sub>0</sub>,

**Tabelle 10.2** – Rechenzeiten für die Parametrisierungen in SED2MOM, Initialisierung mit einem Regentropfenspektrum,  $T_M = 750$  s,  $D_{\max}$  in cm. Die Abbildung zeigt  $T^{\text{PS}}$  für die unterschiedlichen Parametrisierungen.

Parametr.	$D_{\max}$	$T_R$	$T_{\text{RM}}$	$T^{\text{PS}}$
ZW	0,125	0:07:16	0,581	$7,98 \cdot 10^{-2}$
	0,50	0:08:00	0,640	$8,79 \cdot 10^{-2}$
	1,00	0:08:11	0,655	$8,99 \cdot 10^{-2}$
WL <sub>0</sub>	$\infty$	0:02:40	0,213	$2,94 \cdot 10^{-2}$
WL <sub>3</sub>	$\infty$	0:02:42	0,216	$2,97 \cdot 10^{-2}$
MY	$\infty$	0:03:08	0,251	$3,44 \cdot 10^{-2}$



WL<sub>3</sub> und MY, welche  $D_{\max} = \infty$  verwenden, sind ungefähr um einen Faktor 3 schneller als ZW (siehe  $\mathcal{T}_R^{\text{S2M}}|_s$  in Tabelle 10.5). MY ist etwas langsamer als WL<sub>0</sub> und WL<sub>3</sub>, da hier der Formparameter  $\mu$  nicht konstant ist, sondern aus den prognostischen Momenten berechnet wird, siehe Gl. (3.15b).

Wägt man die Rechnergebnisse mit der Fehlernorm  $X$  (Abbildung 5.11) ab, so stellt man fest, dass ZW zwar genauer ist als MY, aber nicht in dem Maße, in dem MY schneller ist als ZW. So kann MY in diesem Zusammenhang als beste Parametrisierung gelten.

### 10.2.2. RAINSHAFT

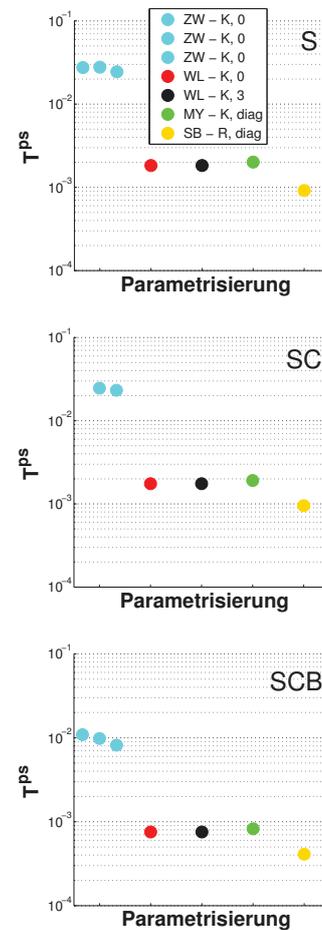
Die Tabellen 10.3 und 10.4 zeigen die Rechenzeiten des RAINSHAFT-Programmes, welches das Upstream-Advektionsschema verwendet. Variiert werden die verwendeten Sedimentationsparametrisierungen, die berücksichtigten Prozesse sowie die Anfangsbedingungen. Für die Initialisierung mit dem Wolkentropfenspektrum wurde bei der ZW-Parametrisierung nur ein  $D_{\max}$  getestet. Die Ergebnisse hatten gezeigt, dass  $D_{\max}$  keinen derart großen Einfluss auf die Rechenzeit hat, dass die Rangfolge der Parametrisierungen verändert würde.

Die Kenngrößen  $T_{\text{RM}}$  und  $T^{\text{PS}}$  sind dabei für jeweils alle Parametrisierungen bei beiden Anfangsbedingungen von gleicher Größenordnung. Im Fall der Initialisierung mit dem Wolkentropfenspektrum sind alle Parametrisierungen (bis auf ZW) im Vergleich zum spektralen Modell geringfügig schneller als bei der Initialisierung mit dem Regentropfenspektrum. Ein möglicher Grund ist die gleichbleibende Anzahl der Aufrufe der Ausgaberroutine bei gleichzeitig längerer Modellzeit.

Betrachten wir zunächst die Rechenzeiten im Sedimentations-Fall aus Tabelle 10.3. In den Werten für  $T_{\text{RM}}$  zeigt sich, dass die Verwendung des Upstream-Schemas, wie eingangs vermutet, die Rechenzeit im Vergleich zum MUSCL-Hancock-Advektionssche-

**Tabelle 10.3** – Wie Tab. 10.2, aber für RAINSHAFT mit verschiedenen Prozessen.

Param.	Proz.	$D_{\max}$	$T_R$	$T_{RM}$	$T^{PS}$
ZW	S	0,125	0:02:30	0,200	$2,75 \cdot 10^{-2}$
	SC	0,125	:-:--	:-:--	:-:--
	SCB	0,125	0:02:39	0,212	$1,09 \cdot 10^{-2}$
ZW	S	0,50	0:02:32	0,203	$2,78 \cdot 10^{-2}$
	SC	0,50	0:02:35	0,207	$2,46 \cdot 10^{-2}$
	SCB	0,50	0:02:23	0,191	$9,81 \cdot 10^{-3}$
ZW	S	1,00	0:02:21	0,188	$2,45 \cdot 10^{-2}$
	SC	1,00	0:02:26	0,195	$2,32 \cdot 10^{-2}$
	SCB	1,00	0:01:59	0,159	$8,16 \cdot 10^{-3}$
WL <sub>0</sub>	S	$\infty$	0:00:10	0,013	$1,83 \cdot 10^{-3}$
	SC	$\infty$	0:00:11	0,015	$1,75 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:11	0,015	$7,54 \cdot 10^{-4}$
WL <sub>3</sub>	S	$\infty$	0:00:10	0,013	$1,83 \cdot 10^{-3}$
	SC	$\infty$	0:00:11	0,015	$1,75 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:11	0,015	$7,54 \cdot 10^{-4}$
MY	S	$\infty$	0:00:11	0,015	$2,01 \cdot 10^{-3}$
	SC	$\infty$	0:00:12	0,016	$1,91 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:12	0,016	$8,24 \cdot 10^{-4}$
SB	S	$\infty$	0:00:05	0,007	$9,16 \cdot 10^{-4}$
	SC	$\infty$	0:00:06	0,008	$9,52 \cdot 10^{-4}$
	SCB	$\infty$	0:00:06	0,008	$4,11 \cdot 10^{-4}$



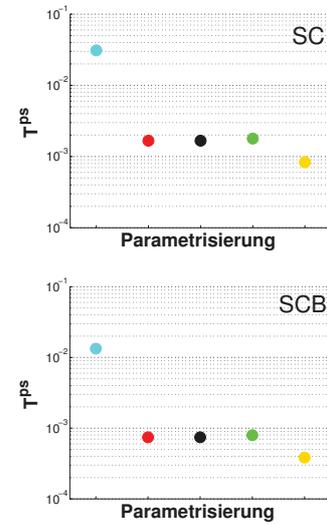
ma deutlich verkürzt. Die ZW-Parametrisierung ist rund 3 mal so schnell, während die Rechenzeit für die Parametrisierungen mit  $D_{\max} = \infty$  sich um rund einen Faktor 16 (WL<sub>0</sub>, WL<sub>3</sub>, MY) reduziert. Die ZW-Parametrisierung ist bei Verwendung des Upstream-Schemas um einen Faktor 13 bis 15 langsamer als die anderen Parametrisierungen (siehe  $\mathcal{T}_R^{S2M/RS}|_s$  bzw.  $\mathcal{T}_R^{RS}|_s$  in Tabelle 10.5).

Der Grund für die überproportionale Beschleunigung der Parametrisierungen mit  $D_{\max} = \infty$  liegt in unterschiedlichen Implementierungen von SED2MOM und RAINSHAFT: Während in SED2MOM auch für WL<sub>0</sub>, WL<sub>3</sub> und MY der Steigungsparameter  $\lambda$  iterativ bestimmt wird, ist dies in RAINSHAFT nur für die ZW-Parametrisierung der Fall. In dieser Hinsicht kann also SED2MOM noch optimiert werden.

Die numerische Umsetzung von Koagulation und Zerfall im parametrisierten Modell benötigt deutlich weniger Programmaufwand als im spektralen Modell. Wie in den Tabellen 10.3 und 10.4 zu sehen, unterscheiden sich die Rechenzeiten der parametri-

**Tabelle 10.4** – Wie Tab. 10.3, aber für die Initialisierung mit einem Wolkentropfenspektrum.  
 $T_M = 2000\text{ s}$ ,  $D_{\max}$  in cm.

Param.	Proz.	$D_{\max}$	$T_R$	$T_{RM}$	$T^{PS}$
ZW	SC	0,125	0:08:40	0,260	$3,10 \cdot 10^{-2}$
	SCB	0,125	0:08:40	0,260	$1,33 \cdot 10^{-2}$
WL <sub>0</sub>	SC	$\infty$	0:00:28	0,014	$1,67 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:29	0,015	$7,43 \cdot 10^{-4}$
WL <sub>3</sub>	SC	$\infty$	0:00:28	0,014	$1,67 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:29	0,015	$7,43 \cdot 10^{-4}$
MY	SC	$\infty$	0:00:30	0,015	$1,79 \cdot 10^{-3}$
	SCB	$\infty$	0:00:31	0,016	$7,95 \cdot 10^{-4}$
SB	SC	$\infty$	0:00:14	0,007	$8,33 \cdot 10^{-4}$
	SCB	$\infty$	0:00:15	0,008	$3,84 \cdot 10^{-4}$



sierten Modelle in den verschiedenen Prozesskombinationen daher nur geringfügig. Infolgedessen nimmt  $T^{PS}$  im SC-Fall etwas und im SCB-Fall deutlich ab: Die Parametrisierungen sind 30 – 1200 (SC) oder 75 – 2600 (SCB) mal so schnell wie das spektrale Modell.

Im SC- und SCB-Fall ist ZW rund 12 – 37 mal so langsam wie WL<sub>0</sub>, WL<sub>3</sub>, MY und SB (siehe  $\mathcal{T}_R^{RS}|_{SC}$ ,  $\mathcal{T}_R^{RS}|_{SCB}$  in Tabelle 10.5). Die eingangs erwähnten Faktoren, welche die Rechenzeit von ZW in Abhängigkeit von  $D_{\max}$  beeinflussen, kombinieren sich hier anders als bei SED2MOM: ZW wird schneller für größere  $D_{\max}$ , wie es auch im Grenzübergang zu WL<sub>0</sub> mit  $D_{\max} = \infty$  erwartet werden könnte.

In Abwägung der Modelllaufzeiten und dem Fehler  $X$  (Abbildungen 5.16 und 9.17) ist die SB-Parametrisierung die günstigste, da ihr Fehler fast so gering ist wie der von ZW<sub>opt</sub>, sie aber deutlich schneller läuft.

### 10.3. Parametrisierung auf Grundlage der $B$ -Verteilung

Tabelle 10.6 zeigt die Rechenzeiten des SED2MOM-Modells mit der Sedimentationsparametrisierung auf Grundlage der  $B$ -Verteilung (Kapitel 7). Das Modell wurde mit dem Regentropfenspektrum initialisiert und beinhaltet nur Sedimentation, das Advektionsschema ist das MUSCL-Hancock-Verfahren. Dargestellt sind die Rechenzeiten für verschiedene Ansätze für den freien Parameter  $q$ , Gl. (7.6a) – (7.6c).

Je komplizierter der Ansatz für  $q$  ist, desto höher ist auch der Rechenaufwand. Gleichzeitig erhöht sich die Rechenzeit für den linearen Ansatz drastisch, weil dort das linear

**Tabelle 10.5** – *Verhältnisse der Rechenzeiten unter Benutzung nachfolgender Abkürzungen: Wo.Tr. - Initialisierung mit Wolkentropfenspektrum, Re.Tr. - Initialisierung mit Regentropfenspektrum. S2M - SED2MOM, RS - RAINSHAFT.  $D_{\max}$  in cm. Des Weiteren:*

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_R^{\text{S2M}} &= T_{\text{RM}}(\text{ZW}(D_{\max,\text{ref}}))/T_{\text{RM}} && \text{in SED2MOM,} \\ \mathcal{T}_R^{\text{RS}} &= T_{\text{RM}}(\text{ZW}(D_{\max,\text{ref}}))/T_{\text{RM}} && \text{in RAINSHAFT,} \\ \mathcal{T}_R^{\text{S2M/RS}} &= T_{\text{RM}}^{\text{S2M}}/T_{\text{RM}}^{\text{RS}}.\end{aligned}$$

Param.	$D_{\max}$	$\mathcal{T}_R^{\text{S2M}} _s$	$\mathcal{T}_R^{\text{S2M/RS}} _s$	$\mathcal{T}_R^{\text{RS}} _s$	$\mathcal{T}_R^{\text{RS}} _{\text{SC}}$		$\mathcal{T}_R^{\text{RS}} _{\text{SCB}}$	
					Wo.Tr.	Re.Tr.	Wo.Tr.	Re.Tr.
$D_{\max,\text{ref}}$		0,50	0,50	0,50	0,125	0,50	0,125	0,50
ZW	0,125	1,1	2,9	1,0	1,0	–	1,0	0,9
	0,5	1,0	3,2	1,0	–	1,0	–	1,0
	1,0	1,0	3,5	1,1	–	1,1	–	1,2
WL <sub>0</sub>	$\infty$	3,0	16,4	15,6	18,6	13,8	17,3	12,7
WL <sub>3</sub>	$\infty$	3,0	16,6	15,6	18,6	13,8	17,3	12,7
MY	$\infty$	2,6	16,7	13,5	17,3	12,9	16,3	11,9
SB	$\infty$	–	–	–	37,2	25,8	32,5	23,9

**Tabelle 10.6** – *Rechenzeiten für die Parametrisierung auf Grundlage der B-Verteilung.  $T_M = 750$  s.  $D_{\max} = 0,25$  cm.*

Ansatz für $q$		$T_R$	$T_{\text{RM}}$	$T^{\text{PS}}$	Iterationsverfahren für $p$
konstant	Gl. (7.6a)	0:03:45	0,30	$4,12 \cdot 10^{-2}$	Newton
linear	Gl. (7.6b)	0:14:22	1,15	$1,58 \cdot 10^{-1}$	Bisektion
quadratisch	Gl. (7.6c)	0:04:58	0,40	$5,17 \cdot 10^{-2}$	Newton

konvergierende Bisektionsverfahren zur iterativen Bestimmung des Verteilungsparameters  $p$  eingesetzt werden muss (das Newton-Verfahren konvergiert quadratisch, siehe auch Rice, 1987).

Verglichen mit den Rechenzeitergebnissen für ZW aus SED2MOM (Tabelle 10.2), ist der Ansatz mit der B-Verteilung doppelt so schnell (eine Ausnahme ist der Lauf mit Verwendung des Bisektionsverfahrens). Ein möglicher Grund ist die schnellere iterative Berechnung des freien Parameters.



## Zusammenfassung & Diskussion

---

Wolken sind auf Grund ihrer wichtigen Rolle im Wasserkreislauf, für den Wärmetransport sowie für die Strahlungsbilanz ein unverzichtbarer Bestandteil jedes Wetter- und Klimamodells. Da auf Grund des notwendigen Rechenaufwands die spektrale Beschreibung der Wolkenmikrophysik in diesen Modellen nicht praktikabel ist (Cotton et al., 2011), versucht man, sie über Ensemblegrößen zu erfassen. Diese Parametrisierung kann mit Momentenverfahren durchgeführt werden.

Es zeigt sich, dass schon die Parametrisierung der Sedimentation mit einem Zwei-Momenten-Verfahren problematisch ist: Die Schweresortierung des Hydrometeor-Ensembles in spektraler Betrachtungsweise kann nur bedingt nachgebildet werden. Die mittlere Masse des Ensembles liegt in Bereichen, welche im wolkenphysikalischen Kontext nicht sinnvoll sind. Um dies zu vermeiden, ist es nötig, das Verhältnis der mittleren Fallgeschwindigkeiten der Momente zu modifizieren.

### 11.1. Die neuentwickelte Parametrisierung

In dieser Arbeit wurde ein grundlegender, physikalisch motivierter Parametrisierungsansatz für die Sedimentation von Hydrometeor-Ensembles entwickelt. Bei der Definition der Momente (als ein Integral über das Hydrometeorspektrum) wurde angenommen, dass die Größe der Teilchen im Ensemble beschränkt ist.

Diese Herangehensweise steht im Gegensatz zu den Ansätzen bisheriger Arbeiten. Sie verwenden eine Integralobergrenze, welche einem Teilchen mit unendlichem Durchmesser entspricht. Eine solche Definition hat den Vorteil, dass die Integrale sehr leicht zu berechnen sind. Jedoch wird so die Existenz unrealistisch großer Hydrometeore angenommen. Zur Lösung des Schweresortierungs-Problems, d. h. zur Korrektur der Verhältnisse der mittleren Fallgeschwindigkeiten der prognostischen Momente, modifizieren die meisten bisherigen Ansätze im laufenden Modell entweder die mittleren

Fallgeschwindigkeiten direkt oder beeinflussen diese indirekt über die Verteilungsparameter oder die prognostischen Momente. Einige dieser dynamischen Veränderungen beruhen auf Anpassungen an spektrale Rechnungen.

Im Gegensatz dazu setzt die in dieser Arbeit neu entwickelte Methode an der Basis der Parametrisierungsannahmen an. Durch den endlichen Integrationsbereich ist die maximal mögliche mittlere Masse, die das Modell erreichen kann, beschränkt. Die Integralobergrenze soll der physikalisch sinnvollen maximalen Teilchenabmessung entsprechen, um eine größere Nähe zur Lösung des spektralen Modells zu erreichen als bisher.

