



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE  
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e  
Computação Científica

JUAN CARLOS RODRIGUEZ MIRANDA

**Espaços Hierárquicos para uma Formulação de Elementos  
Finitos Mista Estabilizada do Problema de Darcy**

Campinas

2017

Juan Carlos Rodriguez Miranda

## **Espaços Hierárquicos para uma Formulação de Elementos Finitos Mista Estabilizada do Problema de Darcy**

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa

Coorientador: Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Este exemplar corresponde à versão final da Tese defendida pelo aluno Juan Carlos Rodriguez Miranda e orientada pelo Prof. Dr. Maicon Ribeiro Correa.

Campinas

2017

**Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s):** CAPES

**ORCID:** <https://orcid.org/0000-0003-0789-7124>

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Silvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

R618e Rodriguez Miranda, Juan Carlos, 1984-  
Espaços hierárquicos para uma formulação de elementos finitos mista estabilizada do problema de Darcy / Juan Carlos Rodriguez Miranda. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Maicon Ribeiro Correa.

Coorientador: Philippe Remy Bernard Devloo.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Análise numérica. 3. Galerkin, Métodos de. 4. Meios porosos - Simulação por computador. I. Correa, Maicon Ribeiro, 1979-. II. Devloo, Philippe Remy Bernard, 1958-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

#### Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Hierarchical spaces for a stabilized mixed finite element formulation of Darcy problem

**Palavras-chave em inglês:**

Finite element methods

Numerical analysis

Galerkin methods

Porous media - Computer simulation

**Área de concentração:** Matemática Aplicada

**Titulação:** Doutor em Matemática Aplicada

**Banca examinadora:**

Maicon Ribeiro Correa [Orientador]

Giuseppe Romanazzi

Felipe dos Santos Loureiro

Darlan Karlo Elisiário de Carvalho

Lucas Catão de Freitas Ferreira

**Data de defesa:** 15-12-2017

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática Aplicada

**Tese de Doutorado defendida em 15 de dezembro de 2017 e aprovada  
pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA**

**Prof(a). Dr(a). GIUSEPPE ROMANAZZI**

**Prof(a). Dr(a). FELIPE DOS SANTOS LOUREIRO**

**Prof(a). Dr(a). DARLAN KARLO ELISIÁRIO DE CARVALHO**

**Prof(a). Dr(a). LUCAS CATAO DE FREITAS FERREIRA**

As respectivas assinaturas dos membros encontram-se na Ata de defesa

*Dedicado à le Sophie*

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador, Prof. Dr. Maicon Riberio Correa, pelas suas idéias que foram indispensáveis nesse trabalho, suas explicações e ensinamentos em Métodos de Elementos Finitos e Análise Numérica que me foram muito úteis. Ao Prof. Dr. Philippe R. B. Devloo e Profa. Dra. Sônia Maria Gomes, que me deram os elementos necessários para avançar na direção certa da pesquisa. Agradeço, pela atenção, compreensão e amizade no desenvolvimento do trabalho.

A Sofia pelo apoio, carinho, motivação, ajudas e conselhos em grande parte desse caminho.

A minha família pela compreensão e paciência em muitos dias de ausência.

Ao Felipe, grande amigo e excelente colega de trabalho.

Aos amigos e todas aquelas pessoas que de uma outra forma contribuíram com a realização deste trabalho.

Agradeço o apoio financeiro que esse trabalho recebeu da CAPES processo 1431407, ANP/-CEPETRO convênio 4574 e da FUNCAMP convênio 519.292 Sol. 2961/16.

## Resumo

O clássico método de elementos finitos misto dual, empregado na simulação de escoamentos de fluidos em meios porosos, é baseado em espaços de aproximação do tipo  $H(\text{div}; \Omega)$  que garantem a continuidade das componentes normais sobre as interfaces dos elementos para a variável vetorial e aproximações descontínuas em  $L^2(\Omega)$  para a variável escalar. Neste caso, as propriedades de estabilidade e convergência são obtidas por uma combinação específica dos espaços de aproximação. Os métodos de elementos finitos mistos estabilizados surgem com uma alternativa para contornar este delicado balanço. A principal proposta desta Tese é apresentar uma metodologia para a obtenção de aproximações de elementos finitos de alta ordem a problema de Darcy, baseada na combinação de uma formulação estabilizada, incondicionalmente estável em  $H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ , com uma estratégia de construção de bases hierárquicas dos tipos  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$ . A formulação estabilizada escolhida é livre de parâmetros dependentes da malha e permite uso de espaços de diferentes ordens para o fluxo e a pressão. Adicionalmente, é estudado o emprego desta metodologia em problemas parabólicos, com a respectiva aplicação ao problema de transporte linear em meios porosos altamente heterogêneos.

**Palavras Chaves:** Método de elementos finitos, problema de Darcy, método incondicionalmente estável, bases hierárquicas, espaços de aproximação de  $H(\text{div}; \Omega)$ .

## Abstract

The classical dual mixed finite element method for flow simulations is based on  $H(\text{div}; \Omega)$  conforming approximation spaces for the porous media flow, what guarantees continuous normal components on element interfaces, and discontinuous approximations in  $L^2(\Omega)$  for the pressure. However, stability and convergence can only be obtained through the use of compatible approximation spaces. Stabilized finite element methods may provide an alternative stable procedure to avoid this kind of delicate balance. The main purpose of this thesis is to present a high-order finite element methodology for solving the Darcy problem, based on the combination of a unconditionally stable mixed finite element method with a hierarchical methodology for construction of the conforming finite dimensional subspaces of  $H(\text{div}; \Omega)$  and  $H^1(\Omega)$ . The chosen stabilized method is free of mesh dependent parameters and allows for the use of different high order finite element approximations for velocity and pressure. It is also presented the application of the stabilized methodology in the simulation of the linear transport problem in highly heterogeneous porous media.

**Keywords:** Finite element method, Darcy problem, stabilized finite element, hierarchical finite elements bases,  $H(\text{div}; \Omega)$  approximating spaces.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Notações e Conceitos Básicos</b>	<b>9</b>
2.1	Notações . . . . .	9
2.2	Formulações Variacionais . . . . .	14
2.3	Aspectos Básicos de Elementos Finitos . . . . .	19
2.3.1	Discretização Espacial . . . . .	20
2.3.2	Subespaços Finitos Conformes . . . . .	21
2.4	Problema Misto Dual Discreto . . . . .	24
2.5	Problema Algébrico . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Bases Hierárquicas em <math>H^1(\Omega)</math> e <math>H(\text{div}; \Omega)</math></b>	<b>27</b>
3.1	Bases Polinomiais em $H^1(\Omega)$ . . . . .	28
3.1.1	Bases Modais Hierárquicas em $H^1(\Omega)$ . . . . .	30
3.2	Bases Polinomiais de $H(\text{div}; \Omega)$ . . . . .	34
3.2.1	Elementos de <i>Raviart-Thomas</i> . . . . .	35
3.2.2	Bases Hierárquicas $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Métodos dos Elementos Finitos Estabilizados para Problemas Elípticos</b>	<b>42</b>
4.1	Estabilizações em Formulações Mistas . . . . .	43
4.2	Formulação Condicionalmente Estável . . . . .	44
4.3	Formulação Incondicionalmente Estável . . . . .	45
4.4	O Emprego de Subespaços Conformes . . . . .	48

<b>5</b>	<b>Estudos Numéricos</b>	<b>50</b>
5.1	Meio Homogêneo . . . . .	51
5.2	Meio Heterogêneo . . . . .	64
5.3	Problema com Tensor de Permeabilidade Altamente Anisotrópico . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Aplicações em Escoamentos em Meios Porosos</b>	<b>79</b>
6.1	Transporte Advectivo-Difusivo Linear . . . . .	80
6.2	Estratégia de Decomposição de Operadores . . . . .	81
6.3	Método Estabilizado para o Problema Difusivo . . . . .	83
6.3.1	Experimento Numérico . . . . .	84
6.4	Método de Galerkin Descontínuo o Problema Advectivo . . . . .	89
6.4.1	O Método RKDG . . . . .	89
6.4.2	A Formulação Semidiscreta . . . . .	91
6.4.3	Reconstrução Linear do Gradiente . . . . .	93
6.4.4	Exemplo Numérico . . . . .	96
6.5	Simulações do Transporte Advectivo-Difusivo . . . . .	98
6.5.1	Problema com Barreiras . . . . .	98
6.5.2	Problema do Tipo <i>Five-Spot</i> . . . . .	104
6.5.3	Problema do Traçador em um Meio Altamente Heterogêneo . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Conclusões</b>	<b>111</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>114</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O escoamento de um fluido incompressível em um meio poroso saturado leva à formulação do clássico problema de Darcy [43]: determinar a velocidade de Darcy  $\mathbf{u}$  (que também denominamos de fluxo) e a pressão  $p$  tais que

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \text{grad } p \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{Lei de Darcy}) \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = f \quad \text{em } \Omega, \quad (\text{Conservação de Massa}) \quad (1.2)$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad (\text{Condição de Contorno}) \quad (1.3)$$

onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é um domínio aberto com fronteira Lipschitz  $\Gamma = \partial\Omega$ , representando um meio poroso heterogêneo,  $f \in L^2(\Omega)$  é uma função que representa a existência de fontes/sumidouros de massa e  $\mathbf{K}$  é um tensor simétrico definido positivo que representa a permeabilidade da matriz porosa dividida pela viscosidade do fluido. Esse tensor é composto por funções em  $L^\infty(\Omega)$ , com constantes  $0 < K_{\min} \leq K_{\max}$  tais que

$$K_{\min} \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T \mathbf{K} \xi \leq K_{\max} \|\xi\|_2^2,$$

para todo  $\xi \in \mathbb{R}^2$ . Sendo  $\mathbf{K}$  um tensor definido positivo, sua inversa  $\Lambda = \mathbf{K}^{-1}$  está bem definida. Por simplicidade, consideramos condições de contorno de Dirichlet homogêneas, mas outros tipos de condições de contorno podem ser impostas.

Diferentes formulações de elementos finitos para a resolução deste problema modelo podem ser encontradas na literatura, sendo essencialmente baseadas ou na equação diferencial elíptica de segunda ordem escrita em termos da pressão (variável primal), à qual é obtida pela substituição de (1.1) em (1.2), ou no sistema de primeira ordem (1.1)-(1.2) onde a pressão e o fluxo (variáveis primal e dual, respectivamente) são aproximados simultaneamente, nas assim chamadas formulações mistas [34, 85, 18].

A aproximação da pressão usando o método de Galerkin  $H^1(\Omega)$ —conforme [34] conduz a soluções com ordem ótima em  $H^1(\Omega)$ . Contudo, o cálculo do fluxo demanda o emprego de uma estratégia de pós-processamento. O objetivo das técnicas de pós-processamento é a obtenção de campos de velocidades que garantam a continuidade das componentes normais entre elementos vizinhos e boas propriedades de conservação da massa. De uma forma geral, o pós-processamento pode ser efetuado de forma direta através do cálculo do gradiente da pressão com o respectivo emprego da lei de Darcy (1.1), ou através da formulação de um novo problema, que pode ser definido sobre um conjunto de elementos (macro-elementos) ou sobre o domínio como um todo [73, 50, 39]. Uma outra estratégia amplamente empregada para a resolução do problema de Darcy, tanto em sua forma primal (equação da pressão) quanto mista (sistema pressão-velocidade) é a definição de métodos de Galerkin Descontínuo (DG, do inglês *Discontinuous Galerkin*) [12, 35, 5, 29, 64, 2]. Os primeiros métodos de Galerkin para equações elípticas de segunda ordem baseados em espaços descontínuos foram apresentados nos anos setenta, no contexto de métodos de Penalidade Interna, com continuidade entre elementos imposta de forma fraca, através de penalidades [11, 94]. A partir desta época, diversos métodos DG para equações elípticas foram definidos e analisados [6, 26, 22, 72]. Uma interessante análise unificada de métodos de Galerkin Descontínuo para problemas elípticos pode ser encontrada em [5].

Nesta Tese estamos interessados no emprego de formulações mistas para o problema de Darcy. Os métodos de elementos finitos mistos são caracterizados pela aproximação simultânea dos campos de velocidade e pressão com o uso de diferentes espaços para cada variável. Na formulação mista dual clássica [85], o fluxo é uma função vetorial em  $H(\text{div}; \Omega)$  e a pressão pertence a  $L^2(\Omega)$ , resultando no problema de determinar o par  $\{\mathbf{u}, p\} \in$

$H(\operatorname{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que

$$(\Lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega), \quad (1.4)$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{u}, q) = (f, q) \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (1.5)$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  representa o produto interno em  $L^2(\Omega)$  [21, 18].

As funções vetoriais em  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  se caracterizam pela continuidade da componente normal, uma propriedade fundamental para avaliação de aplicações de transporte de componentes em um meio poroso [50]. Como será destacado na revisão apresentada no Capítulo 2, a definição de métodos de elementos finitos mistos estáveis para o problema de Darcy requer o emprego de subespaços compatíveis de  $H(\operatorname{div}; \Omega)$  e  $L^2(\Omega)$ , no sentido de que tais espaços devem satisfazer duas condições de compatibilidade: a condição de elipticidade no núcleo e a condição *inf-sup* [21, 18]. A construção de subespaços  $H(\operatorname{div}; \Omega)$ –conformes já é por si só uma tarefa de alta complexidade, principalmente quando comparada com a complexidade da construção de subespaços  $H^1(\Omega)$ –conformes [80, 81, 47, 48]. Neste sentido, as condições de compatibilidade representam uma complexidade adicional para a definição de aproximações estáveis para o problema de Darcy, exigindo um compromisso a ser satisfeito entre os espaços utilizados para a aproximação de cada uma das variáveis.

Desde o trabalho de Raviart e Thomas [85], diversas técnicas de construção de espaços de elementos finitos compatíveis para a formulação mista do problema de Darcy vêm sendo propostas na literatura [23, 24, 80, 81, 3, 1]. Para algumas destas famílias de espaços, as variáveis  $\mathbf{u}$ ,  $p$  e  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  são aproximadas com a mesma ordem, assim como nos espaços de Raviart-Thomas [85]. Em outras famílias,  $p$  e  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  são aproximadas com uma ordem a menos que  $\mathbf{u}$ , assim como nos espaços de Brezzi-Douglas-Marini [23]. De uma forma geral, a construção das funções vetoriais nos elementos geométricos se dá com o uso da transformação de Piola [85, 3], embora no caso de elementos gerados por transformações afins, tal construção possa se dar diretamente nos elementos geométricos. Em relação a problemas em duas dimensões sobre malhas quadrilaterais gerais, o uso de elementos de Raviart-Thomas, mapeados pela transformação de Piola, pode gerar uma perda de consistência na aproximação divergente do fluxo, com a consequente perda de uma ordem de convergência. Este problema foi resolvido por Arnold, Boffi e Falk em [3] através do enriquecimento do espaço da velocidade e, mais

recentemente, por [1] e por [54] usando diferentes estratégias. Existem construções hierárquicas de espaços de elementos finitos baseados nas propriedades do diagrama de Rahm, como é descrito em [90, 46], ou também em metodologias baseadas em elementos finitos exteriores [8, 7] que podem ser usados na construção de discretizações estáveis de uma grande variedade de problemas. Neste trabalho, estamos particularmente interessados na metodologia hierárquica para a construção de subespaços de  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$  desenvolvida em [89] e ampliada em [30, 54]. Uma variação desta metodologia será apresentada no Capítulo 3, onde as variáveis vectoriais são definidas sobre um elemento padrão e depois mapeadas para o elemento geométrico com o uso da transformação de Piola.

Uma forma de contornar a necessidade da construção de espaços compatíveis é o emprego de formulações de elementos finitos mistas estabilizadas. A ideia por trás de tais formulações está na combinação consistente de resíduos das equações do sistema (1.1)-(1.2) com a formulação mista clássica (1.4)-(1.5), de forma a contornar uma das ou ambas as condições de compatibilidade [55, 25, 77, 17, 40]. No trabalho [25] é proposta uma formulação mista modificada para o problema de Darcy que satisfaz automaticamente a condição de elipticidade no núcleo, possibilitando o emprego de espaços de elementos finitos estáveis para o problema de Stokes tais como os elementos de Crouzeix-Raviart [41] e os elementos Taylor-Hood [93]. Já em [40], os autores apresentam uma formulação incondicionalmente estável para o problema de Darcy, construída a partir da combinação resíduos de mínimos quadrados da lei de Darcy (1.1) e da equação de balanço da massa (1.2) com a formulação mista (1.4)-(1.5). Tal formulação pode ser vista como uma extensão natural da formulação de [25] e satisfaz automaticamente ambas as condições de compatibilidade, permitindo assim o emprego de quaisquer subespaços  $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes para a velocidade e  $H^1(\Omega)$ -conformes para a pressão.

Apesar da flexibilidade na escolha dos espaços para a velocidade e a pressão, garantida pela estabilidade incondicional da formulação, em [40] os autores focam apenas no uso de interpolações lagrangianas contínuas (nodalmente contínuas) tanto para o fluxo quanto para a pressão. Tal escolha se justifica para problemas nos quais a permeabilidade é uma função suave (ver [40]). Contudo, em problemas com coeficientes descontínuos, comuns em meios porosos heterogêneos, o uso de aproximações contínuas para o fluxo tal como em [77, 17, 40] pode resultar em soluções não físicas [39, 72]. Nestes casos é necessário o emprego de subespaços  $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes para a velocidade, o que abre possibilidade para o uso dos espaços veto-

riais de Raviart-Thomas [85], Brezzi-Douglas-Marini [23], Brezzi-Douglas-Fortin-Marini [24], Arnold-Boffi-Falk [3], Arbogast-Correa [1], dentre outros.

Neste sentido, esta Tese contribui com a área da análise numérica de elementos finitos e da simulação de escoamentos em meios porosos através do desenvolvimento de uma metodologia incondicionalmente estável para a aproximação numérica do problema de Darcy, que permite a combinação de espaços de elementos finitos  $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes para a velocidade e  $H^1(\Omega)$ –conformes para a pressão, de quaisquer ordem, hierarquicamente construídos. Tal metodologia é composta por dois ingredientes principais: (i) uma formulação de elementos finitos mista que possibilite combinação de espaços não necessariamente compatíveis e (ii) uma estratégia consistente para a construção hierárquica de subespaços conformes. Como primeiro ingrediente, escolhemos a formulação incondicionalmente estável de Correa e Loula [40], que é revista no Capítulo 4, e como segundo ingrediente adotamos a variação do trabalho de Siqueira, Devloo e Gomes [89] para a construção de subespaços de  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$ , que é apresentada no Capítulo 3. O resultado desta metodologia é a definição de métodos de elementos finitos flexíveis, com grande potencial para simulações de escoamentos em meios porosos altamente heterogêneos permitindo o uso de aproximações de alta ordem para as variáveis do fluxo e da pressão, sem nenhum requerimento de compatibilidade, como é requerido em formulações mistas para este tipo de problema. Tal flexibilidade é demonstrada através de uma série de experimentos numéricos, descritos nos Capítulos 5 e 6. Em especial, o Capítulo 6 apresenta aplicações da metodologia desenvolvida na simulação de escoamentos saturados em meios porosos heterogêneos. Um esquema de decomposição de operadores é empregado para desacoplar a parte advectiva do transporte da parte difusiva. Para a resolução da parte difusiva, é empregada uma extensão para problemas parabólicos da metodologia proposta para a resolução do problema de Darcy. Para a parte advectiva, é empregado um método de Galerkin Descontínuo explícito baseado na reconstrução do gradiente [49, 53], onde as informações utilizadas para a reconstrução são baseadas nos nós.

**Organização da Tese** O texto da Tese está organizado como segue. No Capítulo 2, formalizamos as notações adotadas e resumimos alguns resultados clássicos que embasam a análise numérica das formulações estudadas. Um estudo detalhado da estratégia hierárquica para a construção de subespaços de  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$  de [89] é realizado no Capítulo 3, onde é feita a adaptação da metodologia original para o uso da transformação de Piola. No Capítulo 4 dis-

cutimos algumas estratégias de estabilização da formulação mista, iniciando pela formulação condicionalmente estável de [25] e concluindo com a formulação incondicionalmente estável de [40], com o objetivo de esclarecer em como as estabilizações podem circundar de forma parcial ou total as condições de estabilidade do Teorema de Brezzi. No Capítulo 5 são apresentados experimentos numéricos para o estudo da precisão e da estabilidade da metodologia proposta, através do emprego de diferentes espaços na aproximação de problemas com permeabilidade homogênea e heterogênea, com soluções exatas conhecidas. Finalmente, aplicações ao escoamento saturado em meios porosos heterogêneos são apresentadas no Capítulo 6 e no Capítulo 7 apresentamos as conclusões da Tese, tecendo comentários finais.

**Sobre a Implementação Numérica** Todos os experimentos numéricos presentes nesta Tese foram realizados a partir de códigos computacionais implementados pelo autor em linguagem C++, com o uso da biblioteca Eigen para a resolução de sistemas lineares, de forma direta. As figuras foram geradas pelo software livre Gnuplot.



## Capítulo 2

# Notações e Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos algumas definições, formulações variacionais e teoremas presentes na teoria de elementos finitos e, em particular, na solução de problemas de valor de contorno elípticos lineares. Na primeira seção é estabelecida a natureza do domínio onde é definido o problema de contorno, assim como sua aproximação por um conjunto de elementos geométricos agrupados em uma malha. Na sequência e a partir de uma malha de elementos é definida uma malha de arestas usada na formulação de métodos de aproximação não conformes. Posteriormente, um conjunto de espaços de Hilbert são definidos junto com suas normas e semi-normas associadas, o quais são fortemente usados na teoria de elementos finitos. Por fim, é postulado um conjunto de formulações variacionais de um problema elíptico linear padrão, caracterizando os espaços de solução, assim como os condicionamentos necessários para obter soluções estáveis, no sentido do teorema de Brezzi, seguido de um estudo do método dos elementos finitos usado para aproximar soluções de problemas de valores de contorno e de uma discussão sobre questão da compatibilidade de espaços na definição do problema Misto Dual discreto.

### 2.1 Notações

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto poligonal, limitado com um contorno  $\Gamma := \partial\Omega$  suficientemente regular, que pode ser decomposto em partes  $\Gamma_D, \Gamma_N$  tais que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$  e

$\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ . Considere as seguintes notações:

- $\mathcal{D}(\Omega)$  representa o espaço das funções  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente diferenciáveis com suporte em  $\Omega$ .
- $C(\Omega)$  funções contínuas com suporte em  $\Omega$ .
- $C^p(\Omega)$  representa o conjunto das funções contínuas que possuem  $p > 0$  derivadas contínuas.
- $\mathcal{V}$  representa um espaço de funções reais definidas sobre  $\Omega$ .
- $\mathcal{V}'$  representa o espaço dual associado ao espaço  $\mathcal{V}$ .
- O produto dual definido sobre  $\mathcal{V}$  é denotado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega : \mathcal{V}' \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- O produto interno definido sobre  $\mathcal{V}$  é representado da forma  $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- O operador  $\text{div}(\cdot)$  é definido sobre as funções  $\boldsymbol{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$\text{div } \boldsymbol{v} := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

onde  $\boldsymbol{v} = \{v_1, v_2\}$ .

- O operador  $\text{grad}(\cdot)$  é definido sobre funções  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  como,

$$\text{grad } q := \sum_{i=1}^2 \frac{\partial q}{\partial x_i} \mathbf{n}_i,$$

onde  $\{\mathbf{n}_i\}_1^2$  representam os vetores unitários.

A seguir são definidos alguns espaços funcionais normalmente usados na teoria de elementos finitos.

**Definição [2.1]. Espaços  $L^p(\Omega)$** 

Definimos a coleção de funções de valor real mesuráveis  $q$  em um domínio  $\Omega$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , com a norma

$$\|q\|_{p,\Omega} = \left[ \int_{\Omega} |q|^p dx \right]^{1/p} < \infty,$$

como o espaço  $L^p(\Omega)$ .

**Definição [2.2]. Derivada Fraca**

No sentido das distribuições consideram-se  $f$  e  $g$  localmente integráveis em  $\Omega$ . Definimos  $g$  a  $\alpha$ -ésima derivada fraca da  $f$  como

$$\int_{\Omega} f \partial^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \phi dx \quad \forall \phi \in C^{\infty}(\Omega),$$

onde

$$\partial^{\alpha} \phi = \frac{\partial^{\alpha} \phi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \quad \text{com} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Assim, definimos o espaço de funções escalares de Sobolev como segue.

**Definição [2.3]. Espaços de Sobolev**

Seja  $k$  um inteiro não negativo e  $p \in [1, \infty]$ . O espaço de Sobolev  $W^{k,p}(\Omega)$  em um domínio aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  é o conjunto de todas as funções  $q \in L^p(\Omega)$  tal que para cada índice  $\alpha$  com  $|\alpha| \leq k$ , a  $\alpha$ -ésima derivada fraca  $\partial^{\alpha} q$  existe e  $\partial^{\alpha} q \in L^p(\Omega)$ . A norma no espaço  $W^{k,p}(\Omega)$  é dada por

$$\|q\|_{k,p,\Omega} = \begin{cases} \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} q\|_k^p \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} q\|_{\infty}, & p = \infty. \end{cases}$$

Em particular se  $p = 2$ , tomamos  $H^p(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$  e sua restrição  $H_0^1(\Omega)$  dada por

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ q \in H^1(\Omega) \mid q = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\},$$

com a norma dada por  $\|\cdot\|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,2,\Omega}$  e a semi-norma

$$|q|_{k,\Omega}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} q|^2 dx.$$

Se a fronteira  $\Gamma$  é considerada suficientemente suave é possível mostrar que existe um operador linear contínuo  $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$  tal que  $\gamma(q)$  coincide com a restrição de  $q$  sobre  $\Gamma$ , assim  $\gamma(q)$  é conhecido como o traço da função  $q$  sobre  $\Gamma$ .

**Teorema 2.1.1 (Operador Traço)** *Seja  $\Omega$  limitado com contorno suave por partes. Existe um mapeamento linear e limitado*

$$\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad \text{tal que} \quad \|\gamma(q)\|_{0,\Gamma} \geq \|q\|_{1,\Omega},$$

onde  $\gamma(q) = q|_{\Gamma}$  para todo  $q \in C^1(\Omega)$ .

**Demonstração.** Ver referência [19].

A partir do Teorema 2.1.1 é possível definir de forma natural os espaços de Sobolev de índices fracionários  $k = \frac{1}{2}$  (ver [20, 18]) como

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \gamma\left(H^1(\Omega)\right) \quad \text{com} \quad \|q\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \inf_{\substack{p \in H^1(\Omega) \\ \gamma(p)=q}} \|p\|_{1,\Omega}.$$

Na referência [20] é apresentado um resumo geral dos espaços funcionais mais usados no contexto do método dos elementos finitos e na referência [9] é abordado este tema sobre o ponto de vista da análise funcional clássica.

Seja o par de espaços  $(L^2(\Omega))^2$  e  $H(\text{div}; \Omega)$  definidos como:

**Definição [2.4]. Espaços  $(L^2(\Omega))^2$**

Considerando os espaços  $L^p(\Omega)$  definidos em [2.1], definimos o espaço  $(L^2(\Omega))^2$  como

$$(L^2(\Omega))^2 := \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \mathbf{v} = \{v_1, v_2\} \text{ com } v_1, v_2 \in L^2(\Omega) \right\},$$

e a norma definida a partir do produto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2,$$

dada por  $\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega}^2 := (\mathbf{v}, \mathbf{v})$ .

**Definição [2.5]. Espaços  $H(\text{div}; \Omega)$**

Considerando a Definição [2.4], definimos

$$H(\text{div}; \Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 \mid \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

com a norma

$$\|\mathbf{v}\|_{\text{div},\Omega}^2 := |\mathbf{v}|^2 + |\text{div } \mathbf{v}|^2.$$

Sendo  $|\cdot|$  a norma definida em  $(L^2(\Omega))^2$  ou em  $L^2(\Omega)$  conforme o espaço.

No restante deste texto de forma a não usar uma notação sobrecarregada, consideramos a notação  $\|q\|_{\mathcal{Q}}$  e  $|q|_{\mathcal{Q}}$  como a norma e a semi-norma, respectivamente associadas ao espaço funcional  $\mathcal{Q}$ , onde reside a função  $q$ , a menos que seja indicada de outra forma.

## 2.2 Formulações Variacionais

Nesta seção apresentamos algumas formulações variacionais comuns na teoria de método dos elementos finitos para fornecer uma solução para problemas de valor de contorno. Para isto, sem perda de generalidade, tomamos  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$  e definimos um problema modelo geral descrito por um operador diferencial linear de segunda ordem sobre um espaço de funções em um domínio  $\Omega$ , junto com uma condição de contorno não homogênea.

### Problema Poisson

*Dados  $g$  e  $f$ , queremos determinar a função de valor real  $p$ , tal que*

$$-\Delta p = f \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

*com condições de contorno*

$$p = g \text{ em } \Gamma_D \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \bar{h} \text{ em } \Gamma_N,$$

*com  $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal definido sobre  $\Gamma_N$ ,*

onde  $\mathbf{x}$  representa a variável espacial dada pelo par  $\{x_1, x_2\}$  em duas dimensões. Por simplicidade, consideramos apenas condições de contorno de Dirichlet homogêneas, ou seja  $\Gamma = \Gamma_D$  e  $g = 0$ . Se tomamos  $\Gamma_N = \Gamma$  o problema passa a estar sujeito à condição de compatibilidade dada por  $\int_{\Gamma_N} \bar{h} d\Gamma = 0$ , [19].

Na verdade, neste caso,  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , mas consideraremos  $f \in L^2(\Omega)$ . Se  $p$  é a solução do problema de Poisson e  $q$  uma função suficientemente regular tal que  $q = 0$  sobre  $\Gamma$ , usando a integração por partes podemos definir formalmente o problema variacional:

**Problema Primal**

Determinar  $p \in \mathcal{P}$ , tal que

$$c(p, q) = f(q) \quad \text{e} \quad \forall q \in \mathcal{P} \quad (2.2)$$

onde

$$c(p, q) := \int_{\Omega} \text{grad } p \cdot \text{grad } q \, d\mathbf{x}, \quad f(q) := \int_{\Omega} f q \, d\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

com  $\mathcal{P} \equiv H_0^1(\Omega)$  e  $f \in L^2(\Omega)$ .

O Problema Primal está definido no espaço de dimensão infinita  $\mathcal{P}$ . O método de Galerkin consiste na escolha de um subespaço  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$  de dimensão finita, reduzindo o Problema Primal a um problema discreto, que pode ser apresentado na forma algébrica  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , sendo  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ , onde  $p$  representa a dimensão de uma base associada a  $\mathcal{P}_h$ . O Problema Primal representa a forma fraca do Problema de Poisson e a existência e unicidade da solução é determinada pelas propriedades da forma bilinear  $c(\cdot, \cdot)$  e do funcional linear  $f(\cdot)$ , segundo o Teorema de Lax-Milgram.

**Teorema 2.2.1 (Teorema de Lax-Milgram)** *Seja  $\mathcal{P}$  um espaço de Hilbert com norma  $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$ ,  $c(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear contínua e coerciva sobre  $\mathcal{P}$  e  $b(\cdot)$  um funcional linear contínuo em  $\mathcal{P}$ , então, existe uma única solução  $p \in \mathcal{P}$  do problema*

$$c(p, q) = f(q) \quad , \quad \forall q \in \mathcal{P} ,$$

onde temos a seguinte estimativa de estabilidade

$$\|p\|_{\mathcal{P}} \leq \frac{\delta}{\rho} ,$$

com  $\delta$  a constante de continuidade do operador linear e  $\rho$  a constante de coercividade da forma bilinear.

**Demonstração.** Ver referência [65].

Se a forma bilinear  $c(\cdot, \cdot)$  é simétrica, a solução  $p$  do Problema Variacional também representa um *mínimo global* do funcional

$$\mathcal{J}(q) = \frac{1}{2}c(q, q) - f(q),$$

definido sobre  $\mathcal{P}$ , que faz parte dos problemas variacionais equivalentes ao problema de valor de contorno, estudados em [61, 34, 65, 83].

Casos mais gerais nos quais o espaço de busca  $\mathcal{P}$  difere do espaço de funções teste  $\mathcal{Q}$  são analisados pelo Teorema de Babuška [13].

**Teorema 2.2.2 (Teorema de Necăs ou Teorema de Babuška)** *Considere dois espaços de Hilbert reais,  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$ , um operador bilinear  $c : \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\ell \in \mathcal{Q}'$ . Supondo a existência de duas constantes  $M > 0$  e  $\alpha > 0$  tais que*

$$|c(p, q)| \leq M \|p\|_{\mathcal{P}} \|q\|_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \{p, q\} \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \quad \text{e}$$

$$\sup_{q \neq 0 \in \mathcal{Q}} \frac{c(p, q)}{\|q\|_{\mathcal{Q}}} \geq \alpha \|p\|_{\mathcal{P}} \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad \sup_{p \in \mathcal{P}} c(p, q) > 0 \quad \forall q \neq 0 \in \mathcal{Q}.$$

Então existe uma única solução  $p \in \mathcal{P}$  do problema

$$c(p, q) = \langle \ell, q \rangle \quad \forall q \in \mathcal{Q}.$$

**Demonstração.** O teorema acima representa um pilar na teoria dos elementos finitos, para sua demonstração podem ser consultadas as referências [9, 13, 19, 79].



Em casos onde, além da variável primal  $p$ , é de interesse a avaliação precisa de sua variação espacial  $\text{grad } p$ , é desejável o emprego de uma formulação variacional que envolva a variável dual  $\mathbf{u} = -\text{grad } p$ . No problema de Darcy,  $\mathbf{u}$  representa a velocidade média de um fluido escoando em um médio poroso, ou simplesmente velocidade de Darcy. Assim, partindo de um problema de minimização com restrições definido sobre um espaço  $\mathcal{U}_f$  dado por

$$\mathcal{U}_f := \left\{ \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega) \mid \text{div } \mathbf{v} - f = 0 \right\},$$

e seguindo o procedimento detalhado no trabalho de Ciarlet (ver [34]) para a solução de problemas variacionais a partir da teoria da dualidade, um novo problema variacional associado ao Problema de Poisson homogêneo é definido como,

### Problema Misto Dual

*Determinar o par  $\{\mathbf{u}, p\} \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$  tal que*

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \, \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0 \quad , \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (2.4)$$

$$\int_{\Omega} q \, \text{div } \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f q \, d\mathbf{x} \quad , \forall q \in L^2(\Omega). \quad (2.5)$$

Definindo  $\mathcal{U} \equiv H(\text{div}; \Omega)$  e  $\mathcal{P} \equiv L^2(\Omega)$ , podemos escrever este problema na seguinte forma abstrata:

**Problema Misto Dual Abstrato**

Dados os funcionais  $m$  e  $n$  em  $\mathcal{U}'$  e  $\mathcal{P}'$  respectivamente, determinar o par  $\{\mathbf{u}, p\}$  em  $\mathcal{U} \times \mathcal{P}$  tal que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = \langle m, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}, \quad (2.6)$$

$$b(\mathbf{u}, q) = \langle n, q \rangle, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \quad (2.7)$$

com

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad b(\mathbf{v}, p) := \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad (2.8)$$

$$\langle m, \mathbf{v} \rangle := 0 \quad e \quad \langle n, q \rangle := (f, q) = \int_{\Omega} f q \, d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$

Uma das principais características da formulação mista dual é a aproximação simultânea dos campos  $\mathbf{u}$  e  $p$ , implicando na necessidade de compatibilidade entre os espaços empregados [14, 18, 38]. Tal compatibilidade é representada pelas hipóteses do Teorema de Brezzi, utilizado para o estudo da existência e da unicidade da solução de problemas neste tipo, como veremos a seguir.

