

Identificação modal estocástica de estruturas de engenharia civil

F. Magalhães
A. Cunha
E. Caetano

Monografías de Ingeniería Sísmica

Editor A. H. Barbat

**Identificação modal
estocástica de estruturas de
engenharia civil**

F. Magalhães

A. Cunha

E. Caetano

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

MONOGRAFÍAS DE INGENIERÍA SÍSMICA

Editor A. H. Barbat

ISSN: 1134-3249

IDENTIFICAÇÃO MODAL ESTOCÁSTICA DE ESTRUTURAS DE ENGENHARIA CIVIL

Monografía CIMNE IS54

© Los autores

ISBN: 84-95999-77-3

Depósito legal: B-31902-2005

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO



1. INTRODUÇÃO

As condições de segurança de grandes estruturas de Engenharia Civil são habitualmente analisadas, quer nas fases iniciais de projecto e construção, quer em eventuais fases posteriores de exploração, reabilitação ou reforço, com base no desenvolvimento de modelações numéricas de análise estática e dinâmica assentes em formulações de elementos finitos.

Existe, todavia, sempre um conjunto maior ou menor de incertezas associadas à definição das características geométricas e mecânicas da estrutura, bem como às respectivas condições de apoio, que originam erros de análise que importa minimizar. Este problema é particularmente pertinente na caracterização de estruturas com um elevado tempo de vida, cujas características mecânicas são difíceis de avaliar.

Neste contexto, as técnicas de identificação dos parâmetros modais da estrutura (frequências naturais, configurações dos modos de vibração e coeficientes de amortecimento modais) com base na realização de ensaios dinâmicos surgem como ferramentas de grande interesse, no sentido de dar suporte à análise de correlação entre parâmetros identificados e calculados, à actualização e validação experimental das modelações numéricas desenvolvidas e subsequente avaliação da capacidade de carga efectiva das estruturas.

A caracterização experimental do comportamento dinâmico das estruturas pode ser realizada através de dois tipos distintos de ensaios: os ensaios tradicionais, que se baseiam na medição da resposta da estrutura quando sujeita a uma excitação artificial e controlada, e os ensaios de vibração ambiental, em que é medida a resposta da estrutura sujeita a acções ambientais, ou seja, a acções a que esta está submetida durante a sua normal utilização.

A realização dos ensaios tradicionais de vibração forçada em estruturas de Engenharia Civil apresenta duas grandes dificuldades. O elevado porte da generalidade das estruturas obriga à utilização de equipamentos pesados, cujo transporte, colocação e utilização exigem a mobilização de meios dispendiosos. A aplicação de uma excitação controlada obriga à interdição do funcionamento corrente da estrutura ensaiada, sendo que, em infra-estruturas importantes como por exemplo as pontes, tal pode motivar custos económicos significativos.

Os ensaios de vibração ambiental não necessitam de equipamento de excitação artificial, nem condicionam a utilização da estrutura. Eles aproveitam as acções naturais a que a estrutura está sujeita: vento, pequenas vibrações do solo, maquinaria instalada na estrutura ou tráfego. Constituem, portanto, a solução mais adequada para realizar a caracterização dinâmica das estruturas de Engenharia Civil.



a) Excitador do EMPA



b) Ensaio de vibração ambiental da ponte sobre o Guadiana

Figura 1.1 – Ensaios de vibração forçada / Ensaios de vibração ambiental

A maior preocupação com a segurança das estruturas novas, o maior arrojo estrutural dos projectistas, o uso de materiais de elevada resistência, que permitem a realização de estruturas muito flexíveis, e o elevado número de estruturas, que devido à sua antiguidade, apresentam condições duvidosas de integridade estrutural, têm justificado o recurso crescente a ensaios de caracterização desta natureza.

Para que seja possível tirar o máximo partido dos ensaios de vibração ambiental, é importante sistematizar procedimentos para a sua realização e desenvolver ferramentas de tratamento da informação recolhida, que permitam realizar boas estimativas dos parâmetros modais da estrutura.

Actualmente, nas estruturas com maior importância económica e social começa a ser corrente monitorizar, de forma contínua, a sua resposta às acções ambientais. A existência de procedimentos que possibilitam a identificação das características dinâmicas de estruturas através da sua resposta, alarga as potencialidades destes sistemas de monitorização contínua, pois é possível, a partir da enorme quantidade de informação recolhida, estimar, a todo o momento, os parâmetros modais da estrutura e a partir destes avaliar a sua “saúde” estrutural.

Face ao enquadramento anterior, na presente monografia são descritas e aplicadas ferramentas destinadas à análise e processamento sistemático de dados decorrentes da realização de ensaios de vibração ambiental, e à identificação estocástica dos parâmetros modais mais representativos do comportamento estrutural, que permitem validar experimentalmente e actualizar modelos numéricos de análise dinâmica existentes.

Este trabalho é constituído por este primeiro capítulo introdutório e por mais 4 capítulos que se descrevem brevemente de seguida.

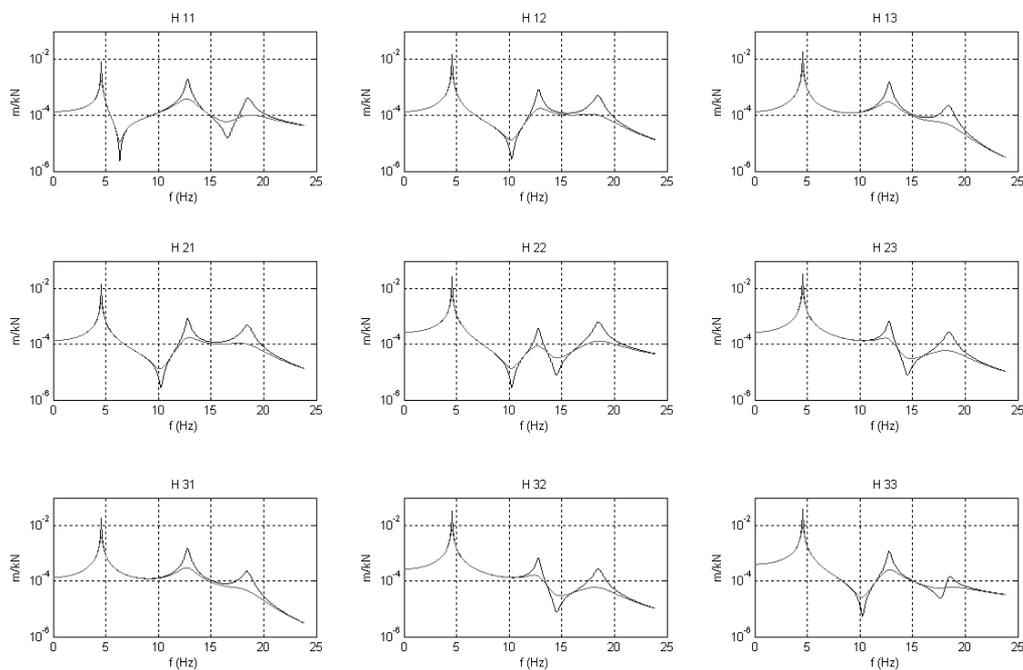
No segundo capítulo, são descritos vários modelos matemáticos para caracterizar o comportamento dinâmico de sistemas lineares. São apresentados a formulação clássica, baseada na resolução de um sistema de equações diferenciais de segundo grau, a formulação de estado, baseada na resolução de um sistema de equações diferenciais de primeiro grau e com dimensão dupla da dimensão do sistema de equações da formulação clássica, e os modelos auto-regressivos com média móvel, que são modelos matemáticos discretos no tempo.

No terceiro capítulo, são apresentados vários métodos de identificação modal baseados na resposta das estruturas a excitações ambientais. São descritos com algum detalhe dois métodos de identificação no domínio da frequência: método da selecção de picos e método da decomposição no domínio da frequência, e dois métodos de identificação no domínio do tempo, que se baseiam em modelos de estado: métodos de identificação estocástica em sub-espacos (SSI-COV e SSI-DATA). A descrição dos métodos é acompanhada da sua aplicação na identificação de um pórtico plano a partir de dados simulados.

No quarto capítulo, são descritas diversas aplicações que permitem melhor compreender as potencialidades e limitações associadas aos métodos de identificação apresentados. As aplicações envolvem um pequeno modelo laboratorial de um edifício de três pisos, duas pontes e um viaduto correntes e uma ponte atirantada (Ponte Internacional sobre o Rio Guadiana).

CAPÍTULO 2

MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS LINEARES



2. MODELOS DE COMPORTAMENTO DINÂMICO DE SISTEMAS LINEARES

2.1 Introdução

A caracterização do comportamento dinâmico de uma estrutura exige uma adequada idealização das acções actuantes, um correcto conhecimento das propriedades geométricas e mecânicas dos elementos estruturais constituintes e a definição de um modelo matemático que permita obter, de forma o mais rigorosa possível, as principais características da resposta da estrutura, em função das características da excitação.

As acções, variáveis no tempo, podem ser caracterizadas de duas formas: determinística ou estocástica. Se a variação temporal da excitação for perfeitamente conhecida, diz-se que a acção é determinística, sendo também possível quantificar a resposta estrutural de forma determinística, desde que não se considerem quaisquer incertezas estatísticas ao nível das propriedades estruturais. Por outro lado, se a variação temporal da acção for de natureza aleatória, esta pode ser caracterizada através de conceitos probabilísticos, sendo possível obter uma descrição estatística da resposta mediante o estabelecimento de relações estocásticas excitação-resposta.

O modelo matemático utilizado deve ser capaz de simular o comportamento estrutural do sistema dinâmico. No entanto, esta simulação nunca é perfeita, pois a complexidade da realidade obriga a que sejam realizadas algumas simplificações. Os modelos de análise estrutural apresentados neste capítulo consideram as seguintes simplificações: admitem que o comportamento das estruturas é linear e que as suas características são invariantes no tempo.

A definição do modelo matemático depende das seguintes propriedades da estrutura simulada: rigidez, massa e amortecimento. Estas propriedades são usualmente definidas na forma de matrizes, que resultam de uma prévia discretização espacial da estrutura em elementos finitos. Com base nestas características internas, são estabelecidas equações diferenciais de equilíbrio, que constituem a base dos diferentes modelos.

Estas equações podem ser definidas de forma contínua ou discreta no tempo, obtendo-se, respectivamente, modelos contínuos, em que a resposta da estrutura fica definida de forma contínua no tempo, ou modelos discretos, em que a resposta é obtida através de séries de valores em correspondência com uma determinada discretização temporal.

Neste capítulo são apresentados vários modelos matemáticos para caracterizar o comportamento dinâmico de sistemas lineares. É apresentada a formulação clássica, baseada na resolução de um

sistema de equações diferenciais de segundo grau, a formulação de estado, baseada na resolução de um sistema de equações diferenciais de primeiro grau e com dimensão dupla da dimensão do sistema de equações da formulação clássica, e os modelos auto-regressivos com média móvel, que são modelos matemáticos discretos no tempo.

Usando a formulação clássica, são definidos modelos contínuos determinísticos e estocásticos, no domínio do tempo e da frequência. A partir da formulação de estado, são definidos, no domínio do tempo, modelos determinísticos contínuos e discretos e modelos estocásticos discretos. Em relação aos modelos auto-regressivos com média móvel, estes são descritos de forma muito sucinta, apenas com o objectivo de apresentar os seus aspectos teóricos fundamentais.

Os temas abordados neste capítulo estão bem documentados em bibliografia existente (Clough e Penzien 1993; Maia e Silva 1997; Overschee e Moor 1996). No entanto, os seus conceitos fundamentais são aqui sistematizados, de forma resumida, por serem a base dos métodos de identificação modal. Em relação à formulação de estado e aos modelos auto-regressivos, a sua descrição neste capítulo também é justificada pelo facto de serem abordagens menos usadas em Engenharia Civil.

Os conceitos teóricos são ilustrados com um exemplo de aplicação, que também será usado nos capítulos 3 e 4.

2.2 Formulação clássica

Na apresentação da formulação clássica, considera-se primeiro uma excitação determinística. Para este tipo de acção estudam-se osciladores de um e de múltiplos graus de liberdade, sendo dado especial destaque a análise no domínio da frequência.

De seguida, analisa-se o caso da excitação estocástica, considerando primeiro, osciladores de um grau de liberdade e generalizando, de seguida, a formulação apresentada para osciladores de múltiplos graus de liberdade. Esta abordagem é precedida de um pequena síntese sobre as principais grandezas caracterizadoras dos processos estocásticos.

2.2.1 Excitação determinística

2.2.1.1 Osciladores de um grau de liberdade

O movimento de um oscilador linear de um grau de liberdade de massa m , rigidez k e amortecimento do tipo viscoso c é regido pela seguinte equação:

$$m \cdot \ddot{q}_1(t) + c \cdot \dot{q}_1(t) + k \cdot q_1(t) = p_1(t) \quad (2.1)$$

em que $q_1(t)$ é a resposta do oscilador a uma acção $p_1(t)$ e $\dot{q}_1(t)$ e $\ddot{q}_1(t)$ são a primeira e a segunda derivadas de $q_1(t)$ em ordem ao tempo t , respectivamente.

A solução desta equação diferencial, no domínio do tempo e considerando nulos os valores do deslocamento e da velocidade no instante inicial, pode ser obtida recorrendo ao integral de convolução de Duhamel:

$$q_1(t) = \int_0^t p_1(\tau) \cdot h_1(t - \tau) \cdot d\tau \quad , t > 0 \quad (2.2)$$

sendo a função $h_1(t - \tau)$, definida pela expressão (2.3), a resposta do sistema, no instante $t - \tau$, a um impulso unitário actuando no instante τ .

$$h_1(t - \tau) = \frac{1}{m \cdot \omega_{1a}} \cdot e^{-\omega_1 \xi \cdot (t - \tau)} \cdot \text{sen}[\omega_{1a} \cdot (t - \tau)] \quad , t > \tau \quad (2.3)$$

É esta função que modela o comportamento do oscilador, sendo portanto dependente das suas características: massa (m), frequência natural ($\omega_1 = \sqrt{k/m}$) e coeficiente de amortecimento (ξ). A frequência amortecida (ω_{1a}) é dada pela seguinte expressão:

$$\omega_{1a} = \omega_1 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \quad (2.4)$$

A resolução do problema através do integral de Duhâmel, equivale a subdividir a excitação actuante numa sequência de funções impulsivas e calcular a resposta resultante, através da soma das respostas da estrutura a cada um dos impulsos em que a excitação foi discretizada.

Na Figura 2.1 representam-se as respostas a um impulso de dois osciladores de um grau de liberdade, com diferentes valores do coeficiente de amortecimento.

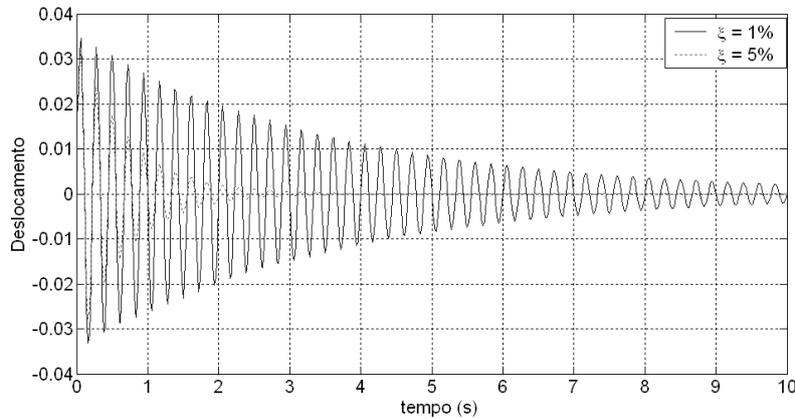


Figura 2.1 – Respostas de dois osciladores de um grau de liberdade a um impulso.

Em alternativa, a equação diferencial (2.1) pode ser resolvida procedendo à sua transferência para o domínio da frequência, por aplicação da transformada de Fourier a cada um dos seus membros. Como a derivação no domínio do tempo se transforma no produto por $i\omega$ no domínio da frequência, a equação diferencial do movimento dá lugar à seguinte equação algébrica:

$$-m \cdot \omega^2 \cdot Q_1(\omega) + c \cdot i \cdot \omega \cdot Q_1(\omega) + k \cdot Q_1(\omega) = P_1(\omega) \quad (2.5)$$

sendo $Q_1(\omega)$ e $P_1(\omega)$ as transformadas de Fourier de $q_1(t)$ e $p_1(t)$.

A grande vantagem de escrever a equação no domínio da frequência reside no facto de a equação (2.5), permitir obter, de forma explícita, a resposta a partir da excitação:

$$Q_1(\omega) = \frac{P_1(\omega)}{-\omega^2 \cdot m + i \cdot \omega \cdot c + k} = H_1(\omega) \cdot P_1(\omega) \quad (2.6)$$

$H_1(\omega)$ designa-se função de resposta em frequência (FRF) de um oscilador de um grau de liberdade e é definida pela seguinte expressão:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 \cdot m + i \cdot \omega \cdot c + k} = \frac{1/m}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_1} \quad (2.7)$$

A segunda igualdade da equação (2.7) obtém-se dividindo o numerador e o denominador por m , representando a frequência natural do oscilador por $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ e usando a igualdade: $c = 2 \cdot \xi \cdot m \cdot \omega_1$.

Correspondendo a operação de convolução, expressa pela equação (2.2), no domínio do tempo, a um produto no domínio da frequência, facilmente se demonstra que a função de resposta em frequência, $H_1(\omega)$, é a transformada de Fourier da função de resposta a um impulso unitário, $h_1(t-\tau)$.

A FRF é uma função que, no domínio da frequência, caracteriza o comportamento do oscilador, possibilitando transformar a sua excitação na sua resposta. Na Figura 2.2 apresenta-se o gráfico desta função complexa (constituída por uma parte real R e por uma parte imaginária I), através da sua amplitude $\left(\sqrt{R^2 + I^2}\right)$ e fase $(\arctg(I/R))$, para um oscilador com uma frequência natural ω_1 e um coeficiente de amortecimento variável. Como facilmente se deduz da equação (2.7), a amplitude da FRF apresenta um máximo em correspondência com a abcissa $\omega = \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega_1$, que para coeficientes de amortecimento baixos é uma boa estimativa da frequência natural do oscilador.

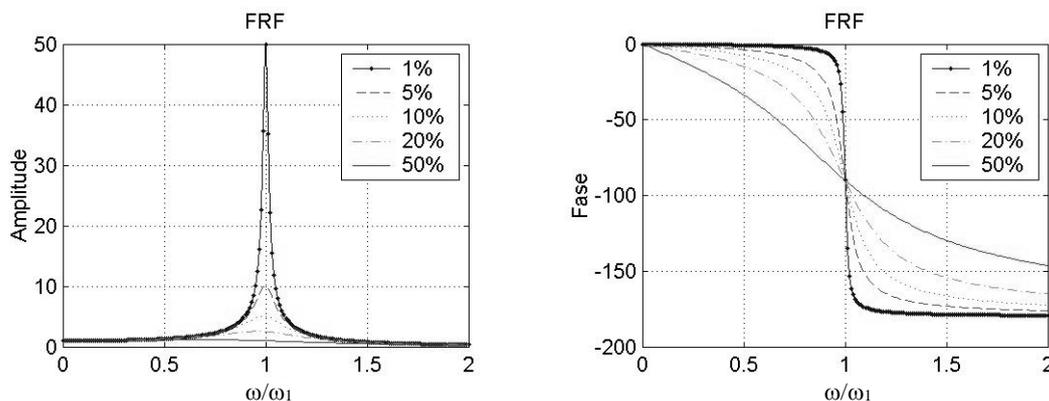


Figura 2.2 – Função de Resposta em Frequência: amplitude e fase

A análise dos gráficos da função de resposta em frequência permite de forma imediata identificar aproximadamente a frequência natural do oscilador, através do máximo da amplitude e de uma mudança de 180° da fase. É também possível estimar o coeficiente de amortecimento a partir da forma do gráfico da amplitude na vizinhança do máximo, verificando-se que quanto mais aguçado este for, menor será o coeficiente de amortecimento.

A função de resposta em frequência apresentada relaciona forças com deslocamentos. É possível, contudo, definir FRFs para relacionar forças com velocidades ou forças com acelerações. Estas FRFs podem ser obtidas a partir da primeira multiplicando-a sucessivamente por $i\omega$. No Quadro 2.1 apresentam-se as diferentes FRFs, bem como a sua designação:

Quadro 2.1 – Funções de resposta em frequência

Designação	Tipo de relação	Expressão
Receptância	Forças – Deslocamentos	$H_1(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_1}$
Mobilidade	Forças – Velocidades	$H_1(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{i \cdot \omega}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_1}$
Inertância	Forças – Acelerações	$H_1(\omega) = \frac{1}{m} \cdot \frac{-\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi \cdot \omega \cdot \omega_1}$

2.2.1.2 Osciladores de múltiplos graus de liberdade

O movimento de um oscilador de múltiplos graus de liberdade com amortecimento viscoso é regido pela equação matricial (2.8), com dimensão n_2 , em que n_2 é o número de graus de liberdade do oscilador.

$$M \cdot \ddot{q}(t) + C \cdot \dot{q}(t) + K \cdot q(t) = p(t) \quad (2.8)$$

As matrizes M , C e K são a matriz de massa, amortecimento e rigidez do sistema, cujos elementos m_{ij} , c_{ij} e k_{ij} representam as forças generalizadas em correspondência com a coordenada i , quando na coordenada j é introduzida uma aceleração, uma velocidade ou um deslocamento generalizado unitário, respectivamente.

Os vectores $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$, $q(t)$ contêm as acelerações, velocidades e deslocamentos generalizados relativos a cada um dos graus de liberdade da estrutura, enquanto o vector $p(t)$ contém as forças aplicadas segundo cada um dos grau de liberdade da estrutura.

Este sistema de equações diferenciais de segunda ordem, pode ser resolvido, no domínio do tempo, recorrendo a funções de resposta a impulsos (Caetano 1992). No entanto, a sua análise no domínio da frequência é mais interessante.

Seguindo uma sequência de passos análoga à utilizada para os sistemas de um grau de liberdade, cuja operação fundamental é a aplicação da transformada de Fourier a ambos os membros do sistema de equações (2.8), obtém-se uma expressão matricial, que relaciona, no domínio da frequência, a resposta com a excitação:

$$Q(\omega) = H(\omega) \cdot P(\omega) \quad (2.9)$$

onde $Q(\omega)$ e $P(\omega)$ são vectores de dimensão n_2 que representam as transformadas de Fourier da resposta e da excitação, respectivamente, e $H(\omega)$ é uma matriz de dimensão $n_2 \times n_2$, em que cada componente genérica $H_{ij}(\omega)$ é uma função de resposta em frequência do sistema, que relaciona a resposta segundo a coordenada i com a força generalizada aplicada segundo a coordenada j . Esta matriz relaciona-se com as matrizes que caracterizam a estrutura através da seguinte expressão:

$$H(\omega) = \left[-\omega^2 \cdot M + i \cdot \omega \cdot C + K \right]^{-1} \quad (2.10)$$

No entanto, a obtenção da matriz das funções de resposta em frequência através da equação (2.10) é muito laboriosa, pois obriga ao cálculo da inversa de uma matriz complexa para cada frequência em se pretenda definir esta matriz. A formulação modal, que será descrita de seguida, permite obter a matriz das FRFs através de um procedimento numericamente mais eficiente.

Exemplo

Para ilustrar os conceitos que vão sendo apresentados ao longo deste capítulo, é introduzido um exemplo, que será analisado considerando diferentes abordagens. Este exemplo refere-se a um pequeno modelo físico da estrutura de um edifício, constituída por três pisos ligados entre si por 4 pilares. As lajes de piso são materializadas através de chapas em aço com 1 cm de espessura e os pilares são lâminas de alumínio com uma altura entre cada piso de 17 cm. Na Figura 2.3 representa-se uma perspectiva cotada do modelo.

Nesta fase, para reduzir a dimensão do problema, é feita apenas a análise plana do modelo, considerando a direcção mais flexível do pórtico tridimensional. Assim, a estrutura pode ser representada, de forma simplificada, pelo esquema da Figura 2.4.

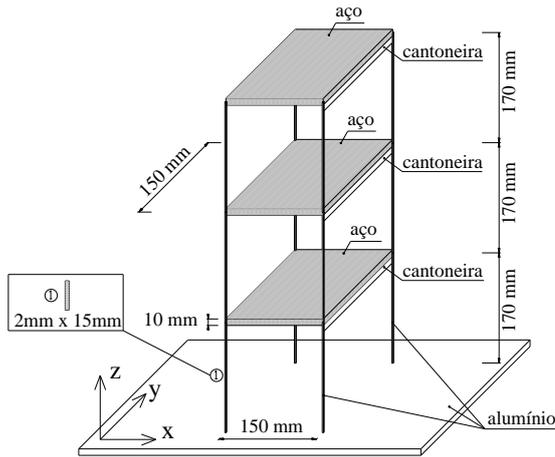


Figura 2.3– Perspectiva do modelo

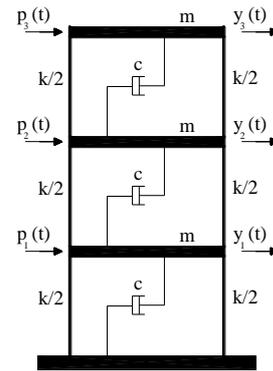


Figura 2.4– Idealização estrutural plana do modelo

Para este exemplo, a equação (2.8) pode escrever-se sob a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Na Figura 2.5 e na Figura 2.6, representam-se os termos da matriz $H(\omega)$, calculada através da equação (2.10), considerando $k = 4 \cdot 12EI/L^3$ (EI rigidez à flexão dos pilares e L altura dos pilares), $m = 1.7663 \text{ kg}$ e adoptando dois valores para o amortecimento $c = 0.01 \cdot 2 \cdot m \cdot \sqrt{k/m}$ ($\bar{\xi} = 1\%$) e $c = 0.05 \cdot 2 \cdot m \cdot \sqrt{k/m}$ ($\bar{\xi} = 5\%$). Para o traçado dos gráficos, as funções de resposta em frequência foram avaliadas em 1500 pontos, sendo portanto necessário calcular a inversa de 1500 matrizes.

A análise destes gráficos permite, tal como no caso simples do oscilador linear de um grau de liberdade, identificar algumas características dinâmicas do sistema: as suas frequências naturais correspondem a picos da amplitude e a mudanças de fase de 180° ; a forma dos picos depende do coeficiente de amortecimento associado a cada um dos modos. Observa-se que, para esta estrutura, com a matriz de amortecimento definida em (2.8), o coeficiente de amortecimento do terceiro modo é maior que o do segundo e este é maior do que o amortecimento associado ao primeiro modo.

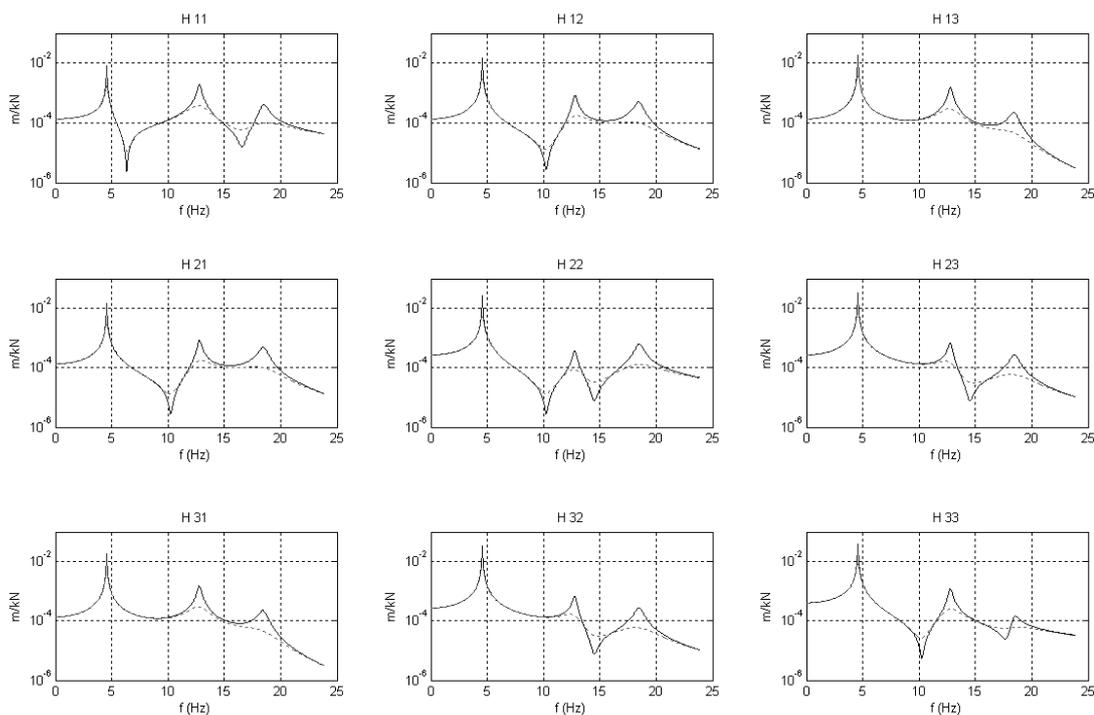


Figura 2.5 – Matriz da amplitude das FRF para dois valores de amortecimento

$\bar{\xi} = 1\%$ (traço contínuo) e $\bar{\xi} = 5\%$ (ponteadado)

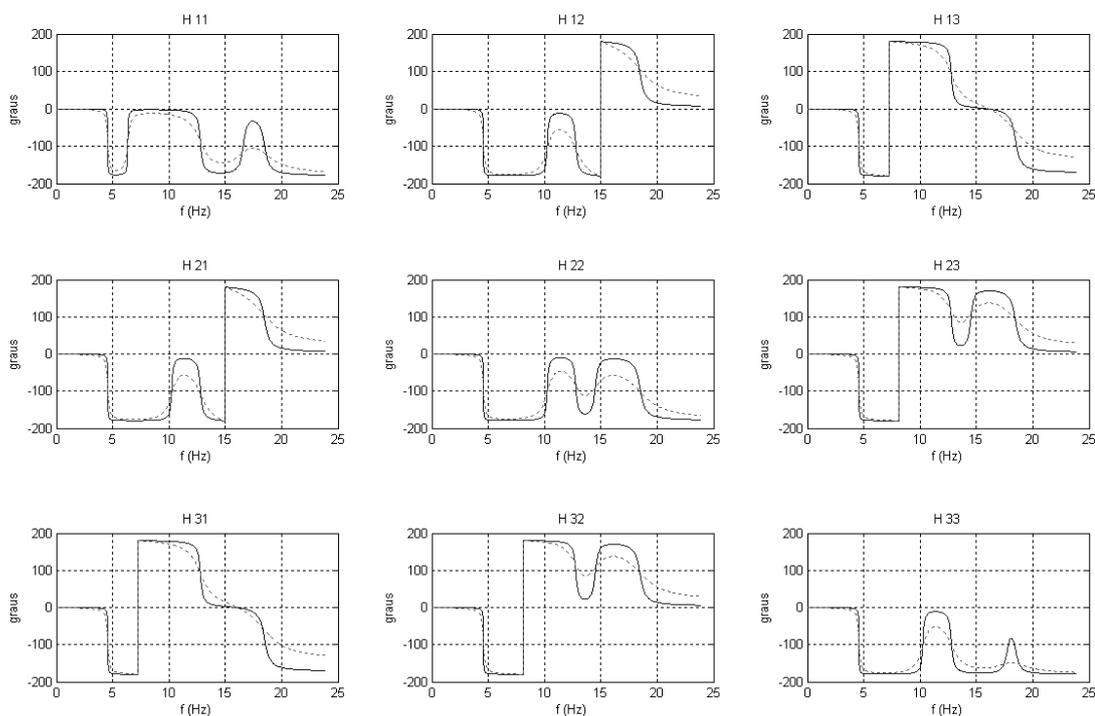


Figura 2.6 – Matriz da fase das FRF para dois valores de amortecimento

$\bar{\xi} = 1\%$ (traço contínuo) e $\bar{\xi} = 5\%$ (ponteadado)

Formulação Modal

A formulação modal permite transformar o sistema de n_2 equações diferenciais do movimento num conjunto de n_2 equações diferenciais independentes. Tal é conseguido, expressando o vector dos deslocamentos através da combinação linear de n_2 vectores independentes. Estes vectores designam-se modos de vibração do sistema (φ_k) e os coeficientes da combinação linear denominam-se coordenadas modais (q_{mk}).

Nas estruturas não amortecidas, a equação de movimento livre é a seguinte:

$$M \cdot \ddot{q}(t) + K \cdot q(t) = 0 \quad (2.12)$$

Se for admitido que as soluções da equação anterior são do tipo:

$$q(t) = \varphi_k \cdot e^{\lambda_k t} \quad (2.13)$$

os modos de vibração são determinados a partir da resolução do problema de valores e vectores próprios expresso pela seguinte equação:

$$K \cdot \varphi_k = -\lambda_k^2 \cdot M \cdot \varphi_k \quad (2.14)$$

Deste, resultam n_2 valores próprios ($-\lambda_k^2$) e os respectivos vectores próprios (φ_k). Os vectores próprios são os modos de vibração da estrutura e os valores próprios são iguais ao quadrado das frequências angulares não amortecidas, sendo portanto a relação entre os λ_k e as frequências angulares não amortecidas (ω_k) a seguinte:

$$\lambda_k = i \cdot \omega_k \quad (2.15)$$

Os modos de vibração são frequentemente organizados numa matriz Φ , que se designa matriz modal e que contém nas suas colunas os modos de vibração.

A separação das equações do sistema (2.8), em estruturas sem amortecimento, é conseguida, porque os modos de vibração são ortogonais em relação às matrizes de massa e de rigidez da estrutura, ou seja, satisfazem as seguintes condições:

$$\begin{aligned}\Phi^T \cdot K \cdot \Phi &= \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & k_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \\ \Phi^T \cdot M \cdot \Phi &= \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & m_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.16}$$

Os segundos membros das igualdades são matrizes diagonais, que contêm nas suas diagonais principais a rigidez modal (k_k) e a massa modal (m_k) dos n_2 modos, respectivamente. Como os modos que resultam do problema de valores e vectores próprios são definidos a menos de um factor de escala, é usual escalá-los de forma a tornar as massas modais unitárias.

Pré-multiplicando a equação (2.14) por φ_k^T e usando as igualdades (2.15) e (2.16), verifica-se que as frequências angulares não amortecidas, de cada um dos modos, podem ser obtidas através de uma expressão semelhante à que é usada para os osciladores de um grau de liberdade:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k_k}{m_k}}\tag{2.17}$$

Para realizar a separação das equações do sistema (2.8) em estruturas amortecidas, é ainda necessário assumir a ortogonalidade dos modos de vibração em relação à matriz de amortecimento:

$$\Phi^T \cdot C \cdot \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & c_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 2 \cdot \xi_k \cdot m_k \cdot \omega_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}\tag{2.18}$$

Na segunda igualdade da expressão anterior é estabelecida a definição do amortecimento modal (c_k).

Esta ortogonalidade verifica-se, em relação aos modos de vibração determinados para as estruturas não amortecidas, se o amortecimento for considerado do tipo proporcional, isto é, se a matriz de amortecimento C for obtida por uma combinação linear das matrizes M e K , como a apresentada na expressão (2.19) (Clough e Penzien 1993).

$$C = M \cdot \sum_b a_b \cdot [M^{-1} \cdot K]^b\tag{2.19}$$

Note-se que, o conhecido amortecimento de Rayleigh ($C = \alpha M + \beta K$) é um caso particular da expressão apresentada, que se obtém considerando apenas os termos $b = 0$ e $b = 1$.

Este modelo de amortecimento admite que a distribuição do amortecimento ao longo da estrutura é proporcional à distribuição de massa e de rigidez. Esta suposição, que facilita o tratamento matemático do problema, na realidade acaba por ser válida para a maioria das estruturas. No entanto, na secção 2.3 será apresentada uma formulação que permite tratar modelos de amortecimento mais gerais.

Se, para solução geral do movimento livre de osciladores de múltiplos graus de liberdade com amortecimento proporcional, também for considerada a expressão (2.13), obtêm-se $2n_2$ valores de λ_k , que se relacionam com as frequências angulares não amortecidas e com os coeficientes de amortecimento modais através da seguinte expressão:

$$\lambda_k, \lambda_k^* = -\xi_k \cdot \omega_k \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \quad (2.20)$$

O índice \bullet^* significa complexo conjugado.

Assim, se a resposta $q(t)$ de um oscilador linear de n_2 graus de liberdade com amortecimento proporcional for definida no espaço modal, isto é, em função dos modos de vibração:

$$q(t) = \sum_{k=1}^{n_2} \varphi_k \cdot q_{m_k}(t) \quad (2.21)$$

o sistema de equações é transformado nas seguintes n_2 equações diferenciais independentes:

$$m_k \cdot \ddot{q}_{m_k}(t) + c_k \cdot \dot{q}_{m_k}(t) + k_k \cdot q_{m_k}(t) = p_k(t) \quad k=1, \dots, n_2 \quad (2.22)$$

onde as componentes modais da excitação $p_k(t)$ resultam do produto do transposto do modo de vibração k pelo vector da excitação $p(t)$.

A equação (2.22) é idêntica à equação que rege o movimento de um oscilador de um grau de liberdade (2.1), podendo ser resolvida no domínio do tempo através do integral de Duhamel ou ser transportada para o domínio da frequência, surgindo sob a forma:

$$Q_{mk}(\omega) = H_{mk}(\omega) \cdot P_k(\omega) \quad (2.23)$$

Cada uma das funções de resposta em frequência no espaço modal H_{mk} é definida, em função dos parâmetros modais, pela expressão:

$$H_{mk}(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \quad (2.24)$$

A matriz das funções de resposta em frequência completa, no sistema de coordenadas generalizadas iniciais, pode ser obtida a partir da seguinte equação:

$$H(\omega) = \Phi \cdot H_m(\omega) \cdot \Phi^T = \sum_{k=1}^{n_2} H_{mk} \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^T \quad (2.25)$$

onde a matriz H_m é uma matriz diagonal que contém, na sua diagonal principal, as funções de resposta em frequência no espaço modal, encontrando-se os modos de vibração normalizados em relação à matriz de massa.

Da expressão que resulta da segunda igualdade da equação (2.25), facilmente se obtém a seguinte equação, que permite o cálculo dos elementos da matriz das FRFs:

$$H_{(i,j)}(\omega) = \sum_{k=1}^{n_2} \frac{(\varphi_i)_k \cdot (\varphi_j)_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \quad (2.26)$$

onde $(\varphi_i)_k$ é a componente i do modo de vibração k .

O cálculo da matriz das funções de resposta em frequência através da formulação modal é muito mais eficiente, não só pelo facto das operações matemáticas envolvidas serem mais simples, mas também porque é possível ter em consideração um número de modos de vibração limitado, bastando para tal alterar o limite superior dos somatórios das expressões (2.25) e (2.26), para contabilizar apenas a contribuição dos primeiros modos, que se julguem representativos do sistema dinâmico.

Finalmente, a resposta da estrutura, no domínio da frequência, pode ser obtida fazendo uso conjunto das equações (2.21) e (2.23):

$$Q(\omega) = \sum_{k=1}^{n_2} \varphi_k \cdot H_{mk}(\omega) \cdot P_k(\omega) \quad (2.27)$$

Exemplo

A matriz de amortecimento da estrutura em análise é do tipo proporcional. Logo, os vectores próprios podem ser determinados através do problema de valores e vectores próprios definido pela expressão (2.14). As frequências naturais identificam-se com a raiz quadrada dos valores próprios obtidos, os coeficientes de amortecimento modais obtêm-se dividindo os amortecimentos modais de cada modo, obtidos através da equação (2.18), por $2 \cdot \omega_k \cdot m_k$ (amortecimento crítico).

No Quadro 2.2 e na Figura 2.7 apresentam-se os valores calculados dos parâmetros modais, considerando $c = 0.01 \cdot 2 \cdot m \cdot \sqrt{k/m}$.

Quadro 2.2 – Freqüências e coeficientes de amortecimento

Modo	Frequência Natural (Hz)	Coefficiente de Amortecimento Modal (%)
1	4.5622	0.45
2	12.7830	1.25
3	18.4719	1.80

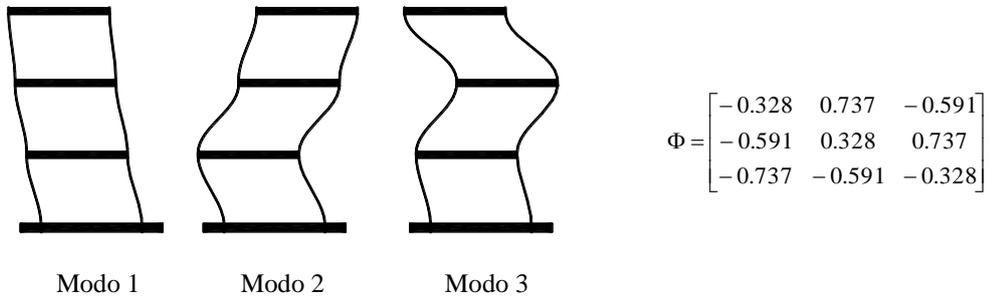


Figura 2.7 – Modos de vibração e matriz dos vectores próprios

Os resultados apresentados estão de acordo com os resultados previstos a partir da matriz das FRF: as frequências naturais coincidem com as abscissas dos picos e os valores dos coeficientes de amortecimento modais aumentam com a ordem do modo.

Na Figura 2.8 representam-se as amplitudes das funções de resposta em frequência no espaço modal, calculadas com a equação (2.24).

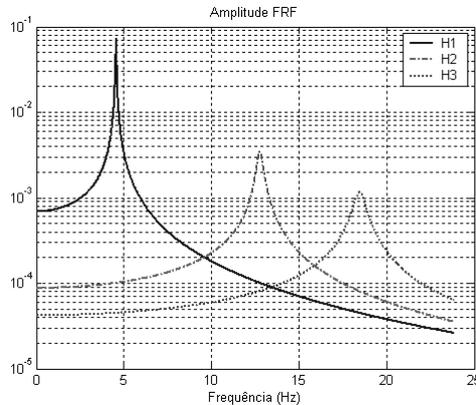


Figura 2.8 – Amplitude das funções de resposta em frequência no espaço modal

2.2.2 Excitação estocástica

Quando a excitação da estrutura é aleatória, a sua caracterização tem que ser realizada com base em conceitos probabilísticos, pelo que se torna conveniente idealizar a excitação através de um processo estocástico (Cunha 1990).

Por processo estocástico $x(t)$ entende-se o conjunto de n ($n \rightarrow \infty$) funções aleatórias (realizações do processo) $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) dependentes do parâmetro t (que nos problemas de dinâmica estrutural representa o tempo), associadas à caracterização de uma determinada grandeza física, no caso de processos escalares (por exemplo, a aceleração de um grau de liberdade da estrutura) ou de várias grandezas, no caso de processos vectoriais (por exemplo, as três componentes ortogonais da aceleração num ponto da estrutura). A Figura 2.9 representa esquematicamente um processo estocástico escalar. Esta figura serve para definir a notação usada nas expressões do Quadro 2.3 (no escalar X_{ij} o primeiro índice está associado ao instante temporal e o segundo à realização a que pertence).

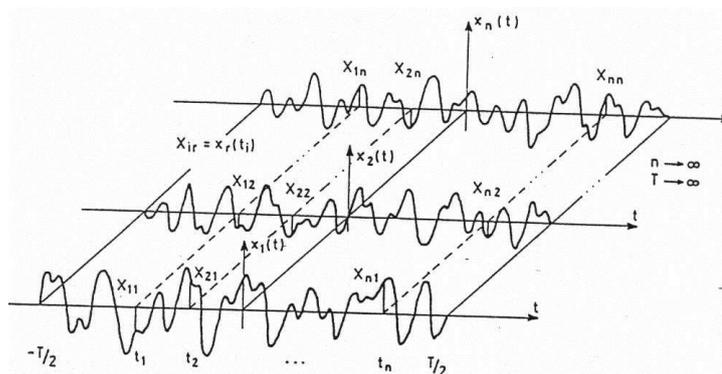


Figura 2.9 – As n realizações do processo estocástico $x(t)$

A caracterização dos processos estocásticos é habitualmente realizada com base nas grandezas estatísticas que se definem no Quadro 2.3, tomando como referência um processo estocástico escalar $x(t)$:

Quadro 2.3 – Grandezas estatísticas de um processo estocástico

Designação	Expressão
Média no instante t_i	$m_{x_i} = E[x(t_i)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{ik}$
Valor quadrático médio no instante t_i	$m_{x_i^2} = E[x(t_i)^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{ik}^2$
Variância no instante t_i	$\mu_{x_i} = E[(x(t_i) - m_{x_i})^2] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{ik} - m_{x_i})^2$
Desvio padrão no instante t_i	$\sigma_{x_i} = \sqrt{\mu_{x_i}}$
Função de auto-correlação referida aos instantes t_i e t_j	$R_x(t_i, t_j) = E[x(t_i)x(t_j)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n X_{ik} \cdot X_{jk}$
Função de auto-covariância referida aos instantes t_i e t_j	$\begin{aligned} \mu_x(t_i, t_j) &= E[(x(t_i) - m_{x_i})(x(t_j) - m_{x_j})] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n (X_{ik} - m_{x_i}) \cdot (X_{jk} - m_{x_j}) \end{aligned}$

Para simplificar o tratamento matemático dos processos estocásticos, em diversas aplicações práticas, é comum assumir-se que os processos estocásticos são estacionários e ergódicos. O facto de ser estacionário significa que as suas características estatísticas são independentes do instante temporal. A ergodicidade significa que o valor dos parâmetros estatísticos avaliados tendo em conta as diferentes realizações, para um determinado instante de tempo, é igual ao dos mesmos parâmetros estatísticos avaliados apenas numa realização ao longo do tempo.

Nas aplicações apresentadas ao longo deste trabalho será também admitido que os processos estocásticos apresentam média nula e natureza Gaussiana. Esta é uma característica comum a muitos fenómenos naturais, porque, segundo o Teorema do Limite Central, a soma de um grande número de variáveis aleatórias independentes, cada uma com diferentes distribuições individuais, tende para uma distribuição normal.

Se se admitir que o processo estocástico é estacionário e ergódico, a função de auto-correlação definida no Quadro 2.3 não depende dos instantes temporais t_i e t_j , depende apenas do seu desfasamento temporal ($\tau = t_j - t_i$), e pode ser calculada usando uma única realização do processo ($x_r(t)$), tal com é efectuado na equação (2.28).

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_r(t) \cdot x_r(t + \tau) dt \quad (2.28)$$

Na Figura 2.10 representa-se esquematicamente a função de auto-correlação de duas séries temporais, podendo observar-se que quanto mais irregular é o processo, mais rapidamente a função de auto-correlação tende para zero com o crescimento de τ . No caso limite de um processo idealmente aleatório, a função de auto-correlação apenas tem ordenada não nula na origem.

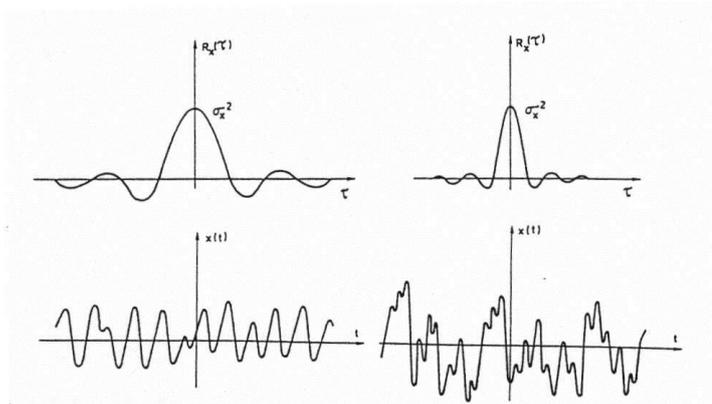


Figura 2.10 – Influência da irregularidade do processo na função de auto-correlação

Na Figura 2.10 podem ainda ser identificadas outras características das funções de auto-correlação associadas a processos estocásticos estacionários de média nula: são funções simétricas com um máximo na origem, cuja ordenada é igual à variância do processo.

A função de auto-correlação pode ser transposta para o domínio da frequência através da transformada de Fourier - equação (2.29), obtendo-se uma função que se designa auto-espectro ou espectro de potência.

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot \tau} d\tau \quad (2.29)$$

O auto-espectro é uma função real que quantifica a distribuição do conteúdo energético do sinal ao longo das frequências. A área do gráfico representa o conteúdo energético total do sinal, que para sinais de média nula é igual ao valor da sua variância.

Como se verifica na Figura 2.11, quanto mais irregular é o sinal mais alargada é a gama de frequências com conteúdo energético significativo. O caso (c) é um caso extremo em que o sinal recebe a contribuição de todas as frequências, um sinal deste género é idealmente aleatório e designa-se de ruído branco.

Um ruído branco, como o representado na Figura 2.11, conduz a um espectro com área infinita e a uma função de auto-correlação com uma ordenada de valor infinito na origem, pelo facto da variância ser infinita, e com ordenadas nulas em todas as restantes abcissas, pelo facto do sinal ser idealmente aleatório.

Na realidade uma variância infinita não é realista, pelo que, nas aplicações práticas é usual considerar-se um ruído branco de banda limitada, isto é, um processo estocástico cujo auto-espectro tem intensidade constante dentro de um determinado intervalo de frequências.

Na aplicação dos métodos de identificação, baseados na medição da resposta da estrutura a uma excitação ambiental, assume-se que a excitação tem as propriedades de um ruído branco: espectro de potência constante e função de auto-correlação com ordenada na origem igual à variância do processo e valor nulo em todas as restantes abcissas.

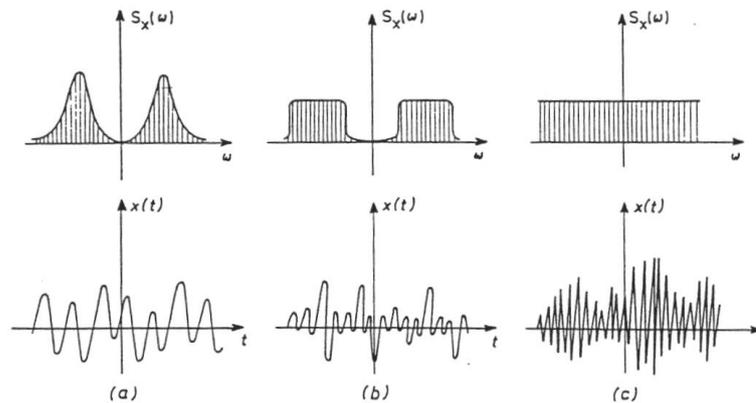


Figura 2.11 – Relação entre os espectros de potência e os processos estocásticos

Os conceitos de função de auto-correlação e auto-espectro podem ser generalizados, de forma a considerar dois processos estocásticos (x_1 e x_2). Assim, aparece a função de correlação cruzada e o espectro cruzado, definidos pelas equações (2.30) e (2.31), respectivamente.

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_{1r}(t) \cdot x_{2r}(t + \tau) dt \quad (2.30)$$

$$S_{x_1 x_2}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_1 x_2}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.31)$$

Em alternativa, a função densidade espectral cruzada pode ser calculada, a partir das séries temporais, através da seguinte expressão:

$$S_{x_1 x_2}(\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{F_{T,r}[x_1(t)]^* \cdot F_{T,r}[x_2(t)]}{T} \quad (2.32)$$

$F_{T,r}[x_1(t)]$ significa transformada de Fourier da realização r do processo estocástico $x_1(t)$, restringida ao intervalo $[-T/2, T/2]$.

