

# Modelización numérica del comportamiento estructural de barras de pandeo restringido

J.C. Castro  
F. López Almansa  
S. Oller

**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A.H. Barbat

Modelización numérica del  
comportamiento estructural de  
barras de pandeo restringido

J.C. Castro  
F. López Almansa  
S. Oller

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España

**MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA**

Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

**MODELIZACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO ESTRUCTURAL DE  
BARRAS DE PANDEO RESTRINGIDO**

Monografía CIMNE IS 66

© Los autores

ISBN: 978-84-95999-12-2

Depósito legal: B-39044-2011

# Resumen

Los disipadores de energía son elementos pasivos que se incorporan a edificios y a otras construcciones que, pueden estar sometidas a acciones dinámicas, especialmente movimientos sísmicos. Su finalidad es absorber la mayor parte de la energía introducida en la estructura por la excitación, protegiendo de esta manera la estructura principal. Estos dispositivos son relativamente ajenos a la estructura, en el sentido que no participan en la resistencia a cargas verticales y, por tanto, son fácilmente reemplazables después de sufrir daños importantes. Se conectan a la estructura a proteger de forma que cuando ésta sufre la acción del terremoto, se generan deformaciones importantes en los disipadores produciéndose de esta manera la absorción de energía.

En estructuras de edificación, los disipadores se colocan en pórticos; habitualmente en barras de arriostramiento concéntrico entre plantas, (generalmente diagonales o en V invertida) ya que, al producirse desplazamientos relativos entre plantas (“ interstory drift ”), aparecen deformaciones apreciables en estos elementos. Se han propuesto distintos tipos de disipadores para estructuras de edificación. Los basados en plastificación de metales, conocidos habitualmente como histeréticos, destacan por su sencillez, economía y robustez; de entre éstos las denominadas barras de pandeo restringido han conocido un notable desarrollo por poseer ventajas relevantes. Básicamente son barras concéntricas de arriostramiento, constituidas por un núcleo delgado de acero que se rodea de un revestimiento, generalmente de mortero y/o acero. Es de vital importancia que exista una interfaz, entre el núcleo y el revestimiento, que permita el deslizamiento entre ambos para evitar que parte de las tensiones del núcleo se transfieran al revestimiento. Cuando la barra es traccionada o comprimida el núcleo se plastifica, ya que el revestimiento impide su pandeo; estos ciclos de plastificación por tracción y compresión constituyen los lazos de histéresis a través de los cuales se disipa energía. A pesar de la notable experiencia, tanto a nivel de investigación como de aplicaciones prácticas, que existe sobre las barras de pandeo restringido, aún quedan numerosos interrogantes abiertos. En particular, no ha sido propuesto ningún modelo

numérico que simule con exactitud y fiabilidad su comportamiento estructural, ya que, éste es notablemente complejo, debido al trabajo conjunto y multiaxial de distintos materiales (acero del núcleo, mortero y acero del revestimiento). Esta ausencia impide comprender a fondo los fenómenos complejos que suceden durante la operación de estos elementos, y dificulta el desarrollo de soluciones innovadoras, ya que no es posible conocer con exactitud su comportamiento estructural. Este trabajo pretende mejorar el conocimiento sobre el comportamiento de estos dispositivos, desarrollando un modelo numérico amplio que abra las puertas a futuros desarrollos. El modelo numérico desarrollado en este trabajo simula el comportamiento de barras de pandeo restringido formadas por un núcleo de acero, una interfaz deslizante y un revestimiento de mortero eventualmente rodeado por una funda exterior de acero.

En el modelo numérico propuesto, el acero tiene un comportamiento elastoplástico con endurecimiento cinemático e isótropo. Para el mortero que le rodea se ha desarrollado un modelo isótropo de daño. La parte de acero del revestimiento (funda) se homogeneiza al mortero. La interfaz entre el núcleo de acero y el mortero se representa mediante un modelo de contacto de penalización, en el cual, el núcleo de acero puede penetrar en el mortero. En el presente trabajo, estos modelos se implementan en subrutinas del programa Abaqus/Explicit, permitiendo comprobar el funcionamiento del modelo que se propone. Los resultados obtenidos, con este modelo numérico, se compararon con los resultados experimentales obtenidos en la Universidad de Girona y en la Universidad de California.

# Abstract

The energy dissipators are passive components that are incorporated into buildings and other structures undergoing dynamic excitations, especially earthquakes. Its purpose is to absorb the greatest part of the input energy, thus protecting the main structure. These devices are not a part of the main load-carrying system and therefore can be easily replaced after suffering serious damage. These devices are connected to the structure to be protected in such a way that they experience large strains under the action of the earthquakes; such strains produce the energy absorption. In building structures, the dissipators are installed in frames, usually in concentric bracing bars (either diagonal or chevron braces) since the interstory drifts generate significant distortions in these elements. Various types of dissipators have been proposed for building structures. Those based on yielding of metals, commonly known as hysteretic, are distinguished by their simplicity, economy and robustness; among them, the so-called buckling restrained braces have experienced a remarkable development because of their important advantages. The buckling restrained braces consist of concentric bracing bars composed by a slender steel core surrounded by a stockier casing, usually made of mortar and / or steel. It is crucial that there is a sliding interface between the core and the cover, to prevent relevant shear stress transfer. When the core is pulled or pushed it yields; the casing prevents the buckling of the core. These cycles of tensile and compressive yielding constitute the hysteresis loops through which the energy is dissipated. Despite relevant experience exists on buckling restrained braces (both on research and practical applications) many questions still remain unanswered. In particular, no reliable and accurate model of the structural behavior has been proposed. This lack prevents a deep understanding of the complex phenomena that occur during the operation of these elements, and hinders the development of innovative solutions. This work aims to improve the knowledge about the behavior of these devices, developing a comprehensive numerical model that opens the door for future developments. The results obtained with the proposed numerical model are compared with experimental results obtained at the University of Girona and the University of California.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>II</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes y motivación . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.2.1. Objetivo general . . . . .	3
1.2.2. Objetivos específicos . . . . .	3
1.3. Metodología . . . . .	4
1.4. Contenido de este documento . . . . .	5
<b>2. Estado actual del conocimiento</b>	<b>7</b>
2.1. Disipadores de energía para protección sismorresistente . . . . .	7
2.2. Disipadores histeréticos . . . . .	11
2.3. Barras de pandeo restringido . . . . .	12
2.3.1. Descripción . . . . .	12
2.3.2. Comparación con otros disipadores histeréticos . . . . .	13
2.3.3. Criterios de proyecto . . . . .	15
2.4. Análisis dinámico no lineal de estructuras . . . . .	17
2.4.1. Conceptos generales . . . . .	17
2.4.2. Solución de la ecuación del movimiento . . . . .	17
2.4.3. Solución implícita del equilibrio dinámico . . . . .	22
2.4.4. Solución explícita del equilibrio dinámico . . . . .	23
2.5. Modelos de plasticidad para el acero . . . . .	24

2.5.1.	Modelo uniaxial de plasticidad con endurecimiento . . . . .	24
2.5.2.	Modelo multiaxial de plasticidad con endurecimiento . . . . .	28
2.6.	Modelos de daño para el mortero . . . . .	35
2.6.1.	Introducción y descripción fenomenológica . . . . .	35
2.6.2.	Energía libre y ecuación constitutiva del modelo de daño . . . . .	37
2.6.3.	Leyes de ablandamiento . . . . .	37
2.7.	Modelos de contacto en una dimensión para la interfaz . . . . .	40
2.7.1.	Formulación general . . . . .	40
2.7.2.	Fricción aplicada al contacto unidimensional . . . . .	43
2.7.3.	Multiplicadores de Lagrange aplicados al contacto unidimensional . . . . .	44
2.7.4.	Modelo de penalización aplicado al contacto unidimensional . . . . .	45
<b>3.</b>	<b>Comportamiento de barras de pandeo restringido</b>	<b>49</b>
3.1.	Conceptos generales . . . . .	49
3.2.	Modelo de daño y plasticidad para el acero . . . . .	51
3.2.1.	Introducción y definición fenomenológica . . . . .	51
3.2.2.	Modelo de daño escalar acoplado con plasticidad . . . . .	53
3.2.3.	Reglas de evolución de la plasticidad y el daño . . . . .	55
3.2.4.	Tensor elastoplástico dañado tangente . . . . .	57
3.2.5.	Algoritmo del modelo de daño escalar acoplado con plasticidad . . . . .	57
3.3.	Modelo isótropo de daño para el mortero . . . . .	57
3.3.1.	Introducción y definición fenomenológica . . . . .	57
3.3.2.	Ley de evolución de daño para el mortero . . . . .	59
3.4.	Modelo de contacto para la interfaz acero-mortero . . . . .	63
3.4.1.	Introducción y definición fenomenológica . . . . .	63
3.4.2.	Descripción cinemática del contacto . . . . .	64
3.4.3.	Condiciones de deslizamiento y bloqueo . . . . .	65
3.5.	Balance energético . . . . .	67
3.6.	Comprobación de los modelos utilizando MEF . . . . .	70
3.6.1.	Comprobación del modelo de daño acoplado con plasticidad para el acero . . . . .	70
3.6.2.	Comprobación del modelo isótropo de daño para el mortero . . . . .	71
3.6.3.	Comprobación del modelo de contacto tipo penalización para la interfaz . . . . .	74
3.6.4.	Comprobación del modelo de las BPR . . . . .	74

<b>4. Modelización numérica de ensayos de laboratorio</b>	<b>81</b>
4.1. Ensayos realizados en la Universidad de Girona . . . . .	81
4.1.1. Descripción de los ensayos . . . . .	81
4.1.2. Simulación numérica de las barras D1 y D2 . . . . .	84
4.1.3. Simulación numérica de las barras D3 y D4 . . . . .	86
4.1.4. Comparación entre los valores numéricos y experimentales de la energía disipada . . . . .	89
4.2. Ensayos realizados en la Universidad de California . . . . .	90
4.2.1. Descripción de los ensayos . . . . .	90
4.2.2. Simulación numérica de las barras 1G y 2G . . . . .	93
4.2.3. Simulación numérica de las barras 3G y 4G . . . . .	95
4.2.4. Comparación entre los valores numéricos y experimentales de la energía disipada . . . . .	98
<b>5. Conclusiones e investigaciones futuras</b>	<b>105</b>
5.1. Aportaciones de este trabajo . . . . .	105
5.2. Conclusiones . . . . .	106
5.3. Investigaciones futuras . . . . .	107
<b>Bibliografía</b>	<b>118</b>
<b>A. Formulación numérica utilizada</b>	<b>119</b>
A.1. Método de las diferencias finitas . . . . .	119
A.2. Matriz de masa consistente . . . . .	123
A.3. Problema dinámico elástico lineal . . . . .	125
<b>B. Módulos Abaqus/Explicit</b>	<b>129</b>
<b>C. Algoritmo BPR</b>	<b>133</b>
<b>Epílogo</b>	<b>147</b>



# Índice de figuras

2.1. Ubicación típica de disipadores de energía en estructuras de edificación . . . . .	8
2.2. Disposición de arriostramientos disipativos en planta para una estructura de edificación . . . . .	9
2.3. Disposición de barras de pandeo restringido para protección sismoresistente de pórticos de edificación . . . . .	12
2.4. Configuración esquemática de una barra de pandeo restringido . . . . .	13
2.5. Secciones transversales de barras de pandeo restringido . . . . .	14
2.6. Ciclo de histéresis con endurecimiento cinemático e isótropo para el acero. . . . .	25
2.7. Deformaciones representadas en un ciclo de histéresis. . . . .	26
2.8. Corrección del estado tensional. . . . .	27
2.9. “Back stress tensor” y superficie de discontinuidad . . . . .	32
2.10. Retorno radial . . . . .	33
2.11. Variación de la rigidez y del área efectiva de una probeta de mortero . . . . .	36
2.12. Degradación lineal de la tensión . . . . .	38
2.13. Degradación discontinua de la tensión . . . . .	39
2.14. Degradación exponencial de la tensión . . . . .	39
2.15. Degradación parabólica de la tensión . . . . .	40
2.16. Representación gráfica y energética del sistema muelle-masa-superficie . . . . .	41
2.17. Sistema masa-muelle con contacto y fuerza tangencial . . . . .	43
2.18. Modelo de rozamiento de Coulomb . . . . .	44
2.19. Sistema masa-muelle con multiplicador de Lagrange . . . . .	45
2.20. Modelo de contacto de penalización . . . . .	46
3.1. Representación esquemática del comportamiento conjunto de la plasticidad y del daño, al superar el segundo umbral en el espacio de tensiones. . . . .	52

3.2. Representación esquemática del comportamiento de los umbrales de plasticidad y daño en el espacio de las tensiones. . . . .	53
3.3. Modelo de daño del mortero . . . . .	59
3.4. Dominio elástico del mortero en el espacio de las tensiones. . . . .	60
3.5. Descripción esquemática del contacto . . . . .	63
3.6. Distancia mínima en las configuraciones de referencia y espacial . . . . .	65
3.7. Trayectoria del punto $\mathbf{x}_M$ respecto de la superficie maestra. . . . .	66
3.8. Condiciones de contorno de la barra sometida a desplazamientos cíclicos impuestos	71
3.9. Ciclo numérico de histéresis para el acero de los ejemplos numéricos, teniendo en cuenta el endurecimiento cinemático. . . . .	72
3.10. Comportamiento a compresión del modelo numérico . . . . .	73
3.11. Condiciones de contorno y discretización de la barra sometida a contacto tipo penalización . . . . .	74
3.12. Simulación numérica del contacto entre dos nodos . . . . .	75
3.13. (a) Vista frontal de la barra y (b) Mallado de una barra de pandeo restringido con sus condiciones de contorno . . . . .	76
3.14. Primer caso. Comportamiento a acortamiento de una barra de pandeo restringido	76
3.15. Segundo caso. Comportamiento a alargamiento de una barra de pandeo restringido	77
3.16. Tercer caso. Comportamiento cíclico de pequeña amplitud de una barra de pandeo restringido . . . . .	78
3.17. Cuarto caso. Comportamiento cíclico de gran amplitud de una barra de pandeo restringido . . . . .	78
4.1. Ensayo realizado en la Universidad de Girona [1] . . . . .	82
4.2. Geometría de las barras de pandeo restringido ensayadas en la Universidad de Girona[1] . . . . .	82
4.3. Sección transversal de las BPR D1 y D2 . . . . .	85
4.4. Sección transversal de las BPR D1 y D2 modificada para su modelación . . . . .	85
4.5. Desplazamiento impuesto a las barras D1 y D2 . . . . .	86
4.6. Comparación entre los ciclos de histéresis numéricos y experimentales de la barra D1 . . . . .	87
4.7. Sección transversal de las BPR D3 y D4 . . . . .	87
4.8. Sección transversal de las BPR D3 y D4 modificada para su modelación . . . . .	88

4.9. Tramo estacionario del desplazamiento impuesto al núcleo de las barras D3 y D4	88
4.10. Comparación entre ciclos de histéresis numéricos y experimentales para la barra D3	89
4.11. Comparación entre los lazos de histéresis obtenidos numéricos y experimentales de los ensayos de Girona Disipador D1	90
4.12. Barras de pandeo restringido ensayadas en la Universidad de California [2]	91
4.13. Sección transversal de las BPR 1G y 2G	92
4.14. Sexto modo de vibración del núcleo de las BPR 1G y 2G	94
4.15. Mallado de las BPR 1G y 2G [2]	95
4.16. Lazos de histéresis experimentales de la BPR 1G [2]	95
4.17. Modelización numérica de los lazos de histéresis de las barras 1G y 2G	96
4.18. Sección transversal de las BPR 3G y 4G	96
4.19. Tercer modo de vibración del núcleo las BPR 3G y 4G	97
4.20. Mallado de las BPR 3G y 4G.	97
4.21. Lazos de histéresis obtenidos en la Universidad de California para la BPR 3G [2].	98
4.22. Modelización numérica de la BPR 3G	98
4.23. Simulación numérica de los lazos de histéresis de la barra 1G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático	99
4.24. Simulación numérica de la evolución temporal de la energía disipada en la barra 1G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático	100
4.25. Energía disipada por la BPR 1G. Resultados experimentales [2]	101
4.26. Simulación numérica de los lazos de histéresis de la barra 3G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático	102
4.27. Simulación numérica de la evolución temporal de la energía disipada en la barra 3G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático	103
4.28. Energía disipada por la BPR 3G. Resultados experimentales [2]	104
A.1. Condiciones de contorno del problema de una barra unidimensional	120
A.2. Aproximación utilizando diferencias finitas	121
A.3. Viga uniformemente cargada	123
C.1. Diagrama de flujo de la implementación de los modelos constitutivos en Abaqus/Explicit	145



# Índice de tablas

2.1. Tipos de no linealidad . . . . .	21
2.2. Verificación de la condición de consistencia y determinación de $\Delta\gamma$ . . . . .	32
2.3. Algoritmo para endurecimiento cinemático e isótropo con retorno radial . . . . .	35
3.1. Algoritmo de daño escalar acoplado con plasticidad . . . . .	58
3.2. Algoritmo de daño de evolución exponencial . . . . .	62
3.3. Algoritmo de contacto tipo penalización. . . . .	68
3.4. Parámetros mecánicos del acero S355 . . . . .	71
3.5. Parámetros mecánicos del mortero de los ensayos numéricos. . . . .	72
4.1. Parámetros geométricos de las barras ensayadas en la Universidad de Girona . . . . .	83
4.2. Parámetros mecánicos nominales del acero S275. Ensayos de la Universidad de Girona . . . . .	83
4.3. Parámetros mecánicos del mortero. Ensayos de la Universidad de Girona . . . . .	83
4.4. Parámetros geométricos de las BPR ensayadas en la Universidad de California. . . . .	91
4.5. Parámetros mecánicos del acero A36. Ensayos de la Universidad de California . . . . .	92
4.6. Parámetros mecánicos del acero A500-B. Ensayos de la Universidad de California . . . . .	92
4.7. Parámetros mecánicos de la lechada de cemento. Ensayos de la Universidad de California. . . . .	93
4.8. Dimensiones de la sección de las BPR 1G y 2G. . . . .	93
4.9. Dimensiones de la sección de las BPR 3G y 4G. . . . .	95



# Lista de símbolos

## Minúsculas latinas

$\mathbf{b}$	Fuerzas de volumen por unidad de masa
$c(d)$	Función que delimita el dominio elástico cuando hay daño
$c(u)$	Función de desplazamiento para el modelo de contacto
$\mathbf{d}$	índice tensorial de daño
$d$	índice escalar de daño
$d_{cn}$	Diámetro de los conectores de los disipadores ensayados en la Universidad de Girona
$d_{co}$	Diámetro del núcleo de los disipadores ensayados en la Universidad de Girona
$c_k$	Variable de endurecimiento cinemático
$d_{tu}$	Diámetro del tubo exterior de los disipadores ensayados en la Universidad de Girona
$\mathbf{e}$	Tensor de deformación de Almansi
$e_{ijkl}$	Tensor de cuarto orden de constantes elásticas
$f()$	Función de discontinuidad
$f^c$	Función de energía elástica lineal
$f_c$	Resistencia característica a compresión
$f_{cb}/f_{tb}$	Fuerza de plastificación a compresión/tracción de los disipadores ensayados en la Universidad de California
$\mathbf{f}^{ext}$	Fuerzas externas
$\mathbf{f}^{int}$	Fuerzas internas
$\mathbf{f}_q$	Tensor de segundo orden, que se obtiene al derivar la función de discontinuidad con respecto de $\mathbf{q}$
$f_t$	Resistencia característica a tracción
$f^u$	Función de energía elástica lineal disipada a través del daño
$f_y$	Límite elástico del acero

$\bar{f}_y$	Límite elástico del acero actualizado
$f_y^0$	Límite elástico del acero inicial
$\mathbf{f}_\sigma$	Tensor de segundo orden, que se obtiene al derivar la función de discontinuidad $f$ con respecto a la tensión $\sigma$
$g$	Aceleración de la gravedad
$\mathbf{g}$	Vector que indica la dirección del flujo
$\mathbf{g}_N$	Función de contacto normal
$\mathbf{g}_T$	Función de bloqueo al deslizamiento tangencial
$h$	Altura
$\mathbf{h}$	Tensor de segundo orden que indica la dirección del flujo plástico
$i$	Número de iteración
$J_m$	Conjunto de puntos en contacto sobre la superficie del mortero
$J_s$	Conjunto de puntos en contacto sobre la superficie del acero
$k$	Rigidez del muelle
$k_{\epsilon N}$	Parámetro de penalización normal
$k_{\epsilon T}$	Parámetro de penalización tangencial
$k_\epsilon$	Parámetro de penalización
$m$	Masa concentrada
$n$	Enésimo
$\mathbf{n}$	Vector normal a la superficie S
$n_c$	Relación entre las resistencias a compresión y tensión para el mortero $f_c/f_t$
$n_E$	Coefficiente entre el módulo de elasticidad del acero y el mortero ( $E_s/E_c$ )
$p_m$	Punto virtual de la superficie del mortero
$p_N$	Presión normal de contacto
$p_s$	Punto virtual de la superficie del acero
$q$	Variable escalar de endurecimiento isótropo
$\mathbf{q}$	Variable tensorial de endurecimiento isótropo
$r_0$	Superficie de discontinuidad
$r_t$	Máximo valor acumulado entre la norma de energía y la superficie de discontinuidad
$r_u/r_v$	Funciones dependientes del método de la resolución implícita de la ecuación de equilibrio dinámico

$\mathbf{t}$	Tensor de tensión de la superficie
$t$	Tiempo
$t_0$	Tiempo inicial
$t_i$	Tiempo en la iteración $i$
$\mathbf{t}^f$	Tensión generada por la fricción entre superficies
$\mathbf{t}^l$	Carga distribuida sobre la superficie
$\mathbf{t}_T$	Tensión tangencial
$t_p$	Espesor de la pletina en los ensayos de la Universidad de California
$\mathbf{t}^{qb}$	El vector de proyección de fuerzas de elemento infinito (sólido)
$t_{tu}$	Espesor del tubo exterior en los ensayos de la Universidad de Girona
$t_1$	Ancho del núcleo de la pletina del núcleo
$u$	Posición de la masa sujeta al muelle
$u_N$	Desplazamiento en los nodos
$u_T$	Desplazamiento tangencial
$v_c$	Función de prueba del contacto
$y$	Variable termodinámica de daño
$\mathbf{x}$	Configuración espacial

## Mayúsculas latinas

$\mathbb{A}$	Matriz operadora de ensamble de un elemento finito
$A$	Determina la pendiente de ablandamiento
$A_T$	Área total
$\bar{A}_V$	Área de huecos
$\bar{A}$	Área efectiva
$B$	Coficiente que determina la pendiente de ablandamiento (ley parabólica)
$\bar{\mathbf{B}}$	Gradiente simétrico de la función de forma
$C$	Coficiente que determina la pendiente de ablandamiento (ley parabólica)
$C_c$	Condición que determina si hay contacto, deslizamiento o bloqueo
$\mathbf{D}$	Incremento temporal de la de la deformación
$D$	Pendiente de las ramas de descarga de daño (ley exponencial)
$\mathbb{D}^T$	Operador tangente del amortiguamiento
$\mathbf{D}_p$	Matriz generalizada del módulo plástico
$E$	Módulo de Young
$E_E$	Energía elástica
$E_D$	Energía disipada por el daño
$E_F$	Energía disipada por rozamiento
$E_I$	Energía interna
$E_{KE}$	Energía cinética
$E_{QB}$	Energía disipada por amortiguamiento
$E_U$	Energía potencial
$E_V$	Energía viscosa disipada
$E_{total}$	Energía total
$E_W$	Energía de las Fuerzas externas
$\mathbb{E}$	Tensor de cuarto orden de constantes elásticas
$\dot{E}_{WF}$	Trabajo realizado por las fuerzas externas y fricción de las superficies
$\mathbb{E}^T$	Tensor tangente elastoplástico
$\bar{\mathbb{E}}^T$	Tensor tangente efectivo
$\mathbb{F}$	Función tensorial de discontinuidad
$F_N$	Fuerza de contacto normal
$\mathbf{F}$	Gradiente de la deformación
$F_T$	Fuerza de contacto tangencial

$G$	Módulo de de deformación transversal
$G_c$	Matriz que agrupa los puntos en contacto
$G_f$	Energía de fractura (obtenida en laboratorio)
$G_f^*$	Energía de fractura del elemento finito
$H$	Módulo de endurecimiento
$H_D$	Endurecimiento por daño
$H_I$	Endurecimiento isótropo
$H_K$	Endurecimiento cinemático
$HSSW$	Tubo exterior de acero
$I_1$	Primer invariante del tensor de tensiones
$J(u)$	Conjunto de nodos en contacto
$\mathbb{J}$	Operador jacobiano
$\mathbb{K}^T$	Operador tangente de la rigidez
$\mathbf{L}$	Gradiente espacial de la velocidad
$L_{ax}$	Dimensión exterior en horizontal del tubo en los ensayos de la Universidad de California
$L_{ay}$	Dimensión exterior en vertical del tubo en los ensayos de la Universidad de California
$L_b$	Longitud de la barra (con anclajes) en los ensayos de la Universidad de California
$L_{bx}$	Dimensión interior en horizontal del tubo en los ensayos de la Universidad de California
$L_{by}$	Dimensión interior en vertical del tubo en los ensayos de la Universidad de California
$L_{cn}$	Longitud de anclaje de la barra en los ensayos en la Universidad de Girona
$L_{co}$	Longitud del núcleo de acero embebido en los ensayos en la Universidad de Girona
$L_{cx}$	Dimensión en horizontal de la pletina en los ensayos de la Universidad de California
$L_{cy}$	Dimensión en vertical de la pletina en los ensayos de la Universidad de California

$L_{di}$	Longitud del núcleo de la barra en los ensayos de la Universidad de Girona
$L_e$	Longitud de anclaje en los ensayos de la Universidad de California
$L_t$	Longitud de refuerzo a pandeo local en los ensayos de la Universidad de California
$L_{tu}$	Longitud de la barra hasta los conectores en los ensayos de la Universidad de Girona
<b>LF</b>	Operador de integración y fuerza respectivamente
$M$	Masa
$\mathbb{M}$	Matriz de masa diagonal
$\mathbf{M}$	Matriz de masa consistente
$\mathbf{N}$	Función de forma
$O$	Coefficiente que determina la pendiente de ablandamiento
$P_d$	Potencia deformativa
$P_{int}$	Potencia interna
$P_K$	Potencia cinética
$Q_{prop}$	Calor propio
$Q_s$	Flujo de calor que sale por la frontera
$R$	Radio de la superficie de discontinuidad
$R_N$	Fuerza de reacción normal
$R_T$	Fuerza de reacción tangencial
$S$	Superficie
$S^e$	Superficie de integración del elemento finito
$U$	Desplazamiento
$\dot{U}$	Velocidad
$\ddot{U}$	Aceleración
$V^e$	Volumen de integración del elemento finito
$W_2$	Altura de la pletina del núcleo en los apoyos
$W_4$	Altura de la pletina del núcleo
<b>X</b>	Coordenadas materiales

**Minúsculas griegas**

$\alpha$	Variable interna de endurecimiento
$\beta_q$	Simplifica las expresiones( $\beta_s$ y $\beta_m$ )
$\beta_s$	Función que representa en el espacio al núcleo de acero
$\beta_m$	Función que representa en el espacio al revestimiento del núcleo
$\delta$	Incremento de una función
$\epsilon$	Escalar de deformaciones
$\epsilon^e$	Escalar de deformaciones elásticas
$\epsilon^p$	Escalar de deformaciones plásticas
$\dot{\epsilon}$	Tensor de velocidad de deformación
$\epsilon$	Tensor de deformación total
$\epsilon^e$	Tensor de deformaciones elásticas
$\epsilon^p$	Tensor de deformaciones plásticas
$\bar{\epsilon}^p$	Valor absoluto de la deformación plástica
$\dot{\bar{\epsilon}}^p$	Incremento en un instante de tiempo del valor absoluto de la deformación plástica
$\phi^e$	Solución exacta en el punto considerado
$\gamma$	Parámetro de consistencia plástica
$\eta$	Variable de endurecimiento
$\boldsymbol{\eta}$	Tensor de endurecimiento cinemático
$\theta$	Coefficiente escalar varía entre 0 y 1
$\kappa$	Coefficiente de rozamiento
$\lambda$	Multiplicador de Lagrange
$\mu$	Parámetro de consistencia de daño
$\nu$	Vector normal a la superficie de discontinuidad
$\nu_a$	Relación de Poisson
$\varpi_x$	Solución de la malla en $x$
$\varpi_y$	Solución de la malla en $y$
$\varpi_e$	Error de la solución de la malla
$\rho$	Densidad
$\sigma$	Escalar de tensiones
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensiones de Cauchy
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	Parte desviadora del tensor de tensiones
$\sigma_0$	Tensión sin daño

$\sigma^c$	Tensión derivada de la ecuación constitutiva
$\sigma^e$	Tensión elástica
$\sigma^p$	Tensión de relajación plástica
$\sigma^v$	Tensión viscosa
$\bar{\sigma}$	Tensión efectiva
$\dot{\bar{\sigma}}$	Tensión tangente efectiva
$\sigma_0^*$	Tensión de salto obtenida en laboratorio
$\sigma_0^i$	Tensiones iniciales principales
$\sigma_0^{trial}$	Tensión actualizada
$\dot{\sigma}^{trial}$	Tensión actualizada en el tiempo
$\tau$	Norma del tensor de tensiones
$\xi$	Coordenadas convectivas
$\xi_m$	Coordenadas convectivas del mortero
$\xi_s$	Coordenadas convectivas del acero
$\omega$	Densidad de energía interna
$\omega_0$	Densidad de energía interna cuando $t=0$

**Mayúsculas griegas**

$\Gamma_m$	Superficie esclava del mortero
$\Gamma_n$	Dominio espacial del acero o el mortero
$\Gamma_{nc}$	Superficie en contacto
$\Gamma_{nf}$	Superficie libre
$\Gamma_{nu}$	Superficie que se desplaza
$\Gamma_{n\sigma}$	Superficie de fuerza
$\Gamma_s$	Superficie maestra
$\Gamma_y$	Proyección del eje $a_y$ sobre el sólido $\Gamma_1$
$\Delta$	Incremento
$\Delta t$	Incremento de tiempo
$\Delta_y$	Desplazamiento de plastificación
$\Pi$	Energía del sistema masa-muelle
$\Pi^c$	Energía del sistema masa-muelle con contacto
$\Pi$	Energía del sistema masa-muelle
$\Psi$	Energía libre de Helmholtz
$\Psi^0$	Energía libre de Helmholtz del material no dañado
$\Psi^p$	Potencial plástico
$\Xi$	Potencia disipativa
$\Xi^d$	Potencia disipada por el daño
$\Xi^p$	Potencia disipada por plasticidad
$\Omega$	Dominio espacial
$\Omega^e$	Dominio del elemento finito



# 1. Introducción

## 1.1. Antecedentes y motivación

Este estudio se ha realizado con la intención de aportar conocimientos sobre el comportamiento de disipadores de energía para protección sismorresistente de estructuras. En gran medida la investigación ha estado motivada por la necesidad de mejorar la seguridad de las construcciones en países en desarrollo ubicados en regiones con una actividad sísmica importante, entre éstos Colombia.

Colombia ha sido afectada por una catástrofe cada década, aproximadamente. Como ejemplo se citan los seísmos de Popayán en 1983 y de Córdoba (Quindío) en 1999. Estos eventos han dejado numerosas víctimas y cuantiosos daños materiales debidos, en buena parte, a la precariedad de muchas construcciones. Puede concluirse, pues, que el riesgo de catástrofes de igual o mayor virulencia es alto. Por ser un país en desarrollo, Colombia posee únicamente una capacidad limitada para prevenir y afrontar situaciones tan extraordinarias. En consecuencia, sería útil poder disponer de tecnologías capaces de reducir el riesgo sin exigir ni una gran inversión (en términos económicos y de esfuerzo) ni grandes desarrollos tecnológicos. En este sentido, se han propuesto los sistemas de control pasivo [3] para protección sismorresistente de estructuras, especialmente los disipadores de energía. En esencia, éstos consisten en elementos que se incorporan a la estructura para absorber la energía aportada por el seísmo, protegiendo a la estructura y actuando como “fusibles estructurales”. Estos elementos no forman parte del mecanismo resistente a acciones gravitatorias, por lo que pueden ser reemplazados después de acciones sísmicas intensas. Estas tecnologías han sido creadas y desarrolladas especialmente en países desarrollados, requiriendo, en general, de una cierta adaptación para poder ser aplicadas a países en desarrollo. La línea de investigación en la que se enmarca este trabajo se orienta a adaptar los disipadores para su uso masivo en países en desarrollo. El autor de este trabajo, después de terminar su licenciatura en Ingeniería Civil, en la cual construyó un simulador de

seísmos como trabajo de grado, orientó su actividad profesional y de estudio a la ingeniería sísmica. Inició estudios de Máster en Ingeniería Sísmica y Dinámica Estructural en la Universidad Politécnica de Cataluña, en Barcelona, donde conoció al profesor Francisco López Almansa, uno de cuyos ámbitos de estudio son los disipadores de energía. El profesor López Almansa sugirió a este autor continuar con el doctorado adoptando como tema de investigación la modelización numérica del comportamiento estructural de disipadores de energía. De entre los distintos dispositivos propuestos se seleccionaron las barras de pandeo restringido [4] por sus numerosas ventajas y por disponerse, en el seno del grupo de investigación del que forma parte el profesor López Almansa, de amplia experiencia en diseño, fabricación y experimentación de estos dispositivos. Las barras de pandeo restringido consisten básicamente en barras de acero que se instalan en la estructura a proteger, la cual consiste generalmente en pórticos de nudos rígidos, en forma de diagonales de arriostramiento. Estas barras se dimensionan para plastificarse en presencia de movimientos sísmicos intensos. Cuando están comprimidas se evita el pandeo rodeando el núcleo de acero con un revestimiento de mayor robustez; habitualmente este revestimiento está constituido básicamente por mortero. Obviamente, es necesario que el núcleo de acero deslice respecto del revestimiento de mortero; esta interfaz deslizante constituye un elemento clave del diseño. Los ciclos de deformación axial de estas barras constituyen los mecanismos histeréticos a través de los que se disipa la energía, protegiendo de esta manera la estructura principal. El profesor López Almansa señaló la ausencia de modelos numéricos capaces de representar con suficiente exactitud el comportamiento estructural de estos elementos, lo cual limita severamente su aplicabilidad, especialmente en condiciones diferentes de aquellas en que se ha utilizado habitualmente, por ejemplo, en países en desarrollo. Es destacable que se dispone de resultados experimentales obtenidos por el profesor López Almansa y por otros investigadores, en ensayos efectuados en la Universidad de Girona [5]; además existen otros ensayos, descritos en la literatura científica. El comportamiento estructural de estos disipadores es altamente complejo, requiriéndose la utilización avanzada de la mecánica del medio continuo; los algoritmos desarrollados deben ser implementados en programas de análisis estructural. Se requirió la colaboración del profesor Sergio Oller, altamente especializado en mecánica del medio continuo, quien se interesó en esta investigación. El profesor Oller destacó que, dada su complejidad, no existe actualmente ningún modelo numérico capaz de reproducir el comportamiento de los elementos considerados, sugiriendo el desarrollo de un modelo nuevo y su implementación en el Programa Abaqus, siguiendo una formulación explícita (Abaqus/Explicit). Los profesores López Almansa y Sergio Oller se responsabilizaron de la dirección de la investigación. El

autor inició sus trabajos, completando los conocimientos adquiridos en el Máster de Ingeniería Sísmica y Dinámica Estructural, asistiendo a asignaturas referentes a la mecánica del medio continuo. A continuación se inició el desarrollo del modelo numérico objeto de la investigación. La implementación de este modelo permitirá a los ingenieros estructurales brindar alternativas más innovadoras para la utilización de las barras de pandeo restringido puesto que el disponer del modelo numérico, permitirá modelar numéricamente distintas configuraciones hasta obtener más la adecuada; todo ello sin necesidad de hacer cálculos excesivamente conservadores o de realizar ensayos con un alto coste y que son muy difíciles de llevar a cabo en países en desarrollo como Colombia.

## 1.2. Objetivos

### 1.2.1. Objetivo general

El objetivo general de este trabajo es proponer un modelo numérico del comportamiento estructural de barras de pandeo restringido que permita estudiar con más profundidad el comportamiento de estos disipadores de energía. De una forma más concreta, se propone desarrollar un modelo en elementos finitos basado en la mecánica del medio continuo, implementado en Abaqus/Explicit, que reproduzca el comportamiento estructural de una barra de pandeo restringido al ser sometida a un campo de desplazamientos impuestos cuasi-estáticos. Con este trabajo no sólo se quiere abordar el estudio de una particular barra de pandeo restringido, sino también establecer una línea de trabajo que pueda ser continuada en futuros desarrollos. Por dicha razón el modelo propuesto aborda conceptos que podrían ser utilizados en otras configuraciones estructurales.

### 1.2.2. Objetivos específicos

Para alcanzar el anterior objetivo general, se propone la consecución de los siguientes objetivos particulares:

- Conocer el estado actual del conocimiento mediante el estudio de la documentación científica disponible.
- Caracterizar mecánicamente el comportamiento estructural de los materiales que componen las barras (acero y mortero), para trabajar en grandes desplazamientos y así captar la inestabilidad por compresión (pandeo) de las barras.

- Formular una estrategia para tratar el comportamiento de la interfaz entre el mortero y el acero del núcleo.
- Implementar las formulaciones de los modelos anteriores en un modelo global mediante el programa Abaqus/Explicit.
- Validar el funcionamiento correcto de los modelos anteriores, verificando su capacidad para reproducir los fenómenos de las barras de pandeo restringido.
- Comparar los resultados numéricos con los resultados experimentales disponibles para calibrar el modelo propuesto.
- Interpretar y concluir sobre el comportamiento de los dispositivos ensayados utilizando el modelo desarrollado.

### 1.3. Metodología

La metodología utilizada en este trabajo consiste básicamente en alcanzar de forma consecutiva los objetivos específicos anteriores. En primer lugar se realizó una búsqueda, recopilación y verificación de la fiabilidad de las fuentes (referentes a barras de pandeo restringido, plasticidad en metales, daño en el mortero y contacto). Obteniendo una base teórica, se utilizaron estos conocimientos para aplicarlos de forma “práctica” en Abaqus/Explicit, siguiendo los ejemplos y recomendaciones de los manuales. Al tener una amplia base teórica sobre los temas fundamentales para desarrollar este trabajo de investigación, se inició con la definición de los modelos constitutivos que determinan el comportamiento mecánico del mortero y del acero. Para el caso del modelo del acero se propone un modelo capaz de determinar la rotura del acero, de forma desacoplada de la plasticidad. Para el mortero se optó por utilizar un modelo fenomenológico de daño isótropo con ablandamiento exponencial. Para definir la interfaz entre acero y mortero se determinó un micro modelo de contacto tipo penalización, previendo la penetración del acero sobre la funda de mortero que la rodea. Por último, se ensambló toda esta formulación en el modelo numérico de las barras de pandeo restringido, mediante una subrutina que se ha incluido en Abaqus/Explicit. Se establecen varios modelos de plasticidad para el acero hasta encontrar el óptimo, por medio del cual se conocerá cuando rompe el acero (sin tener en cuenta fatiga), cuando comienza la plastificación de la barra, en qué instante se rompe el mortero que la rodea, en qué momento empieza a pandear, entre otros. También se compararon

los resultados numéricos modelados con resultados experimentales obtenidos en las Universidades de Girona [1] y de California [2].

## **1.4. Contenido de este documento**

Este trabajo consta de 5 capítulos y 3 apéndices. Este primer capítulo incluye los antecedentes y motivaciones que dieron lugar al desarrollo de esta investigación, el objetivo general y los objetivos particulares. En el capítulo 2 se presenta el estado del arte de la investigación. En la primera parte se explica cómo se caracterizan y diseñan las barras de pandeo restringido, en la segunda parte se describen los métodos de análisis dinámicos, la tercera parte contiene una descripción de la plasticidad unidimensional y multidimensional, definición energética del daño, y los modelo de contacto en una dimensión. En el capítulo 3 se exponen los modelos constitutivos de daño para el mortero, el modelo de daño escalar acoplado con plasticidad para el acero y el contacto tipo penalización, cada uno de los anteriores con sus respectivos ejemplos implementados en Abaqus/Explicit. En el capítulo 4 se compara el modelo numérico propuesto con resultados obtenidos en los ensayos experimentales realizados en la Universidad de Girona [1] y de California [2]. El capítulo 5 está constituido por las principales aportaciones de este trabajo, las conclusiones y las investigaciones futuras. En el anexo A se analiza la resolución de problemas de valores iniciales. El anexo B se refiere a los módulos utilizados en Abaqus/Explicit. En el anexo C se presenta la subrutina utilizada para formular el comportamiento estructural de las barras de pandeo restringido.



## 2. Estado actual del conocimiento

Este capítulo se divide en siete apartados. En su respectivo orden se presentan: en el primer apartado, definición, descripción de qué son los disipadores de energía y para qué sirven; en el segundo apartado se revisan los tipos de disipadores hysteréticos; en el tercer apartado se realiza la descripción y se discuten la utilidad y el funcionamiento de las barras de pandeo restringido; en el cuarto apartado se detallan las técnicas de resolución de problemas dinámicos (implícitas y explícitas) utilizando MEF; en el quinto apartado se describen los modelos de plasticidad (uniaxial y multiaxial) del acero; en el sexto apartado se describen los modelos de daño y se presentan algunas leyes de evolución del mismo; en el séptimo apartado se describe el contacto en una dimensión con rozamiento basado en multiplicadores de Lagrange con penalización.

### 2.1. Disipadores de energía para protección sismoresistente de estructuras

El proyecto sismoresistente tradicional consiste básicamente en seleccionar los parámetros de la estructura, especialmente su rigidez y su capacidad de disipación de energía, para que ésta sea capaz de resistir la acción sísmica esperada. Debido a que las acciones sísmicas son altamente aleatorias e impredecibles y a que hoy día se acepta que las estructuras deberían ser proyectadas para terremotos más severos que los considerados habitualmente hasta ahora, de esta manera no es factible proyectar estructuras para que no sufran ningún daño (ello equivale aproximadamente a que permanezcan en el rango lineal elástico) para el movimiento sísmico más intenso que puede ser esperado con un nivel razonable de probabilidad durante su vida útil. Por tanto, la energía aportada por la excitación debe ser disipada mediante comportamiento no lineal de la estructura ya que el amortiguamiento estructural no es suficiente en excitaciones violentas. Este comportamiento no lineal conlleva la aparición de deformaciones permanentes, generándose habitualmente daños en la estructura y en los elementos no estructurales (cerramientos,

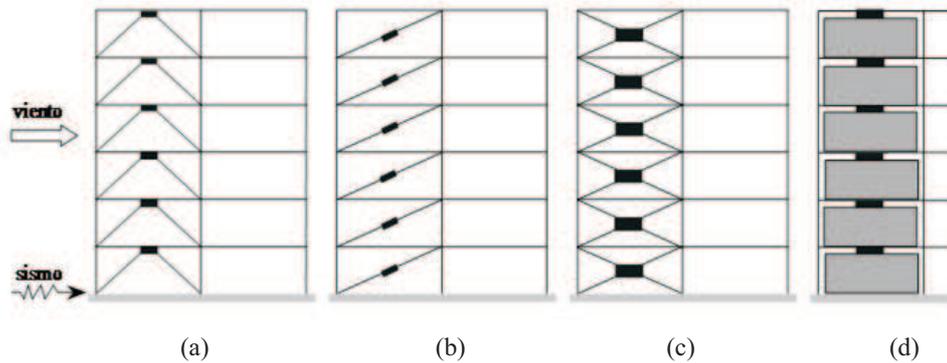


Figura 2.1: Ubicación típica de disipadores de energía en estructuras de edificación

instalaciones y elementos sensibles), especialmente en estructuras de baja ductilidad. Hoy en día está generalmente admitido que estos efectos son completamente inevitables, pero pueden ser minimizados concentrando las exigencias de ductilidad en puntos cuyo fallo no genere mecanismos de colapso frágiles de la estructura; por ejemplo, en secciones de las vigas que se encuentren próximas a las uniones con pilares. No obstante, una vez aceptada la completa inevitabilidad de los daños, un planteamiento más correcto es procurar que éstos se concentren en elementos ajenos a la estructura principal, es decir, que no participen en el mecanismo resistente a las acciones gravitatorias y que puedan ser reemplazados fácilmente después de haber sido dañados durante acciones sísmicas violentas [6], [7], [3], [8]. Estos elementos se denominan *disipadores de energía* y se sitúan de tal manera que experimenten deformaciones importantes cuando la estructura sufra desplazamientos horizontales excesivos. La Figura 2.1 muestra ejemplos de un pórtico plano protegido mediante disipadores conectados de distintas maneras a la estructura principal y a elementos de arriostramiento entre plantas. En la Figura 2.1(a) los disipadores están conectados a barras de arriostramiento en V invertida y a las plantas inmediatamente superiores; en la Figura 2.1 (b) los disipadores están conectados a barras diagonales de arriostramiento partidas en dos tramos que pueden deslizarse entre ellos; en la Figura 2.1(c) los disipadores están conectados a barras diagonales de arriostramiento de forma que se producen distorsiones angulares en aquéllas al generarse desplazamientos laterales de la estructura principal y en la Figura 2.1d los disipadores están conectados a muros de relleno y las plantas inmediatamente superiores. En la Figura 2.1 se destaca que los disipadores de energía pueden ser útiles tanto para proteger edificios de movimientos sísmicos como para reducir sus oscilaciones horizontales producidas por el viento; para el primer uso resulta en general conveniente situar al menos un disipador en cada planta ya



Figura 2.2: Disposición de arriostramientos disipativos en planta para una estructura de edificación

que en caso contrario se vulnera el criterio de uniformidad en altura recomendado habitualmente en proyecto sismoresistente de edificios. La Figura 2.1 muestra disipadores instalados en un pórtico plano, es decir, ilustra la disposición de éstos en altura; con respecto a la disposición en planta deben seguirse las dos recomendaciones habituales en arriostramientos: simetría para evitar excentricidades entre los centros de masa y de rigidez y la mayor separación posible para lograr una adecuada resistencia a torsión global del edificio. A éstas puede añadirse la redundancia recomendable frente a acciones sísmicas de elevada intensidad. La Figura 2.2 muestra un ejemplo que satisface estos requerimientos; en cada una de las cuatro fachadas se disponen dos parejas de arriostramientos disipativos. El uso de los disipadores de energía también ha sido propuesto para protección sismoresistente de puentes, situándose habitualmente éstos entre el tablero y las pilas. En este caso, los disipadores se utilizan como complemento de un sistema de aislamiento de base que pretende reducir las fuerzas horizontales transmitidas por el tablero a las pilas y a los estribos.