**Teorema 2.2.3 (Teorema de Brezzi)** *Sejam os espaços de Hilbert  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{P}$ , os funcionais limitados lineares  $m$  e  $n$  sobre  $\mathcal{U}'$  e  $\mathcal{P}'$ , respectivamente, e as formas bilineares  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  sobre  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$  e  $\mathcal{U} \times \mathcal{P}$ , respectivamente. Supondo que as formas bilineares  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  são contínuas, isto é, que para algum par de constantes  $\alpha_a, \alpha_b < \infty$ ,*

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq \alpha_a \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U} \quad (2.10)$$

e

$$b(\mathbf{v}, p) \leq \alpha_b \|p\|_{\mathcal{P}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{U}}, \quad \forall p \in \mathcal{P}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}. \quad (2.11)$$

Além disso,  $a(\cdot, \cdot)$  é coercivo no núcleo  $N_B$  de  $B$ , isto é,

$$\inf_{\mathbf{v} \in N_B} \sup_{\mathbf{u} \in N_B} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{U}}} > 0, \quad (2.12)$$

onde  $\beta_a > 0$ , e  $b(\cdot, \cdot)$  satisfazem a condição inf-sup

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \sup_{p \in \mathcal{P}} \frac{b(\mathbf{u}, p)}{\|p\|_{\mathcal{P}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}} \geq \beta_b, \quad (2.13)$$

onde  $\beta_b > 0$ . Então o Problema Misto Dual Abstrato tem uma única solução  $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$  e que satisfaz

$$\|p\|_{\mathcal{P}} + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}} \leq C (\|m\|_{\mathcal{U}'} + \|n\|_{\mathcal{P}'}), \quad (2.14)$$

de tal forma que a solução depende continuamente dos dados listados no problema.

**Demonstração.** O teorema acima representa uma parte fundamental na teoria dos elementos finitos mistos e seu estudo pode ser consultado nas referências [21, 24, 18].

## 2.3 Aspectos Básicos de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos em sua forma mais simples é caracterizado por três aspectos fundamentais na construção do subespaço de aproximação  $\mathcal{P}_h$ : primeiro é estabelecido uma malha de elementos  $\mathcal{T}_h$  a partir do domínio  $\Omega$ . Em um segundo passo, é definido a natureza de  $\mathcal{P}_h$  considerando funções polinomiais por partes  $p \in \mathcal{P}_h$ , definidas sobre cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ . Finalmente, define-se uma base sobre  $\mathcal{P}_h$  com funções com suporte nos elementos [34, 84, 83, 10, 65].

### 2.3.1 Discretização Espacial

A seguir são definidas as características fundamentais no processo de construção de subespaços conformes na teoria de elementos finitos. Dado um  $h > 0$ , define-se  $\mathcal{T}_h$  uma malha de elementos geométricos sobre o domínio  $\Omega$  como segue.

#### Definição [2.6]. Malha de Elementos Geométricos

Seja  $\Omega$  o domínio poligonal dado,  $\mathcal{T}_h$  representa uma malha de elementos geométricos se as condições a seguir são satisfeitas.

**T1)**  $\Omega_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K \cong \bar{\Omega}$ .

**T2)** Para cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ , o interior do elemento definido por  $\mathring{K}$  é não vazio.

**T3)** Sendo  $K_1$  e  $K_2$  dois elementos pertencentes a  $\mathcal{T}_h$ , então  $\mathring{K}_1 \cap \mathring{K}_2 = \emptyset$ .

**T4)** Para cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ , a fronteira  $\partial K$  é Lipschitz-contínua.

A malha  $\mathcal{T}_h$  diz-se regular se dado um  $\alpha > 0$  existe um círculo de raio  $\rho_h$  com  $\rho_h > h/\alpha$ , tal que para todo elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  este encontra-se contido completamente. No restante do texto, seram consideradas malhas conformes no sentido  $\Omega_h \subseteq \Omega$ . Junto à definição de uma malha uniforme, é definido uma malha de arestas usando a notação apresentada por Dipietro e Ern em [49].

#### Definição [2.7]. Malha de Arestas

Seja  $\mathcal{T}_h$  uma malha do domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Dizemos que um subconjunto  $\mathcal{A}_h$  de  $\bar{\Omega}$  é uma malha de arestas se  $E$  tem um medida de Hausdorff positiva 1 e se nesta satisfaz uma das seguintes condições.

**A1)** Existem dois elementos distintos  $K_1$  e  $K_2$  de  $\mathcal{T}_h$ , tais que  $E = \partial K_1 \cap \partial K_2$ ; neste caso

$E$  é chamado de interface e pertence ao conjunto  $\mathcal{A}_h^i$ .

**A2)** Existe um  $K \in \mathcal{T}_h$  tal que  $E = \partial K \cap \partial \Omega$ ; neste caso,  $E$  é chamada de aresta de

contorno e faz parte de um conjunto denotado por  $\mathcal{A}_h^b$ .

No decorrer deste trabalho, consideramos malhas de elementos e malhas de arestas regulares. A construção e o desenvolvimento deste tipo de malhas são estudados a profundidade em [91,

92, 71, 66, 68].

### 2.3.2 Subespaços Finitos Conformes

A partir da discretização  $\Omega_h$  do domínio  $\Omega$ , é importante estabelecer os critérios que garantem a validade da inclusão  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ , vinculada a um problema variacional, propriedade chamada conformidade do espaço. A noção de conformidade em espaços de elementos finitos se encontra fortemente relacionada com as propriedades de interpolação entre espaços, tal que considerando a definição de elemento finito [34] e de um *elemento finito interpolante* [90], os requerimentos de conformidade global para o par de espaços de Hilbert  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$  são formulados nos Lemas 2.3.1 e 2.3.2, respectivamente.

**Lema 2.3.1 (Conformidade em  $H^1(\Omega_h)$ )** *Sejam o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e sua discretização  $\mathcal{T}_h$ .*

*Uma função  $q \in H^1(\Omega_h)$  se somente se*

**H1-C1)**  $q|_K \in H^1(K)$  para cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**H1-C2)** *Para cada aresta  $E_{ij} \in \mathcal{A}_h^i$  definida a partir de um par de elementos  $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$ , o par de traços  $q|_{\partial K_i}$  e  $q|_{\partial K_j}$  devem ser coincidentes sobre  $E_{ij}$ .*

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ ). Seja  $\mathbf{u} \in (C_0^\infty(\Omega))^2$  com  $p := \text{div } \mathbf{u}$ . Seja um elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  e tome  $q \in H^1(K)$  de forma que

$$\int_K p q d\mathbf{x} = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_{\partial K} - \int_K \mathbf{u} \cdot \text{grad} q d\mathbf{x}, \quad (2.15)$$

obtida através da fórmula de Green e sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal ao contorno de  $K$ . Somando sobre todos os elementos geométricos de  $\mathcal{T}_h$  temos que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p q d\mathbf{x} = - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{u} \cdot \text{grad} q d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_h} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_E.$$

Usando a conformidade da malha  $\mathcal{T}_h$  e pela nulidade da componente normal de  $\mathbf{u}$

em  $\Gamma_h$

$$\int_{\Omega_h} p q d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_h} \mathbf{u} \cdot \text{grad} q d\mathbf{x} + \sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_E. \quad (2.16)$$

Sem perda de generalidade é razoável afirmar que dados

$$\mathcal{P}_h := \left\{ q \mid q \in L^2(\Omega_h) \text{ com } q \in H^1(K) \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (2.17)$$

e

$$\hat{\mathcal{P}}_h := \left\{ q \mid q \in \mathcal{P}_h, \sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, q \rangle_E = 0 \forall \mathbf{u} \in H_0(\text{div}; \Omega) \right\}, \quad (2.18)$$

onde  $H_0(\text{div}; \Omega)$  se encontra definido em (2.5), então  $\hat{\mathcal{P}}_h \subset H^1(\Omega_h)$ .

$\Leftrightarrow$ ). Se assumimos  $p \in H^1(\Omega_h)$  temos que  $p|_K \in H^1(K)$ , mostrando ((2.3.1)).

Agora, usando do Teorema do Traço (2.1.1) e a conformidade da malha de elementos, temos que

$$\sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle q, p \rangle_E = 0, \quad (2.19)$$

para todo  $q \in C^\infty(\Omega_h)$ . Desta forma  $H^1(\Omega_h) \subset \mathcal{P}_h$  e em particular se  $q|_{\partial K} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial K}$  com  $\mathbf{v} \in H_0(\text{div}; \Omega_h)$ ,  $H^1(\Omega_h) \subset \hat{\mathcal{P}}_h$ , (ver referências [90, 28, 34, 89]).

**Lema 2.3.2 (Conformidade em  $H(\text{div}; \Omega)$ )** *Sejam o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , a discretização  $\Omega_h$  e o espaço funcional definido como*

$$\mathcal{U}_h := \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (L^2(\Omega_h))^2, \mathbf{v}|_K \in H(\text{div}; K) \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \quad (2.20)$$

A função  $\mathbf{v} \in \mathcal{U}_h$  pertence a  $H(\text{div}; \Omega)$  se e somente se

**Hd-C1)**  $\mathbf{v}|_K \in (H^1(K))^2$  para cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**Hd-C2)** Para cada interface  $E_{i,j} = \partial K_i \cap \partial K_j$  com  $K_i, K_j \in \mathcal{T}_h$  o traço do componente normal

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{K_i}$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{K_j}$  sobre  $E_{i,j}$  coincidem, sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal associado a  $E_{i,j}$ .

**Demonstração.**  $\Rightarrow$ ). Tome uma função  $q \in L^2(\Omega_h)$  por partes com suporte em cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  tal que

$$q|_K = \operatorname{div} \mathbf{v}|_K \quad \text{com} \quad \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h. \quad (2.21)$$

Tomando uma função teste  $\mathbf{u} \in C^\infty(\Omega_h)$  e aplicando a fórmula de Green para cada elemento  $K$ ,

$$\int_{\Omega_h} p q d\mathbf{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_K - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p d\mathbf{x}. \quad (2.22)$$

Usando a decomposição da malha geométrica, entre arestas internas e no contorno temos

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_K = \int_{\Gamma_h} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_E, \quad (2.23)$$

mas considerando as propriedades da função teste temos que

$$\int_{\Omega_h} p q d\mathbf{x} = - \int_{\Omega_h} \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p d\mathbf{x}, \quad (2.24)$$

deste modo

$$\sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_E = 0 \quad \forall p \in C^\infty(\Omega_h). \quad (2.25)$$

Sem perda de generalidade, considere  $p \in H_0^1(\Omega_h) \supset C^\infty(\Omega_h)$  junto com o espaço

$$\hat{\mathcal{U}}_h := \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in \mathcal{U}_h \text{ com } \sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_E = 0 \forall p \in H_0^1(\Omega_h) \right\} \quad (2.26)$$

é possível afirmar  $\hat{\mathcal{U}}_h \subset H(\operatorname{div}; \Omega_h)$ .

$\Leftarrow$ ). Se  $\mathbf{v} \in H(\operatorname{div}; \Omega_h)$ , para cada elemento  $K$  em  $\mathcal{T}_h$  temos  $\mathbf{v}|_K \in (H^1(K))^2$ , mostrando (2.3.2). Tomada uma função  $p \in C^\infty(\Omega_h)$ , podemos afirmar

$$\sum_{E \in \mathcal{A}_h^i} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, p \rangle_E = 0 \quad (2.27)$$

se a malha geométrica é conforme, aplicando o teorema do traço. De forma geral, se  $p \in H_0^1(\Omega_h) \supset C^\infty(\Omega_h)$ , temos que  $H(\text{div}; \Omega_h) \subset \hat{\mathcal{U}}_h$ , (ver referências [18, 90, 34, 20, 89]).

## 2.4 Problema Misto Dual Discreto

Uma vez definido um par de subespaços conformes  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ , podemos definir o seguinte problema variacional, em dimensão finita:

### Problema Misto Dual Discreto

Dados os funcionais  $m$  e  $n$  em  $\mathcal{U}'$  e  $\mathcal{P}'$  respectivamente, determinar o par  $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$  em  $\mathcal{U}_h \times \mathcal{P}_h$  tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) = \langle m, \mathbf{v}_h \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h, \quad (2.28)$$

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = \langle n, q_h \rangle, \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h, \quad (2.29)$$

O Problema Misto Dual Discreto deve satisfazer as contrapartidas discretas das hipóteses (2.10)-(2.13) do Teorema 2.2.3. Desta forma, dizemos que os subespaços conformes  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  são *compatíveis* [19] segundo a definição:

**Definição 2.4.1 (Subespaços Compatíveis)** *Um par de subespaços  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  finitos dimensionalmente são compatíveis, se dado um par de constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  independentes do parâmetro de malha  $h$ , valem:*

**C1** *Elipticidade no núcleo:*

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{U}}^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in K_0, \quad (2.30)$$

com  $K_0 = \{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h, b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \forall q_h \in \mathcal{P}_h\}$ .



**C2** *Condição Inf-Sup:*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta \|q_h\| \quad \text{para todo } q_h \in \mathcal{P}_h, \quad (2.31)$$

sendo  $a(\cdot, \cdot)$  e  $b(\cdot, \cdot)$  os operadores definidos a partir do problema variacional misto dual.

Se o par de subespaços  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  são compatíveis e as condições do Teorema de Brezzi são válidas para o problema misto dual, é possível garantir pelo Teorema 2.4.2 que a solução do problema discreto constitui a melhor aproximação do problema Variacional Misto Dual Abstrato (Capítulo 2).

**Teorema 2.4.2 (Melhor Aproximação)** *Supondo que as condições do Teorema 2.2.3 são satisfeitas e o par de subespaços  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  são compatíveis, existe uma constante  $C \geq 0$  tal que*

$$\|p - p_h\|_{\mathcal{P}_h} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{U}_h} \leq C \left\{ \inf_{q_h \in \mathcal{P}_h} \|p - q_h\|_{\mathcal{P}_h} + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathcal{U}_h} \right\}. \quad (2.32)$$

**Demonstração.** A demonstração deste teorema esta em forma detalhada nas referências [34, 19].

□

## 2.5 Problema Algébrico

A formulação mista dual discreta é a representação funcional mais próxima à solução do problema de Dirichlet em sua forma fraca e a discretização dos espaços  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{P}$  através de  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$ , respectivamente, tem por finalidade definir um sistema linear de equações. Em termos gerais o sistema de equações tem a forma da Equação (2.33).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\dagger \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,m}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ ,  $\mathbf{U}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{P}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^n$ . A matriz  $\mathbf{A}$  corresponde a discretização do operador  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $\mathbf{B}$  é a discretização do operador  $b(\cdot, \cdot)$ ,  $\mathbf{P}$  agrupa os  $m$  graus de liberdade relacionados à variável primal  $\mathbf{u}$ , assim como  $\mathbf{U}$  os  $n$  graus de liberdade associados  $p$ . Os vetores  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são produto da discretização dos operadores  $m$  e  $n$ .

Em refinamentos do tipo  $hp$  usando elementos hierárquicos  $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes, a estrutura primária do sistema linear é mantido, mas em cada passo do refinamento, são adicionados novos graus de liberdade que geram um sistema maior em termos de dimensões, embora compartilhe várias de suas componentes do sistema inicial. Isto reduz o número de operações de ponto flutuante [47, 90, 67] e permite uma implementação mais eficiente. O uso de estratégias de condensação dos graus de liberdade é comumente empregado na resolução deste tipo de problemas devido, resultando em um sistema de menor dimensão e, em geral, mais bem condicionado [18].

## Capítulo 3

# Bases Hierárquicas em $H^1(\Omega)$ e $H(\text{div}; \Omega)$

Para a aproximação simultânea das variáveis primal e dual, segundo a formulação Mista Dual, é necessária a definição de subespaços conformes e compatíveis, no sentido de que as contrapartidas discretas do Teorema 2.2.3 sejam satisfeitas. A principal referência na construção de espaços compatíveis é o trabalho de Raviart-Thomas [85], apresentado em 1977, onde uma base vetorial em  $H(\text{div}; \Omega)$  é construída de forma a garantir a continuidade da componente normal da variável dual nas arestas de elementos vizinhos em uma discretização, satisfazendo as regras de conformidade em  $H(\text{div}; \Omega)$ . A compatibilidade é garantida pela definição adequada de uma base escalar em  $L^2(\Omega)$  para a variável primal. Como dito na Introdução, desde o trabalho de Raviart e Thomas [85], diversas técnicas de construção de espaços de elementos finitos compatíveis para a formulação Mista Dual vêm sendo propostas na literatura [23, 24, 80, 81, 3, 1]. Usualmente, bases vetoriais polinomiais são construídas em um elemento padrão e transformadas ao elemento geométrico da partição com o uso da transformação de Piola. Nos casos de mapeamentos geométricos não-afins, este procedimento pode criar erros de consistência na aproximação do divergente da variável vetorial, resultando em perda da qualidade da aproximação. Este problema foi estudado por Arnold, Boffi e Falk em 2005, [3] e corrigido pela definição de novos elementos compatíveis e, mais recentemente, por Arbogast e Correa [1] e por Farias et al. em [54] usando diferentes estratégias.

Objetivando o estudo e a descrição de subespaços conformes para a aproximação de formulações mistas, neste capítulo nos dedicamos à construção de bases polinomiais hierárqui-

cas em  $H^1(\Omega)$  e  $H(\text{div}; \Omega)$ . Além de sua aplicação na aproximação do problema Primal [14], a construção hierárquica de subespaços de  $H^1(\Omega)$  é uma das bases para o desenvolvimento da metodologia hierárquica para a construção de subespaços de  $H(\text{div}; \Omega)$  desenvolvida em [89] e ampliada em [30, 54]. Aqui, introduzimos uma variação da metodologia original apresentada em [89], onde as variáveis vetoriais são definidas sobre um elemento padrão e depois mapeadas para o elemento geométrico com o uso da transformação de Piola. Além disso, os subespaços  $H^1(\Omega)$  são empregados na aproximação da variável escalar na metodologia hierárquica estabilizada que será apresentada no Capítulo 4.

### 3.1 Bases Polinomiais em $H^1(\Omega)$

Seja  $\mathcal{P}_h$  um subespaço de  $H^1(\Omega_h)$  aproximado por um subespaço polinomial  $\mathcal{P}_h^p$  dado por

$$\mathcal{P}_h^p := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} Q_p(K), \quad (3.1)$$

e  $Q_p(K)$  definido como

$$Q_p(K) := \left\{ \phi \mid \phi(K) := \hat{\phi} \circ F^{-1}(K), \hat{\phi} \in \hat{Q}_p(\hat{K}) \right\}, \quad (3.2)$$

onde

$$\hat{Q}_p = \hat{Q}_p(\hat{K}) := \left\{ \hat{\phi} \mid \hat{\phi} = \sum_{i,j=0}^p a_{i,j} \xi^i \eta^j, (\xi, \eta) \in \hat{K} \subset \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (3.3)$$

$F$  representa uma transformação contínua entre um elemento geométrico  $K$  e um elemento padrão  $\hat{K}$ . De forma particular, uma transformada afim é definida como

$$\left\{ F : \hat{K} \rightarrow K \mid \mathbf{x} = \mathbf{A}_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K \quad \forall \mathbf{x} \in K, \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} \right\}, \quad (3.4)$$

com  $\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $\det(\mathbf{A}_K) \neq 0$ ,  $\mathbf{b}_K \in \mathbb{R}^2$  e  $p \geq 1$ .

O emprego de elementos referência na construção subespaços polinomiais tem por objetivo o baixo custo e um menor grau de complexidade na implementação computacional

de elementos finitos. Diversos elementos de referência  $\hat{K}$  podem ser definidos a partir das características do problema de contorno e dos espaços funcionais. Logo, no caso de um problema em duas dimensões, um dos elementos de referência mais comuns é o elemento quadrilateral definido como,

$$\hat{K} := \left\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \right\}, \quad (3.5)$$

e representado na Figura 3.1.

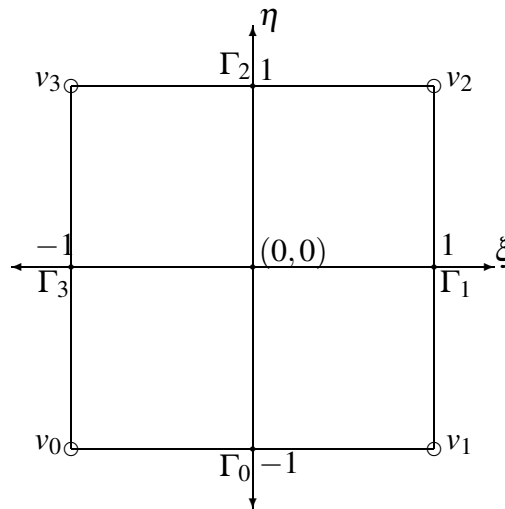


Figura 3.1: Elemento quadrilateral de referência em duas dimensões,  $\hat{K}$ .

O subespaço  $\mathcal{P}_h^p$  definido na Equação (3.1) não satisfaz as condições de subespaços conformes em  $H^1(\Omega_h)$  (ver Lema 2.3.1), uma vez que não foram impostas condições para a continuidade das funções. Uma primeira escolha como base polinomial de  $\hat{Q}_p$  é a bem conhecida base Lagrangiana [84], comumente chamada de base nodal, que não permitem uma construção hierárquica. Como alternativa a base nodal, e tentando empregar a ortogonalidade entre as funções base, são propostas as bases modais. As funções modais têm uma relação direta com um conjunto de polinômios ortogonais, permitindo a geração, de forma hierárquica, de um conjunto ortogonal de funções. Isto representa uma grande vantagem em relação às funções nodais, principalmente em algoritmos de refinamento do tipo  $p$  [90]. Deste modo, nos focamos em formular nas seções a seguir as características fundamentais das funções base do tipo modal.

### 3.1.1 Bases Modais Hierárquicas em $H^1(\Omega)$

Segundo o elemento de referência quadrilateral, as funções modais são separadas em três grupos: funções vértice, funções aresta e funções internas.

#### Funções Vértice

São funções lineares definidas no elemento  $\hat{K}$  como

$$\hat{\phi}_0^v(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad (3.6)$$

$$\hat{\phi}_1^v(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad (3.7)$$

$$\hat{\phi}_2^v(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), \quad (3.8)$$

$$\hat{\phi}_3^v(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta), \quad (3.9)$$

com a propriedade  $\hat{\phi}_i^v(v_j) = \delta_{i,j}$  para  $i, j = 1, \dots, 4$ , sendo  $\delta_{i,j}$  a delta de Kronecker. O espaço de funções vértices  $\Phi_v$  é definido como

$$\Phi^v := \left\{ \hat{\phi}_0^v, \hat{\phi}_1^v, \hat{\phi}_2^v, \hat{\phi}_3^v \right\}, \quad (3.10)$$

de dimensão  $\dim(\Phi_v) = 4$ .

#### Funções Arestas

Seja  $p > 1$  e um função polinomial  $\vartheta_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de grau  $p - 1$ . As *funções aresta* definidas no elemento  $\hat{K}$  são:

$$\hat{\phi}_k^{\Gamma_0}(\xi, \eta) := \hat{\phi}_0^v(\xi, \eta) \left[ \hat{\phi}_1^v(\xi, \eta) + \hat{\phi}_2^v(\xi, \eta) \right] \vartheta_k(\xi), \quad (3.11)$$

$$\hat{\phi}_k^{\Gamma_1}(\xi, \eta) := \hat{\phi}_1^v(\xi, \eta) \left[ \hat{\phi}_2^v(\xi, \eta) + \hat{\phi}_3^v(\xi, \eta) \right] \vartheta_k(\eta), \quad (3.12)$$

$$\hat{\phi}_k^{\Gamma_2}(\xi, \eta) := \hat{\phi}_2^v(\xi, \eta) \left[ \hat{\phi}_3^v(\xi, \eta) + \hat{\phi}_0^v(\xi, \eta) \right] \vartheta_k(-\xi), \quad (3.13)$$

$$\hat{\phi}_k^{\Gamma_3}(\xi, \eta) := \hat{\phi}_3^v(\xi, \eta) \left[ \hat{\phi}_0^v(\xi, \eta) + \hat{\phi}_1^v(\xi, \eta) \right] \vartheta_k(-\eta). \quad (3.14)$$

O conjunto de funções  $\{\vartheta_k\}$ ,  $k < p - 1$  representa uma base ortonormal de funções polinomiais, que podem ser da classe Legendre, Lobatto, Chebyshev de segundo grau, entre outros [86], porém, como escolha particular tomamos os polinômios de Chebyshev [47]. Assim, é definido o espaço de funções aresta formado pelas funções

$$\Phi_p^\Gamma := \left\{ \hat{\phi}_i^{\Gamma_1}, \hat{\phi}_j^{\Gamma_2}, \hat{\phi}_k^{\Gamma_3}, \hat{\phi}_l^{\Gamma_4} \right\} \quad i, j, k, l = 0, \dots, p-2, \quad (3.15)$$

de dimensão

$$\dim(\Phi_p^\Gamma) = 4(p-1). \quad (3.16)$$

As funções aresta são identificadas pelas propriedades expostas em na referência [89] e dadas por:

**SubH1-C1)** Anulam-se em todos os vértices do elemento de referência  $\hat{K}$ .  $\hat{\phi}_k^{\Gamma_i}(v_j) = \delta_{i,j}$  para todo  $\{v_j\}_{j=0}^3 \in \hat{K}$ .

**SubH1-C2)**  $\hat{\phi}_k^{\Gamma_i}|_{\Gamma_j} = 0$  para todo  $i \neq j$ . Além disso,  $\hat{\phi}_k^{\Gamma_i}|_{\Gamma_i}$  é um polinômio de grau  $k+2 \leq p$ .

### Funções Internas

As funções internas ou também conhecidas como bolha são nulas tanto nas arestas  $\Gamma$  como nos vértices  $v$  do elemento de referência.

$$\hat{\phi}_{i,j}^i(\xi, \eta) := \frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta^2)\vartheta_i(\xi)\vartheta_j(\eta) \quad \text{com } 0 \leq i, j \leq p-2, \quad (3.17)$$

com dimensão

$$\dim(\Phi_p^i) = (p-1)^2, \quad (3.18)$$

sendo  $\Phi_p^i$  o subespaço conformado pelas funções internas.

De forma ilustrativa, na Figura 3.2 é apresentado um conjunto de funções hierárquicas. O conjunto de funções hierárquicas constituem uma bases de funções polinomiais de grau  $p$  sobre o elemento  $\hat{K}$ .

**Proposição 3.1.1 (Base Hierárquicas de  $\hat{Q}_p(\hat{K})$ )** *Seja  $p \geq 1$  tal que o conjunto de funções de-*

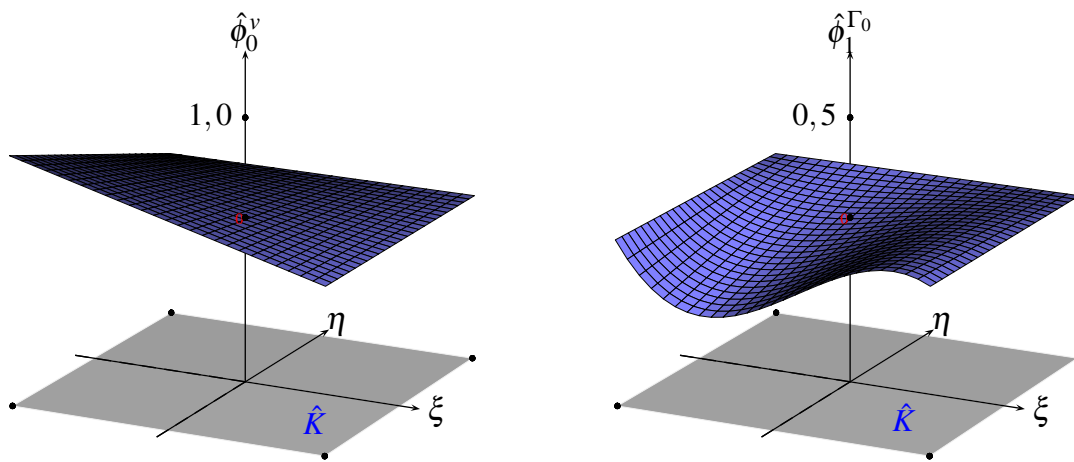
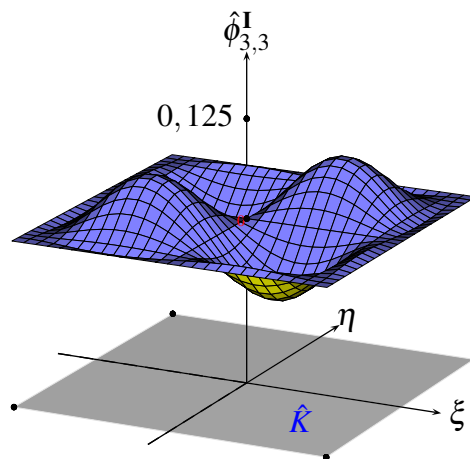
(a) Função Vértice pertencente ao espaço  $\Phi^v$ .(b) Função Aresta pertencente ao espaço  $\Phi^\Gamma$ .(c) Função Interna pertencente ao espaço  $\Phi^I$ .

Figura 3.2: Exemplos de Funções Hierárquicas definidas num elemento padrão quadrilateral de referência.

finidas em (3.6), (3.11) e (3.17) conformam uma base hierárquica do espaço  $\hat{Q}_p(\hat{K})$  [90, 84].

**Demonstração.** É direto mostrar que o conjunto de funções  $\Phi^v$  é um conjunto de funções linearmente independentes. Sejam  $q \in C^\infty(\hat{K})$  e sua projeção  $q^v$  em  $\Phi^v(\hat{K})$  dada por,

$$q^v = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^v \hat{\phi}_i^v, \quad (3.19)$$

onde  $\alpha_i = q(v_i)$  para todo  $i = 0, \dots, 3$ .

Define-se o resíduo  $r := q - q^v$  tal que  $r(v_i) = 0$  em cada  $i$ -ésimo vértice e  $r|_{\Gamma_j} \in$



$C^\infty(\Gamma_j)$  para cada  $j$ -ésima aresta de  $\hat{K}$ . Seja  $p > 1$  tal que o subespaço  $\Phi_p^\Gamma$  esteja bem definido, assim  $r$  pode ser projetado no subespaço das funções aresta restritas a cada  $\Gamma_j$  como,

$$r^j = \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k^{\Gamma_j} \hat{\phi}_k^{\Gamma_j} \quad \forall j = 0, \dots, 3. \quad (3.20)$$

Sendo o conjunto de funções  $\{\hat{\phi}_k^{\Gamma_j}\}$  uma base polinomial, os coeficientes de interpolação  $\alpha_k^{\Gamma_j}$  são únicos e, portanto, a projeção do resíduo  $r$  sobre as arestas do elemento  $K$  é dada por,

$$q^\Gamma := \sum_{j=0}^3 r^j. \quad (3.21)$$

Usando a interpolação nas arestas e nos vértices do elemento, é reescrito o resíduo  $r := q - q^v - q^\Gamma$  de forma que se anula em todo o contorno do elemento  $\hat{K}$ . O  $r$  é representado de forma única usando funções internas na forma

$$r := q - q^v - q^\Gamma \approx \sum_{i+j \leq p-2} \alpha_{i,j}^i \hat{\phi}_{i,j}^i. \quad (3.22)$$

Sem perda de generalidade, expressa-se as funções  $\bar{q} \in \hat{Q}_p(\hat{K})$  com  $p > 1$  que aproximam à função  $q \in C^\infty(\hat{K})$  de forma única como

$$\bar{q} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i^v \hat{\phi}_i^v + \sum_{i=0}^3 \sum_{k=0}^{p-2} \alpha_k^{\Gamma_j} \hat{\phi}_k^{\Gamma_j} + \sum_{i+j \leq p-2} \alpha_{i,j}^i \hat{\phi}_{i,j}^i. \quad (3.23)$$

**Teorema 3.1.2 (Bases Hierárquicas  $H^1(\Omega)$ –conformes)** *Sejam  $\mathcal{T}_h$  uma discretização de  $\Omega$  e  $\hat{\mathcal{B}}_p(\hat{K}) := \{\Phi^v, \Phi_p^\Gamma, \Phi_p^i\}$  uma base hierárquica de  $\hat{Q}_p(\hat{K})$ , com  $p > 1$ . Seja  $\mathcal{P}_h$  um espaço de funções  $q$ , com  $q^i|_{K_i} \in Q_p(K_i)$  (Equação (3.3)). Suponha que os coeficientes multiplicadores nas expansões de  $q^i$  e  $q^j$ , associadas às funções de vértice e de aresta das bases  $\mathcal{B}_p(K_i)$  e  $\mathcal{B}_p(K_j)$ , referentes à interface comum  $E_{ij}$  entre os elementos  $K_i$  e  $K_j$ , sejam iguais. Então  $\mathcal{P}_h$  é*

um subespaço  $H^1(\Omega)$ —conforme de ordem  $p$ .

**Demonstração.** Ver referência [89, 90].

## 3.2 Bases Polinomiais de $H(\text{div}; \Omega)$

Do mesmo modo que foi feita a análise do comportamento do espaço  $H^1(\Omega)$  referente à discretização do domínio  $\Omega$  usando um conjunto de elementos em  $\mathcal{T}_h$ , a seguir analisamos a construção de um subespaço de  $H(\text{div}; \Omega)$ . Lembrando os requerimentos impostos sobre o subespaço  $\mathcal{U}_h$  de  $H(\text{div}; \Omega)$  apresentados no Lema 2.3.2, o subespaço finito deve manter a continuidade das componentes normais nas interfaces dos elementos.

A primeira tentativa na construção do espaços vetoriais é a extensão bidimensional do espaço de polinômios de grau total  $p$ ,  $\hat{\mathcal{Q}}_p$ . Seja uma transformada vetorial  $G$ , o subespaço  $\mathcal{U}_h$  é definido como

$$\mathcal{U}_h^p := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{Q}_p(K), \quad (3.24)$$

sendo

$$\mathcal{Q}_p(K) := \left\{ \psi \mid \psi = (\psi_1, \psi_2) \text{ com } \psi(K) := G^{-1}(K) \cdot \hat{\psi} \text{ e } \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{Q}}_p(\hat{K}) \right\}, \quad (3.25)$$

$$\hat{\mathcal{Q}}_p(\hat{K}) := \left\{ \hat{\psi} \mid \hat{\psi} = \{\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2\}, \hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2 \in \hat{\mathcal{Q}}_p(\hat{K}) \right\}. \quad (3.26)$$

Com a transformação vetorial

$$\left\{ G : \hat{K} \rightarrow K \mid \forall \hat{\psi} \in \hat{\mathcal{Q}}_p(\hat{K}) \exists \psi(\mathbf{x}) := \frac{1}{J_F(\hat{\mathbf{x}})} DF(\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\psi}(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{x} = F(\hat{\mathbf{x}}) \right\}. \quad (3.27)$$

A primeira variação da transformação  $F$  é representada por  $DF$  e seu jacobiano por  $J_F$ .

A existência da transformação inversa  $G^{-1}$  é mostrada a partir do fato de  $F$  ser uma transformação contínua, no caso particular de  $F$  ser afim, a primeira variação  $DF$  corresponde a matriz  $\mathbf{A}_K$  associada e  $J_F$  seu determinante. Considerando a definição de *Transformação de*

*Piola*, as componentes normais e tangenciais são independentes da orientação do elemento, o que permite construir elementos  $H(\text{div}; \Omega_h)$  globalmente conformes de forma eficiente [87].

O espaço  $\mathbf{U}_h^p$  definido em (3.24) satisfaz as condições de conformidade apresentadas no Lema 2.3.2. A continuidade das componentes normais das funções vetoriais definidas nos traços dos elementos é satisfeita através da transformação de Piola mas, para a aproximação da formulação Mista Dual, ainda é necessária a construção de um espaço compatível para a variável primal. De uma forma geral, esta compatibilidade se dá pela relação  $\text{div } \mathbf{U}_h^p = \mathcal{P}_h^p$ . Desta forma, a construção de um par de subespaços de  $H(\text{div}; \Omega)$  e  $L^2(\Omega)$  tais que satisfazem as condições discretas *inf-sup* é objetivo de vários trabalhos tais como os apresentados por Raviart-Thomas ( $\mathcal{RT}$ ) em 1977 [85], Brezzi-Douglas-Marini ( $\mathcal{BDM}$ ) em 1985 [23], Brezzi-Douglas-Fortin-Marini ( $\mathcal{BDFM}$ ) em 1987 [24], Arbogast e Correa ( $\mathcal{AC}$ ) em 2016 [1], dentre outros.