## 11.2. Zusammenfassung der Ergebnisse

Zunächst wurden die Modellgleichungen des Zwei-Momenten-Verfahrens auf Basis der neuen Momentdefinition neu aufgestellt und untersucht (Kapitel 3.1). Durch die endliche Integralobergrenze  $D_{\max}$  treten mathematische Probleme in der Berechnung der Momente auf, wenn die mittlere Masse einen gewissen Wert überschreitet. Um dem abzuweichen, wurde eine Spiegelungstechnik für die Integrale entwickelt, mit der sie auch in diesem Fall berechnet werden können. Die Gleichungen für die Parameter der Verteilungsfunktion erhalten ebenfalls eine neue Struktur.

In Kapitel 5.2 wurde der Einfluss der Integralobergrenze  $D_{\max}$  auf die Ergebnisse des parametrisierten Modells ausführlich untersucht. Es stellte sich heraus, dass die Ergebnisse systematisch von  $D_{\max}$  abhängen. Das Verhalten der mittleren Geschwindigkeit der prognostischen Momente mit  $D_{\max}$  ist durch ihre Ordnung bestimmt. Insbesondere wird das Signal der Anzahldichte mit kleinerem  $D_{\max}$  schneller verlagert, wohingegen das Signal des Flüssigwassergehaltes langsamer verlagert wird. Eine Verkleinerung von  $D_{\max}$  gleicht ihre Geschwindigkeiten an und verspricht so, dass Schweresortierungs-Problem zu lösen. Weiterhin konnte durch eine Sensitivitätsnorm erfasst werden, dass Momente höherer Ordnung schon in höheren  $D_{\max}$ -Bereichen sensitiv auf Veränderungen in  $D_{\max}$  reagieren als niedrige Momente. So wird bei der Prognose von  $N$  und  $L$  durch eine Verkleinerung von  $D_{\max}$  das Signal des Flüssigwassergehalts eher verändert als der Anzahldichte.

Zur Quantifizierung der Nähe der Parametrisierungs-Ergebnisse zur spektralen Referenzlösung wurde eine Fehlernorm, bezeichnet mit  $X$ , eingeführt. Entgegen der ursprünglichen Vermutung zeigte sich, dass die Verwendung einer physikalisch motivierten Integralobergrenze (zum Beispiel  $D_{\max} = 0,75$  cm) keine optimalen Ergebnisse liefert: Der Fehler  $X(D_{\max})$  ist dort nicht minimal. Das optimale  $D_{\max}$  ist kleiner als der physikalisch maximale Teilchendurchmesser und hängt von der mittleren Masse des Anfangszustandes des Testproblems ab. Anhand von Simulationen mit variierender mittlerer Masse des Anfangszustandes, bei denen das optimale  $D_{\max}$  ermittelt wurde, wurde eine Beziehung für  $D_{\max, \text{opt}}$  in Abhängigkeit von der mittleren Masse des An-

fangszustandes hergeleitet. Gegenüber bereits existierenden Parametrisierungen zeigt die  $D_{\max}$ -Parametrisierung im Sedimentationsfall bei variierender mittlerer Anfangsmasse eine deutliche Verbesserung: Die optimierte Form der  $D_{\max}$ -Parametrisierung hat von allen hier getesteten Parametrisierungen den geringsten Fehler. Selbst in nicht-optimierter Form schneidet die  $D_{\max}$ -Parametrisierung im Vergleich noch gut ab. Der Fehler bezüglich der Referenzlösung konnte gegenüber der  $WL_0$ -Parametrisierung nahezu halbiert werden. Wie in Kapitel 5.3 gezeigt wurde, gilt dies ebenfalls bei Verwendung unterschiedlicher Advektionsschemata.

In Kapitel 6 wurde die neue Parametrisierung auf einen anderen Hydrometeorotyp („dicht bereifte Aggregate von Dendriten“) übertragen. Wie schon von Sekhon u. Srivastava (1970) vermutet, verbessert die Annahme einer endlichen maximalen Teilchenabmessung auch bei Hydrometeoriten der festen Phase die Ergebnisse. Bei den nicht-sphärischen Hydrometeoriten der festen Phase ist es möglich, die interne Koordinate auf zwei Wegen festzulegen (als charakteristische Länge oder als Durchmesser des geschmolzenen Teilchens). Die unterschiedlichen internen Koordinaten führen erwartungsgemäß zu unterschiedlichen Ergebnissen, sowohl in der spektralen Referenz als auch in der Parametrisierung. Die hier durchgeführten Simulationen lassen keine Schlussfolgerung bezüglich der Güte der internen Koordinaten zu.

Weiterhin wurde eine alternative Annahme für die feste Form der Tropfengrößenverteilungsfunktion getestet (Kapitel 7). Die  $B$ -Verteilung besitzt im Gegensatz zu der aus historischen Gründen in der Wolkenphysik verwendeten  $\Gamma$ - oder exponentiellen Verteilung einen beschränkten Definitionsbereich. So entfällt das Abschneiden der Verteilungsfunktion, welches bei der  $\Gamma$ -Verteilung zu mathematischen Problemen und erhöhter Rechenzeit führte. Es stellt sich heraus, dass die Berechnung der Momente und der Verteilungsparameter wesentlich unkomplizierter ist als für die  $\Gamma$ -Verteilung mit  $D_{\max} < \infty$ . Allerdings besitzt die  $B$ -Verteilung drei freie Parameter, so dass die Ergebnisse des Zwei-Momenten-Verfahrens stark vom Ansatz für den dritten Parameter abhängen.

Im nächsten Schritt wurde in Kapitel 8 das Sedimentationsmodell um Tropfenkollisionen erweitert, die entweder Koaleszenz oder Zerfall der Tropfen zur Folge haben. Die Neuformulierung der parametrisierten Umwandlungsraten mit  $D_{\max} < \infty$  führt auf ein sehr kompliziertes Gleichungssystem, welches für eine Parametrisierung nicht praktikabel ist. Daher wurde auf die parametrisierten Umwandlungsraten von Seifert u. Beheng (2006) zurückgegriffen. Mit ihnen wurden erneut die verschiedenen Sedimentationsparametrisierungen unter zwei verschiedenen Anfangsbedingungen getestet (Kapitel 9). Hierbei wurde das Modell in einen Fall mit einem reinen Wolkentropfenspektrum initialisiert, in dem sich Regentropfen bzw. Momente der Regenkatégorie erst durch Umwandlungsprozesse bilden müssen. Im anderen Fall wurde das Modell mit

einem Regentropfenspektrum initialisiert, bei dem schon Regentropfen bzw. Momente der Regenkatgorie vorhanden sind.

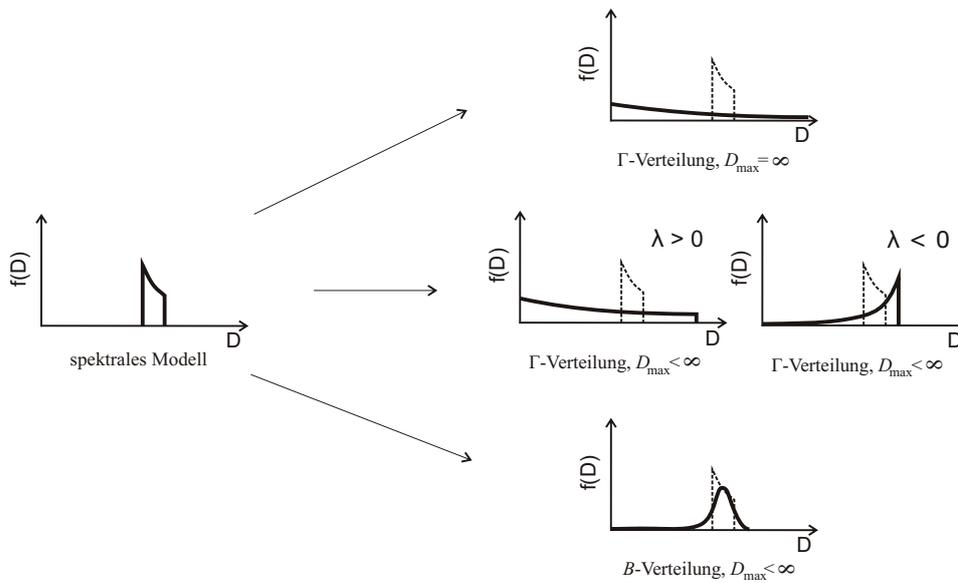
Die Analysen zeigten, dass im ersteren Fall die Änderungsraten der Momente in Folge von Sedimentation und Umwandlungsprozessen von gleicher Größenordnung sind. Des Weiteren beeinflusst der für die Sedimentationsparametrisierung gewählte Geschwindigkeitsansatz für kleine Tropfen die Umwandlungsraten stark. Da der Ansatz von Kessler (1969) die Geschwindigkeit der kleinen Tropfen deutlich überschätzt, sind auch die mittleren Fallgeschwindigkeiten der prognostischen Momente für kleine mittlere Massen zu groß. So sind die parametrisierten Umwandlungsraten bei Verwendung der auf Kessler (1969) aufbauenden Sedimentationsparametrisierungen mangelhaft. Einzig die SB-Parametrisierung (Fallgeschwindigkeit nach Rogers et al., 1993) zeigt gute Ergebnisse. Deren Formparameter ist jedoch an spektrale Rechnungen angepasst, deren Einstellung denen des hier verwendeten Referenzmodells gleichen. So hat die SB-Parametrisierung einen Vorteil. Eine Güteabwägung der Sedimentationsparametrisierungen erscheint daher wenig sinnvoll. Wird die  $D_{\max}$ -Parametrisierung benutzt, so darf  $D_{\max}$  nicht so klein gewählt werden, dass die zugehörige mittlere Masse durch Koagulationen im laufenden Modell überschritten wird, da dann die Simulation abbrechen muss (betrachtet man feste Hydrometeore, so entstehen ähnliche Probleme beim Bereifen und der Aggregation von Eiskristallen).

Initialisiert man hingegen das Modell mit einem Regentropfenspektrum, so dominieren die Sedimentationsraten die Umwandlungsraten der Kollisionen. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse aus den reinen Sedimentationsexperimenten dann übertragbar sind. Insbesondere ändert sich die Rangfolge der Sedimentationsparametrisierungen, gemessen mit der Fehlernorm  $X$ , nicht und die  $D_{\max}$ -Parametrisierung besitzt wiederum den kleinsten Fehler.

In Kapitel 10 wurden die Rechenzeiten der numerischen Modelle in den verschiedenen Konfigurationen zusammengestellt. Das Verhältnis der Rechenzeit der parametrisierten Modelle zum spektralen Modell hängt von der Sedimentationsparametrisierung, dem Advektionsschema und den betrachteten Prozessen ab. Je aufwändiger die Prozesse in spektraler Implementierung sind, desto lohnender ist ihre Parametrisierung. Die neuentwickelte  $D_{\max}$ -Parametrisierung hat von allen betrachteten Parametrisierungsverfahren die längste Rechenzeit, die SB-Parametrisierung die kürzeste. Vergleicht man die Ergebnisse der Fehlernorm und die Rechenzeiten der jeweiligen Parametrisierung, so schneidet SB am besten ab, gefolgt von MY.

### 11.3. Diskussion

Die neue  $D_{\max}$ -Parametrisierung steht in ihrer Herangehensweise im prinzipiellen Gegensatz zu anderen Sedimentationsparametrisierungsansätzen (Cohard u. Pinty, 2000; Milbrandt u. Yau, 2005a; Seifert u. Beheng, 2006) und Mansell (2010), welche



**Abbildung 11.1** – Übersicht über die Momentaufnahme der Lösung des spektralen Modells, Gl. (4.1), an einer bestimmten Höhe (links) und deren Repräsentation durch die verschiedenen Verteilungsfunktionen:  $\Gamma$ -Verteilung mit  $D_{\max} = \infty$ ,  $\Gamma$ -Verteilung mit  $D_{\max} < \infty$  ( $\lambda > 0$ ,  $\lambda < 0$ ),  $B$ -Verteilung mit  $D_{\max} < \infty$  (rechts, v. o. n. u.).

versuchen, das Schweresortierungs-Problem zu lösen. Diese bisherigen Ansätze greifen dynamisch in das laufende Modell ein, während die  $D_{\max}$ -Parametrisierung das Schweresortierungs-Problem über physikalische Grundannahmen von vornherein zu vermeiden sucht.

In der hier verwendeten Modellkonfiguration ist es möglich, über den Anfangszustand ein optimales  $D_{\max}$  festzulegen, dessen Anwendung in der Parametrisierung dazu führt, dass sich die Ergebnisse des parametrisierten Modells am wenigsten von der Referenzlösung unterscheiden. Die Verwendung ungeeigneter  $D_{\max}$  kann allerdings teilweise zu großen Fehlern führen. In einem Wettervorhersagemodell ist die Wolkenentwicklung ungleich komplexer als im verwendeten Testproblem. Insbesondere ist kein klarer Anfangszustand einer Wolke festgelegt, anhand dessen man die optimale maximale Hydrometeorabmessung für die  $D_{\max}$ -Parametrisierung festmachen kann. Die einzige Möglichkeit ist in diesem Fall,  $D_{\max}$  über die am wahrscheinlichsten in der zu simulierenden Wetterlage vorherrschenden mittleren Tropfenmasse festzulegen.

Ein Vergleich mit anderen Parametrisierungen zeigte, dass die in dieser Arbeit neu entwickelte  $D_{\max}$ -Parametrisierung in ihrer optimalen Form gute Ergebnisse liefert. Das

Verfahren ist allerdings aufgrund der endlichen Integralobergrenze und den daraus resultierenden Problemen (iterative Suche nach dem Verteilungsparameter  $\lambda$ , Spiegelungstechnik zum Berechnen von Integralen mit  $\lambda < 0$ ) derzeit noch numerisch sehr aufwändig. Je nach verwendetem Advektionsschema ist die ZW-Parametrisierung in dem hier benutzten 1D-Modell um einen Faktor 3 bzw. 16 langsamer als die anderen getesteten Sedimentationsparametrisierungen. Um die entwickelte  $D_{\max}$ -Parametrisierung in einem Wettervorhersagemodell zu verwenden, ist daher noch eine Optimierung der Rechenzeit notwendig, die jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit ist. Hierbei ist auf Grund der konzeptionellen Unterschiede nicht zu erwarten, dass sich die Rechenzeit-Rangfolge der Sedimentationsparametrisierungen ändert.

Ein nächster Schritt zur Optimierung der Rechenzeit wäre etwa, für feste Werte von  $D_{\max}$  den Steigungsparameter  $\lambda$  in Abhängigkeit der beiden prognostischen Momente im Voraus zu berechnen und tabelliert abzulegen. Im laufenden Modell könnte dann zwischen den schon vorhandenen Werten auf geschickte Art und Weise interpoliert werden. Dies reduziert den Rechenaufwand. Eine andere Möglichkeit wäre die Approximation der unvollständigen Gammafunktion durch nichtlineare Funktionen nach Blahak (2010). Der Autor bezeichnet den Approximationsfehler als hinreichend gering für die meisten Wolkenphysik-Anwendungen, wenn die Argumente der unvollständigen Gammafunktion hinreichend groß sind. Da bei der neuen Sedimentationsparametrisierung jedoch meist ein Vorzeichenwechsel von  $\lambda$  auftritt, werden die Argumente zwangsläufig sehr klein. Dies führt bei der Verwendung dieser Approximation in SED2MOM im Bereich von  $\lambda \approx 0$  zu Instabilitäten in der Lösung.

Die  $B$ -Verteilungsfunktion vereinfacht die Implementierung einer endlichen Integralobergrenze in den Momenten deutlich. Sie ist aber nicht für das Zwei-Momenten-Verfahren geeignet, da ein zusätzlicher freier Parameter existiert. Die bisher erhaltenen Resultate legen jedoch nahe, dass eine Umsetzung in einem Drei-Momenten-Verfahren lohnend wäre und verbesserte Ergebnisse erzielen würde. Abbildung 11.1 gibt eine Übersicht darüber, wie die verschiedenen in dieser Arbeit verwendeten Typen der Verteilungsfunktionen die Lösung des spektralen Modells zu einer bestimmten Zeit und Höhe darstellen können: Die aus der Lösung des spektralen Modells berechneten prognostischen Momente werden im parametrisierten Modell über die skizzierten Verteilungsfunktionen repräsentiert. Insbesondere die Darstellung über die  $\Gamma$ -Verteilung mit  $D_{\max} = \infty$  unterscheidet sich deutlich von der Lösung des Referenzmodells.

Kapitel 10 zeigte, dass das MUSCL-Hancock-Verfahren in SED2MOM die Rechenzeit des parametrisierten Modells gegenüber der Verwendung des Upstream-Schemas in RAINSHAFT erheblich verlängert (weitere numerische Verfahren zur Lösung von Advektionsgleichungen sind in Toro (1999) oder Durran (1999) dargestellt). Die Nutzung des genauen MUSCL-Hancock-Verfahrens ist übertragen aus den Ein-Momenten-Verfahren, bei deren Anwendung die Lösung der Momentengleichung im Sedimentationsfall eine

Stoßwelle beinhaltet (Anhang A.2). Bei Zwei-Momenten-Verfahren sind die Stoßwellen sehr gering ausgeprägt; für  $j = 0$ ,  $k = 3$  betragen sie höchstens ein Tausendstel des Anfangswertes. Daher geht bei der Vorhersage von  $N$  und  $L$  nur wenig Information verloren, wenn die Stoßwellen durch ein diffusiveres Advektionsschema nicht aufgelöst werden (die Ergebnisse aus den Kapiteln 5.2 und 5.3 zeigen keine signifikanten Unterschiede).