Como é evidente, a expressão anterior também é adequada para o cálculo dos auto-espectros, bastando para tal considerar $x_1 = x_2$. Desta expressão, facilmente se conclui que os auto-espectros são funções reais, pois resultam da multiplicação de números complexos pelos seus complexos conjugados, e que os espectros cruzados são funções complexas.

Agrupando num único vector $y(t)$ vários processos estocásticos associados à caracterização de um determinado fenómeno físico, constitui-se um processo estocástico vectorial. Neste caso, a função escalar de auto-correlação é substituída por uma matriz de correlação. Esta matriz contém nos elementos da diagonal principal as funções de auto-correlação, relativas a cada uma das componentes do processo, e nos elementos fora da diagonal principal (linha i , coluna j) a correlação cruzada entre a componente i e a componente j . Para um processo estocástico vectorial estacionário y , esta matriz é definida pela seguinte expressão:

$$R_y(\tau) = E[y(t) \cdot y(t + \tau)^T] \quad (2.33)$$

De forma equivalente, para os processos estocásticos vectoriais, é também definida uma matriz de espectros, que também contém auto-espectros na diagonal principal e espectros cruzados fora da diagonal.

No caso particular dos processos estocásticos vectoriais do tipo ruído branco, a matriz das correlações assume a forma do produto de uma matriz constante por um impulso de Dirac ($\delta(\tau)$):

$$R_y(\tau) = R_y \cdot \delta(\tau) \quad (2.34)$$

A matriz dos espectros que resulta da aplicação da expressão (2.31) à matriz anterior, é uma matriz constante e igual a R_y .

Nos pontos seguintes, sistematizam-se as relações estocásticas excitação-resposta para analisar estruturas sob acções aleatórias, sendo dada particular ênfase ao caso em que estas podem ser idealizadas através de processos estocásticos do tipo ruído branco.

2.2.2.1 Osciladores de um grau de liberdade

Para osciladores lineares de um grau de liberdade solicitados por uma excitação aleatória, podem ser estabelecidas várias relações excitação-resposta no domínio da frequência que importa destacar. Estas relações, demonstradas em (Maia e Silva 1997), em vez de relacionarem a transformada de Fourier da resposta com a transformada de Fourier da acção, através da função de resposta em frequência, usam a mesma função de resposta em frequência para relacionar os espectros da resposta e da acção.

$$\begin{aligned} S_{q_1q_1}(\omega) &= H_1(\omega) \cdot H_1^*(\omega) \cdot S_{p_1p_1}(\omega) = |H_1(\omega)|^2 \cdot S_{p_1p_1}(\omega) \\ S_{p_1q_1}(\omega) &= H_1(\omega) \cdot S_{p_1p_1}(\omega) \\ S_{q_1p_1}(\omega) &= H_1(\omega) \cdot S_{q_1q_1}(\omega) \end{aligned} \tag{2.35}$$

A primeira equação, apenas permite identificar a amplitude da função de resposta em frequência, tendo por base o conhecimento da resposta e da excitação. As duas últimas têm a vantagem de, com a mesma informação, permitirem identificar a amplitude e a fase da função de resposta em frequência.

Se a excitação for idealizada por um ruído branco, o auto-espectro da excitação é constante. Portanto, usando a primeira igualdade do grupo de equações anterior, verifica-se que o auto-espectro da resposta do oscilador de um grau de liberdade é igual ao quadrado da amplitude da função de resposta em frequência multiplicado por uma constante. Esta constatação é muito importante pois, como já foi mostrado, a partir da amplitude das funções de resposta em frequência é possível extrair as características dinâmicas dos osciladores. Assim, sendo o espectro de potência da resposta proporcional ao quadrado da amplitude da função de resposta em frequência, a partir deste também é possível identificar as características dinâmicas da estrutura.

2.2.2.2 Osciladores de múltiplos graus de liberdade

No caso de osciladores com múltiplos graus de liberdade pode demonstrar-se (Cunha 1990) que, a primeira igualdade definida em (2.35) pode ser generalizada da seguinte forma:

$$S_q(\omega) = H(\omega) \cdot S_p(\omega) \cdot H^H(\omega) \tag{2.36}$$

$H(\omega)$ representa a matriz das funções de resposta em frequência (o índice \bullet^H significa transposição da matriz e obtenção dos complexos conjugados dos seus elementos), $S_q(\omega)$ é a matriz dos espectros da resposta da estrutura e $S_p(\omega)$ a matriz dos espectros da excitação.

Se se assumir que a excitação actuante ao nível dos diferentes graus de liberdade da estrutura (“input”) tem as características de um ruído branco, então a matriz dos espectros da excitação é constante e dependente do valor da matriz das correlações para $\tau = 0$ (R_p), e a matriz dos espectros da resposta passa a depender exclusivamente da matriz das funções de resposta em frequência e de uma matriz constante:

$$S_q(\omega) = H(\omega) \cdot R_p \cdot H^H(\omega) \quad (2.37)$$

Se os “inputs”, para além de serem ruídos brancos, também forem estatisticamente independentes entre si, as correlações cruzadas são nulas e portanto a matriz R_p é uma matriz diagonal. Neste caso, usando a expressão (2.26), a contribuição de cada modo genérico k , para um qualquer elemento (linha i , coluna j) da matriz dos espectros das respostas, pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$S_{q(i,j)}^k(\omega) = \sum_{r=1}^{n2} \frac{(\varphi_i)_k \cdot (\varphi_r)_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \cdot R_{p\ rr} \cdot \frac{(\varphi_j)_k \cdot (\varphi_r)_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} \quad (2.38)$$

Esta expressão é bastante interessante pois separa a contribuição de cada um dos modos de vibração para o espectro da resposta e relaciona o espectro da resposta com as características modais da estrutura.

Exemplo:

Para o pórtico em análise, calculou-se a matriz dos espectros da resposta, usando a expressão (2.36) e adoptando para matriz dos espectros da excitação a matriz identidade. Assim, assume-se que as excitações dos diferentes graus de liberdade são independentes e são ruídos brancos. Na Figura 2.12 apresenta-se a amplitude dos elementos (1,1) e (2,3) da matriz dos espectros e a contribuição de cada um dos modos de vibração (calculada a partir da expressão (2.38)) para os mesmos elementos.

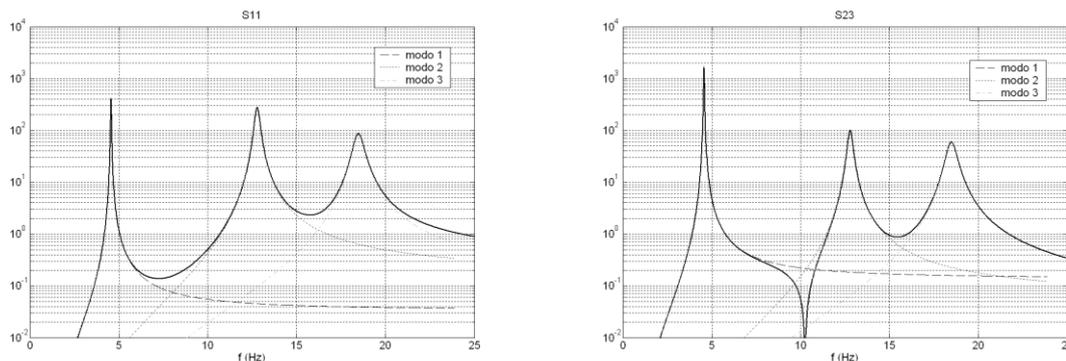


Figura 2.12 – Elementos (1,1) e (2,3) da matriz dos espectros de resposta.

Verifica-se que os elementos da matriz dos espectros representados, na vizinhança das frequências naturais da estrutura, ficam bem caracterizados se apenas for contabilizada a contribuição do modo de vibração com a frequência correspondente.

2.3 Formulação de estado

Na secção anterior, verificou-se que na formulação modal clássica a determinação dos modos de vibração de um sistema linear dinâmico e subsequente separação das equações de equilíbrio, pressupõe que o amortecimento considerado é do tipo proporcional, situação em que os modos de vibração da estrutura amortecida são iguais aos modos de vibração da mesma estrutura sem amortecimento. Na realidade porém, a distribuição do amortecimento na estrutura não é proporcional à distribuição de rigidez e de massa. A existência de um amortecedor localizado é suficiente para inviabilizar a hipótese de amortecimento proporcional.

A formulação de estado permite ultrapassar esta limitação, possibilitando também a construção de modelos matemáticos onde as características dos dados experimentais são especificamente consideradas. Esta formulação permite a modelação do ruído, sempre existente em trabalhos experimentais, bem como a construção de modelos discretos no tempo, adaptados à utilização de séries temporais recolhidas em trabalhos experimentais. Por todas estas razões, é uma formulação que se torna mais poderosa no contexto da identificação experimental de sistemas.

Nesta secção é realizada a apresentação dos fundamentos teóricos dos modelos de estado, que são essenciais para a compreensão dos métodos de identificação neles baseados. Na apresentação, segue-se uma sequência de modelos que se vão aproximando gradualmente da realidade experimental. Começa-se por descrever os modelos contínuos, passa-se depois para os modelos discretos, que consideram o carácter discreto das séries temporais recolhidas experimentalmente e, finalmente, descrevem-se os modelos discretos estocásticos, que consideram a existência de ruído e possibilitam a caracterização da resposta do sistema dinâmico a uma excitação aleatória.

2.3.1 Modelos contínuos

Na formulação de estado, o sistema de equações diferenciais de equilíbrio de segunda ordem, com dimensão n_2 , é transformado num sistema de $n = 2 \cdot n_2$ equações diferenciais de primeira ordem. Para tal, define-se o vector de estado $x(t)$ com n linhas, que é constituído pelos deslocamentos $q(t)$ e velocidades $\dot{q}(t)$ dos n_2 graus de liberdade da estrutura, as matrizes P e Q , que são função das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da estrutura e a matriz B_2 de dimensão $n_2 \cdot m$, constituída por zeros e uns, que estabelece a correspondência entre os m graus de liberdade segundo os quais a estrutura é excitada e os n_2 graus de liberdade do modelo numérico (Juang 1994):

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, \quad p(t) = B_2 \cdot u(t) \quad (2.39)$$

e constitui-se um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, equivalente ao caracterizado pela expressão (2.8):

$$P \cdot \dot{x}(t) + Q \cdot x(t) = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(t) \quad (2.40)$$

Considerando para $q(t)$ a mesma solução genérica que foi adoptada na formulação modal clássica: $q(t) = \varphi_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t}$, encontra-se um problema de valores e vectores próprios caracterizado pela seguinte equação (Peeters 2000):

$$Q \cdot \Psi = -P \cdot \Psi \cdot \Lambda_C \quad (2.41)$$

As matrizes Λ_C e Ψ contêm os valores e vectores próprios. As equações seguintes estabelecem a correspondência entre os elementos destas matrizes e os modos de vibração (φ_k) e os λ_k , que caracterizam o comportamento dinâmico da estrutura:

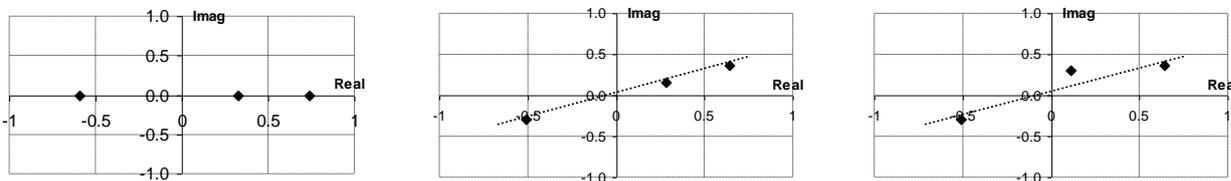
$$\Lambda_C = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \cdot \Lambda & \Theta^* \cdot \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \lambda_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Theta = [\dots \varphi_k \dots] \quad k = 1, \dots, n_2$$

Tal como no caso do amortecimento proporcional, os λ_k relacionam-se com as frequências naturais e com os amortecimentos modais através da expressão (2.20).

Os modos de vibração das estruturas com uma matriz de amortecimento viscoso não proporcional podem ser complexos (Mitchell 1990), isto é, ser caracterizados por vectores de números complexos. Num modo de vibração real, todos os pontos atingem o deslocamento máximo em simultâneo. Num modo complexo tal não acontece. A cada ordenada de um modo de vibração complexo, está associado um número complexo, que pode ser representado pela sua amplitude e fase. A amplitude indica o valor máximo de cada componente modal e a fase o momento em que este ocorre: se as componentes modais de dois graus de liberdade, associadas a um determinado modo, tiverem igual fase, ambos atingem o seu deslocamento máximo em simultâneo; se tiverem uma diferença de fase de 180°, quando um atinge o seu deslocamento máximo o outro atinge o seu deslocamento mínimo (estão em oposição de fase); se tiverem uma diferença de fases entre 0° e 180°, o modo é complexo e os seus

deslocamentos máximos ocorrem com um desfasamento temporal proporcional à diferença de fase. Na Figura 2.13 representam-se, no plano dos números complexos, as componentes relativas a três possíveis modos de vibração de um oscilador de três graus de liberdade.



a) Modo real com componentes reais b) Modo real com comp. complexas c) Modo complexo

Figura 2.13 – Representação de modo de vibração no plano dos números complexos.

O modo representado na figura a) é um modo que apenas apresenta componentes reais, como sucede na aplicação da formulação modal clássica. O modo representado em b), embora seja definido por componentes complexas, apresenta diferenças de fase nulas ou iguais a 180°, entre as diferentes componentes, sendo pois um modo real. Tal pode suceder, por exemplo, ao quantificar-se um modo de vibração de uma estrutura com amortecimento proporcional através de uma formulação de estado. O modo representado em c) apresenta componentes complexas que têm diferenças de fase diferentes de 0 e 180°, sendo portanto um modo complexo, resultando da existência de amortecimento não-proporcional.

A representação da deformada da estrutura associada a modos complexos não pode ser realizada com recurso a esquemas estáticos do tipo do da Figura 2.7. Estes têm que ser representados através de animações que apresentem os valores das amplitudes das várias componentes dos modos em diferentes instantes de tempo.

É de assinalar que num caso geral, a matriz Θ , que contém os modos de vibração, não diagonaliza as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Nesta formulação, as condições de ortogonalidade são as seguintes:

$$\Psi^T \cdot P \cdot \Psi = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & a_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix}, \quad \Psi^T \cdot Q \cdot \Psi = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

As matrizes que contêm os coeficientes a_k e b_k são designadas matrizes modais a e b . Se estas condições de ortogonalidade forem introduzidas na equação (2.41), conclui-se que:

$$\Lambda_C = - \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & 1/a_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Equação de Estado

A equação de estado é obtida a partir da equação (2.40), multiplicando ambos os termos pela matriz inversa de P :

$$\dot{x}(t) = A_C \cdot x(t) + B_C \cdot u(t) \quad (2.45)$$

Sendo A_C e B_C matrizes quadradas de dimensão n , definidas pelas seguintes equações (o sub-índice C significa que este modelo é contínuo no tempo):

$$A_C = -P^{-1} \cdot Q = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

$$B_C = P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot B_2 \end{bmatrix}$$

A matriz A_C pode ser relacionada com as matrizes de valores e vetores próprios Ψ e Λ_C :

$$A_C = -P^{-1} \cdot Q = -\Psi \cdot \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & 1/a_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \cdot \Psi^T \cdot \Psi^{-T} \cdot \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & b_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \cdot \Psi^{-1} \quad (2.47)$$

$$A_C = \Psi \cdot \Lambda_C \cdot \Psi^{-1} \Leftrightarrow A_C \cdot \Psi = \Psi \cdot \Lambda_C$$

Esta relação é importante, pois mostra que os valores e vetores próprios da matriz A_C coincidem com os valores e vetores próprios que resultam da equação (2.41), sendo portanto possível extrair desta matriz toda a informação modal do sistema dinâmico.

Equação de Observação

Numa experiência de análise dinâmica de uma estrutura, é impraticável realizar medições segundo todos os graus de liberdade considerados na modelação numérica (n_2), pelo que, nos desenvolvimentos seguidamente apresentados, se assumem l ($< n_2$) graus de liberdade instrumentados com sensores, que poderão medir deslocamentos, velocidades e acelerações.

A equação de observação é uma equação que permite obter o vector das respostas (valores medidos) do sistema, $y(t)$, considerando a contribuição dos diferentes tipos sensores (de deslocamentos - d , de velocidades - v ou de acelerações - a) instalados na estrutura:

$$y(t) = C_a \cdot \ddot{q}(t) + C_v \cdot \dot{q}(t) + C_d \cdot q(t) \quad (2.48)$$

As matrizes C são matrizes de dimensão $l \cdot n_2$, constituídas por zeros e uns, que seleccionam os graus de liberdade do modelo numérico que são medidos por cada tipo de transdutor.

Fazendo uso da equação (2.8) e utilizando a definição de vector de estado, a expressão anterior pode ser transformada na seguinte:

$$y(t) = C_C \cdot x(t) + D_C \cdot u(t) \quad (2.49)$$

A matriz que relaciona o vector de estado com as respostas do sistema (C_C) designa-se matriz de resposta. A matriz que relaciona as respostas com a excitação (D_C) designa-se matriz de transmissibilidade directa. Estas matrizes são calculadas em função das matrizes de rigidez, massa e amortecimento do sistema através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} C_C &= [C_d - C_a \cdot M^{-1} \cdot K \quad C_v - C_a \cdot M^{-1} \cdot C] \\ D_C &= [C_a \cdot M^{-1} \cdot B_2] \end{aligned} \quad (2.50)$$

Modelo de Estado

O modelo de estado (“state-space model”) resulta da combinação da equação de estado com a equação de observação:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_C \cdot x(t) + B_C \cdot u(t) \\ y(t) &= C_C \cdot x(t) + D_C \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Este modelo matemático permite relacionar as respostas medidas do sistema $y(t)$, com as excitações $u(t)$, a que este está submetido. Das matrizes que o constituem, a matriz A_C é aquela que contém a informação relevante relativa às propriedades fundamentais da estrutura, sendo possível extrair todos os parâmetros modais, a partir dela. A ordem do modelo é definida pela dimensão do vector de estado, $x(t)$, que contém as velocidades e os deslocamentos do sistema, sendo, portanto, igual ao dobro do número de graus de liberdade da estrutura.

A relação entre a excitação e as respostas medidas da estrutura, considerada pelo modelo matemático anterior, pode ser estabelecida por intermédio de outro vector de estado. Assim, se for definido um novo vector de estado $z(t)$, respeitando a relação:

$$x(t) = T \cdot z(t) \quad (2.52)$$

onde T é uma matriz quadrada complexa não singular, que introduz uma transformação de coordenadas, as equações do modelo de estado, expressas em função de $z(t)$, surgem sob a forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= T^{-1} \cdot A_C \cdot T \cdot z(t) + T^{-1} \cdot B_C \cdot u(t) \\ y(t) &= C_C \cdot T \cdot z(t) + D_C \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Neste novo modelo de estado, caracterizado pelas matrizes $T^{-1} \cdot A_C \cdot T$, $T^{-1} \cdot B_C$, $C_C \cdot T$ e D_C , as componentes do vector de estado, que no modelo anterior eram deslocamentos e velocidades, não têm qualquer significado físico. No entanto, o comportamento dinâmico da estrutura é simulado de forma equivalente.

2.3.1.1 Modelo de estado modal

O modelo de estado modal obtém-se substituindo o vector de estado, $x(t)$, pelo vector que resulta da seguinte transformação de coordenadas:

$$x_m(t) = \Psi^{-1} \cdot x(t) \quad , \quad \Psi = \begin{bmatrix} \Theta & \Theta^* \\ \Theta \cdot \Lambda & \Theta^* \cdot \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Da expressão (2.53), da consideração da decomposição em valores e vectores próprios da matriz A_C (equação (2.47)) e das seguintes definições:

$$\begin{aligned} L_C^T &= \Psi^{-1} \cdot B_C \\ V_C &= C_C \cdot \Psi \end{aligned} \quad (2.55)$$

resultam as seguintes equações para o modelo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \Lambda_C \cdot x_m(t) + L_C^T \cdot u(t) \\ y(t) &= V_C \cdot x_m(t) + D_C \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.56)$$

A matriz V_C tem um significado físico interessante, ela contém nas suas colunas as componentes dos modos de vibração que são observáveis com a instrumentação instalada na estrutura.

A grande vantagem deste modelo é que, pelo facto da matriz Λ_c ser diagonal, permite separar a contribuição dos diferentes modos de vibração e construir modelos reduzidos, isto é, modelos em que apenas é considerada a contribuição dos primeiros modos de vibração.

Para estruturas com amortecimento proporcional, pode ser obtido um modelo semelhante ao anterior, mas em que o cálculo das matrizes do modelo se baseia apenas em parâmetros modais. Este modelo apresenta a vantagem de poder ser obtido com um menor esforço de cálculo, pelo que será particularmente útil para criar modelos de simulação de dados experimentais, tal como será apresentado no ponto 2.3.2.1. Para a sua obtenção, é introduzida a seguinte transformação de coordenadas do vector de estado:

$$x_p(t) = T_p^{-1} \cdot x(t) \quad , \quad T_p = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

As submatrizes Φ contêm nas suas colunas as componentes dos modos de vibração, que neste caso são todas reais.

O novo modelo de estado fica caracterizado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p \cdot x_p(t) + B_p \cdot u(t) \\ y(t) &= C_p \cdot x_p(t) + D_p \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde cada uma das matrizes pode ser obtida, a partir dos parâmetros modais, através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} A_p &= T_p^{-1} \cdot A_C \cdot T_p = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -\Gamma \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & \omega_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & 2 \cdot \xi_k \cdot \omega_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \\ B_p &= T_p^{-1} \cdot B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ M_m^{-1} \cdot \Phi^T \cdot B_2 \end{bmatrix}, M_m = \begin{bmatrix} \backslash & & \\ & m_k & \\ & & \backslash \end{bmatrix} \\ C_p &= C_C \cdot T_p = \begin{bmatrix} C_d \cdot \Phi - C_a \cdot \Phi \cdot \Omega^2 & C_v \cdot \Phi - C_a \cdot \Phi \cdot \Gamma \end{bmatrix} \\ D_p &= D_C = C_a \cdot \Phi \cdot M_m^{-1} \cdot \Phi^T \cdot B_2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

Exemplo

Para o pórtico plano em análise, foi calculada a matriz A_C através da expressão (2.46):

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8297.2 & 4148.6 & 0.0 & -2.578 & 1.285 & 0.002298 \\ 4148.6 & -8297.2 & 4148.6 & 1.285 & -2.576 & 1.287 \\ 0.0 & 4148.6 & -4148.6 & 0.002298 & 1.287 & -1.291 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Usando a função *eig* do MATLAB (MatLab 2000a), calcularam-se os seus valores e vectores próprios.

Os seus valores próprios são os seguintes:

$$diagonal\ de\ \Lambda_C = \begin{bmatrix} -2.089+116.04 \cdot i \\ -2.089-116.04 \cdot i \\ -1.004+80.311 \cdot i \\ -1.004-80.311 \cdot i \\ -0.1290+28.665 \cdot i \\ -0.1290-28.665 \cdot i \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Verifica-se que os valores próprios se agrupam em pares complexo-conjugados, a partir dos quais é possível calcular as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento da estrutura, recorrendo à expressão (2.20). Constata-se que estes são iguais aos obtidos através da formulação clássica (Quadro 2.2):

$$\xi = \begin{bmatrix} 0.018 \\ 0.0125 \\ 0.0045 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 116.06 \\ 80.32 \\ 28.66 \end{bmatrix} (rad) \Rightarrow f = \begin{bmatrix} 18.47 \\ 12.78 \\ 4.56 \end{bmatrix} (Hz) \quad (2.63)$$

As frequências ficam ordenadas de forma decrescente, pois o algoritmo de cálculo de valores e vectores próprios usado ordena os valores próprios por ordem crescente da parte real, que é o simétrico da frequência multiplicada pelo amortecimento modal respectivo.

Os vectores próprios da matriz A_C são os seguintes:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0.000092 + 0.0051i & 0.000092 - 0.0051i & 0.00011 + 0.0092i & 0.00011 - 0.0092i & -0.000051 - 0.011i & -0.000051 + 0.011i \\ -0.00011 - 0.0063i & -0.00011 + 0.0063i & 0.000051 + 0.0041i & 0.000051 - 0.0041i & -0.000093 - 0.021i & -0.000093 + 0.021i \\ 0.000051 + 0.0028i & 0.000051 - 0.0028i & -0.000092 - 0.0074i & -0.000092 + 0.0074i & -0.00012 - 0.026i & -0.00012 + 0.026i \\ -0.591 & -0.591 & -0.737 & -0.737 & 0.328 & 0.328 \\ 0.737 & 0.737 & -0.328 & -0.328 & 0.591 & 0.591 \\ -0.328 & -0.328 & 0.591 & 0.591 & 0.737 & 0.737 \end{bmatrix}$$

(2.64)

Nas últimas três linhas da matriz anterior identificam-se os modos de vibração já determinados através da formulação clássica. Estes encontram-se em duplicado pois, como é mostrado na equação (2.42), a matriz Ψ contém os modos da estrutura original e os seus complexo-conjugados, que neste caso são iguais aos próprios modos, pois estes são reais, dado que o amortecimento é proporcional.

Multiplicando a matriz Ψ por C_C (equação (2.55)), obtêm-se as componentes modais observáveis. Neste caso, como foram instrumentados todos os graus de liberdade, obtêm-se uma matriz com as mesmas componentes modais que estão presentes nas últimas três linhas da matriz Ψ , embora apareçam escaladas de forma diferente.

2.3.2 Modelos discretos

Os modelos até aqui descritos são todos contínuos no tempo. No entanto, os dados obtidos pela via experimental são discretos, pelo que, no contexto da identificação experimental de sistemas dinâmicos, é mais adequado utilizar um modelo numérico discreto. Estes modelos são também bastante úteis para a realização de simulações numéricas, tendo em vista a obtenção de dados semelhantes aos que poderiam ser obtidos experimentalmente.

Para a construção destes modelos tem que ser assumido um período de amostragem (Δt) e uma lei de variação de cada função discretizada entre instantes consecutivos. Nos modelos mais simples e mais correntemente utilizados, é admitido que a função amostrada tem um valor constante entre esse dois pontos. As variáveis do modelo de estado (x , u e y) deixam de ser funções contínuas e passam a ser séries de valores, que correspondem à avaliação das funções contínuas nos instantes $k \cdot \Delta t$, sendo k um número inteiro. Na referência (Juang 1994) é demonstrado que o modelo de estado discreto, considerando uma variação linear entre amostras, é definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A \cdot x_k + B \cdot u_k \\ y_k &= C \cdot x_k + D \cdot u_k \end{aligned} \tag{2.65}$$

Os vectores de estado x_k contêm os deslocamentos e as velocidades amostrados no instante de tempo $k \cdot \Delta t$, y_k e u_k são as respostas e as excitações amostradas nesses instantes de tempo e as matrizes A , B , C e D estão relacionadas com as correspondentes matrizes da formulação em tempo contínuo através das seguintes equações:

$$A = e^{A_C \cdot \Delta t} \quad , \quad B = \int_0^{\Delta t} e^{A_C \cdot \tau} \cdot d\tau \cdot B_C = (A - I) \cdot A_C^{-1} \cdot B_C \quad (2.66)$$

$$C = C_C \quad , \quad D = D_C$$

A matriz A pode ser avaliada a partir do seguinte desenvolvimento em série:

$$A = e^{A_C \cdot \Delta t} = I + A_C \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot (A_C \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (A_C \cdot \Delta t)^3 + \dots \quad (2.67)$$

A segunda igualdade para o cálculo da matriz B só é válida se a matriz A_C for invertível.

Se na equação que relaciona a matriz A com a sua equivalente contínua A_C , a última for substituída pela sua decomposição em valores e vectores próprios, pode realizar-se a dedução apresentada em (2.68). Nesta é estabelecida a relação entre os valores e vectores próprios de A e de A_C .

$$A = e^{A_C \cdot \Delta t} = e^{\Psi \cdot \Lambda_C \cdot \Psi^{-1} \cdot \Delta t} = \Psi \cdot e^{\Lambda_C \cdot \Delta t} \cdot \Psi^{-1} = \Psi \cdot \Lambda_D \cdot \Psi^{-1} \quad (2.68)$$

A terceira igualdade desta expressão, que pode facilmente ser demonstrada através da expansão em série da exponencial (2.67), mostra que os vectores próprios da matriz A são iguais aos vectores próprios da matriz A_C . Na última igualdade, é definida a matriz diagonal Λ_D , que contém os valores próprios de A . Estes serão representados por μ_k e relacionam-se com os λ_k através da seguinte expressão:

$$\mu_k = e^{\lambda_k \cdot \Delta t} \Leftrightarrow \lambda_k = \frac{\ln(\mu_k)}{\Delta t} \quad (2.69)$$

Fica assim demonstrado que, a partir da matriz A , também é possível extrair os parâmetros modais da estrutura. Para tal, basta determinar os seus valores e vectores próprios, relacioná-los com os valores e vectores próprios do modelo contínuo e, a partir destes, obter os modos de vibração, as frequências naturais e coeficientes de amortecimento modais através das expressões desenvolvidas na sua apresentação.

Exemplo

Para o pórtico plano em análise, foram calculadas as matrizes A e B a partir das matrizes A_C e B_C , usando a função *c2d* (“continue to discrete”), incluída na “control system toolbox” (MatLab 2000b) do MATLAB, e considerando um $\Delta t = 0.02$ s. Obteve-se a seguinte matriz A :

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -0.146 & 0.437 & 0.089 & 0.011 & 0.004 & 0.000 \\ \hline 0.437 & -0.057 & 0.525 & 0.004 & 0.011 & 0.004 \\ \hline 0.089 & 0.525 & 0.380 & 0.000 & 0.004 & 0.015 \\ \hline -72.852 & 13.454 & 14.731 & -0.168 & 0.441 & 0.093 \\ \hline 13.454 & -58.121 & 28.185 & 0.441 & -0.075 & 0.534 \\ \hline 14.731 & 28.185 & -44.667 & 0.093 & 0.534 & 0.366 \\ \hline \end{array} \quad (2.70)$$

Para esta matriz, calcularam-se os valores e vectores próprios, tendo-se verificado que os vectores próprios são iguais aos da matriz A_C e que os valores próprios, apresentados na equação (2.71), se relacionam com os do modelo contínuo através da expressão (2.69).

$$\text{diagonal de } \Lambda_D = \begin{bmatrix} -0.6538 + 0.7017 \cdot i \\ -0.6538 + 0.7017 \cdot i \\ -0.03472 + 0.9751 \cdot i \\ -0.03472 + 0.9751 \cdot i \\ 0.83795 + 54101 \cdot i \\ 0.83795 + 54101 \cdot i \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

2.3.2.1 Simulação de dados experimentais

A simulação de dados experimentais possibilita, de forma rápida e fácil, a geração de dados semelhantes aos que se obtêm num ensaio dinâmico. Os dados artificialmente criados são particularmente úteis para estudar o desempenho dos algoritmos de identificação de sistemas, pois permitem comparar o resultado com a solução exacta. Este procedimento é correntemente usado para efectuar uma caracterização estatística da precisão proporcionada pelos diferentes métodos, pois é fácil gerar um elevado número de respostas artificiais, bem como para verificar a capacidade dos métodos para lidar com situações críticas, como por exemplo a existência de um elevado nível de ruído ou a identificação de modos de vibração com frequências naturais próximas. É claro que as simulações numéricas não substituem a prova final, correspondente à aplicação dos algoritmos de identificação a dados experimentais reais, pois estes apresentam sempre incertezas que não são passíveis de serem simuladas.

Os modelos contínuos podem ser usados para simular dados experimentais, bastando para tal avaliar a resposta contínua em instantes afastados de um determinado intervalo de tempo (período de amostragem). No entanto, a sua aplicação exige que a resposta da estrutura à excitação considerada, seja obtida analiticamente, o que na generalidade dos casos não é possível, sendo portanto necessário recorrer à sua avaliação numérica por intermédio dos modelos discretos.

Neste ponto é apresentado um procedimento para simular dados experimentais, baseado em funções do MATLAB. Com base neste procedimento, foi criado um programa que será usado no capítulo 3 para simular os dados utilizados para exemplificar a aplicação de diferentes métodos de identificação.

O primeiro passo do procedimento consiste na obtenção das matrizes do modelo de estado contínuo. Estas podem ser sempre calculadas a partir das matrizes de rigidez, massa e amortecimento da estrutura, obtidas, por exemplo, a partir de um programa de elementos finitos. No caso particular de estruturas com amortecimento proporcional, as mesmas matrizes podem ser obtidas a partir das suas propriedades modais. As expressões que permitem o cálculo das matrizes do modelo de estado contínuo já foram apresentadas em pontos anteriores. No entanto, no Quadro 2.4 apresenta-se um resumo de tais expressões, para o caso mais corrente de serem apenas medidas acelerações.

Quadro 2.4 – Cálculo das matrizes do modelo de estado contínuo

Matriz	Formulação geral	Amortecimento Proporcional
A	$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -\Gamma \end{bmatrix}$
B	$\begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot B_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ M_m^{-1} \cdot \Phi^T \cdot B_2 \end{bmatrix}$
C	$\begin{bmatrix} -C_a \cdot M^{-1} \cdot K & -C_a \cdot M^{-1} \cdot C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -C_a \cdot \Phi \cdot \Omega^2 & -C_a \cdot \Phi \cdot \Gamma \end{bmatrix}$
D	$\begin{bmatrix} C_a \cdot M^{-1} \cdot B_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} C_a \cdot \Phi \cdot M_m^{-1} \cdot \Phi^T \cdot B_2 \end{bmatrix}$

De seguida, é realizada a transformação das matrizes no domínio de tempo contínuo para o domínio de tempo discreto, através das expressões apresentadas na equação (2.66). No MATLAB, esta operação é realizada pela função *c2d* (“continuous to discrete”) (MatLab 2000b).

Finalmente, a partir das séries temporais da excitação artificialmente geradas, é obtida a resposta da estrutura, através das equações do modelo de estado discreto. Esta tarefa é realizada pela função *dlsim* (MatLab 2000b) do MATLAB. Os argumentos desta função são as matrizes do modelo e uma matriz contendo, nas suas colunas, as séries temporais da excitação; as suas saídas são o vector de estado e uma matriz contendo, nas suas colunas, as séries temporais da resposta.

O ruído introduzido pela cadeia de medição pode ser simulado adicionando ao vector das respostas da estrutura uma série temporal de valores aleatórios, com uma distribuição normal de média nula e variância proporcional à intensidade do ruído. Na simulação de uma experiência realizada com bom equipamento, devem ser consideradas relações entre ruído e sinal da ordem de 0,1 (Juang 1994).

Exemplo

Utilizando o procedimento descrito anteriormente, foram criadas artificialmente as séries temporais das acelerações horizontais dos três pisos do pórtico em análise, quando sujeito a uma excitação de carácter aleatório no piso superior.

Para representar a excitação foi criada uma série temporal, com uma duração de 2 minutos e uma frequência de amostragem de 50 Hz, constituída por números aleatórios com uma função de distribuição normal de média nula e variância unitária.

As matrizes do modelo de estado foram obtidas a partir das matrizes de rigidez, massa e amortecimento, definidas na equação (2.11).

Nas figuras seguintes, apresenta-se a série temporal da excitação e das três respostas, bem como, a sua representação no domínio da frequência.

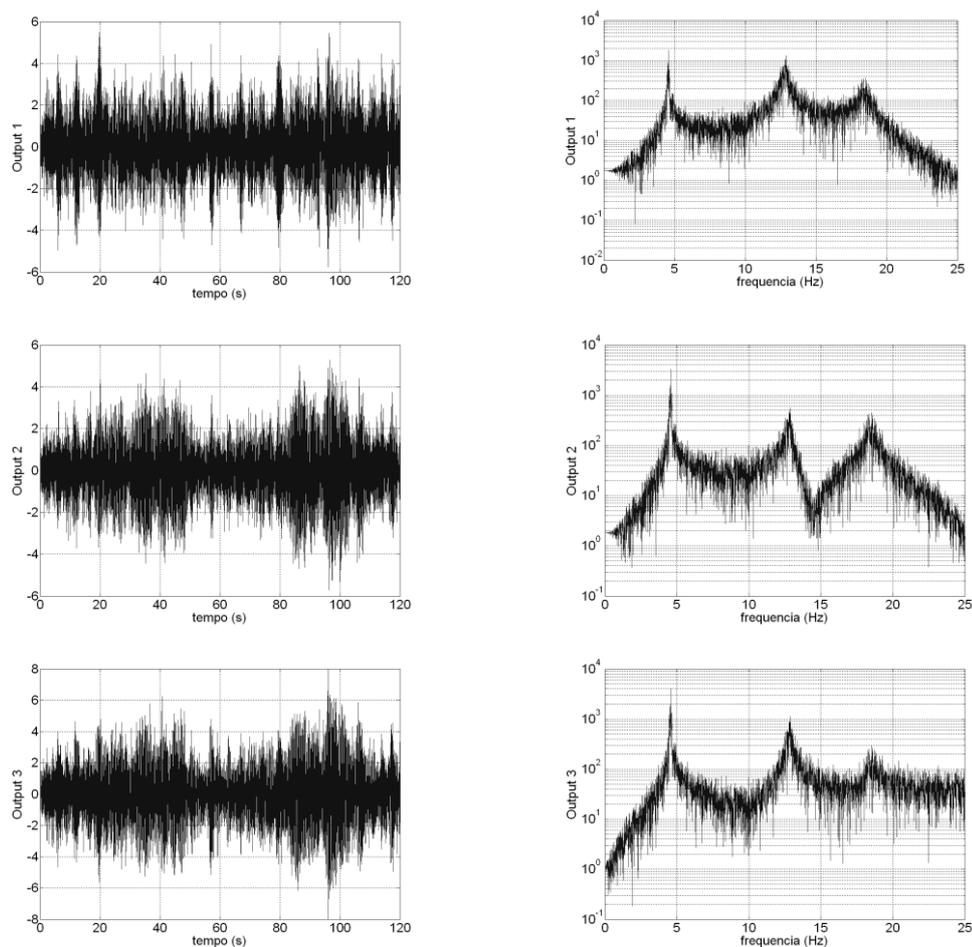


Figura 2.14 – Caracterização da resposta no domínio do tempo e da frequência

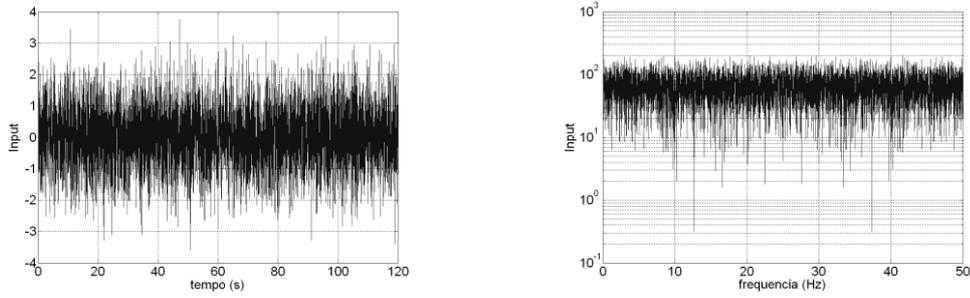


Figura 2.15 – Caracterização da excitação no domínio do tempo e da frequência

Observando as representações no domínio da frequência, verifica-se que a acção apresenta o seu conteúdo espectral distribuído de forma uniforme pela gama de frequências em análise, enquanto que as respostas apresentam máximos em correspondência com as frequências naturais da estrutura, tal como era expectável.

2.3.3 Modelos estocásticos

Os dados recolhidos experimentalmente incluem ruído, que não é mensurável, mas que deve ser considerado nos modelos. Para tal, podem adicionar-se componentes estocásticas ao modelo discreto apresentado na subsecção anterior, obtendo-se assim um modelo de estado discreto e estocástico:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A \cdot x_k + B \cdot u_k + w_k \\ y_k &= C \cdot x_k + D \cdot u_k + v_k \end{aligned} \quad (2.72)$$

onde os vectores w_k e v_k , de dimensão n , representam processos estocásticos, que modelam o ruído devido a aproximações realizadas na modelação e o ruído introduzido pela cadeia de medição, respectivamente. Assume-se que ambos os processos estocásticos são ruídos brancos de média nula com as seguintes matrizes de correlação:

$$E \left(\begin{bmatrix} w_p \\ v_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_q^T & v_q^T \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \cdot \delta_{pq} \quad (2.73)$$

Os índices p e q representam instantes temporais genéricos e δ_{pq} o delta de Kronecker, que assume o valor unitário quando $p = q$ e valor nulo quando $p \neq q$.

A igualdade (2.73) contém, de forma condensada, várias informações: os elementos da diagonal principal da matriz Q representam o valor das funções de auto-correlação do processo estocástico w_p para $\tau = p - q = 0$, que, como já foi referido, corresponde à variância do processo; os elementos fora da diagonal principal da matriz Q representam os valores para $\tau = 0$ das funções de correlação-cruzada entre as componentes do processo estocástico w_p , associadas a diferentes graus de liberdade; os elementos da matriz R têm significado idêntico aos elementos da matriz Q , mas referidos ao processo estocástico v ; a matriz S contém os valores das funções de correlação cruzada entre os processos estocásticos v e w , também para $\tau = 0$; a multiplicação pelo delta de Kronecker indica que todas as correlações apenas têm valor não nulo quando os instantes temporais p e q coincidem, ou seja, que os processos estocásticos são idealmente aleatórios.

No contexto dos ensaios de vibração ambiental, não é medida a excitação da estrutura, sendo portanto o vector u_k desconhecido e, de forma aproximada, assumido como um ruído branco. Assim, será adequado juntar em w e v todos os termos desconhecidos, ficando o modelo de estado discreto definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A \cdot x_k + w_k \\ y_k &= C \cdot x_k + v_k \end{aligned} \tag{2.74}$$

A aproximação correspondente a identificar a excitação da estrutura com um processo estocástico do tipo ruído branco é essencial para o desenvolvimento teórico dos métodos de identificação do tipo “output-only”, isto é, baseados apenas na resposta da estrutura. No entanto, pelo facto de não ser sempre realista, vai introduzir erros que terão que ser minimizados.

2.3.3.1 Propriedades do modelo estocástico

Neste ponto, descrevem-se algumas propriedades do modelo estocástico apresentado, que são essenciais para justificar os métodos de identificação de sistemas nele baseados. Estas propriedades encontram-se descritas na referência (Overschee e Moor 1996).

Os ruídos (w_k e v_k) já se encontram bem caracterizados pela equação (2.73). Em relação ao vector de estado, também este pode ser representado por um processo estocástico estacionário de média nula, em que a matriz de correlação para $\tau = 0$ é representada por Σ (matriz de dimensão n):

$$\Sigma = E[x_k \cdot x_k^T] \tag{2.75}$$

Pelo facto de se assumir que os processos que simulam o ruído são independentes do vector de estado têm-se que:

$$E[x_k \cdot w_k^T] = 0 \quad , \quad E[x_k \cdot v_k^T] = 0 \quad (2.76)$$

Usando as igualdades (2.74), (2.75) e (2.76), pode-se realizar a seguinte dedução:

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[x_{k+1} \cdot x_{k+1}^T] = E[(A \cdot x_k + w_k) \cdot (A \cdot x_k + w_k)^T] = \\ &= A \cdot E[x_k \cdot x_k^T] \cdot A^T + E[w_k \cdot w_k^T] \Leftrightarrow \\ \Sigma &= A \cdot \Sigma \cdot A^T + Q \end{aligned} \quad (2.77)$$

A matriz de correlação das respostas, para $\tau = i \cdot \Delta t$, é obtida através da seguinte expressão:

$$R_i = E[y_{k+i} \cdot y_k^T] \quad (2.78)$$

A matriz de correlação “estado seguinte – output”, representada por G , tem dimensão $n \cdot l$ e é definida pela seguinte expressão:

$$G = E[x_{k+1} \cdot y_k^T] \quad (2.79)$$

A partir das definições e igualdades apresentadas, é possível, através de manipulações matemáticas semelhantes às utilizadas na expressão (2.77), demonstrar as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} R_0 &= C \cdot \Sigma \cdot C^T + R \\ G &= A \cdot \Sigma \cdot C^T + S \end{aligned} \quad (2.80)$$

E ainda para $i = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} R_i &= C \cdot A^{i-1} \cdot G \\ R_{-i} &= G^T \cdot (A^{i-1})^T \cdot C^T = R_i^T \end{aligned} \quad (2.81)$$

Esta última propriedade, como será realçado no capítulo 3, é muito importante para justificar os métodos de identificação estocásticos baseados em modelos de estado. Ela relaciona a matriz das correlações da resposta da estrutura, que é determinável experimentalmente, com a matriz A , a partir da qual é possível identificar os parâmetros modais da estrutura.

2.4 Modelos vectoriais auto-regressivos com média móvel

O sistema de equações diferenciais de segunda ordem, que rege o comportamento dinâmico de osciladores de múltiplos graus de liberdade, também pode ser representado através de modelos numéricos designados modelos ARMAV (modelos vectoriais auto-regressivos com média móvel). Os modelos ARMAV são modelos matemáticos discretos no tempo, que podem ser utilizados para a análise de séries temporais e para a modelação de sistemas dinâmicos em diversos domínios científicos. Aqui será mostrada a sua aplicação na modelação do comportamento dinâmico de sistemas estruturais. Nesta secção será realizada, de forma muito resumida, a descrição destes modelos apenas para o caso em que a excitação pode ser identificada com um ruído branco. Uma descrição detalhada das diferentes variantes dos modelos ARMAV pode ser encontrada na referência (Andersen 1997).

Se a excitação de uma estrutura for descrita por um processo estocástico do tipo ruído branco, o seu modelo ARMAV é definido pela seguinte equação vectorial:

$$\begin{aligned}
 y_k + A_1 \cdot y_{k-1} + \dots + A_{nA} \cdot y_{k-nA} &= e_k + B_1 \cdot e_{k-1} + \dots + B_{nB} \cdot e_{k-nB} \Leftrightarrow \\
 y_k &= \underbrace{-A_1 \cdot y_{k-1} - \dots - A_{nA} \cdot y_{k-nA}}_{\text{parte auto-regressiva}} + \underbrace{e_k + B_1 \cdot e_{k-1} + \dots + B_{nB} \cdot e_{k-nB}}_{\text{parte média móvel}}
 \end{aligned}
 \tag{2.82}$$

Na equação anterior, y_k é um vector com l colunas (número de graus de liberdade instrumentados) que contém as respostas da estrutura no instante $t = k \cdot \Delta t$ (Δt é o período de amostragem); e_k é um vector com l colunas que representa um processo vectorial estocástico do tipo ruído branco; as matrizes A_i (com $i = 1, \dots, nA$) são matrizes quadradas de dimensão l , que contêm os parâmetros que caracterizam a parte auto-regressiva do modelo; as matrizes B_i (com $i = 1, \dots, nB$) são matrizes quadradas de dimensão l , que contêm os parâmetros que caracterizam a parte média móvel do modelo.

Na segunda igualdade da equação (2.82), fica claro que os modelos ARMAV procuram explicar a resposta da estrutura no instante k através das respostas da estrutura em instantes anteriores e através de um processo estocástico do tipo ruído branco.

Os modelos ARMAV constituem uma representação da estrutura, equivalente à que é realizada pelos modelos de estado estocásticos, descritos no ponto 2.3.3, sendo possível determinar as matrizes A_i e B_i a partir das matrizes que caracterizam os modelos estocásticos e realizar o processo inverso. As expressões para o fazer são deduzidas na referência (Peeters 2000).

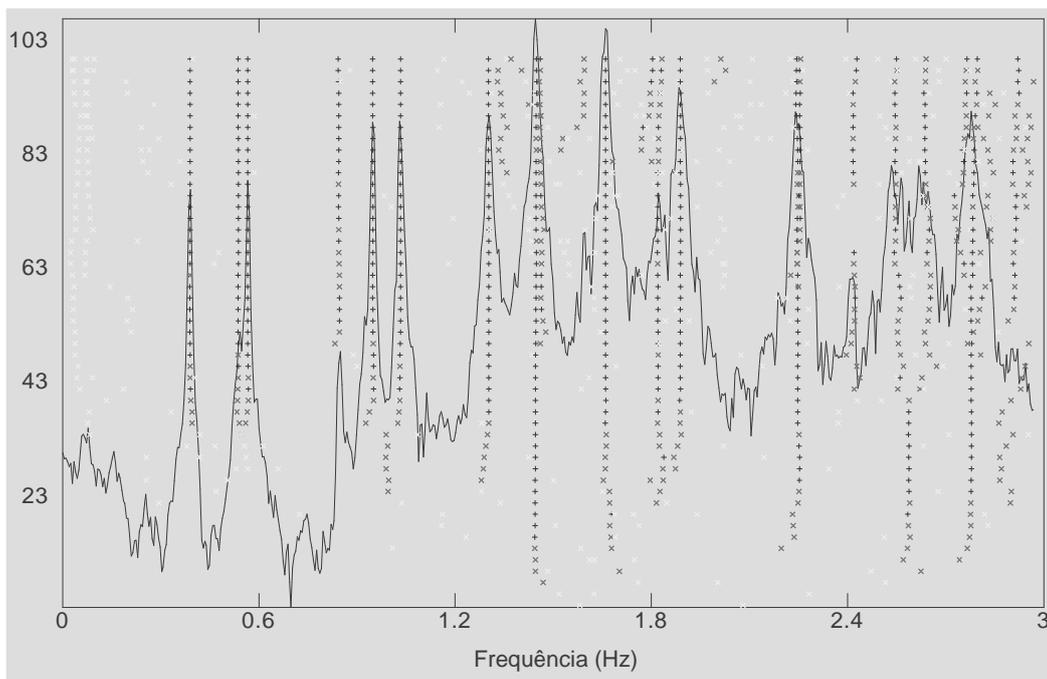
Para o estabelecimento das relações entre os dois modelos, é necessário que no modelo ARMAV o número de matrizes A seja igual ao número de matrizes B : $nA = nB = p$, sendo p a ordem do modelo ARMAV. A ordem do modelo de estado (n) equivalente a um modelo ARMAV de ordem p é igual a $p \cdot l$. Assim, conclui-se que um modelo ARMAV de ordem p tem a capacidade de simular o comportamento dinâmico de uma estrutura com $p \cdot l / 2$ modos de vibração.

A partir das relações entre os modelos de estado e os modelos ARMAV, é possível estabelecer procedimentos que permitem realizar a determinação dos parâmetros modais da estrutura (frequências naturais, amortecimentos modais e configurações modais) a partir das matrizes da parte auto-regressiva. As matrizes da parte média móvel não condicionam os parâmetros modais da estrutura, elas garantem que as funções de correlação discretas da estrutura também são bem representadas pelo modelo (Andersen et al. 1996).

Como, do ponto de vista de identificação de sistemas, o objectivo final é a determinação dos parâmetros modais, neste contexto podem ser utilizados modelos em que apenas é considerada a parte auto-regressiva. Na prática, o uso de tais modelos exige que sejam adoptadas ordens muito superiores à ordem calculada com base no número de modos fundamentais da estrutura ($p \gg n/l$), o que leva ao aparecimento de muitos modos numéricos, que são difíceis de distinguir dos modos de vibração da estrutura (Peeters 2000).

CAPÍTULO 3

MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL



3. MÉTODOS ESTOCÁSTICOS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL

3.1 Introdução

No capítulo anterior foram expostas várias formulações matemáticas para descrever o comportamento dinâmico das estruturas. Neste capítulo são descritos métodos que, baseados nas formulações apresentadas, procuram identificar o modelo que melhor se ajusta à informação experimental decorrente de medições efectuadas sobre a estrutura e, a partir deste, determinar os respectivos parâmetros modais.