### 3.2.1 Elementos de *Raviart-Thomas*

Dentre os inúmeros espaços compatíveis citados, destacamos aqui os compostos pelos elementos de Raviart-Thomas [85]. Tais elementos são construídos a partir da definição de um subespaço vetorial polinomial de ordem  $p$  com suporte em um elemento de referência retangular (ou triangular) e posteriormente transformado a um subespaço sobre um elemento quadrilateral (triangular) convexo via a transformação de Piola. Para um elemento quadrilateral  $\hat{K}$  e dois números inteiros  $k, l \geq 0$ , notamos por  $P_{k,l}$  o espaço de todos os polinômios de duas variáveis  $\xi$  e  $\eta$  da forma,

$$\hat{\psi}(\xi, \eta) = \sum_{i,j=0}^{k,l} a_{i,j} \xi^i \eta^j \quad \text{com } a_{i,j} \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Defina-se o espaço de Raviart-Thomas de ordem  $p$  como.

$$\mathcal{RT}_p := \left\{ \hat{\psi} \mid \hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2) \text{ com } \hat{\psi}_1 \in P_{p+1,p} \text{ e } \hat{\psi}_2 \in P_{p,p+1} \right\}. \quad (3.29)$$

De forma direta, para toda  $\hat{\psi} \in \mathcal{RT}_p$  é caracterizada por:

$$\mathbf{RT-C1)} \quad \text{div } \hat{\psi} = \frac{\partial \hat{\psi}_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\psi}_2}{\partial \eta} \in \hat{\mathcal{Q}}_p.$$

**RT-C2)** A restrição de  $\hat{\psi} \cdot \mathbf{n}$  sobre qualquer aresta  $\{\Gamma_i\}$  de  $\hat{K}$ , é um polinômio de grau  $\leq p$ .

Assim, se  $\mathcal{RT}_p$  é substituído por  $\hat{\mathcal{Q}}_p$  em (3.25),  $\mathbf{U}_h^p$  é transformado em um subespaço  $H(\text{div}; \Omega)$ —conforme com a inclusão

$$\text{div } \mathbf{U}_h^p \subseteq \mathcal{P}_h^p, \quad (3.30)$$

sendo satisfeita nos elementos  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Os elementos  $\mathcal{RT}_p$  apresentam convergência ótima em malhas triangulares, com taxas de convergência da ordem  $p + 1$  tanto na variável escalar como no divergente da variável dual na norma  $L^2(\Omega)$ . Em malhas regulares  $\mathcal{T}_h$  compostas de elementos retangulares é bem conhecido que no caso dos espaços  $\mathcal{RT}$  são válidas as estimativas [18]

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} |\mathbf{u}|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad \|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} |\text{div } \mathbf{u}|_{H^{p+1}(\Omega)}, \quad (3.31)$$

sendo  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{RT}_p$  com  $p \geq 0$  e  $C$  uma constante positiva. Porém, no caso de elementos quadrilaterais gerais [3], o melhor resultado corresponde a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{p+1} \left[ |\mathbf{u}|_{H^{p+1}(\Omega)} + h |\text{div } \mathbf{u}|_{H^{p+1}(\Omega)} \right], \quad (3.32)$$

$$\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^p |\text{div } \mathbf{u}|_{H^{p+1}(\Omega)}. \quad (3.33)$$

Tentando melhorar os resultados apresentados na solução do problema misto dual em malhas quadrilaterais, foram postulados diversos mecanismos para definir novas bases  $H(\text{div}; \Omega)$  conformes, por exemplo, em [3] baseado no trabalho exposto em [4] é apresentado um conjunto de funções vetoriais baseadas nos espaços de Raviart-Thomas modificados. Algumas outras estratégias de construção deste tipo de bases são estudadas nas referências [4, 88, 54, 1].

### 3.2.2 Bases Hierárquicas $H(\text{div}; \Omega)$ —conformes

Como alternativa às bases tradicionais dos subespaços do  $H(\text{div}; \Omega_h)$ , foram desenvolvidas as bases conformes hierárquicas, que dispensam o uso da transformada de Piola no caso de elementos geométricos obtidos via um isomorfismo linear, [89]. Esta nova base, preserva a continuidade das componentes normais nos traços dos elementos e localmente apresenta um subespaço de  $H(\text{div}; \Omega_h)$  tal que as condições de conformidade são satisfeitas. Além de preservar as características como subespaço  $H(\text{div}; \Omega_h)$ , é uma extensão das bases hierárquicas modais apresentadas na Seção 3.1.1 e apresenta a possibilidade de implementar o refinamento tipo  $p$ , pouco estudado na solução de problemas variacionais mistos.

A estratégia de construção de bases hierárquicas de  $H(\text{div}; \Omega)$  foi definida em [89] a partir do uso de uma distribuição específica de um conjunto de vetores dispostos para cada elemento geométrico de  $\mathcal{T}_h$ . A metodologia apresenta limitantes em malhas não-afins: as funções vetoriais não mantêm componentes normais as arestas dos elementos não afins, por exemplo em elementos trapezoidais.

No contexto de um modelo bidimensional, as bases hierárquicas  $H(\text{div}; \Omega)$ —conformes são definidas sobre uma malha de elementos  $\mathcal{T}_h$ , partindo de uma distribuição específica de vetores sobre um elemento padrão retangular, como é apresentado na Figura 3.3a, para posteriormente serem transformados via uma transformação de Piola definida sobre cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  resultando em uma distribuição de vetores conforme indicado na Figura 3.3b. Em cada vértice do elemento  $\{v_i\}_{i=0}^3$  é definido um par de vetores como extensão das arestas que compartilham o mesmo vértice; seguido deste conjunto de vetores, em cada aresta é definido um vetor normal unitário disposto no ponto central da referida aresta. O conjunto de vetores distribuídos no contorno são chamados como *vetores externos*.

Conjuntamente ao conjunto dos vetores externos, é definido um conjunto de vetores no interior do elemento  $K$  chamados *vetores internos*. O grupo interno de vetores é composto de quatro vetores unitários no centro das arestas e paralelos a cada uma delas. Além disto, são definidos dois vetores unitários perpendiculares, alinhados aos eixos e perpendiculares entre si.

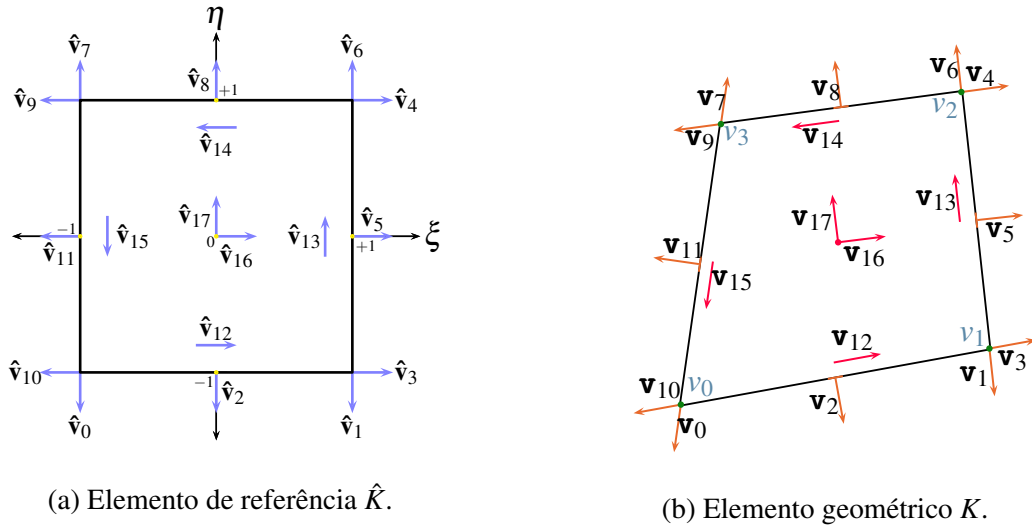


Figura 3.3: Distribuição de vetores necessários para a construção das bases  $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes hierárquicas.

### Funções Externas

As funções vetoriais externas de ordem  $p$  são definidas em um elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  a partir da distribuição vetorial da Figura 3.3b junto com as funções nodais e de aresta definidas nas Seções 3.1.1 e 3.1.1. Assim,

$$\begin{aligned}
 \psi_0^v &:= \phi_0^v \mathbf{v}_0, & \psi_1^v &:= \phi_1^v \mathbf{v}_1, & \psi_k^{\Gamma_0} &:= \phi_k^{\Gamma_0} \mathbf{v}_2, \\
 \psi_3^v &:= \phi_1^v \mathbf{v}_3, & \psi_4^v &:= \phi_2^v \mathbf{v}_4, & \psi_k^{\Gamma_1} &:= \phi_k^{\Gamma_1} \mathbf{v}_5, \\
 \psi_6^v &:= \phi_2^v \mathbf{v}_6, & \psi_7^v &:= \phi_3^v \mathbf{v}_7, & \psi_k^{\Gamma_2} &:= \phi_k^{\Gamma_2} \mathbf{v}_8, \\
 \psi_9^v &:= \phi_3^v \mathbf{v}_9, & \psi_{10}^v &:= \phi_0^v \mathbf{v}_{10}, & \psi_k^{\Gamma_3} &:= \phi_k^{\Gamma_3} \mathbf{v}_{11},
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

onde  $\phi_m^v(K) := \hat{\phi}_m^v \circ F^{-1}(K)$ ,  $\phi_k^{\Gamma_n} := \hat{\phi}_k^{\Gamma_n} \circ F^{-1}(K)$ , sendo  $m, n = 0, \dots, 3$  e  $k = 0, \dots, p-2$ . A dimensão deste conjunto de funções é  $4(p+1)$ .

### Funções Internas

A definição das funções internas vetoriais de ordem  $p$  no elemento  $K$  é direta a partir das funções aresta e internas modais, Seções 3.1.1 e 3.1.1, respectivamente.

$$\begin{aligned} \psi_k^{\mathbf{i}^0} &:= \phi_k^{\Gamma_0} \mathbf{v}_{12}, & \psi_k^{\mathbf{i}^1} &:= \phi_k^{\Gamma_1} \mathbf{v}_{13}, & \psi_k^{\mathbf{i}^2} &:= \phi_k^{\Gamma_2} \mathbf{v}_{14}, & \psi_k^{\mathbf{i}^3} &:= \phi_k^{\Gamma_3} \mathbf{v}_{15}, \\ \psi_{i,j}^{\mathbf{i}^4} &:= \phi_{i,j}^{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{16}, & \psi_{i,j}^{\mathbf{i}^5} &:= \phi_{i,j}^{\mathbf{i}} \mathbf{v}_{17}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

O conjunto de funções internas vetoriais hierárquicas é de dimensão  $2(p^2 + 1)$ .

É possível afirmar que o conjunto de funções

$$\mathcal{B}_p(K) := \left\{ \psi^v, \psi^{\Gamma}, \psi^{\mathbf{i}} \right\} \quad (3.36)$$

é um conjunto linearmente independente e  $\text{span}(\mathcal{B}_p(K)) \subset H(\text{div}; K)$ . O número total de funções em  $\mathcal{B}_p(K)$  é  $2[(p+1)^2 + 2]$ .

**Teorema 3.2.1 (Bases Hierárquicas de  $\mathcal{Q}_p(K)$ )** *Seja  $K \in \mathcal{T}_h$ . As funções externas e internas definidas nas Equações (3.34) e (3.35) formam um conjunto linearmente independente de funções vetoriais em  $H(\text{div}; K)$ .*

**Demonstração.** Seja  $\psi$  definida em  $K \in \mathcal{T}_h$  escrita na forma

$$\psi = \underbrace{\sum_{i \in \mathbf{I}} \alpha_i \psi_i^v + \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{j=0}^3 \beta_{j,k} \psi_k^{\Gamma_j}}_{\text{Funções Externas}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{p-2} \sum_{j=0}^3 \gamma_{j,k} \psi_k^{\mathbf{i}^j} + \sum_{l=4}^5 \sum_{i+j \leq p-2} \zeta_{i,j,l} \psi_{i,j}^{\mathbf{i}^l}}_{\text{Funções Internas}}, \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{I} = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\}$ .

Considerando  $\psi \equiv \mathbf{0}$ , é suficiente mostrar que  $\alpha_i, \beta_{j,k}, \gamma_{j,k}$  e  $\zeta_{i,j,l}$  são zero para afirmar que o conjunto  $\mathcal{B}_p(K)$  é linearmente independente. Seja  $\Gamma_m$  uma aresta do elemento  $K$  e  $\mathbf{n}_m$  seu vetor normal. Empregando as propriedades das funções externas,  $\psi \cdot \mathbf{n}_m$  pode ser escrito

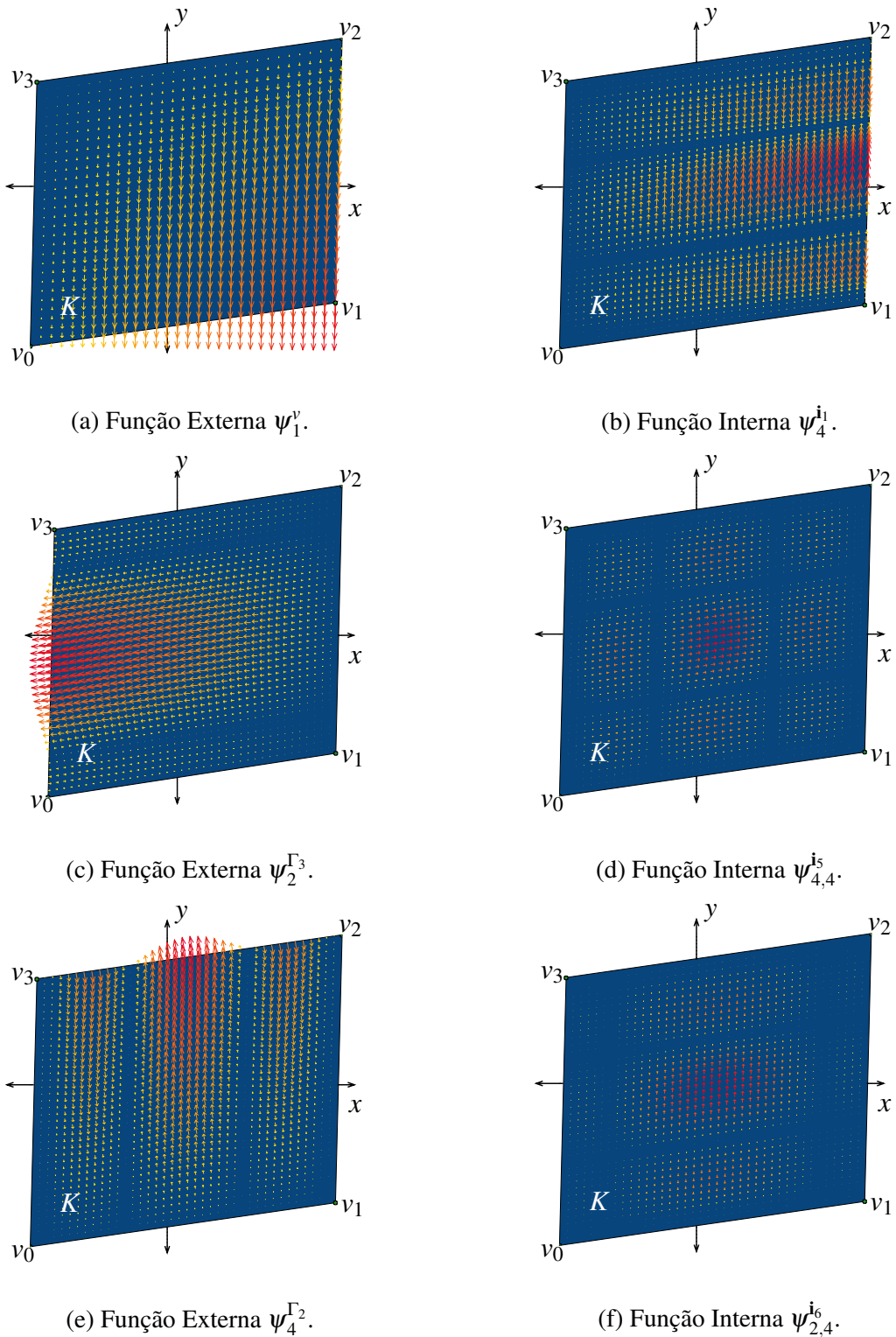


Figura 3.4: Exemplos de Funções  $H(\text{div}; \Omega)$ -conformes definidas num elemento padrão quadrilateral  $K$  com são definidas nas Equações (3.34) e (3.35), usando uma transformada afim entre o elemento padrão  $\hat{K}$  e o elemento geométrico  $K$ .

restrito à aresta  $\Gamma_m$  como

$$\psi \cdot \mathbf{n}_m \Big|_{\Gamma_m} = \sum_{i \in \hat{\mathbf{I}}_m} \alpha_i^m \left[ \hat{\phi}_i^v \circ F^{-1}(K) \right] \Big|_{\Gamma_m} + \sum_{k=0}^{p-2} \beta_{m,k} \left[ \hat{\phi}_k^{\Gamma_m} \circ F^{-1}(K) \right] \Big|_{\Gamma_m}, \quad (3.38)$$



de forma que  $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{n}_m|_{\Gamma_m} = \psi^{\Gamma_m}$  coincide com uma função escalar hierárquica definida pela base de funções  $\hat{\phi}^{\Gamma_m}$ . Assim, na aresta  $\Gamma_m$  se  $\boldsymbol{\psi}|_{\Gamma_m} = \mathbf{0}$  implica  $\alpha_i^m = 0$  e  $\beta_{m,k} = 0$  para  $k = 0, \dots, p-2$  e  $i \in \mathbf{I}_m$ . Aplicando o análises anterior para as arestas restantes do elemento  $K$ , conclui-se que  $\alpha_i$  e  $\beta_{j,k}$  são identicamente zero em (3.37) se  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ .

Considere-se as funções definidas nas arestas  $\psi_k^{ij}$  definidas em (3.37). Sendo  $\boldsymbol{\tau}_m$  o vetor tangencial à  $\Gamma_m$ ,

$$\boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\Gamma_m} = \sum_{k=0}^{p-2} \gamma_{m,k} \left[ \hat{\phi}_k^{\Gamma_m} \circ F^{-1}(K) \right] \Big|_{\Gamma_m}, \quad (3.39)$$

e  $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$ , concluindo em  $\gamma_{m,k} = 0$  para cada aresta  $\Gamma_m$  com  $k < p-2$ . Finalmente, seja o par de funções vetoriais internas  $\psi_{i,j}^l$ . Se é avaliado o produto interno  $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v}_{16}$  e  $\boldsymbol{\psi} \cdot \mathbf{v}_{17}$ , para cada função resultante é direto afirmar que pertencem ao subespaço de funções internas definidas em (3.17) as quais definem um conjunto linearmente independente, de forma que  $\zeta_{i,j,l} = 0$  em (3.37).

As componentes normais das funções internas e externas sobre as arestas dos elementos satisfazem as condições de conformidade impostas no espaço  $\mathcal{U}_h^p \subset H(\text{div}; \Omega_h)$  sobre as condições do Teorema 3.2.2.

**Teorema 3.2.2 (Bases Hierárquicas  $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes)** *Usando a definição das funções base vetoriais  $H(\text{div}; K)$ –conformes, Equações (3.34) e (3.35), espaços  $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes podem ser criados com um conjunto de funções  $\boldsymbol{\psi}$  impondo  $\boldsymbol{\psi}|_K \in H(\text{div}; K)$ , se e somente se a soma dos diferentes coeficientes associados as arestas do elemento vizinho ao  $K$  é zero.*

**Demonstração.** A prova deste teorema pode ser realizada em forma direta considerando dois elementos  $K_1$  e  $K_2$  com uma aresta  $E_{12}$  em comum e duas funções  $\boldsymbol{\psi}_1$  e  $\boldsymbol{\psi}_2$ ,  $H(\text{div}; K)$ –conformes. Levando em conta as componentes normais das funções vetoriais sobre a aresta  $E_{12}$ , a conformidade em  $H(\text{div}; \Omega)$  tem relação direta com a conformidade dos espaços  $H^1(\Omega)$ . A conformidade de elementos modais em  $H^1(\Omega)$  pode ser consultada em na referência [90, 86] e sua extensão para bases  $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes, em [89].

## Capítulo 4

# Métodos dos Elementos Finitos

# Estabilizados para Problemas Elípticos

A conformidade dos subespaços  $\mathcal{P}_h \subset L^2(\Omega)$  e  $\mathcal{U}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$  não garante aproximações estáveis para o problema de Darcy, sendo também necessária a verificação da compatibilidade entre esses subespaços. Uma forma de contornar a necessidade da construção de espaços compatíveis é o emprego de formulações de elementos finitos mistas estabilizadas. Neste capítulo, discutimos algumas estratégias de estabilização da formulação mista, iniciando pela formulação condicionalmente estável de [25] e concluindo com a formulação incondicionalmente estável de [40], com o objetivo de esclarecer como as estabilizações podem circular de forma parcial ou total as condições de estabilidade do Teorema de Brezzi. A formulação incondicionalmente estável de [40] satisfaz automaticamente ambas as condições de compatibilidade, permitindo assim o emprego de quaisquer subespaços  $H(\text{div}; \Omega)$ —conformes para a velocidade e  $H^1(\Omega)$ —conformes para a pressão e será a base para a construção da metodologia de elementos finitos mista hierárquica para a resolução do problema de Darcy.

## 4.1 Estabilizações em Formulações Mistas

Iniciamos reescrevendo o problema modelo misto dual abstrato (2.28)-(2.29) apresentado no Capítulo 2, na seguinte forma discreta

### Problema G

Dado o par  $\{m, n\} \in \mathbf{U}' \times \mathcal{P}'$ , determinar  $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{U}_h \times \mathcal{P}_h$  tal que

$$\mathbb{B}_G(\{\mathbf{u}_h, p_h\}; \{\mathbf{v}_h, q_h\}) = \mathbb{L}_G(\{\mathbf{v}_h, q_h\}) \quad \forall \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \mathbf{U}_h \times \mathcal{P}_h \quad (4.1)$$

sendo

$$\mathbb{B}_G(\{\mathbf{u}_h, p_h\}; \{\mathbf{v}_h, q_h\}) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{u}_h, q_h) \quad (4.2)$$

e

$$\mathbb{L}_G(\{\mathbf{v}_h, q_h\}) := \langle m, \mathbf{v}_h \rangle - \langle n, q_h \rangle. \quad (4.3)$$

A existência e unicidade da solução deste problema abstrato foram expostas no Capítulo 2 e caracterizadas no Teorema de Brezzi, implicando nas condições de compatibilidade entre os espaços de aproximação. Diversas formulações estabilizadas podem ser definidas, no sentido de contornar uma das ou ambas as condições de compatibilidade. Em particular, grande interesse é dedicado às formulações estabilizadas do tipo *Galerkin Mínimos-Quadrados*, onde resíduos de mínimos quadrados das equações constitutivas do problema são combinados à formulação mista dual clássica (4.1). Em geral, coeficientes de estabilização dependentes do parâmetro de malha  $h$  são associados a estes resíduos [58, 75, 74, 59, 58, 56, 57]. A seguir, estudamos dois métodos estabilizados que são livres de termos dependentes do parâmetro de malha: o método condicionalmente estável de Brezzi, Fortin e Marini [25] e o método incondicionalmente estável de Correa e Loula, [40].

## 4.2 Formulação Condicionalmente Estável

A ideia fundamental do trabalho [25] é apresentar uma formulação estabilizada que satisfaça de forma automática a condição de elipticidade no núcleo (2.30), deixando como uma restrição de compatibilidade a pela condição *inf-sup* (2.31). Para tal, os autores assumem regularidade suficiente, tomam o gradiente do balanço de massa

$$\text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = \text{grad } f$$

e consideram a equação

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u} - \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) = -\text{grad } p - \text{grad } f. \quad (4.4)$$

Após a multiplicação por uma função teste, integração no domínio  $\Omega$  e integração por partes, é definida a seguinte formulação estabilizada, posta em termos dos espaços discretos:

### Problema *BFMEh*

Dado um par de subespaços  $\mathcal{P}_h \subset L^2(\Omega)$  e  $\mathbf{U}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$ , determinar  $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \mathbf{U}_h \times \mathcal{P}_h$  tal que

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (\text{div } \mathbf{u}_h, \text{div } \mathbf{v}_h) - (p_h, \text{div } \mathbf{v}_h) &= (f, \text{div } \mathbf{v}_h) \quad , \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{U}_h \\ (q_h, \text{div } \mathbf{u}_h) &= (f, q_h) \quad , \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O problema acima é consistente no sentido variacional, ou seja: a solução exata do problema original  $\{\mathbf{u}, p\}$  satisfaz o problema variacional modificado (4.5). O ponto principal é que, definindo o operador bilinear  $\tilde{a} : \mathbf{U}_h \times \mathbf{U}_h$

$$\tilde{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (\text{div } \mathbf{u}_h, \text{div } \mathbf{v}_h), \quad (4.6)$$

temos que o problema é não apenas elíptico no núcleo, mas sim elíptico em todo o espaço  $\mathbf{U}_h$ .

Em outras palavras, a única restrição existente para a compatibilidade entre os espaços  $\mathcal{U}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  é que eles sejam *inf-sup* estáveis, segundo a condição (2.31). Este resultado pode ser expresso pelo teorema:

**Teorema 4.2.1** *Seja  $\mathcal{P}_h \subset L^2(\Omega)$  e  $\mathcal{U}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$  um par de subespaços de elementos finitos e um  $\beta > 0$  tal que*

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h} \frac{(q_h, \text{div } \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta \|q_h\| \quad \forall q_h \in \mathcal{P}_h. \quad (4.7)$$

*Então, o Problema BFMEh tem um único par solução  $\{\mathbf{u}_h, p_h\}$  com*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| + \|p - p_h\| \leq \gamma \left\{ \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{U}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| + \inf_{q_h \in \mathcal{P}_h} \|p - q_h\| \right\}, \quad (4.8)$$

*sendo  $\gamma$  não dependente do  $h$ .*

**Demonstração.** A prova é direta a partir da definição dos espaços *inf-sup* estáveis e do Teorema de Brezzi [25].

Exemplos de espaços estáveis para esta formulação são os espaços de elementos finitos estáveis para o problema de Stokes tais como os elementos de Crouzeix-Raviart [41] e os elementos Taylor-Hood [93]. Tais elementos não são interessantes do ponto de vista prático, uma vez que impõem continuidade nodal para a velocidade, impossibilitando a simulação de escoamentos em meios porosos heterogêneos. Neste sentido, na seção a seguir estudamos uma formulação incondicionalmente estável que emprega subespaços  $H(\text{div}; \Omega)$ –conformes para a velocidade, adequados para a representação de fluxos em meios heterogêneos.

### 4.3 Formulação Incondicionalmente Estável

Ao invés de trabalhar com uma nova equação em sua forma forte, tal como a (4.4), Correa e Loula propõem em [40] a combinação resíduos de mínimos quadrados da lei de Darcy

(1.1) e da equação de balanço da massa (1.2) com a formulação mista (1.4)-(1.5). Tal formulação é posta nos espaços  $\mathbf{U} = H(\operatorname{div}; \Omega)$  e  $\mathcal{P} = H^1(\Omega)$  e é dada por

### Formulação Incondicionalmente Estável

Determinar o par de funções  $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{U} \times \mathcal{P}$  tal que

$$\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\}) = \mathbb{L}_{GLS}(\{\mathbf{v}, q\}) \quad \forall \{\mathbf{v}, q\} \in \mathbf{U} \times \mathcal{P}, \quad (4.9)$$

com

$$\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\}) := (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p) - (\operatorname{div} \mathbf{u}, q) \quad (4.10)$$

$$- \frac{1}{2} (\mathbf{K} [\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + \operatorname{grad} p], [\mathbf{K}^{-1}\mathbf{v} + \operatorname{grad} q]) \quad (4.11)$$

$$+ \frac{1}{2} (K^\dagger \operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \mathbf{v}) \quad (4.12)$$

e

$$\mathbb{L}_{GLS}(\{\mathbf{v}, q\}) := -(f, q) + \frac{1}{2} (K^\dagger f, \operatorname{div} \mathbf{v}), \quad (4.13)$$

onde  $K^\dagger = (K_{\min})^{-1}$ .

Tal formulação pode ser vista como uma extensão da formulação de [25] e satisfaz automaticamente ambas condições de compatibilidade, permitindo assim o emprego de quaisquer subespaços  $H(\operatorname{div}; \Omega)$ -conformes para a velocidade e  $H^1(\Omega)$ -conformes para a pressão. A análise de existência e unicidade da solução se dá a partir do Teorema de Babuška (2.2.2) e foi estudada em [38, 40], segundo o teorema:

**Teorema 4.3.1 (Unicidade da solução do Problema Incondicionalmente Estável)** *Seja  $\mathbb{B}_{GLS}$  uma forma bilinear que satisfaz as condições do Teorema de Babuška, (Teorema 2.2.2), com  $\mathbb{L}_{GLS}$  uma forma linear contínua. O problema incondicionalmente estável tem solução única.*

**Demonstração.** A prova é direta a partir dos lemas a seguir.

**Lema 4.3.2 (Continuidade de  $\mathbb{B}_{GLS}$ )** *Existe uma constante positiva  $\beta_1$  tal que para todo par  $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$  e  $\{\mathbf{v}, q\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$  tem-se*

$$|\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\})| \leq \beta_1 \|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{P}} \|\{\mathbf{v}, q\}\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{P}}. \quad (4.14)$$

**Demonstração.** Integrando por partes  $\mathbb{B}_{GLS}$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\})| &= \frac{1}{2} \left| (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \text{grad } p) + (\mathbf{u}, \text{grad } q) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{K} \text{ grad } p, \text{ grad } q) + (K^\dagger \text{ div } \mathbf{u}, \text{ div } \mathbf{v}) \right| \end{aligned} \quad (4.15)$$

Empregando a desigualdade de Cauchy

$$\begin{aligned} |\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\})| &\leq \frac{1}{2} K_{\max}^\dagger \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| \|\text{grad } p\| \\ &\quad + \|\mathbf{u}\| \|\text{grad } q\| + K_{\max} \|\text{grad } p\| \|\text{grad } q\| \\ &\quad + K_{\max}^\dagger \|\text{div } \mathbf{u}\| \|\text{div } \mathbf{v}\| \\ &\leq \frac{1}{2} \beta_1 \{ \|\mathbf{u}\| + \|\text{div } \mathbf{u}\| + \|p\| + \|\text{grad } p\| \} \\ &\quad \times \{ \|\mathbf{v}\| + \|\text{div } \mathbf{v}\| + \|q\| + \|\text{grad } q\| \} \\ &\leq \beta_1 \sqrt{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2 + \|p\|_{\mathcal{P}}^2} \sqrt{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{U}}^2 + \|q\|_{\mathcal{P}}^2}, \end{aligned}$$

onde  $\beta_1 = 2 \{K_{\max}, K_{\max}^\dagger\}$  e  $\{ \|\mathbf{u}\| + \|\text{div } \mathbf{u}\| + \|p\| + \|\text{grad } p\| \} \leq \sqrt{2} \|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{P}}$ .

**Lema 4.3.3 (Estabilidade de  $\mathbb{B}_{GLS}$ )** *Seja  $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}$ , existe uma constante  $\beta_2 > 0$  tal que*

$$\sup_{\{\mathbf{v}, q\} \in \mathcal{U} \times \mathcal{P}} \frac{\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\mathbf{v}, q\})}{\|\{\mathbf{v}, q\}\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{P}}} \geq \beta_2 \|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathcal{U} \times \mathcal{P}}. \quad (4.16)$$

**Demonstração.** Sempre é possível definir um par  $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\} = \{\mathbf{u}, -p\}$  para todo  $\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{U} \times \mathcal{P}$ , assim

$$\frac{\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\})}{\|\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}} = \frac{1}{2} K^\dagger \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2}{\|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}} + \frac{1}{2} K \frac{\|\operatorname{grad} p\|^2}{\|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}} \quad (4.17)$$

$$\geq \frac{1}{2} K_{\min}^\dagger \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2}{\|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}} + \frac{1}{2} K_{\min} \frac{\|\operatorname{grad} p\|^2}{\|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}}. \quad (4.18)$$

Sendo  $p \in H_0^1(\Omega)$  caso sejam consideradas condições de contorno de Dirichlet homogêneas ou  $p \in H^1(\Omega)$  com média nula sobre caso sejam consideradas condições de contorno de Neumann homogêneas,

$$\sup_{\{\mathbf{u}, p\} \in \mathbf{U} \times \mathcal{P}} \frac{\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}, p\}; \{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\})}{\|\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}} \geq \beta_2 \|\{\mathbf{u}, p\}\|_{\mathbf{U} \times \mathcal{P}}, \quad (4.19)$$

para todo  $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\} \in \mathbf{U} \times \mathcal{P}$ , sendo  $\beta_2 = \frac{1}{2} \min\{K_{\min}, K_{\min}^\dagger\}$ . A continuidade do operador  $\mathbb{L}_{GLS}$  é avaliada considerando  $f$  de quadrado integrável e portanto completando a demonstração do teorema de existência da solução do problema GLS.

A base da demonstração da  $\mathbf{U} \times \mathcal{P}$ -coercividade da formulação estabilizada se dá pela escolha  $\{\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}\} = \{\mathbf{u}, -p\}$ . Tal escolha é sempre possível no caso discreto e daí decorre a estabilidade incondicional do método:

### Método Incondicionalmente Estável

*Determinar o par de funções  $\{\mathbf{u}_h, p_h\} \in \{\mathbf{U}_h \times \mathcal{P}_h\}$  tal que*

$$\mathbb{B}_{GLS}(\{\mathbf{u}_h, p_h\}; \{\mathbf{v}_h, q_h\}) = \mathbb{L}_{GLS}(\{\mathbf{v}_h, q_h\}) \quad \forall \{\mathbf{v}_h, q_h\} \in \{\mathbf{U}_h \times \mathcal{P}_h\}, \quad (4.20)$$

com  $\mathbf{U}_h \subset \mathbf{U}$  e  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$  sendo  $\mathbb{B}_{GLS}$  e  $\mathbb{L}_{GLS}$  definidos em (4.10) e (4.13).

## 4.4 O Emprego de Subespaços Conformes

Uma vez que a formulação incondicionalmente estável não impõe condições de compatibilidade entre os espaços de aproximação, para a obtenção de soluções estáveis, basta



definir a construção de subespaços conformes  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}$ . Neste ponto, entra a construção hierárquica definida no Capítulo 3, fechando assim a definição da metodologia hierárquica para a aproximação do problema de Darcy proposta nesta Tese.

**Estimativas de Erro** De uma forma geral, o resultado de melhor aproximação exposto no Teorema 2.4.2 e os resultados de [3] podem ser usados para a definição de estimativas de erro para a formulação incondicionalmente estável. O subespaço  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}_h^k$  e seja  $p \in H^{k+1}(\Omega)$  [3] segue diretamente que

$$\|p - q_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^k |p|_{k+1}. \quad (4.21)$$

Se  $\mathcal{B}_l(\hat{K}) \supset S_l$  sendo  $S_l$  o espaço de codimensão um de  $\mathcal{RT}_p(\hat{K})$  com os campos vetoriais  $(\xi^{l+1} \eta^l, 0)$  e  $(0, \xi^l \eta^{l+1})$  substituídos pelo único campo vetorial  $(\xi^{l+1} \eta^l, -\xi^l \eta^{l+1})$ , o resultado apresentado por Arnold et.al em [3], a estimativa do erro na variável do fluxo é

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq Ch^l (h |\mathbf{u}|_{l+1} + |\text{div } \mathbf{u}|_{l+1}). \quad (4.22)$$

Usando o Teorema 2.4.2 a estimativa de erro para o Problema Misto Discreto é,

$$\|p - q_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{\min\{k, l\}} \quad (4.23)$$

e

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} \leq Ch^{\min\{k, l\}}. \quad (4.24)$$

Assim, obtemos taxas ótimas de convergência para o fluxo na norma  $H(\text{div}; \Omega)$  e na norma  $H^1(\Omega)$  para a pressão se são construídos subespaços de aproximação da mesmo ordem,  $k = l$ .

