

Contribuciones a la Simulación Numérica del Fallo Material en Medios Tridimensionales mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo

S. Blanco
J. Oliver
A. E. Huespe

Contribuciones a la Simulación Numérica del Fallo Material en Medios Tridimensionales mediante la Metodología de Discontinuidades Fuertes de Continuo

S. Blanco
J. Oliver
A. E. Huespe

Monografía CIMNE N^o-105, Noviembre 2007

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Primera edición: Noviembre 2007

**CONTRIBUCIONES A LA SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FALLO MATERIAL EN MEDIOS
TRIDIMENSIONALES MEDIANTE LA METODOLOGÍA DE DISCONTINUIDADES FUERTES DE
CONTINUO**

Monografía CIMNE M105

© Los autores

ISBN: 978-84-96736-35-1

Depósito legal: B-55690-2007

Resumen

Esta monografía presenta una reformulación de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo para la simulación numérica del fallo material de estructuras. Los objetivos buscados han sido mejorar la robustez de este tipo de análisis numérico y proporcionar una serie de herramientas que garanticen la confiabilidad de los resultados obtenidos.

La metodología de discontinuidades fuertes de continuo [50]-[51] es una aproximación numérica al fenómeno de la localización de deformaciones por ablandamiento. Al contrario de las aproximaciones discretas, utiliza un formato continuo tensión-deformación para describir todo el proceso de agotamiento del material. Gracias a una regularización (reinterpretación) de la cinemática del problema y del módulo de ablandamiento se garantiza que la disipación del modelo venga dada por la densidad superficial de energía de fractura [52]. Adicionalmente, la utilización de un algoritmo tipo térmico de captura y gestión de las superficies de localización de deformaciones permite abordar el análisis de problemas con multifisuración [57].

La mejora en la robustez del análisis numérico se ha conseguido adoptando la formulación simétrica cinemáticamente consistente y formulando un nuevo esquema de integración, denominado IMPL-EX, que garantiza la definición positiva de los operadores algorítmicos que intervienen en el problema.

La confiabilidad en el resultado numérico se asegura mediante un algoritmo de control del error cometido y mediante un nuevo esquema de limitación de la longitud de arco. Estos dos algoritmos han sido desarrollados específicamente para el esquema de integración IMPL-EX.

La formulación así definida ha sido aplicada en el estudio de dos fenómenos propios de la mecánica de la fractura: el estudio de la influencia del tamaño de una estructura en su resistencia nominal (efecto tamaño) y el estudio/medición de la longitud de procesamiento de fractura.

Por último se presentan una serie de ensayos numéricos del fallo material en estructuras tridimensionales. Estos ensayos se dividen en tres grupos: ensayos donde el modo de fallo predominante es en modo I, ensayos donde el modo de fallo predominante es de deslizamiento (análisis de taludes) y ensayos donde el modo de fallo moviliza mecanismos resistentes tridimensionales (análisis del efecto arco en presas con simple y doble curvatura).

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. El fenómeno del fallo material y de la localización de deformaciones	1
1.2. Análisis del fallo material vía la mecánica del continuo	3
1.2.1. Introducción	3
1.2.2. Clasificación de los modelos existentes	4
1.2.3. Modelos de Fisura cohesiva discreta: leyes tracción-salto	8
1.2.4. Discontinuidades en las interfaces de los elementos.	8
1.2.5. Método de las discontinuidades embebidas con enriquecimiento elemental	9
1.2.6. Método de las discontinuidades embebidas con enriquecimiento nodal	10
1.3. Metodología numérica adoptada	11
1.4. Objetivos de este trabajo	12
1.5. Esquema	13
2. ANTECEDENTES: EL MÉTODO DE DISCONTINUIDADES FUERTES DE CONTINUO	15
2.1. Introducción	15
2.2. La localización de deformaciones	17
2.3. Modelos constitutivos del continuo	18
2.4. El problema de valores de contorno	20
2.5. Cinemática de la discontinuidad fuerte	21
2.6. Regularización del modelo de continuo	23
2.6.1. Regularización de la cinemática	23
2.6.2. Regularización del módulo de ablandamiento	25
2.7. La proyección continuo-discreto. El modelo cohesivo proyectado.	27
2.8. Formulación variacional no simétrica	29
2.9. Discretización no simétrica de la MDFC	32
2.10. Resumen del capítulo	39
3. ESTABILIDAD Y ROBUSTEZ DE LAS APROXIMACIONES NUMÉRICAS	41
3.1. Introducción	41
3.2. Degradación de la convergencia en la formulación no simétrica	42
3.3. Formulación simétrica cinemáticamente consistente	45

3.3.1.	Formulación variacional	45
3.3.2.	Discretización simétrica	47
3.4.	Algoritmo de integración IMPL-EX.	50
3.4.1.	Descripción	50
3.4.2.	Propiedades.	54
3.4.3.	Análisis del error.	56
3.5.	Esquemas de control de error: tamaño de paso adaptable	60
3.6.	Método de continuación	62
3.6.1.	Ejemplo de aplicación	66
3.7.	Resumen del capítulo	68
4.	EQUIVALENCIA CON LA APROXIMACIÓN DE DISCRETO	71
4.1.	Introducción	71
4.2.	Ley cohesiva tracción-salto general	72
4.3.	Ley cohesiva tracción-salto proyectada del modelo de continuo de daño isótropo	76
4.3.1.	Descripción	76
4.3.2.	La disipación del modelo discreto. Definición del módulo de ablandamiento discreto.	79
4.4.	Implementación numérica	81
4.4.1.	Problema de valor de contorno y cinemática.	81
4.4.2.	Integración de la ley tracción-salto. Equilibrio interno de tracciones.	82
4.4.3.	Esquema general de integración.	86
4.5.	Equivalencia entre modelos: las leyes tracción-salto y los modelos del continuo proyectados. Ejemplos numéricos	90
4.6.	Resumen del capítulo	92
5.	APLICACIONES A LA MECÁNICA DE LA FRACTURA	95
5.1.	Introducción	95
5.2.	Análisis del efecto tamaño	95
5.2.1.	Descripción	95
5.2.2.	Ensayo brasileño	97
5.2.3.	Ensayo de arrancamiento	104
5.3.	Reproducción de la zona de procesamiento de fractura	112
5.4.	Resumen del capítulo	117
6.	APLICACIONES AL ESTUDIO DEL FALLO MATERIAL	119
6.1.	Reproducción de ensayos experimentales	120
6.1.1.	Análisis del ensayo de tracción pura	120
6.1.2.	Análisis a flexión de una viga con doble entalla	123
6.1.3.	Análisis a flexión de una viga con una entalla	126
6.1.4.	Análisis del ensayo brasileño	130
6.2.	Análisis de estabilidad de taludes	135
6.2.1.	Caso 1: Estabilidad de un talud simétrico con un único material deformable	135

6.2.2. Caso 2: Estabilidad de un talud simétrico con un material blando sobre un lecho de roca rígido	138
6.2.3. Caso 3: Estabilidad de un talud asimétrico con un material blando sobre un lecho de roca rígido	142
6.3. Análisis de la capacidad resistente de presas de hormigón	148
6.3.1. La presa de Scalere	148
6.3.2. La presa de Alqueva	167
6.4. Resumen del capítulo	172
7. CONCLUSIONES	175
7.1. Conclusiones	175
A. Análisis de la localización en los modelos inelásticos invíscidos	177
A.1. Resumen histórico	177
A.2. Análisis de bifurcación discontinua	179
A.3. Análisis de bifurcación de una clase general de modelos inelásticos .	181
A.4. Valores críticos de modelos materiales particulares	184
A.4.1. Interpretación geométrica: la elipse de localización	184
A.4.2. Valores críticos del ángulo de localización	186
A.4.3. Valor crítico del módulo de ablandamiento	188
A.4.4. Valores críticos en los casos extremos	189
A.4.5. Resumen de los valores críticos	190
A.5. Análisis bidimensional	191
B. Análisis de los modelos de plasticidad	197
B.1. Modelo general de plasticidad asociada	197
B.2. Modelo de plasticidad de Von Mises con ablandamiento isótropo . .	199
B.2.1. Ingredientes	199
B.2.2. Proyección del modelo continuo en uno discreto	200
B.3. Esquema de integración IMPL-EX para los modelos de plasticidad .	208
C. Algoritmo de captura y gestión de discontinuidades	211
C.1. Algoritmo global tipo térmico	213
C.1.1. Fundamentos	213
C.1.2. Implementación	214

Índice de figuras

1.1. El fenómeno de la Localización	1
1.2. El proceso de fractura	2
1.3. Sólido con una banda de localización de deformaciones.	4
1.4. Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de discontinuidad fuerte.	5
1.5. Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de discontinuidad débil.	5
1.6. Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de campos continuos.	6
1.7. Leyes discretas tracción-salto en los formatos de (a) plasticidad y (b) daño.	8
2.1. (a) Función de fluencia del modelo solo tracción, (b) Evolución de las variables internas.	19
2.2. Problema de valor de contorno de un sólido con una discontinuidad embebida.	20
2.3. Cinemática discontinuidad fuerte	22
2.4. Cinemática discontinuidad fuerte: (a) Campo de desplazamientos, (b) Campo de deformaciones.	22
2.5. Regularización de la cinemática: (a) Delta de Dirac h -regularizada δ_S^h , (b) Variación del espesor de \mathcal{S}	24
2.6. Cinemática regularizada: (a) descripción del problema, (b) régimen discontinuidad débil y (c) régimen discontinuidad fuerte.	25
2.7. Inicio y desarrollo de una discontinuidad: ley del espesor h . (Tomado de Oliver y Huespe [57].)	26
2.8. (a) Superficie de discontinuidad. (b) Dominio de la función $\varphi(\mathbf{x})$	30
2.9. Descomposición del campo de desplazamientos.	31
2.10. Discretización del problema: (a) elementos enriquecidos, (b) función de aproximación N_i , (c) función de aproximación del salto $\mathcal{M}_S^{(e)}$	33
2.11. Descripción de la función $\mathcal{M}_S^{(e)}$	33
2.12. Dominios localizados y no localizados dentro del elemento.	34
2.13. Orientación de la superficie de fallo en un elemento (tomado de [59]).	34
2.14. Proceso de integración: puntos de integración.	36
3.1. Contribución negativa del término $[\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot [\nabla \varphi]$	44

3.2.	Extrapolación variable interna tipo deformación.	52
3.3.	Rangos de variación de las variables internas tipo tensión y tipo deformación.	53
3.4.	Esquemas de integración IMPL-EX y puramente implícito.	54
3.5.	Fase predicción-corrección en el algoritmo IMPL-EX.	56
3.6.	Error local en el esquema de integración IMPL-EX	57
3.7.	Descripción geométrica, propiedades del material y discretización del ensayo DCB.	58
3.8.	Ensayo DCB: curvas Fuerza-Desplazamiento.	59
3.9.	Ensayo DCB: error en la disipación.	59
3.10.	Ensayo DCB: curvas fuerza-desplazamiento.	62
3.11.	Ensayo DCB: error en la disipación.	63
3.12.	(a) Curva de equilibrio y puntos límite. (b) Esquema iterativo de los métodos de continuación.	63
3.13.	Esquema y materiales del ensayo de tracción simple.	66
3.14.	Curvas Fuerza-Desplazamiento del ensayo de tracción simple. Energía de fractura $Gf = 30 N/m$	67
3.15.	Curvas Fuerza-Desplazamiento del ensayo de tracción simple. Energía de fractura $Gf = 10 N/m$	67
4.1.	Descomposición del salto en los desplazamientos	73
4.2.	Superficies de fallo: (a) comportamiento isótropo en \mathcal{S} , (b) comportamiento anisótropo en \mathcal{S}	75
4.3.	Leyes cohesivas: (a) reversible con rigidez inicial infinita; (b) irreversible con rigidez inicial infinita; (c) reversible con rigidez inicial no infinita; (d) irreversible con rigidez inicial no infinita. (Tomada de Ortiz <i>et al.</i> en [65])	76
4.4.	Modelo de daño cohesivo discreto. (a) Superficie de daño en el espacio de las tensiones. (b) Superficie de daño en el espacio de los saltos. (c) Ley de ablandamiento.	79
4.5.	Problema de valor de contorno de un sólido con una discontinuidad embebida.	81
4.6.	Definición del vector $\nabla\varphi$	83
4.7.	Ensayo de tracción simple. (a) Discretización del modelo. (b) Localización de deformaciones.	90
4.8.	Respuesta numérica Fuerza aplicada <i>vs.</i> Desplazamiento.	91
4.9.	Ensayo de tracción simple: elementos de análisis.	92
4.10.	Respuesta numérica tracción-salto en el elemento E1.	92
5.1.	Ley de efecto tamaño para fallos cuasi-frágiles (tomada de Bazant [6]).	96
5.2.	Descripción geométrica del ensayo brasileño.	97
5.3.	Ley cohesiva tracción-salto.	98
5.4.	Resultados experimentales para $b/D=16$ (tomados de Rocco [76]).	99
5.5.	Discretización por elementos finitos (no están a escala).	101
5.6.	Concentración de las bandas de iso-desplazamientos.	102
5.7.	Resultados numéricos normalizados.	103
5.8.	Influencia del tamaño del espécimen.	104

5.9. Influencia de la anchura de la platabanda. 105

5.10. Geometría del ensayo de arrancamiento (tomado de Eligehausen & Ozbolt [27]). 105

5.11. Descripción de la unión anclaje-matriz. 107

5.12. Descripción de los ensayos numéricos (no están a escala): mallas de elementos finitos y nodos con los desplazamientos coaccionados. . . . 107

5.13. Descripción de los ensayos numéricos (no están a escala): cortes verticales de los modelos. 108

5.14. Curvas Fuerza *vs.* Desplazamiento para $h_e = 50\text{ mm}$ 109

5.15. Curvas Fuerza *vs.* Desplazamiento para $h_e = 150\text{ mm}$ 109

5.16. Curvas Fuerza *vs.* Desplazamiento para $h_e = 450\text{ mm}$ 110

5.17. Cono de arrancamiento y deformada para $h_e = 50\text{ mm}$ 110

5.18. Cono de arrancamiento y deformada para $h_e = 150\text{ mm}$ 111

5.19. Cono de arrancamiento y deformada para $h_e = 450\text{ mm}$ 111

5.20. Influencia del tamaño del espécimen en la resistencia nominal. 112

5.21. Descripción geométrica, propiedades del material y discretización del ensayo DCB. 114

5.22. Determinación de la longitud de la zona de procesamiento de fractura para el ensayo DCB en un estado intermedio de carga. 114

5.23. Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 25\text{ N/m}$. 115

5.24. Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 50\text{ N/m}$. 115

5.25. Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 75\text{ N/m}$. 116

5.26. Longitud de la zona de procesamiento de fractura *vs.* longitud característica del material. 117

6.1. Ensayo de tracción pura. Esquema del ensayo. 120

6.2. Ensayo de tracción pura. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) detalle de entalla, (c) planta y distribución de extensómetros. 121

6.3. Ensayo de tracción pura. (a) Superficie de fractura, (b) Deformada, (c) Líneas de iso-desplazamientos en corte longitudinal. 122

6.4. Ensayo de tracción pura. Curva Fuerza aplicada *vs.* Apertura media en la entalla. 123

6.5. Ensayo de tracción pura. Evolución de la fisuración (en negro los elementos donde se ha cumplido la condición de bifurcación). 123

6.6. Ensayo de tracción pura. Evolución de la variable de daño d en la superficie de fractura. 124

6.7. Ensayo de viga con doble entalla. Esquema del ensayo. 124

6.8. Ensayo de viga con doble entalla. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva. . . . 125

6.9. Ensayo de viga con doble entalla. Superficies de fractura. 126

6.10. Ensayo de viga con doble entalla. Deformada y líneas de isodesplazamientos. 126

6.11. Ensayo de viga con doble entalla. Curva Fuerza *vs.* Desplazamiento vertical en la sección central. 127

6.12. Ensayo de viga con doble entalla. Evolución de la fisuración. 127

6.13. Ensayo de viga con una entalla. Esquema del ensayo. 128

6.14. Ensayo de viga con una entalla. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva. . . .	128
6.15. Ensayo de viga con una entalla. Superficie de fractura.	129
6.16. Ensayo de viga con una entalla. Deformada y líneas de isodesplazamientos.	129
6.17. Ensayo de viga con una entalla. Curva Fuerza en el punto de carga <i>vs.</i> Deslizamiento vertical en la boca de la entalla.	130
6.18. Ensayo de viga con una entalla. Evolución de la fisuración.	130
6.19. Ensayo brasileño. Esquema del ensayo.	131
6.20. Ensayo brasileño. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.	132
6.21. Ensayo brasileño. Superficie de fractura.	132
6.22. Ensayo brasileño. Deformada y líneas de iso-desplazamientos. . . .	133
6.23. Ensayo brasileño. Curva Fuerza normalizada <i>vs.</i> Apertura diametral normalizada.	134
6.24. Ensayo brasileño. Evolución de la fisuración en la sección A-A. . . .	134
6.25. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.	135
6.26. Esquema de la simulación.	136
6.27. Superficie de fractura.	137
6.28. Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.	137
6.29. Deformada y líneas de iso-desplazamientos.	138
6.30. Curva Factor de Carga <i>vs.</i> Desplazamiento vertical en coronación. .	138
6.31. Evolución de la fisuración.	138
6.32. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) planta, (c) vista lateral, (d) perspectiva.	139
6.33. Esquema de la simulación.	140
6.34. Superficie de fractura.	141
6.35. Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.	141
6.36. Deformada y líneas de iso-desplazamientos.	142
6.37. Curva Factor de Carga <i>vs.</i> Desplazamiento vertical en coronación. .	142
6.38. Evolución de la fractura.	143
6.39. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado 1, (b) vista lateral, (c) alzado 2, (d) planta, (e) perspectiva.	143
6.40. Esquema de la simulación.	144
6.41. Superficie de fractura.	145
6.42. Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.	145
6.43. Deformada y líneas de iso-desplazamientos.	146
6.44. Curva Factor de Carga <i>vs.</i> Desplazamiento vertical en coronación. .	146
6.45. Evolución de la fractura.	147
6.46. Presa de Scalere. Perspectiva.	149

6.47. Presa de Scalere. Definición geométrica.	149
6.48. Modelo geométrico del análisis bidimensional.	150
6.49. Modelo geométrico del análisis tridimensional: (a) paramento aguas arriba, (b) paramento aguas abajo, (c) vista superior.	151
6.50. <i>Incremento de la densidad</i> : (a) cargas actuantes, (b) esquema de aplicación.	152
6.51. <i>Incremento del nivel de agua</i> : (a) cargas actuantes, (b) esquema de aplicación.	153
6.52. Fractura hidráulica: fenomenología.	154
6.53. Fractura hidráulica: equilibrio interno de tracciones.	155
6.54. <i>Caso 1: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	157
6.55. <i>Caso 1: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	158
6.56. <i>Caso 2: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	158
6.57. <i>Caso 2: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	158
6.58. <i>Caso 3: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	159
6.59. <i>Caso 3: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	159
6.60. <i>Caso 4: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	160
6.61. <i>Caso 4: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	160
6.62. <i>Caso 5: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	161
6.63. <i>Caso 5: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	161
6.64. <i>Caso 6: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	162
6.65. <i>Caso 6: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	162
6.66. <i>Caso 7: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	163
6.67. <i>Caso 7: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	163
6.68. <i>Caso 8: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica</i> . Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.	164
6.69. <i>Caso 8: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica</i> . Concentración de líneas de iso-desplazamientos.	164
6.70. Deformadas de los casos tridimensionales al final del análisis.	165
6.71. Presa de Alqueva. Perspectiva.	168
6.72. Presa de Alqueva. Definición geométrica.	168
6.73. Presa de Alqueva. Desplazamiento del terreno.	169

6.74. Presa de Alqueva. Modelo geométrico discretizado por elementos finitos: (a) planta, (b) paramento aguas arriba, (c) paramento aguas abajo y (d) perspectiva con detalle de falla.	169
6.75. Presa de Alqueva: líneas de iso-desplazamientos. (a) paramento aguas abajo, (b) paramento aguas arriba	171
6.76. Presa de Alqueva: deformada al final del proceso	171
6.77. Presa de Alqueva.	172
A.1. Continuum con una superficie de localización	179
A.2. Elipse de localización y círculos de Mohr	185
A.3. Direcciones de \mathbf{n}_{crit} en espacio de los autovectores de \mathbf{f}	185
A.4. Continuum con una superficie de localización y sistema coordenado local	193
B.1. Esquema de un sólido con una banda de discontinuidad en su seno.	201
B.2. Modelo discreto rígido-plástico de rigidez infinita.	206
C.1. Discretización del problema de un sólido en el que se forma una superficie de discontinuidad.	211
C.2. Descripción de la función $\mathcal{M}_S^{(e)}$	212
C.3. Discretización del problema: (a) elementos enriquecidos.	213
C.4. Problema de valor de contorno tipo térmico (<i>tomado de</i> [79]).	215
C.5. Mecanismo de captura global de discontinuidades (<i>tomado de</i> [79]).	217

Índice de cuadros

3.1. Variables discretizadas	52
3.2. Ensayos numéricos	59
3.3. Ensayos numéricos	62
4.1. Ensayos realizados	91
5.1. Parámetros del material	98
5.2. Resumen de los ensayos numéricos realizados	100
5.3. Resumen de los ensayos numéricos realizados	106
5.4. Propiedades mecánicas	106
5.5. Resumen de los ensayos experimentales	108
5.6. Resumen de los ensayos numéricos	108
5.7. Valores de l_{ZPF}	116
6.1. Propiedades materiales.	120
6.2. Características del ensayo numérico.	121
6.3. Propiedades materiales.	124
6.4. Características del ensayo numérico.	125
6.5. Propiedades materiales.	128
6.6. Características del ensayo numérico.	129
6.7. Propiedades materiales.	131
6.8. Características del ensayo numérico.	132
6.9. Propiedades del material deformable.	136
6.10. Características del ensayo numérico.	136
6.11. Propiedades del material elastoplástico.	139
6.12. Propiedades del lecho de roca.	140
6.13. Características del ensayo numérico.	140
6.14. Propiedades del material elastoplástico.	143
6.15. Propiedades del lecho de roca.	144
6.16. Características del ensayo numérico.	144
6.17. Propiedades del hormigón.	150
6.18. Propiedades de la cimentación.	150
6.19. Características del ensayo numérico bidimensional.	151
6.20. Características del ensayo numérico tridimensional.	151
6.21. Resumen de ensayos.	156

6.22. Resumen de ensayos: hipótesis <i>Incremento de la densidad</i>	166
6.23. Resumen de ensayos: hipótesis <i>Incremento del nivel de agua</i>	166
6.24. Características del ensayo numérico.	170
6.25. Propiedades del hormigón.	170
6.26. Propiedades de la cimentación.	170
A.1. Constantes ϑ_1 y $\vartheta_2(H)$	189

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. El fenómeno del fallo material y de la localización de deformaciones

El fallo asociado al ablandamiento puede entenderse como la aparición de un conjunto de procesos irreversibles de daño interno, como la microfisuración, que evolucionan hasta la formación de una discontinuidad geométrica que separa el material. Físicamente puede asumirse que la acumulación de estos fenómenos inelásticos tiene lugar en una zona del sólido, llamada *zona de procesamiento de fractura*¹[4], donde el estado tensional ha alcanzado un determinado umbral y donde aparecen altos gradientes en el campo de las deformaciones (ver Figura 1.1).

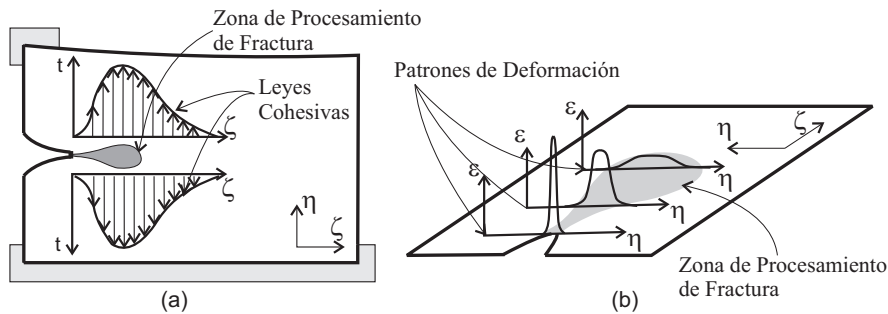


Figura 1.1: El fenómeno de la Localización

La zona de procesamiento de fractura evoluciona, conforme avanza el ablandamiento, de modo que los mecanismos de degradación se localizan en bandas cada vez más estrechas, hasta llegar a un punto en el que toda la disipación inelástica se

¹El tamaño de esta zona de procesamiento de la fractura respecto al tamaño del sólido es lo que nos caracteriza su carácter frágil (cuando éste es despreciable), cuasifrágil (cuando éste es pequeño pero significativo) y dúctil (cuando el tamaño de la zona de proceso de la fractura es comparable al tamaño del sólido).

concentra en una superficie de espesor nulo. Este fenómeno, que conlleva una concentración de las deformaciones en estas bandas cada vez más estrechas, hace que el proceso de fallo por ablandamiento también sea llamado proceso de *localización de deformaciones*. En la Figura 1.2 se representa este proceso de localización que, si bien es continuo, puede dividirse en tres etapas [57]:

- *Régimen de daño no localizado*. Se caracteriza por el inicio de los fenómenos de disipación que dan lugar a un incremento y concentración de las deformaciones. En esta fase aún no han aparecido las discontinuidades en los campos que describen el material y tanto la deformación como el desplazamiento son continuos.
- *Régimen de discontinuidad débil*. La banda donde se producen los fenómenos inelásticos evoluciona y empieza a estrecharse. Consecuentemente, las deformaciones empiezan a localizar hasta concentrarse, al final de esta fase, en una banda de espesor nulo provocando que el campo de deformaciones ϵ se vuelva infinito. Hasta la aparición de esta singularidad, el campo de los desplazamientos permanece continuo mientras que el campo de las deformaciones es discontinuo.
- *Régimen de discontinuidad fuerte*. La banda de localización de la fase de discontinuidad débil colapsa en una banda de espesor nulo², también llamada superficie de discontinuidad y que se representa por \mathcal{S} , iniciándose de este modo el régimen de discontinuidad fuerte. A partir de este momento, y hasta el total agotamiento del material, el campo de desplazamientos deja de ser continuo en \mathcal{S} experimentando un salto $[[\mathbf{u}]]$, y el campo de deformaciones se vuelve singular.

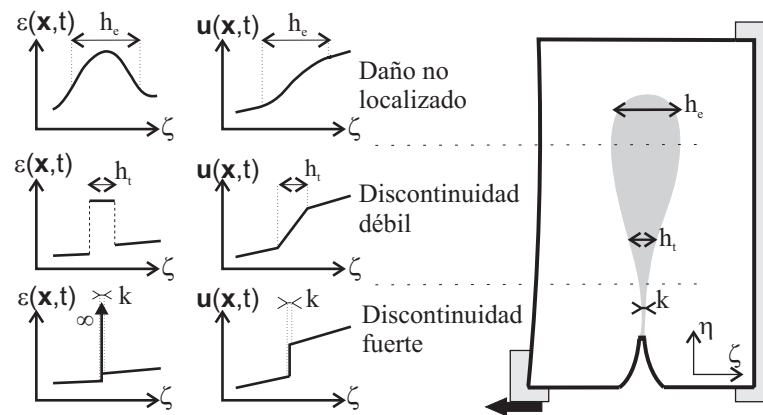


Figura 1.2: El proceso de fractura

²En la implementación numérica, esta medida de espesor nulo es sustituida por un valor real positivo k tan pequeño como permita la precisión del ordenador.

1.2. Análisis del fallo material vía la mecánica del continuo

1.2.1. Introducción

El fallo material de sólidos, que se traduce en una inestabilidad en el equilibrio del estado tenso-deformacional [66] y que tiene como consecuencia la localización de deformaciones en bandas estrechas [54], es uno de los desafíos vigentes de la mecánica computacional de sólidos. En este apartado se busca sistematizar las distintas aproximaciones que la mecánica del continuo da a este problema y relacionar la metodología de continuo de discontinuidades fuertes con el resto de metodologías existentes.

Las herramientas proporcionadas por la mecánica clásica de la fractura no permiten modelar de forma general ni el inicio de la localización ni su posterior propagación [87]. La solución proporcionada por la mecánica del continuo estándar tampoco puede describir el fenómeno más allá del inicio de la inestabilidad. Esto es debido a que el fenómeno de la localización está relacionado con la inestabilidad material, que se traduce en la pérdida de elipticidad fuerte de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema [66] [54]. Por ello, para poder resolver este problema, es necesario dotar a la mecánica del continuo estándar de otros ingredientes que permitan reproducir correctamente los fenómenos inelásticos que tienen lugar.

Varios son los modelos propuestos para capturar este fenómeno. A continuación, y antes de empezar a hablar de ellos, se describirá uno de los primeros intentos, debido a Rashid [71], no por su vigencia actual, sino porque analizando sus limitaciones se podrá determinar cuáles son las características que deben cumplir toda metodología computacional que pretenda describir el inicio y la propagación de la localización de deformaciones.

El modelo propuesto por Rashid [71] en 1968 consiste en una aproximación del continuo en la cual la fractura se inicia cuando la máxima tensión de tracción de un punto alcanzaba un valor crítico. A partir de ese momento la ecuación constitutiva se modifica para anular las tensiones normales a la discontinuidad. Muchas son las patologías de este modelo. De entre ellas destacan:

1. La *no existencia de una zona de procesamiento de la fractura*, que hace de transición entre la parte agotada libre ya de tracciones y la zona que aún no ha localizado, provoca la aparición de una singularidad del campo de tensiones (aproximación de la Mecánica de la Fractura Elástica Lineal). Esto hace que, conforme se va refinando, la carga última de la pieza tienda a cero (dado que en presencia de un defecto, la solución elástica siempre será singular en el frente de ese defecto y en el caso de una pieza perfecta, la localización del primer elemento lleva de nuevo al escenario de una pieza con defecto).
2. La solución obtenida *depende de la malla* utilizada.
3. *No es capaz de capturar el efecto tamaño* (influencia del tamaño característico de una estructura en su resistencia nominal [5]).
4. Reproduce una *disipación incorrecta de la energía*.

Los problemas del anterior modelo permiten determinar cuáles han de ser las características de cualquier metodología computacional que pretenda describir el fenómeno del inicio y propagación de la localización de deformaciones:

1. Disipación correcta de la energía.
2. Insensibilidad de la solución al tamaño y a la orientación de la malla.
3. Capturar el efecto tamaño.

A continuación se hace una clasificación de los modelos existentes para luego hacer un breve resumen de los más importantes.

1.2.2. Clasificación de los modelos existentes

Las metodologías numéricas existentes que reproducen el fallo material pueden clasificarse siguiendo tres criterios:

- según describan la cinemática de la discontinuidad.
- según sea la relación constitutiva.
- según sea la técnica numérica de aproximación utilizada.

Estos criterios describen los ingredientes de las metodologías numéricas que reproducen el fenómeno de la localización de deformaciones. A continuación se presenta un resumen indicando cuáles son las soluciones que existen para cada uno de ellos.

Descripciones de la cinemática

Sea un sólido Ω en el cual las deformaciones han localizado en una banda Ω^h , llamada *banda de discontinuidad*, tal como indica la Figura 1.3.

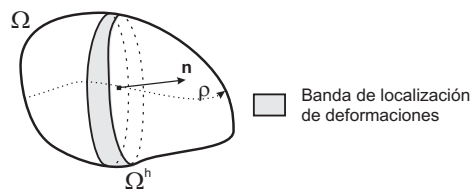


Figura 1.3: Sólido con una banda de localización de deformaciones.

Dependiendo de la regularidad en los campos de desplazamientos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y de deformaciones $\epsilon(\mathbf{x}, t)$ en Ω existen tres tipos de descripciones cinemáticas de la localización de deformaciones:

1. Cinemática de discontinuidad fuerte.

Las deformaciones se concentran en una banda de espesor nulo³, donde tiene lugar un salto en el campo de los desplazamientos. En este caso se produce una singularidad en el campo de deformaciones (ver Figura 1.4).

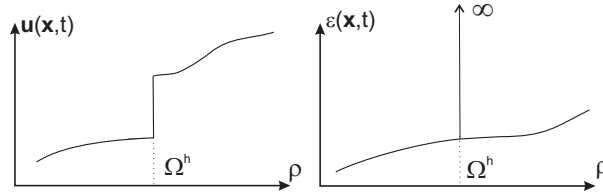


Figura 1.4: Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de discontinuidad fuerte.

2. Cinemática de discontinuidad débil.

Las deformaciones se concentran en una banda de espesor pequeño pero finito separada del resto del material por dos discontinuidades débiles. En este caso el campo de desplazamientos pertenece a la clase C^0 , es continuo pero de derivada discontinua (ver Figura 1.5).

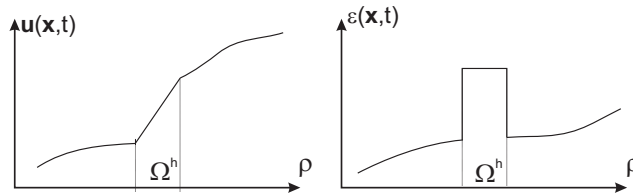


Figura 1.5: Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de discontinuidad débil.

3. Cinemática de campos continuos.

Es la cinemática más regular. En este caso las deformaciones también se concentran en una banda de espesor pequeño pero el campo de desplazamientos pertenece a la clase C^1 , con lo que tanto él como su derivada, las deformaciones, son campos continuos (ver Figura 1.6).

Relación constitutiva

Siguiendo el trabajo de Jirasek y Belytschko [38], los metodologías que reproducen el comportamiento constitutivo dentro y fuera de la banda de discontinuidad se pueden dividir en dos categorías:

³Se entenderá que una banda de espesor nulo es una banda que ha colapsado en una superficie, de ahí que en este caso se hable de *superficie de discontinuidad* en vez de banda de discontinuidad.

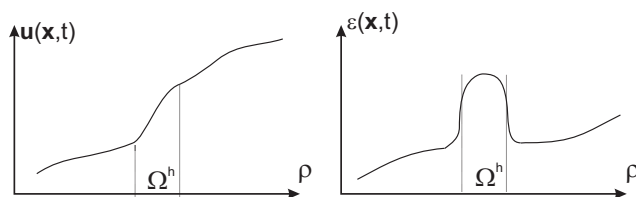


Figura 1.6: Campos de desplazamientos y deformaciones para la cinemática de campos continuos.

1. *Modelos explícitos de discontinuidades (o modelos de fisura cohesiva discreta).*

La relación constitutiva dentro de la banda de discontinuidad se modela mediante una *ley cohesiva discreta tracción-salto*, que complementa la ley tensión-deformación de la parte continua. En este caso, la función que aproxima los campos de desplazamientos se construye para que sea discontinua a lo largo de la superficie de fallo (o línea de fallo en dos dimensiones). Dentro de los modelos explícitos se pueden distinguir dos subdivisiones:

- Aquellos que usan técnicas de remallado para hacer coincidir la discontinuidad con los lados de los elementos (*modelo de fisura cohesiva no embebida*).
- Aquellos que enriquecen el campo de desplazamientos (o deformaciones) para que la discontinuidad pueda atravesar los elementos finitos sin necesidad de hacer remallado (*modelo de fisura cohesiva embebida*).

2. *Modelos implícitos de discontinuidades*

A diferencia del grupo anterior, estos modelos utilizan una única ley de continuo tensión-deformación tanto para la banda de localización como para el dominio exterior a ella. Así mismo introducen un parámetro que define una longitud característica del material y que está relacionada con el ancho de la zona de localización. Este grupo se divide en:

- Modelos donde *la ecuación constitutiva se modifica* para modelar la discontinuidad implícitamente. Todos los efectos inelásticos se distribuyen uniformemente a través de una banda de espesor finito h . Se transforma la ley tracción-salto en una ley que relaciona las tensiones transmitidas por la banda de localización con la deformación inelástica medida en esa banda (*modelos de fisura difusa*).
- Modelos en los cuales *las deformaciones en los elementos a través de los cuales pasa la fisura se modifican* para que puedan representar la discontinuidad. Utilizando la longitud característica del material, gracias a técnicas de regularización que sirven como límites de la localización, son capaces de representar los altos gradientes que tienen lugar en los campos de deformaciones manteniéndolos continuos tras el inicio de la localización (*modelos del continuo enriquecido*).

Un tercer modelo, a caballo entre los dos anteriores, es la metodología de continuo de discontinuidades fuertes. Esta aproximación se basa, utilizando una única ley de continuo tensión-deformación y tras una regularización del modelo al iniciarse la localización, en proyectar en la banda de discontinuidad el modelo continuo en un modelo discreto que hereda las propiedades del primero. El Capítulo §2 se centra en describir esta metodología, que ha sido la elegida para aplicar los desarrollos presentados en este trabajo.

Aproximaciones numéricas

Siguiendo de nuevo la Referencia [38], si se toma como criterio los métodos de discretización se pueden enumerar las siguientes técnicas:

1. *Elementos finitos estándar.*

Esta aproximación hace coincidir la banda de localización con los propios elementos finitos. En este caso el tamaño de la banda de localización es el tamaño del elemento y hay que ajustar los parámetros de ablandamiento para disipar la energía correcta. Presenta muchos problemas, entre ellos una fuerte dependencia de la malla y bloqueo de tensiones cuando se produce un mal alineamiento entre la dirección de la fisura y las líneas de la malla.

2. *Remallado*

En este caso se busca situar en todo momento la discontinuidad en las interfaces entre elementos. Los principales inconvenientes son el coste inherente al proceso de remallado, los errores numéricos que se pueden cometer y las dificultades para realizar análisis tridimensionales.

3. *Métodos de discontinuidad incipiente*

Estos métodos, para evitar el remallado, permiten que todas las interfaces de los elementos sean discontinuidades potenciales. El mayor inconveniente es definir las leyes cohesivas situadas en estas interfaces para garantizar una disipación de la energía objetiva (dado que la ubicación de las interfaces permanece fija independientemente de cual sea la banda de localización).

4. *Elementos con discontinuidades embebidas*

Se permite a la discontinuidad pasar a través de la malla de elementos finitos gracias al enriquecimiento de la aproximación estándar del campo de los desplazamientos. Este enriquecimiento, que representa los saltos en el campo de desplazamientos, puede ser de tipo elemental (los saltos son constantes dentro de cada elemento) o de tipo nodal (a los grados de libertad regulares en cada nodo se añaden los grados de libertad del salto). El primer tipo de enriquecimiento, el elemental, ha sido el utilizado en este trabajo frente al segundo tipo, que es el utilizado en los llamados *elementos finitos extendidos*.

1.2.3. Modelos de Fisura cohesiva discreta: leyes tracción-salto

La base de los modelos de fisura cohesiva discreta consiste en enriquecer el modelo del continuo (ley continua tensión-deformación) con una ley constitutiva discreta: una ley tracción-salto. De esta forma la ley continua describe la parte del material que no localiza y la ley discreta describe el comportamiento de la zona donde tienen lugar la localización de deformaciones.

Los orígenes de las leyes cohesivas tracción-salto están en el trabajo de Dugale [24] y Barenblatt [3]. Estos trabajos pioneros estaban centrados en el análisis de la fractura del hormigón en modo I suponiendo la existencia de una macrofisura inicial. Avances posteriores fueron el de Hilleborg *et al.*, que permitió capturar el inicio de la fisura sin presuponer una macrofisura inicial, y el de Cervenka [17], que extendió los análisis a las fisuras en modo mixto a partir del trabajo de Carol y Prat [14] (ver Referencia [38]).

Las leyes tracción-salto pueden ser postuladas en los formatos de daño o de plasticidad. Los formatos de daño degradan la rigidez del modelo y consideran que todo el salto que tiene lugar en la fisura se puede recuperar (o cerrar), mientras que los formatos de plasticidad no degradan la rigidez y consideran que el salto que tiene lugar es no recuperable (siguiendo la terminología de los modelos de continuo se diría que es irreversible). Ambos conceptos se describen en la Figura 1.7.

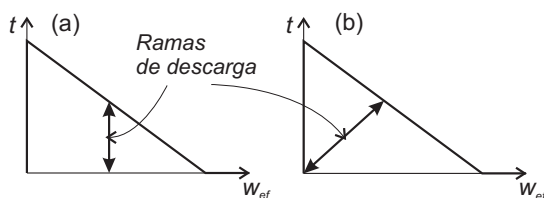


Figura 1.7: Leyes discretas tracción-salto en los formatos de (a) plasticidad y (b) daño.

Los formatos de plasticidad tienen la desventaja de no seguir la física del problema cuando una fisura completamente agotada empieza a cerrarse, ya que aparecen compresiones no reales. Alternativamente, los modelos basados en la mecánica del daño sí que son capaces de representar la pérdida gradual de la integridad del material. Sin embargo, estos modelos no son capaces de representar la recuperación de rigidez que se produce cuando se cierra la fisura del todo y aparece fricción al deslizamiento. Estos efectos se han considerado en Cangmi *et al.* [13] y Caboche *et al.* [18].

1.2.4. Discontinuidades en las interfaces de los elementos.

Situar las discontinuidades en las interfaces de los elementos puede conseguirse con dos estrategias [38]: las técnicas de remallado o el método de las discontinuidades incipientes.

En los *métodos de remallado*, la malla de elementos finitos se rehace en cada paso para hacer que las caras de los elementos se sitúen en la superficie de discontinuidad. Los nodos situados en estas caras se doblan y se distribuyen a ambos lados de la fisura, con lo que la aproximación puede ser completamente discontinua a lo largo de la discontinuidad. El remallado no tiene porqué aplicarse a todo el volumen material, sino que puede circunscribirse a la zona afectada por el crecimiento de la fisura.

Varios son los problemas que tiene este método, entre ellos destacan:

- en tres dimensiones es necesario construir algún tipo de representación de la fisura para poder guiar al remallador
- el análisis multifisura aumenta enormemente la dificultad
- es necesario proyectar los resultados muchas veces entre diferentes mallas
- es difícil obtener la evolución de una variable en un punto concreto, debido al remallado continuo
- al generarse tantas mallas, el conjunto de la información puede hacerse difícil de manejar.

Pero a pesar de estos problemas, esta metodología ha alcanzado un gran grado de madurez. Ingraffea *et al.* [16] ha aplicado este método para modelar el crecimiento de una fisura en análisis tridimensionales.

En los *métodos de la discontinuidad incipiente* se sitúan segmentos cohesivos potenciales en la interfaz entre todos los elementos. De esta forma no se determina el camino exacto de la fisura ni se insertan nuevos segmentos discontinuos cuando la fisura propaga. Entre los principales problemas de este método destacan la dificultad para relacionar los parámetros de la ley cohesiva con las propiedades materiales y la dependencia del tamaño y forma de la malla en la calibración de dicha ley cohesiva. Este aproximación ha sido utilizada por Ortiz *et al.* en [12] y por Needleman *et al.* en [92].

1.2.5. Método de las discontinuidades embebidas con enriquecimiento elemental

En el método de las discontinuidades embebidas con enriquecimiento elemental los campos mejorados se definen a nivel de elemento haciendo que la interpolación de las deformaciones sea discontinua. Como contrapartida, los grados de libertad asociados al enriquecimiento pueden resolverse (o condensarse) a nivel elemental y, por tanto, las ecuaciones globales contienen únicamente los desplazamientos de los grados de libertad estándar.

Siguiendo el trabajo presentado por Jirasek en [37] existen tres grandes grupos dentro de la aproximación de las discontinuidades embebidas: la simétrica estáticamente consistente (SOS con sus siglas en inglés), la simétrica cinemáticamente consistente (KOS) y la no simétrica cinemática y estáticamente consistente (SKON). La formulación SOS garantiza la continuidad de tracciones a ambos lados de la

discontinuidad pero no es capaz de reproducir la cinemática de sólido rígido dentro del elemento cuando el elemento se ha agotado. La formulación KOS describe correctamente la cinemática de la discontinuidad pero no garantiza la continuidad de tracciones a nivel elemental. La aproximación más óptima es la no simétrica SKON, ya que garantiza tanto la continuidad de tracciones como la cinemática de la discontinuidad dentro del elemento.

El origen de la técnica de las discontinuidades embebidas se encuentra en Ortiz *et al.* [64]. En ese trabajo se establece una aproximación que permite la resolución explícita de una discontinuidad de trayectoria arbitraria a través de una malla de elementos finitos. En este caso los autores enriquecieron la aproximación de elementos finitos estándar con funciones que hacen posible capturar una banda de discontinuidad atravesando el elemento finito. Una de las principales deficiencias de esta aproximación era que la banda de localización no podía ser más pequeña que el elemento finito. Belytschko *et al.* [9] propusieron una formulación que podía capturar una banda de ablandamiento entre dos líneas paralelas de discontinuidad débil dentro de un mismo elemento. De esta forma el elemento finito podía capturar una banda de localización de deformaciones dentro de él. Eso hacía que el ancho de la banda fuese independiente del elemento finito y se considerase como un parámetro del material. Posteriormente esta idea se extendió a discontinuidades fuertes por Simó *et al.* [84], Dvorkin *et al.* [25] y Klisinski *et al.* [39].

La primera formulación cinemáticamente consistente KOS publicada es la debida da Lofti y Shing en 1995 [42]. La necesidad de utilizar una formulación simétrica que mejorase la robustez de los algoritmos de integración llevó a Oliver *et al.* en [59] a adoptar, basándose en la formulación de Lofti y Shing, una formulación KOS adaptada a la metodología de discontinuidades fuertes de continuo.

La aproximación no simétrica cinemática y estáticamente consistente SKON dentro del método de las discontinuidades embebidas apareció por vez primera en Dvorkin *et al.* [25] y posteriormente en Klisinski *et al.* [39]. Estos trabajos estaban aplicados sobre elementos finitos determinados. Posteriormente Simó y Oliver [84] y Oliver [50]-[51] presentaron una versión general de la formulación SKON para un tipo de elemento arbitrario.

1.2.6. Método de las discontinuidades embebidas con enriquecimiento nodal

Esta aproximación se puede considerar como un caso particular del método de partición de la unidad [47]. La idea general de este método consiste en que el espacio de la aproximación generado por la partición de la unidad (*v.gr.* por las funciones de forma de los elementos finitos estándar) se enriquece con el producto de esta base de funciones estándar con funciones especiales seleccionadas por el usuario (que contienen información de la solución), por ejemplo la solución analítica simplificada del problema. Esto permite incorporar *a priori* conocimiento sobre el carácter del problema y sus soluciones. La aproximación de los desplazamientos enriquecidos quedan entonces:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(\mathbf{x}) \left(\mathbf{d}_i + \sum_{j \in L_i} G_j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_{ij} \right) \quad (1.1)$$

donde \mathbf{u}^h son los desplazamientos interpolados, n_{nodos} es el número de nodos del modelo de elementos finitos, $L_i = \{1, 2, \dots, m\}$ el conjunto de enteros que indican qué funciones de enriquecimiento se activan en el nodo i , \mathbf{d}_i son los grados de libertad estándar, $\mathbf{e}_{i,j}$ son los grados de libertad adicionales asociados al nodo i y función del enriquecimiento j , $N_i(\mathbf{x})$ son las funciones de forma estándar y $G_j(\mathbf{x})$ son las funciones de enriquecimiento global.

Como se ve en la expresión de la aproximación, las funciones de enriquecimiento global son multiplicadas por las funciones de forma nodales. Las funciones de enriquecimiento local resultantes heredan su buena aproximación y su soporte local.

El enriquecimiento de la solución estándar sólo se produce en la región de interés (cerca de la discontinuidad) y los nuevos grados de libertad pueden asociarse a los nodos existentes.

Entre las principales ventajas de este método caben destacar:

- la interpolación de desplazamientos es conforme, sin incompatibilidades entre los elementos.
- las deformaciones a ambos lados en una fisura ya agotada están completamente desacopladas.
- se obtiene una formulación simétrica.

En las desventajas están el aumento del tamaño de los grados de libertad a resolver, con el correspondiente aumento del costo computacional.

Este método ha demostrado que puede manejar eficientemente fisuras tridimensionales [86] e incluso fisuras que se interseccionan [22].