A identificação das características dinâmicas das estruturas pode ser realizada por duas vias: relacionando a resposta medida da estrutura com a correspondente excitação artificial também medida ou analisando apenas a resposta da estrutura e estabelecendo certas hipóteses acerca da natureza da excitação natural ou ambiental. Para as estruturas de Engenharia Civil, que em geral são de grande porte, a segunda via é mais interessante, pois evita o uso de equipamento pesado, cujo transporte acarreta elevados custos económicos e cuja utilização obriga à interdição temporária da utilização da infra-estrutura.

Neste capítulo são apresentados vários métodos de identificação modal que seguem a segunda abordagem e que se designam de estocásticos. Os métodos são designados de estocásticos pelo facto da excitação desconhecida ser idealizada como uma realização de um processo estocástico. Como a excitação ambiental resulta da contribuição simultânea de várias fontes: vento, tráfego sobre a estrutura, funcionamento de máquinas instaladas na estrutura ou na sua vizinhança, é usual admitir-se que o processo estocástico que caracteriza a acção sobre a estrutura é um ruído branco. Tal é uma simplificação necessária ao desenvolvimento teórico dos métodos. Na realidade, o conteúdo energético da acção distribui-se por um larga banda de frequências, no entanto, esta distribuição não é perfeitamente uniforme. Estruturas sujeitas a excitações com frequências predominantes, como acontece por exemplo nas barragens devido ao funcionamento das turbinas, têm que ser analisadas com especial cuidado.

A generalidade dos métodos de identificação, que se baseiam apenas na resposta da estrutura, são adaptações de métodos de identificação tradicionais, isto é, de métodos que realizam a identificação dos parâmetros modais da estrutura através de relações entre a excitação e a resposta. Uma descrição detalhada dos diferentes métodos de identificação tradicionais pode ser encontrada no livro (Maia e Silva 1997). No artigo (Zhang 2004) é realizada uma síntese dos métodos tradicionais e dos métodos estocásticos e são explicadas as relações que existem entre ambos.

A classificação dos métodos de identificação pode fazer-se em função do tipo de dados utilizados como ponto de partida para a sua aplicação, podendo aqueles basearem-se em séries temporais, correlações ou estimativas espectrais das respostas da estrutura. Neste documento, a descrição dos métodos de identificação é efectuada considerando dois grandes grupos: os métodos que trabalham no domínio da frequência e que, portanto, se baseiam em estimativas espectrais das respostas da estrutura, e os métodos que trabalham no domínio do tempo, podendo usar como “input” as séries temporais da resposta da estrutura ou as suas correlações.

Apenas são descritos de forma detalhada os métodos que se têm mostrado mais promissores na identificação de estruturas de Engenharia Civil, sendo os restantes referidos de forma sucinta. A descrição dos primeiros é acompanhada de aplicações realizadas com recurso a programas desenvolvidos em MATLAB. Nas aplicações optou-se por usar nesta primeira fase respostas simuladas do pórtico plano apresentado no capítulo 2, para que os resultados fornecidos pelos métodos de identificação possam ser comparados com os respectivos valores teóricos. No capítulo 4 são realizadas aplicações com dados reais.

3.2 Métodos de identificação no domínio da frequência

Nesta secção são apresentados, com alguma profundidade, dois métodos de identificação: método da selecção de picos (PP – “Peack-Picking”) e método da decomposição no domínio da frequência (FDD – “Frequency Domain Decomposition”), e é feita uma breve referência a outras abordagens no domínio da frequência.

Os espectros das respostas da estrutura sujeita a acções ambientais são o ponto de partida deste grupo de métodos de identificação, pelo que, se começa por apresentar na subsecção seguinte o algoritmo para realizar a sua estimativa a partir das séries temporais.

3.2.1 Estimativa dos espectros

No capítulo 2, a função densidade espectral cruzada entre dois processos estocásticos (x_1 e x_2) foi definida pela seguinte expressão:

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n \frac{F_{T,r}[x_1(t)]^* \cdot F_{T,r}[x_2(t)]}{T} \quad (3.1)$$

No entanto, na prática, apenas se conhece uma realização do processo estocástico, as séries temporais não têm uma duração infinita e apenas se mede o seu valor em instantes temporais afastados de Δt , pois o sinal adquirido encontra-se discretizado. Assim, apenas é possível obter uma estimativa do espectro (\hat{S}) e a expressão (3.1) toma a seguinte forma:

$$\hat{S}_{x_1x_2}(\omega) = \frac{X_1(\omega)^* \cdot X_2(\omega)}{N \cdot \Delta t} \quad (3.2)$$

As transformadas de Fourier são substituídas por transformadas discretas de Fourier ($X(\omega)$), o somatório estendido a todas as realizações desaparece e o segmento temporal em análise passa a ter uma duração finita e igual a $N \cdot \Delta t$, sendo N o número total de pontos adquiridos.

À aplicação de transformadas de Fourier a sinais discretos de duração finita estão associados os erros de “leakage” e “aliasing”. O erro de “leakage” ou de escorregamento é devido ao carácter finito da série temporal e manifesta-se através da distribuição da energia associada a uma frequência específica pelas frequências na sua vizinhança. O erro de “aliasing” aparece pelo facto do sinal se encontrar discretizado e tem como consequência o aparecimento de energia associada a frequências superiores a

metade da frequência de amostragem (frequência de Nyquist) nas frequências inferiores à frequência de Nyquist. Na referência (Caetano 1992) estes erros são descritos em detalhe.

As transformadas discretas finitas de Fourier podem ser calculadas através de um algoritmo matemático bastante eficiente, designado FFT (“Fast Fourier Transform”) (Cooley e Tukey 1965). A sua aplicação apenas exige que a série temporal discretizada possua um número de pontos igual a uma qualquer potência de 2 ($N = 2^k$, sendo k um número inteiro).

Verifica-se que as estimativas simples que resultam da aplicação da expressão (3.2), pelo facto de se basearem apenas numa realização discretizada com duração finita, apresentam erros inaceitáveis, que têm que ser atenuados.

Parte do erro pode ser minimizada procedendo a uma divisão da série temporal disponível em segmentos mais curtos e realizando uma estimativa alisada da função densidade espectral (\tilde{S}), a partir da média das estimativas espectrais simples de cada um dos segmentos, calculadas através da expressão (3.2). Quanto maior o número de segmentos utilizados, menor será a variância da estimativa média, apresentando portanto esta uma configuração suavizada. No entanto, a adopção de muitos segmentos leva a que estes sejam mais curtos e, por consequência, a um agravamento do erro de “leakage” e a uma diminuição da resolução em frequência (aumento do espaçamento entre cada abcissa do espectro). Um aumento do comprimento de cada um dos segmentos pode ser conseguido através da adopção de alguma sobreposição entre eles. Esta sobreposição é designada de “overlapping” e nas aplicações a ensaios de vibração ambiental é usual utilizar valores próximos de metade do comprimento do segmento (“overlapping” de 50 %).

O erro de “leakage”, devido à duração limitada do tempo de observação, e associado também à existência de descontinuidades do sinal periodizado, pode ser minimizado através da aplicação de janelas temporais a cada um dos segmentos. Existem diferentes tipos de janelas (Maia e Silva 1997), susceptíveis de serem utilizadas nos sinais que resultam dos ensaios de vibração ambiental (sinais aleatórios), sendo uma das mais usadas a janela de Hanning (Equação (3.3) e Figura 3.1). Após a aplicação da janela temporal, para não ocorrer alteração do conteúdo energético do sinal, ou seja, da sua variância, as ordenadas do sinal devem ser divididas pela raiz quadrada do valor quadrático médio da janela (soma dos quadrados das ordenadas da janela a dividir pelo número de ordenadas).

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) \right] , \quad |t| \leq T/2 \\ w(t) &= 0 \quad , \quad |t| > T/2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

A aplicação de janelas de Hanning e o uso de um “overlapping” de 50% leva a que todos os elementos da série temporal tenham igual contributo, pois, como é mostrado na Figura 3.2, a soma de várias janelas de Hanning com um “overlapping” de 50% dá origem a uma recta nas zonas de sobreposição.

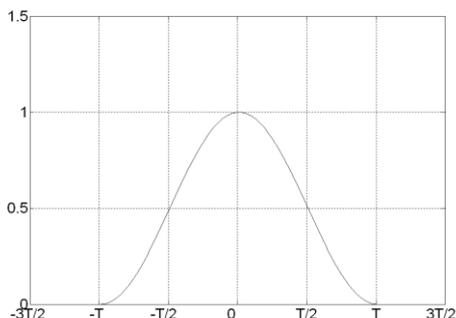


Figura 3.1 – Janela de Hanning

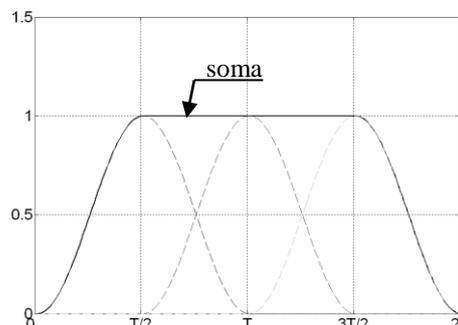


Figura 3.2 – Sobreposição de janelas de Hanning

O procedimento para estimativa dos espectros baseado na segmentação da série temporal, aplicação de uma janela a cada segmento, cálculo da FFT de cada segmento e posterior realização de médias é designado procedimento de Welch (Welch 1967). Nas referências (Bendat e Piersol 1980) e (Bendat e Piersol 1971) são apresentados este e outros métodos de estimativas de espectros e são discutidos os erros associados a cada procedimento. Na referência (Brandt et al. 2004) é realizada uma síntese dos mesmos aspectos.

No contexto de um ensaio de vibração ambiental, em que se procede à medição das respostas da estrutura em vários pontos, é usual organizar os auto-espectros e os espectros cruzados das respostas numa matriz. Nesta matriz, os elementos fora da diagonal principal, ij , são espectros cruzados relacionando a resposta medida no grau de liberdade i e a resposta medida no grau de liberdade j ; os elementos da diagonal, ii , são auto-espectros da resposta medida no grau de liberdade i . Se a medição da resposta de todos os pontos instrumentados da estrutura for realizada em simultâneo, a matriz é quadrada, com dimensão igual ao número de pontos instrumentados, e pode ser obtida de forma compacta a partir da expressão:

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{Y(\omega)^* \cdot Y(\omega)^T}{N \cdot \Delta t} \tag{3.4}$$

onde, $Y(\omega)$ representa um vector coluna com tantas linhas quantos os graus de liberdade instrumentados, que contém a FFT do vector das respostas ($y(t)$). Como é evidente, da multiplicação de um vector coluna por um vector linha (o transposto de um vector coluna) resulta uma matriz quadrada.

Na maioria das aplicações, o número de graus de liberdade da estrutura que é necessário instrumentar para caracterizar adequadamente o seu comportamento dinâmico é elevado, pelo que a sua medição em simultâneo exigiria a utilização de muitos sensores, tornando o ensaio muito dispendioso. Assim, na prática, são realizadas sequencialmente medições da resposta da estrutura com diferentes disposições de sensores, sendo cada disposição correntemente apelidada “setup”. Para garantir que todas as medições são relacionáveis, alguns graus de liberdade têm ser medidos em todos os “setups”, estes designam-se graus de liberdade de referência.

Procedendo desta forma, não é possível obter a matriz dos espectros quadrada e com dimensão igual ao número total de pontos instrumentados, é apenas possível estimar uma matriz rectangular com dimensão $l \cdot r$, onde l é o número total de graus de liberdade da estrutura onde é medida a resposta e r é número de graus de liberdade de referência. O cálculo desta matriz passa a ser representado pela seguinte equação:

$$\hat{S}_y^{ref}(\omega) = \frac{Y(\omega)^* \cdot Y^{ref}(\omega)^T}{N \cdot \Delta t} \quad (3.5)$$

sendo $Y^{ref}(\omega)$ um vector de dimensão r com as FFTs das respostas relativas aos graus de liberdade instrumentados em todos os “setups” (graus de liberdade de referência).

O cálculo de auto-espectros utilizando o procedimento de Welch é ilustrado no exemplo seguinte. Este foi realizado recorrendo a rotinas desenvolvidas em MATLAB.

Exemplo

Para o pórtico plano descrito no capítulo 2 foi utilizada a função desenvolvida no capítulo 2, que simula a resposta de estruturas sujeitas a excitações aleatórias, para criar as séries temporais das acelerações horizontais dos três pisos do pórtico, quando solicitado segundo todos os graus de liberdade por uma excitação do tipo ruído branco. Adoptou-se, para as séries temporais, uma duração de 10 minutos e uma frequência de amostragem de 50 Hz. As séries temporais das respostas do pórtico serão usadas ao longo deste capítulo para ilustrar a aplicação dos procedimentos de análise nele apresentados.

A partir das séries simuladas, foram realizadas estimativas da matriz dos espectros das respostas, utilizando diferentes divisões da série temporal de acelerações. Na Figura 3.3 e na Figura 3.4, as estimativas do elemento (3,3) da matriz são comparadas com o seu valor teórico, calculado com a expressão 2.37.

Estimativa 1

T (tempo total de cada segmento) = 81.92 s (4096 pontos)

Δf (resolução em frequência) = $1/81.92 = 0.0122$ Hz

“Overlapping” = 50%

Janela de Hanning

Estimativa 2

T (tempo total de cada segmento) = 20.48 s (1024 pontos)

Δf (resolução em frequência) = $1/20.48 = 0.0488$ Hz

“Overlapping” = 50%

Janela de Hanning

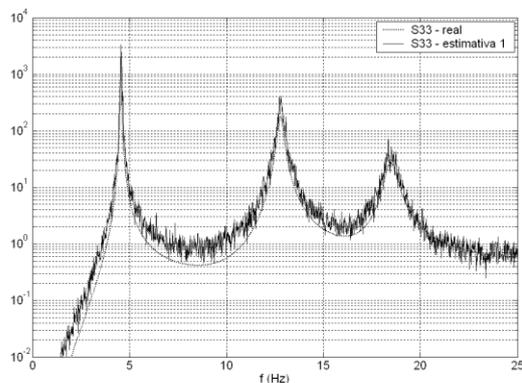


Figura 3.3 – Estimativa 1 / Espectro teórico

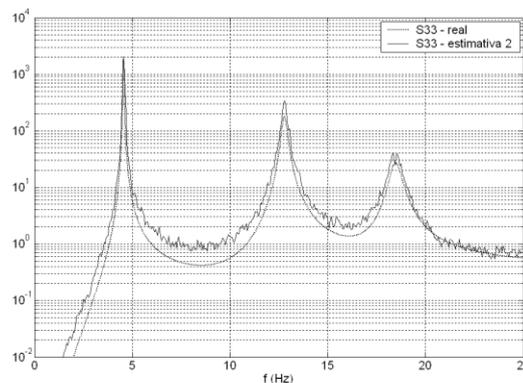


Figura 3.4 – Estimativa 2 / Espectro teórico

A estimativa 1 apresenta um aspecto mais irregular do que a estimativa 2, mas tem a vantagem de apresentar uma maior resolução em frequência, conduzindo, portanto, a uma estimativa mais rigorosa das frequências de ressonância, se estas forem estimadas pelos pontos de ordenada máxima dos picos do espectro.

Note-se que, na resposta simulada não foi incluído ruído, pelo que, a irregularidade do espectro de resposta só está relacionada com os erros de estimação. Em aplicações reais, a existência de ruído na cadeia de medição exige que o tempo de aquisição seja suficientemente elevado, para permitir a atenuação do seu efeito, sobre as estimativas espectrais alisadas, através da realização de um número de médias considerável.

3.2.2 Método da selecção de picos

O método da selecção de picos, também designado método básico no domínio da frequência ou “Peak-Picking” (PP), foi o primeiro método a ser usado para a identificação dinâmica de estruturas, com base na medição da sua resposta a acções ambientais. Actualmente, pela sua relativamente fácil implementação e aplicação, por proporcionar uma interpretação física mais evidente e por garantir bons resultados, continua a ser muito utilizado em aplicações de Engenharia Civil.

Como aplicações pioneiras deste método a estruturas de Engenharia Civil, embora utilizando procedimentos mais rudimentares do que aqueles que são “standard” na actualidade, referem-se os seguintes trabalhos: (Crawford e Ward 1964), (MacLamore et al. 1971), (Trifunac 1972) e (Abdel-Ghaffar e Housner 1978).

Os fundamentos teóricos do formato actual do método foram desenvolvidos por Bendat e Piersol (Bendat e Piersol 1980), a sistematização de procedimentos e a sua transferência para “software” foi realizada por Felber (Felber 1993). O trabalho desenvolvido por Felber abriu caminho à realização de inúmeras aplicações, das quais se destacam os ensaios de vibração ambiental de sete pontes realizados pelo EMPA (Felber e Cantieni 1996). Deste então até ao presente, este método tem sido utilizado com bastante sucesso na identificação modal de inúmeras estruturas a nível internacional. Aqui faz-se apenas referência às aplicações realizadas pelo LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil) e pela FEUP (Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto) nas obras de arte portuguesas mais relevantes: Ponte 25 de Abril em Lisboa (Rodrigues e Costa 2002a); ampliação do Aeroporto da ilha da Madeira (Rodrigues e Costa 2002b); Ponte Salgueiro Maia em Santarém (Rodrigues 2002); Ponte Luíz I no Porto (Cunha e Calçada 1999), Ponte Internacional do Guadiana em Vila Real de Santo António (ensaio descrito no capítulo 4) e Ponte Vasco da Gama em Lisboa (Cunha et al. 2001).

O método da selecção de picos é um método de identificação de sistemas no domínio da frequência que se baseia na seguinte hipótese: para frequências próximas das frequências naturais da estrutura, a sua resposta dinâmica é essencialmente condicionada pela contribuição do modo ressonante. Esta hipótese caracteriza os métodos designados de um grau de liberdade, pois, assumindo a sua validade, na vizinhança das frequências de ressonância o funcionamento da estrutura pode ser simulado através de um oscilador de um grau de liberdade com a mesma frequência ω_k e o mesmo coeficiente de amortecimento ξ_k do modo ressonante.

A aproximação anterior só é válida quando as frequências associadas aos diferentes modos de vibração da estrutura se encontram bem afastadas, quando tal não acontece o método não é capaz de separar as contribuições dos modos com frequências próximas para a resposta medida da estrutura. Esta constitui

a limitação mais forte deste método. No entanto, nas aplicações apresentadas no capítulo 4 será mostrado que, na generalidade dos casos, ela pode ser ultrapassada através de pequenos truques.

De seguida descrevem-se e justificam-se os procedimentos principais do método. A acompanhar a apresentação é realizada a aplicação do método ao exemplo do pórtico plano, usando rotinas desenvolvidas em MATLAB.

Identificação das frequências

No ponto 2.2.2.2, onde foi abordada a análise, no domínio da frequência, de osciladores de múltiplos graus de liberdade sujeitos a excitações aleatórias, obteve-se a expressão (3.6), que permite, quando a excitação é considerada do tipo ruído branco (matriz dos espectros constante – R_u), obter a matriz dos espectros das respostas (S_y) a partir da matriz das funções de resposta em frequência.

$$S_y(\omega) = H(\omega) \cdot R_u \cdot H^H(\omega) \quad (3.6)$$

Como já foi referido, os elementos da matriz das funções de resposta em frequência apresentam máximos (“picos”) nas frequências $\sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k$ que, quando o coeficiente de amortecimento é pequeno, como habitualmente acontece nas estruturas de Engenharia Civil, são uma boa estimativa das frequências naturais. Da análise da equação (3.6), é evidente que os elementos da matriz dos espectros de resposta apresentam máximos para as mesmas frequências.

A análise de apenas um espectro de potência (um dos elementos da diagonal principal da matriz dos espectros) não é suficiente para identificar todas as frequências de ressonância da estrutura, pois o grau de liberdade a que se refere pode estar situado sobre um nodo de um ou mais modos de vibração e portanto, não possibilita a identificação das frequências desses modos. Um bom procedimento consiste em analisar os “picos” dos espectros de potência de todas as séries de acelerações registadas. Para evitar a análise de vários gráficos, um para cada grau de liberdade instrumentado, é usual calcular-se um espectro médio normalizado (*ANPSD*) (Felber 1993):

$$ANPSD(\omega) = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^l NPSD_i(\omega) \quad (3.7)$$

Na equação anterior, l é o número de graus de liberdade instrumentados e $NPSD_i$ são os espectros normalizados, que se obtêm, dividindo as estimativas dos auto-espectros (aqui designadas por PSD_i) pela soma das suas N ordenadas:

$$NPSD_i(\omega) = \frac{PSD_i(\omega)}{\sum_{k=1}^N PSD_i(\omega_k)} \quad (3.8)$$

A normalização dos espectros é importante quando o ensaio é realizado através de vários “setups”, pois, como as séries temporais associadas a cada grau de liberdade não são todas captadas em simultâneo, podem existir diferenças de intensidade da excitação ao longo do período de ensaio, que conduzem a espectros de resposta com diferentes conteúdos energéticos.

Procedendo desta forma, basta analisar os “picos” do espectro de potência médio normalizado para identificar todas as frequências naturais da estrutura. Tal será mostrado no exemplo que se segue.

Exemplo

Para o pórtico plano em análise, apresentam-se os espectros de potência normalizados (NPSD) dos 3 deslocamentos horizontais e o espectro de potência médio normalizado (ANPSD), calculados a partir das séries temporais das respostas simuladas, considerando uma excitação do tipo ruído branco. As séries temporais têm as características já definidas na aplicação anterior e os espectros foram estimados usando os parâmetros definidos para a estimativa 2, também descrita na aplicação anterior.

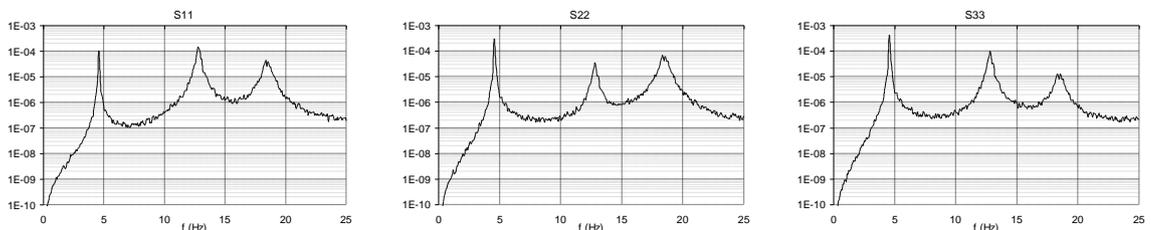


Figura 3.5 – Espectros de potência normalizados

Neste caso, nenhum dos pontos instrumentados se encontra sobre qualquer nodo dos modos de vibração, pelo que é possível identificar todas as frequências naturais da estrutura pela análise isolada de cada um deles.

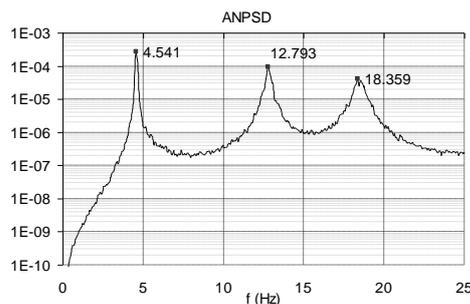


Figura 3.6 – Espectro de potência médio normalizado

A partir dos picos do ANPSD, são identificadas as frequências naturais da estrutura, que se comparam com as frequências teóricas no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Frequências naturais da estrutura teóricas / identificadas

Frequências teóricas	Frequências identificadas	Erro (%)
4.562 Hz	4.541 Hz	0.46
12.783 Hz	12.793 Hz	0.078
18.472 Hz	18.359 Hz	0.61

Identificação dos modos de vibração

No capítulo 2 apresentou-se a seguinte expressão para calcular a matriz das funções de resposta em frequência:

$$H(\omega) = \Phi \cdot H_m(\omega) \cdot \Phi^T \tag{3.9}$$

onde H_m é uma matriz diagonal, que é função dos parâmetros modais da estrutura:

$$H_m(\omega) = \begin{bmatrix} \diagdown & & \\ & \frac{1}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega \cdot \omega_k} & \\ & & \diagup \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Verifica-se que, se os amortecimentos modais apresentarem valores reduzidos e se as frequências naturais da estrutura estiverem bem espaçadas, na vizinhança de cada uma das frequências naturais, os elementos da diagonal principal da matriz H_m , em correspondência com essa frequência, apresentam valores muito superiores aos restantes. Neste contexto, os elementos da matriz H , avaliados numa

frequência coincidente com uma das frequências naturais da estrutura ω_k , podem ser obtidos considerando apenas a contribuição do elemento (k,k) da matriz H_m :

$$H(\omega_k) \approx \varphi_k \cdot \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_k^2 + 2 \cdot i \cdot \xi_k \cdot \omega_k \cdot \omega_k} \cdot \varphi_k^T = c_1 \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^T \quad (3.11)$$

onde c_1 é um escalar complexo que depende da frequência do modo k e do seu coeficiente de amortecimento e φ_k é um vector coluna com as componentes do modo de vibração k .

Introduzindo na expressão (3.6) a igualdade (3.11), obtém-se:

$$S_y(\omega_k) \approx c_1 \cdot c_1^* \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^T \cdot R_u \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^T = c_1 \cdot c_1^* \cdot \varphi_k \cdot c_2 \cdot \varphi_k^T \quad (3.12)$$

A constante escalar c_2 resulta do produto de um vector linha φ_k^T por um matriz quadrada R_u , seguido de um produto por um vector coluna φ_k . Se todas as constantes escalares forem aglutinadas numa só (c_3), obtém-se:

$$S_y(\omega_k) \approx c_3 \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^T \quad (3.13)$$

De seguida será mostrado que, a partir desta igualdade é possível, apenas com o conhecimento de uma coluna da matriz dos espectros da resposta, obter a configuração do modo de vibração associado à frequência ω_k . A coluna conhecida está associada a um grau de liberdade de referência, isto é, um grau de liberdade que é medido em todos os “setups”.

Assim, se associarmos à coluna conhecida o índice *ref*, o elemento da diagonal principal desta coluna pode ser calculado pela expressão:

$$S_y(\omega_k)_{(ref,ref)} \approx c_3 \cdot (\varphi_{ref})_k \cdot (\varphi_{ref})_k \quad (3.14)$$

Um elemento genérico da mesma coluna é obtido a partir da expressão:

$$S_y(\omega_k)_{(j,ref)} \approx c_3 \cdot (\varphi_j)_k \cdot (\varphi_{ref})_k \quad (3.15)$$

Se for realizado o quociente entre os dois, obtém-se uma relação entre a ordenada do modo de vibração no grau de liberdade de referência e a ordenada do mesmo modo num grau de liberdade genérico j :

$$\frac{S_y(\omega_k)_{(j,ref)}}{S_y(\omega_k)_{(ref,ref)}} \approx \frac{(\varphi_j)_k}{(\varphi_{ref})_k} \quad (3.16)$$

A expressão anterior permite obter, nos graus de liberdade instrumentados, as componentes dos modos de vibração, associados a cada uma das frequências de ressonância ω_k , a menos de um factor de escala.

Destas considerações conclui-se que todos os parâmetros modais da estrutura podem ser identificados considerando no seu ensaio apenas um grau de liberdade de referência, ou seja, é possível caracterizar completamente o comportamento dinâmico de uma estrutura recorrendo apenas a dois sensores. Note-se no entanto, que tal só é possível se a componente do modo de vibração no ponto de referência for diferente de zero, pelo que, este terá que ser seleccionado com algum cuidado ou, de forma prudente, deverá adoptar-se mais do que um ponto de referência.

É ainda importante referir que, pelo facto dos espectros cruzados serem complexos, o quociente anterior conduz a um número complexo, cuja amplitude relaciona a amplitude do modo de vibração nos dois graus de liberdade (j e ref) e cuja fase, se apenas forem expectáveis modos reais, deverá ser 0° ou 180° . O valor da fase indica se aos graus de liberdade j e ref correspondem deslocamentos no mesmo sentido (fase = 0°) ou em sentidos opostos (fase = 180°).

O quociente apresentado na expressão (3.16), generalizado para um valor qualquer de ω , representa uma função que se designa função de transferência entre o ponto j e o ponto ref :

$$T_{j,ref} = \frac{S_y(\omega)_{(j,ref)}}{S_y(\omega)_{(ref,ref)}} \quad (3.17)$$

Alguns autores também usam a designação de função de transferência no domínio da frequência para as funções de resposta em frequência. Neste trabalho tal não é realizado para evitar ambiguidades. A coincidência do nome justifica-se pelo facto de ambas as funções resultarem do quociente entre um espectro cruzado e um auto-espectro. No entanto, o seu significado físico é distinto: as funções de resposta em frequência relacionam, no domínio da frequência, a resposta segundo um determinado grau de liberdade da estrutura com a acção actuante noutra; as funções de transferência relacionam, no domínio da frequência, as respostas a uma excitação ambiental segundo dois graus de liberdade da estrutura.

Uma vez que as estimativas modais obtidas não resultam do ajuste de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico da estrutura, mas apenas da relação entre as respostas

observadas em diferentes graus de liberdade da estrutura, os modos alcançados devem ser designados modos de deformação operacionais. É de realçar que estes modos não coincidem exactamente com os modos de vibração teóricos, eles representam a configuração que a estrutura assume quando excitada por um harmónico puro. Em particular, se existirem modos de vibração com frequências naturais próximas, os modos de deformação operacionais, identificados na vizinhança dessas frequências, são uma combinação dos modos de vibração respectivos.

Exemplo

Para a identificação dos modos de vibração do pórtico, foi escolhido para grau de liberdade de referência o deslocamento horizontal do último piso (y_3).

Nas figuras seguintes, representa-se a coluna da matriz dos espectros correspondente ao grau de liberdade seleccionado para referência (terceira coluna) e as três funções de transferência calculadas através do quociente entre cada um dos elementos da coluna 3 e o elemento (3,3) da matriz. Os espectros cruzados e as funções de transferência, como são funções complexas, são representados através da sua amplitude e fase (em radianos).

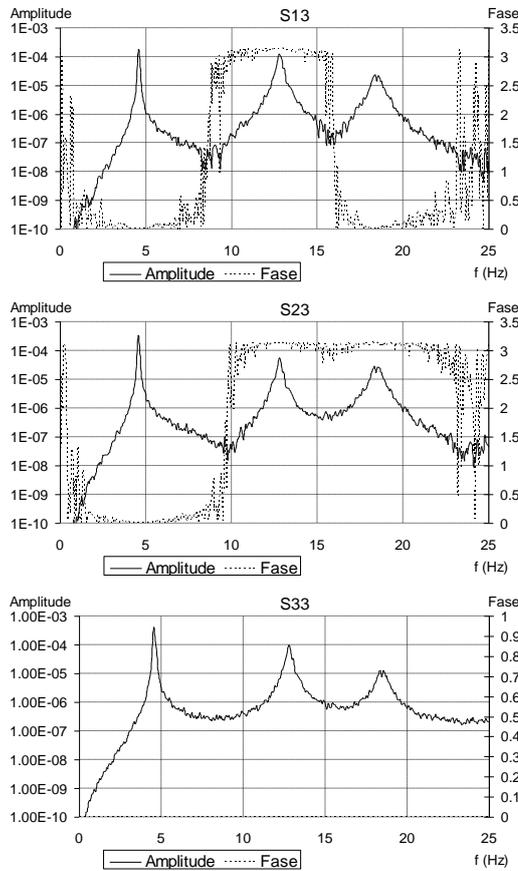


Figura 3.7 – Elementos da coluna 3 da matriz dos espectros

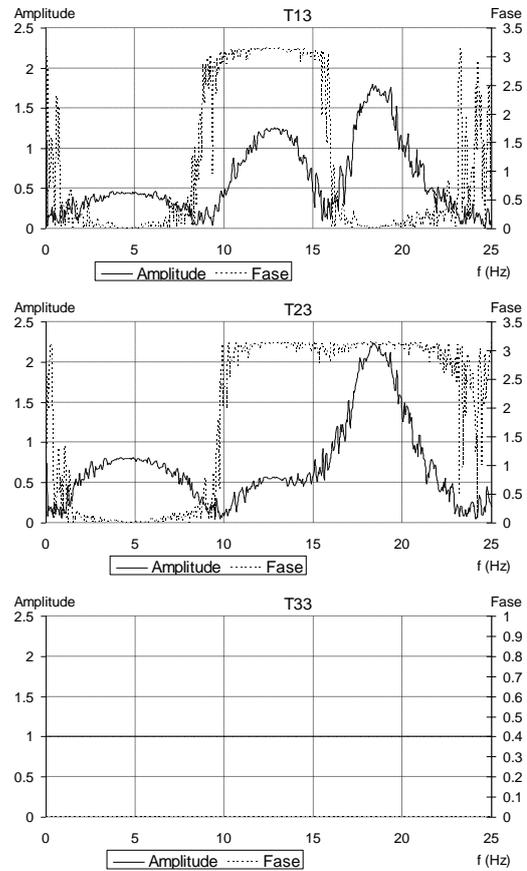


Figura 3.8 – Funções de transferência

De seguida, representa-se a variação, ao longo da altura do pórtico, da amplitude e da fase das funções de transferência avaliadas nas diferentes frequências de ressonância, assim como, as configurações modais que se obtêm a partir de ambas.

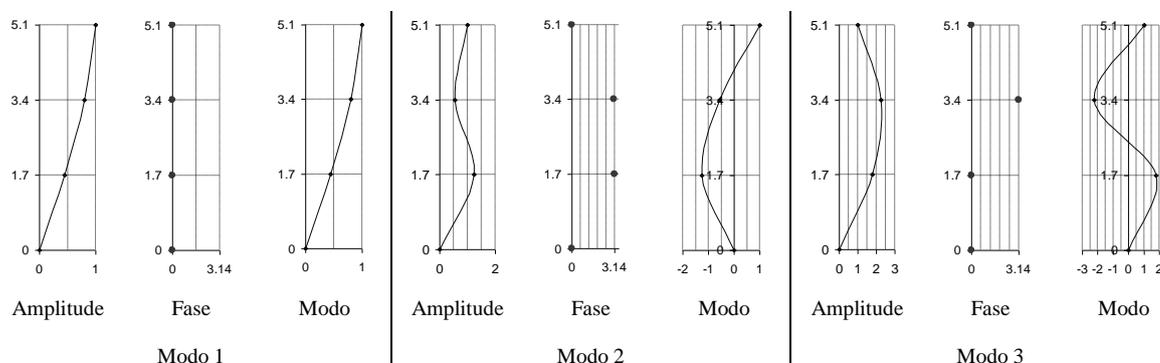


Figura 3.9 – Identificação dos modos de vibração

Identificação dos coeficientes de amortecimento modais

O coeficiente de amortecimento relativo a um oscilador de um grau de liberdade pode ser determinado pelo método da meia potência (Clough e Penzien 1993). Este método, aplicado ao espectro médio normalizado das respostas medidas da estrutura, estima o coeficiente de amortecimento ξ_k , associado ao modo de vibração k , através da seguinte expressão:

$$\xi_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \omega_k} \quad (3.18)$$

onde ω_1 e ω_2 são frequências na vizinhança da frequência de ressonância (ω_k), à sua esquerda e direita respectivamente, às quais está associada uma amplitude do espectro médio normalizado que é metade da amplitude associada à frequência de ressonância. O facto do espectro se encontrar definido de forma discretizada exige que as frequências sejam determinadas através de interpolações.

Verifica-se, no entanto, que o método da meia potência não fornece estimativas muito precisas. Em alternativa, podem ser ajustados espectros teóricos aos pontos dos espectros de potência experimentais, na vizinhança da frequência de ressonância, e a partir destes determinar o coeficiente de amortecimento (Brownjohn et al. 1989). Neste trabalho estes métodos não são desenvolvidos, pois será privilegiada a abordagem apresentada na secção 3.2.3.2 (método de decomposição no domínio da frequência melhorado).

Avaliação do nível de ruído

A função de coerência é uma medida da correlação entre dois sinais. Como tal, assumindo-se a natureza linear do sistema observado, pode ser usada para avaliar o nível de ruído dos dados recolhidos. A função de coerência entre dois sinais (medidos nos graus de liberdade i e j) é calculada pela seguinte expressão:

$$\gamma_{i,j}^2(\omega) = \frac{|S_y(\omega)_{(i,j)}|^2}{S_y(\omega)_{(i,i)} S_y(\omega)_{(j,j)}} \quad (3.19)$$

Valores próximos da unidade tendem a indicar que o nível de ruído é baixo e que o sistema tem comportamento linear, valores baixos denunciam níveis de ruído elevados. Para frequências próximas das frequências naturais, a amplitude da resposta é mais elevada, logo a relação entre o nível de sinal e o nível de ruído é superior, sendo portanto expectável que as ordenadas da função de coerência que lhes estão associadas assumam valores próximos da unidade. Esta propriedade pode ser usada, suplementarmente, na identificação das frequências naturais.

Exemplo

Na Figura 3.10 apresentam-se as coerências entre as séries temporais dos 3 pontos instrumentados e a série temporal da secção de referência, sendo possível confirmar a propriedade descrita no parágrafo anterior:

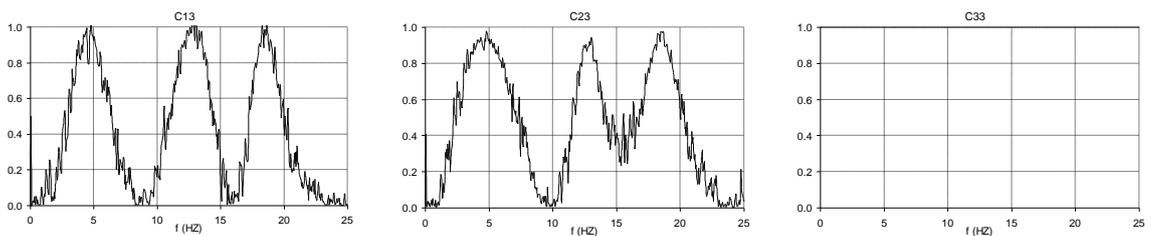


Figura 3.10 – Estimativa das funções de coerência

Claro que a função de coerência entre a série temporal da secção de referência e ela própria (C33) é constante e unitária.

3.2.3 Método de decomposição no domínio da frequência

O método de decomposição no domínio da frequência foi desenvolvido por Rune Brincker (Brincker et al. 2000b), no entanto, os seus princípios fundamentais já tinham sido utilizados por (Prevosto 1982) e por (Corrêa e Costa 1992). Na sua versão mais desenvolvida, este método resolve as duas principais limitações do método da selecção de picos anteriormente apresentado: possibilita a identificação de modos com frequências próximas e permite a obtenção de boas estimativas dos coeficientes de amortecimento modais.

A implementação do método no software ARTEMIS (SVS 1999-2004), que permite a sua aplicação de forma bastante automática, e o facto de este se basear em conceitos de dinâmica relativamente simples e em relação aos quais a comunidade de engenheiros civis que utiliza o método da selecção de picos já está familiarizada, podem tornar este método bastante popular.

As referências que a seguir se enumeram retratam a eficiência do método na identificação de estruturas de Engenharia Civil: (Brincker e Andersen 2000; Brincker et al. 2000a), (Cunha et al. 2004) e (Reynolds et al. 2004).

A ferramenta matemática principal deste método de identificação é a decomposição em valores singulares, razão pela qual, de seguida são resumidos os seus aspectos teóricos mais importantes. Esta ferramenta e algumas das suas aplicações são descritas num dos anexos do livro (Juang 1994), uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em (Klema e Laub 1980).

Decomposição em valores singulares

A decomposição em valores singulares (SVD – “Singular Value Decomposition”) é um algoritmo que decompõe uma matriz qualquer, A ($m.n$, sendo $m > n$), no produto de outras três:

$$A = U \cdot S \cdot V^T, \text{ com } S = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

A matriz S_1 é uma matriz quadrada diagonal, de dimensão n , que contém os valores singulares da matriz A por ordem decrescente; as matrizes unitárias¹ U e V , de dimensão $m.m$ e $n.n$, contêm os vectores singulares à esquerda e à direita, respectivamente. O número de valores singulares não nulos indica a ordem da matriz A , ou seja, o número de colunas, ou linhas, linearmente independentes.

¹ Uma matriz unitária ou ortonormal é uma matriz que satisfaz a seguinte propriedade: $A \cdot A^T = I$ (matriz identidade).

A SVD está relacionada com a determinação de valores e vectores próprios das matrizes $A^T A$ e AA^T . Os valores singulares de A são iguais às raízes quadradas positivas dos valores próprios de $A^T A$ e AA^T . As colunas de U contêm os vectores próprios de AA^T e as colunas de V contêm os vectores próprios de $A^T A$. Se a matriz em análise for complexa, as igualdades mantêm-se válidas se a operação de transposição (\bullet^T) for substituída pela operação de transposição seguida de conjugação complexa (\bullet^H). Quando a matriz A é real e simétrica ou complexa e hermitiana², os valores singulares coincidem com os valores próprios e as matrizes U e V , que passam a ser coincidentes, contêm os vectores próprios. Assim, o problema de determinação dos valores e vectores próprios pode ser entendido como um caso particular de aplicação desta técnica mais genérica, que pode ser aplicada a matrizes rectangulares.

De seguida será apresentada, justificada e aplicada a metodologia proposta por Brincker, primeiro na sua versão base e depois na sua versão melhorada.

3.2.3.1 Versão base

No artigo (Brincker et al. 2000b) é demonstrado que, sob algumas hipóteses, a aplicação da decomposição em valores singulares à matriz dos espectros da resposta da estrutura a decompõe num conjunto de funções densidade espectral de potência de osciladores de 1 grau de liberdade, que têm as mesmas frequências e os mesmos coeficientes de amortecimento dos modos de vibração da estrutura. Como hipóteses de base é admitido que a excitação é um ruído branco, que o amortecimento da estrutura é reduzido e que os modos de vibração com frequências próximas são ortogonais. Se estas hipóteses forem violadas, o método pode ainda ser aplicado, sendo os resultados aproximados, embora ainda melhores do que aqueles que resultam da aplicação do método da selecção de picos.

Da decomposição em valores singulares da matriz dos espectros da resposta da estrutura, avaliada numa frequência genérica ω_i , obtém-se:

$$S_y(\omega_i) = U_i \cdot S_i \cdot U_i^H \quad (3.21)$$

Note-se que, pelo facto da matriz S_y completa ser quadrada e hermitiana, a matriz V , definida na expressão (3.20), coincide com a matriz U .

² Uma matriz hermitiana é uma matriz que satisfaz a seguinte propriedade: $A^H = A$.

Na diagonal da matriz S_i encontram-se os l (número de pontos instrumentados e dimensão da matriz S_i) valores singulares da matriz dos espectros da resposta da estrutura. Estes valores singulares coincidem com as ordenadas, na frequência ω_i , dos espectros de potência dos osciladores de um grau de liberdade, em correspondência com os modos de vibração da estrutura, que contribuem significativamente para a sua resposta nessa frequência. Como o algoritmo de SVD organiza, na matriz S_i , os valores singulares por ordem decrescente, o primeiro valor singular contém, para cada frequência, a ordenada do auto-espectro do oscilador de um grau de liberdade relativo ao modo de vibração dominante nessa frequência.

Se não existirem modos próximos, o gráfico da variação do primeiro valor singular ao longo da frequência contém, na vizinhança de cada frequência de ressonância, os segmentos mais relevantes dos auto-espectros de todos os osciladores de um grau de liberdade, importantes para explicar a resposta da estrutura. Os gráficos dos restantes valores singulares apresentam valores próximos de zero.

Se a estrutura apresentar modos de vibração com frequências próximas, a decomposição em valores singulares da matriz dos espectros, na vizinhança dessas frequências, apresenta tantos valores singulares com valores significativos, quantos os modos nessa situação, permitindo assim o seu reconhecimento.

A identificação das frequências naturais da estrutura pode ser realizada, simplesmente através da avaliação da abcissa em correspondência com os picos de todos os valores singulares.

A primeira coluna da matriz U_i contém para cada frequência a configuração do modo dominante, as configurações dos restantes modos, se forem mutuamente ortogonais e ortogonais em relação ao primeiro, aparecem nas restantes colunas desta matriz.

Se não existirem modos com frequências próximas, as configurações modais associadas a cada frequência de ressonância podem ser estimadas através da primeira coluna da matriz U_i , avaliada na respectiva frequência de ressonância.

Se existirem modos com frequências próximas, a configuração do modo dominante é também estimada através da primeira coluna da matriz U_i , avaliada na respectiva frequência de ressonância. As configurações dos restantes são estimadas através das colunas da matriz U_i , em correspondência com os valores singulares que apresentam os picos e avaliadas na abcissa em que o valor singular respectivo é máximo.

Nos casos correntes em que o ensaio é realizado através de vários “setups”, para cada “setup” obtêm-se tantos valores singulares quanto os graus de liberdade instrumentados. A partir dos gráficos dos valores singulares relativos a cada “setup”, pode-se obter um só gráfico com a média dos valores singulares de cada “setup” normalizados, que permite a identificação de todas as frequências naturais da estrutura. Em alternativa, pode ser realizada a SVD de uma matriz de espectros rectangular, contendo apenas as colunas relativas aos sensores de referência. Procedendo desta forma, o número de valores singulares é igual ao número de sensores de referência adoptados, sendo apenas possível identificar tantos modos, com frequências próximas, quanto os sensores de referência adoptados.

No exemplo seguinte faz-se uma pequena aplicação do método descrito, usando rotinas desenvolvidas em MATLAB.

Exemplo

Da decomposição em valores singulares da matriz dos espectros do pórtico plano, em todas as frequências em que esta se encontra definida, obtêm-se os valores singulares que se representam Figura 3.11, em função da frequência.

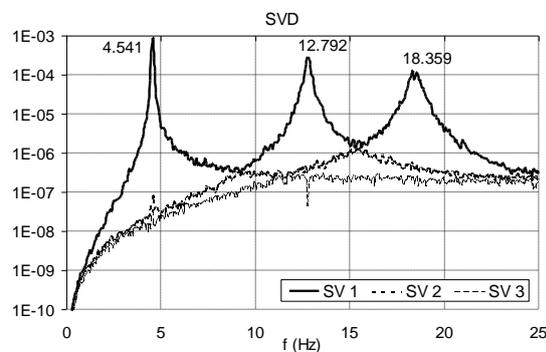


Figura 3.11 – Valores Singulares da matriz dos espectros

No gráfico anterior são claramente identificados 3 auto-espectros, que correspondem a três osciladores de um grau de liberdade com as mesmas frequências e amortecimentos dos três modos de vibração da estrutura. Verifica-se que os espectros apresentam segmentos distribuídos pelos três valores singulares, mas que as suas partes mais relevantes são representadas no primeiro valor singular.

Como não existem modos com frequências próximas, todas as frequências naturais da estrutura podem ser identificadas através dos picos do primeiro valor singular. No gráfico da Figura 3.11 estas são assinaladas e verifica-se que coincidem com as identificadas pelo método da selecção de picos.

Se se avaliarem os vectores singulares, em correspondência com os máximos, obtêm-se os valores do Quadro 3.2, que estão de acordo com as configurações modais teóricas. Os vectores singulares são números complexos. No entanto, como as respostas foram simuladas considerando o amortecimento da estrutura proporcional, a parte imaginária assume valores desprezáveis que não foram representados no quadro.

Quadro 3.2 – Configurações modais da estrutura teóricas / identificadas

Modo 1		Modo 2		Modo 3	
Identificado	Teórico	Identificado	Teórico	Identificado	Teórico
0.328	0.328	0.736	0.737	-0.596	-0.591
0.591	0.591	0.331	0.328	0.737	0.737
0.737	0.737	-0.591	-0.591	-0.320	-0.328

3.2.3.2 Versão melhorada

A técnica de decomposição no domínio da frequência melhorada (EFFD) corresponde a um aperfeiçoamento da técnica descrita no ponto anterior, que permite estimar os coeficientes de amortecimento modais e identificar com mais rigor as frequências naturais e as configurações modais da estrutura.

O melhoramento introduzido baseia-se no facto da função de auto-correlação da resposta de um oscilador de um grau de liberdade sujeito a uma excitação do tipo ruído branco ser proporcional à sua resposta em vibração livre (Brincker et al. 2001).

Se, na vizinhança de cada uma das frequências de ressonância, as ordenadas dos auto-espectros dos osciladores de um grau de liberdade, em que a estrutura foi decomposta, forem transportadas para o domínio do tempo, por aplicação da FFT inversa, obtêm-se as funções de auto-correlação associadas a cada um deles. Como as funções de auto-correlação são proporcionais às respostas em vibração livre, a partir das primeiras é possível identificar os coeficientes de amortecimento e as frequências dos osciladores de um grau de liberdade, usando conceitos simples da dinâmica clássica. As frequências e amortecimentos obtidos são estimativas das frequências e dos amortecimentos dos modos de vibração da estrutura.

O coeficiente de amortecimento é determinado através do decremento logarítmico, que é definido pela seguinte expressão (Clough e Penzien 1993):

$$\delta = \frac{1}{m} \cdot \ln \frac{R_n}{R_{n+m}} = \frac{\ln(R_n) - \ln(R_{n+m})}{m} \quad (3.22)$$

Sendo R_n e R_{n+m} dois valores extremos, da função de auto-correlação, afastados entre si de m ciclos.

A relação entre o decremento logaritmo e o coeficiente de amortecimento é a seguinte:

$$\delta = \frac{2 \cdot \pi \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \Leftrightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 + \delta^2}} \quad (3.23)$$

A partir desta relação, entre o decremento logarítmico e o coeficiente de amortecimento, e da expressão (3.22), obtém-se a expressão do coeficiente de amortecimento em função de valores da função de auto-correlação:

$$\xi = \frac{\frac{1}{m} \cdot \ln \frac{R_n}{R_{n+m}}}{\sqrt{4 \cdot \pi^2 + \left(\frac{1}{m} \cdot \ln \frac{R_n}{R_{n+m}} \right)^2}} \approx \frac{\ln \frac{R_n}{R_{n+m}}}{2 \cdot \pi \cdot m} \quad (3.24)$$

Quando o amortecimento é perfeitamente viscoso, o seu valor não depende da amplitude do movimento e portanto, a sua avaliação pode ser efectuada por simples aplicação da expressão anterior a um qualquer par de extremos relativos. No entanto, na prática tal não acontece, pelo que, para a sua determinação é mais adequado seguir o seguinte procedimento: (1) determinar todos os máximos relativos da função de auto-correlação, (2) definir um conjunto de pontos, em número igual aos máximos determinados, cujas ordenadas são os valores dos logaritmos dos máximos anteriormente determinados e as abcissas são o número de ciclos anteriores à sua ocorrência, (3) ajustar uma recta aos pontos anteriores. De acordo com a segunda igualdade da expressão (3.22), o declive da recta é coincidente com o decremento logarítmico, sendo o coeficiente de amortecimento determinado a partir deste, pela expressão (3.23).

A estimativa dos coeficientes de amortecimento modais é afectada principalmente por dois erros: pelo erro de “leakage” associado à estimativa do espectro, que faz com que as estimativas sejam superiores aos valores reais, e o erro associado à realização da FFT inversa de um tramo finito do espectro, que contribui para uma subavaliação dos mesmos. Assim, as estimativas dos amortecimentos são tanto

melhores, quanto maior a resolução em frequência do espectro e mais longo o segmento do espectro seleccionado para o cálculo da função de auto-correlação.

Como já foi referido, a frequência natural associada a cada modo (ω_k) relaciona-se com a frequência amortecida (ω_{ka}) através da seguinte expressão:

$$\omega_{ka} = \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \quad (3.25)$$

A frequência amortecida é o inverso do tempo necessário para completar um ciclo completo. Este tempo pode ser determinado por avaliação do intervalo temporal entre dois cruzamentos do eixo das abcissas ou entre a ocorrência de dois valores extremos da função de auto-correlação, separados por um qualquer número de ciclos. Uma forma de obter uma estimativa mais rigorosa consiste em adoptar um procedimento semelhante ao que foi descrito para o amortecimento: ajustar uma recta a um conjunto de pontos, representativos dos máximos ou das passagens por zero da função de auto-correlação, cuja ordenada é o número de ciclos que os precedem e cuja abcissa é o instante temporal em que ocorrem. O declive desta recta coincide com a frequência amortecida. A frequência natural é calculada através da expressão (3.25), usando o coeficiente de amortecimento previamente estimado.