- Alta capacidad de disipación de energía, tanto por ciclo como total.
- Ciclos de histéresis estables y bien caracterizables.
- Inicio de la disipación de energía para pequeños desplazamientos (interstory drift) de la estructura a proteger.
- Simplicidad, economía y bajo requerimientos de mantenimiento.

- Instalación sencilla y con bajo impacto arquitectónico.
- Robustez, durabilidad y fiabilidad.
- Facilidad de sustitución en caso de daño.
- Fuerza de recuperación (aunque ésta puede ser manual).
- Redundancia estructural interna (útil para mantener la integridad después de que se produzcan los primeros daños).
- Comportamiento bidireccional para disipar energía cuando se produzcan desplazamientos en ambas direcciones horizontales.

Buscando satisfacer los requerimientos anteriores se han propuesto distintos tipos de disipadores de energía:

- **Histeréticos.** La disipación de energía se produce por la plastificación de metales dúctiles; ordinariamente, éstos son acero, plomo, aluminio o cobre.
- **Friccionales.** La disipación de energía se produce por rozamiento generado durante el deslizamiento de elementos móviles [9].
- **Visco-elásticos.** La disipación de energía se produce por el comportamiento dinámico de materiales visco-elásticos, ordinariamente polímeros [9].
- **Viscosos.** La disipación de energía se produce por el desplazamiento de elementos sólidos (ordinariamente metálicos) en el interior de líquidos de elevada viscosidad.
- **Con aleaciones con memoria de forma** (shape memory alloys). La disipación de energía se produce por el comportamiento súper-elástico de aleaciones metálicas que gozan de esta propiedad [9].
- **Conversión de energía mecánica en eléctrica.** La disipación de energía se produce por la transformación de la energía mecánica introducida por la acción sísmica en la estructura en energía eléctrica a través de generadores conectados adecuadamente a la estructura.
- **Otros.** Diversos tipos de disipadores han sido también propuestos, habiendo gozado la mayor parte de éstos de escasa aceptación.

## 2.2. Disipadores histeréticos

De entre los tipos de disipadores descritos en el apartado anterior, los histeréticos (basados en plastificación de metales) son los que han gozado, en general, de una mayor aceptación. Ello se debe a que, para un uso masivo, poseen las siguientes ventajas: bajo coste, sencillez de fabricación y de instalación y mantenimiento simple. Por el contrario presentan los siguientes inconvenientes y limitaciones: incertidumbre en la capacidad última de disipación de energía, ausencia de fuerza de recentrado, comportamiento no lineal y difícil de caracterizar, generación de altas frecuencias debido a las brusquedades observadas en los lazos de histéresis y energía disipada por ciclo (área encerrada por un lazo de histéresis) proporcional a la primera potencia del desplazamiento (en vez de a su segunda potencia como en los disipadores visco-elásticos y viscosos). En general puede concluirse que los disipadores histeréticos presentan un comportamiento suficientemente satisfactorio y que los otros elementos propuestos, aun presentando algunas ventajas, son notablemente más costosos y sofisticados presentan mayores exigencias de mantenimiento y de protección. Por esta razón los disipadores histeréticos resultan convenientes para su uso masivo en países en desarrollo, como Colombia. Los disipadores histeréticos propuestos se basan en el comportamiento plástico de plomo, cobre o acero, siendo este último metal el más utilizado. En la literatura técnica se describen distintos elementos, que se distinguen básicamente por su configuración geométrica; en general, se persiguen diseños en que el comportamiento no lineal se distribuya de una manera uniforme en todo el volumen del elemento. Con este objetivo, se han propuesto distintas soluciones:

- Flexión de barras de sección variable, de forma que el grado de plastificación en todas las secciones sea aproximadamente uniforme. A este grupo pertenecen los disipadores ADAS y T-ADAS [9]
- Distorsión angular de paneles de espesor constante. A este grupo pertenecen las familias de disipadores conocidas genéricamente como “Shear Link” [6] y como “Steel Panel Shear Walls” [10].
- Torsión de barras de sección circular hueca [11]. Deben preverse mecanismos que impidan la flexión que suele acompañar a la torsión. Extensión y acortamiento de barras de sección constante. Cuando las barras se encuentran comprimidas tienden a pandear por flexión y deben ser arriostradas lateralmente por elementos de menor esbeltez; ello debe ser efectuado sin interferir en el comportamiento en dirección axial. Esta necesidad de arriostramiento

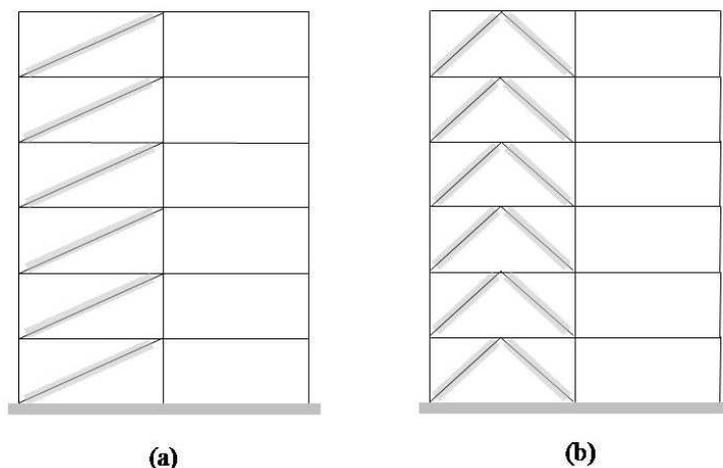


Figura 2.3: Disposición de barras de pandeo restringido para protección sismoresistente de pórticos de edificación

frente al pandeo, hace que estos disipadores se conozcan habitualmente como barras de pandeo restringido (“buckling restrained braces”) [12] [13].

Es destacable que la mayor parte de disipadores histeréticos propuestos presentan un comportamiento unidireccional; debiendo ser dispuestos, pues, en dos direcciones, tal como señala la Figura 2.2

## 2.3. Barras de pandeo restringido

### 2.3.1. Descripción

De entre los tipos de disipadores histeréticos descritos en el apartado anterior, las barras de pandeo restringido son la que quizás han gozado de una mayor aceptación tanto en la literatura científica como en las aplicaciones, por lo cual han sido adoptadas en este estudio. La Figura 2.3 muestra disposiciones típicas de barras de pandeo restringido para protección sismoresistente de pórticos de edificación. La Figura 2.3 (a) muestra barras de pandeo restringido utilizadas como arriostramientos diagonales y la Figura 2.3 (b) muestra barras de pandeo restringido utilizadas como arriostramientos en V invertida (“chevron braces”). En ambas situaciones, las barras están formadas por un núcleo de acero rodeado por un revestimiento de mayor robustez que tiene como finalidad impedir el pandeo del núcleo, tal como indica el dibujo 2.4. Entre el núcleo y el revestimiento indicados en la Figura 2.4 debe interponerse una interfaz deslizante que

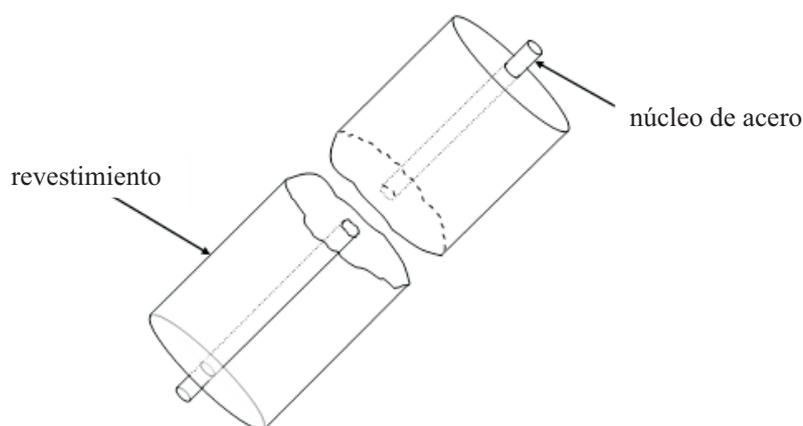


Figura 2.4: Configuración esquemática de una barra de pandeo restringido

impida la transferencia de tensiones tangenciales entre ambos elementos e independice, pues, su comportamiento axial.

Es destacable que el uso de barras de pandeo restringido también ha sido propuesto para puentes [14]. Los distintos tipos de barras de pandeo restringido propuestas se distinguen por los tres elementos mencionados: el núcleo de acero, la interfaz deslizante y el revestimiento exterior. Respecto del núcleo de acero, se han considerado básicamente tres tipos de secciones transversales: rectangular, circular y en cruz; conviene subrayar que en general este aspecto no es especialmente relevante ya que el pandeo está restringido y por tanto el hecho que la sección presente un radio de giro muy reducido en una dirección (tal como sucede, por ejemplo, en secciones rectangulares) carece de importancia práctica. Respecto de la interfaz deslizante, han sido propuestas distintas alternativas; pudiéndose agrupar en aquéllas en que se consideran elementos destinados a lograr un mayor deslizamiento [1] y aquéllas en que se considera simplemente una separación entre el núcleo y el revestimiento (“core gap”) [15]. Respecto del revestimiento exterior, se han considerado básicamente dos opciones: elementos metálicos y revestimiento de mortero u hormigón (frecuentemente revestido a su vez de acero). La Figura 2.5 describe distintas secciones transversales de barras de pandeo restringido.

### 2.3.2. Comparación con otros disipadores hysteréticos

En comparación con los otros disipadores hysteréticos, las barras de pandeo restringido presentan varias relevantes ventajas:

- Dada la notable longitud de estas barras, los propios disipadores constituyen en sí mismos un sistema de arriostramiento y no se requieren barras adicionales.

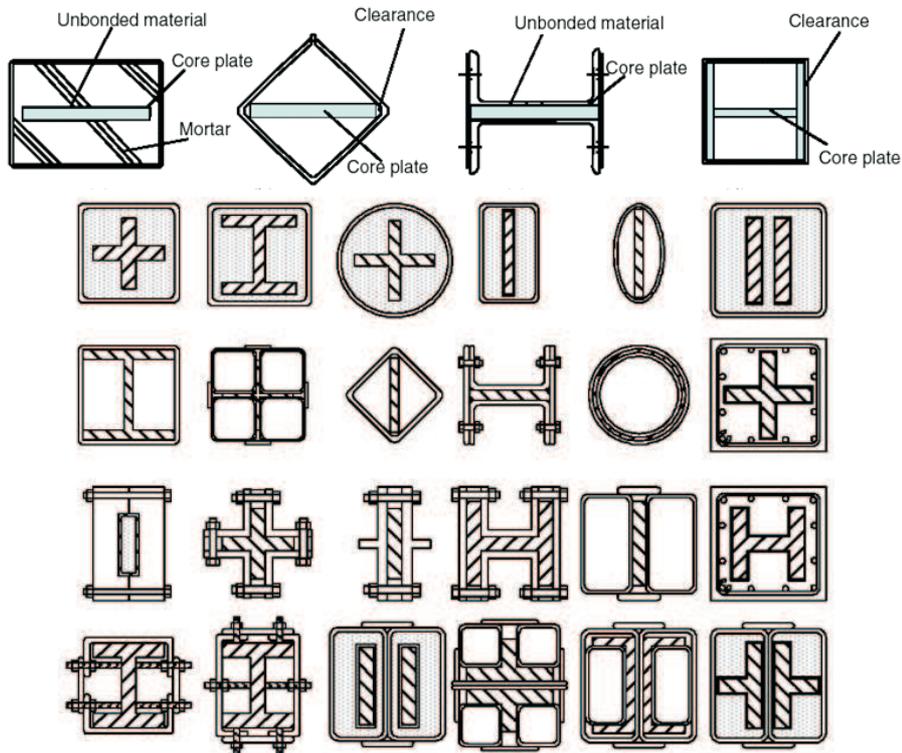


Figura 2.5: Secciones transversales de barras de pandeo restringido

- El cociente entre la energía disipada y la cantidad de material (en volumen o en peso) que debe ser incorporado a la estructura es mayor que en los otros disipadores [16]; el material añadido comprende los disipadores, el resto de los elementos de arriostramiento y las conexiones. Es destacable que el grado de plastificación es uniforme a lo largo de todo el volumen del núcleo. Se han efectuado numerosos estudios teóricos y ensayos en laboratorio [17], [18], [19], [14], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [2] y existen realizaciones, especialmente en Japón [28], Taiwán [17], Canadá [29] y USA [18].
- Se han publicado versiones preliminares de códigos de proyecto [30], [31], [32] y existen algunos estudios acerca de criterios de proyecto [33], [34], [35], [36], [37], [38] [39].
- La resistencia a fatiga es elevada ya que sollicitación axial a que están sometidos los núcleos de acero es baja (en términos de deformación).

Sin embargo, se pueden citar algunos inconvenientes:

- Después de un terremoto intenso que haya generado deformaciones plásticas en el núcleo de acero, la totalidad de la barra debe ser reemplazada.

- Dada la notable flexibilidad axial de las barras de pandeo restringido el inicio de la plastificación es demasiado tardío en términos de desplazamiento relativo entre plantas.

Por otra parte, a pesar del notable esfuerzo investigador desarrollado, aun quedan algunas cuestiones abiertas:

- El análisis del pandeo se basa en modelos simples, altamente conservadores y sin embargo incapaces de garantizar completamente coeficientes de seguridad superiores a la unidad [5]. El comportamiento estructural de estos dispositivos es altamente complejo y no existen modelos numéricos capaces de representarlo con precisión. Los ensayos se han orientado a analizar la eficacia global más que a desentrañar el comportamiento interno. Estas carencias dificultan el desarrollo de soluciones innovadoras y de efectuar dimensionamientos ajustados de los dispositivos existentes.
- Las soluciones para la interfaz deslizante entre el núcleo y el revestimiento son consideradas habitualmente información confidencial por parte de los fabricantes y han sido reveladas sólo de una forma muy restringida.
- Los ensayos efectuados no se han orientado suficientemente a investigar la capacidad final de disipación de energía.
- Los tramos extremos del núcleo de acero deben deslizar respecto del revestimiento y, en consecuencia, las partes que sobresalen de éste presentan un importante riesgo de pandeo. Esta cuestión no ha sido tratada con suficiente profundidad.
- El comportamiento estructural de edificios representativos (de grupos de interés) que incorporan este tipo de disipadores no ha sido estudiado en profundidad para un conjunto suficientemente amplio de acciones sísmicas de distintos niveles de intensidad (en la filosofía del denominado “performance based design”). Aunque existen varios estudios [40] [41] éstos señalan las carencias existentes

### 2.3.3. Criterios de proyecto

Esta investigación se orienta especialmente a avanzar en la resolución de la primera de las cuestiones anteriores; el objetivo es proponer un modelo numérico del comportamiento estructural de barras de pandeo restringido. El proyecto sismoresistente de edificios que incorporen barras de pandeo restringido debe efectuarse de acuerdo con la normativa sismoresistente del país en que

éste vaya a ser ubicado; no obstante, la existencia de estos elementos requiere efectuar algunos estudios adicionales y tener en cuenta recomendaciones específicas. Estos aspectos se describen en este subapartado. En todo caso es absolutamente necesario considerar el comportamiento no lineal de las barras de pandeo restringido, ya que sin éste no existe disipación de energía. Dada la relevancia de las deformaciones plásticas acumuladas del acero del núcleo [42], efectuar cálculos basados en espectros de aceleración absoluta o de desplazamiento relativo no parece resultar adecuado ya que estos procedimientos no tienen en cuenta de una manera suficientemente correcta el riesgo de rotura por fatiga plástica; en consecuencia resulta recomendable o bien realizar análisis a partir de espectros de energía o bien llevar a cabo cálculos dinámicos no lineales para acelerogramas representativos de la sismicidad esperada. En este sentido, el uso de análisis dinámicos incrementales (IDA, "Incremental Dynamic Analyses") puede resultar especialmente conveniente por la completitud de la información que es capaz de proporcionar. El diseño de las barras de pandeo restringido consiste básicamente en definir las características geométricas de los principales elementos que las componen, es decir, el núcleo de acero y el revestimiento que lo rodea (de hecho, las uniones con la estructura principal también se pueden considerar como parte de los disipadores). El parámetro fundamental que rige el dimensionamiento de los núcleos es su deformación longitudinal máxima a tracción o a compresión, la cual está relacionada con el máximo desplazamiento entre plantas ("inter-story drift") mediante expresiones cinemáticas dependientes del ángulo de inclinación de las barras (Figura 2.3); otro parámetro de gran importancia es el valor acumulado de las incursiones plásticas del acero del núcleo [42], ya que su agotamiento se puede alcanzar por fatiga plástica (a bajo número de ciclos). El revestimiento tiene como misión principal impedir el pandeo del núcleo; en consecuencia, el parámetro que condicionará su diseño es la deformación longitudinal máxima a compresión de éste. El diseño del revestimiento a pandeo se ha venido efectuando tradicionalmente a partir de modelos simples y altamente conservadores pero incapaces de garantizar completamente coeficientes de seguridad superiores a la unidad [5]. Más recientemente, se han propuesto modelos de análisis simplificados para núcleos rodeados de una interfaz deslizante [1] y para núcleos con una separación entre el núcleo y el revestimiento [15]. Este estudio pretende contribuir al desarrollo de modelos de mayor exactitud capaces de contemplar ambas situaciones. Se han publicado códigos para proyecto sísmoresistente de edificios con barras de pandeo restringido en Japón [30] y en USA [32]. En el apartado 16 y en el apéndice T del código ANSI/AISC 341-05 se considera el proyecto sísmoresistente de edificios de acero con barras de pandeo restringido. En el artículo 16.2b se indica que el revestimiento debe ser capaz de restringir el pandeo local y global del núcleo

para desplazamientos entre plantas (“inter-story drift”) hasta dos veces el valor de proyecto; dada la mencionada carencia de modelos numéricos fiables, se indica que esta verificación debe ser efectuada de manera experimental mediante pruebas de resistencia cíclica. En el artículo 16.2c y en el apéndice T se describen las condiciones que deben satisfacer estos ensayos. En el apéndice R se presentan los valores de parámetros relevantes; deben destacarse el coeficiente de sobre-resistencia ( $\beta$ ) cuyos valores oscilan entre 2 (cuando la estructura principal tiene nudos articulados) y 2,5 (cuando la estructura principal tiene nudos rígidos) y el coeficiente de reducción de respuesta ( $R$ ) cuyos valores oscilan entre 7 (estructura principal de nudos articulados) y 8 (estructura principal de nudos rígidos). Estos valores señalan una ductilidad importante, correspondiente a una alta capacidad de disipación de energía de las barras de pandeo restringido.

## 2.4. Análisis dinámico no lineal de estructuras

### 2.4.1. Conceptos generales

La dinámica de estructuras estudia el equilibrio estructural a lo largo del tiempo entre las acciones externas, las fuerzas elásticas, las fuerzas másicas de inercia y las fuerzas de amortiguamiento, para un sistema estructural discreto en formas de puntos vinculados internamente entre sí y todos ellos a un sistema de referencia fijo. Estos vínculos internos entre los puntos que describen el sistema estructural pueden o no ser elásticos; para las barras de pandeo restringido éste no es elástico, *el comportamiento del sistema de puntos es no conservativo* y por lo tanto se dice que el material de las barras de pandeo restringido tiene un *comportamiento no lineal disipativo*. La no linealidad de las barras de pandeo restringido se manifiesta además porque hay grandes movimientos, es decir, el sistema trabaja fuera de su configuración geométrica inicial, motivando un comportamiento cinemático no lineal [43]. Esta descripción será analizada con más profundidad a lo largo de este trabajo cuyos conceptos se fundamentan en la dinámica no lineal de las estructuras, en la mecánica de los medios continuos y en las técnicas numéricas; entre las cuales se considera el método de los elementos finitos (MEF). A continuación se hace una introducción a la ecuación del movimiento.

### 2.4.2. Solución de la ecuación del movimiento

En este subapartado se describe la resolución de la ecuación del movimiento [43].

### Primera ley de la termodinámica

La ecuación del movimiento se obtiene a partir de la primera ley de la termodinámica (ver [44], [45]). Este principio indica que la energía no se crea ni se destruye sino únicamente se transforma. Para un sistema cerrado el cambio temporal de trabajo realizado por los agentes externos debe ser igual al cambio temporal en la energía total del sistema. La cantidad de energía interna  $E_I$ , función del estado físico del sólido, depende de la variable de estado  $\omega$ , la densidad de energía interna por unidad de masa  $\rho$  y el volumen  $V$ . Se cumple la siguiente relación:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left[ \int_V \rho \omega dV \right] = \frac{dE_I}{dt} = \dot{E}_I = Q_{prop} + P_d$$

$Q_{prop}$  es el calor propio y  $P_d$  representa la potencia de deformación. Para obtener la potencia de deformación, se partirá de la siguiente definición de la potencia mecánica introducida  $P_{int}$ :

$$(2.2) \quad P_{int} = \oint_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{U}} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{U}} dV$$

En la ecuación 2.2  $\mathbf{t}$  es la fuerza aplicada sobre el contorno  $S$ , siendo  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$  donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy (ver [46]) y  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie  $S$ ,  $\mathbf{b}$  representa a las fuerzas de volumen por unidad de masa,  $\rho = \frac{\partial M}{\partial V}$   $\rho$  es la densidad,  $M$  es la masa,  $V$  es el volumen y  $\dot{\mathbf{U}}$  es la velocidad. Utilizando el teorema de Green (ver [47]) se transforma la integral de superficie de la ecuación 2.2 en una integral sobre el volumen del sólido; la potencia introducida se reescribe así:

$$(2.3) \quad P_{int} = \int_V \left[ \dot{\mathbf{U}} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{b} \right) + \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{x}} \right] dV$$

El balance de momento por unidad de volumen se conoce como ecuación de Cauchy [48]:

$$(2.4) \quad \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial t}$$

En el análisis de las barras de pandeo restringido se supone que la aceleración es nula, es decir el problema es cuasi estático, por lo tanto se utiliza la ecuación de equilibrio estático de Cauchy.

$$(2.5) \quad \underbrace{\frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial t} = 0}_{\text{Problema cuasi-estático}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{x}} = -\rho \mathbf{b}}_{\text{Equilibrio de Cauchy}}$$

Sustituyendo la ecuación 2.4 en 2.3, se obtiene la potencia introducida en función de las potencias de deformación y cinética:

$$(2.6) \quad P_{int} = \underbrace{\int_V \dot{\mathbf{U}} \rho \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{U}} dV}_{\text{pot cinética}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{x}} dV}_{\text{Pot. deformación}} = P_K + P_d$$

$P_K$  es la potencia cinética y  $P_d$  es la potencia de deformación; la relación anterior se puede escribir como:

$$(2.7) \quad P_{int} = P_K + P_d \Rightarrow P_d = P_{int} - P_K$$

En problemas cuasi-estáticos en que la aceleración es nula se tiene que:

$$(2.8) \quad P_K = 0 \quad \Rightarrow \quad P_{int} = P_d$$

### Ecuación de equilibrio dinámico para un sólido discreto

La ecuación de equilibrio dinámico de un sólido discreto sometido a acciones externas variables en el tiempo puede obtenerse directamente a partir de la primera ley de la termodinámica (ver [44], [45]) y del conocimiento del método de los elementos finitos (ver ([49], [50], [51])). Teniendo en cuenta las ecuaciones 2.1 y 2.7 se obtienen los siguientes resultados:

$$(2.9) \quad \frac{d}{dt} \int_V \rho \omega dV - Q_{prop} = P_d = P_{int} - P_K$$

$$(2.10) \quad \underbrace{\int_V \rho \dot{\omega} dV - \left[ \int_V \rho Q_{int} dV - \oint_S Q_s n dS \right]}_{Pot. Mecánica} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} \mathbf{D} dV}_{Pot. Deformativa} = \underbrace{\oint_S \mathbf{t} \dot{\mathbf{U}} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \dot{\mathbf{U}} dV}_{Pot. Introducida} - \underbrace{\int_V \rho \dot{\mathbf{U}} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{t}} dV}_{Pot. Cinética}$$

En la ecuación 2.10  $Q_{int}$  es el calor interno y  $Q_s$  es el flujo de calor a través de la frontera. La velocidad de deformación (incremento temporal de la deformación), puede escribirse como  $\mathbf{D} = \{\mathbf{L}\}_S = \{\nabla^S \dot{\mathbf{U}}\}_S = \{\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}_S^{-1}\}_S$ ; en donde  $\mathbf{L}$  es el gradiente espacial de velocidades y  $\mathbf{F}$  representa el gradiente de deformación, el cual es un tensor bipuntual<sup>1</sup> que relaciona un punto de una configuración de referencia  $\mathbf{x}$  y el operador  $\nabla^S$  representa la derivada direccional. Al sustituirla en la ecuación 2.10, resulta el equilibrio de potencias de un sólido continuo:

$$(2.11) \quad \int_V \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \dot{\mathbf{U}} dV = \oint_S \mathbf{t} \dot{\mathbf{U}} dS + \int_V \rho \mathbf{b} \dot{\mathbf{U}} dV - \int_V \rho \dot{\mathbf{U}} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{t}} dV$$

Se utiliza el concepto de aproximación polinómica de los campos continuos de desplazamientos  $\mathbf{U}(x, y, z)$  o de velocidades  $\dot{\mathbf{U}}(x, y, z)$ , mediante una función polinómica normalizada  $\mathbf{N}(x, y, z)$  (con soporte local) conocida como función de forma [50]:

$$(2.12) \quad \mathbf{U}(x, y, z)|_{\Omega^e} = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{U}|_{\Omega^e} \Rightarrow \dot{\mathbf{U}}(x, y, z)|_{\Omega^e} = \mathbf{N}(x, y, z) \dot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e}$$

<sup>1</sup>En este trabajo se utiliza para considerar los cambios de configuración producidos por la inestabilidad por compresión, basada en la formulación en grandes desplazamientos

La función de forma  $\mathbf{N}(x, y, z)$ , que actúa sobre un dominio acotado  $\Omega^e$  llamado *elemento finito*, permite aproximar dentro de dicho dominio los campos de desplazamientos  $\mathbf{U}$  velocidades  $\dot{\mathbf{U}}$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{U}}$  en un número finito de puntos, denominados *nodos* pertenecientes al dominio del elemento finito  $\Omega^e$ . De esta forma se establecen los tensores derivados del desplazamiento, como el tensor de deformación de Almansi (ver[52]) dado por  $\mathbf{e} = \nabla^S \mathbf{U}$

$$(2.13) \quad \mathbf{U}(x, y, z)|_{\Omega^e} = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{U}|_{\Omega^e} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}|_{\Omega^e} = \nabla^S \mathbf{U}|_{\Omega^e} = \nabla^S \mathbf{N}\mathbf{U}|_{\Omega^e}$$

El método de los elementos finitos se basa en transformar los medios continuos en modelos discretos aproximados; esta transformación se denomina discretización. El conocimiento de lo que sucede en el interior de este modelo aproximado, se obtiene mediante la interpolación usando las funciones de forma de los valores conocidos en los nodos. Sustituyendo las aproximaciones 2.12 y 2.13 en la ecuación 2.11, se escribe la ecuación de equilibrio de potencias a partir de la siguiente aproximación

$$(2.14) \quad \left[ \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \mathbf{N} dV \right]_{\Omega^e} \dot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e} = \left[ \oint_{S^e} \mathbf{t} \mathbf{N} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{b} \mathbf{N} dV - \int_{V^e} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T \ddot{\mathbf{U}} dV \right]_{\Omega^e} \dot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e}$$

La ecuación 2.14 se cumple para cualquier velocidad  $\dot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e}$ , por lo tanto esta igualdad no depende de dicha velocidad, obteniéndose la siguiente ecuación de equilibrio dinámico para el sólido discreto:

$$(2.15) \quad \underbrace{\int_{V^e} \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \mathbf{N} dV}_{\bar{\mathbf{B}}|_{\Omega^e}}|_{\Omega^e} = \underbrace{\oint_{S^e} \mathbf{t} \mathbf{N} dS + \int_{V^e} \rho \mathbf{b} \mathbf{N} dV}_{\mathbf{f}^{ext}|_{\Omega^e}}|_{\Omega^e} - \underbrace{\int_{V^e} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV}_{\mathbf{M}|_{\Omega^e}}|_{\Omega^e} \cdot \ddot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e}$$

Siendo  $\mathbf{f}|_{\Omega^e}^{int}$  la fuerza interna,  $\mathbf{f}|_{\Omega^e}^{ext}$  la fuerza externa y  $\mathbf{f}|_{\Omega^e}^{mas}$  la fuerza másica que se desarrollan en cada punto discreto del elemento finito.  $\ddot{\mathbf{U}}|_{\Omega^e}$  es la aceleración en dichos puntos,  $\mathbf{M}|_{\Omega^e}$  es la masa elemental y  $\bar{\mathbf{B}}|_{\Omega^e} = \nabla^S \mathbf{N}|_{\Omega^e}$  representa el tensor de compatibilidad de deformación o gradiente simétrico de la función de forma. La ecuación 2.15 representa *la ecuación de equilibrio dinámico en la configuración actualizada*, que expresada en la *configuración de referencia* adquiere la siguiente forma:

$$(2.16) \quad \left( \int_{V_0^e} \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \mathbf{N} dV_0 \right)_{\Omega_0^e} = \left( \oint_{S_0^e} \mathbf{t} \mathbf{N} dS_0 + \int_{V_0^e} \rho_0 \mathbf{b} \mathbf{N} dV_0 \right)_{\Omega_0^e} - \left( \int_{V_0^e} \rho_0 \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV_0 \right)_{\Omega_0^e} \ddot{\mathbf{U}}|_{\Omega_0^e}$$

$\rho_0$ ,  $V_0$  y  $S_0$  son la densidad, el volumen y la superficie del sólido en la configuración referencial, respectivamente. Utilizando la ecuación 2.16 se pueden representar las no linealidades presentadas en la Tabla 2.1, algunas de las cuales se utilizarán para modelar el comportamiento estructural

	Constitutiva	- Dependencia no lineal entre tensiones y deformaciones debido a cambios en el tensor constitutivo $\mathbb{E}$
$\sigma$	Grandes deformaciones	-Relación no lineal entre las deformaciones $\mathbf{e}$ y los desplazamientos $\mathbf{U}$ -Dependencia no lineal entre tensiones y deformaciones debido a cambios en el tensor constitutivo $\mathbb{E}$ por cambios de configuración -No linealidad por cambios en la configuración geométrica del sólido
$\mathbf{B}$	Grandes desplazamientos	- Sólo representa una parte del problema de grandes deformaciones debido que únicamente afecta al tensor $\mathbf{B}$

Tabla 2.1: Tipos de no linealidad

de las barras de pandeo restringido. Se ensambla la ecuación 2.16 (si se formula el equilibrio en la configuración de referencia) permitiendo definir el equilibrio dinámico en todo el sólido en el instante  $t + \Delta t$  mediante la siguiente ecuación:

$$(2.17) \quad \mathbb{A}_{\Omega^e}^i \left[ \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma} \nabla^S \mathbf{N} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} = \mathbb{A}_{\Omega^e}^i \left[ \oint_{S^e} \mathbf{t} \mathbf{N} ds + \int_{V^e} \rho \mathbf{b} \mathbf{N} dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} - \mathbb{A}_{\Omega^e}^i \left[ \int_{V^e} \rho \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV \right]_{\Omega^e}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{U}}_{\Omega^e}^{t+\Delta t}$$

$\mathbb{A}$  representa al tensor genérico de segundo orden. La ecuación 2.17 escrita en forma compacta tiene la siguiente forma:

$$(2.18) \quad \Delta \mathbf{f} = \mathbb{M} \ddot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbf{f}^{int}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) - \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) = 0$$

$\Delta \mathbf{f}$  es la fuerza residual. Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias está formulado en el dominio del elemento finito  $\Omega$  y ya contiene la aproximación polinomial del campo de desplazamientos  $\mathbf{U}$ , velocidades  $\dot{\mathbf{U}}$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{U}}$ . En la ecuación 2.18 están representadas la matriz de masa  $\mathbb{M}$ , las fuerzas externas  $\mathbf{f}^{ext}$  y las fuerzas internas  $\mathbf{f}^{int}$  que contienen los términos no lineales del comportamiento. Para el caso de las barras de pandeo restringido esta ecuación tendrá en cuenta daño para hormigón, plasticidad acoplada con daño para el acero y contacto en la interfaz deslizante.

### 2.4.3. Solución implícita del equilibrio dinámico

En este subapartado se describe la formulación del análisis dinámico implícito. Los desplazamientos  $\mathbf{U}(t + \Delta t) = \mathbf{U}^{t+\Delta t}$  y las velocidades  $\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$  en un análisis dinámico implícito se obtienen utilizando la siguiente aproximación lineal en diferencias.

$$(2.19) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = k_v \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t + \mathbf{r}_v(\dot{\mathbf{U}}^t, \ddot{\mathbf{U}}^t, \dots) \\ \mathbf{U}^{t+\Delta t} = k_u \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} \Delta t^2 + \mathbf{r}_u(\mathbf{U}^t, \dot{\mathbf{U}}^t, \ddot{\mathbf{U}}^t, \dots) \end{cases}$$

En las ecuaciones 2.19  $\mathbf{r}_v$  y  $\mathbf{r}_u$ , son funciones que dependen de las derivadas temporales del desplazamiento.  $k_u$  y  $k_v$  son coeficientes que se determinan al precisar el método de solución. El desplazamiento o la velocidad en el instante actual, dependen de la velocidad o la aceleración en el instante actual y de una función que tiene en cuenta el desplazamiento, velocidad y aceleración (o velocidad y aceleración) en el instante anterior. En consecuencia, al especificar el método de solución, queda perfectamente definido el formato del desplazamiento (o la velocidad) en el instante actual.

#### Equilibrio en un instante genérico $t + \Delta t$

Los coeficientes  $k_u$  y  $k_v$ , si se utiliza el método de Newton-Raphson [53], determinan la convergencia del análisis. Las aceleraciones  $\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$  y velocidades  $\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}$  son funciones del desplazamiento  $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$  en el tiempo  $(t + \Delta t)$ . La fuerza residual en dicho instante  ${}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t}$  se linealiza para cada iteración  $i$ . Al incluir las anteriores condiciones en un dominio  $\Omega$  se obtiene la siguiente condición de equilibrio dinámico:

$$(2.20) \quad \mathbf{0} = {}^{i+1}[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} \cong {}^i[\Delta \mathbf{f}]_{\Omega}^{t+\Delta t} + {}^i\mathbb{J}_{\Omega}^{t+\Delta t} \cdot {}^{i+1}[\Delta \mathbf{U}]_{\Omega}^{t+\Delta t}$$

A continuación en las ecuaciones de equilibrio global se prescindirá del subíndice  $\Omega$ . El equilibrio global bajo comportamiento no lineal se alcanza satisfactoriamente utilizando el método de Newton-Raphson, el cual permite aproximar la solución en la iteración  $i + 1$ , mediante la linealización descrita en la ecuación 2.20. En esta linealización el operador tangente Jacobiano  $\mathbb{J}$  tiene la siguiente forma:

$$(2.21) \quad {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = {}^i \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = {}^i \left[ \mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{r}^{int}}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t}$$

Siendo  $\mathbb{K}^T = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{U}}$  el operador tangente de la rigidez.  $\mathbb{D}^T = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \dot{\mathbf{U}}}$  es el operador tangente del amortiguamiento. La derivada  $\frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{U}}$  representa la influencia del cambio de la posición de las

fuerzas externas debido a los cambios de configuración sucesivos. Este último término puede considerarse nulo en pequeños desplazamientos, cuando las fuerzas no cambian de posición.  $\mathbb{M}$  es la matriz de masa considerando que los desplazamientos son despreciables frente al tamaño de la pieza e incorporando los operadores tangentes, la ecuación 2.21 toma la siguiente forma:

$$(2.22) \quad {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = {}^i \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = {}^i \left[ \mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^T + \mathbb{D}^T \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} - \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t}$$

En problemas dinámicos elásticos y lineales esta expresión se simplifica aun más, transformándose en el siguiente operador Jacobiano constante:

$$(2.23) \quad {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} \equiv \mathbb{J}^0 = \mathbb{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}} + \mathbb{K}^0 + \mathbb{D}^0 \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}}{\partial \mathbf{U}}$$

En el caso de problemas cuasi estáticos, en que  $\ddot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}} = 0$  y  $\mathbf{f}^{ext} = cte$ , el operador Jacobiano tiende a la clásica matriz de rigidez:

$$(2.24) \quad {}^i\mathbb{J}^{t+\Delta t} = \mathbb{J}({}^i\mathbf{U}^{t+\Delta t}) = {}^i \left[ \frac{\partial \Delta \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}} \right]^{t+\Delta t} = {}^i [\mathbb{K}^T]^{t+\Delta t}$$

### Solución de equilibrio dinámico en el tiempo en el método implícito

Se pretende resolver la ecuación de equilibrio linealizada 2.20, determinando la aceleración  $\ddot{U}$ , la velocidad  $\dot{U}$  y el desplazamiento  $U$ . Esto permitirá obtener el operador Jacobiano expresado en las ecuaciones 2.21, 2.22 y 2.23. Para alcanzar este objetivo hay distintas maneras de formular el integrador implícito del tiempo. Existen los métodos de integración de un paso, a los que pertenecen los métodos de Newmark [54]. Los métodos de Newmark son incondicionalmente estables para resolver problemas dinámicos lineales; para problemas no lineales no existen métodos incondicionalmente estables.

#### 2.4.4. Solución explícita del equilibrio dinámico

El procedimiento de análisis dinámico explícito se basa en la integración explícita, en que los desplazamientos y las velocidades en cada instante sólo dependen de los valores en los instantes anteriores; la matriz de masa de cada elemento es consistente (Anejo A.2). Las ecuaciones del movimiento se integran por diferencias centradas; el método es explícito, si la solución en el instante  $(t + \Delta t)$  depende únicamente de los valores en el instante previo  $t$ :

$$(2.25) \quad \dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{U}}^{(i-\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t^{(i+1)} + \Delta t^{(i)}}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(i)}$$

$$(2.26) \quad \mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{U}^{(i)} + \Delta t^{(i+1)} \dot{\mathbf{U}}^{(i+\frac{1}{2})}$$

$\dot{\mathbf{U}}$  representa la velocidad y  $\ddot{\mathbf{U}}$  expresa la aceleración. El superíndice  $(i)$  determina el número de incremento  $(i - \frac{1}{2})$  e  $(i + \frac{1}{2})$  hacen referencia a los valores del incremento medio. La diferencia central se integra de forma explícita, es decir que la formulación cinemática avanza con valores de velocidad y aceleración conocidas del anterior incremento,  $\dot{\mathbf{U}}^{(i-\frac{1}{2})}$  e  $\ddot{\mathbf{U}}^{(i)}$ . La regla de integración explícita por sí sola no proporciona la eficiencia computacional que requiere el procedimiento dinámico explícito. La clave de la eficiencia computacional del procedimiento explícito es el uso de la matriz de masa consistente de cada elemento, que es utilizada en el cálculo de las aceleraciones:

$$(2.27) \quad \dot{\mathbf{U}}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\mathbf{f}^{(ext)} - \mathbf{f}^{(int)})$$

$\mathbf{M}$  es la matriz de masa consistente,  $\mathbf{f}^{(ext)}$  es el vector de cargas aplicadas,  $\mathbf{f}^{(int)}$  es el vector de fuerzas interiores. El procedimiento explícito no requiere iteraciones ni matriz de rigidez. El tratamiento especial de las velocidades en los instantes  $(i + \frac{1}{2})$  y  $(i - \frac{1}{2})$  se requiere para las condiciones iniciales; para la presentación de los resultados de las velocidades, éstas se expresan como una interpolación lineal:

$$(2.28) \quad \dot{\mathbf{U}}^{i+1} = \dot{\mathbf{U}}^{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta t^{(i+1)} \ddot{\mathbf{U}}^{i+1}$$

Este operador no puede iniciarse porque el valor de la velocidad  $\dot{\mathbf{U}}^{(\frac{1}{2})}$  necesita ser definido. Por lo anterior se determina la siguiente condición.

$$(2.29) \quad \dot{\mathbf{U}}^{(\frac{1}{2})} = \dot{\mathbf{U}}^{(0)} + \frac{\Delta t^{(1)}}{2} \ddot{\mathbf{U}}^{(0)}$$

## 2.5. Modelos de plasticidad para el acero

### 2.5.1. Modelo uniaxial de plasticidad con endurecimiento

En el comportamiento plástico de la mayor parte de metales, se observa experimentalmente que el centro de la superficie de discontinuidad se desplaza en dirección del flujo plástico [55] [56] [57] [58], fenómeno conocido como *endurecimiento cinemático*. La Figura 2.6 representa el modelo de endurecimiento cinemático e isótropo en el dominio de las deformaciones plásticas. El endurecimiento cinemático está en función del desplazamiento de la superficie de discontinuidad, y el isótropo es un crecimiento radial de esta superficie. Estos criterios de endurecimiento permiten representar adecuadamente los distintos tipos de comportamiento plástico. En las Figuras 2.6 y 2.7 se representa la relación tensión-deformación en una dimensión, teniendo en cuenta los dos tipos de endurecimiento. En las Figuras 2.6 y 2.7  $\sigma$  representa la tensión.  $H_K$



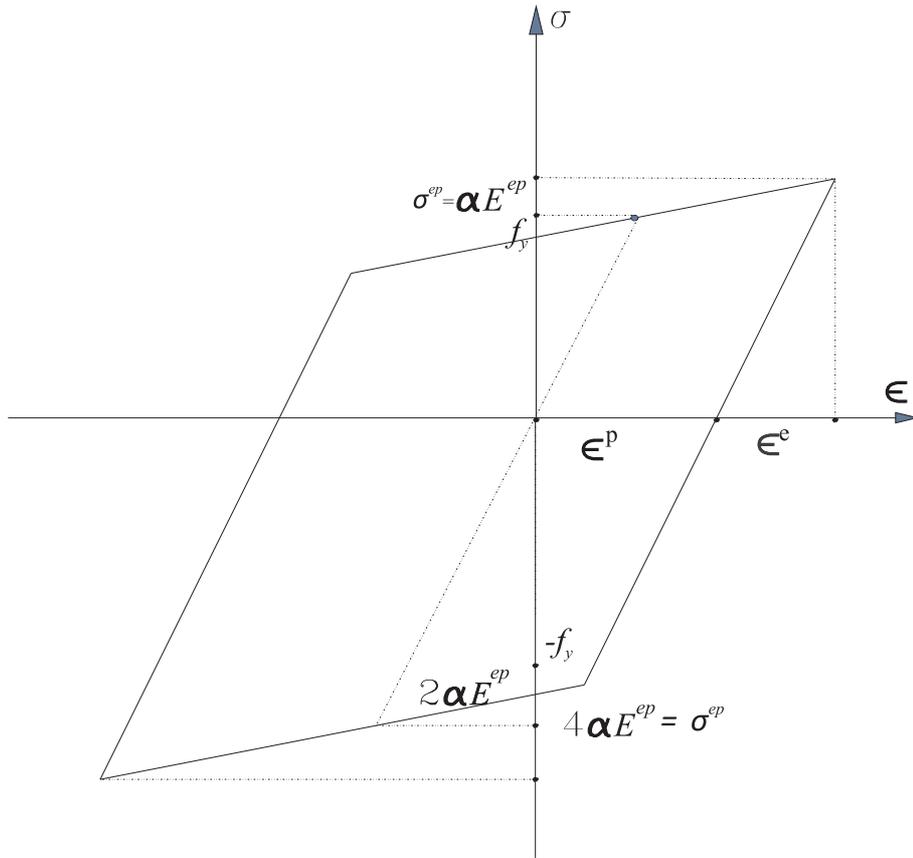


Figura 2.7: Deformaciones representadas en un ciclo de histéresis.

la cadena se obtiene:

$$(2.31) \quad \dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt} = E\dot{\epsilon}$$

La evolución del «back stress scalar»  $q$  sigue la regla de Ziegler [55], descrita por la ecuación

$$(2.32) \quad \dot{q} = H_K \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} H_K \text{sign}(\sigma - q)$$

En esta expresión  $\gamma$  es el factor de consistencia plástica. La evolución en el tiempo del valor absoluto de las deformaciones plásticas se determina según la siguiente relación:

$$(2.33) \quad \dot{\alpha} = |\dot{\epsilon}^p| = \dot{\gamma}$$

La carga y descarga, se determina a través de la condición de Kuhn-Tucker [55], que se expresa de la siguiente forma:

$$(2.34) \quad \gamma \geq 0, \quad f(\sigma, \alpha) \leq 0, \quad \gamma f(\sigma, \alpha) = 0$$

La condición de consistencia y seguimiento plástico se verifica a través de la siguiente expresión:

$$(2.35) \quad \dot{\gamma} f(\sigma, \alpha) = 0$$

La Figura 2.8 describe esquemáticamente la corrección del estado de tensión para los dominios

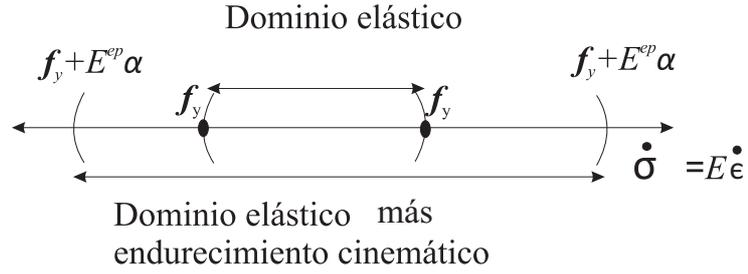


Figura 2.8: Corrección del estado tensional.

elástico y plástico considerando el endurecimiento isótropo. La evolución de la deformación en el dominio del tiempo se rige por la siguiente ecuación:

$$(2.36) \quad \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$$

Donde  $\epsilon^e$  es la deformación elástica y  $\epsilon$  es la deformación total. El estado de tensiones está expresado en función del módulo elastoplástico y de la evolución de la deformación plástica, más la elástica. La ecuación 2.37 define la corrección del estado tensional en el dominio del tiempo, como se presenta en la Figura 2.8.

$$(2.37) \quad \dot{\sigma} = E^{ep} (\dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p)$$

La regla de flujo plástico describe la evolución de la deformación plástica en función del tiempo, tal como lo expresa la relación:

$$(2.38) \quad \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma)$$

La ley de endurecimiento isótropo, o de crecimiento homotético de la superficie de discontinuidad, está contenida en la ecuación 2.39, y la variación del centro del límite elástico, también llamado endurecimiento cinemático, se expresa en la ecuación 2.40:

$$(2.39) \quad \dot{\alpha} = E^{ep} \dot{\epsilon}^p$$

$$(2.40) \quad \dot{q} = H_k \dot{\epsilon}^p = \dot{\gamma} H_k \text{sign}(\sigma - q)$$

La función de discontinuidad  $f$ , que depende de la evolución de las variables de endurecimiento cinemático e isótropo en el tiempo, se define a continuación.