1.3. Metodología numérica adoptada

Siguiendo los desarrollos anteriores de Manzoli [45], Samaniego [79] y Chaves [19], en este trabajo se ha adoptado como metodología numérica el *método de discontinuidades fuertes de continuo*, formulada bajo la hipótesis de deformaciones infinitesimales. Esta formulación, cuyos antecedentes se resumen en el Capítulo §2, se caracteriza por:

- Utilizar un modelo constitutivo continuo tensión-deformación para reproducir el comportamiento dentro y fuera de la banda de localización.
- Utilizar, para describir la cinemática, un campo de los desplazamientos enriquecido a nivel elemental con un modo mejorado *salto*.
- Utilizar una regularización (reinterpretación) de la cinemática enriquecida y del módulo de ablandamiento del modelo constitutivo continuo que permite:
 - Garantizar que la disipación del modelo venga definida por el parámetro material *densidad superficial de energía de fractura*.
 - Reproducir el proceso continuo de la localización de deformaciones, es decir, reproducción de los regímenes de discontinuidad débil y fuerte y su transición.

- Proyectar, dentro de la superficie de discontinuidad y cuando se ha alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte, el modelo constitutivo del continuo en otro discreto tracción-salto. Este modelo discreto se deriva, de forma continua y suave, del modelo discreto de forma que hereda las propiedades de éste.

A su vez, en el Capítulo §4 se muestra la equivalencia de utilizar la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y los modelos de fisura cohesiva embebida. Para hacerlo, se describen las leyes tracción-salto propias de los modelos de fisura cohesiva pero derivándolas analíticamente de un modelo de continuo.

1.4. Objetivos de este trabajo

Como se ha indicado anteriormente, este trabajo es la continuación de los desarrollos presentados por Manzoli [45], Samaniego [79], Chaves [19] y Pulido [69]. Sin embargo, la metodología desarrollada por estos autores, si bien alcanzó su madurez para los análisis bidimensionales, ha demostrado ser incapaz de abordar problemas tridimensionales de geometrías complejas.

La razón de esta incapacidad reside en los problemas que sufre el análisis numérico del problema de la localización de deformaciones en un medio continuo, cuando el dominio en el que tiene lugar la localización es importante comparado con el dominio total [23][37]. Estos problemas numéricos están centrados en el mal condicionamiento de las matrices algorítmicas del problema de minimizar las fuerzas residuales obtenidas de la formulación variacional [59]. Estos problemas, aunque son superables para los análisis bidimensionales, hacen inabordable los análisis tridimensionales de geometría compleja.

Por lo tanto, los objetivos que se han marcado en esta monografía han sido:

- Realizar un estudio del estado del arte de la modelización de la localización de deformaciones vía la mecánica del continuo, en particular del método de discontinuidades fuertes de continuo.
- Analizar, utilizando el criterio de la estabilidad del análisis numérico, la formulación variacional del método de discontinuidades fuertes de continuo de fisura embebida.
- Proponer un nuevo algoritmo de integración que limite la degradación que sufren las matrices algorítmicas del problema numérico.
- Formular algoritmos de control del error que garanticen que el incremento de la robustez del análisis numérico no se haga a costa de cometer errores inaceptables, comparados con el algoritmo de integración implícito.
- Desarrollar métodos de continuación adecuados que garanticen que el análisis numérico describe correctamente la curva de equilibrio.
- Demostrar la bondad de la reformulación del método de discontinuidades fuertes de continuo reproduciendo:

- Fenómenos fundamentales de la mecánica de la fractura: el efecto tamaño y la zona de procesamiento de fractura.
- Análisis tridimensionales complejos, que muestren la capacidad de esta formulación para realizar análisis estructurales del fallo material más allá de los ensayos de laboratorio.

1.5. Esquema

Esta monografía se organiza como se describe a continuación. En el Capítulo §2 se resume el método de discontinuidades fuertes de continuo ya descrito en trabajos anteriores. Se introducen el modelo de continuo de daño isótropo y la cinemática de la discontinuidad para luego proceder a su regularización. A partir de esta regularización (reinterpretación del módulo de ablandamiento del modelo de continuo y de la cinemática) se describe la proyección del modelo de continuo en uno discreto en la superficie de discontinuidad. Posteriormente, se formula el problema de valor de contorno en sus formas fuerte y débil para, a partir de la discretización de este último, obtener la formulación no simétrica cinemática y estáticamente consistente.

En el Capítulo §3 se describen las aportaciones teóricas de este trabajo. En él se analizan los problemas de convergencia que presenta el problema discretizado no simétrico con el algoritmo de integración implícito y se proponen herramientas destinadas a mejorar su robustez. Se analiza la degradación de la matriz algorítmica y se propone una nueva formulación simétrica cinemáticamente consistente y un nuevo esquema de integración llamado IMPL-EX. Para controlar el error cometido con el nuevo esquema de integración se proponen unas herramientas que limitan el error. Estas herramientas actúan en el análisis numérico limitando el tamaño máximo permitido del paso de tiempo. Por último, se propone un nuevo método de continuación que garantice la reproducción correcta de la curva de equilibrio con el nuevo esquema de integración.

En el Capítulo §4 se estudia la equivalencia del método de discontinuidades fuertes de continuo con la aproximación discreta de los modelos de fisura cohesiva embebida. Tras realizar un estudio de las leyes cohesivas en un formato general se obtiene la ley cohesiva tracción-salto derivada del modelo de continuo de daño isótropo. Utilizando esta ley se describe la implementación numérica de la aproximación discreta, para el caso de elementos finitos con deformación constante (con un único punto de integración para las deformaciones regulares). Finalmente se utiliza un ejemplo para mostrar la equivalencia entre ambas metodologías.

El Capítulo §5 es el primero de los dos apartados de aplicaciones numéricas. En él se estudian numéricamente dos fenómenos asociados a la mecánica de la fractura: la captura del efecto tamaño y la identificación/medición de la zona de procesamiento de fractura.

A su vez, en el Capítulo §6 se engloban tres grupos de análisis tridimensionales del fallo material: los asociados a ensayos experimentales cuyo modo de fallo es predominantemente de modo I, los asociados a la estabilidad de taludes cuyo modo de fallo es predominantemente de deslizamiento y los asociados al estudio de la capacidad resistente de presas. Este último grupo de ensayos es especialmente

representativo para mostrar cómo hay casos donde los análisis planos no capturan convenientemente todos los mecanismos resistentes que una estructura puede movilizar antes de su colapso.

Por último, en el Capítulo §7 se muestran las conclusiones finales respecto a la formulación numérica presentada.

Por otro lado, en el Anejo §A se presenta un profundo estudio sobre la condición de localización de deformaciones identificada con la singularidad del tensor acústico. Esta condición, que a su vez está asociado a la existencia de una bifurcación de la solución en la curva de equilibrio, se describe para los modelos de plasticidad asociada y de daño isótropo.

En el Anejo §B se resumen, para los modelos de plasticidad asociada con el criterio de fallo de Von Mises, los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo para el modelo de daño. En particular, tras resumir el modelo de plasticidad de continuo, se desarrolla su proyección, en la superficie de discontinuidad y en el régimen de discontinuidad fuerte, en un modelo discreto tracción-salto. Además se explica el esquema de integración IMPL-EX teniendo en cuenta las diferencias que el modelo de plasticidad tiene con el modelo de daño (la necesidad de imponer la condición de consistencia mediante un algoritmo no lineal de retorno a la superficie de fluencia).

Finalmente, en el Anejo §C se esquematiza el algoritmo de captura de fisuras global utilizado en los análisis numéricos, siendo este algoritmo imprescindible para reproducir multifisuración en tres dimensiones.

Capítulo 2

ANTECEDENTES: EL MÉTODO DE DISCONTINUIDADES FUERTES DE CONTINUO

2.1. Introducción

El primer trabajo que mostró la modelización del fallo material utilizando la metodología de discontinuidades fuertes de continuo (en adelante MDFC) fue el presentado por Simó *et al.* [85] en 1993. La idea base de esta aproximación consistió en reinterpretar la ley de ablandamiento en un sentido distribucional para hacer que las soluciones proporcionadas por la aproximación de continuo tuviesen significado matemático [85].

Partiendo de esta premisa, y asumiendo un modelo local inelástico no viscoso del continuo equipado con ablandamiento, Oliver *et al.* demostraron que sólo redefiniendo el parámetro de ablandamiento y regularizando adecuadamente las deformaciones, se hace compatible el marco de la mecánica del continuo con la existencia de campos discontinuos en los desplazamientos (soluciones exhibiendo discontinuidades fuertes) [85, 50, 51, 58].

Observación 2.1.1. La regularización del ablandamiento y de la cinemática proporcionan significado físico tanto al módulo de ablandamiento, que se relaciona con la densidad superficial de energía de fractura [85, 50, 51], como a la cinemática, al asumir que la discontinuidad fuerte puede considerarse como el caso límite de una discontinuidad débil cuando el ancho de la banda de localización evoluciona y tiende a cero [45, 58, 57].

La metodología de discontinuidades fuertes de continuo tiene las siguientes características:

- Se usa un formato continuo para describir la cinemática y los estados tensio-

nales, incluyendo la reproducción de las fuerzas cohesivas que rigen el agotamiento del material en la fisura [58].

- Se relaciona la disipación del modelo, que tiene lugar en una banda de localización con espesor variable [45], con el parámetro densidad superficial de energía de fractura \mathcal{G}_f . Esta relación permite garantizar la objetividad de la respuesta al superar la dependencia que otros modelos presentan con la anchura de la banda de localización [55].
- Como una consecuencia del anterior punto se asume que una de las longitudes características de los modelos de localización, la citada anchura de la banda de localización, varía desde un valor finito (régimen de discontinuidad débil) hasta un valor de cero¹ (régimen de discontinuidad fuerte).
- La asunción de la discontinuidad fuerte como un caso límite de la discontinuidad débil y la variación que esto implica en el ancho de banda, permite modelar los regímenes de discontinuidad débil y fuerte de forma continua y reproducir de ese modo el fenómeno físico que tiene lugar en el proceso de fractura [57].
- Una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte, el modelo del continuo degenera, en la superficie de discontinuidad, en un modelo cohesivo discreto tracción-salto [52].
- Al hacer emerger el modelo cohesivo discreto del modelo del continuo de forma suave, se garantiza la necesaria continuidad de tracciones en la superficie de discontinuidad [33].

Aunque esta aproximación ha sido ampliamente explicada en trabajos anteriores ([50], [51], [52], [61], [58] y [59]), y ha sido objeto de anteriores publicaciones ([45], [79], [19], [69] y [41]), en este capítulo se expone un resumen de su formulación como preámbulo al contenido del resto del documento.

En el Apartado §2.2 se introduce el concepto de la localización de deformaciones asociada al fallo material. Después, en el Apartado §2.3 se describe el modelo del continuo de daño isotrópico sólo tracción, que es el modelo elegido para construir sobre él la aproximación de continuo de discontinuidad fuerte². El Apartado §2.4 introduce el problema de valor de contorno de un sólido en cuyo seno aparece una superficie de discontinuidad donde tiene lugar un salto en el campo de los desplazamientos. Esta cinemática, en la que a los campos de desplazamientos regulares se ha añadido unos modos mejorados, se describe en el Apartado §2.5. La necesidad de describir este proceso de localización utilizando un formato continuo hace necesario introducir dos nuevos ingredientes, que se describen en el Apartado §2.6 y que son la regularización de la cinemática y la regularización del ablandamiento. Esta regularización hace que el modelo del continuo se proyecte en un modelo de

¹Una de las características de este modelo es que permite que la disipación tenga lugar en una región de medida (de Lebesgue) cero [45].

²En las aplicaciones numéricas se han utilizado además los modelos del continuo de plasticidad asociada, en particular los modelos con la función de fluencia de Von Mises. Los ingredientes de la metodología de continuo de discontinuidad fuerte para los modelos de plasticidad se resumen en el Apéndice B.

discreto en la superficie de discontinuidad. En el Apartado §2.7 se obtiene la forma analítica de esa ley discreta proyectada para el modelo de continuo de daño isótropo y se resumen los ingredientes de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo. En el Apartado §2.8 se desarrolla la forma variacional no simétrica del problema descrito en los apartados anteriores. En el Apartado §2.9 se obtiene la forma matricial discretizada de la forma variacional obtenida. Finalmente, en el Apartado §2.10 se presenta un resumen del capítulo.

2.2. La localización de deformaciones

La localización de deformaciones es un proceso por el cual, en un sólido sometido a unas fuerzas externas, las deformaciones se concentran (se localizan) en bandas cada vez más estrechas. Este proceso caracteriza el llamado *fallo material* del sólido que, al propagarse, culmina con el agotamiento de la capacidad resistente de la estructura donde tiene lugar.

La localización de deformaciones se asocia físicamente con la concentración de defectos microestructurales en macrofisuras o en bandas de cortante [8]. Matemáticamente este fenómeno se traduce en un mal condicionamiento de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema de continuo, lo cual es signo de la presencia de una bifurcación en la solución de equilibrio: hay una solución que mantiene los campos de deformación continuos y otra solución que inicia la discontinuidad en dichos campos.

Como criterio para determinar el inicio de la localización de deformaciones se toma una condición matemática que señale la aparición de una bifurcación en la curva de equilibrio. Esta condición matemática es la *pérdida de elipticidad fuerte* (mal condicionamiento) de las ecuaciones diferenciales que rigen el problema, que se traduce en la singularidad del *tensor característico o acústico* [32], es decir:

$$\det \mathbb{Q} = \det (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^i \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (2.1)$$

donde \mathbb{C}^i es el operador constitutivo tangente continuo y \mathbf{n} es la normal a la banda donde se produce la localización.

La condición expresada en la Ecuación (2.1), particularizada para los diferentes modelos constitutivos inelásticos, se cumple debido:

- a la utilización de modelos materiales del continuo equipados con ablandamiento [28], [66].
- en el caso de flujo no asociado, a la existencia de operadores constitutivos no simétricos [66].

Por lo tanto, el análisis de bifurcación consiste en determinar, para cada modelo material:

- los valores de los módulos de endurecimiento/ablandamiento para los que tiene lugar la bifurcación.
- la dirección de la banda de localización (también llamada banda de discontinuidad).

En las Referencias [58] y [66] y en el Apéndice §A se realiza un estudio completo del análisis de bifurcación para una clase general de modelos inelásticos invíscidos, particularizando los valores obtenidos (módulos de ablandamiento y direcciones de localización) para los modelos asociados de daño isótropo y de plasticidad en dos y en tres dimensiones.

2.3. Modelos constitutivos del continuo

A continuación se resume el modelo del continuo de daño isótropo particularizado para el modelo con resistencia a compresión infinita (modelos *sólo tracción* [40] [52]). Este modelo ha sido elegido por su sencillez y por su gran aplicabilidad en el estudio de materiales cuasifrágiles.

Los ingredientes del modelo de daño isótropo sólo tracción son:

1. Energía libre de Helmholtz:

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = (1 - d(\xi)) \psi(\boldsymbol{\epsilon}) \quad \text{con} \quad \psi(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.2)$$

donde $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de tensiones infinitesimales, ξ es la variable interna tipo deformación, $\mathbb{C}^e = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ es el módulo constitutivo elástico, con $\bar{\lambda}$ y μ los módulos de Lamé y $\mathbf{1}$ y \mathbf{I} los tensores unitarios de orden dos y cuatro y $d(\xi)$ es una función de daño cuya expresión es:

$$d(\xi) = 1 - \frac{\chi(\xi)}{\xi} \quad \text{con} \quad \begin{cases} d = 0 & \text{si no hay daño} \\ d = 1 & \text{si daño completo} \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo χ la variable interna tipo tensión.

2. Leyes constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = (1 - d(\xi)) \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\chi(\xi)}{\xi} \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\chi(\xi)}{\xi} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.4)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y donde se ha definido la tensión efectiva como $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}$.

3. Dominio elástico en el espacio de las deformaciones:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\epsilon}} = \{(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) \leq 0\} \quad (2.5)$$

siendo \mathbb{S} el conjunto de los tensores simétricos de segundo orden y $f_{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función criterio de fallo que se expresa como:

$$f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = \bar{f}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}) - \widehat{f}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\xi) \quad (2.6)$$

donde $\bar{f}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon})$ es el escalar norma de deformaciones y $\widehat{f}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\xi)$ incluye los efectos del ablandamiento (reducción de la superficie de fluencia en el espacio de las tensiones). Para el modelo de daño sólo tracción, la función de fallo se escribe:

$$f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}}^+ : (\mathbb{C}^e)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \xi} \quad (2.7)$$

donde $\bar{\sigma}^+$ representa la parte positiva de las tensiones efectivas, que se definen como:

$$\bar{\sigma}^+ = \sum_{i=1}^{i=3} \langle \bar{\sigma}_i \rangle \mathbf{p}_i \otimes \mathbf{p}_i \quad (2.8)$$

siendo $\langle \bar{\sigma}_i \rangle$ el paréntesis de Macauley de la tensión principal $-i$ ésimas ($\langle \bar{\sigma}_i \rangle = \bar{\sigma}_i$ si $\bar{\sigma}_i \geq 0$ y $\langle \bar{\sigma}_i \rangle = 0$ si $\bar{\sigma}_i < 0$) y \mathbf{p}_i el autovector $-i$ ésimos del tensor de tensiones.

4. Reglas de flujo y ley de ablandamiento:

$$\dot{\xi} = \gamma \quad \text{con } \xi|_{t=0} = \xi_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \quad (2.9)$$

$$\dot{\chi} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = -H(\xi) \dot{\xi} \quad \text{con } \begin{cases} \chi|_{t=0} = \xi_0 = \sigma_u / \sqrt{E} \\ \chi|_{t=\infty} = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

siendo $\mathbf{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la ley de ablandamiento en formato general que se ha particularizado mediante el módulo de ablandamiento $H(\xi)$, σ_u la tensión última a tracción y E el módulo de Young (parámetros del material).

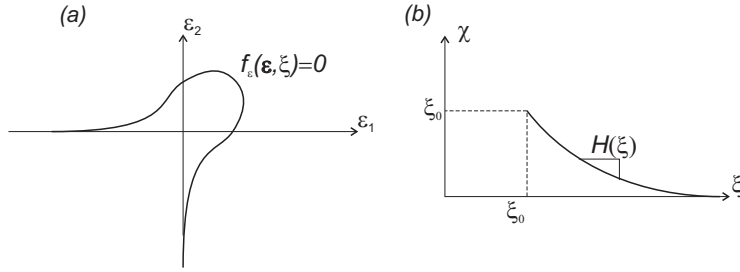


Figura 2.1: (a) Función de fluencia del modelo solo tracción, (b) Evolución de las variables internas.

5. Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) \leq 0, \quad \gamma f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = 0 \quad (2.11)$$

6. Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon}, \xi) = 0 \quad (2.12)$$

7. Módulo tangente constitutivo:

$$\mathbb{C}^{alg} = \begin{cases} (1 - d(\xi)) \mathbb{C}^e = \frac{\chi(\xi)}{\xi} \mathbb{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \text{ (des)carga elástica} \\ \frac{\chi(\xi)}{\xi} \mathbb{C}^e - \frac{\chi(\xi) - H\xi}{\xi^3} \bar{\sigma}^+ \otimes \bar{\sigma} & \text{si } \gamma > 0 \text{ carga inelástica} \end{cases} \quad (2.13)$$

8. Disipación interna del modelo:

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} (\chi \dot{\xi} - \dot{\chi} \xi) \geq 0 \quad (2.14)$$

2.4. El problema de valores de contorno

Considérese el medio continuo $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ atravesado por una superficie material $\mathcal{S} \subset \Omega$ que divide el cuerpo en dos partes, Ω^+ y Ω^- , cumpliendo éstas que $\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^- = \mathcal{S}$ (ver Figura 2.2a). La normal exterior al contorno $\partial\Omega$ se denominará por $\boldsymbol{\nu}$ y la normal a la superficie \mathcal{S} por \mathbf{n} , considerando su signo positivo el que es exterior con respecto a $\partial\Omega^-$. A su vez, el contorno $\partial\Omega$ está dividido en dos conjuntos abiertos Γ_u y Γ_σ , donde se imponen respectivamente la tasa de desplazamientos $\dot{\mathbf{u}}$ y la tasa de tracciones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, y que cumplen que $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ y $\overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma_\sigma} = \partial\Omega$. Por último, en todo el dominio Ω se aplica una tasa de densidad volumétrica de fuerzas másicas $\rho\dot{\mathbf{b}}$.

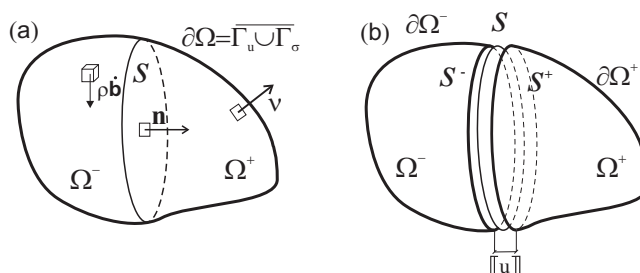


Figura 2.2: Problema de valor de contorno de un sólido con una discontinuidad embebida.

Sea el movimiento definido por la aplicación $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$, donde el primer argumento corresponde a las coordenadas espaciales \mathbf{x} y el segundo es el intervalo de tiempo $[0, T]$. Esta aplicación, que define para cada instante de tiempo $t \in [0, T]$ la configuración espacial del sólido como la imagen $\boldsymbol{\psi}(\Omega, t)$, se asume que es suave excepto en la superficie \mathcal{S} , donde tiene lugar una discontinuidad $[[\boldsymbol{\psi}]]_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\psi}_{\mathcal{S}^+}^+ - \boldsymbol{\psi}_{\mathcal{S}^-}^-$ que se entenderá como un salto en el campo de los desplazamientos y describe como $[[\mathbf{u}]]$ (ver Figura 2.2b).

Observación 2.4.1. En adelante se asumirá la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales, con lo que no se distinguirá entre las configuraciones espaciales y materiales. Esto conlleva que el equilibrio se impondrá en la configuración material o de referencia, incluyendo aquellas relaciones que tengan lugar en la banda de discontinuidad, que se establecerán en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} sin deformar.

Usando el tensor de tensiones de Cauchy, se empleará la formulación en incrementos presentada por Simó *et al.* [85] denominando $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ a la tasa del tensor de tensiones de Cauchy y $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ a la tasa del tensor de deformaciones. Imponiendo el balance de la cantidad de movimiento y considerando las condiciones de frontera, se

obtiene la forma fuerte del problema del valor de contorno a estudiar:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} &= \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} & \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \\
 \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} & \text{en } \mathcal{S} & \quad \begin{array}{l} (\text{continuidad interna} \\ \text{de tracciones}) \end{array} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^* \end{array} \right. & & \begin{array}{l} \text{en } \Gamma_{\mathbf{u}} \\ \text{en } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \end{array} & \quad (\text{condiciones de contorno})
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

donde $\nabla \cdot$ representa el operador divergencia.

La Ecuación (2.15b), que indica la continuidad interna de tracciones, se establece asumiendo que las fuerzas cohesivas dentro de la fisura están dadas por la proyección del modelo de continuo en la superficie de discontinuidad, *e.g.* se ha asumido que la ley cohesiva en \mathcal{S} es $\dot{\mathbf{t}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n}$. Esta ecuación impone que las tracciones dentro y fuera de la superficie de discontinuidad deben ser iguales, condición que garantiza que el vector tracción es continuo a ambos lados de la discontinuidad, esto es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^+ \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^- \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad \begin{array}{l} (\text{continuidad externa} \\ \text{de tracciones}) \end{array} \tag{2.16}$$

Finalmente, y de nuevo bajo la hipótesis de deformaciones infinitesimales, la ecuación cinemática que relaciona desplazamientos y deformaciones es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \tag{2.17}$$

donde la relación entre el campo de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y el campo de deformaciones $\boldsymbol{\epsilon}$ en el sólido Ω viene dado por un modelo material del continuo.

2.5. Cinemática de la discontinuidad fuerte

Para describir la cinemática de un continuo en cuyo seno existe una superficie de discontinuidad \mathcal{S} se considerará, además del sistema de coordenadas rectangular cartesiano, un sistema de coordenadas curvilíneo $\{\zeta, \eta, \rho\}$ en los puntos pertenecientes a \mathcal{S} (ver Figura 2.3). Este sistema curvilíneo se define de forma que sus líneas coordenadas ζ y η están embebidas en la superficie de discontinuidad, de forma que se puede definir dicha superficie como:

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{x}(\zeta, \eta, \rho) \mid \rho = 0\} \tag{2.18}$$

siendo el vector de la base $\bar{\mathbf{e}}_{\rho}$ asociado a la línea coordenada ρ normal a \mathcal{S} , con lo que $\bar{\mathbf{e}}_{\rho} \equiv \mathbf{n}$ (ver Figura 2.3).

Dentro de esta estructura, para describir el campo velocidad de desplazamiento discontinuo en un punto \mathbf{x} se realiza una descomposición aditiva entre una parte continua $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ y una parte discontinua $\mathcal{H}(\mathbf{x})[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$ (ver Figura 2.4a):

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}(\mathbf{x})[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \tag{2.19}$$

donde $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ representa el salto en la velocidad del campo de los desplazamientos, tanto $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ como $[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$ son funciones continuas y $\mathcal{H}(\mathbf{x})$ es la *función de Heaviside*

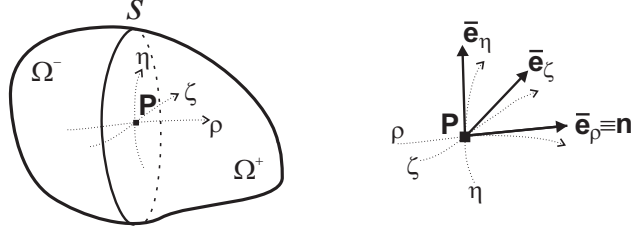


Figura 2.3: Cinemática discontinuidad fuerte

centrada en \mathcal{S} , que se define como:

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (2.20)$$

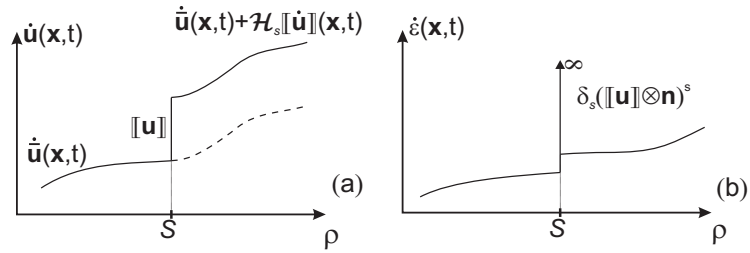


Figura 2.4: Cinemática discontinuidad fuerte: (a) Campo de desplazamientos, (b) Campo de deformaciones.

A partir del campo velocidad de desplazamientos descrito en (2.19), asumiendo que se cumple la hipótesis de deformaciones infinitesimales, el campo tasa de deformaciones puede ser escrito como (ver Figura 2.4b):

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}(\mathbf{x}) \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)}_{\text{Regular}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}} ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}])^s}_{\text{Singular}} \quad (2.21)$$

donde ∇^s representa el operador gradiente simétrico, se ha considerado en sentido distribucional la propiedad $\nabla^s \mathcal{H}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \mathbf{n}$ y $\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ representa la distribución *delta de Dirac* actuando sobre \mathcal{S} tal que:

$$\int_{\Omega} \delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) dV = \int_{\mathcal{S}} \Phi(\mathbf{x})_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} dS \quad \forall \Phi(\mathbf{x}) \in C^\infty \quad (2.22)$$

Agrupando bajo el término $\dot{\epsilon}$ el campo tasa de deformaciones regulares, la expresión (2.21) puede escribirse como:

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) + \delta_{\mathcal{S}} ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}])^s \quad (2.23)$$

donde se diferencia la parte regular y la parte singular del campo tasa de deformación, estando activa la parte singular únicamente en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} .

2.6. Regularización del modelo de continuo

El esquema desarrollado en los Apartados §2.2 a §2.5 describe el problema de un sólido en cuyo seno se desarrolla una superficie de discontinuidad. Si se desea utilizar un formato de continuo (tensión-deformación) para reproducir la totalidad del proceso de deformación hasta el agotamiento del material se presentan, en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , dos problemas:

1. Aparecen términos singulares en el campo de las deformaciones (ver la Ecuación (2.23)).
2. El modelo material de continuo tensión-deformación debe ser objetivo, es decir, debe garantizar para los campos de deformaciones singulares que la disipación venga dada por la densidad superficial de energía de fractura.

Para resolver estos problemas se hace necesario regularizar la cinemática por un lado y el módulo de ablandamiento del material por otro. Estos dos ingredientes son exclusivos de la MDFC. Si en su lugar se adoptara una aproximación discreta, es decir, se adoptara una ley cohesiva tracción-salto para representar las fuerzas cohesivas en la superficie de discontinuidad, no hubiese sido necesario regularizar ni la cinemática ni el ablandamiento. Sin embargo, son precisamente estos ingredientes los que proporcionan a la MCDF dos de sus principales características: permite reproducir el fenómeno discontinuidad débil/discontinuidad fuerte tal como aparece en la naturaleza y se pueden utilizar leyes discretas derivadas de leyes del continuo (garantizando la continuidad) sin necesidad de implementar su forma analítica. A continuación se describen con detalle la regularización tanto de la cinemática como del ablandamiento.

2.6.1. Regularización de la cinemática

La cinemática descrita en las Ecuaciones (2.19) y (2.23) tiene en el campo de las deformaciones términos singulares, debido a la aparición (en la superficie de discontinuidad \mathcal{S}) de la distribución delta de Dirac $\delta_{\mathcal{S}}$:

$$\dot{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \dot{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) + \delta_{\mathcal{S}}([\![\dot{\mathbf{u}}]\!] \otimes \mathbf{n})^s \quad (2.24)$$

Para poder introducir este campo en una ley tensión-deformación, es necesario reinterpretar $\delta_{\mathcal{S}}$ redefiniéndola mediante la aproximación delta de Dirac h -regularizada $\delta_{\mathcal{S}}^h$:

$$\delta_{\mathcal{S}} = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_{\mathcal{S}}^h(\mathbf{x}), \quad \delta_{\mathcal{S}}^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}), \quad \mu_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.25)$$

donde $\mu_{\mathcal{S}}$ es la función de colocación en \mathcal{S} y h , que tiene unidades de longitud, varía de un valor finito a un valor nulo (Ver Figura 2.5a).

Esta redefinición descrita en (2.25), aplicada al campo tasa de deformaciones de la Ecuación (2.24), es equivalente a considerar que la superficie donde tiene lugar la localización es de un espesor variable, partiendo de un valor inicial h_B a un valor final $h = k \rightarrow 0$ para el régimen de discontinuidad fuerte (ver Figura 2.5b).

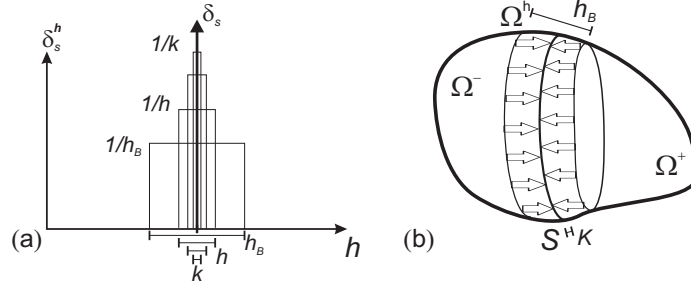


Figura 2.5: Regularización de la cinemática: (a) Delta de Dirac h -regularizada δ_S^h , (b) Variación del espesor de \mathcal{S}

Observación 2.6.1. Fenomenológicamente, utilizar un espesor variable para la banda de localización representa que se parte de un régimen de discontinuidad débil (para $h = h_B$) y se llega a un régimen de discontinuidad fuerte (para $h \rightarrow 0$) [55] [57]. Este proceso, denominado regularización de la cinemática es un elemento clave de la MDFC.

En este contexto, se puede reconsiderar una cinemática regularizada donde el salto en el campo de los desplazamientos tiene lugar en una banda de espesor variable Ω^h , de forma que para el régimen de discontinuidad fuerte esta banda colapsa en una superficie de discontinuidad $\mathcal{S} \subset \Omega^h$ (ver Figura 2.5b). Dentro de esta cinemática regularizada el campo velocidad de desplazamientos corresponde a:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\Omega^h} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (2.26)$$

donde Ω^h es la banda variable en la que tiene lugar la localización de deformaciones, $\dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t)$ es la parte regular del campo de desplazamientos, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ es el salto que tiene lugar en Ω^h y la función \mathcal{H}_{Ω^h} representa la función de Heaviside sobre Ω^h (ver Figura 2.6).

A su vez, el campo de deformaciones compatible con el campo de desplazamientos (2.26) es:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket}_{\equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \text{ acotado}} + \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h(t)} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s \quad (2.27)$$

siendo $h(t)$ el espesor de la banda de localización, μ_{Ω^h} una función de colocación en Ω^h ($\mu_{\Omega^h} = 1$ si $\mathbf{x} \in \Omega^h$ y $\mu_{\Omega^h} = 0$ si $\mathbf{x} \notin \Omega^h$), $\nabla^s(\bullet)$ el operador gradiente simétrico de (\bullet) y el vector \mathbf{n} el vector normal a la superficie de discontinuidad $\mathcal{S} \subset \Omega^h$.

Observación 2.6.2. Cuando se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte, es decir, cuando la banda de localización tiene un espesor $h = k \rightarrow 0$, el campo descrito en la Ecuación (2.27) es idéntico al campo descrito en la Ecuación (2.21). Esto quiere decir que la cinemática regularizada evoluciona hacia la cinemática de discontinuidad fuerte conforme se reduce el espesor de la banda de localización.

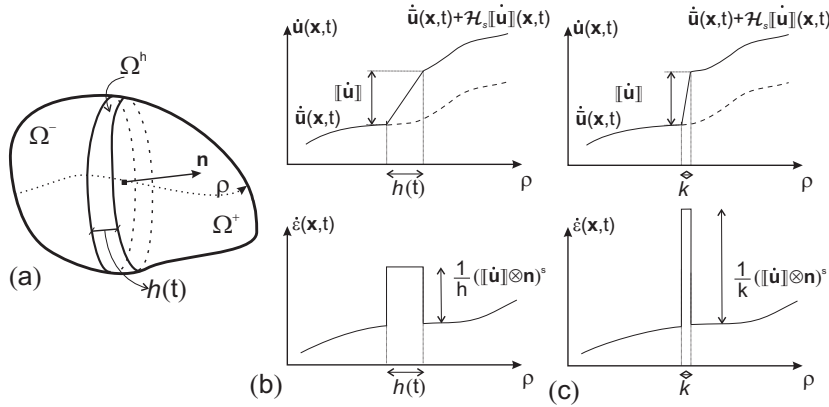


Figura 2.6: Cinemática regularizada: (a) descripción del problema, (b) régimen discontinuidad débil y (c) régimen discontinuidad fuerte.

En la Figura 2.7 se relaciona la regularización de la cinemática, tal como ha sido descrita, con los mecanismos que tienen lugar durante el proceso de fractura [8] [57]. En el instante t_B tiene lugar el inicio de la *localización de deformaciones*, en el cual la localización se concentra en una banda inicial h_B . A partir de este instante, se inicia el régimen de discontinuidad débil en el que las deformaciones se localizan en una banda de ancho variable $h(t)$ llamada *banda de discontinuidad*. Posteriormente, en el instante t_{DF} cuando se cumplen las llamadas *condiciones de discontinuidad fuerte* [55] [57], esta banda de discontinuidad alcanza un espesor nulo³ iniciándose el régimen de discontinuidad fuerte.

Observación 2.6.3. Una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte, cuando el espesor de la banda de localización tiende a cero, $h(t) = k \rightarrow 0$, se puede afirmar que la banda de localización tiende a ser una superficie, esto es, $\Omega^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{S}$. De aquí en adelante se utilizará únicamente \mathcal{S} , entendiéndose que se refiere a la cinemática regularizada que engloba tanto a una banda (régimen discontinuidad débil) como a una superficie (régimen de discontinuidad fuerte) de localización.

2.6.2. Regularización del módulo de ablandamiento

Si se analiza el campo de deformaciones (2.27) obtenido al enriquecer el campo de los desplazamientos regulares con un modo mejorado salto $[[\mathbf{u}]]$, se observa que para el régimen de discontinuidad fuerte, cuando las deformaciones se concentran en una banda de espesor nulo, en esta banda de localización el campo de deformaciones

³En la implementación numérica, y para evitar los problemas relacionados con la división por cero, este valor nulo se substituye por un valor real positivo muy pequeño $h = k \rightarrow 0$.

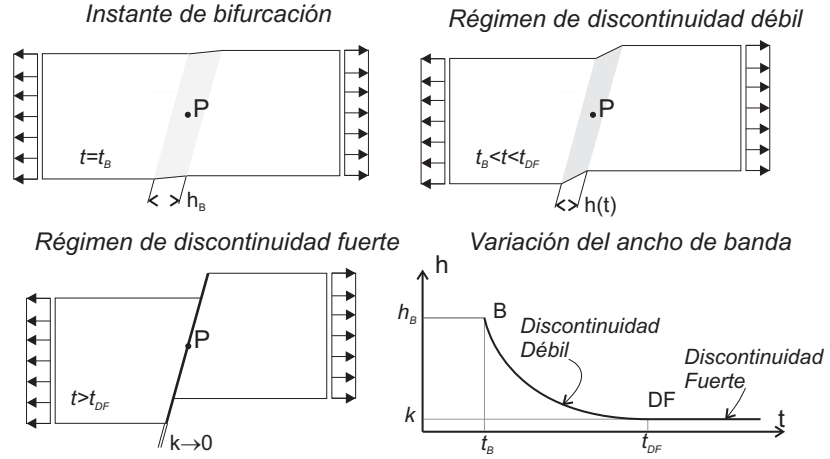


Figura 2.7: Inicio y desarrollo de una discontinuidad: ley del espesor h . (Tomado de Oliver y Huespe [57].)

se vuelve singular:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]]}_{\equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \text{ regular (acotado)}} + \underbrace{\frac{1}{h(t)} ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s}_{\text{singular (no acotado si } h(t)=k \rightarrow 0)} \quad (2.28)$$

Para que el modelo del continuo descrito en (2.2-2.14) pueda devolver tensiones acotadas para este campo de deformaciones no acotadas es necesario introducir un nuevo ingrediente: *la regularización del módulo de ablandamiento*. Esta regularización se consigue reinterpretando, en un sentido distribucional [85], el módulo de ablandamiento continuo definido en (2.10) de la siguiente forma:

$$\frac{1}{H} = \delta_S \frac{1}{\bar{H}} \quad (2.29)$$

donde \bar{H} , que se llamará módulo discreto de ablandamiento, es una propiedad del material que se obtiene a partir de sus parámetros mecánicos [52, 60]:

$$\begin{cases} \bar{H} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{E \mathcal{G}_f} & \text{para modelos de daño continuo} \\ \bar{H} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{\mathcal{G}_f} & \text{para modelos elastoplásticos} \end{cases} \quad (2.30)$$

y siendo $\delta_S(\mathbf{x})$ la distribución *delta de Dirac* actuando sobre \mathcal{S} ya definida en (2.22).

Tal como se indicó anteriormente, si se redefine la distribución delta de Dirac δ_S por la aproximación delta de Dirac h -regularizada δ_S^h :

$$\delta_s = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_S^h(\mathbf{x}), \quad \delta_S^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} \mu_S(\mathbf{x}), \quad \mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \end{cases} \quad (2.31)$$

se llega a la condición de regularización del ablandamiento:

CAJA 2.6.4. Regularización general del ablandamiento.

$$H = h(t)\bar{H} \quad (2.32)$$

donde $h(t)$ representa el espesor variable de la banda de localización.

Observación 2.6.5. La regularización del ablandamiento así definida, relacionando el módulo de ablandamiento con el espesor de la banda donde tiene lugar los procesos inelásticos, garantiza que la disipación de la formulación este marcada por el parámetro material densidad superficial de energía de fractura \mathcal{G}_f [52].

Observación 2.6.6. Obsérvese, para el caso de un ensayo a tracción simple, cómo la anterior regularización del ablandamiento hace que el modelo del continuo devuelva tensiones acotadas para deformaciones no acotadas. Para el modelo de daño, en un ensayo uniaxial a tracción la relación constitutiva responde a:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} HE\dot{\epsilon} & \text{si carga} \\ \frac{\chi}{\xi}E\dot{\epsilon} & \text{si descarga o carga elástica} \end{cases} \quad (2.33)$$

El campo de deformaciones tiene la siguiente expresión derivada de (2.28):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{h(t)}[[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (2.34)$$

con lo que el campo de tensiones queda, considerando el estado de carga en régimen de discontinuidad fuerte:

$$\dot{\sigma} = HE\dot{\epsilon} = \lim_{h \rightarrow 0} E\bar{H}h \left(\dot{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{h}[[\dot{\mathbf{u}}]] \right) = E\bar{H}[[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (2.35)$$

que es un valor acotado.

2.7. La proyección continuo-discreto. El modelo cohesivo proyectado.

La regularización de la cinemática y del ablandamiento tienen como consecuencia la proyección, en la superficie de discontinuidad, del modelo continuo en otro discreto. Es decir, la tracción \mathbf{t} que rige la decohesión en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} viene dada por la proyección, que tiene lugar en el régimen de discontinuidad fuerte, del vector tracción $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ proporcionado por el modelo continuo tensión-deformación.

En este apartado se obtiene analíticamente la ley discreta tracción-salto derivada del modelo de continuo de daño isótropo descrito en el Apartado §2.3⁴.

⁴La expresión analítica de la ley discreta tracción-salto se obtiene para demostrar su equi-

A partir de la ecuación constitutiva (2.4), el vector tracción en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} es:

$$\mathbf{t}_S(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S(\mathbf{x}, t) = \frac{\chi}{\xi} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}_S(\mathbf{x}, t) \quad (2.36)$$

Para obtener en \mathcal{S} el campo de deformaciones en un instante dado, se tiene que integrar la expresión del campo regularizado tasa de deformaciones descrito en (2.27):

$$\boldsymbol{\epsilon}_S(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S dt = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S dt + \int_{t_B}^t \frac{1}{h(t)} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s dt \quad (2.37)$$

donde t_B indica el instante de bifurcación (ver Figura 2.7 en Apartado §2.6.1). En la segunda integral se puede dividir el intervalo de integración en dos partes, una anterior al inicio de la discontinuidad fuerte t_{DF} y otra posterior a éste, con lo que se obtiene:

$$\boldsymbol{\epsilon}_S(t) = \int_0^t \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S dt = \underbrace{\int_0^t \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_S dt + \int_{t_B}^{t_{DF}} \frac{1}{h(t)} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s dt}_{\boldsymbol{\epsilon}(t_{DF})} + \int_{t_{DF}}^t \frac{1}{k} (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s dt \quad (2.38)$$

Englobando los dos primeros términos como $\boldsymbol{\epsilon}(t_{DF})$, deformación existente en el instante de inicio de la discontinuidad fuerte, se obtiene:

$$\boldsymbol{\epsilon}_S(t) = \boldsymbol{\epsilon}_S(t_{DF}) + \frac{1}{k} (\Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s \quad (2.39)$$

donde $\Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(t) - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(t_{DF})$

Substituyendo el campo de deformaciones (2.39) en la expresión del vector tracción descrita en (2.36) se tiene

$$\mathbf{t} = \lim_{h=k \rightarrow 0} \frac{\chi_S}{\xi_S} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \left(\boldsymbol{\epsilon}_S(t_{DF}) + \frac{1}{h} (\Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes \mathbf{n})^s \right) \quad (2.40)$$

y despreciando aquellos términos que en el límite se anulan, se obtiene:

$$\mathbf{t} = \lim_{h=k \rightarrow 0} \frac{\chi_S}{h\xi_S} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}) \cdot \Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (2.41)$$

lo que permite definir el vector tracción en función del tensor acústico elástico $\mathbb{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}$ como:

$$\mathbf{t} = \lim_{h=k \rightarrow 0} \frac{\chi_S}{h\xi_S} \mathbb{Q}^e \cdot \Delta \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (2.42)$$

Para que el vector tracción \mathbf{t} de la expresión (2.42) sea un vector acotado, se debe garantizar que el $\lim_{h \rightarrow 0} (h\xi_S)$ es un valor real distinto de cero. Para hacerlo defínase

valencia con el modelo continuo proyectado en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} y no para ser implementada, dado que en la MDFC se utiliza durante todo el proceso de localización un formato continuo tensión-deformación.

una nueva variable interna “discreta” tipo deformación $\bar{\alpha}$ como la regularización de su homóloga del continuo:

$$\dot{\bar{\alpha}} = h\dot{\xi} \quad \forall t > t_B \quad (2.43)$$

Utilizando (2.43), el valor de la variable ξ en un instante de tiempo $t > t_B$ es:

$$\xi(t) = \underbrace{\int_0^{t_B} \dot{\xi} dt}_{\xi(t_{DF})} + \int_{t_B}^{t_{DF}} \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{h(t)} dt + \int_{t_{DF}}^t \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{k} dt = \xi(t_{DF}) + \frac{\Delta\bar{\alpha}}{k} \quad (2.44)$$

donde $\Delta\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t_{DF})$.

Utilizando (2.44), el valor de $\lim_{h \rightarrow 0} (h\xi_S)$ en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} vale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h\xi_S = \lim_{h=k \rightarrow 0} h \left(\xi_S(t_{DF}) + \frac{\Delta\bar{\alpha}}{k} \right) = \Delta\bar{\alpha} \quad (2.45)$$

que es un valor no nulo acotado.

Finalmente, llevando (2.45) a la expresión de las tracciones (2.42) se obtiene:

$$\mathbf{t} = \frac{\chi_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \quad (2.46)$$

que es la expresión de la ley discreta proyectada, equivalente a la tracción derivada del modelo continuo tensión-deformación en \mathcal{S} para el régimen de discontinuidad fuerte.

2.8. Formulación variacional no simétrica

Para obtener la forma variacional de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo descrita en los Apartados §2.2 a §2.7, se volverá a definir el problema de valor de contorno ya descrito en el Apartado §2.4, pero reinterpremando el campo de los desplazamientos. El objetivo es encontrar una formulación que permita imponer las condiciones de contorno tipo Dirichlet sobre la parte regular del campo de desplazamientos, consiguiendo que el dominio de las funciones que definen la parte enriquecida sea únicamente una zona que englobe aquella donde tiene lugar la localización.

Sea entonces el medio continuo descrito en la Figura 2.8a. Para el dominio Ω así definido, se estableció el campo de desplazamientos en (2.26) como la suma de una parte regular y una parte mejorada:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} [\dot{\hat{\mathbf{u}}}] (\mathbf{x}, t) \quad (2.47)$$

donde $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ es la ya definida función salto en \mathcal{S} y donde \mathcal{S} representa tanto la superficie de discontinuidad para el régimen de discontinuidad fuerte como una banda de localización para el régimen de discontinuidad débil (ver la Observación 2.6.3).

En lugar de la expresión (2.47), considérese una forma equivalente utilizando un nuevo campo regular de los desplazamientos definido como:

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \varphi(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (2.48)$$

donde se utiliza una función $\varphi(\mathbf{x})$ que sólo tiene que cumplir, además de ser suave, la siguiente condición:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_\varphi \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varphi \end{cases} \quad (2.49)$$

siendo Ω_φ el soporte dónde se define la función $\varphi(\mathbf{x})$, que cumplirá $\Omega_\varphi \subset \Omega$ y $\mathcal{S} \subset \Omega_\varphi$ (ver Figura 2.8b).

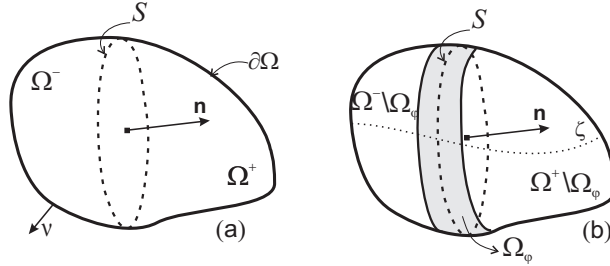


Figura 2.8: (a) Superficie de discontinuidad. (b) Dominio de la función $\varphi(\mathbf{x})$.

Observación 2.8.1. Es importante no confundir la región Ω_φ , que es el dominio de la función que permite enriquecer el campo de desplazamientos, con Ω^h , que es la región donde tienen lugar los procesos inelásticos y que colapsa en régimen de discontinuidad fuerte ($h = k \rightarrow 0$) en $\Omega^h \rightarrow \mathcal{S}$. Ambas regiones están relacionadas por $\Omega^h \in \Omega_\varphi$.