Para a estimativa dos coeficientes de amortecimento e das frequências naturais é necessário obter, a partir dos pontos discretos das funções de auto-correlação, as coordenadas dos seus valores extremos e/ou as abcissas dos pontos com ordenada nula. Tal pode ser obtido com rigor, adoptando interpolações quadráticas para a determinação dos extremos e interpolações lineares para a determinação dos pontos de ordenada nula.

A escolha dos pontos na vizinhança da frequência de ressonância, para o cálculo da FFT inversa, pode ser realizada usando a sensibilidade do analista ou de forma mais fundamentada, comparando os vectores singulares, associados a cada um dos pontos candidatos, com o vector singular associado à frequência de ressonância (configuração do modo de vibração).

A comparação entre vectores pode ser realizada por intermédio de um índice escalar designado de MAC (“Modal Assurance Criterion”), que mede a correlação entre duas configurações modais (Allemang e Brown 1982). O MAC obtém-se a partir da expressão (3.26), onde φ_{k1} e φ_{k2} são dois vectores coluna com as configurações modais, e assume valores entre zero e um. Um valor unitário significa que os modos são coincidentes ou diferem apenas no factor de escala.

$$MAC_{k1,k2} = \frac{(\varphi_{k1}^T \cdot \varphi_{k2})^2}{(\varphi_{k1}^T \cdot \varphi_{k1}) \cdot (\varphi_{k2}^T \cdot \varphi_{k2})} \quad (3.26)$$

Neste método de identificação, a estimativa das configurações modais também é melhorada, pois a configuração modal associada a cada frequência natural é obtida realizando a média dos vectores singulares, relativos aos pontos na vizinhança das frequências de ressonância com MAC elevados, ponderada pelo valor dos correspondentes valores singulares.

Os conceitos descritos são seguidamente ilustrados no exemplo do pórtico plano.

Exemplo

Nesta abordagem, como a determinação das frequências naturais não é realizada através da identificação dos máximos relativos dos valores singulares da matriz dos espectros, o erro associado à sua estimativa deixa de ser dependente da resolução em frequência. Assim, interessa considerar troços temporais mais pequenos, para realizar mais médias e portanto obter espectros com menos ruído. Para o exemplo em análise, passa-se a adoptar uma resolução em frequência de 0.098Hz.

Na Figura 3.12, apresenta-se a selecção dos pontos dos valores singulares da matriz dos espectros das respostas, que representam os espectros dos osciladores de um grau de liberdade em correspondência com os modos de vibração da estrutura, tendo sido escolhidos os pontos cujo primeiro vector singular apresenta um MAC, em relação ao primeiro vector singular da frequência de ressonância, superior a 0.99. Foi possível impor um MAC muito elevado, porque as séries temporais geradas artificialmente não apresentam ruído. Na Figura 3.13 mostra-se a variação do MAC entre o primeiro vector singular de cada frequência e os primeiros vectores singulares das três frequências de ressonância.

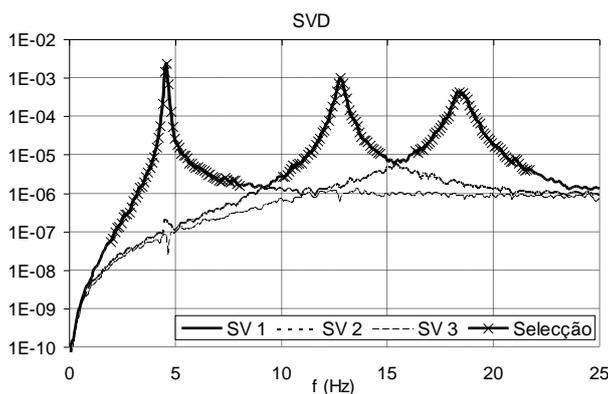


Figura 3.12 – Selecção dos espectros correspondentes aos osciladores de 1 grau de liberdade

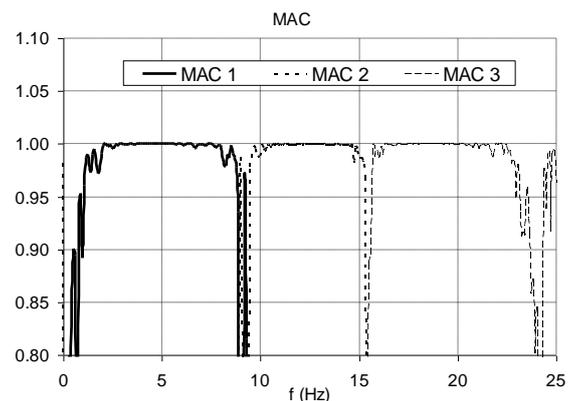


Figura 3.13 – Variação do índice MAC

Os espectros de cada um dos osciladores de um grau de liberdade são definidos pelas ordenadas seleccionadas na vizinhança da sua frequência natural e por ordenadas nulas para todas as frequências restantes, entre 0 e 25 Hz.

Realizando a FFT inversa dos espectros de cada um dos osciladores de um grau de liberdade, obtêm-se as seguintes funções de auto-correlação:

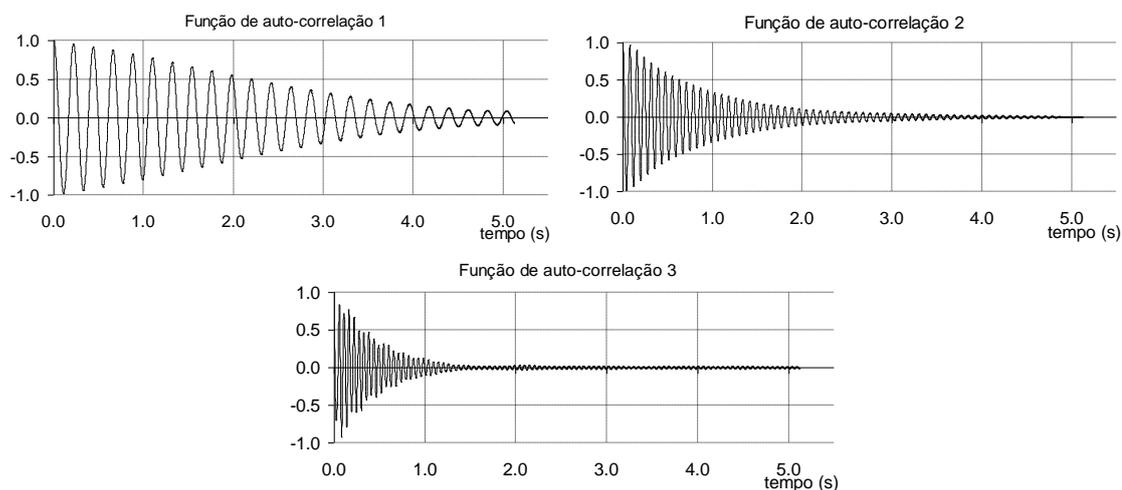


Figura 3.14 – Funções de auto-correlação dos osciladores de 1 grau de liberdade

As funções de auto-correlação foram escaladas de forma a assumirem um valor unitário na origem e apenas se representa a sua parte com abcissas positivas. As funções de auto-correlação que resultam da simples aplicação da FFT inversa possuem um resolução no tempo de 0.02 s (inverso da frequência de amostragem – 50 Hz). No entanto, para a determinação dos máximos relativos ser mais rigorosa, foi usado o comando “spline” do MATLAB, que aumenta a resolução no tempo, determinando as ordenadas dos pontos intermédios através de interpolações cúbicas. Os gráficos da Figura 3.14 foram traçados com uma resolução no tempo de 0.002 s.

Para a avaliação dos coeficientes de amortecimento e das frequências foram usados os máximos relativos positivos, que na nova discretização são determinados com bastante rigor.

Nas figuras seguintes, apresenta-se, para cada função de auto-correlação, a variação do logaritmo dos seus extremos positivos com o número de ciclos que os precedem (para determinação dos coeficientes de amortecimento) e a variação dos últimos com o instante temporal em que ocorrem (para determinação das frequências).

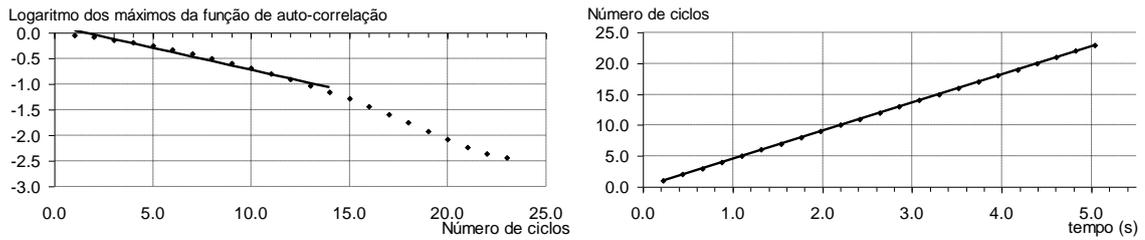


Figura 3.15 – Gráficos para estimativa do amortecimento e da frequência associados ao primeiro modo de vibração

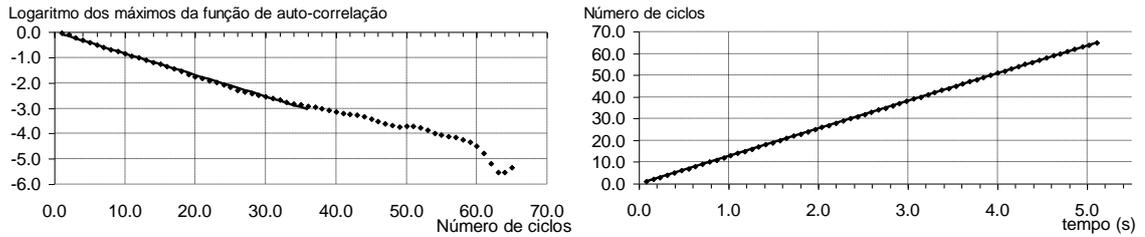


Figura 3.16 – Gráficos para estimativa do amortecimento e da frequência associados ao segundo modo de vibração

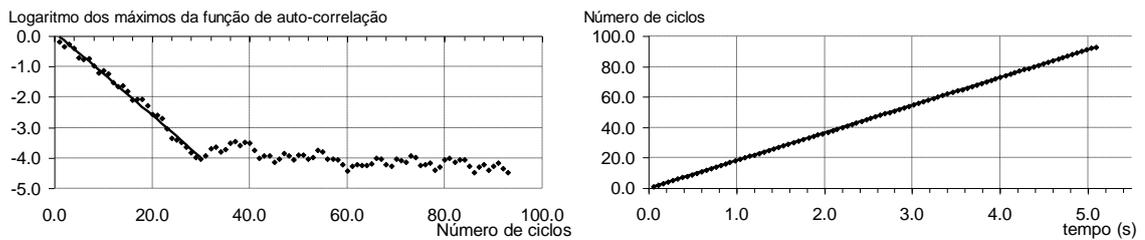


Figura 3.17 – Gráficos para estimativa do amortecimento e da frequência associados ao terceiro modo de vibração

Nos gráficos anteriores, representa-se, também, a recta que foi ajustada aos pontos da função de auto-correlação que se entenderam mais representativos. A partir dos declives das rectas ajustadas são determinadas as frequências e os coeficientes de amortecimento dos três modos de vibração da estrutura, que se apresentam e comparam com os valores teóricos no Quadro 3.3.

Quadro 3.3 – Frequências e coeficientes de amortecimento teóricos / identificados

Modo	Valores teóricos		Valores identificados	
	Frequência	Amortecimento	Frequência	Amortecimento
1	4.562 Hz	0.45 %	4.561 Hz	1.364 %
2	12.783 Hz	1.25 %	12.758 Hz	1.349 %
3	18.472 Hz	1.80 %	18.248 Hz	2.177 %

Da análise do quadro, verifica-se que as frequências são identificadas com boa precisão, mesmo com uma resolução em frequência relativamente baixa. Quanto aos coeficientes de amortecimento, as estimativas para o segundo e terceiro modos são razoáveis. No entanto, o valor estimado para o primeiro modo tem

um erro superior a 100%. Esta estimativa excessivamente elevada do coeficiente de amortecimento é devida ao erro de “leakage” introduzido na estimativa dos espectros. Se for aumentado o comprimento dos troços temporais usados para a sua estimativa, obtêm-se valores para o coeficiente de amortecimento do primeiro modo entre 0.5 % (adoptando troços temporais com 16384 pontos) e 0.64 % (adoptando troços temporais com 2048 pontos), valores mais próximos do valor teórico. Uma forma de identificar se o erro de “leakage” introduz amortecimentos significativos consiste em verificar se as funções de auto-correlação se anulam no troço temporal obtido através da FFT inversa dos espectros. Na Figura 3.14, verifica-se que a função de auto-correlação do oscilador de um grau de liberdade relativo ao primeiro modo não se anula no troço temporal de 5.1s ($1/(2 \cdot \Delta f) = 1/(2 \cdot 0.098) = 5.1s$), obtido a partir do espectro.

Como o índice MAC usado para a selecção dos pontos na vizinhança das frequência de ressonância identificadas no espectro do primeiro valor singular foi muito elevado, as estimativas das configurações modais melhoradas obtidas através desta abordagem são praticamente coincidentes com as que resultaram da formulação básica da decomposição em valores singulares no domínio da frequência.

3.2.4 Outros métodos de identificação no domínio da frequência

Os dois métodos de identificação no domínio da frequência anteriormente descritos, no processo de identificação dos parâmetros modais associados a cada um dos modos de vibração da estrutura, apenas consideram ordenadas particulares dos espectros da resposta da estrutura ou segmentos dos valores singulares, que resultam da decomposição da sua matriz de espectros. Outros métodos existem, em que espectros teóricos, definidos em função dos parâmetros modais da estrutura, são ajustados a todas as ordenadas dos espectros experimentais, estimados a partir das séries temporais das respostas da estrutura adquiridas.

As técnicas de ajuste de funções teóricas parametrizadas a funções experimentais foram inicialmente desenvolvidas, no âmbito dos ensaios de vibração forçada, para realizar o ajuste de funções de resposta em frequência. O procedimento mais simples consiste na aplicação do método dos mínimos quadrados. No entanto, uma vez que se trata de um problema não linear, à sua resolução estão associados os seguintes problemas: possibilidade de divergência quando o ponto de partida adoptado não é adequado e existência de mínimos locais que podem ser erradamente interpretados como mínimos globais.

Recentemente, foram desenvolvidas novas metodologias para realizar o ajuste e efectuada a sua adaptação para poderem ser aplicadas aos espectros, possibilitando assim a identificação dos parâmetros dinâmicos de estruturas através da sua resposta a excitações ambientais.

No artigo (Guillaume et al. 1999) é apresentado o método da máxima verosimilhança (Maximum Likelihood – ML), para realizar o ajuste de espectros teóricos parametrizados a espectros experimentais. Este método de ajuste, baseado numa abordagem probabilística, apresenta as seguintes vantagens em relação ao método dos mínimos quadrados: é numericamente mais robusto, considera no processo de ajuste a existência de ruído e fornece intervalos de confiança para os parâmetros estimados.

Mais recentemente, no artigo (Cauberghe et al. 2004) é descrita e aplicada uma nova formulação do método da máxima verosimilhança, designada “poly-reference”, que segundo os autores conduz a estimativas dos parâmetros modais com qualidade superior. Na referência (Peeters et al. 2004) é apresentada e aplicada a mesma técnica (“poly-reference”) para realizar o ajuste de funções de resposta em frequência teóricas e experimentais através do método dos mínimos quadrados. Este método, designado “PolyMAX”, está a ser integrado no “software” desenvolvido e comercializado pela LMS, para realizar o ajuste de funções de resposta em frequência e de espectros de resposta da estrutura, permitindo assim a identificação dos parâmetros modais através de ensaios de vibração forçada e através de ensaios de vibração ambiental.

3.3 Métodos de identificação no domínio do tempo

Nesta secção são apresentados os métodos de identificação modal de sistemas dinâmicos que se baseiam em informação no domínio do tempo. A apresentação é dividida em duas subsecções: na primeira são descritos os métodos que usam como ponto de partida as funções de correlação; na segunda são descritos os métodos que se baseiam directamente nas séries temporais. Em ambas é dado maior destaque aos métodos que realizam a identificação de modelos de estado, uma vez que é a abordagem que tem mostrado melhores resultados nas aplicações de Engenharia Civil.

De seguida é descrita uma forma de organização das séries temporais recolhidas no ensaio, que se vai tornar bastante interessante na aplicação dos algoritmos apresentados.

3.3.1 Organização das séries temporais

Em cada “setup” dum ensaio de vibração ambiental são medidas, em vários instantes temporais, as acelerações dos l graus de liberdade instrumentados. Alguns destes graus de liberdade, como já foi referido, têm que ser medidos em todos os “setups”, os designados graus de liberdade de referência. Para cada instante de aquisição, k , podem ser definidos dois vectores: y_k^{ref} - vector coluna que contém as acelerações medidas nos r graus de liberdade de referência no instante k e y_k - vector coluna que contém as acelerações medidas em todos os graus de liberdade instrumentados no instante k .

Nos pontos seguintes do presente capítulo, verificar-se-á a vantagem de organizar os vectores anteriormente descritos na seguinte matriz de Hankel³:

$$H^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \begin{bmatrix} y_0^{ref} & y_1^{ref} & \cdots & y_{N-1}^{ref} \\ y_1^{ref} & y_2^{ref} & \cdots & y_N^{ref} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{i-1}^{ref} & y_i^{ref} & \cdots & y_{i+N-2}^{ref} \\ y_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+N-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & \cdots & y_{i+N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & \cdots & y_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{0|i-1}^{ref} \\ Y_{i|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \cdot i & \text{"passado"} \\ \Downarrow l \cdot i & \text{"futuro"} \end{matrix} \quad (3.27)$$

³ Uma matriz de Hankel é uma matriz em que cada anti-diagonal contém a repetição do mesmo elemento.

Na matriz anterior são destacados dois instantes temporais: o instante i e o instante N . Nos pontos seguintes o seu significado será esclarecido, para já, fica claro que estão condicionados pelo comprimento total das séries temporais adquiridas: $2 \cdot i + N - 1 =$ número total de pontos de cada série.

Na segunda igualdade, a matriz é dividida em dois blocos, cuja designação é baseada nos índices dos elementos da primeira coluna do bloco a que se refere. O primeiro bloco ($Y_{0|i-1}^{ref}$) contém N colunas e i blocos de linhas, sendo cada bloco constituído por um vector coluna com r elementos (número de graus de liberdade de referência). O segundo bloco também contém N colunas e i blocos de linhas, sendo cada bloco constituído por um vector coluna com l elementos (número de graus de liberdade instrumentados).

Na terceira igualdade, os índices entre 0 e $i-1$ são designados por p , que simboliza passado, e os índices entre i e $2i-1$ são designados por f , que simboliza futuro.

Para um dos métodos que será apresentado, vai ser usada a seguinte divisão alternativa da matriz H^{ref} :

$$H^{ref} = \begin{bmatrix} Y_{0|i}^{ref} \\ Y_{i|i}^{\neq ref} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p^{ref+} \\ Y_{i|i}^{\neq ref} \\ Y_f^- \end{bmatrix} \begin{matrix} \Downarrow r \cdot (i+1) \\ \Downarrow l-r \\ \Downarrow l \cdot (i-1) \end{matrix} \quad (3.28)$$

3.3.2 Métodos de identificação estocástica a partir das correlações

As correlações são a base deste grupo de métodos de identificação, pelo que estes só produzem bons resultados se aquelas forem adequadamente estimadas. No ponto seguinte são apresentadas três alternativas para realizar a sua estimação a partir das séries temporais da resposta da estrutura.

3.3.2.1 Estimativa das correlações da resposta

Antes de mais, é importante referir que será assumido que as séries temporais das respostas dinâmicas de uma estrutura têm média nula. Como tal, a função de correlação é coincidente com a função de covariância. Neste trabalho será usada preferencialmente a designação correlação.

No capítulo 2 foi introduzido o conceito de correlação entre dois sinais contínuos ($x_1(t)$ e $x_2(t)$) e apresentada a expressão (3.29) para o seu cálculo, no caso particular de estes serem assumidos como realizações de um processo estacionário e ergódico.

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt \quad (3.29)$$

Na prática, os sinais encontram-se discretizados no tempo e têm uma duração limitada, pelo que, apenas pode ser obtida uma estimativa da correlação.

Estimativa directa das funções de correlação

A forma mais directa de estimar as funções de correlação obtém-se convertendo o integral da expressão (3.29) num somatório estendido a um número finito de termos:

$$\hat{R}_{x_1, x_2}(j) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_1(k \cdot \Delta t) \cdot x_2(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t) \quad \text{com } j = 0, 1, 2, \dots, i \quad (3.30)$$

Na expressão anterior, N é o número de pontos dos segmentos temporais usados para o cálculo da correlação. Este tem que ser menor que o número total de pontos da série temporal subtraído de i .

Estimativa das funções de correlação através da FFT

Uma forma alternativa de calcular as correlações consiste na aplicação da FFT inversa aos espectros calculados tal como se descreve no ponto 3.2.1. Usando este procedimento, o cálculo é mais rápido, pois são evitadas muitas multiplicações e somatórios. No entanto, é necessário ter algum cuidado na sua aplicação, para evitar que se obtenham correlações circulares (Bendat e Piersol 1971). De facto, a aplicação da FFT inversa aos espectros calculados de acordo com o procedimento de Welch, resulta numa função que é igual à soma da função de correlação com a sua simétrica, tal como representado na Figura 3.18.

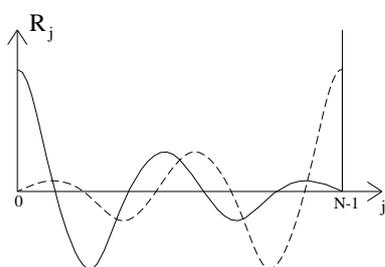


Figura 3.18 – Função de correlação circular.

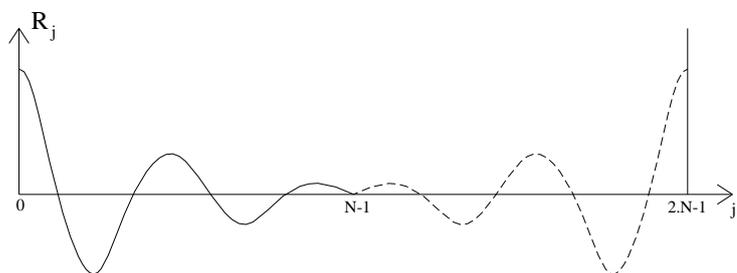


Figura 3.19 – Efeito da adição de zeros na função de correlação circular.

Para evitar este erro, na aplicação do procedimento de Welch, é necessário adicionar a cada segmento temporal com N pontos, extraído da série temporal total para o cálculo do espectro, um número de zeros igual à sua dimensão (N). Realizando este pequeno artifício conseguem-se separar as duas

funções que se encontravam sobrepostas, tal com se esquematiza na Figura 3.19. Cada ponto da função de correlação resultante tem ainda que ser multiplicado por $(N-j)/N$, para corrigir o erro de viés (Bendat e Piersol 1971).

Convém referir que os erros de circularidade e de viés têm pouco significado nos primeiros elementos das funções de correlação, pelo que, se apenas for necessário estimar as funções para valores baixos de j , não é indispensável realizar a adição de zeros nem aplicar o factor de correcção.

As correlações estimadas através deste procedimento também são afectadas pelos erros de “leakage”, dado que estes estão sempre associados à aplicação do algoritmo FFT.

No exemplo seguinte é feita a aplicação dos métodos anteriormente descritos, utilizando uma implementação realizada em MATLAB.

Exemplo

A função de auto-correlação da resposta do terceiro piso do pórtico plano foi estimada através das duas metodologias acabadas de descrever. No cálculo através da FFT e FFT inversa, foram usados troços temporais com 1024 pontos para o cálculo do espectro. No gráfico seguinte, comparam-se os valores obtidos, utilizando a equação (3.30) (“AC-Somatório”) e a abordagem alternativa baseada no algoritmo FFT (“AC-FFT”). As funções de correlação representadas foram previamente normalizadas, isto é, todos os seus elementos foram divididos pela ordenada da função na origem.

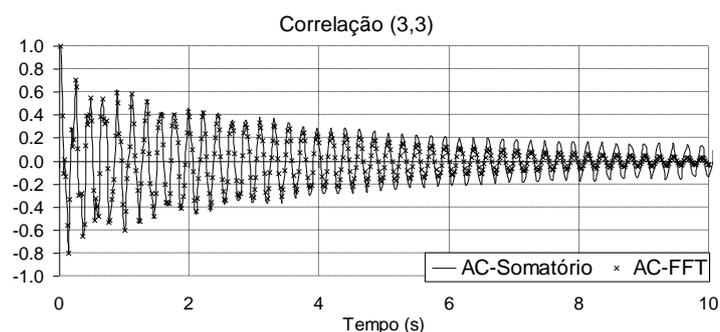


Figura 3.20 – Elemento (3,3) da matriz das correlações - 1ª estimativa com FFT

Verifica-se que, nos primeiros pontos, a concordância é perfeita. No entanto, a partir dos 5 segundos, a função de correlação estimada através do espectro começa a convergir mais rapidamente para zero. Tal facto deve-se ao amortecimento adicional introduzido pelo efeito de “leakage”. Se forem adoptados troços temporais mais longos para a estimativa do espectro, este efeito é atenuado. Na Figura 3.21, é feita a

mesma comparação mas calculando o espectro a partir de troços temporais com 2048 pontos, verificando-se então que já se consegue uma boa concordância até aos 10 segundos.

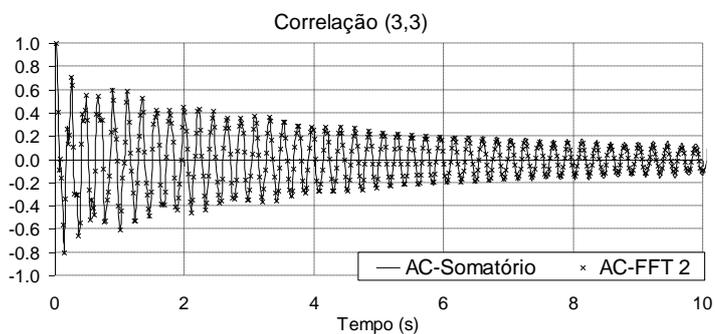


Figura 3.21 – Elemento (3,3) da matriz das correlações - 2ª estimativa com FFT

Estimativa das funções de correlação através do decaimento aleatório

A técnica do decaimento aleatório permite o cálculo de respostas em vibração livre a partir de respostas a excitações de natureza aleatória. Esta técnica foi pela primeira vez utilizada por Cole na NASA, para a análise dinâmica de estruturas espaciais sujeitas a acções ambientais (Cole 1968). Na referência (Vandiver et al. 1982) é demonstrado que os decaimentos aleatórios, baseados num critério de selecção específico, são proporcionais às funções de correlação das respostas de uma estrutura sujeita a uma excitação do tipo ruído branco, podendo portanto ser usados para as estimar. Posteriormente, Asmussen (Asmussen 1997) explora este interessante resultado e aplica-o na identificação modal de estruturas de Engenharia Civil.

De acordo com Cole, a resposta de uma estrutura a uma excitação aleatória num instante genérico t resulta de três contribuições: do deslocamento inicial, da velocidade inicial e da excitação actuante sobre a estrutura entre o instante inicial e o instante t . Se forem realizadas médias de segmentos temporais da resposta com as mesmas condições iniciais, a contribuição da excitação aleatória, bem como do ruído existente na cadeia de medição, tendem a ser anuladas, resultando apenas a contribuição das condições iniciais. Este é o princípio básico em que se apoia o método do decaimento aleatório.

A escolha dos segmentos das séries temporais da resposta da estrutura com as mesmas condições iniciais é realizada recorrendo a critérios de selecção (“Triggering conditions”), que seleccionam os pontos de início de cada um deles. Nos ensaios de vibração ambiental, o mais corrente é realizar a medição de acelerações. Assim, não querendo realizar integrações do sinal, os critérios de selecção têm que ser estabelecidos com base no valor da aceleração e da sua primeira derivada.

Os critérios de selecção normalmente usados na aplicação do método do decremento aleatório são os seguintes (Asmussen 1997): (1) passagem por um nível, (2) máximos locais, (3) pontos positivos e (4) passagem por zero com inclinação positiva.

No primeiro critério são seleccionados todos os pontos com um valor definido da aceleração $-a$. No segundo critério são seleccionados todos os máximos locais da série temporal. No terceiro critério são seleccionados os pontos da série temporal com ordenadas compreendidas entre dois valores a e b com o mesmo sinal. Finalmente, no quarto critério são seleccionados os pontos com ordenada nula e primeira derivada positiva.

Cada um dos critérios proporciona funções de resposta em vibração livre com diferentes valores iniciais. Por exemplo, do primeiro critério resulta uma resposta em vibração livre com as seguintes características no instante inicial: aceleração igual a a e primeira derivada da aceleração nula. A última é nula, porque as velocidades iniciais de cada um dos segmentos seleccionados apresentam uma variação aleatória cuja média é igual a zero.

A escolha dos níveis a e b a usar nos dois primeiros critérios é importante, pois condiciona a qualidade dos resultados. A opção de um nível baixo para a tem a vantagem de conduzir à selecção de mais segmentos. No entanto, nos valores mais baixos, os erros associados ao processo de medição têm mais peso. Na referência (Asmussen 1997), é mostrado que na aplicação do primeiro critério existe um nível óptimo, que está relacionado com o desvio padrão da série temporal (σ_x): $a = \sqrt{2} \cdot \sigma_x$, enquanto que, para aplicação do segundo se aconselha: $a = \sigma_x$ e $b = \infty$.

Se as médias forem realizadas com segmentos da série temporal onde são definidas as condições de selecção, obtêm-se auto-decrementos aleatórios. Se as médias forem realizadas com segmentos de uma série temporal diferente daquela onde são definidas as condições de selecção, obtêm-se decrementos aleatórios cruzados. Estes elementos estão em correspondência com as funções de auto-correlação e com as funções de correlação cruzada, respectivamente.

Os decrementos aleatórios calculados com base nos três primeiros critérios de selecção são proporcionais às funções de correlação, enquanto que, os decrementos aleatórios calculados através do quarto critério de selecção são proporcionais à primeira derivada das funções de correlação.

As funções de correlação estimadas através dos decrementos aleatórios podem ser usadas como “input” dos métodos descritos nas secções 3.3.2.2 e 3.3.2.3 ou podem ser convertidas para o domínio da frequência, transformando-se em espectros que podem ser usados como “input” dos métodos que

trabalham no domínio da frequência. Na referência (Rodrigues et al. 2004) são apresentados resultados da utilização de decrementos aleatórios para gerar os espectros usados pelo método FDD.

Na aplicação seguinte, uma implementação em MATLAB da técnica do decremento aleatório, realizada no âmbito deste trabalho, é utilizada para estimar uma função de auto-correlação.

Exemplo

O auto-decremento aleatório da resposta do último piso do pórtico em análise foi calculado usando o segundo critério de selecção, adoptando para a e b os valores recomendados.

Na Figura 3.22, identificam-se os pontos da série temporal que respeitam o critério de selecção.

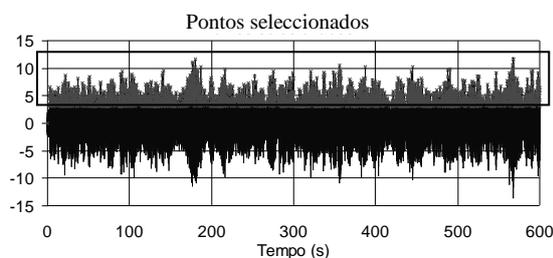


Figura 3.22 – Pontos seleccionados

Na Figura 3.23, apresenta-se o decremento aleatório calculado a partir dos segmentos temporais com início nos pontos destacados no gráfico anterior e compara-se este com a função de auto-correlação da mesma série temporal, calculada com a expressão (3.30).

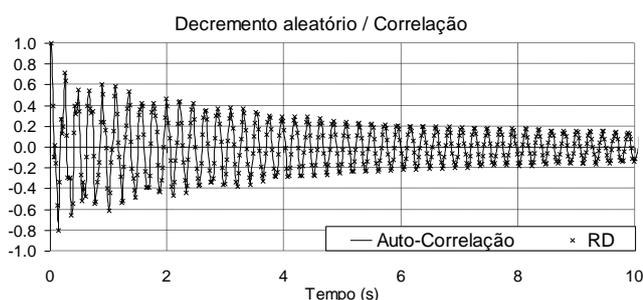


Figura 3.23 – Decremento aleatório

Da observação do gráfico, verifica-se que o ajuste entre o decremento aleatório e a função de auto-correlação respectiva é muito bom.

Organização das funções de correlação

Tal como para os espectros, é usual organizar as correlações entre as respostas relativas aos diferentes graus de liberdade instrumentados numa matriz, em que os elementos da diagonal principal contêm funções de auto-correlação e os elementos fora da diagonal principal contêm funções de correlação cruzada. Se as séries temporais das respostas forem organizadas num vector coluna (y), com tantas componentes quantos os graus de liberdade instrumentados, a matriz com as estimativas das correlações, no instante de tempo $j \cdot \Delta t$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$\hat{R}_y(j) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y(k \cdot \Delta t) \cdot y(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t)^T \quad (3.31)$$

No caso, mais corrente, do ensaio ser realizado recorrendo a vários “setups”, não é possível calcular a matriz das correlações completa, mas apenas as colunas relativas aos graus de liberdade de referência. Assim, a equação (3.31) é substituída pela equação (3.32), onde o vector y^{ref} contém as respostas dos graus de liberdade de referência.

$$\hat{R}_y^{ref}(j) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N y(k \cdot \Delta t) \cdot y^{ref}(k \cdot \Delta t + j \cdot \Delta t)^T \quad (3.32)$$

A arrumação das séries temporais estabelecida na equação (3.27) permite obter, de forma compacta, uma matriz composta por matrizes de correlação avaliadas em diferentes instantes de tempo, através da seguinte expressão:

$$T_{1|i}^{ref} = Y_f \cdot (Y_p^{ref})^T = \begin{bmatrix} R_i^{ref} & R_{i-1}^{ref} & \cdots & R_1^{ref} \\ R_{i+1}^{ref} & R_i^{ref} & \cdots & R_2^{ref} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{2 \cdot i - 1}^{ref} & R_{2 \cdot i - 2}^{ref} & \cdots & R_i^{ref} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Na equação anterior, para simplificar a notação, as matrizes $\hat{R}_y^{ref}(j)$ são representadas por R_j^{ref} .

Note-se que, na definição da matriz H^{ref} , as séries temporais foram escaladas pelo inverso da raiz quadrada de N , para que, no cálculo das correlações, não seja necessário proceder a qualquer divisão.

As matrizes das correlações (R_j^{ref} , com j entre l e i) ficam arrumadas numa matriz Toeplitz⁴, que vai ser útil na aplicação do método de identificação que a seguir se apresenta.

3.3.2.2 Método de identificação estocástica em sub-espços a partir das correlações

O método de identificação estocástica em sub-espços a partir das correlações, designado de forma abreviada SSI-COV (“COVariance-driven Stochastic Subspace Identification”), identifica um modelo de estado a partir das correlações das respostas da estrutura. O modelo de estado na sua formulação estocástica e discreta, descrito no capítulo 2, é representado pelo seguinte par de equações:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A \cdot x_k + w_k \\ y_k &= C \cdot x_k + v_k\end{aligned}\tag{3.34}$$

No capítulo 2 apresentaram-se também as suas propriedades estocásticas mais importantes, estas serão fundamentais para justificar o método aqui apresentado.

A identificação de modelos de estado a partir de dados experimentais foi primeiro realizada com base em funções de reposta impulsivas, resultantes de ensaios de vibração forçada. O método mais desenvolvido para realizar tal tarefa designa-se ERA (“Eigensystem Realization Algorithm”) e encontra-se descrito no livro (Juang 1994).

As funções de correlação relativas à resposta de uma estrutura sujeita a uma excitação do tipo ruído branco podem ser expressas através da soma de sinusóides com decréscimo exponencial, relacionadas com cada um dos modos de vibração da estrutura, sendo portanto possível, a partir delas, determinar os parâmetros modais da estrutura. Usando este princípio, no artigo (James et al. 1992) o método ERA é adaptado para realizar a extração dos parâmetros modais a partir dos dados recolhidos em ensaios de vibração ambiental, substituindo as funções de resposta impulsivas pelas funções de correlação.

Tal como já foi referido, os ensaios de vibração ambiental de estruturas de Engenharia Civil são correntemente realizados através de vários “setups”, adoptando sensores de referência e sensores móveis. Neste trabalho é apresentada a versão do método, desenvolvida por Bart Peeters (Peeters 2000), que se baseia nas correlações entre as respostas num número limitado de graus de liberdade (referências) e as respostas dos restantes, em vez de usar as correlações entre todos os graus de liberdade instrumentados em cada “setup”. A versão do método, que calcula para cada “setup” a

⁴ Uma matriz de Toeplitz é uma matriz cujas diagonais contêm a repetição dum mesmo elemento

matriz completa das correlações pode ser obtida, a partir da anterior, considerando todos os pontos instrumentados em cada “setup” como sendo de referência.

A eficiência da implementação realizada por Bart Peeters é demonstrada em várias aplicações a estruturas de Engenharia Civil: (Peeters 2000) e (Peeters et al. 2002).

O ponto de partida para este método são as matrizes de correlação das respostas da estrutura organizadas numa matriz de Toeplitz, tal como definido na expressão (3.33).

Se cada uma das matriz de correlação R_i^{ref} for factorizada, de acordo com a propriedade apresentada no capítulo 2, no seguinte produto:

$$R_i^{ref} = C \cdot A^{i-1} \cdot G^{ref} \quad (3.35)$$

a matriz de Toeplitz que contém as correlações pode ser decomposta da seguinte forma:

$$T_{\parallel i}^{ref} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \dots \\ C \cdot A^{i-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{i-1} \cdot G^{ref} & \dots & A \cdot G^{ref} & G^{ref} \end{bmatrix} = O_i \cdot \Gamma_i^{ref} \quad (3.36)$$

Na segunda igualdade da equação anterior são definidas as matrizes O_i e Γ_i^{ref} . A matriz O_i , designada matriz de observabilidade estendida, é uma matriz constituída por i blocos dispostos em coluna, contendo cada bloco uma matriz de dimensão $l \cdot n$. A matriz Γ_i^{ref} , designada matriz de controlabilidade estocástica estendida invertida, é uma matriz constituída por i blocos dispostos em linha, tendo cada bloco uma dimensão $n \cdot r$. A matriz que resulta da multiplicação de ambas é uma matriz $(i \cdot l) \cdot (i \cdot r)$ e, se $n < i \cdot r$, a sua ordem é igual a n , pois resulta da multiplicação de uma matriz de n linhas por uma matriz de n colunas.

Por outro lado, da decomposição em valores singulares da matriz de Toeplitz, obtém-se:

$$T_{\parallel i}^{ref} = U \cdot S \cdot V^T = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \cdot S_1 \cdot V_1^T \quad (3.37)$$

Como já foi referido, na descrição desta ferramenta matemática, o número de valores singulares não nulos indica a ordem da matriz $T_{\parallel i}^{ref}$, que é coincidente com a dimensão da matriz A (n) e portanto, também coincidente com a ordem do modelo de estado.

Por comparação das expressões (3.36) e (3.37), verifica-se que as matrizes O_i e Γ_i^{ref} podem ser obtidas a partir das matrizes que resultam da decomposição em valores singulares, por exemplo, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 \cdot S_1^{1/2} \\ \Gamma_i^{ref} &= S_1^{1/2} \cdot V_1^T \end{aligned} \quad (3.38)$$

Com este passo, o problema de identificação fica quase resolvido, pois a partir das matrizes O_i e Γ_i^{ref} , é fácil extrair a matriz A , que caracteriza o comportamento dinâmico da estrutura.

Para identificação da matriz C , basta seleccionar as primeiras l linhas da matriz O_i . A matriz A pode ser obtida, de forma simples, multiplicando a matriz $C \cdot A$ (linhas $l+1$ até $2 \cdot l$ da matriz O_i) pela inversa da matriz C . Em vez de se usarem os dois primeiros blocos da matriz O_i , podem ser usados quaisquer par de blocos consecutivos desta matriz para a obtenção de A , pelo que um procedimento mais robusto para a sua determinação consiste em obter a matriz A que melhor respeita todos os pares de blocos. Está-se perante um problema de optimização (mais equações do que incógnitas), que pode ser representado, de forma compacta, pela seguinte equação ⁵:

$$\begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \dots \\ C \cdot A^{i-2} \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \dots \\ C \cdot A^{i-1} \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \dots \\ C \cdot A^{i-2} \end{bmatrix}^\dagger \cdot \begin{bmatrix} C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \dots \\ C \cdot A^{i-1} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

A pseudo-inversa é uma generalização da operação de inversão de matrizes: a inversão de matrizes, que só se aplica a matrizes quadradas, permite a resolução de sistemas de equações em que o número de equações é igual ao número de incógnitas ($A \cdot x = b \Leftrightarrow x = A^{-1} \cdot b$); a pseudo-inversa, que pode ser aplicada a matrizes rectangulares, permite a resolução de sistemas em que o número de equações é superior ao número de incógnitas, isto é, permite resolver problemas de optimização.

Com a equação anterior, o problema de identificação fica resolvido, pois a ordem do modelo de estado (n), que melhor representa o comportamento dinâmico da estrutura, está identificada (número de valores singulares não nulos da matriz $T_{1|l}^{ref}$) e estão identificadas as matrizes que caracterizam o modelo e a partir das quais é possível extrair as suas características dinâmicas (matrizes A e C).

⁵ O símbolo \dagger significa pseudo-inversa de Moore-Penrose. O cálculo da pseudo-inversa de uma matriz genérica (M) pode ser realizado, por exemplo, a partir da sua decomposição em valores singulares: $M = U_1 \cdot S_1 \cdot V_1^T \Rightarrow M^\dagger = V_1 \cdot S_1^{-1} \cdot U_1^T$

Para estimar os parâmetros modais da estrutura, basta realizar a decomposição em valores e vectores próprios da matriz A :

$$A = \Psi \cdot \Lambda_d \cdot \Psi^{-1} \quad (3.40)$$

Desta, resulta a matriz Ψ , que é quadrada, tem dimensão n e contém nas suas colunas os vectores próprios complexos e a matriz Λ_d , que é diagonal e contém os valores próprios em tempo discreto (μ_k). As frequências naturais ω_k e os coeficientes de amortecimento modais ξ_k podem então ser obtidos através das relações:

$$\mu_k = e^{\lambda_k \Delta t} \quad \lambda_k, \lambda_k^* = -\xi_k \omega_k \pm i \cdot \sqrt{1 - \xi_k^2} \cdot \omega_k \quad (3.41)$$

sendo λ_k um valor próprio em tempo contínuo e Δt o incremento de tempo. Finalmente, as configurações modais observáveis vêm dadas pela matriz complexa ($l \cdot n$):

$$V = C \cdot \Psi \quad (3.42)$$

Nos desenvolvimentos apresentados nesta secção foram usadas como ponto de partida as matrizes R_i^{ref} . No entanto, o que se obtém na prática são estimativas destas matrizes (\hat{R}_i^{ref}), pelo que as matrizes do sistema identificadas também têm que ser entendidas como estimativas.

Pelo facto das matrizes das correlações serem estimativas, e devido à existência de outras fontes de erro (aproximações do modelo matemático, ruído na cadeia de medição e erros numéricos) os valores singulares, que deveriam ser nulos, apresentam na prática valores residuais. Assim, a determinação da ordem do modelo tem que ser realizada por identificação de um intervalo maior entre dois valores singulares consecutivos. No entanto, em estruturas de grande dimensão, como são as de Engenharia Civil, o intervalo não é muito acentuado, sendo portanto difícil de identificar.

Para ultrapassar esta dificuldade, a solução mais adequada consiste em calcular as matrizes A e C considerando modelos com várias ordens e escolher o modelo mais adequado em função dos parâmetros modais obtidos com cada um deles. Neste processo, as frequências, os coeficientes de amortecimento e os modos de vibração extraídos das matrizes A e C correspondentes a modelos com ordens crescentes são comparados com os mesmos parâmetros modais calculados usando um modelo com ordem inferior. Se as diferenças forem inferiores a determinadas tolerâncias, a frequência respectiva é considerada estável. As frequências identificadas com base em cada um dos modelos podem ser representadas num diagrama como o representado na Figura 3.25, obtendo-se assim uma

representação gráfica que permite distinguir as frequências reais da estrutura (frequências estáveis) das que surgem devido a ruídos e erros numéricos.

Este procedimento é numericamente eficiente, pois a decomposição da matriz $T_{1|i}^{ref}$ em valores singulares só tem que ser efectuada uma vez. À partida, tem que ser definida uma dimensão máxima do modelo, pois esta condiciona o cálculo da matriz $T_{1|i}^{ref}$, dado que, para obter um modelo de dimensão n o produto $i \cdot r$ tem que ser maior que n . Após a decomposição em valores singulares da matriz $T_{1|i}^{ref}$, os modelos de diferentes ordens são obtidos incluindo diferentes números de valores e vectores singulares no cálculo das matrizes O_i e Γ_i^{ref} , a partir das quais é possível extrair os parâmetros modais.

Este método de identificação foi aplicado na identificação do pórtico plano usando um programa desenvolvido em MATLAB.

Exemplo

As séries temporais das respostas do pórtico plano de três pisos foram organizadas numa matriz de Hankel, de acordo com a expressão (3.27). A partir desta foi calculada a matriz de Toeplitz, que contém as correlações. Optou-se assim pelo método de cálculo das correlações mais demorado, mas mais rigoroso, que não recorre ao cálculo de FFT. Para ordem máxima do modelo a ajustar adoptou-se 18 e consideraram-se todos os sensores (3) como sendo de referência, pelo que $i = 18/3 = 6$.

Da decomposição em valores singulares da matriz $T_{1|i}^{ref}$, obtêm-se os 18 valores singulares representados na Figura 3.24.

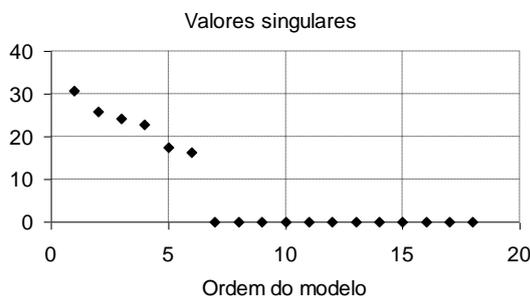


Figura 3.24 – Valores singulares

Da observação do gráfico, conclui-se que o comportamento dinâmico da estrutura é bem representado por um modelo de estado de ordem 6 (salto nos valores singulares mais acentuado), resultado que já era

expectável, pois a estrutura tem três graus de liberdade. Neste caso, a identificação é clara, pelo facto das séries temporais utilizadas serem simuladas.

De qualquer forma, as matrizes *A* e *C* foram calculadas considerando modelos de ordens compreendidas entre 1 e 18. As frequências e coeficientes de amortecimento calculados a partir destas encontram-se representados na Figura 3.25.

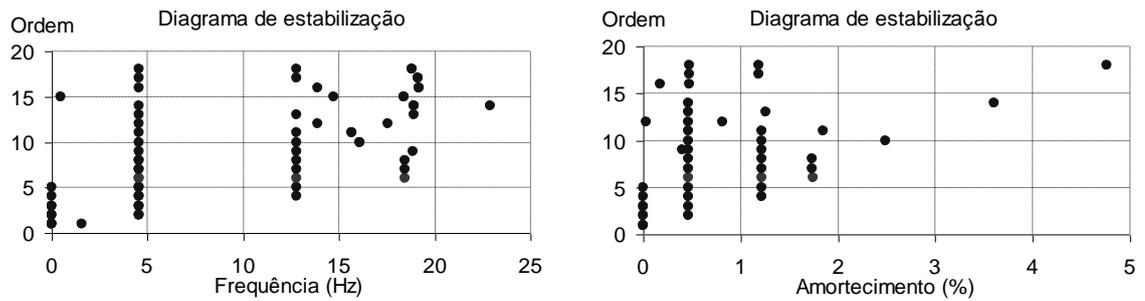


Figura 3.25 – Diagramas de estabilização

Como foram avaliados modelos correspondentes a um número não muito elevado de ordens diferentes, nos diagramas anteriores representam-se as frequências e amortecimentos estáveis e instáveis. Para problemas de maior dimensão é aconselhável representar apenas os valores estáveis, a fim de facilitar a identificação dos alinhamentos com parâmetros modais constantes.

Nos diagramas apresentados, é fácil identificar as frequências e amortecimentos que se mantêm constantes para modelos de ordens distintas e portanto identificar as frequências estruturais.

Para um modelo de ordem 6, obtêm-se as frequências e os coeficientes de amortecimento representados no quadro seguinte:

Quadro 3.4 – Frequências e coeficientes de amortecimento teóricos / identificados

Modo	Valores teóricos		Valores identificados	
	Frequência (Hz)	Coefficientes de Amortecimento	Frequência (Hz)	Coefficientes de Amortecimento
1	4.562	0.45 %	4.565	0.467 %
2	12.783	1.25 %	12.785	1.218 %
3	18.472	1.80 %	18.469	1.742 %

A matriz *V*, obtida através da expressão (3.42), é constituída por vectores coluna de números complexos, que representam as componentes dos modos de vibração. Como foi seleccionado um modelo de ordem 6, esta matriz contém seis colunas, sendo que estas se encontram agrupadas em pares de vectores complexo-

conjugados. Na Figura 3.26, representa-se a amplitude e a fase de cada par e a configuração modal respectiva.

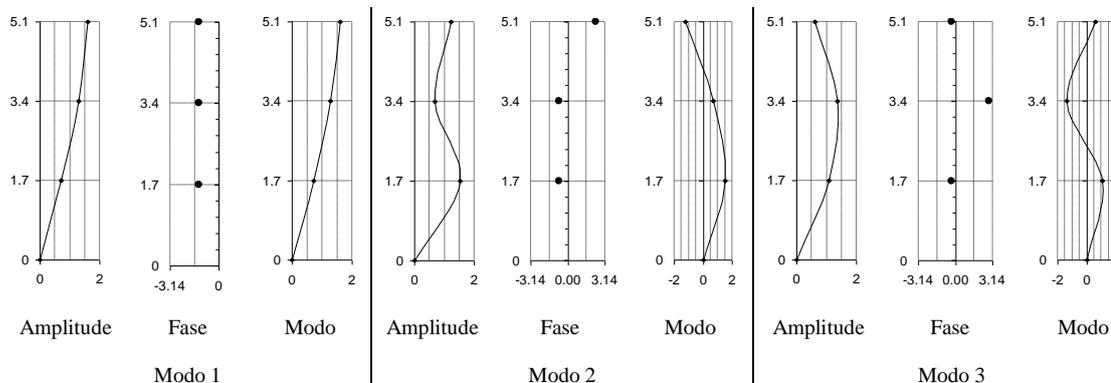


Figura 3.26 – Modos de vibração identificados

Nos gráficos anteriores, verifica-se que todas as componentes modais, de cada um dos modos, têm a mesma fase ou uma diferença de fase de π , indicando que todos os modos são reais. Tal resulta de se ter considerado um amortecimento proporcional na geração das séries temporais das respostas.