Wie ausschlaggebend bei der Wertung von Parametrisierungen die Wahl der Fehlernorm ist, zeigt ein Vergleich mit der Arbeit von Milbrandt u. McTaggart-Cowan (2010). Die Autoren vergleichen Momentenverfahren unterschiedlicher Komplexität mit verschiedenen prognostischen Momenten. Die dort verwendete Fehlernorm benutzt die absolute räumliche Differenz zwischen den Lösungen des parametrisierten und des spektralen Modells und verwendet Beiträge der ersten sieben Momente mit unterschiedlichen Gewichtungen. Die Autoren stellen fest, dass das weitverbreitete und auch hier verwendete Zwei-Momenten-Schema mit  $N$  und  $L$  als prognostischen Variablen und Formparameter  $\mu = 0$  sehr schlecht abschneidet. Sogar die Ein-Momenten-Verfahren sind in ihrer Wertung besser. Die Autoren vergleichen ebenfalls die auch hier verwendeten Parametrisierungen MY und SB. Deren Fehlernorm ist im Vergleich zum  $(N, L, \mu = 0)$ -Schema um einen Faktor 1000 kleiner. Eine derartig große Diskrepanz zwischen dem Abschneiden der Parametrisierungen konnte in dieser Arbeit aufgrund der anderen Fehlernormdefinition nicht festgestellt werden.

Neben den hier erwähnten, über räumliche Differenzen definierten Fehlernormen sind noch andere Gütemaße denkbar, deren Wahl von der Zielsetzung der Optimierung der Parametrisierung abhängt. Zum Beispiel ist es möglich, den Zeitpunkt des Einsetzens des Niederschlags in spektralem und parametrisierten Modell zu vergleichen und diese Differenz in die Fehlernorm mit einzubeziehen. Weiterhin können die Ergebnisse des Sedimentationsmodells als Eingabegrößen für ein weiterführendes Modell dienen und dessen Ergebnisunterschiede als Fehlernormdefinition benutzt werden.

## 11.4. Resümee und Ausblick

Die Parametrisierung der Sedimentation von Hydrometeoren hat auf Grund der vielfältigen atmosphärischen Wechselwirkungen weitreichende Konsequenzen für unterschiedliche Bereiche der Wetter- und Klimamodelle.

Über den Fallgeschwindigkeitsansatz der Sedimentationsparametrisierung wird sowohl der Zeitpunkt des Eintreffens als auch die Dauer des Niederschlags am Boden gesteuert. Weiterhin wird die Zeit beeinflusst, die die Hydrometeore fallend unterhalb der Wolke verbringen. Je länger die Tropfen der untersättigten Luft ausgesetzt sind, umso mehr Verdunstung kann stattfinden. So erhöht sich der Wasserdampfgehalt der Umgebungsluft und es sinkt die Niederschlagsmenge, die den Erdboden erreichen kann. Da bei Verdunstung von Hydrometeoren der umgebenden Luft latente Wärme

entzogen wird, sinkt die Temperatur in diesem Höhenbereich. Der Grad der Verdunstung bzw. der genaue Temperaturabfall ist abhängig von der vorherrschenden relativen Feuchte und von der Niederschlagsmenge. Es kann so in einigen Höhenbereichen eine instabile Schichtung der Umgebungsluft entstehen. Da weiterhin durch Verdunstung die mittlere Masse des Hydrometeorensambles geringer wird, nimmt die mittlere Fallgeschwindigkeit des Ensembles ab. So wird die Sedimentation beeinflusst.

Diese Aufzählung von Abhängigkeiten und Auswirkungen ließe sich fortsetzen.

Die genaue Untersuchung einer Sedimentationsparametrisierung in einem komplexen Modell ist auf Grund dieser vielfältigen und weitreichenden Auswirkungen nicht praktikabel. Daher greifen viele Autoren (Milbrandt u. Yau, 2005a; Mansell, 2010; Milbrandt u. McTaggart-Cowan, 2010; Ziemer u. Wacker, 2012; Shipway u. Hill, 2012) auf ein eindimensionales Säulenmodell zurück. Hier kann das Verhalten der Sedimentationsparametrisierung einfach analysiert und die Nähe der Ergebnisse des parametrisierten Modells zu einer Referenzlösung betrachtet werden. Die in dieser Arbeit neu entwickelte Parametrisierung lieferte im Vergleich zu bereits existierenden Parametrisierungen gute Ergebnisse. Bei ihrer Verwendung ist die Rechenzeit des Modells jedoch höher, da ihre Gleichungen komplexer aufgebaut sind. Da ein Wettervorhersage- oder Klimamodell wesentlich umfangreicher als der eindimensionale Testfall ist, scheint es der Autorin angebracht, die neuentwickelte Parametrisierung in solchen Modellen zu erst testen, wenn ihre numerische Umsetzung optimiert ist.

Einer der nächsten Schritte sollte also darauf abzielen, die Implementierung der Parametrisierung hinsichtlich der Rechenzeit zu optimieren. Beispielhaft wurden in Kapitel 11.3 bereits die Tabellierung der  $\lambda$ -Werte oder die Verwendung der Approximation der unvollständigen Gammafunktion für hinreichend große Steigungsparameter  $\lambda$  als Maßnahmen zur Optimierung der Rechenzeit angesprochen.

Unabhängig von einer Beschleunigung der Rechenzeit sind weitere grundsätzliche Verbesserungen des Sedimentationsmodells möglich:

Die mangelhaften Modellergebnisse bei Berücksichtigung von Kollisionen und der Initialisierung mit einem Wolkentropfenspektrum (Kapitel 9.1) zeigen, dass es nötig ist, gerade die Geschwindigkeit der kleinen Tropfen korrekt wiederzugeben. Hierzu muss ein hinreichend genauer, aber analytisch integrierbarer Ansatz gewählt werden. Eine Möglichkeit stellt dabei der Ansatz von Ferrier (1994) oder dessen Verbesserung von Abel u. Shipway (2007) dar.

Des Weiteren kann ein Drei-Momenten-Verfahren auf Grundlage der  $B$ -Verteilung entwickelt werden. Durch die Vorhersage eines zusätzlichen Momentes erreicht man eine höhere Genauigkeit, auch wenn der Rechenaufwand zwangsläufig ansteigt. Dieser Ansatz scheint am lohnendsten, um eine große Nähe der Lösung des parametrisierten Modells zur Referenzlösung zu erhalten: In einem solchen Modell können die Flexibilität und die analytische Simplizität der  $B$ -Verteilung mit den in dieser Arbeit dargestellten Vorteilen eines abgeschnittenen Tropfenspektrums kombiniert werden.

# Anhänge

---



# A.

---

## Analytische Lösung der Momentengleichungen

---

In diesem Kapitel sollen die parametrisierten Gleichungen zur Beschreibung der Sedimentation in zwei Momenten analytisch untersucht werden. Die Integralobergrenze ist hierbei durch  $D_{\max} = \infty$  gegeben. Zunächst wird das Gleichungssystem mathematisch klassifiziert. Anschließend ist es auf Grund der speziellen Form der gewählten Anfangsbedingungen möglich, die Lösung des Gleichungssystems analytisch auszurechnen. Details und Erklärungen zur benutzten Lösungsmethodik finden sich zum Beispiel in Toro (1999) oder LeVeque (1992).

In Wacker u. Seifert (2001) ist ebenfalls eine analytische Lösung der Momentengleichungen angegeben. Die Autoren beschränken sich jedoch auf die prognostischen Momente  $N$  und  $L$  (d. h. auf die Ordnungen  $j = 0$  und  $k = 3$ ) und den Formparameter  $\mu = 0$ . Im Gegensatz dazu bleiben hier die Ordnungen der prognostischen Momente beliebig. Es wird untersucht, wie sich die Lösungsstruktur bei Variation von  $j$ ,  $k$  und dem verwendeten Formparameter  $\mu$  verändert.

Zusätzlich werden die analytischen Ergebnisse mit den Resultaten der Parametrisierungen  $WL_0$  und  $WL_3$  (Wacker u. Lüpkes, 2009, Kapitel 3.2) verglichen.

### A.1. Hyperbolizität der Gleichungen für zwei Momente

Zur Erinnerung sei hier noch einmal das aus Gl. (2.7) entstehende Gleichungssystem für zwei beliebige prognostische Momente angegeben:

$$\partial_t M_j(t, z) - \partial_z F_j(t, z) = 0, \quad (\text{A.1a})$$

$$\partial_t M_k(t, z) - \partial_z F_k(t, z) = 0. \quad (\text{A.1b})$$

Es handelt sich hierbei um ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, welches sich umformulieren lässt zu

$$\partial_t \begin{pmatrix} M_j \\ M_k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{M_j} F_j & \partial_{M_k} F_j \\ \partial_{M_j} F_k & \partial_{M_k} F_k \end{pmatrix}}_{=: A} \partial_z \begin{pmatrix} M_j \\ M_k \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Um die Einträge der Matrix  $A$  berechnen zu können, müssen Annahmen über die Parametrisierung getroffen werden. Für eine Übertragbarkeit der analytischen Ergebnisse auf die Parametrisierungen  $WL_0$  und  $WL_3$  wird  $f(D) = n_0 D^\mu e^{-\lambda D}$ , Gl. (2.13), mit beliebigem, aber konstantem  $\mu$ , sowie  $D_{\max} = \infty$  verwendet. Die terminale Fallgeschwindigkeit wird allgemein als Potenzgesetz angesetzt:  $v_T(D) = \alpha D^\beta$ , Gl. (2.10). Die im Laufe dieses Kapitels angegebenen Zahlenwerte für Eigenwerte und Momente sind mit  $\alpha = 1300$ ,  $\beta = 0,5$  berechnet worden (Kessler, 1969, Gl. (C.1)). Es ergibt sich:

$$\partial_{M_j} F_j = \alpha (1 - \xi) \frac{\Gamma(j + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(j + \mu + 1)} \lambda^{-\beta}, \quad (\text{A.3a})$$

$$\partial_{M_k} F_j = \alpha \xi \frac{\Gamma(j + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \lambda^{k-j-\beta}, \quad (\text{A.3b})$$

$$\partial_{M_j} F_k = -\alpha \xi \frac{\Gamma(k + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(j + \mu + 1)} \lambda^{-(k-j)-\beta}, \quad (\text{A.3c})$$

$$\partial_{M_k} F_k = \alpha (1 + \xi) \frac{\Gamma(k + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \lambda^{-\beta}, \quad (\text{A.3d})$$

mit  $\xi = \beta/(k - j)$ . Da die Einträge der Matrix  $A$ , Gl. (A.3a) – (A.3d), über  $\lambda$  von den prognostischen Variablen abhängen, ist das Gleichungssystem (A.1) quasilinear.

Mit den Abkürzungen

$$\Gamma_j = \frac{\Gamma(j + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(j + \mu + 1)}, \quad \Gamma_k = \frac{\Gamma(k + \mu + \beta + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \quad (\text{A.4})$$

ergeben sich als Eigenwerte für  $\iota = 1, 2$

$$v_\iota(\lambda) = \frac{\alpha}{2} \lambda^{-\beta} \underbrace{((\xi + 1)\Gamma_k - (\xi - 1)\Gamma_j)}_{=: \phi} \pm \underbrace{\sqrt{\phi^2 - \alpha^2 \lambda^{-2\beta} \Gamma_k \Gamma_j}}_{=: \psi}, \quad (\text{A.5})$$

und man definiert  $v_1 = \phi + \psi$ ,  $v_2 = \phi - \psi$ .

Über  $\lambda = \lambda(M_j, M_k)$  sind auch die Eigenwerte  $v_\iota$  von  $M_j$  und  $M_k$  abhängig, d. h.  $v_\iota = v_\iota(\lambda) = v_\iota(M_j, M_k)$ . Das Argument der Wurzel in  $\psi$  ist immer positiv. Weiterhin zeigt man durch eine einfache Rechnung, dass  $v_1(\lambda) > v_2(\lambda) > 0$  für alle  $\lambda$ . Also besitzt die Matrix  $A$  nur reelle, positive Eigenwerte.

Die Eigenvektoren  $w_i$  der Matrix  $A$  sind

$$w_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \partial_{M_k} F_j \\ v_i - \partial_{M_j} F_j \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

wobei das zweite Element des Vektors gegeben ist durch

$$\begin{aligned} w_{i,2}(\lambda) &:= v_i - \partial_{M_j} F_j \\ &= \alpha \lambda^{-\beta} \underbrace{\left( \frac{1}{2} ((\xi + 1)\Gamma_k + (\xi - 1)\Gamma_j) \pm \sqrt{\frac{1}{4} ((\xi + 1)\Gamma_k - (\xi - 1)\Gamma_j)^2 - \Gamma_k \Gamma_j} \right)}_{=: \mathcal{K}_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Die Eigenvektoren  $w_1$  und  $w_2$  sind linear unabhängig (ohne Beweis). Damit ist die Hyperbolizität des Gleichungssystems (A.2) bestätigt.

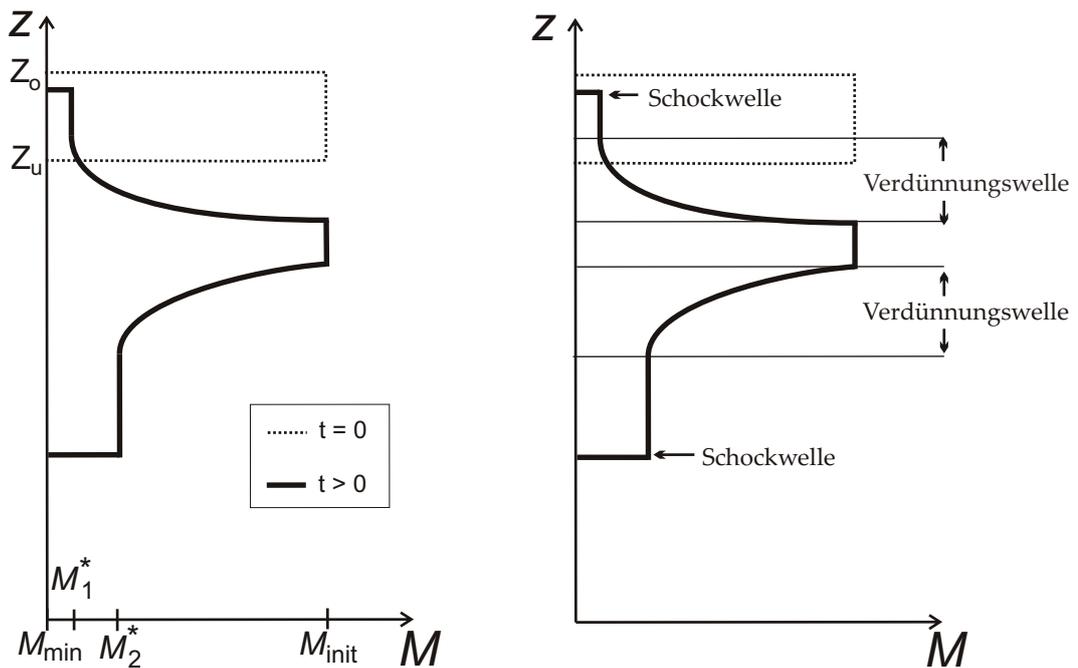
## A.2. Lösungsstruktur

In Kapitel 4.3 wurden für die prognostischen Momente zum Zeitpunkt  $t = 0$  konstante Werte zwischen zwei Höhenabschnitten ( $z_o$  und  $z_u$ ) vorgeschrieben. Außerhalb davon gelten konstante Minimalwerte, die um mehrere Größenordnungen kleiner sind. Die anfänglichen Werte der Momente sind also stückweise konstant mit zwei Unstetigkeitsstellen an  $z_o$  und  $z_u$ . Diese Art von Anfangsbedingungen für ein hyperbolisches Gleichungssystem wird als *Riemannproblem* bezeichnet.

Die Lösungsstruktur des Riemannproblems ist in der Literatur für verschiedene Gleichungstypen ausführlich dokumentiert (LeVeque, 1992; Toro, 1999).

Wäre das Gleichungssystem (A.1) eindimensional mit konstanter  $1 \times 1$ -Matrix  $A$  (würde also nur  $M_j$  prognostiziert und  $v_T = A$ ), so würde das anfängliche unstetige Signal des Momentes mit Geschwindigkeit  $A$  verlagert und dabei in seiner Form nicht geändert werden. Solche propagierenden Unstetigkeiten nennt man in diesem Zusammenhang *Stoßwellen*. Für ein zweidimensionales Gleichungssystem der Form (A.1) mit konstanter Matrix  $A$  gehen von jeder Unstetigkeitsstelle der Anfangsdaten zwei Stoßwellen aus. Ihre Geschwindigkeiten sind durch die Eigenwerte von  $A$  gegeben. Die Lösung für die Momente ergibt sich als Überlagerung dieser Stoßwellen zu einem stückweise konstantem Signal.

In dem hier vorgestellten Fall hängen die Einträge der Matrix  $A$  jedoch von den prognostischen Momenten ab. Sie sind also nicht mehr konstant. Dadurch verändert sich der Typ der zwei von jeder Unstetigkeitsstelle ausgehenden Wellen. Es können nun auch *Verdünnungswellen* auftreten, in denen die anfänglichen Unstetigkeiten durch einen kontinuierlichen Verlauf des Momentes überbrückt werden. Die Kriterien zur Bestimmung des jeweiligen Wellentyps finden sich in Toro (1999, Kapitel 2.4.4).