A partir del campo definido en (2.48), se puede reescribir la expresión del campo de desplazamientos como:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_\mathcal{S} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (2.50)$$

habiéndose definido la función salto unitario elemental

$$\mathcal{M}_\mathcal{S}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_\mathcal{S}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

Observación 2.8.2. En la Figura 2.9 se muestra la descomposición del campo de desplazamientos del sólido a través de la línea ζ (ver Figura 2.8b) cuando ha tenido lugar una discontinuidad fuerte. Como se ve en la figura, aunque ambas descripciones son equivalentes, la ventaja de utilizar la expresión (2.50) es que el soporte de la parte mejorada $\mathcal{M}_\mathcal{S} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}, t)$ es Ω_φ , lo que permite definir las condiciones de contorno tipo Dirichlet únicamente en la parte regular $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$.

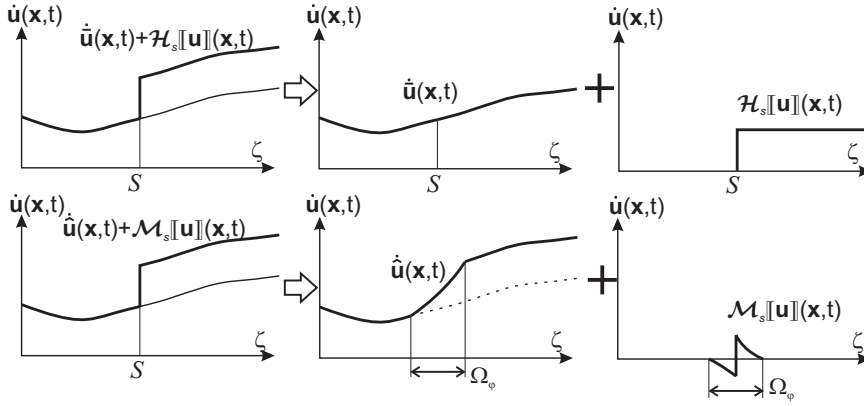


Figura 2.9: Descomposición del campo de desplazamientos.

Utilizando la descomposición del campo de desplazamientos descrita en la expresión (2.50), el problema de valor de contorno a resolver es:

CAJA 2.8.3. Forma fuerte del problema de valor de contorno.

DADOS $\dot{\mathbf{t}}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\dot{\mathbf{u}}^* : \Gamma_u \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$
 $\rho \dot{\mathbf{b}} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$

ENCONTRAR $\dot{\mathbf{u}} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$ y $[[\dot{\mathbf{u}}]] : \Omega_\varphi \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$

que satisfagan:

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \quad (2.52)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad \text{en } \Omega \quad (\text{ecuación constitutiva}) \quad (2.53)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \Omega \quad (\text{compatibilidad cinemática}) \quad (2.54)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^* \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (\text{condiciones de contorno}) \quad (2.55)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^* \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] = 0 \end{cases} \quad \text{en } \Gamma_u \quad (\text{condiciones de contorno}) \quad (2.56)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^+ \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^- \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{cont. externa de tracciones}) \quad (2.57)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{cont. interna de tracciones}) \quad (2.58)$$

donde $\rho \dot{\mathbf{b}}$ son las fuerzas másicas por unidad de volumen, se fija la relación entre $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ mediante la ecuación constitutiva $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$, que devuelve tensiones para unas deformaciones dadas, y se fija la relación entre $\boldsymbol{\epsilon}$ y \mathbf{u} mediante el operador gradiente simétrico ∇^s , estableciéndose que:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]] + \delta_{\mathcal{S}} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s - (\nabla \varphi \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]])^s \quad (2.59)$$

Partiendo de la forma fuerte del problema de valor de contorno definido en (2.52-2.58), para obtener la formulación variacional del problema es necesario definir los

espacios funcionales \mathcal{S}_η de las funciones solución y \mathcal{V}_v de las funciones de peso:

$$\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_{\hat{\eta}} \oplus \mathcal{S}_{\tilde{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\eta}} + \mathcal{M}_S \tilde{\boldsymbol{\eta}}\} \quad (2.60)$$

siendo
$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{S}_{\hat{\eta}} \subset [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} \text{ con } \hat{\boldsymbol{\eta}}|_{\Gamma_u} = \dot{\mathbf{u}}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{S}_{\tilde{\eta}} \subset [L_2(\mathcal{S})]^{n_{dim}} \end{cases}$$

$$\mathcal{V}_v = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} \text{ con } \mathbf{v}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0}\} \quad (2.61)$$

La forma variacional o débil equivalente a la forma fuerte descrita en (2.52-2.58) pasa entonces a ser:

CAJA 2.8.4. Forma débil del problema de valor de contorno.

$$\text{DADOS} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] &\rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \dot{\mathbf{u}}^* : \Gamma_u \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \rho \dot{\mathbf{b}} : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

ENCONTRAR $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_\eta$ tal que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_v$ se cumpla:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{v} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega - \left[\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \dot{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* \, d\Gamma \right] = 0 \quad (2.62)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.63)$$

Como se observa en las expresiones (2.60) y (2.61), el espacio de las funciones solución ha sido distinto al espacio de las funciones peso. Esto es debido a que solamente se obtiene la forma variacional del problema de valor de contorno definido por las Ecuaciones (2.52-2.57), imponiendo la continuidad interna de tracciones, esto es la Ecuación (2.58) o la Ecuación (2.63), de forma fuerte o punto a punto. En consecuencia, se tiene un método *Petrov-Galerkin* de aproximación [34] que lleva a una formulación no simétrica.

2.9. Discretización no simétrica de la MDFC

Para discretizar el problema definido en (2.62-2.63) defínase los siguientes espacios de funciones finito-dimensionales $\mathcal{S}_\eta^h \subset \mathcal{S}_\eta$ y $\mathcal{V}_v^h \subset \mathcal{V}_v$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\eta^h &= \left\{ \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) \mid \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_{nodos}} N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \sum_{e=1}^{n_{elenr}} \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)}(t) \right\} \\ \mathcal{V}_v^h &= \left\{ \mathbf{v}^h \mid \mathbf{v}^h = \sum_{i=1}^{n_{nodos}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i \right\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

donde n_{elenr} es el número de elementos enriquecidos por donde pasa la superficie de discontinuidad (ver Figura 2.10a), $\dot{\mathbf{d}}$ son los grados de libertad asociados a los nodos, N_i son las funciones de interpolación estándar, \mathcal{M}_S es la función salto unitario elemental definida en (2.51) que interpola los modos enriquecidos en aquellos elementos por los que pasa la discontinuidad y $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)}$ son estos modos enriquecidos que representan los saltos (ver Figura 2.10).

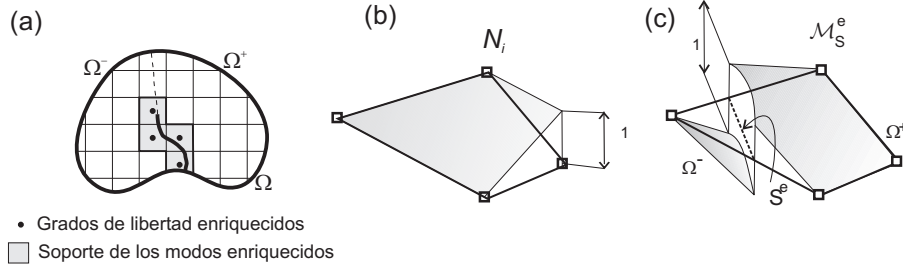


Figura 2.10: Discretización del problema: (a) elementos enriquecidos, (b) función de aproximación N_i , (c) función de aproximación del salto $\mathcal{M}_S^{(e)}$.

La función salto unitario $\mathcal{M}_S^{(e)}$, definida en la expresión (2.51), se construye de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(e)}(\mathbf{x}), \quad \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e^+} N_{i^+}^{(e)}(\mathbf{x}) \quad (2.65)$$

donde la función $\varphi^{(e)}(\mathbf{x})$, que tiene como soporte el dominio elemental y cumple que para Ω^+ vale 1 y para Ω^- vale 0 (ver Ecuación (2.49)), se construye como la suma de las funciones de aproximación estándar elementales definidas para aquellos nodos que limitan con Ω^+ (ver Figura 2.11).

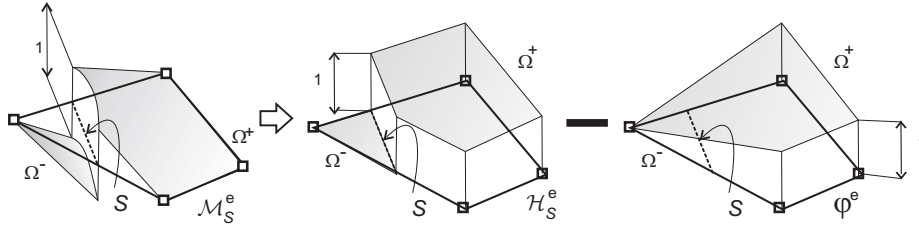


Figura 2.11: Descripción de la función $\mathcal{M}_S^{(e)}$.

Una vez definidos los espacios finito-dimensionales \mathcal{S}_η^h y \mathcal{V}_v^h , la forma discretizada del problema de valor de contorno definido en (2.62-2.63) pasa a ser:

$$\sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega} \nabla^s \mathbf{v}^h : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \left[\int_{\Omega} \mathbf{v}^h \cdot \boldsymbol{\rho} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{t}^* d\Omega \right] = 0 \quad (2.66)$$

$$l^{(e)} \left(\mathbf{n} \cdot \frac{1}{hl^{(e)}} \int_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S dS - \mathbf{n} \cdot \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega \right) = 0, \quad e = 1 \dots n_{elem} \quad (2.67)$$

siendo $\Omega^{(e)}$ el volumen del elemento finito (área si es bidimensional) y $hl^{(e)}$ el volumen de la intersección de la banda de localización con el elemento finito e , que

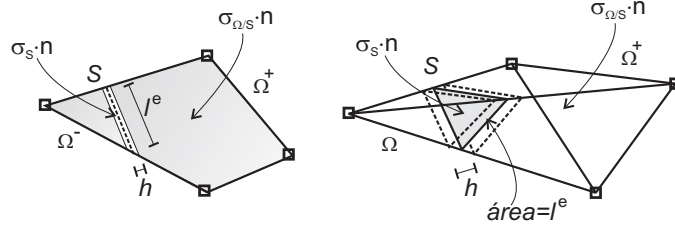


Figura 2.12: Dominios localizados y no localizados dentro del elemento.

se obtiene multiplicando el espesor h por $l^{(e)}$, su área seccional media (una longitud si el análisis es bidimensional), ver Figura 2.12.

Observación 2.9.1. Se ha impuesto en (2.67) la continuidad interna de tracciones igualando la tracción en la superficie de discontinuidad con la tracción dada por la tensión media existente en el conjunto del elemento, tal como indica la Figura 2.12.

Observación 2.9.2. El área (o la longitud) característica de la intersección de la banda de localización con un elemento finito se calcula aproximadamente como $l^{(e)} = \Omega^{(e)} \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi$ [53] (ver Figura 2.13).

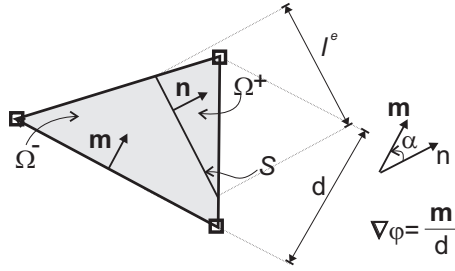


Figura 2.13: Orientación de la superficie de fallo en un elemento (tomado de [59]).

A partir del problema de valor de contorno discretizado (2.66-2.67) es directo obtener la expresión matricial del problema. Trabajando primero a nivel elemental, se pueden definir los campos aproximados de los desplazamientos y las deformaciones en un elemento e como:

$$\dot{\mathbf{u}}^{h^{(e)}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) [[\dot{\mathbf{u}}]]^{(e)}(t) \quad (2.68)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{h^{(e)}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n (\nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^s - (\nabla \varphi^{(e)} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]^{(e)})^s + \mu_S^{(e)} \frac{1}{h(t)} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]^{(e)})^s \quad (2.69)$$

donde en este caso n representa el número de nodos del elemento y donde se considera la versión regularizada de la cinemática definida en la Ecuación (2.59).

Utilizando la notación de Voigt, el campo de deformaciones (2.69) admite la siguiente formulación matricial:

$$\{\dot{\epsilon}\}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} + \underbrace{\left(\mu_S^{(e)} \frac{1}{h(t)} [\mathbf{n}]^{(e)} - [\nabla\varphi]^{(e)} \right)}_{\mathbf{G}^{(e)}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G}^{(e)} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} \quad (2.70)$$

siendo $\dot{\mathbf{d}}^{(e)}$ el vector que engloba los desplazamientos regulares de los nodos del elemento:

$$\dot{\mathbf{d}}^{(e)} = [\dot{\mathbf{d}}_1^T, \dot{\mathbf{d}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{d}}_n^T]^T, \text{ con } \dot{\mathbf{d}}_i = [\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z]_i^T \quad (2.71)$$

$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$ el vector que engloba el modo salto en el elemento:

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} = [\llbracket \dot{u} \rrbracket_x, \llbracket \dot{u} \rrbracket_y, \llbracket \dot{u} \rrbracket_x]^T \quad (2.72)$$

y siendo las matrices $\mathbf{B}^{(e)}$, $[\nabla\varphi]^{(e)}$ y $[\mathbf{n}]^{(e)}$ las definidas como:

$$\mathbf{B}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(e)}, \mathbf{B}_2^{(e)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(e)}] \text{ con } \mathbf{B}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x N_i^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y N_i^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z N_i^{(e)} \\ \partial_y N_i^{(e)} & \partial_x N_i^{(e)} & 0 \\ \partial_z N_i^{(e)} & 0 & \partial_x N_i^{(e)} \\ 0 & \partial_z N_i^{(e)} & \partial_y N_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$[\nabla\varphi]^{(e)} = \begin{bmatrix} \partial_x \varphi^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y \varphi^{(e)} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \varphi^{(e)} \\ \partial_y \varphi^{(e)} & \partial_x \varphi^{(e)} & 0 \\ \partial_z \varphi^{(e)} & 0 & \partial_x \varphi^{(e)} \\ 0 & \partial_z \varphi^{(e)} & \partial_y \varphi^{(e)} \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{n}]^{(e)} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_y & n_x & 0 \\ n_z & 0 & n_x \\ 0 & n_z & n_y \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

donde en las anteriores expresiones n representa el número de nodos que tiene el elemento finito utilizado y i representa uno de estos nodos.

Utilizando la misma notación que para el campo discretizado de deformaciones (2.70), se puede expresar el gradiente simétrico de las funciones test como:

$$\{\nabla^s \mathbf{v}^h\}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{c}^{(e)} \quad (2.75)$$

donde los valores arbitrarios $\mathbf{c}^{(e)}$ tienen la siguiente estructura:

$$\mathbf{c}^{(e)} = [\mathbf{c}_1^T, \mathbf{c}_2^T, \dots, \mathbf{c}_n^T]^T, \text{ con } \mathbf{c}_i = [c_x, c_y, c_z]_i^T \quad (2.76)$$

Llevando las expresiones (2.70) y (2.76) a la forma débil discretizada del problema definido en (2.66-2.67), se obtienen las ecuaciones no lineales de las fuerzas

residuales que proporcionarán, a nivel del elemento, la forma matricial del problema incremental:

$$\dot{\mathbf{R}}^{(e)} := \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} d\Omega - \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \quad (2.77)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{(e)} := \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\mu_S}{h(t)} - \frac{l_e}{\Omega} \right) [\mathbf{n}]^{(e)T} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} d\Omega \quad (2.78)$$

donde el vector $\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} = [\dot{\mathbf{F}}_1^T, \dot{\mathbf{F}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{F}}_n^T]^T$ es el vector de fuerzas externas incrementales en los nodos del elemento.

Observación 2.9.3. La ecuación (2.78) es equivalente a la forma definida en (2.67) y se ha obtenido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \frac{1}{hl^{(e)}} \int_S \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S d\Omega - \mathbf{n} \cdot \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{hl^{(e)}} \int_S \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S d\Omega - \frac{1}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega &= 0 \Rightarrow \\ \int_S \frac{1}{h} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S d\Omega - \int_{\Omega^{(e)}} \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus S} d\Omega &= 0 \Rightarrow \\ \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\mu_S}{h(t)} - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \right) \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

donde se engloba la expresión inicial bajo una misma integral utilizando μ_S , la función de colocación en S .

La descripción del proceso de integración demuestra la equivalencia de las expresiones (2.78) y (2.63):

1. Se añade un nuevo punto de integración en el centroide del elemento finito. Este punto de integración extra se utilizará para las integración sobre la banda de discontinuidad S , mientras que los puntos de integración regulares se utilizarán para la integración sobre el conjunto del elemento $\Omega^{(e)} \setminus S$.

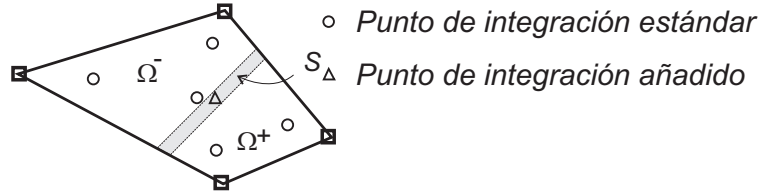


Figura 2.14: Proceso de integración: puntos de integración.

2. Se define una función de colocación μ_S que, en el proceso de integración, valga $\mu_S = 1$ para el punto de integración añadido y valga $\mu_S = 0$ para los puntos de integración estándar.

3. Al realizar la integración numérica de la expresión (2.78) se tiene:

$$-\frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \sum_{i=1}^{i=n_g} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} W_g^i + \frac{1}{h(t)} \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} h(t) l^{(e)} = 0 \quad (2.80)$$

con lo que se obtiene la expresión del equilibrio interno de tracciones tal como fue expuesto en (2.63) y en (2.67) y donde n_g son los puntos de Gauss regulares del elemento finito y W_g^i el peso de integración asociado a uno de ellos.

Utilizando la notación de Voigt, la relación constitutiva tensión-deformación se expresa como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} = \mathbf{C}^{alg} \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}^{(e)} \quad (2.81)$$

donde \mathbf{C}^{alg} es el operador constitutivo tangente, expresado en notación de Voigt, cuya expresión algorítmica está definida para el modelo de daño isótropo en (2.13). Defináse también a nivel elemental las siguientes matrices:

$$\mathbf{G}^{*(e)} := \left(\frac{\mu_{\mathcal{S}}^{(e)}}{k} - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \right) [\mathbf{n}]^{(e)T} \quad (2.82)$$

$$\mathbf{G}^{(e)} := \frac{\mu_{\mathcal{S}}^{(e)}}{k} [\mathbf{n}]^{(e)} - [\nabla \varphi]^{(e)} \quad (2.83)$$

Llevando la expresión (2.81), donde se utiliza el campo de deformaciones descrito en (2.70), a las ecuaciones de las fuerzas residuales descritas en (2.77-2.78), y utilizando las matrices definidas en (2.73), (2.74), (2.82) y (2.83) se obtiene la siguiente expresión matricial de las fuerzas residuales a nivel elemental:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{K}^{(e)}} := \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{(e)}} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \dot{[\mathbf{u}]}^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

Las submatrices de la matriz elemental tangente definida en (2.84) son:

$$\mathbf{K}_{dd}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} \, d\Omega \quad (2.85)$$

$$\mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} \, d\Omega \quad (2.86)$$

$$\mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{*(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} \, d\Omega \quad (2.87)$$

$$\mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{*(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} \, d\Omega \quad (2.88)$$

Observación 2.9.4. El carácter no simétrico de la formulación, que ya se indicó en el desarrollo de la forma variacional al elegir espacios diferentes para las funciones test y las funciones solución en (2.60-2.61), se ve claramente en las ecuaciones (2.86) a (2.88). Unas de las condiciones que tiene que cumplir la matriz $\mathbf{G}^{*(e)}$ es que se cumpla el llamado “patch test” [82], esto es:

$$\int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{*(e)} d\Omega = \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\mu_S^{(e)}}{k} - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \right) [\mathbf{n}]^{(e)} d\Omega = \mathbf{0} \quad (2.89)$$

Si se redefinen unas nuevas matrices $\bar{\mathbf{B}}$ tal que:

$$\bar{\mathbf{B}}^{*(e)} = [\mathbf{B}_1^{(e)}, \mathbf{B}_2^{(e)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(e)}, \mathbf{G}^{*(e)}] \quad (2.90)$$

$$\bar{\mathbf{B}}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(e)}, \mathbf{B}_2^{(e)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}] \quad (2.91)$$

la matriz elemental $\mathbf{K}^{(e)}$ puede escribirse en forma más compacta como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{*(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} d\Omega \quad (2.92)$$

De forma análoga, redefiniendo los siguientes vectores:

$$\dot{\mathbf{R}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{d}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{d}}_{ext}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{u}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

se puede expresar las ecuaciones de las fuerzas residuales a nivel elemental de la siguiente forma compacta:

$$\dot{\mathbf{R}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{*(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} d\Omega - \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \quad (2.94)$$

Realizando el ensamblaje de las ecuaciones a nivel elemental (2.94) se obtiene:

$$\mathcal{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{*(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} d\Omega - \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \right] = \mathbf{0} \quad (2.95)$$

lo que lleva a poder definir una matriz de resistencia global \mathbf{K} que se define como:

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\mathbf{K}^{(e)} \right] \quad \text{siendo} \quad \mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

Observación 2.9.5. *Analizando la estructura de la expresión (2.84) se ve que no existen fuerzas exteriores aplicadas en los grados de libertad saltos (ver Ecuación (2.93b)) debido a que el soporte donde se definen estos modos enriquecidos es elemental. Gracias a ello es directo aplicar la condensación de estos grados de libertad definiendo una nueva matriz elemental, anterior al proceso de ensamblaje, cuya forma es:*

$$\hat{\mathbf{K}}^{(e)} = \mathbf{K}_{dd}^{(e)} - \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)-1} \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} \quad (2.97)$$

y redefiniendo el vector de fuerzas residuales elementales como:

$$\hat{\mathbf{R}}^{(e)} = \dot{\mathbf{R}}^{(e)} - \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)-1} \dot{\mathbf{r}} \quad (2.98)$$

2.10. Resumen del capítulo

En este capítulo se realizó un resumen de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo que pretende servir de preámbulo al resto del trabajo. La descripción que aquí se ha hecho de esta metodología debería ser suficiente para entender el resto de los capítulos, pero de no ser así, una selección recomendada de artículos que cubren los aspectos fundamentales de la teoría son las Referencias [58], [57] y [52].

Al principio del capítulo se da una introducción del fenómeno de la localización de deformaciones y se relaciona este fenómeno con la singularidad del tensor acústico. Después se describe el modelo del continuo de daño isótropo sólo tracción. Este modelo será el utilizado en los desarrollos teóricos de este trabajo, dejando para el Apéndice B los resultados relacionados con los modelos de plasticidad asociada particularizados para la función de fluencia de Von Mises.

Una vez introducido el formato continuo tensión-deformación, se describe el problema de valor de contorno de un sólido en cuyo seno se ha desarrollado una superficie de discontinuidad y la cinemática asociada a él. Al pretender resolver este problema de valor de contorno utilizando un formato continuo tensión-deformación, se presentan dos dificultades: la aparición de términos singulares en el campo de deformaciones y la necesidad de garantizar que los campos de tensiones se mantienen acotados incluso cuando las deformaciones son no acotadas.

Ambas dificultades se solucionan regularizando la cinemática y el ablandamiento. La regularización de la cinemática consiste en reinterpretar la distribución delta de Dirac como una sucesión que en el límite tiende a infinito. A su vez, la regularización del ablandamiento consiste en redefinir el módulo de ablandamiento de continuo como el producto de un módulo de ablandamiento intrínseco, dependiente de las propiedades del material, por la anchura de la banda donde tiene lugar la localización.

Esta doble regularización físicamente es equivalente a interpretar que el modelo considera que la disipación (la localización de deformaciones) tiene lugar en bandas que evolucionan desde un espesor inicial finito a un espesor cero. Dos son las

consecuencias fundamentales de esta regularización:

- se garantiza que la disipación del modelo viene dada exclusivamente por la propiedad del material densidad superficial de energía de fractura.
- se proyecta, en la superficie de discontinuidad, un modelo discreto degenerado del continuo que es equivalente a una ley discreta cohesiva tracción-salto.

En la última parte del capítulo se obtiene la forma variacional no simétrica del problema de valor de contorno junto con su formulación discretizada. Esta formulación será utilizada en el capítulo siguiente donde se analiza su robustez y los problemas de convergencia que presenta.

Capítulo 3

ESTABILIDAD Y ROBUSTEZ DE LAS APROXIMACIONES NUMÉRICAS

3.1. Introducción

El análisis numérico del fallo material de una estructura tiene serios problemas de convergencia cuando el dominio de la localización comienza a ser importante comparado con el dominio total [23][37].

Esta falta de convergencia, que tiene como consecuencia la incapacidad para obtener la curva de equilibrio, no está vinculada (o no tiene por qué estarlo) con la existencia de puntos límite, “*snap-back*” o “*snap-through*”, que pueden ser superados mediante los métodos de continuación estándares [20]. En su lugar, la falta de convergencia asociada al análisis del fallo material puede deberse a las siguientes causas:

1. La existencia de una bifurcación en la curva de equilibrio asociada al mal condicionamiento de las ecuaciones que rigen el problema, lo que provoca una no-unicidad de la solución y determina el inicio de la localización descrita en el Apartado §2.2.
2. La *degradación del número de condición*¹ de la matriz estructural global, que para el caso de la formulación no simétrica ha sido definida en (2.97).

En este capítulo se analiza la segunda fuente de inestabilidad: la debida a la degradación del número de condición de la matriz estructural global. Primero se buscarán las causas de esta degradación para la formulación no simétrica (definida

¹Se define el número de condición de una matriz \mathbf{A} , para una norma $\|\cdot\|$, como $\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$.

en el capítulo anterior) en el contexto del método de integración implícito del esquema de Newton-Raphson. Después, en los Apartados §3.3 a §3.6, se desarrollan las tecnologías numéricas que permiten superar esta fuente de mal condicionamiento.

3.2. Degradación de la convergencia en la formulación no simétrica

La matriz estructural global se construye mediante el ensamblaje de cada una de las matrices elementales tal como se indicó en las Ecuaciones (2.95) y (2.96) del Apartado §2.9. Para la formulación no simétrica y siguiendo el Apartado §2.9, estas matrices elementales se definen por:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

donde las submatrices intervinientes son:

$$\mathbf{K}_{dd}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} \, d\Omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} \, d\Omega \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{*(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} \, d\Omega \quad (3.4)$$

$$\mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{*(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} \, d\Omega \quad (3.5)$$

habiéndose definido las matrices $\mathbf{B}^{(e)}$, $\mathbf{G}^{(e)}$ y $\mathbf{G}^{*(e)}$ en las Ecuaciones (2.73), (2.83) y (2.82) respectivamente.

El origen de la degradación de la matriz estructural global se encuentra en la aparición de autovalores negativos en aquellas matrices elementales $\mathbf{K}^{(e)}$ de elementos en los que se produce la localización de deformaciones.

Para estudiar este fenómeno se realizará un análisis espectral de estas matrices elementales para el caso de régimen de discontinuidad fuerte. Para obtener las expresiones de las submatrices definidas en (3.2-3.5) en el régimen de discontinuidad fuerte hay que tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- La aproximación numérica de las integrales definidas sobre la banda de localización \mathcal{S} , al haberse definido un único punto de Gauss en ella, se obtiene como el valor del integrando en el centroide del elemento multiplicado por el volumen (el área en análisis bidimensional) de dicha banda de localización (ver Observación 2.9.2).
- Para el régimen de discontinuidad fuerte, la medida del volumen (o del área para análisis bidimensional) de la banda de discontinuidad \mathcal{S} es:

$$meas(\mathcal{S}) = k l^{(e)} \quad (3.6)$$

- En la superficie de discontinuidad \mathcal{S} y dentro del régimen de discontinuidad fuerte, aparece un campo de deformaciones no acotado, con lo que el valor del operador algorítmico \mathbf{C}_S^{alg} es casi nulo (ver la Ecuación (2.13) para un valor de la variable interna tipo deformación tendiente a infinito). Debido a ello se han simplificado, en las Ecuaciones (3.7) a (3.10), aquellos términos en los que aparece \mathbf{C}_S^{alg} , excepto en la Ecuación (3.10), donde aparece dividido por el escalar k , cuyo valor es también muy próximo a cero.

Siguiendo las anteriores consideraciones, las expresiones de las submatrices (3.2-3.5) para el régimen de discontinuidad fuerte son:

$$\mathbf{K}_{dd}^{(e)} \Big|_{\substack{\text{nodo}_i \\ \text{nodo}_j}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \Big|_{\text{nodo}_i} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G} \, d\Omega \quad (3.8) \\ &= - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot \frac{[\mathbf{n}]}{k} \, d\Omega \\ &= - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega + l^{(e)} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\mathbf{n}] \\ &\approx - \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} \Big|_{\text{nodo}_j} &= \int_{\Omega} \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (3.9) \\ &= - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega + \int_{\mathcal{S}} \frac{[\mathbf{n}]}{k} \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega \\ &= - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega + l^{(e)} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \\ &\approx - \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} &= \int_{\Omega} \mathbf{G}^* \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G} \, d\Omega \quad (3.10) \\ &= \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega - \int_{\mathcal{S}} \frac{[\mathbf{n}]}{k} \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}} \frac{[\mathbf{n}]}{k} \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot \frac{[\mathbf{n}]}{k} \, d\Omega - \int_{\mathcal{S}} \frac{l^{(e)} [\mathbf{n}]}{\Omega^{(e)}} \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot \frac{[\mathbf{n}]}{k} \, d\Omega \\ &= \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega - l^{(e)} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \\ &\quad + \frac{l^e}{k} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\mathbf{n}] - \frac{l^{(e)^2}}{\Omega^{(e)}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\mathbf{n}] \\ &\approx \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg} \cdot [\nabla \varphi] \, d\Omega + \frac{l^e}{k} [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}_S^{alg} \cdot [\mathbf{n}] \end{aligned}$$

donde las integrales sobre todo el dominio del elemento $\Omega^{(e)}$ se han dividido en dos partes: una sobre la banda de discontinuidad \mathcal{S} en aquellos términos en los que la función de colocación $\mu_{\mathcal{S}} = 1$, y otra sobre el resto del elemento cuando $\mu_{\mathcal{S}} = 0$.

Observación 3.2.1. Las Ecuaciones (3.7-3.10) vuelven a mostrar el carácter no simétrico de la formulación adoptada. El único caso en el que se obtiene una formulación simétrica es aquel en el que se cumple la siguiente condición (ver Figura 2.13):

$$[\nabla\varphi] = \frac{l^{(e)}}{\Omega^{(e)}} [\mathbf{n}] \quad (3.11)$$

La aparición de autovalores negativos en la matriz elemental, cuyas submatrices han sido definidas en (3.7-3.10) provocan que, debido al proceso de ensamblaje, la *matriz estructural global vea degradado su número de condición*. Tal como ha sido considerado por Oliver *et al.* en [59], dos son las fuentes de la aparición de autovalores negativos:

1. La *no simetría de la matriz tangente elemental $\mathbf{K}^{(e)}$* , que debido al proceso de ensamblaje se traduce en la *no simetría de la matriz estructural global*. La aparición de estos autovalores nulos o negativos se debe a la existencia de los términos $[\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot [\nabla\varphi]$ en la Ecuación (3.10). Este término contribuirá a la aparición de autovalores negativos o nulos si el ángulo que forman los vectores $[\mathbf{n}]$ y $[\nabla\varphi]$ es suficientemente grande tal como indica la Figura 3.1.

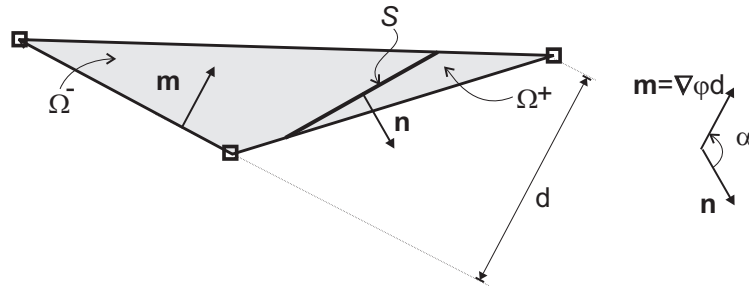


Figura 3.1: Contribución negativa del término $[\mathbf{n}] \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot [\nabla\varphi]$.

2. La utilización de un *modelo del continuo equipado con ablandamiento*. Si se analiza la expresión dada en (2.13) para la matriz algorítmica elemental, se observa que la utilización de módulos de ablandamiento negativos hace que los operadores $\mathbf{C}_{\mathcal{S}}^{alg}$ y $\mathbf{C}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{alg}$ presenten autovalores negativos. Estos tensores, mediante las expresiones (3.7-3.10), pueden provocar la existencia de autovalores negativos en la matriz tangente elemental y degradar así el número de condición de la matriz estructural global.

Estas dos fuentes de autovalores negativos, y por lo tanto origen de la inestabilidad numérica, pueden ser superadas desarrollando una metodología numérica que

utilice una formulación simétrica por un lado y que garantice la definición positiva de los operadores algorítmicos \mathbf{C}_S^{alg} y $\mathbf{C}_{\Omega \setminus S}^{alg}$ por otro. Esta metodología ha sido presentada en [59] y tiene tres ingredientes principales:

1. Una formulación simétrica cinemáticamente consistente basada en el elemento finito desarrollado por Lofti & Shing [42].
2. Un algoritmo de integración llamado IMPL-EX entre cuyas características principales está la de garantizar la definición positiva de los operadores algorítmicos constitutivos.
3. Unos esquemas de control que limitan el error que se comete al haber prescindido del esquema de integración puramente implícito.

En el apartado §3.3 se desarrolla la formulación simétrica cinemáticamente consistente, mientras que los apartados §3.4 y §3.5 se muestran, respectivamente, el nuevo algoritmo de integración IMPL-EX y los esquemas de control de error necesarios. Por último, en el apartado §3.6 se introduce un nuevo método de continuación desarrollado específicamente para esta metodología, necesario para poder describir correctamente la curva de equilibrio en el caso de existencia de un "snap-back".

3.3. Formulación simétrica cinemáticamente consistente

El uso de la formulación simétrica cinemáticamente consistente aporta robustez a la formulación porque anula una de las fuentes de mal condicionamiento de la matriz estructural global. Sin embargo, esta formulación presenta el problema que, si bien es capaz de reproducir la cinemática del sólido rígido dentro del elemento cuando el elemento se ha agotado, no es capaz de garantizar la continuidad de tracciones a nivel elemental [37] [61].

Esta desventaja frente a la formulación no simétrica, que sí garantiza la continuidad de tracciones y la cinemática de sólido rígido del elemento agotado, se traduce en la dificultad de la formulación para llegar al agotamiento total en un ensayo numérico (debido a la existencia de tensiones residuales no agotadas dentro del elemento finito). Como se verá más adelante, este problema se soluciona mediante el uso de mallas lo suficientemente refinadas.

3.3.1. Formulación variacional

Sea la forma fuerte del problema de valor de contorno de un sólido con una discontinuidad en su seno ya definido en las Ecuaciones (2.52)-(2.58) y sean las expresiones del campo de desplazamientos y de deformaciones descritas en (2.50) y (2.59) y que se vuelven a escribir ahora:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_S [\hat{\mathbf{u}}](\mathbf{x}, t) \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_S \nabla^s \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + \delta_S (\mathbf{n} \otimes \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)^s - (\nabla \varphi \otimes \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket)^s \quad (3.13)$$

habiéndose definido la función salto unitario elemental como

$$\mathcal{M}_S(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S - \varphi(\mathbf{x}). \quad (3.14)$$

Defínase entonces los espacios funcionales \mathcal{S}_η de las funciones solución

$$\mathcal{S}_\eta = \mathcal{S}_{\hat{\eta}} \oplus \mathcal{S}_{\tilde{\eta}} = \{\boldsymbol{\eta} \mid \boldsymbol{\eta} = \hat{\boldsymbol{\eta}} + \tilde{\boldsymbol{\eta}}\} \quad (3.15)$$

siendo $\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{S}_{\hat{\eta}} \subset [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} \text{ con } \hat{\boldsymbol{\eta}}|_{\Gamma_u} = \dot{\mathbf{u}}^* \\ \tilde{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{S}_{\tilde{\eta}} = \{\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \mathcal{M}_S \boldsymbol{\alpha}\} \text{ siendo } \boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{S}_\alpha \subset [L_2(\mathcal{S})]^{n_{dim}} \end{cases}$

y los espacios funcionales \mathcal{V}_v de las funciones de peso

$$\mathcal{V}_v = \mathcal{V}_{\hat{v}} \oplus \mathcal{V}_{\tilde{v}} = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathcal{M}_S \tilde{\mathbf{v}}\} \quad (3.16)$$

siendo $\begin{cases} \hat{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{\hat{v}} \subset [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} \text{ con } \hat{\mathbf{v}}|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}_{\tilde{v}} \equiv \mathcal{S}_{\tilde{\eta}} \end{cases}$

Observación 3.3.1. Como se observa en las expresiones (3.15) y (3.16) se ha adoptado el mismo espacio de funciones para \mathcal{S} y \mathcal{V} (a excepción de la condición de contorno tipo Dirichlet). Se trata por lo tanto de una formulación simétrica tipo Bulbov-Galerkin (o Galerkin simplemente) [34].

Utilizando los espacios funcionales definidos en (3.15) y (3.16) y partiendo de la forma fuerte (2.52)-(2.58), se obtiene la siguiente forma variacional o débil:

CAJA 3.3.2. Forma débil del problema de valor de contorno.

$$\text{DADOS} \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}^* : \Gamma_\sigma \times [0, T] &\rightarrow \mathbf{R}^3, \quad \dot{\mathbf{u}}^* : \Gamma_u \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \rho \dot{\mathbf{b}} : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbf{R}^3 \end{aligned}$$

ENCONTRAR $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_\eta$ tal que $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_v$ se cumpla:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \hat{\mathbf{v}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega - \left[\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}} \cdot \rho \dot{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* \, d\Gamma \right] = 0 \quad (3.17)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s \tilde{\mathbf{v}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega - \left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \rho \dot{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{t}}^* \, d\Gamma \right] = 0 \quad (3.18)$$

Observación 3.3.3. El soporte de las funciones $\tilde{\mathbf{v}}$ es Ω_φ (ver Figura 2.8). Por lo tanto, la expresión (3.18) se puede definir más precisamente como:

$$\int_{\Omega_\varphi} \nabla^s \tilde{\mathbf{v}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega - \int_{\Omega_\varphi} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \rho \dot{\mathbf{b}} \, d\Omega \, d\Gamma = 0 \quad (3.19)$$

donde se considera que $\partial\Omega_\varphi \cap \Gamma_\sigma = \{\emptyset\}$.

Observación 3.3.4. La equivalencia entre la forma variacional (3.18) o (3.19) y la forma variacional (2.63) está demostrada en [84] y reproducida en [79].

3.3.2. Discretización simétrica

Para obtener la forma discretizada del problema definido en (3.17-3.18) defínase los siguientes espacios de funciones finito-dimensionales $\mathcal{S}_\eta^h \subset \mathcal{S}_\eta$ y $\mathcal{V}_v^h \subset \mathcal{V}_v$:

$$\mathcal{S}_\eta^h = \left\{ \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) \mid \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \sum_{e=1}^{n_{\text{elenr}}} \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)}(t) \right\} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{V}_v^h = \left\{ \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) \mid \mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{nodos}}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{c}_i + \sum_{e=1}^{n_{\text{elenr}}} \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \right\} \quad (3.21)$$

donde n_{elenr} es el número de elementos enriquecidos por donde pasa la superficie de discontinuidad (ver Figura 2.10a), $\dot{\mathbf{d}}$ son los grados de libertad asociados a los nodos, N_i son las funciones de interpolación estándar, $\mathcal{M}_S^{(e)}$ es la función salto unitario elemental definida en (2.65) que interpola los modos enriquecidos en aquellos elementos por los que pasa la discontinuidad y $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)}$ son estos modos enriquecidos que representan los saltos.

Una vez definidos los espacios finito-dimensionales \mathcal{S}_η^h y \mathcal{V}_v^h , la forma discretizada del problema de valor de contorno definido en (3.18-3.17) pasa a ser:²

$$\sum_{e=1}^{e=n_{\text{elem}}} \int_{\Omega} \nabla^s \hat{\mathbf{v}}^h : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega - \left[\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^h \rho \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \hat{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{t}^* d\Omega \right] = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{e=1}^{e=n_{\text{elenr}}} \int_{\Omega} \nabla^s \tilde{\mathbf{v}}^h : \dot{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

Para obtener la forma matricial del problema discretizado (3.22) y (3.23) se parte del campo aproximado de los desplazamientos definidos en (3.20) y de su campo de deformaciones derivado:

$$\dot{\mathbf{u}}^{h(e)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t) + \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)}(t) \quad (3.24)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{h(e)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n (\nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^s - (\nabla \varphi^{(e)} \otimes \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)})^s + \mu_S^{(e)} \frac{1}{h(t)} (\mathbf{n} \otimes \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)})^s \quad (3.25)$$

²En la Ecuación (3.23) se considera que:

$$\left[\int_{\Omega} \tilde{\mathbf{v}}^h \rho \dot{\mathbf{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \tilde{\mathbf{v}}^h \cdot \mathbf{t}^* d\Omega \right] = \int_{\Omega_\varphi} \tilde{\mathbf{v}}^h \rho \dot{\mathbf{b}} d\Omega \approx 0$$

Utilizando la notaci3n de Voigt, el campo de deformaciones (3.25) puede expresarse como:

$$\{\dot{\epsilon}\}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} + \underbrace{\left(\mu_S^{(e)} \frac{1}{h(t)} [\mathbf{n}]^{(e)} - [\nabla\varphi]^{(e)} \right)}_{\mathbf{G}^{(e)}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{G}^{(e)} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} \quad (3.26)$$

donde el significado de cada uno de los vectores y matrices ha sido explicado en el Apartado §2.9. A su vez, la expresi3n del gradiente simétrico de las funciones de peso tiene una estructura similar a (3.26)

$$\{\nabla^s \mathbf{v}\}^{(e)} = \{\nabla^s \hat{\mathbf{v}}\}^{(e)} + \{\nabla^s \tilde{\mathbf{v}}\}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{c}^{(e)} + \mathbf{G}^{(e)} \boldsymbol{\alpha}^{(e)} \quad (3.27)$$

Llevando (3.26) y (3.27) a la forma discretizada definida por (3.23-3.22) se obtienen las expresiones de las fuerzas residuales a nivel incremental:

$$\dot{\mathbf{R}}^{(e)} := \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} d\Omega - \dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} \quad (3.28)$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{(e)} := \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{(e)T} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} d\Omega \quad (3.29)$$

donde el vector $\dot{\mathbf{F}}_{ext}^{(e)} = [\dot{\mathbf{F}}_1^T, \dot{\mathbf{F}}_2^T, \dots, \dot{\mathbf{F}}_n^T]^T$ es el vector de fuerzas externas incrementales en los nodos del elemento.

En la notaci3n de Voigt, la relaci3n constitutiva tensi3n-deformaci3n se expresa como:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} = \mathbf{C}^{alg} \{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}^{(e)} \quad (3.30)$$

donde \mathbf{C}^{alg} es el operador constitutivo tangente cuya expresi3n algorítmica ha sido definida, para el modelo de daño is3tropo, en (2.13).

Llevando la expresi3n (3.30), donde se ha utilizado el campo de deformaciones descrito en (3.25), a las ecuaciones de las fuerzas residuales descritas en (3.28-3.29), y utilizando las matrices definidas en (2.73), (2.74), (2.82) y (2.83) se obtiene finalmente la siguiente expresi3n matricial:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \end{Bmatrix} := \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}^{(e)}} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{d}}^{(e)} \\ \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket^{(e)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{F}}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

donde en este caso las submatrices de la matriz elemental tangente definida en (3.31) son:

$$\mathbf{K}_{dd}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \quad (3.32)$$

$$\mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} d\Omega \quad (3.33)$$

$$\mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{B}^{(e)} d\Omega \quad (3.34)$$

$$\mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \mathbf{G}^{(e)} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \mathbf{G}^{(e)} \cdot d\Omega \quad (3.35)$$

Observación 3.3.5. Como se observa en las Ecuaciones (3.32) a (3.35), la formulación presentada es simétrica ya que (3.32) y (3.35) son simétricas y (3.33) y (3.34) son una la transpuesta de la otra.

Si se redefinen unas nuevas matrices $\bar{\mathbf{B}}$ tal que:

$$\bar{\mathbf{B}}^{(e)} = [\mathbf{B}_1^{(e)}, \mathbf{B}_2^{(e)}, \dots, \mathbf{B}_n^{(e)}, \mathbf{G}^{(e)}] \quad (3.36)$$

la matriz elemental $\mathbf{K}^{(e)}$ puede escribirse de forma más compacta como:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix} = \int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} d\Omega \quad (3.37)$$

De forma análoga, redefiniendo los siguientes vectores:

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{R}}}^{(e)} \\ \dot{\mathbf{r}}^{(e)} \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{\mathbf{F}}}_{ext}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{F}}}_{ext}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \dot{\hat{\mathbf{d}}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{d}}}_{ext}^{(e)} \\ [\dot{\mathbf{u}}]^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

se puede expresar las ecuaciones de las fuerzas residuales a nivel elemental de la siguiente forma compacta:

$$\dot{\hat{\mathbf{R}}}^{(e)} = \int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \dot{\hat{\mathbf{d}}}^{(e)} d\Omega - \dot{\hat{\mathbf{F}}}_{ext}^{(e)} \quad (3.39)$$

Finalmente, realizando el ensamblaje de las ecuaciones a nivel elemental (2.94) se obtiene:

$$\mathcal{A}_{e=1}^{n_{elem}} \left[\int_{\Omega^{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^{(e)T} \cdot \mathbf{C}^{alg} \cdot \bar{\mathbf{B}}^{(e)} \dot{\hat{\mathbf{d}}}^{(e)} d\Omega - \dot{\hat{\mathbf{F}}}_{ext}^{(e)} \right] = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

lo que lleva a poder definir una matriz de resistencia global \mathbf{K} que se define como:

$$\mathbf{K} = \mathcal{A}_{e=1}^{n_{elem}} [\mathbf{K}^{(e)}] \quad \text{siendo} \quad \mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^{(e)} & \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \\ \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} & \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Observación 3.3.6. Al igual que para la formulación no simétrica, también es posible realizar una condensación del problema formulado en (3.31) definiendo una nueva matriz elemental, anterior al proceso de ensamblaje, cuya forma es:

$$\hat{\hat{\mathbf{K}}}^{(e)} = \mathbf{K}_{dd}^{(e)} - \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)-1} \mathbf{K}_{[u]d}^{(e)} \quad (3.42)$$

y redefiniendo el vector de fuerzas residuales elementales como:

$$\hat{\hat{\mathbf{R}}}^{(e)} = \dot{\hat{\mathbf{R}}}^{(e)} - \mathbf{K}_{d[u]}^{(e)} \mathbf{K}_{[u][u]}^{(e)-1} \dot{\mathbf{r}} \quad (3.43)$$

3.4. Algoritmo de integración IMPL-EX.

3.4.1. Descripción

Si se analiza de nuevo el operador algorítmico de la Ecuación (2.13), consistente con el esquema de integración implícito, que se definió como:

$$\mathbb{C}^{alg} = \begin{cases} \frac{\chi(\xi)}{\xi} \mathbb{C}^e & \text{si descarga o carga elástica} \\ \frac{\chi(\xi)}{\xi} \mathbb{C}^e - \frac{\chi(\xi) - H\xi}{\xi^3} \bar{\sigma}^+ \otimes \bar{\sigma} & \text{si carga plástica} \end{cases} \quad (3.44)$$

se observa que

- Para el caso de descarga o carga elástica el operador algorítmico \mathbb{C}^{alg} se mantiene definido positivo.
- Para el caso de carga plástica \mathbb{C}^{alg} puede ser definido negativo si $H < 0$, es decir, si existe ablandamiento por deformación.