3.3.2.3 Outros métodos de identificação estocásticos a partir das correlações

Como já foi referido, em termos de identificação dos parâmetros modais as funções de correlação das respostas de uma estrutura sujeita a uma excitação do tipo ruído branco contêm uma informação semelhante à das funções de resposta a impulsos, obtidas mediante a realização de ensaios de vibração forçada. Assim, os métodos tradicionais de identificação modal de estruturas, que se baseiam nas funções de resposta impulsivas, podem ser adaptados para realizar a identificação dos parâmetros modais através de funções de correlação estimadas a partir das séries temporais adquiridas nos ensaios de vibração ambiental.

Para além do método ERA, referido no ponto anterior, existem outros métodos de identificação tradicionais que se baseiam nas funções de resposta impulsiva e que podem ser adaptados para estimar as características dinâmicas das estruturas a partir das funções de correlação. Os métodos mais relevantes são: o LSCE - “Least Squares Complex Exponencial”, o ITD - “Ibrahim Time Domain” e o PTD - “Polyreference Time Domain”, todos eles se encontram descritos na referência (Maia e Silva 1997).

Dos métodos enumerados no parágrafo anterior, o mais geral e mais correntemente usado é o PTD. A sua adaptação para o uso das correlações designa-se método das variáveis instrumentais (IV –

“Instrumental Variable”) (Peeters 2000). Este método encontra-se descrito nas referências (Peeters 2000) e (Ljung 1999), no parágrafo seguinte são apenas apontados os seus princípios fundamentais.

No método das variáveis instrumentais é realizado o ajuste de um modelo ARMAV, descrito na secção 2.4 do capítulo 2, às funções de correlação estimadas a partir das séries temporais da resposta da estrutura. Impondo a condição de que os vectores dos resíduos e_k (constituintes da parte média móvel – MA) apresentem correlações nulas com as séries temporais da resposta da estrutura, apenas os parâmetros que caracterizam a parte auto-regressiva (AR) têm que ser determinados através dum problema de mínimos quadrados. Como já foi referido no capítulo 2, a partir da parte AR é possível identificar os parâmetros modais da estrutura. A ordem do modelo necessária para caracterizar adequadamente o comportamento dinâmico da estrutura e para acomodar os modos numéricos pode ser determinada recorrendo a diagramas de estabilização, tal como no método SSI-COV.

3.3.3 Métodos de identificação estocástica a partir das séries temporais

3.3.3.1 Método de identificação estocástica em sub-espacos a partir das séries temporais

O método de identificação estocástica em sub-espacos a partir das séries temporais, designado de forma abreviada SSI-DATA (“DATA-driven Stochastic Subspace Identification”), identifica um modelo de estado, igual ao identificado pelo método SSI-COV, directamente a partir das séries temporais da resposta da estrutura.

Este método de identificação encontra-se implementado em dois programas: MACEC (Branden et al. 1999) e ARTEMIS (SVS 1999-2004). O programa MACEC é uma “toolbox” do MATLAB que foi desenvolvida na Universidade Católica de Leuven. O programa ARTEMIS é um programa comercial que funciona em ambiente “Windows” e que foi implementado por investigadores da Universidade de Aalborg. O ambiente bastante amigável destes programas e a muito boa qualidade dos resultados obtidos, têm motivado a crescente aplicação deste método na identificação de estruturas de Engenharia Civil. A título de exemplo referem-se as seguintes aplicações: (Ren et al. 2004) e (Cunha et al. 2004).

Neste ponto são justificados os passos fundamentais da versão do método baseada em sensores de referência, que foi desenvolvida por Bart Peeters (Peeters 2000), tomando como ponto de partida os algoritmos descritos no livro (Overschee e Moor 1996). A eficiência desta versão pode ser confirmada nas aplicações a estruturas de Engenharia Civil que são descritas na referência (Peeters e Roeck 2000).

Filtros de Kalman

Neste método, os filtros de Kalman desempenham um papel fundamental. Aqui apenas serão apresentadas as propriedades do filtro de Kalman não estacionário, essenciais para justificar o método de identificação. Desenvolvimentos mais detalhados podem ser encontrados nas referências (Juang 1994; Overschee e Moor 1996). O objectivo do filtro de Kalman não estacionário é produzir uma previsão óptima do vector de estado (x_{k+1}) utilizando as respostas medidas da estrutura até ao instante k e as matrizes A , C , R_0 e G , caracterizadas no capítulo 2. A previsão do vector de estado representa-se por \hat{x}_{k+1} e é obtida a partir das fórmulas recursivas definidas em (3.43), considerando os valores iniciais do vector de estado (\hat{x}_0) e da sua matriz de correlação (P_0) nulos.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A \cdot \hat{x}_k + K_k \cdot (y_k - C \cdot \hat{x}_k) \\ K_k &= (G - A \cdot P_k \cdot C^T) \cdot (R_0 - C \cdot P_k \cdot C^T)^{-1} \\ P_{k+1} &= A \cdot P_k \cdot A^T + (G - A \cdot P_k \cdot C^T) \cdot (R_0 - C \cdot P_k \cdot C^T)^{-1} \cdot (G - A \cdot P_k \cdot C^T)^T \end{aligned} \quad (3.43)$$

As matrizes K e P são a matriz de ganho do filtro de Kalman e a matriz das correlações dos vectores de estado, respectivamente.

As estimativas do vector de estado do filtro de Kalman podem ser agrupadas de acordo com a expressão (3.44), formando uma matriz de dimensão $n \cdot N$, que se designa sequência de estado de filtro de Kalman.

$$\hat{X}_i = [\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N-1}] \quad (3.44)$$

As colunas desta matriz são estimativas de vectores de estado que apenas usam os últimos i vectores das respostas. Isto é, a estimativa do elemento \hat{x}_{i+q} apenas usa os seguintes i elementos de y : $y_q, y_{q+1}, \dots, y_{q+i-1}$.

Projecções e factorização QR

No método de identificação SSI-DATA, o cálculo das correlações é substituído pelo cálculo da projecção do espaço vectorial gerado pelas linhas da matriz Y_f no espaço vectorial gerado pelas linhas da matriz Y_p^{ref} (as matrizes Y_f e Y_p^{ref} são definidas na equação (3.27)). A projecção das respostas futuras (Y_f) nas respostas passadas, medidas nos sensores de referência (Y_p^{ref}), pode ser interpretada como uma operação matemática, que apenas retém a informação das séries temporais passadas, que é importante para prever as séries temporais futuras. O objectivo da projecção é assim semelhante ao da correlação: eliminar o ruído.

Na expressão (3.45), apresenta-se a notação usada para a projecção, bem como a sua definição matemática.

$$P_j^{ref} = Y_f / Y_p^{ref} = Y_f \cdot Y_p^{refT} \cdot \left(Y_p^{ref} \cdot Y_p^{refT} \right)^\dagger \cdot Y_p^{ref} \quad (3.45)$$

A expressão usada para a definição da projecção, pelo facto de ser computacionalmente pouco eficiente, não é adequada para o seu cálculo, sendo portanto necessário recorrer a factorização QR.

A factorização QR é um algoritmo robusto que decompõe qualquer matriz no produto de uma matriz triangular inferior (R) por uma matriz ortogonal⁶ (Q). Se for realizada a factorização QR da matriz H^{ref} , definida pela expressão (3.27), obtém-se:

$$H^{ref} = \begin{bmatrix} Y_p^{ref} \\ Y_f \end{bmatrix} = R \cdot Q^T \quad (3.46)$$

A matriz R tem dimensão $(r+l) \cdot i \cdot N$, mas, como o número de colunas é superior ao número de linhas, a matriz triangular inferior apresenta colunas só com elementos nulos, que podem ser eliminadas. A matriz Q tem dimensão $N \cdot N$, no entanto, os elementos em correspondência com os zeros de R também podem ser eliminados. Após estas simplificações e um agrupamento dos elementos das matrizes, de acordo com a organização utilizada na expressão (3.28), obtém-se:

$$H^{ref} = \begin{matrix} r \cdot i \\ r \\ l - r \\ l \cdot (i - 1) \end{matrix} \begin{matrix} \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \end{bmatrix} \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \\ \Downarrow \end{matrix} \begin{matrix} r \cdot i \\ r \\ l - r \\ l \cdot (i - 1) \end{matrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ r \cdot i & r & l - r & l \cdot (i - 1) & N \end{matrix}$$

Se esta factorização for introduzida na expressão (3.45), obtém-se uma expressão muito mais simples para a projecção:

⁶ Uma matriz M ortogonal respeita a seguinte propriedade: $M \cdot M^T = D$, sendo D uma matriz diagonal.

$$Pj_i^{ref} = \begin{bmatrix} R_{21} \\ R_{31} \\ R_{41} \end{bmatrix} \cdot Q_1^T \quad (3.48)$$

Princípios do método de identificação

O teorema principal da identificação estocástica por subespaços (Overschee e Moor 1996) diz que a matriz que resulta da projecção pode ser factorizada no produto da matriz de observabilidade (3.36) pela sequência de vectores de estado de filtro de Kalman (3.44):

$$Pj_i^{ref} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \dots \\ C \cdot A^{i-1} \end{bmatrix} \cdot [\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N-1}] = O_i \cdot \hat{X}_i \quad (3.49)$$

Por outro lado, da decomposição em valores singulares da matriz que resulta da projecção, obtém-se:

$$Pj_i^{ref} = U \cdot S \cdot V^T = [U_1 \quad U_2] \cdot \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 \cdot S_1 \cdot V_1^T \quad (3.50)$$

A matriz Pj_i^{ref} tem ordem n , pois resulta da multiplicação de uma matriz com n colunas (O_i) por uma matriz com n linhas (\hat{X}_i), pelo que o número de valores singulares diferentes de zero que resultam da sua decomposição, também é n (dimensão da matriz A). Assim, o número de valores singulares não nulos indica a ordem do modelo que melhor representa o comportamento dinâmico da estrutura em análise.

As matrizes O_i e \hat{X}_i podem ser obtidas através das seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 \cdot S_1^{1/2} \\ \hat{X}_i &= O_i^\dagger \cdot Pj_i^{ref} \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para identificar as matrizes A e C , é necessário calcular uma nova projecção, desta vez com as respostas passadas e futuras divididas de acordo com a expressão (3.28):

$$Pj_{i-1}^{ref} = Y_f^- / Y_p^{ref+} = [R_{41} \quad R_{42}] \cdot \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

A primeira igualdade define a projecção, a segunda explicita o seu cálculo através dos blocos que resultam da factorização de H^{ref} . Esta projecção pode ser decomposta, de forma semelhante à que foi realizada na expressão (3.49):

$$P_{i-1}^{ref} = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \\ \dots \\ C \cdot A^{i-2} \end{bmatrix} \cdot [\hat{x}_{i+1} \quad \hat{x}_{i+2} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+N}] = O_{i-1} \cdot \hat{X}_{i+1} \quad (3.53)$$

A partir desta igualdade, facilmente se obtém a sequência de vectores de estado \hat{X}_{i+1} :

$$\hat{X}_{i+1} = O_{i-1}^\dagger \cdot P_{i-1}^{ref} \quad (3.54)$$

As matrizes A e C podem ser alcançadas através da resolução do sistema de equações que resulta da generalização das equações que caracterizam os modelos de estado estocásticos (3.34):

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \cdot \hat{X}_i + \begin{bmatrix} W_i \\ V_i \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Se apenas fosse usada uma estimativa do vector de estado o sistema era determinado. Usando uma sequência de vectores de estado, obtém-se um sistema com mais equações do que incógnitas. Trata-se, portanto, de um problema de optimização em que as sequências W_i e V_i podem ser interpretadas como os resíduos. Este problema de optimização pode ser resolvido com a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_{i+1} \\ Y_{i|i} \end{bmatrix} \cdot \hat{X}_i^\dagger \quad (3.56)$$

Note-se que, as sequências de vectores de estado \hat{X}_i e \hat{X}_{i+1} podem ser obtidas usando apenas as respostas da estrutura (expressões (3.51) e (3.54)), e que $Y_{i|i}$, que é uma matriz de Henkel com apenas um bloco de linhas, também pode ser obtida a partir da factorização QR da matriz H^{ref} :

$$Y_{i|i} = \begin{bmatrix} R_{21} & R_{22} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

É interessante observar que, substituindo os elementos da equação (3.56) pelas suas expressões em função dos blocos que resultam da factorização de H^{ref} , os blocos Q se anulam. Este facto é importante pois permite poupar algum esforço de cálculo na factorização QR , que é a operação matemática mais pesada deste algoritmo de identificação.

Após a identificação das matrizes A e C , o problema de identificação fica resolvido pois, a partir delas, podem ser obtidas as frequências naturais, os amortecimentos modais e as configurações modais através das equações (3.40), (3.41) e (3.42).

O problema de identificação da ordem do modelo que se punha no método SSI-COV, também se coloca nesta metodologia. A forma de o resolver é a mesma: construção de diagramas de estabilização, obtidos a partir de matrizes A e C , calculadas considerando diferentes números de valores singulares. Claro que é necessário garantir que a matriz H^{ref} possibilita a identificação de um modelo com uma ordem máxima definida pelo utilizador ($n_{máx}$). Para tal, o número de linhas da partição $Y_p(r \cdot i)$ tem que ser superior a $n_{máx}$.

Variantes do método de identificação

No algoritmo apresentado não foi realizada qualquer ponderação da matriz Pj_i^{ref} . No entanto, na formulação mais geral do método de identificação SSI-DATA, são consideradas duas matrizes de ponderação W_1 e W_2 , que são multiplicadas pela matriz Pj_i^{ref} antes de realizar a sua decomposição em valores singulares:

$$Pj_i^{ref} \text{ ponderada} = W_1 \cdot Pj_i^{ref} \cdot W_2 \quad (3.58)$$

Esta operação de ponderação introduz uma transformação de coordenadas do vector de estado, tal como as descritas no capítulo 2, originando matrizes do modelo similares, que conduzem a resultados do processo de identificação idênticos.

No Quadro 3.5, apresentam-se as matrizes de ponderação de cada uma das variantes (UPC – componente principal não ponderada; PC – componente principal; CVA – análise canónica):

Quadro 3.5 – Matrizes de ponderação das variantes do método SSI-DATA

Variante	$W_1 (il \cdot il)$	$W_2 (N \cdot N)$
UPC	I	I
PC	I	$Y_p^{refT} \cdot \left(Y_p^{ref} \cdot Y_p^{refT} \right)^{-1/2} \cdot Y_p^{ref}$
CVA	$\left(Y_f \cdot Y_f^T \right)^{-1/2}$	I

Os valores singulares que resultam de cada uma das variantes têm significados diferentes. Por exemplo, os que resultam da variante CVA podem ser interpretados como os co-senos dos ângulos principais entre dois espaços vectoriais: o espaço vectorial gerado pelas linhas da matriz Y_f e o espaço vectorial gerado pelas linhas da matriz Y_p .

De seguida realiza-se uma aplicação deste método de identificação usando o “software” comercial ARTEMIS.

Exemplo

Foram aplicadas, às séries temporais das respostas simuladas para o pórtico plano, as três variantes do método SSI-DATA (UPC, PC e CVA), considerando os três sensores de referência, e a variante CVA, considerando apenas um sensor de referência. Para todos os casos foram estimados modelos de ordens compreendidas entre 1 e 18.

A título de exemplo mostram-se, na Figura 3.27, os valores singulares, resultantes da aplicação da variante CVA considerando todos os sensores como sendo de referência, que permitem identificar a ordem do modelo. Os resultados são semelhantes para todas as análises efectuadas e estão de acordo com o que era expectável: uma estrutura com 3 graus de liberdade é bem representada por um modelo de estado de ordem 6.

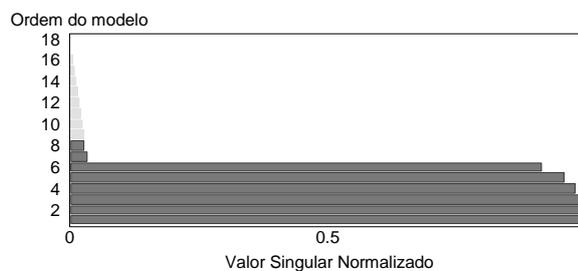


Figura 3.27 – Valores singulares resultantes da aplicação do método SSI-DATA, variante CVA

Na Figura 3.28 representa-se o diagrama de estabilização para o mesmo caso de análise. São representadas todas as frequências identificadas (obtidas a partir dos valores próprios da matriz A), sendo destacadas com o símbolo + as estáveis. No gráfico, é sobreposto o espectro normalizado médio, para mostrar a correspondência entre os picos deste e as frequências identificadas.

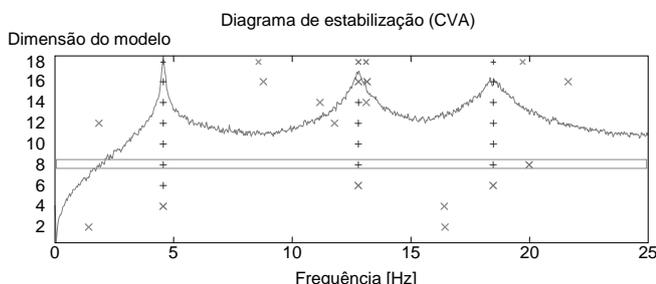


Figura 3.28 – Diagrama de estabilização de aplicação da variante CVA

No Quadro 3.6, comparam-se os resultados obtidos através das diferentes variantes apresentadas, considerando um modelo de ordem 8 (seleccionado no diagrama da estabilização).

Quadro 3.6 – Frequências e coeficientes de amortecimento identificados

Modo	UPC (3 ref.)		PC (3 ref.)		CVA (3 ref.)		CVA (1 ref.)	
	Freq. (Hz)	Coef. de Amort.	Freq. (Hz)	Coef. de Amort.	Freq. (Hz)	Coef. de Amort.	Freq. (Hz)	Coef. de Amort.
1	4.56	0.47 %	4.56	0.47 %	4.56	0.47 %	4.56	0.46 %
2	12.78	1.22 %	12.78	1.22 %	12.78	1.22 %	12.78	1.23 %
3	18.47	1.72 %	18.47	1.75 %	18.47	1.73 %	18.46	1.81 %

Da análise do quadro, verifica-se que os resultados são bastante coerentes (diferenças sempre inferiores a 5 %), sendo, no entanto, as diferenças mais significativas nas estimativas dos coeficientes de amortecimento. É de realçar o facto dos resultados, que se baseiam na utilização de apenas um sensor de referência, corresponderem igualmente a boas estimativas dos valores teóricos, conseguidas com um esforço de cálculo muito inferior.

As configurações modais, que resultam da aplicação das diferentes variantes, são praticamente coincidentes com as configurações teóricas.

3.3.3.2 Outros métodos de identificação estocásticos a partir das séries temporais

As séries temporais da resposta da estrutura a acções ambientais podem ser directamente usadas para estimar modelos ARMAV, tal foi explorado pelos seguintes autores: (Andersen 1997) e (Piombo et al. 1993).

O ajuste do modelo teórico aos dados experimentais, ou seja, a identificação dos parâmetros que caracterizam os modelos ARMAV, é realizado através do método do erro de predição. Este método minimiza os erros de predição, que quantificam a parte da resposta observada da estrutura, que não consegue ser explicada pela resposta da estrutura em instantes anteriores. No entanto, este problema de optimização é altamente não linear, estando portanto associados à sua resolução os erros clássicos deste tipo de problemas: possibilidade de divergência, mínimos locais que podem ser interpretados como mínimos globais e uma elevada carga computacional.

Uma vez que a não linearidade patente no ajuste de modelos ARMAV aos dados experimentais é essencialmente motivada pela parte de média móvel do modelo, podem ser adoptados, em alternativa, modelos ARV, isto é, modelos constituídos apenas pelos termos da parte auto-regressiva. Tal é viável, pois, como já foi referido, os parâmetros modais podem ser extraídos apenas a partir dos parâmetros AR. A utilização destes modelos reduz o problema de optimização a um simples problema de mínimos quadrados linear. No entanto, para um modelo ARV ser equivalente a um modelo ARMAV é necessário que a sua ordem seja infinita. Na prática, tal obriga a que sejam adoptados modelos de ordens muito elevadas. Como consequência são introduzidos muitos modos numéricos, cuja diferenciação dos modos estruturais não é fácil.

Pelos problemas referidos nos parágrafos anteriores e pelo facto do método SSI-DATA estar implementado em “software” de fácil utilização, os modelos ARMAV e ARV têm perdido importância nas aplicações de Engenharia Civil.

3.4 Considerações finais

Neste capítulo foram descritos os princípios teóricos fundamentais e as etapas principais da implementação dos quatro métodos de identificação modal, baseados na resposta das estruturas a acções ambientais, que na actualidade se têm mostrado mais interessantes: método da selecção de picos (PP), método da decomposição no domínio da frequência (FDD), método de identificação estocástica em sub-espacos a partir das correlações (SSI-COV) e método de identificação estocástica em sub-espacos a partir das séries temporais (SSI-DATA). Os métodos que se consideram menos promissores, em termos de aplicação às estruturas de Engenharia Civil, foram apenas referidos de forma sucinta.

A simplicidade do exemplo de aplicação não permitiu que com ele fossem realçadas as deficiências e os pontos fortes de cada um dos métodos de identificação. Tal será realizado no capítulo quatro, onde é feita a sua aplicação a dados reais de diferentes estruturas. No entanto, os fundamentos teóricos de cada um deles permitem antever as suas virtualidades e defeitos. Estes são brevemente referidos nos parágrafos que se seguem.

O método da selecção de picos é um método de fácil implementação, aplicação e interpretação de resultados, razões pelas quais continua ser na actualidade o método mais usado nas aplicações de Engenharia Civil. Por se tratar de um método relativamente simples, tem alguma dificuldade em identificar modos de vibração com frequências naturais próximas e só conduz a bons resultados quando os coeficientes de amortecimento modais são baixos. As estimativas dos coeficientes de amortecimento modais, que resultam da aplicação do método da meia potência, são de fraca qualidade. Pelas razões apontadas, é um método adequado para realizar um tratamento da informação dos ensaios mais expedito, que pode ser realizado praticamente em tempo real.

O método de decomposição no domínio da frequência, na sua versão mais desenvolvida, colmata as duas principais falhas do método da selecção de picos: permite a identificação de modos de vibração com frequências naturais próximas e permite a obtenção de boas estimativas dos coeficientes de amortecimento modais. Este método também proporciona uma fácil interpretação física dos seus passos e resultados intermédios. Tal como todos os métodos no domínio da frequência, o método EFFD é afectado pelos erros associados à realização de transformadas finitas discretas de Fourier, sendo que, o erro de “leakage” conduz a uma sobre-estimação dos coeficientes de amortecimento modais.

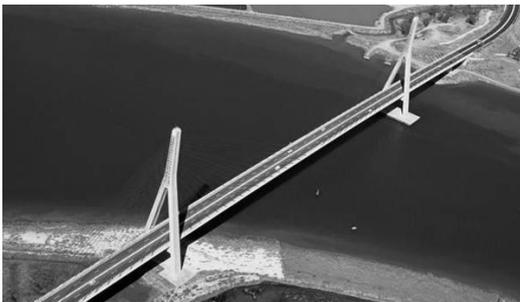
O método SSI-COV tem como passo inicial e essencial para a sua boa “performance”, a estimativa das funções de correlação da resposta da estrutura observada. Para tal estimativa foram apresentadas e implementadas em MATLAB três formulações alternativas: cálculo directo através do somatório, estimativa a partir da FFT inversa de espectros e através do decaimento aleatório. A primeira tem a desvantagem de exigir um elevado tempo de cálculo; a segunda é mais rápida, mas é afectada pelos erros de “leakage” e “aliasing”; a estimativa através do decaimento aleatório é mais rápida que a estimativa directa e não é perturbada pelos erros associados à aplicação dos algoritmos FFT e FFT inversa. O método SSI-COV conduz a bons resultados. No entanto, tem a desvantagem de não ser tão facilmente interpretado como os métodos no domínio da frequência.

O método SSI-DATA, tal como o método SSI-COV, é baseado no ajuste de modelos de estado e portanto, tal como no anterior, na sua implementação são utilizados conceitos pouco dominados pela comunidade de engenheiros civis. As ferramentas matemáticas por ele utilizadas também tornam a sua aplicação computacionalmente bastante mais exigente que os restantes. Contudo, o esforço de cálculo superior é compensado pelo seu melhor comportamento numérico, em relação ao método SSI-COV, e pelo facto de com este ser possível a separação da resposta observada em respostas modais (Peeters 2000).

Diversos trabalhos de comparação da “performance” dos diferentes métodos foram já realizados. Destes destacam-se os seguintes trabalhos: um estudo onde várias equipas de investigadores usaram diferentes técnicas para realizar a identificação dos parâmetros modais de um edifício (Horyna e Ventura 2000); a identificação da ponte Suíça Z24 (Andersen et al. 1999); a análise dos dados resultantes dos ensaios dinâmicos da ponte Vasco da Gama (Cunha et al. 2004; Peeters et al. 2002). Da comparação dos resultados fornecidos pelos diferentes métodos de identificação, pode-se concluir que, se a sua aplicação foi realizada com critério, todos conduzem a frequências naturais e configurações modais semelhantes, sendo contudo, nos métodos mais simples, necessário realizar algum pré-processamento das séries temporais, baseado na interpretação do comportamento da estrutura em análise. No entanto, nas estimativas dos coeficientes de amortecimento modais surgem algumas diferenças.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES



4. APLICAÇÕES

4.1 Introdução

O presente capítulo está dividido em três secções, onde são descritas três aplicações distintas dos métodos de identificação descritos no capítulo 3.

Na primeira secção são descritos ensaios de vibração ambiental em pontes, onde é aplicado o método da selecção de picos. Nesta secção é apresentado um “software” desenvolvido em MATLAB para automatizar o tratamento da informação recolhida em ensaios de vibração ambiental de pontes ou viadutos relativamente simples, onde é suficiente a aplicação do método da selecção de picos.

Na secção seguinte é mostrada uma primeira aplicação do método FFD, na sua versão base e melhorada, e do método SSI-DATA a dados reais, sendo os seus resultados comparados com os que resultam da aplicação do método da selecção de picos. Para tal, foi utilizado um pequeno modelo físico de uma estrutura de um edifício, que já serviu de inspiração para o pórtico plano usado nas aplicações do capítulo 3. Com esta aplicação procurou-se analisar as limitações e potencialidades de cada um dos métodos, realçando a importância da correcta selecção dos parâmetros a definir pelo analista.

Finalmente, na última secção é descrito o ensaio de vibração ambiental realizado na Ponte Internacional do Guadiana e é efectuada a análise da informação recolhida. Esta constitui a aplicação mais relevante deste trabalho, pois refere-se ao ensaio de uma estrutura de grandes dimensões e são aplicados três métodos distintos de identificação: método da selecção de picos, FDD e SSI-DATA. Na análise apresentada são exploradas as potencialidades e limitações de cada uma das técnicas, sendo dada particular ênfase à identificação dos coeficientes de amortecimento modais.

Neste capítulo são utilizados conceitos básicos de análise e processamento de sinal, que, pelo facto de já se encontrarem bem explicados em bibliografia existente (Caetano 1992; Maia e Silva 1997), não são aqui descritos.

Os equipamentos utilizados na realização de ensaios dinâmicos também não são descritos com grande detalhe neste trabalho, sendo apenas referidas as características principais dos transdutores usados. Uma apresentação dos diferentes tipos de equipamentos existentes no mercado pode ser encontrada na referência (Caetano 2000).

4.2 Ensaios de vibração ambiental de pontes utilizando o método da selecção de picos

4.2.1 Introdução

A identificação modal de pontes e viadutos rodoviários ou ferroviários com base na realização de ensaios de vibração ambiental tem ganho um interesse e popularidade crescentes ao longo dos últimos anos, possibilitando uma estimativa bastante rigorosa dos parâmetros dinâmicos mais representativos da estrutura na fase de recepção. Assim, é importante estabelecer procedimentos que permitam uma rápida realização do ensaio e conseqüente tratamento da informação recolhida.

A realização de ensaios de vibração ambiental leva à aquisição automática de um grande volume de informação experimental, cujo tratamento requer a aplicação de técnicas adequadas de análise e processamento de sinal e de identificação de sistemas. Com o objectivo de realizar esse tratamento de forma automática, sem contudo retirar ao utilizador a possibilidade de manipular todas as variáveis, foram desenvolvidas rotinas em MATLAB que, a partir das séries temporais das acelerações medidas na estrutura sujeita a excitações ambientais, permitem efectuar a identificação das suas frequências próprias e correspondentes modos de vibração por aplicação do método da selecção de picos.

Uma vez que o objectivo principal é a realização do ensaio de forma expedita, nas estruturas analisadas apenas são realizadas medições segundo um alinhamento longitudinal e apenas é usado um ponto de referência. Este procedimento não permite a determinação de modos de torção e exige que o ponto de referência seja posicionado com critério, para evitar que fique sobre nodos de modos importantes.

4.2.2 Programa desenvolvido

Tendo em vista a automatização do tratamento da informação colhida num ensaio de vibração ambiental, foi desenvolvido um programa que é constituído pelas seguintes rotinas: *preteva*, *teva* e *posteva*.

A rotina *preteva* recolhe as séries temporais das acelerações registadas nos ficheiros gravados no equipamento de aquisição, realiza o seu pré-processamento e identifica em cada registo o máximo, o mínimo e o desvio padrão, que são indicadores do nível de sinal recolhido. Para o pré-processamento foram implementadas as seguintes operações:

- eliminação de tendência – elimina qualquer eventual tendência linear do sinal, através da realização de um ajuste linear à série temporal colhida;
- aplicação de filtros – permite eliminar, numa série temporal, o contributo de um determinado intervalo de frequências, tal pode ser realizado usando diferentes tipos de filtros (Butterworth, Chebyshev ou Bessel);
- decimação – filtra as séries temporais por um filtro passa-baixo e amostra-as com uma frequência inferior, permitindo a eliminação de informação que não é necessária para a análise.

A função *teva*, para os diferentes pares de séries temporais (acelerações de cada ponto instrumentado e acelerações do ponto de referência), calcula os espectros de potência normalizadas de ambos os sinais, a função de transferência entre eles e a correspondente função de coerência. A partir dos espectros de potência normalizados, calcula o espectro de potência médio normalizado e apresenta o seu gráfico, sobre o qual se podem identificar manualmente as frequências próprias da estrutura. As amplitudes e fases das funções de transferência, relacionando a resposta em cada um dos pontos instrumentados da estrutura com a do ponto de referência, e as funções de coerência, são armazenadas em matrizes de dimensão: $nf \cdot ns$, sendo nf o número de pontos que definem as funções e ns o número de pontos instrumentados.

A rotina *posteva* exporta as matrizes anteriores para o Excel, onde, de forma automática, a partir de uma geometria previamente definida para a estrutura, são desenhados, para a frequência desejada (uma das frequências próprias da estrutura), os gráficos de variação da amplitude da função de transferência, da fase respectiva e da coerência ao longo da estrutura. A amplitude e a fase da função de transferência conduzem ao traçado dos modos, proporcionando a coerência uma ideia do erro associado à estimativa de cada ordenada modal.

4.2.3 Exemplos de aplicação

Nesta secção são apresentadas três aplicações do programa descrito. Para a primeira são descritos os procedimentos de ensaio, são apresentados os resultados obtidos e são comparados os parâmetros modais experimentais com os numéricos. Em relação as outras duas aplicações, realiza-se apenas uma descrição dos principais resultados obtidos através dos seus ensaios de vibração ambiental.

4.2.3.1 Ponte sobre o Rio Vouga

Caracterização da estrutura

A Ponte sobre o rio Vouga, situada na estrada Portuguesa E329, é uma ponte em curva circular de raio $R = 500$ m, cujo tabuleiro é constituído por cinco vigas pré-fabricadas com secção em “I”, em betão armado pré-esforçado de altura constante ($h = 1,70$ m), ligadas entre si por lajes de betão armado com espessura constante de 0,25 m (incluindo as pré-lajes) em toda a largura do tabuleiro. As vigas estão solidarizadas por carlingas nas secções dos apoios e vencem dois vãos extremos com 25 m e 5 vãos intermédios de 36 m, que se apoiam, em toda a largura do tabuleiro, numa viga de encabeçamento construída sobre dois pilares de secção circular com diâmetro de 2,00 m, que por sua vez fundam no maciço xistoso através de sapatas. O tabuleiro apoia-se nas vigas de encabeçamento e encontros mediante aparelhos de apoio em aço do tipo “panela”, fixos na direcção transversal e longitudinal exceptuando os dois apoios de extremidade, que são móveis nesta última direcção (Costa et al. 2003).



Figura 4.1 – Vista geral da ponte e vista inferior do tabuleiro.

Metodologia e equipamento utilizado no ensaio

Foram considerados 27 pontos de medida sobre o tabuleiro, correspondendo a uma divisão de cada vão em quatro partes iguais, dispostos segundo um alinhamento em correspondência com o eixo do tabuleiro (Figura 4.2 e Figura 4.3).

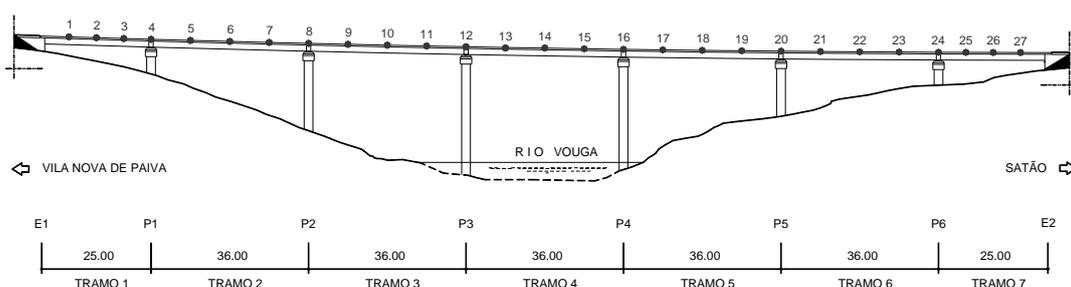


Figura 4.2 – Localização dos 27 pontos de medida sobre o tabuleiro.

A medição da resposta dinâmica da ponte a acções de carácter ambiental foi efectuada com recurso a quatro sismógrafos, munidos de acelerómetros triaxiais de tipo “force-balance” e conversores analógico-digitais de 18 bit. Os acelerómetros do tipo “force-balance” permitem a medição de frequências a partir de zero (DC) e os conversores analógico-digitais garantem a medição de acelerações entre -0,5g e +0,5g com uma resolução de $4 \cdot 10^{-6}g$. É a boa resolução destes equipamentos que permite a sua utilização em ensaio de vibração ambiental de pontes com elevada rigidez.



Figura 4.3 – Colocação dos sismógrafos sobre o tabuleiro durante o ensaio de vibração ambiental

No Quadro 4.1 apresentam-se os valores máximos das acelerações registadas durante o ensaio nos diferentes pontos de medição, na Figura 4.4 representa-se um segmento de uma das séries temporais de aceleração vertical recolhidas no ponto 13. Verifica-se que os valores da aceleração são bastante baixos, estando, no entanto, ainda longe do limite de resolução dos acelerómetros.

Quadro 4.1 – Valores máximos das séries temporais das acelerações colhidas

Ponto	Transv.(mg)	Vert.(mg)
1	0.29	0.77
2	0.16	0.73
3	0.12	0.62
4	0.36	0.28
5	0.11	0.99
6	0.43	0.71
7	0.38	0.65
8	0.13	0.23
9	0.34	0.54
10	0.38	1.72
11	0.27	1.30
12	0.22	0.82
13	0.89	6.24

Ponto	Transv.(mg)	Vert.(mg)
14	0.64	1.60
15	0.21	1.05
16	0.17	0.35
17	0.52	1.29
18	0.43	1.71
19	0.47	1.52
20	1.93	0.87
21	2.32	8.19
22	2.06	11.74
23	0.58	1.63
24	0.14	0.34
25	0.15	0.52
26	0.44	2.99
27	0.53	3.03

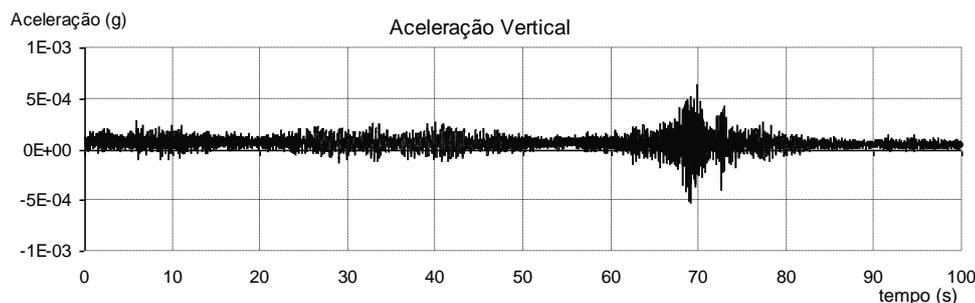


Figura 4.4 – Segmento de uma série temporal da aceleração vertical registada no ponto 13

Em cada “setup”, um dos sismógrafos foi posicionado de forma fixa sobre o ponto 13 (sensor de referência), enquanto os outros três funcionaram como sensores móveis, sendo sucessivamente colocados ao longo dos restantes 26 pontos de medida. A aquisição foi efectuada com uma frequência de amostragem de 100 Hz e por períodos de 8 minutos, tendo em vista a obtenção de estimativas espectrais com resolução em frequência de 0,024 Hz, pressupondo a realização de 20 médias e a consideração de uma taxa de “overlapping” de 50%. A sincronização dos sismógrafos foi conseguida através do relógio interno de um computador portátil, mediante a programação dos disparos (Magalhães et al. 2003).

Parâmetros modais identificados

Com base nos registos temporais colhidos em cada um dos “setups” de ensaio, foram construídos os espectros de potência médios normalizados para a direcção vertical e transversal (horizontal e perpendicular ao eixo da ponte) abrangendo a totalidade dos 27 pontos de medida do tabuleiro, os quais se encontram representados na Figura 4.5.

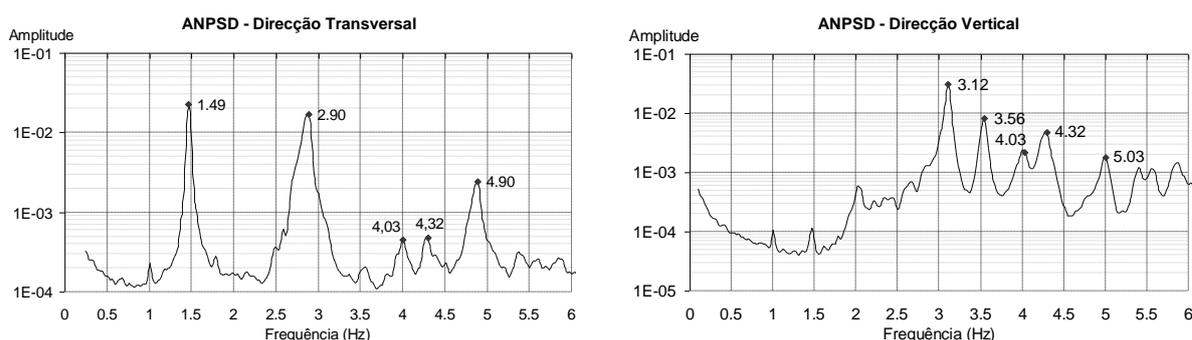


Figura 4.5 – Espectros de potência médios normalizados

A análise dos picos dos espectros médios relativos às direcções vertical e transversal permite constatar a existência de um número significativo de modos de vibração globais na banda de frequências de maior interesse (0 - 6Hz). No Quadro 4.2, resumem-se os valores das frequências naturais mais

significativas identificadas nesta gama de frequências, bem como o tipo de modo de vibração (de flexão vertical e/ou transversal) que lhe está associado.

Quadro 4.2 – Frequências naturais identificadas

Frequência (Hz)	Tipo de modo
1.49	Transversal
2.90	Transversal
3.12	Vertical
3.56	Vertical
4.03	Vertical (*)
4.32	Vertical (*)
4.90	Transversal
5.03	Vertical

(*) - componente dominante

As estimativas espectrais médias obtidas a partir da medição da resposta ambiental nos 27 pontos considerados sobre o tabuleiro foram utilizadas na construção das funções de transferência relacionando a resposta medida em cada ponto de referência e nos diversos pontos de medida móveis. Uma inspeção destas funções de transferência permitiu, por seu turno, obter estimativas de um número significativo de modos de vibração. Na Figura 4.6 e na Figura 4.7, representam-se os principais modos de vibração identificados ao nível do tabuleiro (os símbolos ● e ◆ estão em correspondência com os pontos de apoio do tabuleiro nos pilares). Apenas se apresentam os modos relativos às frequências com um contributo mais significativo para a resposta medida (representadas a negrito no Quadro 4.2).

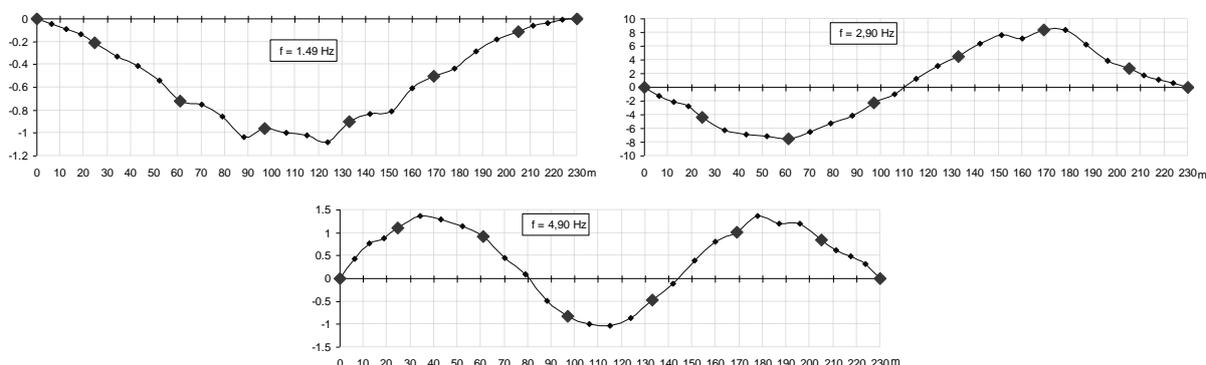


Figura 4.6 – Modos de vibração transversais identificados (representação em planta)

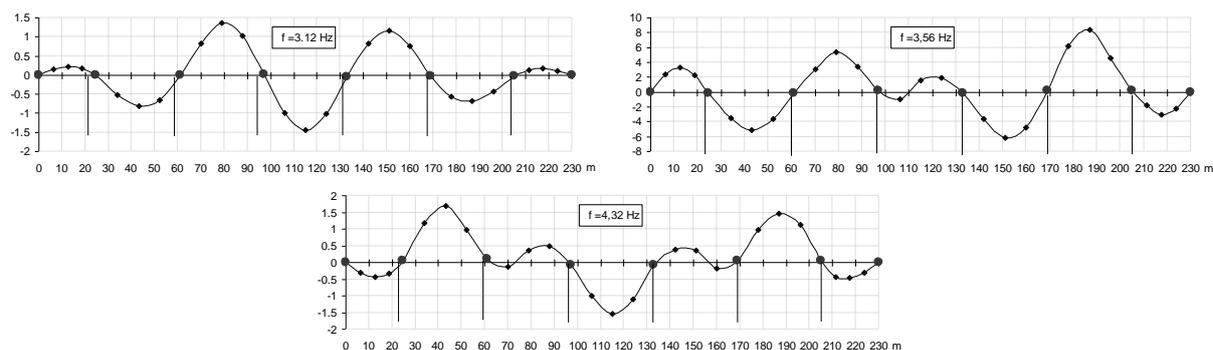


Figura 4.7 – Modos de vibração verticais identificados (representação em alçado).

Correlação com o modelo numérico

Com o intuito de preparar o ensaio de vibração ambiental e de analisar o grau de correlação verificado entre parâmetros modais identificados experimentalmente e calculados numericamente, foi usado um modelo numérico desenvolvido no âmbito do ensaio estático (Costa et al. 2003), sobre o qual se realizou uma análise modal de forma a extrair frequências naturais e modos de vibração.

O modelo numérico é um modelo tridimensional constituído por elementos de barra para representar os pilares, as vigas pré-esforçadas e as carlingas e por elementos de casca para simular a laje que repousa sobre as vigas pré-esforçadas. Foram adoptadas as características mecânicas dos materiais que são apresentadas na memória de cálculo.

Quadro 4.3 – Comparação entre frequências naturais calculadas e identificadas

Frequência calculada (Hz)	Frequência identificada (Hz)	Erro relativo (%)	Tipo de modo
2.72	3.12	12.8	1º vertical
3.18	3.56	10.7	2º vertical
3.83	4.32	11.3	3º vertical
1.03	1.49	30.9	1º transversal
2.25	2.90	22.4	2º transversal
3.94	4.90	19.6	3º transversal

Da observação do Quadro 4.3, pode concluir-se que o grau de correlação existente entre as frequências naturais identificadas e calculadas é significativamente diferente, consoante se considerem modos de vibração com predominância de flexão vertical ou de flexão transversal, verificando-se que, no primeiro caso, o erro relativo é aproximadamente constante para os três modos e próximo de 10%, enquanto que no segundo os erros relativos variam entre 20 e 30 %.

O erro relativo às frequências dos modos verticais pode ser justificado por um valor do módulo de elasticidade do betão constituinte da estrutura superior ao especificado na memória de cálculo. As diferenças um pouco mais significativas e dispersas, relativas às frequências dos modos de flexão transversais podem ser justificadas, também, pela maior rigidez do betão e pela modelação das condições fronteira definidas para as bases dos pilares, onde não foi considerado o aterro instalado sobre as sapatas.

Na Figura 4.8, encontram-se representados os modos de vibração obtidos por via numérica. Apesar das discrepâncias verificadas ao nível da comparação de frequências naturais, regista-se uma concordância bastante assinalável entre configurações modais identificadas e calculadas.

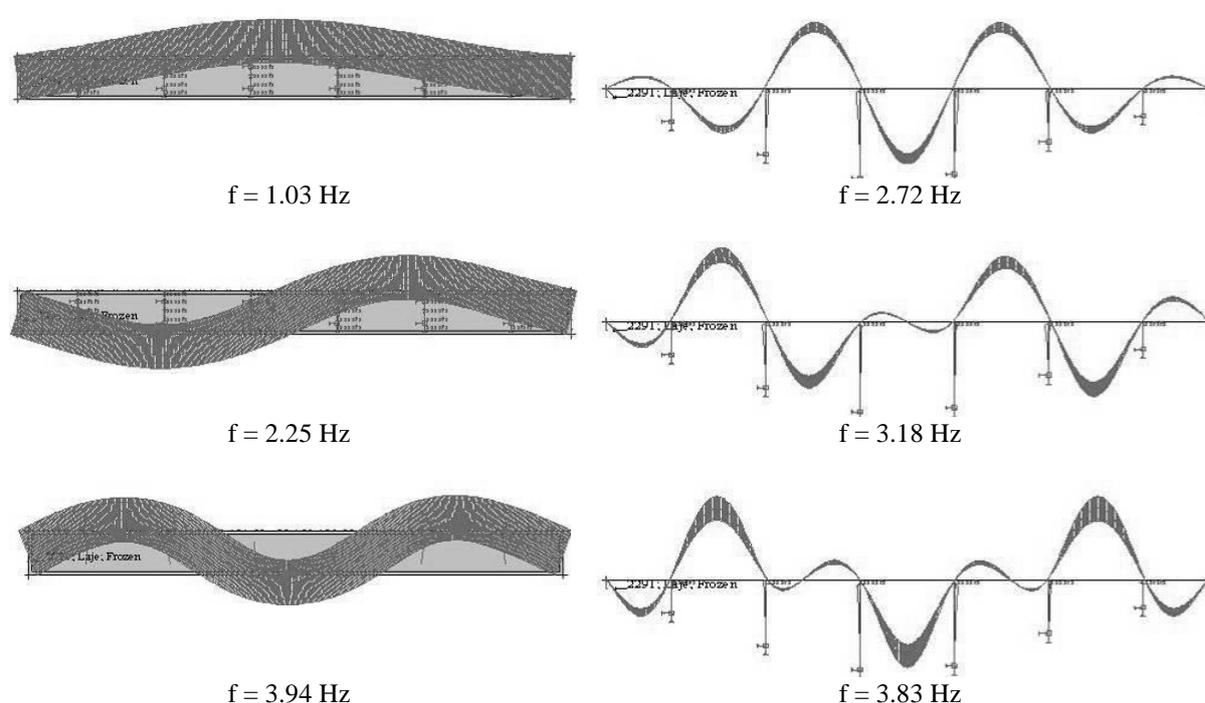


Figura 4.8 – Modos de vibração calculados

4.2.3.2 Ponte de Caniços

A Ponte de Caniços é uma ponte ferroviária, que foi construída durante a remodelação do troço Santo Tirso – Lordelo, integrado na linha de Guimarães da rede ferroviária Portuguesa. O seu tabuleiro possui uma secção transversal em caixão, realizada com altura constante e cujas características geométricas a meio do vão central são representadas na Figura 4.10. A ligação dos pilares centrais ao tabuleiro é monolítica e realizada através dos elementos inclinados visíveis na Figura 4.9. Os restantes apoios do tabuleiro são realizados por aparelhos de apoio em panela. As distâncias entre eixos de

pilares indicadas a partir de um dos encontros são as seguintes: 17m, 22m, 30m, 38m, 30m, 22m e 17m.



Figura 4.9 – Vista geral da ponte

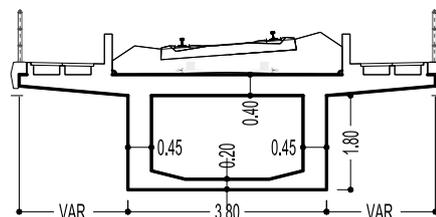


Figura 4.10 – Secção transversal a meio vão

Na Figura 4.11 são apresentados os espectros normalizados médios relativos à direcção vertical e transversal, onde são identificadas as frequências naturais da estrutura.

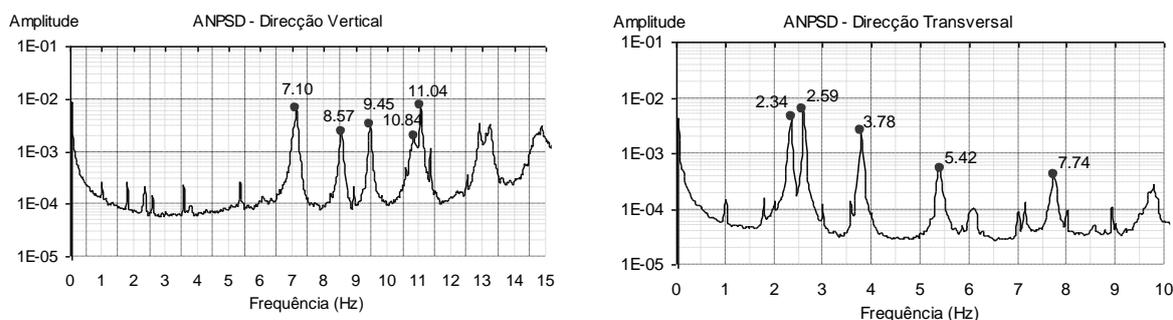


Figura 4.11 – Espectros de potência médios normalizados

Na Figura 4.12 e na Figura 4.13 são representadas as configurações modais dos três primeiros modos de cada tipo (os símbolos \blacklozenge marcam a posição dos apoios do tabuleiro nos pilares).