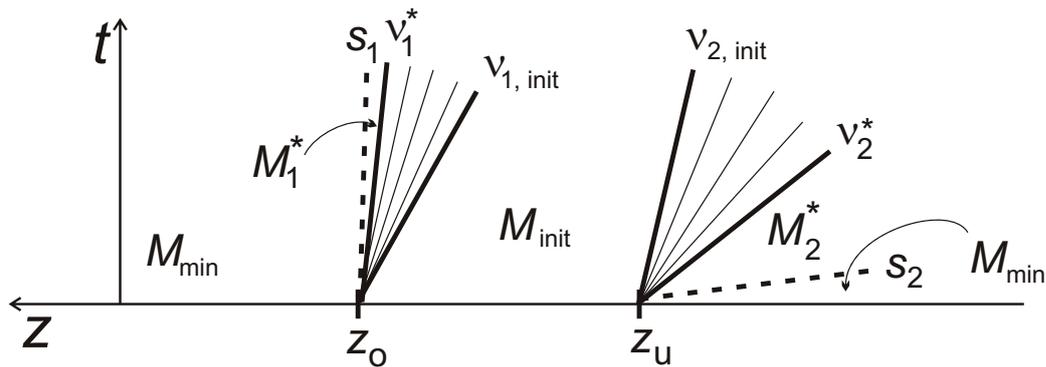


**Abbildung A.1** – Skizze der Struktur der analytischen Lösung von Gl. (A.2) für ein beliebiges prognostisches Moment  $M_j$  oder  $M_k$ , hier bezeichnet mit  $M$ .

Das Gleichungssystem (A.2) wurde bereits von Wacker u. Seifert (2001) für  $j = 0$ ,  $k = 3$  und  $\mu = 0$  analytisch gelöst. Die sich ergebenden Wellentypen wurden ebenfalls dort bestimmt. Abbildung A.1 zeigt eine Skizze der Signalstruktur eines Momentes  $M_j$  oder  $M_k$ , wie sie sich für  $t > 0$  ergibt. Die Beschreibung erfolgt von oben nach unten.

An der Oberkante des Signals befindet sich eine Stoßwelle. Sie ist zwischen dem Minimalwert  $M_{\min}$  und einem (a priori unbekanntem) Wert  $M_1^*$  zu finden. Die Amplitude der Stoßwelle ist daher durch  $M_1^* - M_{\min}$  gegeben. Da  $M_{\min}$  in unserem Fall sehr klein ist, wollen wir vereinfachend  $M_1^*$  als Amplitude bezeichnen. Unterhalb der Stoßwelle befindet sich eine Verdünnungswelle. Sie erstreckt sich über einen sich mit der Zeit ausdehnenden Höhenbereich. In der Verdünnungswelle ändert sich der Momentwert kontinuierlich von  $M_1^*$  auf den Anfangswert  $M_{\text{init}}$ . An der Unterkante des Signals ist die Abfolge der Wellen umgekehrt: Zuoberst befindet sich eine Verdünnungswelle, an die sich eine Stoßwelle mit Amplitude  $M_2^*$  anschließt. Die Position der Stoßwellen sowie die Position von Anfang und Ende der Verdünnungswellen ist für beide prognostischen Momente gleich. Unterschiedlich sind jedoch die Amplituden der Stoßwellen und der Verlauf des Momentwertes innerhalb der Verdünnungswelle.

Die im Folgenden ausgerechnete Lösung ist nur solange gültig, bis sich die von Ober- und Unterkante des Signals ausgehenden Verdünnungswellen getroffen haben. Danach findet eine Dämpfung der Amplitude des Signals statt. Die Form des Signals bleibt aber auch nach diesem Zeitpunkt von der vorherigen Struktur beeinflusst. Da der



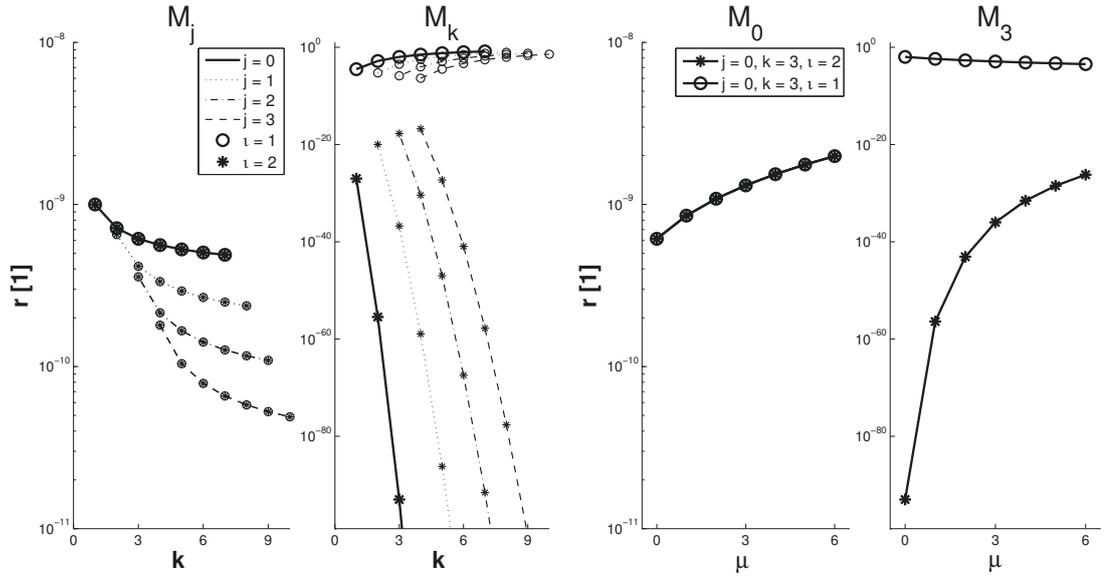
**Abbildung A.2** – Skizze der Lösungsstruktur im  $z$ - $t$ -Raum unter Vorwegnahme der Ergebnisse für die Geschwindigkeiten der Wellen ( $s_l$  und  $v_l$ ). Sie beschreiben hier die Steigungen der Geraden im  $z$ - $t$ -Raum.  $v_{l,init} = v_l(M_{j,init}, M_{k,init})$ ,  $v_l^* = v_l(M_{j,l}^*, M_{k,l}^*)$ .

mathematischen Einfachheit halber  $D_{max} = \infty$  und  $\mu = \text{const.}$  gewählt werden müssen, lassen sich die analytischen Ergebnisse mit den numerischen Ergebnissen von  $WL_0$  und  $WL_3$  vergleichen (Kapitel 5.2.2).

Im Weiteren sollen nun, ausgehend von der in Wacker u. Seifert (2001) bestimmten Lösungsstruktur, für beliebige  $j$ ,  $k$  und  $\mu$  die Geschwindigkeiten und Amplituden der Stoßwellen ausgerechnet werden. Danach werden die Geschwindigkeiten der Begrenzungen der Verdünnungswelle berechnet. Abschließend wird der genaue Verlauf des Momentwertes innerhalb einer Verdünnungswelle und der Zeitpunkt des Treffens der Verdünnungswellen bestimmt. Zur Orientierung zeigt Abbildung A.2 unter Vorwegnahme der Ergebnisse die Entwicklung der Momentstruktur im  $z$ - $t$ -Raum. Die Stoßwellen sowie die Ober- und Unterkanten der Verdünnungswellen propagieren entlang der durch  $z/s_l$  bzw.  $z/v_l$  gegebenen Geraden. Hierbei gibt der Index  $l$  die Position der Welle relativ zur Anfangsdiskontinuität an: Ein Index  $l = 1$  bezieht sich auf die Lösungselemente, welche zur Oberkante gehören, also von  $z_0$  ausgehen. Ein Index  $l = 2$  hingegen bezieht sich auf die zur Unterkante gehörigen, von  $z_u$  ausgehenden Elemente.

**Geschwindigkeit und Amplitude der Stoßwellen** Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten  $s_l$  der beiden Stoßwellen benutzt man die *Rankine-Hugoniot-Bedingungen*. Diese gelten über die Unstetigkeit der Stoßwelle hinweg und setzen die Wertdifferenz in den Flüssen sowie in den Momenten miteinander in Beziehung:

$$\begin{pmatrix} F_{j,l}^* - F_{j,min} \\ F_{k,l}^* - F_{k,min} \end{pmatrix} = s_l \begin{pmatrix} M_{j,l}^* - M_{j,min} \\ M_{k,l}^* - M_{k,min} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$



**Abbildung A.3** – Amplituden der Stoßwellen  $M_j^*$ , Gl. (A.13), und  $M_k^*$ , Gl. (A.14), normiert auf den jeweiligen Anfangswert des Momentes. Dieses Verhältnis wird in der Abbildung mit  $r$  bezeichnet. Berechnet zu  $n_0 = 0,079 \text{ cm}^{-4}$  und  $\lambda = 26,6134 \text{ cm}^{-1}$ , jeweils für variierende  $j, k$  bei  $\mu = 0$  (links) und zu  $N = 3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-3}$ ,  $L = 5 \cdot 10^{-7} \text{ g cm}^{-3}$  und variierendem  $\mu$  bei  $j = 0, k = 3$  (rechts).

Ausformuliert ergibt sich mit  $\epsilon_{jk,\min} = M_{k,\min}/M_{j,\min}$ :

$$\alpha \Gamma_j \left( \frac{\Gamma(j + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^\zeta \left( M_{j,\mu}^* \left( \frac{M_{k,\mu}^*}{M_{j,\mu}^*} \right)^\zeta - M_{j,\min} \epsilon_{jk,\min}^\zeta \right) = s_t (M_{j,t}^* - M_{j,\min}), \quad (\text{A.9a})$$

$$\alpha \Gamma_k \left( \frac{\Gamma(j + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^\zeta \left( M_{k,\mu}^* \left( \frac{M_{k,\mu}^*}{M_{j,\mu}^*} \right)^\zeta - M_{k,\min} \epsilon_{jk,\min}^\zeta \right) = s_t (M_{k,t}^* - M_{k,\min}). \quad (\text{A.9b})$$

Da für die drei Unbekannten  $M_{j,t}^*$ ,  $M_{k,t}^*$  und  $s_t$  nur zwei Gleichungen vorhanden sind, ist zu ihrer Bestimmung eine weitere Gleichung nötig. Diese ist gegeben durch die *Riemannsche Invariante*, welche die beiden prognostischen Momente im Bereich der Verdünnungswelle miteinander in Beziehung setzt:

$$\frac{\partial M_j}{w_{t,1}} = \frac{\partial M_k}{w_{t,2}}. \quad (\text{A.10})$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichung erhält man

$$M_j M_k^{-k_t} = \text{const.} \quad \text{mit } k_t = k_t(j, k) = \zeta \Gamma_j / \mathcal{K}_t. \quad (\text{A.11})$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um die Amplitude der Stoßwelle zu berechnen. Hierzu verwendet man (A.11) in der speziellen Form

$$M_{j,t}^* (M_{k,t}^*)^{-k_t} = M_{j,\text{init}} (M_{k,\text{init}})^{-k_t}. \quad (\text{A.12})$$

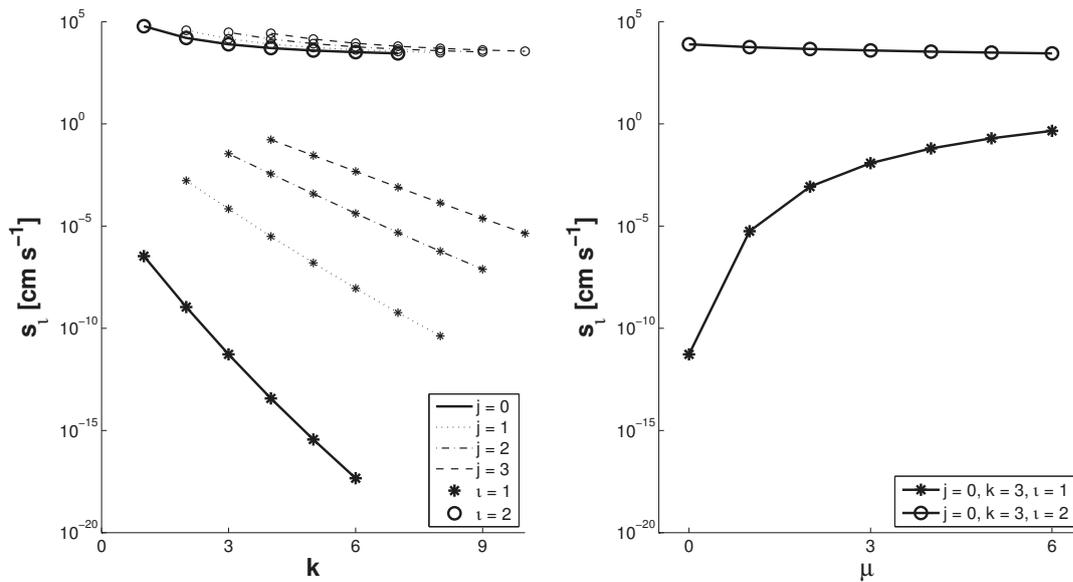


Abbildung A.4 – Wie Abb. A.3, aber für die Geschwindigkeiten der Stoßwelle  $s_l$ , Gl. (A.15).

Aus den Gleichungen (A.9) und (A.12) kann man nun die Amplituden  $M_l^*$  und die Geschwindigkeiten  $s_l$  der Stoßwelle berechnen. Die Gleichungen sind jedoch nur analytisch lösbar, wenn man den Minimalwert eines prognostischen Momentes auf Null setzt. Hier wählen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $M_{k,\min}$ . Man erhält

$$M_{j,\iota}^* = \frac{M_{j,\min}}{1 - \Gamma_j/\Gamma_k}. \quad (\text{A.13})$$

Die Amplitude der Stoßwelle in  $M_j$  ist aufgrund der Vereinfachung  $M_{k,\min} = 0 \text{ cm}^{k-3}$  unabhängig von  $\iota$ , also unabhängig von ihrer Lage über oder unter dem Signalmaximum. Für das andere Moment erhält man

$$M_{k,\iota}^* = M_{k,\text{init}} \left( \frac{M_{j,\min}}{M_{j,\text{init}}} \frac{1}{1 - \Gamma_j/\Gamma_k} \right)^{1/k_\iota}. \quad (\text{A.14})$$

Durch den Exponenten  $1/k_\iota$  ist die Amplitude der Stoßwelle in  $M_k$  von ihrer Lage über oder unter dem Signalmaximum abhängig.

Abbildung A.3 zeigt die Amplituden  $M_l^*$ , normiert auf den jeweiligen Anfangswert  $M_{j,\text{init}}$  bzw.  $M_{k,\text{init}}$ . Die Amplituden sind mindestens 9 Größenordnungen kleiner als der Anfangszustand. Eine Ausnahme ist die Amplitude der oberen Stoßwelle in  $M_k$ , die für große Differenzen  $k - j$  schon ein Zehntel des Anfangswertes betragen kann. Im Standardfall  $j = 0, k = 3$  hat man  $M_{j,1}^*/M_{j,\text{init}} = M_{j,2}^*/M_{j,\text{init}} = 6 \cdot 10^{-10}$  sowie  $M_{k,1}^*/M_{k,\text{init}} = 1 \cdot 10^{-2}$  (oben) und  $M_{k,2}^*/M_{k,\text{init}} = 1 \cdot 10^{-93}$  (unten).

Für die Geschwindigkeit der Stoßwelle ergibt sich

$$s_{\iota} = \Gamma_k \left( \frac{\Gamma(j + \mu + 1) M_{k,\iota}^*}{\Gamma(k + \mu + 1) M_{j,\iota}^*} \right)^{\zeta} = \Gamma_k (\lambda^*)^{-\beta}. \quad (\text{A.15})$$

In Abbildung A.4 sind die Geschwindigkeiten der Stoßwelle,  $s_{\iota}$ , dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die untere Stoßwelle ( $\iota = 2$ ) um 5 bis 20 Größenordnungen schneller ist als die Stoßwelle an der Oberkante ( $\iota = 1$ ), welche eine nahezu vernachlässigbare Geschwindigkeit hat.

Die Amplituden der Stoßwellen  $M_j^*$  und  $M_k^*$  sind im Allgemeinen sehr klein. Daher ist die Stoßwelle bei linearer Momentdarstellung (wie zum Beispiel in Abbildung 5.9) nicht sichtbar. Weiterhin hat die obere Stoßwelle bei den hier verwendeten Ordnungen der prognostischen Momente (und  $\mu = 0$ ) eine Geschwindigkeit von  $s_1 = 5,2973 \cdot 10^{-12} \text{ cm s}^{-1}$ . Sie hat nach 750 s erst eine Strecke von  $3,975 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$  zurückgelegt und kann also mit der gewählten Gitterweite von 25 m nicht aufgelöst werden. Die untere Stoßwelle hat mit einer Geschwindigkeit von  $s_2 = 7789,83 \text{ cm s}^{-1}$  schon nach 105,9 s die Unterkante des Rechengebietes passiert.