Precisamente, y de forma específica para los modelos constitutivos asociados, el fallo material por localización de deformaciones tiene lugar en presencia de ablandamiento por deformación. Ésto hace que los elementos finitos pertenecientes al dominio fisurado tengan operadores algorítmicos definidos negativos, lo que deteriora el número de condición de la matriz estructural global. Una solución a este problema, que se muestra a continuación, es el algoritmo de integración IMPL-EX ya presentado en [59].

El algoritmo de integración IMPL-EX consta de dos esquemas de integración que se realizan de forma simultánea. Estos dos esquemas de integración son [59]:

1. Un esquema *implícito* estándar (*Backward-Euler*), que proporciona los valores implícitos de las variables del modelo a partir de la variable independiente de las deformaciones. En la Caja 3.4.1 se describe este esquema de integración implícito para un paso $n+1$, particularizado para el modelo de daño descrito en las Ecuaciones (2.2-2.14).

CAJA 3.4.1. Integración implícita en el paso $n+1$:

• Variable independiente de entrada $\mapsto \epsilon_{n+1}(\Delta t_{n+1})$

• Condición de consistencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_{n+1} = \gamma_{n+1} \geq 0 \quad \text{con } \xi|_{t=0} = \xi_0 \\ f(\epsilon_{n+1}, \xi_{n+1}) = \bar{f}(\epsilon_{n+1}) - \xi_{n+1} \\ \gamma_{n+1} \geq 0, f(\epsilon_{n+1}, \xi_{n+1}) \leq 0, \gamma_{n+1} f(\epsilon_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0 \\ \gamma_{n+1} \dot{f}_{n+1}(\epsilon_{n+1}, \xi_{n+1}) = 0 \end{array} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$\xi_{n+1} = \text{máx}(\xi_\tau, \bar{f}(\epsilon_{n+1}))_{\tau \in [0, t_{n+1}]}$$

• Actualización variables internas:

$$\begin{aligned} \xi_{n+1}(\epsilon_{n+1}) &= \xi_n + \gamma_{n+1} = \xi_n + \Delta \xi_{n+1} \\ \chi_{n+1}(\epsilon_{n+1}) &= \chi_n + H \Delta \xi_{n+1} \end{aligned}$$

• Obtención de las tensiones:

$$\sigma_{n+1}(\epsilon_{n+1}) = \frac{\chi_{n+1}}{\xi_{n+1}} \mathbb{C}^e : \epsilon_{n+1} = \frac{\chi_{n+1}}{\xi_{n+1}} \bar{\sigma}_{n+1} \quad (3.45)$$

2. Un esquema *explícito*, en el cual las variables internas se obtienen a partir de una aproximación en serie explícita de Taylor. Se considerará, para el modelo de daño isotropo, la variable interna tipo deformación ξ . Utilizando el desarrollo en serie de Taylor en un entorno de t se tiene:

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_t \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.46)$$

y truncando en los términos de orden dos se obtienen las variables aproximadas, que se distinguirán de las obtenidas implícitamente por una sobretilde:

$$\xi(t + \Delta t) \approx \tilde{\xi}(t + \Delta t) = \xi(t) + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)_t \Delta t \quad (3.47)$$

Discretizando las variables de la Ecuación (3.47) tal como indica el Cuadro 3.1 se definen finalmente las variables extrapoladas como:

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \xi_n + \frac{\Delta \xi_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (3.48)$$

donde se ha considerado que:

$$\Delta\xi_n = \xi_n - \xi_{n-1}; \quad \Delta t_n = t_n - t_{n-1}; \quad \Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n \quad (3.49)$$

Cuadro 3.1: Variables discretizadas

Paso de tiempo	t_{n-1}	t_n	t_{n+1}
Variables implícitas	ξ_{n-1}	ξ_n	ξ_{n+1}
Variables explícitas	$\tilde{\xi}_{n-1}$	$\tilde{\xi}_n$	$\tilde{\xi}_{n+1}$

Observación 3.4.2. Como se observa en las Ecuaciones (3.48) y (3.49a), la variable $\tilde{\xi}_{n+1}$ se ha obtenido explícitamente a partir de la información contenida en las variables ξ_n y ξ_{n-1} , calculadas mediante el procedimiento puramente implícito.

La Figura 3.2 muestra en qué consiste esta extrapolación. Como se puede observar se comete un error al utilizar, en la obtención de las tensiones, las variables extrapoladas en lugar de las variables obtenidas implícitamente. Sin embargo, siendo este error dependiente del tiempo, al reducir el paso de tiempo se reduce también este error.

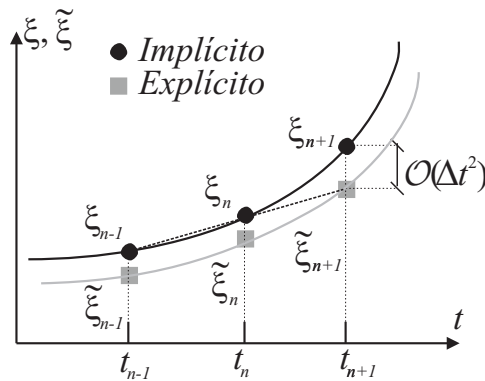


Figura 3.2: Extrapolación variable interna tipo deformación.

Observación 3.4.3. Se extrapola la variable interna tipo deformación ξ dado que es estrictamente creciente, lo que permite evitar las dificultades de extrapolar la variable interna tipo tensión χ (ver Figura 3.3).

A partir del valor extrapolado de la variable interna tipo deformación $\tilde{\xi}$, la variable interna tipo tensión, extrapolada para el paso de tiempo $n+1$, se

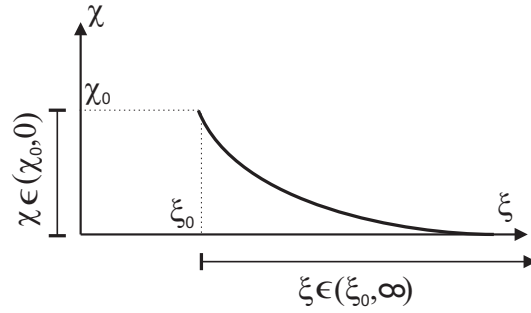


Figura 3.3: Rangos de variación de las variables internas tipo tensión y tipo deformación.

obtiene como:

$$\tilde{\chi}_{n+1} = \chi_n + H \underbrace{(\tilde{\xi}_{n+1} - \xi_n)}_{\Delta \tilde{\xi}_{n+1}} \quad (3.50)$$

Utilizando la extrapolación definida en (3.48) y (3.50), el proceso de integración explícito para un paso $n+1$, particularizado para el modelo de daño de las Ecuaciones (2.2-2.14), se describe en la Caja 3.4.4:

CAJA 3.4.4. Integración explícita en el paso $n+1$:

- Variable independiente de entrada $\mapsto \epsilon_{n+1}(\Delta t_{n+1})$

- Extrapolación variables internas:

$$\tilde{\xi}_{n+1}(\epsilon_{n+1}) = \xi_n + \frac{\Delta \xi_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1}$$

$$\tilde{\chi}_{n+1}(\epsilon_{n+1}) = \chi_n + H(\tilde{\xi}_{n+1} - \xi_n)$$

- Obtención de las tensiones:

$$\tilde{\sigma}_{n+1}(\epsilon_{n+1}) = \frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \mathbf{C}^e : \epsilon_{n+1} = \frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \bar{\sigma}_{n+1} \quad (3.51)$$

La Figura 3.4 muestra el algoritmo de integración IMPL-EX junto con el estándar implícito. Como se observa gráficamente, el algoritmo IMPL-EX necesita las variables internas obtenidas por el algoritmo puramente implícito. Aquí reside la idea fundamental de este método: *el valor de las tensiones en un paso de tiempo se obtiene a partir de la extrapolación explícita de las variables internas obtenidas implícitamente en fases de tiempo anteriores.*

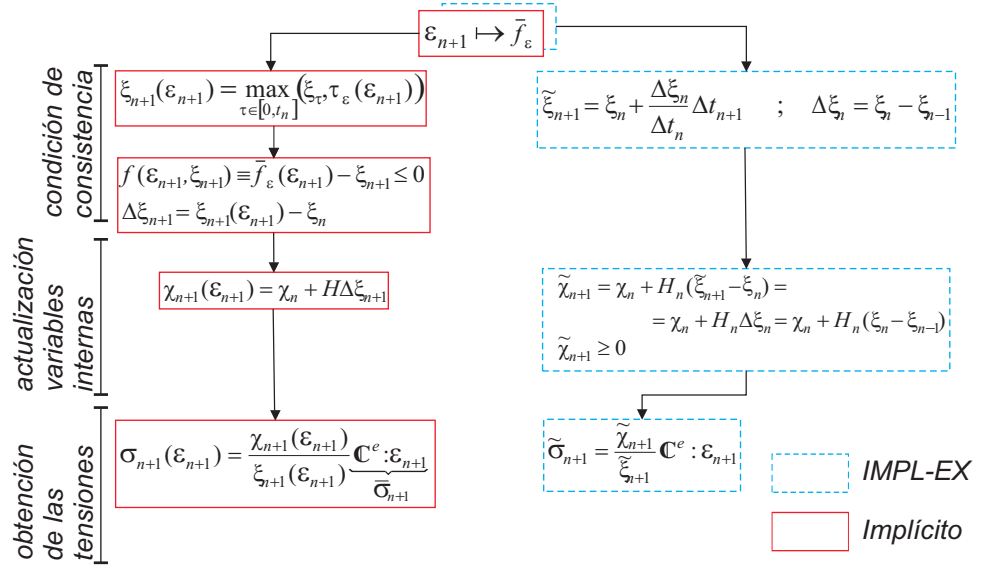


Figura 3.4: Esquemas de integración IMPL-EX y puramente implícito.

3.4.2. Propiedades.

Las tensiones explícitas $\tilde{\sigma}$ definidas en (3.51) son las que se usan para resolver el problema variacional definido en el Apartado §3.3, es decir, para calcular la matriz estructural global que se obtiene a partir de las matrices elementales definidas en (3.32) a (3.35). El operador constitutivo algorítmico, consistente con el método de integración IMPL-EX, necesario para definir las matrices (3.32-3.35) se obtiene, por definición, como:

$$\mathbb{C}_{n+1}^{alg} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}(\epsilon_{n+1})}{\partial \epsilon_{n+1}} \quad (3.52)$$

A partir de ahora, este operador algorítmico para el esquema de integración IMPL-EX, distinto del obtenido en el esquema puramente implícito, se llamará *operador algorítmico efectivo*, y se definirá como:

$$\mathbb{C}_{n+1}^{eff} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}(\epsilon_{n+1})}{\partial \epsilon_{n+1}} = \frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \mathbb{C}^e \quad (3.53)$$

puediéndose afirmar que \mathbb{C}_{n+1}^{eff} es semidefinido positivo, pues $\tilde{\xi}_{n+1}$ y \mathbb{C}^e son definidos positivos y $\tilde{\chi}_{n+1}$ es semidefinido positivo.

Observación 3.4.5. En la Ecuación (3.53) se ha tenido en cuenta que ni $\tilde{\xi}_{n+1}$ ni $\tilde{\chi}_{n+1}$ dependen de las deformaciones ϵ_{n+1} y que por lo tanto las tensiones $\tilde{\sigma}_{n+1}$ son lineales en ϵ_{n+1} . Esto hace que el operador algorítmico efectivo sea además constante durante todo el paso de tiempo $n+1$.

Este carácter constante y definido positivo del operador algorítmico efectivo tiene, dentro de la formulación de elementos finitos E-FEM, los siguientes efectos en el esquema iterativo de Newton-Raphson que minimiza las ecuaciones no lineales de las fuerzas residuales definidas en (3.40):

- La matriz de resistencia global algorítmica (efectiva) será siempre definida positiva. Esto permite superar las dificultades numéricas fruto del mal condicionamiento de dicha matriz.
- Como la matriz tangente estructural es constante por paso de tiempo y bien condicionada, el procedimiento de Newton-Raphson convergerá justo en una iteración por paso de tiempo.

Esta integración del modelo constitutivo en una única iteración puede ser entendida, para el paso de tiempo $n+1$, como compuesta por (ver Figura 3.5):

- Una fase de predicción (*iteración 0*)

Al inicio del paso de tiempo $n+1$ se predicen unas tensiones calculadas con las deformaciones del paso anterior n pero con las variables internas extrapoladas para el paso de tiempo $n+1$.

$$\tilde{\sigma}_{n+1}^0 = \frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \mathbb{C}^e : \epsilon_n \quad (3.54)$$

- Una fase de corrección lineal (*iteración 1*)

En el paso de tiempo $n+1$ se obtienen las tensiones como una corrección lineal de la predicción anterior utilizando el operador algorítmico efectivo.

$$\tilde{\sigma}_{n+1} = \underbrace{\frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \mathbb{C}^e : \epsilon_n}_{\text{predicción}} + \underbrace{\mathbb{C}_{n+1}^{eff} : \Delta \epsilon_n^{n+1}}_{\text{corrección lineal}} = \frac{\tilde{\chi}_{n+1}}{\tilde{\xi}_{n+1}} \mathbb{C}^e : \epsilon_{n+1} \quad (3.55)$$

Como se ha indicado, el algoritmo de integración IMPL-EX, aplicado en el contexto de una formulación simétrica de elementos finitos, garantiza que durante todo el análisis la matriz estructural global será definida positiva y constante para cada paso de tiempo. Como consecuencia surgen las dos principales propiedades que este esquema proporciona al análisis del fallo material:

1. Robustez, gracias a la definición positiva de la matriz estructural global.
2. Velocidad, gracias a que la matriz estructural global es constante para cada paso de tiempo. Esto permite alcanzar la convergencia, en dicho paso de tiempo, con sólo una iteración.

Frente a las ventajas de robustez y velocidad de cálculo aparece una desventaja: el esquema de integración IMPL-EX necesita de tamaños de paso mucho más pequeños que el esquema puramente implícito para conseguir la misma exactitud en el análisis, tal como se describe en el próximo apartado.

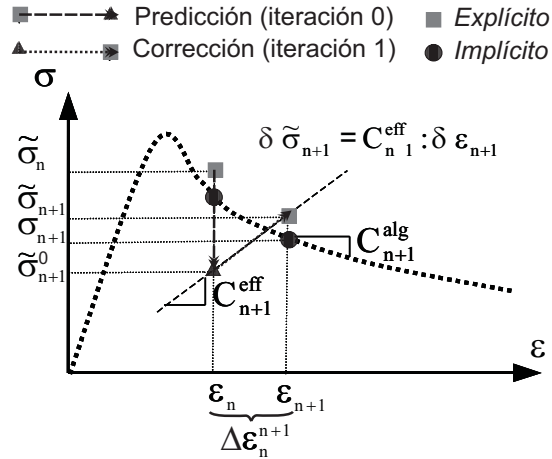


Figura 3.5: Fase predicción-corrección en el algoritmo IMPL-EX.

Finalmente, y como última propiedad del esquema de integración IMPL-EX, resaltar que el operador constitutivo tangente algorítmico, consistente con el esquema de integración implícito, se sigue calculando en cada paso de tiempo y que, por lo tanto, se pueden utilizar sus propiedades espectrales para determinar el instante del fallo material local y sus direcciones de propagación, tal como se indica en el Apartado §2.2.

3.4.3. Análisis del error.

La mejora en la robustez y en la velocidad del análisis numérico conseguida mediante el esquema de integración IMPL-EX tiene como contrapartida la existencia de un error respecto a los resultados obtenidos por el método puramente implícito.

A continuación se analiza el error cometido una vez finalizado el paso de tiempo $n+1$, cuando se han obtenido dos tensiones: unas implícitas³ σ_{n+1} y otras explícitas $\tilde{\sigma}_{n+1}$. En la formulación variacional, que lleva al problema no lineal de minimizar las fuerzas residuales de la Ecuación (3.31), se introducen las tensiones explícitas $\tilde{\sigma}_{n+1}$. Gracias a ello se obtiene una matriz estructural global definida positiva y constante para cada paso de tiempo que hace converger en una sola iteración. Esto hace que se cometa un error caracterizado por:

- Dentro del doble esquema de integración, sólo se considera la convergencia para el esquema de integración explícito. Esto hace que se converja en una única iteración y que se de por convergido un estado tensional implícito cuyas tensiones finales σ_{n+1} no minimizan las fuerzas residuales de la Ecuación (3.31)⁴.

³En realidad no tiene sentido calcular las tensiones implícitas dentro del algoritmo IMPL-EX, ya que únicamente son necesarias las variables internas del esquema implícito (que se utilizan para calcular las variables internas explícitas en pasos de tiempo posteriores).

⁴Es precisamente al no perseguir la convergencia del esquema de integración implícito como se consigue la robustez y la estabilidad del método de integración.

Como consecuencia se guardan los valores de unas variables internas implícitas, destinados a obtener las variables explícitas en pasos de tiempo posteriores, de un estado de tensiones implícito *que no anula las fuerzas residuales derivadas de la forma variacional*.

- Se da por convergido, en cada punto local de integración, un estado explícito *que está fuera de la superficie de fluencia* que se obtendría si se obligara a la convergencia del esquema de integración implícito. Así, al final del paso de integración $n+1$, donde se ha partido de un estado tensional inicial σ_n y cuya variable independiente de entrada es ϵ_{n+1} , se pueden definir tres superficies de fluencia (ver Figura 3.6 para un caso bidimensional):
 1. La superficie de fluencia definida por las tensiones obtenidas explícitamente $\tilde{\sigma}_{n+1}$.
 2. La superficie de fluencia definida por las tensiones obtenidas implícitamente σ_{n+1} con una sola iteración.
 3. La superficie de fluencia real⁵.

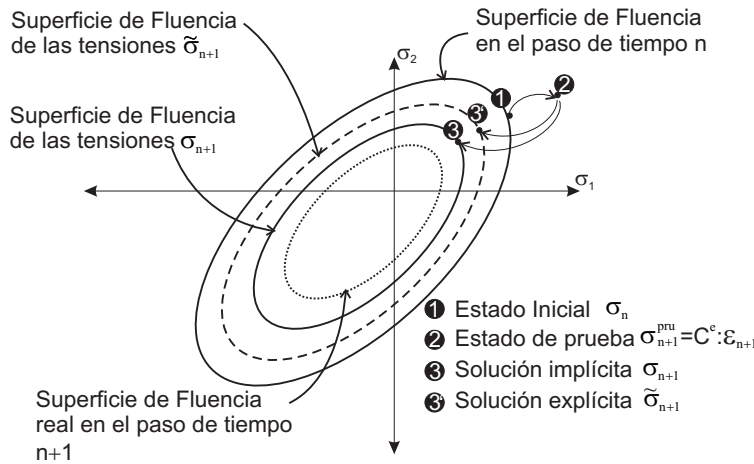


Figura 3.6: Error local en el esquema de integración IMPL-EX .

Este error cometido tiene, a su vez, dos características:

1. *Depende del tamaño de paso.*

Dado que su origen viene del truncamiento de la aproximación en serie de Taylor (ver Ecuación (3.47) el error cometido dependerá del tamaño de paso Δt , *e.g.* a mayor tamaño de paso mayor error.

⁵La superficie de fluencia real tampoco se alcanza con el método de integración puramente implícito ya que este esquema también comete errores.

2. No se amplifica conforme avanza el proceso de cálculo, como ocurre en los métodos puramente explícitos.

Esto es debido a que los valores extrapolados se han calculado a partir de los valores obtenidos implícitamente, con lo que las propiedades de estabilidad del algoritmo de integración implícito han sido heredadas por el algoritmo de integración IMPL-EX .

Para analizar el error que comete el algoritmo IMPL-EX se utilizará como ensayo numérico el llamado DCB test (en inglés *Double Cantilever test*). Se trata de una pieza prismática de hormigón con una entalla en uno de sus costados donde como acción exterior se impone una apertura de la entalla (simétrica respecto de su eje de simetría horizontal). El esquema del ensayo junto con sus dimensiones y propiedades materiales se describen en la Figura 3.7.

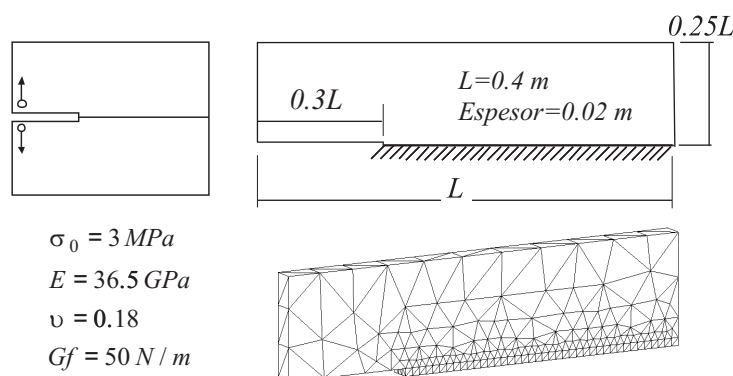


Figura 3.7: Descripción geométrica, propiedades del material y discretización del ensayo DCB.

Primero se analizará la influencia que tiene el tamaño de paso en el error cometido. Para el ensayo descrito en la Figura 3.7 se realiza el análisis del agotamiento total del espécimen primero con el esquema puramente implícito y luego con el esquema IMPL-EX con distintos tamaños paso de tiempo. El Cuadro 3.2 muestra los ensayos numéricos realizados: un ensayo con el esquema de integración implícito que servirá de referencia (IMP0) y tres ensayos con el esquema de integración IMPL-EX con tamaños de paso Δt (EXP1), $2\Delta t$ (EXP1) y $4\Delta t$ (EXP3).

La Figura 3.8 muestra las curvas fuerza-desplazamiento que se han obtenido para los distintos tamaños de paso. Como se puede observar, a mayor tamaño de paso mayor es el error cometido.

Si se determina el error como la relación de la energía disipada (área bajo la curva F- δ) por cada uno de los resultados con el algoritmo IMPL-EX, respecto a la energía disipada por el esquema implícito, y se compara con el tamaño de paso se obtiene el gráfico de la Figura 3.9. En este gráfico se observa cómo el error que se comete al incrementar el tamaño de paso aumenta linealmente.

Así mismo, si se mide el error como la diferencia que hay, para un desplazamiento δ determinado, entre la fuerza que proporciona las aproximaciones IMPL-EX fren-

Cuadro 3.2: Ensayos numéricos

Ensayo	Esquema	Tamaño de paso
IMP0	Implícito	–
EXP1	IMPL-EX	Δt
EXP2	IMPL-EX	$2\Delta t$
EXP3	IMPL-EX	$4\Delta t$

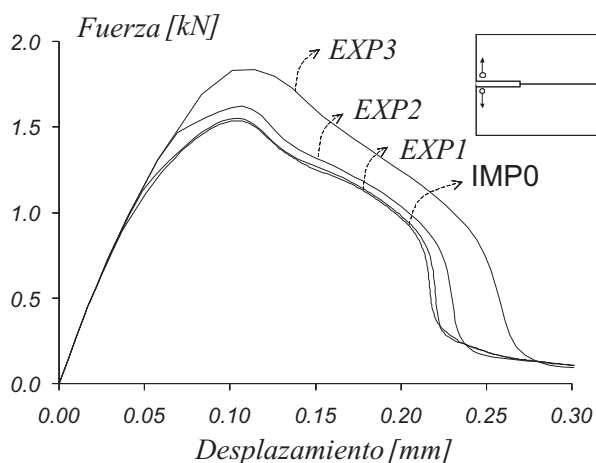


Figura 3.8: Ensayo DCB: curvas Fuerza-Desplazamiento.

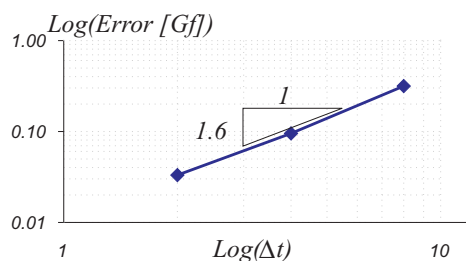


Figura 3.9: Ensayo DCB: error en la disipación.

te al valor dado por la aproximación implícita, se observa que *el error cometido no se amplifica arbitrariamente conforme avanza el análisis*, sino que se mantiene acotado para cada uno de los tamaños de paso elegidos. Gracias a que el error no se amplifica ocurre que las distintas curvas de la Figura 3.8 tienen la misma forma, independientemente del tamaño de paso impuesto.

Observación 3.4.6. *Es de crucial importancia que el error dependa sólo del tamaño de paso y que no se amplifique conforme avanza el análisis numérico. Estas características del error son las que permiten la usabilidad con garantías del esquema de integración IMPL-EX en el análisis de estructuras.*

3.5. Esquemas de control de error: tamaño de paso adaptable

En el apartado anterior se ha demostrado que al utilizar el esquema de integración IMPL-EX se produce un error numérico, por lo que es necesario acotarlo y controlarlo si se quiere obtener resultados comparables al esquema de integración puramente implícito.

Dado que este error no se amplifica al realizar el análisis y que depende del tamaño de paso, una manera de acotar el error sería reducir dicho tamaño de paso, como se ve en las Figuras 3.8 y 3.9. Sin embargo, esta estrategia para reducir el error puede no ser la más óptima, ya que utilizar un tamaño de paso muy pequeño para todo el análisis podría llegar a hacerlo demasiado costoso en tiempos de cálculo. Una forma alternativa para controlar el error sería *definir un tamaño de paso variable que dependiese de una variación máxima permitida a la evolución de las variables internas del modelo.*

Como se ha indicado en el Apartado 3.4, la base del esquema de integración IMPL-EX (y la fuente de su error numérico) reside en la extrapolación de la variable interna tipo deformación. Para obtener el tamaño de paso buscado se partirá entonces de la expresión de esta extrapolación, en el paso de tiempo $n+1$, para un punto de integración del problema discretizado (ver Caja 3.4.4):

$$\tilde{\xi}_{n+1} = \xi_n + \frac{\Delta\xi_n}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (3.56)$$

y se definirá $\Delta\tilde{\xi}_{n+1}$ como el incremento de la variable ξ en el paso de tiempo $n+1$, cuya expresión es:

$$\Delta\tilde{\xi}_{n+1} = \tilde{\xi}_{n+1} - \xi_n = \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (3.57)$$

Se busca imponer que este incremento de la variable interna $\Delta\tilde{\xi}_{n+1}$ sea, en el paso de tiempo $n+1$, menor que un porcentaje de su valor inicial ξ_0 (ver Ecuación (2.9)) que se llamará $\Delta\tilde{\xi}_{MAX}$. Esta condición se garantizará si el tamaño de paso Δt_{n+1} cumple:

$$\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \leq \Delta\tilde{\xi}_{MAX} \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{n+1} \leq \Delta t_n \frac{\Delta\tilde{\xi}_{MAX}}{\xi_n - \xi_{n-1}} \quad (3.58)$$

Si se analiza la Ecuación (3.58) se puede describir el algoritmo que permitirá obtener el tamaño de cada paso de tiempo, garantizando que la variación máxima de

la variable interna tipo deformación sea menor a un valor dado.⁶

CAJA 3.5.1. Obtención automática del tamaño de paso acotando la variación máxima de las variables internas:

Inicio del análisis.

- Determinación de $\Delta\tilde{\xi}_{MAX}$

$$\Delta\tilde{\xi}_{MAX} = \frac{p}{100}\xi_0 \quad \text{con } \xi_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$$

siendo p el parámetro de control del error.

Durante el paso de tiempo n , dentro del esquema iterativo de Newton-Raphson.

- Cálculo del máximo $\Delta\xi_n$

$$(\Delta\xi_n)_{MAX} = \text{máx}[(\Delta\xi_n)_i^e] \quad \begin{cases} \forall e \text{ (elementos del dominio)} \\ \forall i \text{ (puntos de integración)} \end{cases}$$

Al final del paso de tiempo n

- Obtención del tamaño de paso $n+1$:

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \frac{\Delta\tilde{\xi}_{MAX}}{(\Delta\xi_n)_{MAX}}$$

Este algoritmo de control del error permite ejercer un análisis más eficaz de la convergencia del esquema de integración IMPL-EX, al utilizar un número menor de pasos de tiempo para ajustar la curva de equilibrio, garantizando en cada paso de tiempo un error casi-constante. Para demostrar la eficacia de este esquema se ha utilizado el mismo ensayo numérico que en el Apartado §3.4.3, el ensayo DCB descrito en la Figura 3.7. Se han realizado cinco ensayos numéricos con el esquema IMPL-EX y un ensayo con el puramente implícito. De los cinco ensayos con el esquema IMPL-EX, en uno de ellos no se ha impuesto ninguna limitación a la variación máxima de la variable interna tipo deformación y en los otros cuatro se han ido imponiendo restricciones a esta variación cada vez más fuertes. El Cuadro 3.3 resume la totalidad de los ensayos realizados.

En la Figura 3.10 se muestran las diferentes curvas fuerza desplazamiento obtenidas para los ensayos enumerados en el Cuadro 3.3. Como se observa, conforme se impone un valor menor al parámetro de control del error (limitando cada vez más la variación permitida de la variable interna tipo deformación en cada paso de tiempo), el error cometido se reduce.

La Figura 3.11 muestra el error cometido por cada una de las aproximaciones realizadas. Este error mide la diferencia de energía disipada por cada una de los

⁶Se elige como valor máximo un porcentaje del valor inicial de la variable tipo deformación para poder utilizar como control un valor adimensional.

Cuadro 3.3: Ensayos numéricos

Ensayo	Esquema	Parámetro de control de error
IMP0	Implícito	—
EXP1	IMPL-EX	—
EXP2	IMPL-EX	20 %
EXP3	IMPL-EX	15 %
EXP4	IMPL-EX	10 %
EXP5	IMPL-EX	5 %

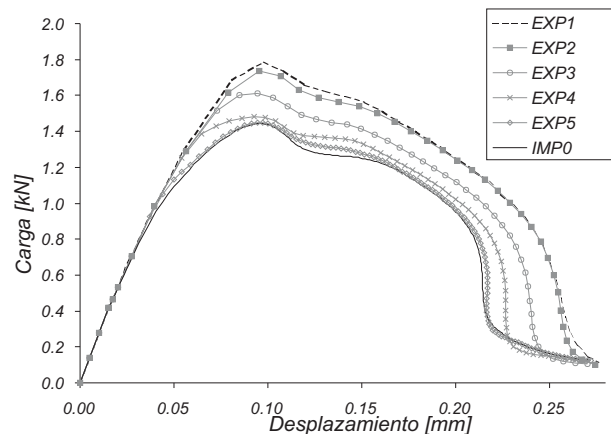


Figura 3.10: Ensayo DCB: curvas fuerza-desplazamiento.

ensayos numéricos *EXP1* a *EXP5* respecto al ensayo con el esquema implícito *IMP0*. Esta gráfica muestra que la velocidad de convergencia a la solución implícita no es lineal, dado que se consiguen grandes mejoras en la exactitud cuando se reduce un valor alto del parámetro de control del error, pero estas mejoras son pequeñas cuando el valor de dicho parámetro ya es un número pequeño. Esto significa que para alcanzar errores respecto a la solución implícita muy pequeños, del orden de una milésima, haría falta limitar mucho la variación máxima permitida de las variables internas, lo que lleva a unos tamaños de paso en el esquema IMPL-EX muy pequeños.

3.6. Método de continuación

Los métodos de continuación tienen como función permitir al algoritmo numérico superar los distintos puntos límites de la curva de equilibrio (ver Figura 3.12a). Los fundamentos de estos métodos pueden ser encontrados en [21]. Una descripción didáctica junto con la implementación numérica detallada se encuentra en [81].

Sin embargo, los métodos de continuación estándar fallan al ser aplicados al

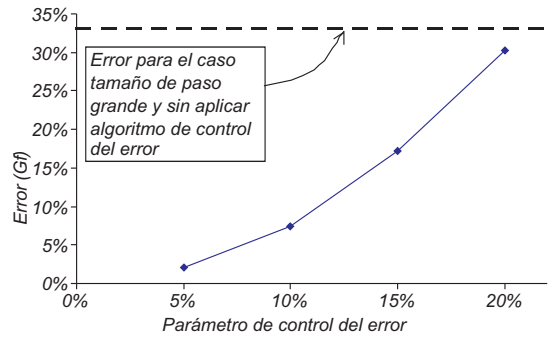


Figura 3.11: Ensayo DCB: error en la disipación.

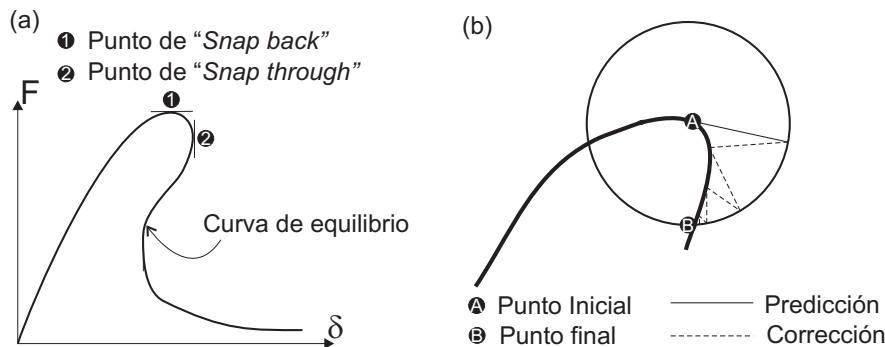


Figura 3.12: (a) Curva de equilibrio y puntos límite. (b) Esquema iterativo de los métodos de continuación.

esquema de integración IMPL-EX. Esto se debe que los métodos de continuación estándares basan su lógica en imponer restricciones al tamaño de paso, generalmente no lineal con los desplazamientos. La solución del problema ampliado requiere de un esquema iterativo de Newton-Raphson, como se esquematiza en la Figura 3.12b, y esta lógica no es aplicable al esquema IMPL-EX dado que se pretende conservar la linealidad con los desplazamientos (se converge en una iteración). Por ello ha sido necesario rediseñar un nuevo método de continuación exclusivo, que se adapte al esquema de integración IMPL-EX.

Observación 3.6.1. Este nuevo método de continuación está diseñado para poder pasar los puntos límite de la curva de equilibrio que el control de fuerzas o el control de desplazamientos no pueden superar. Sin embargo, tanto el control de fuerzas como el control de desplazamientos pueden ser utilizados con las mismas limitaciones que presentan en el esquema puramente implícito.

Para poder describir el nuevo método de continuación a continuación se resume brevemente en qué consisten los métodos estándares. Se partirá de las Ecuaciones

(3.17)-(3.18), que se considerarán como la expresión no lineal, previa a la discretización, de la tasa de las fuerzas residuales a minimizar. Si se trabaja con los valores ya integrados en el tiempo, se puede expresar las fuerzas residuales totales como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}_{ext}(\lambda) - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

donde se ha considerado que las fuerzas internas dependen de los desplazamientos \mathbf{u} y que las fuerzas externas dependen del parámetro λ mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{F}_{ext} = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (3.60)$$

siendo \mathbf{F}_0 un vector constante en el tiempo que contiene la información sobre el “aspecto” de las fuerzas externas y que se llamará carga de referencia. Utilizando la Ecuación (3.59), y dentro del esquema iterativo de Newton-Raphson, la siguiente caja muestra los ingredientes de los métodos de continuación estándares:

CAJA 3.6.2. Ingredientes métodos de continuación:

- Linealización de la ecuación de las fuerzas residuales^a.

$$\mathbf{R}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \lambda + \delta\lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \delta\mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \delta\lambda = 0 \quad (3.61)$$

siendo $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}$ y $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} = -\mathbf{F}_0$

- Descomposición de los desplazamientos iterativos $\delta\mathbf{u}$

$$\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{u}^a + \delta\mathbf{u}^b \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \delta\mathbf{u}^a = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{u}, \lambda) \\ \delta\mathbf{u}^b = \delta\lambda\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}_0 \end{cases} \quad (3.62)$$

con $\delta\mathbf{u}^a$ equilibrando las fuerzas residuales de la iteración precedente y $\delta\mathbf{u}^b$ equilibrando la variación de carga.

- Imposición de una restricción geométrica en el campo (\mathbf{u}, λ)

$$c(\mathbf{u}, \lambda) = 0 \quad (3.63)$$

^aLa expresión obtenida es equivalente a la forma incremental de la Ecuación (3.40).

Gracias a la restricción geométrica, el sistema formado por las Ecuaciones (3.61) y (3.63) forman un sistema de N+1 ecuaciones con N+1 incógnitas y puede resolverse. Es en la definición de la restricción geométrica dada por la Ecuación (3.63) donde difieren los distintos métodos de continuación, siendo los más comunes [21]-[81] el de *plano normal*, el de *plano normal actualizado* y el *esférico*⁷.

⁷También se puede considerar un método de continuación el control de desplazamiento, cuya

Sin embargo, para el esquema de integración IMPL-EX ha sido necesario utilizar otra restricción geométrica distinta a las estándares. Para describirla hay que recordar primero que, en el esquema de integración IMPL-EX, se cumple para un paso de tiempo $n+1$ lo siguiente (ver Figura 3.5):

1. En la iteración 0, se calculan unas *tensiones predictoras* a partir de las deformaciones del paso anterior n y de las variables internas extrapoladas en el paso actual $n+1$ (ver Ecuación (3.54)),

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^0 = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\epsilon}_n, \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{n+1}) \quad (3.64)$$

lo que provoca que la norma del residuo en la iteración 0 del paso de tiempo $n+1$ no sea nulo (al contrario de lo que pasa en los métodos puramente implícitos).

$$\|\mathbf{R}_{n+1}^0\| \neq 0 \quad (3.65)$$

2. En la iteración 1 se realiza una corrección lineal alcanzándose la convergencia, dado que se utiliza una matriz estructural global constante para el paso de tiempo (ver Ecuación (3.55)). Esto tiene como consecuencia que la lógica de los métodos de continuación basada en *predicción-correcciones* se ve reducida a una única *predicción-corrección*.

Partiendo de las anteriores dos premisas, considérese de nuevo la descomposición de los incrementos iterativos de los desplazamientos definidos en la Ecuación (3.62). Como sólo habrá una fase de corrección, se definirá el incremento de desplazamiento del paso de tiempo $n+1$ como:

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^0 = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^a|_0 + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^b|_0 \quad (3.66)$$

en el que cada componente se define como:⁸

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^a|_0 = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^0 \quad (3.67)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^b|_0 = \Delta \lambda_{n+1}^0 \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \mathbf{F}_0 = \Delta \lambda_{n+1}^0 \mathbf{u}_{n+1}^b \quad (3.68)$$

donde $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^a|_0$ equilibra las fuerzas residuales de la iteración 0, $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^b|_0$ equilibra la variación de carga que tiene lugar en el paso de tiempo $n+1$ y donde se ha definido un nuevo vector de desplazamientos conjugados de las fuerzas externas $\mathbf{u}_{n+1}^b = \mathbf{K}_{n+1}^{-1} \mathbf{F}_0$, que se denominará vector de desplazamientos *de referencia*.

En este momento, se puede definir la condición geométrica a imponer para el método de integración IMPL-EX como la siguiente:

En cada paso de tiempo, la proyección del vector campo de desplazamientos sobre el vector de desplazamientos de referencia será igual a una longitud dada.

condición geométrica sería $\Delta u_n = \text{constante}$ para todos los pasos de tiempo.

⁸Si se estuviera en el esquema puramente implícito, el residuo en la iteración cero sería nulo y se cumpliría que $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^a|_0 = \mathbf{0}$, siendo entonces $\Delta \mathbf{u}_{n+1}^0 = \Delta \mathbf{u}_{n+1}^b|_0$.

Esta condición geométrica se expresa matemáticamente como:

$$\Delta \mathbf{u}_{n+1}^0 \cdot \mathbf{n} = \Delta l \quad \text{siendo} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}^b|_{n+1}}{\|\mathbf{u}^b|_{n+1}\|} \quad (3.69)$$

que se puede desarrollar utilizando las Ecuaciones (3.66), (3.67) y (3.68), y obtener finalmente el valor del incremento de carga a imponer en el paso de tiempo $n+1$:

$$\Delta \lambda_{n+1}^0 = \text{signo}_{n+1} \frac{\Delta l \|\mathbf{u}^b|_{n+1}\| - \Delta \mathbf{u}^a|_{n+1}^0 \cdot \mathbf{u}^b|_{n+1}}{\mathbf{u}^b|_{n+1} \cdot \mathbf{u}^b|_{n+1}} \quad (3.70)$$

El signo de la Ecuación (3.70) viene dado por el clásico método de proyectar el vector de desplazamientos de referencia en el paso de tiempo actual, con los desplazamientos incrementales del paso de tiempo previo. Matemáticamente, el signo de la Ecuación (3.70) viene dado por:

$$\text{signo}_{n+1} = \frac{\mathbf{u}^b|_{n+1} \cdot \Delta \mathbf{u}_n}{\|\mathbf{u}^b|_{n+1} \cdot \Delta \mathbf{u}_n\|} \quad (3.71)$$

donde $\Delta \mathbf{u}_n$ son los desplazamientos incrementales del paso de tiempo n .

3.6.1. Ejemplo de aplicación

El siguiente ejemplo muestra las potencialidades de este método de continuación para capturar, dentro del esquema de integración IMPL-EX, los puntos límites de la curva de equilibrio.

Se trata de un ensayo a tracción simple de una pieza prismática cuya geometría y materiales se describen en la Figura 3.13. En este ensayo se ha elegido una energía de fractura particularmente baja para poder mostrar la capacidad del método para capturar puntos límite.

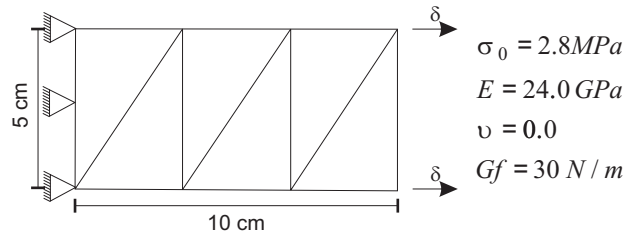


Figura 3.13: Esquema y materiales del ensayo de tracción simple.

Los resultados de la Figura 3.14 reproducen las curvas Fuerza-Desplazamiento del ensayo realizado con el esquema implícito (línea continua) y del ensayo realizado con el esquema IMPL-EX (línea a trozos). Como se observa, los resultados muestran como el nuevo método de continuación es capaz de superar el punto crítico situado en la carga pico del ensayo, si bien presenta ligeras oscilaciones alrededor de la curva implícita.

Por último, la Figura 3.15 muestra la curva desplazamiento para el mismo ensayo pero con una energía de fractura extremadamente baja de $Gf = 10 \text{ N/m}$. Este

ensayo no ha sido posible hacerlo con el esquema de integración puramente implícito (el análisis falló al llegar el punto límite), mientras que con el esquema IMPL-EX se obtuvo el resultado mostrado. Una medida de la buena calidad del resultado explícito es que la medición de la energía liberada por el material, es decir, del área bajo la curva Fuerza-Desplazamiento, coincide con la densidad de energía de fractura introducida en el modelo de $Gf = 10 \text{ N/m}$.

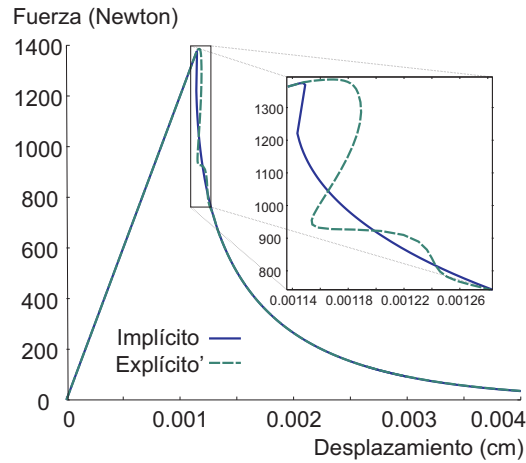


Figura 3.14: Curvas Fuerza-Desplazamiento del ensayo de tracción simple. Energía de fractura $Gf = 30 \text{ N/m}$.

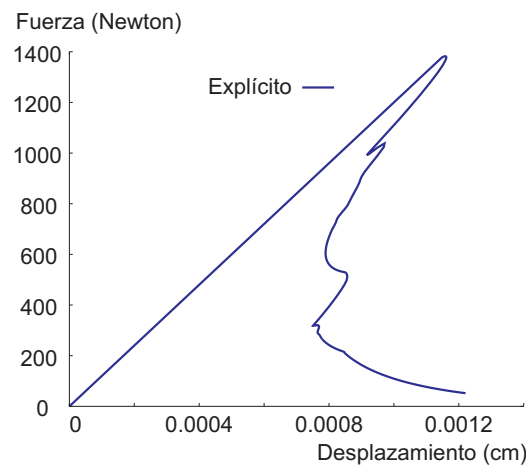


Figura 3.15: Curvas Fuerza-Desplazamiento del ensayo de tracción simple. Energía de fractura $Gf = 10 \text{ N/m}$.

3.7. Resumen del capítulo

En este capítulo se ha realizado un análisis de los problemas de estabilidad que presenta el análisis del fallo material por ablandamiento. Estos problemas de estabilidad se traducen en algoritmos numéricos poco robustos que pueden llegar a hacer inviable el análisis, en particular cuando se trata de analizar estructuras tridimensionales complejas.

Se ha determinado que el origen de la falta de robustez se debe al mal condicionamiento de la matriz estructural global del problema, que a su vez es debido a la existencia de autovalores negativos en las matrices tangentes elementales (mediante el proceso de ensamblaje). El uso de formulaciones variacionales no simétricas y de modelos del continuo equipados con ablandamiento impiden asegurar que ese mal condicionamiento no tendrá lugar.

Para superar estas fuentes de mal condicionamiento se ha propuesto una herramienta numérica que consta de los siguientes cuatro elementos:

1. *Una formulación variacional simétrica cinemáticamente consistente.*

Esta formulación asegura la simetría de la matriz estructural global, aunque tiene como contrapartida que sólo garantiza la continuidad de tracciones de una forma débil o relajada. Para minimizar esta fuente de error hay que utilizar mallas de elementos finitos lo suficientemente refinadas.

2. *Un esquema de integración que garantiza la definición positiva de las matrices tangentes elementales.*

Este esquema de integración, denominado IMPL-EX, está basado en un doble algoritmo implícito y explícito, de modo que las variables internas del algoritmo implícito se almacenan para obtener las extrapolaciones de las variables internas del algoritmo explícito. Son las tensiones resultantes del algoritmo explícito las introducidas en la forma variacional de equilibrio, lo que tiene como consecuencia que la matriz estructural global resultante es constante por paso de tiempo y definida positiva. Gracias a ello se consigue la convergencia en cada paso de tiempo en una única iteración. Sin embargo, este incremento de la robustez tiene un coste: el esquema de integración IMPL-EX comete un error de integración dependiente del tiempo al compararlo con el esquema puramente implícito.

3. *Un esquema de control del error.*

El error cometido por el esquema de integración IMPL-EX se caracteriza por: (a) depende sólo del tamaño del paso de tiempo y (b) no se amplifica conforme avanza el análisis numérico. Esta doble propiedad es lo que permite la usabilidad del esquema IMPL-EX en el análisis de estructuras, aunque con la necesidad de controlar el error. Un esquema eficiente para controlar el error consiste en aplicar un tamaño de paso variable que garantice que, en ningún punto de integración del dominio, las variables internas extrapoladas varíen más de un valor fijado.

4. *Un nuevo método de continuación.*

Como el esquema de integración IMPL-EX necesita una única iteración por paso de tiempo, los esquemas estándares de continuación basados en la lógica proyección-correcciones quedan inutilizados. Para poder superar los puntos límite de las curvas de equilibrio se ha propuesto un nuevo método de continuación cuya idea clave es limitar, a un valor dado, la proyección del vector incremento de desplazamientos en un paso de tiempo sobre el llamado vector de desplazamientos conjugado de las fuerzas externas.

Capítulo 4

EQUIVALENCIA CON LA APROXIMACIÓN DE DISCRETO

4.1. Introducción

Las aproximaciones de discreto son una de las opciones más utilizadas para reproducir el fenómeno de la fractura. Estas aproximaciones utilizan leyes cohesivas discretas tracción-salto para modelar los fenómenos inelásticos (que tienen lugar durante el proceso de fisuración). Es en la definición de estas leyes cohesivas en lo que se diferencian unas aproximaciones discretas de otras.