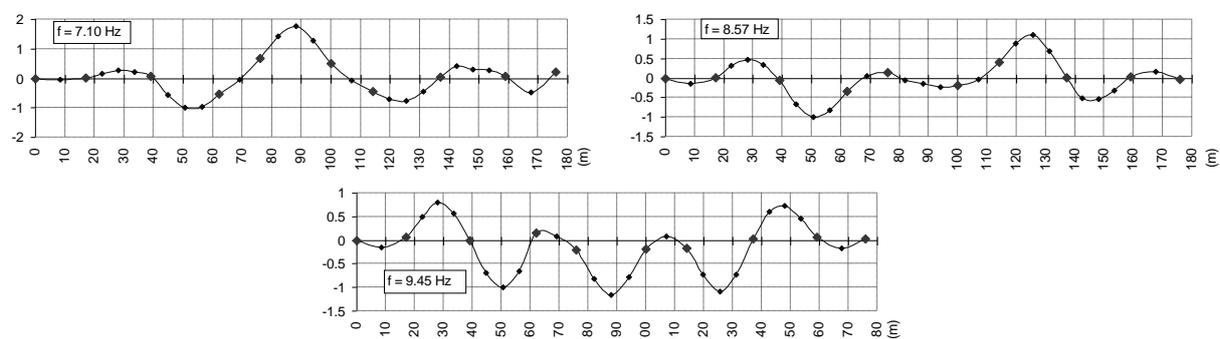


Figura 4.12 – Modos de vibração verticais identificados (representação em alçado)

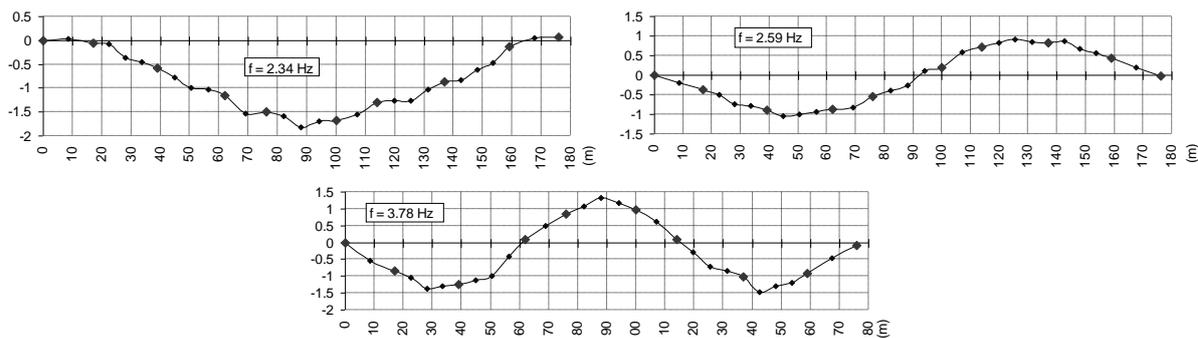


Figura 4.13 – Modos de vibração transversais identificados (representação em planta)

Uma descrição mais detalhada do ensaio e dos resultados obtidos é apresentada no relatório (Magalhães et al. 2004a).

4.2.3.3 Viaduto V2 do troço Santo Tirso - Lordelo

O viaduto V2 é constituído por quatro tramos, dois intermédios e dois extremos, possuindo respectivamente um desenvolvimento de 22,0 e 19,30 m entre eixos de apoio. Os apoios intermédios do tabuleiro são materializados por pares de pilares de secção maciça e rectangular, solidarizados por duas travessas de betão armado, colocadas a meia altura e no seu topo. O tabuleiro é uma laje aligeirada de betão armado pré-esforçado com a geometria representada na Figura 4.15.



Figura 4.14 – Vista geral do viaduto

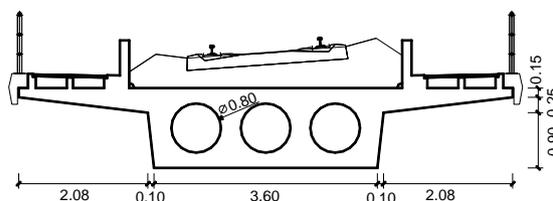


Figura 4.15 – Secção transversal a meio vão

Na Figura 4.16 são apresentados os espectros normalizados médios relativos à direcção vertical e transversal, onde são identificadas as frequências naturais da estrutura.

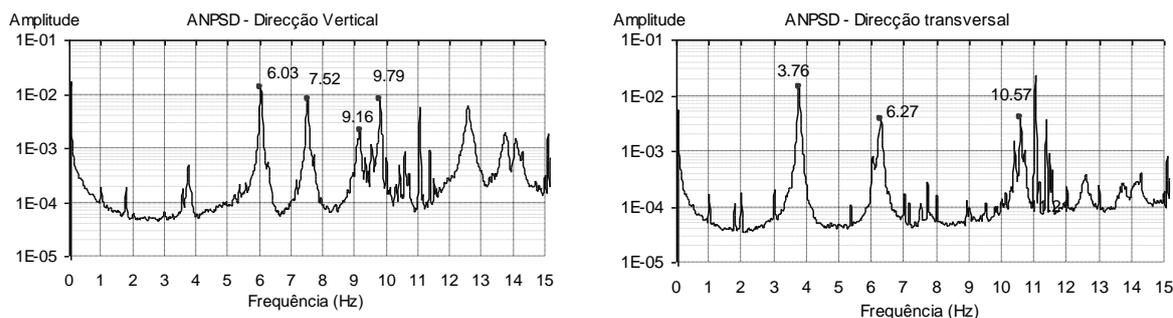


Figura 4.16 – Espectros de potência médios normalizados

Na Figura 4.17 e na Figura 4.18 são representadas as configurações modais dos três primeiros modos de flexão vertical e dos dois primeiros modos de flexão transversal (os símbolos \blacklozenge marcam a posição dos apoios do tabuleiro nos pilares).

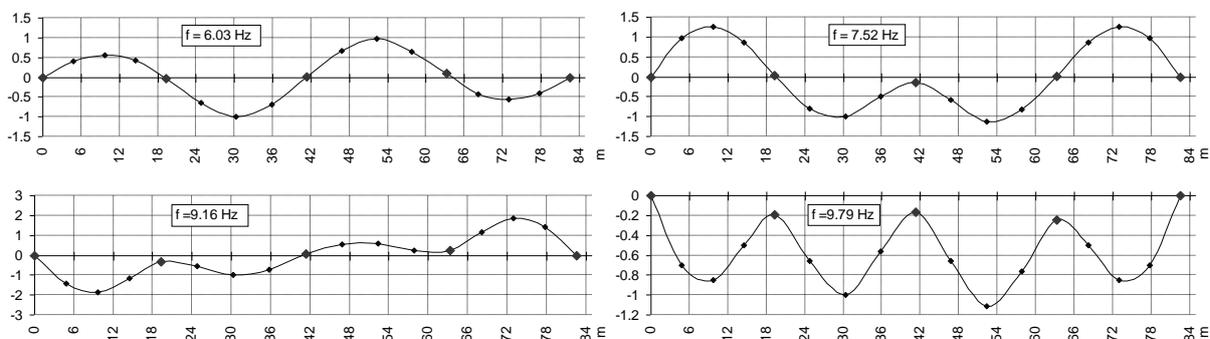


Figura 4.17 – Modos de vibração verticais identificados (representação em alçado)

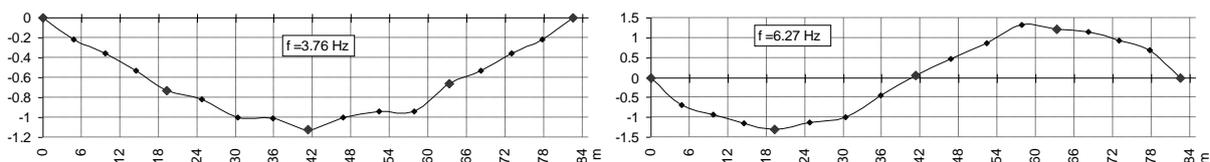


Figura 4.18 – Modos de vibração transversais identificados (representação em planta)

Uma descrição mais detalhada do ensaio e dos resultados obtidos é apresentada no relatório (Magalhães et al. 2004b).

4.2.4 Considerações finais

Os resultados apresentados nesta secção mostram que o método da selecção de picos permite a identificação das frequências naturais e das configurações dos principais modos de vibração, de estruturas relativamente simples, com bastante qualidade.

A metodologia apresentada permite realizar de forma rápida e automática a identificação dos parâmetros modais da estrutura, a partir da informação recolhida nos ensaios de vibração ambiental. Sendo um procedimento bastante útil para a realização deste tipo de ensaios, considerados cada vez mais interessantes na fase de recepção de pontes e de outras estruturas especiais, possibilitando a validação e calibração experimental de modelações numéricas previamente desenvolvidas a nível de projecto, e a caracterização do comportamento da estrutura íntegra, que pode servir de referência para posteriores avaliações do seu estado de deterioração.

4.3 Identificação modal de um modelo físico da estrutura de um edifício

Na secção anterior foi apresentada a aplicação do método da selecção de picos a duas pontes e um viaduto. Nesta secção, com o objectivo de mostrar uma primeira aplicação, com dados reais, dos restantes métodos de identificação descritos no capítulo 3, foi efectuado um ensaio de vibração ambiental de um pequeno modelo laboratorial (Magalhães et al. 2004c). O modelo físico utilizado é o mesmo que serviu de base ao modelo plano, usado para acompanhar a descrição dos modelos teóricos e dos métodos de identificação. Com este modelo relativamente simples, procurou-se analisar as limitações e potencialidades de cada um dos métodos e realçar a importância da correcta selecção dos parâmetros que têm que ser definidos pelo utilizador.

4.3.1 Descrição do modelo

O modelo físico utilizado é constituído por três pisos ligados entre si por 4 pilares. As lajes de piso são chapas em aço com 1 cm de espessura. Os pilares são lâminas de alumínio com uma altura entre cada piso de 17 cm. Na Figura 4.19 apresenta-se uma fotografia do modelo e na Figura 4.20 realiza-se a sua caracterização geométrica.



Figura 4.19 – Fotografia do modelo ensaiado

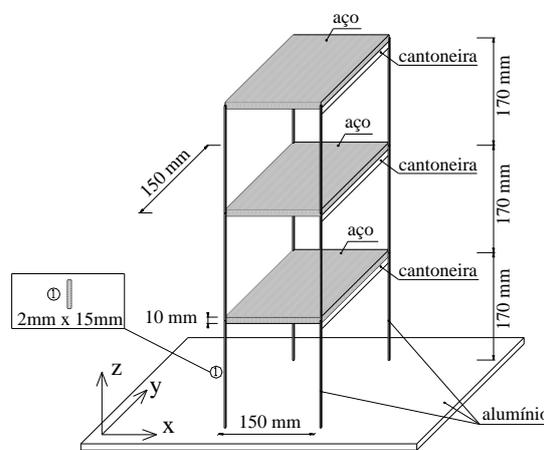


Figura 4.20 – Caracterização geométrica do modelo ensaiado

4.3.2 Modelação numérica

Na modelação numérica, realizada para confronto dos resultados experimentais com valores calculados, consideraram-se as lajes indeformáveis e admitiu-se que as ligações dos pilares às lajes materializam encastramentos perfeitos nas duas direcções principais de flexão dos pilares. Para os pilares, realizados em alumínio, foi adoptado um módulo de elasticidade de 75 GPa e uma massa nula

(a sua contribuição é desprezável quando comparada com a contribuição das lajes); para as lajes, realizadas em aço, foi adoptada uma massa volúmica de 7850 kg/m^3 e uma rigidez infinita (considera-se que a sua deformação é desprezável quando comparada com a deformação dos pilares). Da modelação numérica, e subsequente análise modal, resultam as frequências que se apresentam no Quadro 4.4, no qual também se indica o tipo de modo de vibração associado a cada frequência.

Quadro 4.4 – Frequências obtidas numericamente

Frequência	Tipo de modo
4.56 Hz	Flexão segundo x
12.78 Hz	Flexão segundo x
18.47 Hz	Flexão segundo x
34.22 Hz	Flexão segundo y
41.35 Hz	Torção
95.88 Hz	Flexão segundo y
115.87 Hz	Torção
138.55 Hz	Flexão segundo y
167.44 Hz	Torção

4.3.3 Descrição do ensaio

No ensaio dinâmico realizado sobre o modelo, foi medida a sua resposta a uma excitação ambiental, através de 6 acelerómetros piezoeléctricos. Realizaram-se 2 “setups” adoptando 3 sensores fixos (de referência) e 3 sensores móveis, tal como se representa na Figura 4.21. Como se considera que a laje é indeformável no seu plano e que os pilares são axialmente indeformáveis, a medição das 3 componentes da aceleração indicadas em cada piso é suficiente para caracterizar o comportamento da estrutura.

Foram recolhidas séries temporais com 140 segundos de duração, utilizando uma frequência de amostragem de 256 Hz.

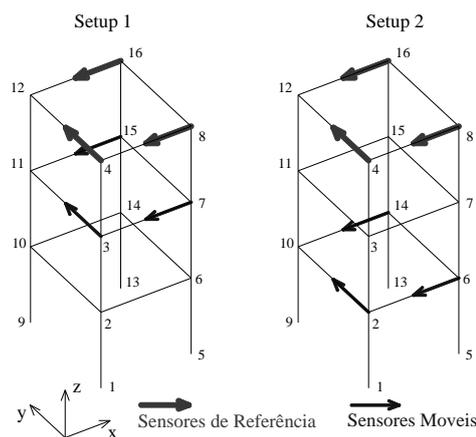


Figura 4.21 – Colocação dos acelerômetros em cada “setup”.

4.3.4 Aplicação de métodos de identificação estocásticos no domínio da frequência

A identificação modal no domínio da frequência foi realizada com base nos seguintes métodos: método da selecção de picos (PP), decomposição no domínio da frequência (FDD) e decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD). Os métodos PP e FDD foram aplicados recorrendo a rotinas de MATLAB propositadamente desenvolvidas para o efeito. O método EFDD foi aplicado utilizando o software comercial ARTEMIS.

O ponto de partida dos métodos de identificação no domínio da frequência são os espectros das respostas medidas da estrutura. Para o seu cálculo, as séries temporais foram divididas em troços com 8 segundos de duração, o que conduziu a uma resolução em frequência de 0,125Hz. Foi usado um “overlapping” de 50% e utilizadas janelas de Hanning para atenuar os erros de “leakage”. Os auto-espectros e espectros cruzados relativos a cada “setup” foram armazenados numa matriz 6x6.

4.3.4.1 Método da selecção de picos

Os elementos das diagonais principais das matrizes anteriores (auto-espectros ou espectros de potência), normalizados e somados, originam o espectro de potência normalizado médio representado na Figura 4.22, que permite a identificação das frequências naturais do modelo.

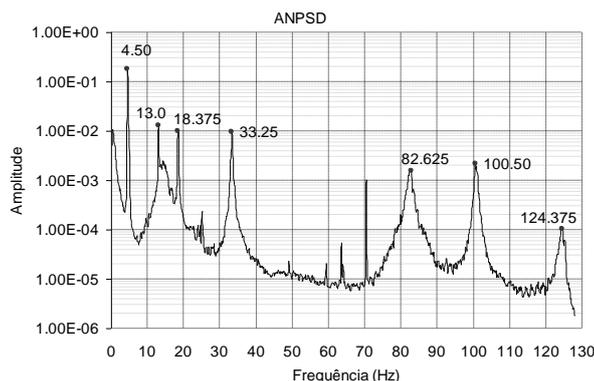


Figura 4.22 – Espectro de potência normalizado médio

Para identificar a configuração modal associada a cada uma das frequências, apenas seria necessário calcular as funções de transferência entre todos os graus de liberdade instrumentados e um dos graus de liberdade que foi instrumentado nos dois “setups”. No entanto, para obter estimativas mais rigorosas foram calculadas, para os dois “setups”, as funções de transferência entre cada um dos pontos instrumentados e os 3 pontos de referência. Procedendo desta forma, as configurações modais obtêm-se realizando a média das configurações obtidas com cada uma das referências.

Na Figura 4.24 representam-se os modos de vibração obtidos, já classificados segundo o tipo de movimento. As ordenadas modais dos nós não instrumentados foram obtidas, a partir das ordenadas dos pontos instrumentados, considerando a laje como um corpo rígido.

Os modos de vibração identificados segundo a direção x apresentam frequências bastante próximas das obtidas numericamente. As configurações do 1º e 3º modos são coerentes com a solução teórica. Na segunda configuração, existe uma sobreposição do primeiro modo de flexão em y com o segundo modo de flexão segundo x . Na realidade, através deste método, não se obtêm modos de vibração mas sim deformadas operacionais, pelo que a segunda configuração é uma deformada operacional que resulta da combinação de dois modos de vibração.

Por esta razão, só são identificados dois modos de flexão segundo y : o 2º e o 3º. As frequências associadas a estes modos são um pouco inferiores às obtidas numericamente. Tal acontece porque a ligação dos pilares à laje, representada na Figura 4.23, não confere um encastramento perfeito nessa direção.



Figura 4.23 – Ligação dos pilares à laje.

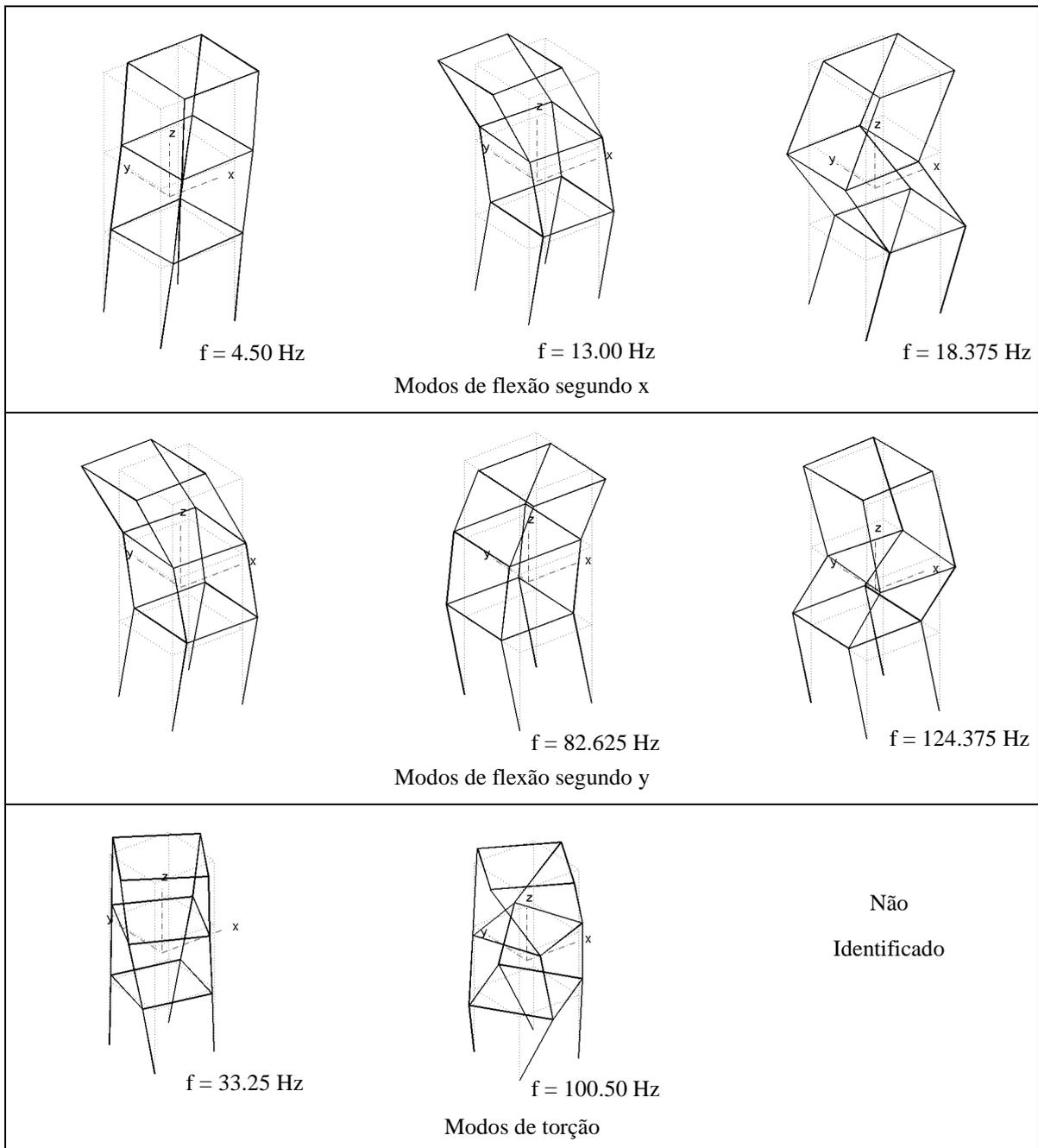


Figura 4.24 – Configurações modais

Em relação aos modos de torção, só são identificados os dois primeiros. De facto, não era expectável identificar o terceiro modo de torção, pois a sua frequência natural previsível (167,44 Hz) é maior que a frequência de Nyquist (metade da frequência de amostragem – $256/2 = 128$ Hz). Pela mesma razão que foi apontada para as frequências associadas aos modos de flexão segundo y, também as frequências associadas aos modos de torção são inferiores às numéricas.

Com o objectivo de relacionar, de forma inequívoca, as frequências com o tipo de modo que lhe está associado, foram construídos três espectros normalizados médios, um para cada tipo de modo (flexão segundo x, flexão segundo y e torção). Na referência (Cunha et al. 2000), são apresentados bons resultados através de um procedimento análogo.

Na Figura 4.25, relacionam-se os deslocamentos dos pontos instrumentados com os deslocamentos e rotação de corpo rígido da laje (1). A partir destas expressões, é possível definir as relações inversas e obter os deslocamentos fundamentais generalizados da laje, em função dos deslocamentos dos pontos instrumentados (2).

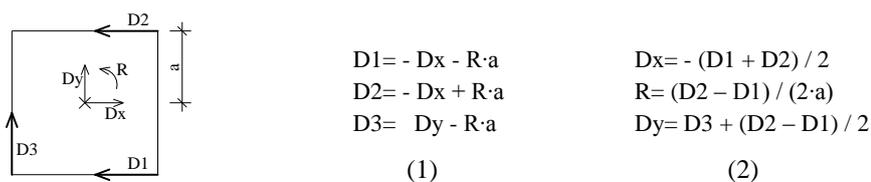


Figura 4.25 – Relação entre os deslocamentos dos pontos instrumentados e os deslocamentos generalizados de corpo rígido da laje

As estimativas espectrais relativas às séries temporais das acelerações associadas a cada tipo de movimento da laje são representadas na Figura 4.26.

No primeiro espectro, confirmam-se as três frequências relativas aos modos de flexão segundo a direcção x.

No segundo espectro, relativo à flexão segundo y, surge uma nova frequência de 14,50 Hz que, pelo facto de estar próxima da segunda frequência de flexão segundo x não era perceptível no ANPSD global. Esta frequência está associada ao primeiro modo de flexão segundo y, que não foi identificado na aplicação directa do método da selecção de picos.

No terceiro espectro, para além de uma contribuição residual das primeiras frequências de flexão em x, aparecem os dois picos relacionados com os dois primeiros modos de torção.

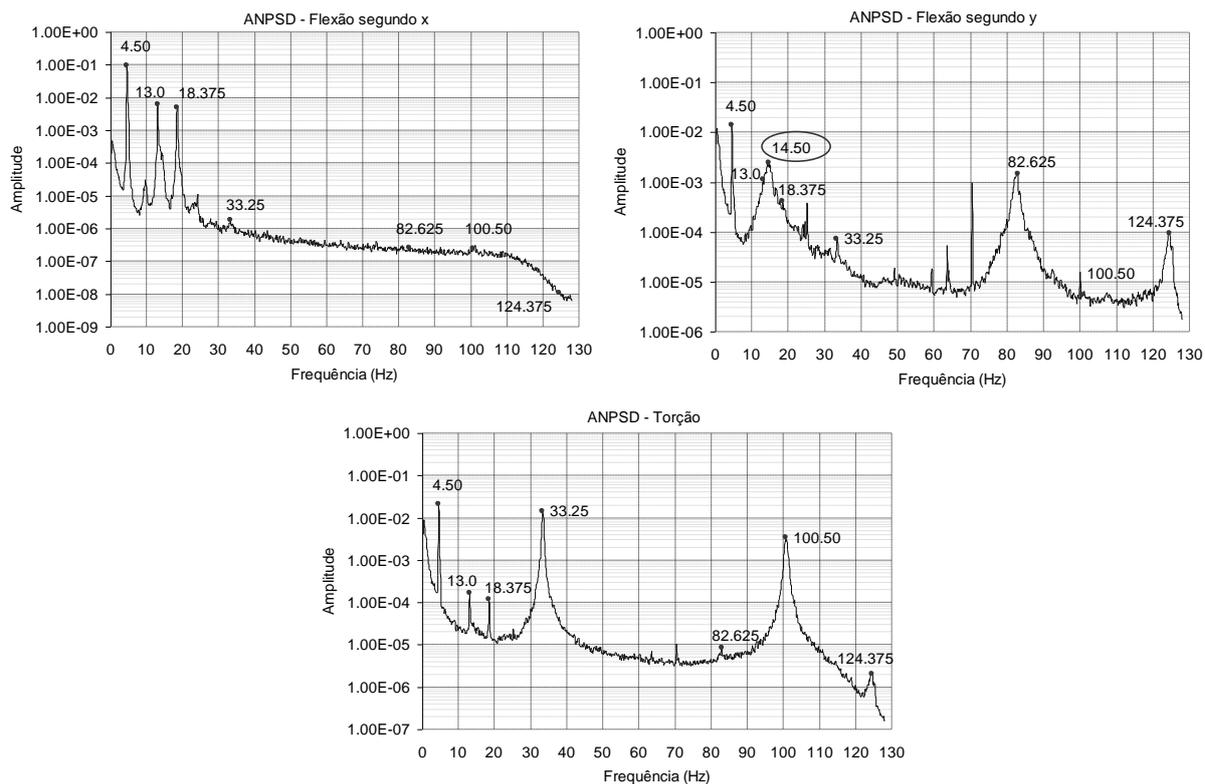


Figura 4.26 – Espectros de potência normalizados médios associados a cada tipo de modo

4.3.4.2 Decomposição em valores singulares

Para a realização da decomposição em valores singulares da matriz dos espectros, apenas foram consideradas as colunas relativas aos sensores de referência. Assim, realizou-se a decomposição em valores singulares de uma matriz 9×3 , que contém em cada coluna os espectros cruzados entre cada um dos graus de liberdade instrumentados e um dos graus de liberdade de referência. Como nesta matriz coexistem espectros calculados a partir de séries temporais adquiridas em momentos diferentes, todos os espectros foram normalizados pela área do auto-espectro do grau de liberdade de referência respectivo.

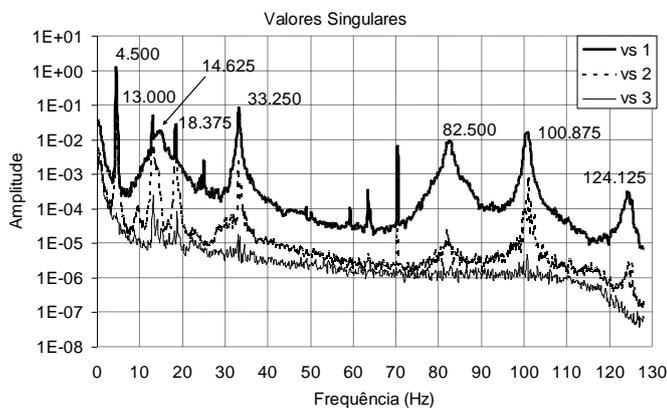


Figura 4.27 – Valores singulares da matriz dos espectros

Um procedimento alternativo ao apresentado, e implementado no programa ARTEMIS, consiste na decomposição em valores singulares, de forma independente, das matrizes dos espectros associadas a cada um dos “setups”, e na realização da média dos valores singulares correspondentes, previamente normalizados. No entanto, para a estrutura em análise, procedendo dessa forma, a frequência do primeiro modo de flexão segundo y não é tão facilmente identificável.

Na Figura 4.27, ilustra-se a variação em frequência dos três valores singulares e identificam-se os picos do primeiro valor singular. Verifica-se que as frequências naturais, assim identificadas, são coincidentes ou muito próximas das identificadas nos gráficos da Figura 4.26.

Através dos vectores singulares associados ao segundo e ao terceiro pico do primeiro valor singular, obtêm-se os modos representados na Figura 4.28, podendo verificar-se que a flexão segundo x fica completamente separada da flexão segundo y . As restantes configurações modais são semelhantes às obtidas pelo método de selecção de picos.



Figura 4.28 – Segundo modo de flexão segundo x e primeiro modo de flexão segundo y

4.3.4.3 Decomposição em valores singulares melhorada

O método da decomposição em valores singulares melhorada (EFDD) foi aplicado considerando dois valores para a resolução em frequência: 0,125 e 0,03125 Hz. Foram determinadas estimativas das frequências naturais, das configurações modais e dos coeficientes de amortecimento modais. As frequências e amortecimentos identificados apresentam-se no Quadro 4.5. Verifica-se que as configurações modais são semelhantes às obtidas pelo método FDD.

Quadro 4.5 – Comparação de resultados

Modos	EFDD ($\Delta f = 0.125$ Hz)		EFDD ($\Delta f = 0.03125$ Hz)	
	Frequência (Hz)	Coefficiente de Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	Coefficiente de Amortecimento (%)
Modo 1	4.51	1.813	4.51	0.696
Modo 2	13.01	0.696	13.02	0.374
Modo 3	14.38	7.785	14.25	3.593
Modo 4	18.40	0.513	18.40	0.355
Modo 5	33.27	0.491	33.28	0.423
Modo 6	82.49	0.903	82.48	0.905
Modo 7	100.7	0.337	100.7	0.321
Modo 8	127.4	2.862	127.5	2.415

Da observação do Quadro 4.5, pode constatar-se que as frequências identificadas, através das duas resoluções em frequência consideradas, são praticamente coincidentes, registam-se todavia algumas diferenças ao nível das estimativas dos coeficientes de amortecimento modais.

Na Figura 4.29 representam-se as funções de auto-correlação da resposta relativa ao primeiro modo de vibração, podendo observar-se que, usando a resolução em frequência mais baixa (maior Δf), a função de auto-correlação apresenta valores significativos no final do intervalo de tempo correspondente, oferecendo portanto menor confiança a estimativa do coeficiente de amortecimento que dela resulta. Para o segundo modo de vibração, verifica-se uma situação semelhante.

Assim, em relação aos dois primeiros modos de vibração, as estimativas dos valores dos coeficientes de amortecimento mais fiáveis são as que resultam dos cálculos realizados com a maior resolução em frequência (menor Δf). Em relação aos restantes modos, as estimativas obtidas através da resolução em frequência mais baixa proporcionam maior confiança, pois os espectros resultam da realização de um maior número de médias, que os tornam mais regulares. As estimativas dos coeficientes de amortecimento dos modos 3 e 8 não são muito credíveis: no primeiro caso porque o segmento espectral seleccionado é pequeno, devido a existência de outro modo próximo; no segundo, porque a frequência do modo é já muito próxima da frequência de Nyquist, sendo portanto a resolução temporal da função de auto-correlação relativamente baixa (grande Δt) quando comparada com o seu período.

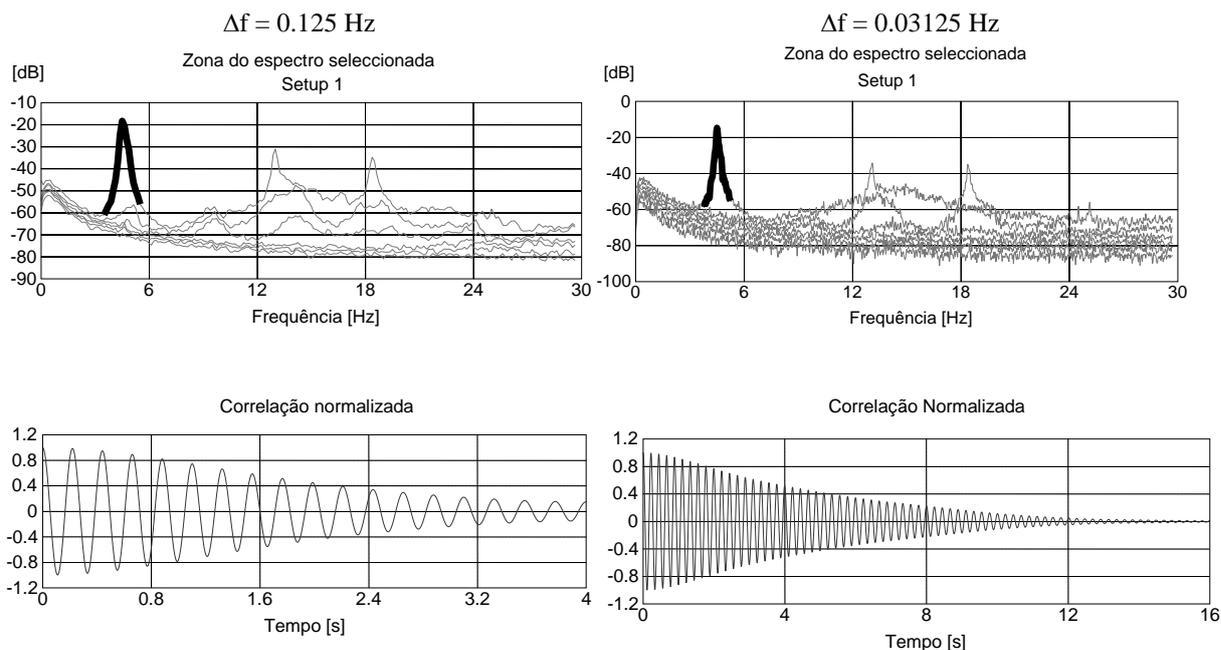


Figura 4.29 – Estimativa da função de auto-correlação da resposta relativa ao primeiro modo de vibração usando duas resoluções em frequência distintas

O elevado coeficiente de amortecimento do terceiro modo (primeiro modo de flexão segundo y), deve-se certamente ao facto da ligação dos pilares à laje, segundo esta direcção, não constituir um encastramento perfeito, sendo antes uma ligação aparafusada em que existe alguma rotação relativa entre as partes ligadas, facto que introduz um amortecimento elevado no modo que envolve tal movimento.

4.3.5 Aplicação de métodos de identificação estocásticos no domínio do tempo

Na análise no domínio do tempo, realizada usando o programa ARTEMIS, são comparados os resultados obtidos através do método SSI-DATA, versão CVA, considerando dois valores diferentes para i (metade do número de linhas de blocos da matriz de Hankel que contém as séries temporais).

Como já foi referido no capítulo 3, o valor de i condiciona a ordem máxima do modelo de estado, que é possível identificar: $n_{max} < r \cdot i$, sendo r o número de sensores de referência. A ordem do modelo tem que ser pelo menos superior ao dobro do número de modos de vibração da estrutura.

Na estimativa de modelos a partir de dados experimentais, surgem outros modos, para além dos modos estruturais. Uns que resultam da possível existência de fontes de excitação harmónica da estrutura e outros, designados modos numéricos, que resultam da eventual aplicação de filtros, de possíveis não linearidades da estrutura ou do facto da excitação se afastar consideravelmente de um ruído branco. O

número de modos estruturais e o número de modos que surgem devido a excitações harmónicas é identificável através do número de picos dos valores singulares da matriz dos espectros. Todavia, para os modos numéricos tem que ser feita uma estimativa. No manual do software ARTEMIS (SVS 1999-2004) é sugerido, como regra prática, que o número de modos numéricos seja considerado triplo do número de modos estruturais.

Dado que a estrutura em análise tem nove modos estruturais, se for considerado que não existem excitações harmónicas e se for adoptada a regra anterior, devem ser construídos modelos de estado com ordens até $(9+3 \cdot 9) \cdot 2 = 72$.

Numa primeira abordagem, foi adoptado um valor de $i = 12$, o que permite identificar modelos até a ordem 72, se na construção da matriz de Hankel forem considerados todos os sensores como sendo de referência ($r = 6$).

Na Figura 4.30, mostram-se os valores singulares obtidos para cada um dos “setups” e na Figura 4.31 os correspondentes diagramas de estabilização (os pontos estáveis encontram-se representados a preto e os restantes a cinzento).

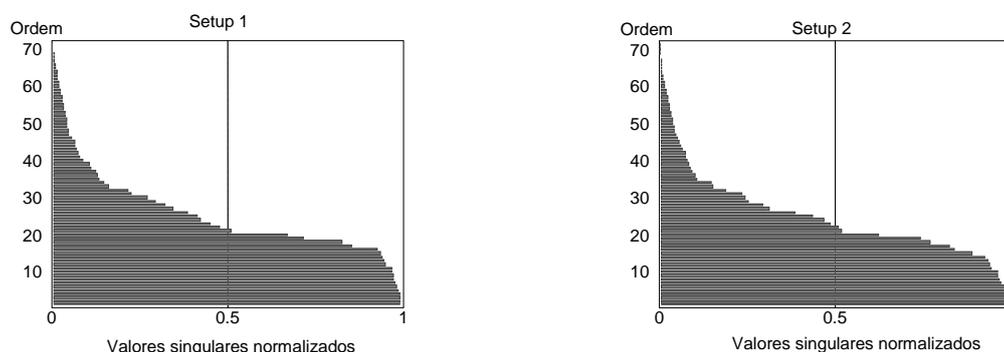


Figura 4.30 – Valores singulares normalizados ($i = 12$)

Da análise da evolução dos valores singulares, verifica-se que, ao contrário do que aconteceu com os dados simulados no capítulo 3, não existe um salto claro na variação dos seus valores, sendo portanto impossível através destes gráficos identificar a ordem do modelo que melhor caracteriza o comportamento da estrutura.

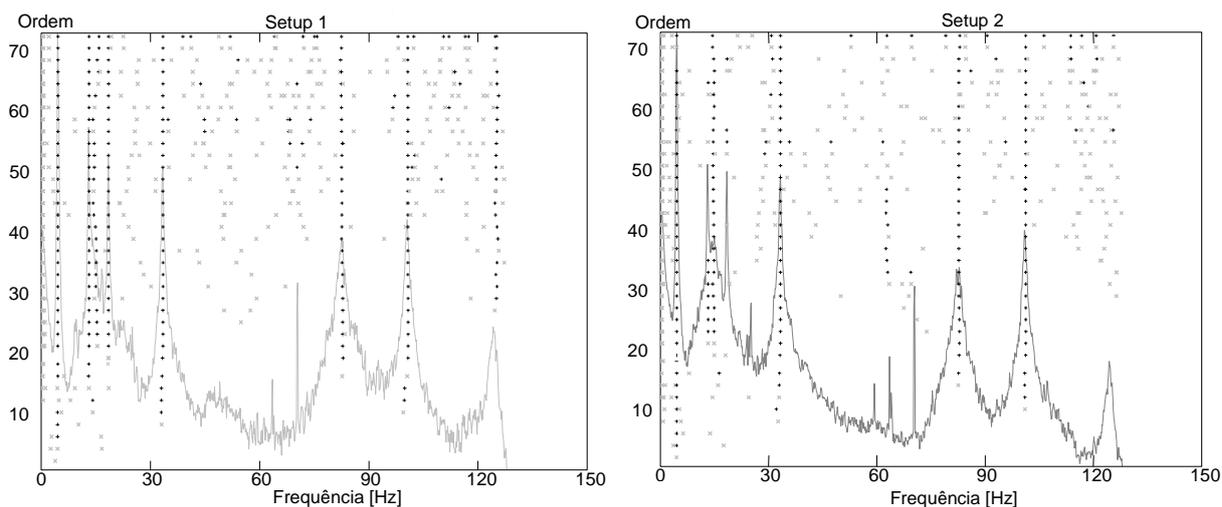


Figura 4.31 – Diagramas de estabilização ($i = 12$)

No diagrama de estabilização relativo ao segundo “setup”, não existe nenhum modelo que identifique todas as frequências da estrutura, pelo que se experimentou adoptar um valor mais elevado para i .

Considerando $i = 15$, obtêm-se os diagramas de estabilização representados na Figura 4.32. Adoptando os mesmo critérios de estabilização que foram utilizados no caso anterior ($\Delta f < 0.5$; $\Delta \xi < 1\%$; $MAC > 0.9$) e analisando modelos com as mesmas ordens, já se obtêm modelos que, para ambos os “setups”, identificam todas as frequência naturais da estrutura ensaiada.

Assim, o valor adoptado para i não só condiciona a ordem máxima do modelo de estado estimável, mas também a qualidade das estimativas dos parâmetros modais identificáveis com modelos da mesma ordem. No artigo (Pridham e Wilson 2003), é sugerida a construção de diagramas de estabilização em função de i . No entanto, este procedimento incrementa significativamente o esforço de cálculo dispendido.

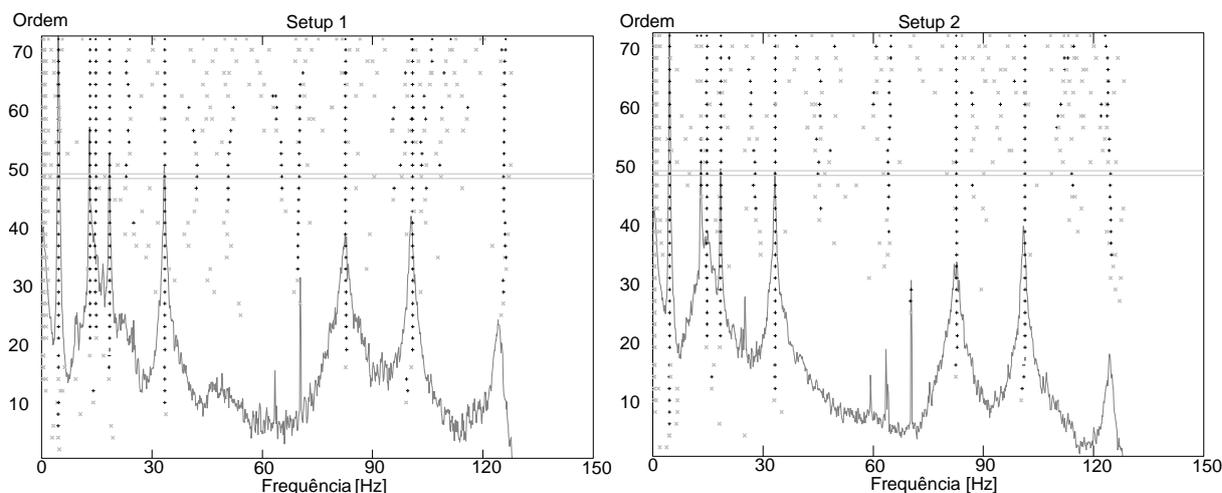


Figura 4.32 – Diagramas de estabilização ($i = 15$)

No Quadro 4.6, mostram-se os resultados obtidos pela análise no domínio do tempo. No mesmo quadro, estes são comparados com os resultados do método de decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD), que se consideram mais fiáveis (destacados a negrito no Quadro 4.5).

As estimativas das frequências naturais são bastante semelhantes. No entanto, as diferenças obtidas nas estimativas dos coeficientes de amortecimento dos modos 1, 3 e 8, são relativamente elevadas. Em relação ao primeiro modo, talvez o tempo de aquisição seja insuficiente para obter uma estimativa rigorosa do seu coeficiente de amortecimento. Em relação aos modos 3 e 8, já foi realçado, na subsecção anterior, que as estimativas dos respectivos coeficientes de amortecimento, obtidos pela análise no domínio da frequência, não são muito fiáveis.

Os valores do índice MAC, entre os modos identificados pelos dois métodos, mostram que as configurações modais que deles resultam são muito coerentes.

Quadro 4.6 – Comparação de resultados

Modos	EFDD		SSI-DATA		MAC
	Frequência (Hz)	Coefficiente de Amortecimento (%)	Frequência (Hz)	Coefficiente de Amortecimento (%)	
Modo 1	4.51	0.6962	4.533	0.2591	1
Modo 2	13.01	0.3736	13.08	0.3871	0.999
Modo 3	14.38	7.782	14.73	10.87	0.9862
Modo 4	18.4	0.5131	18.41	0.4792	0.9998
Modo 5	33.27	0.4911	33.26	0.4823	0.9999
Modo 6	82.49	0.9028	82.36	0.9339	0.9894
Modo 7	100.7	0.3371	100.8	0.2886	0.9998
Modo 8	127.4	2.862	124.7	0.6465	0.9935

Os resultados obtidos através da aplicação das outras variantes do método SSI-DATA (UPC e PC) são praticamente coincidentes com os resultam da aplicação da variante apresentada.

4.3.6 Considerações finais

Com a aplicação apresentada, relativa a um pequeno modelo laboratorial, pretendem-se realçar os seguintes pontos:

- o método da selecção de picos, aplicado com base em algum conhecimento do funcionamento estrutural, permite a identificação de modos próximos, desde que estes estejam associados a diferentes tipos de movimento da estrutura;
- o método FDD permite a separação de modos próximos sem ser necessário recorrer à interpretação física do comportamento da estrutura;
- na aplicação do método EFDD, para a estimativa de coeficientes de amortecimento modais, tem que ser usada uma resolução em frequência que garanta que a função de auto-correlação decaia para valores relativamente reduzidos no intervalo de tempo em que é estimada;
- na aplicação dos métodos no domínio do tempo SSI-COV e SSI-DATA, devem ser experimentados vários valores para i (metade do número de linhas de blocos da matriz de Hankel que contém as séries temporais) e não apenas o valor que conduz à ordem máxima pretendida para os modelos de estado;
- a estimativa dos coeficientes de amortecimento modais é aquela que apresenta maior variabilidade entre os diferentes métodos de identificação.

4.4 Ensaio de vibração ambiental da Ponte Internacional do Guadiana

4.4.1 Introdução

A Ponte Internacional do Guadiana é uma ponte atirantada situada no Algarve, que faz a ligação, sobre o rio Guadiana, entre Castro Marim, em Portugal, e Ayamonte, em Espanha. A ponte projectada pelo Engenheiro Câncio Martins, entrou em serviço no Verão de 1991, praticamente na mesma altura em que foi inaugurada outra ponte atirantada sobre o rio Arade, também no Algarve. Estas duas obras foram as primeiras pontes atirantadas, com um vão moderado, construídas em Portugal.



Figura 4.33 – Vista geral da ponte (fotografia do Professor Francisco Piqueiro).

A ponte está localizada numa zona bastante ventosa e de elevado risco sísmico, pelo que diversos estudos e testes foram realizados, pelo Laboratório Nacional de Engenharia Civil e pelo Instituto Superior Técnico de Lisboa, durante o seu projecto e antes da sua entrada em serviço (Azevedo et al. 1986; Branco et al. 1993; Branco et al. 1991).

No âmbito do presente trabalho, foi realizado um ensaio de vibração ambiental com o objectivo de caracterizar o comportamento dinâmico actual da estrutura, em particular, identificar as suas frequências naturais, as configurações dos principais modos de vibração e os coeficientes de amortecimento. Este ensaio encontra-se enquadrado num projecto de investigação sobre “Vibrações em Ponte Atirantadas”, financiado pela Fundação de Ciência e Tecnologia Portuguesa, que visa desenvolver e instalar na estrutura um sistema de monitorização contínua (Caetano et al. 2004). A selecção desta ponte, como protótipo para o projecto de investigação, prendeu-se com facto de os seus tirantes, quando solicitados por ventos de velocidades moderadas, apresentarem níveis elevados de vibração, que já motivaram a realização de estudos sobre a sua vulnerabilidade ao fenómeno de excitação paramétrica (Caetano e Cunha 2003; Costa et al. 1994).

Como se poderá observar nesta secção, os resultados obtidos com a realização deste ensaio relativos ao comportamento dinâmico da ponte apresentam qualidade superior aos obtidos a partir dos ensaios realizados após a sua conclusão. Tal deve-se à qualidade superior do equipamento de medição e aquisição actualmente disponível e às metodologias de análise e identificação mais robustas entretanto desenvolvidas.

4.4.2 Descrição da ponte

A Ponte Internacional sobre o rio Guadiana é uma ponte atirantada com tabuleiro e mastros realizados em betão. A ponte é constituída por um vão central de 324 m, por dois vãos laterais de 135 m e por dois vãos de transição de 36 m, perfazendo um total de 666 m (ver Figura 4.34).

O tabuleiro, com 18 m de largura, é materializado por uma viga em caixão de 2,5 m de altura, realizada em betão pré-esforçado e contraventada interiormente por diagonais em betão pré-fabricado, espaçadas de 4,5 m.

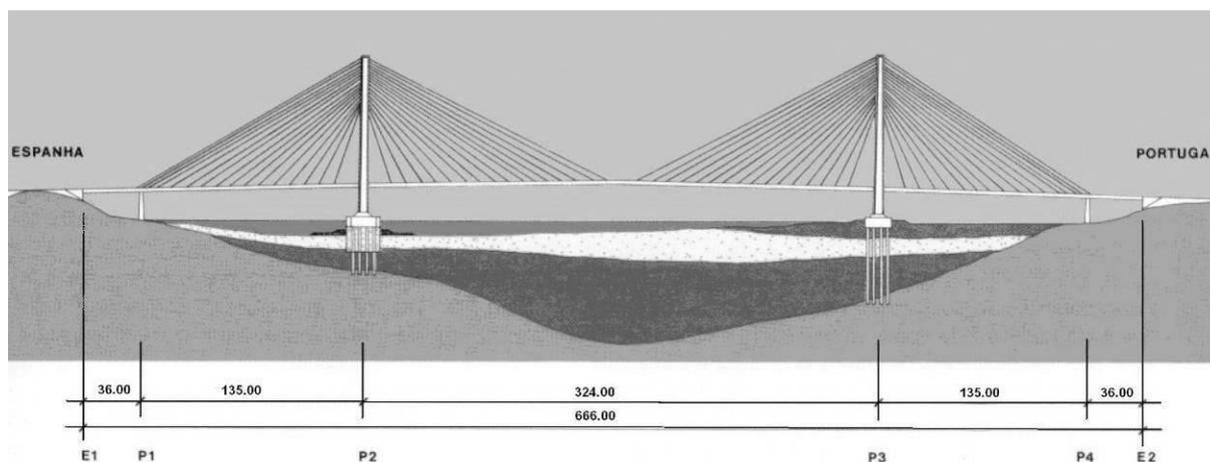


Figura 4.34 – Alçado da ponte (GPPE 1994).

As torres que ancoram os tirantes têm a forma de um A (Figura 4.35) com 100 m de altura, fornecem apoios verticais e transversais ao tabuleiro e são suportadas por maciços de estacas encamisadas de 2 m de diâmetro.

O tabuleiro é suportado por 64 pares de tirantes, os quais são constituídos por cordões auto-protégidos de 15 mm, cujo número varia entre 22 e 55. O espaçamento entre ancoragens dos tirantes, ao longo do tabuleiro, é de 9 m (Martins 1992).



Figura 4.35 – Vista dos mastros e do pilar extremo.



Figura 4.36 – Pormenor dos tirantes.

4.4.3 Modelação numérica

Antes da realização de um ensaio de vibração ambiental é importante desenvolver um modelo numérico da estrutura para identificar o valor aproximado das frequências naturais e das configurações dos principais modos de vibração. Os valores das frequências são importantes para a escolha dos sensores e para a definição do tempo de aquisição e da frequência de amostragem; as configurações modais são relevantes para definir a posição dos sensores de referência.

A programação do ensaio foi baseada num modelo numérico desenvolvido no trabalho (Caetano e Cunha 2003) a partir do modelo numérico cedido pelo projectista da ponte, Engenheiro Cândio Martins. No modelo original, o tabuleiro e os mastros são idealizados através de elementos de barra tridimensionais e os cabos por elementos de treliça, ligados ao tabuleiro e ao mastro através de elementos rígidos, que permitem simular a geometria real da estrutura (Martins 1992). Como modificações fundamentais ao modelo inicial, refere-se a consideração do comportamento não linear geométrico da estrutura, quando submetida às acções permanentes, a consideração do envelhecimento do betão e o ajuste das forças nos tirantes, tomando como referência os valores medidos numa campanha de medições realizada pela FEUP (Caetano e Cunha 2003).