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sign}(\sigma - q) [E(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) - \dot{q}] - E^{ep} \dot{\alpha} \\
(2.41) \quad &= \text{sign}(\sigma - q) E\dot{\epsilon} - \dot{\gamma} [E + (H_k + E^{ep})] \leq 0
\end{aligned}$$

Según las condiciones de Kuhn-Tucker descritas en la ecuación 2.34, si la variación temporal de la función de discontinuidad es mayor que 0, el comportamiento se halla fuera del rango plástico; si la variación temporal de la deformación plástica es distinta de cero, las condiciones de Kuhn-Tucker requieren las siguientes condiciones de consistencia: que la función de discontinuidad sea nula ( $f = 0$ ) al igual que su derivada temporal ( $\dot{f} = 0$ ). La evolución del parámetro de consistencia plástica es:

$$(2.42) \quad \dot{\gamma} = \frac{\text{sign}(\sigma - q) \dot{\sigma}}{E + [H_K + E^{ep}]}$$

Teniendo en cuenta la expresión anterior, se concluye que en el dominio plástico la derivada de la tensión respecto de la deformación, está expresada en función del módulo de elasticidad y del endurecimiento (cinemático e isótropo); para el caso elástico esta derivada está expresada en función del módulo de elasticidad. En general, se consideran dos casos, uno plástico y otro elástico:

$$(2.43) \quad \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \begin{cases} E & \text{En el caso elástico. } \epsilon^p = 0 \\ \frac{E \cdot [H_K + H_I]}{E + [H_K + H_I]} & \text{En el caso plástico. } |\epsilon^p| > 0 \end{cases}$$

La condición anterior resume la evolución del estado tensional en función de la deformación plástica. Cuando la deformación plástica es nula se penetra en el dominio elástico, es decir, que no puede haber disipación de energía y se cumple la ley de Hooke. Cuando hay deformación plástica se produce disipación de energía.

### 2.5.2. Modelo multiaxial de plasticidad con endurecimiento

En este subapartado se presenta una formulación para describir el comportamiento plástico multiaxial del acero [56], [55], [59], [60] y [61] y un algoritmo para ser implementado como modelo constitutivo en el programa Abaqus/Explicit.

#### Formulación basada en el tensor tangente elastoplástico

El modelo (representado en función del tensor tangente elastoplástico) es aplicable en pequeñas deformaciones. Por esta razón es conveniente utilizar el tensor de tensiones de Cauchy

[62] y el tensor de deformaciones de Green-Lagrange [63]. La relación tensión-deformación se establece mediante [55] [56].

$$(2.44) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e \equiv \mathbb{E} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p)$$

En la ecuación 2.44,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de segundo orden,  $\mathbb{E}$  representa el tensor de constantes elásticas de cuarto orden tensor constitutivo elástico,  $\boldsymbol{\epsilon}^e$  es el tensor de segundo orden de deformaciones elásticas,  $\boldsymbol{\epsilon}$  es el tensor de segundo orden de deformaciones totales y  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  es el tensor de deformaciones plásticas. El dominio elástico se limita por una superficie de discontinuidad. ésta se describe mediante dos modelos: endurecimiento cinemático e isótropo. En el modelo cinemático el centro de esta superficie se desplaza según la variación de las tensiones principales; en el modelo isótropo la superficie de discontinuidad se desplaza de forma homotética. Para ambos modelos el límite del dominio elástico se caracteriza por la condición

$$(2.45) \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0$$

En esta relación  $\mathbf{q}$  es un tensor que, para el modelo cinemático, mide el desplazamiento en el espacio de tensiones principales entre los centros de las superficies de discontinuidad inicial y actualizada y  $f$  es una función escalar de discontinuidad. La evolución del estado de deformaciones, más allá de la superficie de discontinuidad, se rige por la siguiente regla de flujo:

$$(2.46) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \gamma \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$$

En la expresión 2.46  $\mathbf{g}$  indica la dirección del flujo y  $\gamma$  es el parámetro escalar de consistencia plástica. Siendo  $\gamma = 0$  en el dominio elástico y en la propia superficie de discontinuidad y  $\gamma = 0$  en el dominio plástico. La variación de la posición del centro de la superficie de discontinuidad viene dada por la siguiente expresión:

$$(2.47) \quad \dot{\mathbf{q}} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$$

En ésta relación,  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{h}$  están determinados por los tensores de segundo orden que fijan la dirección del flujo plástico y el tipo de endurecimiento,  $\gamma$  es el parámetro de consistencia, es una magnitud positiva ( $\gamma \geq 0$ ) que obedece la condición de carga y descarga de Kuhn-Tucker [55], ya mencionada en 2.34; esto es:

$$(2.48) \quad \gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$$

Y la condición de consistencia derivada respecto del tiempo establece que:

$$(2.49) \quad \dot{\gamma} \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$$

Para  $\dot{f} = 0$  se determina el parámetro de consistencia  $\dot{\gamma}$ , el cual se obtiene siguiendo el procedimiento que se describe a continuación. En la solución del parámetro de consistencia plástica se tienen en cuenta las siguientes variables:  $\mathbf{f}_\sigma$  y  $\mathbf{f}_q$  son tensores de segundo orden que se obtienen al derivar la función de discontinuidad  $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$  respecto de la tensión y del “back stress tensor”, respectivamente. La derivada del tensor de tensiones 2.44 para pequeñas deformaciones viene dada por:

$$(2.50) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p) = \mathbb{E} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{g})$$

Al derivar la ecuación constitutiva 2.44 elastoplástica se consigue determinar la evolución de la tensión en función del parámetro de consistencia plástica y sus variables internas:

$$(2.51) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbb{E} : \mathbf{g}$$

La ecuación diferencial que tiene en cuenta el endurecimiento cinemático en función del parámetro de consistencia es 2.47. Al sustituir  $\dot{\mathbf{q}}$  y  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  por  $\dot{f}$  en ésta resulta

$$(2.52) \quad \mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} - \dot{\gamma} \mathbf{f}_q : \mathbf{h} = 0$$

Agrupando términos la relación anterior se convierte en

$$(2.53) \quad \mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\gamma} (\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} + \mathbf{f}_q : \mathbf{h})$$

Al despejar el parámetro de consistencia plástica éste viene dado por

$$(2.54) \quad \dot{\gamma} = \frac{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} + \mathbf{f}_q : \mathbf{h}}$$

Sustituyendo el parámetro de consistencia plástica en la derivada temporal de la ecuación constitutiva  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\gamma} \mathbb{E} : \mathbf{g}$ , resulta

$$(2.55) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \left( \frac{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} + \mathbf{f}_q : \mathbf{h}} \right) \mathbb{E} : \mathbf{g}$$

Al escribir la derivada temporal de la tensión se concluye la siguiente expresión tangente:

$$(2.56) \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left( \mathbb{E} - \frac{(\mathbb{E} : \mathbf{g}) \otimes (\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E})}{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} + \mathbf{f}_q : \mathbf{h}} \right) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbb{E}^T : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

De la ecuación anterior se obtiene el tensor tangente elastoplástico es:

$$(2.57) \quad \mathbb{E}^T = \left( \mathbb{E} - \frac{(\mathbb{E} : \mathbf{g}) \otimes (\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E})}{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{g} + \mathbf{f}_q : \mathbf{h}} \right)$$

Para la plasticidad asociada [55], la evolución de las variables tensor de deformación plástica y el “back stress” tensor en el tiempo se formulan según las siguientes relaciones:

$$(2.58) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = -\dot{\gamma} \quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\gamma} \mathbf{D}_p \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}$$

Donde  $\mathbf{H}_K$  y  $\mathbf{H}_I$  son los tensores de endurecimiento cinemático e isótropo, respectivamente.

$\mathbf{D}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_K & 0 \\ 0^T & \mathbf{H}_I \mathbf{1} \end{bmatrix}$  es la matriz generalizada del módulo plástico,  $\mathbf{g}$  es igual a:  $\partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ , y  $\mathbf{h} = \mathbf{D}_p \mathbf{f}_q$ . Se sustituyen  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{h}$  en el tensor tangente elastoplástico, obteniéndose

$$(2.59) \quad \mathbb{E}^T = \left( \mathbb{E} - \frac{(\mathbb{E} : \mathbf{f}_\sigma) \otimes (\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E})}{\mathbf{f}_\sigma : \mathbb{E} : \mathbf{f}_\sigma + \mathbf{f}_q : (\mathbf{D}_p \mathbf{f}_q)} \right)$$

El tensor de constantes elásticas  $\mathbb{E} = e_{ijkl}$  tiene  $3^4 = 81$  componentes [62]; sin embargo, debido a la simetría de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\boldsymbol{\epsilon}$  se verifican las siguientes relaciones de simetría [62]:

$$(2.60) \quad \left. \begin{aligned} e_{ijkl} &= e_{jikl} \\ e_{ijkl} &= e_{ijlk} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Simetrías mayores}$$

$$e_{ijkl} = e_{klij} \rightarrow \text{Simetrías menores}$$

Existe una relación similar para el tensor elastoplástico del acero

$$(2.61) \quad e_{ijkl}^{ep} = e_{klij}^{ep}$$

### Algoritmo basado en el retorno radial

En la Tabla 2.2 se describe un algoritmo iterativo de Newton-Raphson para calcular el las tensiones de forma explícita, teniendo en cuenta el comportamiento no lineal del acero. En este caso,  $G$  es el módulo de elasticidad a cortante; las demás variables han sido definidas anteriormente. La condición de discontinuidad de Huber Von Mises se describe en la Figura 2.9, donde  $\mathbf{I}_1$  es el primer invariante del tensor de y  $\mathbf{f}_\sigma$  es la función de discontinuidad en el dominio de las tensiones:  $\mathbf{f}_\sigma = \sqrt{\|\boldsymbol{\sigma}\|^2 - \frac{1}{3}(\text{tr}[\boldsymbol{\sigma}])^2} - R$ ;  $R = \sqrt{\frac{2}{3}}f_y$  es el radio de la superficie de discontinuidad, y  $f_y$  es el límite elástico del acero. Por otro lado,  $\mathbf{f}_q$  (“back stress tensor”) actualiza el centro de la superficie de discontinuidad inicial. El estado tensional para un comportamiento elastoplástico se deduce siguiendo el procedimiento que se muestra en la Tabla 2.2. El parámetro de consistencia se determina utilizando el método iterativo de Newton-Raphson descrito en la Tabla 2.2 ya que este procedimiento garantiza la convergencia; los detalles del procedimiento de Newton se ilustra en la Tabla 2.2. A continuación se presenta la integración del modelo constitutivo de plasticidad del acero utilizando el método del retorno radial. Las tensiones

## 1. Inicializar

- $\Delta\gamma^{t=0} = 0$
- $\alpha^{t=0} = \alpha_0$

## 2. Iterar.

- Calcular  $\Delta\gamma^t$ :
- $g(\Delta\gamma^t) = -\sqrt{\frac{2}{3}}H_K(\alpha^t) + \|\mathbf{f}_q\|^t - \left\{2G\Delta\gamma^t + \sqrt{\frac{2}{3}}[H_I(\alpha^t) + H_I(\alpha_0)]\right\}$
- $Dg(\Delta\gamma^t) = -2G \left\{1 + \frac{H_I(\alpha^t) + H_K(\alpha^t)}{3G}\right\}$
- $\Delta\gamma^{t+\Delta t} = \Delta\gamma^t - \frac{g[\Delta\gamma^t]}{Dg[\Delta\gamma^t]}$

## 3. Actualizar la deformación plástica.

- $\alpha^{t+\Delta t} = \alpha^t + \sqrt{\frac{2}{3}}\Delta\gamma^{t+\Delta t}$

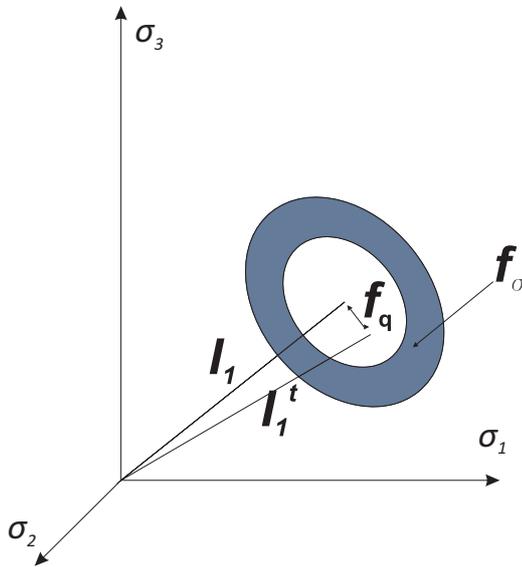
Tabla 2.2: Verificación de la condición de consistencia y determinación de  $\Delta\gamma$ 

Figura 2.9: “Back stress tensor” y superficie de discontinuidad

resultan al derivar el potencial de energía libre para pequeñas deformaciones  $\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^p)$  2.6 respecto de la deformación  $\boldsymbol{\epsilon}$ , que es la variable libre del problema [64].  $\boldsymbol{\epsilon}^p$  se obtiene al integrar respecto

al tiempo como se describe en la siguiente ecuación:

$$(2.62) \quad \epsilon^p = \int_0^t \dot{\epsilon}^p dt.$$

La deformación plástica está determinada por la *regla de flujo* 2.58. La función de discontinuidad está dada por la siguiente relación [63]:

$$(2.63) \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')} - \bar{f}_y \leq 0; \quad \bar{f}_y = f_y + H\bar{\epsilon}^p$$

$\bar{\epsilon}^p$  es el valor absoluto de la deformación plástica acumulada, que al integrar en el tiempo lleva a

$$(2.64) \quad \bar{\epsilon} = \int_0^t \dot{\bar{\epsilon}}^p dt \quad \dot{\bar{\epsilon}}^p = |\dot{\epsilon}^p|$$

La superficie de discontinuidad está expresada en función de la tensión equivalente de Von Mises  $\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')}$ , donde  $\boldsymbol{\sigma}'$  es la parte desviadora del tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. La corrección del estado tensional [65] y [66] se consigue llevando el conjunto de puntos que superan la superficie de discontinuidad (que están fuera de dicha superficie) al interior de ésta; es decir, el retorno radial que se representa en la Figura 2.10: El retorno radial está definido por la relación:

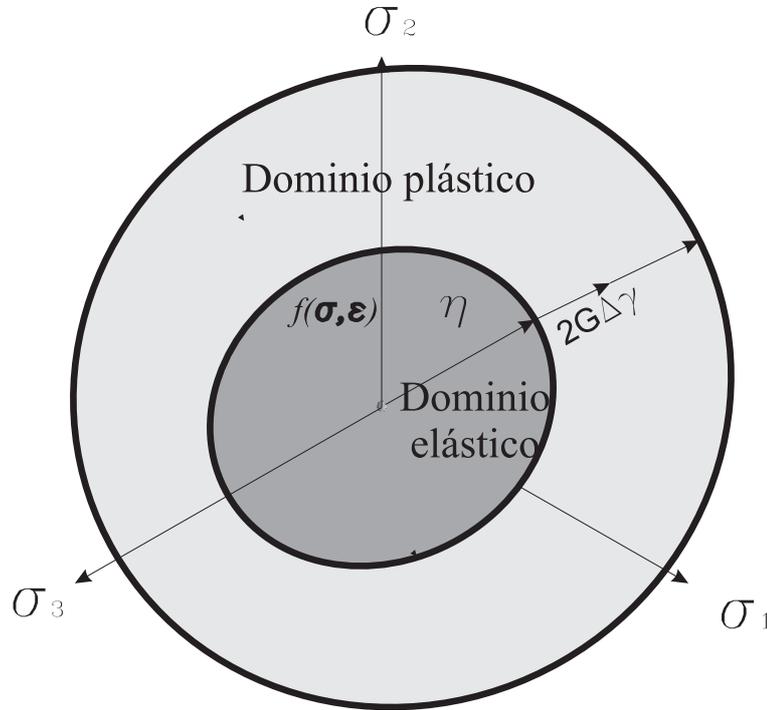


Figura 2.10: Retorno radial

$$(2.65) \quad \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'^{trial} - 2G\Delta\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_y + H\bar{\epsilon}_n^p + H\Delta\bar{\epsilon}^p)$$

$\Delta\gamma$  es el incremento del parámetro de consistencia plástica. En este procedimiento se actualizan las tensiones desviadoras que rebasan la superficie de discontinuidad, pero están por dentro de la superficie de falla. éstas se actualizan en función de las siguientes variables:  $G$  módulo de deformación transversal,  $\boldsymbol{\eta}$ , variable de endurecimiento, es decir, vector normal a la superficie de discontinuidad que se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$(2.66) \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sqrt{\frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}')}}}$$

Al resolver mediante Newton-Raphson este incremento se calcula en un instante genérico  $t + \Delta t$ . El incremento del parámetro de consistencia plástica está expresado en función del incremento acumulado de la deformación plástica, ya definido infinitesimalmente, y que al discretizar en el tiempo se expresa como

$$(2.67) \quad \Delta\bar{\epsilon}^p = \Delta\gamma$$

Al expresar el parámetro de consistencia plástica respecto de la función de discontinuidad, definida anteriormente, se llega a la siguiente condición:

$$(2.68) \quad \Delta\gamma = \begin{cases} 0 & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) \leq 0 \\ \frac{f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p)}{3G+H} & \text{si } f(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) \geq 0 \end{cases}$$

- El endurecimiento es isótropo cuando hay un movimiento homotético de la superficie de discontinuidad, que es el caso descrito anteriormente.
- En el caso del endurecimiento cinemático, hay un movimiento de traslación en la superficie de discontinuidad, la cual está controlada por la variable interna de *endurecimiento cinemático*  $\mathbf{q}$  que condiciona la posición origen del espacio de tensiones. Como ya se ha dicho, esta diferencia recibe el nombre de “Back stress tensor ” o diferencia de tensiones, las cuales se actualizan sólo si están dentro de la superficie de fallo, determinada por la función  $r^0$  2.6. En el dominio del tiempo, este tensor sigue la regla de Ziegler [65]:

$$(2.69) \quad \dot{\mathbf{q}} = H_k \dot{\epsilon}^p \equiv \dot{\gamma} H_k \text{sign}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b})$$

La actualización del origen de coordenadas de la superficie de discontinuidad se puede combinar con el modelo isótropo; en ese caso se tiene endurecimiento isótropo y cinemático. En la Tabla 2.3 se presentan los pasos que hay que seguir para implementar un algoritmo de endurecimiento plástico, bien sea isótropo, cinemático o una combinación de ambos.

1. Datos iniciales:  $E$  módulo de elasticidad.  $\nu$  coeficiente de Poisson.  $f_y$  límite elástico.  $H_K$  módulo de endurecimiento cinemático.  $H_I$  módulo de endurecimiento isótropo.
2. Cálculo de las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  y las deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}$ .
3. Calcular  $\mathbf{f}_q$  ("back stress tensor") (posición del centro de la superficie de discontinuidad) y el radio actualizado de la superficie de discontinuidad  $\bar{f}_y$
4. Cálculo de  $\Delta\gamma$ , ver Tabla 2.2
5. Cálculo de las deformaciones:  $\boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\alpha}$
6. Cálculo de las tensiones:  $\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = (\mathbb{E}^T)^t : \boldsymbol{\epsilon}^{t+\Delta t}$

Tabla 2.3: Algoritmo para endurecimiento cinemático e isótropo con retorno radial

## 2.6. Modelos de daño para el mortero

### 2.6.1. Introducción y descripción fenomenológica

El daño sobre un sólido continuo se relaciona con la pérdida de área eficaz cuando hay un aumento en las micro-fisuras del mismo. Se considera el caso de daño generado por la aplicación de fuerzas externas o de desplazamientos impuestos y se excluyen de este estudio las fisuras producidas por retracción u otros efectos similares. Esta pérdida de área eficaz conlleva un deterioro de rigidez del sólido continuo no recuperable. En la Figura 2.11 se representa la variación del tensor de constantes elásticas  $\mathbb{E}$ , cuando las tensiones están en el interior del dominio elástico y cuando lo rebasan: Esta teoría del daño continuo fue presentada por Kashanov en 1958 [67]. En la Figura 2.11 se representa una línea que va de  $A$  a  $B$ , en la que el material no ha sufrido daño, es decir no hay huecos; en la línea de  $B$  a  $C$  se produce el daño y por fin en la línea de  $A$  a  $C$  se representa el comportamiento (en carga o en descarga) del material dañado. En esta última rama ha disminuido la rigidez y han aumentado las dimensiones los huecos; es destacable que este comportamiento no lineal no conlleva desplazamientos permanentes. Es necesario formular una función  $\mathbb{F}$  que determine si hay disminución de rigidez:

$$(2.70) \quad \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{d}) = f(\boldsymbol{\sigma}_0) - c(\mathbf{d}) \leq 0$$

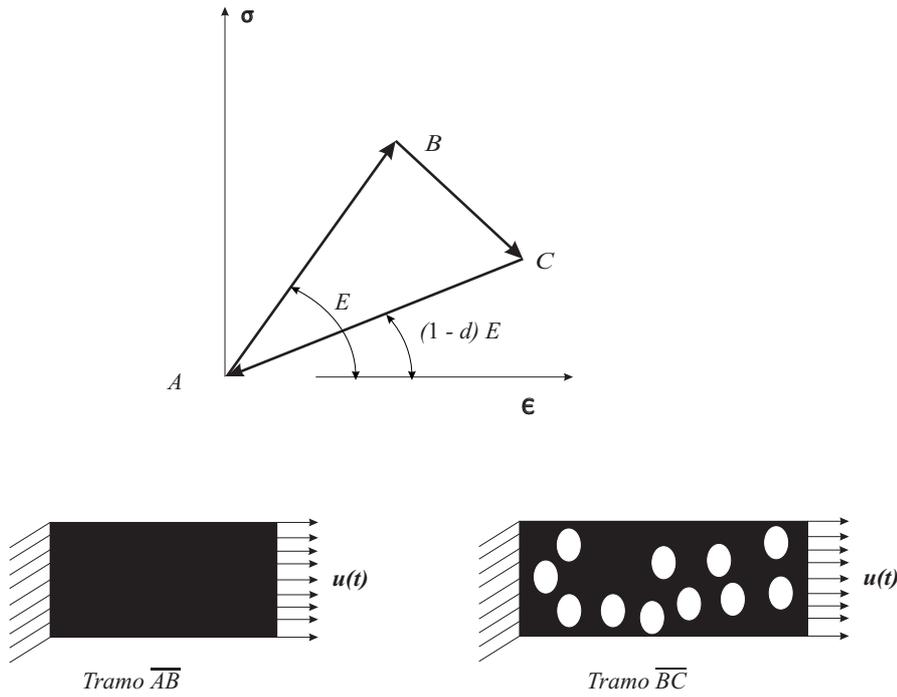


Figura 2.11: Variación de la rigidez y del área efectiva de una probeta de mortero

Si el material se describe con un modelo isótropo el tensor  $\mathbf{d}$  se convierte en la variable escalar de daño  $d$   $f(\sigma_0)$  es la función de discontinuidad que está constituida por el tensor inicial (sin daño) de constantes elásticas de cuarto orden  $\mathbb{E}_0$  y por el tensor de deformación  $\boldsymbol{\epsilon}$ . La tensión en el material no dañado se obtiene como:  $\sigma_0 = \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\epsilon}$  y  $c(d)$  es la función que delimita el dominio elástico con daño. Esta variable determina la caída de la rigidez del material debida a la evolución del daño; utilizando los multiplicadores de Lagrange, ésta se desarrolla mediante:

$$(2.71) \quad \dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{d})}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]} \equiv \dot{\mu} \frac{\partial \mathbb{F}[f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}{\partial [f(\boldsymbol{\sigma}_0)]}$$

$\mu$  es el parámetro de consistencia de daño; éste es un escalar positivo que depende de las condiciones de carga, descarga y recarga de Khun-Tucker (ecuación 2.34) [68]; es decir, que  $\dot{\mu} = 0$  si se está en el dominio elástico. Ello se expresa matemáticamente de la siguiente manera: si  $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{d}) \leq 0$  entonces  $\mu = 0$  y si  $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; \mathbf{d}) \geq 0$  aumenta la variable escalar de daño; como consecuencia de esto la rigidez se degrada de forma no recuperable.

### 2.6.2. Energía libre y ecuación constitutiva del modelo de daño

La energía libre de Helmholtz por unidad de volumen, para un modelo de daño isótropo, está dada por

$$(2.72) \quad \Psi = \Psi(\epsilon; d) = (1 - d)\Psi^0(\epsilon)$$

$\Psi^0(\epsilon)$  es la energía libre de Helmholtz [43] elástica del material no dañado:

$$(2.73) \quad \Psi^0(\epsilon) = \frac{1}{2}\epsilon : \sigma_0$$

Para problemas térmicamente estables se cumple la desigualdad de Clausius-Plank [43]:

$$(2.74) \quad \Xi = \left( \sigma - \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \right) : \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0$$

$\Xi$  es la potencia disipativa. La ecuación constitutiva del modelo de daño isótropo es:

$$(2.75) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = \sigma = (1 - d)\mathbb{E} : \epsilon$$

### 2.6.3. Leyes de ablandamiento

Las leyes que rigen el daño escalar  $d$ , se determinan a partir del comportamiento uniaxial de materiales isótropos [69]. Las leyes de ablandamiento dependen de su evolución a tracción y compresión. A continuación se exponen diferentes curvas de ablandamiento (ver [70]); definidas para tracción o compresión.

#### Evolución lineal del daño

En primer lugar se considera variación lineal de la tensión con respecto de la deformación:

$$(2.76) \quad \sigma(\epsilon) = -\frac{\sigma_0^2}{2G_f^*}(\epsilon - \epsilon^e) + \sigma_0$$

En la Figura 2.12 se presenta la evolución de daño lineal y las variables que intervienen en la ecuación de estado tensional 2.76. La dependencia del estado tensional  $\sigma$  y el daño escalar se obtienen solucionando la ecuación 2.76 para deformaciones elásticas. La evolución del daño se rige por

$$(2.77) \quad \frac{\sigma(d)}{(1-d)E} = \left( \sigma_0 + \frac{\sigma_0^2 \epsilon^e}{2G_f^*} - \sigma(d) \right) \frac{2G_f^*}{\sigma_0^2}$$

$G_f^*$  es la energía de fractura por unidad de área, obtenida en función de la energía de fractura  $G_f$ , igual al área bajo la curva tensión-deformación.  $E$  es el módulo de Young. Despejando de la

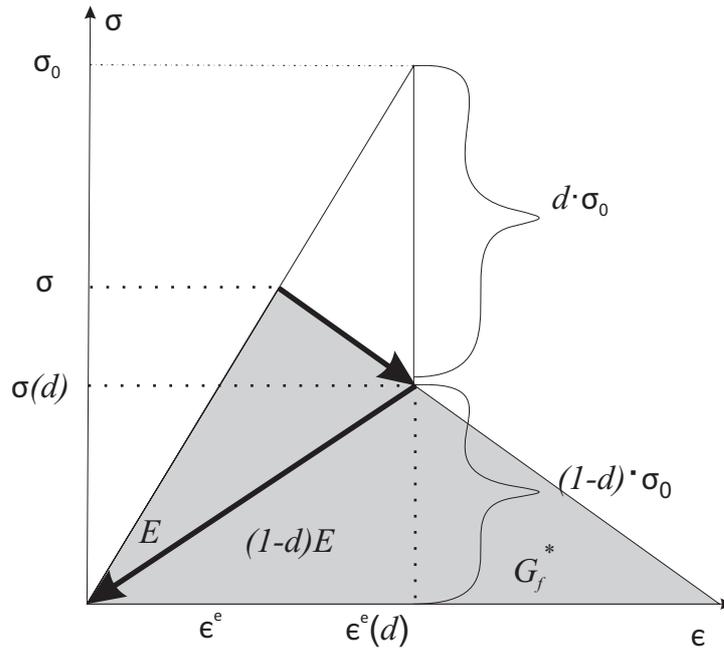


Figura 2.12: Degradación lineal de la tensión

ecuación 2.77 la tensión dañada se obtiene

$$(2.78) \quad \sigma(d) = (1-d) \frac{2G_f^*E + \sigma_0^2}{2G_f^*(1-d)E + \sigma_0^2}$$

Es obvio que la ecuación 2.78, no es una función de daño lineal.

### Evolución lineal del daño con interrupciones

Cuando el material es afectado por una fuerte discontinuidad en la relación tensión-deformación, se determina una ley (Figura 2.13)

$$(2.79) \quad \sigma(\epsilon) = -\frac{(\sigma_0^*)^2}{2G_f^*} (\epsilon - \epsilon^e) + \sigma_0^*$$

Los valores de  $\sigma_0$  y de  $\sigma_0^*$  (Figura 2.13) se obtienen de ensayos de laboratorio. La ley de evolución de daño escalar es:

$$(2.80) \quad \sigma(d) = (1-d)\sigma_0 \quad \text{si} \quad (\epsilon = \epsilon^e)$$

$$(2.81) \quad \sigma(d) = (1-d)\sigma_0^* \frac{2G_f^*E + (\sigma_0^*)^2}{2G_f^*(1-d)E + (\sigma_0^*)^2}$$

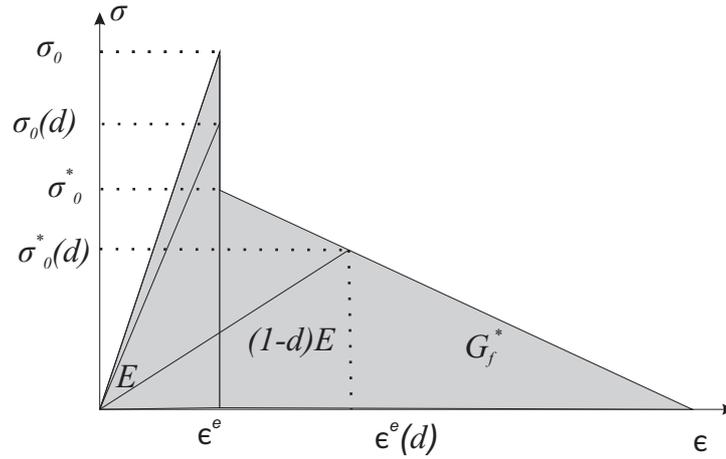


Figura 2.13: Degradación discontinua de la tensión

### Evolución exponencial del daño

El modelo de daño escalar con evolución de tipo exponencial, se formula siguiendo las siguientes referencias, [69], [71], [72] y [73] entre otras. Esta resistencia no termina en cero, sino que tiende asintóticamente a cero. La Figura 2.14 describe este modelo constitutivo, y la ecuación 2.82 presenta la evolución de la tensión.

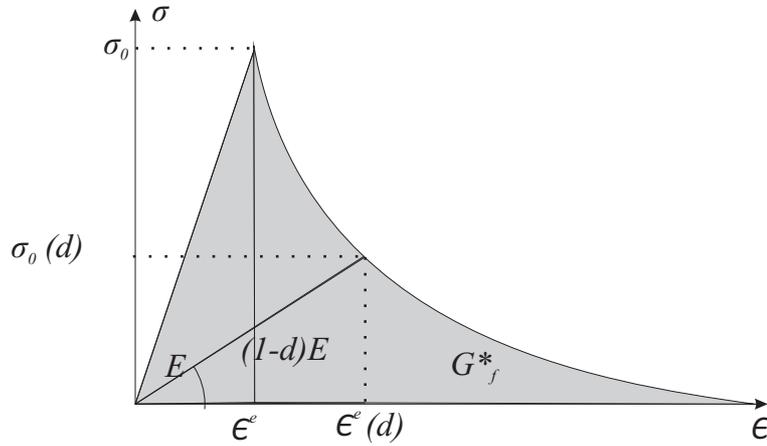


Figura 2.14: Degradación exponencial de la tensión

$$(2.82) \quad \sigma(\epsilon) = \sigma_0 * e^{\left(-\frac{\sigma_0}{G_f^*}(\epsilon - \epsilon^e)\right)}$$

La ley del evolución de daño, está dada en forma explícita por

$$(2.83) \quad \Xi(\sigma, d) = 0 = \sigma(d) + (1-d) E \frac{G_f^*}{\sigma_0} (\sigma_0(d)) - (1-d) \left( E \frac{G_f^*}{\sigma_0} (\sigma_0) - \sigma_0 \right)$$

$$(2.84) \quad \frac{\partial \Xi}{\partial \sigma}(\sigma, d) = 1 + \frac{1}{\sigma} (1-d) E \frac{G_f^*}{\sigma_0}$$

### Evolución parabólica del daño

La ley parabólica de daño se expresa mediante un polinomio de segundo grado:

$$(2.85) \quad \sigma(\epsilon) = \sigma_0 \left( 1 - \left( \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{G_f^*} (\epsilon - \epsilon^e) \right)^2 \right)$$

La Figura 2.15, describe el daño parabólico. La ecuación 2.85 representa la evolución parabólica

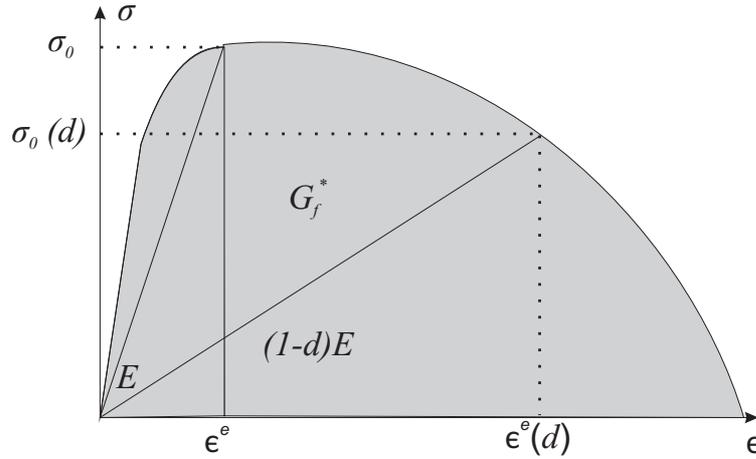


Figura 2.15: Degradación parabólica de la tensión

de la tensión respecto de la deformación sin daño. Al introducir el daño en la evolución de la tensión se alcanza lo siguiente:

$$(2.86) \quad \sigma(d) = -\frac{1}{2}C(d) + \frac{1}{2}\sqrt{(D(d))^2 - 4C(d)}$$

$$(2.87) \quad C(d) = -2(1-d)\sigma_0 + \frac{((1-d)E)^2}{\sigma_0} \left( \frac{3G_f^*}{2\sigma_0} \right)^2$$

$$(2.88) \quad D(d) = (1-d)^2 \left( \sigma_0^2 - \left( \frac{3G_f^*}{2\sigma_0} E \right)^2 \right)$$

## 2.7. Modelos de contacto en una dimensión para la interfaz acero-mortero

### 2.7.1. Formulación general

En este subapartado se presenta un ejemplo de contacto en una dimensión con el objeto de exponer la metodología básica de la mecánica del contacto. El contacto es un fenómeno físico que

se presenta cuando en dos o más cuerpos, delimitados por una superficie, hay un punto de cada cuerpo situado en las mismas coordenadas. En ese punto ocurre una transferencia de tensiones, desplazamientos, calor, etc. Se toma como ejemplo una masa  $m$  sujeta a un muelle, (con una rigidez  $k$ ) y situada a una altura  $h$ , de una superficie rígida. La masa se desplaza una magnitud  $u$  hacia abajo, por la aceleración de la gravedad  $g$ , y hacia arriba por la fuerza de recuperación  $k$ , como se representa en la Figura 2.16. El sistema masa-muelle de la Figura 2.16 posee una

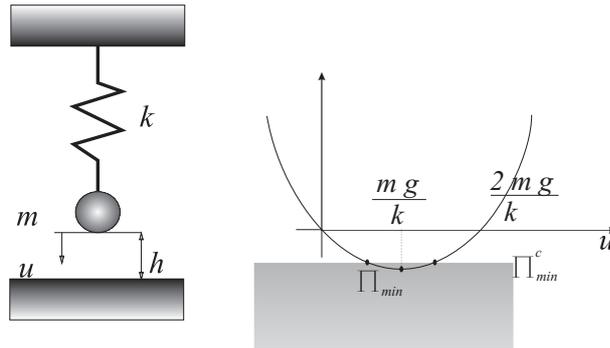


Figura 2.16: Representación gráfica y energética del sistema muelle-masa-superficie

energía cinética dada por la siguiente ecuación:  $\frac{1}{2}ku^2$  y una energía potencial dada por  $m g u$ . La energía total del sistema es estacionaria y es igual a la suma de la energía potencial más la energía cinética:

$$(2.89) \quad \Pi(u) = \frac{1}{2} k u^2 - m g u$$

Para calcular los valores extremos (máximos y mínimos) de la función de energía, se deriva ésta respecto del desplazamiento y se iguala el resultado a cero:

$$(2.90) \quad k u \, du - m g \, du = 0$$

Despejando el desplazamiento  $u$ , se obtiene

$$(2.91) \quad u = \frac{m g}{k}$$

La masa sujeta al muelle tiene una limitación en su desplazamiento determinada por la superficie rígida, que bloquea su avance. La restricción de desplazamientos  $c(u)$  se establece en función de:

$$(2.92) \quad h - u = c(u)$$

Si  $c(u) > 0$  entonces  $u < h$ , es decir, hay desplazamiento libre del sistema muelle-masa. De lo contrario, cuando  $c(u) = h - u \leq 0$  existirá contacto. La variación del diferencial de

desplazamiento  $du$  está limitada por la superficie de contacto, por esta razón, el desplazamiento virtual que cumple la restricción de la superficie rígida, se desplaza hacia arriba. Al expresar de forma simbólica la anterior premisa se obtiene la desigualdad variacional:

$$(2.93) \quad k u \, du - m g \, du \geq 0$$

Si  $h = u$ , (es decir, cuando  $u$  es máximo), la energía cinética es mayor que la energía potencial. Y en dicho caso se produce contacto. El punto mínimo de la ecuación de energía  $\Pi_{min}^c$  está determinado por la restricción de desplazamiento, tal como se presenta en la Figura 2.16. Se efectúa un cambio de variable del diferencial de desplazamiento en la ecuación 2.93:  $du = v_c - u$  en donde  $v_c$  es una función de prueba; esta función debe cumplir la condición  $v_c - h \leq 0$ . Al reemplazar en la ecuación 2.90 se obtiene

$$(2.94) \quad k u (v_c - u) - m g (v_c - u) = 0$$

Se debe cumplir la desigualdad  $m g > k u$  para que exista contacto entre la masa y la superficie rígida:

$$(2.95) \quad k u (v_c - u) \geq -m g (v_c - u) = 0$$

Al cumplirse la anterior desigualdad aparece la fuerza de reacción  $R_N$ , ver Figura 2.17. En la mecánica de contacto clásica, se supone que la fuerza de reacción entre la superficie rígida y la masa soportada por el muelle es negativa; es decir, la superficie rígida es sometida únicamente a compresión por la masa, como se describe en la ecuación 2.96:

$$(2.96) \quad R_N \leq 0$$

Lo anterior es válido si las fuerzas de adhesión entre la masa y el muelle son iguales a cero. De la anterior desigualdad se infiere que existen 2 estados; uno de compresión, cuando  $R_N < 0$ , y otro inactivo, con una fuerza de reacción  $R_N = 0$ . Resumiendo, las condiciones de restricción de contacto son:

- Cuando la rigidez del muelle es lo suficientemente grande para sostener la masa  $m$  sin tocar la superficie rígida, se cumplen estas condiciones:

$$(2.97) \quad c(u) > 0 \quad y \quad R_N = 0$$

- Si la fuerza de gravedad  $m g$  es mayor que la fuerza elástica  $k u$ , hay contacto y se verifican las condiciones

$$(2.98) \quad c(u) = 0 \quad y \quad R_N < 0$$

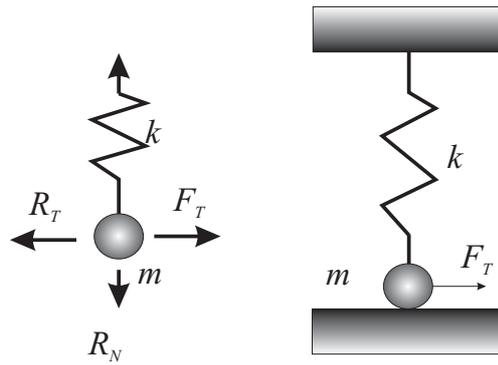


Figura 2.17: Sistema masa-muelle con contacto y fuerza tangencial

La combinación de las anteriores premisas es conocida en mecánica de contacto como las restricciones de Hertz-Signorini-Moreau [74], análogas a las condiciones de Kuhn-Tucker [55] [68] (ecuación 2.34) usadas en plasticidad y daño. Formuladas en este contexto se expresan como

$$(2.99) \quad c(u) \geq 0, \quad R_n \leq 0 \quad y \quad R_N c(u) = 0$$

### 2.7.2. Fricción aplicada al contacto unidimensional

Para explicar el contacto con rozamiento, se utilizará el sistema masa-muelle 2.17, en el cual se observa que sólo si hay contacto puede haber rozamiento, es decir el contacto es una condición necesaria para que exista fricción. Este comportamiento se describe utilizando el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio que relacionan las fuerzas horizontales y verticales:

$$(2.100) \quad \begin{aligned} R_N + mg - kh &= 0 \\ R_T - F_T &= 0 \end{aligned}$$

Para una mejor comprensión del anterior sistema de ecuaciones, se recomienda ver la Figura 2.17. La fricción entre la masa y el soporte rígido se caracteriza por una ecuación constitutiva. Para este ejemplo, en particular, se utiliza la ley de Coulomb [75]. El modelo constitutivo de Coulomb considera dos casos, deslizamiento y bloqueo; tiene lugar el bloqueo cuando no hay desplazamiento tangencial relativo entre la masa y el soporte rígido. El deslizamiento sucede cuando aparece el desplazamiento relativo  $u_T$ , entre la masa y el soporte rígido. El siguiente conjunto de condiciones, describe la fricción a partir del modelo constitutivo de Coulomb.

- La desigualdad 2.101, determina la relación entre las fuerzas normales  $R_N$  y tangenciales  $R_T$ :

$$(2.101) \quad f(R_N, R_T) = |R_T| + \kappa R_N \leq 0$$

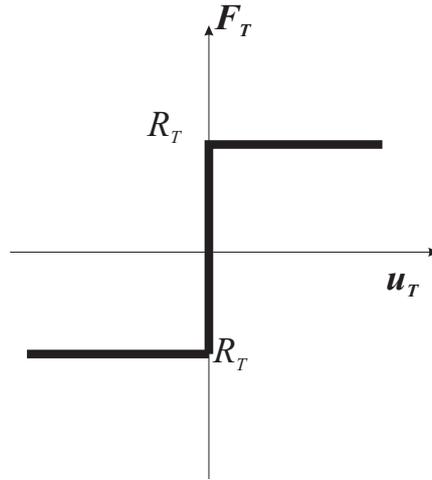


Figura 2.18: Modelo de rozamiento de Coulomb

Siendo  $R_T$  la fuerza horizontal,  $\kappa$  el coeficiente de rozamiento y  $R_N$  la fuerza normal.

- El bloqueo ocurre si se cumple la siguiente desigualdad:

$$(2.102) \quad |R_T| < \kappa R_N$$

Es decir cuando la fuerza tangencial es menor que la fuerza normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento.

- Hay deslizamiento, cuando la fuerza normal es igual o menor que la fuerza tangencial, es decir:

$$(2.103) \quad |R_T| \geq \kappa R_N$$

Las anteriores condiciones, escritas en la forma de Khun-Tucker 2.34 son:

$$(2.104) \quad |u_T| \geq 0 \quad f < 0 \quad |u_T| f = 0$$

El desplazamiento  $u_T$  es independiente de la dirección de la fuerza  $F_T$ . En la Figura 2.18 se ilustran los casos de deslizamiento y bloqueo, en función del desplazamiento y de las fuerzas tangenciales.

### 2.7.3. Multiplicadores de Lagrange aplicados al contacto unidimensional

El problema de contacto está determinado por la desigualdad  $c(u) = h - u \geq 0$ , que establece la restricción de desplazamiento de la masa. La solución se puede obtener

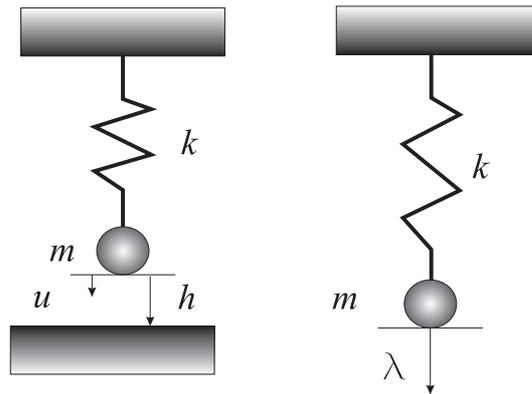


Figura 2.19: Sistema masa-muelle con multiplicador de Lagrange

utilizando multiplicadores de Lagrange. El método de los multiplicadores de Lagrange, añade un multiplicador a la ecuación de la energía, es decir, que a la energía potencial  $m g h$  y a la energía del muelle  $\frac{1}{2} k u^2$ , se le suma un término  $\lambda c(u)$ . De esta manera, el potencial se puede escribir de la siguiente forma general:

$$(2.105) \quad \Pi(u, \lambda) = \frac{1}{2} k u^2 - m g u + \lambda c(u)$$

El multiplicador de Lagrange  $\lambda$  es equivalente a la fuerza normal de reacción  $R_N$ . Independizando los diferenciales  $du$  y  $d\lambda$ , se obtienen las expresiones

$$(2.106) \quad k u du - m g du - \lambda du = 0$$

$$(2.107) \quad c(u) d\lambda = 0$$

La ecuación 2.106 determina el equilibrio cuando la masa entra en contacto con la superficie rígida, (ver Figura 2.19). La fórmula 2.107 muestra la fuerza que se ejerce cuando hay contacto, es decir:

$$(2.108) \quad \lambda = k h - m g = R_N$$

Los multiplicadores de Lagrange se activan cuando hay contacto, (esta información se obtiene calculando la fuerza  $R_N$ ).