De forma general, las aproximaciones de discreto se caracterizan por:

- Los procesos inelásticos que tienen lugar durante el ablandamiento por deformación se concentran en una superficie material de espesor nulo (superficie de discontinuidad).
- Como consecuencia de estos procesos inelásticos se produce un fenómeno de decohesión separándose ambas caras de la superficie material.
- La resistencia que físicamente existe en el material frente a esa decohesión se modeliza mediante una ley discreta tracción-salto.
- Se disocia el comportamiento del conjunto del material (donde rige una ley continua tensión-deformación) del comportamiento en el interior de la fisura (donde se ha activado la ley discreta tracción-salto independiente del modelo del continuo).
- Se compatibilizan los comportamientos dentro y fuera de la fisura imponiendo la continuidad de tracciones tanto entre el conjunto del material y en el interior de la fisura, como entre las dos zonas del conjunto del material separadas por la fisura.

Una breve bibliografía de la aproximación de discreto podría estar compuesta por el trabajo original de Needleman [48]; la caracterización de leyes cohesivas irreversibles discretas hecha por Ortiz *et al.* [65], basado en el trabajo de Camacho y Ortiz [12], que presenta una implementación de los llamados elementos finitos cohesivos (situados en las intercaras de los elementos finitos estándares); el estudio general realizado por Planas *et al.* en [68] y el análisis de los problemas que estos modelos presentan respecto a la continuidad en el tiempo hecha por Papoulia *et al.* en [67].

El objetivo de este trabajo no son los modelos cohesivos discretos sino los modelos del continuo. Sin embargo, en el Apartado §2.7 se demostró que, como consecuencia de la regularización del ablandamiento y una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte, el modelo constitutivo del continuo se proyecta, en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , en un modelo discreto tracción-salto (ver también [52, 33]) de la siguiente forma:

$$\mathbf{t}_S = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_S (\boldsymbol{\epsilon}_S (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket), \xi_S) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_S (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \xi_S) \quad (4.1)$$

Este modelo discreto proyectado en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} no se implementa, sino que emerge a partir del modelo continuo de forma suave conforme se establece el régimen de discontinuidad fuerte. Sin embargo sería posible obtener las leyes cohesivas discretas, derivadas de los correspondientes modelos continuos, e implementar estas leyes tracción-salto dentro de un código de elementos finitos. Conceptualmente, los resultados obtenidos por los modelos del continuo y del discreto deberían coincidir, garantizándose además, por construcción, la continuidad de las tensiones en el tiempo.

En este apartado se hará una descripción general de las leyes cohesivas tracción salto en §4.2, para luego obtener la ley cohesiva discreta degenerada del modelo del continuo de daño isótropo en §4.3. En el Apartado §4.4 se describe la implementación numérica. Finalmente, en §4.5 se demuestra la equivalencia entre las aproximaciones continuas y discretas.

4.2. Ley cohesiva tracción-salto general

Para describir las leyes cohesivas tracción-salto se seguirán los trabajos presentados por Ortiz *et al.* en [65], por Gasser *et al.* en [29], por Huespe *et al.* en [33] y por Oliver *et al.* en [57]. Estos autores, siguiendo a su vez el método de Coleman y Noll [43], asumen que la ley cohesiva deriva de una función potencial de la siguiente manera:

$$\mathbf{t}_s = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \quad (4.2)$$

siendo $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ el salto en los desplazamientos que tiene lugar en la superficie de fisura \mathcal{S} y $\bar{\psi}$ una función potencial, que representa la densidad de energía libre por unidad de área sobre \mathcal{S} y que se hará depender de un conjunto de variables internas \mathbf{q} y del propio salto en los desplazamientos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ en \mathcal{S}^1 :

¹En las referencias [65] y [29] se parten de casos más generales donde $\bar{\psi}$, la densidad de energía libre superficial sobre \mathcal{S} , puede depender además de la temperatura θ , de la deformación de la

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{q}) \quad (4.3)$$

Además, esta densidad de energía libre debe cumplir la condición de indiferencia frente al marco material (en inglés *material frame indifference*), que establece que la expresión de la energía libre cohesiva no dependerá de la traslación o rotación del sistema de referencia², y que matemáticamente se establece como:

$$\bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{q}) = \bar{\psi}(\mathbf{R} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \mathbf{q}) \quad (4.4)$$

donde la matriz \mathbf{R} define un cambio de base ortogonal y donde se ha supuesto que el conjunto de variables internas \mathbf{q} es invariante frente a ese cambio de base.

Finalmente, descomponiendo el salto en los desplazamientos que tiene lugar en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} en dos partes, una parte normal a la superficie, $\llbracket u \rrbracket_n$, y otra parte tangencial a ella, $\llbracket u \rrbracket_s$, como se indica en la Figura 4.1, la expresión (4.3) pasa a ser:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\llbracket u \rrbracket_n, \llbracket u \rrbracket_s, \mathbf{q}) \quad (4.5)$$

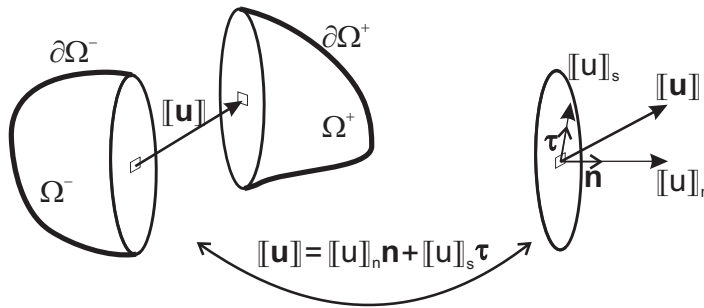


Figura 4.1: Descomposición del salto en los desplazamientos

Observación 4.2.1. Al englobar, en la Ecuación (4.5) y en la Figura 4.1, la componente del salto tangencial a la superficie \mathcal{S} en una única componente $\llbracket u \rrbracket_s$, se asume el comportamiento isótropo del modelo discreto en todas las direcciones tangenciales a \mathcal{S} . Si esta hipótesis no se cumpliera, habría que definir el salto en su forma más general, con lo que la energía libre pasaría a depender de:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(\llbracket u \rrbracket_n, \llbracket u \rrbracket_{s1}, \llbracket u \rrbracket_{s2}, \mathbf{q}) \quad (4.6)$$

donde $\llbracket u \rrbracket_n$, $\llbracket u \rrbracket_{s1}$, y $\llbracket u \rrbracket_{s2}$ son las componentes de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ en una base formada por la normal \mathbf{n} y dos vectores normales a \mathbf{n} y tangenciales a \mathcal{S} .

propia superficie material \mathcal{S} para un salto constante y de la normal \mathbf{n} a la superficie material \mathcal{S} , significando esta última dependencia que el material no es isótropo sino que tiene una dirección preferente que coincide con \mathbf{n} [29].

²Esta condición se establece obligando a que la ecuación sea invariante frente a un cambio de base ortogonal, que es aquel cuya matriz de cambio de base \mathbf{R} cumple que $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$

A partir de la expresión de la función potencial $\bar{\psi}$ dada en la Ecuación (4.5), la expresión de la ley discreta puede escribirse como:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket u \rrbracket_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket u \rrbracket_s} \boldsymbol{\tau} \quad (4.7)$$

siendo $\boldsymbol{\tau}$ el vector tangente a la superficie que tiene la misma dirección que la componente tangencial de los desplazamientos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_s$ (ver Figura 4.1).

Buscando una mayor simplicidad en la formulación, se definirá un desplazamiento de apertura efectivo:

$$w_{ef} = w_{ef}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \quad (4.8)$$

donde este valor se obtiene de diferentes formas según sea la formulación utilizada, tal como indican los siguientes ejemplos (donde la expresión $\text{máx}[a]$ significa *máximo histórico* de la variable a):

- Para Camacho y Ortiz en [12] $w_{ef} = \text{máx}[\sqrt{\llbracket u \rrbracket_n^2 + \beta^2 \llbracket u \rrbracket_s^2}]$, donde el parámetro β es el que determina la importancia relativa de los modos de la apertura de fisura (modo normal o modo de deslizamiento).
- Para Gasser *et al.* en [29] $w_{ef} = \text{máx}[\llbracket \mathbf{u} \rrbracket]$
- Para Huespe *et al.* en [33] $w_{ef} = \text{máx}[\sqrt{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}]$, donde \mathbf{Q}^e es el tensor acústico elástico. Esta formulación corresponde con el modelo de daño discreto obtenido a partir del modelo de daño continuo.

La definición de este valor permite redefinir la función potencial expresada en la Ecuación (4.5) de la siguiente forma:

$$\bar{\psi} = \bar{\psi}(w_{ef}, \mathbf{q}) \quad (4.9)$$

lo que implica que la expresión para la ley tracción-salto es:

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket u \rrbracket_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket u \rrbracket_s} \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial w_{ef}} \cdot \frac{\partial w_{ef}}{\partial \llbracket u \rrbracket_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial w_{ef}} \cdot \frac{\partial w_{ef}}{\partial \llbracket u \rrbracket_s} \boldsymbol{\tau} \quad (4.10)$$

Para poder completar el modelo es necesario definir una superficie de daño $f = f(w_{ef}, w)$, que se hará depender de la variable w_{ef} , máximo desplazamiento histórico de apertura efectivo y de w , el valor de apertura efectivo en un instante dado.

$$f(w_{ef}, w) = w - w_{ef} \quad (4.11)$$

Una vez definida la superficie de daño, es directo establecer las condiciones de carga-descarga y la condición de consistencia [83] de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f < 0 & \quad \text{y} \quad \dot{w}_{ef} = 0 & \Rightarrow \text{(des)carga elástica} \\ f = 0 & \quad \text{y} \quad \dot{w}_{ef} = 0 & \Rightarrow \text{carga neutra} \\ f = 0 & \quad \text{y} \quad \dot{w}_{ef} > 0 & \Rightarrow \text{carga plástica} \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde se ha asumido como variable interna de integración la variable w_{ef} , es decir, el vector de variables internas definido como \mathbf{q} pasa a ser $\mathbf{q} = \{w_{ef}\}$.

Observación 4.2.2. Las tres elecciones de la variable interna w_{ef} descritas tienen en común que asumen un comportamiento isótropo del modelo discreto en la superficie \mathcal{S} . El formato más general para determinar la variable interna tiene la forma

$$w_{ef} = \text{máx}[\sqrt{[u]_n^2 + \beta_1^2 [u]_{s1}^2 + \beta_2^2 [u]_{s2}^2}] \quad (4.13)$$

donde los escalares β_1 y β_2 describen el comportamiento diferenciado dentro de \mathcal{S} . Esta anisotropía se traduce en la forma de la superficie de fallo resultante definida en (4.11). La Figura 4.2 muestra las diferencias en dicha superficie de fallo cuando se considera comportamiento isótropo o anisótropo.

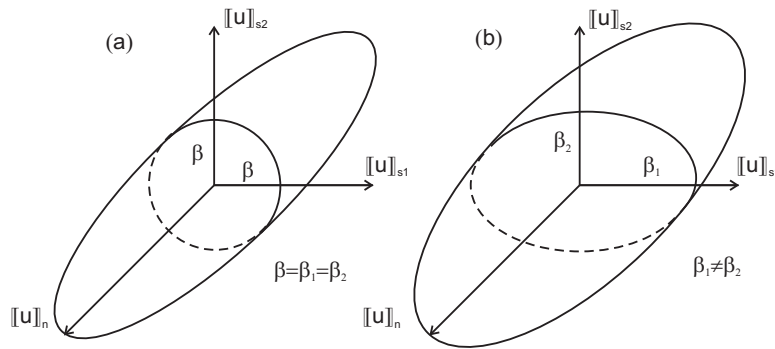


Figura 4.2: Superficies de fallo: (a) comportamiento isótropo en \mathcal{S} , (b) comportamiento anisótropo en \mathcal{S}

La elección de $\bar{\psi}$ y la elección de la superficie de daño f junto con la variable interna de integración w_{ef} definirán la ley discreta tracción-salto que regirá el ablandamiento en la fisura (basadas en la mecánica del daño). Estas leyes pueden dividirse, por un lado, en *leyes reversibles* e *irreversibles*, y por otro, en leyes con *rigidez inicial infinita* y con *rigidez inicial no infinita*.

Leyes reversibles son aquellas en las que la descarga tiene lugar siguiendo el mismo camino en el que produjo la carga, siendo las leyes irreversibles aquellas en las que la descarga sigue un camino distinto a la carga. Por otro lado, leyes con rigidez inicial infinita son aquellas que en el origen presentan una rama vertical con una discontinuidad en las pendientes mientras que las leyes con rigidez inicial no infinita han suavizado ese comportamiento en el origen. Ambos conceptos se explican gráficamente en la Figura 4.3.

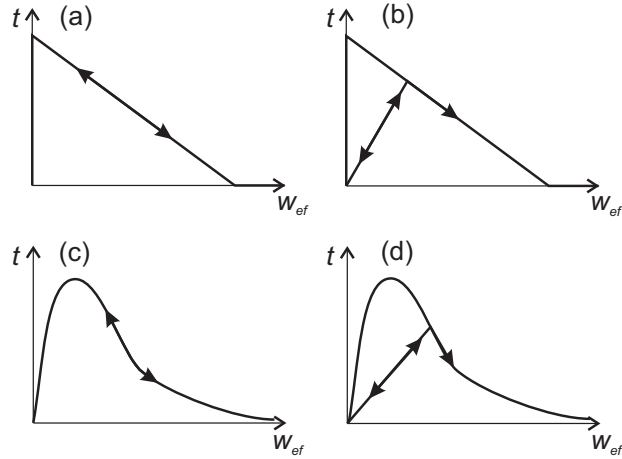


Figura 4.3: Leyes cohesivas: (a) reversible con rigidez inicial infinita; (b) irreversible con rigidez inicial infinita; (c) reversible con rigidez inicial no infinita; (d) irreversible con rigidez inicial no infinita. (Tomada de Ortiz *et al.* en [65])

4.3. Ley cohesiva tracción-salto proyectada del modelo de continuo de daño isótropo

4.3.1. Descripción

En el Apartado §2.7 se obtuvo la ley discreta derivada del modelo de continuo de daño isótropo. Esta ley discreta vino de la proyección del modelo de continuo en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} una vez alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte. Para obtenerla, además de la regularización de la cinemática y el ablandamiento del modelo continuo, hubo de redefinir una nueva variable interna discreta:

$$\bar{\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} h \xi_{\mathcal{S}} \quad (4.14)$$

que se obtuvo de la regularización de su homóloga del continuo $\xi_{\mathcal{S}}$ y que se mantiene acotada (ver Ecuación (2.45)).

Una forma de derivar el modelo discreto proyectado, alternativa a la presentada en §2.7, consiste en asumir, siguiendo el método de Coleman y Noll [43] del apartado anterior, que la ley cohesiva deriva de una función potencial de la siguiente manera (ver [52] para un desarrollo completo):

$$\mathbf{t}_s = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \quad (4.15)$$

siendo $\bar{\psi}$ una función potencial que representa la densidad de energía libre por unidad de área sobre \mathcal{S} y que se ha obtenido como:

$$\bar{\psi} = \lim_{h \rightarrow 0} h \psi \quad (4.16)$$

donde ψ es la energía libre de Helmholtz definida, para el modelo de daño, en la Ecuación (2.2).

Observación 4.3.1. *La Ecuación (4.16) representa la obtención de la energía libre por unidad de superficie $\bar{\psi}$ mediante la proyección del modelo del continuo en el modelo de discreto, cuando se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte ($h \rightarrow 0$). Este proceso, fruto de la regularización del modelo descrita en el Apartado §2.6, se describe con detalle en el trabajo presentado por Oliver et al. en [57].*

A partir de las Ecuaciones (4.15), (4.16), (2.2) y (4.14) se obtienen los ingredientes del modelo discreto proyectado del modelo de continuo, en este caso el de daño isótropo, que se describen a continuación:

1. Energía libre discreta:

$$\bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\chi(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.17)$$

donde la variable interna χ es la misma variable tipo-tensión definida para el modelo continuo en (2.10) y la variable interna $\bar{\alpha}$ es la definida en (4.14) la cual, en función del salto en la superficie de discontinuidad $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, vale:³

$$\bar{\alpha} = \text{máx} \sqrt{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}, \quad (4.18)$$

y donde aparece el tensor de segundo orden \mathbb{Q}^e llamado tensor acústico elástico:

$$\mathbb{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} = (\hat{\lambda} + \mu) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mu \mathbf{1} \quad (4.19)$$

siendo $\hat{\lambda}$ y μ los parámetros de Lamé.

Llevando la expresión (4.19) a (4.17) se obtiene la energía libre discreta en función de las componentes normal y tangencial de los saltos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket u \rrbracket_n \mathbf{n} + \llbracket u \rrbracket_s \boldsymbol{\tau}$,

$$\bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \frac{\chi(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \left[(\hat{\lambda} + 2\mu) \llbracket u \rrbracket_n^2 + \mu \llbracket u \rrbracket_s^2 \right] \quad (4.20)$$

2. Ley cohesiva discreta:

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial \psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \underbrace{\frac{\chi}{\bar{\alpha}}}_{1-\bar{d}} \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.21)$$

donde la variable $\bar{d} = 1 - \chi(\bar{\alpha})/\bar{\alpha}$, con ($\bar{d} \in (-\infty, 0]$), es la variable de daño discreto ($d = -\infty$ para el material no dañado y $d = 0$ cuando el daño es completo). La Ecuación (4.21) puede ser expresada en función de las componentes normal y tangencial del salto, obteniéndose:

$$\mathbf{t}_S = \frac{\chi(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}} \left[(\hat{\lambda} + 2\mu) \llbracket u \rrbracket_n \mathbf{n} + \mu \llbracket u \rrbracket_s \boldsymbol{\tau} \right] \quad (4.22)$$

³Se puede interpretar la variable $\bar{\alpha}$ como *máxima apertura efectiva de fisura durante el proceso histórico de carga*.

3. Dominio elástico en el espacio de los saltos (ver Figura 4.4b):

$$\mathbb{E}_{[\mathbf{u}]} = \{([\mathbf{u}], \bar{\alpha}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f_{[\mathbf{u}]}([\mathbf{u}], \bar{\alpha}) \leq 0\} \quad (4.23)$$

siendo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función del criterio de fallo que se expresa como:

$$f_{[\mathbf{u}]}(\mathbf{t}, \bar{\alpha}) = \tau_{[\mathbf{u}]} - \bar{\alpha} \quad (4.24)$$

$$\text{donde } \tau_{[\mathbf{u}]} = \underbrace{\sqrt{[\mathbf{u}] \cdot \mathbb{Q}^e \cdot [\mathbf{u}]}}_{\text{Norma de desplazamientos}} = \sqrt{(\hat{\lambda} + 2\mu)[u]_n^2 + \mu[u]_s^2}$$

Alternativamente se puede definir el dominio elástico en el espacio de las tensiones (ver Figura 4.4a):

$$\mathbb{E}_{\mathbf{t}} = \{(\mathbf{t}, \chi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, \chi) \leq 0\} \quad (4.25)$$

siendo $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función del criterio de fallo que se expresa como:

$$f_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, \chi) = \tau_{\mathbf{t}} - \chi \quad (4.26)$$

$$\text{donde } \tau_{\mathbf{t}} = \underbrace{\sqrt{\mathbf{t} \cdot (\mathbb{Q}^e)^{-1} \cdot \mathbf{t}}}_{\text{norma de tracciones}} = \sqrt{\frac{1}{(\hat{\lambda} + 2\mu)} t_n^2 + \frac{1}{\mu} t_s^2}$$

4. Reglas de flujo y ley de ablandamiento:

$$\dot{\bar{\alpha}} = \lambda \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{\alpha}(t)|_{t=t_d} = \bar{\alpha}_d = 0 \\ \bar{\alpha} \text{ no decreciente} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\dot{\chi} = -\bar{H}\dot{\bar{\alpha}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \chi(t)|_{t=t_d} = \chi_d = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} > 0 \\ \chi(t)|_{t=\infty} = \chi_\infty = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

donde \bar{H} es el módulo de ablandamiento discreto y donde t_d es el instante de inicio del régimen inelástico como se indicó en la Figura 2.7.

5. Condiciones de carga-descarga del modelo

En el espacio de los desplazamientos generalizados:

$$\lambda \geq 0; \quad f_{[\mathbf{u}]}([\mathbf{u}], \bar{\alpha}) \leq 0; \quad \lambda f_{[\mathbf{u}]} = 0 \quad (4.29)$$

En el espacio de las tracciones:

$$\lambda \geq 0; \quad f_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, \chi) \leq 0; \quad \lambda f_{\mathbf{t}} = 0 \quad (4.30)$$

6. Condición de consistencia:

En el espacio de los desplazamientos generalizados:

$$\lambda \dot{f}_{[\mathbf{u}]}([\mathbf{u}], \bar{\alpha}) = 0 \quad (4.31)$$

En el espacio de las tracciones:

$$\lambda \dot{f}_{\mathbf{t}}(\mathbf{t}, \chi) = 0 \quad (4.32)$$

7. Disipación interna del modelo:

$$\dot{\mathcal{D}} = \frac{1}{2} (\chi \dot{\bar{\alpha}} - \dot{\chi} \bar{\alpha}) \geq 0 \quad (4.33)$$

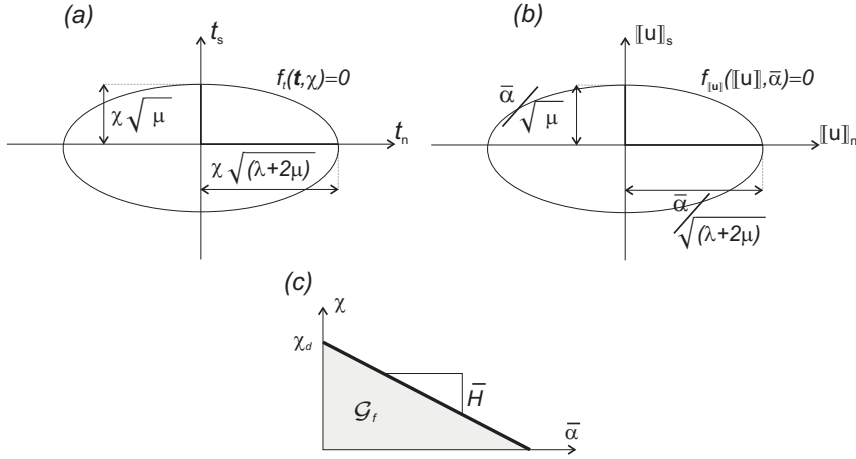


Figura 4.4: Modelo de daño cohesivo discreto. (a) Superficie de daño en el espacio de las tensiones. (b) Superficie de daño en el espacio de los saltos. (c) Ley de ablandamiento.

4.3.2. La disipación del modelo discreto. Definición del módulo de ablandamiento discreto.

Es necesario demostrar la objetividad del modelo discreto, es decir, garantizar que la energía interna disipada en la superficie de discontinuidad sea la correcta. Para ello, se busca relacionar la energía interna de disipación del modelo con la densidad superficial de energía de fractura del material, considerada un parámetro, de la siguiente forma:

$$W_S = \int_S \left(\int_{t_d}^{\infty} \dot{\mathcal{D}}_{int} dt \right) dS = \int_S \mathcal{G}_f dS \quad (4.34)$$

siendo W_S la energía total disipada en la superficie \mathcal{S} , $\dot{\mathcal{D}}_{int}$ la disipación interna del modelo y \mathcal{G}_f la densidad superficial de energía de fractura del material. Utilizando la ecuación de Clausius-Planck de la disipación interna en función de la energía libre (derivada del 2º Principio de la Termodinámica y para el caso de procesos isotermos [63]), se puede definir \mathcal{G}_f como:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &= \int_{t_d}^{\infty} \dot{\mathcal{D}}_{int} dt \\ &= \int_{t_d}^{\infty} \left(-\dot{\bar{\psi}}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) + \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \right) dt \\ &= \int_{t_d}^{\infty} \left(- \left(\frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket + \frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} \right) + \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \right) dt \end{aligned} \quad (4.35)$$

Llevando la expresión obtenida para las tracciones en (4.15) a la Ecuación (4.35)

se tiene que:

$$\mathcal{G}_f = \int_{t_d}^{\infty} \left(-\mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket - \frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} + \mathbf{t} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \right) dt = \int_{t_d}^{\infty} \left(-\frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} \right) dt \quad (4.36)$$

con lo que se obtiene:

$$\mathcal{G}_f = \int_{t_d}^{\infty} \dot{\mathcal{D}}_{int} dt = \int_{t_d}^{\infty} -Y \dot{\bar{\alpha}} dt \quad (4.37)$$

donde se ha definido:

$$Y = \frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \quad (4.38)$$

Finalmente, llevando la Ecuación (4.37) a la expresión de la energía total disipada dada por la Ecuación (4.34), se puede definir la disipación interna del modelo discreto como:

$$\dot{\mathcal{D}}_{int} = -Y \dot{\bar{\alpha}} = -\frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \chi(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} - \chi(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2} (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \dot{\bar{\alpha}} \quad (4.39)$$

donde, suponiendo que se trata de un proceso de carga monótono creciente y teniendo en cuenta (4.18), la variable interna tipo-deformación se define como:

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \quad (4.40)$$

con lo que la disipación del modelo de daño discreto es:

$$\dot{\mathcal{D}}_{int} = -\frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial \chi(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \dot{\bar{\alpha}} \bar{\alpha}}_{\dot{\chi}(\bar{\alpha})} - \chi(\bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} \right) = \frac{1}{2} (\chi(\bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} - \dot{\chi}(\bar{\alpha}) \bar{\alpha}) \quad (4.41)$$

La Ecuación (4.41) es equivalente a expresarla de la forma:

$$\dot{\mathcal{D}}_{int} = \frac{1}{2} (\chi \dot{\bar{\alpha}}) - \dot{\chi} \bar{\alpha} \quad (4.42)$$

donde el primer punto significa el diferencial de todo el paréntesis.

Llevando la expresión (4.42) a la Ecuación (4.37), al relacionar la disipación con la densidad de energía de fractura del material, se obtiene la condición que deben cumplir las variables internas:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_f &= \int_{t_d}^{\infty} \dot{\mathcal{D}}_{int} dt \\ &= \int_{t_d}^{\infty} \left(\frac{1}{2} (\chi \dot{\bar{\alpha}}) - \dot{\chi} \bar{\alpha} \right) dt \\ &= \underbrace{\left[\frac{1}{2} \chi \bar{\alpha} \right]_{t_d}^{\infty}}_{=0} - \int_{t_d}^{\infty} \dot{\chi} \bar{\alpha} dt \\ &= - \int_{t_d}^{\infty} \dot{\chi} \bar{\alpha} dt \end{aligned} \quad (4.43)$$

La imposición de la Ecuación (4.43), necesaria para asegurar la correcta disipación de energía en la superficie de discontinuidad, lleva a la definición unívoca del módulo de ablandamiento discreto \bar{H} . A partir de las Ecuaciones (4.28) y (4.27), que definen la variación de las variables internas tipo-deformación y tipo-tensión, integrando la expresión (4.43) se obtiene en los modelos de daño:

- para *ablandamiento lineal*, donde se cumple que $\dot{\chi} = -\bar{H}\dot{\alpha}$,

$$\bar{H} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{\mathcal{G}_f E} \tag{4.44}$$

- para *ablandamiento exponencial*, donde se cumple que $\dot{\chi} = -\bar{H}(\bar{\alpha})\dot{\alpha}$,

$$\bar{H}(\bar{\alpha}) = \frac{\sigma_u}{\mathcal{G}_f \sqrt{E}} \chi(\bar{\alpha}) \tag{4.45}$$

4.4. Implementación numérica

4.4.1. Problema de valor de contorno y cinemática.

La metodología de fisura discreta busca resolver el problema de valor de contorno de un sólido en cuyo seno se forma una superficie de discontinuidad tal como indica la Figura 4.5.

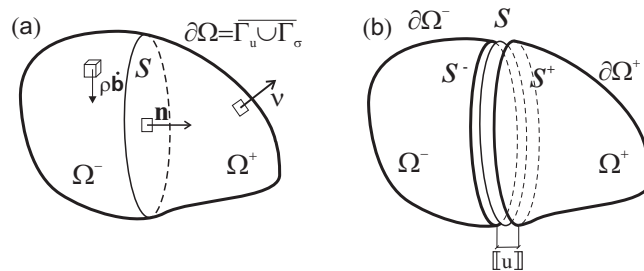


Figura 4.5: Problema de valor de contorno de un sólido con una discontinuidad embebida.

Se asumirá que los fenómenos disipativos tienen lugar únicamente en la superficie de discontinuidad y, por lo tanto, en la superficie S la disipación la regirá una ley cohesiva tracción salto mientras que en el resto del dominio el comportamiento se mantendrá elástico.

La forma fuerte correspondiente al problema de contorno así descrito es:

CAJA 4.4.1. Forma fuerte del problema de valor de contorno.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \quad (4.46)$$

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{continuidad interna de tracciones}) \quad (4.47)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^* & \text{en } \Gamma_{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{t}^* & \text{en } \Gamma_{\boldsymbol{\sigma}} \end{cases} \quad (\text{condiciones de contorno}) \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^+ \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^- \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{continuidad externa de tracciones}) \quad (4.49)$$

Utilizando la cinemática descrita en el Apartado §2.8, el desplazamiento se describe como la suma de una parte regular y una parte mejorada:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + (\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\mathbf{x}, t) \quad (4.50)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}$ es el campo continuo de desplazamientos, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ representa los saltos en el campo de desplazamientos que tiene lugar en \mathcal{S} , $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ es la función salto de Heaviside a través de \mathcal{S} [$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 0$ para $(\mathbf{x}) \in \Omega^-$, $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = 1$ para $(\mathbf{x}) \in \Omega^+$] y $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{r \in \Omega^+} N^r(\mathbf{x})$.

La expresión del campo de deformaciones compatible con (4.50) es:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - (\nabla \varphi \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s}_{\text{Parte Acotada}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}(\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s}_{\text{Parte no Acotada}} \quad (4.51)$$

cuya parte continua describe las deformaciones que tienen lugar en el dominio a ambos lados de la superficie de discontinuidad \mathcal{S} (ver Figura 4.5).

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - (\nabla \varphi \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s \quad (4.52)$$

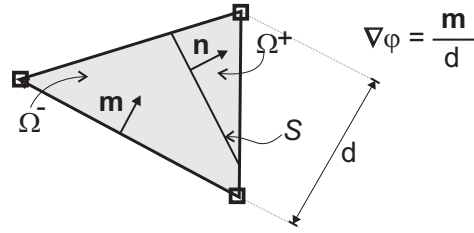
Observación 4.4.2. La definición del vector $\nabla \varphi$ es un ingrediente fundamental de esta aproximación. Se obtiene a partir de un algoritmo de trazado de fisuras, descrito en el Apéndice C, que permite diferenciar dentro de un elemento finito atravesado por una fisura aquellos nodos que pertenecen al dominio Ω^+ de los que pertenecen al dominio Ω^- . El significado geométrico de $\nabla \varphi$ se describe en la Figura 4.6.

4.4.2. Integración de la ley tracción-salto. Equilibrio interno de tracciones.

Dado que en el dominio a ambos lados de la discontinuidad el comportamiento se mantiene elástico, la relación constitutiva en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ es:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}^e : (\nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - (\nabla \varphi \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s) \quad (4.53)$$

donde se ha utilizado la expresión del campo de deformaciones en $\Omega \setminus \mathcal{S}$ definida en (4.52).

Figura 4.6: Definición del vector $\nabla\varphi$.

Para imponer de forma local la continuidad interna de tracciones existen dos posibilidades (ver Figura 4.6):

- Imponerla de forma fuerte, que es equivalente a imponer:

$$\mathbf{t}_S = \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} \cdot \mathbf{n} \quad (4.54)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S}$ representa la tensión media en el dominio no localizado. Esta formulación es no simétrica y equivalente a la formulación no simétrica del modelo del continuo.

- Imponerla de forma variacional, que es equivalente a imponer:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus S} \cdot \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} \quad (4.55)$$

En este caso se obtendrá una formulación simétrica, tanto a nivel local como global, pero con el coste de cometer un error en el equilibrio. Este error se minimiza, como en el caso de la metodología de continuo explicada en el Apartado §3.3, cuando se utilizan mallas de elementos finitos refinadas.

Observación 4.4.3. El equilibrio de tensiones impuesto en la Ecuación (4.55) de forma variacional responde a la expresión ya utilizada en la Ecuación (3.29) del Capítulo §3.3:

$$\int_{\Omega_\varphi} \nabla \mathcal{M}_S \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = \int_{\Omega_\varphi} \left(\frac{\mu_S}{h(t)} [\mathbf{n}] - [\nabla\varphi] \right) \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega = 0 \quad (4.56)$$

que para la formulación discreta pasa a ser:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\Omega_\varphi} \int_{\Omega_\varphi} [\nabla\varphi] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega \quad (4.57)$$

siendo Ω_φ el dominio donde se ha definido la función φ (ver Observación 2.8.1).

Teniendo en cuenta las dos formas de imponer la continuidad de tracciones descritas, para el análisis que viene a continuación se definirá un nuevo vector normal $\tilde{\mathbf{n}}$ que valdrá:

$$\tilde{\mathbf{n}} = \begin{cases} \mathbf{n} & \text{para la formulación no simétrica} \\ \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} & \text{para la formulación simétrica} \end{cases} \quad (4.58)$$

Utilizando la Ecuación (4.58) se impondrá la continuidad interna de tracciones. Para hacerlo se lleva la Ecuación (4.53) a la expresión dada en (4.47) con lo que se tiene:

$$\mathbf{t} = \sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \tilde{\mathbf{n}} = (\mathbb{C}^e : (\nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - (\nabla\varphi \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^s)) \cdot \tilde{\mathbf{n}} \quad (4.59)$$

El valor de la tracción en la Ecuación (4.47) o en la Ecuación (4.59) viene dada por la ley cohesiva derivada del modelo de continuo de daño isótropo, definida en la Ecuación (4.21) y que se expresa como:

$$\mathbf{t}_{\mathcal{S}} = \frac{\chi}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.60)$$

donde se ha tomado como variable interna tipo deformación (ver la Ecuación (4.18)):

$$\bar{\alpha} = \text{máx} \sqrt{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \quad (4.61)$$

y cuya variable interna tipo tensión se define como:

$$\chi = \chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}} \quad (4.62)$$

Observación 4.4.4. *La formulación de la ley de evolución de la variable interna tipo tensión definida en la Ecuación (4.62) garantiza que la disipación del modelo viene dada por el parámetro material densidad superficial de energía de fractura G_f .*

$$\int_0^\infty \chi(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} = \int_0^\infty \chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}} d\bar{\alpha} = -\chi_0 \frac{G_f}{\chi_0} \left[e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}} \right]_0^\infty = G_f \quad (4.63)$$

Llevando la Ecuación (4.62) a la (4.60) y ésta a la Ecuación (4.59) se obtiene:

$$\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla\varphi) \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (4.64)$$

que reorganizando lleva a la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla\varphi \right) \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} \quad (4.65)$$

donde $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ y por lo tanto la Ecuación (4.65) es una ecuación no lineal en $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$.

Para calcular los grados de libertad salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ hay que resolver un sistema no lineal de ecuaciones cuyo objetivo es encontrar las raíces de:

$$\mathcal{F}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla \varphi \right) \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.66)$$

Para simplificar la formulación se define la siguiente matriz:

$$\Theta = \left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla \varphi \right) \quad (4.67)$$

donde hay que tener en cuenta que $\Theta = \Theta(\bar{\alpha}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)) = \Theta(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$. Utilizando la expresión (4.67) se puede reescribir la Ecuación (4.65) de la siguiente forma más compacta:

$$\mathcal{F}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) = \Theta(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.68)$$

Observación 4.4.5. Las ecuaciones (4.68) y (4.67) muestran la ventaja que representa elegir una formulación simétrica. Si se toma como expresión de la normal $\tilde{\mathbf{n}}$ la dada por la Ecuación (4.58b) se obtiene que la Ecuación (4.67) puede ser escrita como:

$$\Theta = \left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}}}{\bar{\alpha}} \mathbb{Q}^e + \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla \varphi \right) \quad (4.69)$$

donde para este caso Θ es siempre una matriz definida positiva y simétrica. Este hecho garantiza que la Ecuación (4.68) está bien puesta y se puede resolver por Newton-Raphson.

El esquema para resolver la Ecuación (4.66) o su equivalente la Ecuación (4.68) se describe en la Caja 4.4.6:

CAJA 4.4.6. Solución local del la ecuación de continuidad interna de tracciones.

- Determinación de valores iniciales.

$$[[\mathbf{u}]]_0 = \mathbf{Q}^{e^{-1}} \cdot (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}})$$

$$(\text{Res}_{\mathcal{F}})_0 = \Theta([[\mathbf{u}]])_0 \cdot [[\mathbf{u}]])_0 - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}}$$

- Esquema iterativo de minimización de \mathcal{F}

Para la iteración $i + 1$

$$\Delta[[\mathbf{u}]]_{i+1} = -\frac{D\mathcal{F}}{D[[\mathbf{u}]]} \cdot (\text{Res}_{\mathcal{F}})_i \quad (4.70)$$

$$[[\mathbf{u}]]_{i+1} = [[\mathbf{u}]]_i + \Delta[[\mathbf{u}]]_{i+1}$$

$$(\text{Res}_{\mathcal{F}})_{i+1} = \Theta([[\mathbf{u}]])_{i+1} \cdot [[\mathbf{u}]])_{i+1} - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}}$$

- Obtención valor convergido $[[\mathbf{u}]]_{\text{conv}}$ que cumple:

$$\mathcal{F}([[\mathbf{u}]])_{\text{conv}} = \Theta([[\mathbf{u}]])_{\text{conv}} \cdot [[\mathbf{u}]])_{\text{conv}} - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} < \text{TOL}$$

siendo $0 < \text{TOL} \ll 1$ una tolerancia fijada.

La matriz tangente que aparece en la Ecuación (4.70), destinada a obtener el incremento iterativo del salto que corrige el residuo del sistema no lineal, es:

$$\frac{D\mathcal{F}}{D[[\mathbf{u}]]} = \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{\alpha}} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial [[\mathbf{u}]]} \otimes [[\mathbf{u}]] + \Theta \cdot \mathbf{1} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\mathcal{F}}{D[[\mathbf{u}]]} = & \left[-\frac{\chi_0}{\bar{\alpha}^3} e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}} \left(\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha} + 1 \right) \mathbf{Q}^e \cdot (\mathbf{Q}^e \cdot [[\mathbf{u}]]) \right] \otimes [[\mathbf{u}]] \\ & + \frac{\chi_0}{\bar{\alpha}} e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{C}^e \cdot \nabla \varphi \end{aligned} \quad (4.72)$$

4.4.3. Esquema general de integración.

Una de las consecuencias de trabajar con elementos triangulares de deformación constante, CST con sus siglas en inglés, es que la continuidad interna de tracciones se impone de forma fuerte en el único punto de integración del elemento. Esto quiere decir que, para los elementos CST, el esquema general de integración destinado a

imponer de forma fuerte la Ecuación (4.47) se ve reducido a:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\Omega(e)} \sum_{i=1}^{i=n_g} \tilde{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} W_g^i \implies \mathbf{t} = \tilde{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \quad (4.73)$$

donde n_g y W_g^i son el número de los puntos de integración y los pesos asociados a cada uno de ellos respectivamente.

Gracias a ello es posible obtener los grados de libertad correspondientes al salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ dentro del propio algoritmo que calcula las tensiones en $\Omega \setminus \mathcal{S}$. Esto simplifica enormemente el esquema general de integración del modelo tal como se describe a continuación.

Esquema implícito de integración

Dentro del esquema de integración puramente implícito, la imposición de la continuidad de tracciones, el cálculo de los grados de libertad salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ y la obtención de las tensiones $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ se realiza dentro del proceso iterativo propio de los métodos de análisis no lineal [21].

A continuación, en la Caja 4.4.7 se muestra el proceso de integración de las tensiones junto con la imposición de la continuidad de tracciones (que se hacen dentro del mismo algoritmo sólo para el caso del elemento CST). Se ha considerado que el análisis se encuentra en un elemento e , para una iteración k en un paso de tiempo $n+1$ y posterior al inicio de la localización.

CAJA 4.4.7. Esquema general de integración implícita del modelo discreto.

- Variables de entrada.

$$(\nabla^s \hat{\mathbf{u}})_{n+1}^k$$

- Imposición de la continuidad interna de tracciones:

(ver Caja 4.4.6)

$$\text{Obtención de } \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n+1}^k$$

- Cálculo de $\boldsymbol{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$

$$(\boldsymbol{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}})_{n+1}^k = (\nabla^s \hat{\mathbf{u}})_{n+1}^k - (\nabla \varphi^e \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{n+1}^k)^s$$

- Obtención final de $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$

$$(\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}})_{n+1}^k = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}})_{n+1}^k$$

Esquema IMPL-EX de integración

En los métodos discretos también es aplicable el esquema de integración IMPL-EX descrito en el Apartado §3.4 para los métodos de continuo. La base del esquema de integración IMPL-EX consiste en imponer el equilibrio utilizando tensiones calculadas con variables internas extrapoladas. Esta extrapolación se realiza utilizando valores obtenidos implícitamente en pasos de tiempo anteriores.

Siguiendo este principio, el esquema de integración IMPL-EX para los métodos discretos consistirá en extrapolar la variable interna tipo deformación $\bar{\alpha}$, que se llamará $\tilde{\alpha}$ y que se calculará para un paso de tiempo $n+1$ como:

$$\tilde{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \frac{\bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (4.74)$$

Teniendo en cuenta que la variable interna $\bar{\alpha}$ depende exclusivamente de los grados de libertad saltos $[[\mathbf{u}]]$ (ver Ecuación (4.18)), una forma de implementar el esquema IMPL-EX alternativa a la definida en la Ecuación (4.74) consistirá en extrapolar directamente $[[\mathbf{u}]]$ de la siguiente forma:

$$[[\tilde{\mathbf{u}}]]_{n+1} = [[\mathbf{u}]]_n + \frac{[[\mathbf{u}]]_n - [[\mathbf{u}]]_{n-1}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1} \quad (4.75)$$

Sin embargo, este esquema de integración ha resultado ser más impreciso numéricamente que utilizar la extrapolación de $\bar{\alpha}$ de la Ecuación (4.74) de la siguiente forma:

- a partir del valor de $\tilde{\alpha}$ obtener la matriz $\tilde{\Theta}$ como

$$\tilde{\Theta} = \left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{\sigma_f} \tilde{\alpha}}}{\tilde{\alpha}} \mathbb{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla \varphi \right) \quad (4.76)$$

- una vez obtenido $\tilde{\Theta}$ calcular los valores de $[[\tilde{\mathbf{u}}]]$ resolviendo el sistema lineal:

$$\mathcal{F}([[\tilde{\mathbf{u}}]]) = \tilde{\Theta}(\tilde{\alpha}) \cdot [[\tilde{\mathbf{u}}]] - \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.77)$$

El esquema de integración IMPL-EX, aplicado a los modelos de discreto de discontinuidad fuerte, tiene las mismas propiedades que las presentadas para los modelos de continuo en el Apartado §3.4.2. Por lo tanto, cumple que se alcanza la convergencia en sólo una única iteración por paso de tiempo. Teniendo en cuenta este hecho, la Caja 4.4.8 describe el esquema de integración IMPL-EX utilizando la extrapolación definida en las ecuaciones (4.76) y (4.77).

CAJA 4.4.8. Esquema general de integración IMPL-EX del modelo discreto.

- Variables de entrada.

$$(\nabla^s \hat{\mathbf{u}})_{n+1}, \quad \Delta t_{n+1}$$

- Imposición de la continuidad interna de tracciones:

(ver Caja 4.4.6)

Obtención de $[[\mathbf{u}]]_{n+1}$

(será utilizado en pasos de tiempo posteriores)

- Extrapolación de los grados de libertad saltos:

$$\tilde{\bar{\alpha}}_{n+1} = \bar{\alpha}_n + \frac{\bar{\alpha}_n - \bar{\alpha}_{n-1}}{\Delta t_n} \Delta t_{n+1}$$

$$\tilde{\Theta}_{n+1}(\tilde{\bar{\alpha}}_{n+1}) = \left(\frac{\chi_0 e^{-\frac{\chi_0}{G_f} \tilde{\bar{\alpha}}_{n+1}}}{\tilde{\bar{\alpha}}_{n+1}} \mathbb{Q}^e + \tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \nabla \varphi \right)$$

$$[[\tilde{\mathbf{u}}]] = \tilde{\Theta}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{n}} \cdot \mathbb{C}^e : \nabla^s \hat{\mathbf{u}})$$

- Cálculo de $\epsilon_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$

$$(\epsilon_{\Omega \setminus \mathcal{S}})_{n+1} = (\nabla^s \hat{\mathbf{u}})_{n+1} - \left(\nabla \varphi^e \otimes [[\tilde{\mathbf{u}}]]_{n+1} \right)^s$$

- Obtención final de $\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$

$$(\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}})^k_{n+1} = \mathbb{C}^e : (\epsilon_{\Omega \setminus \mathcal{S}})^k_{n+1}$$

Observación 4.4.9. La imposición de la continuidad de tracciones descrita en la Caja 4.4.6 y utilizada en el esquema de integración IMPL-EX descrito en la Caja 4.4.8 sigue siendo un Newton-Raphson no lineal.

4.5. Equivalencia entre modelos: las leyes tracción-salto y los modelos del continuo proyectados. Ejemplos numéricos

La aproximación de continuo de la discontinuidad fuerte, tal como ha sido indicado en el Apartado 4.3, es equivalente a la aproximación de discreto cuando se utilizan las leyes cohesivas derivadas de los modelos del continuo.

Para comprobar la equivalencia de ambas aproximaciones, en este apartado se utilizarán:

- la aproximación de continuo, con el modelo de continuo de daño isotrópico descrito en las Ecuaciones (2.2-2.14).
- la aproximación de discreto, con la ley cohesiva tracción-salto, derivada del modelo de continuo de daño isotrópico, descrita en las Ecuaciones (4.17-4.33).

Se ha elegido el modelo material de daño isotrópico por su sencillez y porque se ajusta bien al comportamiento de materiales cuasi-frágiles.

El ensayo utilizado para demostrar la equivalencia de las aproximaciones ha sido el descrito en la Figura 4.7(a). Se trata de un ensayo de tracción simple de una pieza rectangular de dimensiones 10x5 metros anclada en uno de sus extremos y sometida a un desplazamiento uniforme en otro de sus extremos. Las propiedades del material, descritas en la propia figura, corresponden a un material cuasifrágil que podría ser un hormigón. Por último, la Figura 4.7(b) muestra sobre la deformada de la pieza los contornos del módulo de los desplazamientos, viéndose de forma clara la formación de la banda de localizaciones debida al ablandamiento del material.

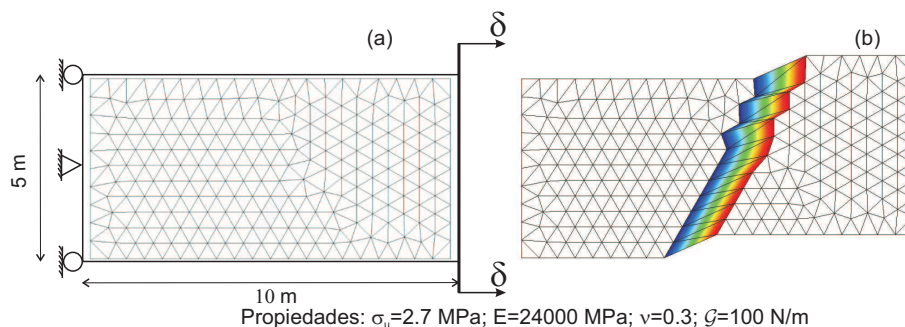


Figura 4.7: Ensayo de tracción simple. (a) Discretización del modelo. (b) Localización de deformaciones.