Na Figura 4.37, representam-se os principais modos de vibração, bem como as frequências que lhes estão associadas, que resultam da análise modal do modelo numérico descrito.

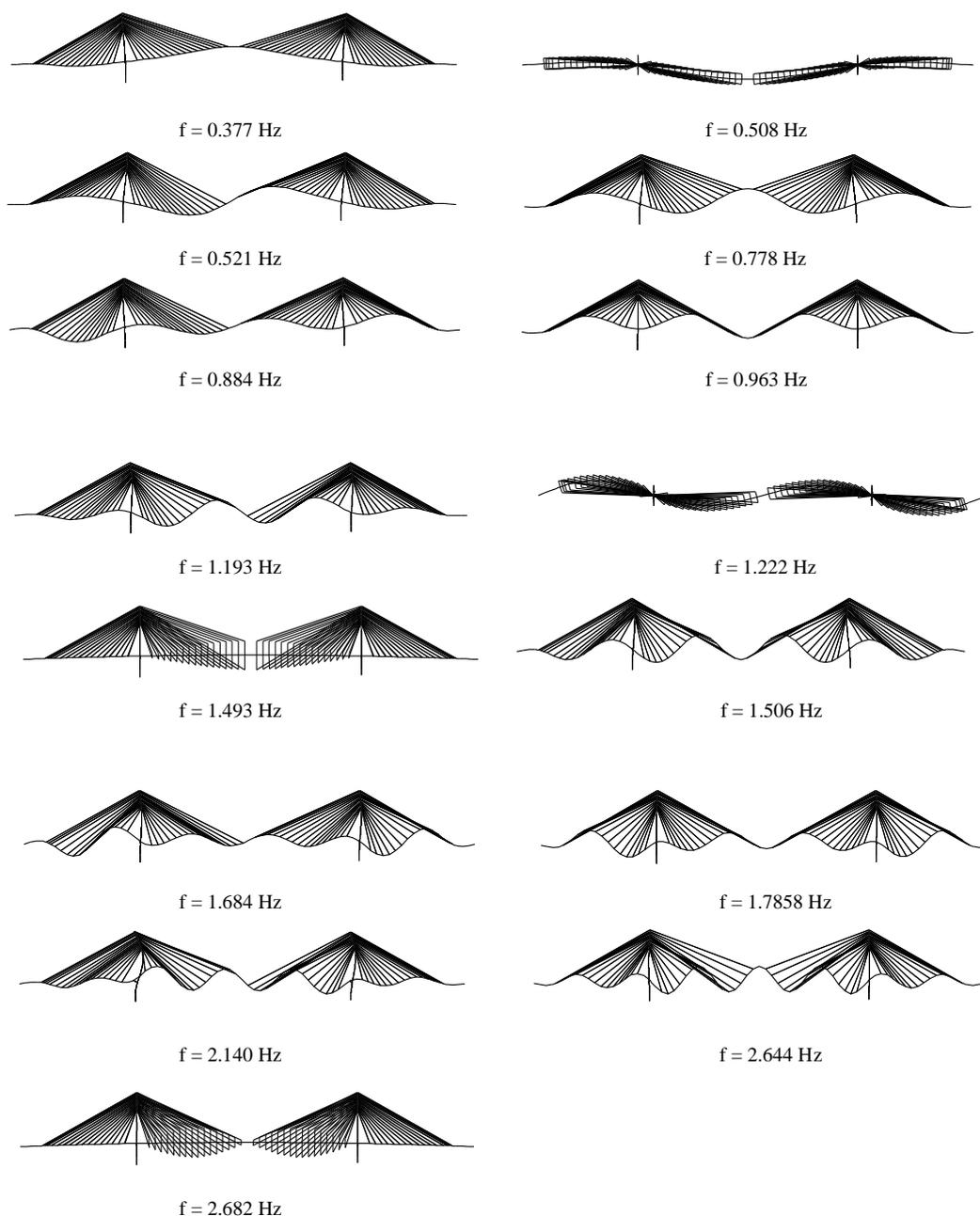


Figura 4.37 – Frequências e modos de vibração numéricos.

4.4.4 Descrição do ensaio

O ensaio de vibração ambiental de uma ponte atirantada com uma extensão relativamente elevada (666m) impõe algumas condicionantes no equipamento a utilizar, designadamente:

- a realização do ensaio, usando como única fonte de excitação as solicitações ambientais, obriga à utilização de sensores de elevada sensibilidade;

- a elevada flexibilidade das pontes atirantadas conduz a frequências naturais baixas e portanto obriga à utilização de acelerómetros que garantam uma resposta linear a partir de tais frequências. Para a ponte em análise, segundo os resultados da modelação numérica, é importante garantir um resposta linear pelos menos a partir dos 0.3 Hz;
- a grande extensão da ponte torna a utilização de sensores com cabos eléctricos de ligação a um sistema de aquisição central bastante trabalhosa e demorada.

Assim, a utilização de sismógrafos (Figura 4.38) parece a solução mais adequada. Estes estão munidos de acelerómetros do tipo “force balance”, que permitem a medição de frequências a partir do DC (0 Hz) e possuem uma placa de conversão analógico-digital de 18 bit, que possibilita uma resolução de $4 \cdot 10^{-6}g$. As unidades são completamente independentes entre si e de qualquer fonte externa, dispensando portanto a utilização de cabos. A sua alimentação é garantida por baterias internas, a informação recolhida é guardada numa unidade de memória própria e a sua sincronização é assegurada por unidades de GPS, que garantem que os seus relógios internos estão sempre com horas coincidentes. A definição da hora de início e da duração de cada um dos “setups”, assim como a descarga da informação recolhida, é realizada através da conexão de cada um dos sismógrafos a um computador portátil.

Ao longo do ensaio, em paralelo com as medições das acelerações, foram realizadas medidas pontuais da velocidade do vento com um anemómetro de molinetes (Figura 4.39), que permite a medição de velocidades médias do vento entre 0,5 m/s e 35 m/s. Este sensor apenas faz a medição da velocidade do vento segundo uma direcção, pelo que, para medir a velocidade máxima, é necessário orienta-lo segundo a direcção do vento.



Figura 4.38 – Sismógrafo e unidade exterior de GPS.



Figura 4.39 – Anemómetro de molinetes.

Foram realizadas medições de acelerações, segundo três direcções ortogonais, em 27 secções do tabuleiro, sempre a montante e a jusante, e em dois níveis altimétricos de cada um dos mastros (Figura 4.40). Dois sismógrafos, um a montante e outro a jusante, foram usados como referência, sendo colocados em permanência na secção 17, situada a 1/3 do vão central. Os outros dois percorreram as restantes 26 secções do tabuleiro e as duas secções instrumentadas de cada mastro. Este procedimento obrigou à realização de 28 “setups”.

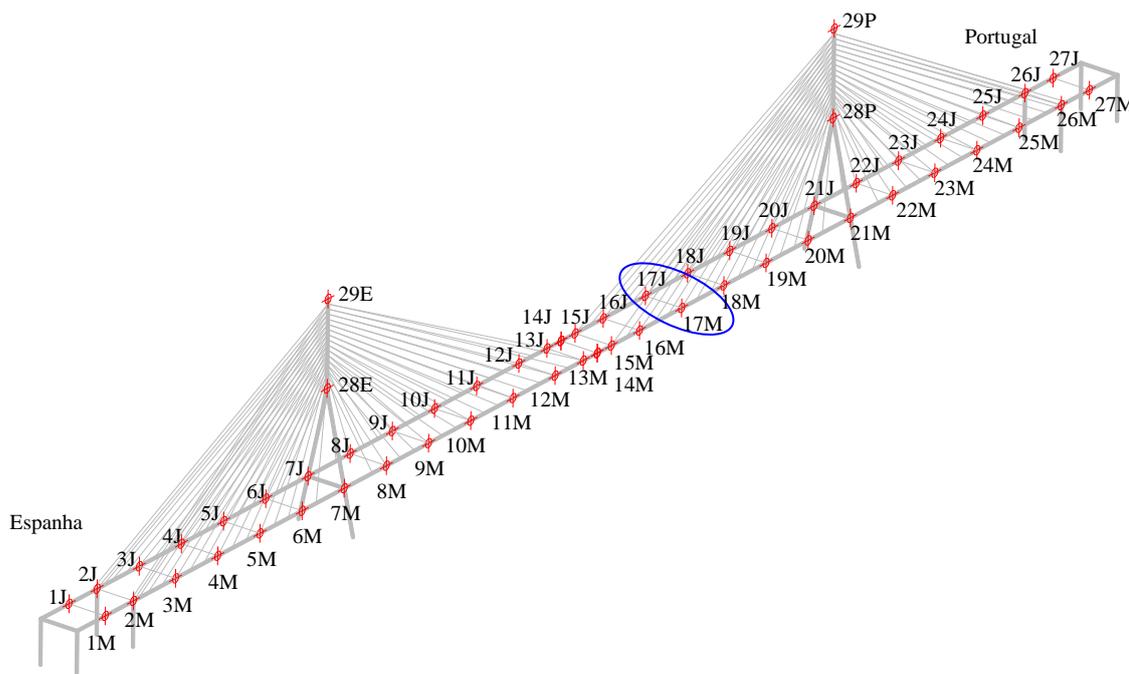


Figura 4.40 – Pontos instrumentados.

Em cada “setup”, foram recolhidas duas séries temporais: uma com 11 minutos e outra com 10 minutos de duração, perfazendo um tempo total de 1260 segundos, que corresponde aproximadamente a 500 ciclos do maior período de vibração da estrutura. Não foi adquirida uma única série contínua de 21 minutos porque os sismógrafos não permitem a aquisição de séries temporais com duração superior a 999 segundos.

Para aplicação dos métodos de identificação, estas duas séries foram aglutinadas numa só, suavizando a zona de transição através da segunda metade de uma janela de Hanning, aplicada no fim da primeira série e da primeira metade de uma janela de Hanning, aplicada no início da segunda. A janela de Hanning foi definida com um comprimento suficientemente longo, 75 segundos, que permitem a realização de 30 ciclos do maior período, para não introduzir um amortecimento artificial nas séries temporais. Nos cálculos dos espectros, realizados pelas rotinas desenvolvidas no âmbito deste trabalho houve, contudo, o cuidado de não considerar segmentos temporais na zona de transição das duas séries aglutinadas.

As acelerações foram medidas com uma frequência de amostragem de 100 Hz, valor que é manifestamente excessivo para o tipo de estrutura em análise, mas necessário pelo facto dos filtros analógicos dos sismógrafos utilizados não permitirem a adopção de taxas de amostragem inferiores.

As unidades de memória dos sismógrafos possuem uma capacidade de memória de 15Mb, que possibilitam o armazenamento de registos correspondentes a cerca de 4.5 horas de aquisição. Como a operação de transferência de informação para o computador portátil é lenta, em cada dia de trabalho apenas foi possível realizar 12 “setups”, razão pela qual, foram necessários 2 dias e meio para a realização completa do ensaio.

4.4.5 Avaliação dos níveis de vibração

Na Figura 4.41, representam-se, a título de exemplo, os primeiros 5 minutos das séries temporais das acelerações registadas na secção de referência 17M (secção 17 a montante) no primeiro “setup”. Como o ensaio foi realizado com a estrutura aberta ao tráfego, as acelerações verticais atingem valores muito superiores aos das acelerações transversais e longitudinais.

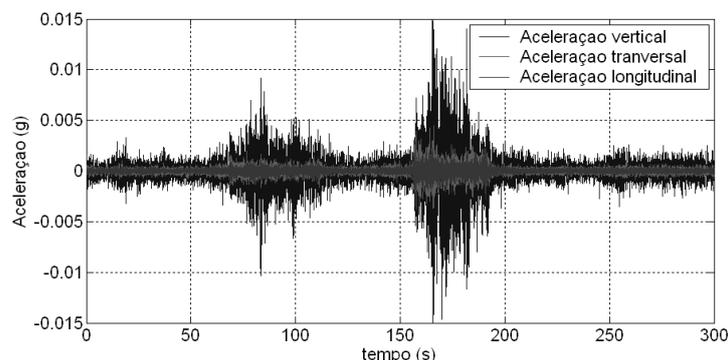


Figura 4.41 – Séries temporais de acelerações

Ao longo dos dois dias e meio de ensaio, como se pode verificar no Quadro 4.7, foram registadas velocidades médias de vento bastante variáveis. No Quadro 4.7, representam-se também os valores máximos das acelerações medidas, na secção de referência 17M em cada um dos “setups”, e os desvios padrão das respectivas séries temporais. O valor máximo da aceleração verificou-se segundo a direcção vertical, no último “setup” realizado, e foi de 35,61 mg.

Quadro 4.7 – Valores notáveis das acelerações (em mg) e velocidades do vento

Dia	Setup	Velocidade do vento	Direcção Longitudinal		Direcção Transversal		Direcção Vertical	
			Máximo	Desvio Padrão	Máximo	Desvio Padrão	Máximo	Desvio Padrão
Sábado - 20/03/2004	1	2 m/s	3.47	0.25	4.47	0.38	24.83	1.56
	2	2 m/s	3.28	0.32	6.79	0.46	26.10	2.07
	3	2 m/s	2.99	0.29	4.25	0.41	29.28	2.01
	4	2 m/s	3.84	0.34	6.07	0.51	33.23	2.30
	5	2 m/s	2.56	0.26	5.69	0.40	19.61	1.68
	6	2 m/s	3.22	0.24	5.42	0.34	27.15	1.81
	7	2 m/s	2.35	0.21	6.33	0.33	18.85	1.27
	8	2 m/s	2.16	0.17	2.94	0.26	11.93	0.96
	9	2 m/s	2.60	0.20	5.09	0.32	19.35	1.26
	10	2 m/s	1.95	0.16	3.66	0.26	14.67	1.02
	11	2 m/s	2.38	0.14	4.27	0.24	19.09	0.85
	12	2 m/s	2.02	0.14	4.19	0.22	16.41	0.76
Domingo - 21/03/2004	13	10 m/s	1.72	0.27	3.69	0.43	12.99	1.12
	14	10 m/s	2.30	0.26	5.95	0.40	20.19	1.24
	15	10 m/s	1.70	0.23	2.89	0.39	14.90	1.11
	16	8 m/s	1.85	0.22	2.86	0.34	14.60	1.15
	17	9 m/s	2.15	0.20	5.61	0.34	18.29	1.27
	18	8 m/s	2.44	0.19	3.61	0.31	14.35	1.09
	19	10 m/s	3.29	0.25	4.84	0.44	23.46	1.75
	20	7 m/s	2.97	0.17	6.12	0.29	20.86	1.00
	21	9 m/s	2.91	0.27	5.35	0.44	23.86	1.39
	22	9 m/s	1.51	0.24	2.72	0.40	11.40	1.06
	23	9 m/s	3.01	0.25	4.93	0.44	26.28	1.48
	24	9 m/s	1.90	0.22	4.53	0.38	16.15	1.36
Segunda-feira 22/03/2004	25	14 m/s	4.40	0.42	5.57	0.73	25.83	2.98
	26	14 m/s	3.98	0.46	4.75	0.78	32.32	3.55
	27	14 m/s	3.36	0.42	5.08	0.69	25.83	2.98
	28	14 m/s	4.37	0.53	6.21	0.78	35.61	4.03

Na Figura 4.42, representa-se a evolução do valor do desvio padrão das séries temporais das acelerações, medidas na secção 17M segundo as três direcções, ao longo dos diferentes “setups”. O valor deste parâmetro estatístico é um indicador do conteúdo energético de séries de média nula, razão pela qual também é designado por valor eficaz.

No gráfico verifica-se, com era expectável, um aumento do conteúdo energético das acelerações transversais com o aumento da velocidade média do vento. As acelerações longitudinais são condicionadas pelo movimento dos tirantes excitados pelo vento, sendo portanto também dependentes da sua intensidade. Em relação às acelerações verticais, pensa-se que estas, embora também sejam dependentes das vibrações dos tirantes, são principalmente condicionadas pelas cargas verticais aplicadas pelo tráfego rodoviário. O primeiro dia do ensaio foi um sábado, o segundo um domingo e o terceiro uma segunda-feira. Os níveis de aceleração vertical são intermédios no sábado, relativamente baixos no domingo, quando o número de veículos pesados a atravessar a ponte foi muito reduzido, e relativamente elevados na segunda-feira, quando o número de veículos pesados de transporte de mercadorias a atravessar a ponte foi bastante superior em relação a sábado e muito superior em relação ao domingo.

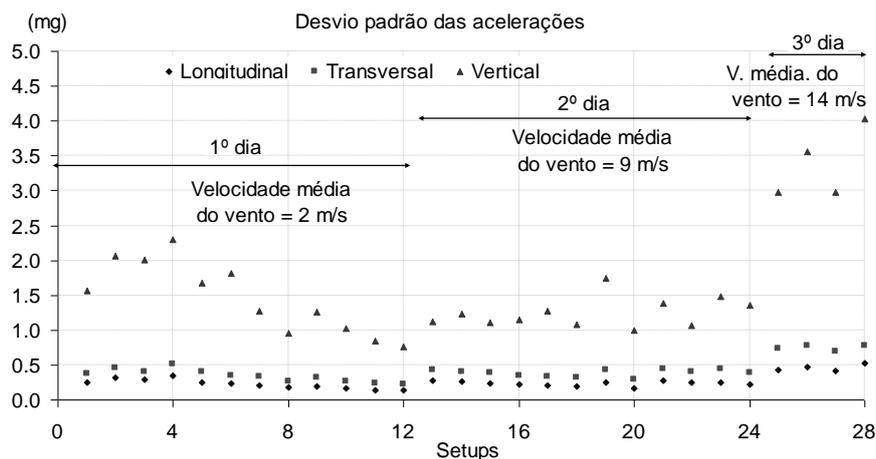


Figura 4.42 – Desvio padrão das acelerações

A instalação futura de um sistema de monitorização contínua permitirá realizar gráficos deste género, mas abrangendo largos períodos temporais de observação e contendo também os níveis de vibração dos tirantes. A sua análise possibilitará estabelecer correlações entre os níveis de vibração registados no tabuleiro, os níveis de vibração dos tirantes e as velocidades do vento.

4.4.6 Identificação dos parâmetros modais da estrutura

A identificação dos parâmetros modais da estrutura foi realizada recorrendo a vários métodos de identificação: selecção de picos (PP), decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD) e método de identificação estocástica por sub-espacos a partir das séries temporais (SSI-DATA). Os resultados obtidos são comparados entre si e com os resultados numéricos, e a eficiência de cada método é discutida.

4.4.6.1 Método da selecção de picos

A aplicação do método da selecção de picos foi realizada recorrendo exclusivamente a ferramentas computacionais desenvolvidas no âmbito deste trabalho. Como estas ferramentas não permitem o desenho dos modos em perspectiva, nesta primeira abordagem apenas são caracterizados os modos de vibração do tabuleiro, sendo o movimento das torres analisado posteriormente.

Antes da aplicação deste método, à semelhança do que foi efectuado na análise do pórtico descrita na secção 4.3, realizou-se uma operação preliminar de processamento das acelerações recolhidas, que permite identificar melhor cada um dos tipos de modos de vibração, classificados como modos de flexão vertical, modos de flexão transversal ou modos de torção. Assim, para cada secção, foi calculada a média das acelerações transversais medidas a montante e a jusante, a média das

acelerações verticais medidas a montante e a jusante e a semi-diferença das acelerações verticais medidas a montante e a jusante. A partir da média das acelerações transversais são identificados os modos de flexão vertical, a média das acelerações verticais permite a identificação dos modos de flexão vertical e a sua semi-diferença a identificação dos modos de torção.

Identificação das frequências naturais

A partir das séries temporais, que resultaram da operação anterior, foram calculados os três auto-espectros que estão associados às 27 secções do tabuleiro instrumentadas.

Para acelerar o cálculo, foi realizada uma decimação prévia das séries temporais de ordem 5. Esta decimação reduz a taxa de amostragem para 20 Hz, sendo portanto possível a identificação de modos com frequência inferiores a $0.8 \times 10 = 8$ Hz. Este valor é suficiente pois, segundo o modelo numérico, as primeiras quinze frequências naturais são inferiores a 3 Hz.

Os auto-espectros médios foram calculados dividindo as séries temporais em segmentos com 4096 pontos ($20 \times 4096 = 204.8$ s), considerando um “overlapping” de 50% e usando janelas de Hanning. Fica assim possibilitada a realização de médias de dez espectros e garantida uma resolução em frequência de 0,00488 Hz (perto de uma centésima da menor frequência).

A partir dos auto-espectros médios, calcularam-se os espectros normalizados médios associados a cada tipo de modo, cujos valores, na gama de frequências que se considerou representativa, se encontram representados nos gráficos da Figura 4.43.

É de assinalar que velocidades do vento moderadas provocam níveis de vibração elevados nos tirantes, que levam ao aparecimento de vibrações no tabuleiro. Assim, alguns dos picos que aparecem nos gráficos anteriores estão relacionados com frequência naturais dos tirantes.

Para analisar este fenómeno, foram calculados auto-espectros relativos às séries temporais das acelerações medidas na secção de referência, para diferentes velocidades do vento: 2 m/s (1º dia), 10 m/s (2º dia) e 14 m/s (3º dia). Na Figura 4.44, representam-se os espectros associados às diferentes componentes dos sinais.

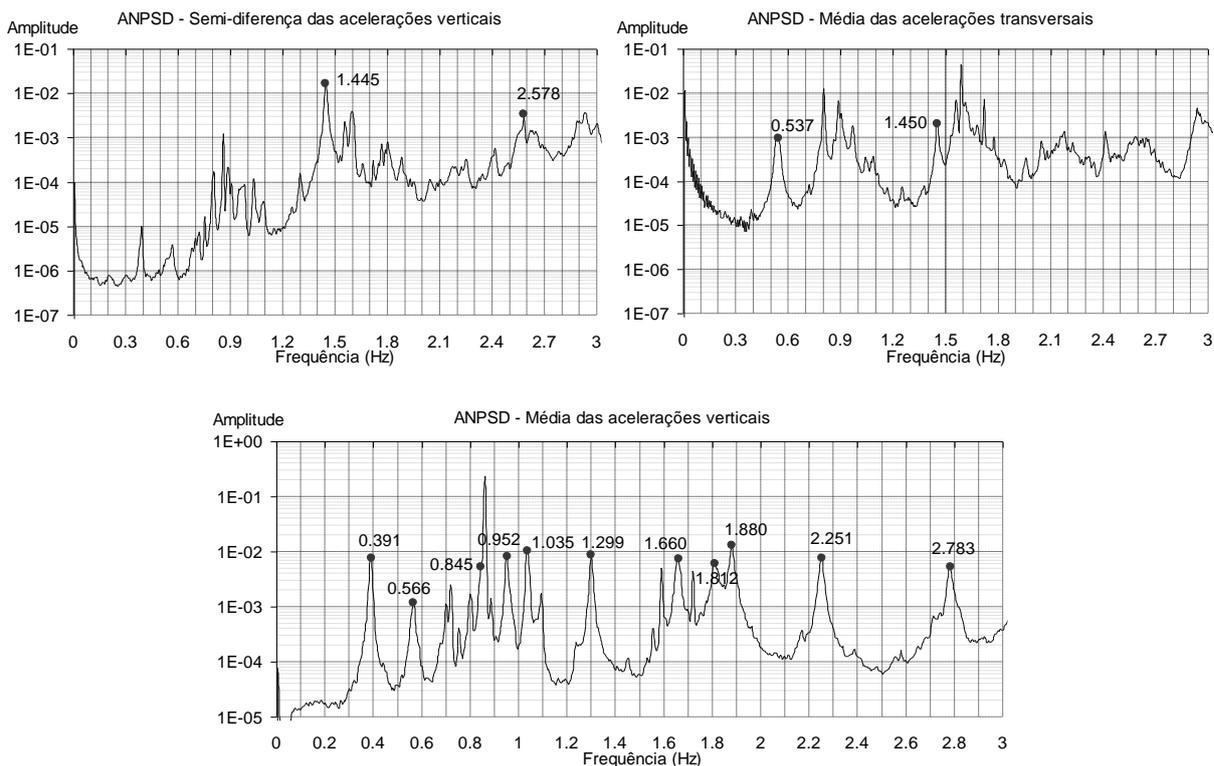


Figura 4.43 – Espectros de potência normalizados médios

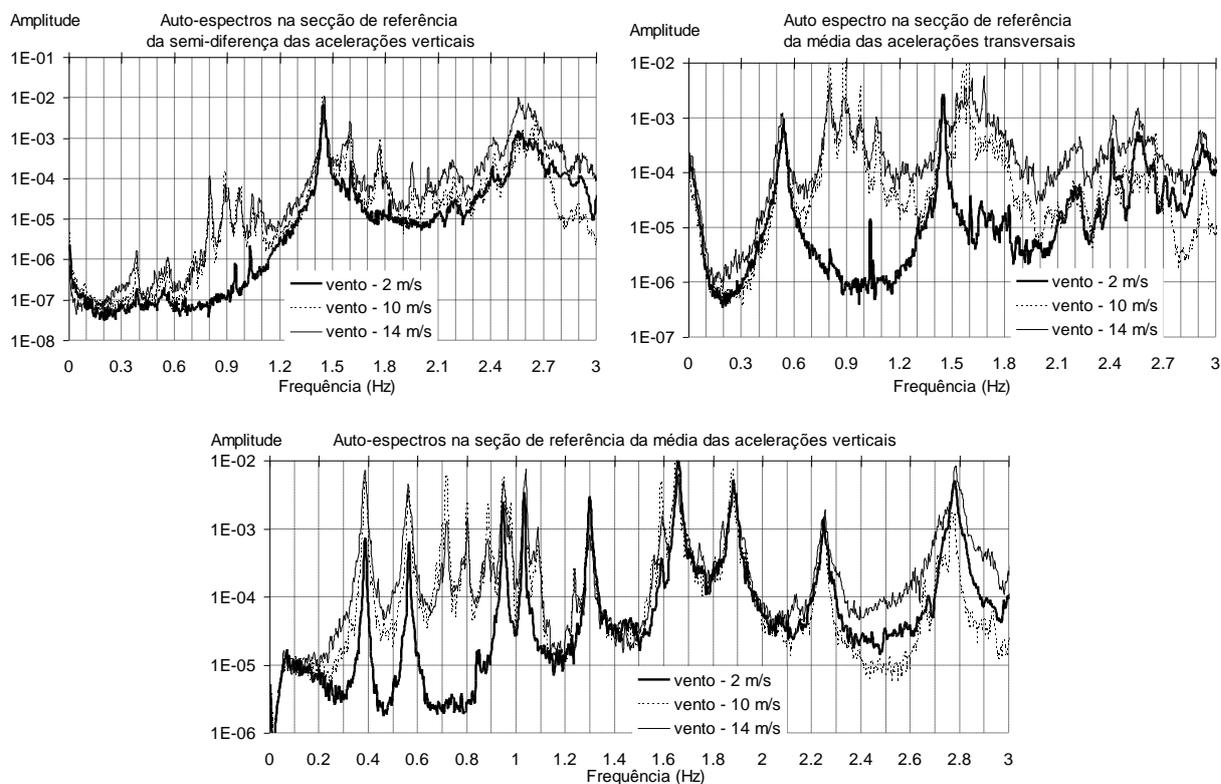


Figura 4.44 – Espectros de potência na secção de referência para diferentes velocidades do vento

O auto-espectro obtido a partir das séries temporais das acelerações, medidas em simultâneo com velocidades do vento reduzidas, apenas contém frequências de ressonância relacionadas com as frequências naturais do tabuleiro. Nos outros espectros aparecem vários picos, mais pronunciados entre 0,7 e 1,1 Hz, que estão relacionados com frequências de vibração dos tirantes.

A análise de espectros de outras secções, distintas da secção de referência, referidos a “setups” realizados com velocidades do vento reduzidas, permitiu identificar uma frequência natural do tabuleiro, associada a um modo de flexão vertical, que não é perceptível nos espectros anteriores, mas que aparece de forma clara nos espectros das secções 19 e 23 (Figura 4.45). No espectro normalizado médio, esta é “abafada” pelos picos relativos às frequências de vibração dos tirantes. Por outro lado, nos espectros da secção de referência, esta frequência não aparece, pois está associada a um modo de vibração com um nodo (ponto com componente modal nula) próximo da secção de referência.

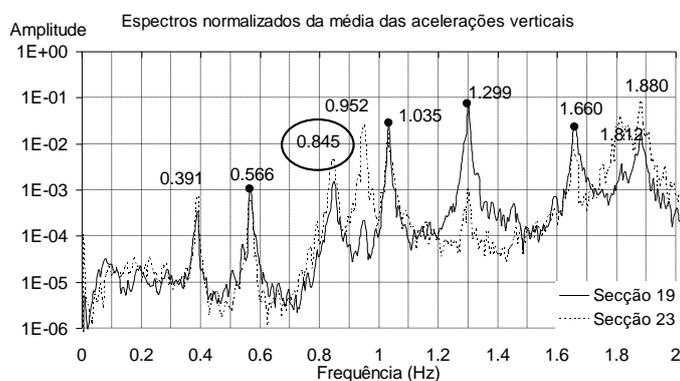


Figura 4.45 – Espectros de potência normalizados da média das acelerações verticais das secções 19 e 23

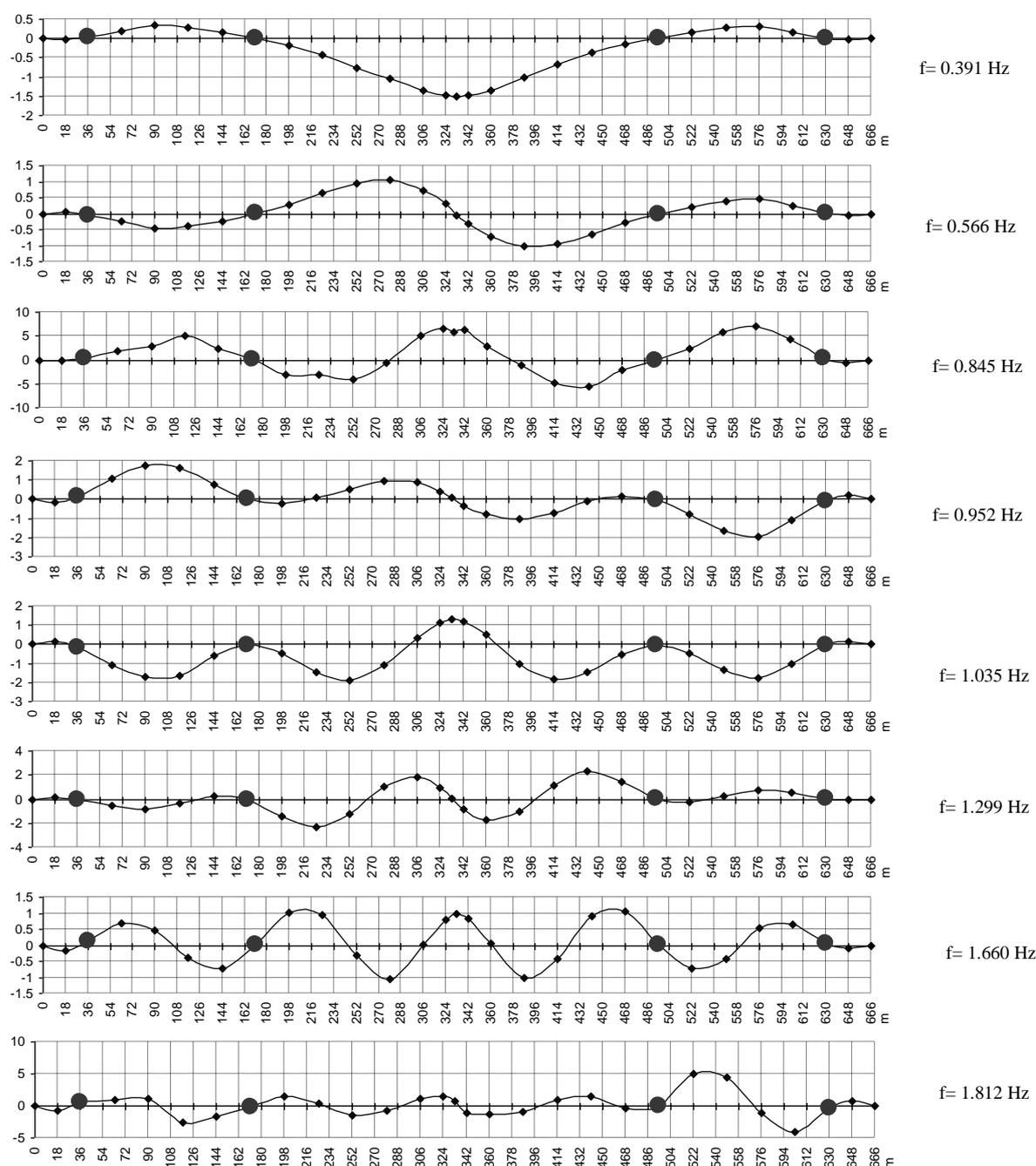
Nos espectros normalizados médios (Figura 4.43), são destacadas as frequências associadas a modos de vibração do tabuleiro. Verifica-se que muitos dos picos seleccionados apresentam intensidades inferiores às ordenadas espectrais máximas resultantes das vibrações dos tirantes, e que uma das frequências não aparece claramente destacada por um pico, pelo que a simples análise do espectro de potência médio normalizado conduziria a uma identificação errada das frequências naturais do tabuleiro.

Identificação dos modos de vibração

Os modos de vibração foram identificados considerando de forma independente os três registos temporais, associados a cada secção instrumentada, que resultam da operação de pré-processamento anteriormente descrita: média das acelerações verticais, semi-diferença das acelerações verticais e média das acelerações transversais. Assim, na representação, por exemplo, dos modos classificados de

flexão vertical apenas se representam as componentes modais de natureza vertical, considera-se que todas as componentes de natureza transversal são nulas.

Para a determinação dos modos de flexão vertical, foram calculadas as funções de transferência da média das acelerações verticais entre cada uma das secções instrumentadas e a secção de referência. Da avaliação da sua fase e amplitude, nas abcissas correspondentes às frequências identificadas através do terceiro gráfico da Figura 4.43 resultam as configurações modais representadas na Figura 4.46. Cada gráfico representa esquematicamente um alçado do tabuleiro, onde os pontos vermelhos assinalam as posições dos pilares extremos e dos mastros.



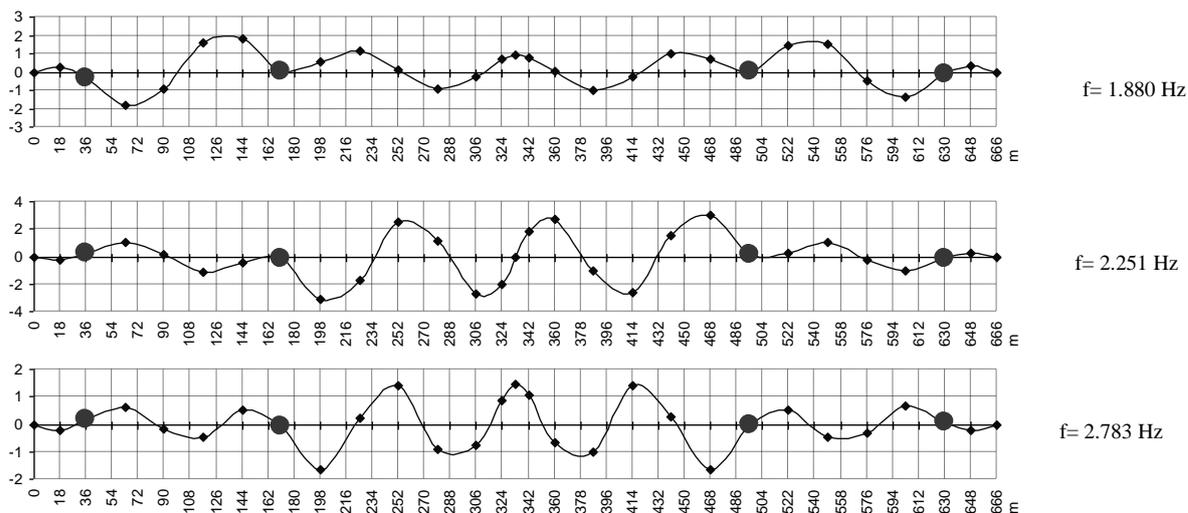


Figura 4.46 – Modos de flexão vertical identificados

Nos terceiro e oitavo modos de flexão vertical, a ordenada da secção de referência é próxima de zero. A este facto está naturalmente associada uma ordenada do espectro de potência, na secção de referência, relativa à frequência destes modos, de valor relativamente baixo, sendo portanto a relação entre ruído e sinal mais elevada. A imprecisão do espectro nestas frequências conduz a erros nas estimativas das funções de transferência e consequentemente a configurações modais menos bem definidas que as restantes.

Mais uma vez se realça a importância de seleccionar bem a secção de referência e, se possível, utilizar duas. Na presente aplicação, apenas foi usada uma, pois apenas existiam disponíveis quatro sismógrafos. A sua localização, a um terço do vão principal, foi escolhida com base nas configurações modais obtidas numericamente.

Para a determinação dos modos de torção, foram calculadas as funções de transferência da semi-diferença das acelerações verticais entre cada uma das secções instrumentadas e a secção de referência. Da avaliação da sua fase e amplitude, nas abcissas correspondentes às frequências identificadas através do primeiro gráfico da Figura 4.43, resultam as configurações modais representadas na Figura 4.47. Nesta figura, foram representadas duas curvas, com sinais contrários, que simbolizam os deslocamentos verticais das extremidades a montante e a jusante do tabuleiro.

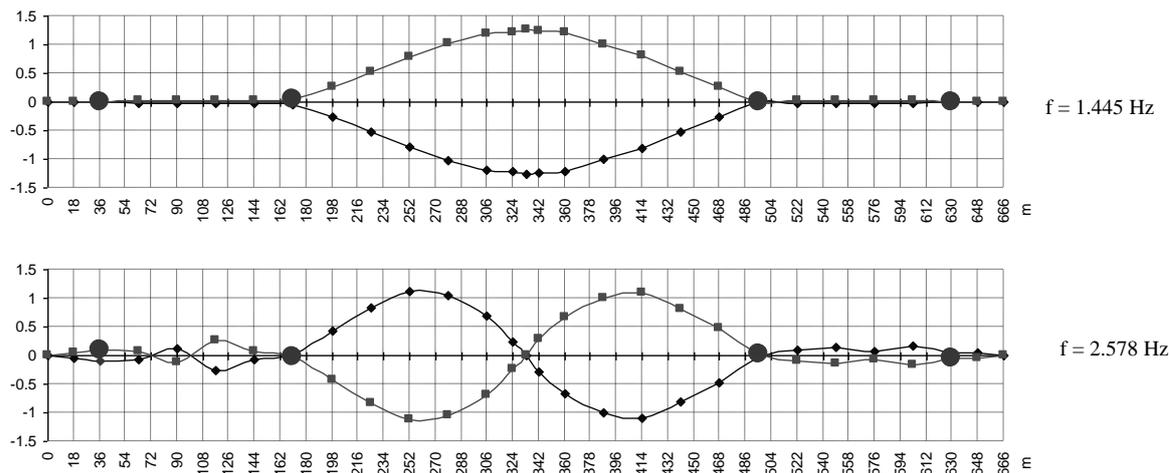


Figura 4.47 – Modos de torção identificados

Para a determinação dos modos de flexão transversal, foram calculadas as funções de transferência da média das acelerações transversais entre cada uma das secções instrumentadas e a secção de referência. Da avaliação da sua fase e amplitude, nas abcissas correspondentes às frequências identificadas através do segundo gráfico da Figura 4.43, resultam as configurações modais representadas na Figura 4.48. Estes gráficos representam esquematicamente plantas do tabuleiro, onde os pontos vermelhos assinalam as posições dos pilares e dos mastros.

Os modos de flexão transversal, em particular o segundo, não se apresentam tão bem definidos como os modos que envolvem deslocamentos verticais. Tal deve-se ao facto do ensaio ter sido realizado sob acção de tráfego rodoviário, sendo portanto os movimentos verticais mais estimulados que os movimentos transversais.

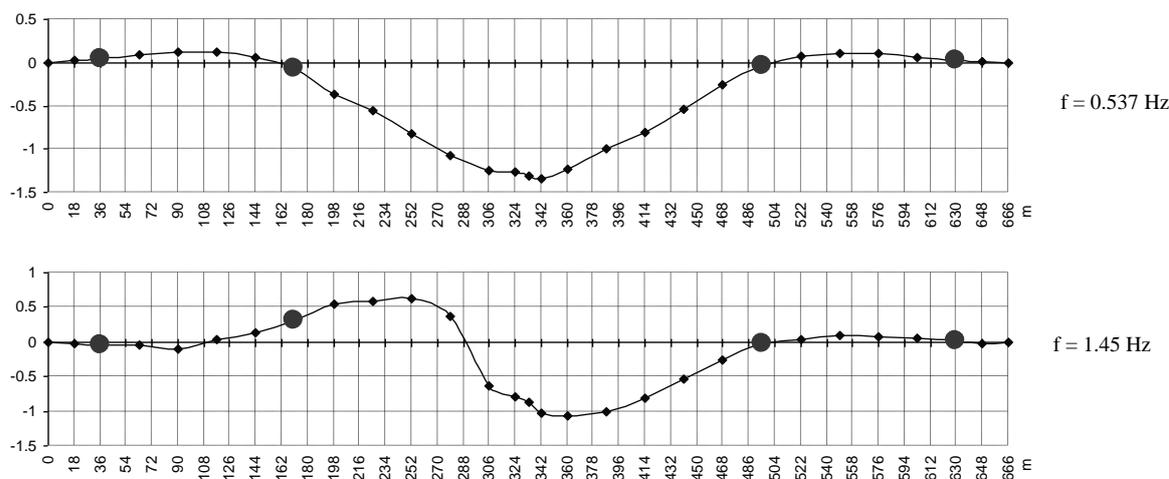


Figura 4.48 – Modos de flexão transversal identificados

Verifica-se que existem dois pares de frequências muito próximas: 0,566 Hz (segundo modo de flexão vertical) e 0,537 Hz (primeiro modo de flexão transversal); 1,445 Hz (primeiro modo de torção) e 1,45 Hz (segundo modo do flexão transversal). Realizando a operação preliminar de processamento dos sinais descrita nesta subsecção e representando espectros normalizados médios independentes para cada tipo de movimento, estas frequências naturais foram facilmente identificadas. Nas subsecções seguintes vai ser tentada a sua identificação através de métodos de identificação estocásticos mais evoluídos, sem recorrer a este pré-processamento.

4.4.6.2 Método de decomposição no domínio da frequência melhorado

A aplicação do método de decomposição no domínio da frequência foi realizada utilizando o “software” comercial ARTEMIS.

Para reduzir a quantidade de informação introduzida no programa, para cada secção do tabuleiro instrumentada, a partir das seis séries temporais recolhidas em cada secção (3 por cada ponto) foram definidas quatro que caracterizam completamente o seu movimento: acelerações verticais a montante, acelerações verticais a jusante, acelerações transversais, calculadas através da média das duas séries medidas, e acelerações longitudinais, calculadas através da média das duas séries medidas. Em relação às medidas efectuadas nos mastros, não foram consideradas as séries temporais das acelerações verticais, pois estas são negligenciáveis.

Na Figura 4.49, a título de exemplo, apresentam-se, para três “setups”, os graus de liberdade considerados.

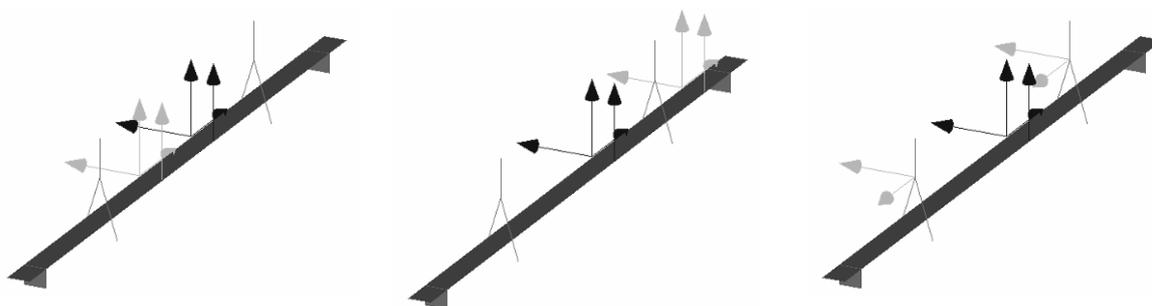


Figura 4.49 – Graus de liberdade considerados em 3 “setups”

Este método de identificação no domínio da frequência também se baseia nos espectros das séries temporais de acelerações medidas, tendo estes sido calculados utilizando a mesma resolução em frequência que foi usada anteriormente na aplicação do método da selecção de picos.

Para cada “setup” foi construída a matriz dos espectros reduzida, isto é, a matriz em que apenas estão presentes os espectros cruzados entre cada um dos graus de liberdade instrumentados e os graus de liberdade de referência, e foi realizada a sua decomposição em valores singulares. Como em cada “setup”, 4 dos 8 graus de liberdade considerados são de referência, a matriz dos espectros tem dimensão 8x4, resultando da sua decomposição 4 valores singulares.

As frequências naturais da estrutura podem ser identificadas a partir dos picos dos 4 valores singulares, que resultam da média dos 4 valores singulares normalizados relativos a cada um dos “setups”. Estes encontram-se representados na Figura 4.50, onde também são destacadas, através de linhas verticais, as frequências naturais identificadas.

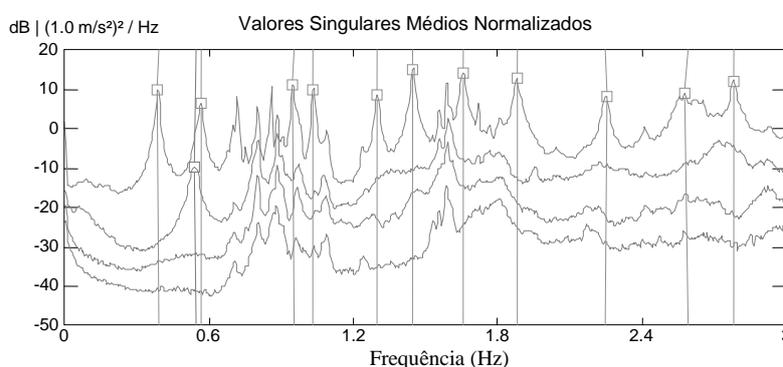


Figura 4.50 – Valores singulares médios normalizados

Para além dos picos associados às frequências naturais do tabuleiro, também aparecem máximos que estão associados a frequências naturais dos tirantes. Estes foram diferenciados dos restantes através da análise dos espectros relativos a “setups” com velocidades do vento baixas, onde apenas aparecem destacadas as frequências associadas a modos de vibração do tabuleiro, e verificando que as configurações modais que lhes estão associadas não são realistas.

A decomposição em valores singulares permitiu a identificação das duas frequências naturais próximas de 0,55 Hz, mas não foi capaz de separar os dois modos de vibração com frequências naturais na vizinhança de 1,45 Hz. A frequência de 0,845 Hz que, na aplicação do método de selecção de picos foi difícil de identificar, também não aparece destacada nos valores singulares normalizados médios.

Nos valores singulares associados aos 28 “setups” foram seleccionados os pontos na vizinhança de cada uma das frequências naturais, assinaladas no gráfico da Figura 4.50, utilizados para o cálculo da função de auto-correlação associada a cada resposta modal. No programa ARTEMIS, esta selecção é feita com base no MAC. No entanto, devido ao reduzido número de graus de liberdade instrumentados em cada “setup”, nalguns casos, valores elevados do MAC (0.95) levavam à selecção de pontos que

continham a contribuição de dois modos. Assim, a selecção foi realizada, em cada caso, de forma manual e tendo como referência a configuração típica da função de auto-correlação de cada resposta modal, a qual deve ter uma envolvente traduzida por uma função exponencial decrescente.

Na Figura 4.51 exemplifica-se, usando os dados recolhidos no primeiro “setup”, o cálculo da função de auto-correlação associada ao primeiro modo de vibração.

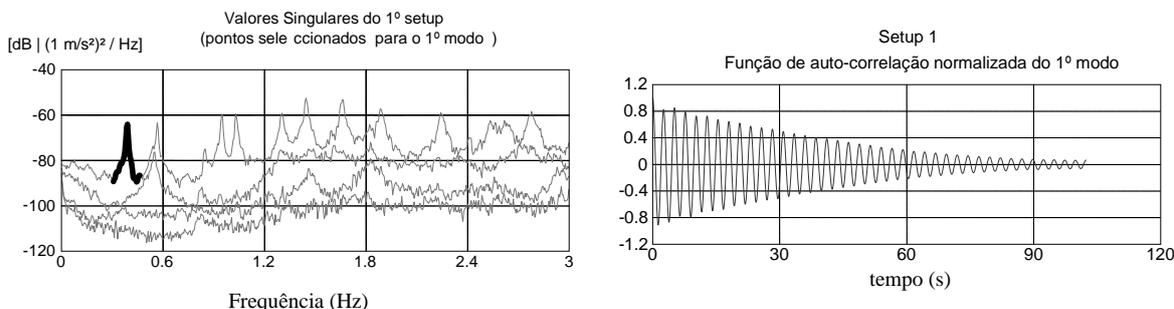


Figura 4.51 – Cálculo da função de auto-correlação relativa à resposta do 1º modo, no 1º “setup”

A partir das funções de auto-correlação, foram identificadas as frequências naturais e os coeficientes de amortecimento associados a cada um dos modos de vibração. Neste caso, como foram realizados 28 “setups”, obtêm-se para cada modo 28 estimativas da frequência natural e do coeficiente de amortecimento. No Quadro 4.8, apresenta-se a média e o desvio padrão das estimativas obtidas.

Quadro 4.8 – Resultados do método EFDD

Modo	Tipo de modo	Frequência (Hz)	σ (freq)	ξ [%]	σ (ξ) [%]
1	f. vertical	0.388	0.0023	1.37	0.41
2	f. transversal	0.548	0.0609	2.23	0.79
3	f. vertical	0.568	0.0229	1.20	0.45
4	f. vertical	0.950	0.0041	0.69	0.25
5	f. vertical	1.033	0.0023	0.51	0.12
6	f. vertical	1.299	0.0020	0.54	0.11
7	torção / f. trans.	1.448	0.0021	0.47	0.16
8	f. vertical	1.655	0.0034	0.63	0.28
9	f. vertical	1.880	0.0044	0.65	0.25
10	f. vertical	2.248	0.0047	0.59	0.22
11	torção	2.595	0.0272	1.48	0.53
12	f. vertical	2.779	0.0043	0.46	0.19

Da análise do quadro, constata-se que as frequências identificadas por este método são muito próximas das que resultaram da aplicação do método da selecção de picos e que a sua variabilidade ao longo dos diferentes “setups” é reduzida (baixos valores dos desvios-padrão). A variabilidade associada aos coeficientes de amortecimento é significativamente superior à das frequências, facto que resulta de

dois factores: as incertezas associadas ao método de identificação utilizado e a variação do amortecimento com a velocidade do vento. Este último aspecto será discutido no ponto 4.4.6.4.

Na Figura 4.52 apresentam-se, a título de exemplo, as configurações dos 4 primeiros modos de flexão vertical identificados. É interessante observar o movimento das torres, coerente com a flexão do tabuleiro.