**Geschwindigkeit der Verdünnungswellen** Im physikalischen Kontext stellen die Eigenwerte  $v_i(\lambda)$  der Matrix  $A$  die Geschwindigkeiten dar, mit der sich im Anfangssignal enthaltene Informationen ausbreiten (Toro, 1999). Insbesondere werden durch die Eigenwerte die Steigungen der sogenannten *Charakteristiken* definiert. Diese sind Linien im  $z$ - $t$ -Raum, entlang derer die Lösung konstant ist (Abbildung A.2). Die Gleichung für die Charakteristiken lautet

$$z_{0,\iota} - z = t \cdot v_i(M_j(t, z), M_k(t, z)), \quad (\text{A.16})$$

wobei  $z_{0,1} = z_o$  und  $z_{0,2} = z_u$ . Die Begrenzungen der Verdünnungswelle sind daher gegeben durch die über  $v_i$  berechneten Charakteristiken zu  $M_i^*$  und  $M_{\text{init}}$ , wobei  $\iota = 1$  die obere und  $\iota = 2$  die untere Verdünnungswelle beschreibt:

$$z_{\iota}^*(t) = z_{0,\iota} - t \cdot v_i(M_{j,\iota}^*, M_{k,\iota}^*) \quad (\text{A.17a})$$

$$\text{und } z_{\iota,\text{init}}(t) = z_{0,\iota} - t \cdot v_i(M_{j,\text{init}}, M_{k,\text{init}}) \quad (\text{A.17b})$$

Abbildung A.5 zeigt die Eigenwerte der Matrix  $A$  zum Anfangszustand des Systems, d. h.  $v_i(M_{j,\text{init}}, M_{k,\text{init}})$ . Es ist zu erkennen, dass die zur Oberkante gehörigen Eigenwerte  $v_1$  größer sind als die zur Unterkante gehörigen ( $v_2$ ). Dies bedeutet, dass die beiden Verdünnungswellen sich nach einer gewissen Zeit treffen. Der genaue Zeitpunkt und die zugehörige Höhe werden im nächsten Abschnitt ausgerechnet.

In Abbildung A.6 dargestellt sind die Eigenwerte zu den Amplituden der Stoßwelle,  $M_{j,\iota}^*$  und  $M_{k,\iota}^*$ . Sie legen die Geschwindigkeit der Oberkante der oberen Verdünnungswelle sowie die der Unterkante der unteren Verdünnungswelle fest. Man erkennt, dass

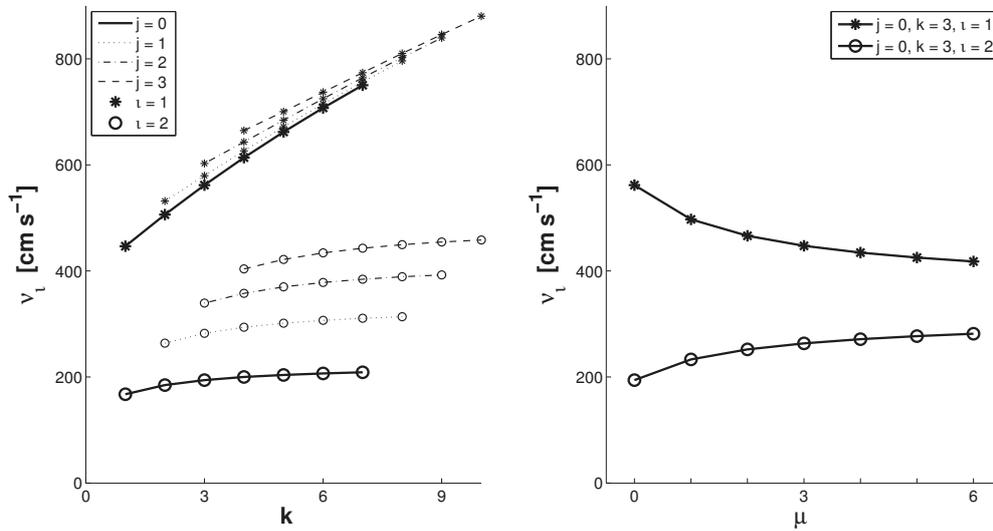


Abbildung A.5 – Wie Abb. A.3, aber für die Eigenwerte zum Anfangszustand,  $v_{\text{init}} = v(M_{j,\text{init}}, M_{k,\text{init}})$ , Gl. (A.5).

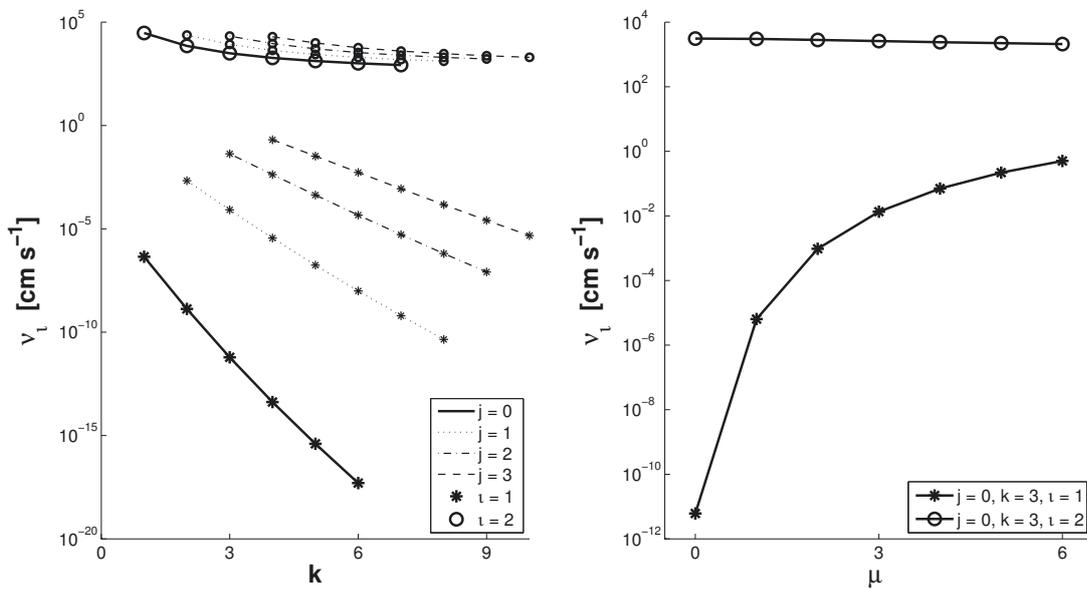


Abbildung A.6 – Wie Abb. A.3, aber für die Eigenwerte zu den Amplituden der Stoßwellen,  $v^* = v(M_j^*, M_k^*)$ , Gl. (A.5).

die Geschwindigkeit der Oberkante der oberen Verdünnungswelle sehr stark von  $j$  und  $k$  abhängt. Sie variiert zwischen  $1 \cdot 10^{-15}$  und  $1 \text{ cm s}^{-1}$ . Die Geschwindigkeit der Unterkante der unteren Verdünnungswelle ist nur schwach von  $j, k$  beeinflusst und liegt bei  $1 \cdot 10^4 \text{ cm s}^{-1}$ . Die Abhängigkeit von  $\mu$  ist ähnlich: Während sich  $v_2(\lambda_2^*)$  nur geringfügig um  $1 \cdot 10^3 \text{ cm s}^{-1}$  ändert, so variiert  $v_1(\lambda_1^*)$  zwischen  $1 \cdot 10^{-11}$  und  $1 \text{ cm s}^{-1}$ .

Es gilt also  $v_1(\lambda_1^*) < v_1(\lambda_{\text{init}})$  und  $v_2(\lambda_{\text{init}}) < v_2(\lambda_2^*)$ . Infolgedessen wird der Bereich, über den sich die Verdünnungswellen erstrecken, mit der Zeit immer größer.

**Treffen der Verdünnungswellen** Der Zeitpunkt  $t_{\text{end}}$  und die Höhe  $z_{\text{end}}$  des Zusammentreffens der Wellen lässt sich Gleichung (A.16) folgend berechnen durch

$$z_{0,1} - z_{\text{end}} = t_{\text{end}} v_1(\lambda_{\text{init}}), \quad (\text{A.18a})$$

$$z_{0,2} - z_{\text{end}} = t_{\text{end}} v_2(\lambda_{\text{init}}). \quad (\text{A.18b})$$

Hierbei befindet sich an  $z_{0,1}$  die Oberkante und  $z_{0,2}$  die Unterkante des Anfangssignals. Die in den vorigen Abschnitten berechnete analytische Lösung gilt nur bis zum Zeitpunkt  $t_{\text{end}}$ .

In Abbildung A.7 sind  $t_{\text{end}}$  und  $z_{\text{end}}$  dargestellt. Ihr Zusammenhang ist sofort ersichtlich: Für kürzere Zeit bis zum Zusammentreffen der Wellen ist die Fallstrecke geringer, der Treffpunkt also höher. Erhöht man den Abstand der prognostischen Ordnungen  $j$  und  $k$ , so treffen sich die Wellen früher, da  $v_1(\lambda_{\text{init}}) - v_2(\lambda_{\text{init}})$  größer wird. Erhöht man die Ordnung des niederen prognostischen Momentes, so treffen sich die Verdünnungswellen später, da  $v_1(\lambda_{\text{init}}) - v_2(\lambda_{\text{init}})$  kleiner wird. Für größeres  $\mu$  bei konstanten  $j = 0$  und  $k = 3$  gilt dies ebenfalls, wie in Abbildung A.9 zu sehen ist. Für  $\mu = 0$  ist  $t_{\text{end}} = 408 \text{ s}$ , die Dämpfung setzt also zwischen dem ersten und zweiten dargestellten Zeitschritt ein.  $t_{\text{end}}$  für  $\mu = 3$  beträgt hingegen 815 s. Zu den dargestellten Zeitpunkten haben sich die Verdünnungswellen noch nicht getroffen und die Maximalwerte der Signale sind noch die Initialwerte  $M_{0,\text{init}}$  und  $\frac{\rho_w \pi}{6} M_{3,\text{init}}$ .

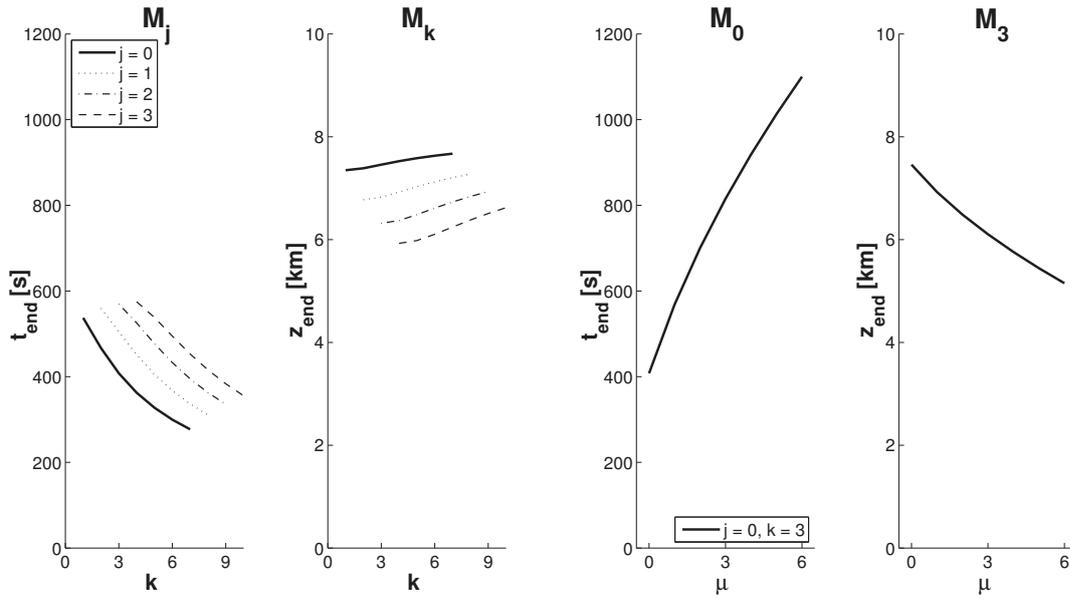
**Momentverlauf innerhalb der Verdünnungswellen** Hierzu benutzt man die Riemannsche Invariante (A.12) mit der Konstanten  $M_{j,\text{init}} M_{k,\text{init}}^{-k_i}$ . Die Gleichung kann dann nach den einzelnen Momenten umgeformt werden:

$$M_j = (M_k / M_{k,\text{init}})^{k_i} M_{j,\text{init}}, \quad (\text{A.19a})$$

$$M_k = (M_j / M_{j,\text{init}})^{1/k_i} M_{k,\text{init}}. \quad (\text{A.19b})$$

Die Form der Verdünnungswelle, d. h. der Momentverlauf zwischen  $z_i^*$  und  $z_{i,\text{init}}$  für  $i = 1, 2$ , Gl. (A.17), ergibt sich durch die Überlegung, dass die Geschwindigkeit der Welle durch die Eigenwerte gegeben ist. Man hat also mit Gl. (A.16)

$$\begin{aligned} \frac{z_{0,\mu} - z}{t} &= v_i(M_j(t, z), M_k(t, z)) \\ &= \alpha \lambda^{-\beta} C_i(j, k, \beta) \end{aligned}$$



**Abbildung A.7** – Wie Abb. A.3, aber für Zeit  $t_{\text{end}}$  und Ort  $z_{\text{end}}$  des Treffpunktes der Verdünnungswellen.

$$= \alpha \left( \frac{\Gamma(j + \mu + 1)}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^{\xi} C_i(j, k, \beta) \left( \frac{M_k}{M_j} \right)^{\xi}, \quad (\text{A.20})$$

wobei  $z_{0,\iota}$  je nach  $\iota$  die Ober- oder die Unterkante des Ausgangssignals bezeichnet (siehe oben).  $C_i(j, k, \beta)$  ist eine von  $\iota$ ,  $j$ ,  $k$  und  $\beta$  abhängige Konstante und ergibt sich aus Gl. (A.5). Innerhalb der Verdünnungswellen gelten die Riemannschen Invarianten (A.12), mit Hilfe derer man ein Moment in Gl. (A.20) ersetzen und die Gleichung zum jeweils anderen Moment umformen kann. Damit gilt

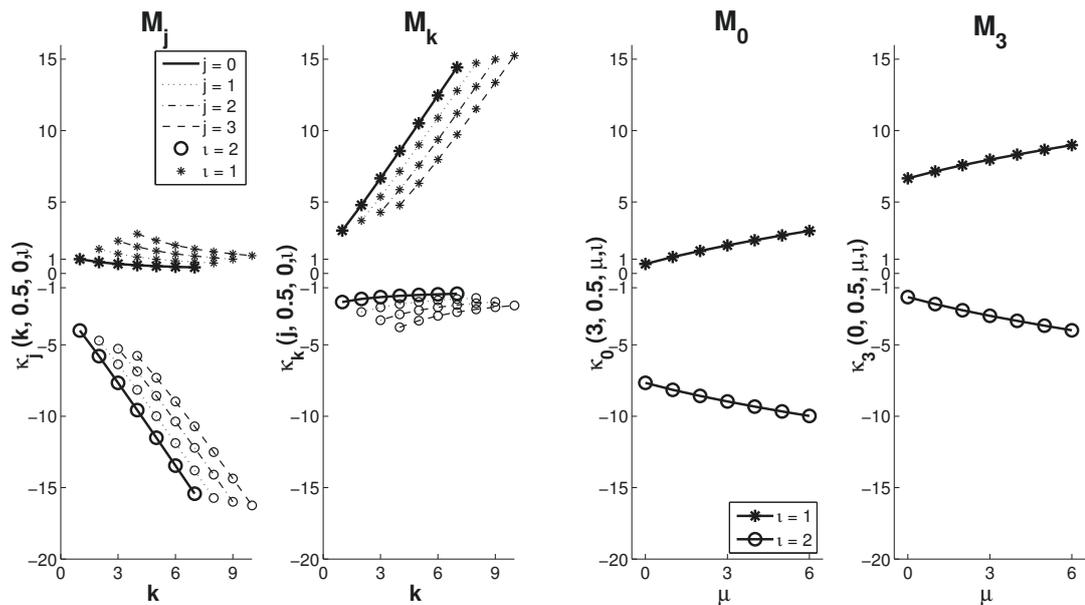
$$M_j(t, z) = \left( \frac{z_{0,\iota} - z}{t} \left( \frac{M_{j,\text{init}}^{1/k_i} \Gamma(k + \mu + 1)}{M_{k,\text{init}} \Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\xi} \frac{1}{\alpha C_i(j, k, \beta)} \right)^{\frac{k_i}{\xi(1-k_i)}}, \quad (\text{A.21a})$$

$$M_k(t, z) = \left( \frac{z_{0,\iota} - z}{t} \left( \frac{M_{j,\text{init}} \Gamma(k + \mu + 1)}{M_{k,\text{init}}^{k_i} \Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\xi} \frac{1}{\alpha C_i(j, k, \beta)} \right)^{\frac{1}{\xi(1-k_i)}}. \quad (\text{A.21b})$$

So ergibt sich für den Verlauf der Momente mit  $z$  ein Potenzgesetz:

$$M_j(t, z) \sim (z_{0,\iota} - z)^{\frac{k_i}{\xi(1-k_i)}} =: (z_{0,\iota} - z)^{\kappa_j(k, \beta, \mu, \iota)}, \quad (\text{A.22a})$$

$$M_k(t, z) \sim (z_{0,\iota} - z)^{\frac{1}{\xi(1-k_i)}} =: (z_{0,\iota} - z)^{\kappa_k(j, \beta, \mu, \iota)}. \quad (\text{A.22b})$$



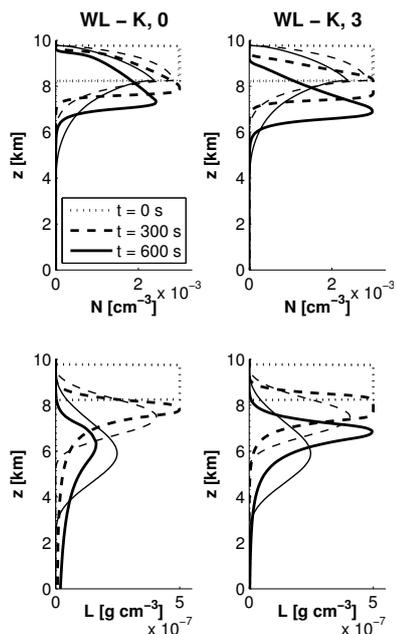
**Abbildung A.8** – Wie Abb. A.3, aber für die Exponenten  $\kappa_j$ ,  $\kappa_k$  der die Verdünnungswellen beschreibenden Funktion, Gl. (A.22).