## Capítulo 5

### Estudos Numéricos

Neste capítulo, apresentamos uma série de experimentos numéricos para o estudo da precisão, da estabilidade e da convergência da metodologia proposta, com o uso de subespaços conformes  $\mathbf{U}_h^l \times \mathcal{P}_h^k$ , com  $l, k \geq 1$ , gerados pelas bases hierárquicas para quadriláteros descritas no Capítulo 3. A título de comparação, resultados obtidos pela formulação mista clássica com os elementos de Raviart-Thomas também serão apresentados. Por simplicidade de notação, nas figuras e nas tabelas designamos por  $\mathbf{U}_l \times \mathcal{P}_k$  o método incondicionalmente estável e por  $\mathcal{RT}_k \times \mathcal{Q}_k$ , para  $k \geq 1$  o método misto com os espaços de Raviart-Thomas. Em todos os casos, condições de Dirichlet foram prescritas e as soluções foram calculadas sobre duas sequências de malhas distintas. A primeira é uma malha uniforme de  $n^2$  elementos quadrados e a segunda é uma malha não afim de  $n^2$  trapézios de base  $h$  e lados verticais paralelos de altura  $0,75h$  e  $1,25h$ , como proposto por [4] e apresentado na Figura 5.1. No primeiro conjunto de experimentos, aproximamos o problema de Darcy em um meio poroso homogêneo com permeabilidade constante e soluções exatas suaves. O segundo conjunto está relacionado a um meio poroso anisotrópico heterogêneo onde o tensor de permeabilidade tem uma interface de descontinuidade. Adicionalmente, incluímos um estudo de convergência em função do número de graus de liberdade não condensados, após a aplicação da estratégia de complemento de Schur para o sistema de ponto de sela obtido.

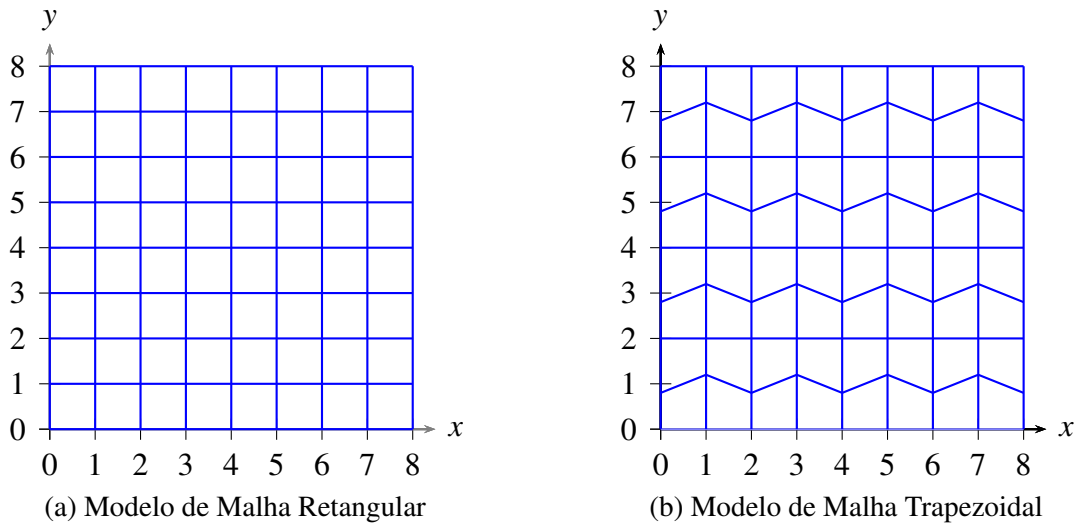


Figura 5.1: Sequências de malhas utilizadas nos estudos de convergência

## 5.1 Meio Homogêneo

Neste primeiro experimento numérico, resolvemos o problema de Darcy em um domínio quadrado unitário  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  com permeabilidade homogênea  $\mathbf{K} = \mathbf{I}$  e função de fonte

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \cos(\pi y).$$

A solução exata é dada por

$$p(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}(x, y) = -\pi \begin{bmatrix} \cos(\pi x) \sin(\pi y) \\ \sin(\pi x) \cos(\pi y) \end{bmatrix}$$

As soluções aproximadas com o espaço  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  para malhas de  $16 \times 16$  elementos quadrados e trapezoidais são apresentadas nas Figuras 5.2 e 5.3, respectivamente.

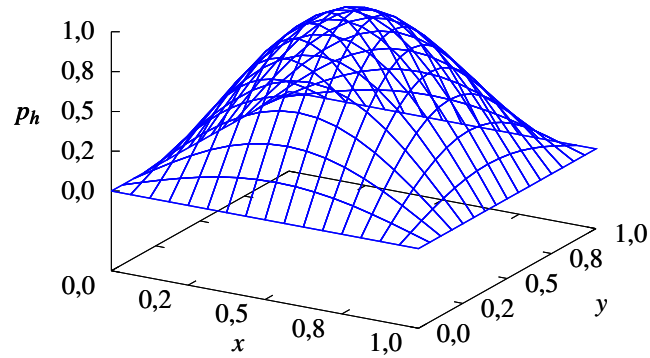
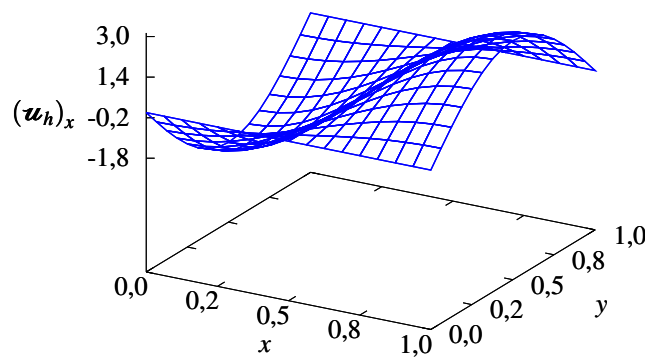
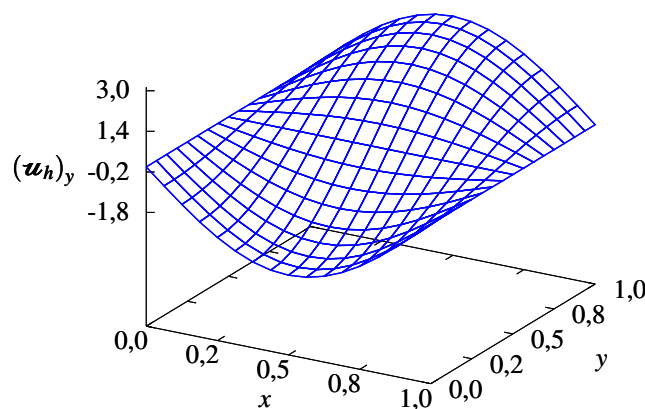
(a) Distribuição da pressão  $p_h$ .(b) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_x$  do fluxo.(c) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_y$  do fluxo.

Figura 5.2: Meio Homogêneo: Distribuição da pressão  $p_h$  e das componentes  $(\mathbf{u}_h)_x$  e  $(\mathbf{u}_h)_y$  obtidas a partir da aproximação do Problema Homogêneo definido sobre um domínio quadrado unitário, obtida com o espaço  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e uma malha de  $16 \times 16$  quadrados.

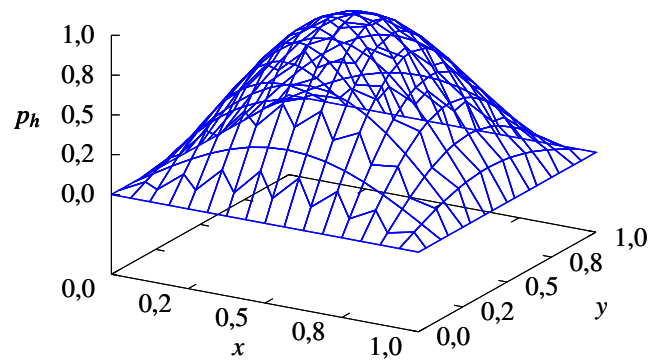
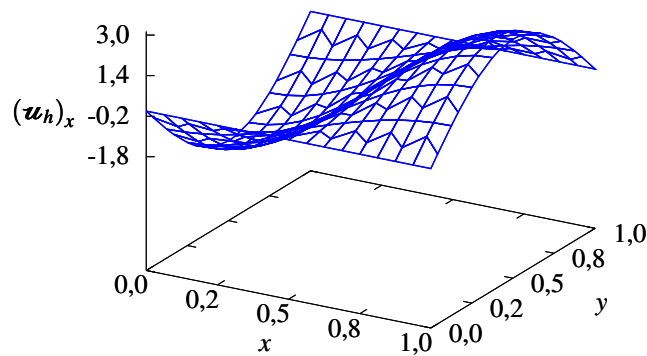
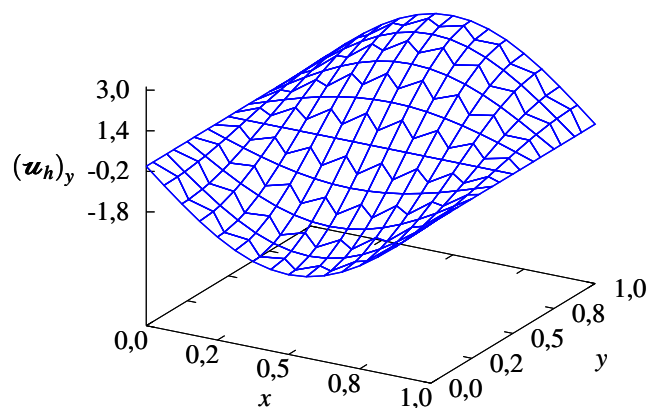
(a) Distribuição da pressão  $p_h$ .(b) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_x$  do fluxo.(c) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_y$  do fluxo.

Figura 5.3: Meio Homogêneo: Distribuição da pressão  $p_h$  e das componentes  $(\mathbf{u}_h)_x$  e  $(\mathbf{u}_h)_y$  obtidas a partir da aproximação do Problema Homogêneo definido sobre um domínio quadrado unitário, obtida com o espaço  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e uma malha de  $16 \times 16$  trapézios.

Os erros e taxas de convergência para  $\|p - p_h\|$ ,  $\|\text{grad}(p - p_h)\|$ ,  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$  e  $\|\text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|$  para diferentes espaços e malhas retangulares são apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.3. Na formulação mista clássica de Raviart-Thomas com espaços de aproximação compatíveis  $\mathcal{RT}_k \times \mathcal{Q}_k$  com  $k = 1, 2$ , a pressão é descontínua, portanto não pertencente a  $H^1(\Omega)$ . Neste caso computamos

$$|\text{grad}(p - p_h)|_*^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\text{grad}(p - p_h)|_K^2, \quad (5.1)$$

só a título de comparação. Baseados nas estimativas de erro (4.23) e (4.24), organizamos os resultados em dois grupos: o de ordem um definidos por  $\min\{k, l\} = 1$ , que estão apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2 e os de ordem dois, definidos por  $\min\{k, l\} = 2$ , que estão apresentados nas Tabelas 5.3 e 5.4.

Para o caso de malhas quadradas, os resultados para espaços de aproximação  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$  apresentam taxas de convergência lineares no gradiente da pressão e de segunda ordem na pressão, o fluxo e no divergente do fluxo. A única exceção é o espaço  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , que fornece aproximações de segunda ordem para o fluxo, o divergente do fluxo e o gradiente da pressão e aproximação de terceira ordem para a pressão. Os resultados para  $\min\{k, l\} = 2$ , são consistentes com os obtidos para  $\min\{k, l\} = 1$ .

Para o caso de malhas trapezoidais, o  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$  mantém aproximações de segundo grau na pressão e no fluxo, mas perde uma ordem de convergência no divergente do fluxo. Este resultado é consistente com a teoria de [3]. No caso do par  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ , o fluxo é afetado levando a taxas de convergência menores que dois. O emprego dos espaços  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  que recobra o ordem dois no divergente mas também sofre da não otimalidade da convergência do fluxo na norma  $[L^2(\Omega)]^2$ . É importante ressaltar que em [3], os autores analisam o emprego de malhas quadrilaterais gerais em um problema de mínimos quadrados para a equação de Poisson e mostram que neste caso a baixa qualidade da aproximação do divergente do fluxo afetando diretamente a aproximação do fluxo. Como a formulação estabilizada faz uso de resíduos de mínimos quadrados, a não otimalidade do fluxo parece ter a mesma causa. No caso  $\min\{k, l\} = 2$  sobre malhas trapezoidais, os resultados apresentam o comportamento semelhante ao exposto no caso  $\min\{k, l\} = 1$  e são apresentados na Tabela 5.4.

Tabela 5.1: Meio Homogêneo em malhas de quadrados. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  e  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$								
4	2,36e-02		5,01e-01		5,14e-02		3,18e-01	
8	6,03e-03	1,97	2,52e-01	0,99	1,28e-02	2,01	8,01e-02	1,99
16	1,51e-03	1,99	1,26e-01	1,00	3,19e-03	2,00	2,01e-02	2,00
32	3,79e-04	2,00	6,30e-02	1,00	7,99e-04	2,00	5,02e-03	2,00
$\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$								
4	1,61e-02		5,01e-01		5,10e-02		3,18e-01	
8	4,05e-03	1,99	2,52e-01	1,00	1,28e-02	2,00	8,00e-02	1,99
16	1,02e-03	2,00	1,26e-01	1,00	3,19e-03	2,00	2,00e-02	2,00
32	2,54e-04	2,00	6,30e-02	1,00	7,98e-04	2,00	5,01e-03	2,00
$\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$								
4	2,04e-03		5,44e-02		5,10e-02		3,18e-01	
8	2,50e-04	3,03	1,31e-02	2,05	1,28e-02	2,00	8,00e-02	1,99
16	3,10e-05	3,01	3,23e-03	2,02	3,19e-03	2,00	2,00e-02	2,00
32	3,86e-06	3,01	8,03e-04	2,01	7,98e-04	2,00	5,01e-03	2,00
$\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$								
4	2,35e-02		5,01e-01		6,90e-03		2,99e-02	
8	6,02e-03	1,96	2,52e-01	0,99	8,19e-04	3,08	5,98e-03	2,32
16	1,51e-03	1,99	1,26e-01	1,00	1,52e-04	2,43	1,39e-03	2,10
32	3,79e-04	2,00	6,30e-02	1,00	3,49e-05	2,12	3,41e-04	2,03

Tabela 5.2: Meio Homogêneo em malhas de trapézios. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  e  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$								
4	3,49e-02		6,17e-01		8,38e-02		5,76e-01	
8	9,83e-03	1,83	3,18e-01	0,96	2,67e-02	1,65	2,32e-01	1,31
16	2,54e-03	1,95	1,60e-01	0,99	8,55e-03	1,64	1,08e-01	1,11
32	6,43e-04	1,98	8,05e-02	0,99	2,80e-03	1,61	5,27e-02	1,03
$\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$								
4	1,87e-02		5,65e-01		5,42e-02		4,77e-01	
8	4,73e-03	1,99	2,85e-01	0,99	1,35e-02	2,00	1,79e-01	1,42
16	1,18e-03	2,00	1,43e-01	1,00	3,38e-03	2,00	7,99e-02	1,16
32	2,96e-04	2,00	7,15e-02	1,00	8,45e-04	2,00	3,87e-02	1,05
$\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$								
4	2,97e-03		8,50e-02		5,80e-02		5,75e-01	
8	4,04e-04	2,88	2,10e-02	2,01	1,44e-02	2,00	2,32e-01	1,31
16	6,07e-05	2,73	5,23e-03	2,01	3,61e-03	2,00	1,08e-01	1,11
32	1,13e-05	2,43	1,30e-03	2,00	9,01e-04	2,00	5,27e-02	1,03
$\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$								
4	3,51e-02		6,17e-01		5,97e-02		7,69e-02	
8	9,89e-03	1,83	3,18e-01	0,96	2,23e-02	1,42	1,78e-02	2,11
16	2,56e-03	1,95	1,60e-01	0,99	7,77e-03	1,52	4,37e-03	2,03
32	6,47e-04	1,98	8,05e-02	0,99	2,67e-03	1,54	1,09e-03	2,01



Tabela 5.3: Meio Homogêneo em malhas de quadrados. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$								
4	1,92e-03		5,09e-02		3,68e-03		2,18e-02	
8	2,45e-04	2,97	1,28e-02	2,00	4,36e-04	3,08	2,68e-03	3,02
16	3,07e-05	2,99	3,19e-03	2,00	5,34e-05	3,03	3,34e-04	3,01
32	3,85e-06	3,00	7,98e-04	2,00	6,64e-06	3,01	4,17e-05	3,00
$\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$								
4	1,07e-03		5,55e-02		3,38e-03		2,11e-02	
8	1,35e-04	2,99	1,40e-02	1,99	4,23e-04	3,00	2,66e-03	2,99
16	1,69e-05	3,00	3,49e-03	2,00	5,30e-05	3,00	3,33e-04	3,00
32	2,11e-06	3,00	8,74e-04	2,00	6,62e-06	3,00	4,16e-05	3,00
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$								
4	9,08e-05		3,47e-03		3,40e-03		2,17e-02	
8	5,62e-06	4,02	4,27e-04	3,02	4,25e-04	3,00	2,68e-03	3,02
16	3,50e-07	4,01	5,31e-05	3,01	5,30e-05	3,00	3,33e-04	3,01
32	2,18e-08	4,00	6,63e-06	3,00	6,62e-06	3,00	4,16e-05	3,00
$\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$								
4	1,92e-03		5,09e-02		1,46e-03		2,18e-03	
8	2,45e-04	2,97	1,28e-02	2,00	1,04e-04	3,81	2,53e-04	3,11
16	3,07e-05	2,99	3,19e-03	2,00	7,10e-06	3,88	3,10e-05	3,03
32	3,85e-06	3,00	7,98e-04	2,00	4,76e-07	3,90	3,85e-06	3,01

Tabela 5.4: Meio Homogêneo em malhas de trapézios. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$								
4	3,13e-03		8,10e-02		7,31e-03		7,09e-02	
8	3,99e-04	2,97	2,05e-02	1,98	1,14e-03	2,67	1,55e-02	2,20
16	5,02e-05	2,99	5,15e-03	1,99	1,89e-04	2,60	3,72e-03	2,06
32	6,29e-06	3,00	1,29e-03	2,00	3,23e-05	2,55	9,19e-04	2,02
$\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$								
4	1,49e-03		7,44e-02		4,08e-03		4,61e-02	
8	1,88e-04	2,99	1,88e-02	1,99	5,12e-04	3,00	9,70e-03	2,25
16	2,35e-05	3,00	4,71e-03	2,00	6,41e-05	3,00	2,29e-03	2,08
32	2,94e-06	3,00	1,18e-03	2,00	8,01e-06	3,00	5,65e-04	2,02
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$								
4	1,98e-04		7,69e-03		4,93e-03		7,09e-02	
8	1,25e-05	3,98	9,63e-04	3,00	6,16e-04	3,00	1,55e-02	2,19
16	7,82e-07	4,00	1,20e-04	3,00	7,89e-05	2,97	3,72e-03	2,06
32	4,89e-08	4,00	1,51e-05	3,00	1,08e-05	2,87	9,19e-04	2,02
$\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$								
4	3,13e-03		8,10e-02		5,48e-03		6,35e-03	
8	3,99e-04	2,97	2,05e-02	1,98	9,71e-04	2,50	7,59e-04	3,07
16	5,02e-05	2,99	5,15e-03	1,99	1,73e-04	2,49	9,37e-05	3,02
32	6,29e-06	3,00	1,29e-03	2,00	3,06e-05	2,50	1,17e-05	3,00

**Erro em função do Número de Graus de Liberdade na forma Condensada** A proposta agora é apresentar o estudo de convergência em função do número de equações a resolver, após a aplicação de uma estratégia de condensação estática. Na formulação mista, os graus de liberdade podem ser dispostos em componentes externas e internas para o fluxo, e no caso da pressão, os graus podem se organizar em internos e de valor constantes por partes. Assim, a condensação estática pode ser aplicada sobre os graus de liberdade internos, para reduzir o sistema linear a ser resolvido, ao conjunto de funções definidas nas arestas dos elementos no caso do fluxo e das funções constantes por partes no caso da pressão.

No caso da formulação incondicionalmente estável, a classificação de funções vectoriais como externas e internas para as bases hierárquicas [54], o processo de condensação pode ser aplicado, com uma ligeira modificação para a variável escalar  $p_h$ , devido sua natureza continua no domínio (pertencente  $H^1(\Omega)$ ). Neste caso os graus associados aos vértices e as arestas dos elementos geométricos não permitem a condensação, restando unicamente seus pares internos.

As erros em função dos graus de liberdade para o caso de malhas quadradas são apresentados na Figura 5.4 no caso  $\min\{k, l\} = 1$  e na Figura 5.5 para  $\min\{k, l\} = 2$ . Para malhas trapezoidais os resultados são exibidos nas Figuras 5.6 e 5.7. Para malhas quadradas, os espaços  $\mathbf{U}_k \times \mathcal{P}_{k+1}$  levam a melhores aproximações para a pressão e seu gradiente; entretanto os espaços  $\mathbf{U}_{k+1} \times \mathcal{P}_k$  são mais precisos na aproximação do fluxo e seu divergente, mas com um custo superior em termos do número de graus de liberdade. A melhor aproximação para a pressão e seu gradiente empregando  $\mathbf{U}_k \times \mathcal{P}_{k+1}$  é corroborado no caso de malhas trapezoidais, não entanto no caso do fluxo em espaços  $\mathbf{U}_{k+1} \times \mathcal{P}_k$  os resultados não são concluintes. Os resultados indicam melhores aproximações do divergente mas com uma queda no erro do fluxo.

Nestos testes, as aproximações de Raviart-Thomas apresentam resultados pouco mas consistentes como o esperado.

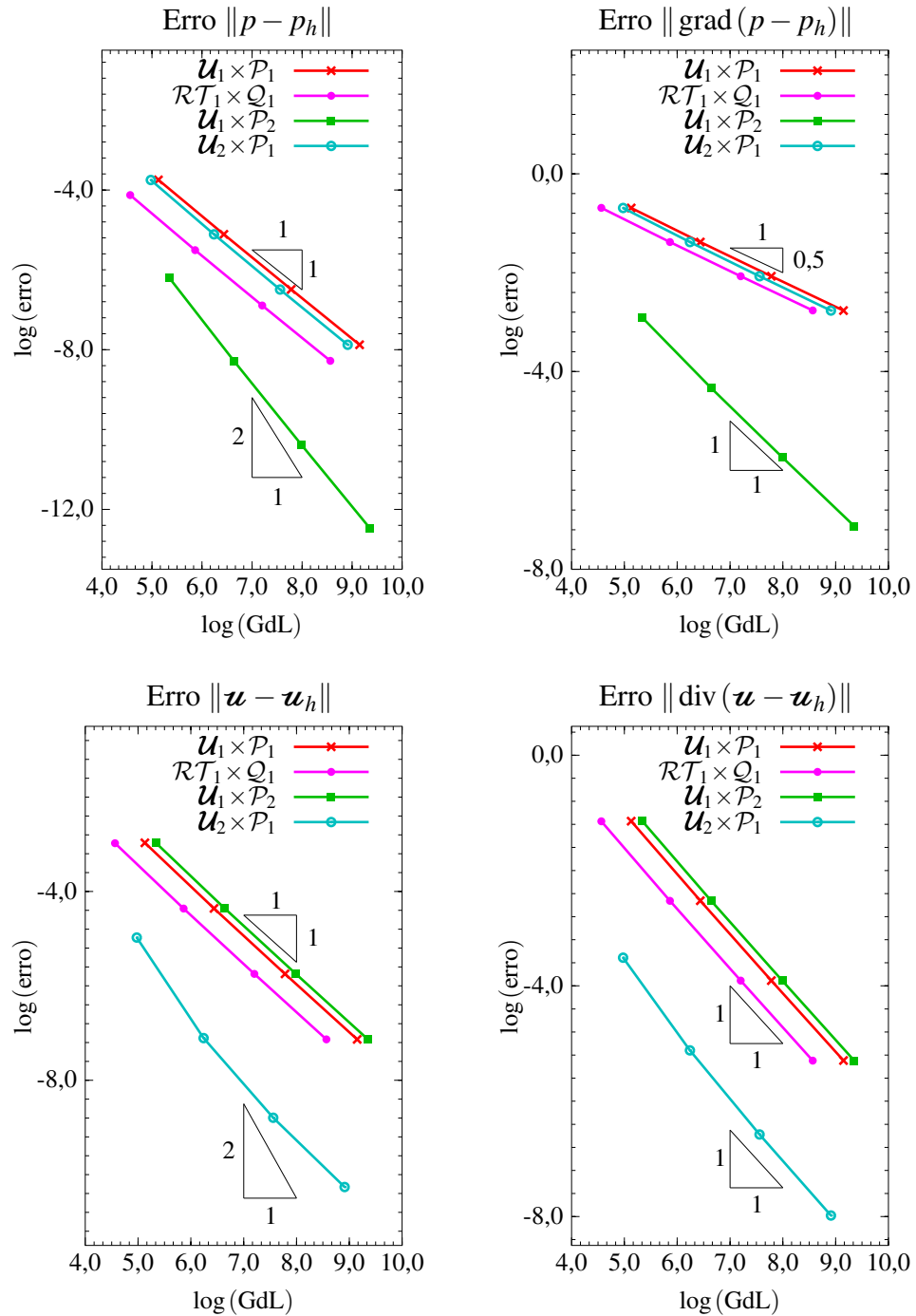


Figura 5.4: Meio Homogêneo com malha de quadrados. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 1$ .

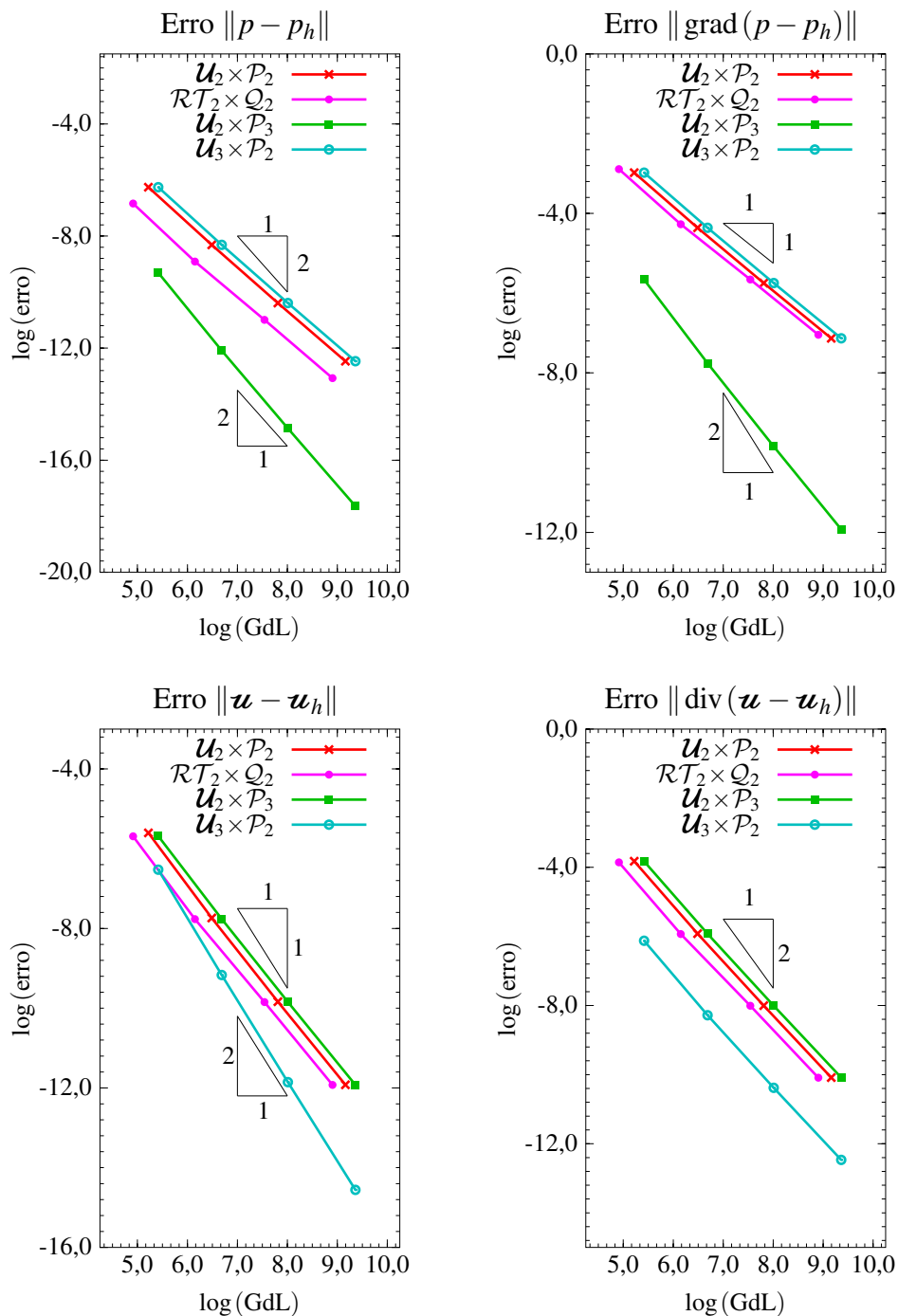


Figura 5.5: Meio Homogêneo com malha de quadrados. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 2$ .

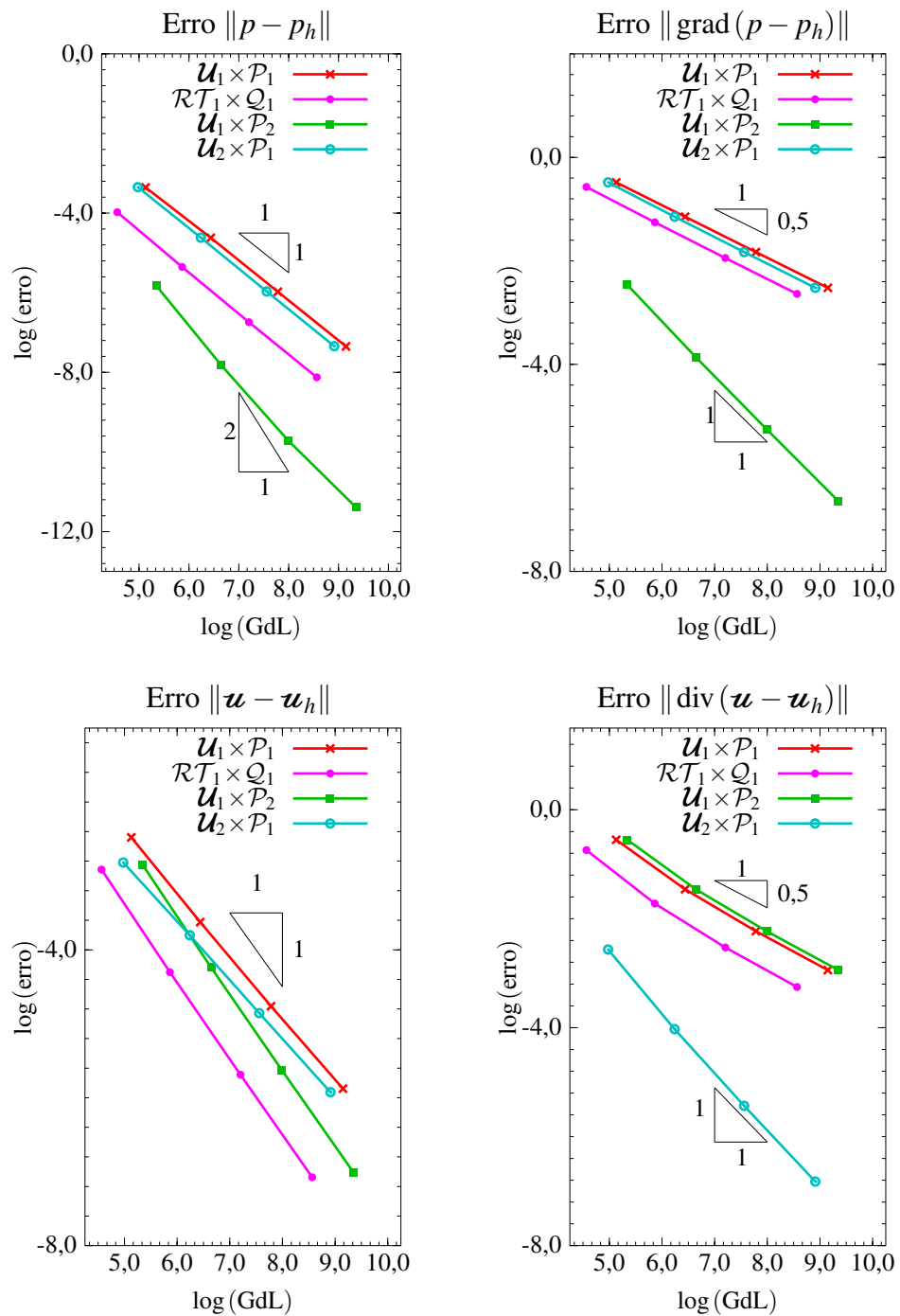


Figura 5.6: Meio Homogêneo com malha de trapézios. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 1$ .

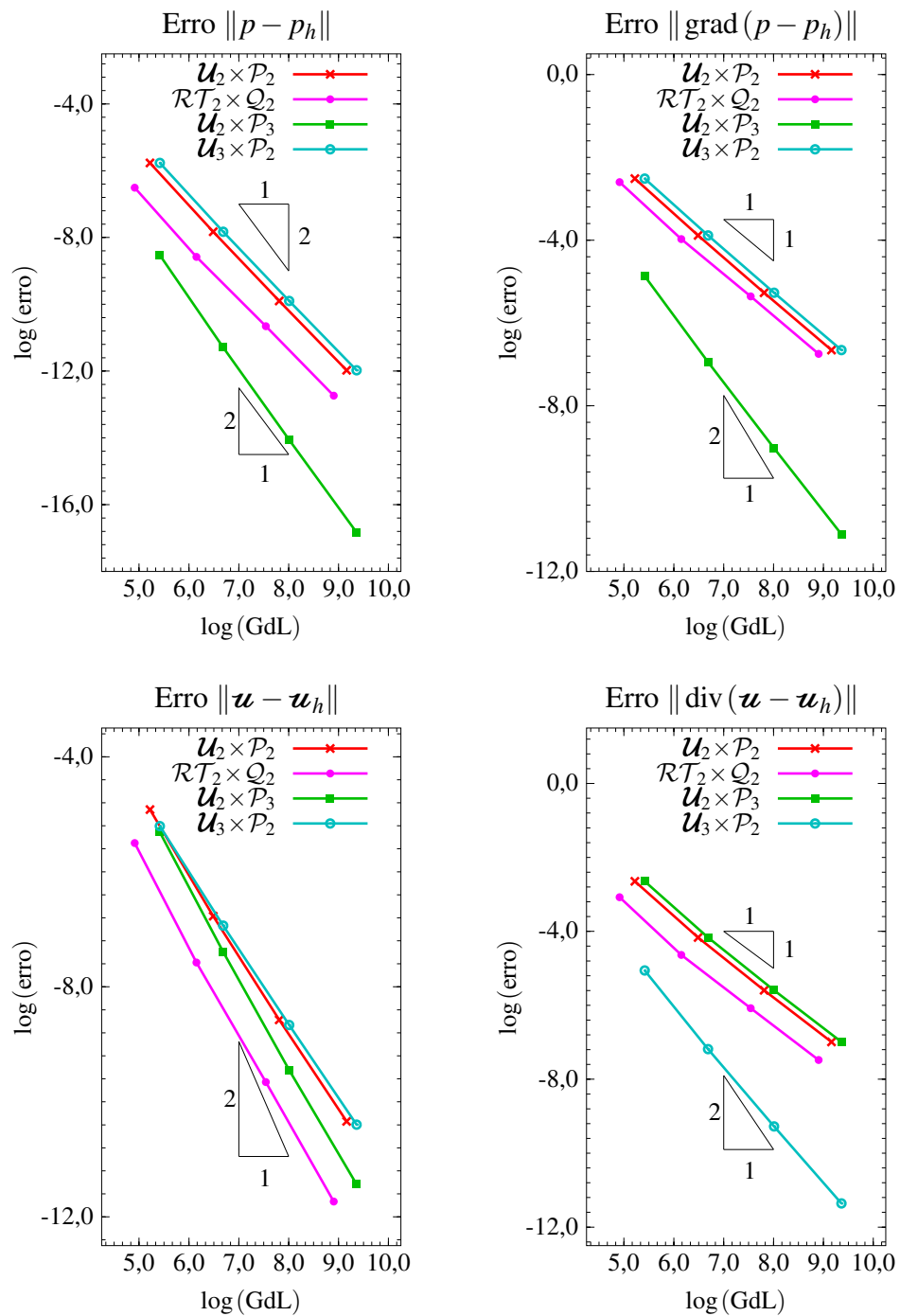


Figura 5.7: Meio Homogêneo com malha de trapézios. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 2$ .