#### 2.7.4. Modelo de penalización aplicado al contacto unidimensional

Para modelar numéricamente la interfaz que permite el deslizamiento de la barra de acero dentro de la funda de mortero, se utiliza el método de contacto por penalización. El método de

contacto por penalización es utilizado en el análisis por elementos finitos. Activa las restricciones sumando el término de penalización a la rigidez, y de esta forma, permite incrementar el potencial natural [76]. La Figura 2.20 ilustra la formulación utilizada. El potencial de energía viene dado

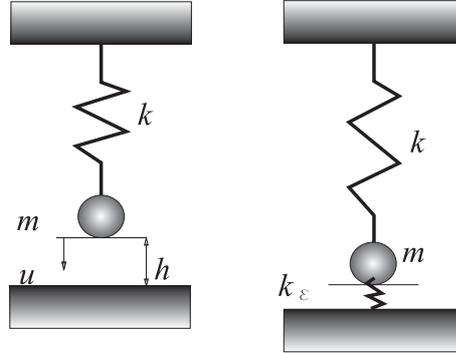


Figura 2.20: Modelo de contacto de penalización

por

$$(2.109) \quad \Pi(u) = \frac{1}{2}k u^2 - m g u + \frac{1}{2} k_{\epsilon} [c(u)]^2 \quad \forall$$

El parámetro  $k_{\epsilon}$  es la rigidez de la superficie de contacto, y a la vez, se conoce como *parámetro de penalización*. La condición de equilibrio surge de la estacionariedad del problema.

$$(2.110) \quad k u \, du - m g \, du - k_{\epsilon} c(u) \, du = 0$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior se obtiene

$$(2.111) \quad u = \frac{m g + k_{\epsilon} h}{k + k_{\epsilon}}$$

La ecuación 2.111 determina la posición de la masa sujeta al muelle en cualquier instante  $t$ . El valor de la restricción, para casos en que haya penetración de la masa sujeta al muelle sobre la superficie, viene dado por la ecuación (2.112):

$$(2.112) \quad c(u) = h - u = \frac{k h - m g}{k + k_{\epsilon}}$$

En un caso de contacto, en que  $m g > k h$  la masa penetra en la superficie rígida, y esto, físicamente, equivale a la compresión de un muelle. La ecuación de restricción se cumple únicamente si:

$$(2.113) \quad \lim_{k_{\epsilon} \rightarrow +\infty} c(u) = \lim_{k_{\epsilon} \rightarrow +\infty} \frac{k h - m g}{k + k_{\epsilon}} = 0$$

En el método de penalización se consideran dos casos límite:

$$(2.114) \quad \begin{cases} 1) k_\epsilon \rightarrow \infty & \text{Sin penetración (restricción total de la penetración)} \\ 2) k_\epsilon \rightarrow 0 & \text{Gran penetración (sin restricción)} \end{cases}$$

Dicho de otra manera, en el caso en que  $k_\epsilon \rightarrow \infty$ , el valor de la rigidez del muelle es muy grande, y la penetración tiende a cero. El caso 2, representa una solución libre en el que la rigidez de la superficie de contacto es muy pequeña y ello conduce a una gran penetración. La fuerza de reacción en el método de penalización se calcula como se indica a continuación (ver [76]).

$$(2.115) \quad R_N = \lambda = k_\epsilon c(u) = \frac{k_\epsilon}{k + k_\epsilon} (k h - m g)$$

Para resolver el problema de la distancia mínima en el contacto de penalización, se utiliza la ecuación de potencial energético total (ver [76]):

$$(2.116) \quad \Pi_S = \frac{1}{2} \int_S \left( k_{\epsilon N} (\mathbf{g}_N^-)^2 + k_{\epsilon T} \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) dA, \quad k_{\epsilon N}, k_{\epsilon T} > 0$$

Los valores de  $k_{\epsilon T}$  y  $k_{\epsilon N}$ , representan la penalización del contacto tangencial y normal a la superficie, respectivamente.

$$(2.117) \quad C_c = \int_S \left( k_{\epsilon N} \mathbf{g}_N^- d\mathbf{g}_N^- + k_{\epsilon T} \mathbf{g}_T \cdot d\mathbf{g}_T \right) dA, \quad k_{\epsilon N}, k_{\epsilon T} > 0$$

La ecuación 2.117 determina si hay deslizamiento o bloqueo sobre la superficie de contacto. Las variables  $\mathbf{g}_N$ ,  $\mathbf{g}_N^-$  y  $\mathbf{g}_T$  determinan el contacto de forma tangencial y normal (ver [76]).



# 3. Comportamiento de barras de pandeo restringido

Este capítulo se divide en seis apartados. En el primer apartado se presentan los conceptos generales que corresponden al estudio del comportamiento estructural de las barras de pandeo restringido, en el segundo apartado se presenta el modelo de plasticidad acoplado con daño del acero, en el tercer apartado se presenta la ley de evolución de daño para el mortero, en el cuarto apartado se presenta el modelo de contacto tipo penalización en 3 dimensiones. En el quinto apartado se describe la formulación energética que integra los 3 modelos anteriores, en el sexto apartado se presentan diversos ejemplos de comprobación de los modelos definidos en el continuo en los apartados anteriores.

## 3.1. Conceptos generales

El comportamiento estructural de las barras de pandeo restringido debe analizarse en función de los materiales que la componen. En el presente trabajo se ha elaborado, para el acero, un modelo fenomenológico de plasticidad acoplado con daño escalar y para el mortero, un modelo fenomenológico constitutivo isótropo de daño; para el contacto se propone un micro modelo de contacto tipo penalización. El comportamiento de las BPR se describe numéricamente por medio de los modelos constitutivos que se detallan a continuación, cuya programación se ha realizado en Compaq Fortran Abaqus/Explicit [77], siguiendo una formulación explícita. Se utiliza una formulación explícita debido a que este problema está mal condicionado para ser resuelto de forma implícita ya que en una formulación implícita, donde hay necesidad de invertir la matriz de rigidez, el modelo de contacto de penalización introduce un mal condicionamiento en la matriz de rigidez generando problemas de singularidad. El comportamiento del acero del núcleo se representa mediante un modelo de endurecimiento isótropo y cinemático [55] [56], con

el fin de obtener dos tipos de curvas de histéresis y poder compararlas con ensayos realizados en Europa y EEUU, que se describen en las referencias [2] y [4]. El objetivo de esta estrategia es verificar que los lazos de histéresis obtenidos en los ensayos de laboratorio correspondan con los del modelo numérico. Se representan por separado las no linealidades del acero, del mortero y de la interfaz entre el acero del núcleo y el mortero. Finalmente, estos modelos se acoplan mediante un balance energético global. Los lazos de histéresis obtenidos en los ensayos de laboratorio presentan un comportamiento casi ideal [15] de la plasticidad perfecta en el acero. Es como si no hubiese pandeo en una barra sin recubrimiento. Por esta razón es muy importante el modelo fenomenológico constitutivo del acero, para el que se establecen dos endurecimientos plásticos, uno cinemático y otro isótropo. El endurecimiento cinemático consiste en introducir un cambio de posición del centro de la superficie de discontinuidad. El endurecimiento isótropo, permite controlar el cambio en la resistencia producida por el fenómeno plástico y esto se materializa como un cambio homotético de la función umbral de plastificación. El modelo se implementa en función del tensor tangente elastoplástico, utilizando el algoritmo de retorno radial. En las gráficas de los resultados experimentales [1], [4] y [2]. En las gráficas (fuerza vs. deformación) de las BPR, estas llegan primero a plastificación por tracción que por compresión. Este fenómeno será representado por un micro modelo de contacto, tipo penalización. Se ha tenido en cuenta este tipo de modelo previendo que el núcleo de acero sometido a grandes desplazamientos pueda pandear y penetrar en el mortero circundante. Por ello se ha escogido el modelo de contacto tipo penalización, porque tiene en cuenta la penetración de una superficie maestra sobre otra esclava. Esto se representa numéricamente penalizando la matriz de rigidez, es decir colocando un muelle de gran rigidez entre las superficies de acero y mortero. Este valor de rigidez del muelle se representa numéricamente en los elementos que no pertenecen a la diagonal principal de la matriz de rigidez. Los grandes valores sobre una matriz, al invertirla, generan un gran coste computacional por la casi singularidad de ésta. Por esta razón se utiliza el análisis dinámico explícito, porque no requiere invertir la matriz de rigidez. Para el mortero se desarrolla un modelo isótropo de daño de ablandamiento exponencial, es decir, que va a existir degradación del material y pérdida de rigidez hasta llegar a la falla. La finalidad es cuantificar numéricamente en qué punto pueda haber rotura del revestimiento y, por ende, pandeo en el núcleo de acero. Se ha incorporado el modelo propuesto por [78] por ser un modelo fiable y de bajo coste computacional, agilizando la convergencia del análisis, ya que, cuando se lleva a cabo el análisis, hay que hacer múltiples iteraciones. Cada uno de los modelos anteriormente citados será explicado de forma analítica. Por último, se presenta un ejemplo de comprobación para cada caso. Al obtener los

resultados numéricos esperados por separado, de cada material, es decir, al comprobar que, en realidad, hay endurecimiento cinemático e isótropo en el acero, que hay transferencia de tensiones del acero al mortero y que el mortero está representado por un modelo isótropo de daño, se ensambla el modelo global. Esta operación se efectúa poniendo especial atención en que el balance energético sea estable, es decir, que la sumatoria de las energías permanezca constante. Y esto se consigue calculando y actualizando, para cada instante de tiempo, las energías internas y la energía disipada por efectos inelásticos. Las energías se calculan por separado para cada uno de los materiales y luego se suman. Por último se comprueba que el modelo funciona al aplicarle acortamientos al núcleo de la barra de pandeo restringido, hasta que la camisa de mortero falle y pandee el núcleo interno. En este simple ejemplo se observa que cuando se plastifica el acero, se transfiere la tensión de la barra de acero al núcleo. En resumen, se estudian los modelos de plasticidad del acero, el daño en el mortero y contacto entre el acero y el mortero. Se hace necesaria la definición, implementación de los modelos de daño para el mortero, de daño y de plasticidad cinemática e isótropa para el acero y de contacto tipo penalización para la interfaz. Toda esta formulación, es apropiada para tratar las barras de pandeo restringido, se convierte en una herramienta útil para cuantificar el comportamiento de estos dispositivos. A continuación se presenta una descripción de los modelos formulados en el contexto de la mecánica de medios continuos con sus respectivos algoritmos y ejemplos de comprobación.

## 3.2. Modelo de daño y plasticidad para el acero

### 3.2.1. Introducción y definición fenomenológica

En el apartado 2.5 se describe la plasticidad en una dimensión y en tres dimensiones. En este apartado se presenta una formulación elasto-plástica acoplada con daño desarrollada por el autor, para representar el comportamiento del núcleo de acero de los disipadores de energía previamente descritos. La formulación está desarrollada en *pequeñas deformaciones* y se utiliza dentro de una configuración en *grandes desplazamientos* para representar el fenómeno de inestabilidad elástica, producido por la compresión que sufren estas barras. Hay evidencias en el comportamiento del acero, de que el daño y la plasticidad actúan juntamente [79], [80]. Sin embargo, el fenómeno de degradación de rigidez (daño) y las deformaciones permanentes (plasticidad), son de naturaleza muy distinta y no pueden ser simulados mediante un único modelo fenomenológico. Por este acoplamiento se desarrolla una formulación para tratar ambos fenómenos simultáneamente. Todos los mecanismos de daño tienden a producir deformaciones

plásticas en los metales, porque el área efectiva  $\bar{A} = (1 - d)A$  (parte no dañada del material) disminuye mientras la variable de daño crece. Sin embargo, no existe un “acoplamiento de estado”, sino a través del concepto de disminución de área efectiva. En resumen, el acoplamiento es indirecto y sólo aparece en las ecuaciones constitutivas, debido a que el aumento de la tensión efectiva  $\bar{\sigma}$  produce plasticidad, como consecuencia de la disminución de la sección donde incide (la acción producida por el daño), descrita en la Figura 3.1. En metales, mientras las deformaciones

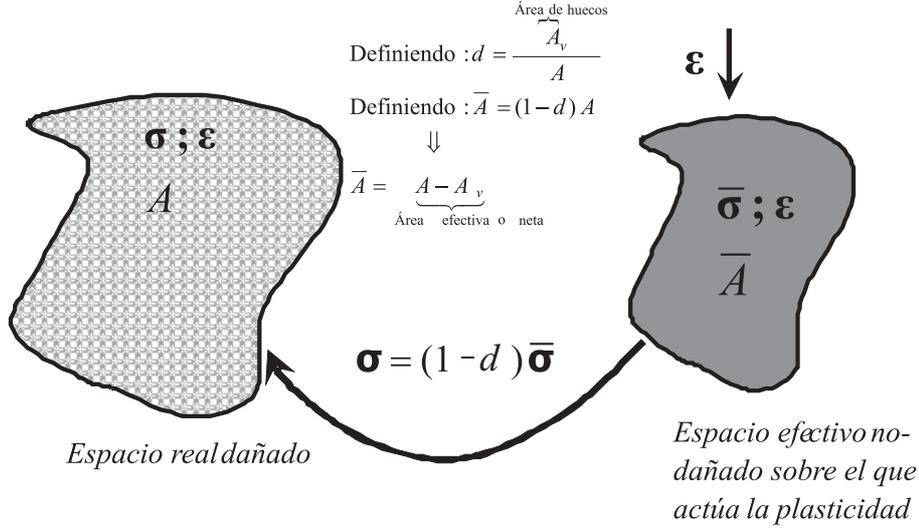


Figura 3.1: Representación esquemática del comportamiento conjunto de la plasticidad y del daño, al superar el segundo umbral en el espacio de tensiones.

plásticas  $\epsilon_p$  crecen desde cero, el daño permanece nulo durante la nucleación de micro fisuras [79]. Esto corresponde a la acumulación de micro-tensiones o dislocaciones en metales que generan estas micro-fisuras. Significa que existe un umbral de deformación permanente, por debajo del cual no se produce daño. Por esta razón, en este trabajo se introduce un modelo de plasticidad con endurecimiento isótropo y cinemático, que comienza a actuar después de alcanzar el **primer umbral** de discontinuidad plástica  $\bar{F}(\sigma - \eta; \mathbf{q}) = f(\sigma - \eta) - f_y \leq 0$ . Este comportamiento plástico, está controlado por un endurecimiento isótropo a través de evolución de la resistencia del umbral de plasticidad ( $\bar{f}_y > 0$ ), y el endurecimiento cinemático para tratar el efecto Bauschinger [81], es abordado en forma simple en el sentido de Prager y Melan [82], como  $\dot{\eta} = c_k \epsilon_p$ , en la cual el factor  $c_k$  tiene la forma  $c_k = \frac{2}{3} H_k$ , cuando se utiliza la función potencial de von Mises, y  $H_K$  es un parámetro del material a determinar. En este caso particular la función de tensión está representada por la expresión de von Mises  $f(\bar{\sigma} - \eta) = \sqrt{\frac{3}{2} dev(\sigma - \eta) : dev(\sigma - \eta)}$  y el endurecimiento isótropo por la expresión  $\bar{f}_y = f_y^0 + H_I \bar{\epsilon}_p > 0$ , con  $H_I$  como módulo de endurecimiento isótropo.  $\epsilon_p = |\epsilon_p|$  es la deformación plástica uniaxial equivalente, y  $\mathbf{q}$  el

grupo de variables internas plásticas que, en este caso, incluye la función de endurecimiento  $\mathbf{q} \equiv \bar{f}_y$ . Cuando el estado de tensión efectiva supera este primer umbral plástico, el proceso mecánico elastoplástico incrementa el tamaño de la función umbral de plasticidad, manteniendo su forma, hasta alcanzar el **segundo umbral**, en este caso establecido por la función de daño  $\mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; r) = G[\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[r] \leq 0$ , ya presentada en el apartado 2.6. Superado este **segundo umbral** en el espacio de tensiones, la plasticidad con endurecimiento y el daño con ablandamiento se comportan en forma acoplada. Este estado mecánico de comportamiento acoplado se consigue a nivel constitutivo gracias al concepto de tensión efectiva antes mencionado. En la Figura 3.2 se representa gráficamente el dominio de las funciones de daño y de plasticidad en el espacio tensional.

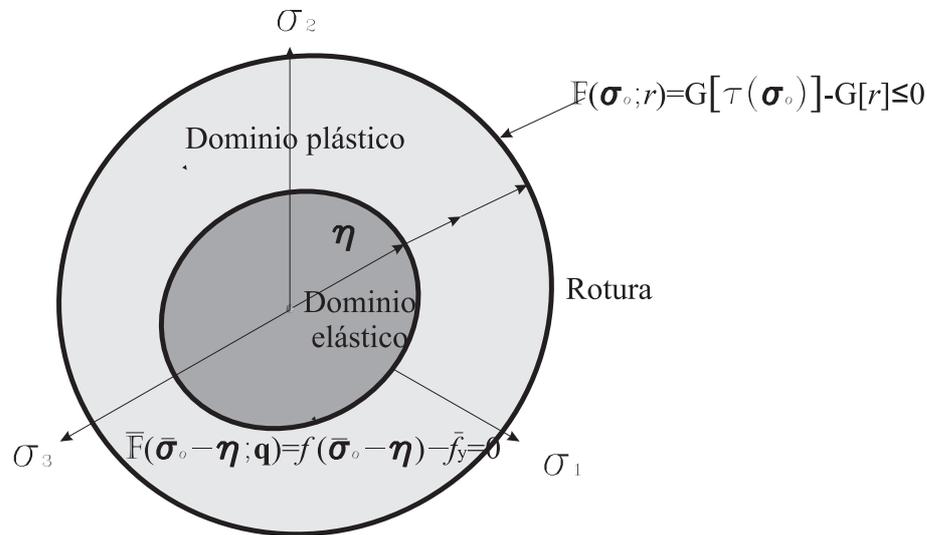


Figura 3.2: Representación esquemática del comportamiento de los umbrales de plasticidad y daño en el espacio de las tensiones.

### 3.2.2. Modelo de daño escalar acoplado con plasticidad

#### Introducción

El modelo de daño y los conceptos introducidos en el subapartado 3.2.1 y en [78] se refieren a un material sin plasticidad. Cuando se formulan modelos en los que entran en juego las leyes del daño y las leyes de endurecimiento plástico a la vez, surgen distintas posibilidades en relación a si el daño aparece, o no, en los términos de la energía libre asociados al fenómeno plástico. Concretamente, se podrían presentar diferentes casos [83], pero particularmente en este trabajo se utiliza un modelo de daño y plasticidad acoplado en forma débil, en el cual la fuerza

termodinámica asociada al daño es la misma que en el modelo de daño simple descrito en el apartado 3.3,  $f(\tau) = \frac{\partial \Psi}{\partial d}$  y la función de discontinuidad  $f(\tau)$  coincide con la energía libre  $\Psi^0$ . Esta formulación simplemente considera que no hay acoplamiento entre el daño y el endurecimiento plástico. Así, este enfoque consiste en considerar separadamente los dos mecanismos de daño y plasticidad y sus correspondientes funciones umbrales. Se tienen entonces dos potenciales de disipación independientes y dos factores de consistencia (multiplicadores de Lagrange) de plasticidad  $\dot{\gamma}$  y daño  $\dot{\mu}$  independientes.

$$(3.1) \quad \bar{\mathbb{F}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\eta}; \mathbf{q}) = f(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\eta}) - \bar{f}_y \leq 0$$

$$(3.2) \quad \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; r) = G[\tau(\boldsymbol{\sigma}_0)] - G[r] \leq 0$$

$$(3.3) \quad \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \bar{\mathbb{F}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\eta}; \mathbf{q})}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}$$

$$(3.4) \quad \dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \mathbb{F}(\boldsymbol{\sigma}_0; r)}{\partial \tau}$$

Los multiplicadores  $\dot{\gamma}$  y  $\dot{\mu}$  se determinan a partir de las condiciones de consistencia plástica  $\dot{\bar{\mathbb{F}}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\eta}; \mathbf{q}) = 0$  y de daño  $\dot{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\sigma}_0; r) = 0$ , respectivamente; donde  $\mathbf{q}$  representa el grupo de variables internas plásticas. Este enfoque tiene la ventaja de permitir la construcción de leyes independientes, (pero acopladas por medio del concepto de tensión efectiva) entre la plasticidad y el daño. En particular, y según se regulen los umbrales de plasticidad y daño, se describe el caso de daño frágil, en el que no se producen deformaciones plásticas significativas, por ejemplo como en el hormigón, cerámicos y compuestos cerámicos. Por el contrario ocurren deformaciones plásticas importantes sin que se produzca daño como en el caso de corte puro en aleaciones metálicas.

### Bases termodinámicas

Para introducir la plasticidad y el daño simultáneamente se utiliza la siguiente expresión para la energía libre de Hwlmotz:

$$(3.5) \quad \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}_p, \mathbf{q}, d) = (1 - d) \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) - \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}_p + \Psi^p(\boldsymbol{\sigma}_p, \mathbf{q})$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}_p$  es la tensión de relajación plástica,  $\Psi^p$  un potencial plástico,  $\mathbf{q}$  un conjunto de variables internas plásticas y  $\Psi^0(\boldsymbol{\epsilon})$  la energía libre del material no-dañado; está se expresa como:

$$(3.6) \quad \Psi^0(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{E}^0 : \boldsymbol{\epsilon}$$

Resultando la disipación [84].

$$(3.7) \quad \Xi = \bar{\sigma} : \dot{\epsilon} - \dot{\Psi}^0 = \bar{\sigma} : \dot{\epsilon} - (1-d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + d \dot{\Psi}^0 + \dot{\epsilon} : \sigma_p + \epsilon : \dot{\sigma}_p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_p} : \dot{\sigma}_p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}}$$

$$= \left\{ \bar{\sigma} - \left[ (1-d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \epsilon} - \dot{\sigma}_p \right] \right\} : \epsilon + d \dot{\Psi}^0 + \left[ \dot{\epsilon} - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_p} \right] : \dot{\sigma}_p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} \geq 0$$

De esta expresión surge la ecuación constitutiva secante que gobierna el comportamiento del material tras aplicar las condiciones de Coleman [73]:

$$(3.8) \quad \sigma = (1-d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \epsilon} - \sigma_p$$

$$(3.9) \quad \epsilon = \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_p}$$

También se deducen las desigualdades de la disipación producida por los procesos de daño y plasticidad:

$$(3.10) \quad \Xi^d = \Psi^0 \dot{d} \geq 0 \quad y \quad \Xi^p = -\frac{\partial \Psi^p}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} \geq 0$$

La variable termodinámica conjugada para el daño resulta:

$$(3.11) \quad f(\tau) = -y = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} = \Psi^0$$

$y$  es una variable termodinámica de daño.

### 3.2.3. Reglas de evolución de la plasticidad y el daño

El modelo que se presenta utiliza un acoplamiento con dos factores de consistencia, uno plástico  $\gamma$  y otro de daño  $\mu$ , y dos potenciales independientes para daño y plasticidad. La evolución del daño se describe en el subapartado 3.2.1 y en [78], mientras que a continuación se presenta la formulación del problema plástico que enlaza con esta formulación del daño.

#### Respuesta plástica

De acuerdo a lo mencionado en el subapartado 3.2.2, la respuesta plástica debe ser formulada en el espacio de tensiones efectivas presentado en la Figura 3.2 y en tal sentido se formula la función umbral de plasticidad en dicho espacio como

$$(3.12) \quad f(\bar{\sigma} - \eta) = \sqrt{\frac{3}{2} dev(\bar{\sigma} - \eta) : dev(\bar{\sigma} - \eta)} - \bar{f}_y$$

Utilizando la hipótesis de plasticidad asociada y la condición de consistencia plástica, se obtienen las ecuaciones que describen la evolución de la respuesta plástica, en el espacio de deformaciones:

$$(3.13) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \dot{\bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} : \dot{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \dot{\mathbf{q}} = 0$$

Siendo:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}} &= \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} \right)}_{\mathbb{E}^0 \equiv \bar{\mathbb{E}}} : \dot{\epsilon} - \dot{\bar{\sigma}}_p \\ \dot{\bar{\sigma}}_p &= \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \epsilon} = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} \\ &\quad \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \left( \dot{\epsilon} - \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right) \\ &\quad \mathbf{q} = \dot{\gamma} \mathbf{h} \end{aligned}$$

Resultando de la ecuación 3.13 el factor de consistencia plástico:

$$(3.15) \quad \dot{\gamma} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \dot{\epsilon}}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right] - \left[ c_k \frac{\partial f}{\partial \eta} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} \right]} \quad \forall \quad \dot{\gamma} \geq 0$$

La relación tangente efectiva se expresa como:

$$(3.16) \quad \dot{\bar{\sigma}} = \bar{\mathbb{E}}^T : \dot{\epsilon}$$

Donde el tensor elastoplástico tangente efectivo resulta:

$$(3.17) \quad \bar{\mathbb{E}}^T = \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} - \frac{\left[ \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right] \otimes \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} \right]}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right] - \left[ c_k \frac{\partial f}{\partial \eta} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} \right]}$$

Este tensor es simétrico si se trabaja con plasticidad asociada. A las definiciones previamente enunciadas, deben añadirse las condiciones de fuerza/descarga plástica en el espacio de las tensiones efectivas [73]:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbb{F}}(\bar{\sigma} - \eta; \mathbf{q}) &= \mathbb{F}(\bar{\sigma} - \eta) - \bar{f}_y \leq 0 ; \\ \dot{\gamma} &\geq 0 ; \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma} \bar{\mathbb{F}}(\bar{\sigma} - \eta; \mathbf{q}) = \dot{\gamma} [\mathbb{F}(\bar{\sigma} - \eta) - \bar{f}_y] = 0$$

### Respuesta de daño

Las variables termodinámicas, las funciones umbral y el parámetro de consistencia de daño se presentan en el subapartado 3.3.

### 3.2.4. Tensor elastoplástico dañado tangente

El tensor constitutivo tangente, obtenido en la ecuación 3.17, corresponde al problema elastoplástico en el espacio de tensiones efectivas. Sin embargo, el problema acoplado daño-plasticidad exige que este tensor sea trasladado al espacio real, donde es afectado por la influencia del daño. Así, el tensor tangente en el espacio de tensiones reales se deduce de la expresión siguiente (ver referencia [85]):

$$(3.19) \quad \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \boldsymbol{\sigma}_p = (1 - d) \left( \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_p \right) = (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d) \bar{\mathbb{E}}^T : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{H}{\tau} \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E}^T : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$(3.20) \quad \mathbb{E}^T = (1 - d) \bar{\mathbb{E}}^T - \frac{H_D}{\tau} \left( \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \right)$$

Y resulta, en general, no simétrico, salvo en dos casos:

1.  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \Psi^0}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}$ , lo cual implica  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^p = 0$ ; es decir, para daño puro sin plasticidad.
2. Plasticidad asociada y  $H_D = 0$ ; es decir, en ausencia de daño.

### 3.2.5. Algoritmo del modelo de daño escalar acoplado con plasticidad

Se resuelve el problema en forma desacoplada, primero el problema de daño y luego el plástico, en forma iterativa, mediante un algoritmo de tipo retorno mapeado. En la Tabla 3.1 se presenta el algoritmo implementado.

## 3.3. Modelo isótropo de daño para el mortero

### 3.3.1. Introducción y definición fenomenológica

En el apartado 2.6 se presentan diferentes leyes de evolución de daño o de ablandamiento. Kashanov [67] fue el primero en proponer un modelo constitutivo de daño. Se han estudiado varias teorías de daño: [86], [87], [88], [89], [90] y [91] entre otras. El modelo numérico requiere conocer cuándo falla el mortero, es decir, cuál es el límite de bifurcación [92] o pandeo [93] del núcleo de acero, con el objeto de que al generar el modelo se pueda determinar con fiabilidad cuando empieza a pandear la barra. Esto no sería posible si no se asignase un modelo constitutivo de daño al mortero. A continuación se presenta la ley de evolución del modelo de daño implementado en Abaqus/Explicit.

1. Obtención del campo de deformaciones en la etapa enésima;  $\epsilon^n$
2. Calculo del predictor elástico  $r^n$  y del umbral de daño  $d^n$
3. Evaluación de la energía libre no dañada  $(\Psi^0) = \frac{1}{2}\epsilon^n : \mathbb{E}^0 : \epsilon^n$
4. Evaluación de la energía de daño  $\tau^n = \tau (\Psi^0)^n$
5. Verificación del daño: si  $\mathbb{F}(\sigma_0; r)^n = G[\tau^n(\sigma_0)] - G[r^n] \leq 0$  no hay daño.
6. Evolución del daño. Evaluación de la variable de daño  $d^n = G(\tau^n)$
7. Actualización del umbral de daño:  $r^n = \tau^n$
8. Predictor elástico:  $r^n = 0$   $(\bar{\sigma}_p)_0^n = (\bar{\sigma}_p)^{n-1}$ ;  $(\mathbf{q})_0^n \equiv (\bar{f}_y) = (\bar{f}_y)^{n-1}$ ;  $(\bar{\sigma})_0^n = \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \epsilon}\right)^n - (\bar{\sigma}_p)_0^n$ ;  $(\dot{\boldsymbol{\eta}})_0^n = c_k (\dot{\epsilon}_p)_0^n$
9. Verificación de la condición de la superficie de discontinuidad plástica  $\bar{\mathbb{F}} = (\bar{\sigma} - \boldsymbol{\eta}; \mathbf{q})_k^n = \mathbb{F}(\bar{\sigma} - \boldsymbol{\eta})_k^n - (\bar{f})_k^n \leq 0$ . Si no hay evolución plástica se continúa en el punto 14.
10. Evolución del proceso plástico. Iteración.
11. Cálculo del parámetro de consistencia plástica

$$\Delta\gamma = \frac{f_k^n}{\left\{ \left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} : \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial \epsilon \otimes \partial \epsilon} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \right] - \left[ c_k \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} : \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} : \mathbf{h} \right] \right\}_k^n}$$

12. Actualización de las variables plásticas y de la tensión efectiva:  $(\bar{\sigma}_p)_k^n = (\bar{\sigma}_p)_{k-1}^n + \Delta\gamma_k \left(\frac{\partial f}{\partial \epsilon}\right)_{k-1}^n$ ;  $(\mathbf{q})_k^n = (\mathbf{q})_{k-1}^n + \Delta\gamma_k (\mathbf{h})_{k-1}^n \equiv (\bar{f}_y)_k^n = \bar{f}_y = \bar{f}_y^0 + H_p \bar{\epsilon}_p$   
 $(\dot{\boldsymbol{\eta}})_k^n = c_k (\dot{\epsilon})_k^n$ ;  $(\bar{\sigma})_k^n = \left(\frac{\partial \Psi^0}{\partial \epsilon_p}\right)^n - (\bar{\sigma})_k^n$
13. Regreso al punto 9
14. Fin del proceso de corrección plástica:

$$(\bar{\sigma}_p)^n = (\bar{\sigma}_p)_k^n; (\mathbf{q})^n = (\mathbf{q})_k^n; (\bar{\sigma})^n = (\bar{\sigma})_k^n \quad (\boldsymbol{\sigma})^n = (1 - d^n) (\bar{\sigma})^n$$

15. Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva

Tabla 3.1: Algoritmo de daño escalar acoplado con plasticidad

### 3.3.2. Ley de evolución de daño para el mortero

Los modelos de daño describen la degradación experimentada por el material mediante una variable escalar  $d$ , denominada *índice de daño o degradación*, cuyos valores están entre 0 (ausencia de daño) y 1 (daño total) [73]. Este coeficiente afecta el tensor de constantes elásticas iniciales  $\mathbb{E}_0$ , de tal forma que la relación constitutiva entre las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  y las deformaciones  $\boldsymbol{\epsilon}$  se indica mediante la siguiente expresión tensorial:

$$(3.21) \quad \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\epsilon}$$

El modelo de daño viene dado por  $\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbb{E}_0 : \boldsymbol{\epsilon}$ ; es destacable que si el modelo sin daño es isótropo, esta propiedad se mantiene en el modelo de daño escalar previamente presentado. La Figura 3.3 representa esquemáticamente la aplicación de un modelo de daño para describir el comportamiento uniaxial del mortero. En la Figura 3.3,  $E$  es el módulo de elasticidad y  $f'_c$

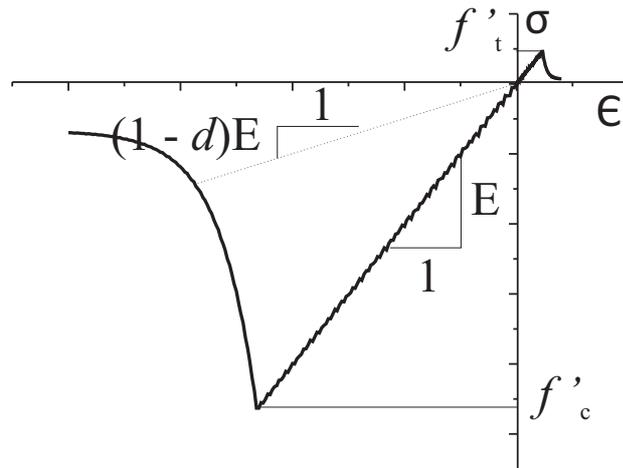


Figura 3.3: Modelo de daño del mortero

y  $f'_t$  representan las resistencias características a compresión y a tracción, respectivamente; en este trabajo éstas se consideran como las resistencias del mortero. Es destacable que se considera comportamiento lineal en las ramas de carga de compresión y de tracción. La aparición del daño se detecta mediante un umbral  $r$ ; inicialmente éste posee un valor  $r_0$  y a medida que la degradación progresa, su valor ( $r$ ) va aumentando. Ya que la degradación del mortero es irreversible,  $r$  debe ser igual o superior a  $r_0$ . El modelo de daño requiere el conocimiento del índice  $d$  en cada instante

del proceso de deformación; para ello se define una norma  $\tau$  del tensor de tensiones sin daño  $\sigma_0$  [73]:

$$(3.22) \quad \tau = \left( \theta + \frac{1 - \theta}{f'_c / f'_t} \right) \sqrt{\sigma_0 : \mathbb{E}_0^{-1} : \sigma_0}$$

En esta relación  $\theta$  es un coeficiente escalar que toma valores entre 0, en compresión triaxial, y 1 en tracción triaxial:

$$(3.23) \quad \theta = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_0^i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_0^i|}$$

En esta relación  $\sigma_0^i$  es la  $i$ -ésima tensión principal, considerando como positivas las tensiones de tracción. La norma  $\tau$  representa, pues, una medida de la energía por unidad de volumen, referida al comportamiento a tracción. La Figura 3.4 ilustra, en un instante del proceso mecánico, los límites del dominio elástico  $G(\tau) - G(r) = 0$  en el plano de tensiones principales  $\sigma_0^1 - \sigma_0^2$ . Se

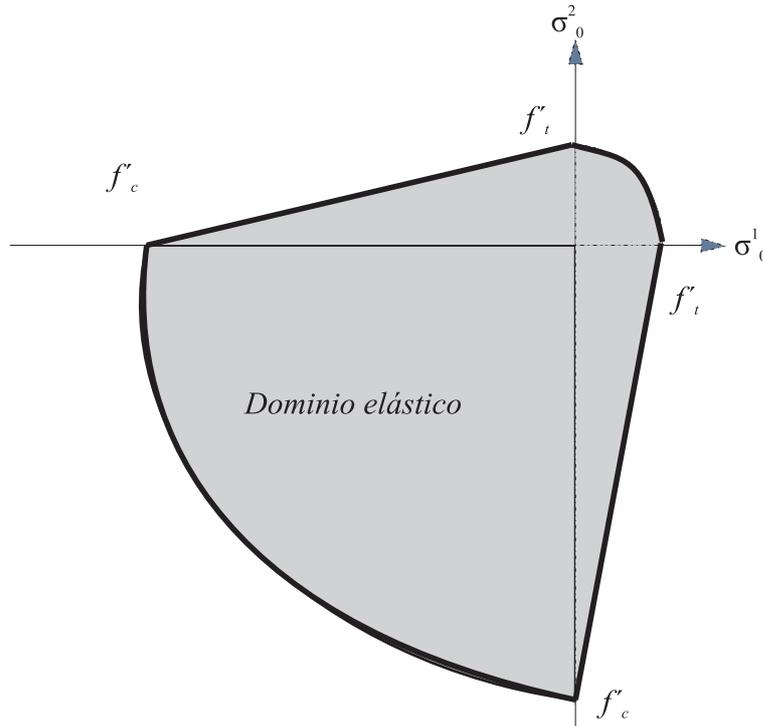


Figura 3.4: Dominio elástico del mortero en el espacio de las tensiones.

dice que un punto del sólido alcanza el estado de daño, cuando deje de cumplirse la condición  $F(\tau, r) \leq 0$ . La función  $F$  se expresa como:

$$(3.24) \quad F(\tau, r) = G(\tau) - G(r)$$

En esta definición,  $G$  debe ser una función monótona creciente que cuantifica la evolución del daño. En este trabajo se utiliza la siguiente función de evolución de umbral de daño [73].

$$(3.25) \quad G(r) = 1 - \frac{r}{r_0} e^{C\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)} \quad 0 < r_0 \leq r$$

En esta expresión se cumplen los siguientes valores de extremo.

$$(3.26) \quad \textit{Estado no dañado} : \quad \lim_{r \rightarrow r_0} G(r) = 0$$

$$(3.27) \quad \textit{Estado de daño total} : \quad \lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 1$$

$$(3.28) \quad C = \left( \frac{G_f^* E}{l^* f_t'^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1} \geq 0$$

$C$  es un parámetro adimensional positivo que expresa la reducción de pendiente de las ramas de descarga en el diagrama constitutivo de la Figura 3.3. El valor de  $C$  se obtiene integrando en el tiempo la disipación de energía producida por el daño [94], resultando: En esta expresión,  $G_f^*$  es la energía de fractura por unidad de área y  $l^*$  es una longitud característica del elemento finito utilizado en el análisis [95]. La definición de la norma  $\tau$ , (ec. 3.22), muestra que el umbral inicial de daño  $r_0$  está dado, en función de la resistencia a tracción, por:

$$(3.29) \quad r_0 = \frac{f_t'}{\sqrt{E}}$$

La evolución del índice de daño  $d$  y del umbral de daño  $r$  se rige por las relaciones

$$\dot{r} = \dot{\mu} \quad \dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial F}{\partial \tau} = \dot{\mu} \frac{dG}{d\tau}$$

$\mu$  es un parámetro de consistencia de daño que se utiliza para caracterizar las condiciones de carga o descarga mediante las relaciones de Kuhn-Tucker (ecuación 2.34):

$$(3.30) \quad \dot{\mu} \geq 0 \quad F(\tau, r) \leq 0 \quad \dot{\mu} F(\tau, r) = 0$$

La integración temporal de estas relaciones proporciona los valores actuales de  $d$  y de  $r$ :

$$(3.31) \quad d(t) = \int_0^t \dot{d}(s) ds = G[r(t)] \quad r(t) = \text{máx}[r_0, r(s)] \quad 0 \leq s \leq t$$

La integración de la ecuación constitutiva se implementa mediante un algoritmo que se presenta en la Tabla 3.2

1. Obtención del campo de deformaciones  $\epsilon$  en el tiempo  $t_c$
2. Obtención de  $C$  según ec. 3.28
3. Si  $t = 0$ , inicialización de  $r$  en  $r = 0$
4. Evaluación de las tensiones no dañadas  $\sigma_0 = \mathbb{E} : \epsilon$
5. Obtención de  $r$  a partir del valor máximo de la norma  $\tau$
6. Verificar se ha alcanzado el criterio de daño  $r^0 = r$
7. Actualización de las variables internas  $r = \max[r_0, r(\tau)]$  y  $d = G(r)$
8. Actualización de las tensiones  $\sigma = (1 - d) \sigma_0$
9. Fin

Tabla 3.2: Algoritmo de daño de evolución exponencial

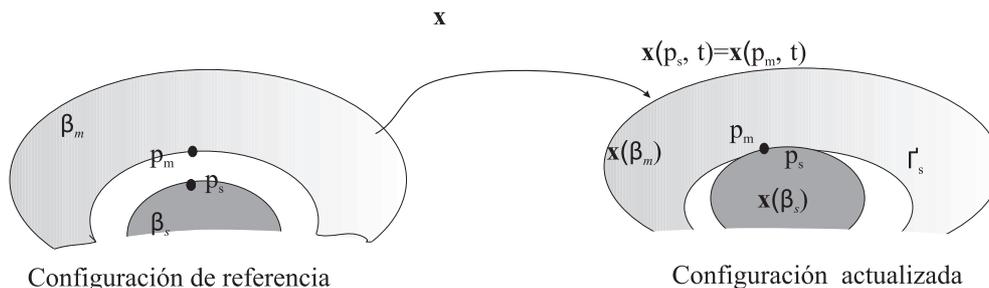


Figura 3.5: Descripción esquemática del contacto

### 3.4. Modelo de contacto para la interfaz acero-mortero

#### 3.4.1. Introducción y definición fenomenológica

En este apartado se presenta un modelo de contacto tipo **penalización** para establecer el comportamiento del acero con el mortero en las BPR, a partir del trabajo realizado por P. Wriggers [76], [96]. El contacto se formula para desplazamientos finitos. La barra de acero del núcleo es representada por  $\beta_s$ , y el mortero que la rodea está representado por  $\beta_m$  (ver Figura 3.5). Cuando el núcleo de acero se acorta, éste se aproxima al mortero, ya sea por pandeo o por efecto Poisson y las superficies del acero  $\Gamma_s$  (superficie maestra) y del mortero  $\Gamma_m$  (superficie esclava) pueden entrar en contacto. En la Figura 3.5 se presentan las configuraciones de referencia (inicial o lagrangiana) y (espacial, actualizada, o euleriana). Se fija un punto virtual en la superficie del acero  $p_s$  y otro punto sobre la superficie de mortero  $p_m$  en la configuración de referencia. En la configuración espacial, estos dos puntos tienen las mismas coordenadas espaciales  $\mathbf{x}(p_s) = \mathbf{x}(p_m)$  y por esta razón las condiciones de contacto se formulan respecto de la configuración espacial actualizada. Para saber si las superficies del acero  $\Gamma_s$  y del mortero  $\Gamma_m$  están en contacto se discretiza en puntos  $j_s$  la superficie del acero, y en puntos  $j_m$  la superficie del mortero. Las coordenadas espaciales de los puntos  $j_s$  y  $j_m$  se comparan, y si son iguales, se activa la restricción del contacto en los mismos, es decir:  $s \in j_s \subseteq j_m$ . El conjunto de puntos que cumple las anteriores condiciones se agrupa en la matriz  $G_c$  y la transferencia de fuerzas del acero al mortero se establece en la función  $R_N$  que representa la fuerza de compresión ejercida por la barra de acero sobre el mortero que la rodea:

$$(3.32) \quad R_N(u) - \mathbf{f}^{ext} = 0$$

En la ecuación (3.32)  $\mathbf{f}^{ext}$  es la fuerza externa aplicada. Para obtener la posición del cuerpo se *minimiza* el potencial energético total  $\Pi(u)$ . En el caso de la Figura 3.5, la minimización [97]

está expresada en función del conjunto de nodos que estén en contacto  $J(u)$  ( $p_m, p_s$ ), es decir:

- $\Pi(u)$  minimiza la distancia entre superficies.
- $G(u)$  es el conjunto de nodos en contacto.

### 3.4.2. Descripción cinemática del contacto

En desplazamientos finitos, la condición de penetración depende de la función de la distancia mínima entre dos superficies en contacto. Se consideran dos cuerpos con sus respectivos modelos constitutivos, para el núcleo de acero y el revestimiento, que está compuesto de mortero, delimitados ambos por la superficies  $\Gamma_s$ , para el acero y  $\Gamma_m$  para el mortero. El cuerpo  $\beta_q$  se refiere a ambos cuerpos ( $\beta_s$  y  $\beta_m$ ), esta notación se introduce para mayor comodidad en el desarrollo.  $\Gamma_n$  es la superficie que limita el cuerpo  $\beta_q$  y consta de cuatro partes:  $\Gamma_{n\sigma}$  es la superficie sobre la que actúan fuerzas exteriores,  $\Gamma_{nu}$  que es la superficie sujeta a desplazamientos impuestos,  $\Gamma_{nc}$  que representa la superficie que está en contacto y la superficie libre es  $\Gamma_{nf}$ .  $\mathbf{x}_n(\xi)$  establece las coordenadas de la configuración actualizada, en  $\mathbf{x}_n = \mathbf{X}_n + \mathbf{u}_n$ ,  $\mathbf{X}_n$  se entiende como la configuración de referencia del cuerpo  $\beta_n$ , y  $\mathbf{u}_n$  significa el campo de desplazamientos actualizado. Las coordenadas de los nodos del cuerpo  $\beta_m$  que convergen sobre el cuerpo  $\beta_s$  se expresan en las coordenadas convectivas  $\xi = (\xi_s, \xi_m)$ . En la Figura 3.6 el vector unitario  $\bar{\mathbf{n}}_s$  y el vector tangente no unitario  $\bar{\mathbf{U}}_s$  están en función de las coordenadas convectivas  $\xi$ . La barra superior designa un punto en particular cercano a  $\mathbf{x}_m$ . El límite del contacto se adscribe localmente a una región determinada por las coordenadas convectivas [76]. Las coordenadas espaciales del núcleo de acero son iguales a la configuración actualizada de las coordenadas convectivas, es decir,  $\bar{\mathbf{x}}_s = \mathbf{x}_s(\bar{\xi})$  que relaciona cada punto del mortero en la configuración espacial  $\mathbf{x}_m$ , en la superficie del mortero  $\Gamma_m$ , a un punto  $\Gamma_s$  de la superficie del acero, utilizando la distancia mínima.

$$(3.33) \quad d(\bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m) = \min_{\mathbf{x}_s \subseteq \Gamma_s} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s(\xi)\| \Rightarrow g_N = (\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}_s) \cdot \bar{\mathbf{n}}_s$$

La función  $g_N$  determina si hay penetración, contacto o intersección del acero sobre las superficies del mortero y del acero. El punto  $\bar{\mathbf{x}}_s$  se calcula teniendo en cuenta el concepto de distancia mínima presente en la ecuación (3.33). Es decir, que  $\bar{\mathbf{x}}_s$  resulta de la proyección ortogonal del punto  $\mathbf{x}_m$ , perteneciente a la superficie esclava, sobre la superficie maestra actualizada  $\mathbf{x}_s(\Gamma_{nc})$ . Una vez conocido el punto  $\bar{\mathbf{x}}_s$ , se comprueba la condición de restricción de penetración. Si no hay penetración se cumple la siguiente desigualdad:

$$(3.34) \quad g_N = (\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}_s) \cdot \bar{\mathbf{n}}_s \geq 0$$

Y si existe penetración se cumple la siguiente condición.

$$(3.35) \quad g_{\bar{N}} = \{(\mathbf{x}_m - \bar{\mathbf{x}}_s) \cdot \bar{\mathbf{n}}_s < 0$$

Si  $g_{\bar{N}} = 0$ , ello significa que hay contacto y no hay penetración.