Der Exponent ist hierbei abhängig von den Ordnungen der prognostischen Momente. Die Form des Signals eines Momentes  $M_j$  bzw.  $M_k$  ist also abhängig von  $k$  bzw.  $j$ , d. h. von der Ordnung des jeweils anderen prognostischen Momentes.

In Abbildung A.8 sind die Exponenten aus Gl. (A.22) dargestellt. Die Exponenten mit  $\iota = 2$  sind negativ und beschreiben die Form des Signals an der Unterkante, die Exponenten mit  $\iota = 1$  sind positiv und beschreiben die Form des Signals an der Oberkante. Für einen Exponenten mit Betrag größer als 1 ist das Signal nach innen, für einen Exponenten mit Betrag kleiner als 1 ist das Signal nach außen gekrümmt.

Anschaulich sieht man dies in Abbildung A.9: In den beiden linken Spalten dargestellt sind die Ergebnisse von  $WL_0$  und  $WL_3$ . Sie verwenden  $\beta = 0,5$ . Betrachtet man die Oberkante des  $N$ -Signals, so hat man bei  $WL_0$   $\kappa_0(3, \beta, 0, 1) = 0,6596$ , sie ist also nach außen gewölbt. Bei  $WL_3$  mit  $\mu = 3$  ist der Exponent  $\kappa_0(3, \beta, 3, 1) = 1,9649$ . Die Oberkante ist also leicht nach innen gekrümmt. Ebenfalls erkennt man hier, dass beim niederen prognostischen Moment  $N$  die Unterkante stärker gekrümmt ist als beim höheren prognostischen Moment  $L$ :  $|\kappa_0(3, \beta, 0, 2)| = 7,6596 > |\kappa_3(0, \beta, 0, 2)| = 1,6596$ .

Bei sich erhöhender Differenz der Ordnungen der prognostischen Momente (also wachsendem  $k - j$ ) verstärkt sich bei  $M_j$  die Krümmung der Unterkante, während sie an der Oberkante schwächer wird. Für  $M_k$  ist es umgekehrt. Für größer werdendes  $\mu$  und  $j = 0, k = 3$  verstärken sich die Krümmungen aller Verdünnungswellen. Auch nach



**Abbildung A.9** – Ausschnitt aus Abb. 5.9:  $N$  und  $L$  für die Parametrisierungen  $WL_0$ ,  $WL_3$  (dicke Linien) und das Referenzmodell (dünne Linien).

dem Zusammentreffen der Verdünnungswellen ist deren Form durch die berechneten Exponenten beeinflusst.

Wir haben zuvor gesehen, dass die Begrenzungen der Verdünnungswellen und die Stoßwellen für beide Momente die gleiche Geschwindigkeit besitzen. Die Signale der prognostischen Momente unterscheiden sich daher lediglich in der Amplitude der Stoßwelle und der Form der Verdünnungswelle. Dadurch entsteht der optische Eindruck, dass das  $N$ -Signal langsamer ist als das  $L$ -Signal (oder allgemeiner, dass  $M_k$  schneller verlagert wird als  $M_j$ ).



# B.

---

## Formeln für Verteilungsparameter, Momente und Flüsse

---

Die nachfolgend in den Abschnitten B.1 und B.2 gezeigten Formeln für  $n_0$  und  $\lambda$  ergeben sich bei festgelegtem  $\mu$  durch das Gleichungssystem

$$M_j(n_0, \lambda) = \begin{cases} n_0 \frac{\gamma(\lambda D_{\max}, j+\mu+1)}{\lambda^{j+\mu+1}} & \lambda > 0, \\ n_0 e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{j+\mu}{n} D_{\max}^{j+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}} & \lambda < 0, \end{cases} \quad (\text{B.1a})$$

$$M_k(n_0, \lambda) = \begin{cases} n_0 \frac{\gamma(\lambda D_{\max}, k+\mu+1)}{\lambda^{k+\mu+1}} & \lambda > 0, \\ n_0 e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{k+\mu}{n} D_{\max}^{k+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}} & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{B.1b})$$

Für  $D_{\max} = \infty$  benutze man nur die Gleichungen für  $\lambda > 0$  und ersetze  $\gamma(\lambda D_{\max}, \cdot)$  durch  $\Gamma(\cdot)$ , siehe Gl. (3.2b). Gegebenenfalls werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\hat{a} = a + \mu + 1, \quad \text{für } a \in \{i, j, k\}, \quad (\text{B.2})$$

$$\zeta = \frac{\beta}{k-j}. \quad (\text{B.3})$$

Zur Berechnung des Flüsse wird der allgemeine Potenzansatz (2.10) für die terminale Fallgeschwindigkeit verwendet:  $v_T(D) = \alpha D^\beta$ .

## B.1. Formeln bei Verwendung von $D_{\max} = \infty$

### Verteilungsparameter

$$\lambda = \left( \frac{M_j \Gamma(k + \mu + 1)}{M_k \Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\frac{1}{k-j}} \quad (\text{B.4a})$$

$$n_0 = \left( \frac{M_j}{\Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\frac{k+\mu+1}{k-j}} \left( \frac{M_k}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^{-\frac{j+\mu+1}{k-j}} \quad (\text{B.4b})$$

### Momente

$$M_i(M_j, M_k) = \Gamma(i + \mu + 1) \left( \frac{M_j}{\Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\frac{k-i}{k-j}} \left( \frac{M_k}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^{-\frac{i-i}{k-j}} \quad (\text{B.5})$$

### Flüsse

$$F_i(M_j, M_k) = \alpha \Gamma(i + \mu + \beta + 1) \left( \frac{M_j}{\Gamma(j + \mu + 1)} \right)^{\frac{k-i}{k-j} - \zeta} \left( \frac{M_k}{\Gamma(k + \mu + 1)} \right)^{-\frac{i-i}{k-j} + \zeta} \quad (\text{B.6})$$

## B.2. Formeln bei Verwendung von $D_{\max} < \infty$

Allgemein gilt:

$$M_k/M_j = \bar{\epsilon}_{jk} < \bar{\epsilon}_{jk, \text{krit}} \iff \lambda > 0, \quad (\text{B.7a})$$

$$\bar{\epsilon}_{jk} > \bar{\epsilon}_{jk, \text{krit}} \iff \lambda < 0. \quad (\text{B.7b})$$

### Verteilungsparameter

$$\lambda = \left( \frac{M_j \gamma(\lambda D_{\max}, \hat{k})}{M_k \gamma(\lambda D_{\max}, \hat{j})} \right)^{\frac{1}{k-j}}, \quad \lambda > 0, \quad (\text{B.8a})$$

$$0 = M_k \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{j+\mu}{n} D_{\max}^{j+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}} - M_j \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{k+\mu}{n} D_{\max}^{k+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}}, \quad \lambda < 0, \quad (\text{B.8a}^*)$$

$$n_0 = \begin{cases} \left( \frac{M_j}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{j})} \right)^{\frac{k+\mu+1}{k-j}} \left( \frac{M_k}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{k})} \right)^{-\frac{j+\mu+1}{k-j}}, & \lambda > 0, \\ M_j \left( e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{j+\mu}{n} D_{\max}^{j+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}} \right)^{-1}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (\text{B.8b})$$

Falls  $j + \mu \in \mathbb{N}_0$ , dann ist  $\mathcal{N}_{\max} = j + \mu$ , sonst  $\mathcal{N}_{\max} = \infty$ . Die Gleichungen für  $\lambda$  können nur iterativ gelöst werden. In der numerischen Umsetzung wird  $\lambda$  linear interpoliert, wenn zu erwarten ist, dass der Wert betragsmäßig sehr klein würde.

**Momente**

$$M_i(M_j, M_k) = \gamma(\lambda D_{\max}, \hat{i}) \left( \frac{M_j}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{j})} \right)^{\frac{k-i}{k-j}} \left( \frac{M_k}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{k})} \right)^{-\frac{j-i}{k-j}}, \quad \lambda > 0 \quad (\text{B.9a})$$

$$M_i(M_j, M_k) = n_0 e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{i+\mu}{n} D_{\max}^{i+\mu-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}}, \quad \lambda < 0 \quad (\text{B.9b})$$

Falls  $i + \mu \in \mathbb{N}_0$ , dann ist  $\mathcal{N}_{\max} = i + \mu$ , sonst  $\mathcal{N}_{\max} = \infty$ .

**Flüsse**

$$F_i(M_j, M_k) = \alpha \gamma(\lambda D_{\max}, \hat{i} + \beta) \left( \frac{M_j}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{j})} \right)^{\frac{k-i}{k-j} - \zeta} \left( \frac{M_k}{\gamma(\lambda D_{\max}, \hat{k})} \right)^{-\frac{j-i}{k-j} + \zeta}, \quad \lambda > 0 \quad (\text{B.10a})$$

$$F_i(M_j, M_k) = \alpha n_0 e^{-\lambda D_{\max}} \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_{\max}} (-1)^n \binom{i+\mu+\beta}{n} D_{\max}^{i+\mu+\beta-n} \frac{\gamma(-\lambda D_{\max}, n+1)}{(-\lambda)^{n+1}}, \quad \lambda < 0 \quad (\text{B.10b})$$

Falls  $i + \mu + \beta \in \mathbb{N}_0$ , dann ist  $\mathcal{N}_{\max} = i + \mu + \beta$ , sonst  $\mathcal{N}_{\max} = \infty$ .



# C.

---

## Ansätze für die Tropfenfallgeschwindigkeit

---

Im spektralen Referenzmodell sowie im parametrisierten Modell wird die Tropfenfallgeschwindigkeit  $v_f$  mit der terminalen Fallgeschwindigkeit  $v_T$  approximiert. Die terminale Fallgeschwindigkeit ist erreicht, wenn sich am Tropfen die nach unten wirkende Gewichtskraft und die nach oben wirkende Reibungskraft balanciert haben und der Tropfen nicht mehr beschleunigt wird (eine Herleitung findet sich zum Beispiel in Rogers u. Yau, 1989; Pruppacher u. Klett, 1997).

Vernachlässigt man die Höhenabhängigkeit der Luftdichte und die daraus resultierende Veränderung der Reibungskraft, so hängt  $v_T$  nur vom Tropfendurchmesser ab. Die theoretisch hergeleiteten Ansätze für die Fallgeschwindigkeit können anhand der Reynoldszahl in drei verschiedene Bereiche eingeteilt werden (Beard, 1976; Rogers u. Yau, 1989). Für kleine Tropfen ( $D \leq 60 \mu\text{m}$ ) ergibt sich mit dem Ansatz von Stokes  $v_T \sim D^2$ . Für große Tropfen ( $D \geq 0,12 \text{ cm}$ ) erhält man eine Wurzelbeziehung für die Fallgeschwindigkeit,  $v_T \sim \sqrt{D}$ . Dazwischen gilt eine lineare Beziehung,  $v_T \sim D$ .

Laborexperimente zur terminalen Fallgeschwindigkeit von Tropfen wurden zum Beispiel von Laws (1941); Gunn u. Kinzer (1949); Beard u. Pruppacher (1969) durchgeführt (zitiert nach Pruppacher u. Klett, 1997), woraus empirische Gesetze hergeleitet werden können.

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten oder angesprochenen Fallgeschwindigkeitsansätze vorgestellt. Alle Größen werden in cgs-Einheiten verwendet. Abbildung C.1 zeigt einen Vergleich der Geschwindigkeiten.

### Kessler (1969)

$$v_T(D) = 1300 D^{0,5} \text{ [cm s}^{-1}\text{]} \quad (\text{C.1})$$

Dieser Ansatz bildet die Daten von Gunn u. Kinzer (1949) mit einer Genauigkeit von 10% ab. Eine höhere Genauigkeit erreichen Khvorostyanov u. Curry (2002) mit Vorfaktoren und Exponenten, die vom Durchmesser des Tropfens abhängig sind.

**Beard (1976)** Hier wird die Fallgeschwindigkeit stückweise in den Durchmesserbereichen  $0,5 \mu\text{m} < D < 19 \mu\text{m}$ ,  $19 \mu\text{m} < D < 1,07 \text{mm}$  und  $1,07 \text{mm} < D < 7 \text{mm}$  als hochgradige Polynome definiert. Die genauen Koeffizienten finden sich in der Veröffentlichung und sind an verschiedene Umgebungsdrücke und -temperaturen anpassbar. Für Bedingungen der Erdoberfläche ( $p = 1013 \text{mbar}$ ,  $T = 20 \text{°C}$ ) stimmt der Verlauf von  $v_T$  mit den Daten von Gunn u. Kinzer (1949) überein.

**Rogers et al. (1993)**

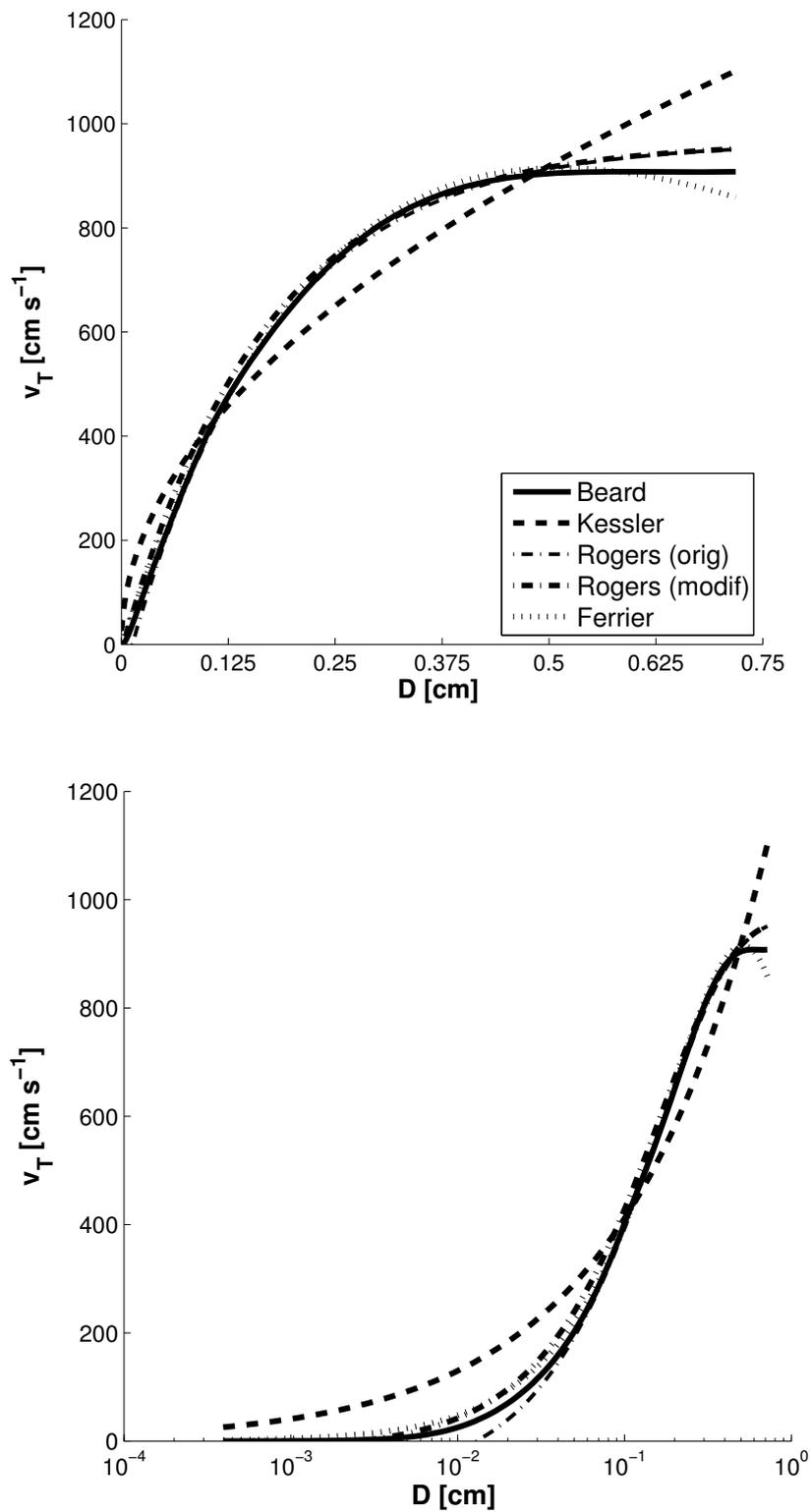
$$v_T(D) = 965 - b e^{-6D} \quad [\text{cm s}^{-1}] \quad (\text{C.2})$$

Dieser Ansatz ist ebenfalls eine Approximierung der Daten von Gunn u. Kinzer (1949). In der Originalarbeit wird er nur für Tropfen mit Durchmessern größer als  $0,0745 \text{cm}$  mit  $b = 1043 \text{cm s}^{-1}$  verwendet. Für kleinere Tropfen gibt dieser Ansatz negative Werte (siehe Abbildung C.1, „Rogers (orig)“), was in Rogers et al. (1993) durch einen zweiten Geschwindigkeitsansatz vermieden wird. In RAINSHAFT wird eine modifizierte Form mit  $b = 979,6 \text{cm s}^{-1}$  für alle Durchmesser verwendet, um negative Geschwindigkeitswerte für kleine  $D$  zu vermeiden (Abbildung C.1, „Rogers (modif)“, siehe auch Seifert, 2008).