Se han realizado tres ensayos numéricos. En el primero se ha utilizado la aproximación de discreto en la cual la disipación viene regida por la ley tracción-salto de daño isotrópico. Esta ley se activa en aquellos elementos pertenecientes a la banda de localización, es decir, en aquellos elementos donde se detecta el inicio de la bifurcación. Los siguientes dos ensayos corresponden a la aproximación de continuo de discontinuidad fuerte. En ambos ensayos se produce una degeneración del modelo

continuo en un modelo discreto en aquellos elementos que localizan, pero mientras en uno de los ensayos no se ha permitido la existencia del régimen de discontinuidad débil, en el otro se ha modelizado una banda de localización con una anchura variable desde un valor inicial ($h = 0,35$ m) en el instante de localización hasta un valor casi nulo ($h = 3,5 \cdot 10^{-6}$ m) en el inicio del régimen de discontinuidad fuerte. Para ninguno de los tres ejemplos se ha permitido la existencia de daño estable no localizado. Los tres ensayos numéricos se describen en el Cuadro 4.1

Cuadro 4.1: Ensayos realizados

Ensayo	Aproximación	Daño estable	Disc. débil	Disc. fuerte
APDIS	Discreta	No Permitido	No Posible	Si
APCON1	Continua	No Permitido	No Permitido	Si
APCON2	Continua	No Permitido	Permitido	Si

La Figura 4.8 muestra las curvas de equilibrio Fuerza *vs.* Desplazamiento obtenidas para los tres ensayos. Como se observa, las tres curvas muestran resultados idénticos cumpliéndose que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es el mismo independientemente de la aproximación utilizada. La igualdad de resultados para los ensayos APCON1 y APCON2 indican que ha sido correcto imponer el régimen de discontinuidad fuerte al inicio del daño. Esto indica que se cumplían las condiciones de discontinuidad fuerte (ver [55] [58]), ya que de otra manera habría aparecido una recarga localizada hasta su cumplimiento tal como indicó Manzoli en [45].

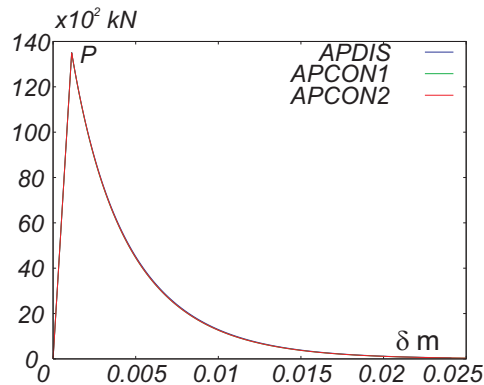


Figura 4.8: Respuesta numérica Fuerza aplicada *vs.* Desplazamiento.

Para asegurar la equivalencia entre ambas aproximaciones continua y discreta, además del anterior análisis de la respuesta global hay que realizar un análisis local de las leyes tracción-salto en aquellos elementos pertenecientes a la banda de localización. Para realizar este análisis se ha tomado como elemento representativo el marcado como E1 en la Figura 4.9.

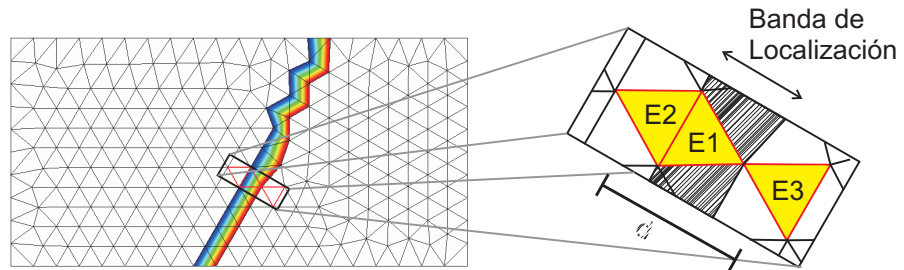


Figura 4.9: Ensayo de tracción simple: elementos de análisis.

La Figura 4.10 muestra las tres leyes tracción-salto obtenidas numéricamente para los tres ensayos en el elemento E1. Para el caso de las aproximaciones de continuo, las tracciones se han obtenido como la proyección, en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , del tensor de tensiones sobre la normal a \mathcal{S} . Si bien las leyes discretas para los modelos continuos son idénticas, éstas difieren levemente de las del ensayo discreto APDIS, aunque esta diferencia es muy pequeña.

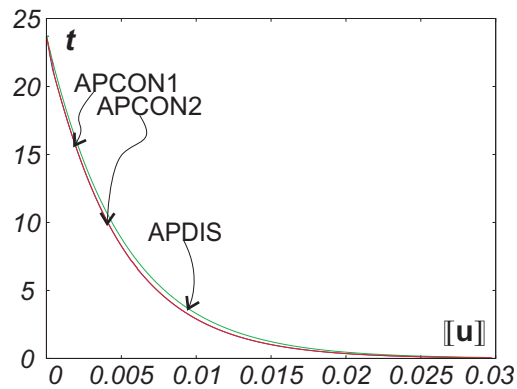


Figura 4.10: Respuesta numérica tracción-salto en el elemento E1.

4.6. Resumen del capítulo

En este capítulo se ha realizado una breve introducción a los modelos cohesivos discretos destinada a mostrar su equivalencia con los modelos de continuo. Las aproximaciones discretas usan leyes tracción-salto para reproducir los fenómenos disipativos que tienen lugar en la superficie de fractura. En el Apartado §4.2 se ha descrito una formulación general para estas leyes cohesivas utilizando el esquema propuesto por Coleman y Noll [43]. Esta formulación general se puede particularizar eligiendo:

- Una función potencial de la cual se deriva la ley tracción-salto.

- Las variables internas de integración.
- Una función de fallo que regule el dominio elástico.

En el Apartado §4.2 se describe un caso particular de leyes cohesivas: las leyes cohesivas derivadas de los modelos de continuo de daño isótropo. Este modelo discreto es, por construcción, equivalente al modelo de continuo de daño isótropo aplicado en la superficie de discontinuidad cuando se ha alcanzado el régimen de discontinuidad fuerte.

En el Apartado §4.3 se describe la integración de los modelos cohesivos discretos cuando se usan elementos triangulares de deformación constante. Gracias a que la integración se realiza utilizando un único punto de Gauss, la continuidad interna de tracciones puede imponerse dentro del algoritmo de integración de las tensiones. Esto permite obtener los grados de libertad saltos de forma local dentro del elemento sin necesidad de aumentar el tamaño de las matrices de resistencia globales.

Finalmente, en el Apartado §4.4 se muestra la equivalencia de los modelos de daño isótropo de continuo y de discreto. Para hacerlo se representa el fallo por ablandamiento de una pieza sometida a un ensayo de tracción simple. En este ensayo se ve que coinciden para ambas aproximaciones tanto la respuesta global Fuerza *vs.* Desplazamiento como la respuesta local Tracción *vs.* Salto dentro de los elementos que han localizado.

Capítulo 5

APLICACIONES A LA MECÁNICA DE LA FRACTURA

5.1. Introducción

El uso del esquema de integración IMPL-EX, junto con las herramientas complementarias descritas en el Capítulo §3, permite realizar análisis numéricos de fenómenos físicos que tradicionalmente se habían afrontado mediante estudios analíticos.

En este capítulo se analizarán dos fenómenos de gran importancia dentro de la mecánica de la fractura [8]:

- la influencia del efecto tamaño en la resistencia última de una estructura.
- el tamaño de la *zona de procesamiento de fractura*, que es la zona donde tienen lugar los procesos inelásticos conforme avanza una fisura.

5.2. Análisis del efecto tamaño

5.2.1. Descripción

El efecto tamaño en mecánica de sólidos se puede definir como la influencia del tamaño característico de una estructura en su *resistencia nominal*, cuando se comparan estructuras con geometrías proporcionales o muy similares. Esta resistencia nominal, que tiene unidades de tensión, se define como la relación que existe entre la máxima carga resistida por una estructura dividida por una sección representativa de ella.

El primer intento de explicar el efecto tamaño utilizó una aproximación estadística basada en la regla de la cadena. Básicamente se pensó que cuanto mayor fuese el tamaño del espécimen más alta sería la probabilidad de existir un defecto que hiciese ese espécimen más débil.

En los años 80 apareció una metodología alternativa basada en una aproximación determinista: la ley del efecto tamaño propuesta por Bažant en 1984 basada en la mecánica de la fractura no lineal [5]:

$$\sigma_N = B \sigma_0 \left(1 + \frac{D}{D_0}\right)^{-1/2} + \sigma_R \quad (5.1)$$

donde las constantes B , D_0 (una longitud relacionada con la transición entre comportamiento dúctil y frágil) y σ_R (un parámetro que proporciona un comportamiento asintótico no nulo a tracción para grandes especímenes) tienen que ser determinadas para cada geometría a analizar.

Bažant sostuvo que el efecto tamaño es un fenómeno que depende de la geometría y del material del espécimen a analizar y que está relacionado con el tamaño de la zona donde se producen los fenómenos inelásticos, la forma en la que las tensiones se redistribuyen conforme la sección se agota y cómo se libera la energía almacenada en el material.

El efecto tamaño sólo tiene lugar en aquellos especímenes cuyo tamaño característico es, respecto a la zona donde tienen lugar los fenómenos inelásticos: (a) lo suficientemente grande para que la zona de procesamiento de fractura no ocupe toda la sección dando lugar a un comportamiento plástico y (b) lo suficientemente pequeño para que no sea aplicable el comportamiento frágil de mecánica de la fractura elástica lineal (MFEL) [6] (ver Figura 5.1).

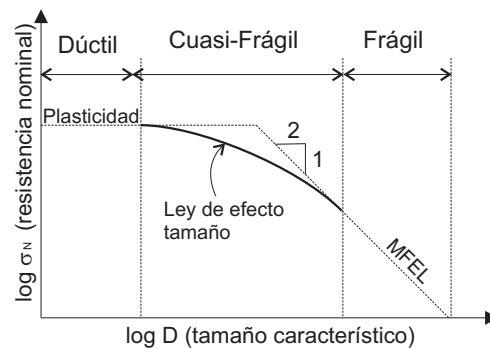


Figura 5.1: Ley de efecto tamaño para fallos cuasi-frágiles (tomada de Bažant [6]).

Han habido varias mejoras a la ley descrita en (5.1), entre las cuáles se pueden mencionar (ver [15]):

- aquellas basadas en la mecánica de la fractura no lineal, como el modelo de capa de frontera de Bažant & Li [7] y el modelo de dos parámetros presentado por Jenq & Shah [36].
- aquellas basados en leyes empíricas, específicas para cada tipo de ensayo, como la ecuación presentada por Uchida [88] para determinar la resistencia a flexión.

- la presentada por Carpinteri & Chiaia en [15], donde se proporciona una ley que engloba los comportamientos micro y macro-estructural.

Las anteriores leyes presentadas tienen dos inconvenientes: (1) no son herramientas generales para analizar todo tipo de geometrías e hipótesis de carga y (2) para una determinada geometría e hipótesis de carga, los resultados únicamente son válidos para un rango pequeño de tamaños de la geometría.

De forma general, se puede decir que los parámetros que definen las leyes de efecto tamaño existentes dependen de la geometría del espécimen, del material utilizado y de la longitud característica elegida. Por lo tanto, *dado una geometría y un material, es necesario realizar series de experimentos para poder definir correctamente la ley de efecto tamaño correspondiente.*

La mecánica computacional constituye una forma alternativa de afrontar el efecto tamaño en el análisis de estructuras. Si la herramienta numérica es capaz de disipar correctamente la energía de fractura del material, la influencia del efecto tamaño se captura directamente sin otras consideraciones. Los siguientes dos apartados muestran la capacidad de la metodología de continuo de discontinuidad fuerte para capturar este efecto mediante la simulación numérica del ensayo brasileño y de un test de arrancamiento.

5.2.2. Ensayo brasileño

Descripción del ensayo

El ensayo brasileño ha sido incluido en la mayoría de los códigos (ASTM, BS, ISO) para medir la resistencia a tracción de materiales frágiles. En este ensayo se comprime diametralmente un espécimen cilíndrico manteniendo el eje de revolución paralelo a las platabandas que transmiten la compresión. La Figura 5.2 muestra un esquema del ensayo brasileño junto con sus dimensiones características.

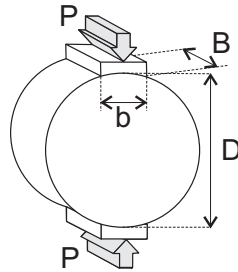


Figura 5.2: Descripción geométrica del ensayo brasileño.

El ensayo brasileño proporciona una resistencia a tracción, que se denominará f_{st} , que se calcula a partir de la carga última P_u de la siguiente forma:

$$f_{st} = \frac{2P_u}{\pi B D} \quad (5.2)$$

donde B es el espesor, b es la anchura de las platabandas y D es el diámetro.

La Ecuación (5.2) representa la resistencia a tracción de un espécimen elástico lineal hasta la ruptura y considerando que la anchura de la platabanda es nula. Si se considera el valor de f_{st} un parámetro material, conforme las condiciones del ensayo se alejen de las anteriores dos hipótesis se obtienen resultados diferentes del valor característico del material a ensayar. Tal como estableció Rocco *et al.* en [75] y [74], el resultado de f_{st} dado por la Ecuación (5.2) decrece monótonicamente cuando el tamaño del espécimen aumenta y cuando la anchura de las platabandas disminuye. Este valor decreciente de f_{st} tiende asintóticamente a un valor que es la resistencia a tracción propiedad del material.

Para describir numéricamente esta variación de f_{st} conforme varían las características de los especímenes se reproducirán los resultados experimentales presentados por Rocco *et al.* en [74]. En esta referencia se han llevado a cabo un total de 110 ensayos experimentales del ensayo brasileño usando mortero y granito, de los cuales se reproducirán aquí solamente los últimos. Se han analizado numéricamente especímenes de granito cilíndricos con un espesor de $B = 30 \text{ mm}$ y diámetros de $D = 30 \text{ mm}$, $D = 60 \text{ mm}$, $D = 120 \text{ mm}$ y $D = 240 \text{ mm}$. También se ha analizado la influencia de la anchura de la platabanda, habiéndose utilizado valores para b de un 4%, 8% y 16% del diámetro de los especímenes.

El Cuadro 5.1 muestra los valores que caracterizan las propiedades del material granito tal como se describen en [74] y tal como han sido utilizados en el análisis numérico:

Cuadro 5.1: Parámetros del material

Parámetro	Valor
f_t	$10,1 \pm 0,2 \text{ MPa}$
E	$33,9 \pm 0,5 \text{ GPa}$
G_f	$167 \pm 5 \text{ N/m}$
w_1	$19 \pm 2 \text{ }\mu\text{m}$

donde E representa el módulo de Young, G_f la energía de fractura y w_1 la intersección de la tangente a la ley cohesiva en el origen con el eje horizontal (ver Figura 5.3).

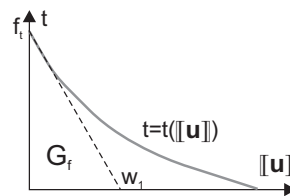


Figura 5.3: Ley cohesiva tracción-salto.

La Figura 5.4 muestra los resultados experimentales para el caso en que $b/D = 0,16$ tal como son descritos en [8], que a su vez han sido tomados del trabajo de

Rocco [76]. Esta gráfica representa la carga aplicada P vs. la apertura diametral w_d obtenida como el valor medio a ambos lados del espécimen. Los resultados han sido normalizados utilizando la carga máxima P_{max1} y su correspondiente apertura diametral w_{d1} .

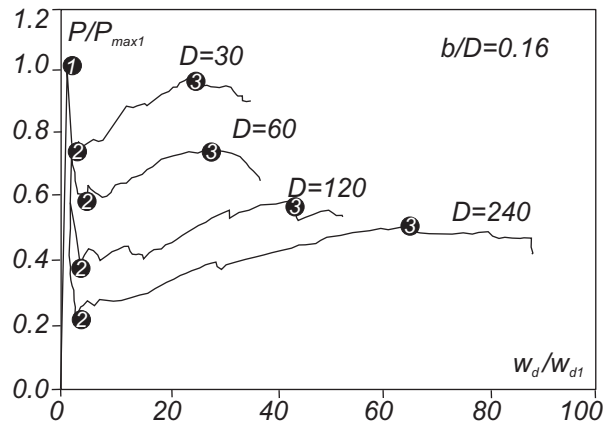


Figura 5.4: Resultados experimentales para $b/D=16$ (tomados de Rocco [76]).

En cada curva de la Figura 5.4 se han indicado tres puntos representativos. El primero corresponde a un máximo que aparece tras la rama elástica y que coincide con el inicio de una fisuración diametral vertical. Esta fisuración principal se propaga bruscamente en la rama de ablandamiento posterior hasta alcanzar el segundo punto que corresponde a un mínimo. En este mínimo aparecen cuatro fisuras secundarias a ambos lados de las platabandas, que evolucionan hasta llegar al tercer punto, que corresponde a un segundo punto máximo, donde finalmente prevalece una de estas fisuras y se forma un mecanismo.

Resultados numéricos

El objetivo del análisis es demostrar la capacidad de la aproximación numérica para capturar la influencia de (a) el tamaño del espécimen y (b) la anchura de la platabanda en la resistencia a tracción f_{st} . Para simplificar el análisis, los ensayos numéricos se ha llevado a cabo permitiendo la aparición de únicamente la fisura diametral inicial. Esto hace que el análisis sólo tenga sentido hasta alcanzar el Punto 2 en la curva de equilibrio de la Figura 5.4, que se corresponde con el inicio de la segunda rama de endurecimiento.

Se ha utilizado un modelo de daño isotrópico con ablandamiento exponencial caracterizado por los parámetros definidos en el Cuadro 5.1.

El Cuadro 5.2 resumen los nueve ensayos numéricos realizados junto con los valores de la carga última y de f_{st} obtenidos para cada uno de ellos.

Las mallas utilizadas en la discretización por elementos finitos de cada uno de los ensayos se muestran en la Figura 5.5 mientras que en la Figura 5.6 se describe la concentración de las bandas de iso-desplazamientos que tiene lugar al final del

Cuadro 5.2: Resumen de los ensayos numéricos realizados

ENSAYO	Diámetro (mm)	b/D %	Nodos	Carga pico (kN)	f_{st} (N/mm ²)
1	240	16	7072	115.6	10.22
2	120	16	2423	58.36	10.32
3	120	8	2591	56.83	10.05
4	120	4	1330	56.26	9.95
5	60	16	2163	30.56	10.81
6	60	8	4205	28.95	10.24
7	60	4	2406	28.84	10.2
8	30	16	2618	15.87	11.23
9	30	8	2127	14.72	10.41

proceso de fisuración. En esa figura se observa como únicamente se ha permitido la aparición de la fisura principal en el plano donde se aplica la carga.

Finalmente, en la Figura 5.7 se dibujan las curvas normalizadas carga aplicada vs. apertura diametral de fisura para los tres casos de anchura de platabanda: $b/D = 0,16$, $b/D = 0,08$ y $b/D = 0,04$. Para el caso de $b/D = 0,16$ los resultados numéricos se compararan con los resultados experimentales (descritos también en la Figura 5.4). Para los casos de $b/D = 0,08$ y $b/D = 0,04$ no se han conseguido los resultados experimentales y únicamente se presentan los numéricos.

Fruto de comparar los resultados experimentales y numéricos se puede afirmar:

- Se reproduce el efecto observado por Rocco *et al.* que sostiene que *para un ratio dado de b/D , cuanto mayor sea el tamaño del espécimen más frágil es su comportamiento.*
- Los ensayos numéricos reproducen adecuadamente la caída de resistencia que tiene lugar cuando se inicia el proceso de fisuración diametral. En la Figura 5.7 se han marcado las caídas de resistencia tanto en los resultados numéricos como en los experimentales (tomadas de la Figura 5.4).

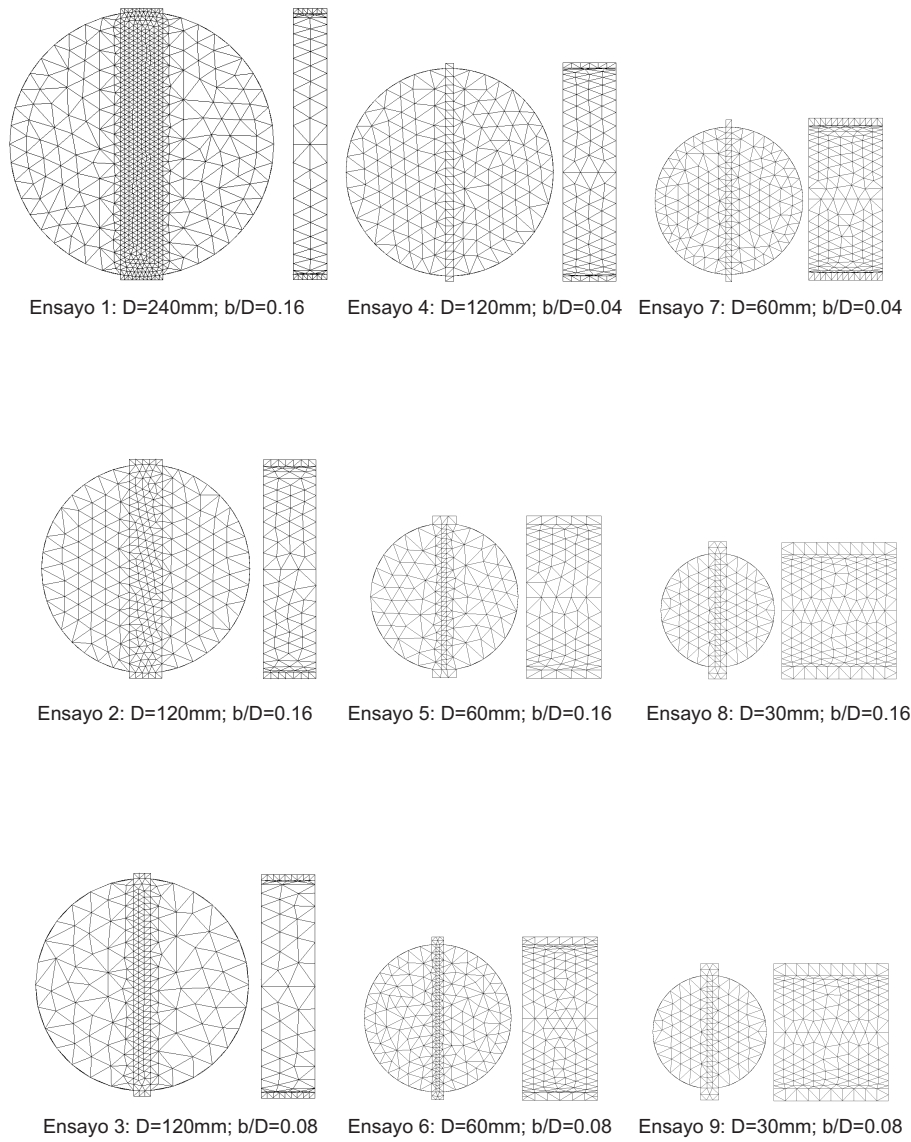


Figura 5.5: Discretización por elementos finitos (no están a escala).

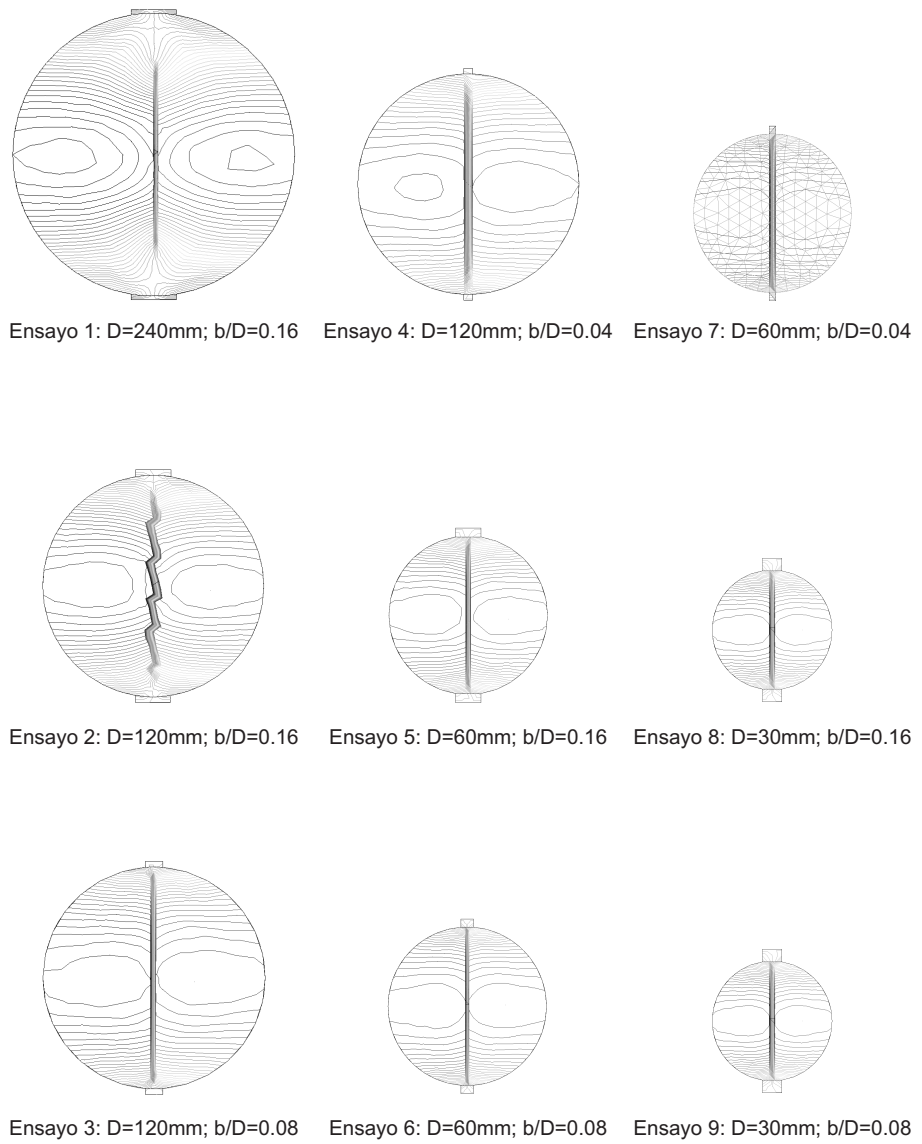


Figura 5.6: Concentración de las bandas de iso-desplazamientos.

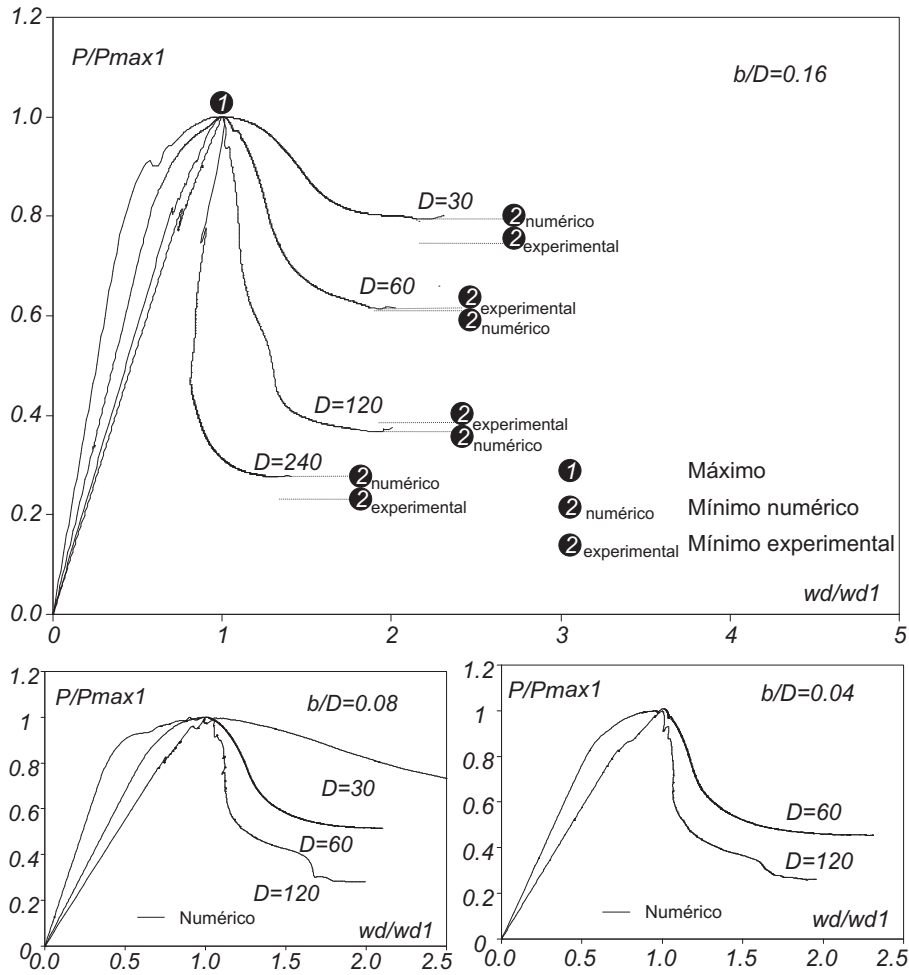


Figura 5.7: Resultados numéricos normalizados.

Análisis del efecto tamaño

Las Figuras 5.8 y 5.9 muestran cómo los resultados numéricos han sido capaces de capturar la influencia del tamaño del espécimen y de la anchura de la platabanda en la obtención del parámetro f_{st} .

Las gráficas de la Figura 5.8 muestran, para un tamaño de diámetro fijo, la influencia de la anchura de la platabanda mientras que las gráficas de la Figura 5.9 muestran, para una relación b/D fija, la influencia del diámetro del espécimen. En todos los gráficos se comparan los resultados numéricos con los experimentales proporcionados por Rocco *et al.* [74].

El buen ajuste de los resultados numéricos a los experimentales, mostrado en las figuras 5.7, 5.8 y 5.9, justifica el uso de una herramienta numérica como la metodología de continuo de discontinuidades fuertes para obtener la capacidad resistente de una estructura, teniendo en consideración la influencia del efecto tamaño.

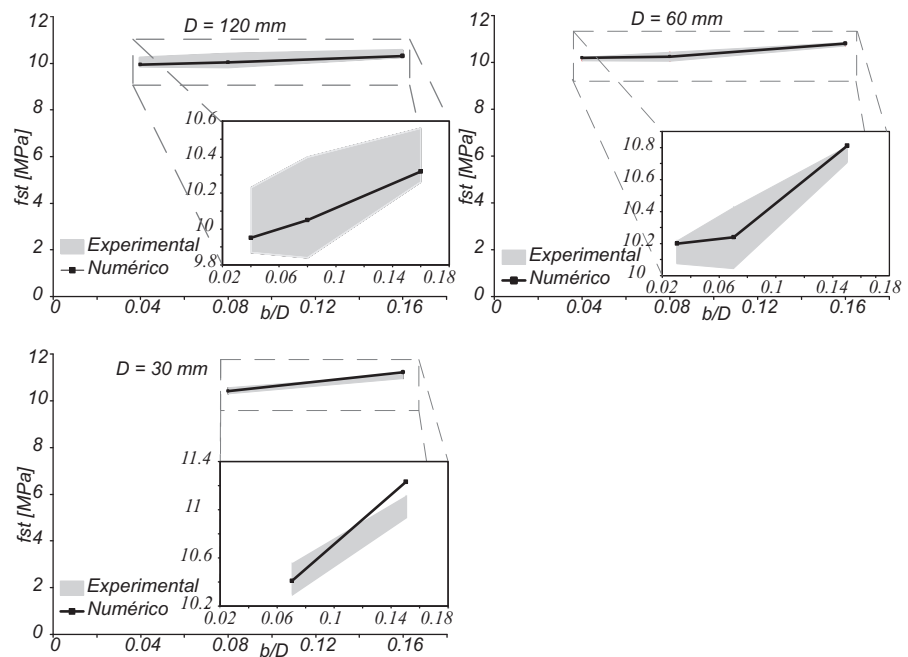


Figura 5.8: Influencia del tamaño del espécimen.

5.2.3. Ensayo de arrancamiento

Descripción del ensayo

Como segundo ejemplo para justificar que la MCDF es una herramienta numérica capaz de capturar el efecto tamaño en sus análisis, se han reproducido los ensayos experimentales realizados por Eligehausen *et al.* [26] y por Eligehausen & Ozbolt [27]. Se trata de diversas pruebas de arrancamiento de anclajes de acero embebidos

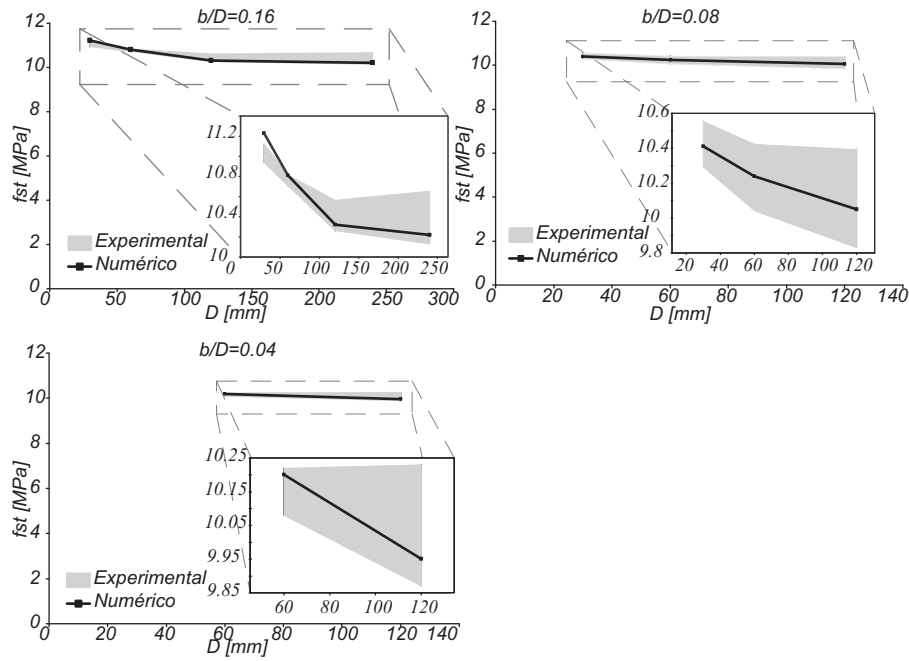


Figura 5.9: Influencia de la anchura de la platabanda.

en macizos de hormigón. El esquema de estos ensayos experimentales se describen en la Figura 5.10.

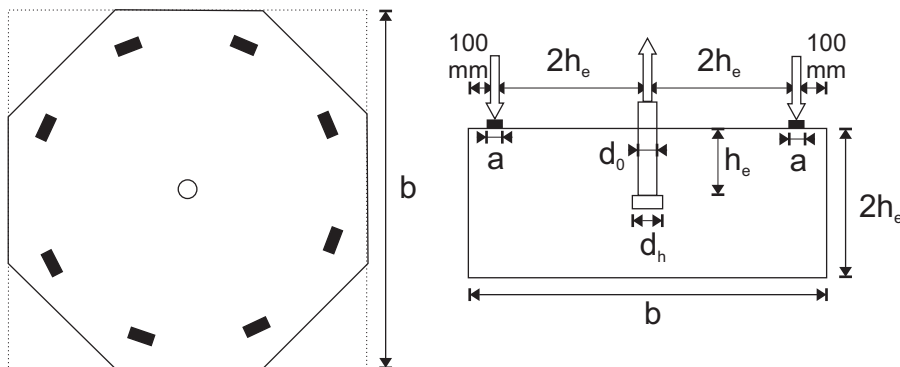


Figura 5.10: Geometría del ensayo de arrancamiento (tomado de Eligehausen & Ozbolt [27]).

Los estudios realizados en las referencias [26] y [27] se han centrado en determinar la influencia de diversos parámetros en la resistencia nominal de los especímenes,

que para este ensayo se calcula como:

$$\sigma_N = \frac{P_u}{h_e^2 \pi} \quad (5.3)$$

donde P_u es la carga última resistida. Los parámetros analizados han sido la profundidad del anclaje h_e , el tamaño de la cabeza de compresión d_h , la resistencia última a tracción del hormigón σ_u^+ y la energía de fractura del mismo G_f .

A continuación se reproducen numéricamente los ensayos caracterizados en el Cuadro 5.3 y con las propiedades mecánicas descritas en el Cuadro 5.4.

Cuadro 5.3: Resumen de los ensayos numéricos realizados

ENSAYO	h_e (mm)	d_h (mm)	d_0 (mm)	a (mm)	Número de nodos
1	50	12,7	8,0	0	1457
2	150	32,9	24,0	0	3626
3	450	88,5	72,0	0	3835

Cuadro 5.4: Propiedades mecánicas

σ_u^+ (MPa)	σ_u^- (MPa)	E (GPa)	ν	G_f (N/m)
2,9	26,0	29,0	0,2	150

Se trata de tres ensayos en los que se han elegido unos valores de h_e de 50, 150 y 450 mm para poder estudiar la influencia del parámetro h_e en la resistencia nominal de los especímenes. Los tres ensayos se han llevado a cabo imponiendo, tal como indican las referencias [26] y [27], un desplazamiento creciente en los anclajes hasta alcanzar el agotamiento debido a la formación de un cono de arrancamiento en la matriz de hormigón. Sin embargo, los análisis numéricos presentados difieren de los experimentales en cuatro puntos:

1. a diferencia de lo indicado en la Figura 5.10, para sujetar la fuerza de arrancamiento se ha impuesto un desplazamiento nulo en una circunferencia que recorre los apoyos descritos en el ensayo experimental (ver Figura 5.12).
2. en el ensayo numérico no se ha considerado la existencia de una armadura de piel en la superficie superior del macizo de hormigón (descrita en [27]).
3. en el ensayo numérico se ha considerado que sólo hay contacto acero-hormigón en la superficie superior de la cabeza de compresión, suponiendo que en el resto del anclaje no están en contacto (ver el esquema en la Figura 5.11).
4. en el ensayo numérico se ha utilizado el modelo solo-tracción descrito en el Apartado §2.3, con lo que no se considera que la disipación pueda deberse a un fallo por compresión.

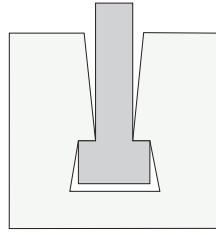


Figura 5.11: Descripción de la unión anclaje-matriz.

En la Figura 5.12 se describen las discretizaciones de elementos finitos utilizadas y sobre ellas una línea que marca los nodos donde se han coaccionado los desplazamientos verticales. A su vez, en la Figura 5.13 se presentan los cortes verticales de los modelos discretizados, donde se pueden apreciar cómo el anclaje de acero está embebido en la matriz de hormigón.

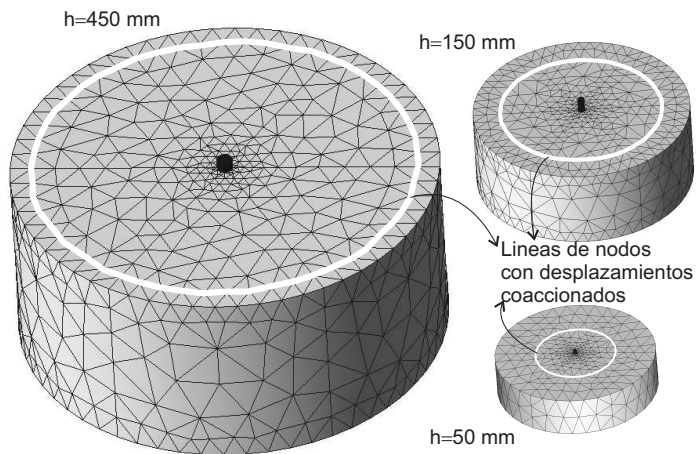


Figura 5.12: Descripción de los ensayos numéricos (no están a escala): mallas de elementos finitos y nodos con los desplazamientos coaccionados.

Resultados numéricos

Al aplicar un desplazamiento creciente al anclaje de acero se produce el agotamiento final del ensayo cuando se forma un cono de arrancamiento. Las cargas últimas obtenidas para cada uno de los ensayos junto con su resistencia nominal se resumen en el Cuadro 5.5 para los resultados experimentales y en el Cuadro 5.6 para los resultados numéricos.

En las Figuras 5.14, 5.15 y 5.16 se dibujan las curvas carga *vs.* desplazamiento de los tres ensayos numéricos. La carga corresponde a la carga total resistida y el desplazamiento representa el desplazamiento vertical de la cabeza de compresión.

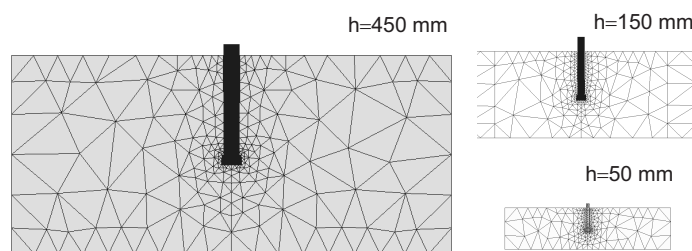


Figura 5.13: Descripción de los ensayos numéricos (no están a escala): cortes verticales de los modelos.

Cuadro 5.5: Resumen de los ensayos experimentales

ENSAYO	h_e (mm)	P_u kN	σ_N N/mm ²
1	50	33,3	4,24
2	150	155,6	2,20
3	450	1005,6	1,58

Cuadro 5.6: Resumen de los ensayos numéricos

ENSAYO	h_e (mm)	P_u kN	σ_N N/mm ²
1	50	29,92	3,93
2	150	198,84	2,81
3	450	1429,88	2,25

Como se puede comprobar, el análisis numérico proporciona un comportamiento mucho más dúctil que los resultados experimentales. Tres posibles causas de esta disparidad son:

1. Los ensayos numéricos no reproducen exactamente los ensayos experimentales, dado que las condiciones de contorno y la adherencia acero-hormigón han sido representadas de forma diferente.
2. El ensayo numérico no captura el fallo por compresión, dado que se ha utilizado un modelo de daño solo-tracción.
3. La superficie de fallo no reproduce exactamente el fallo experimental, debido a que el modelo numérico obliga a que esta superficie sea normal a la cara superior del macizo de hormigón cuando experimentalmente se ve que no es así (ver Figuras 5.17, 5.18 y 5.19).

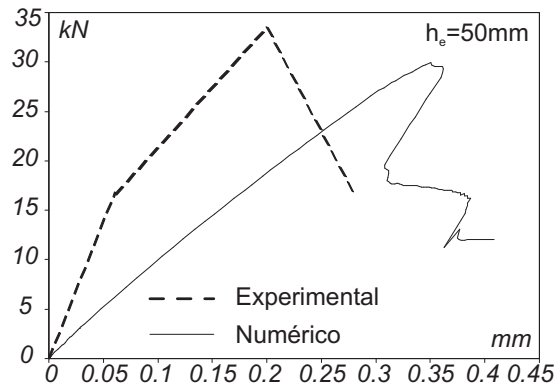


Figura 5.14: Curvas Fuerza *vs.* Desplazamiento para $h_e = 50 \text{ mm}$.

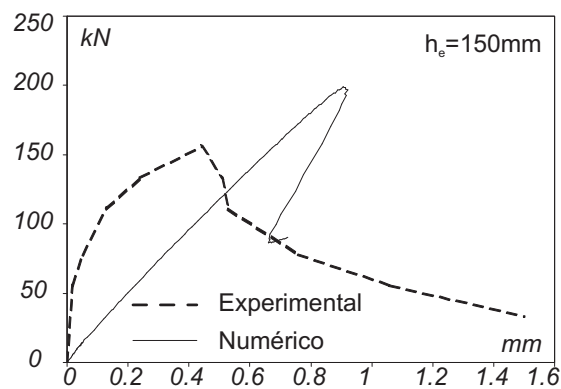
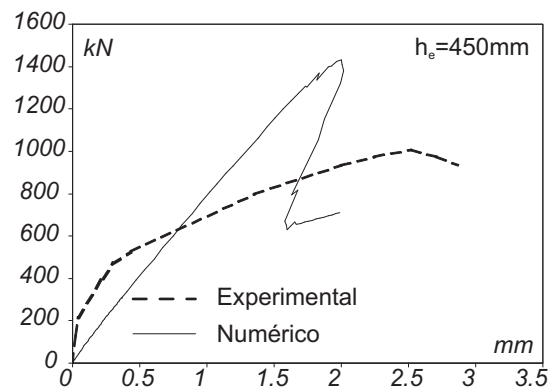
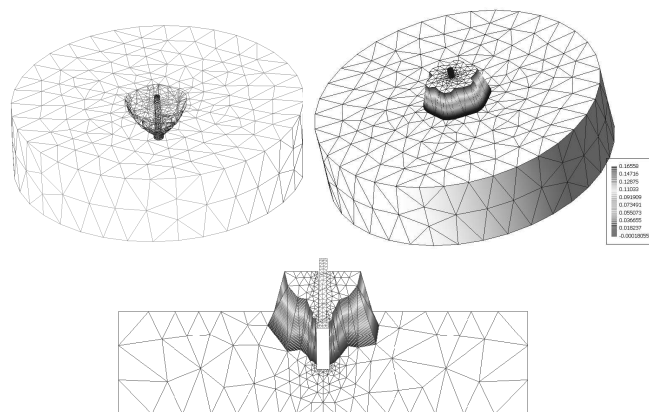


Figura 5.15: Curvas Fuerza *vs.* Desplazamiento para $h_e = 150 \text{ mm}$.

Finalmente, las Figuras 5.17, 5.18 y 5.19 describen, para cada ensayo, el cono de arrancamiento que tiene lugar y una imagen de la deformada cuando ha tenido lugar el agotamiento.

Figura 5.16: Curvas Fuerza vs. Desplazamiento para $h_e = 450 \text{ mm}$.Figura 5.17: Cono de arranque y deformada para $h_e = 50 \text{ mm}$.

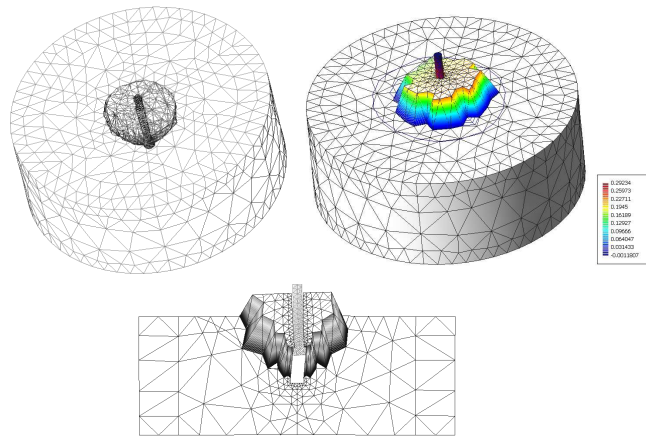


Figura 5.18: Cono de arrancamiento y deformada para $h_e = 150 \text{ mm}$.

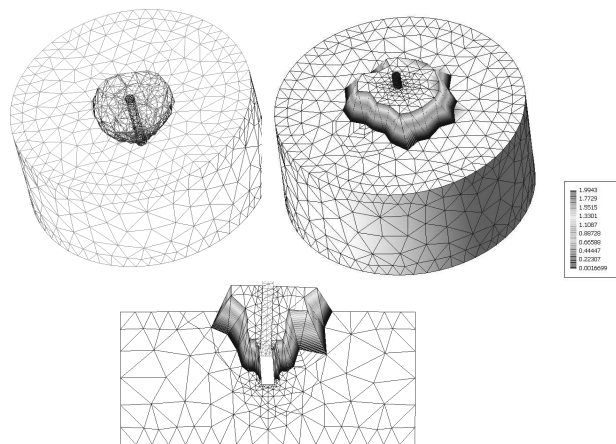


Figura 5.19: Cono de arrancamiento y deformada para $h_e = 450 \text{ mm}$.

Análisis del efecto tamaño

La tensión nominal obtenida en los ensayos numéricos se resume en la Figura 5.20 junto con los resultados experimentales proporcionados por [27]. En esta gráfica se ha dibujado la resistencia nominal σ_N frente a la profundidad del anclaje h_e . La tensión nominal ha sido normalizada para un cubo de hormigón de resistencia a compresión de $\sigma_u^- = 33 \text{ MPa}$, tal como se indica en [27].