## 5.2 Meio Heterogêneo

Nesta seção é apresentado um conjunto de experimentos numéricos em um meio poroso anisotrópico heterogêneo onde o tensor de permeabilidade tem uma interface de descontinuidade em  $x = 0$ . Em este experimento proposto por Crumpton et.al [42], o domínio é quadrado  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  e o campo de permeabilidade é dado por

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x < 0, \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad x > 0. \quad (5.2)$$

A solução analítica é dada por

$$p(x, y) = [2 \sin(y) + \cos(y)]x + \sin(y) \quad \mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \sin(y) + \cos(y) \\ [2 \cos(y) - \sin(y)]x + \cos(y) \end{bmatrix} \quad \text{se } x < 0$$

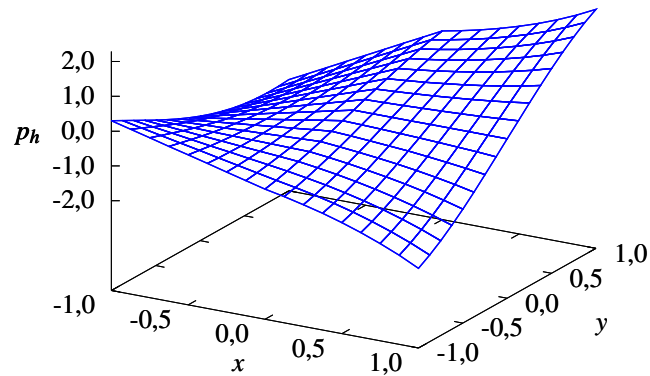
e

$$p(x, y) = \exp(x) \sin(y) \quad \mathbf{u}(x, y) = \exp(x) \begin{bmatrix} 2 \sin(y) + \cos(y) \\ \sin(y) + 2 \cos(y) \end{bmatrix} \quad \text{se } x > 0.$$

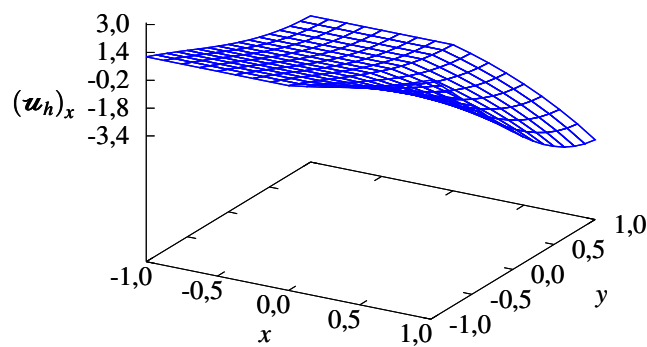
As soluções aproximadas com o espaço  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  para malhas de  $16 \times 16$  elementos quadrados e trapezoidais são apresentadas nas Figuras 5.8 e 5.9, respectivamente. As faces dos elementos são alinhados à interface de descontinuidade em  $x = 0$ , tanto em elementos quadrados como trapezoidais. De forma semelhante ao problema homogêneo, organizamos os resultados em dois grupos: o de ordem um definidos por  $\min\{k, l\} = 1$ , que estão apresentados nas Tabelas 5.5 e 5.6 e os de ordem dois, definidos por  $\min\{k, l\} = 2$ , que estão apresentados nas Tabelas 5.7 e 5.8. Para o caso de malhas quadradas, os resultados para espaços de aproximação  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$  apresentam taxas de convergência lineares no gradiente da pressão e de segunda ordem na pressão, o fluxo e no divergente do fluxo. A única exceção continua sendo o par  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , que fornece aproximações de segunda ordem para o fluxo, o divergente do fluxo e o gradiente da pressão e aproximação de terceira ordem para a pressão. Os resultados para  $\min\{k, l\} = 2$ , são consistentes com os obtidos para  $\min\{k, l\} = 1$ . Para o caso de malhas trapezoidais, o  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$  mantém aproximações de segundo grau na pressão e no fluxo, mas



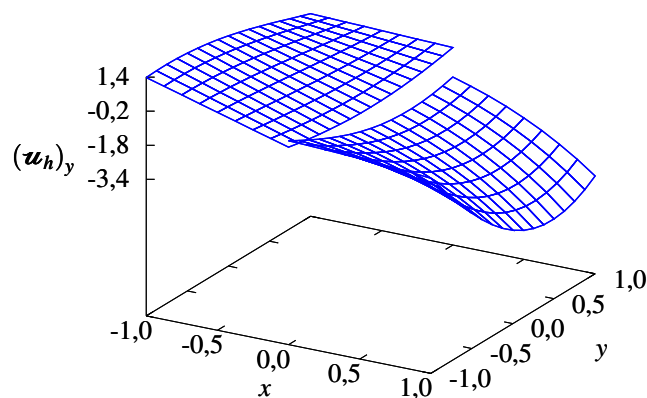
perde uma ordem de convergência no divergente do fluxo.



(a) Distribuição da pressão  $p_h$ .



(b) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_x$  do fluxo.



(c) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_y$  do fluxo.

Figura 5.8: Meio Heterogêneo: Distribuição da pressão  $p_h$  e das componentes  $(\mathbf{u}_h)_x$  e  $(\mathbf{u}_h)_y$  obtidas a partir da aproximação do Problema Heterogêneo definido sobre um domínio quadrado, com o espaço  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e uma malha de  $16 \times 16$  quadrados.

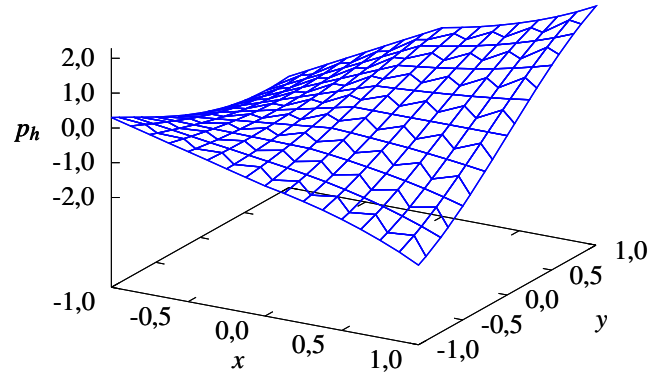
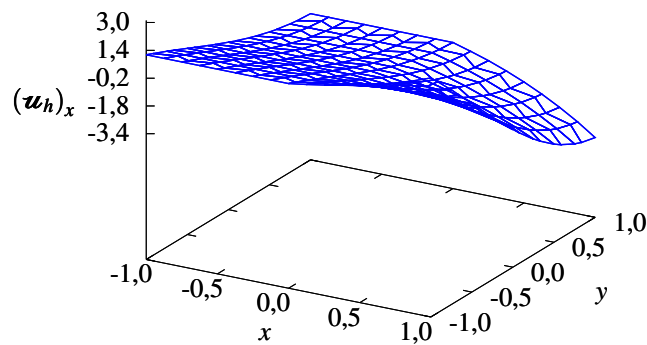
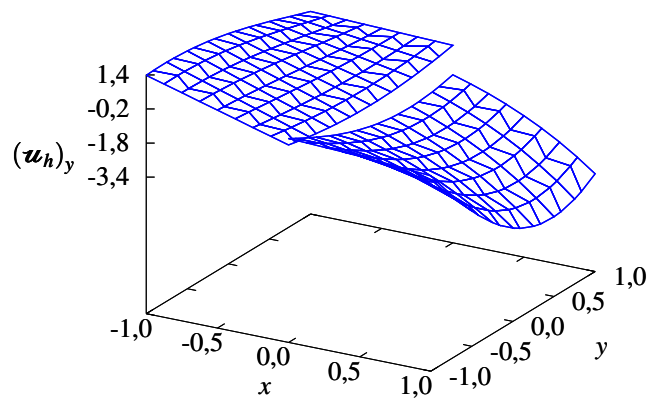
(a) Distribuição da pressão  $p_h$ .(b) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_x$  do fluxo.(c) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_y$  do fluxo.

Figura 5.9: Meio Heterogêneo: Distribuição da pressão  $p_h$  e das componentes  $(\mathbf{u}_h)_x$  e  $(\mathbf{u}_h)_y$  obtidas a partir da aproximação do Problema Heterogêneo definido sobre um domínio quadrado, com o espaço  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e uma malha de  $16 \times 16$  elementos trapezoidais.

Tabela 5.5: Meio Heterogêneo em malhas de quadrados. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$								
4	2,70e-02		2,99e-01		2,77e-01		6,07e-02	
8	6,63e-03	2,03	1,48e-01	1,02	7,60e-02	1,86	1,50e-02	2,02
16	1,64e-03	2,02	7,37e-02	1,01	2,03e-02	1,91	3,73e-03	2,01
32	4,07e-04	2,01	3,68e-02	1,00	5,34e-03	1,93	9,31e-04	2,00
$\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$								
4	1,87e-02		2,92e-01		5,53e-02		5,70e-02	
8	4,73e-03	1,98	1,47e-01	0,99	1,39e-02	1,99	1,43e-02	1,99
16	1,19e-03	2,00	7,35e-02	1,00	3,48e-03	2,00	3,58e-03	2,00
32	2,97e-04	2,00	3,68e-02	1,00	8,69e-04	2,00	8,95e-04	2,00
$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$								
4	1,89e-03		2,56e-02		5,64e-02		5,70e-02	
8	2,39e-04	2,99	6,29e-03	2,03	1,40e-02	2,01	1,43e-02	1,99
16	2,99e-05	3,00	1,56e-03	2,01	3,49e-03	2,01	3,58e-03	2,00
32	3,74e-06	3,00	3,88e-04	2,01	8,70e-04	2,00	8,95e-04	2,00
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$								
4	2,69e-02		2,99e-01		3,03e-01		3,32e-02	
8	6,62e-03	2,02	1,48e-01	1,01	9,19e-02	1,72	7,07e-03	2,23
16	1,64e-03	2,02	7,37e-02	1,01	2,83e-02	1,70	1,65e-03	2,10
32	4,07e-04	2,01	3,68e-02	1,00	8,98e-03	1,65	3,99e-04	2,04

Tabela 5.6: Meio Heterogêneo em malhas de trapézios. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  e  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$								
4	6,26e-02		5,20e-01		3,16e-01		1,50e-01	
8	1,66e-02	1,91	2,66e-01	0,97	1,01e-01	1,65	6,49e-02	1,21
16	4,25e-03	1,97	1,34e-01	0,98	3,22e-02	1,65	3,10e-02	1,07
32	1,07e-03	1,99	6,76e-02	0,99	1,05e-02	1,62	1,53e-02	1,02
$\mathcal{RT}_1 \times \mathcal{Q}_1$								
4	2,66e-02		4,13e-01		6,01e-02		1,10e-01	
8	6,63e-03	2,00	2,07e-01	1,00	1,51e-02	1,99	4,79e-02	1,20
16	1,66e-03	2,00	1,04e-01	1,00	3,78e-03	2,00	2,30e-02	1,06
32	4,14e-04	2,00	5,18e-02	1,00	9,43e-04	2,00	1,14e-02	1,02
$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$								
4	2,78e-03		4,03e-02		6,69e-02		1,38e-01	
8	3,67e-04	2,92	9,86e-03	2,03	1,68e-02	2,00	6,30e-02	1,13
16	5,61e-05	2,71	2,44e-03	2,01	4,18e-03	2,01	3,07e-02	1,04
32	1,08e-05	2,38	6,07e-04	2,01	1,04e-03	2,00	1,53e-02	1,01
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$								
4	6,27e-02		5,20e-01		3,61e-01		7,25e-02	
8	1,67e-02	1,91	2,66e-01	0,97	1,20e-01	1,59	1,82e-02	1,99
16	4,26e-03	1,97	1,34e-01	0,98	3,98e-02	1,59	4,53e-03	2,01
32	1,07e-03	1,99	6,76e-02	0,99	1,34e-02	1,57	1,13e-03	2,00

Tabela 5.7: Meio Heterogêneo em malhas de quadrados. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$								
4	1,90e-03		2,51e-02		1,75e-02		2,70e-03	
8	2,39e-04	2,99	6,22e-03	2,01	2,86e-03	2,62	3,31e-04	3,03
16	2,99e-05	3,00	1,55e-03	2,00	4,82e-04	2,57	4,08e-05	3,02
32	3,73e-06	3,00	3,87e-04	2,00	8,28e-05	2,54	5,07e-06	3,01
$\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$								
4	1,04e-03		2,71e-02		2,70e-03		1,98e-03	
8	1,31e-04	3,00	6,78e-03	2,00	3,38e-04	3,00	2,51e-04	2,98
16	1,63e-05	3,00	1,69e-03	2,00	4,22e-05	3,00	3,15e-05	3,00
32	2,04e-06	3,00	4,24e-04	2,00	5,28e-06	3,00	3,94e-06	3,00
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$								
4	4,22e-05		8,14e-04		2,71e-03		2,02e-03	
8	2,64e-06	4,00	1,01e-04	3,01	3,38e-04	3,00	2,52e-04	3,00
16	1,65e-07	4,00	1,26e-05	3,01	4,22e-05	3,00	3,15e-05	3,00
32	1,03e-08	4,00	1,57e-06	3,00	5,28e-06	3,00	3,94e-06	3,00
$\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$								
4	1,90e-03		2,50e-02		1,99e-02		2,26e-03	
8	2,39e-04	2,99	6,22e-03	2,01	3,41e-03	2,55	2,64e-04	3,10
16	2,98e-05	3,00	1,55e-03	2,00	5,91e-04	2,53	3,15e-05	3,07
32	3,73e-06	3,00	3,87e-04	2,00	1,03e-04	2,52	3,84e-06	3,04

Tabela 5.8: Meio Heterogêneo em malhas de trapézios. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$ ,  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$  e  $\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$  e pela formulação mista clássica com os subespaços de aproximação  $\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$ .

$n$	$\ p - p_h\ $		$\ \text{grad}(p - p_h)\ $		$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ $		$\ \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ $	
	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem	Erro	Ordem
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_2$								
4	2,70e-03		3,90e-02		1,95e-02		9,93e-03	
8	3,39e-04	2,99	9,66e-03	2,01	3,42e-03	2,51	2,22e-03	2,16
16	4,24e-05	3,00	2,41e-03	2,00	6,01e-04	2,51	5,37e-04	2,05
32	5,30e-06	3,00	6,02e-04	2,00	1,06e-04	2,50	1,33e-04	2,01
$\mathcal{RT}_2 \times \mathcal{Q}_2$								
4	1,40e-03		3,62e-02		3,20e-03		5,84e-03	
8	1,74e-04	3,01	9,00e-03	2,01	4,01e-04	3,00	1,38e-03	2,08
16	2,17e-05	3,00	2,25e-03	2,00	5,00e-05	3,00	3,39e-04	2,02
32	2,71e-06	3,00	5,61e-04	2,00	6,24e-06	3,00	8,44e-05	2,01
$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_3$								
4	8,47e-05		1,58e-03		4,06e-03		9,64e-03	
8	5,17e-06	4,03	1,93e-04	3,03	5,11e-04	2,99	2,20e-03	2,13
16	3,20e-07	4,02	2,39e-05	3,02	6,61e-05	2,95	5,36e-04	2,04
32	1,99e-08	4,01	2,97e-06	3,01	9,40e-06	2,81	1,33e-04	2,01
$\mathcal{U}_3 \times \mathcal{P}_2$								
4	2,70e-03		3,89e-02		2,54e-02		3,20e-03	
8	3,39e-04	2,99	9,65e-03	2,01	4,45e-03	2,51	3,78e-04	3,08
16	4,24e-05	3,00	2,41e-03	2,00	7,84e-04	2,50	4,51e-05	3,06
32	5,31e-06	3,00	6,02e-04	2,00	1,38e-04	2,50	5,49e-06	3,04

**Erro em função do Número de Graus de Liberdade na forma Condensada** Os erros em função dos graus de liberdade para o caso de malhas quadradas do problema heterogêneo são apresentados na Figura 5.10 no caso  $\min\{k, l\} = 1$  e na Figura 5.11 para  $\min\{k, l\} = 2$ . Para malhas quadradas, os espaços  $\mathcal{U}_k \times \mathcal{P}_{k+1}$  levam a melhores aproximações para a pressão e seu gradiente; entretanto os espaços  $\mathcal{U}_{k+1} \times \mathcal{P}_k$  são mais precisos na aproximação do fluxo e seu divergente, mas com um custo superior em termos do número de graus de liberdade. A melhor aproximação para a pressão e seu gradiente empregando  $\mathcal{U}_k \times \mathcal{P}_{k+1}$  é corroborado no caso de malhas trapezoidais, não entando no caso do fluxo em espaços  $\mathcal{U}_{k+1} \times \mathcal{P}_k$  os resultados não são conclusivos.

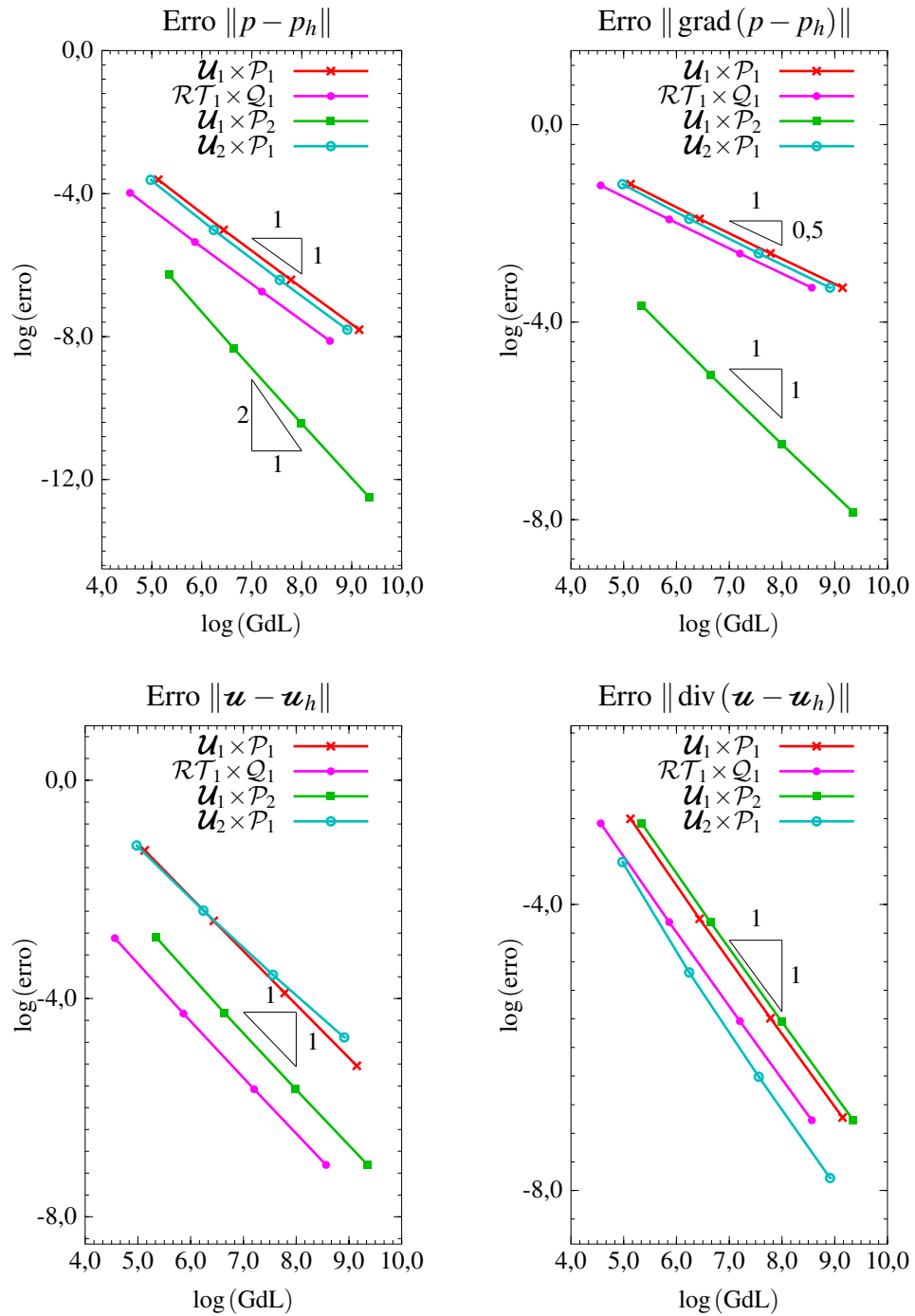


Figura 5.10: Meio Heterogêneo com malha de quadrados. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 1$ .



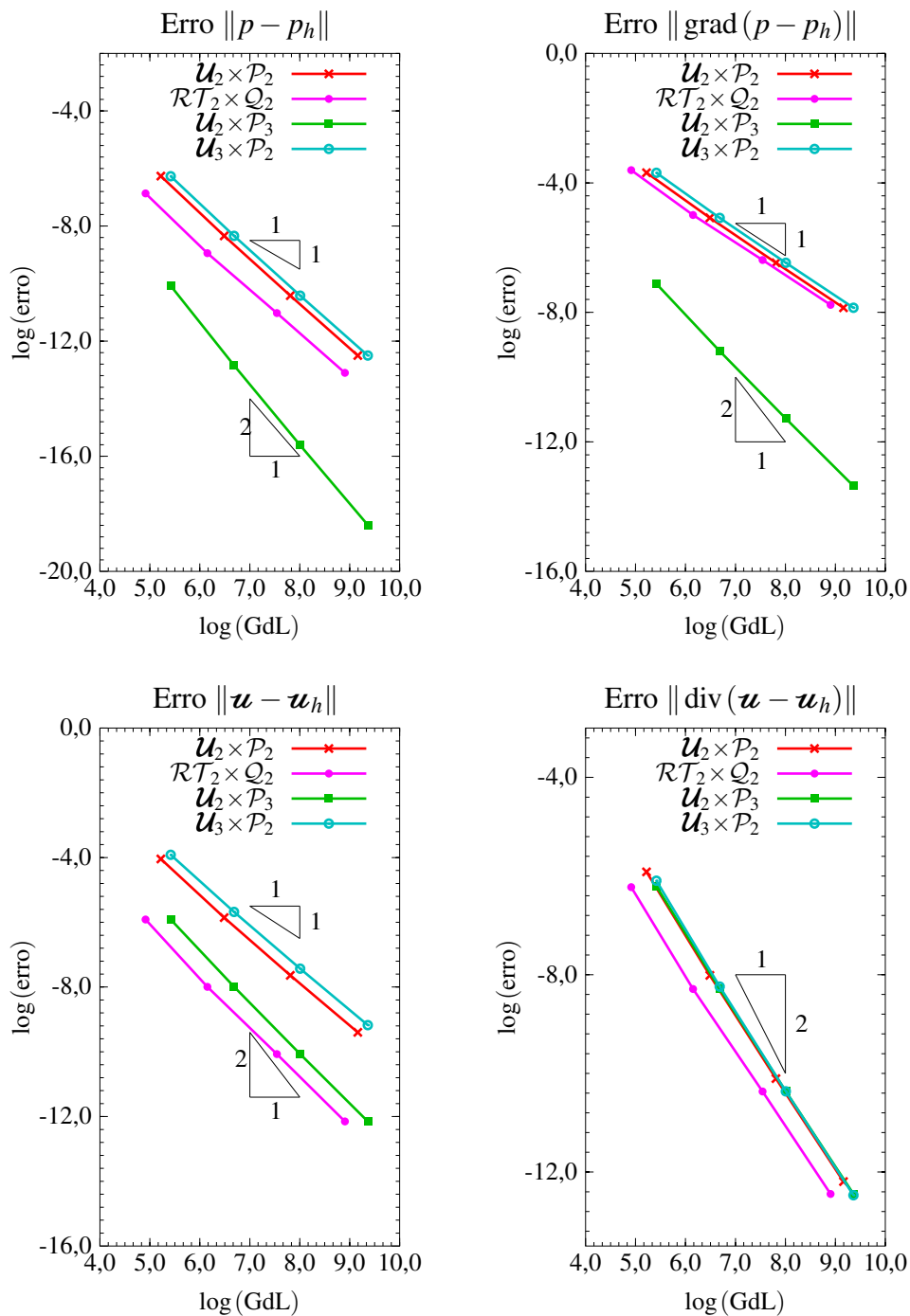


Figura 5.11: Meio Heterogêneo com malha de quadrados. Erro na norma  $L^2(\Omega)$  como função do número de Graus de Liberdade (GdL) na forma condensada para o caso  $\min\{k, l\} = 2$ .

### 5.3 Problema com Tensor de Permeabilidade Altamente Anisotrópico

O princípio de preservação do máximo é uma das propriedades fundamentais na solução de equações diferenciais de segunda ordem [51]. A preservação desta propriedade é um indicativo de confiabilidade do modelamento numérico, e especialmente em problemas elípticos com coeficientes difusivos com variações extremas. Os métodos clássicos de elementos finitos e volumes finitos não satisfazem o princípio da conservação do máximo ao considerar um tensor de difusão anisotrópico [70], porem alguns métodos satisfazem este princípio limitando os coeficientes do tensor e restringindo a discretização espacial a um certo conjunto de malhas geométricas. Neste experimento estudaremos o caso

$$\mathbf{K}(x,y) = \begin{cases} \mathbf{K}_1 & \text{se } (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0, 1], \\ \mathbf{K}_2 & \text{se } (x,y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 1], \end{cases} \quad (5.3)$$

com

$$\mathbf{K}_1(x,y) := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

e

$$\mathbf{K}_2(x,y) := \begin{pmatrix} y_1^2 + \varepsilon x_1^2 & -(1 - \varepsilon)x_1 y_1 \\ -(1 - \varepsilon)x_1 y_1 & x_1^2 + \varepsilon y_1^2 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

onde  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $K_1 = 100, 0$ ,  $K_2 = 0, 01$ ,  $\varepsilon = 10^3$ ,  $x_1 = x + 10^{-3}$  e  $y_1 = y + 10^{-3}$ . As condições de contorno são impostas na variável da pressão  $p_h$ , como:

$$p_h(x,y) = 0 \quad \text{se } (x,y) \in \Gamma_1 \quad \text{e} \quad p_h(x,y) = 2 \quad \text{se } (x,y) \in \Gamma_2. \quad (5.6)$$

Na solução do problema de Queiroz, nos consideramos um sequência de malhas quadradas começando em uma malha de  $16 \times 16$  elementos, seguido de uma de  $32 \times 32$  elementos e finalizando em  $64 \times 64$  elementos. O problema foi implementado seguindo a formulação

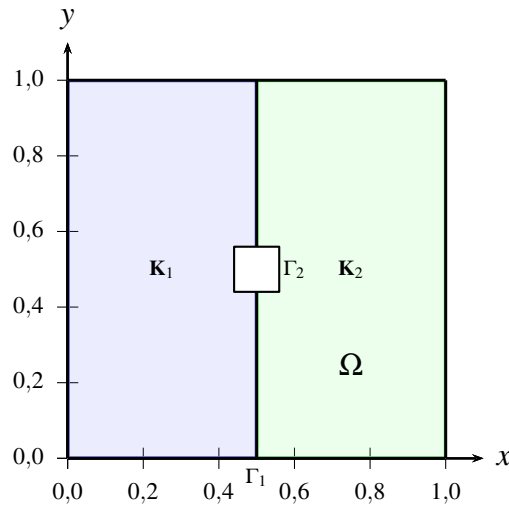


Figura 5.12: Configuração de  $\Omega$  para o problema com o tensor de permeabilidade  $\mathbf{K}$  altamente anisotrópico.

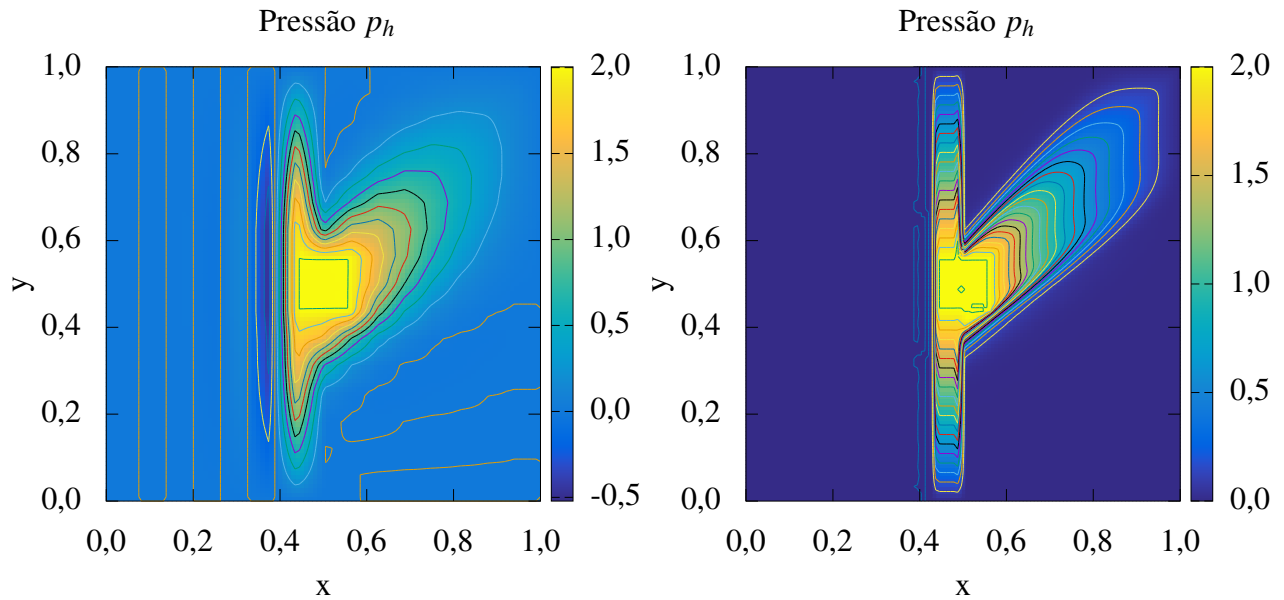
incondicionalmente estável empregando subespaços hierárquicos de aproximação com combinações da forma  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ ,  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  e  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  sobre cada uma das malhas propostas.

O problema não possui solução analítica por tanto não é direta uma análise do erro via taxas de convergência, mas, ao considerar a anisotropia do tensor  $\mathbf{K}$  a avaliação dos valores máximos e mínimos de  $p_h$  junto com a consistência dos resultados apresentados em forma gráfica, podem nos proporcionar uma ideia da precisão que o método atinge. Nas Figuras 5.14a e 5.14b são apresentados os resultados obtidos em uma malha de  $16 \times 16$  elementos quadrados com uma combinação de subespaços  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , respectivamente. A distribuição da pressão  $p_h$  em os dois casos é consistente com o resultado apresentado em [44] empregando o método referenciado como *MPFA-FPS*, e os valores máximos e mínimos da variável escalar apresentados na Tabela 5.9, encontram-se próximos aos limites físicos do problema, ao considerar a tamanho do parâmetro de malha. Nas Figuras 5.14c e 5.14d, são apresentados os resultados das configurações  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  e  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , respectivamente, em uma malha de  $32 \times 32$  elementos quadrados. Como esperado, os resultados continuam sendo consistentes mas o princípio de preservação do valor máximo não é mantido de forma exata. Se bem os resultados da escolha  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$  apresentam um afastamento importante no valor  $p_h^{\min} \approx -0,5$ , este erro é corrigido com a escolha  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ . Nas Figuras 5.13a e 5.15a são apresentados os resultados obtidos para uma malha de  $64 \times 64$  subdivisões, onde o par  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$  teve o melhor desempenho dentro dos métodos avaliados ao considerar os resultados de  $p_h^{\min}$  e  $p_h^{\max}$  apresentados na Tabela 5.9. Ao considerar a combinação de subespaços  $\mathbf{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  os resultados para do problema de Queiroz

são apresentados na Figura 5.15. Sendo esta combinação, caracterizada por um número maior de graus de liberdade do fluxo, os valores de  $p_h^{\min}$  e  $p_h^{\max}$  não são muito diferentes dos obtidos com a combinação  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ . Desta forma, é possível concluir que o emprego de formulações incondicionalmente estáveis com bases hierárquicas gera soluções consistentes para problemas difusivos com altas variações nas entradas do tensor associado, mas sem satisfazer de forma exata o princípio do máximo.

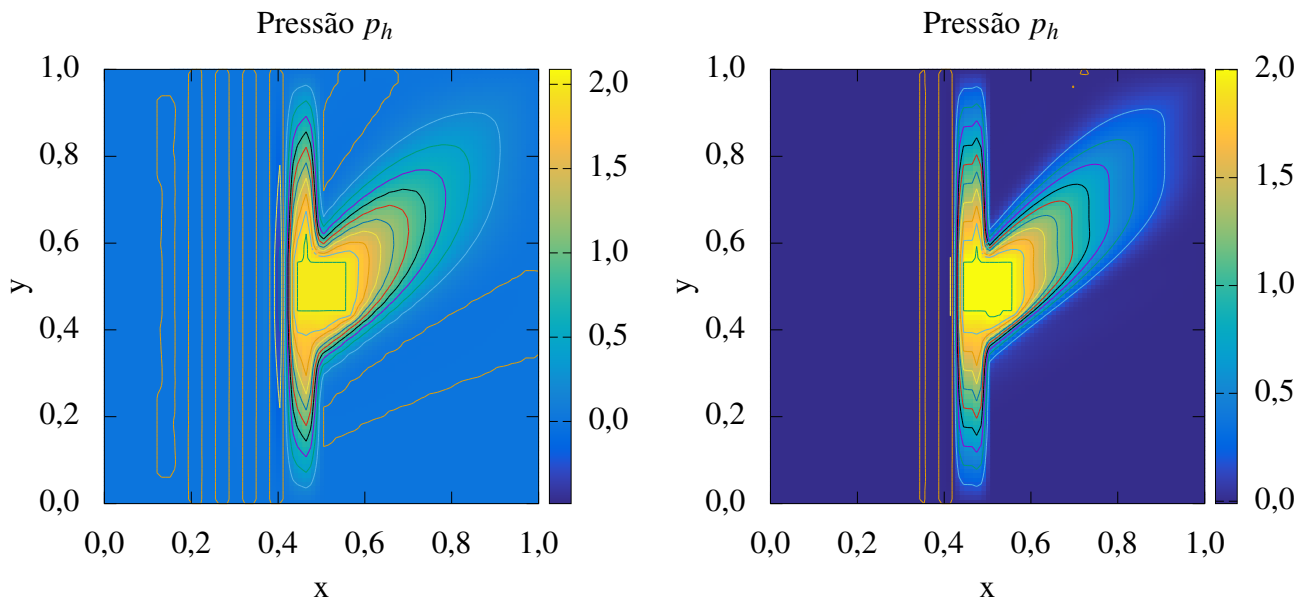
Tabela 5.9: Valores máximos e mínimos da pressão  $p_h$  para diferentes ordens polinomiais dos espaços  $\mathcal{U}_l \times \mathcal{P}_k$  e densidades de malha retangulares adotadas.