**Ferrier (1994)**

$$v_T(D) = 4854 D e^{-1,95D} \quad [\text{cm s}^{-1}]. \quad (\text{C.3})$$

Dieser Ansatz wurde erstmals von Uplinger (1981) vorgestellt. Für große Tropfen unterschätzt er die Fallgeschwindigkeit (Kumjian u. Ryzhkov, 2012), da mit diesem Ansatz dort  $v_T$  wieder sinkt. Um dieses Defizit zu beheben, subtrahieren Abel u. Shipway (2007) zwei dieser Ansätze mit unterschiedlichen Koeffizienten (das Additionszeichen in der Veröffentlichung ist ein Druckfehler; B. J. Shipway, pers. Mitteilung).



**Abbildung C.1** – Vergleich der unterschiedlichen Fallgeschwindigkeitsansätze, mit linearer (oben) und logarithmischer (unten) Aufteilung der Durchmesser-Koordinate.



# Verzeichnisse

---



# Abkürzungsverzeichnis

---

## Modellgrößen (siehe auch Kapitel 2)

$L$	– Flüssigwassergehalt, hier prognostisches Moment
$M_6$	– sechstes Moment, verwandt mit der Radarreflektivität
$N$	– Anzahldichte, hier prognostisches Moment
$RR$	– Niederschlagsrate
$x$	– mittlere Masse

## Durchmesser und mittlere Massen

$D$	– Tropfendurchmesser	S. 8
$\mathcal{L}$	– charakteristisches Längenmaß für Schneekristalle	S. 52
$m$	– Masse eines einzelnen Hydrometeors	S. 9
$x$	– Mittlere Masse des Hydrometeorensembles	S. 14
$x, x', x''$	– Masse eines einzelnen Tropfens in Kapitel 8	S. 71
$D^*$	– Durchmesser des größten Wolkentropfens (80 $\mu\text{m}$ )	S. 69
$x^*$	– Masse des größten Wolkentropfens ( $2,6808 \cdot 10^{-7}$ g)	S. 71
$D_{\max}$	– maximaler Tropfendurchmesser in ZW-Parametrisierung	S. 15
$D_{\max,\text{opt}}$	– optimales $D_{\max}$ in ZW-Parametrisierung	S. 38
$x_{\max}$	– maximale mittlere Masse in ZW-Parametrisierung	S. 32
$\bar{D}_{\text{init}}$	– zu $x_{\text{init}}$ gehöriger Durchmesser	S. 39
$x_{\text{init}}$	– mittlere Masse des Anfangszustandes	S. 26
$\bar{D}_{jk}$	– zu $\bar{\epsilon}_{jk}$ gehöriger Durchmesser	S. 17
$\bar{\epsilon}_{jk}$	– verallgemeinerte mittlere Masse	S. 17
$\bar{D}_{jk,\text{krit}}$	– zu $\bar{\epsilon}_{jk,\text{krit}}$ gehöriger Durchmesser	S. 18
$\bar{\epsilon}_{jk,\text{krit}}$	– kritische mittlere Masse	S. 18

**Sedimentationsparametrisierungen** (siehe auch Kapitel 3)

MY	– nach Milbrandt u. Yau (2005a)	S. 21
MY - K, diag	– Abkürzung in den Abbildungen	
SB	– nach Seifert u. Beheng (2006); Seifert (2008)	S. 21
SB - R, diag	– Abkürzung in den Abbildungen	
WL <sub>0</sub>	– nach Wacker u. Lüpkes (2009)	S. 20
WL - K, 0	– Abkürzung in den Abbildungen	
WL <sub>3</sub>	– nach Wacker u. Lüpkes (2009)	S. 20
WL - K, 3	– Abkürzung in den Abbildungen	
ZW	– nach Ziemer u. Wacker (2012)	S. 19
ZW - K, 0	– Abkürzung in den Abbildungen	

**Prozesse** (siehe auch Kapitel 9, S. 79)

S	– Sedimentation
SC	– Sedimentation, Koagulation
SCB	– Sedimentation, Koagulation, Zerfall

**Indizes für Umwandlungsraten** (siehe auch Tabelle 8.1, S. 70)

ac	– Akkreszenz
au	– Autokonversion
sc,c	– Selbsteinfang von Wolkentropfen
sc,r	– Selbsteinfang von Regentropfen

# Abbildungsverzeichnis

---

	Seite
<b>1. Einleitung</b>	
1.1. Schematische Darstellung der Behandlung der Wolkenmikrophysik . . .	2
<b>2. Beschreibung des Ensembleverhaltens von sedimentierenden Hydrometeoren</b>	
2.1. $\Gamma$ -Verteilungsfunktion für verschiedene $\mu$ . . . . .	13
<b>3. Sedimentationsparametrisierungen</b>	
3.1. Tropfenspektrum und mittlerer Durchmesser, $D_{\max} = \infty$ . . . . .	16
3.2. Tropfenspektrum und mittlerer Durchmesser, $D_{\max} < \infty$ . . . . .	17
3.3. Mittlere Fallgeschwindigkeit: Abhängigkeit von $D_{\max}$ . . . . .	19
3.4. Mittlere Fallgeschwindigkeit: Parametrisierungsvergleich . . . . .	22
<b>5. Modellrechnungen zur Sedimentation von Regentropfen</b>	
5.1. Spektrale Referenzlösung . . . . .	28
<b>5.2. Ergebnisse mit SED2MOM</b>	
5.2. Variation von $D_{\max}$ : $N, L$ . . . . .	30
5.3. Variation von $D_{\max}$ : $RR, M_6, x$ . . . . .	31
5.4. Variation von $x_{\text{init}}$ und $D_{\max}$ : $N, L$ . . . . .	33
5.5. Variation von $x_{\text{init}}$ und $D_{\max}$ : $RR, M_6, x$ . . . . .	34
5.6. Variation von $x_{\text{init}}$ : Sensitivität $Z(D_{\max})$ . . . . .	37
5.7. Variation von $D_{\max}$ und $x_{\text{init}}$ : Fehler $X$ . . . . .	38
5.8. Variation von $x_{\text{init}}$ : $D_{\max, \text{opt}}$ . . . . .	39
5.9. Parametrisierungsvergleich: $N, L$ . . . . .	40
5.10. Parametrisierungsvergleich: $RR, M_6, x$ . . . . .	42
5.11. Parametrisierungsvergleich: Fehler $X$ . . . . .	44
5.12. Parametrisierungsvergleich: $X(x_{\text{init}})$ . . . . .	45

<b>5.3. Ergebnisse mit RAINSHAFT</b>	
5.13. Variation von $D_{\max}$ : $N, L$ . . . . .	46
5.14. Variation von $D_{\max}$ : $RR, M_6, x$ . . . . .	47
5.15. RAINSHAFT & SED2MOM: Variation von $D_{\max}$ : Fehler $X$ . . . . .	48
5.16. RAINSHAFT & SED2MOM: Parametrisierungsvergleich: Fehler $X$ . . . . .	49
<b>6. Sedimentation von Schnee</b>	
6.1. Formen typischer Eiskristalle . . . . .	51
6.2. Anfangsspektren in Länge und Masse . . . . .	55
6.3. Analytische Lösung des spektralen Referenzmodells . . . . .	56
6.4. Ergebnisse des parametrisierten Modells für $\mathcal{L}_{\max} = 1,2 \text{ cm}, \infty$ . . . . .	58
6.5. Ergebnisse des parametrisierten Modells für $D_{\max} = 0,1995 \text{ cm}, \infty$ . . . . .	59
<b>7. Alternative Verteilungsfunktion: <math>B</math>-Verteilung</b>	
7.1. Skizze der $B$ -Verteilung . . . . .	62
7.2. Mittlere Fallgeschwindigkeit: Abhängigkeit von $D_{\max}$ . . . . .	63
7.3. Ansatzfunktionen für $q$ . . . . .	65
7.4. Resultate: $N, L, RR, M_6$ und $x$ . . . . .	66
<b>8. Beschreibung von Tropfenkollisionen</b>	
8.1. Umwandlungsprozesse . . . . .	70
<b>9. Ergebnisse mit Tropfenkollisionen</b>	
<b>9.1. Entwicklung eines Wolkentropfenspektrums</b>	
9.1. Referenzlösung für Sedimentation und Koagulation . . . . .	81
9.2. Spektrale Änderungsraten . . . . .	82
9.3. Variation von $D_{\max}$ : $N, L$ . . . . .	85
9.4. Variation von $D_{\max}$ : $RR, M_6, x$ . . . . .	86
9.5. Änderungsraten $ZW - K, 0$ . . . . .	87
9.6. Parametrisierungsvergleich: $N, L$ . . . . .	89
9.7. Parametrisierungsvergleich: $RR, M_6, x$ . . . . .	90
9.8. Änderungsraten $SB - R, \text{diag}$ . . . . .	91
9.9. Vertikal integrierte $N, L$ . . . . .	92
<b>9.2. Entwicklung eines Regentropfenspektrums</b>	
9.10. Referenzlösung zum Zeitpunkt $t = 600 \text{ s}$ . . . . .	93
9.11. Spektrale Änderungsraten . . . . .	94
9.12. Prozessvergleich: $X$ . . . . .	96
9.13. Änderungsraten: $ZW - K, 0$ . . . . .	97

9.14. Parametrisierungsvergleich: $N_r, L_r$ . . . . .	98
9.15. Parametrisierungsvergleich: $RR_r, M_{6,r}, x_r$ . . . . .	99
9.16. Änderungsraten: SB - R, diag . . . . .	100
9.17. Parametrisierungsvergleich: $X$ . . . . .	101
<b>11. Zusammenfassung &amp; Diskussion</b>	
11.1. Übersicht der verschiedenen Verteilungsfunktionen . . . . .	115
<b>A. Analytische Lösung</b>	
A.1. Analytische Lösung: Strukturskizze . . . . .	124
A.2. Analytische Lösung: Geschwindigkeiten im $z$ - $t$ -Raum . . . . .	125
A.3. Amplituden der Stoßwellen . . . . .	126
A.4. Geschwindigkeiten der Stoßwellen . . . . .	127
A.5. Eigenwerte zum Anfangszustand . . . . .	129
A.6. Eigenwerte zu den Amplituden der Stoßwellen . . . . .	129
A.7. Treffpunkt der Verdünnungswellen . . . . .	131
A.8. Form der Verdünnungswellen . . . . .	132
A.9. Ausschnitt aus Abbildung 5.9 . . . . .	133
<b>C. Ansätze für die Tropfenfallgeschwindigkeit</b>	
C.1. Übersicht der Fallgeschwindigkeitsansätze . . . . .	141



# Tabellenverzeichnis

---

	Seite
<b>1. Einleitung</b>	
1.1. Übersicht gebräuchlicher Wolkenmikrophysik-Schemata . . . . .	3
<b>4. Beschreibung der numerischen Modelle</b>	
4.1. Anfangsbedingungen für den Fall „Regentropfenspektrum“ . . . . .	26
4.2. Anfangsbedingungen für den Fall „Wolkentropfenspektrum“ . . . . .	26
<b>5. Modellrechnungen zur Sedimentation von Regentropfen</b>	
5.1. Variation von $D_{\max}$ : $M_6, Z_{\text{eq}}, \bar{s}_2$ . . . . .	32
5.2. Variation von $D_{\max}$ und $x_{\text{init}}$ : $M_6$ . . . . .	35
5.3. Variation von $x_{\text{init}}$ : $D_{\max, \text{opt}}$ . . . . .	39
5.4. Parametrisierungsvergleich: $M_6, x$ . . . . .	43
<b>6. Sedimentation von Schnee</b>	
6.1. Geschwindigkeits- und Massenbeziehungen . . . . .	53
6.2. Anfangswerte für Momente und Parameter . . . . .	54
6.3. Überschießen in $M_6$ für die internen Koordinaten $\mathcal{L}$ und $D$ . . . . .	60
6.4. Verhältnisse von $x_{\text{init}}$ und $x_{\max}$ . . . . .	60
<b>7. Alternative Verteilungsfunktion: <math>B</math>-Verteilung</b>	
7.1. Parameter der $B$ -Verteilung . . . . .	64
<b>9. Ergebnisse mit Tropfenkollisionen</b>	
9.1. Wolkentropfenspektrum: Referenzlösung: $RR_r, x_r$ . . . . .	83

**10. Vergleich der Rechenzeiten**

10.1. Spektrales Referenzmodell . . . . .	104
10.2. Parametrisierte Modelle: Regentropfenspektrum mit SED2MOM . . . . .	106
10.3. Parametrisierte Modelle: Regentropfenspektrum mit RAINSHAFT . . . . .	107
10.4. Parametrisierte Modelle: Wolkentropfenspektrum mit RAINSHAFT . . . . .	108
10.5. Verhältnisse der Rechenzeiten . . . . .	109
10.6. Parametrisierte Modelle: <i>B</i> -Verteilung . . . . .	109

# Literaturverzeichnis

---

- [Abel u. Shipway 2007] ABEL, S. J.; SHIPWAY, B. J.: A comparison of cloud-resolving model simulations of trade wind cumulus with aircraft observations taken during RICO. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 133 (2007), Nr. 624, S. 781–794
- [Beard 1976] BEARD, K. V.: Terminal Velocity and Shape of Cloud and Precipitation Drops Aloft. In: *J. Atmos. Sci.* 33 (1976), Nr. 5, S. 851–864
- [Beard u. Ochs 1984] BEARD, K. V.; OCHS, H. T.: Collection and Coalescence Efficiencies for Accretion. In: *J. Geophys. Res.* 89 (1984), Nr. D5, S. 7165–7169
- [Beard u. Ochs 1995] BEARD, K. V.; OCHS, H. T.: Collisions between Small Precipitation Drops. Part II: Formulas for Coalescence, Temporary Coalescence, and Satellites. In: *J. Atmos. Sci.* 52 (1995), Nr. 22, S. 3977–3996
- [Beard u. Pruppacher 1969] BEARD, K. V.; PRUPPACHER, H. R.: A determination of the terminal velocity and drag of small water drops by means of a wind tunnel. In: *J. Atmos. Sci.* 26 (1969), Nr. 5, S. 1066–1072
- [Beheng 1994] BEHENG, K. D.: A parameterization of warm cloud microphysical conversion processes. In: *Atmos. Res.* 33 (1994), Nr. 1-4, S. 193–206
- [Beheng u. Doms 1986] BEHENG, K. D.; DOMS, G.: A General Formulation of Collection Rates of Cloud and Raindrops Using the Kinetic Equation and Comparison with Parameterizations. In: *Beitr. Phys. Atmos.* 59 (1986), Nr. 1, S. 66–84
- [Berry u. Reinhardt 1974a] BERRY, E. X.; REINHARDT, R. L.: An Analysis of Cloud Drop Growth by Collection: Part I. Double Distributions. In: *J. Atmos. Sci.* 31 (1974), Nr. 7, S. 1814–1824
- [Berry u. Reinhardt 1974b] BERRY, E. X.; REINHARDT, R. L.: An Analysis of Cloud Drop Growth by Collection: Part II. Single Initial Distributions. In: *J. Atmos. Sci.* 31 (1974), Nr. 7, S. 1825–1831
- [Blahak 2010] BLAHAK, U.: Efficient approximation of the incomplete gamma function for use in cloud model applications. In: *Geosci. Model Dev.* 3 (2010), S. 329–336

- [Bleck 1970] BLECK, R.: A Fast, Approximative Method for Integrating the Stochastic Coalescence Equation. In: *J. Geophys. Res.* 75 (1970), Nr. 27, S. 5165–5171
- [Bott 1998] BOTT, A.: A Flux Method for the Numerical Solution of the Stochastic Collection Equation. In: *J. Atmos. Sci.* 55 (1998), Nr. 13, S. 2284–2293
- [Caumont et al. 2006] CAUMONT, O.; DUCROCQ, V.; DELRIEU, G.; GOSSET, M.; PINTY, J.-P.; PARENT DU CHÂTELET, J.; ANDRIEU, H.; LEMAÎTRE, Y.; SCIALOM, G.: A Radar Simulator for High-Resolution Nonhydrostatic Models. In: *J. Atmos. Oceanic Tech.* 23 (2006), Nr. 8, S. 1049–1067
- [Clark 1974] CLARK, T. L.: A Study in Cloud Phase Parameterization Using the Gamma Distribution. In: *J. Atmos. Sci.* 31 (1974), Nr. 1, S. 142–155
- [Cohard u. Pinty 2000] COHARD, J.-M.; PINTY, J.-P.: A comprehensive two-moment warm microphysical bulk scheme. I: Description and tests. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 126 (2000), Nr. 566, S. 1815–1842
- [Cotton 1972] COTTON, W. R.: Numerical Simulation of Precipitation Development in Supercooled Cumuli – Part I. In: *Mon. Weather Rev.* 100 (1972), Nr. 11, S. 757–763
- [Cotton et al. 2011] COTTON, W. R.; BRYAN, G. H.; VAN DEN HEEVER, S. C.: *Storm and Cloud Dynamics*. Amsterdam: Academic Press, 2011. – 809 S.
- [Doms et al. 2011] DOMS, G.; FÖRSTNER, J.; HEISE, E.; HERZOG, H.-J.; MIRONOV, D.; RASCHENDORFER, M.; REINHARDT, T.; RITTER, B.; SCHRODIN, R.; SCHULZ, J.-P.; VOGEL, G.: *A Description of the Nonhydrostatic Regional COSMO Model. Part II: Physical Parameterization*. Consortium for Small Scale Modelling, 2011
- [Doms u. Herbert 1985] DOMS, G.; HERBERT, F.: *Fluid- und Mikrodynamik in numerischen Modellen konvektiver Wolken*, Berichte des Instituts für Meteorologie und Geophysik der Universität Frankfurt, Nr. 62, 1985
- [Durran 1999] DURRAN, Dale R.: *Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics*. New York: Springer, 1999. – 465 S.
- [Ferrier 1994] FERRIER, B. S.: A Double-Moment Multiple-Phase Four-Class Bulk Ice Scheme. Part I: Description. In: *J. Atmos. Sci.* 51 (1994), Nr. 2, S. 249–280
- [Gayet et al. 2007] GAYET, J.-F.; STACHLEWSKA, I. S.; JOURDAN, O.; SHCHERBAKOV, V.; SCHWARZENBOECK, A.; NEUBER, R.: Microphysical and optical properties of precipitating drizzle and ice particles obtained from alternated lidar and in situ measurements. In: *Ann. Geophys.* 25 (2007), S. 1487–1497
- [Gunn u. Kinzer 1949] GUNN, R.; KINZER, G. D.: The terminal velocity of fall for water droplets in stagnant air. In: *J. Met.* 6 (1949), Nr. 4, S. 243–248