Se ha dibujado una línea que une los centros de gravedad de los resultados experimentales para cada valor de h_e y otra línea que une los tres resultados numéricos. Ambas líneas coinciden de forma aproximada. La causa de esta diferencia en los resultados numéricos y experimentales puede residir en las diferencias indicadas anteriormente entre los análisis experimental y numérico, con lo que no se estarían comparando ensayos completamente equivalentes.

También se han dibujado en la Figura 5.20 las predicciones basadas en leyes analíticas: la predicción dada por la ACI (Instituto Americano del Hormigón, con sus siglas en inglés) que no presupone la existencia del efecto tamaño y la predicción basada en la MFEL (Mecánica de la Fractura Elástica Lineal). Esta última ley considera un efecto tamaño demasiado acusado, resultando ser las predicciones numéricas la mejor herramienta para capturar dicho efecto.

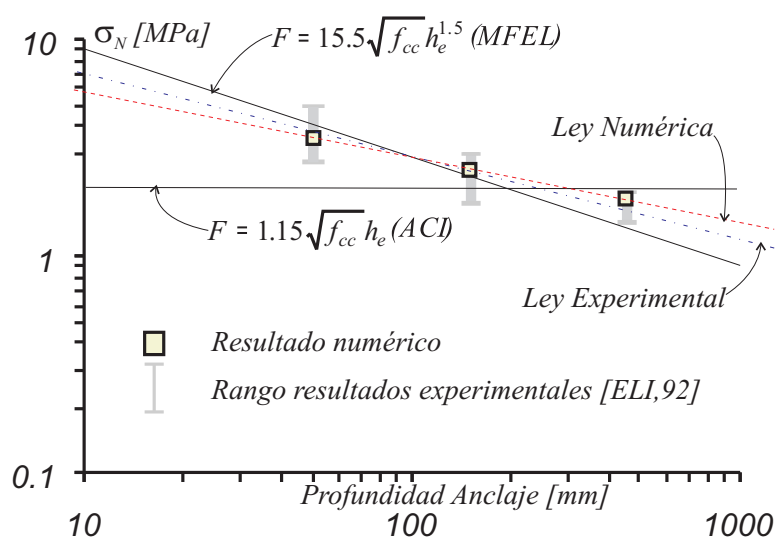


Figura 5.20: Influencia del tamaño del espécimen en la resistencia nominal.

5.3. Reproducción de la zona de procesamiento de fractura

Dada una fisura que progresa, la zona de procesamiento de fractura (ZPF) ha sido definida por Bazant & Planas [8] como “aquella zona no lineal caracterizada

por un ablandamiento progresivo, en la cual las tensiones decrecen al incrementarse la deformación". Esta zona está limitada en un extremo por el material que ya ha agotado su capacidad resistente y en el otro por el material que bien está en el régimen elástico o bien tiene un comportamiento de endurecimiento o de plasticidad perfecta [8].

El primer intento para medir la longitud de la zona de procesamiento de fractura l_{ZPF} se debe a Irwin [35] [8] que, considerando plasticidad perfecta como modelo disipatorio y utilizando la mecánica de la fractura elástica lineal, propuso la siguiente expresión:

$$l_{ZPF} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (5.4)$$

donde K_I es el factor de intensidad de tensiones y σ_y es la tensión de fluencia.

Posteriormente Bažant & Planas [8], utilizando leyes de ablandamiento exponencial para determinar la zona donde se produce los fenómenos inelásticos, propusieron la siguiente fórmula para materiales cuasi-frágiles:

$$l_{ZPF} = \eta \frac{E G_f}{f_t^2} \quad (5.5)$$

donde f_t es la resistencia a tracción del material y η es un parámetro adimensional que los autores proponen sea entre 2 y 5.

En este apartado se propone una forma alternativa para determinar la longitud de la zona de procesamiento de fractura l_{ZPF} realizando ensayos numéricos con la metodología de continuo de discontinuidad fuerte. La aproximación de continuo descrita en el Capítulo §2 distingue dos zonas donde tienen lugar los fenómenos disipativos:

1. *zona de daño no localizado*, donde se ha abandonado el régimen elástico pero no se cumple la condición de localización descrita en la Ecuación (2.1).
2. *zona de daño localizado*, donde se cumple la condición de localización y se ha aplicado la regularización del ablandamiento y la cinemática descritos en el Apartado §2.6.

Se ha considerado como longitud de la zona de procesamiento de fractura la que abarca las dos zonas anteriores: la zona de daño no localizado y la zona de daño localizado.

Para obtener el valor de l_{ZPF} se ha utilizado el ensayo numérico descrito en los apartados §3.4.3 y §3.5 (ver Figura 5.21), pero utilizando en este caso tres energías de fractura distintas de $G_f = 25 \text{ N/m}$, $G_f = 50 \text{ N/m}$ y $G_f = 75 \text{ N/m}$ para poder estudiar la influencia de este parámetro.

Para cada una de las tres energías de fractura se ha reproducido numéricamente el agotamiento de la pieza descrita en la Figura 5.21. En un punto intermedio del ensayo numérico se ha medido la longitud de la zona de procesamiento de fractura como la distancia que hay, siguiendo la fisura, entre el punto material que ha iniciado el daño y el punto material que ya ha agotado toda su capacidad resistente (ver Figura 5.22).

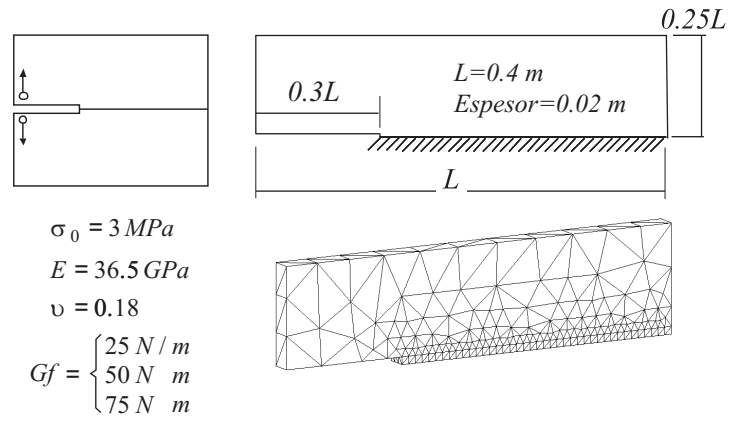


Figura 5.21: Descripción geométrica, propiedades del material y discretización del ensayo DCB.

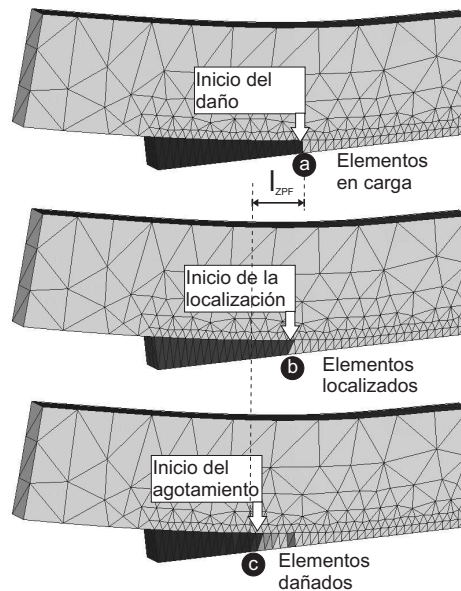


Figura 5.22: Determinación de la longitud de la zona de procesamiento de fractura para el ensayo DCB en un estado intermedio de carga.

Siguiendo el esquema marcado por la Figura 5.22, las siguientes Figuras 5.23, 5.24 y 5.25 muestran, para cada una de las energías de fractura y en un estado intermedio del ensayo numérico, el perfil de la componente vertical de las tensiones σ_{yy} y sobre él la longitud de la zona de procesamiento de fractura correspondiente.

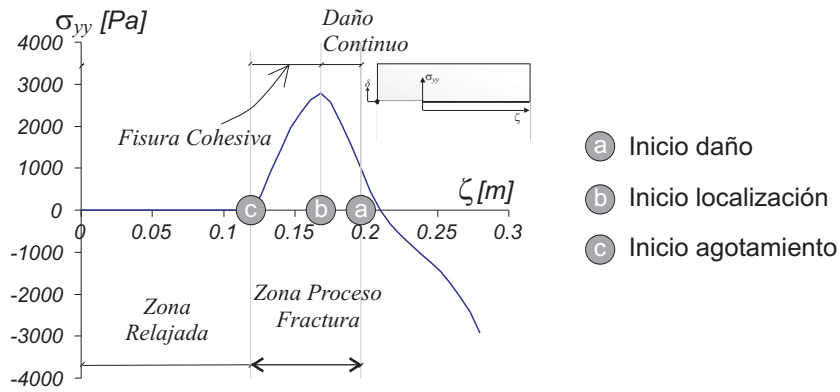


Figura 5.23: Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 25 \text{ N/m}$.

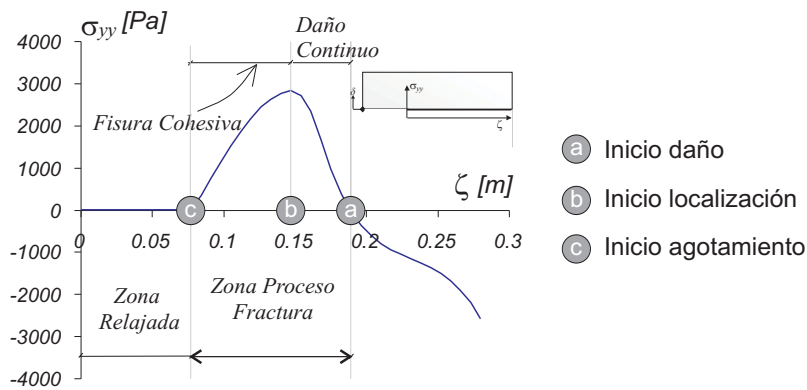


Figura 5.24: Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 50 \text{ N/m}$.

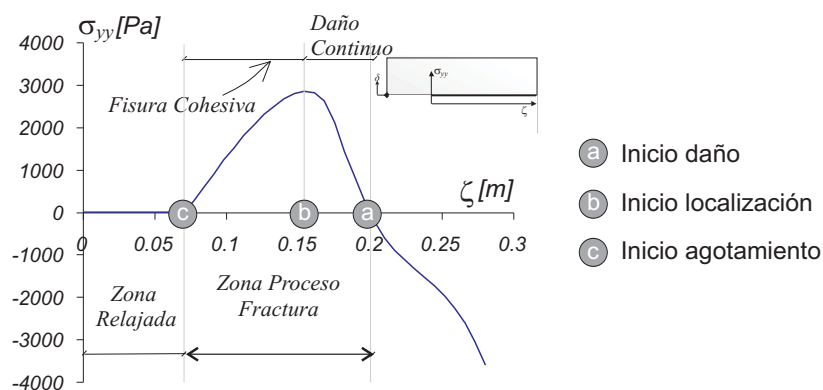


Figura 5.25: Determinación de l_{ZPF} para una energía de fractura de $G_f = 75 \text{ N/m}$.

Los resultados obtenidos se resumen en el Cuadro 5.7:

Cuadro 5.7: Valores de l_{ZPF}

G_f [N/m]	l_{ZPF} [m]
25	0.077
50	0.110
75	0.133

Para poder determinar si los resultados obtenidos de l_{ZPF} dependen o no del tipo ensayo realizado, se comparan a continuación estos resultados con los presentados por Huespe *et al.* en [33]. En esta referencia se utilizó para el análisis una viga entallada, bi-apoyada y con una carga puntual en el punto medio (ensayo que se llamará *viga de tres puntos*) cuyas dimensiones geométricas son comparables al ensayo DCB aunque sus propiedades materiales difieren (módulo de Young de $E = 35 \text{ GPa}$ y resistencia a tracción de $f_t = 3,0 \text{ MPa}$ para el ensayo DCB frente a módulo de Young de $E = 20 \text{ GPa}$ y resistencia a tracción de $f_t = 2,4 \text{ MPa}$ para la viga de tres puntos).

En la Figura 5.26 se comparan los resultados obtenidos para el ensayo DCB y los de la referencia [33] para la viga de tres puntos. Para caracterizar el material de cada uno de los ensayos se ha utilizado el valor de la longitud característica l_{ch} que se define como:

$$l_{ch} = \frac{E G_f}{\sigma_u^2} \quad (5.6)$$

Si se analizan los resultados obtenidos en la Figura 5.26 se observa que las longitudes de la zona de procesamiento de fractura obtenidas numéricamente para ambos ensayos coinciden. Esta similitud en los resultados es debida a que ambos ensayos tienen dimensiones geométricas similares y que en ambos casos era predominante el modo I de fisuración.

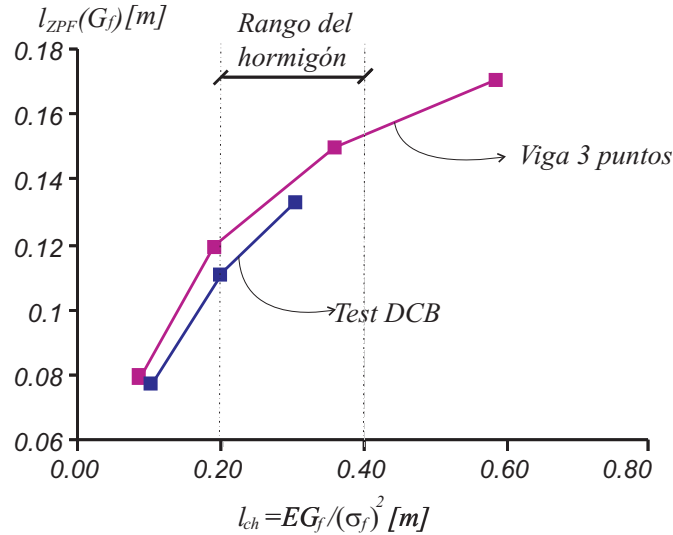


Figura 5.26: Longitud de la zona de procesamiento de fractura *vs.* longitud característica del material.

5.4. Resumen del capítulo

En este capítulo se ha mostrado la capacidad de la herramienta numérica propuesta para reproducir dos fenómenos clave en la mecánica de la fractura: la captura del efecto tamaño y la medición de la zona de procesamiento de fractura.

La captura del efecto tamaño se ha descrito mediante dos grupos de ensayos numéricos: el ensayo brasileño y el ensayo de arrancamiento. En ambos ensayos se reproduce el fenómeno de forma correcta, aunque en el ensayo de arrancamiento los resultados experimentales difieren de los numéricos. Esta diferencia se debe a que el ensayo numérico reproducido no corresponde exactamente con el ensayo de arrancamiento experimental presentado en [26] y [27].

La medición de la zona de procesamiento de fractura se ha realizado utilizando el ensayo DCB para distintos valores de la densidad superficial de energía. Los resultados obtenidos muestran una correlación muy buena con los presentados en [33] para la vida de tres puntos.

Capítulo 6

APLICACIONES AL ESTUDIO DEL FALLO MATERIAL

En este capítulo se presenta una serie de aplicaciones numéricas al estudio del fallo material en diversas estructuras utilizando la metodología de continuo de discontinuidades fuertes. En todos los casos que se exponen a continuación se ha utilizado la formulación simétrica del elemento finito con discontinuidades embebidas y el esquema de integración IMPL-EX, tal como han sido explicados en los Apartados §3.3 y §3.4.

Los ensayos numéricos incluidos en este capítulo se han agrupado en tres grupos:

1. *Reproducción de ensayos experimentales.* Donde se ha buscado reproducir los ensayos clásicos existentes en la literatura. Estos ensayos han sido utilizados históricamente para caracterizar las metodologías numéricas que reproducen el fenómeno de la fractura en modo I de materiales frágiles, y por lo tanto son presentados en primer lugar.
2. *Análisis de estabilidad de taludes.* Al incluir estos análisis se busca mostrar la capacidad de la metodología presentada para analizar problemas con un modo de fallo de superficies de deslizamiento. Sin embargo, hay que señalar que factores como la existencia de suelos semisaturados, el posible carácter anisótropo del material y comportamientos constitutivos propios de los suelos no han sido considerados, reduciéndose el análisis a demostrar la capacidad de la metodología numérica para capturar la localización de deformaciones.
3. *Análisis de la seguridad frente al colapso de presas.* Finalmente, se presentan un conjunto de análisis tridimensionales de distintas presas de hormigón. Se ha considerado que las presas de hormigón constituyen uno de los análisis estructurales más complejos de analizar teniendo como limitación el utilizar un material homogéneo.

6.1. Reproducción de ensayos experimentales

6.1.1. Análisis del ensayo de tracción pura

Descripción del ensayo experimental

Este ensayo ha sido tomado de una serie de ensayos de tracción simple con hormigones presentada por Barragán en la Referencia [2]. De los ensayos realizados por el autor, se ha elegido aquel cuyo material es hormigón simple.

El ensayo que se presenta consiste en un test uniaxial a tracción pura de muestras cilíndricas con una entalla circunferencial en su altura media. El espécimen tiene un diámetro y una altura de 150 mm , siendo la profundidad de las entallas de 10 mm . Las dimensiones y el esquema de aplicación de la carga se describen en la Figura 6.1. Como se observa en dicha figura, no se ha coaccionado el libre giro del espécimen, con lo que la superficie superior no se mantendrá paralela a la inferior conforme avance el proceso de aplicación de la carga.

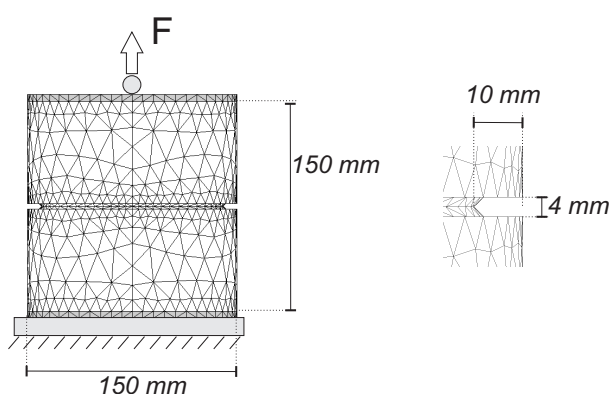


Figura 6.1: Ensayo de tracción pura. Esquema del ensayo.

Las propiedades mecánicas del material se resumen en el Cuadro 6.1 y han sido tomadas de [2], a excepción de la energía de fractura que se ha supuesto igual a 100 N/m .

Cuadro 6.1: Propiedades materiales.

σ_u [MPa]	E [GPa]	ν	G_f [N/m]
1,79	30,5	0,2	100

Descripción del ensayo numérico

Para reproducir numéricamente el ensayo se ha discretizado el modelo tal como lo describe la Figura 6.2. Dado que el giro está permitido en el extremo donde se

aplica la carga, la apertura de la entalla será distinta según el punto en el que se mida. Por ello se ha calculado dicha apertura como la media en tres puntos de la entalla equidistantes entre sí (ver Figura 6.2c).

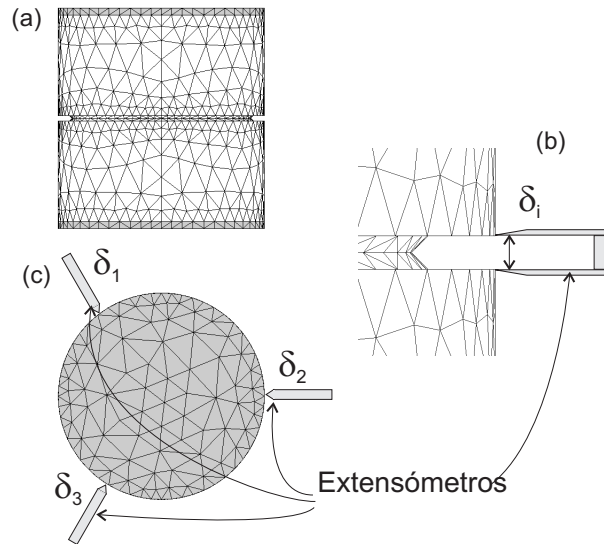


Figura 6.2: Ensayo de tracción pura. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) detalle de entalla, (c) planta y distribución de extensómetros.

Se ha utilizado un modelo material de daño isótropo sólo tracción y como método de continuación se ha controlado la apertura de fisura. El Cuadro 6.2 resume las características principales del ensayo numérico, donde los puntos de integración¹ son los utilizados al integrar la parte regular de las deformaciones o tensiones.

Cuadro 6.2: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Integración	Modelo material
2067	8543	Tetraedro	1	Daño Isótropo solo tracción

¹En lo que resta de capítulo, cuando se caracterice el tipo de elemento finito por el número de puntos de integración que poseen, se referirá exclusivamente a los puntos de integración regulares o estándares. Los puntos de integración singulares, aquellos que se añaden para obtener las tensiones y deformaciones en la superficie de discontinuidad y poder así imponer la continuidad de tracciones dentro del elemento, no han sido considerados.

Descripción de los resultados numéricos

Conforme avanza el proceso de aplicación de la carga, la localización de deformaciones tiene lugar en la sección central donde se ha situado la entalla. Esta superficie de discontinuidad aparece de forma natural en la aproximación numérica, habiéndose utilizado para capturar la superficie de fractura el método descrito en [79] y [62] y resumido en el Apéndice C². En la Figura 6.3 se muestra la superficie de fractura generada, una imagen del espécimen deformado y un corte longitudinal donde se han dibujado las líneas de iso-desplazamientos al final del proceso de carga.

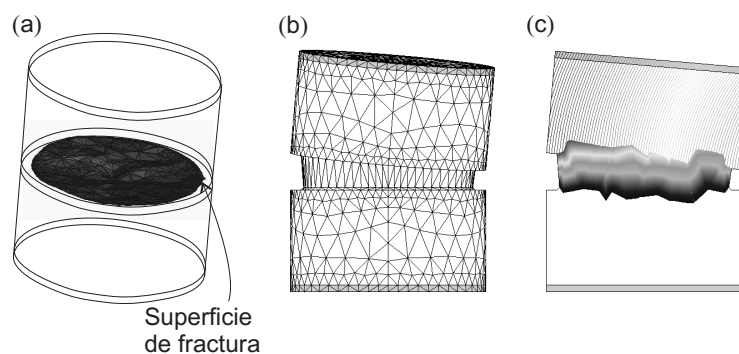


Figura 6.3: Ensayo de tracción pura. (a) Superficie de fractura, (b) Deformada, (c) Líneas de iso-desplazamientos en corte longitudinal.

La Figura 6.4 muestra la evolución de la resistencia nominal *vs.* la apertura media de la entalla. La apertura media se ha obtenido como la media aritmética de las aperturas medidas por los tres extensómetros (descritos en la Figura 6.2c) y la resistencia nominal se ha obtenido como:

$$\sigma_n = \frac{4 P_u}{\pi D^2} \quad (6.1)$$

donde P_u es la carga última y D es el diámetro de la sección entallada y que es de 130 *mm*. Junto a los resultados numéricos se dibuja la envolvente de los resultados experimentales descritos en [2]. Como se puede observar, los resultados experimentales muestran una gran dispersión en la rama pre-crítica (antes de llegar a la carga pico) y los resultados numéricos se ajustan en esta fase en el contorno superior de la envolvente. Sin embargo, los resultados numéricos muestran un muy buen ajuste en la rama post-crítica.

Finalmente, las Figuras 6.5 y 6.6 muestran, respectivamente, la evolución en el tiempo del avance de la fisura y del área dañada en la superficie de localización. Siguiendo los instantes marcados en la Figura 6.4, en la Figura 6.5 se muestran el área fisurada en (a) el inicio de la fisuración, (b) para la carga pico y (c) al final del ensayo. Dado que en la evolución del área localizada de la Figura 6.5 no se

²Este algoritmo, cuya finalidad es manejar con eficacia un conjunto de fisuras activas, ha sido utilizado en todos los análisis presentados en el presente capítulo.

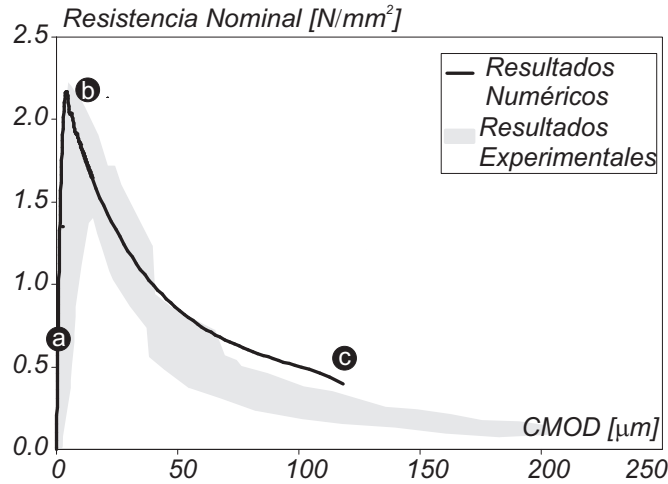


Figura 6.4: Ensayo de tracción pura. Curva Fuerza aplicada *vs.* Apertura media en la entalla.

aprecia el carácter no simétrico de la deformación, en la Figura 6.6 se muestra la evolución de la variable de daño, pero limitando el rango a $d \in [0,85, 1,0]$ (la zona cuya variable de daño sea $d \leq 0,85$ se ha pintado con el mismo color).

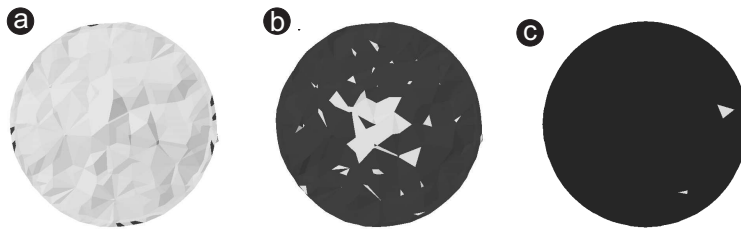


Figura 6.5: Ensayo de tracción pura. Evolución de la fisuración (en negro los elementos donde se ha cumplido la condición de bifurcación).

6.1.2. Análisis a flexión de una viga con doble entalla

Descripción del ensayo experimental

A continuación se reproduce el ensayo a flexión de la viga con doble entalla presentada originalmente por Bocca *et al.* en [11]. Se trata de una viga de $0,8\ m$ de largo, $0,2\ m$ de alto y un espesor de $0,1\ m$ con una doble entalla en su sección media. Las dimensiones y el esquema de cargas y apoyos están descritos en la Figura 6.7.

Las propiedades del material han sido tomadas de [11] y se resumen en el Cuadro 6.3.

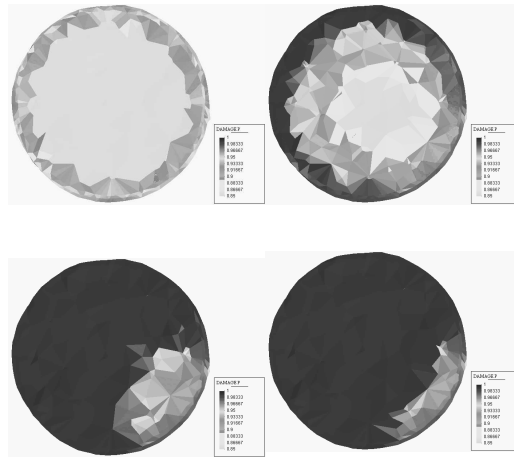


Figura 6.6: Ensayo de tracción pura. Evolución de la variable de daño d en la superficie de fractura.

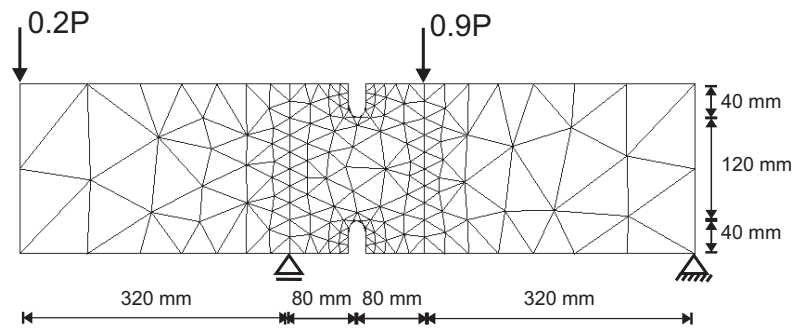


Figura 6.7: Ensayo de viga con doble entalla. Esquema del ensayo.

Cuadro 6.3: Propiedades materiales.

σ_u	E	ν	G_f
[MPa]	[GPa]		[N/m]
2,0	27,0	0,18	100

Descripción del ensayo numérico

La Figura 6.8 muestra la discretización en elementos finitos del modelo geométrico. Se han utilizado elementos tetraédricos con un mallado más fino en la sección central. Como método de continuación se ha utilizado el algoritmo de control de longitud de arco descrito en el Apartado 3.6 y como modelo material el modelo de daño isótropo sólo-tracción

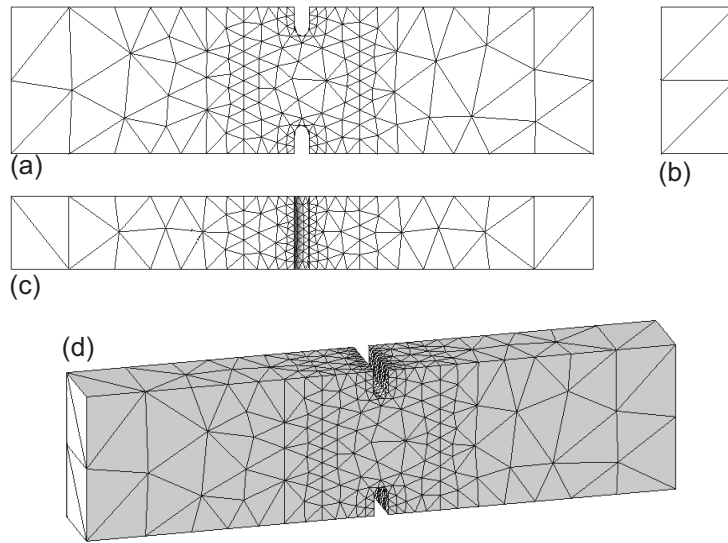


Figura 6.8: Ensayo de viga con doble entalla. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.

Las características generales del ensayo numérico están descritas en el Cuadro 6.4.

Cuadro 6.4: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Integración	Modelo material
863	2967	Tetraedro	1	Daño Isótropo solo tracción

Descripción de los resultados numéricos

Al aplicar el esquema de cargas descrito en la Figura 6.7 aparecen consecutivamente dos fisuras que tienen su origen en las entallas del espécimen. Ambas fisuras progresan, aproximadamente de forma simétrica, hasta que una de ellas prevalece mientras que la otra entra en descarga y se descarga. La Figura 6.9 muestra ambas superficies de fractura mientras que la Figura 6.10 muestra la deformada final junto con las líneas de iso-desplazamientos. En esta figura se puede observar como sólo una de las fisuras se ha mantenido activa hasta la fase final y como la otra ha entrado en descarga y ha recuperado las deformaciones que había sufrido. Este resultado sugiere que durante el proceso de carga se ha intersectado un punto de bifurcación de ruptura de simetría. En nuestro modelo numérico, estos puntos de

bifurcación no son específicamente tratados. Pueden resolverse sólo porque la malla de E.F. introduce una pérdida de simetría del problema, que permite el cruce de ese punto de bifurcación.

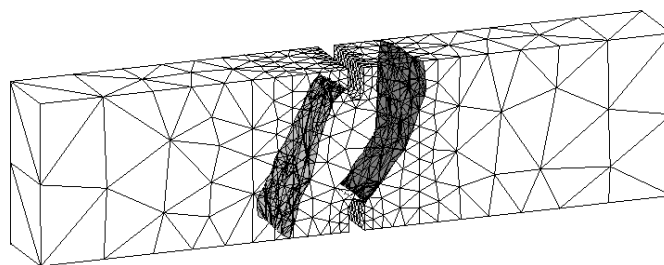


Figura 6.9: Ensayo de viga con doble entalla. Superficies de fractura.

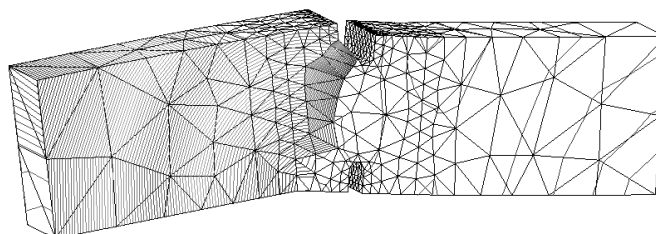


Figura 6.10: Ensayo de viga con doble entalla. Deformada y líneas de isodesplazamientos.

La Figura 6.11 muestra la curva fuerza total aplicada *vs.* el desplazamiento vertical de un punto situado en la parte superior de la sección central. También se muestran los resultados experimentales tomados de [11]. Se observa que los resultados numéricos sobrestiman la carga pico, fenómeno también observado en los análisis bidimensionales realizados por Samaniego en [79] y por Rabczuk & Belytschko en [70].

La Figura 6.12 describe la evolución del estado de fisuración en los cuatro instantes de tiempo marcados en la Figura 6.11: (a) inicio de la primera fisura, (b) inicio de la segunda fisura, (c) instante en que la segunda fisura descarga manteniéndose activa sólo la primera y (d) final del ensayo.

6.1.3. Análisis a flexión de una viga con una entalla

Descripción del ensayo experimental

El ensayo numérico que se muestra a continuación reproduce el ensayo experimental presentado por Arrea y Ingraffea en [1]. Se trata del ensayo a flexión de una

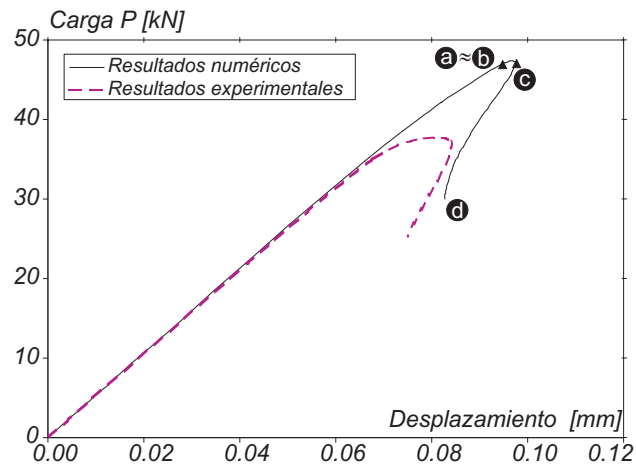


Figura 6.11: Ensayo de viga con doble entalla. Curva Fuerza *vs.* Desplazamiento vertical en la sección central.

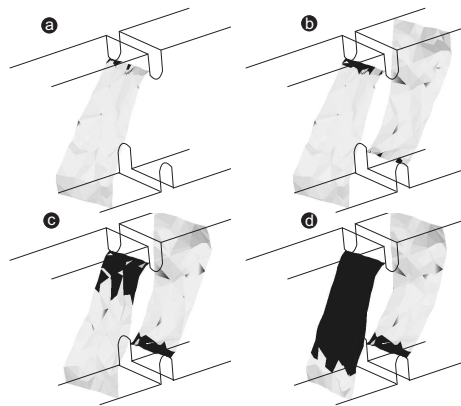


Figura 6.12: Ensayo de viga con doble entalla. Evolución de la fisuración.

viga de 1,322 *m* de largo, 0,306 *m* de alto y un espesor de 0,156 *m* con una entalla en su parte inferior. Las dimensiones y el esquema de cargas y apoyos se describen en la Figura 6.13.

Las propiedades del material se resumen en el Cuadro 6.5 y han sido tomadas de [1].

Descripción del ensayo numérico

La Figura 6.14 muestra la discretización por elementos finitos del modelo geométrico. Se ha utilizado una malla no estructurada de elementos tetraédricos.

Las características generales del ensayo numérico están descritas en el Cuadro 6.6. Se ha utilizado como modelo material el modelo de daño isotropo sólo tracción

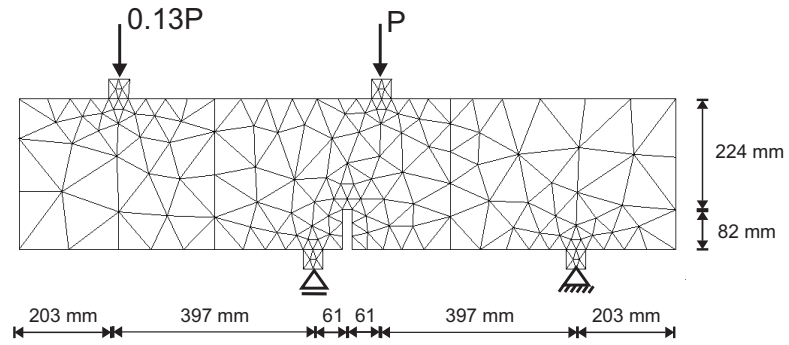


Figura 6.13: Ensayo de viga con una entalla. Esquema del ensayo.

Cuadro 6.5: Propiedades materiales.

σ_u	E	ν	G_f
[MPa]	[GPa]		[N/m]
2,8	24,0	0,18	100

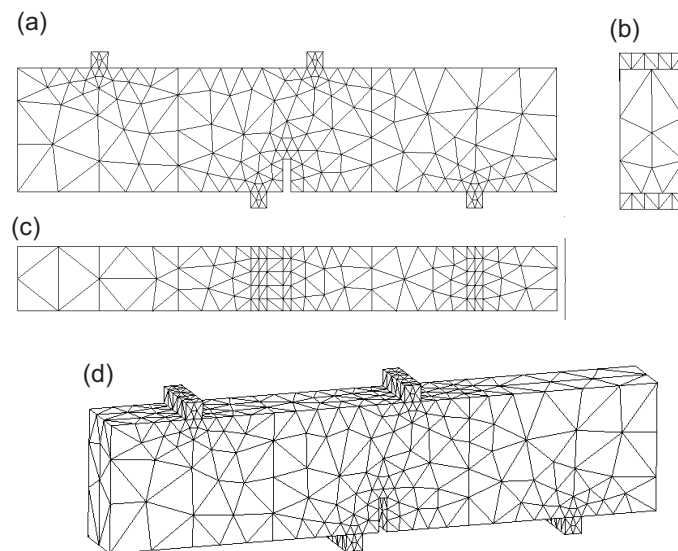


Figura 6.14: Ensayo de viga con una entalla. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.

y como método de continuación un control del desplazamiento vertical entre los puntos de la boca de la entalla (CMSD con sus siglas en inglés).

Cuadro 6.6: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Integración	Modelo material
1227	5341	Tetraedro	1	Daño Isótropo solo tracción

Descripción de los resultados numéricos

El ensayo numérico se ha llevado a cabo aplicando el esquema de cargas descrito en la Figura 6.13 y permitiendo únicamente la aparición de la fisura principal. Esta fisura, tal como se muestra en la Figura 6.15, se inicia en la entalla y llega hasta el borde derecho de la línea de aplicación de la carga.

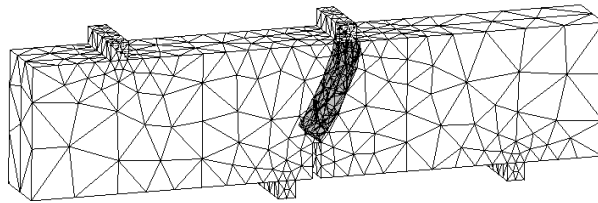


Figura 6.15: Ensayo de viga con una entalla. Superficie de fractura.

El agotamiento del espécimen tiene lugar cuando la fisura principal se desarrolla completamente, llegando hasta la zona superior de la pieza. La Figura 6.16 muestra una imagen de la viga deformada al final del proceso de carga junto con las líneas de iso-desplazamientos.

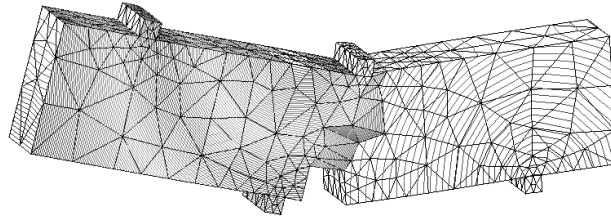


Figura 6.16: Ensayo de viga con una entalla. Deformada y líneas de isodesplazamientos.

La Figura 6.17 describe la curva Fuerza aplicada *vs.* deslizamiento vertical en la boca de la entalla (CMSD con sus siglas en inglés). También se presentan los resultados experimentales tomados de [1]. Como se puede observar, hay un buen ajuste de los resultados experimentales y numéricos para determinar la carga pico,

aunque en la rama pre-crítica el resultado numérico presenta una rigidez inicial algo menor a lo esperado.

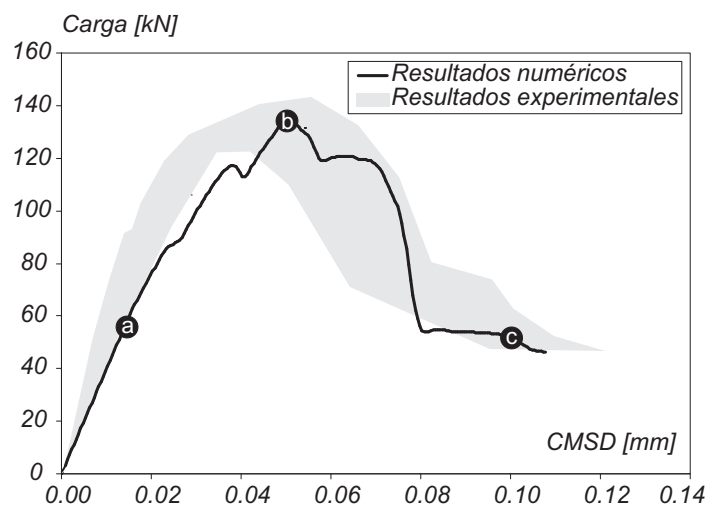


Figura 6.17: Ensayo de viga con una entalla. Curva Fuerza en el punto de carga vs. Deslizamiento vertical en la boca de la entalla.

Finalmente, la Figura 6.18 muestra la evolución de la fisura en los tres pasos de tiempo indicados en la Figura 6.17: (a) en el instante del inicio de la fisuración, (b) para la carga pico y (c) al final del proceso de carga.

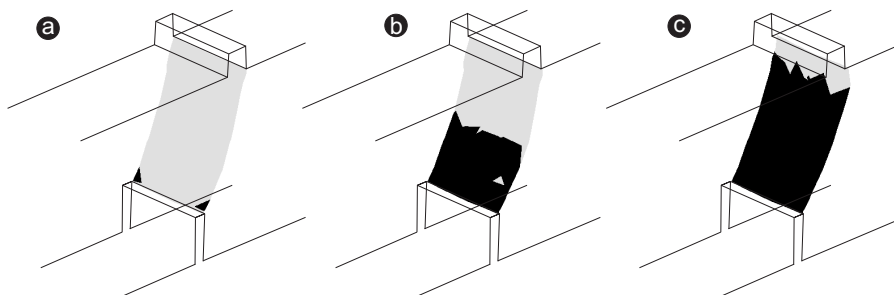


Figura 6.18: Ensayo de viga con una entalla. Evolución de la fisuración.

6.1.4. Análisis del ensayo brasileño

Descripción del ensayo experimental

El ensayo brasileño ya ha sido presentado en el Apartado 5.2.2 con el objetivo de estudiar si la metodología numérica presentada es capaz de reproducir correctamente el efecto tamaño. Sin embargo, es interesante presentar de nuevo este ensayo

para poder estudiar un aspecto difícil de observar en los ensayos experimentales: la evolución de la fisura dentro del espécimen. Para ello se ha llevado a cabo la simulación numérica de un cilindro de hormigón con el esquema de apoyos y cargas descrito en la Figura 6.19.

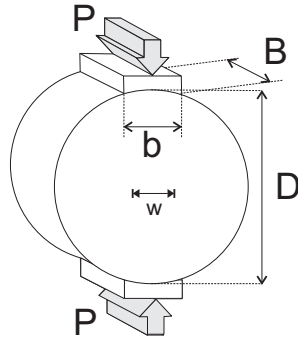


Figura 6.19: Ensayo brasileño. Esquema del ensayo.

Como material se ha considerado un hormigón estándar cuyas propiedades se resumen en el Cuadro 6.7.

Cuadro 6.7: Propiedades materiales.

σ_u	E	ν	G_f
[MPa]	[GPa]		[N/m]
2,6	30,5	0,2	100

Descripción del ensayo numérico

Utilizando el esquema de cargas descrito en la Figura 6.19 se ha simulado el análisis hasta rotura de un espécimen cilíndrico con diámetro $D = 0,3 \text{ m}$, espesor $B = 0,3 \text{ m}$ y anchura de la platabanda $b = 0,05 \text{ m}$. La Figura 6.20 muestra la discretización por elementos finitos del modelo geométrico.

Las características generales del ensayo numérico están descritas en el Cuadro 6.8. Se ha utilizado como modelo material el modelo de daño isótropo sólo tracción y se ha utilizado como método de continuación un control de la apertura horizontal w que tiene lugar entre dos puntos situados a ambos lados de la fisura (ver Figura 6.19).

Descripción de los resultados numéricos

Al realizar el análisis numérico, se ha impuesto que la superficie de rotura sea estrictamente vertical. En este caso no se ha utilizado ninguno de los criterios que proporcionan la dirección de la fisura (bien el criterio de la tensión principal máxima

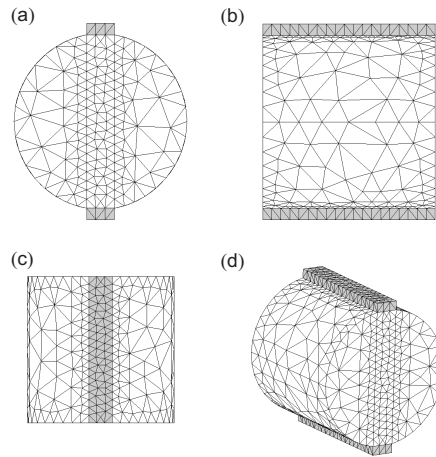


Figura 6.20: Ensayo brasileño. Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.

Cuadro 6.8: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Integración	Modelo material
3257	16751	Tetraedro	1	Daño Isótropo solo tracción

o bien el análisis de los valores de bifurcación del equilibrio descritos en el Apéndice A) sino que se ha impuesto directamente. Esto ha provocado que la fisura resultante sea plana tal como se muestra en la Figura 6.21.

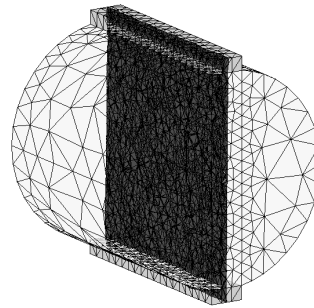


Figura 6.21: Ensayo brasileño. Superficie de fractura.

A su vez, sólo se ha permitido el inicio y desarrollo de la fisura principal en el plano donde se aplican las cargas y se ha obligado a que el material de la platbanda

se mantenga elástico. Este hecho hace que el análisis numérico sólo tenga sentido en el siguiente rango: desde el inicio del proceso de carga hasta la formación de la fisura principal. El resto de mecanismos de disipación que llevan al agotamiento del espécimen (la posterior formación de fisuras secundarias a ambos lados de los apoyos) no se tienen en consideración. La Figura 6.22 muestra una imagen de la deformada del espécimen cuando se ha formado completamente la fisura principal junto con las líneas de iso-desplazamientos.

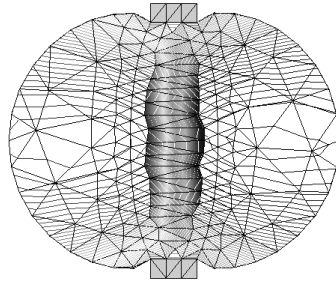


Figura 6.22: Ensayo brasileño. Deformada y líneas de iso-desplazamientos.

La Figura 6.23 muestra la curva Fuerza aplicada *vs.* la Apertura diametral. Ambos valores han sido normalizando dividiendo la fuerza aplicada por el valor de la carga pico y dividiendo las aperturas diametrales por el valor de la apertura diametral para dicha carga pico. De nuevo, la curva mostrada sólo tiene sentido hasta el mínimo que presenta una vez superada la carga máxima. Las limitaciones impuestas en el análisis hacen que los fenómenos que tienen lugar más allá de ese mínimo no puedan ser capturados.