Núm. de Elementos	Valor $p_h^{\min}$			Valor $p_h^{\max}$		
	$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$	$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$	$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$	$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$	$\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$	$\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$
16×16	-0,521877	-0,004159	-0.521883	2,004108	2,004124	2.004142
32×32	-0,488180	-0,011384	-0.488177	2,088198	2,001542	2.073254
64×64	-0,364865	-0,000896	-0.364865	2,141965	2,000623	2.133568

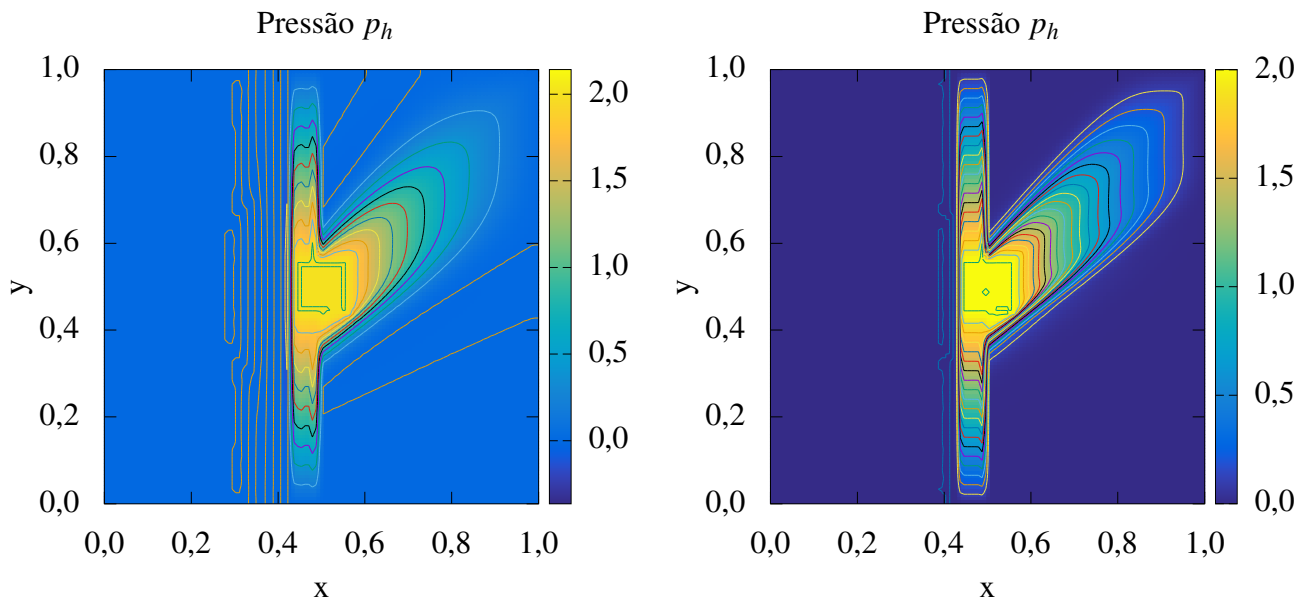


(a) Subespaços  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ , malha de 16×16 elementos. (b) Subespaços  $\mathcal{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , malha de 16×16 elementos.

Figura 5.13: Distribuição da pressão  $p_h$  obtida para um problema heterogêneo e muito anisotrópico com furo quadrado. Malha quadrada e uniforme.

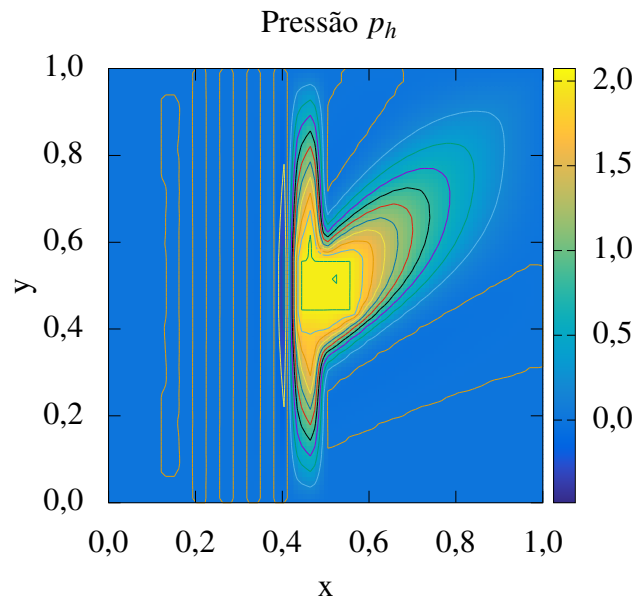


(a) Subespaços  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ , malha de  $32 \times 32$  elementos.      (b) Subespaços  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , malha de  $32 \times 32$  elementos.

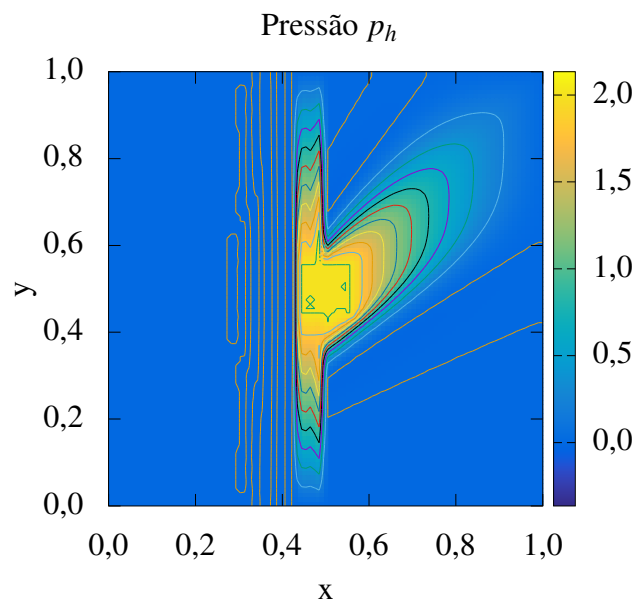


(c) Subespaços  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_1$ , malha de  $64 \times 64$  elementos.      (d) Subespaços  $\mathbf{U}_1 \times \mathcal{P}_2$ , malha de  $64 \times 64$  elementos.

Figura 5.14: (Continuação). Distribuição da pressão  $p_h$  obtida para um problema heterogêneo e muito anisotrópico com furo quadrado. Malha quadrada e uniforme.



(a) Subespaços  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$ , malha de  $32 \times 32$  elementos.



(b) Subespaços  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$ , malha de  $64 \times 64$  elementos.

Figura 5.15: Distribuição da pressão  $p_h$  obtida para um problema heterogêneo e muito anisotrópico com furo quadrado. Malha quadrada e uniforme.

## Capítulo 6

# Aplicações em Escoamentos em Meios Porosos

Neste Capítulo apresentamos a aplicação da metodologia hierárquica desenvolvida nesta Tese ao problema do transporte advectivo-difusivo linear em meios porosos saturados. A dinâmica do escoamento é determinada pela velocidade de Darcy, calculada através da solução do problema elíptico, tal como estudado nos experimentos do Capítulo 5. Já a equação do transporte, consiste numa equação parabólica que pode assumir características hiperbólicas no regime predominantemente advectivo [76, 33]. Aqui adotamos um esquema de separação de operadores do tipo de Godunov (*Godunov Splitting*) no qual as partes parabólica e hiperbólica da equação do transporte são resolvidas em passos fracionários, por métodos numéricos específicos para o transporte difusivo e o transporte advectivo, respectivamente. Para a resolução da parte difusiva, propomos uma variação da metodologia hierárquica incondicionalmente estável em  $H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ , adaptada para problemas parabólicos. Para a resolução da parte advectiva, utilizamos uma formulação de Galerkin Descontínuo baseada na reconstrução do gradiente [37, 53], com o emprego de esquemas de Runge-Kutta explícitos para a integração no tempo. Finalmente são apresentadas simulações numéricas do transporte linear em meios porosos para diferentes condições de contorno e diferentes graus de heterogeneidade.

## 6.1 Transporte Advectivo-Difusivo Linear

Na descrição de um escoamento em um meio poroso é importante caracterizar a maneira como os poros estão preenchidos com as fases que escoam [62]. De uma forma geral, uma *fase* é definida como uma porção do sistema que é separada das outras por uma interface bem definida na escala dos poros. Uma fase pode ser composta por mais de uma *espécie* (componente) que é miscível na fase, como por exemplo água e sal. Quando há mais de uma fase dividindo os espaços vazios, temos um escoamento multifásico, como por exemplo o escoamento imiscível de água e óleo em um reservatório de petróleo. Consideremos agora o escoamento de uma fase que satura os poros de um meio poroso rígido (escoamento monofásico saturado). Nesta fase podem ser transportadas diferentes espécies. Consideraremos ainda, sem perda de generalidade, a concentração de uma determinada espécie como sendo uma função  $c(\mathbf{x}, t)$ , onde  $t$  denota a variável temporal. Sob determinadas hipóteses [62, 76], tal concentração é governada pela equação

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) - \operatorname{div}(\mathbf{D} \operatorname{grad} c) = g \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (6.1)$$

com condições de contorno e iniciais

$$c = \bar{c}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Gamma_c \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$(\mathbf{D} \operatorname{grad} c) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{\mathcal{J}} \times (0, T), \quad (6.3)$$

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}) \quad \text{em } \Omega, \quad (6.4)$$

onde  $T > 0$  é um número fixo,  $0 < \phi(\mathbf{x}) \leq \phi^*$  é a porosidade do meio poroso,  $g$  é uma função de fonte,  $\mathbf{u}$  é a velocidade de Darcy, dada pela resolução do problema elíptico (1.1)-(1.2) e  $\Gamma = \Gamma_c \cup \Gamma_{\mathcal{J}}$ . A forma geral do tensor de difusão-dispersão  $\mathbf{D}$  é dada por

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \alpha_d \mathbf{I} + |\mathbf{u}| \left[ \alpha_l \mathbf{E}(\mathbf{u}) + \alpha_t \mathbf{E}^\perp(\mathbf{u}) \right] \quad (6.5)$$

com

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}, \quad \mathbf{E}^\perp(\mathbf{u}) = \mathbf{I} - \mathbf{E}(\mathbf{u}), \quad (6.6)$$



onde  $\alpha_d$ ,  $\alpha_l$  e  $\alpha_t$  são os coeficientes de difusão molecular, dispersão longitudinal e dispersão transversal, respectivamente [95].

## 6.2 Estratégia de Decomposição de Operadores

A Equação (6.1) pode ser escrita como

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \mathcal{J}_{\text{tot}} = g \quad \text{em } \Omega \times (0, T) \quad (6.7)$$

onde  $\mathcal{J}_{\text{tot}}$  é o fluxo mássico total, composto pelo fluxo advectivo

$$\mathcal{J}_a = c\mathbf{u} \quad (6.8)$$

e pelo fluxo difusivo-dispersivo (que chamaremos simplesmente de fluxo difusivo)

$$\mathcal{J}_d = -\mathbf{D} \operatorname{grad} c. \quad (6.9)$$

Devido a natureza distinta destes mecanismos de transporte, a solução da Equação (6.1) é fortemente dependente das relações entre a velocidade e os coeficientes de difusão-dispersão, a traves do número de Peclet. De uma forma geral, podemos dizer que a solução tende a ser suave em regiões de baixa velocidade, caracterizando uma solução típica de problemas parabólicos, podendo apresentar altos gradientes em regiões de alta velocidade, caracterizando uma solução típica de problemas hiperbólicos. Sendo assim, do ponto de vista numérico, faz sentido a decomposição da Equação (6.1) em uma equação difusiva e uma equação advectiva, de forma que métodos numéricos específicos para cada uma destas equações possam ser empregados. Para tal, iniciamos com a partição do intervalo  $I = (0, T)$  em  $n$  passos de tamanho  $\Delta t^n$  de forma que

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n, \quad \text{com } \sum_n \Delta t^n = T.$$

A estratégia consiste em resolver de forma sequencial, para cada intervalo  $(t^n, t^{n+1})$  os dois subproblemas a seguir:

**Problema Difusivo** Dada a solução  $c(\mathbf{x}, t^n)$ , encontrar a solução auxiliar  $c^*(\mathbf{x}, t)$  tal que

$$\phi \frac{\partial c^*}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbf{D} \operatorname{grad} c^*) = g \quad \text{em } \Omega \times (t^n, t^{n+1}) \quad (6.10)$$

com condição inicial

$$c^*(\mathbf{x}, t^n) = c(\mathbf{x}, t^n)$$

e condições de contorno

$$c^* = \bar{c}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre } \Gamma_c \times (t^n, t^{n+1}), \quad (6.11)$$

$$(\mathbf{D} \operatorname{grad} c^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{\mathcal{I}} \times (t^n, t^{n+1}), \quad (6.12)$$

**Problema Advectivo** Dada a solução auxiliar  $c^*(\mathbf{x}, t^{n+1})$ , encontrar a solução  $c(\mathbf{x}, t)$  tal que

$$\phi \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c \mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \Omega \times (t^n, t^{n+1}) \quad (6.13)$$

com condição inicial

$$c(\mathbf{x}, t^n) = c^*(\mathbf{x}, t^{n+1})$$

e condição de contorno

$$c = c^* \quad \text{sobre } \Gamma^- \times (t^n, t^{n+1}),$$

onde  $\Gamma^-$  é a parte de  $\Gamma$  com  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} < 0$ .

Esta estratégia consiste em um esquema de passos fracionários do tipo de Godunov [69]. Nas duas próximas seções apresentaremos os métodos numéricos utilizados para a resolução de cada subproblema. Para a resolução do problema difusivo, propomos uma variação da metodologia hierárquica incondicionalmente estável em  $H(\operatorname{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ , adaptada para problemas parabólicos enquanto a resolução do problema advectivo se dá com o emprego de uma formulação de Galerkin Descontínuo.

### 6.3 Método Estabilizado para o Problema Difusivo

Para introduzir a formulação mista semidiscreta (contínua no espaço) do problema difusivo, consideramos  $\Gamma = \Gamma_c$ , utilizamos o método de Euler implícito na Equação (6.10), multiplicamos por uma função teste  $\mathbf{v}$ , integramos no domínio  $\Omega$  e integramos um termo por partes, obtendo:

#### Formulação Mista do Problema Difusivo

Determinar o par  $\{\mathcal{J}_d, c\} \in H(\text{div}; \Omega) \times L^2(\Omega)$ , tal que

$$(\mathbf{D}^{-1} \mathcal{J}_d, \mathbf{v}) - (c, \text{div } \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}; \Omega), \quad (6.14)$$

$$\left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c, q\right) + (\text{div } \mathcal{J}_d, q) = \left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c^n, q\right) + (g, q) \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (6.15)$$

onde, por simplicidade de notação, escrevemos  $\mathcal{J}_d = \mathcal{J}_d^{n+1}$  e  $c = c^{n+1}$ .

Assim como apresentado em [45], a formulação estabilizada segue a partir da combinação da formulação (6.14)-(6.15) com os seguintes resíduos

$$-\delta_1 (\mathbf{D}^{-1} \mathcal{J}_d + \text{grad } c, \mathbf{v} + \mathbf{D} \text{ grad } q) = 0$$

$$\delta_2 \left(\frac{\phi}{\Delta t^n} (c - c^n) + \text{div } \mathcal{J}_d - g, \text{div } \mathbf{v} + q\right) = 0$$

com  $\delta_1, \delta_2 > 0$  resultando na seguinte formulação semidiscreta

### Formulação Mista Estabilizada do Problema Difusivo

Determinar o par  $\{\mathcal{J}_d, c\} \in H(\text{div}; \Omega) \times H^1(\Omega)$ , tal que

$$\begin{aligned} (1 - \delta_1)(\mathbf{D}^{-1} \mathcal{J}_d, \mathbf{u}) - (c, \text{div } \mathbf{u}) - \delta_1(\text{grad } c, \mathbf{u}) + \delta_2\left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c, \text{div } \mathbf{u}\right) + \delta_2(\text{div } \mathcal{J}_d, \text{div } \mathbf{u}) = \\ \delta_2\left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c^n + g, \text{div } \mathbf{u}\right) \quad \forall \mathbf{u} \in H(\text{div}; \Omega) \\ (\delta_2 - 1)\left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c, q\right) + (\delta_2 - 1)(\text{div } \mathcal{J}_d, q) - \delta_1(\mathcal{J}_d, \text{grad } q) - \delta_1(\text{grad } c, \mathbf{D} \text{grad } q) = \\ (\delta_2 - 1)\left(\frac{\phi}{\Delta t^n} c^n + g, q\right) \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

A discretização deste problema segue pela construção hierárquica dos espaços conformes  $\mathcal{J}_h \subset H(\text{div}; \Omega)$  para o fluxo difusivo e  $\mathcal{C}_h \subset H^1(\Omega)$ , exatamente como no caso elíptico

#### 6.3.1 Experimento Numérico

Nesta seção apresentamos um experimento numérico para estudar a convergência do método incondicionalmente estável proposto para o problema difusivo, tomando  $\delta_1 = \delta_2 = 1/2$ . É considerado um dos problemas formulados em [45], onde o tensor  $\mathbf{D}$  é heterogêneo, e são calculadas as taxas de convergência para a variável escalar  $c_h$ , seu gradiente  $\text{grad } c_h$ , a variável vetorial  $\mathcal{J}_{d,h}$  e seu divergente  $\text{div } \mathcal{J}_{d,h}$ , usando a norma  $L^2(\Omega)$ . São utilizadas as bases hierárquicas conformes em  $H(\text{div}; \Omega)$  e  $H^1(\Omega)$ , estudadas no Capítulo 3.

**Domínio e Solução Analítica** Nesse estudo, o domínio  $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$  é subdividido em duas partes  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , com  $\Omega_1 = [-1, 0] \times [-1, 1]$  e  $\Omega_2 = (0, 1] \times [-1, 1]$  tal como no experimento heterogêneo do caso elíptico. No subdomínio  $\Omega_1$  definimos

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_1 \times (0, T),$$

o termo de fonte

$$f(\mathbf{x}, t) = [d(t) - \beta (a - b) e^{-t}] [2 \sin(y) + \cos(y)] x + \sin(y) \quad \text{em } \Omega_1 \times (0, T)$$

com  $d(t) = (a - b)e^{-t} + b$  e parâmetros  $a = 3$ ,  $b = 1$ , além da condição inicial

$$c_0(\mathbf{x}) = a [2 \sin(y) + \cos(y)] x + \sin(y), \quad \mathbf{x} \in \Omega_1.$$

A solução analítica em  $\Omega_1$  é dada por

$$c(\mathbf{x}, t) = d(t) [2 \sin(y) + \cos(y)] x + \sin(y) \quad \in \Omega_1 \times (0, T)$$

$$\dot{\mathcal{I}}_d(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} -d(t) [2 \sin(y) + \cos(y)] \\ -d(t) [2 \cos(y) - \sin(y)] x - \cos(y) \end{bmatrix} \in \Omega_1 \times (0, T).$$

No subdomínio  $\Omega_2$  definimos

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = d(t) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_2 \times (0, T),$$

o termo de fonte

$$f(\mathbf{x}, t) = -2d(t)e^x \cos(y) \quad \text{em } \Omega_2 \times (0, T)$$

e a condição inicial

$$c_0(\mathbf{x}) = e^x \sin(y), \quad \mathbf{x} \in \Omega_2.$$

A solução analítica em  $\Omega_2$  é dada por

$$c(\mathbf{x}, t) = e^x \sin(y) \quad \in \Omega_2 \times (0, T)$$

$$\mathcal{J}_d(\mathbf{x}, t) = -d(t)e^x \begin{bmatrix} 2 \sin(y) + \cos(y) \\ 2 \cos(y) - \sin(y) \end{bmatrix} \in \Omega_2 \times (0, T).$$

**Convergência no Espaço** O primeiro estudo realizado diz respeito à convergência das aproximações no espaço. Para tal, tomamos  $T = 10^{-3}$  com uma partição uniforme de 10 passos de tempo  $\Delta t = 10^{-4}$ , de forma que os erros associados à discretização temporal não afetem o estudo de convergência no espaço. Os resultados para malhas de  $n^2$  elementos quadrados com as combinações de subespaços  $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{C}_1$  são apresentados na Tabela 6.1. As taxas de convergência na norma  $L^2(\Omega)$  são quadráticas para as variáveis  $c_h$ ,  $\mathcal{J}_{d,h}$  e  $\text{div } \mathcal{J}_{d,h}$  e linear para a variável  $\text{grad } c_h$ . Já os resultados para os subespaços  $\mathcal{J}_2 \times \mathcal{C}_2$ , apresentados na Tabela 6.2, indicam taxas sub-ótimas menores que três para as variáveis  $c_h$  e  $\mathcal{J}_{d,h}$ , e taxa dois para  $\text{grad } c_h$ . Já o resultado para o divergente do fluxo foi inconclusivo, uma vez que os erros passaram a ser influenciados pelos oriundos da discretização temporal.

De uma forma geral, os resultados apresentam um comportamento consistente com as aproximações obtidas usando espaços hierárquicos conformes  $H(\text{div}; \Omega)$  e  $H^1(\Omega)$  na formulação incondicionalmente estável para o problema elíptico heterogêneo estudado no Capítulo 5.

**Convergência no Tempo** Para o estudo da convergência no tempo, tomamos uma malha fixa de 1024 elementos quadrados com o par de subespaços  $\mathcal{J}_2 \times \mathcal{C}_2$ , o tempo total  $T = 1$  e uma discretização temporal uniforme. Os resultados apresentados na Tabela 6.3 mostram que, para todas as variáveis de interesse  $c_h$ ,  $\mathcal{J}_{d,h}$ ,  $\text{grad } c_h$  e  $\text{div } \mathcal{J}_{d,h}$ , as taxas de convergência lineares características do método de Euler implícito foram obtidas.

Tabela 6.1: Resultados problema difusivo em malhas de quadrados, convergência espacial. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{C}_1$ .

$n$	$\ c - c_h\ $	Ordem	$\ \mathcal{J} - \mathcal{J}_h\ $	Ordem
4	1,4676e-01	-	1,3135e+00	-
16	3,3989e-02	2,110	3,2112e-01	2,032
64	8,2382e-03	2,045	7,7103e-02	2,058
256	2,0429e-03	2,012	1,8907e-02	2,028
1024	5,0954e-04	2,003	4,6400e-03	2,027
$n$	$\ \text{grad}(c - c_h)\ $	Ordem	$\ \text{div}(\mathcal{J} - \mathcal{J}_h)\ $	Ordem
4	1,0251e+00	-	1,1835e+00	-
16	4,9644e-01	1,046	3,8622e-01	1,616
64	2,4606e-01	1,013	9,7267e-02	1,989
256	1,2271e-01	1,004	2,4624e-02	1,982
1024	6,1313e-02	1,001	6,2371e-03	1,981

Tabela 6.2: Resultados problema difusivo em malhas de quadrados, convergência espacial. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{J}_2 \times \mathcal{C}_2$ .

$n$	$\ c - c_h\ $	Ordem	$\ \mathcal{J} - \mathcal{J}_h\ $	Ordem
4	1,9037e-02	-	1,8532e-01	-
16	2,8522e-03	2,739	3,5192e-02	2,397
64	3,7653e-04	2,921	6,5741e-03	2,420
256	4,8023e-05	2,971	1,1990e-03	2,455
1024	8,8368e-06	2,442	2,1844e-04	2,457
$n$	$\ \text{grad}(c - c_h)\ $	Ordem	$\ \text{div}(\mathcal{J} - \mathcal{J}_h)\ $	Ordem
4	1,7060e-01	-	4,4689e-01	-
16	4,0456e-02	2,076	4,7689e-02	3,228
64	9,9567e-03	2,023	2,7897e-03	4,095
256	2,4804e-03	2,005	4,8274e-04	2,531
1024	6,2026e-04	2,000	4,4256e-04	0,125

Tabela 6.3: Resultados problema difusivo em malhas de quadrados, convergência temporal. Erros na norma  $L^2(\Omega)$  e ordens de convergência obtidos pela formulação incondicionalmente estável, com os subespaços de aproximação  $\mathcal{J}_2 \times \mathcal{C}_2$ .

$\Delta t$	$\ c - c_h\ $	Ordem	$\ \dot{\mathcal{J}} - \dot{\mathcal{J}}_h\ $	Ordem
1,0000	5,0367e-02	-	1,5156e-01	-
0,5000	2,5373e-02	0,989	7,5254e-02	1,010
0,2500	1,2528e-02	1,018	3,6917e-02	1,027
0,1250	6,1648e-03	1,023	1,8122e-02	1,027
0,0625	3,0465e-03	1,017	8,9486e-03	1,018
	$\ \text{grad}(c - c_h)\ $		$\ \text{div}(\dot{\mathcal{J}} - \dot{\mathcal{J}}_h)\ $	
1,0000	1,34851e-01	-	5,45263e-01	-
0,5000	6,54405e-02	1,043	2,49492e-01	1,128
0,2500	3,15978e-02	1,050	1,17474e-01	1,087
0,1250	1,53893e-02	1,038	5,66654e-02	1,052
0,0625	7,58128e-03	1,021	2,77863e-02	1,028



## 6.4 Método de Galerkin Descontínuo o Problema Advectivo

Os métodos de Galerkin Descontínuo são uma classe de métodos de elementos finitos na qual as funções de aproximação podem ser descontínuas entre elementos vizinhos, sendo especialmente interessantes na resolução de problemas hiperbólicos, onde o Método de Galerkin clássico não produz bons resultados [27, 52, 36]. Nesta seção, descrevemos brevemente o método de Galerkin Descontínuo proposto em [37] para a resolução de problemas com advecção dominante. Este método é baseado na reconstrução explícita do gradiente para a obtenção de ordem mais alta no espaço combinada com o uso de esquemas de Runge-Kutta para a resolução do sistema de EDOs resultante da discretização espacial, sendo conhecido como RKDG (do inglês, *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin*). Este esquema foi utilizado em [53] para a resolução do transporte advectivo em no contexto de escoamento em meios poro-elásticos.

### 6.4.1 O Método RKDG

Segundo [37], a construção de um método RKDG se dá a partir de três passos: (i) a discretização espacial pelo método de Galerkin Descontínuo, (ii) a discretização no tempo por um método de Runge-Kutta e (iii) o emprego de projeções tais como o uso de limitadores de inclinação.

No primeiro passo, uma solução aproximada descontínua  $c_h$  para a Equação (6.13) é procurada de forma que sua restrição a um elemento  $K \in \mathcal{T}_h$  pertença a um espaço de dimensão finita  $\mathcal{C}_h(K)$ , tipicamente um espaço de polinômios. Esta solução é definida pela imposição de que para todo  $v_h \in \mathcal{C}_h(K)$ ,

$$\left(\phi \frac{\partial c_h}{\partial t}, v_h\right)_K - (\mathbf{u} c_h, \text{grad } v_h)_K + \int_{\partial K} \hat{\mathbf{j}}_a(c_h) \cdot \mathbf{n} v_h d\Gamma = 0 \quad (6.16)$$

onde  $\hat{\mathbf{j}}_a(c_h)$  denota um fluxo numérico, como função de  $c_h$ . A estabilidade do método está diretamente relacionada à escolha deste fluxo numérico. Neste trabalho utilizamos uma função de fluxo do tipo *upwind* [83].

Uma vez que a aproximação é descontínua, a matriz de massa associada é bloco diagonal, podendo ser facilmente invertida. Com isso, a discretização conduz a um sistema de

equações diferenciais ordinárias na forma

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c}_h = L(\mathbf{c}_h). \quad (6.17)$$

Este sistema pode ser resolvido com o uso do seguinte método de Runge-Kutta-Explícito de  $n_{\text{est}}$  estágios:

1. Faça  $\mathbf{c}_h^{(0)} = \mathbf{c}_h^n$ ;
2. Para  $i = 1, \dots, n_{\text{est}}$  calcule as funções intermediárias:

$$\mathbf{c}_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} \mathbf{w}_h^{il} \quad (6.18)$$

com

$$\mathbf{w}_h^{il} = \mathbf{c}_h^{(l)} + \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} \Delta t^n L(\mathbf{c}_h^{(l)}) \quad (6.19)$$

3. Faça  $\mathbf{c}_h^{n+1} = \mathbf{c}_h^{n_{\text{est}}}$ .

Por fim, um operador de projeção não-linear  $\Lambda_h$  deve ser escolhido de forma que se  $\mathbf{c}_h^{(l)} = \Pi_h \mathbf{v}_h$  para alguma função  $\mathbf{v}_h$ , então o mapeamento  $\mathbf{c}_h^{(l)} \mapsto \mathbf{w}_h^{(il)}$  é estável, isto é,  $|\mathbf{w}_h^{(il)}| \leq |\mathbf{c}_h^{(l)}|$ . Com isso o algoritmo de evolução fica escrito como:

1. Faça  $\mathbf{c}_h^{(0)} = \mathbf{c}_h^n$ ;
2. Para  $i = 1, \dots, n_{\text{est}}$  calcule as funções intermediárias:

$$\mathbf{c}_h^{(i)} = \Lambda_h \left( \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} \mathbf{w}_h^{il} \right)$$

com

$$\mathbf{w}_h^{il} = \mathbf{c}_h^{(l)} + \frac{\beta_{il}}{\alpha_{il}} \Delta t^n L(\mathbf{c}_h^{(l)})$$

3. Faça  $\mathbf{c}_h^{n+1} = \mathbf{c}_h^{n_{\text{est}}}$ .

### 6.4.2 A Formulação Semidiscreta

Seja o espaço  $C_h^p$  tal que

$$C_h^p := \left\{ c_h \in L^2(\Omega_h) \mid c_h|_K \in P_p(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (6.20)$$

com

$$P_p(K) := \left\{ \phi \mid \phi = \sum_{i+j=0}^p a_{i,j} x^i y^j, (x,y) \in K \right\}. \quad (6.21)$$

A partir de uma malha de arestas  $\mathcal{A}_h$  (Definição 2.7) e da formulação variacional local (6.16), como primeira opção para obter uma formulação estável do problema advectivo é definido sobre cada aresta  $E_{12} \in \mathcal{A}_h^i$  o fluxo numérico monótono  $\hat{\mathbf{j}}_a^E$  do tipo *upwind*

$$\hat{\mathbf{j}}_a^E(c_h) := \begin{cases} \mathbf{u} c_h^1 & \text{se } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^1 \geq 0, \\ \mathbf{u} c_h^2 & \text{se } \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}^1 < 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

A ideia desta escolha particular é obter a informação necessária para o cálculo da variável  $c_h$  ao procurar na direção da qual vem a informação [27]. Outros exemplos de funções de fluxo numéricos largamente empregadas na literatura são o Fluxo de Godunov, o Fluxo Engquist-Osher e o Fluxo de Lax-Frederichs [83, 69].

Sendo assim, a formulação semidiscreta do problema advectivo torna-se: encontrar  $c_h \in C_h^p$  tal que,

$$a_h(c_h, v_h) + b_h^u(c_h, v_h) = F_h(v_h), \quad \forall v_h \in C_h^p, \quad (6.23)$$

com

$$a_h(c_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \left( \phi \frac{\partial c_h}{\partial t}, v_h \right)_K - (\mathbf{u} c_h, \text{grad } v_h)_K \right\}, \quad (6.24)$$

$$b_h(c_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \partial K} \int_E \hat{\mathbf{j}}_a^E \cdot \mathbf{n} v_h d\Gamma, \quad F_h(v_h) = - \sum_{E \in \mathcal{A}_h^b \cap \Gamma^-} \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c^* v_h d\Gamma. \quad (6.25)$$

A construção da solução do problema anterior é baseada na hipóteses de separação

de variáveis e que conduz a um sistema de EDO's. A solução aproximada  $c_h$  restrito a um elemento  $K$  é construída em termos das funções polinomiais locais dependentes apenas das variáveis espaciais e de coeficientes locais dependentes do tempo. Assim, sendo  $N := \dim\{P_p(K)\}$ , se para cada elemento  $K$  é denotado por  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  a base de funções definida para  $P_p(K)$  e por  $\{c_i\}_{i=1}^N$  os coeficientes dependentes do tempo  $t$ , a solução local  $c_h$  restrita ao elemento  $K$  é escrita como,

$$c_h(\mathbf{x}, t)|_K = \sum_{i=0}^N c_i(t) \phi_i(\mathbf{x}). \quad (6.26)$$

Desta forma, a formulação semidiscreta do problema advectivo é reescrita como,

$$\mathbf{A}_h \frac{d\mathbf{c}}{dt} + \mathbf{B}_h \mathbf{c} = \mathbf{F}_h, \quad (6.27)$$

onde  $\mathbf{c} = \{c^K\}$  é um vetor que contém as incógnitas globais, construído a partir das incógnitas  $c^K = \{c_i(t)\}$  para cada elemento  $K$ , e as matrizes são dadas por

$$\mathbf{A}_h = \text{diag}\{a^K\}, \quad a_{ij}^K = \sum_{i,j=0}^N (\phi_i \phi_j, \phi_j)_K, \quad (6.28)$$

$$\mathbf{B}_h = \{b_{ij}^K\}, \quad b_{ij}^K = \sum_{E \in \partial K} \left[ \int_E \hat{\mathbf{J}}_a^E(\phi_i) \cdot \mathbf{n} \phi_j d\Gamma \right] - \sum_{i,j=0}^N (\mathbf{u} \phi_i, \text{grad} \phi_j)_K, \quad (6.29)$$

com o vetor de carga escrito como

$$\mathbf{F}_h = \text{block}\{f^K\}, \quad f_j^K = - \sum_{E \in \mathcal{A}_h^b \cap \Gamma^-} \int_E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} c^* \phi_j d\Gamma. \quad (6.30)$$

A matriz  $\mathbf{A}_h$  é inversível por blocos pois suas entradas  $a_{ij}^K$  são produtos internos do espaço  $L^2(\Omega_h)$ . Assim, nosso sistema de EDO's pode ser escrito como:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{c} = L(\mathbf{c}) \quad \text{onde} \quad L(\mathbf{c}) = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{F}_h - \mathbf{B}_h \mathbf{c}). \quad (6.31)$$

O sistema de equações ordinárias junto com um vetor  $\mathbf{c}_0$  que agrupa os coeficientes

obtidos pela projeção ortogonal da condição inicial do problema advectivo no subespaço  $\mathcal{C}_h^p$ , define um problema de evolução temporal que é resolvido através de um esquema explícito de Runge-Kutta de múltiplos estágios. Assim, considerando  $n_{est} = 2$  nas Equações (6.18)-(6.19), o método de Runge-Kutta para resolver o problema temporal de EDO's é obtido considerando os coeficientes [37],  $\beta$  e  $\alpha$  como

$$\alpha_{1,0} = 1, \beta_{1,0} = 1 \quad \text{no primeiro estágio,}$$

$$\alpha_{2,0} = \frac{1}{2}, \beta_{2,0} = 0, \alpha_{2,1} = \frac{1}{2}, \beta_{2,1} = 1 \quad \text{no segundo estágio.}$$

O método de Galerkin Descontínuo utilizando espaços de aproximação de grau  $p = 1$  são instáveis e apresentam soluções fisicamente inadmissíveis, como é descrito no Teorema de Godunov [69], além disso, o número de graus de liberdade envolvidos no cálculo da solução  $c_h$  usando um espaço  $P_1(K)$  é maior referente à solução equivalente obtida através de  $P_0(K)$ . A seguir apresentamos uma estratégia de reconstrução a partir do espaço  $P_0(K)$ , que conduz a soluções mais precisas  $c_h$ .