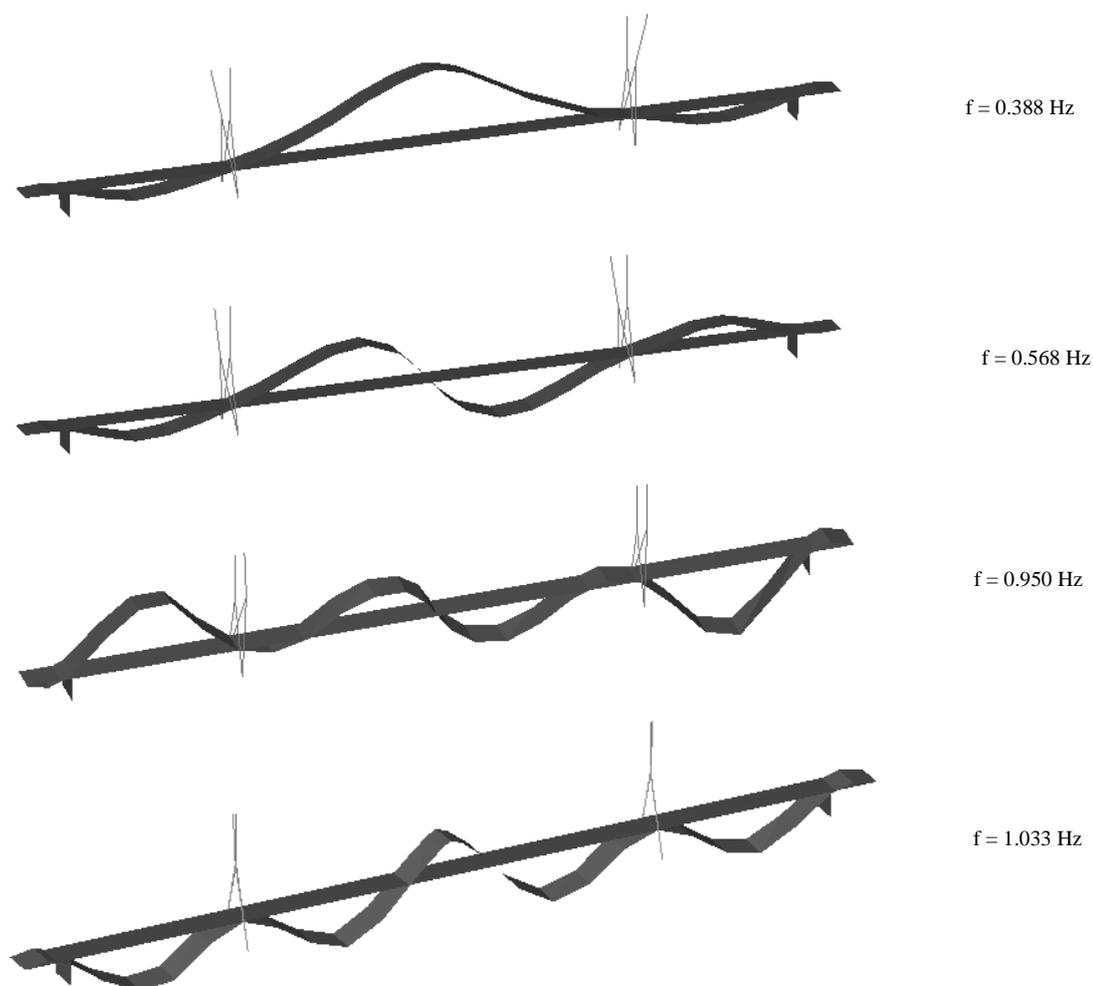


Figura 4.52 – Modos de vibração de flexão vertical

Na Figura 4.53 representa-se o primeiro modo de flexão transversal. Verifica-se que a configuração obtida através deste método não é tão boa como a obtida no ponto anterior. Tal deve-se ao facto do pico referente a este modo, por apresentar uma frequência próxima da do segundo modo de flexão vertical, não aparecer bem definido nalguns “setups”.



Figura 4.53 – Modo de vibração de flexão transversal

Na Figura 4.54 representam-se os dois modos de torção identificados, sendo, para o primeiro, representada uma perspectiva e uma vista superior. Na vista superior do primeiro, constata-se que existe um movimento transversal acoplado ao movimento de torção. Na análise anterior, verificou-se que a frequência do segundo modo de flexão transversal é praticamente coincidente com a frequência do primeiro modo de torção, razão pela qual este método não os consegue separar e conduz a uma configuração modal onde os movimentos dos dois modos aparecem misturados.

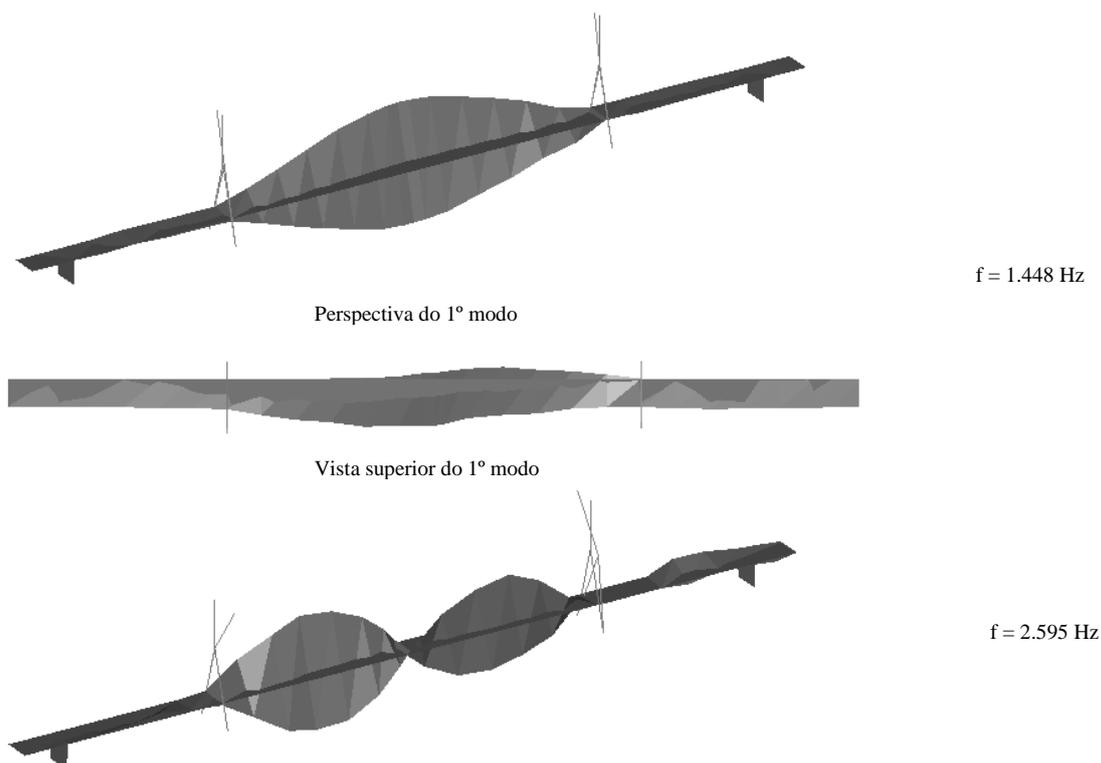


Figura 4.54 – Modos de vibração de torção

4.4.6.3 Método de identificação estocástica por sub-espacos a partir das séries temporais

A aplicação do método de identificação estocástica por sub-espacos foi realizada através do software de cálculo ARTEMIS, usando a variante CVA na versão que, para cada “setup”, apenas realiza a projecção das séries temporais dos sensores de referência.

Da aplicação dos métodos anteriores e dos resultados do modelo numérico, verificou-se que as frequências principais da estrutura, associadas aos primeiros 15 modos de vibração, são inferiores a 3 Hz. Assim, antes da aplicação do presente método de identificação, as séries temporais foram filtradas por um filtro passa-baixo de Butterworth de ordem 8 e com um frequência de corte de 3 Hz, e foi aplicada um decimação de ordem 10 (frequência de Nyquist = 5 Hz).

Na aplicação dos métodos de identificação por sub-espacos, é importante eliminar as frequências de ressonância que não são relevantes para a análise, para possibilitar o ajuste da informação recolhida com modelos de ordem inferior, e assim diminuir o tempo de cálculo.

Na primeira análise realizada, foram admitidos 20 modos estruturais, embora de facto apenas existam 15, e 80 modos (4 vezes o número de modos estruturais) para ajustar o ruído e erros numéricos. Fica assim possibilitada a construção de modelos até à ordem 200. No entanto, verifica-se que os melhores resultados se obtêm com modelos de ordens compreendidas entre 40 e 80.

Para os 28 “setups”, calcularam-se diagramas de estabilização estimando apenas os modelos de ordem par e com ordens compreendidas entre 2 e 100. Na Figura 4.55, apresentam-se dois exemplos destes diagramas, o primeiro relativo a um “setup” com velocidades do vento reduzidas (2 m/s) e o segundo relativo a um “setup” com velocidades do vento moderadas (8 m/s).

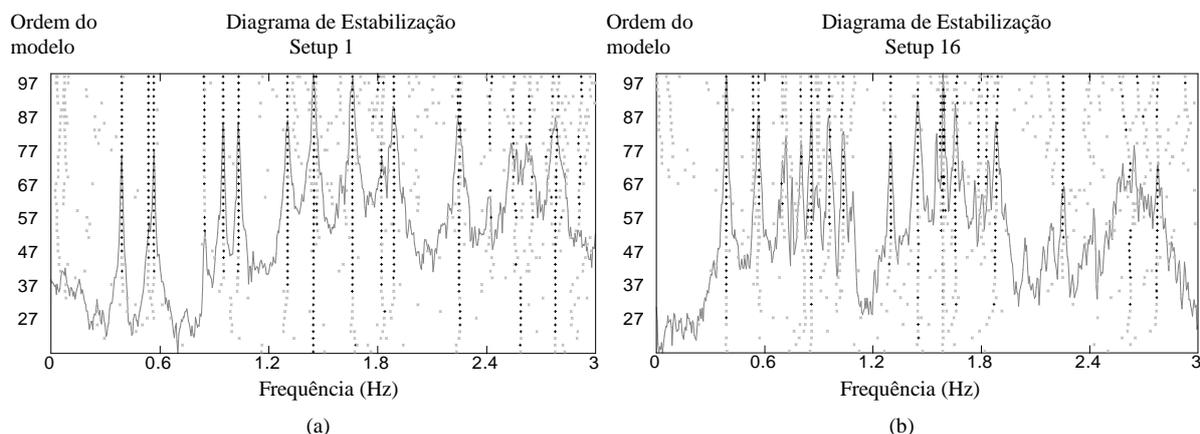


Figura 4.55 – Diagramas de estabilização relativos: (a) a um “setup” com velocidades de vento reduzidas, (b) a um “setup” com velocidades de vento moderadas

Os pontos pretos representam as frequências associadas a modos estáveis, sendo para a sua definição adoptados os seguintes limites de variação: 0,01 Hz para as frequências, 0,1% para os coeficientes de amortecimento e 0,05 para o MAC.

Os alinhamentos verticais de pontos pretos (modos estáveis) definem as frequências naturais da estrutura, que podem ser confirmadas pelo seu confronto com os máximos do primeiro valor singular da matriz dos espectros do “setup” respectivo.

Verifica-se que, também neste método, as vibrações dos tirantes, provocadas por ventos de intensidade moderada, dificultam a identificação, pois no segundo diagrama, entre os 0,7 e o 1,1 Hz, aparecem modos estáveis distintos dos modos de vibração do tabuleiro.

Para cada “setup” foi seleccionado o modelo de ordem mais baixa, mas que contém todas as frequências que se mostram estáveis. É importante seleccionar o modelo de ordem mais baixa, mas suficiente para identificar todos os modos estruturais, pois quanto maior é a ordem do modelo, maior é o número de parâmetros ajustados e portanto maior é a incerteza do resultado.

Na Figura 4.56 representam-se os pontos representativos dos modos dos modelos seleccionados para os 28 “setups” e destacam-se aqueles que são estáveis (representados a vermelho) e que apresentam frequências semelhantes ao longo de todos os “setups” (linhas verticais). Nesta figura, é interessante verificar o aparecimento de novos modos a partir do “setup” 13, “setup” a partir do qual o vento assumiu velocidades moderadas (> 8 m/s).

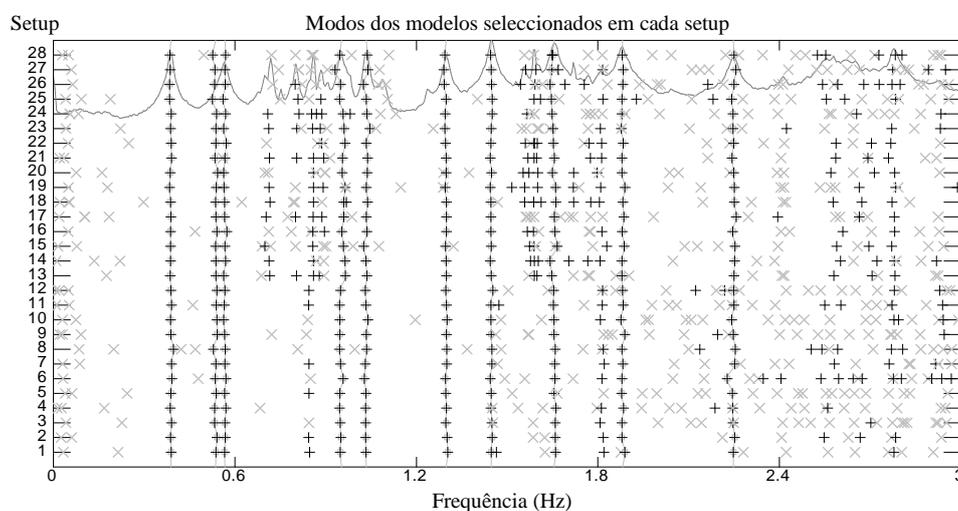


Figura 4.56 – Modos identificados em cada “setup”

No Quadro 4.9 resumem-se os resultados obtidos. Verifica-se que este método de identificação, tal como o método EFDD, é capaz de identificar as duas frequências relativamente próximas na vizinhança de 0,55 Hz, não sendo, no entanto, capaz de identificar as duas frequências praticamente coincidentes na vizinhança de 1,5 Hz. Consta-se também que não é capaz de identificar os dois últimos modos do intervalo de frequência analisado, nem o modo com frequência 0.845 Hz.

Quadro 4.9 – Resultados do método SSI-DATA

Modo	Tipo de modo	Freq. [Hz]	σ (freq)	ξ [%]	σ (ξ) [%]
1	f. vertical	0.388	0.0027	1.10	0.40
2	f. transversal	0.536	0.0042	2.29	0.90
3	f. vertical	0.567	0.0028	1.24	0.37
4	f. vertical	0.953	0.0079	0.76	0.50
5	f. vertical	1.034	0.0044	0.91	0.56
6	f. vertical	1.298	0.0028	0.65	0.27
7	torção	1.447	0.0022	0.47	0.15
8	f. vertical	1.654	0.0059	0.98	0.80
9	f. vertical	1.882	0.0036	0.75	0.40
10	f. vertical	2.248	0.0056	0.49	0.12

No Quadro 4.10 apresenta-se a matriz dos MAC entre os modos identificados pelo método EFFD e os que resultam desta análise, verificando-se que os valores da diagonal principal (MACs relativos ao mesmo modo) são próximos da unidade, o que indica que as configurações modais resultantes desta análise são semelhantes às obtidas mediante a aplicação do método EFDD.

Quadro 4.10 – MAC entre os modos identificados pelo EFFD e os identificados pelo SSI-DATA

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.996	0.019	0.030	0.009	0.139	0.032	0.042	0.183	0.097	0.016
2	0.132	0.910	0.100	0.035	0.059	0.050	0.169	0.007	0.036	0.042
3	0.019	0.155	0.975	0.055	0.023	0.016	0.006	0.031	0.008	0.059
4	0.057	0.115	0.098	0.977	0.053	0.019	0.017	0.024	0.031	0.027
5	0.147	0.028	0.027	0.031	0.995	0.011	0.001	0.087	0.018	0.022
6	0.016	0.038	0.029	0.004	0.020	0.999	0.012	0.003	0.022	0.025
7	0.040	0.171	0.015	0.018	0.013	0.002	0.999	0.005	0.010	0.010
8	0.156	0.051	0.023	0.045	0.115	0.042	0.011	0.970	0.102	0.029
9	0.096	0.068	0.021	0.047	0.035	0.021	0.014	0.097	0.991	0.013
10	0.027	0.029	0.056	0.051	0.016	0.033	0.010	0.025	0.014	0.996

Uma vez que a análise anterior exigiu um elevado tempo de cálculo, pelo facto de ter sido necessário recorrer a modelos de ordem bastante elevada, foi realizada uma segunda análise, para verificar se é possível, com um esforço de cálculo inferior, identificar os modos de vibração mais importantes.

Assim, nesta segunda análise, para eliminar parte dos modos não estruturais, foi realizada uma decimação do sinal de ordem 30, que elimina a contribuição das frequências superiores a 1.667 Hz. Foi escolhido este limite, pois só inviabiliza a identificação de 3 modos de vibração do tabuleiro e elimina um elevado número de modos instáveis, presentes no diagrama da Figura 4.56 entre 1.5 e 3 Hz.

Para definir as dimensões da matriz de Hankel, foram admitidos 10 modos estruturais, embora na realidade se esperem apenas 7, e considerados, de forma bastante conservativa, 50 modos não

estruturais. Estes valores permitem a construção de modelos até à ordem 120. No entanto, verifica-se que os melhores resultados se obtêm com modelos com ordens compreendidas entre 20 e 50, cerca de metade do necessário na análise anterior.

Na Figura 4.57 apresentam-se dois exemplos de diagramas de estabilização, o primeiro relativo a um “setup” com velocidades do vento reduzidas (2 m/s) e o segundo relativo a um “setup” com velocidades do vento moderadas (8 m/s). Nesta análise foi possível considerar um intervalo mais apertado da variação da frequência para a definição dos modos estáveis: 0,001 Hz. Para as restantes variáveis foram usados os intervalos definidos na análise anterior.

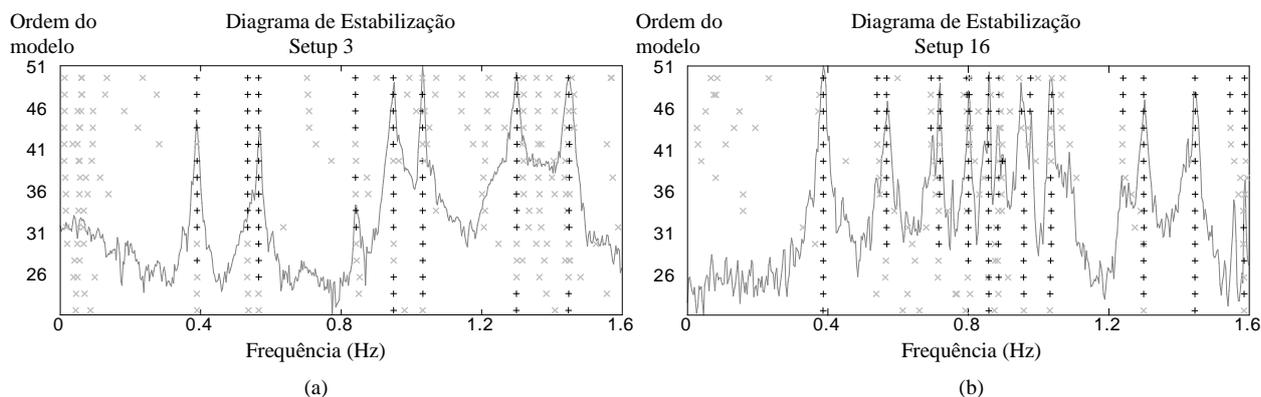


Figura 4.57 – Diagramas de estabilização (segunda análise) relativos: (a) a um “setup” com velocidades de vento reduzidas, (b) a um “setup” com velocidades de vento moderadas

Na Figura 4.58 representam-se os pontos representativos dos modos dos modelos seleccionados para os 28 “setups” e são identificados os alinhamentos relativos a sete modos de vibração da estrutura. No diagrama é perfeitamente claro que o modo com uma frequência aproximada de 0,85 Hz, que aparece com alguma consistência nos “setups” realizados com vento fraco (“setups” 1 a 12), se torna difuso nos “setups” com vento moderado, pelo facto de ser “abafado” pelas vibrações dos tirantes.

No Quadro 4.11 resumem-se os resultados obtidos. Verifica-se que as frequências obtidas nesta segunda análise são praticamente coincidentes com as obtidas na análise anterior. No entanto, em relação aos coeficientes de amortecimentos dos modos 4, 5 e 6 registam-se diferenças significativas. No modo 5, em particular, a diferença é bastante elevada.

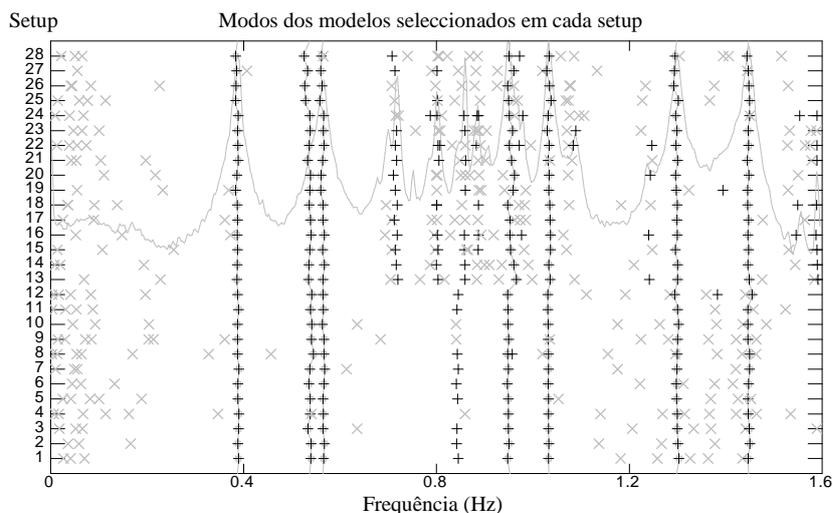


Figura 4.58 – Modos identificados em cada “setup” (segunda análise)

Quadro 4.11 – Resultados do método SSI-DATA (segunda análise)

Modo	Tipo de modo	Freq. [Hz]	σ (freq)	ξ [%]	σ (ξ) [%]
1	f. vertical	0.387	0.0020	1.09	0.41
2	f. transversal	0.537	0.0055	2.28	0.69
3	f. vertical	0.565	0.0025	1.21	0.50
4	f. vertical	0.954	0.0075	0.47	0.21
5	f. vertical	1.033	0.0028	0.43	0.25
6	f. vertical	1.298	0.0024	0.47	0.14
7	torção	1.447	0.0019	0.42	0.15

Para investigar a causa da grande diferença verificada no amortecimento do 5º modo, foi realizado o gráfico que se apresenta na Figura 4.59, onde se representa a variação, ao longo dos 28 “setups”, do coeficiente de amortecimento modal identificado para o quinto modo de vibração pelas duas análises efectuadas. Neste verifica-se que a partir do “setup” 13, quando a velocidade do vento passa a ser moderada, a análise 1 estima valores de amortecimento bastante dispersos e muito elevados. Como a frequência do 5º modo de vibração é próxima das frequências de vibração dos tirantes, nos resultados da primeira análise, relativos aos “setups” com velocidades de vento moderadas, os coeficientes de amortecimento mais elevados estão associados a modos dos tirantes. Na segunda análise, realizada num intervalo de frequência mais estreito, a percentagem superior de modos numéricos permitiu uma melhor separação entre os modos do tabuleiro e dos tirantes.

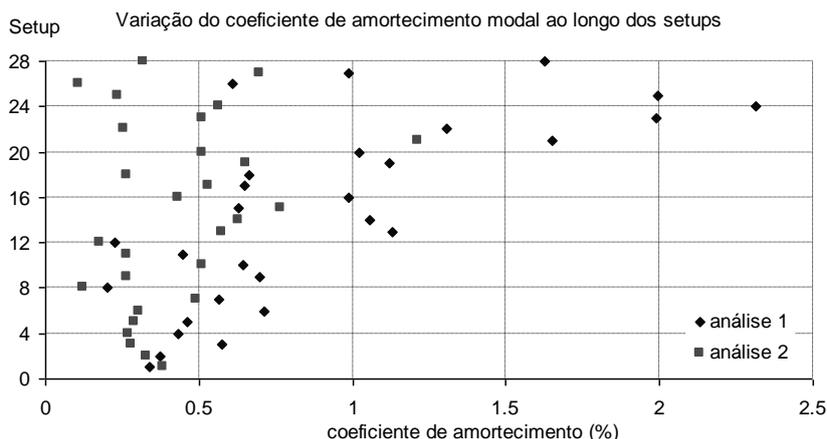


Figura 4.59 – Variação do coeficiente de amortecimento do 5º modo ao longo dos vários “setups”

4.4.6.4 Avaliação da variação dos coeficientes de amortecimento com a velocidade do vento

O ensaio de vibração ambiental foi realizado com um número bastante elevado de “setups”, proporcionando assim, um grande número de séries temporais com a duração de 21 minutos, nas secções de referência. Estas séries temporais podem ser usadas para obter estimativas de espectros de potência com grande resolução em frequência e resultantes da realização de várias médias. Com estas estimativas melhoradas dos espectros, podem ser calculadas funções de auto-correlação e consequentemente obtidas melhores estimativas dos coeficientes de amortecimento. Neste ponto, será descrita a forma como este procedimento foi usado para avaliar a variação dos coeficientes de amortecimento com a velocidade do vento.

Primeiro, a partir das seis séries temporais recolhidas na secção de referência foram obtidas três, onde as contribuições de cada tipo de modo ficam separadas: médias das acelerações verticais, semi-diferença das acelerações verticais e médias das acelerações transversais.

A partir dos 28 grupos de três séries temporais, um para cada “setup”, foram calculados 7 espectros de acordo com os agrupamentos definidos no Quadro 4.12. Obtêm-se assim três espectros para os dias de vento com velocidades médias de 2 e 10 m/s e um espectro para o dia de vento com velocidade média de 14 m/s. Este agrupamento permitiu calcular cada um dos espectros a partir de 24 segmentos com 5 minutos de duração.

Quadro 4.12 – Agrupamentos das séries temporais para obtenção de espectros

Dia	Setup	Espectro	Dia	Setup	Espectro	Dia	Setup	Espectro
Sábado - 20/03/2004	1	Esp 1	Domingo - 21/03/2004	13	Esp 4	Segunda-feira 22/03/2004	25	Esp 7
	2			14			26	
	3			15			27	
	4			16			28	
	5	Esp 2		17	Esp 5			
	6			18				
	7			19				
	8			20				
	9	Esp 3		21	Esp 6			
	10			22				
	11			23				
	12			24				

Na Figura 4.60 representam-se os 7 auto-espectros da média das acelerações verticais na vizinhança das frequências naturais associadas aos dois primeiros modos de flexão vertical. Verifica-se que os picos dos três primeiros espectros, associados ao dia com vento mais fraco, são mais aguçados que os restantes, evidenciando valores dos coeficientes de amortecimento, associados a estes modos, inferiores aos presentes nos restantes espectros.

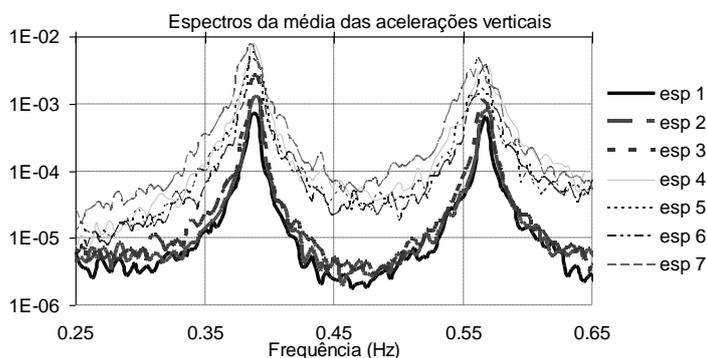


Figura 4.60 – Auto-espectros da média das acelerações verticais

Para confirmar a ocorrência de variação dos coeficientes de amortecimento com a velocidade do vento, foram calculadas as funções de auto-correlação relativas à resposta dos primeiros modos de vibração de cada tipo e, a partir destas, estimados os coeficientes de amortecimento modais.

No gráfico da esquerda da Figura 4.61 apresenta-se a função de auto-correlação associada ao primeiro modo de flexão vertical, calculada a partir do espectro 1 e usando as ordenadas com abcissas entre 0,3 e 0,475 Hz. À direita, representam-se os seus pontos máximos numa escala logarítmica, aos quais se ajusta uma curva exponencial, cujo expoente, ou declive na escala logarítmica, é proporcional ao coeficiente de amortecimento.

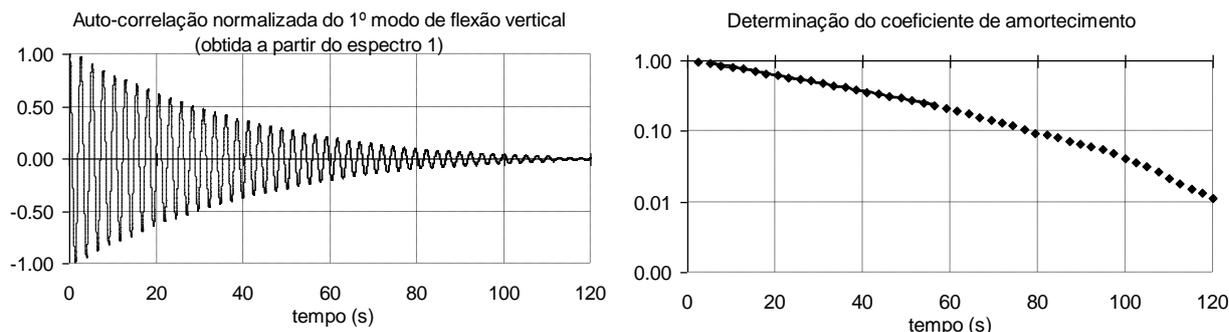


Figura 4.61 – Determinação do amortecimento do primeiro modo de flexão vertical a partir do espectro 1

Procedendo de igual forma para os restantes espectros e considerando o primeiro modo de vibração de cada tipo de movimento, obtêm-se os resultados que se apresentam no Quadro 4.13.

Quadro 4.13 – Variação dos coeficientes de amortecimento modais com a velocidade do vento

Espectro	V. vento	1º modo de f. vertical		1º modo de torção		1º modo de f. transversal	
		ξ (%)	ξ (%) médio	ξ (%)	ξ (%) médio	ξ (%)	ξ (%) médio
1	2 m/s	1.09	0.95	0.47	0.37	2.31	1.84
2		0.94		0.30		1.39	
3		0.81		0.35		1.82	
4	9 m/s	1.36	1.43	0.56	0.51	2.72	2.28
5		1.82		0.57		2.00	
6		1.10		0.40		2.13	
7	14 m/s	1.95	1.95	0.47	0.47	2.43	2.43

Da análise deste quadro e do gráfico da Figura 4.62, verifica-se que existe para os modos de flexão vertical e transversal analisados uma tendência de aumento do coeficiente de amortecimento com o aumento da velocidade média do vento. Este aumento é justificável pelo facto do amortecimento medido ser resultante da soma de duas parcelas: o amortecimento intrínseco da estrutura e o amortecimento aerodinâmico introduzido pelo escoamento de ar em torno do tabuleiro, que é função da velocidade do vento. No modo de torção o efeito do amortecimento aerodinâmico é reduzido. Estes aspectos encontram-se tratados no livro (Simiu e Scanlan 1996).

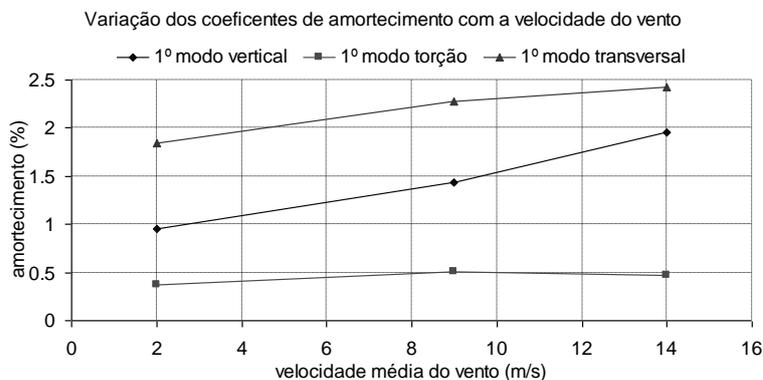


Figura 4.62 – Variação dos coeficientes de amortecimento com a velocidade do vento

Este interessante resultado é aqui apresentado apenas com o objectivo de mostrar que, através de um ensaio de vibração ambiental e de um tratamento adequado da informação recolhida, é possível identificar este fenómeno. A instalação de um sistema de monitorização contínua permitirá certamente avaliar mais pontos do gráfico da Figura 4.62 e melhor caracterizar a correlação destas duas variáveis.

4.4.7 Considerações finais

Nesta secção foram aplicadas diferentes técnicas de identificação estocásticas para estimar as características dinâmicas da Ponte Internacional sobre o rio Guadiana, a partir dos dados recolhidos num ensaio de vibração ambiental.

Primeiro foi aplicado o método mais simples da selecção de picos (PP), usando rotinas desenvolvidas em MATLAB no contexto deste trabalho. Na aplicação deste método houve o cuidado de combinar as séries de acelerações recolhidas, de forma a obter séries temporais em que a contribuição dos diferentes tipos de modos fosse separada. Esta operação permitiu identificar modos de vibração com frequências naturais muito próximas e obter traçados das respectivas configurações modais com muito boa qualidade. Uma inspecção cuidada dos auto-espectros possibilitou ainda a identificação de uma frequência natural do tabuleiro próxima das frequências naturais de vibração dos tirantes.

De seguida, recorreu-se ao software comercial ARTEMIS para realizar a aplicação de outros dois métodos de identificação: decomposição melhorada no domínio da frequência (EFDD) e identificação estocástica por subespaços a partir das séries temporais (SSI-DATA). Ambos os métodos gozam da capacidade de possibilitar a identificação de frequências próximas, razão pela qual antes da sua aplicação, ao contrário do que foi realizado na aplicação do PP, não foi feito qualquer pré-processamento das séries temporais, com o objectivo de separar as contribuições dos diferentes tipos de modos. Em relação ao PP, estes métodos têm também a vantagem de permitir a identificação de coeficientes de amortecimento modais.

O método EFDD foi capaz de individualizar as duas frequências próximas: 0,548 e 0,568 Hz, associadas ao segundo modo de flexão vertical e ao primeiro modo de flexão transversal, respectivamente. No entanto, a configuração modal do segundo foi conseguida com pouca qualidade. As frequências praticamente coincidentes: 1,445 e 1,450 Hz, identificadas na aplicação do PP, não foram separadas por este método.

As frequências obtidas pelo método EFFD são praticamente constantes para os diferentes “setups”, mas os coeficientes de amortecimento apresentam uma variabilidade considerável (desvios padrão entre 0.11 e 0.79 %).

A aplicação do método EFDD, pelo facto do ensaio ter sido realizado com muitos “setups”, tornou-se bastante trabalhosa, pois para a identificação de 12 modos foi necessário seleccionar, de forma manual, para cada “setup”, num total de 28, as doze zonas dos valores singulares das matrizes de espectros, usadas para o cálculo das funções de auto-correlação associadas a cada modo.

A aplicação do método de identificação estocástica a partir das séries temporais (SSI-DATA) foi realizada considerando dois intervalos de análise em frequência distintos: uma primeira análise (an.1) mais abrangente considerando frequências entre 0 e 3 Hz e uma segunda análise (an.2), mais eficiente do ponto de vista de tempo de cálculo, concentrada no intervalo de 0 a 1,667 Hz.

A primeira análise permitiu a identificação de 10 modos, menos dois que o método EFDD no mesmo intervalo de frequências. Nenhuma das análises conseguiu separar o segundo modo de flexão vertical do primeiro modo de torção, nem identificar a frequência do tabuleiro de aproximadamente 0,85 Hz, por ser próxima das frequências de vibração dos tirantes. A primeira análise, realizada com uma percentagem de modos numéricos inferior, conduziu a uma sobre-avaliação dos coeficientes de amortecimento associados aos modos de vibração com frequências próximas das frequências de vibração dos tirantes (0.8 a 1.1 Hz). Tal, deve-se ao facto de não ter conseguido separar os modos de vibração conjuntos dos tirantes e tabuleiro dos modos de vibração do tabuleiro.

Finalmente, foram calculadas funções de auto-correlação relativas às respostas dos primeiros modos de cada tipo, usando espectros referidos à secção de referência e calculados usando um elevado número de séries temporais recolhidas nesta secção. Estes permitiram obter boas estimativas de coeficientes de amortecimento e avaliar a sua variação com a velocidade do vento.

No Quadro 4.14, apresenta-se um resumo dos principais resultados obtidos com as diferentes abordagens: PP – selecção de picos, EFDD – decomposição no domínio da frequência melhorada, SSI-DATA – identificação estocástico por sub-espacos a partir das séries temporais e F. AC – cálculo de funções de auto-correlação na secção de referência. Resumem-se também nesse quadro os valores das frequências naturais calculadas através do modelo numérico (MN).

Quadro 4.14 – Resumo dos resultados dos métodos aplicados

Modo	tipo	MN	PP	EFDD		SSI-DATA (an. 1)		SSI-DATA (an. 2)		F. AC.	
		f (Hz)	f (Hz)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)	f (Hz)	ξ (%)
1	f. vertical	0.377	0.391	0.388	1.37	0.388	1.103	0.387	1.09	0.39	1.3
2	f. transversal	0.508	0.537	0.548	2.23	0.536	2.291	0.537	2.28	0.539	2.11
3	f. vertical	0.521	0.566	0.568	1.2	0.567	1.241	0.565	1.21	-	-
4	f. vertical	0.778	0.845	-	-	-	-	-	-	-	-
5	f. vertical	0.884	0.952	0.950	0.69	0.953	0.7553	0.954	0.47	-	-
6	f. vertical	0.963	1.035	1.033	0.51	1.034	0.9073	1.033	0.43	-	-
7	f. vertical	1.193	1.299	1.299	0.54	1.298	0.6477	1.298	0.47	-	-
8	torção	1.493	1.445	1.448	0.47	1.447	0.4677	1.447	0.42	1.445	0.45
9	f. transversal	1.222	1.450	-	-	-	-	-	-	-	-
10	f. vertical	1.506	1.660	1.655	0.63	1.654	0.9849	-	-	-	-
11	f. vertical	1.684	1.812	-	-	-	-	-	-	-	-
12	f. vertical	1.786	1.880	1.880	0.65	1.882	0.7455	-	-	-	-
13	f. vertical	2.140	2.251	2.248	0.59	2.248	0.4881	-	-	-	-
14	torção	2.682	2.578	2.595	1.48	-	-	-	-	-	-
15	f. vertical	2.644	2.783	2.779	0.46	-	-	-	-	-	-

As frequências identificadas pelos diferentes métodos são praticamente coincidentes. Em relação aos coeficientes de amortecimento, os valores associados aos primeiros modos de cada tipo apresentam variações pequenas. No entanto, os relativos aos 5º, 6º e 7º modos apresentam uma variabilidade significativa, sendo contudo as diferenças sempre inferiores a 50%, se não forem considerados os resultados SSI-DATA (an. 1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdel-Ghaffar, A. M.; Housner, G. W. (1978) - *Ambient Vibration Tests of Suspension Bridges*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 104(EM5), 983-999.
- Allemang, R. J.; Brown, D. L. (1982) - *A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis*, IMAC I, Orlando, USA.
- Andersen, P.; Brincker, R.; Kirkegaard, P. H. (1996) - *Theory of Covariance Equivalent ARMAV Models of Civil Engineering Structures*, IMAC XIV, Dearborn, USA, 518-524.
- Andersen, P.; Brincker, R.; Peeters, B.; Roeck, G. De; Hermans, L.; Kramer, C. (1999) - *Comparison of System Identification Methods Using Ambient Bridge Test Data*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- Andersen, Palle (1997) - *Identification of Civil Engineering Structures using Vector ARMA Models*, PhD Thesis, Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Asmussen, John Christian (1997) - *Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique*, PhD Thesis, Aalborg University, Aalborg, Denmark.
- Azevedo, J.; Branco, F.; Virtuoso, F. (1986) - *Estudo sísmico da Ponte Internacional do Guadiana*, Relatório Técnico, CMEST EP, Lisboa.
- Bendat, J.; Piersol, A. (1971) - *Random Data: Analysis and Measurements Procedures*, John Wiley & Sons, USA.
- Bendat, J.; Piersol, A. (1980) - *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley & Sons, USA.
- Branco, F.; Azevedo, J.; Corrêa, M. R. ; Costa, A. Campos (1993) - *Dynamic Analysis of the International Guadiana Bridge*, Structural Engineering International, IABSE(4), 240-244.
- Branco, F.; Azevedo, J.; Proença, J (1991) - *Ensaios dinâmicos da Ponte Internacional do Guadiana*, Relatório Técnico, CMEST EP, Lisboa.
- Branden, B.; Peeters, B.; Roeck, G. De (1999) - *Introduction to Macec*, Relatório Técnico, Katholieke Universiteit Leuven.
- Brandt, Anders; Lago, Thomas; Ahlin, Kjell (2004) - *Summary of Spectrum Estimators for Vibration Signals and their Errors*, IMAC XXII, Dearborn, USA.
- Brincker, R.; Andersen, P. (2000) - *Ambient Response Analysis of the Heritage Court Tower Building Structure*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- Brincker, R.; Frandsen, J. B.; Andersen, P. (2000a) - *Ambient Response Analysis of the Great Belt Bridge*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- Brincker, R.; Ventura, C.; Andersen, P. (2001) - *Damping Estimation by Frequency Domain Decomposition*, IMAC XIX, Kissimmee, USA.
- Brincker, R.; Zhang, L. ; Andersen, P. (2000b) - *Modal Identification from Ambient Responses Using Frequency Domain Decomposition*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- Brownjohn, J.; Dumanoglu, A.; Severn, R.; Blakeborough, A. (1989) - *Ambient Vibration Survey of the Bospurus Suspension Bridge*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 18, 263-283.

- Caetano, E.; Cunha, A. (2003) - *Identification of Parametric Excitation at the International Guadiana Bridge*, International Conference on Cable Dynamics, Santa Margherita, Itália.
- Caetano, E.; Cunha, A.; Carvalho, A.; Lage, A.; Correia, M.; Magalhães, F. (2004) - *Desenvolvimento de um Sistema de Monitorização Dinâmico para uma Ponte Atirantada*, Betão Estrutural 2004, Porto, Portugal.
- Caetano, Elsa de Sá (1992) - *Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Caetano, Elsa de Sá (2000) - *Dynamics of Cable-stayed Bridges: Experimental Assessment of Cable-Structure Interaction*, PhD Thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.
- Cauberghe, B.; Guillaume, P.; Verboven, P.; Parloo, E.; Vanlanduit, S. (2004) - *A Poly-reference Implementation of the Maximum Likelihood Complex Frequency-Domain Estimator and some Industrial Applications*, IMAC XXII, Dearborn, USA.
- Clough, Ray W.; Penzien, J. (1993) - *Dynamics of Structures*, McGRAW-HILL.
- Cole, H. (1968) - *On-The-Line Analysis of Random Vibrations*, AIAA, 68(288).
- Cooley, J. W.; Tukey, J. W. (1965) - *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, Mathematics of Computation, 19(90), 297-301.
- Corrêa, M. R.; Costa, A. Campos (1992) - *Ensaio Dinâmico da Ponte sobre o Rio Arade*, Pontes Atirantadas do Guadiana e do Arade, livro editado por J. A. Fernandes e L. O. Santos, LNEC.
- Costa, A. Pinto; Branco, F.; Martins, J. (1994) - *Analysis of the Cable Vibrations at the International Guadiana Bridge*, International Conference on Cable-Stayed Bridges, Deauville, France, 483-490.
- Costa, B.; Felix, C.; Figueiras, J. (2003) - *Instrumentação e Observação do Comportamento da Ponte sobre o Rio Vouga Durante o Ensaio de Carga*, Relatório Técnico, Labest, FEUP.
- Crawford, R.; Ward, H. S. (1964) - *Determination of the Natural Period of Buildings*, Bulletin of the Seismological Society of America, 54(6), 1743-1756.
- Cunha, A.; Caetano, E.; Brincker, R.; Andersen, P. (2004) - *Identification from the Natural Response of Vasco da Gama Bridge*, IMAC XXII, Dearborn, USA.
- Cunha, A.; Caetano, E.; Delgado, R. (2001) - *Dynamic Tests on a Large Cable-Stayed Bridge. An Efficient Approach*, Journal of Bridge Engineering, ASCE, 6(1), 54-62.
- Cunha, A.; Caetano, E.; Moutinho, C. (2000) - *Ambient Vibration Data Analysis of Heritage Court Tower. Contribution of University to IMAC Benchmark*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- Cunha, A.; Calçada, R. (1999) - *Ensaio de Vibração Ambiental da Ponte Luiz I*, 2^{ème} Rencontre en Génie Parasismique des Pays Méditerranéens / 4^º Encontro Nacional de Sismologia e Engenharia Sísmica, Faro.
- Cunha, Álvaro (1990) - *Dinâmica Estrutural Estocástica; Aplicações à Engenharia Sísmica*, Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto.
- Felber, A. J.; Cantieni, Reto (1996) - *Introduction of a new Ambient Vibration Testing System: Description of the System and Seven Bridges Tests*, Relatório Técnico 156'521, EMPA, Dübendorf, Switzerland.

- Felber, Andreas Johann (1993) - *Development of a Hybrid Bridge Evaluation System*, PhD Thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.
- GPPE (1994) - *Estruturas Pré-Esforçadas em Portugal*, Grupo Português de Pré-Esforçado.
- Guillaume, P.; Hermans, L.; Auweraer, H. Van der (1999) - *Maximum Likelihood Identification of Modal Parameters from Operational Data*, IMAC XVII, Kissimmee, USA.
- Horyna, T.; Ventura, C. (2000) - *Summary of HCT Building Ambient Vibration Data Analyses*, IMAC XVIII, San Antonio, USA.
- James, G. H.; Carne, T. G.; Lauffer, J. P.; Nard, A. R. (1992) - *Modal Testing Using Natural Excitation*, IMAC X, San Diego, USA.
- Juang, Jer-Nan (1994) - *Applied System Identification*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Klema, V. C.; Laub, A. J. (1980) - *The Singular Value Decomposition: its Computation and some Applications*, IEEE Transaction on Automatic Control, AC-25(2), 164-178.
- Ljung, L. (1999) - *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, New Jersey.
- MacLamore, V. R.; Hart, G. C.; Stubbs, I. R. (1971) - *Ambient Vibration of two Suspension Bridges*, Journal of the Structural Division, ASCE, 97(ST10), 2567-2582.
- Magalhães, F.; Caetano, E.; Cunha, A. (2003) - *Ensaio de Vibração Ambiental da Nova Ponte sobre o Rio Vouga na EN329 Vila Nova de Paiva - Sátão*, Relatório Técnico, Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas (ViBest), FEUP, Porto.
- Magalhães, F.; Caetano, E.; Cunha, A. (2004a) - *Ensaio de Vibração Ambiental da Ponte de Caniços*, Relatório Técnico, Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas (ViBest), FEUP, Porto.
- Magalhães, F.; Caetano, E.; Cunha, A. (2004b) - *Ensaio de Vibração Ambiental do Viaduto V2*, Relatório Técnico, Laboratório de Vibrações e Monitorização de Estruturas (ViBest), FEUP, Porto.
- Magalhães, F.; Caetano, E.; Cunha, A. (2004c) - *Output Only Modal Identification of a Laboratory Model*, International Conference on Computational & Experimental Engineering And Sciences, Madeira, Portugal.
- Maia, N.; Silva, J. (1997) - *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press Ltd.
- Martins, Câncio (1992) - *Ponte Internacional sobre o Guadiana em Castro Marim*, Pontes Atirantadas do Guadiana e do Arade, livro editado por J. A. Fernandes e L. O. Santos, LNEC.
- MatLab (2000a) - *Using MATLAB Version 6*, The MathWorks.
- MatLab (2000b) - *Using the Control System Toolbox*, The MathWorks.
- Mitchell, L. D. (1990) - *Complex Modes: a Review*, IMAC VIII, Kissimmee, USA.
- Overschee, Peter Van; Moor, Bart De (1996) - *Subspace Identification for Linear Systems*, Kluwer Academic Publishers, Leuven, Belgium.
- Peeters, B.; Guillaume, P.; Auweraer, H. Van der; Cauberghe, B.; Verboven, P.; Leuridan, J. (2004) - *Automotive and Aerospace Applications of the PolyMAX Modal Parameter Estimation Method*, IMAC XXII, Dearborn, USA.

- Peeters, B.; Roeck, G. De (2000) - *Reference Based Stochastic Subspace Identification in Civil Engineering*, Inverse Problems in Engineering, 8(1), 47-74.
- Peeters, B.; Roeck, G. De; Caetano, E.; Cunha, A. (2002) - *Dynamic Study of the Vasco da Gama Bridge*, ISMA 2002 International Conference on Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium.
- Peeters, Bart (2000) - *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*, PhD Thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven.
- Piombo, B.; Giorcelli, E.; Garibaldi, L.; Fasana, A. (1993) - *Structures Identification Using ARMAV Models*, IMAC XI, Kissimmee, USA.
- Prevosto, M. (1982) - *Algorithmes D'Identification des Caractéristiques Vibratoires de Structures Mécaniques Complexes*, PhD Thesis, Université de Rennes I, France.
- Pridham, B.; Wilson, J. (2003) - *An Application Example Illustrating the Practical Issues of Subspace Identification*, IMAC XXI, Kissimmee, USA.
- Ren, Wei-Xin; Zhao, Tong; Harik, Issam E. (2004) - *Experimental and Analytical Modal Analysis of Steel Arch Bridge*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 130(7), 1022-1031.
- Reynolds, P.; Pavic, A.; Ibrahim, Z. (2004) - *Changes of Modal Properties of a Stadium Structure Occupied by a Crowd*, IMAC XXII, Dearborn, Michigan.
- Rodrigues, J. (2002) - *Ensaio de Caracterização Dinâmica da Ponte Salgueiro Maia*, Encontro Nacional Betão Estrutural, Lisboa.
- Rodrigues, J.; Brincker, R.; Andersen, P. (2004) - *Improvement of Frequency Domain Output-Only Modal Identification from the Application of the Random Decrement Technique*, IMAC XXII, Dearborn, USA.
- Rodrigues, J.; Costa, A. Campos (2002a) - *Caracterização Dinâmica da Ponte 25 de Abril com base em Ensaio de Medição de Vibrações Ambiente*, Congresso Nacional de Engenharia de Estruturas, Lisboa.
- Rodrigues, J.; Costa, A. Campos (2002b) - *Ensaio de Caracterização Dinâmica da Estrutura de Ampliação do Aeroporto da Ilha da Madeira*, Congresso Nacional da Engenharia de Estruturas.
- Simiu, Emil; Scanlan, Robert (1996) - *Winds Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design*, Wiley.
- SVS (1999-2004). - ARTeMIS Extractor Pro, Release 3.41. Structural Vibration Solutions, Aalborg, Denmark.
- Trifunac, M. (1972) - *Comparison between Ambient and Forced Vibration Experiments*, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1, 133-150.
- Vandiver, J.; Dunwoody, A.; Campbell, R.; Cook, M. (1982) - *A Mathematical Basis for the Random Decrement Vibration Signature Analysis Technique*, Journal of Mechanical Design, 104(April), 445-460.
- Welch, P. D. (1967) - *The use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: a Method based on Time Averaging over short Modified Periodograms*, IEEE Transaction on Audio and Electro-Acoustics, AU-15(2).
- Zhang, Lingmi (2004) - *An Overview of Major Developments and Issues in Modal Identification*, IMAC XXII, Dearborn, USA.