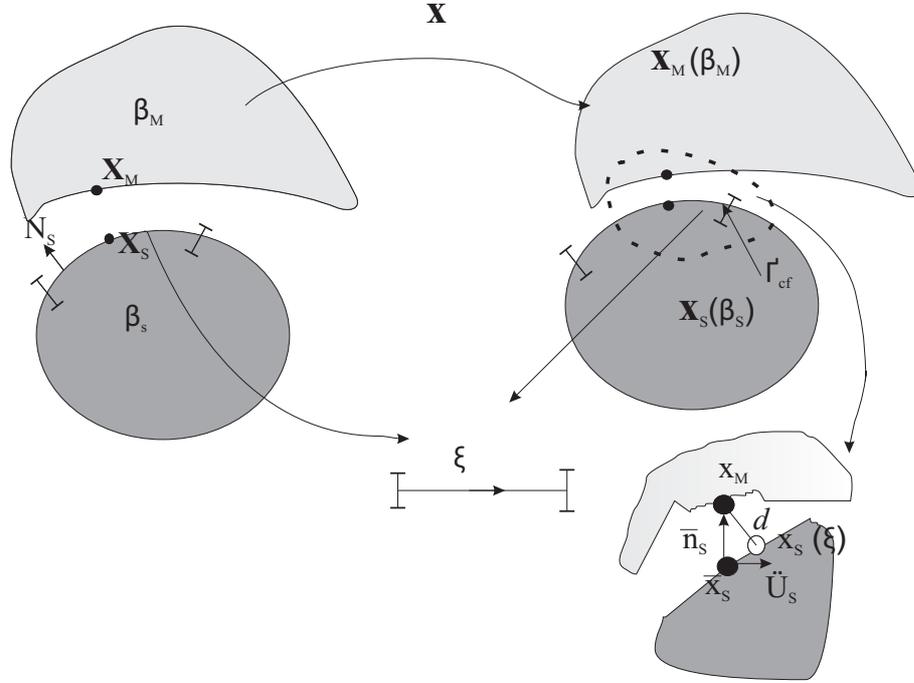


Figura 3.6: Distancia mínima en las configuraciones de referencia y espacial

### 3.4.3. Condiciones de deslizamiento y bloqueo

Se produce bloqueo tangencial (rozamiento) relativo entre las superficies. Para este caso en particular las coordenadas convectivas  $(\bar{\xi}_s, \bar{\xi}_m)$ , proyectadas sobre el dominio  $\Gamma_n$ , no varían en el tiempo, es decir.

$$(3.36) \quad \dot{\bar{\xi}}_{\Gamma} = 0$$

El deslizamiento tangencial sobre las superficies se produce al haber un cambio de posición en el tiempo del punto  $\mathbf{x}_m$  que, al ser proyectado sobre la superficie maestra, cambia las coordenadas del punto  $\bar{\mathbf{x}}_s$ . Las coordenadas convectivas del desplazamiento  $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_S, \bar{\xi}_M)$  se determinan utilizando el concepto de distancia mínima expresado en la ecuación (3.33). En el caso de las BPR el desplazamiento impuesto lo determina el núcleo de acero, es decir, que la superficie que se desplace es la maestra. En la Figura 3.7 se presenta la trayectoria del punto  $\mathbf{x}_m$  proyectado sobre la superficie maestra, desde el instante  $t_0$  hasta el instante  $t_f$ . También se presenta la velocidad

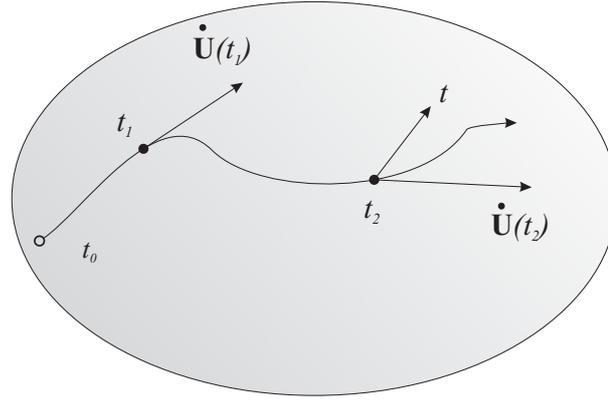


Figura 3.7: Trayectoria del punto  $\mathbf{x}_M$  respecto de la superficie maestra.

$\dot{\mathbf{U}}$  del punto  $\mathbf{x}_m$ , relativa a la superficie maestra para los tiempos intermedios  $t_1$  y  $t_2$ . Cuando hay deslizamiento con rozamiento, se integran las velocidades para obtener la trayectoria de  $\mathbf{x}_m$  sobre la superficie maestra en contacto  $\Gamma_{nc}$ . El desplazamiento relativo tangencial del punto  $\mathbf{x}_m$  sobre la superficie maestra se formula en forma de diferencial:

$$(3.37) \quad d\mathbf{g}_T = \ddot{\mathbf{U}}_s d\bar{\xi}_\Gamma = \mathbf{x}_{s\Gamma} \bar{\xi}_\Gamma$$

Es decir, que el diferencial del desplazamiento tangencial está en función del vector unitario de aceleración  $\ddot{\mathbf{U}}_s$  (ver Figura 3.6), y de la distancia mínima. Al integrar el diferencial  $d\mathbf{g}_t$  respecto del tiempo se obtiene

$$(3.38) \quad \mathbf{g}_T = \int_{t_0}^t \left\| \ddot{\mathbf{U}}_{s\Gamma} \bar{\xi} \right\| dt$$

$\mathbf{g}_T$  representa la función de bloqueo al deslizamiento tangencial. Las condiciones de Hertz-Signorini-Moreau (ecuación 3.39) resumen de forma concisa las condiciones de penetración, transferencia de tensiones a compresión y de separación:

- No hay penetración si  $g_N > 0$ .
- Cuando hay contacto entre el acero y el mortero, la presión normal es  $p_N < 0$ .
- La tensión desaparece cuando, el intersticio está abierto y la distancia desaparece cuando el intersticio está cerrado es decir: si  $g_N > 0$  entonces  $p_N = 0$  y si  $g_n = 0$  entonces  $p_N < 0$ .

Los estados de contacto y separación se resumen en las siguientes desigualdades:

$$(3.39) \quad g_N \geq 0, \quad p_N \leq 0, \quad p_N g_N = 0$$

Las anteriores condiciones proporcionan las bases para abordar el contacto con deslizamiento, con el objeto de definir las restricciones en los nodos. La fuerza de reacción en el método de penalización es calculada como se indica a continuación (ver [76]).

$$(3.40) \quad p_N = \lambda = k_{\epsilon C}(u) = \frac{k_{\epsilon}}{k + k_{\epsilon}} (k h - m g)$$

La variable  $k$  representa la rigidez del muelle;  $k_{\epsilon}$  es el parámetro de penalización,  $m$  representa la masa y  $g$  es la aceleración de la gravedad. Para resolver el problema de la distancia mínima en el contacto de penalización se utiliza la ecuación de potencial energético total (ver [76]):

$$(3.41) \quad \Pi_{cs} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{nc}} \left( k_{\epsilon N} (g_{\overline{N}})^2 + k_{\epsilon T} \mathbf{g}_T \cdot \mathbf{g}_T \right) dA, \quad k_{\epsilon N}, k_{\epsilon T} > 0$$

$k_{\epsilon T}$  y  $k_{\epsilon N}$ , representan la penalización del contacto tangencial y normal a la superficie, respectivamente.

$$(3.42) \quad C_c = \int_{\Gamma_{nc}} \left( k_{\epsilon N} \mathbf{g}_{\overline{N}} \cdot d\mathbf{g}_{\overline{N}} + k_{\epsilon T} \mathbf{g}_T \cdot d\mathbf{g}_T \right) dA, \quad k_{\epsilon N}, k_{\epsilon T} > 0$$

El valor de  $C_c$  en la ecuación 3.42 determina si hay deslizamiento o bloqueo sobre la superficie de contacto. En la Tabla 3.3 se presentan, las operaciones para implementar el algoritmo de contacto tipo penalización en el modelo de las BPR.

### 3.5. Balance energético

En este apartado se integran los tres modelos desarrollados en los apartados anteriores para generar un modelo del comportamiento cuasi-estático de barras de pandeo restringido. Se utiliza el balance energético De la ecuación 2.6 se deduce que la energía cinética  $E_K$  está dada por

$$(3.43) \quad E_K = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{U}} \cdot \dot{\mathbf{U}} dV$$

La energía potencial  $E_U$  es

$$(3.44) \quad E_U = \int \rho \omega dV = \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \right) dt - \omega_0$$

Para realizar el seguimiento físico de fenómenos distinguibles en ingeniería, se introduce descomposición de la tensión, deformaciones y fuerzas. El vector de fuerzas externas aplicadas en la superficie  $\mathbf{t}$  se descompone en: fuerza distribuida sobre la superficie  $\mathbf{t}^l$ , El vector de proyección de fuerzas de masa  $\mathbf{t}^{qb}$  y fuerza generada por la fricción entre superficies  $\mathbf{t}^f$ . Teniendo en cuenta

1. Definir el parámetro de penalización tangencial  $|k_{\epsilon T}|$  y el normal  $k_{\epsilon N}$ .
2. Determinar si hay contacto  $g_N = 0$  o penetración  $g_N < 0$ .
3. Si hay contacto determinar si hay bloqueo o deslizamiento según las condiciones de Hertz-Signorini-Moreau
4. Ensamblar la matriz tangente  $K_T = k_{\epsilon} C_c C_c^T$
5. Obtener  $K_T$  iterativamente mediante Newton Raphson:

$$K_T(u_i) \Delta u_{i+1} = G(u_i)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_{i+1}$$

6. Verificar la convergencia de este proceso.
7. Fin.

Tabla 3.3: Algoritmo de contacto tipo penalización.

la anterior división del vector  $\mathbf{t}$ , el trabajo realizado por las fuerzas externas y por las fuerzas de rozamiento entre las superficies viene dado por:

$$(3.45) \quad \dot{E}_{WF} = \left( \int_S \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{t}^l dS + \int_V \mathbf{f}^{int} \cdot \dot{\mathbf{U}} dV \right) - \left( - \int_S \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{t}^f dS \right) - \left( - \int_S \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{t}^{qb} dS \right) \equiv \dot{E}_W - \dot{E}_F - \dot{E}_{QB}$$

$\dot{E}_W$  representa el trabajo realizado por las fuerzas externas,  $\dot{E}_{QB}$  es la energía disipada por el efecto de amortiguación,  $\dot{E}_F$  determina la proporción de energía disipada por rozamiento en el contacto entre las superficies. El balance de energía para todo el modelo puede ser escrito como:

$$(3.46) \quad E_U + E_K + E_F - E_W - E_{QB} = cte$$

Se despeja la energía potencial:

$$(3.47) \quad \begin{aligned} E_U &= \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \right) dt = \int_0^t \left[ \int_V (\boldsymbol{\sigma}^e + \boldsymbol{\sigma}^v) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \right] dt \\ &= \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \right) dt + \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma}^v : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV \right) dt \\ &= E_I + E_V \end{aligned}$$

$\boldsymbol{\sigma}^e$  es la tensión derivada de la ecuación constitutiva sin incluir efectos de disipación viscosa,  $\boldsymbol{\sigma}^{el}$  representa la tensión elástica,  $\boldsymbol{\sigma}^v$  es la tensión viscosa y  $E_I$  es la energía restante, es decir, la energía interna. El tensor de velocidad de deformación  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  está constituido por la suma de los tensores de velocidad de deformación elástica  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ , plástica  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$  y de daño  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$ :

$$(3.48) \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d$$

La energía interna se expresa como:

$$(3.49) \quad \begin{aligned} E_I &= \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \right) dt \\ &= \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e dV \right) dt + \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p dV \right) dt + \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^d dV \right) dt \end{aligned}$$

Al derivar la expresión anterior de la energía interna respecto del tiempo se obtiene la potencia disipativa; ésta se descompone en:  $\Xi^e$  (corresponde a la energía elástica),  $\Xi^p$  (corresponde a la energía disipada por plasticidad) y  $\Xi^d$  (corresponde a la energía disipada por el daño).

$$\Xi = \Xi^e + \Xi^p + \Xi^d$$

Si se produce daño en el material, no toda la energía de deformación elástica es recuperable. En un instante dado, la tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  puede ser expresada en términos de tensión sin daño  $\boldsymbol{\sigma}_0$  y del parámetro de daño continuo  $d$ :

$$(3.50) \quad \boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{\sigma}_0$$

El parámetro de daño  $d$ , comienza en cero (sin daño en el material) y puede llegar a uno (material totalmente dañado). Por tanto la energía elástica es

$$(3.51) \quad \Xi^e = \int_0^t \left( \int_V \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\epsilon}^e dV \right) dt$$

A partir de la energía elástica, si hay daño se produce una disminución irreversible de las constantes elásticas. Por lo tanto, la energía de deformación recuperable es igual a: La potencia disipada por el daño es igual a:

$$(3.52) \quad \Xi^d = \int_0^t \left( \int_V (d_t - d) \boldsymbol{\sigma}_0 : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e dV \right) dt = \int_V \int_0^t \left( -\Psi^0 \dot{d} dt \right) dV$$

La energía disipada por plasticidad se presenta en el subapartado 3.2. El balance energético del modelo numérico acopla los tres modelos de daño, plasticidad y contacto presentados en el capítulo 3. Este balance energético se implementa en la subrutina presentada en el apéndice C.

### 3.6. Comprobación de los modelos definidos en el continuo utilizando MEF

En este apartado se presenta, mediante ejemplos sencillos, la comprobación de los modelos numéricos utilizando MEF, definidos en el continuo en los apartados 3.2 para el modelo de plasticidad acoplada con daño, 3.3 para el modelo de daño del mortero, 3.4 para el modelo de contacto tipo penalización de la interfaz y, por último 3.5 para el modelo numérico de una barra de pandeo restringido.

#### 3.6.1. Comprobación del modelo de daño acoplado con plasticidad para el acero

En este ejemplo se somete un núcleo de acero a ciclos impuestos de desplazamientos axiales de amplitud creciente. El núcleo tiene forma prismática, con sección cuadrada de 19 mm de lado y 76 mm de longitud. Las condiciones de contorno se representan gráficamente en la Figura 3.8. El acero es del tipo S355 [98]; las propiedades consideradas se describen en la Tabla 3.4. Los ciclos

Densidad	Límite elástico	Resistencia última	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson	Endurecimiento cinemático
$\rho$ $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	$f_y$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$f_u$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$E$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$\nu$	$H$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$
7850	355	470	210000	0,3	21000

Tabla 3.4: Parámetros mecánicos del acero S355

de desplazamientos impuestos consisten en ondas triangulares de amplitudes crecientes  $0,25 \Delta_y$ ,  $0,5 \Delta_y$ ,  $0,75 \Delta_y$ ,  $\Delta_y$ ,  $2,5 \Delta_y$  y  $5 \Delta_y$ ; entendiéndose  $\Delta_y$  como el desplazamiento de plastificación. El comportamiento plástico del acero se describe mediante un modelo de endurecimiento cinemático. No se alcanza el daño. El núcleo se discretiza con elementos hexaédricos lagrangianos de 8 nodos. La Figura 3.9 muestra los ciclos de histéresis obtenidos, es decir, el diagrama de la fuerza axial en función del desplazamiento. En esta Figura y en las siguientes, los alargamientos y las tracciones se representan con valores positivos. El comportamiento histerético de la Figura 3.9 es regular

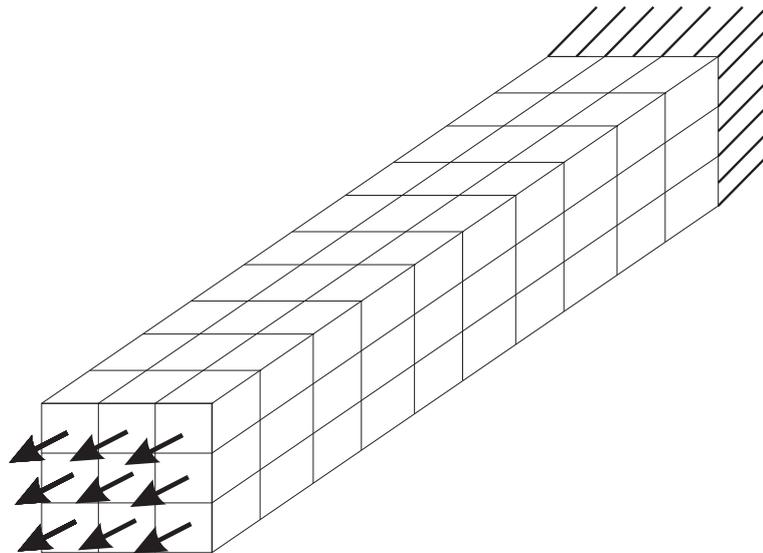


Figura 3.8: Condiciones de contorno de la barra sometida a desplazamientos cíclicos impuestos

y responde a lo previsible en elementos metálicos de estas características [55] y [56].

### 3.6.2. Comprobación del modelo isótropo de daño para el mortero

Se presenta la modelización de los comportamientos a alargamiento y a acortamiento de un elemento prismático de 500 mm de longitud y sección cuadrada de 100 mm de lado. Las propiedades del mortero se describen en la Tabla 3.5. El elemento es sometido a dos

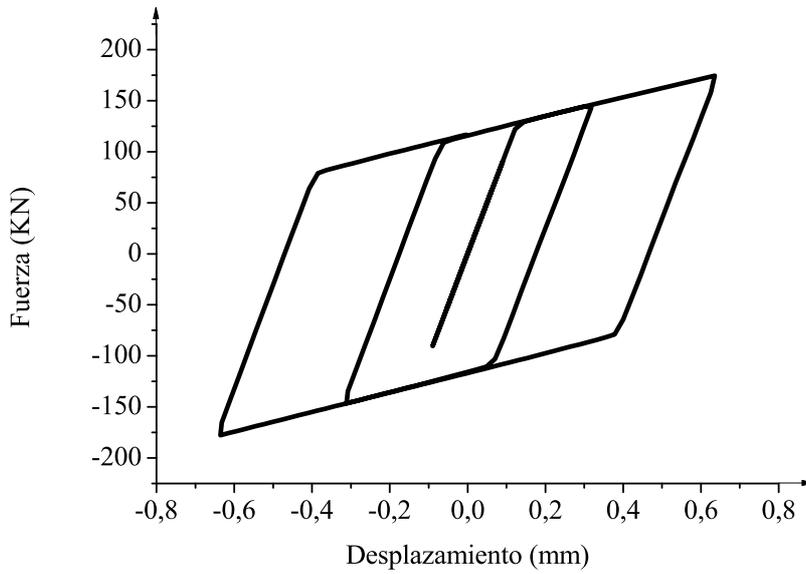


Figura 3.9: Ciclo numérico de histéresis para el acero de los ejemplos numéricos, teniendo en cuenta el endurecimiento cinemático.

funciones crecientes de desplazamientos axiales impuestos; una de alargamiento y otra de acortamiento. La amplitud máxima del alargamiento es 8 mm y la del acortamiento es 8 mm; estos valores son suficientes para producir la rotura del material. El elemento se discretiza con elementos finitos hexaédricos lagrangianos de ocho nodos. Las Figura 3.10 muestra las relaciones tensión-deformación obtenidas para alargamiento y acortamiento, respectivamente. Estos resultados corresponden al elemento finito extremo. En la Figura 3.10 las curvas obtenidas

Densidad	Resistencia a compresión	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson	Resistencia a tracción
$\rho$	$f_c$	$E$	$\nu$	$f_t$
$\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	$\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$\left(\frac{N}{mm^2}\right)$		$\left(\frac{N}{mm^2}\right)$
2350	10	17520	0,2	1

Tabla 3.5: Parámetros mecánicos del mortero de los ensayos numéricos.

crecen linealmente hasta alcanzar la resistencia, y luego decrecen de forma aproximadamente exponencial. Este comportamiento se ajusta al modelo isótropo de daño de la Figura 3.3, también se observa la diferencia existente entre la resistencia a compresión y tracción.

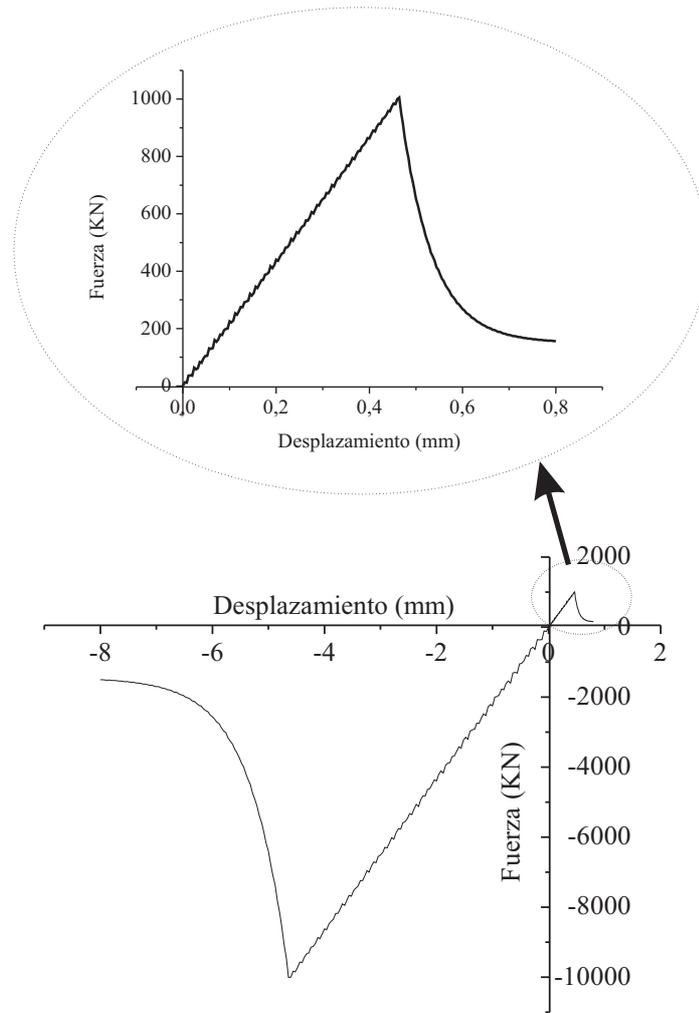


Figura 3.10: Comportamiento a compresión del modelo numérico

### 3.6.3. Comprobación del modelo de contacto tipo penalización para la interfaz

En este caso de comprobación, se supone el contacto entre dos nodos adyacentes, uno perteneciente al núcleo y otro al revestimiento con una separación entre las superficies del núcleo y del acero de 0,12 mm, como se indica en la Figura 3.11. Se considera la barra (descrita en la Figura 3.11); sus características son iguales a las de la barra descrita en la Figura 3.13 y analizada en el siguiente subapartado. El núcleo se somete a un desplazamiento transversal impuesto  $u(t)$ , este desplazamiento consiste en una rama inicial creciente linealmente hasta 0,25 mm y una rama horizontal constante a partir de ese instante. En la Figura 3.12 se representan las historias

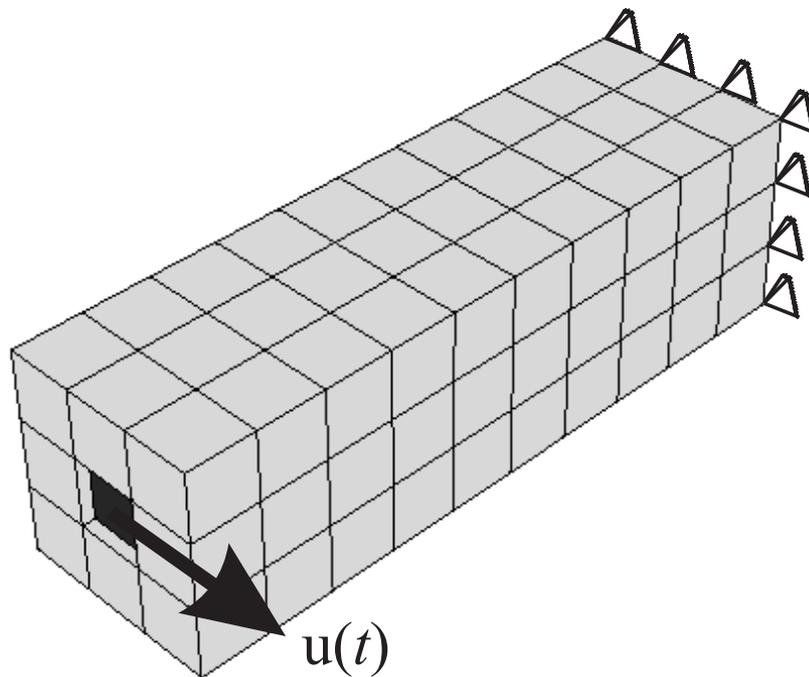


Figura 3.11: Condiciones de contorno y discretización de la barra sometida a contacto tipo penalización

temporales de los desplazamientos longitudinales de los dos nodos mencionados previamente. Al observar la Figura, se aprecia que al inicio no existe contacto y que, a partir del momento en que éste se establece, ambas curvas son paralelas.

### 3.6.4. Comprobación del modelo de las BPR

Se presentan cuatro casos en que la barra de pandeo restringido analizada en el subapartado anterior soporta deformaciones axiales impuestas de acortamiento y alargamiento. La barra

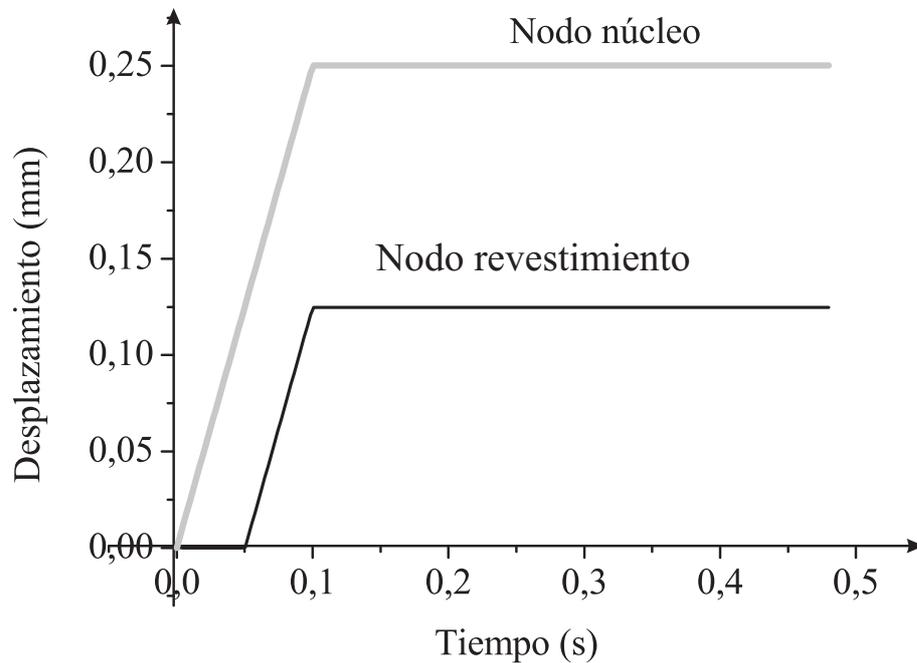


Figura 3.12: Simulación numérica del contacto entre dos nodos

consiste en un núcleo de acero de sección cuadrada de 10 mm de lado, embebido en un revestimiento de mortero de sección también cuadrada de 30 mm de lado; la longitud es de 100 mm. El acero y el mortero se discretizan con elementos finitos hexaédricos lagrangianos de ocho nodos; la Figura 3.13 muestra la malla resultante. El contacto entre el acero y el mortero se describe con un modelo de contacto de penalización, con las siguientes características: coeficiente de rozamiento  $\kappa = 0,1$ ; direccionalidad isótropa; no se considera límite en la transferencia de tensiones tangenciales entre el núcleo de acero y el mortero. En el mallado de la barra se ha procurado que el contacto entre acero y mortero sea nodo a nodo. El movimiento axial se impone al núcleo de acero (ver Figura 3.13 a). En el primer y segundo casos se considera un semiciclo de acortamiento y alargamiento, respectivamente. En el tercer y cuarto casos se consideran ciclos de acortamiento y alargamiento de amplitud creciente; en el tercer caso las amplitudes son bajas y en el cuarto son mayores. El mortero tiene las siguientes propiedades;  $\rho$ : densidad =  $2,75 \times 10^{-6}$  kg/mm<sup>3</sup>,  $E$ : módulo secante de deformación = 17520 MPa  $\nu$ : coeficiente de Poisson = 0,2;  $f_c$ : resistencia característica a compresión = 39,92 MPa;  $f_t$ : resistencia característica a tracción = 3,992 MPa;  $G_f$ : energía de fractura = 0,104 MPa. El acero tiene las siguientes propiedades;  $\rho$ : densidad =  $7,85 \times 10^{-6}$  kg/mm<sup>3</sup>;  $E$ : módulo de Young = 210000 MPa,  $\nu$ : coeficiente de

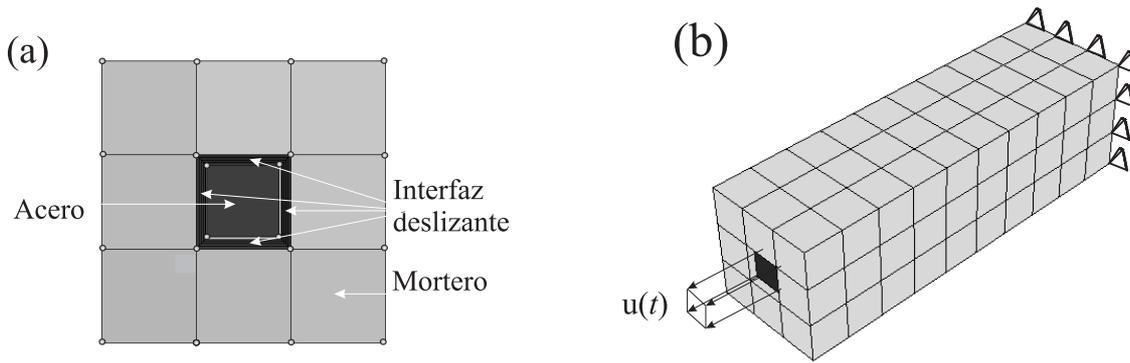


Figura 3.13: (a) Vista frontal de la barra y (b) Mallado de una barra de pandeo restringido con sus condiciones de contorno

Poisson = 0,3;  $f_y$  límite elástico = 275 MPa ;  $H_k$  = endurecimiento cinemático = 21000 MPa;  $f_u$  = resistencia última = 410 MPa;  $G_f$  : energía de fractura = 68,5 MPa. En el primer caso la amplitud del semiciclo de acortamiento ha sido elegida para que se produzcan sucesivamente los siguientes fenómenos: plastificación del acero, daño del mortero y daño del núcleo de acero. La Figura 3.14 muestra el comportamiento obtenido; se representa el desplazamiento del núcleo en función de la fuerza axial en la barra (núcleo y revestimiento) para la rama de carga del semiciclo. La Figura 3.14 muestra que la plastificación del acero genera una reducción de la

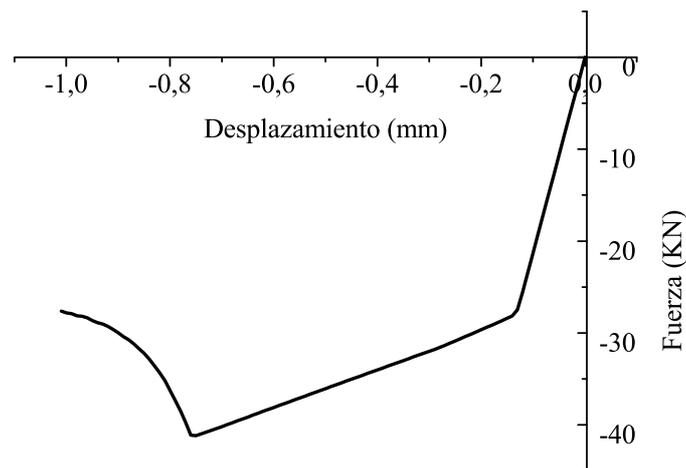


Figura 3.14: Primer caso. Comportamiento a acortamiento de una barra de pandeo restringido rigidez (pendiente de la curva fuerza-desplazamiento); la rigidez resultante es más elevada que la que indicaría la rama plástica del diagrama constitutivo del acero, debido a la transferencia de

tensiones al mortero. En la Figura 3.14 se aprecia que la rotura del mortero genera una nueva reducción de rigidez. Para mayores valores del desplazamiento, el daño del acero produce una rama horizontal. En el segundo caso, la amplitud del semciclo de alargamiento ha sido elegida para que se produzca plastificación del acero y así poder observar su comportamiento en el rango elastoplástico teniendo en cuenta la resistencia última. La Figura 3.15 muestra el comportamiento obtenido.

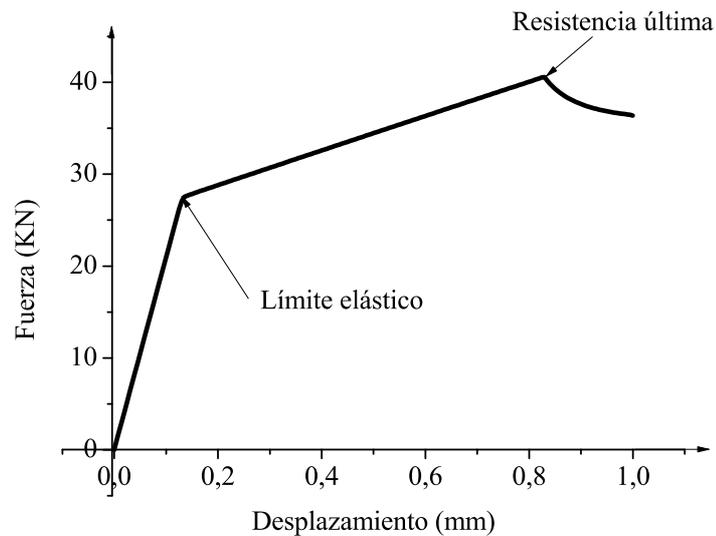


Figura 3.15: Segundo caso. Comportamiento a alargamiento de una barra de pandeo restringido

En el tercer caso se somete la barra a siete ciclos; sus amplitudes son  $1\Delta_y$  en el primero,  $2\Delta_y$  en el segundo,  $3\Delta_y$  en el tercero y  $5\Delta_y$  en los cuatro restantes.  $\Delta_y$  es el desplazamiento de plastificación del núcleo desnudo. Los resultados se muestran en La Figura 3.16. La Figura 3.16 muestra un comportamiento de histéresis regular, con estabilidad a lo largo del tiempo. Los ciclos se ajustan a los resultados experimentales obtenidos habitualmente, presentados en las referencias [1] y [18]. En la zona de compresión de la Figura 3.16 se observa un aumento de la fuerza debido al incremento de la rigidez, por la transferencia de tensiones tangenciales, a través del contacto entre el acero y el mortero [1]. En el cuarto caso se somete la barra a seis ciclos; sus amplitudes son:  $1\Delta_y$ ,  $2\Delta_y$ ,  $3\Delta_y$ ,  $5\Delta_y$ ,  $10\Delta_y$  y  $15\Delta_y$ , donde  $\Delta_y$  es el desplazamiento de plastificación del núcleo de acero desnudo. Estos valores han sido elegidos para que se genere daño en el mortero. La Figura 3.17 muestra el comportamiento histerético obtenido. En la Figura 3.17 se observa un comportamiento histerético con degradación de rigidez y de resistencia en la zona de

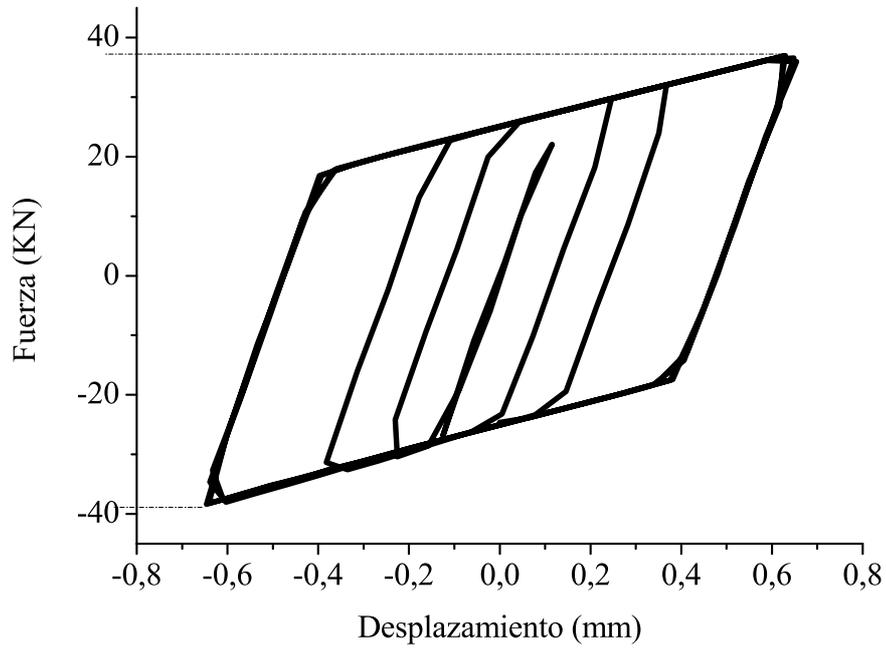


Figura 3.16: Tercer caso. Comportamiento cíclico de pequeña amplitud de una barra de pandeo restringido

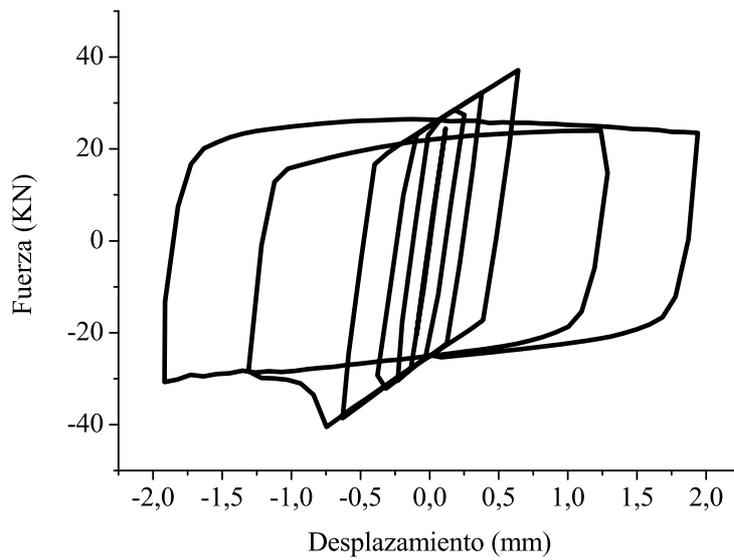


Figura 3.17: Cuarto caso. Comportamiento cíclico de gran amplitud de una barra de pandeo restringido

acortamiento, debido al daño del acero. La zona de alargamiento presenta un comportamiento similar al de compresión de la Figura 3.16. La comparación entre las Figuras 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17 muestra que el semiciclo de la Figura 3.14 es similar a los correspondientes semiciclos a acortamiento de la Figura 3.17; las Figuras 3.15, 3.16 y 3.17 indican que los hemiciclos de alargamiento son similares. La conclusión global de este apartado es que los modelos numéricos propuestos son capaces de reproducir los fenómenos considerados.



# 4. Modelización numérica de ensayos de laboratorio

En este capítulo se comparan resultados obtenidos en laboratorio con los simulados numéricamente utilizando el modelo definido en el medio continuo que ha sido expuesto en el capítulo 3, el cual ha sido implementado en un programa de elementos finitos utilizando la subrutina descrita en el apéndice C. Este capítulo se divide en dos apartados, en el primero se consideran ensayos realizados en la Universidad de Girona [1] y en el segundo apartado se consideran los ensayos obtenidos en la Universidad de California [2].

## 4.1. Ensayos realizados en la Universidad de Girona

### 4.1.1. Descripción de los ensayos

La exactitud del modelo se calibra comparándolo con resultados experimentales descritos en [1]. Los ensayos consisten en someter cuatro BPR (conocidas como D1, D2, D3 y D4) a ciclos de deformación axial impuesta hasta alcanzar la rotura del núcleo (ver Figura 4.1). La Figura 4.2 describe las principales características geométricas de estas barras y los significados de los parámetros geométricos representados. En la Tabla 4.1 se presentan los valores correspondientes a las BPR D1, D2, D3 y D4. En la Figura 4.1 se presenta una fotografía de los ensayos; en la parte izquierda la BPR está sujeta y en la parte derecha a la BPR se le aplican los desplazamientos impuestos. La barra tiene sensores de desplazamiento (LVDT) y de deformación (bandas extensométricas) en sentido horizontal y vertical y de fuerza en dirección longitudinal. Estos sensores están dispuestos de tal forma que adquieran la mayor cantidad de información en lugares críticos, como los extremos y el centro de la luz (ver [4]). Las barras ensayadas consisten en un núcleo de acero de sección circular maciza rodeado de mortero; a su vez, éste se encuentra rodeado por un tubo de acero. La interfaz deslizante entre el núcleo y el mortero consta de



Figura 4.1: Ensayo realizado en la Universidad de Girona [1]

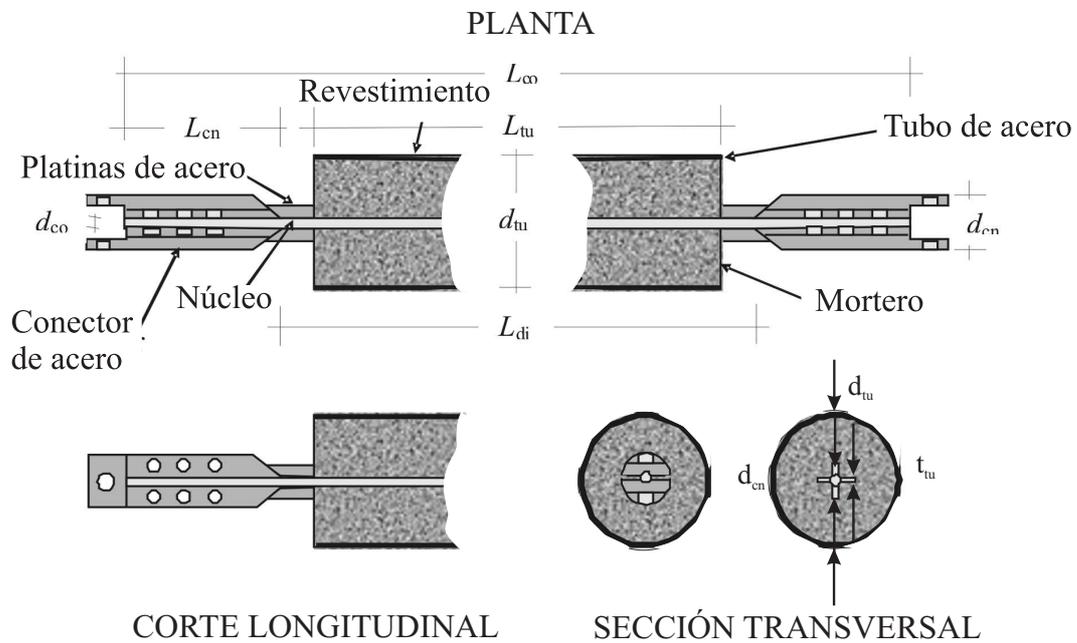


Figura 4.2: Geometría de las barras de pandeo restringido ensayadas en la Universidad de Girona[1]

Barras	$L_{co}$ (mm)	$L_{cn}$ (mm)	$L_{tu}$ (mm)	$L_{di}$ (mm)	$d_{co}$ (mm)	$d_{tu}$ (mm)	$t_{tu}$ (mm)	$d_{cn}$ (mm)
D1 y D2	2808	200	2422	2466	10	90	3	80
D3 y D4	2808	270	2152	2196	22	115	3	85

Tabla 4.1: Parámetros geométricos de las barras ensayadas en la Universidad de Girona

Densidad	Límite elástico	Resistencia última	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson
$\rho$ $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	$f_y$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$f_u$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$E_s$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$\nu$
7850	275	410	210000	0,3

Tabla 4.2: Parámetros mecánicos nominales del acero S275. Ensayos de la Universidad de Girona

un revestimiento antiadherente alrededor del núcleo, una capa intermedia de grasa y una capa exterior de material elastómero. En ambos extremos de las barras se sitúan conectores de acero; uno de éstos se une a un soporte fijo, mientras que el otro se sujeta rígidamente a un cilindro hidráulico. El movimiento de este cilindro genera deformaciones axiales en el núcleo de las barras. Las propiedades del acero y del mortero se presentan en las Tablas 4.2 y 4.3, respectivamente. Tal como se expone más adelante, en la modelización numérica el acero del tubo se homogeneiza al mortero. Los valores indicados en la tabla 4.2 son nominales, en la referencia [1] se describen los valores obtenidos experimentalmente; para las barras D1 y D2  $f_y = 307$  MPa y  $f_u = 427$  MPa y para las barras D3 y D4  $f_y = 300,5$  MPa y  $f_u = 423,5$  MPa. Estos valores se consideran en la modelización numérica. Dada la simetría longitudinal de las barras ensayadas, se modela sólo la mitad de su longitud; en la sección central se considera una conexión empotrada (tanto para el mortero como para el acero), mientras que en el otro extremo se considera que el mortero

Densidad	Resistencia a compresión	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson	Resistencia a tracción
$\rho$ $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$	$f_c$ $\left(\frac{N}{mm^2}\right)$	$E_c$ $\frac{N}{mm^2}$	$\nu$	$f_t$ $\frac{N}{mm^2}$
2350	39,92	17520	0,2	3,992

Tabla 4.3: Parámetros mecánicos del mortero. Ensayos de la Universidad de Girona

y el tubo de acero están libres, y que el núcleo sufre los desplazamientos axiales impuestos. A efectos de la modelización geométrica de la barra, su geometría es una sección transversal circular pero ésta se reemplaza por una geometría cuadrada con la misma área. Este cambio se introduce con la finalidad de obtener una mayor uniformidad en las relaciones de aspecto de los elementos finitos y para lograr que el contacto entre el núcleo y el mortero se establezca nodo a nodo. Ya que los parámetros geométricos más relevantes para el ensayo (área y momento de inercia) no varían significativamente, esta modificación no altera sustancialmente los resultados. El acero del núcleo y el mortero se discretizan con elementos hexaédricos de ocho nodos. El acero del tubo exterior se homogeneiza al mortero adyacente para evitar la existencia de elementos finitos con relaciones de aspecto demasiado elevadas. El movimiento axial impuesto consiste en ciclos de amplitud creciente hasta alcanzar cinco veces el desplazamiento de plastificación ( $\Delta_y$ ); en los ciclos siguientes se mantiene esta amplitud hasta alcanzar la rotura de la barra. Las amplitudes de los primeros ciclos son:  $0,25\Delta_y$ ,  $0,5\Delta_y$ ,  $0,75\Delta_y$ ,  $1\Delta_y$ ,  $2\Delta_y$  y  $5\Delta_y$ . Los desplazamientos impuestos son los mismos para las barras D1, D2, D3 y D4. El comportamiento plástico del acero del núcleo se describe con un modelo de endurecimiento cinemático con módulo de endurecimiento  $H_K = 21$  GPa; no se ha considerado daño. En el mortero la energía de fractura por unidad de superficie es  $G_f = 0,104$  MPa y la longitud característica  $l^*$  es igual a la media geométrica de las aristas del elemento finito [95]. En el modelo de contacto el coeficiente de rozamiento es  $\kappa = 0,1$ ; este valor ha sido elegido según las recomendaciones incluidas en la referencia [76]. La direccionalidad es isótropa y no hay límite en la transferencia de tensiones de corte del acero al mortero. El periodo de discretización del desplazamiento impuesto es  $\Delta t = 0,05$  s. En la integración explícita el incremento de tiempo es igual al cociente entre la velocidad de propagación de las ondas de corte en el acero y la longitud característica  $l^*$  del elemento finito [77]. El mallado se efectúa mediante elementos finitos hexaédricos de 8 nodos de interpolación lineal (Lagrangianos tipo C3D8R [77]).