### 6.4.3 Reconstrução Linear do Gradiente

A ideia do processo de reconstrução consiste em aproximar uma solução constante por partes por uma função linear por partes para cada elemento  $K$ , de modo de obter um esquema de segunda ordem em precisão. Usando o procedimento formulado em [53] e [63], seja  $c_h$  a solução restrita ao elemento  $K$ , obtida usando um método de Galerkin Descontínuo de grau zero com

$$\bar{c}_h := \frac{1}{\text{Vol}(K)} \int_K c_h d\mathbf{x} \quad \text{onde} \quad \text{Vol}(K) := \int_K d\mathbf{x}. \quad (6.32)$$

É definida uma reconstrução linear por partes  $c_L$  de  $c_h$  como,

$$c_L := \bar{c}_h + \mathbf{g}_K \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K), \quad (6.33)$$

onde  $\mathbf{g}_K$  é um vetor da forma  $\mathbf{g}_K = (g_x^K, g_y^K)$  e  $\mathbf{x}_K = (x_K, y_K)$  é o centroide do elemento  $K$  dada

por

$$x_K = \frac{1}{\text{Vol}(K)} \int_K x d\mathbf{x} \quad y_K = \frac{1}{\text{Vol}(K)} \int_K y d\mathbf{x}. \quad (6.34)$$

O processo para obter  $\mathbf{g}_K$  começa ao considerar uma malha de elementos  $\mathcal{T}_h$  tal que, para cada elemento  $K \in \mathcal{T}_h$

- $N(K)$ , é o conjunto formado pelos índices dos elementos vizinhos do elemento  $K$ . Consideramos os elementos que compartilham arestas e nós simultaneamente.
- $n := \dim N(K)$ , número de elementos que compõem  $N(K)$ .
- $\mathcal{V}(K)$ , conjunto de índices que agrupam os elementos vizinhos que compartilham vértices.
- $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ , é o baricentro dos elementos vizinhos  $N(K)$ .
- $\bar{c}_h^i$ , representa a média celular no  $i$ -ésimo vizinho do elemento  $K$ , com  $i \in N(K)$ .
- $\Gamma_K^j$ , representam os pontos médios de cada aresta do elemento  $K$ .

A ideia consiste calcular o vetor  $\mathbf{g}_K$  de forma que a solução local  $c_L$  também leve em conta as soluções  $c_h$  dos elemento vizinhos. Sendo assim, obtém-se o sistema linear sobre-determinado:

$$\bar{c}_h^i - \bar{c}_h = \mathbf{g}_K \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_K) \quad \forall i \in N(K). \quad (6.35)$$

A Equação (6.35) caracteriza um sistema retangular com  $n$  equações sobre as variáveis  $g_x^K$  e  $g_y^K$ . Geometricamente o sistema gerado pode ser interpretado como a busca pelos valor  $g_x^K$  e  $g_y^K$  que minimizam a diferença  $|c_L(\mathbf{x}_i) - \bar{c}_h^i|^2$ , para cada  $i \in N(K)$ , [63]. O sistema pode ser resolvido no sentido de mínimos quadrados ponderados, a partir da multiplicação de cada equação por pesos  $w_i$ , [53], para penalizar a distância entre os baricentros vizinhos e o baricentro de  $K$ , dada por

$$w_i := \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m|^{-d}}{\sum_{k=1}^{N(K)} |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m|^{-d}}, \quad (6.36)$$

onde  $\mathbf{x}_m$  representam a posição do vértice do elemento  $K$  mais próximo ao baricentro  $\mathbf{x}_K$ . No caso de  $d = 0$  se tem o clássico método de quadrados mínimos mas o valor de  $d = 1$  ou  $2$  pode depender da distorção da malha ou da razão de aspecto (*aspect ratio*) dos elementos: quanto mais distorcida for a malha maior será o valor de  $d$ , [53].

Logo, usando os pesos  $\{w_i\}$  e considerando uma troca de notação de  $\Delta x_i = x_i - x_m$  e  $\Delta y_i = y_i - y_m$  com  $i = 1, \dots, N(K)$  postula-se o problema de quadrados mínimos ponderados

$$\begin{bmatrix} w_1 \Delta x_1 & w_1 \Delta y_1 \\ w_2 \Delta x_1 & w_1 \Delta y_2 \\ \vdots & \vdots \\ w_2 \Delta x_{N(K)} & w_1 \Delta y_{N(K)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x^K \\ g_y^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 (\bar{c}_h^1 - \bar{c}_h) \\ w_2 (\bar{c}_h^2 - \bar{c}_h) \\ \vdots \\ w_2 (\bar{c}_h^{N(K)} - \bar{c}_h) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

que pode ser resolvido via equações normais através do método Householder, [60].

### Limitadores de Inclinação

A nova solução linear restrita a cada elemento  $K$ ,  $c_L$ , não necessariamente satisfaz as condições de monotonicidade necessarias em esquemas formulados para problemas de transporte linear [15]. Por isso, a formulação 6.33 pode ser reformulada na forma

$$\bar{c}_L := \bar{c}_h + \beta_K \mathbf{g}_K \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_K), \quad (6.38)$$

onde  $\beta_K$  representa um limitador a ser calculado e de valor no intervalo  $[0, 1]$ . Empregando as definições de  $\bar{c}_h^{\max}$  e  $\bar{c}_h^{\min}$  em [53] e [63],

$$\bar{c}_h^{\max} := \max_{i \in N(K)} \{\bar{c}_h, \bar{c}_h^i\} \quad , \quad \bar{c}_h^{\min} := \min_{i \in N(K)} \{\bar{c}_h, \bar{c}_h^i\} \quad (6.39)$$

o limitador da pendente  $\beta_K$  se define como,

$$\beta_K = \min_{\forall j \in \{\mathcal{V}(K), \Gamma(K)\}} \begin{cases} \min \left\{ 1, \frac{\bar{c}_h^{\max} - \bar{c}_h}{c_L(\mathbf{x}_j) - \bar{c}_h} \right\} & , \quad \text{se } c_L(\mathbf{x}_j) > \bar{c}_h \\ \min \left\{ 1, \frac{\bar{c}_h^{\min} - \bar{c}_h}{c_L(\mathbf{x}_j) - \bar{c}_h} \right\} & , \quad \text{se } c_L(\mathbf{x}_j) < \bar{c}_h \\ 1 & , \quad \text{se } c_L(\mathbf{x}_j) = \bar{c}_h. \end{cases} \quad (6.40)$$

Onde  $\{\mathcal{V}(K), \Gamma(K)\}$  é o conjunto formado pelos vértices de  $K$  e os pontos médios das arestas do elemento. Deste modo, a reconstrução linear do gradiente (6.33) é estável com o uso do limitador de inclinação (6.40). De acordo os estudos apresentados por [15], para o caso não linear da equação do transporte, (6.40) pode gerar oscilações espúrias na solução reconstruída devido a sua não diferenciabilidade. Sendo assim, uma forma *suave* de (6.40) é obtida ao substituir  $\min\{1, x\}$  pela função [53]

$$l(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x + 2}, \quad (6.41)$$

Outras diversas opções de funções suaves para este tipo de problemas são estudadas com regularidade em [15].

#### 6.4.4 Exemplo Numérico

Para estudar o comportamento do esquema de reconstrução, consideramos um problema de transporte linear definido em  $\Omega = [0, 1]$ , com  $\phi = 1$ ,  $\mathbf{u} = (1, 0)$ , condição de contorno  $c_h(0, t) = 1$  para todo  $t > 0$  e condição inicial  $c_h(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Os resultados obtidos são apresentados na Figura 6.1, onde são comparadas as aproximações obtidas através do método de Galerkin Descontínuo com o uso de aproximações em  $P_0(K)$ , sem reconstrução, com as obtidas pelo emprego do método *RKDG* com reconstrução do gradiente. Para obter um esquema explícito estável na integração temporal, foi tomado como parâmetro de controle o número de Courant  $C_r$  tal que,

$$\mathbf{u} \frac{h}{\Delta t} \leq C_r.$$



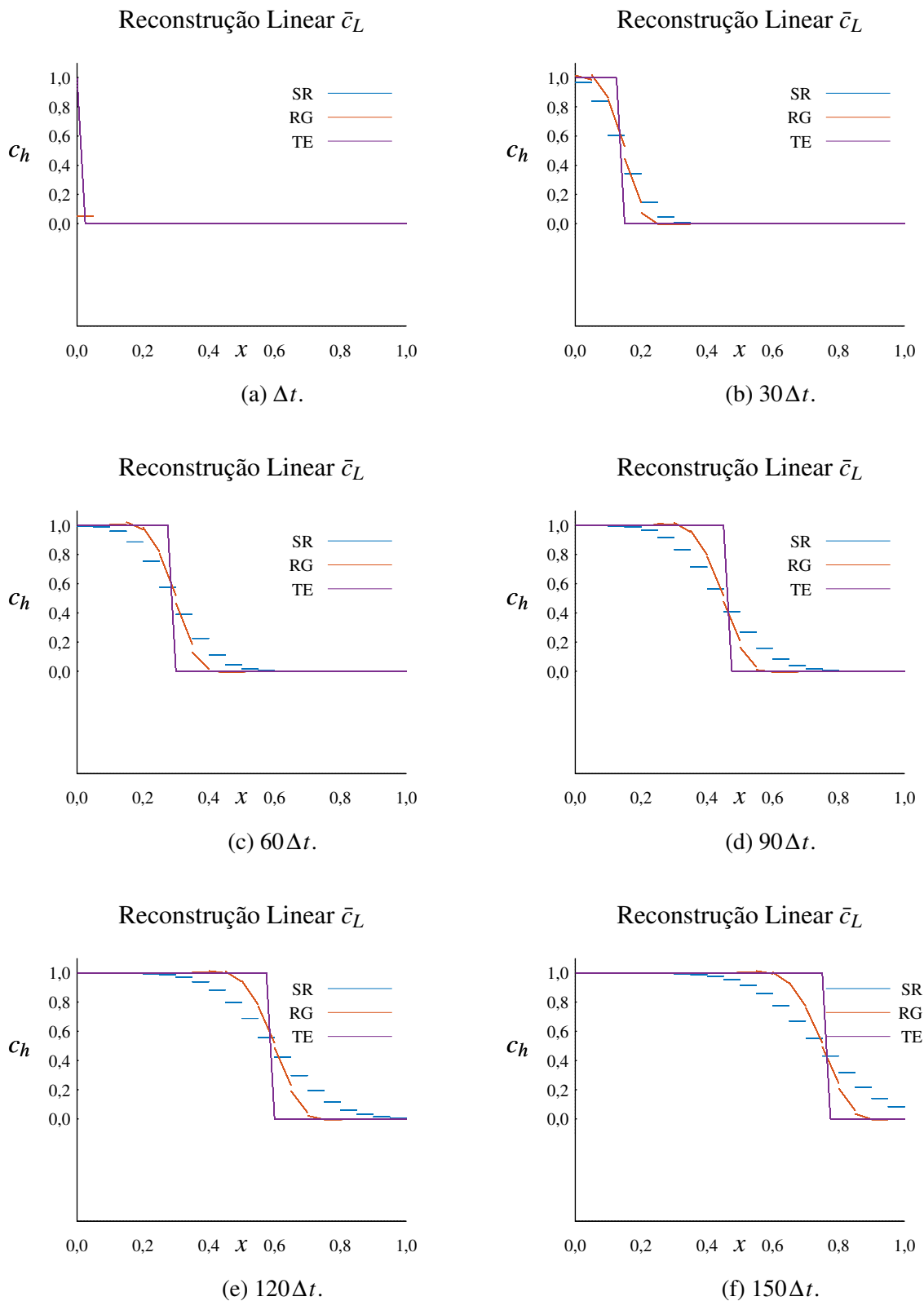


Figura 6.1: Problema de Transporte  $1D$ . Resultados numéricos obtidos para diferentes tempos  $t$  do problema de advectivo usando o método de reconstrução linear (RG) e o método sem reconstrução (SR), comparados com a solução analítica (TE). Passo de tempo satisfazendo a condição  $C_r = 1/2$ ,  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-3}$  para uma malha de 20 elementos.

## 6.5 Simulações do Transporte Advectivo-Difusivo

Nesta seção é apresentado um conjunto de testes numéricos relativos à solução do problema de Advecção-Difusão usando o esquema de separação de operadores como foi apresentado na Seção 6.2, combinado ao emprego do método de elementos finitos hierárquico para a equação de difusão e ao emprego do método RGDG para a equação do transporte advectivo.

### 6.5.1 Problema com Barreiras

Definimos um problema de advecção-difusão sobre um domínio  $\Omega$  quadrado unitário (Figura 6.2), com um tensor de difusão-dispersão  $\mathbf{D}$  com constantes características  $\alpha_d = 10^{-6}$ ,  $\alpha_l = 0$  e  $\alpha_t = 0$ , condição inicial  $c(\mathbf{x}, 0) = 0$  e condição de contorno

$$c(\mathbf{x}, t) = 1 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad \text{e} \quad \frac{\partial c(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus \Gamma_1 \quad (6.42)$$

para todo  $t > 0$  sendo a porosidade do meio  $\phi = 1$ .

Definimos para o cálculo do fluxo  $\mathbf{u}$  do problema advectivo, um problema de Darcy como,

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \quad (6.43)$$

com

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \text{grad } p \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6.44)$$

onde  $\mathbf{K}$  descreve a permeabilidade do meio poroso na forma,

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{I}, \quad \text{com} \quad \alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 10^{-6} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_1, \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_2. \end{cases} \quad (6.45)$$

e condições de contorno,

$$p = 1 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad p = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \quad (6.46)$$

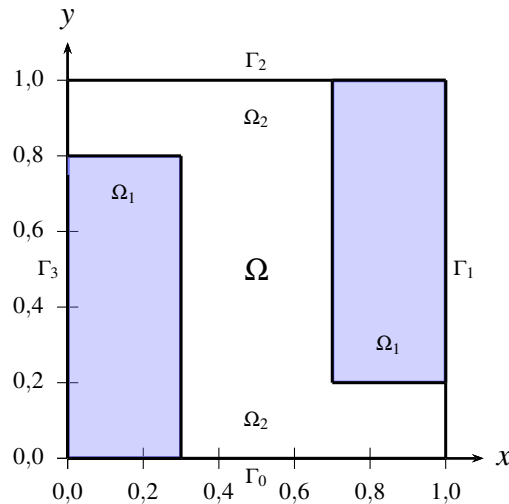


Figura 6.2: Primeira configuração de  $\Omega$  para o problema de advecção-difusão.

Usando uma malha composta por  $50 \times 50$  elementos quadrados uniformes e uma combinação de espaços  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  para o cálculo das variáveis do fluxo e da pressão, os resultados do problema de Darcy são apresentados nas Figuras 6.3b, 6.4a e 6.4b. Empregando o resultado do cálculo do  $\mathbf{u}$ , aplicado o método de separação de operadores para o problema advecção-difusão, os resultados numéricos obtidos são apresentadas nas Figuras 6.5 e 6.6. Para o problema difusivo, foi empregada uma combinação de espaços  $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{C}_1$  e um passo de tempo em função de considerar a condição  $CFL$  dada por

$$\Delta t \leq \frac{1}{3} \frac{h\phi}{\sqrt{\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2}}, \quad (6.47)$$

na discretização do problema advectivo ao tomar passos  $\Delta t$  da ordem  $10^{-2}$ , [83]. Os resultados indicam alta precisão tanto para o problema de Darcy quanto para o problema do transporte. No caso do problema do transporte uma pequena oscilação na ordem de 1% do valor da concentração é verificada, contudo a estabilidade global do problema não é afetada[63].

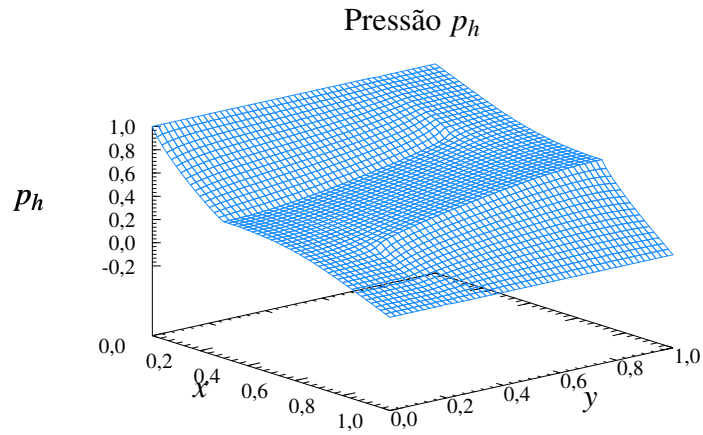
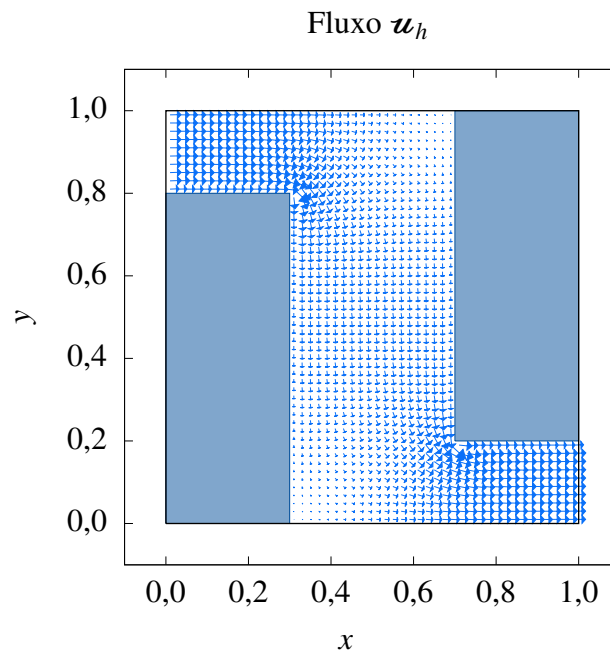
(a) Distribuição da pressão  $p_h$ .(b) Distribuição do fluxo  $u_h$ .

Figura 6.3: Resultados Problema de Barreras. Resultados Obtidos para o problema de Darcy, nas variáveis  $p(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  necessário no calculo do problema de advecção-difusão.

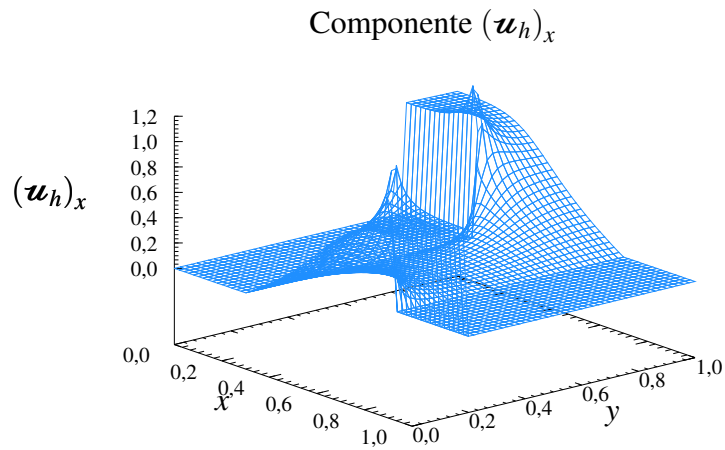
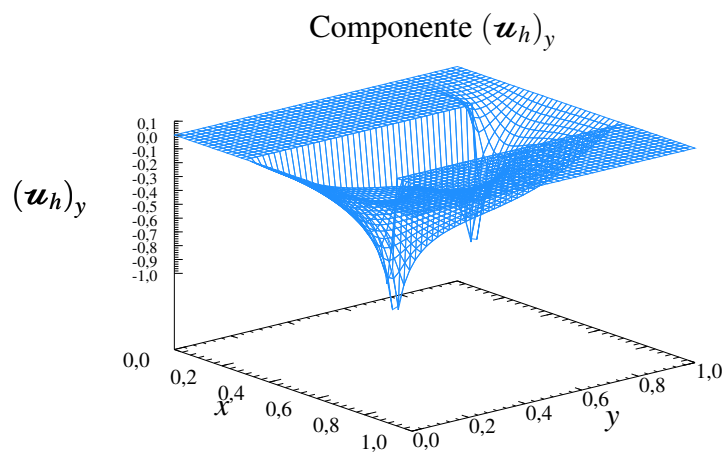
(a) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_x$  do fluxo.(b) Distribuição da componente  $(\mathbf{u}_h)_y$  do fluxo.

Figura 6.4: Resultados Problema de Barreras (Continuação). Resultados Obtidos para o problema de Darcy, nas variáveis  $p(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  necessário no calculo do problema de adveção-difusão.

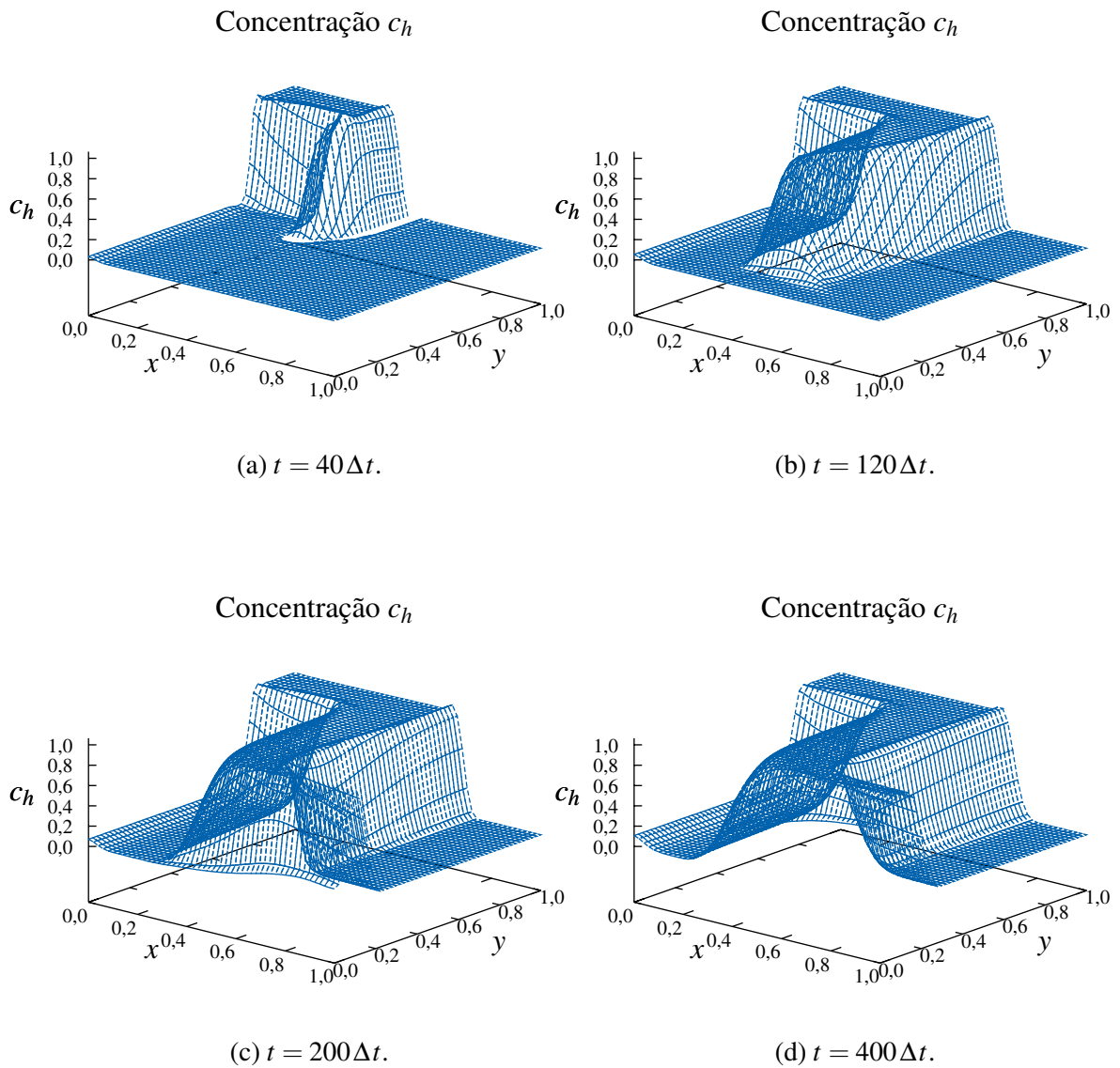


Figura 6.5: Resultados Problema de Barreras. Distribuição da variável concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  em diferentes valor de  $t$  do problema de adveção-difusão.

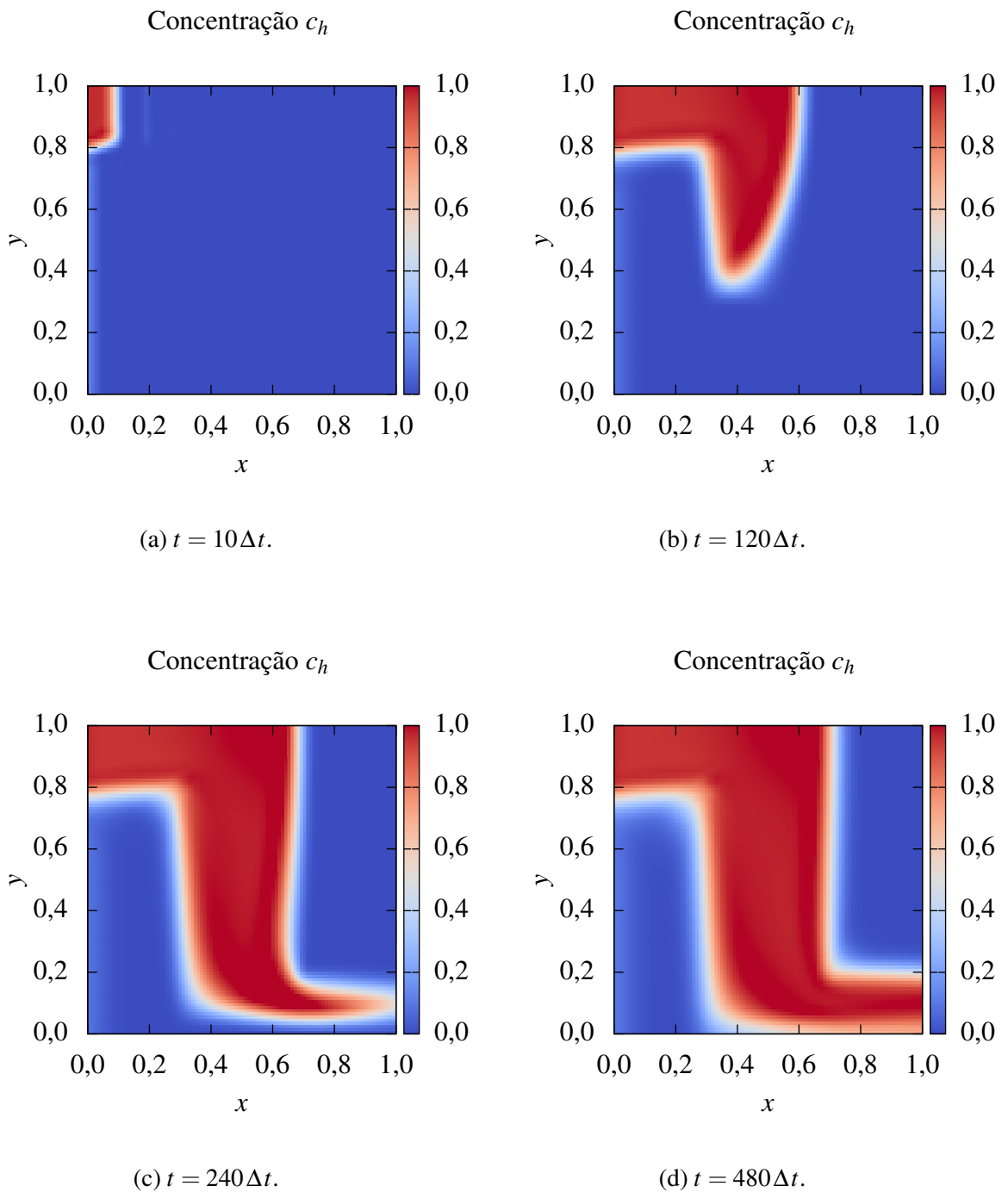


Figura 6.6: Resultados Problema de Barreras. Contorno da distribuição da variável concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  em diferentes valor de  $t$  do problema de advecção-difusão.

### 6.5.2 Problema do Tipo *Five-Spot*

Neste experimento numérico é considerado o problema do traçador passivo em um escoamento de injeção-produção do tipo *um quarto de five-spot*. O problema matemático consiste em resolver o problema de Darcy para a pressão e o fluxo em um domínio quadrado unitário com poço de injeção na origem  $(0,0)$  e poço de produção em  $(1,1)$ . Os poços de injeção e de produção, com magnitude são  $+1$  e  $-1$ , respectivamente, foram tratados como condição de fluxo prescrito [40].

Considerando a simetria do problema, as condições de contorno são de fluxo zero nos contornos para o problema de Darcy sem termo fonte com um tensor  $\mathbf{K}$  não homogêneo dado por,  $\mathbf{K} = 1,18 \cdot 10^{-5} \mathbf{I}$  se  $\mathbf{x} \in \Omega_2$  e  $\mathbf{K} = 10^1 \mathbf{I}$  se  $\mathbf{x} \in \Omega_1$ , usando como referência a Figura 6.7. Considere-se para o problema de advecção-difusão com condição inicial e de contorno,

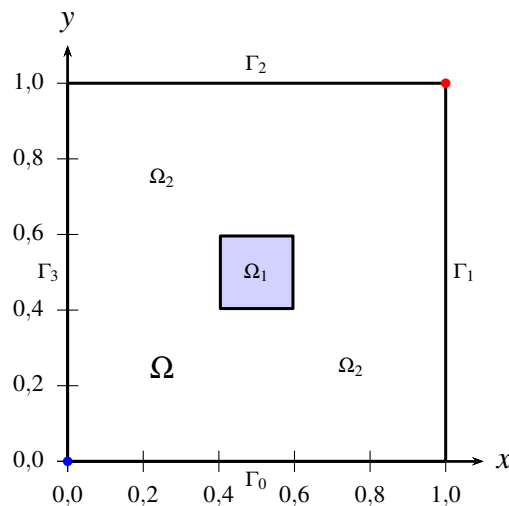


Figura 6.7: Configuração Problema do tipo *Five-Spot*.

$$c(\mathbf{x},0) = 0, \quad c(\mathbf{x},t) = 1 \quad \text{se } \mathbf{x} \in (0,0), \quad \frac{\partial c}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{se } \mathbf{x} \in \Gamma \setminus (0,0), \quad (6.48)$$

respectivamente, para todo  $t > 0$ .

Usando uma malha composta por  $50 \times 50$  elementos quadrados uniformes e uma combinação de espaços  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  para o cálculo das variáveis do fluxo e da pressão. No caso do problema difusivo foi aplicada uma combinação de espaços  $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{C}_1$  e para o problema advectivo foi empregado um esquema *RKDG* modificado com condição *CFL* satisfeita ao considerar  $\Delta t \leq 10^{-1}$ . Os resultados da aproximação são apresentados na Figura 6.8 .



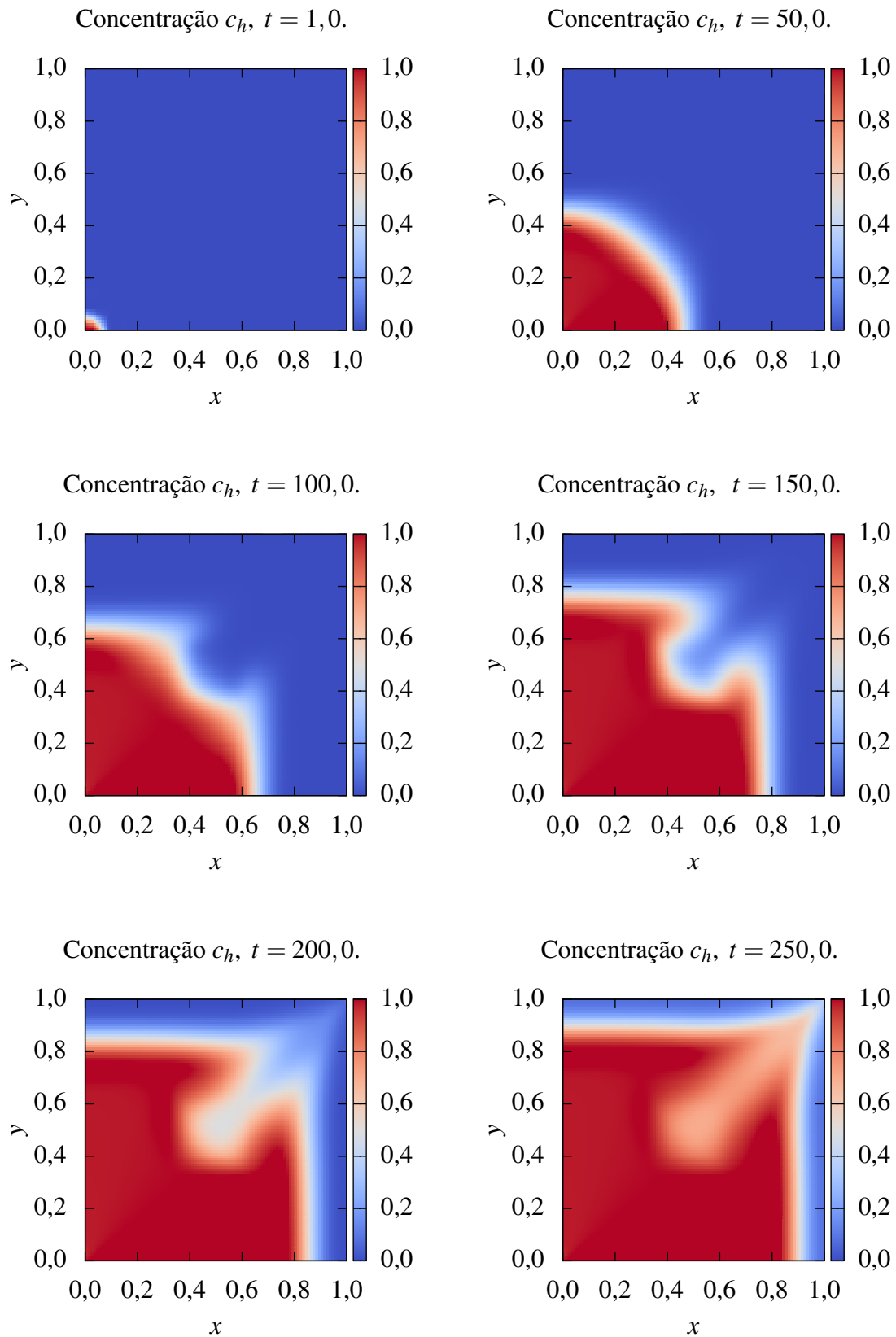


Figura 6.8: 1/4 *Five-Spot* . Resultados obtidos para o problema de configuração do tipo *um quarto de five-spot* (Figura 6.7) usando a formulação incondicionalmente estável no cálculo do fluxo de Darcy e uma esquema de passo fracionado no problema de advecção-difusão.

### 6.5.3 Problema do Traçador em um Meio Altamente Heterogêneo

Finalmente nos experimentos numéricos do problema de adveção-difusão, apresentamos os resultados obtidos para um problema do traçador passivo em um meio poroso altamente heterogêneo [33, 82, 31, 16, 32]. Seja um fluxo escoando em um meio poroso completamente saturado descrito a partir de um tensor de condutividade hidráulica  $\mathbf{K}$  tal que sua componente principal expõe uma distribuição como é apresentada na Figura 6.9: o meio é isotrópico mas heterogêneo.

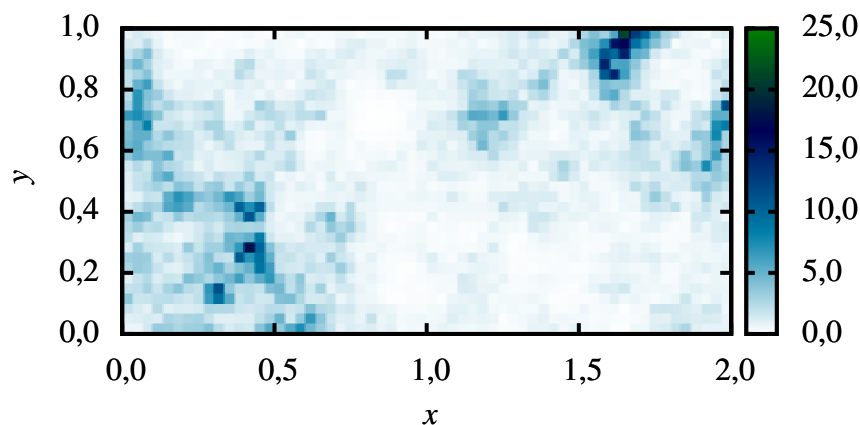


Figura 6.9: Distribuição da componente principal do tensor  $\mathbf{K}$  de condutividade hidráulica para um problema altamente heterogêneo [78].