- [Gunn u. Marshall 1958] GUNN, R.; MARSHALL, J. S.: The distribution with size of aggregate snowflakes. In: *J. Met.* 15 (1958), Nr. 5, S. 451–462
- [Hall 1980] HALL, W. D.: A Detailed Microphysical Model Within A Two-Dimensional Dynamic Framework: Model Description and Preliminary Results. In: *J. Atmos. Sci.* 37 (1980), Nr. 11, S. 2486–2507
- [Heymsfield et al. 2008] HEYMSFIELD, A. J.; FIELD, P.; BANSEMER, A.: Exponential Size Distributions for Snow. In: *J. Atmos. Sci.* 65 (2008), Nr. 12, S. 4017–4031
- [Heymsfield u. Iaquina 2000] HEYMSFIELD, A. J.; IAQUINTA, J.: Cirrus Crystal Terminal Velocities. In: *J. Atmos. Sci.* 57 (2000), Nr. 7, S. 916–938
- [Heymsfield u. Westbrook 2010] HEYMSFIELD, A. J.; WESTBROOK, C. D.: Advances in the Estimation of Ice Particle Fall Speeds Using Laboratory and Field Measurements. In: *J. Atmos. Sci.* 67 (2010), Nr. 18, S. 2469–2482
- [Houghton 2002] HOUGHTON, J.: *The Physics of Atmospheres*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – 320 S.
- [Houze 1993] HOUZE, R. A.: *Cloud Dynamics*. San Diego: Acad. Press, 1993. – 573 S.
- [Hu u. Srivastava 1995] HU, Z.; SRIVASTAVA, R. C.: Evolution of Raindrop Size Distribution by Coalescence, Breakup, and Evaporation: Theory and Observations. In: *J. Atmos. Sci.* 52 (1995), Nr. 10, S. 1761–1783
- [Kessler 1969] KESSLER, E.: On the distribution and continuity of water substance in atmospheric circulations. In: *Am. Meteorol. Soc.* 10 (1969), Nr. 32
- [Khairoutdinov u. Kogan 2000] KHAIROUTDINOV, M.; KOGAN, Y.: A New Cloud Physics Parameterization in a Large-Eddy Simulation Model of Marine Stratocumulus. In: *Mon. Weather Rev.* 128 (2000), Nr. 1, S. 229–243
- [Khvorostyanov u. Curry 2002] KHVOROSTYANOV, V. I.; CURRY, J. A.: Terminal Velocities of Droplets and Crystals: Power Laws with Continuous Parameters over the Size Spectrum. In: *J. Atmos. Sci.* 59 (2002), Nr. 11, S. 1872–1884
- [Korolev u. Isaac 1999] KOROLEV, A. V.; ISAAC, G. A.: Ice particle habits in Arctic clouds. In: *Geophys. Res. Lett.* 26 (1999), Nr. 9, S. 1299–1302
- [Kumjian u. Ryzhkov 2012] KUMJIAN, M. R.; RYZHKOV, A. V.: The impact of size sorting on the polarimetric radar variables. In: *J. Atmos. Sci.* 69 (2012), Nr. 6, S. 2042–2060
- [Laws 1941] LAWS, J. O.: Measurements of the fall velocity of water drops and rain drops. In: *Trans. Amer. Geophys. Union* 22 (1941), S. 709–721
- [LeVeque 1992] LEVEQUE, R. J.: *Numerical Methods for Conservation Laws*. Basel: Birkhäuser, 1992. – 214 S.

- [Locatelli u. Hobbs 1974] LOCATELLI, J. D.; HOBBS, P. V.: Fall Speeds and Masses of Solid Precipitation Particles. In: *J. Geophys. Res.* 79 (1974), Nr. 15, S. 2185–2197
- [Long 1974] LONG, A. B.: Solutions to the Droplet Collection Equation for Polynomial Kernels. In: *J. Atmos. Sci.* 31 (1974), Nr. 4, S. 1040–1052
- [Low u. List 1982a] LOW, T. B.; LIST, R.: Collision, Coalescence and Breakup of Raindrops. Part I: Experimentally Established Coalescence Efficiencies and Fragment Size Distributions in Breakup. In: *J. Atmos. Sci.* 39 (1982), Nr. 7, S. 1591–1606
- [Low u. List 1982b] LOW, T. B.; LIST, R.: Collision, Coalescence and Breakup of Raindrops. Part II: Parameterization of Fragment Size Distributions. In: *J. Atmos. Sci.* 39 (1982), Nr. 7, S. 1607–1618
- [Lüpkes 1991] LÜPKES, C.: *Untersuchungen zur Parametrisierung von Koagulationsprozessen niederschlagsbildender Tropfen*, Universität Frankfurt, Dissertation, 1991
- [Lüpkes et al. 1989] LÜPKES, C.; BEHENG, K. D.; DOMS, G.: A Parameterization Scheme for Simulating Collision/Coalescence of Water Drops. In: *Beitr. Phys. Atmos.* 62 (1989), Nr. 4, S. 289–306
- [Magono u. Lee 1966] MAGONO, C.; LEE, C. W.: Meteorological classification of natural snow crystals. In: *J. Fac. Sci. Hokkaido University*, Ser. 7 (1966), Nr. 4, S. 321–362
- [Mansell 2010] MANSELL, E. R.: On Sedimentation and Advection in Multi-Moment Bulk Microphysics. In: *J. Atmos. Sci.* 67 (2010), Nr. 9, S. 3084–3094
- [Marshall u. Palmer 1948] MARSHALL, J. S.; PALMER, W. McK.: The distribution of raindrops with size. In: *J. Atmos. Sci.* 5 (1948), Nr. 4, S. 165–166
- [Matrosov et al. 2002] MATROSOV, S. Y.; KOROLEV, A. V.; HEYMSFIELD, A. J.: Profiling Cloud Ice Mass and Particle Characteristic Size from Doppler Radar Measurements. In: *J. Atmos. Oceanic Tech.* 19 (2002), Nr. 7, S. 1003–1018
- [Milbrandt u. McTaggart-Cowan 2010] MILBRANDT, J. A.; MCTAGGART-COWAN, R.: Sedimentation-Induced Errors in Bulk Microphysics Schemes. In: *J. Atmos. Sci.* 67 (2010), Nr. 12, S. 3931–3948
- [Milbrandt u. Yau 2005a] MILBRANDT, J. A.; YAU, M. K.: A Multimoment Bulk Microphysics Parameterization. Part I: Analysis of the Role of the Spectral Shape Parameter. In: *J. Atmos. Sci.* 62 (2005), Nr. 9, S. 3051–3064
- [Milbrandt u. Yau 2005b] MILBRANDT, J. A.; YAU, M. K.: A Multimoment Bulk Microphysics Parameterization. Part II: A Proposed Three-Moment Closure and Scheme Description. In: *J. Atmos. Sci.* 62 (2005), Nr. 9, S. 3065–3081

- [Morrison 2012] MORRISON, H.: On the Numerical Treatment of Hydrometeor Sedimentation in Bulk and Hybrid Bulk-Bin Microphysics Schemes. In: *Mon. Weather Rev.* 140 (2012), Nr. 5, S. 1572–1588
- [Morrison u. Grabowski 2007] MORRISON, H.; GRABOWSKI, W. W.: Comparison of Bulk and Bin Warm-Rain Microphysics Models Using a Kinematic Framework. In: *J. Atmos. Sci.* 64 (2007), Nr. 8, S. 2839–2861
- [Mukhopadhyay et al. 2012] MUKHOPADHYAY, A.; JASOR, G.; POLIFKE, W.: Simulation of pure sedimentation of raindrops using quadrature method of moments. In: *Atmos. Res.* 106 (2012), S. 61–70
- [Murakami 1990] MURAKAMI, M.: Numerical Modeling of Dynamical and Microphysical Evolution of an Isolated Convective Cloud – The 19 July CCOPE Cloud. In: *J. Meteor. Soc. Japan* 68 (1990), Nr. 2, S. 107–128
- [Pruppacher u. Klett 1997] PRUPPACHER, H. R.; KLETT, J. D.: *Microphysics of Clouds and Precipitation*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 954 S.
- [Rice 1987] RICE, J. R.: *Numerical Methods, Software, and Analysis*. Auckland: McGraw-Hill International Editions, 1987. – 483 S.
- [Rico-Ramirez et al. 2007] RICO-RAMIREZ, M. A.; CLUCKIE, I. D.; SHEPHERD, G.; PALLOT, A.: A high-resolution radar experiment on the island of Jersey. In: *Meteorol. Appl.* 14 (2007), Nr. 2, S. 117–129
- [Roeckner et al. 2003] ROECKNER, E.; BÄUML, G.; BONAVENTURA, L.; BROKOPF, R.; ESCH, M.; GIORGETTA, M.; HAGEMANN, S.; KIRCHNER, I.; KORNBLUM, L.; MANZINI, E.; RHODIN, A.; SCHLESE, U.; SCHULZWEIDA, U.; TOMPKINS, A.: *The atmospheric general circulation model ECHAM5. Part I. Model description*. Hamburg: Max-Planck-Institut für Meteorologie, 2003
- [Rogers et al. 1993] ROGERS, R. R.; BAUMGARDNER, D.; ETHIER, S. A.; CARTER, D. A.; ECKLUND, W. L.: Comparison of Raindrop Size Distributions Measured by Radar Wind Profiler and by Airplane. In: *J. Appl. Meteor.* 32 (1993), Nr. 4, S. 694–699
- [Rogers u. Yau 1989] ROGERS, R. R.; YAU, M. K.: *A Short Course in Cloud Physics*. Oxford: Pergamon Press, 1989. – 290 S.
- [Seifert 2002] SEIFERT, A.: *Parametrisierung wolkenmikrophysikalischer Prozesse und Simulation konvektiver Mischwolken*, Fakultät für Physik, Universität Karlsruhe, Dissertation, 2002
- [Seifert 2008] SEIFERT, A.: On the Parameterization of Evaporation of Raindrops as Simulated by a One-Dimensional Rainshaft Model. In: *J. Atmos. Sci.* 65 (2008), Nr. 11, S. 3608–3619

- [Seifert u. Beheng 2001] SEIFERT, A.; BEHENG, K. D.: A double-moment parameterization for simulating autoconversion, accretion and selfcollection. In: *Atmos. Res.* 59-60 (2001), S. 265–281
- [Seifert u. Beheng 2006] SEIFERT, A.; BEHENG, K. D.: A two-moment cloud microphysics parameterization for mixed phase clouds. Part 1: Model description. In: *Meteorol. Atmos. Phys.* 92 (2006), Nr. 1, S. 45–66
- [Seifert et al. 2005] SEIFERT, A.; KHAIN, A.; BLAHAK, U.; BEHENG, K. D.: Possible Effects of Collisional Breakup on Mixed-Phase Deep Convection Simulated by a Spectral (Bin) Cloud Model. In: *J. Atmos. Sci.* 62 (2005), Nr. 6, S. 1917–1931
- [Sekhon u. Srivastava 1970] SEKHON, R. S.; SRIVASTAVA, R. C.: Snow Size Spectra and Radar Reflectivity. In: *J. Atmos. Sci.* 27 (1970), Nr. 2, S. 299–307
- [Shipway u. Hill 2012] SHIPWAY, B. J.; HILL, A. A.: Diagnosis of systematic differences between multiple parametrizations of warm rain microphysics using a kinematic framework. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* (2012). <http://dx.doi.org/10.1002/qj.1913>. – DOI 10.1002/qj.1913
- [Skamarock et al. 2008] SKAMAROCK, W. C.; KLEMP, J. B.; DUDHIA, J.; GILL, D. O.; BARKER, D. M.; DUDA, M. G.; HUANG, X.-Y.; WANG, W.; POWERS, J. G.: *NCAR TECHNICAL NOTE (NCAR/TN-475+STR): A Description of the Advanced Research WRF Version 3*. National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, USA: Mesoscale and Microscale Meteorology Division, 2008
- [Srivastava 1971] SRIVASTAVA, R. C.: Size Distribution of Raindrops generated by their Breakup and Coalescence. In: *J. Atmos. Sci.* 28 (1971), Nr. 3, S. 410–415
- [Stensrud 2007] STENSRUD, D. J.: *Parameterization Schemes - Keys to Understanding Numerical Weather Prediction Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 459 S.
- [Stoer 2005] STOER, J.: *Numerische Mathematik 1*. Heidelberg: Springer, 2005. – 383 S.
- [Tiedtke 1993] TIEDTKE, M.: Representation of Clouds in Large-Scale Models. In: *Mon. Weather Rev.* 121 (1993), Nr. 11, S. 3040–3061
- [Toro 1999] TORO, E. F.: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Heidelberg: Springer, 1999. – 624 S.
- [Uplinger 1981] UPLINGER, W. G.: A new formula for Raindrop Terminal Velocity. In: *Proceedings 20th Conference Radar Meteorology*. Boston: Amer. Meteor. Soc., 1981, S. 389–391

- [Wacker u. Lüpkes 2009] WACKER, U.; LÜPKES, C.: On the selection of prognostic moments in parameterization schemes for drop sedimentation. In: *Tellus* 61A (2009), Nr. 4, S. 498 – 511
- [Wacker u. Seifert 2001] WACKER, U.; SEIFERT, A.: Evolution of rain water profiles resulting from pure sedimentation: Spectral vs. parameterized description. In: *Atmos. Res.* 58 (2001), Nr. 1, S. 19–39
- [Waldvogel 1974] WALDVOGEL, A.: The  $N_0$  jump of raindrop spectra. In: *J. Atmos. Sci.* 31 (1974), Nr. 4, S. 1067 – 1078
- [Wallace u. Hobbs 2006] WALLACE, J. M.; HOBBS, P. V.: *Atmospheric Science - An Introductory Survey*. Amsterdam: Elsevier, 2006. – 483 S.
- [Walters et al. 2011] WALTERS, D. N.; BEST, M. J.; BUSHELL, A. C.; COPSEY, D.; EDWARDS, J. M.; FALLOON, P. D.; HARRIS, C. M.; LOCK, A. P.; MANNERS, J. C.; MORCRETTE, C. J.; ROBERTS, M. J.; STRATTON, R. A.; WEBSTER, S.; M. WILKINSON, J.; WILLETT, M. R.; BOUTLE, I. A.; EARNSHAW, P. D.; HILL, P. G.; MACLACHLAN, C.; MARTIN, G. M.; MOUFOUMA-OKIA, W.; PALMER, M. D.; PETCH, J. C.; ROONEY, G. G.; SCAIFE, A. A.; WILLIAMS, K. D.: The Met Office Unified Model Global Atmosphere 3.0/3.1 and JULES Global Land 3.0/3.1 configurations. In: *Geosci. Model Dev.* 4 (2011), S. 919–941
- [Watkins 2005] WATKINS, A. P.: The Application of Gamma and Beta Number Size Distribution to the Modelling of Sprays. In: *Proceedings of 20th ILASS*. Orléans, 2005
- [Wilson u. Ballard 1999] WILSON, D. R.; BALLARD, S. P.: A microphysically based precipitation scheme for the UK Meteorological Office Unified Model. In: *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 125 (1999), Nr. 557, S. 1607–1636
- [Ziemer u. Wacker 2012] ZIEMER, C.; WACKER, U.: Parameterisation of the Sedimentation of Raindrops with Finite Maximum Diameter. In: *Mon. Weather Rev.* 140 (2012), Nr. 5, S. 1589–1602



# Danksagung

---

Mein herzlicher Dank gebührt meiner Betreuerin und Gutachterin Frau Priv.-Doz. Dr. Ulrike Wacker für die intensiven Diskussionen und die stets offene Tür. Ebenfalls möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Thomas Jung für die Übernahme des Koreferates bedanken. Ihnen beiden und Herrn Dr. Christof Lüpkes danke ich für die hilfreichen Anregungen im Rahmen der Doktorandenkomitee-Treffen.

Der numerische RAINSHAFT-Code wurde dankenswerterweise zur Verfügung gestellt von Herrn Prof. Dr. Klaus D. Beheng, Institut für Meteorologie und Klimaforschung, KIT Karlsruhe.

Die Arbeiten, die zu dieser Dissertation führten, wurden am Alfred-Wegener-Institut für Polar- und Meeresforschung, Bremerhaven, durchgeführt. Sie wurden finanziert durch Mittel des Projektes „Skalenübergreifende Modellierung der Populationsdynamik von Hydrometeoren mit Momentenverfahren“ im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogrammes 1276 METSTRÖM.