#### 4.1.2. Simulación numérica de las barras D1 y D2

En la Figura 4.3 se presenta un corte transversal de las barras D1 y D2. Tal como se ha comentado previamente, la sección es circular y en la discretización se generan elementos finitos con relaciones de aspecto demasiado elevadas. Ello conlleva un mayor coste computacional y una mayor propagación del error. Para evitar esto, las secciones circulares se modificaron a cuadradas, conservando el área. Cada lado del correspondiente cuadrado equivale a la raíz cuadrada de las áreas expuestas en la Figura 4.3. En la Figura 4.4 se presenta la nueva sección de las barras. Con

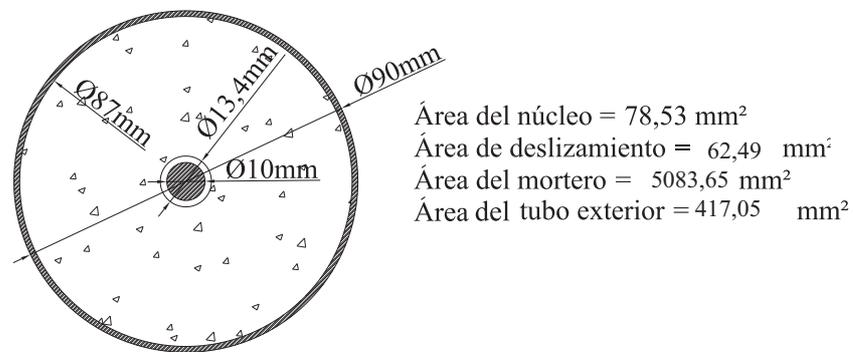


Figura 4.3: Sección transversal de las BPR D1 y D2

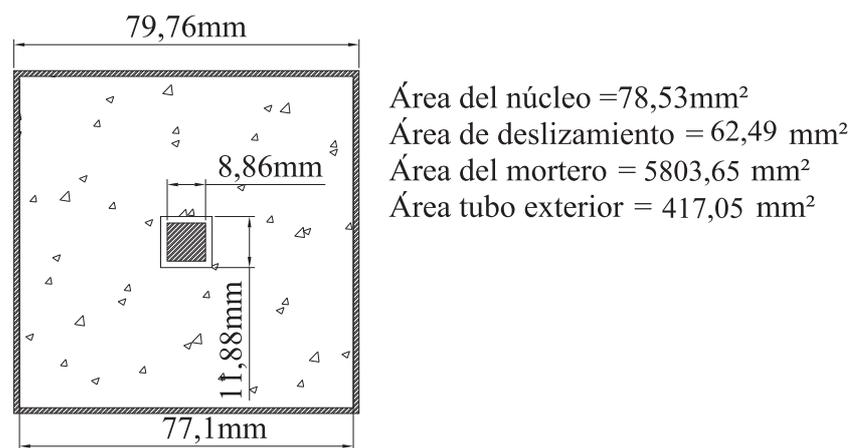


Figura 4.4: Sección transversal de las BPR D1 y D2 modificada para su modelación

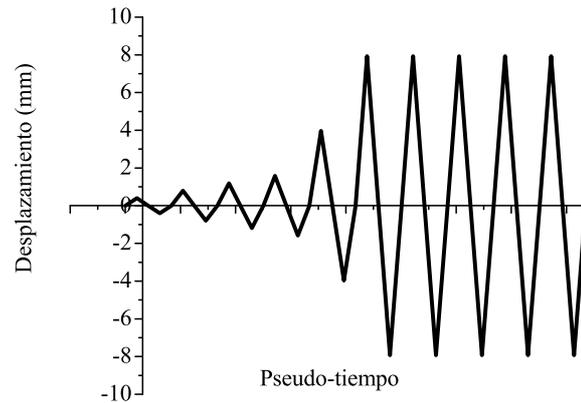


Figura 4.5: Desplazamiento impuesto a las barras D1 y D2

este modelo, que permite un mejor mallado, se homogeneiza el tubo exterior de acero a mortero utilizando el coeficiente de equivalencia  $n_E = E_s/E_c = 11,98$ . La Figura 4.5 el desplazamiento impuesto al núcleo de las barras D1 y D2. Estos ensayos han sido simulados con el modelo propuesto. En la Figura 4.6 se ilustra la comparación entre los resultados experimentales y los resultados numéricos considerando endurecimiento cinemático del acero del núcleo. En la Figura 4.6 se presentan en trazo continuo los resultados obtenidos en el ensayo experimental y en línea punteada los resultados del modelo numérico desarrollado en este trabajo. Comparando las dos gráficas se observa un ajuste satisfactorio entre los ensayos experimentales y el modelo numérico propuesto.

#### 4.1.3. Simulación numérica de las barras D3 y D4

En la Figura 4.7 se presenta un corte transversal de las barras D3 y D4. Al igual que en las barras D1 y D2 la sección circular se transforma en cuadrada para facilitar la discretización. La Figura 4.8 representa la sección modificada. En la Figura 4.9 se describe gráficamente la parte estacionaria de la función que determina el desplazamiento impuesto al núcleo de las barras D3 y D4. En la simulación numérica se utilizan básicamente los mismos valores que en las barras D1 y D2, con excepción del periodo de discretización del movimiento impuesto. El periodo de discretización del tiempo en la función de desplazamiento representada en la Figura 4.9 es 0,04089377 s; este valor ha sido elegido como el periodo natural de vibración del sexto modo propio de la mitad modelada del núcleo. Este modo corresponde al comportamiento del núcleo desnudo (es decir, en ausencia del mortero de revestimiento), estando sujeto rígidamente por

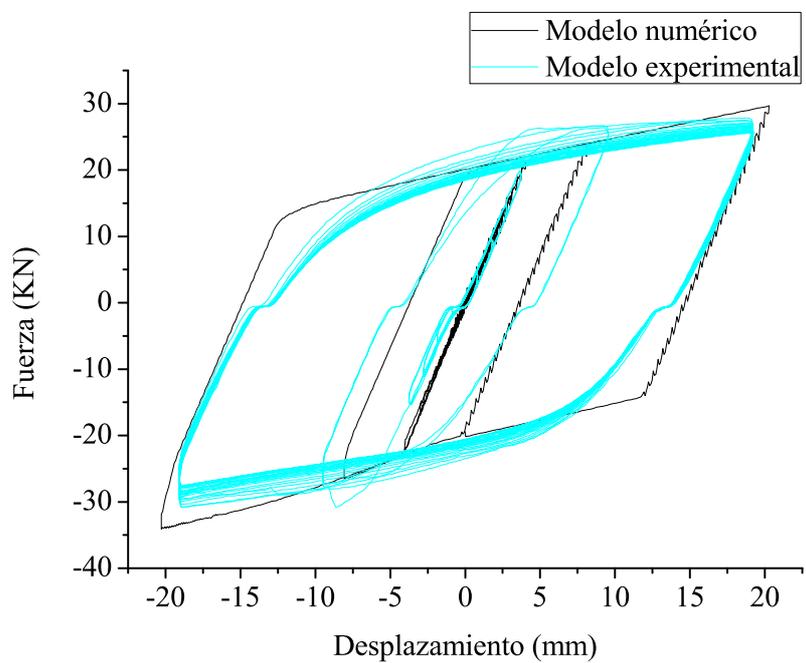


Figura 4.6: Comparación entre los ciclos de histéresis numéricos y experimentales de la barra D1

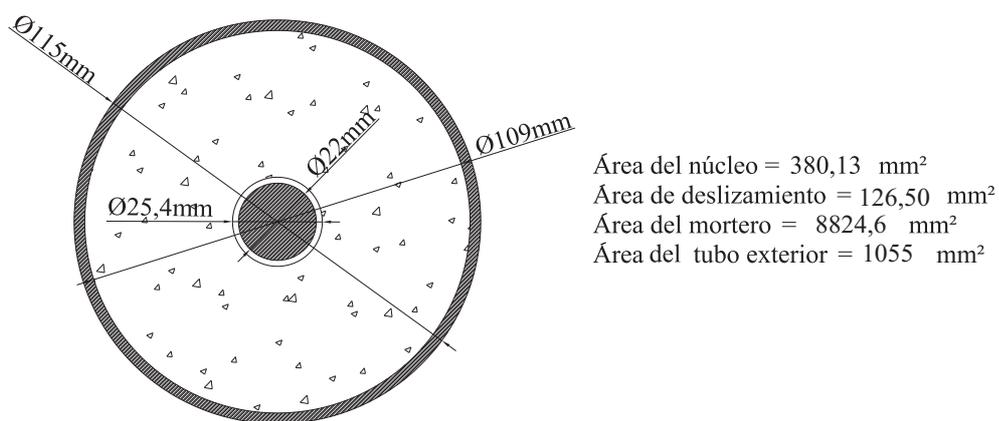


Figura 4.7: Sección transversal de las BPR D3 y D4

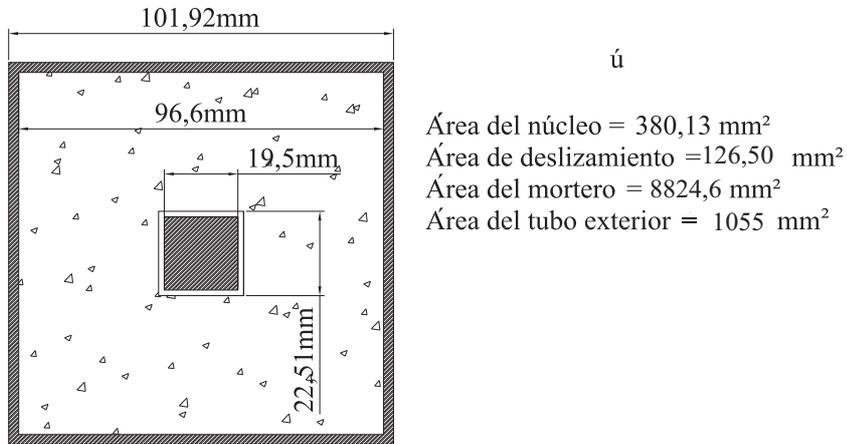


Figura 4.8: Sección transversal de las BPR D3 y D4 modificada para su modelación

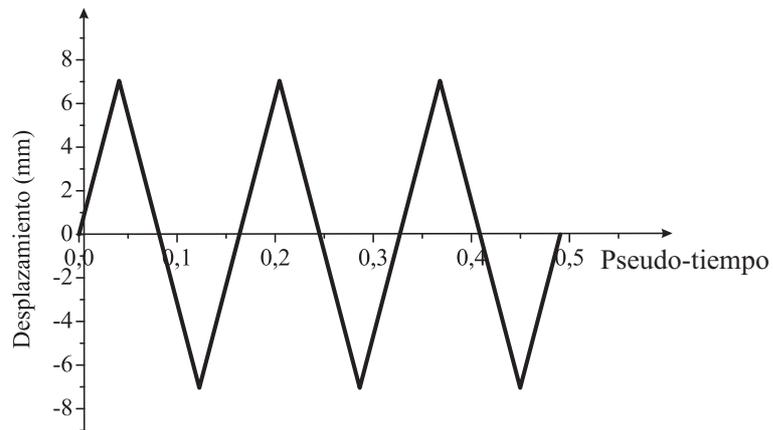


Figura 4.9: Tramo estacionario del desplazamiento impuesto al núcleo de las barras D3 y D4

un extremo y libre por el opuesto; la configuración del sexto modo corresponde a oscilaciones transversales. El periodo del análisis se ajusta al de un modo propio del núcleo para evitar la aparición de soluciones espurias que produzcan propagación de errores; se elige el sexto modo para lograr una solución de compromiso entre la rapidez y la estabilidad del cálculo. La Figura 4.10 presenta, para las barras D3 y D4 (Tabla 4.1), una comparación entre un lazo de histéresis experimental y su simulación con el modelo propuesto. La Figura 4.10 muestra un ajuste

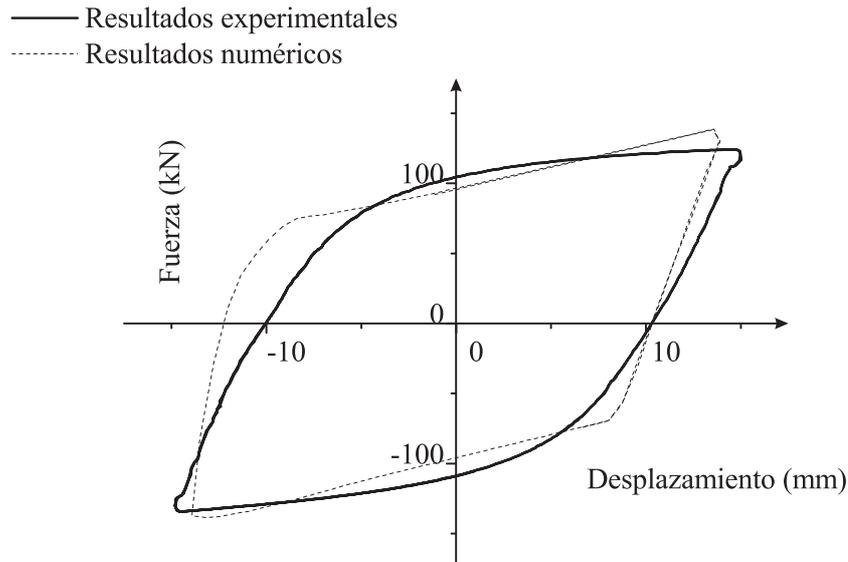


Figura 4.10: Comparación entre ciclos de histéresis numéricos y experimentales para la barra D3 satisfactorio entre los resultados experimentales y los numéricos considerando endurecimiento cinemático del acero del núcleo. Es destacable que en ninguna simulación numérica se observa daño en el mortero, lo cual es coherente con los resultados experimentales [1].

#### 4.1.4. Comparación entre los valores numéricos y experimentales de la energía disipada

Ya que se dispone de los valores numéricos de los resultados de los ensayos realizados en la Universidad de Girona [1], en este subapartado se presenta una comparación detallada entre los valores numéricos y experimentales del área encerrada por el lazo de histéresis de la barra D3 representado en la Figura 4.10. A continuación se describen los valores obtenidos:

- Energía histerética obtenida de forma experimental: 4477444,559 Nmm.
- Energía histerética obtenida de forma numérica: 4624423,855 Nmm.
- Diferencia:  $(4477444,559 \text{ Nmm} - 4624423,855 \text{ Nmm}) / 4624423,855 \text{ Nmm} = 3,18 \%$ .

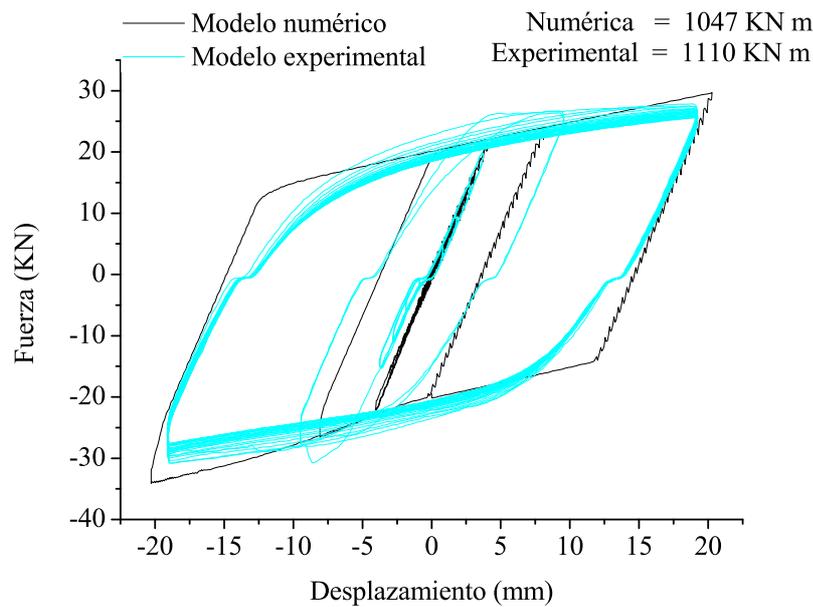


Figura 4.11: Comparación entre los lazos de histéresis obtenidos numéricos y experimentales de los ensayos de Girona Disipador D1

El ajuste es satisfactorio. Adicionalmente se efectúa un cálculo similar para la barra D1:

- Energía hysterética experimental: 1110129,582 Nmm.
- Energía hysterética numérica: 1047022,737 Nmm
- Diferencia:  $(1047022,737 \text{ Nmm} - 1110129,582 \text{ Nmm}) / 1110129,582 \text{ Nmm} = 1,95 \%$

En la Figura 4.11 se presentan dos lazos numéricos y experimentales de la barra D1.

## 4.2. Ensayos realizados en la Universidad de California

### 4.2.1. Descripción de los ensayos

En este subapartado se presenta una simulación numérica con el modelo propuesto de ensayos realizados en la Universidad de California en San Diego [2]. Los ensayos consisten en someter cuatro BPR a ciclos de deformación axial y transversal impuesta; sólo las componentes longitudinales son tenidas en cuenta en la simulación. La Figura 4.12 muestra las principales características de estas barras. Los valores de los parámetros geométricos representados en la Figura 4.12 se indican en la Tabla 4.4. Las cuatro barras se conocen como 1G, 2G, 3G y 4G; las barras 1G y 2G son formalmente idénticas, al igual que las 3G y 4G. Las BPR ensayadas

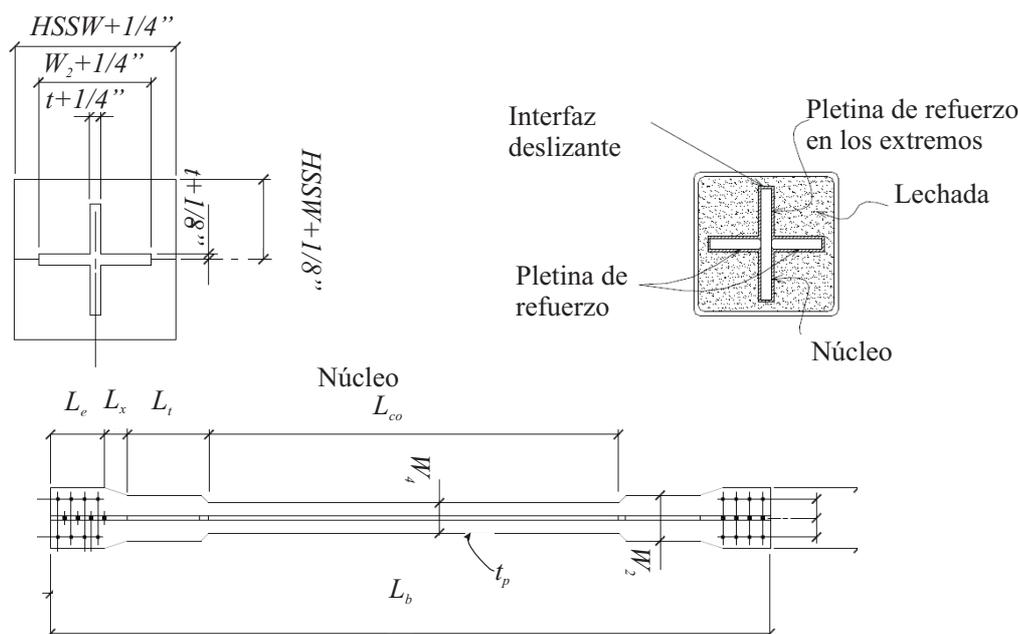


Figura 4.12: Barras de pandeo restringido ensayadas en la Universidad de California [2]

consisten en un núcleo de acero rodeado por un mortero autonivelante, “grout fill”, en lengua inglesa, y un tubo cuadrado exterior. En un extremo de las barras se sitúa un apoyo fijo y el otro extremo se fija a un simulador de terremotos (“Shaking Table”). Las propiedades de los materiales (interfaz, mortero y acero del núcleo) se presentan en las Tablas 4.5,4.6 y 4.7. La geometría de las barras 1G y 2G se describen en la Figura 4.12 y en la Tabla 4.4. Dada la

$t$	$L_e$	$L_x$	$L_t$	$L_{co}$	$W_2$	$W_4$	$L_b$
(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)
$1\frac{1}{2}$	5	$5\frac{1}{2}$	$32\frac{7}{16}$	$132\frac{1}{2}$	$11\frac{3}{16}$	8	$208\frac{3}{8}$

Tabla 4.4: Parámetros geométricos de las BPR ensayadas en la Universidad de California.

simetría longitudinal de las barras ensayadas, se modela sólo la mitad de su longitud; en la sección central se considera una conexión empotrada (tanto para el mortero como para el acero), mientras que en el otro extremo se considera que el mortero y el tubo de acero están libres y que el núcleo sufre los desplazamientos axiales impuestos. El acero del núcleo y del tubo exterior y la lechada 3de cemento se discretizan con elementos hexaédricos de ocho nodos. El movimiento axial impuesto consiste en ciclos de amplitud creciente. Existen cuatro etapas; cada una de ellas consta de un número variable de ciclos de amplitud constante. La primera etapa consta de cinco ciclos de amplitud  $\Delta_y$ . La segunda etapa consta de dos ciclos de amplitud  $2\Delta_y$ . La tercera y cuarta etapas

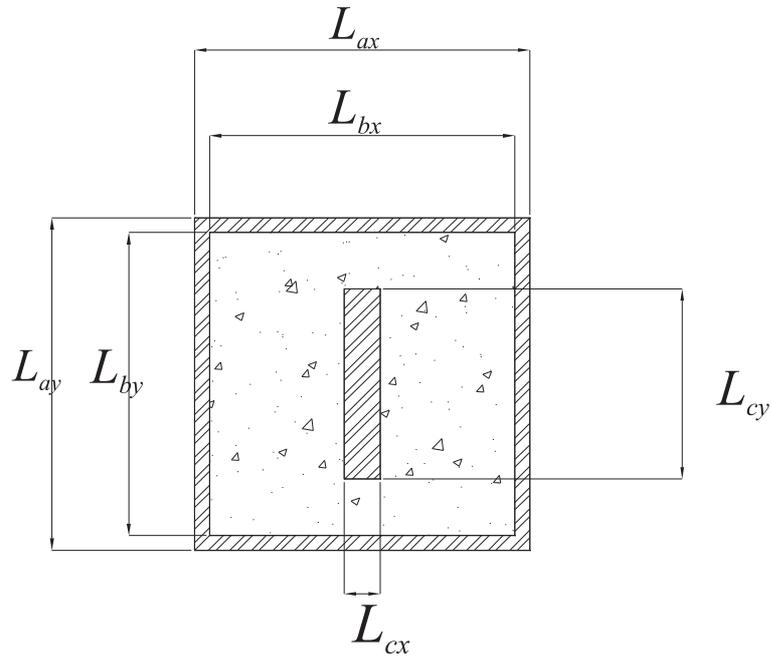


Figura 4.13: Sección transversal de las BPR 1G y 2G

Densidad	Límite elástico	Módulo de elasticidad de Poisson	Coefficiente
$\rho$	$f_y$	$E_s$	$\nu$
$\left(\frac{lb f \times s^2}{in^4}\right)$	$(ksi)$	$(ksi)$	
$7,345 \times 10^{-4}$	37	29000	0,3

Tabla 4.5: Parámetros mecánicos del acero A36. Ensayos de la Universidad de California

Densidad	Límite elástico	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson
$\rho$	$f_y$	$E_s$	$\nu$
$\left(\frac{lb f \times s^2}{in^4}\right)$	$(ksi)$	$(ksi)$	
$7,345 \times 10^{-4}$	42	29000	0,3

Tabla 4.6: Parámetros mecánicos del acero A500-B. Ensayos de la Universidad de California

Densidad	Resistencia a compresión	Módulo de elasticidad	Coefficiente de Poisson	Resistencia a tracción
$\rho$ $\left(\frac{lb \times s^2}{in^4}\right)$	$f_c$ (psi)	$E_c$ (psi)	$\nu$	$f_t$ (psi)
$2,1521 \times 10^{-4}$	8825	2541	0,2	883

Tabla 4.7: Parámetros mecánicos de la lechada de cemento. Ensayos de la Universidad de California.

constan de dos ciclos de amplitud  $3 \Delta_y$  y  $4 \Delta_y$ , respectivamente. El comportamiento plástico del acero del núcleo se describe con un modelo de endurecimiento cinemático e isótropo; no se ha considerado daño. En el mortero la energía de fractura por unidad de superficie es  $G_f = 0,242$  MPa y la longitud característica  $l^*$  es igual a la media geométrica de las aristas del elemento finito [95]. En el modelo de contacto el coeficiente de rozamiento es  $\kappa = 0,1$ ; este valor ha sido elegido según las recomendaciones incluidas en la referencia [76]. La direccionalidad es isótropa y no hay límite en la transferencia de tensiones de corte del acero al mortero. En la integración explícita el incremento de tiempo es igual al cociente entre la velocidad de propagación de las ondas de corte en el acero y la longitud característica  $l^*$  del elemento finito [77]. El mallado se efectúa mediante elementos finitos hexaédricos de 8 nodos de interpolación lineal (Lagrangianos tipo C3D8R [77]).

#### 4.2.2. Simulación numérica de las barras 1G y 2G

La Figura 4.13 muestra la sección transversal de las barras 1G y 2G y la Tabla 4.8 indica los valores de los parámetros geométricos. El desplazamiento de plastificación es igual

$L_{ax}$	$L_{bx}$	$L_{cx}$	$L_{ay}$	$L_{by}$	$L_{cy}$	$L$
(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)
14	$13\frac{3}{8}$	$1\frac{1}{2}$	14	$13\frac{3}{8}$	8	$165\frac{11}{32}$

Tabla 4.8: Dimensiones de la sección de las BPR 1G y 2G.

a  $\Delta_y = \frac{f_y}{E} * L = 1,27 \times 10^{-3} \times 165\frac{11}{32}$  in = 0,21 in, donde  $L$  es la longitud de la BPR que debe ser modelada numéricamente. Esta longitud se determina en función de la distancia de separación de los sensores de desplazamiento utilizados en los ensayos de la Universidad de California [2]. Para establecer el periodo de discretización de la función de desplazamiento, se simula numéricamente el núcleo para hallar sus frecuencias naturales. Los modos considerados

corresponden al comportamiento del núcleo desnudo (es decir, en ausencia del mortero de revestimiento), estando sujeto rígidamente por un extremo y libre por el opuesto. En la Figura 4.14 se presenta el sexto modo de vibración del núcleo de la BPR 1G <sup>1</sup>, valor que fue elegido para determinar la discretización en el tiempo del desplazamiento impuesto. En la Figura 4.15

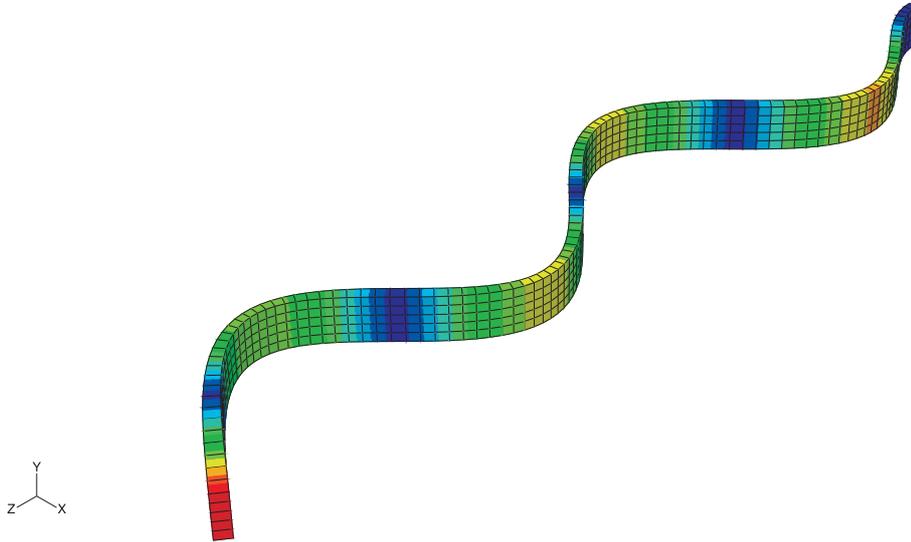


Figura 4.14: Sexto modo de vibración del núcleo de las BPR 1G y 2G

se muestra el mallado de las BPR 1G y 2G generado a partir de la Figura 4.13 por el método de extrusión. Los elementos finitos son hexaedros de 8 nodos e interpolación lineal (C3D8R) [77]. El núcleo de acero y la funda de mortero están discretizados por hexaedros de aproximadamente  $1\frac{1}{2}$  in de arista. La Figura 4.16 presenta la relación fuerza-deformación obtenida en el ensayo experimental. La Figura 4.16 muestra que la BPR 1G tiene un comportamiento de endurecimiento mixto, es decir una combinación de endurecimiento cinemático e isótropo. La Figura 4.16 también muestra que el comportamiento de la barra es estable, y que la plastificación a tracción empieza con una fuerza aproximada de 480 kips, mientras que la plastificación a compresión se inicia en aproximadamente 490 kips; esta diferencia se debe a la cooperación del revestimiento producida por el rozamiento generado al pandear el núcleo. En la Figura 4.17 se presentan lazos de histéresis (relación fuerza-deformación), obtenidos numéricamente, utilizando endurecimiento cinemático para el acero. Al comparar la Figura 4.17 con la Figura 4.16, se observa que el modelo describe satisfactoriamente la relación fuerza-desplazamiento. Se observa que los valores de plastificación a tracción y compresión son similares.

---

<sup>1</sup>Para que el análisis converja es conveniente determinar los periodos naturales del núcleo de la BPR y elegir como paso de tiempo para discretizar el desplazamiento impuesto un valor inferior a aquel cuya influencia se considera relevante

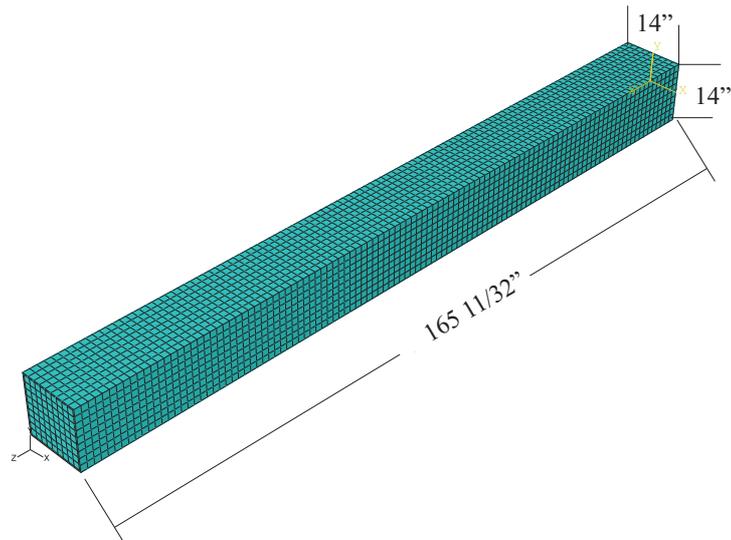


Figura 4.15: Mallado de las BPR 1G y 2G [2]

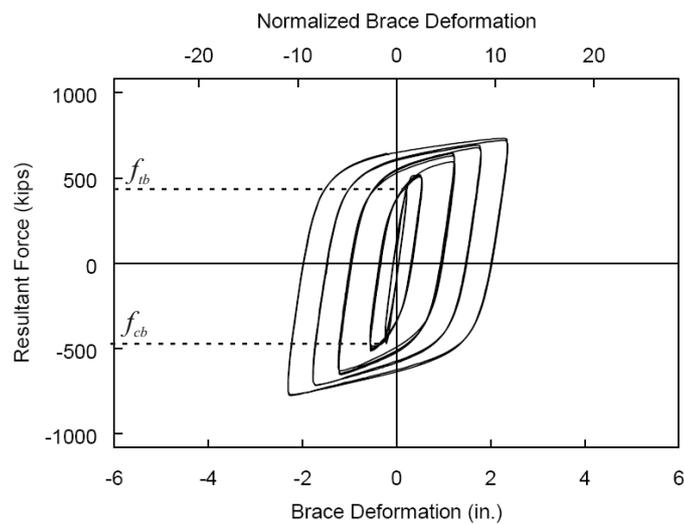


Figura 4.16: Lazos de histéresis experimentales de la BPR 1G [2]

### 4.2.3. Simulación numérica de las barras 3G y 4G

La Figura 4.18 muestra la sección transversal de las barras 3G y 4G. La Tabla 4.9 presenta los valores de los parámetros geométricos representados en la Figura 4.18. El desplazamiento

$L_{ax}$	$L_{bx}$	$L_{cx}$	$L_{ay}$	$L_{by}$	$L_{cy}$	$t_p$	$L$
(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)	(in)
16	$15\frac{3}{8}$	$9\frac{3}{4}$	16	$15\frac{3}{8}$	$9\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$188\frac{1}{8}$

Tabla 4.9: Dimensiones de la sección de las BPR 3G y 4G.

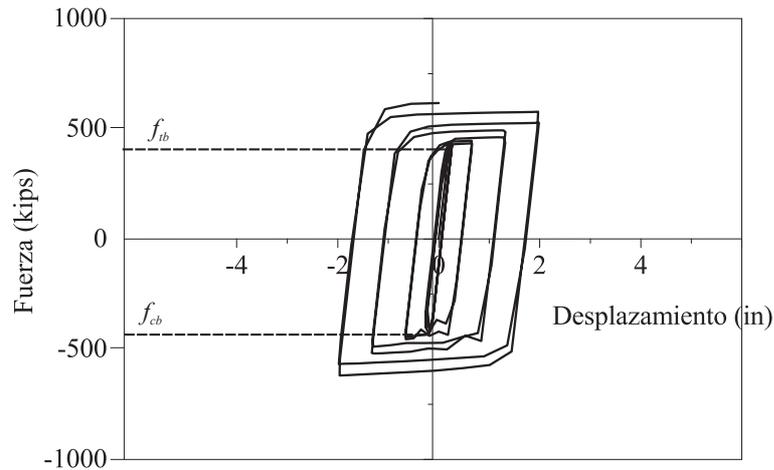


Figura 4.17: Modelización numérica de los lazos de histéresis de las barras 1G y 2G

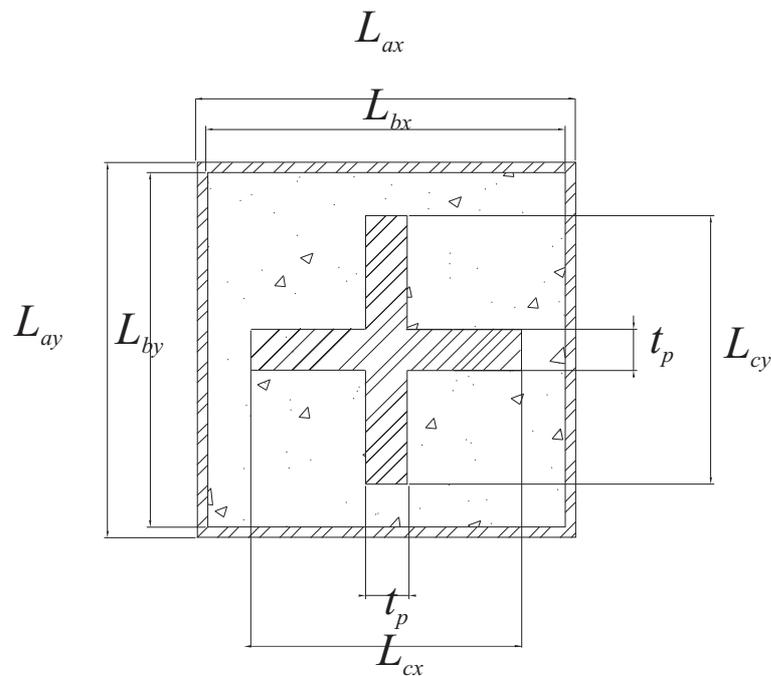


Figura 4.18: Sección transversal de las BPR 3G y 4G

de plastificación es:  $\Delta = \frac{f_y}{E}L = 1,27 \times 10^{-3} \times 188\frac{1}{8} \text{ in} = 0,24 \text{ in}$ , donde  $L$  es la separación entre los sensores de desplazamiento utilizados [2]. Para determinar el periodo de discretización de la función de desplazamiento, se simula numéricamente el núcleo con el objetivo de hallar sus frecuencias naturales. En la Figura 4.19 se muestra el tercer modo de vibración del núcleo de la BPR 3G. La función de desplazamiento impuesto se discretiza en el tiempo con el periodo de este modo. La Figura 4.20 describe el mallado de la BPR 3G. Los elementos finitos son hexaedros de interpolación lineal (C3D8R) [77]. En la Figura 4.21 se presenta la curva fuerza-desplazamiento

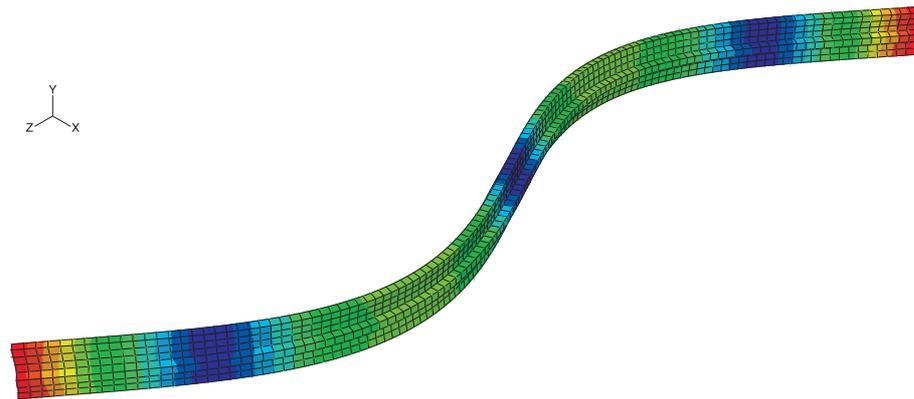


Figura 4.19: Tercer modo de vibración del núcleo las BPR 3G y 4G

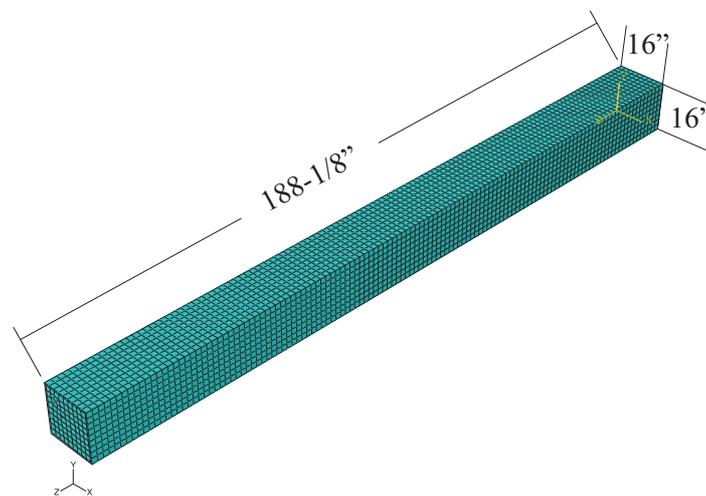


Figura 4.20: Mallado de las BPR 3G y 4G.

obtenida en los ensayos realizados en la Universidad de California [2] para la BPR 3G. En este caso los límites elásticos a tracción y compresión son aproximadamente iguales. La Figura 4.22 muestra la simulación numérica de los resultados experimentales de la Figura 4.21; se considera endurecimiento isótropo del acero. En la Figura 4.22 se observa que los límites elásticos a tracción y compresión son aproximadamente iguales. Comparando los resultados para las barras 1G y 2G, por una parte, y 3G y 4G, por otra parte, se observa que en aquéllas los límites elásticos a tracción y compresión son diferentes mientras que en éstas son aproximadamente iguales. Esta diferencia se debe a que en las barras 1G y 2G la rigidez del núcleo en su dirección débil es baja por lo que éste tiende a pandear cuando se encuentra comprimida generándose interacción longitudinal con el revestimiento.

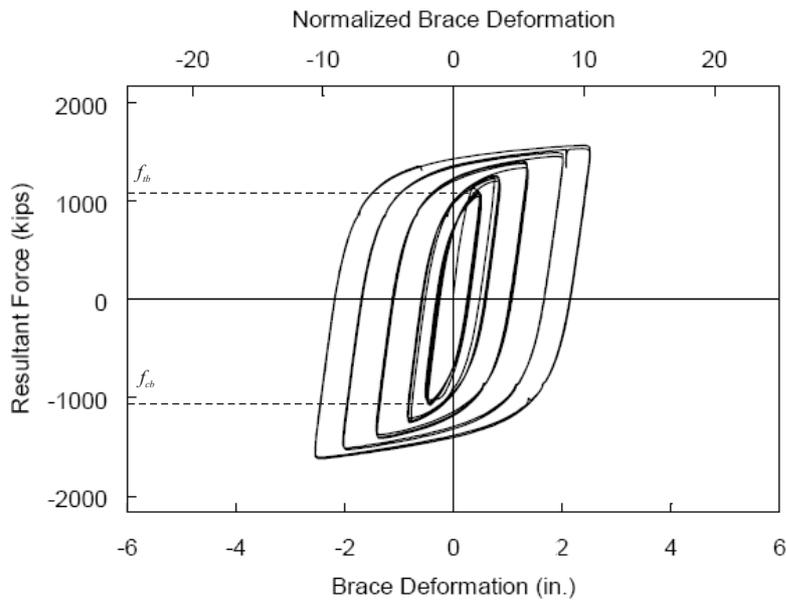


Figura 4.21: Lazos de histéresis obtenidos en la Universidad de California para la BPR 3G [2].