As condições de contorno e iniciais para o problema, coincidem às usadas no problema de barreiras. Nas simulações foi usada uma malha de  $60 \times 60$  elementos quadrados, com uma configuração  $\mathcal{U}_2 \times \mathcal{P}_1$  no cálculo do fluxo de Darcy,  $\mathcal{J}_1 \times \mathcal{C}_1$  para o problema parabólico e uma reconstrução linear do gradiente no método RKDG modificado para o transporte.

Dois testes são realizados. No primeiro, a porosidade é homogênea  $\phi = 1$  (apenas a título de teste) e no segundo a porosidade  $\phi(\mathbf{x})$  é correlacionada com a distribuição de permeabilidade  $\mathbf{K}$  via a inversão da relação de Kozeny-Carman, como realizado na referência [78]. Os resultados para o primeiro teste, apresentados nas Figuras 6.10 e 6.11, e os resultados para o segundo teste, apresentados nas Figuras 6.12 e 6.13, indicam boa estabilidade e precisão das soluções numéricas obtidas pela metodologia proposta. Em ambos os casos foi adotado o passo de tempo  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$ .

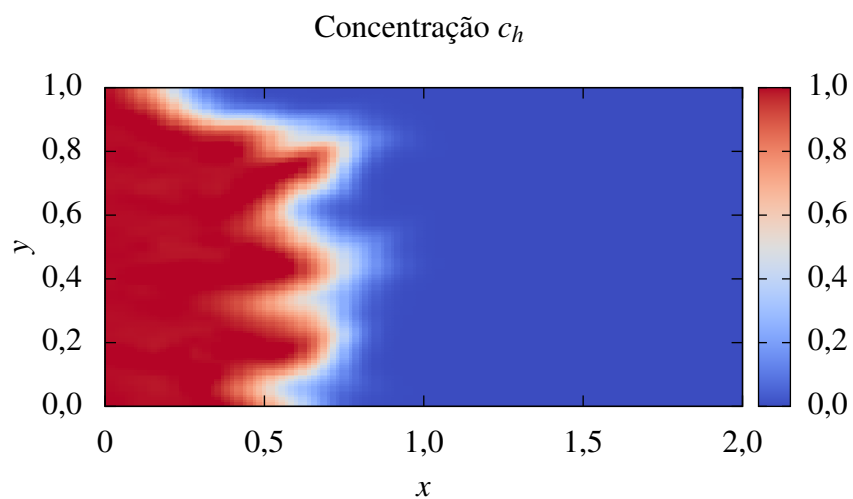
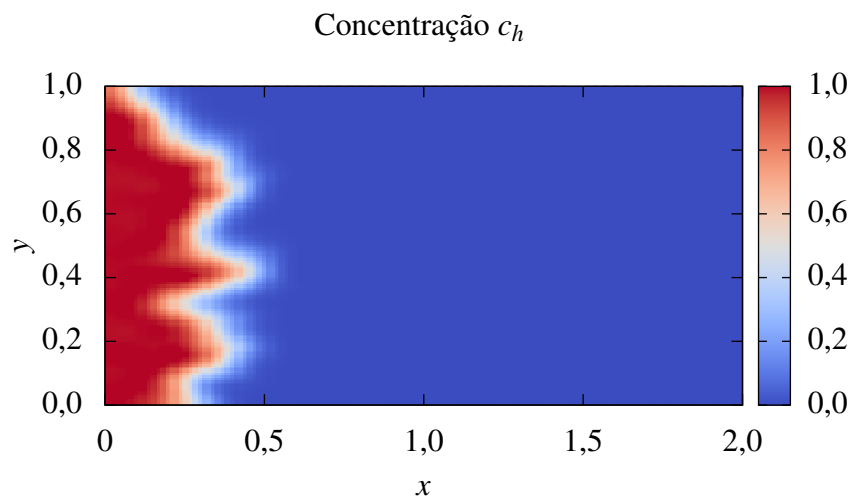
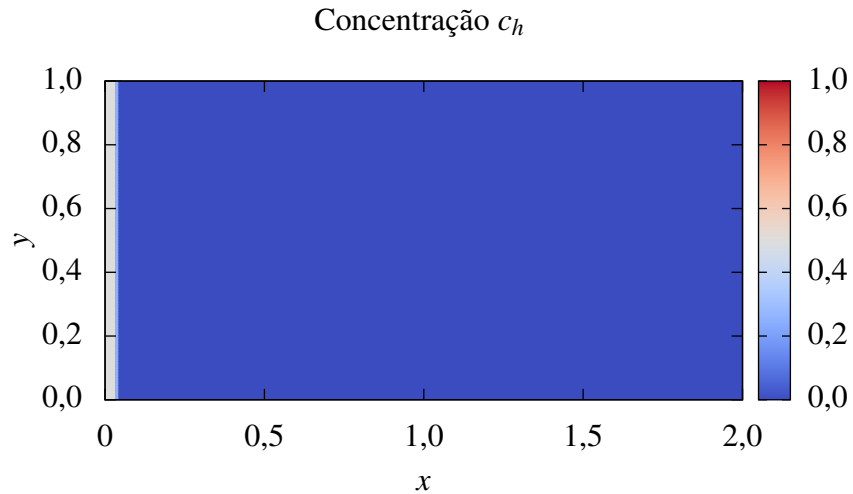


Figura 6.10: Resultados Meio Altamente Heterogêneo. Resultados obtidos para a variável de concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  para diferentes valores de  $t$  no problema do traçador em um meio altamente heterogêneo com porosidade homogênea.

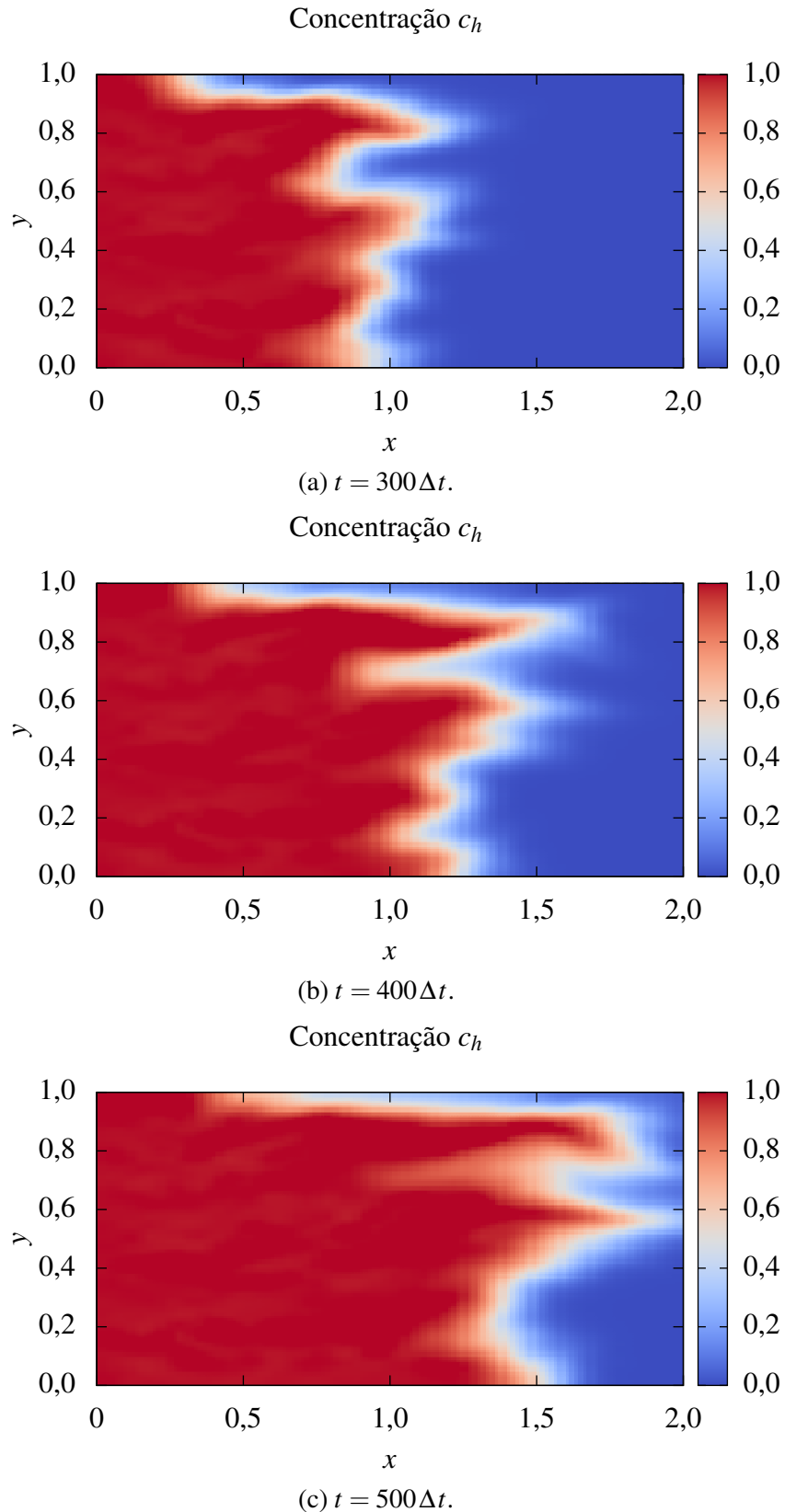


Figura 6.11: Resultados Meio Altamente Heterogêneo (Continuação). Resultados obtidos para a variável de concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  para diferentes valores de  $t$  no problema do traçador em um meio altamente heterogêneo com porosidade homogênea.

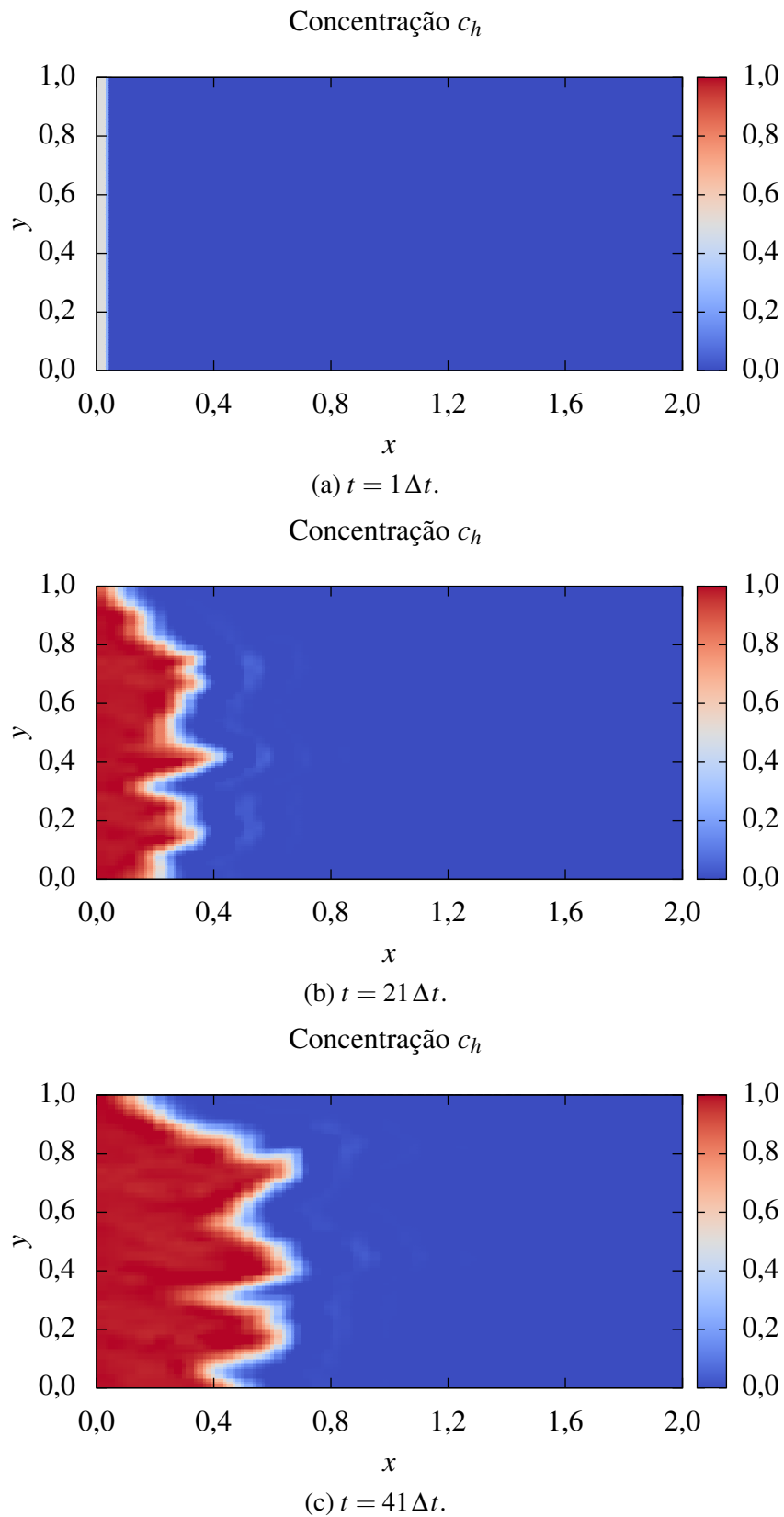


Figura 6.12: Resultados Meio Altamente Heterogêneo. Resultados obtidos para a variável de concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  para diferentes valores de  $t$  no problema do traçador num meio altamente heterogeneo. A porosidade apresenta uma correlação com a permeabilidade do meio via Kozeny-Carman.

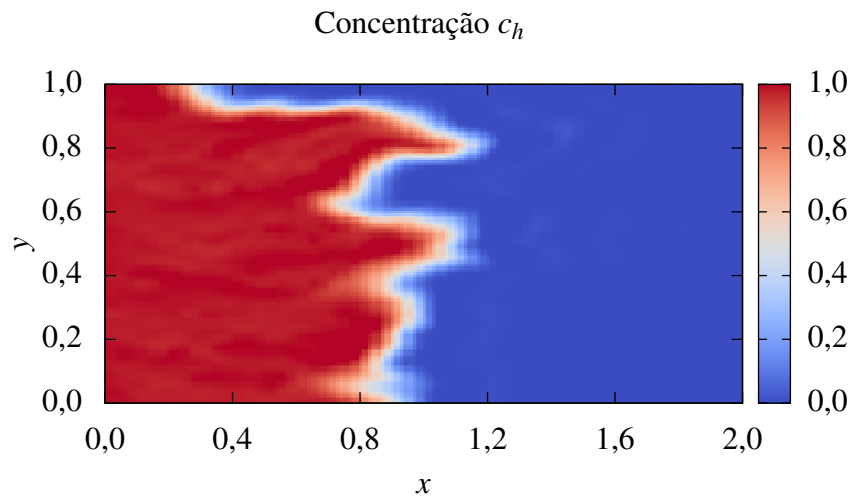
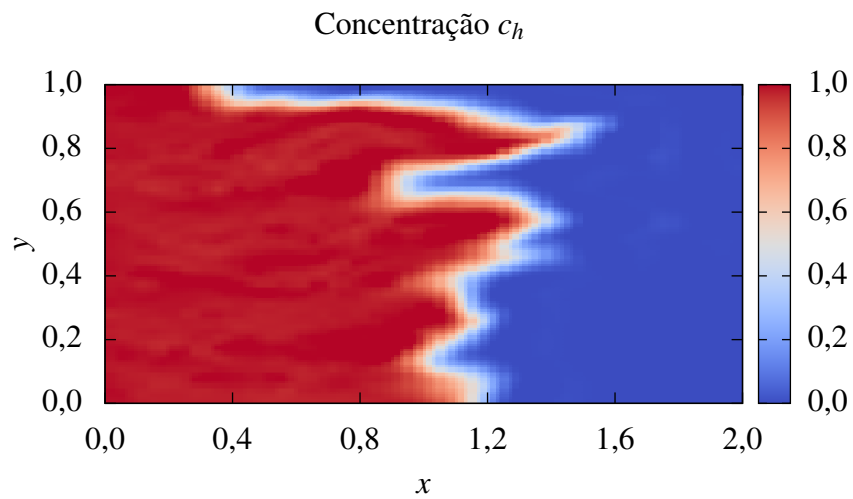
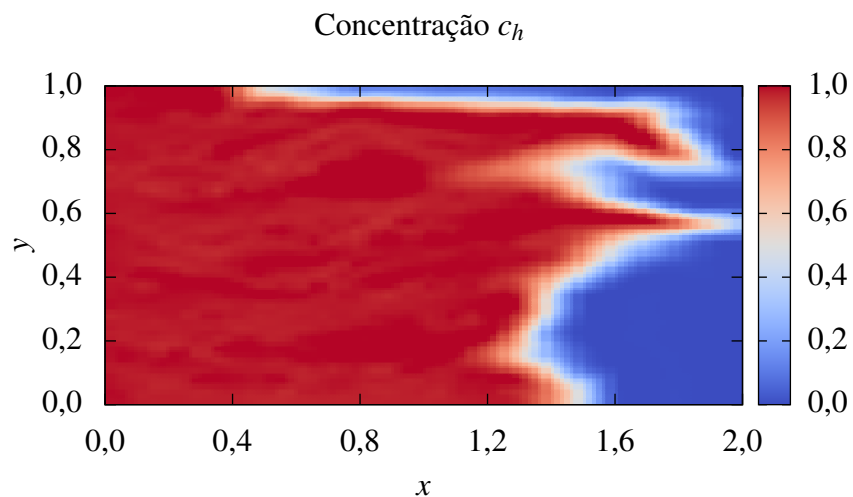
(a)  $t = 71 \Delta t$ .(b)  $t = 91 \Delta t$ .(c)  $t = 121 \Delta t$ .

Figura 6.13: Resultados Meio Altamente Heterogêneo (Continuação). Resultados obtidos para a variável de concentração  $c(\mathbf{x}, t)$  para diferentes valores de  $t$  no problema do traçador num meio altamente heterogeneo. A porosidade apresenta uma correlação com a permeabilidade do meio via Kozeny-Carman.

## Capítulo 7

### Conclusões

Nesta tese foi proposta uma metodologia de elementos finitos para resolver o problema de Darcy através de uma formulação incondicionalmente estável combinada com uma construção hierárquica de bases polinomiais conformes para os espaços  $H(\text{div}; \Omega)$  e  $H^1(\Omega)$ . Os resultados obtidos empregando a formulação incondicionalmente estável confirmaram a possibilidade de escolher graus de aproximação iguais para os subespaços do fluxo e da pressão, escolha não admissível no contexto de elementos finitos mistos clássicos. Para esta escolha particular de mesmo grau polinomial para os subespaços, foram obtidas taxas de convergência ótimas para a pressão, o fluxo e o divergente do fluxo na norma  $L^2(\Omega)$  e sub-ótimas no gradiente da pressão na norma  $L^2(\Omega)$  a partir do emprego de uma sequência de malhas afins quadradas. No caso de malhas não afins, os resultados para o divergente do fluxo apresentam consistência com os esperados a partir do emprego dos espaços de Raviart-Thomas para formulações mistas duais do problema misto dual, contudo o fluxo também passa a apresentar taxa de convergência sub-ótima em  $L^2(\Omega)$ .

A formulação incondicionalmente estável ainda permite o emprego de combinações distintas de aproximação para o fluxo e a pressão, resultando em aproximações estáveis com um menor erro de aproximação, comprovando os resultados das estimativas de erro *a priori*. Outras combinações de subespaços hierárquicos foram consideradas. Subespaços da forma  $\mathcal{U}_l \times \mathcal{P}_k$  apresentam estimativas de erro de ordem  $\min\{k, l\}$  sendo  $l$  o grau associado ao subespaço do fluxo e  $k$  o grau associado ao subespaço da pressão. Em particular, tais espaços podem ser

empregados em trabalhos futuros que busquem esquemas de segunda ordem para problemas parabólicos, empregando esquemas de segunda ordem na integração temporal.

Como aplicação direta do esquema proposto, foram implementados problemas onde é fundamental o cálculo preciso de um campo de velocidades do tipo Darcy. O esquema de separação de operadores do tipo de Godunov empregado para a resolução da equação do transporte advectivo-difusivo linear decompôs a equação original em dois problemas auxiliares: um problema parabólico, que foi resolvido com uma extensão da metodologia desenvolvida para o problema elíptico, e um problema hiperbólico que foi resolvido com um esquema de Galerkin Descontínuo de alta ordem, consistentes com a física do problema. Assim, a metodologia incondicionalmente estável proposta possui grande potencial na solução de problemas de maior complexidade em escoamentos de fluidos em meios porosos. Embora os resultados não foram apresentados no texto, um esquema de passo fracionário tipo *Strang*, também foi implementado empregando a formulação proposta com resultados numéricos próximos aos apresentados pelo esquema Godunov, mas com um maior custo computacional.

**Trabalhos Futuros.** Espera-se que os resultados obtidos nesta tese, além de oferecer um esquema alternativo para a resolução da formulação mista do problema de Darcy para a formulação mista dual, sejam utilizados como parte de uma metodologia para resolver problemas de maior complexidade. A seguir, apresentam-se os trabalhos e direcionamentos possíveis do trabalho desenvolvido.

#### Esquemas de Alta Ordem, Problemas Parabólicos

Como extensão da metodologia apresentada em esta Tese, é possível analisar problemas parabólicos como esquemas de alta ordem na integração temporal ao considerar esquemas incondicionalmente estáveis com bases hierárquicas na semidiscretização espacial.

#### Escoamento Bifásico em Meio Poroso

Escoamentos onde duas fases coexistem em um mesmo fluxo, são comuns em muitos processos industriais tais como plantas de produção e transporte de óleo e gás [33]. Para este tipo de escoamentos, modelados através de um sistema onde o problema do fluxo e do transporte são acoplados, o emprego da metodologia hierárquica de alta ordem pode ser interessante na busca de soluções precisas.



### Refinamento $h - p$

O refinamento  $h - p$  adaptativo é um dos métodos mais eficientes para aproximar equações diferenciais parciais por elementos finitos [48]. O principal motivo para que esta técnica não seja ainda muito difundida é a complexidade da sua implementação em um código de elementos finitos, assim, considerando as características das bases hierárquicas em  $H(\text{div}; \Omega)$  e  $H^1(\Omega)$  e seu emprego em uma formulação incondicionalmente estável, o refinamento  $h - p$  em um problema de advecção-difusão linear com um tensor de dispersão-difusão, pode ser considerado como uma extensão do esquema estudado.

# Referências Bibliográficas

- [1] Arbogast, T. and Correa, M. R. (2016). Two families of  $h(\text{div})$  mixed finite elements on quadrilaterals of minimal dimension. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 54(6):3332–3356.
- [2] Arbogast, T., Juntunen, M., Pool, J., and Wheeler, M. (2013). A discontinuous galerkin method for two-phase flow in a porous medium enforcing  $h(\text{div})$  velocity and continuous capillary pressure. *Computational Geosciences*, 17(6):1055–1078.
- [3] Arnold, D., Boffi, D., and Falk, R. (2005). Quadrilateral  $h(\mathbf{div})$  finite elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42(6):2429–2451.
- [4] Arnold, D., Boffi, D., and Richardson, M. (2002a). Approximation by quadrilateral finite elements. *Math. Comput.*, 71(239):909–922.
- [5] Arnold, D., Brezzi, F., Cockburn, B., and Marini, D. (2002b). Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5):1749–1779.
- [6] Arnold, D. N. (1982). An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(4):742–760.
- [7] Arnold, D. N. and Awanou, G. (2014). Finite element differential forms on cubical meshes. *Mathematics of Computation*, 83(288):1551–1570.
- [8] Arnold, D. N., Falk, R. S., and Winther, R. (2006). Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numerica*, 15:1–155.
- [9] Atkinson, K. and Han, W. (2010). *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*. Springer Science+Business Media, third edition.

- [10] Axelsson, O. and Barker, V. (1984). *Finite Element Solution of Boundary Value Problems, Theory and Applications*. Academic Press Inc.
- [11] Babuška, I. (1973). The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192.
- [12] Babuška, I., Baumann, C., and Oden, J. (1999). A discontinuous hp finite element method for diffusion problems: 1-d analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(9):103 – 122.
- [13] Babuška, I. and Aziz, A. (1972). Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. *The Mathematical Foundation of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, pages 3–363.
- [14] Babuška, I. and Szabo, I. (1991). *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons.
- [15] Barth, T. and Ohlberger, M. (2004). *Finite volume methods: foundation and analysis*.
- [16] Bear, J. (1972). *Dynamics of Fluids in Porous Media*.
- [17] Bochev, P. B. and Dohrmann, C. R. (2006). A computational study of stabilized, low-order  $c_0$  finite element approximations of darcy equations. *Computational Mechanics*, 38(4/5):323 – 333.
- [18] Boffi, D., Brezzi, F., and Fortin, M. (2013). *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer.
- [19] Braess, D. (2007). *Finite Elements, Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics*. Cambridge University Press.
- [20] Brenner, S. (2008). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer.
- [21] Brezzi, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *RAIRO Anal. Numer.*, 8(R-2):129–151.
- [22] Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L., and Süli, E. (2006). Stabilization mechanisms in discontinuous galerkin finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(25):3293 – 3310.
- [23] Brezzi, F., Douglas, J., and Marini, J. (1985). Two families of mixed finite elements for second order elliptic problem. *Numerish Mathematik*, 47:217–235.

- [24] Brezzi, F., Douglas, J. J., Fortin, M., and Marini, L. D. (1987). Efficient rectangular mixed finite elements in two and three space variables. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 21(4):581–604.
- [25] Brezzi, F., Fortin, M., and Marini, L. D. (1993). Mixed finite element methods with continuous stresses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 3(2):275–287.
- [26] Brezzi, F., Hughes, T. J. R., Marini, L. D., and Masud, A. (2005). Mixed discontinuous Galerkin methods for Darcy flow. *J. Sci. Comput.*, 22/23:119–145.
- [27] Brezzi, F., Marini, J., and Süli, E. (2004). Discontinuous galerkin methods for first-order hyperbolic problems. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 14(12):1893–1903.
- [28] Carey, G. and Oden, J. T. (1983). *Finite Elements, A Second Course. Volume II*. Prentice-Hall.
- [29] Carmo, E. and Vinicius Celani Duarte, A. (2002). New formulations and numerical analysis of discontinuous galerkin methods. 21.
- [30] Castro, D. A., Devloo, P. R., Farias, A. M., M., G. S., de Siqueira, D., and Durán, O. (2016). Three dimensional hierarchical mixed finite element approximations with enhanced primal variable accuracy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 306(Supplement C):479 – 502.
- [31] Chen, Z. (2005). *Finite element methods and their applications*.
- [32] Chen, Z. and Ewing, R. (1999). Mathematical analysis for reservoir models. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 30(2):431–453.
- [33] Chen, Z., Huan, G., and Ma, Y. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [34] Ciarlet, P. G. (2002). *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*, volume 40. Classics in Applied Mathematics.
- [35] Cockburn, B., Kanschat, G., Perugia, I., and Schötzau, D. (2001). Superconvergence of the

- local discontinuous galerkin method for elliptic problems on cartesian grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(1):264–285.
- [36] Cockburn, B., Karniadakis, G., and Shu, C.-W. (2000). *Discontinuous Galerkin Methods Theory, Computation and Applications*. Springer.
- [37] Cockburn, B. and Shu, C.-W. (2001). Runge–kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. *Journal of Scientific Computing*, 16(3):173–261.
- [38] Correa, M. R. (2006). *Métodos de Elementos Finitos Estabilizados para os Escoamentos de Darcy e de Stokes-Darcy Acoplados*. PhD thesis, LNCC.
- [39] Correa, M. R. and Loula, A. F. D. (2007). Stabilized velocity post-processings for darcy flow in heterogeneous porous media. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(6):461–489.
- [40] Correa, M. R. and Loula, A. F. D. (2008). Unconditionally stable mixed finite element methods for darcy flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:1525–1540.
- [41] Crouzeix, M. and Raviart, P.-A. (1973). Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary stokes equations i. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 7(R3):33–75.
- [42] Crumpton, P., Shaw, G., and Ware, A. (1995). Discretisation and multigrid solution of elliptic equations with mixed derivative terms and strongly discontinuous coefficients. *Journal of Computational Physics*, 116(2):343 – 358.
- [43] Darcy, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitume*. Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitume. Dalmont.
- [44] de Araújo Souza, M. R. (2015). *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes*

- Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. PhD thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO.
- [45] de Oliveira Quinelato, T. (2013). Formulações de elementos finitos mistas para problemas parabólicos lineares. Master’s thesis, LNCC, Petropolis, RJ.
- [46] Demkowicz, L. F. (2008). *Polynomial Exact Sequences and Projection-Based Interpolation with Application to Maxwell Equations*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [47] Devloo, P. R., Bravo, C. M., and Rylo, E. C. (2009). Systematic and generic construction of shape functions for p-adaptive meshes of multidimensional finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1716–1725.
- [48] Devloo, P. R. B., Durán, O., Gomes, S. M., and Shauer, N. (2017). Mixed finite element approximations based on 3d hp-adaptive curved meshes with two types of h(div)-conforming spaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. nme.5698.
- [49] Di Pietro, D. A. and Ern, A. (2012). *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Springer.
- [50] Durlofsky, L. J. (1994). Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to darcy velocity and related quantities. *Water Resources Research*, 30(4):965–973.
- [51] Elshebli, M. A. (2008). Discrete maximum principle for the finite element solution of linear non-stationary diffusion–reaction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 32(8):1530 – 1541.
- [52] Ern, A. and Guermond, J.-L. (2000). *Theory and Practice of Finite Elements*.
- [53] Farias, A. (2014). *Novas Formulações de Elementos Finitos e Simulações Multifísicas*. PhD thesis, Instituto de Matematica, Estatística e Computação Científica.
- [54] Farias, A. M., Devloo, P. R., Gomes, S. M., de Siqueira, D., and Castro, D. A. (2017). Two dimensional mixed finite element approximations for elliptic problems with enhanced accuracy for the potential and flux divergence. *Computers and Mathematics with Applications*.
- [55] Franca, L. (1987a). *New mixed finite-element methods*. PhD thesis, Stanford Univ., Stanford, CA.

- [56] Franca, L. P. (1987b). *New Mixed Finite Element Methods*. Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, USA.
- [57] Franca, L. P. and Dutra do Carmo, E. G. (1989). The Galerkin Gradient Least-Squares Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 74:41–54.
- [58] Franca, L. P. and Hughes, T. J. R. (1988). Two Classes of Mixed Finite Element Methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 69:89–129.
- [59] Franca, L. P., Hughes, T. J. R., and Stenberg, R. (1988). Stabilized Finite Element Methods. Technical report, Cambridge Books Online.
- [60] Gene H. Golub, C. F. V. L. (1996). *Matrix Computations*. Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. Johns Hopkins University Press, 3rd ed edition.
- [61] Giaquinta, M. and Hildebrandt, S. (2004). *Calculus of Variations*, volume 1. Springer.
- [62] Greenkorn, R. A. (1983). *Flow Phenomena in Porous Media*. Marcel Dekker, Inc.
- [63] Guedes da Silva, F. A. (2018). *Métodos de Galerkin Descontínuo de Mais Alta Ordem para Leis de Conservação Hiperbólicas*. PhD thesis, Instituto de Matematica, Estatística e Computação Científica.
- [64] Hughes, T. J. R., Masud, A., and Wan, J. (2006). A stabilized mixed discontinuous Galerkin method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:3347–3381.
- [65] Johnson, C. (1987). *Numerical Solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press.
- [66] Kanupp, P. and Steinberg, S. (1994). *Fundamentals of Grid Generation*. CRC Press.
- [67] Karniadakis, G. and Sherwin, S. (2005). *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- [68] Kumar, A., Buria, R., Padmanabhan, S., and Gu, L. (2008). Finite Element Analysis Using Nonconforming Mesh. Technical Report 1, University of Nebraska - Lincoln.
- [69] Leveque, R. (2004). *Finite-volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge University Press.

- [70] Lipnikov, K., Shashkov, M., Svyatskiy, D., and Vassilevski, Y. (2007). Monotone finite volume schemes for diffusion equations on unstructured triangular and shape-regular polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, 227(1):492 – 512.
- [71] Liseikin, V. (2010). *Grid Generation Methods*. Springer.
- [72] Loula, A., Correa, M., Guerreiro, J., and Toledo, E. (2008). On finite element methods for heterogeneous elliptic problems. *International Journal of Solids and Structures*, 45(25):6436 – 6450.
- [73] Loula, A. F., Rochinha, F. A., and Murad, M. A. (1995). Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128(3):361 – 381.
- [74] Loula, A. F. D., Hughes, T. J. R., Franca, L. P., and Miranda, I. (1987). Mixed Petrov-Galerkin Methods for the Timoshenko Beam Problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 63:133–154.
- [75] Loula, A. F. D., Miranda, I., Hughes, T. J. R., and Franca, L. P. (1989). On mixed finite element methods for axisymmetric shell analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 72:201–231.
- [76] Malta, S. M. C., Loula, A. F. D., and Garcia, E. L. M. (2000). Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:119–136.
- [77] Masud, A. and Hughes, T. (2002). A stabilized finite element method for darcy flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191:4341–4370.
- [78] Murad, M. A., Borges, M., Obregón, J. A., and Correa, M. (2013). A new locally conservative numerical method for two-phase flow in heterogeneous poroelastic media. *Computers and Geotechnics*, 48(Supplement C):192 – 207.
- [79] Necăs, J. (1962). Sur une méthode pour résoudre les equations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 16:305–326.
- [80] Nédélec, J. (1980). Mixed Finite Elements in  $R^3$ . *Numer. Math.*, 93:315–341.



- [81] Nédélec, J. C. (1986). A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Numerische Mathematik*, 50(1):57–81.
- [82] Pinder, G. F. and Gray, W. G. (2008). *Essentials of Multiphase Flow in Porous Media*.
- [83] Quarteroni, A. and Valli, A. (2008). *Numerical Approximations of Partial Differential Equations*. Springer.
- [84] Rappaz, J. and Picasso, M. (2004). *Introduction à l'analyse numérique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romands.
- [85] Raviart, P. and Thomas, J. (1977). A mixed finite element method for second order elliptic problems. *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag*, 606:292–315.
- [86] Rodríguez, J. C. and Pulino, P. (2013). Estudio y Análisis de Sistemas Lineales Generados en Problemas de Contorno con Frontera Discontinua a Partir de Métodos Espectrales/hp. Master's thesis, Instituto de Matematica, Estatística e Computação Científica. UNICAMP.
- [87] Rognes, M., Kirby, R., and Logg, A. (2009). Efficient Assembly of  $h(\text{div})$  and  $h(\text{curl})$  Conforming Finite elements. *SIAM J. SCI. COMPUT.*, 31(6):4130–4151.
- [88] Shen, J., Ewing, C. R. E., Lazarov, R. D., and Thomas, J. M. (1994). Mixed finite element method on distorted rectangular grids. Technical report, Institute for Scientific Computation, Texas A & M University.
- [89] Siqueira, D., Devloo, P. R., and Gomes, S. M. (2013). A new procedure for the construction of hierarchical high order hdiv and hcurl finite element spaces. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 240:204–214.
- [90] Sölin, P., Segeth, K., and Doležal, I. (2004). *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC.
- [91] Thompson, J., Soni, B., and Weatherill, N. (1999). *Handbook of Grid Generation*. CRC Press.
- [92] Thompson, J., Warsi, Z. U. A., and Mastin, W. C. (1995). *Numerical Grid Generation. Foundations and Applications*. CRC Press.
- [93] Verfürth, R. (1984). Error estimates for a mixed finite element approximation of the sto-

- kes equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 18(2):175–182.
- [94] Wheeler, M. F. (1978). An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(1):152–161.
- [95] Zheng, C. and Bennett, G. (1995). *Applied Contaminant Transport Modeling*. Van Nostrand Reinhold.