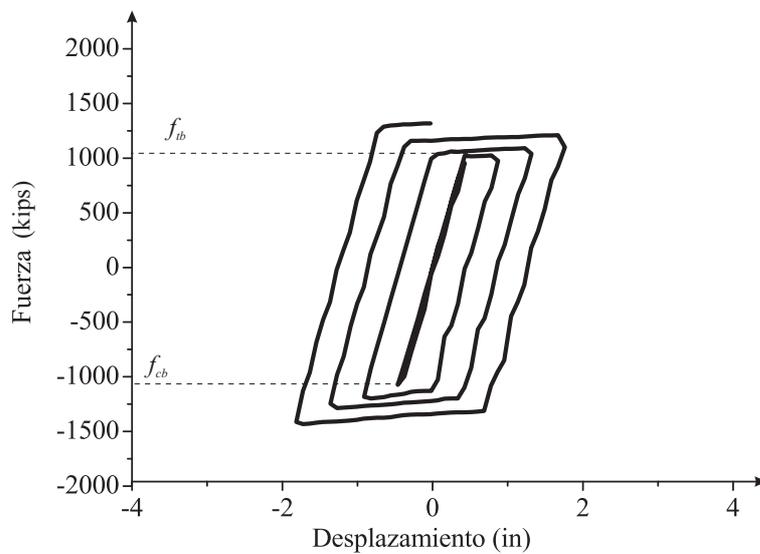
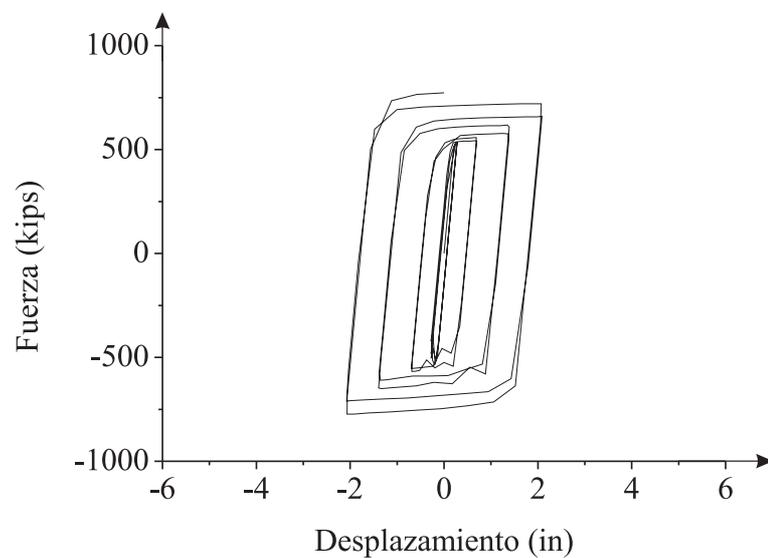


Figura 4.22: Modelización numérica de la BPR 3G

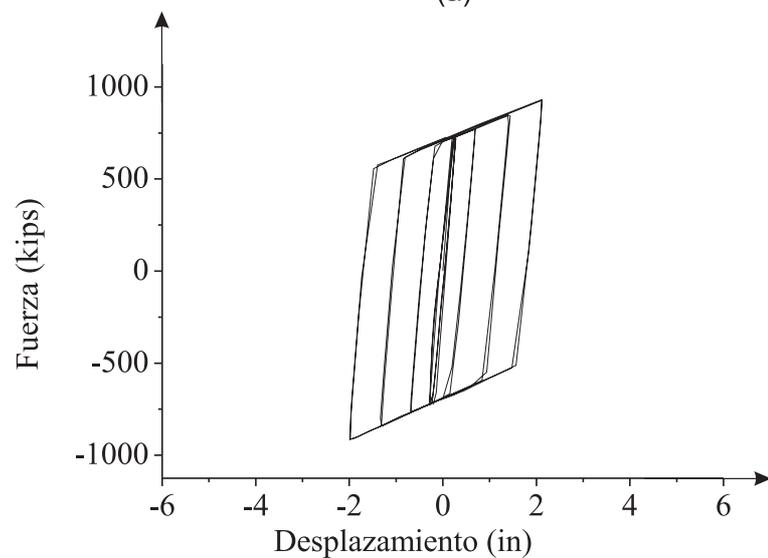
#### 4.2.4. Comparación entre los valores numéricos y experimentales de la energía disipada

En este subapartado se presenta una comparación entre los valores numéricos y experimentales de las energías disipadas por las barras 1 G y 3 G. Las energías se comparan meramente de forma gráfica, ya que no se tienen datos numéricos de los ensayos. En la Figura 4.23 se presentan los lazos de histéresis numéricos obtenidos al modelar la barra 1G con ambos criterios

de endurecimiento. La gráfica 4.23(a) es el resultado de haber utilizado el modelo numérico descrito en este estudio con un endurecimiento cinemático nulo y un endurecimiento isótropo igual al 10 % del módulo de elasticidad. Como era de esperar, se aprecia claramente el crecimiento homotético de la superficie de discontinuidad, sin variar su centro. La gráfica (b) se logra utilizando Abaqus/Explicit con la subrutina implementada en el apéndice C, con un endurecimiento cinemático equivalente al 10 % y un endurecimiento isótropo nulo. En la Figura se observa el crecimiento homotético de la superficie de discontinuidad. En la Figura 4.23(b) se aprecia el desplazamiento del centro de la superficie de discontinuidad. Las gráficas mostradas



(a)



(b)

Figura 4.23: Simulación numérica de los lazos de histéresis de la barra 1G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático

en la Figura 4.24 representan la energía disipada, es decir, el área encerrada por los lazos de histéresis. Las dos gráficas de la Figura 4.24 son m similares y presentan un comportamiento de tipo exponencial. La Figura 4.25 es el resultado de hallar el área bajo la curva de la Figura

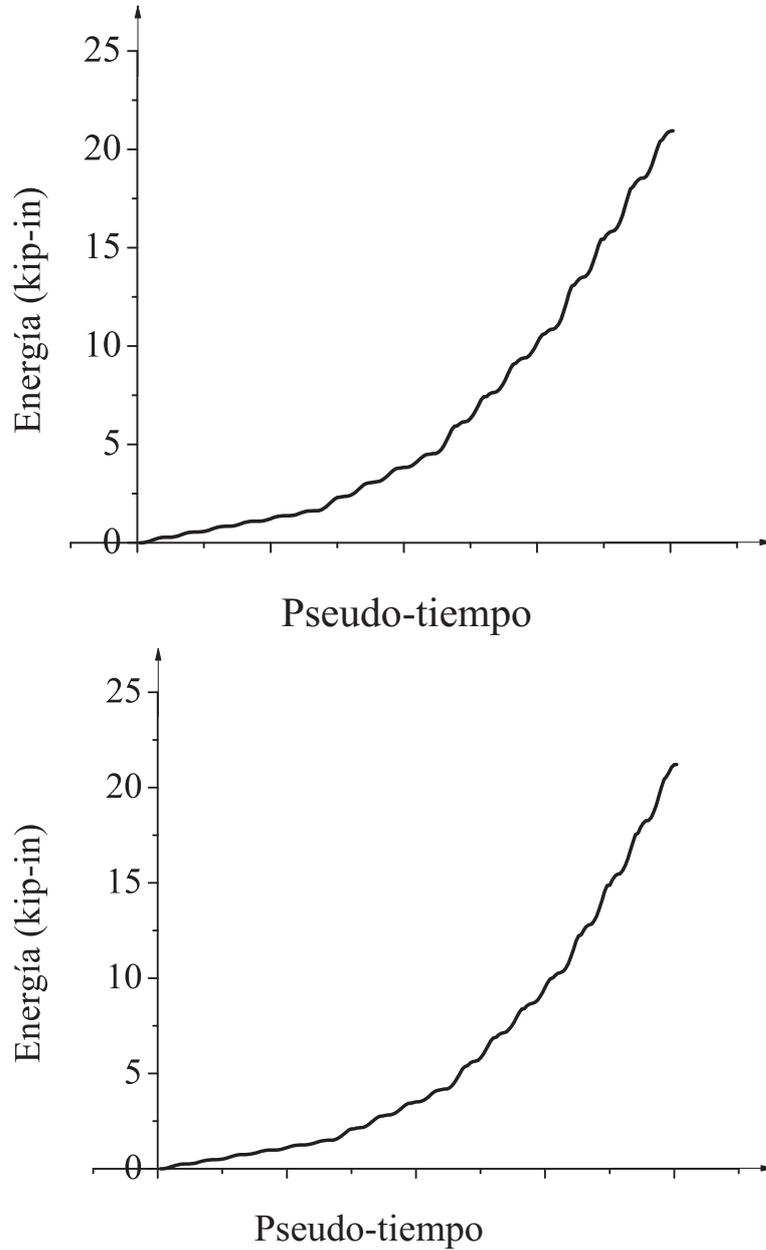


Figura 4.24: Simulación numérica de la evolución temporal de la energía disipada en la barra 1G.  
(a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático

4.16. La curva de energía representada en la 4.25 tiene un comportamiento exponencial menos acentuado que las obtenidos numéricamente (Figura 4.24).

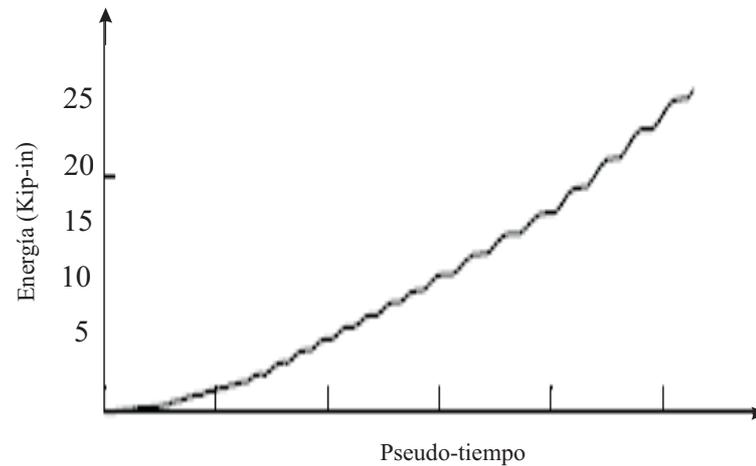


Figura 4.25: Energía disipada por la BPR 1G. Resultados experimentales [2]

En las gráficas contenidas en la Figura 4.26 se presentan los resultados de la modelización numérica de la barra 3G con endurecimientos isótropo y cinemático, respectivamente. El comportamiento de las gráficas de la Figura 4.26 es estable. La Figura 4.27 presenta los resultados numéricos de la evolución temporal de la energía disipada por la barra 3G en las Figuras 4.27(a) y 4.27(b) se muestran los resultados considerando endurecimiento isótropo y cinemático, respectivamente. Las curvas de la Figura 4.27 presentan un comportamiento de tipo exponencial; los puntos en que se producen aumentos bruscos de la pendiente corresponden a incrementos de la amplitud del desplazamiento impuesto. El primer tramo de las curvas de energía 4.27 es nulo tanto para endurecimiento cinemático como isótropo; esto se debe a que la energía disipada en el dominio elástico vale cero y va aumentando a medida que la BPR plastifica. La Figura 4.28 presenta los resultados experimentales correspondientes a la simulación numérica mostrada en la Figura 4.27. La comparación entre ambas Figuras muestra que en los resultados experimentales la disipación de energía se produce ya en los primeros ciclos; la Figura 4.21 confirma esta apreciación.

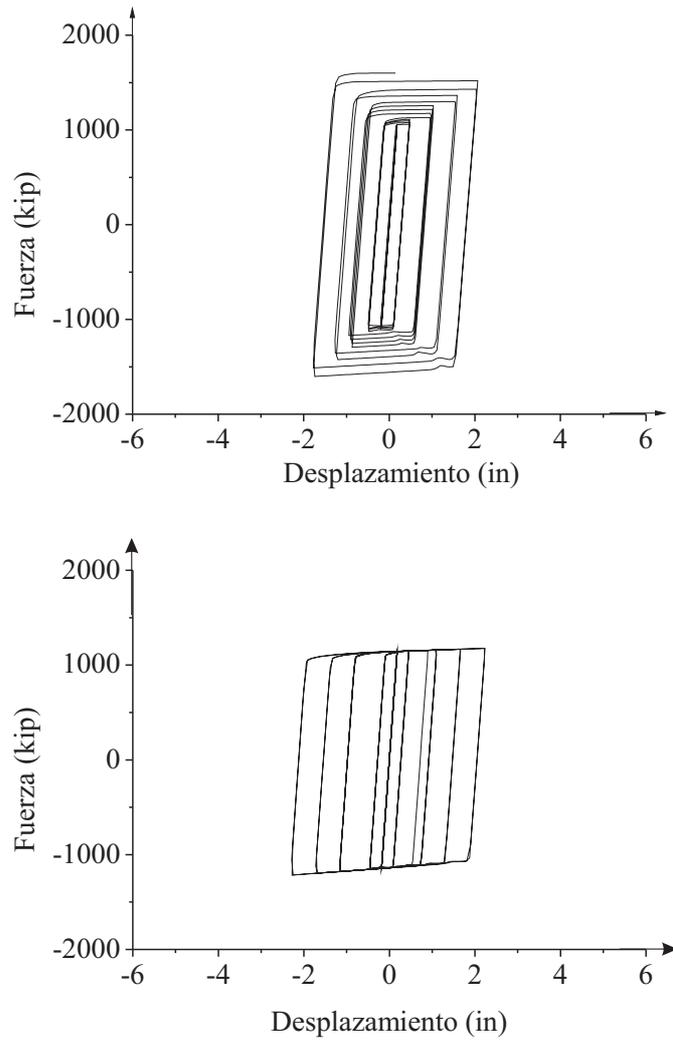


Figura 4.26: Simulación numérica de los lazos de histéresis de la barra 3G. (a) Endurecimiento isótropo (b) Endurecimiento cinemático

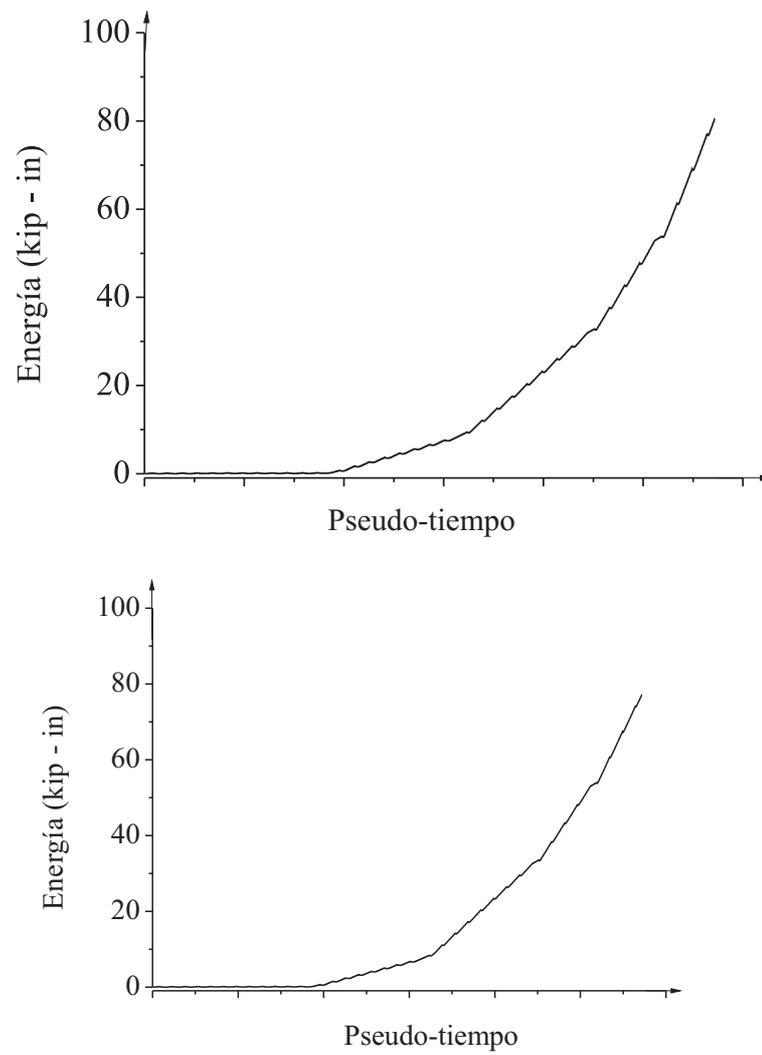


Figura 4.27: Simulación numérica de la evolución temporal de la energía disipada en la barra 3G.

(a) Endurecimiento isótopo (b) Endurecimiento cinemático

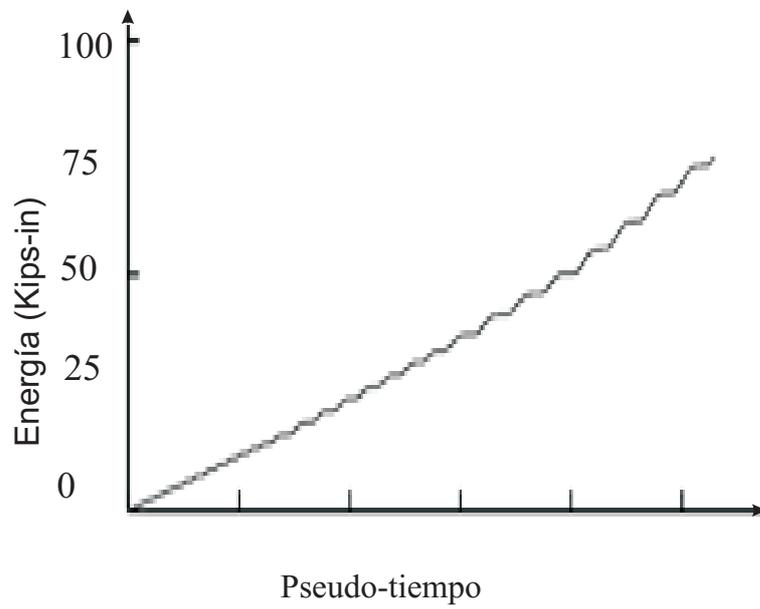


Figura 4.28: Energía disipada por la BPR 3G. Resultados experimentales [2]

# 5. Conclusiones e investigaciones futuras

El presente trabajo propone un modelo numérico del comportamiento estructural de barras de pandeo restringido (BPR). Las BPR consideradas constan de un núcleo de acero, una interfaz deslizante, un revestimiento de mortero y, eventualmente, una funda exterior de acero. El comportamiento del acero del núcleo se representa mediante un modelo plástico de endurecimiento cinemático o isótropo. El comportamiento de la interfaz entre el núcleo y el revestimiento se describe mediante un modelo de contacto de penalización. El comportamiento del mortero se representa mediante un modelo isótropo de daño. La capacidad de estos modelos se contrasta, para un conjunto de situaciones sencillas y representativas, con resultados esperables. Estos modelos se implementan en el programa Abaqus formulando el balance energético y resolviendo las ecuaciones obtenidas con una formulación explícita. Los resultados del modelo se comparan con resultados experimentales, el ajuste obtenido es correcto. El modelo presentado se considera un procedimiento adecuado y fiable para resolver numéricamente el problema planteado.

## 5.1. Aportaciones de este trabajo

En este apartado se listan las contribuciones originales desarrolladas durante esta investigación.

- Adaptación e implementación de modelos numéricos avanzados para describir el comportamiento estructural de barras de pandeo restringido.
- Definición en un medio continuo de un modelo de daño escalar acoplado con plasticidad para el acero, e implementación en Abaqus/Explicit.

- Modificación y ampliación del modelo de contacto existente en Abaqus/Explicit para que juntamente con los modelos del acero y del mortero sean capaces de describir el comportamiento estructural de barras de pandeo restringido.

## 5.2. Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha desarrollado un modelo de elementos finitos, basado en la mecánica del medio continuo, implementado en Abaqus/Explicit, que reproduce con fiabilidad el comportamiento de una BPR al ser sometida a un campo de desplazamientos cíclicos impuestos. Se ha formulado un modelo constitutivo tridimensional fenomenológico elastoplástico con daño para representar el comportamiento del núcleo de acero de las BPR; este modelo está acoplado de forma débil. El comportamiento mecánico del mortero se analiza por medio de un modelo fenomenológico de daño isótropo con una ley de evolución del daño exponencial. La interfaz entre el núcleo de acero y el revestimiento de mortero se ha modelado a través de un algoritmo de contacto tipo penalización utilizando coordenadas convectivas y rozamiento de Coulomb. Se implementan estos tres modelos en un modelo global mediante el programa Abaqus/Explicit utilizando la subrutina descrita en el anejo C. Esta subrutina formula el balance energético de cada modelo, el cual garantiza la estabilidad numérica de la solución. El modelo numérico propuesto es capaz de representar el pandeo del núcleo gracias al cálculo en grandes desplazamientos, que se utiliza para representar la inestabilidad por compresión. La exactitud de este modelo se verifica mediante comparación con resultados experimentales obtenidos en las universidades de Girona y de California. El modelo propuesto podría ser utilizado para diseñar y dimensionar las BPR siguiendo las recomendaciones de la normativa vigente. A continuación se describen las principales conclusiones preliminares obtenidas de la utilización del modelo propuesto.

- Las BPR con núcleos de baja rigidez a flexión plastifican a tracción para valores inferiores de la fuerza que para compresión. Esta circunstancia se observa en las barras ensayadas en la Universidad de Girona y en algunas de las ensayadas en la Universidad de California, debido a que la sección del núcleo es altamente compacta. Sin embargo, las BPR con núcleos de mayor rigidez a flexión plastifican a tracción y a compresión para valores aproximadamente iguales de la fuerza. Esta circunstancia se observa en algunas barras ensayadas en la Universidad de California debido a que el núcleo es menos compacto.
- Los modelos de endurecimiento isótropo y cinemático (de una misma BPR) proporcionan

aproximadamente la misma cantidad de energía disipada.

- El modelo propuesto es capaz de predecir las siguientes magnitudes: el desplazamiento de plastificación a tracción y a compresión, el daño en el revestimiento (y el consecuente pandeo global del dispositivo) y el desplazamiento de rotura del núcleo a tracción.

### 5.3. Investigaciones futuras

- Realización de caracterizaciones geométricas, mecánicas y energéticas para obtener una BPR optimizada dependiendo de su uso y de las características mecánicas de los materiales disponibles para su construcción.
- Aplicación de los modelos numéricos desarrollados a otro tipo de disipadores o a elementos similares.
- Inclusión de la fatiga en el modelo del daño escalar acoplado con plasticidad para determinar con mayor exactitud las curvas de energía y poder predecir el momento del fallo. Se recomiendan las siguientes referencias: [99], [100], [101], [102], [103] y [104], entre otras.
- Análisis numérico y experimental del comportamiento dinámico de estructuras que incorporen BPR.
- Generar un modelo constitutivo de la interfaz entre el acero del núcleo y el mortero que lo rodea.
- Utilizar la teoría de fractales para determinar el tipo de endurecimiento del acero en función de la estructura cristalina en que solidifica el acero de esta manera obtener las pendientes en las ramas plásticas que aproximen mejor a las obtenidas en los ensayos de laboratorio.

Estas actividades se orientan a promover la utilización de BPR (especialmente en países en vías de desarrollo) mediante el modelo numérico sin la necesidad de hacer costosos ensayos en laboratorios especializados, los cuales pueden no estar disponibles en numerosos países.



# Bibliografía

- [1] Palazzo G., López Almansa F., Cahís X., and Crisafulli F. Theoretical and experimental analysis of dissipative buckling restrained braces. Monography Report 1-2011, CIMNE, 2011.
- [2] J. Newell, C. M. Uang, and G. Benzoni. Subassemblage testing of core brace buckling-restrained braces (g series). Structural system research project Tr-06/01, University of California, La Jolla, California 92093-0085, January 2006.
- [3] Soong T. and Dargush G. *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*. John Wiley, 1997.
- [4] Lopez W. A., Gwie D.S, Lauck T.W., and Saunders M. Structural design and experimental verification of a buckling-restrained braced frame system. *Engineering Journal*, 41, 2004.
- [5] Black C, Makris N, and Aiken L. Component testing, seismic evaluation and characterization of buckling-restrained braces. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 2004.
- [6] Hanson R D, Aiken I D, Nims D K, Richter P J, and Bachman R E. State-of-the-art and state-of-the-practice in seismic energy dissipation. *Technical Papers on Passive Energy Dissipation*, pages 449–471, 1993.
- [7] Housner G. W., Bergman L. A., Caughey T.K., Chassiakos A. G., Claus R. O., Masri S. F., Skelton R. E., Soong T. T., Spencer B. F., and Yao J. T. P. Structural control: Past, present, and future. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 123:897–971, 1997.
- [8] Martelli A. *An advanced approach to earthquake risk scenarios, with applications to different European towns*. Modern seismic protection systems for civil and industrial structures, 2006.

- [9] Aiken I. D., Nims D. K., Whittaker A. S., , and Kelly J. M. Testing of passive energy dissipation systems. *Earthquake Spectra*, 1993.
- [10] N Youssef, Wilkerson R. and Fischer K, and D. Tunick. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*. Wiley, 2010.
- [11] J.M. Franco, X. Cahís, L. Gracia, and F. López. Experimental testing of a new anti-seismic dissipator energy device based on the plasticity of metals. *Engineering Structures*, 32(9):2672 – 2682, 2010.
- [12] Watanabe A., Hitomi Y., Saeki E., Wada A., and Fujimoto M. *Properties of Brace Encased in Buckling-Restraining Concrete and Steel Tube*, volume IV. Japan Association for Earthquake Disaster Prevention, Tokyo-Kyoto, Japan, 1988.
- [13] Clark P., Aiken I., Kasai K., Ko E., and Kimura I, editors. *Proceedings 68th Annual Convention*, Sacramento, 1999. Structural Engineers Association of California.
- [14] Carden L. P., Itani A., Buckle I., and Aiken I. *Buckling restrained braces for ductile end cross frames in steel plate girder bridges*. Paper No 503. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [15] Chung-Che Chou and Sheng-Yang Chen. Subassemblage tests and finite element analyses of sandwiched buckling-restrained braces. *Engineering Structures*, 32(8):2108 – 2121, 2010.
- [16] Palazzo G and Crisafulli F. Estudio comparativo de distintos disipadores por fluencia en base a los requerimientos establecidos en distintas normas. *XXXI Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural*, 2004.
- [17] Tsai K.C, Lai J. W., Hwang Y. C., Lin S.L., and Weng C. H. *Research and application of double-core buckling restrained braces in Taiwan*. Paper No 2179. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [18] Black C., Makris N., and Aiken L. Component testing, stability analysis characterization of buckling-restrained unbonded braces. Report, Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2002/08 2002.
- [19] Usami T., Kasai A., and Kato M. *Behavior of Buckling-restrained Brace Members*. Conference on Behavior of Steel Structures in Seismic Areas (STESSA), Naples, Italy, 2003.

- [20] Lehman D., Roeder C., Yoo J.H., and Johnson S. *Seismic response of braced frame connections*. Paper No 1459. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver, Canada, 2004.
- [21] López W A, Gwie D S, Lauck T W, and Saunders M. Structural design and experimental verification of a buckling-restrained braced frame system. *Engineering Journal*, 2004.
- [22] Mahin S., Uriz P., Aiken I., Field C, and Ko E. *Seismic performance of buckling restrained braced frame systems*. Paper No 1681. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [23] Nishimoto K., Nakata Y., Kimura I., Aiken I., Yamada S., and Wada A. *Sub-assembly testing of large buckling-restrained unbonded braces*. Paper No 1133. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [24] Tremblay R., Bolduc P., Neville R. and De Vall R. Seismic testing and performance of buckling-restrained bracing systems. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 33:183–198, 2006.
- [25] Wada A. and Nakashima M. *From infancy to maturity of buckling restrained braces research*. Paper No 1732. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [26] Lee K. and Bruneau M. Energy dissipation of compression members in concentrically braced. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 2005.
- [27] D’Aniello M., Della Corte G., Mazzolani F. M., and Landolfo R. Steel buckling restrained braces. Research Project 179-223, ILVA-IDEM, Italy, 2006. Polimetrica Publisher.
- [28] Iwata M. *Applications-Design of Buckling Restrained Braces in Japan*. Paper No 3208. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [29] Tremblay R, Degrange G, and Blouin J. Seismic rehabilitation of a four-storey building with a stiffened bracing system. *8th Canadian Conference on Earthquake Engineering. Canadian Association for Earthquake Engineering*, 1999.
- [30] Kasai K and Kibayashi M. Jssi manual for building passive control technology. part-1 manual contents and design/analysis methods. *13th World Conference on Earthquake Engineering*, 2004.

- [31] Sabelli R and Aiken I. Us building-code provisions for buckling-restrained braced frames: basis and development. *13th World Conference on Earthquake Engineering.*, 2004.
- [32] M. Fisher James and etal. *AISC. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC.*, One East Wacker Drive, Suite 700 Chicago, Illinois 60601-1802, 2005.
- [33] Fahnestock L. A., Sause R., and Ricles J. M. *Seismic analysis and design of buckling-restrained braced frames.* Taylor and Francis Group, London England, 2004.
- [34] Kim J and Choi H. *Energy-Based Seismic Design of Buckling-Restrained Braces.* Paper No 2113. 13th World Conference on Earthquake Engineering, Vancouver Canada, 2004.
- [35] B. S. Taranath. *Wind and Earthquake Resistant Buldings.* CRC Press, 2004.
- [36] M. Astrella and A. Whittaker. The perfomance-based design paradigm. Technical Report MCEER-05-0011, MCERR Report, 2005.
- [37] R. L. Brockenbrough and F. S. Merritt. *Structural Steel Designer's Handbook.* McGraw-Hill, 2005.
- [38] Sabelli R, Pottebaum W, Brazier J C, and López W. Design of a buckling-restrained braced frame utilizing 2005 seismic standards. metropolis & beyond. *Proceedings of the Structures Congress and the Forensic Engineering Symposium. New York*, 2005.
- [39] Choi H and J Kim. Energy-based seismic design of buckling-restrained braced frames using hysteretic energy spectrum. *Engineering Structures*, 28(131):304–311, 2006.
- [40] Sabelli R, Mahin S A, and Chang C. Seismic demands on steel braced-frame buildings with buckling restrained braces. *Engineering Structures*, 2003.
- [41] Tremblay R, Lacerte M, and Christopoulos C. Seismic response of multi-storey buildings with self-centering energy dissipative steel braces. *Journal of Structural Engineering ASCE*, 2008.
- [42] Benavent-Climent A. An energy-based damage model for seismic response of steel structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2007.
- [43] S. Oller. *Dinámica no lineal.* CIMNE Barcelona, 2001.

- [44] S. Martinez, A. Plastino, and B.H. Soffer. Information and thermodynamics' first law. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 356(1):167 – 171, 2005. Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics (MEDYFINOL'04), Proceedings of the XIVth Conference on Nonequilibrium Statistical Mechanics and Nonlinear Physics (MEDYFINOL'04 and Satellite Conference Reaction–Diffusion Systems: Theory and Experiments).
- [45] A. Plastino, A.R. Plastino, and B.H. Soffer. Fisher info and thermodynamics' first law. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 369(2):432 – 438, 2006.
- [46] Antonio Bilotta and Emilio Turco. A numerical study on the solution of the cauchy problem in elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 46(25-26):4451 – 4477, 2009.
- [47] Dongwoo Sheen. A generalized green's theorem. *Applied Mathematics Letters*, 5(4):95 – 98, 1992.
- [48] Chapter 11 the cauchy problem for semilinear equations. In Ioan I. Vrabie, editor, *C0-Semigroups and Application*, volume 191 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 249 – 268. North-Holland, 2003.
- [49] S. and S. Rao. Finite element methods. In Simon G. Braun, editor, *Encyclopedia of Vibration*, pages 530 – 544. Elsevier, Oxford, 2001.
- [50] Zienkiewicz O. and Taylor R. *The finit Element Method*. Mc Graw-Hill, 1989.
- [51] Zienkiewicz O. and Taylor R. *El método de los elementos finitos*. CIMNE, 1994.
- [52] Aleksey D. Drozdov. Kinematics of continua. In *Viscoelastic Structures*, pages 1 – 24. Academic Press, Burlington, 1998.
- [53] Chapter 6 the newton-raphson method. In A.M. Ostrowski, editor, *Third Edition of Solution of Equations and Systems of Equations*, volume 9 of *Pure and Applied Mathematics*, pages 53 – 55. Elsevier, 1973.
- [54] D. Roy and M.K. Dash. Explorations of a family of stochastic newmark methods in engineering dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(45-47):4758 – 4796, 2005.
- [55] J. C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.

- [56] Ahmed A. Shabana. *Computational Continuum Mechanics*. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 32 Avenue of the Americas, New York, NY 10013-2473, USA, 2008.
- [57] Robert D. Cook, David S. Malkus, and Michael E. Plesha. *Concept and applications of finite element analysis*. WILEY, 1988.
- [58] Larry J Segerlind. *Applied Finite Element Analysis*. WILEY, 1984.
- [59] Dirk Mohr, Matthieu Dunand, and Keun-Hwan Kim. Evaluation of associated and non-associated quadratic plasticity models for advanced high strength steel sheets under multi-axial loading. *International Journal of Plasticity*, 26(7):939 – 956, 2010.
- [60] F. Barbe and R. Quey. A numerical modelling of 3d polycrystal-to-polycrystal diffusive phase transformations involving crystal plasticity. *International Journal of Plasticity*, In Press, Corrected Proof:–, 2010.
- [61] J. Rossiter, A. Brahme, M.H. Simha, K. Inal, and R. Mishra. A new crystal plasticity scheme for explicit time integration codes to simulate deformation in 3d microstructures: Effects of strain path, strain rate and thermal softening on localized deformation in the aluminum alloy 5754 during simple shear. *International Journal of Plasticity*, 26(12):1702 – 1725, 2010.
- [62] Xavier Oliver Olivella and Carlos Agalet de Saracibar. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edicions UPC, 2000.
- [63] Javier Bonet and Richard D. Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics For Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 1997.
- [64] Malvern Lawrence E. *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 1969.
- [65] Simo J. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992.
- [66] Simo J. and Taylor R. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1986.
- [67] Kashanov L.M. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akaademii Nauk Otd Tech Nauk*, 1958.

- [68] Oller Sergio. *Fractura Mecánica un Enfoque Global*. CIMNE, Edificio C1, Campus Nord UPC Gran Capitán, s/n, 08034 Barcelona, España, primera edición edition, 2001.
- [69] Feenstra P. Computational aspects of biaxial stress in plain and reforced concrete. *Ph.D. Thesis Technical University of Delf*, 1993.
- [70] J. Ozbolt and S. Ananiev. Scalar damage model for concrete without explicit evolution law. *Bicanic N. et al. (eds.). EURO-C Computational Modelling of Concrete Structures*, 2003.
- [71] J. Mazars. A description of micro-scale and macro-scale damage of concrete structures. *Journal of Engineering Fracture Mechanics*, 1986.
- [72] Pivonca P, Ozbolt J., Lackner R., and Mang H. Comparative studies of 3d-constitutive models for concrete: application to mixwd-model fracture. *International Journal of Numerical Methods in Enginnering*, 2002.
- [73] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3):299 – 326, 1989.
- [74] M.Ap. Tzaferopoulos. On an efficient new numerical method for the frictional contact problem of structures with convex energy density. *Computers & Structures*, 48(1):87 – 106, 1993.
- [75] A.R. Savkoor. Models of friction. In Jean Lemaitre, editor, *Handbook of Materials Behavior Models*, pages 700 – 759. Academic Press, Burlington, 2001.
- [76] Peter Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Springer, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006, second edition, 2006.
- [77] Hibbit, Karlsson, and Sorensen Inc. *Abaqus Analysis User 's Manual*. Abaqus, Rising Sun Mills, 166 Valley Street, Providence, RI 02909-2499, Tel: +1 401 276 4400, Fax: +1 401 276 4408, support@Abaqus.com, <http://www.abaqus.com>, version 6.6 edition, 2006.
- [78] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. *Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis Of Concrete*, volume 2. Second International Conference On computer Aided Analisis and design of concrete structures, Zell Am See Austria, 1990.

- [79] F Armero and Sergio Oller. A general framework for continuum damage models. i. infinitesimal plastic damage models in stress space. *International Journal of Solids and Structures*, 37(48-50):7409 – 7436, 2000.
- [80] F. Armero and Sergio Oller. A general framework for continuum damage models. part ii: integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals. *International Journal of Solids and Structures*, 2000.
- [81] N. Ohno and J. Wang. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, part i: Formulation and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity. Vol. 9 pp. 375-390.*, 1993.
- [82] J. L. Chaboche. ). on the constitutive equations of materials under monotonic or cyclic loading. *Rech. Aérop. 1983-5. France*, 1983.
- [83] B. Luccioni, Sergio Oller, and R. Danesi. Coupled plastic-damage model. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, 1996.
- [84] J. Lubliner. *Plasticity Teory*. Mac Millan, 1990.
- [85] Sergio Oller, Javier Oliver, M Cervera, and Eugenio Oñate. *Simulación del procesos de localización en mecánica de sólidos mediante un modelo plástico*. I Congreso Español de Métodos Numéricos. Canarias CIMNE, 1990.
- [86] Xiaoya Tao and David V. Phillips. A simplified isotropic damage model for concrete under bi-axial stress states. *Cement and Concrete Composites*, 27(6):716 – 726, 2005.
- [87] Hélène Welemene and Cristina Goidescu. Isotropic brittle damage and unilateral effect. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(5):271 – 276, 2010.
- [88] J. Betten, S. Sklepus, and A. Zolochovsky. A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression. *Engineering Fracture Mechanics*, 59(5):623 – 641, 1998.
- [89] O. Kintzel, S. Khan, and J. Mosler. A novel isotropic quasi-brittle damage model applied to lcf analyses of al2024. *International Journal of Fatigue*, 32(12):1948 – 1959, 2010.
- [90] Lucas Adelaide, Benjamin Richard, Frédéric Ragueneau, and Christian Cremona. Thermodynamical admissibility of a set of constitutive equations coupling elasticity, isotropic damage and internal sliding. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(3):158 – 163, 2010.

- [91] A. Brencich and L. Gambarotta. Isotropic damage model with different tensile-compressive response for brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(34-35):5865 – 5892, 2001.
- [92] Ian Stewart and Ana Paula S. Dias. Toric geometry and equivariant bifurcations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 143(1-4):235 – 261, 2000.
- [93] Anwen Wang and Wenying Tian. Mechanism of buckling development in elastic bars subjected to axial impact. *International Journal of Impact Engineering*, 34(2):232 – 252, 2007.
- [94] J.C. Simo and J.W. Ju. Strain and stress based continuum damage models i. formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7):821 – 840, 1987.
- [95] Oliver J. A consistent acharacteristic length for smeared cracking models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:461 – 474, 1989.
- [96] J. Oliver, A.E. Huespe, and J.C. Cante. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21-24):1865 – 1889, 2008.
- [97] Chapter 2 engineering applications of propositional calculus. In Lev I. Rozonoer Irina M. Smirnova Mark A. Aiserman, Leonid A. Gusev and Aleksey A. Tal', editors, *Logic, Automata, and Algorithms*, volume 79 of *Mathematics in Science and Engineering*, pages 27 – 57. Elsevier, 1971.
- [98] *UNE-ENV 1993-1-1:1996*. AENOR, 1993.
- [99] A. Fatemi and L. Yang. Cumulative fatigue damage and life prediction theories: a survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, 20(1):9 – 34, 1998.
- [100] Kwai S. Chan. Roles of microstructure in fatigue crack initiation. *International Journal of Fatigue*, 32(9):1428 – 1447, 2010. Emerging Frontiers in Fatigue.
- [101] D. Taylor. Fatigue thresholds: their applicability to engineering situations. *International Journal of Fatigue*, 10(2):67 – 79, 1988.

- [102] J. H. Yan, X. L. Zheng, and K. Zhao. Prediction of fatigue life and its probability distribution of notched friction welded joints under variable-amplitude loading. *International Journal of Fatigue*, 22(6):481 – 494, 2000.
- [103] J. Schijve. Fatigue of structures and materials in the 20th century and the state of the art. *International Journal of Fatigue*, 25(8):679 – 702, 2003.
- [104] I. Verpoest, E. Aernoudt, A. Deruyttere, and M. De Bondt. The fatigue threshold, surface condition and fatigue limit of steel wire. *International Journal of Fatigue*, 7(4):199 – 214, 1985.
- [105] Behzad Soltani, Kjell Mattiasson, and Alf Samuelsson. Implicit and dynamic explicit solutions of blade forging using the finite element method. *Journal of Materials Processing Technology*, 45(1-4):69 – 74, 1994.
- [106] Dynamics of Structures. *R. Clough and J. Penzien (1977)*. Mc Graw-Hill, 1977.
- [107] M. Paz. *Dinámica estructural*. Reverté, 1992.
- [108] E. Car, F. Lopez, and Sergio Oller. *Estructuras sometidas a acciones dinámicas*. CIMNE, 2000.
- [109] A. Barbat and J. Miquel. *Estructuras sometidas a acciones sísmicas*. CIMNE, 1994.
- [110] A. Barbat and Sergio Oller. *Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sísmoresistente*. CIMNE, 1997.

# A. Reseña sobre la formulación numérica complementaria utilizada

## A.1. Método de las diferencias finitas

El análisis dinámico explícito se resuelve mediante elementos finitos, para cada instante de tiempo (como si fuese estático) y el método de las diferencias finitas se utiliza en el análisis dinámico explícito para solucionar las ecuaciones en el dominio del tiempo (ver [105] y [43]) y consiste en una aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones que gobiernan un sistema matemático o un sistema continuo. La solución por diferencias finitas consiste en que las derivadas son remplazadas por diferencias, convirtiendo un problema de ecuaciones diferenciales en un problema algebraico de solución por métodos matriciales.

### Aproximación de las derivadas parciales mediante diferencias finitas

. Las fórmulas de aproximación de diferencia para derivadas parciales de funciones multidimensionales son esencialmente iguales a las de diferenciación de funciones unidimensionales. Se considera una función bidimensional  $f(x, y)$ . La aproximación de diferencia para la derivada parcial, con respecto de  $x$ , se deduce fijando  $y$  en un valor constante  $y_0$ , y considerando  $f(x, y_0)$  como una función unidimensional. Las aproximaciones de diferencia pueden ser hacia adelante, centrales y hacia atrás. Estas derivadas parciales se escriben, respectivamente:

$$(A.1) \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\delta x} \xrightarrow{\text{Error}} (\delta x)$$

$$(A.2) \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \delta x, y_0) - f(x_0 - \delta x, y_0)}{2\delta x} \xrightarrow{\text{Error}} (\delta x)^2$$

$$(A.3) \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x_0, y_0) - f(x_0 - \delta x, y_0)}{\delta x} \xrightarrow{\text{Error}} (\delta x)$$

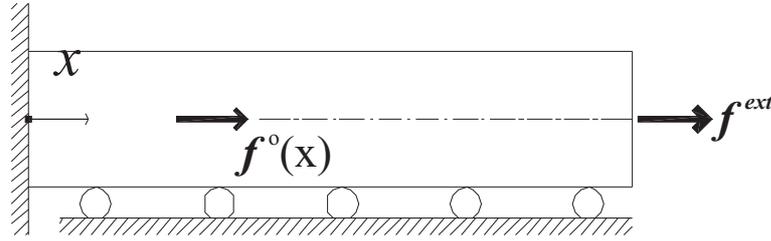


Figura A.1: Condiciones de contorno del problema de una barra unidimensional

En el caso de las diferencias finitas centrales, representadas por la ecuación A.2, la propagación del error es directamente proporcional al cuadrado del incremento en las abscisas. Es decir, que cuanto mayor sea la discretización de las abscisas la propagación del error crecerá al cuadrado. Para el caso de las diferencias hacia adelante y hacia atrás, en las ecuaciones A.1 y A.3, el error aumentará linealmente respecto al incremento en las abscisas.

### Diferencias finitas en una dimensión

Supongamos que se va a resolver un problema unidimensional de contorno. Se precisará determinar la función  $u(x)$ . Esta función debe satisfacer una ecuación diferencial dada en una región delimitada por  $0 \leq x \leq L$ , siendo sus condiciones de contorno:  $x = 0$  y  $x = L$ . Como ejemplo, se considera una barra uniforme (módulo elástico longitudinal  $E$ ) de sección constante y área de sección transversal  $A$ , como se muestra en la Figura A.1. La ecuación diferencial que corresponde a la formulación de éste problema es:

$$(A.4) \quad u'' + \frac{f^o}{EA} = 0$$

Con las siguientes condiciones de contorno:

$$(A.5) \quad u = 0 \quad \text{en} \quad x = 0$$

$$(A.6) \quad EA \frac{du}{dx} = f^{ext} \quad \text{en} \quad x = L$$

Se expresa la función de fuerza longitudinal en la siguiente ecuación (variación lineal):

$$(A.7) \quad f^o(x) = a \cdot x$$





se estudia la convergencia del método en función del refinamiento del mallado, para estimar la magnitud de los errores ocurridos al producirse una aproximación. Si, por ejemplo, el error de una aproximación es de orden de  $\delta x^2$ , entonces los resultados de dos soluciones sobre mallas de espaciado  $\delta x$  y  $\delta y$  se extrapolan como se explica a continuación. Siendo que  $\varpi^x$  y  $\varpi^y$  corresponden a las soluciones para las mallas anteriores, 1 y 2 respectivamente, y que  $\phi^e$  corresponde a la solución exacta en el punto que se considera, se obtiene la siguiente expresión.

$$(A.11) \quad \frac{\varpi^e - \varpi^x}{\varpi^e - \varpi^y} = \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2$$

De la ecuación A.11 se extrae la solución exacta. Esta expresión se conoce como *extrapolación de Richardson*. Proporciona un método para mejorar la solución a partir de los resultados obtenidos para dos mallas de distinto tamaño de espaciado. La ecuación se aplica a casos bidimensionales y tridimensionales.

## A.2. Matriz de masa consistente

Se propone ahora un ejemplo del ensamblaje de una matriz de masa consistente para una barra. Siendo  $[\mathbf{M}]$  una matriz de masa de representación discreta, es denominada matriz de masa consistente si se genera con la misma función de forma  $[\mathbf{N}]$  que con la matriz de rigidez. En la

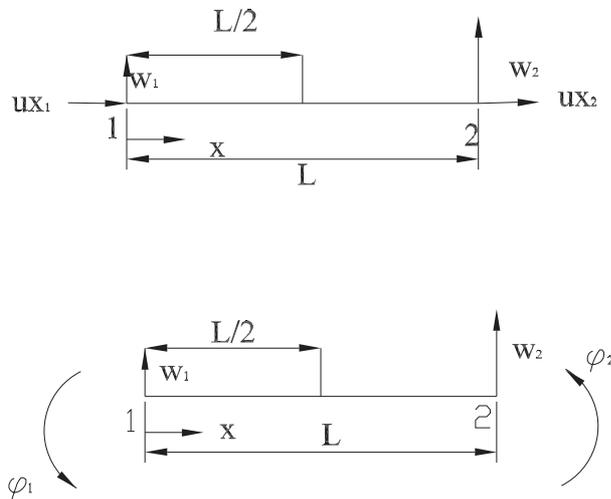


Figura A.3: Viga uniformemente cargada

Figura A.3 se representa una viga (barra) uniforme con sus respectivos desplazamientos en cada extremo. La matriz  $[\mathbf{u}]$  está formada por los vectores  $[ux_1, w_1, ux_2, w_2]^T$  y  $[ux_1, \varphi_1, ux_2, \varphi_2]^T$ . En este ejemplo se considera el elemento barra mostrado en la Figura A.3 usando la ecuación  $[\mathbf{M}] = \int_{V_e} \rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dV$ , donde la función de forma  $[\mathbf{N}] = \left[ \frac{(L-s)}{L} \quad \frac{s}{L} \right]$  y  $\{\mathbf{u}\} = \{u_i, u_j\}^T$ . Se

reemplaza  $s$  por la coordenada  $x$ , el incremento de masa  $\rho dV$  se representa mediante  $m/Ldx$ , en la que  $m = \rho AL$  es la masa total del elemento. Las matrices de masa de la barra superior de la Figura A.3 consistente y diagonal son respectivamente:

$$(A.12) \quad [m] = \frac{m}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad [\mathbf{m}] = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz banda se obtiene situando en el medio todos los elementos de masa.  $m$  es particular para cada nodo. La parte  $\frac{m}{2}$  aparece 4 veces en  $[\mathbf{m}]$  por 4 vectores de aceleración en los nodos que son resistidos por la inercia. Las funciones de forma para el elemento viga uniforme, representado en la Figura A.3, son:

$$(A.13) \quad \begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned}$$

La matriz de masa consistente se consigue al sustituir las funciones de forma e integrar en el dominio de volumen, en la ecuación  $[\mathbf{M}] = \int_{V_e} \rho [N]^T [N] dV$ . Entonces la matriz de masa consistente de la barra inferior de la Figura A.3 es:

$$(A.14) \quad [\mathbf{m}] = \frac{m}{420} \begin{pmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22 & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

En las matrices A.12y A.14  $m = \rho AL$  indica la masa total del elemento, la matriz de masa diagonal de la viga, que se escribe:

$$(A.15) \quad [\mathbf{m}] = \frac{m}{2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta L^2}{210} & 1 & \frac{\beta L^2}{210} \end{bmatrix}$$

El segundo y cuarto término de la diagonal cuenta con rotaciones inerciales. En las rotaciones de inercia algunas veces  $\beta = 0$ . Dado que la barra es delgada y uniforme se toma, para la longitud  $L/2$  y masa  $m/2 = \rho AL/2$ , la inercia de la barra es:  $I = \frac{m}{2} \left[ \frac{L}{2 \times 3} \right]^2$ . En este caso  $\beta = 17,5$ . Si cada elemento no es uniforme en su densidad las matrices de masa y rigidez cambian.

### A.3. Problema dinámico elástico lineal

En este subapartado se desarrolla la solución del problema elástico lineal mediante el análisis modal y el método de separación de variables. Esta técnica permite escribir un sistema de ecuaciones desacoplado a un grado de libertad, utilizando el concepto de diagonalización [106], [107], [108], [109] y [110]. La ecuación diferencial de equilibrio dinámico en el tiempo ( $t$ ) es una ecuación de coeficientes constantes definida en el dominio  $\Gamma$  de la siguiente forma

$$(A.16) \quad \mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbb{D}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{U}(t) - \mathbf{f}^{ext}(t) = 0$$

En la ecuación A.16 la matriz de masa  $\mathbb{M}$  A.17 debe ser simétrica y definida positiva; las matrices de amortiguamiento  $\mathbb{D}$  y de rigidez  $\mathbb{K}$  también deberán ser simétricas y definidas positivas. Este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, a coeficientes constantes, ya contiene la discretización espacial. El campo de desplazamientos  $\mathbf{U}(t)$ , velocidades  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  están definidos en los nodos, en los puntos donde se soporta el polinomio de aproximación local o función de forma  $\mathbf{N}$ . En la ecuación A.16 el campo temporal es continuo. Dentro del espacio discreto elástico lineal, aproximado mediante las siguientes funciones polinómicas, se representan las magnitudes:

$$(A.17) \quad \mathbb{M} = \mathbf{A}_\Gamma \int_V \rho \mathbf{N} : \mathbf{N} dV$$

Las fuerzas internas se representan en la ecuación A.18

$$(A.18) \quad \mathbf{f}^{int}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, t + \Delta t) = \mathbf{A}_\Gamma \int_V \boldsymbol{\sigma}(\nabla^S \mathbf{N}) dV =$$

$$\left[ \mathbf{A} \int_V (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathfrak{S} : (\nabla^S \mathbf{N}) dV \right] + \left[ \mathbf{A}_\Gamma \int_V (\nabla^S \mathbf{N}) : \mathbb{E} : (\nabla^S \mathbf{N}) dV \right] : \dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) =$$

$$(A.19) \quad = \mathbb{D}\dot{\mathbf{U}}(t + \Delta t) + \mathbb{K}\mathbf{U}(t + \Delta t)$$

Las fuerzas externas corresponden a la ecuación A.20

$$(A.20) \quad \mathbf{f}^{ext}(t + \Delta t) = \mathbf{A}_\Gamma \left[ \oint_S \mathbf{N} \mathbf{t} dS + \int_V \rho \mathbf{N} \cdot \mathbf{b} dV \right]$$

La filosofía preponderante para la resolución de este problema clásico en dinámica lineal se basa en admitir el “concepto de separación de variables”. Este método permite que los problemas espaciales y temporales sean independientes entre sí. Por esta razón, como ya se ha dicho, se establece una estrategia diferente de resolución para cada uno de los problemas. El problema espacial se resuelve utilizando elementos finitos, y el problema temporal se soluciona utilizando

las diferencias finitas. La ecuación A.16, que representa el equilibrio espacial, se solventa en cada instante de tiempo  $t$ . Los desplazamientos se describen utilizando la técnica de *superposición modal*.

$$(A.21) \quad \mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_h(t)$$

El vector de desplazamientos es representado por  $U_h$  del modo  $i^{\text{esimo}}$ , que explica la *forma del movimiento* de las  $n$  coordenadas normales de Lagrange  $\lambda_i(t)$  o grados de libertad del sistema. Cuando se perturba el grado  $i^{\text{esimo}}$  se separan las variables y el desplazamiento se escribe para el grado  $i^{\text{esimo}}$ , como el producto entre su forma de vibrar  $\mathbf{U}_i$ , y la amplitud en el tiempo de su coordenada normal  $\varphi(t)$ .

$$(A.22) \quad \mathbf{U}_i(t) = \mathbf{U}_i \cdot \lambda_i(t)$$

La ecuación A.21 se escribe de la siguiente manera:

$$(A.23) \quad \mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_i(t) = \sum_{i=1}^{n-\text{modos}} \mathbf{U}_i(t) \cdot \lambda_i(t)$$

$$(A.24) \quad \mathbf{U}(t) = \mathbb{U} \cdot \Phi(t) = [u_1 \cdots u_i \cdots u_n] \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_i(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{pmatrix}$$

Donde  $\mathbb{U}$  es la matriz modal que contiene los  $n$  vectores modales  $\mathbf{U}_1$  normalizados respecto de la masa, y  $\Phi(t)$  es el vector de coordenadas modales  $\lambda(t)$ . Este vector representa el comportamiento de todas las coordenadas normales del sistema en el dominio del tiempo. Al sustituir la ecuación A.24 en A.16 obtenemos la expresión de equilibrio dinámico:

$$(A.25) \quad \mathbb{M} \mathbb{U} \cdot \ddot{\Phi}(t) + \mathbb{D} \mathbb{U} \cdot \dot{\Phi}(t) + \mathbb{K} \mathbb{U} \Phi(t) - \mathbf{f}^{ext}(t) = 0$$

Pre-multiplicando la ecuación anterior por la matriz modal  $\mathbb{U}^T$  las propiedades de ortogonalidad de los auto vectores establece:

$$(A.26) \quad \mathbf{U}_i^T \mathbb{M} \mathbf{U}_j = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} ; \quad \mathbf{U}_i^T \mathbb{K} \mathbf{U}_j = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ \omega f_i^2 = \Lambda_i & \forall i = j \end{cases}$$

Siempre que estos auto-vectores estén normalizados respecto a la masa. Se consigue el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden a coeficientes constantes.

$$(A.27) \quad \ddot{\Phi}(t) + \mathbb{N}\dot{\Phi}(t) - \mathbb{h}\Phi(t) - \mathbb{U}^T \cdot \mathbf{f}^{ext}(t) = 0$$

$$(A.28) \quad \begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \ddot{\lambda}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{\lambda}_h(t) \\ \vdots \\ \ddot{\lambda}_n(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathfrak{S}\omega f_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 2\mathfrak{S}_h\omega f_h & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2\mathfrak{S}_n\omega f_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_h(t) \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_n(t) \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \omega f_1^2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \omega f_h^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega f_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \lambda_1(t) \\ \vdots \\ \lambda_h(t) \\ \vdots \\ \lambda_n(t) \end{Bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} U_1^1 & \cdots & U_1^h & \cdots & U_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_h^1 & \cdots & U_h^h & \cdots & U_h^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n^1 & \cdots & U_n^h & \cdots & U_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} r_1^{ext}(t) \\ \vdots \\ r_h^{ext}(t) \\ \vdots \\ r_n^{ext}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Cada una de estas ecuaciones están desacopladas:

$$(A.29) \quad \ddot{\lambda}_h(t) + 2\mathfrak{S}_h \omega f_h \dot{\lambda}_h(t) + \omega f_h^2 \lambda_h(t) - [a_o^{ext}(t)] = 0$$

Con  $[a_h^{ext}(t)] = \sum_{i=1}^{n-GL} \mathbf{U}_h^i \cdot \mathbf{f}_i^{ext}(t)$  que representa el movimiento de un *oscilador equivalente a un grado de libertad*. Se aplican técnicas de resolución en el tiempo de la ecuación diferencial de equilibrio dinámico a un grado de libertad. Las frecuencias naturales están dadas por la función  $\omega f_h = \sqrt{\lambda_h}$  o, también denominadas frecuencias angulares, que resultan de la obtención de auto valores  $\lambda_h$  a partir de la ecuación algebraica  $\|\mathbb{K} - \lambda_h \mathbb{M}\| = 0$  de grado  $n - GL$  (número de grados de libertad). Sus correspondientes auto vectores  $\mathbf{U}_h$  se obtienen de la solución del sistema de ecuaciones  $[\mathbb{K} - \lambda_h \mathbb{M}] \cdot \mathbf{U}_h = 0$

$$(A.30) \quad \ddot{\lambda}_h(t) + 2\mathfrak{S}_h \omega f_h \dot{\lambda}_h(t) + \omega f_h^2 \lambda_h(t) - [a_h^{ext}(t)], \quad \forall \quad 1 < o < n-GL$$

La solución de este sistema de ecuaciones, mediante una técnica numérica de integración directa de un paso, tiene la siguiente fórmula general *recurrente*:

$$(A.31) \quad \mathbf{X}^{t+\theta t} = \mathbb{A}^\theta \cdot \mathbf{X}^t + \mathbf{L}\mathbf{F}^{t+\theta\Delta t}, \quad \forall \quad 0 \leq \theta \leq \infty$$

Siendo  $\mathbf{X} = \{\ddot{\lambda}_h, \dot{\lambda}_o, \lambda_o\}$ , la matriz  $\mathbb{A}$  y el vector  $\mathbf{L}\mathbf{N}$  son los operadores de integración y fuerza respectivamente, de manera que cada uno de esos operadores deben determinarse para cada algoritmo de resolución utilizado.

# B. Descripción de los módulos utilizados en el programa Abaqus/Explicit

Abaqus/Explicit es un programa de elementos finitos destinado a resolver problemas de ciencias e ingeniería. El programa resuelve casi todo tipo de problemas, desde un simple análisis lineal hasta simulaciones no lineales complejas. Abaqus/Explicit posee una extensa librería de elementos finitos que permite modelar virtualmente cualquier geometría, así como una larga lista de modelos que simulan el comportamiento de una gran mayoría de materiales. También se pueden incorporar al programa nuevos modelos constitutivos, permitiendo su aplicabilidad en distintas áreas de ingeniería. El programa Abaqus/Explicit está instalado en la máquina del centro de cálculo de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos de Barcelona, y cuenta con las siguientes características: Silicon Graphics Origin 300, 8 procesadores MIPS R14000 a 600 MHz, 6 GB de memoria RAM, 162 GB de disco duro. Se accede a este ordenador desde cualquier sitio, con conexión a Internet, lo cual constituye una cómoda herramienta para el trabajo de modelización matemático de las BPR. La forma de trabajo se basa en la definición de modelos. A partir de datos experimentales que se simulan en Abaqus/Explicit obteniendo resultados, se comparan con la realidad y se sacan las conclusiones pertinentes. El AbaqusExplicit contiene diferentes módulos de cálculo, en los cuales se ingresan los valores correspondientes a las condiciones de contorno requeridas en el modelo. Para la simulación en Abaqus se tienen en cuenta dos grandes bloques que son, en su orden, definición del modelo y visualización de resultados. Se presentan en detalle a continuación.

### **Módulo “Part”**

En este módulo se definen las propiedades geométricas de la sección. También los ejes, planos, puntos de referencia para posteriores particiones, con diferentes propósitos en el análisis de las BPR, especialmente para el mallado.

### **Módulo “Property”**

En este módulo se encuentran las ecuaciones constitutivas que relacionan tensiones con deformaciones; para el acero, que tiene un comportamiento de endurecimiento cinemático o isótropo multiaxial, se escriben las constantes necesarias para ensamblar la matriz tangente elastoplástica. Se escriben las constantes necesarias para modelizar el mortero del revestimiento mediante una ley constitutiva isótropa de daño.

### **Módulo “Assembly”**

En él se representan las coordenadas globales del elemento a analizar, ya que están situadas como locales en el menú “part”, donde se dibujan de forma independiente las partes correspondientes al núcleo, a la capa deslizante, al mortero y al tubo exterior. Este módulo ensambla las partes y las ubica en coordenadas globales.

### **Módulo “Step”**

Aquí se diferencia el tipo de análisis, es decir si es dinámico explícito, implícito, estático o a perturbación de pandeo etc. En este caso se trabajará con análisis dinámico explícito por condiciones de coste computacional. La relación del coste computacional vs grados de libertad del análisis explícito es lineal, mientras que el implícito crece de manera exponencial. El análisis dinámico explícito tiene la ventaja de poder trabajar con no linealidades geométricas y del material que para requiere el modelo de las BPR. Permite el paso, o los pasos, necesarios para realizar un análisis dinámico que se aproxime lo mejor posible a las condiciones del laboratorio.

### **Módulo “Interaction”**

Se determinan las superficies de contacto maestra y esclava; si existe una capa entre las superficies del modelo, y las condiciones de contacto entre materiales. También el tipo de contacto y su comportamiento a partir de unos modelos matemáticos previamente establecidos en Abaqus/Explicit. Se analiza la interacción entre barra de acero del núcleo, la interfaz deslizante y

la camisa de mortero. Para definir la interacción se deben asignar unos coeficientes de rozamiento, entre otros valores, para poder generar una simulación.

### **Módulo “Load”**

Este módulo contiene las funciones de fuerzas, desplazamientos aplicados a la BPR, los apoyos con sus restricciones en desplazamientos y rotaciones. Las fuerzas, desplazamientos aplicadas al modelo están en función de las condiciones del análisis del modelo presentes en el “Step”. No se determinan arbitrariamente, tienen que ser compatibles. Se aplica el desplazamiento cíclico al núcleo a partir de los ensayos de laboratorio y sus respectivos apoyos, según lo determinado en los ensayos de las BPR realizados en la Universidad de Girona [1] y California [2].

### **Módulo “Mesh”**

Aquí se diseña la malla de elementos finitos sobre la pieza, siguiendo los siguientes criterios: División de los elementos según ejes de referencia, tamaño de la pieza, o según la densidad de malla requerida. En el control de mallado se diferencian los tipos de elementos a utilizar, bien sean tetraedros, hexaedros o cuñas. Se determina la técnica de mallado en forma libre, estructurada o por extensión. El mallado estructurado optimiza el posterior análisis por elementos finitos. Luego se hace el mallado sobre el elemento, con las características anteriormente mencionadas, ya sea por partes, o sobre todo el modelo. Por último se verifica si existen elementos con ángulos inferiores a  $60^\circ$  que puedan generar error.

### **Módulo “Job”**

En este módulo se ejecuta el análisis tras valorar todas las condiciones de contorno. Se definen las variables de tipo computacional para producir el modelo, se paraleliza (si el ordenador tiene más de un procesador) y se determina si la precisión en el cálculo debe ser doble o sencilla. Al ejecutar el programa se ve el avance de la ejecución del análisis en el modelo errores y posibles problemas que contenga el modelo.

### **Módulo “Visualization”**

En la visualización se observan de forma gráfica los resultados de la modelización en elementos finitos. Este módulo permite ver elemento por elemento, en forma global u operando, los resultados obtenidos al ejecutar el modelo. Esta es la parte en la cual se extraen los valores

en forma gráfica o en tabla. Los resultados que muestra el Abaqus en su módulo de visualización han sido previamente definidos en el módulo “Step”.

## C. Implementación en Abaqus/Explicit del modelo de daño para el mortero, de daño escalar con plasticidad para el acero

En este apéndice se presentan el diagrama de flujo y la subrutina utilizados para implementar el modelo fenomenológico de daño escalar acoplado con plasticidad para el acero definido en 3.2 y el modelo isótropo de daño para modelar el comportamiento del mortero 3.3. Y por último se incluye el balance termodinámico 3.5 utilizado para acoplar las dos no linealidades de los materiales, acero y mortero, con la discontinuidad acero-mortero determinada por un modelo de contacto tipo penalización 3.4. Los modelos implementados en la subrutina, se pueden ejecutar, de forma independiente, o de forma acoplada.

C User subroutine VUMATBPR

```
subroutine vumatbpr (
```

C Read only -

```
*   nblock, ndir, nshr, nstatev, nfieldv, nprops, lanneal,
*   stepTime, totalTime, dt, cmname, coordMp, charLength,
*   props, density, strainInc, relSpinInc,
*   tempOld, stretchOld, defgradOld, fieldOld,
*   stressOld, stateOld, enerInternOld, enerInelasOld,
*   tempNew, stretchNew, defgradNew, fieldNew,
```

C Write only -

```
*   stressNew, stateNew, enerInternNew, enerInelasNew )
```

C

```
include 'vaba_param.inc'
```

C

```
dimension coordMp(nblock,*), charLength(nblock), props(nprops),
1   density(nblock), strainInc(nblock,ndir+nshr),
2   relSpinInc(nblock,nshr), tempOld(nblock),
3   stretchOld(nblock,ndir+nshr),
4   defgradOld(nblock,ndir+nshr+nshr),
5   fieldOld(nblock,nfieldv), stressOld(nblock,ndir+nshr),
6   stateOld(nblock,nstatev), enerInternOld(nblock),
7   enerInelasOld(nblock), tempNew(nblock),
8   stretchNew(nblock,ndir+nshr),
9   defgradNew(nblock,ndir+nshr+nshr),
1  fieldNew(nblock,nfieldv),
2  stressNew(nblock,ndir+nshr), stateNew(nblock,nstatev),
3  enerInternNew(nblock), enerInelasNew(nblock)
```

C

```
character*80 cmname
```

```
parameter ( zero = 0.d0, one = 1.d0, two = 2.d0,
```

```
*three = 3.d0,third = one / three, half = 0.5d0,
```

```
*twoths = two / three,op5 = 1.5d0)
```

```

parameter ( tempFinal = 1.d2, timeFinal = 1.d-2 )

C
C   Nombra la subrutina para el Acero
      if(cmname(1:5) .eq. 'ACERO') then

C
C
C   Variables de estado
C   STATE(*,1) = back stress componente 11
C   STATE(*,2) = back stress componente 22
C   STATE(*,3) = back stress componente 33
C   STATE(*,4) = back stress componente 12
C   STATE(*,5) = back stress componente 33
C   STATE(*,6) = back stress componente 12
C   STATE(*,7) = deformaci\`on pl\`astica equivalente
C   STATE(k,8) = m\`aximo valor acumulado de la energ\`ia
C   STATE(k,9) = Da\`no en el acero
C   STATE(k,10)= Norma de energ\`ia

      e      = props(1)
      xnu    = props(2)
      yield  = props(3)
      hard   = props(4)
fu      = props(5)
Gfs     = props(6)

      twomu  = e / ( one + xnu )
      alambda = twomu * xnu / ( one - two * xnu )
      term   = one / ( twomu + twothds * hard )
      fs=fu/sqrt(e)

danoa=zero

```

c S\`i el tiempo es igual a cero define el material el\`astico

```

    const = sqrt(twothds)
    do k = 1, nblock
*   Actualiza las tensiones
    trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
        sig1 = stressOld(k,1) + twomu*strainInc(k,1) +
.   alamda*trace
        sig2 = stressOld(k,2) + twomu*strainInc(k,2) +
.   alamda*trace
        sig3 = stressOld(k,3) + twomu*strainInc(k,3) +
.   alamda*trace
        sig4 = stressOld(k,4) + twomu*strainInc(k,4)
        if (nshr .gt. one) then
            sig5 = stressOld(k,5) + twomu*strainInc(k,5)
            sig6 = stressOld(k,6) + twomu*strainInc(k,6)
        end if
*   Actualiza las tensiones medidas desde "back stress"
        s1 = sig1 - stateOld(k,1)
        s2 = sig2 - stateOld(k,2)
        s3 = sig3 - stateOld(k,3)
        s4 = sig4 - stateOld(k,4)
        if ( nshr .gt. one) then
            s5 = sig5 - stateOld(k,5)
            s6 = sig6 - stateOld(k,6)
        end if

```

C Parte desviadora del tensor de tensiones

C Medida desde el "back stress"

```

    smean = third * ( s1 + s2 + s3 )
    ds1 = s1 - smean
    ds2 = s2 - smean
    ds3 = s3 - smean

```

```

C   Magnitud de la parte desviadora de la diferencia
C   actualizada del tensor de tensiones
      dsmag = sqrt ( ds1*ds1 + ds2*ds2 + ds3*ds3+
.     two*s4*s4+two*s5*s5+two*s6*s6 )

c   Se determina si hay o no plasticidad
      radius = const * yield
      facyld = zero
      if ( dsmag - radius .ge. zero ) facyld = one

C   Se previene dividir por cero
      dsmag = dsmag + ( one - facyld )

C   Calcula el incremento del factor de consistencia pl\'astica
      diff = dsmag - radius
      dgamma = facyld * term * diff

C   Actualizaci\'on de la deformaci\'on pl\'astica equivalente
      deqps = const * dgamma
      stateNew(k,7) = stateOld(k,7) + deqps

      dgamma = dgamma / dsmag

C   Actualizaci\'on del "back stress"
      factor = twothds * hard * dgamma
      stateNew(k,1) = stateOld(k,1) + factor * ds1
      stateNew(k,2) = stateOld(k,2) + factor * ds2
      stateNew(k,3) = stateOld(k,3) + factor * ds3
      stateNew(k,4) = stateOld(k,4) + factor * s4
      if ( nshr .gt. one) then
      stateNew(k,5) = stateOld(k,5) + factor * s5
      stateNew(k,6) = stateOld(k,6) + factor * s6

```

```

        end if

C      Ablandamiento del acero
      A=one/((Gfs*e)/(charLength(nblock)*fu*fu)-half)
c      Actualizaci\on de la deformaci\on

c      Actualiza el tensor de deformaci\on
st1 = sig1/(e)*(one-stateOld(k,9))
      st2 = sig2/(e)*(one-stateOld(k,9))
      st3 = sig3/(e)*(one-stateOld(k,9))
      st4 = sig4/(e)*(one-stateOld(k,9))
      if (nshr .gt. 1) then
st5 = sig5/(e)*(one-stateOld(k,9))
st6 = sig6/(e)*(one-stateOld(k,9))
      endif

      sb = sqrt(st1*sig1+st2*sig2+st3*sig3+2*sig4*st4+
. 2*sig5*st5+2*sig6*st6)

C      Frontera.

sa=max(sb,sa,fs)

      danoa=one-(fs/sa)*exp(A*(one-sa/fs)) ! funci\on de da\~no

      statenew(k,8)=sa
statenew(k,9)=danos
      statenew(k,10)=sb

C      Actualizaci\on de la tensi\on
      factor = twomu * dgamma

```

```

stressNew(k,1) = (sig1 - factor * ds1)*(one-danoa)
stressNew(k,2) = (sig2 - factor * ds2)*(one-danoa)
stressNew(k,3) = (sig3 - factor * ds3)*(one-danoa)
stressNew(k,4) = (sig4 - factor * s4)*(one-danoa)
if ( nshr .gt. one) then
stressNew(k,5) = (sig5 - factor * s5)*(one-danoa)
stressNew(k,6) = (sig6 - factor * s6)*(one-danoa)
end if

```

C Actualizaci\`on de la energ\`ia interna

```

stressPower = half * (
* ( stressOld(k,1)+stressNew(k,1) ) * strainInc(k,1) +
* ( stressOld(k,2)+stressNew(k,2) ) * strainInc(k,2) +
* ( stressOld(k,3)+stressNew(k,3) ) * strainInc(k,3))+
* (( stressOld(k,4)+stressNew(k,4) ) * strainInc(k,4)+
* ( stressOld(k,5)+stressNew(k,5) ) * strainInc(k,5) +
* ( stressOld(k,6)+stressNew(k,6) ) * strainInc(k,6))
enerInternNew(k) = enerInternOld(k)
* + stressPower / density(k)

```

C

C Actualiza la energ\`ia disipada por plasticidad

```

smean = third *
*(stressNew(k,1) + stressNew(k,2) + stressNew(k,3))
equivStress = sqrt ( op5 * (
*( stressNew(k,1) - smean )**2 +
*( stressNew(k,2) - smean )**2 +
*( stressNew(k,3) - smean )**2 +
*two * stressNew(k,4)**2 +
*two * stressNew(k,5)**2 +
*two * stressNew(k,6)**2 ) )
plasticWorkInc = equivStress * deqps
enerInelasNew(k) = enerInelasOld(k)

```

```

    ** plasticWorkInc / density(k)
        end do
C      Define la subrutina del mortero
else if( cmname(1:7) .eq. 'MORTERO') then

C          STATE(*,1) = rt
C          STATE(*,2) = da~no
C          STATE(*,3) = rta
C          STATE(*,4) = theta

e      = props(1) !m\`odulo de Elasticidad
xnu    = props(2) !Relaci\`on de Poisson
yield  = props(3) !L\`imite el\`astico a tracci\`on
fpc    = props(4) !L\`imite el\`astico a compresi\`on
GF     = props(5) ! Energ\`ia de fractura

c
    r0=yield/sqrt(e)
n=fpc/yield

twomu  = e / ( one + xnu )
    alamda = twomu * xnu / ( one - two * xnu )
    term   = one / ( twomu + twoths * hard )
C      Si el paso de tiempo es igual a cero
C      el material es el\`astico
C
    if (stepTime .eq. zero ) then
        do k=1, nblock
            const = sqrt(twoths)

C      Actualiza las tensiones
A=one/((Gf*e)/(charLength(nblock)*yield*yield)-half)
trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
stressNew(k,1) = stressOld(k,1) + twomu*strainInc(k,1) +

```

```

.alamda*trace
  stressNew(k,2) = stressOld(k,2) + twomu*strainInc(k,2) +
.alamda*trace
  stressNew(k,3) = stressOld(k,3) + twomu*strainInc(k,3) +
.alamda*trace
  stressNew(k,4) = stressOld(k,4) + twomu*strainInc(k,4)
  if ( nshr .gt. one) then
    stressNew(k,5) = stressOld(k,5) + twomu*strainInc(k,5)
    stressNew(k,6) = stressOld(k,6) + twomu*strainInc(k,6)
  end if
rt=zero
dano=zero

  sig1=stressNew(k,1)
sig2=stressNew(k,2)
sig3=stressNew(k,3)
  sig4=stressNew(k,4)
  if ( nshr .gt. 1 ) then
    sig5=stressNew(k,5)
    sig6=stressNew(k,6)
  end if
C    Actualiza las deformaciones
st1 = sig1/e
st2 = sig2/e
st3 = sig3/e
st4 = sig4/e
  if ( nshr .gt. one) then
st5 = sig5/e
st6 = sig6/e
  end if

end do

```

```

else
do k=1, nblock
  A=one/((Gf*e)/(charLength(nblock)*yield*yield)-half)
trace = strainInc(k,1) + strainInc(k,2) + strainInc(k,3)
  sig1 = stressOld(k,1) + twomu*strainInc(k,1)+
  .alamda*trace
  sig2 = stressOld(k,2) + twomu*strainInc(k,2) +
  .alamda*trace
  sig3 = stressOld(k,3) + twomu*strainInc(k,3) +
  .alamda*trace
  sig4 = stressOld(k,4) + twomu*strainInc(k,4)
  if ( nshr .gt. one ) then
  sig5= stressOld(k,5) + twomu*strainInc(k,5)
  sig6 = stressOld(k,6) + twomu*strainInc(k,6)
  end if

st1 = sig1/(e*(one- stateOld(k,2)))
st2 = sig2/(e*(one- stateOld(k,2)))
st3 = sig3/(e*(one- stateOld(k,2)))
st4 = sig4/(e*(one- stateOld(k,2)))
  if ( nshr .gt. 1 ) then
st5 = sig5/(e*(one- stateOld(k,2)))
st6 = sig6/(e*(one- stateOld(k,2)))
  end if

C   Se determina el parámetro para saber si está a
C   tracción o compresión
  theta=(half*((abs(sig1)+sig1)+(abs(sig2)+sig2)+(abs(sig3)
  .+sig3)))
  ./(abs(sig1)+abs(sig2)+abs(sig3)+one)
theta=int(theta)
rta=(theta+((one-theta)/(n)))*
  . sqrt(st1*sig1+st2*sig2+st3*sig3+2*sig4*st4+
  .2*sig5*st5+2*sig6*st6)

```

```

rta=sqrt(st1*sig1+st2*sig2+st3*sig3+2*sig4*st4+2*sig5*st5+
. 2*sig6*st6)
c   r0 es la frontera rt va a variar entre cero y rt
    rt = max(rt,rta,r0)
    dano=one-(r0/rt)*exp(A*(one-rt/r0))
C   Actualizaci\`on de tensiones da\`nadas
    stressNew(k,1) = sig1*(one-dano)
    stressNew(k,2) = sig2*(one-dano)
    stressNew(k,3) = sig3*(one-dano)
    stressNew(k,4) = sig4*(one-dano)
    if ( nshr .gt. one ) then
stressNew(k,5) = sig5*(one-dano)
stressNew(k,6) = sig6*(one-dano)
    end if
C   Actualizaci\`on de la variable de da\`no
    stateNew(k,1) = rt
    stateNew(k,2) = dano
    stateNew(k,3) = rta
    stateNew(k,4) = theta
    stateNew(k,5) = A
C   Actualizaci\`on de la energ\`ia interna
    stressPower = half * (
.( stressOld(k,1)+stressNew(k,1) ) * strainInc(k,1) +
.( stressOld(k,2)+stressNew(k,2) ) * strainInc(k,2) +
.( stressOld(k,3)+stressNew(k,3) ) * strainInc(k,3) ) +
.( stressOld(k,4)+stressNew(k,4) ) * strainInc(k,4)+
.( stressOld(k,5)+stressNew(k,5) ) * strainInc(k,5)+
.( stressOld(k,6)+stressNew(k,6) ) * strainInc(k,6))
    enerInternNew(k) = enerInternOld(k)
.+ stressPower / density(k)
C   Actualizaci\`on de la energ\`ia disipada por el da\`no
    smean = third *
.( stressNew(k,1) + stressNew(k,2) + stressNew(k,3) )

```

```
equivStress = sqrt ( op5 * (
.      ( stressNew(k,1) - smean )**2 +
.      ( stressNew(k,2) - smean )**2 +
.      ( stressNew(k,3) - smean )**2 +
.      two * stressNew(k,4)**2 +
.      two * stressNew(k,5)**2 +
.      two * stressNew(k,6)**2 ) )
  plasticWorkInc = equivStress * deqps
  enerInelasNew(k) = enerInelasOld(k)
.      + plasticWorkInc / density(k)
  end do
end if
end if
return
end
```

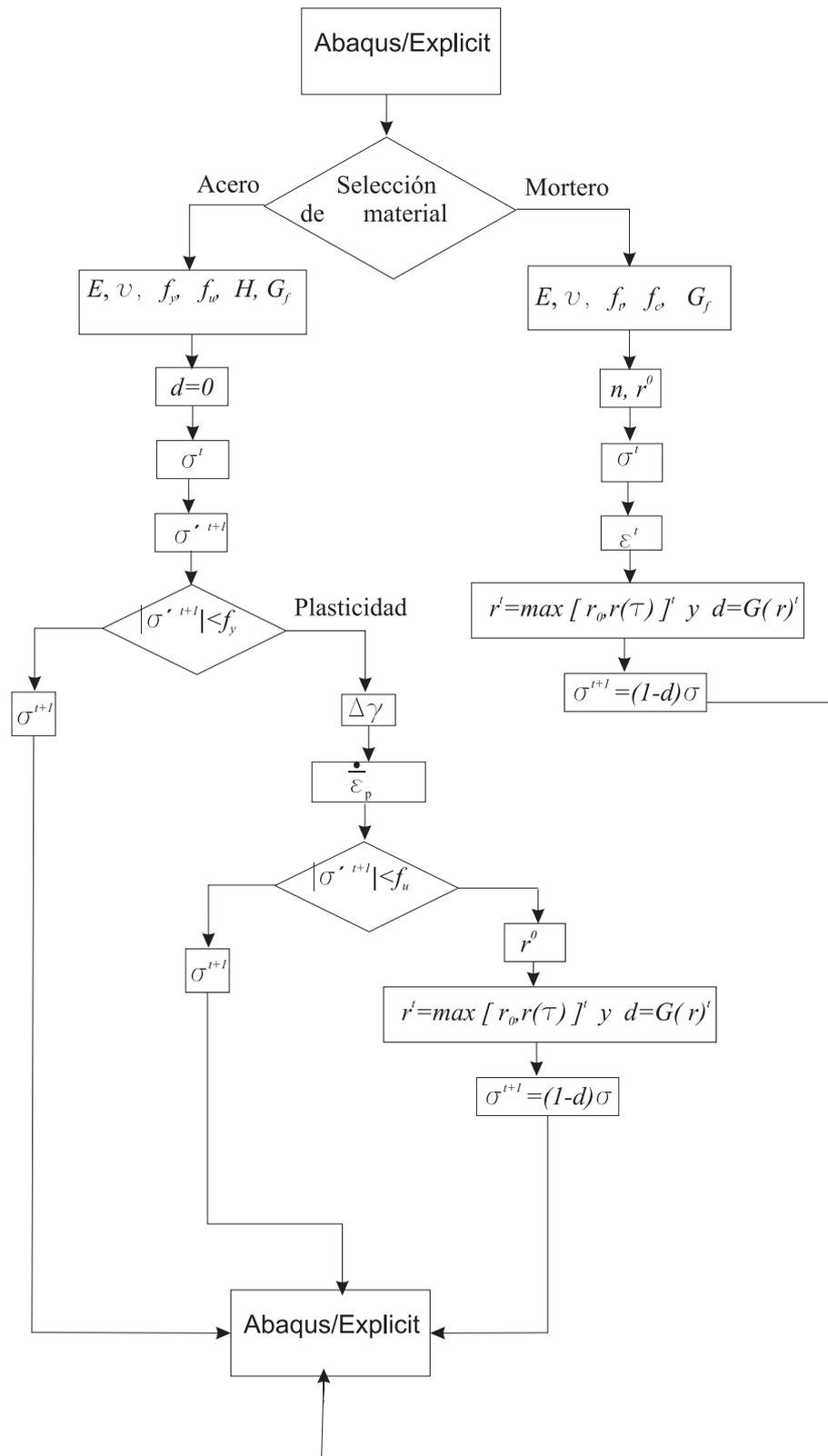


Figura C.1: Diagrama de flujo de la implementación de los modelos constitutivos en Abaqus/Explicit



# Epílogo

Este trabajo se hizo con el objeto principal de contribuir al desarrollo de tecnologías en protección sismoresistente en países en vía de desarrollo.



CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
**Lista de monografías publicadas en la Serie de Ingeniería Sísmica**

Las monografías pueden adquirirse dirigiéndose al Departamento de Publicaciones del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Edificio C1, Campus Norte UPC, c/ Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, teléfono: 93-401.60.37, Fax: 93-401-65-17.

- IS-1 *Qualitative Reasoning for Earthquake Resistant Buildings*, Luís M. Bozzo, 149 pp., ISBN 84-87867-36-7, 1993.
- IS-2 *Control predictivo en sistemas de protección sísmica de estructuras*, R. Andrade Cascante, J. Rodellar, F. López Almansa, 143 pp., ISBN 84-87867-37-5, 1993.
- IS-3 *Simulación numérica del comportamiento no lineal de presas de hormigón ante acciones sísmicas*, M. Galindo, J. Oliver, M. Cervera, 255 pp., ISBN 84-87867-38-3, 1994.
- IS-4 *Simulación del daño sísmico en edificios de hormigón armado*, A. Hanganu, A.H. Barbat, S. Oller, E. Oñate, 96 pp., ISBN 84-87867-40-5, 1994.
- IS-5 *Edificios con aislamiento de base no lineal*, N. Molinares, A.H. Barbat, 96 pp., ISBN: 84-87867-41-3, 1994.
- IS-6 *Vulnerabilidad sísmica de edificios*, C. Caicedo, A.H. Barbat, J.A. Canas, R. Aguiar, 100 pp., ISBN 84-87867-43-X, 1994.
- IS-7 *Análisis de terremotos históricos por sus efectos*, J. R. Arango González, 119 pp., ISBN 84-87867-44-8, 1994.
- IS-8 *Control activo no lineal de edificios con aislamiento de base*, A.H. Barbat, N. Molinares, J. Rodellar, 124 pp., ISBN 84-87867-46-4, 1994.
- IS-9 *Análise estocástica da resposta sísmica nao-linear de estruturas*, A.M. F. Cunha, 199 pp., ISBN: 84-87867-47-2, 1994
- IS-10 *Definición de la acción sísmica*, A.H. Barbat, L. Orosco, J.E. Hurtado, M. Galindo, 122 pp., ISBN: 84-87867-448-0, 1994
- IS-11 *Sismología y peligrosidad sísmica*, J.A. Canas Torres, C. Pujades Beneit, E. Banda Tarradellas, 87 pp., ISBN: 84-87867-49-9, 1994
- IS-12 *Riesgo, peligrosidad y vulnerabilidad sísmica de edificios de mampostería*, F. Yépez, A.H. Barbat, J.A. Canas, 104 pp., ISBN: 84-87867-50-2, 1999

- IS-13 *Estudios de ingeniería sismológica y sísmica*, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-57-X, 13 pp., 1995
- IS-14 *Simulación de escenarios de daño para estudios de riesgo sísmico*, F. Yépez, A.H. Barbat y J.A. Canas, ISBN: 84-87867-58-8, 103 pp., 1995
- IS-15 *Diseño sismorresistente de edificios de hormigón armado*, L. Bozzo, A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-59-6, 185 pp., 1995
- IS-16 *Modelo tridimensional de atenuación anelástica de las ondas sísmicas en la Península Ibérica*, J.O. Caselles, J. A. Canas, Ll. G. Pujades, R.B. Herrmann, ISBN: 84-87867-60-X, 119 pp., 1995
- IS-17 *Índices de daño sísmico en edificios de hormigón armado*, R. Aguiar ISBN: 84-87867-43-X, 99 pp., 1996
- IS-18 *Experimental study of a reduced scale model seismically base isolated with Rubber-Layer Roller Bearings (RLRB)*, D. Foti, J.M. Kelly ISBN: 84-87867-82-0, 112 pp., 1996
- IS-19 *Modelos de evaluación del comportamiento sísmico no lineal de estructuras de hormigón armado*, F. Yépez Moya, ISBN: 84-87867-80-4., 96pp., 1996
- IS-20 *Evaluación probabilista de la vulnerabilidad y riesgo sísmico de estructuras de hormigón armado por medio de simulación*, F. Yépez Moya, A.H. Barbat, J.A. Canas, ISBN: 84-87867-81-2, 1996
- IS-21 *Modelización de la peligrosidad sísmica. Aplicación a Cataluña*, J.A. Canas, J.J. Egozcue, J. Miquel Canet y A.H. Barbat, ISBN: 84-87867-83-9, 101pp., 1996
- IS-22 *Evaluación del daño sísmico global en edificios porticados de hormigón armado*, R. Aguiar, A.H. Barbat and J. Canas, ISBN: 84-87867-96-0, 173pp., 1997
- IS-23 *Daño sísmico global en edificios con muros de cortante*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-00-3, 101 pp., 1997
- IS-24 *Conceptos de cálculo de estructuras en las normativas de diseño sismorresistente*, A.H. Barbat y S. Oller, ISBN: 84-89925-10-0, 107pp., 1997
- IS-25 *Stochastic dynamics of hysteretic structures*, J.E. Hurtado, ISBN: 84-89925-09-7, 205pp., 1998

- IS-26 *Análisis de los acelerogramas de la serie de Adra (Almería). Diciembre 1993 a Enero 1994*, R. Blázquez, A. Suárez, E. Carreño y A.J. Martín, ISBN: 84-89925-11-9, 1998
- IS-27 *Respuesta de puentes frente a acciones sísmicas*, E. Maldonado, J.A. Canas, J.R. Casas, L.G. Pujades, ISBN: 84-89925-23-2, 107pp., 1998
- IS-28 *Estudio de parámetros en la vulnerabilidad sísmica de puentes*, E. Maldonado, J.A. Canas y J.R. Casas, ISBN: 84-89925-16-X, 97pp., 1998
- IS-29 *Metodologías para o cálculo sísmico não-linear de barragens de betão*, R. Faria ISBN: 84-89925-25-9, 113pp., 1998
- IS-30 *Acciones para el diseño sísmico de estructuras*, R. Aguiar, ISBN: 84-89925-27-5, 122pp., 1998
- IS-31 *Avaliação do comportamento sísmico de barragens de betão*, R. Faria, ISBN: 84-89925-28-3, 88pp., 1998
- IS-32 *Vulnerabilidad sísmica de hospitales. Fundamentos para ingenieros y arquitectos*, O.D. Cardona, ISBN:84-89925-33-X, 165pp., 1999
- IS-33 *Modelación estocástica de la acción sísmica*, J. E. Hurtado, ISBN:84-8925-34-8, 93pp., 1999
- IS-34 *Earthquake simulator testing of a steel model seismically protected with friction energy dissipators*, D. Foti and J. Canas, ISBN: 84-89925-40-2, 110pp., 1999
- IS-35 *Plasticidad y fractura en estructuras aperticadas*, J. Flórez López, ISBN: 84-89925-46-1, 90pp., 1999
- IS-36 *Estimación de efectos locales con movimientos sísmicos y microtemblores*, V. Giraldo, A. Alfaro, L. G. Pujades, J. A. Canas, ISBN: 84-89925-54-2, 83pp., 1999
- IS-37 *Modelo numérico de elastómeros multi-fase y su aplicación al análisis de estructuras con aislamiento sísmico*, O. Salomón, S. Oller y A. H. Barbat, ISBN: 84-89925-54-2, 239pp.,1999
- IS-38 *Dinámica de estructuras. Aplicaciones a la Ingeniería Sísmica*, J.E. Hurtado, ISBN:84-89925-59-3,177pp., 2000

- IS-39 *Utilización de los conjuntos difusos en modelos de vulnerabilidad sísmica*, E. Maldonado Rondón, J.R. Casas Rius y J.A. Canas, ISBN:84-89925-61-5, 2000
- IS-40 *Modelo de vulnerabilidad sísmica de puentes basado en " Conjuntos Difusos "*, E. Maldonado Rondón, J.R. Casas Rius, J. A.Canas, ISBN: 84-89925-64-X, 110pp, 2000
- IS-41 *Vulnerabilidad de puentes de autopista. Un estado del arte*, C. Gómez Soberón, A. Barbat, S. Oller, ISBN: 84-89925-64-X, 168pp, 2000
- IS-42 *Fuerzas sísmicas en los Países Bolivarianos*, R. Aguiar Falconí, ISBN: 84-89925-74-7, 101pp., 2000
- IS-43 *Espectros de input de energía de aplicación en el proyecto sismorresistente estructuras en regiones de sismicidad moderada*, A. Benavent-Climent, L.G. Pujades, F. López-Almansa, ISBN: 84-89925-86-0, 85 pp., 2001
- IS-44 *Capacidad límite última de disipación de energía de estructuras de hormigón Armado sometidas a acciones sísmicas*, A. Benavent- Climent, F. López-Almansa, L. G. Pujades, ISBN: 84-89925-88-7, 2001
- IS-45 *Evaluación del daño en edificios y desempeño sísmico. Programa de ordenador CEINCI3*, R. Aguiar Falconí, ISBN: 84-89925-87-9, 107pp., 2001
- IS-46 *Estudio analítico sobre el comportamiento sísmico de muros de mampostería confinada con aberturas*, J. J. Álvarez, S.M. Alcocer, ISBN: 84-89925-90-9, 119pp., 2002
- IS-47 *Seismic vulnerability of bridges using simplified models*, C. Gómez Soberón, S. Oller, A. H. Barbat, ISBN: 84-89925-96-8, 135pp., 2002
- IS-48 *Control de vibraciones en puentes. Un estado del arte y de la práctica*, M. Jara, J. R. Casas, ISBN: 84-95999-01-3, 120pp., 2002
- IS-49 *Criterio de diseño de puentes con aisladores y disipadores de energía*, M. Jara, J. R. Casas, ISBN: 84-955999-02-1, 115pp., 2002
- IS-50 *Ferrocemento: Un acercamiento al diseño sísmico*, D. A. Bedoya, J. Farbiarz, J. E. Hurtado, Ll. G. Pujades, ISBN: 84-95999-23-4, 76pp., 2002
- IS-51 *Metodología para la evaluación del desempeño de la gestión del riego*, M. L. Carreño, O. D. Cardona, A. H. Barbat, ISBN: 84-95999-66-8, 2004

- IS-52 *Sistema de indicadores para la evaluación de riesgos*, M. L. Carreño, O. D. Cardona, A. H. Barbat, ISBN: 84-95999-70-6, 200
- IS-53 *Evaluación "ex-post" del estado de daño en los edificios afectados por un terremoto*, M. L. Carreño, O. D. Cardona, A. H. Barbat, ISBN: 84-95999-76-5, 2005
- IS-54 *Identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil*, F. Magalhães, A. Cunha, E. Caetano, ISBN: 84-95999-89-7, 2005
- IS-55 *Comportamiento sísmico de puentes articulados y disipación de energía adicional: Un estado del crecimiento*, G. E. Valdebenito, A. C. Aparicio, ISBN: 84-95999-87-0, 2005
- IS-56 *Cálculo y diseño sismorresistente de edificios. Aplicación de la norma NCSE-02*, A.H. Barbat, S. Oller and J.C. Vielma, 2005
- IS-57 *Evaluación rápida de la deriva máxima de piso para calcular la vulnerabilidad sísmica de estructuras*, R. Aguiar, ISBN: 84-95999-91-9, 2006
- IS-58 *Factor de reducción de las fuerzas sísmicas en edificios de hormigón armado sin muros de corte*, R. Aguiar, ISBN: 978-84-96736-40-7, 2007
- IS-59 *Herramientas necesarias para la evaluación sísmica de edificios*, R. Moreno, L. Pujades, A.C. Aparicio, A.H. Barbat, ISBN: 978-84-96736-53-5, 2007
- IS-60 *Inelastic Analysis of Geometrically Exact Rods*, P. L. Mata, A.H. Barbat, S. Oller, R. Boroschek, ISBN: 978-84-96736-59-7, 2007
- IS-61 *La gestión financiera del riesgo desde la perspectiva de los desastres*, M.C.Marulanda, O.D. Cardona, M.G. Ordaz, A.H.Barbat, ISBN:978-84-96736-60-3, 2008
- IS-62 *Seismic protection of cable-stayed bridges applying fluid viscous dampers*, G.E. Valdebenito, A.C. Aparicio, ISBN:978-84-96736-84-9, 2010
- IS-63 *Reliability problems in earthquake engineering*, J.E. Hurtado, ISBN: 978-84-96736-86-3, 2010

- IS-64 *Theoretical and experimental analysis of dissipative buckling restrained braces*, G. Perazzo, F. López-Almansa, X. Cahís, F. Crisafulli, ISBN: 978-84-96736-98-6, 2011
- IS-65 *Proyecto sismorresistente de estructuras porticadas*, J. C. Vielma, A.H. Barbat, S. Oller, ISBN: 978-84-95999-60-3, 2011

Los autores interesados en publicar monografías en esta serie deben contactar con el editor para concretar las normas de preparación del texto.