Finalmente, la Figura 6.24 muestra la evolución de la superficie de fractura en los cuatro pasos de tiempo marcados en la Figura 6.23. Los pasos de tiempo corresponden a los siguientes fenómenos: (a) inicio de la fisuración en los bordes del espécimen, (b) unión parcial de las áreas fisuradas, (c) unión total de las áreas fisuradas y (d) fisura en el instante de carga máxima.

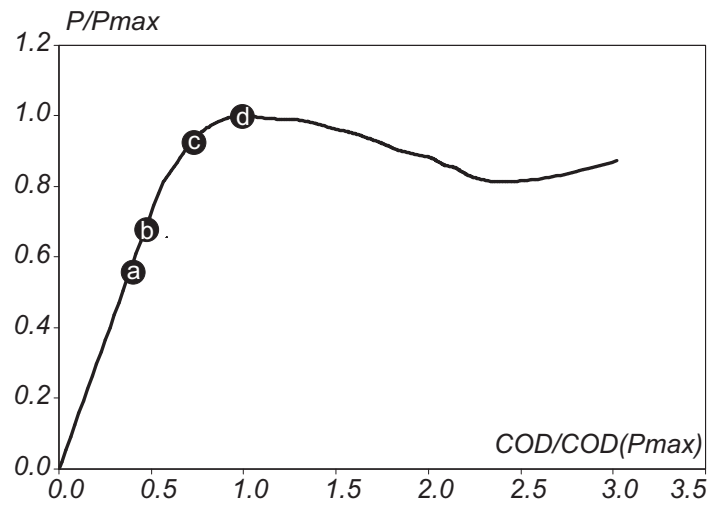


Figura 6.23: Ensayo brasileño. Curva Fuerza normalizada vs. Apertura diametral normalizada.

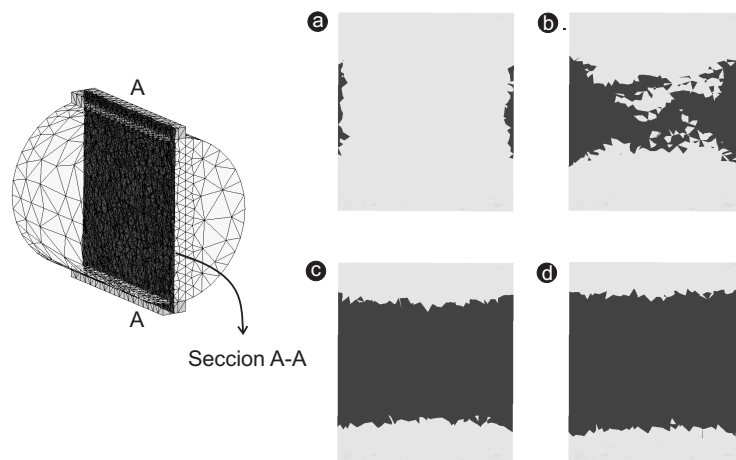


Figura 6.24: Ensayo brasileño. Evolución de la fisuración en la sección A-A.

6.2. Análisis de estabilidad de taludes

6.2.1. Caso 1: Estabilidad de un talud simétrico con un único material deformable

Descripción del ensayo numérico

El primer ensayo que se presenta en este apartado consiste en el análisis de la estabilidad de un talud simétrico formado por un único material. Se trata de un talud de 10 metros de altura y un ángulo de inclinación de 60° . La Figura 6.25 describe las dimensiones y la discretización por elementos finitos del modelo analizado.

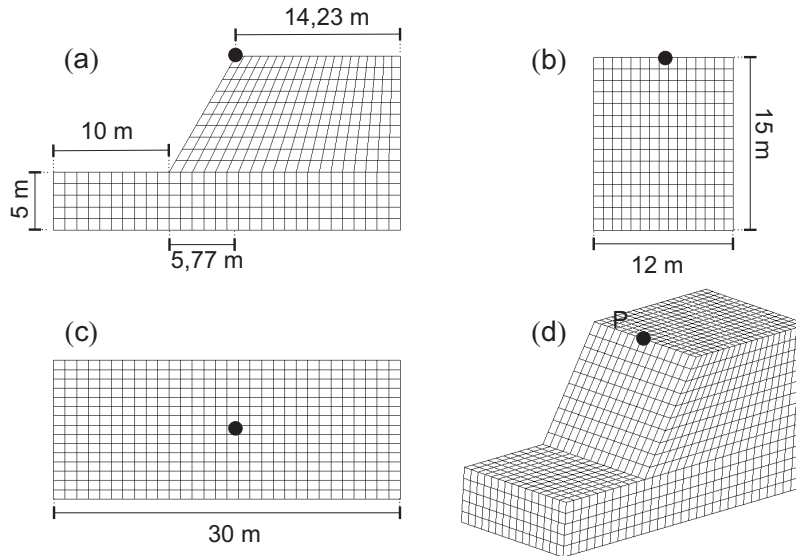


Figura 6.25: Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) vista lateral, (c) planta, (d) perspectiva.

El material deformable se ha caracterizado mediante un modelo de plasticidad asociada con el criterio de fallo de Von Mises³ [63] cuyos parámetros materiales se describen en el Cuadro 6.9. En este cuadro el valor de σ_e es el valor de la tensión de comparación o límite de fluencia para el material sin degradar.

El análisis de seguridad frente al colapso llevado a cabo ha consistido en imponer un valor creciente del peso propio hasta llegar a la formación de una superficie de localización. Al parámetro material de la densidad, cuyo valor es de $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$, se le multiplica por un factor de carga creciente hasta que se produce el deslizamiento de la cresta del talud. Las condiciones de contorno asumidas se describen en la Figura 6.26.

³Se puede considerar que un suelo queda caracterizado mediante un modelo J2 en el caso de suelos completamente saturados.

Cuadro 6.9: Propiedades del material deformable.

σ_e [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
0,1	10,0	0,4	10	1800

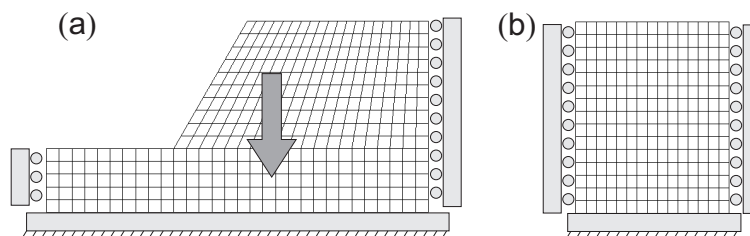


Figura 6.26: Esquema de la simulación.

Las características de la simulación han sido descritas en el Cuadro 6.10. El tipo de elemento finito utilizado ha sido un hexaedro con ocho puntos de integración regulares y se ha aplicado el método BBAR⁴. En el análisis numérico se ha aplicado, como método de continuación, un control del desplazamiento horizontal en el arranque del talud. A su vez, sólo se ha permitido la formación de una única superficie de localización, aunque se ha permitido que fuera de la fisura el material pueda entrar en carga y disipar mediante un modelo de plasticidad casi-perfecta (un módulo de endurecimiento $H \rightarrow 0^+$).

Cuadro 6.10: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
6336	5250	Hexaedro BBAR	8	Plasticidad Von Mises

Descripción de los resultados numéricos

Como se ha indicado anteriormente, se ha aumentado el peso propio de todo el material de forma progresiva hasta la formación final de la superficie de desliza-

⁴En la simulación de la estabilidad de taludes se ha utilizado el modelo de plasticidad de Von Mises. En este modelo las deformaciones plásticas provocan una deformación volumétrica nula, lo que hace que este tipo de material pueda considerarse incompresible (despreciando la deformación volumétrica provocada por la parte elástica de las deformaciones). El modelo BBAR utilizado permite superar el bloqueo que se produce en estas situaciones [34].

miento que se muestra en la superficie 6.27. Esta superficie, desarrollada para un talud con un único material, presenta una forma de función circular.

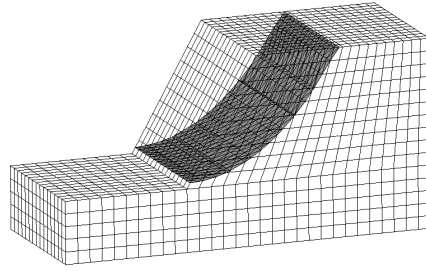


Figura 6.27: Superficie de fractura.

El proceso de localización de deformaciones presenta dos fases. En una primera fase una parte importante del material del talud alcanza el régimen inelástico pero no se produce la localización de las deformaciones. Posteriormente, al irse localizando las deformaciones en una banda, los procesos disipativos también se localizan hasta que sólo una línea de elementos finitos permanece en carga. La Figura 6.28 describe este fenómeno.

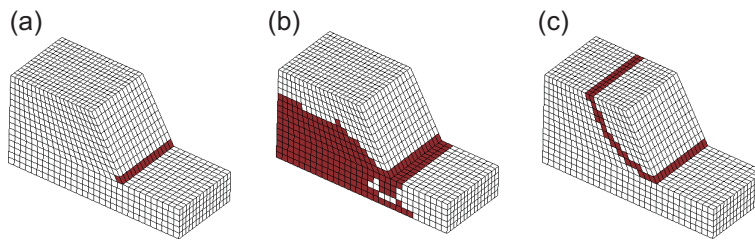


Figura 6.28: Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.

La deformada y las líneas de iso-desplazamientos al final del ensayo se muestran en la Figura 6.29. Al haber utilizado el modelo de plasticidad asociada de Von Mises, el fallo tiene lugar en un modo de deslizamiento, con lo que no aparecen desplazamientos normales a la superficie de fallo.

En la Figura 6.30 se dibuja la curva factor de carga aplicada *vs.* el desplazamiento vertical en la coronación del talud (marcado como punto P en la Figura 6.25). La carga máxima aplicada corresponde a un valor de la densidad de 2700 kg/m^3 , que se obtiene multiplicando el factor máximo de carga 1,5 por el valor de la propiedad densidad del material 1800 kg/m^3 .

Por último, la Figura 6.31 muestra la evolución de fisuración en la superficie de localización para los tres pasos de tiempo marcados en la Figura 6.30: (a) en el inicio de la fisuración, (b) para la carga pico y (c) al final del proceso de carga.

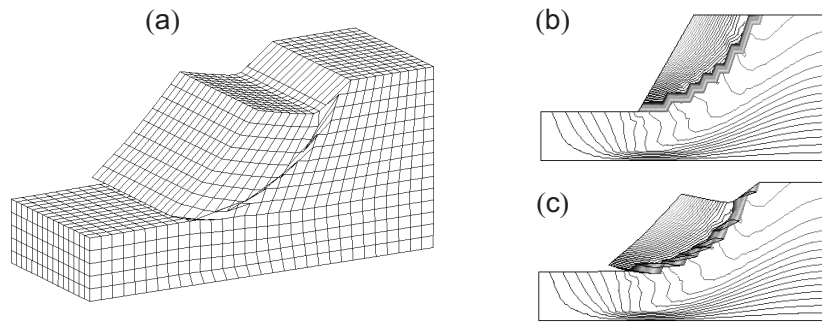


Figura 6.29: Deformada y líneas de iso-desplazamientos.

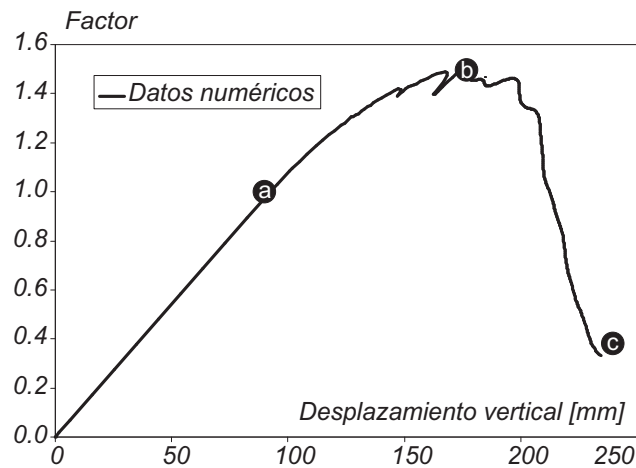


Figura 6.30: Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento vertical en coronación.

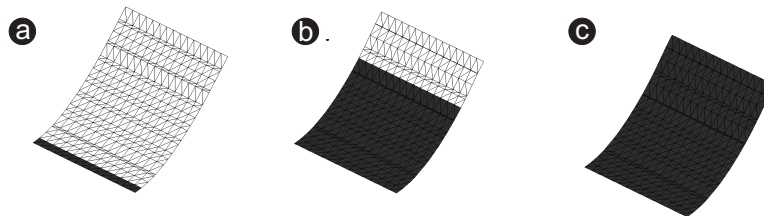


Figura 6.31: Evolución de la fisuración.

6.2.2. Caso 2: Estabilidad de un talud simétrico con un material blando sobre un lecho de roca rígido

Descripción del ensayo numérico

El ensayo que se describe a continuación analiza la estabilidad de un talud compuesto por un material elastoplástico que descansa sobre un lecho de roca

rígido. Se trata de un talud con una altura de 5 metros y un ángulo de inclinación de 45° . El lecho de roca tiene un escalón cuyo objetivo es influir en la forma de la superficie de rotura que se generaría si el talud estuviese formado por un único material. La Figura 6.32 muestra las dimensiones y la discretización por elementos finitos del modelo analizado.

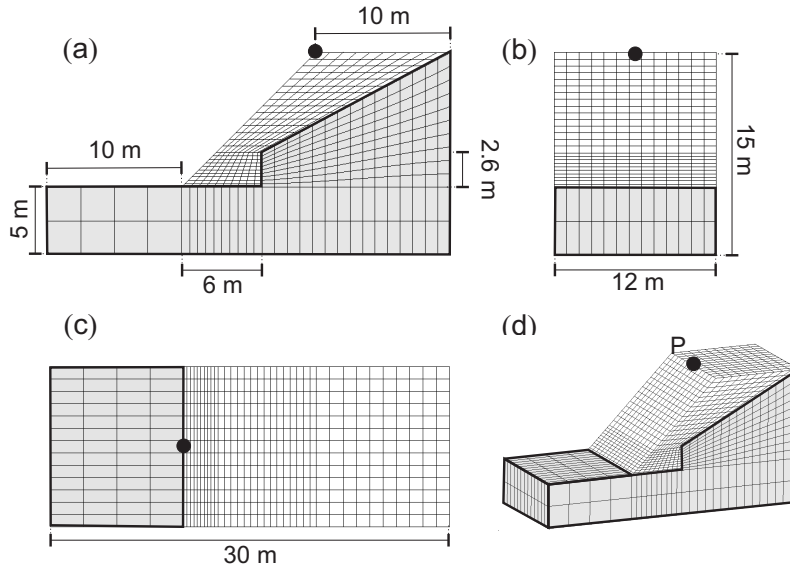


Figura 6.32: Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado, (b) planta, (c) vista lateral, (d) perspectiva.

Los materiales se han caracterizado mediante un modelo de plasticidad asociada con el criterio de fallo de Von Mises. Los parámetros para el material elastoplástico y el lecho de roca se muestran en los Cuadros 6.11 y 6.12 respectivamente. Como se puede observar, se ha impuesto que el material del lecho de roca se mantenga siempre en el rango elástico.

Cuadro 6.11: Propiedades del material elastoplástico.

σ_e [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
0,1	10,0	0,4	10	1800

Como acción exterior se ha considerado que el peso propio aumenta gradualmente (al valor del parámetro densidad del material $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ se le multiplica por un factor creciente) hasta lograr la formación y el desarrollo de una superficie de localización. Las condiciones de contorno consideradas se muestran en la Figura 6.33.

Cuadro 6.12: Propiedades del lecho de roca.

σ_e [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
∞	100,0	0,4	10	1800

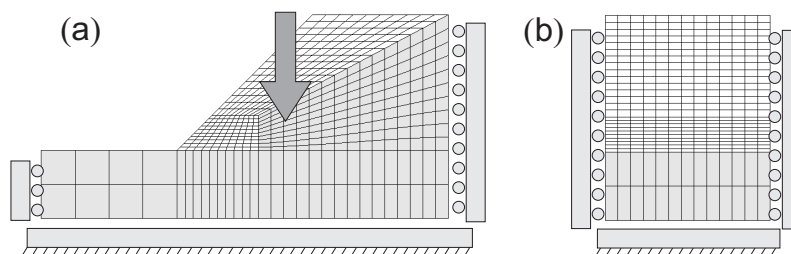


Figura 6.33: Esquema de la simulación.

Las características del ensayo numérico se describen en el Cuadro 6.13. Se ha utilizado un elemento hexaédrico con 8 puntos de integración (para las deformaciones y tensiones regulares) aplicando el método BBAR [34]. El análisis numérico se ha llevado a cabo aplicando como método de continuación un control del desplazamiento vertical en la cresta del talud (ver punto P en la Figura 6.32). Como en el análisis anterior, sólo se ha permitido el desarrollo de una única superficie de localización, aunque se ha permitido que fuera de la fisura el material pueda entrar en carga y disipar mediante un modelo de plasticidad cuasi-perfecta (un módulo de endurecimiento $H \rightarrow 0^+$).

Cuadro 6.13: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
7000	5954	Hexaedro BBAR	8	Plasticidad Von Mises

Descripción de los resultados numéricos

El ensayo se ha llevado a cabo aplicando un peso propio creciente a todos los materiales hasta la formación de una superficie de discontinuidad y el posterior deslizamiento de una parte del talud. La Figura 6.34 muestra la superficie de fractura generada. Como se puede observar, la existencia del lecho de roca tiene como consecuencia que la superficie de localización esté compuesta por dos segmentos curvos.

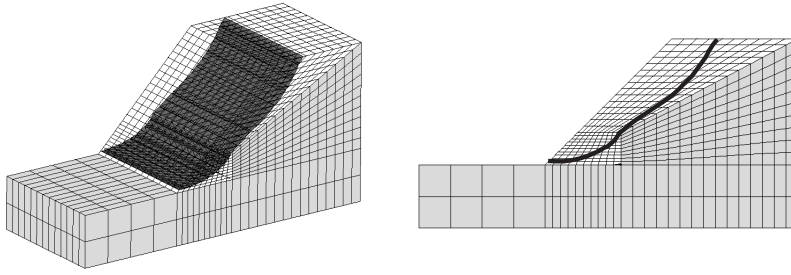


Figura 6.34: Superficie de fractura.

En este ensayo, el proceso de localización no tiene lugar de forma tan nítida como en el ensayo anterior. Como se observa en la Figura 6.35, tras el inicio de la fisuración una parte importante del talud entra en el rango inelástico. Posteriormente, conforme las deformaciones se localizan en una banda estrecha, los elementos en carga se reducen a los elementos dentro de dicha banda. Sin embargo, en la Figura 6.35c aparece una zona con comportamiento inelástico en aquellos elementos próximos al escalón del lecho de roca y fuera de la superficie de localización.

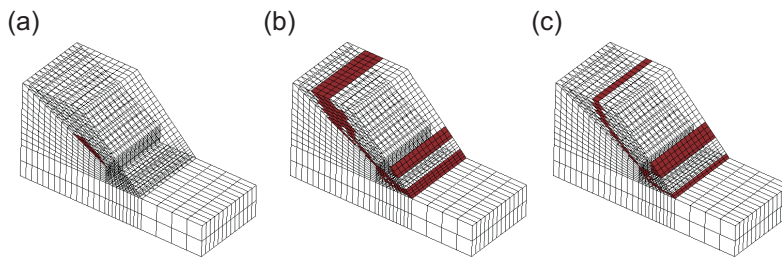


Figura 6.35: Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.

La Figura 6.36 muestra una imagen de la deformada al final del proceso de carga. Debido a que se ha elegido como modelo material el modelo de plasticidad de Von Mises, no hay desplazamiento normal a la superficie de localización (sólo hay deslizamiento tangencial).

La Figura 6.37 muestra la curva factor de carga aplicado *vs.* el desplazamiento vertical de la coronación del talud. La carga máxima aplicada corresponde a una densidad cuyo valor es la densidad original del material $\rho = 1800 \text{ kg/m}^3$ multiplicada por un factor de 2,72, lo que corresponde a una densidad final de $\rho = 4896 \text{ kg/m}^3$.

Finalmente, en la Figura 6.38 se observa la evolución de la superficie fisurada conforme avanza el proceso de carga. Las imágenes muestran el estado de la fisura

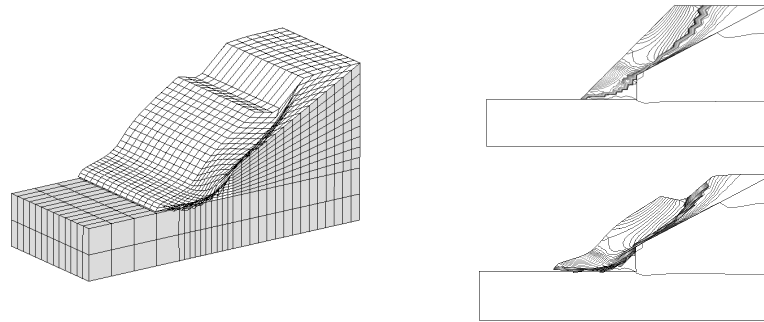


Figura 6.36: Deformada y líneas de iso-desplazamientos.

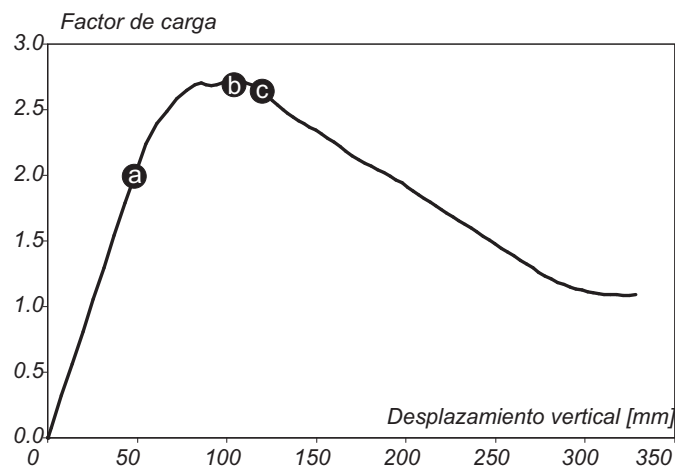


Figura 6.37: Curva Factor de Carga *vs.* Desplazamiento vertical en coronación.

en los tres instantes de carga marcados en la Figura 6.37: (a) en el inicio de la fisuración, (b) para la carga pico y (c) cuando ha localizado toda la superficie. En el instante (a) se observa cómo el inicio de la fisuración tiene lugar, para este ensayo, junto al escalón del lecho de roca y no en la cota más baja de la superficie de rotura como en el ejemplo anterior.

6.2.3. Caso 3: Estabilidad de un talud asimétrico con un material blando sobre un lecho de roca rígido

Descripción del ensayo numérico

El último de los taludes mostrados en este apartado presenta un lecho de roca inclinado con un escalón y, a diferencia de los dos anteriores, no presenta simetría respecto a su sección central. El material elastoplástico forma un talud de 12 m de

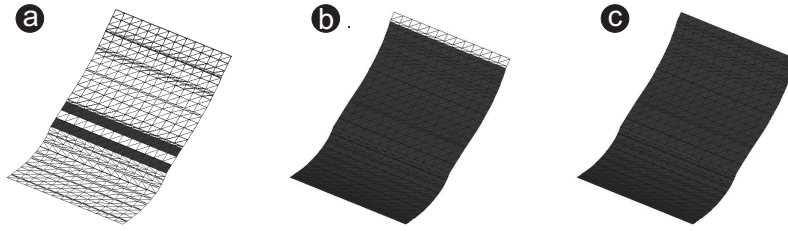


Figura 6.38: Evolución de la fractura.

alto y un ángulo $50,2^\circ$ de inclinación en su parte más alta y de 8 m de alto y un ángulo de $38,7^\circ$ inclinación en su parte más baja. En la Figura 6.39 se muestra un esquema del ensayo junto con su discretización por elementos finitos.

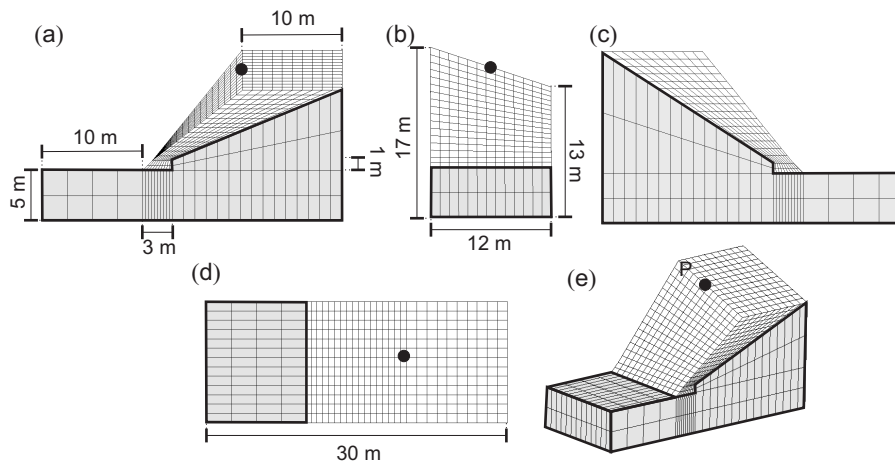


Figura 6.39: Modelo discretizado por elementos finitos: (a) alzado 1, (b) vista lateral, (c) alzado 2, (d) planta, (e) perspectiva.

Como en el ejemplo anterior, los materiales se han caracterizado mediante un modelo de plasticidad con el criterio de fallo de Von Mises para el material que localizará y con comportamiento elástico para el material del lecho de roca. Los parámetros para el material elastoplástico y el lecho de roca se muestran en los Cuadros 6.14 y 6.15 respectivamente.

Cuadro 6.14: Propiedades del material elastoplástico.

σ_e [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
0,1	10,0	0,4	10	1800

Cuadro 6.15: Propiedades del lecho de roca.

σ_e [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m^3
∞	100,0	0,4	10	1800

Como acción exterior se ha considerado que la densidad de los materiales aumenta de forma gradual hasta que tiene lugar la localización de deformaciones formando una cuña de deslizamiento. Las condiciones de contorno asumidas están descritas en la Figura 6.40.

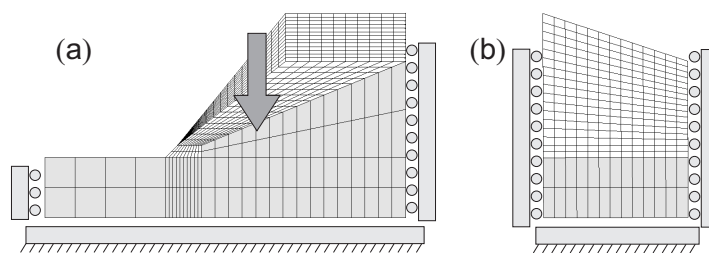


Figura 6.40: Esquema de la simulación.

Las características generales del ensayo numérico se resumen en el Cuadro 6.16. Como método de continuación se ha utilizado el algoritmo de control de longitud de arco descrito en el Apartado 3.6 y como tipo de elemento finito un elemento hexaédrico con ocho puntos de integración. En este ensayo, como en los dos anteriores, se ha utilizado el método de integración BBAR. A su vez, se ha restringido a una el número de fisuras posibles, aunque se ha permitido que fuera de la fisura el material pueda entrar en carga y disipar mediante un modelo de plasticidad cuasi-perfecta (un módulo de endurecimiento $H \rightarrow 0$).

Cuadro 6.16: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
4088	3354	Hexaedro BBAR	8	Plasticidad Von Mises

Descripción de los resultados numéricos

Dado el carácter no simétrico del talud, al aplicar al material una densidad creciente se forma una superficie curva sin plano de simetría. Esta superficie, dibujada

en la Figura 6.41, en la parte más baja del talud se desarrolla íntegramente dentro del material elastoplástico y penetra por la parte más alta del talud dentro del lecho de roca.

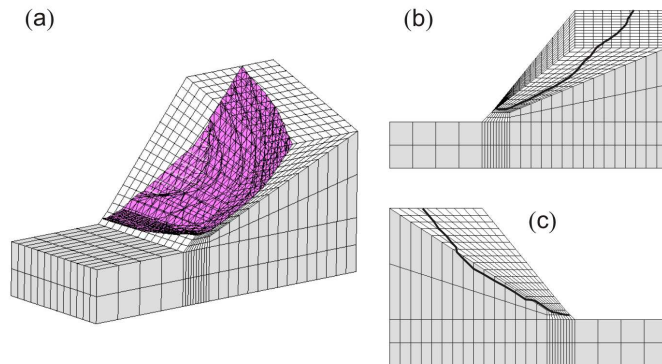


Figura 6.41: Superficie de fractura.

En el proceso de localización de deformaciones se pueden distinguir dos fases. En una primera fase una parte importante del material entra en régimen inelástico sin que se produzca una localización de las deformaciones. Posteriormente, conforme avanza el proceso de carga, los fenómenos inelásticos se localizan en una banda que da lugar a la superficie de localización. La Figura 6.42 describe este fenómeno.

Como se observa en la Figura 6.41 una parte de la superficie de fisura permitida atraviesa el lecho de roca, que se ha obligado a ser elástico. Esta restricción ha provocado que la localización de deformaciones tenga lugar, en esa zona, no dentro de la superficie de localización, sino en los elementos del material elastoplástico en contacto con el lecho de roca.

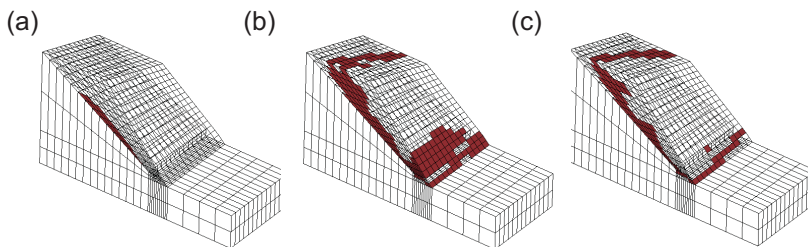


Figura 6.42: Evolución de la localización de los procesos inelásticos: (a) inicio de los procesos inelásticos, (b) inicio del proceso de localización y (c) estado final.

La deformada final del proceso de carga se describe en la Figura 6.43. Como se ha indicado anteriormente, la localización en la parte más baja del talud tiene lugar dentro de la superficie de fisura permitida, desarrollada en su totalidad en el material elastoplástico. Sin embargo, la localización en la parte más alta del talud

no tiene lugar en la superficie de fisura, sino en aquellos elementos pertenecientes al material elastoplástico en contacto con el lecho de roca.

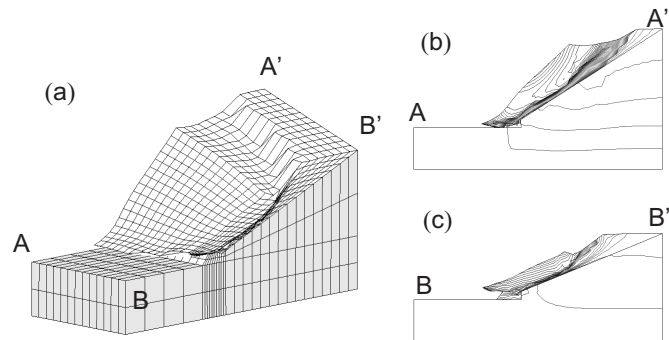


Figura 6.43: Deformada y líneas de iso-desplazamientos.

La Figura 6.44 muestra la curva factor de carga aplicado *vs.* el desplazamiento vertical de un punto situado en la parte central de la coronación de talud (ver Figura 6.39). La carga máxima aplicada corresponde a una densidad del material de 4896 kg/m^3 , valor que resulta de multiplicar el valor del parámetro densidad del material, igual a 1800 kg/m^3 , por el máximo factor de carga aplicado de 2,72.

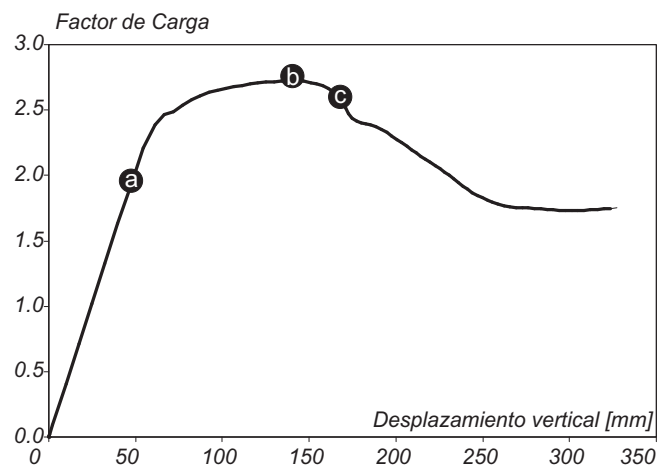


Figura 6.44: Curva Factor de Carga *vs.* Desplazamiento vertical en coronación.

Finalmente, la Figura 6.45 muestra la evolución de la fisuración dentro de la superficie de localización en los tres pasos de tiempo marcados en la Figura 6.44: (a) en el inicio del proceso de localización, (b) para la carga pico y (c) cuando la fisuración de la superficie de localización se puede considerar completa. Destacar de la Figura 6.45 que el inicio de la fisuración tiene lugar en el interior del talud y que, como ya se explicado anteriormente, no se ha producido la localización de

deformaciones en aquella zona de la superficie de fisuración que se ha desarrollado en el seno del lecho de roca.

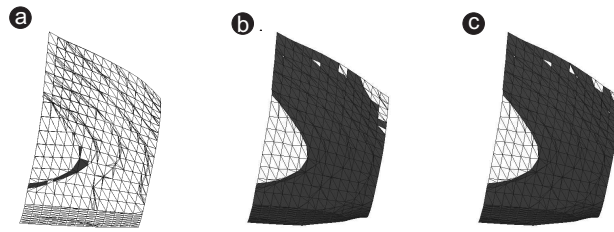


Figura 6.45: Evolución de la fractura.

6.3. Análisis de la capacidad resistente de presas de hormigón

La obtención de factores de seguridad en presas que informen sobre su resistencia global lleva aparejada una dificultad inherente: *la necesidad de tener en consideración los mecanismos resistentes tridimensionales*. Estos mecanismos, si bien pueden no ser relevantes para el caso de presas de gravedad con directriz recta, son insoslayables para los casos de presas tipo arco o tipo bóveda.

Un segundo fenómeno que no admite la reducción a un problema plano es el propio mecanismo de fallo. Incluso en las presas de gravedad con directriz recta, si la longitud de la presa no es lo suficientemente grande, el análisis plano del fallo de la sección central no describe correctamente el comportamiento global del fallo de la estructura.

Por todo lo anterior, el análisis del fallo estructural de presas debe realizarse en buena parte de los casos mediante un análisis tridimensional, sin realizar las simplificaciones que llevan a problemas de deformación plana. Sin embargo, tal como se indicó en el Capítulo §3, los análisis tridimensionales del fallo material sufren serios problemas de falta de convergencia. Como consecuencia, la metodología numérica presentada en este trabajo, que tiene como una de sus características principales la robustez en el análisis numérico, se convierte así en una opción adecuada para este tipo de análisis.

En este apartado se presenten los análisis de la capacidad resistente de dos presas reales: la presa de Scalere (Italia) y la presa de Alqueva (Portugal). En la primera se estudia la capacidad de la estructura frente a los empujes horizontales del agua (se consideran dos hipótesis para modelar estos empujes), mientras que en la segunda se analizan los efectos sobre la estructura cuando tiene lugar un deslizamiento diferenciado de parte de su cimentación.

6.3.1. La presa de Scalere

Descripción de la presa

La presa de Scalere es una presa arco gravedad situada en el centro norte de Italia construida en el periodo 1910-1911. Se trata de una presa de gravedad hecha de hormigón con una directriz ligeramente curva. Esta curvatura permite la aparición de un efecto arco que dota a la estructura de una resistencia adicional. En su construcción no se utilizaron juntas de construcción y los paramentos están forrados con bloques de sillería dispuestos de forma regular⁵. La Figura 6.46 muestra una perspectiva de la presa en la actualidad.

El punto más alto de la coronación de la presa está situado a 830.5 m sobre el nivel del mar, la altura máxima es de 34 metros y la longitud en la coronación es de 158 metros. El espesor máximo en su base es aproximadamente 21 metros mientras

⁵La descripción de la presa de Scalere ha sido tomada del séptimo seminario de referencia en análisis numérico de presas que tuvo lugar en Bucares (Rumanía) dentro de la red de investigación IALAD (Integrity assessment of large concrete dams) [30].



Figura 6.46: Presa de Scalere. Perspectiva.

que en su coronación es de 3 a 5 metros. La Figura 6.47 muestra la definición geométrica del cuerpo de la presa.

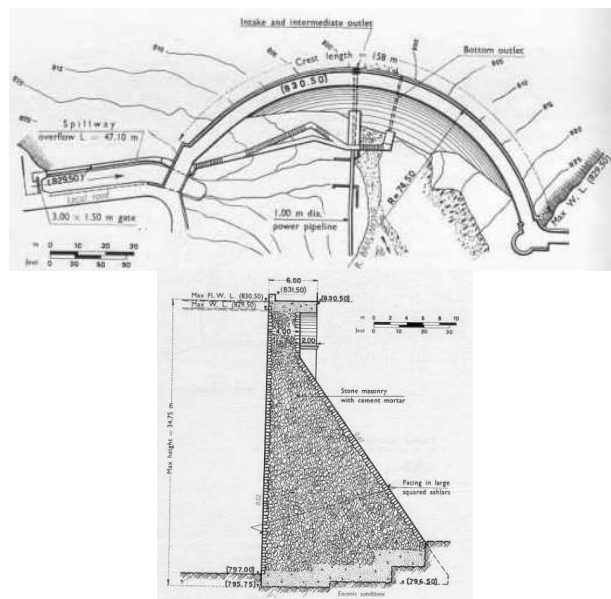


Figura 6.47: Presa de Scalere. Definición geométrica.

Descripción de las propiedades materiales

Para caracterizar los materiales a utilizar en el ensayo numérico se han tomado los valores proporcionados en [30] y que se describen en los Cuadros 6.17 y 6.18 para el hormigón y la roca de cimentación respectivamente.

Cuadro 6.17: Propiedades del hormigón.

σ_e^+	σ_e^-	E	ν	G_f	Densidad
[MPa]	[MPa]	[MPa]		[kN/m]	Kg/m ³
1,0	11,6	20,0	0,2	100	2300

Cuadro 6.18: Propiedades de la cimentación.

σ_e^+	σ_e^-	E	ν	G_f	Densidad
[MPa]	[MPa]	[MPa]		[kN/m]	Kg/m ³
1,0	10,0	15,0	0,2	100	No considerada

Descripción del modelo numérico

Se han construido dos modelos geométricos para realizar dos tipos de ensayos: un modelo plano para un análisis bidimensional y un modelo real para un análisis tridimensional. En el primer caso se ha discretizado la sección más alta de la presa utilizando elementos triangulares mientras que para el análisis tridimensional se ha discretizado el modelo mediante elementos tetraédricos. La Figura 6.48 muestra una imagen del modelo bidimensional mientras que la Figura 6.49 describe el modelo tridimensional utilizado.

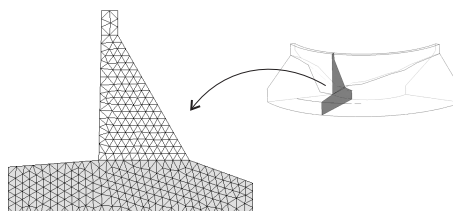


Figura 6.48: Modelo geométrico del análisis bidimensional.

Como condiciones de contorno en los desplazamientos se ha asumido que las caras laterales y la cara inferior (marcadas como A y B en la Figura 6.49) tienen todos los desplazamientos restringidos, mientras que las caras frontal anterior y posterior tienen los desplazamientos libres.

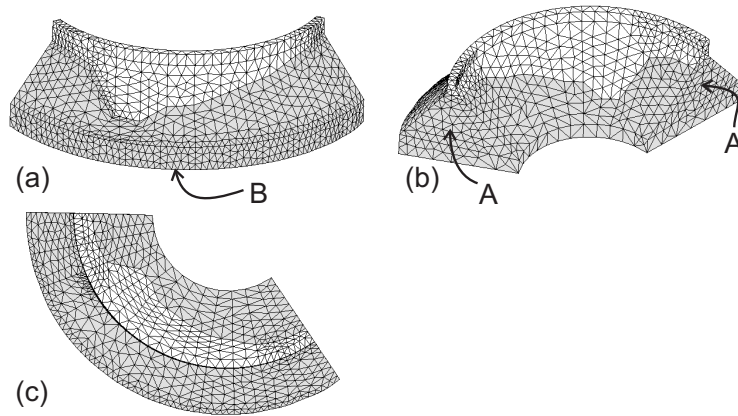


Figura 6.49: Modelo geométrico del análisis tridimensional: (a) paramento aguas arriba, (b) paramento aguas abajo, (c) vista superior.

Tanto en el análisis bidimensional como en el tridimensional se ha adoptado un esquema de integración con un único punto de integración y se ha utilizado el modelo del continuo de daño isótropo con una resistencia diferenciada a tracción y a compresión [56]. Como método de continuación se ha elegido la estrategia de limitación de la longitud de arco descrita en el Apartado 3.6 para ambos casos. Un resumen de las características de los ensayos numéricos se describen en los Cuadros 6.19 y 6.20 para los análisis bidimensional y tridimensional respectivamente.

Cuadro 6.19: Características del ensayo numérico bidimensional.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
371	640	Triángulos	1	Daño isótropo

Cuadro 6.20: Características del ensayo numérico tridimensional.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
3047	13580	Tetraedro	1	Daño isótropo

Descripción de las acciones exteriores

Para definir las hipótesis de carga a aplicar, se ha utilizado una combinación de las siguientes acciones exteriores:

1. *Peso propio.*
2. *Incremento de la presión hidrostática del fluido almacenado.*

Esta carga exterior consiste en, partiendo de la presa llena hasta la coronación, incrementar gradualmente la densidad del líquido almacenado. Esto hace que la presión hidrostática en el paramento de la presa tome, para un cierto instante de tiempo, un valor de:

$$p(t) = \lambda(t)\rho_w g z \quad (6.2)$$

donde ρ_w es el valor de la densidad del agua (1000 kg/m^3), g es el valor de la aceleración de la gravedad ($9,81 \text{ m/s}^2$), z es la distancia vertical entre la cota de coronación de la presa y el punto considerado y, finalmente, $\lambda(t)$ es una función que cumple:

$$\lambda(t=0) = 0 \quad \lambda(t) > 0 \quad (6.3)$$

La Figura 6.50 describe la aplicación de esta acción exterior.

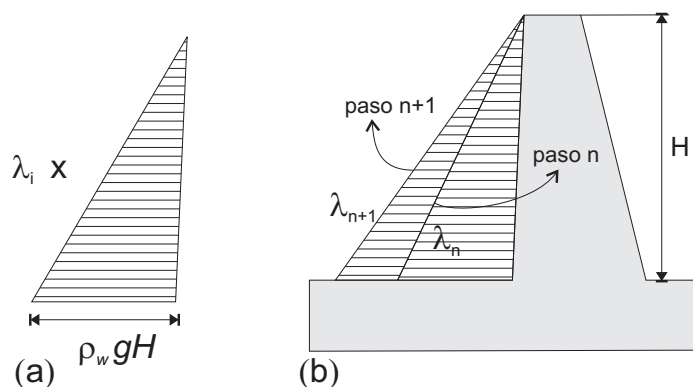


Figura 6.50: *Incremento de la densidad:* (a) cargas actuantes, (b) esquema de aplicación.

3. *Incremento del nivel del fluido almacenado.*

En este caso, la acción exterior se aplica en dos fases:

- *Fase I.* Aplicación de una carga hidrostática en el paramento de aguas arriba hasta alcanzar la situación de presa llena. La presión aplicada responde a la siguiente expresión:

$$p(t) = \lambda(t)\rho_w g z \quad \text{siendo } 0 \leq \lambda(t) \leq 1 \quad (6.4)$$

- *Fase II.* A partir de las situación de presa llena, variación del nivel de agua permitiendo que éste supere la cota de coronación de la presa. En esta fase la presión aplicada se obtiene como:

$$p(t) = \rho_w g z + H' \rho_w g \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} H' \text{ variable} \\ p(t) \geq 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

donde H' representa la variación de la altura del nivel de agua medido a partir de la cota de coronación de la presa. En la Ecuación (6.5) se han anulado las presiones negativas para el caso en que $H' < 0$.

En la Figura 6.51 hay una descripción de esta acción exterior.

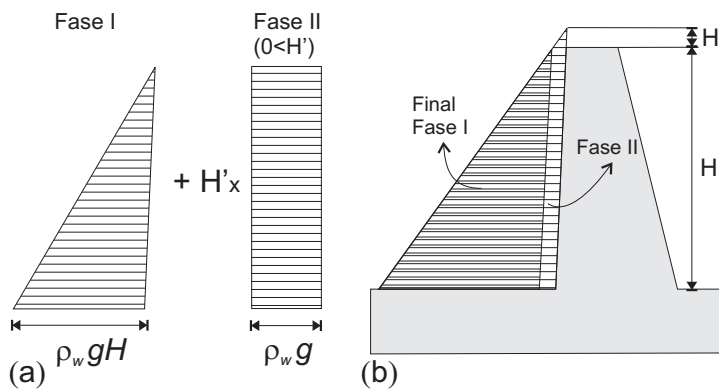


Figura 6.51: *Incremento del nivel de agua:* (a) cargas actuantes, (b) esquema de aplicación.

4. Fractura hidráulica

Se entenderá como *fractura hidráulica* la influencia que la presión hidrostática en el interior de una fisura tiene en la evolución la misma. Aunque no se puede describir como una acción exterior, la consideración del fenómeno de la fractura hidráulica constituirá un ingrediente fundamental para determinar la capacidad portante de la estructura.

El análisis de la fractura hidráulica implica resolver el problema de la localización de deformaciones en un sistema acoplado mecánico-hidráulico. Sin embargo, en este trabajo se presenta una simplificación de ese problema basada en la siguiente hipótesis (descrita en la Figura 6.52):

CAJA 6.3.1. Modelización fractura hidráulica: hipótesis simplificada.

Se considerará que cuando en un punto material se inicia el proceso de fractura^a, en las caras de la fisura actuará una presión orientada en ambas caras de igual valor a la presión hidrostática que hubiera en dicho punto si la permeabilidad del material fuese completa. Por el contrario, en aquellos puntos donde no se haya iniciado el proceso de localización se considerará que la permeabilidad del material es nula.

^aCuando se cumpla la condición de localización descrita en la Ecuación 2.1

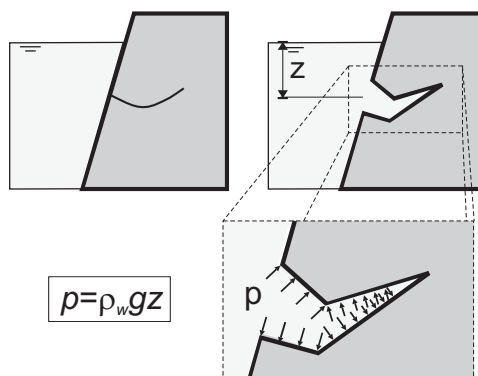


Figura 6.52: Fractura hidráulica: fenomenología.

La anterior hipótesis se traduce en la reinterpretación del equilibrio interno de tensiones descrito en la Ecuación 2.15b del Apartado §2.4. El equilibrio interno de tensiones, una vez el proceso de localización se ha iniciado, pasa entonces a ser en un formato general y utilizando notación incremental (ver Figura 6.53):

$$\dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}} + |\dot{p}| \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \quad (6.6)$$

Si se particulariza la Ecuación (6.6) para el caso de la metodología de discontinuidades fuertes de continuo se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} + |\dot{p}| \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (6.7)$$

A partir de la Ecuación (6.7), la ecuación de las fuerzas residuales incrementales para los grados de libertad mejorados $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$ pasa a ser:

- Para la formulación no simétrica, y substituyendo a la Ecuación (2.78):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}^{(e)} &:= \int_{\Omega^{(e)}} \left(\frac{\mu_{\mathcal{S}}}{h(t)} - \frac{l_e}{\Omega} \right) [\mathbf{n}]^{(e)T} \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\}^{(e)} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^{(e)}} \mu_{\mathcal{S}} |\dot{p}| \mathbf{n} d\Omega \end{aligned} \quad (6.8)$$

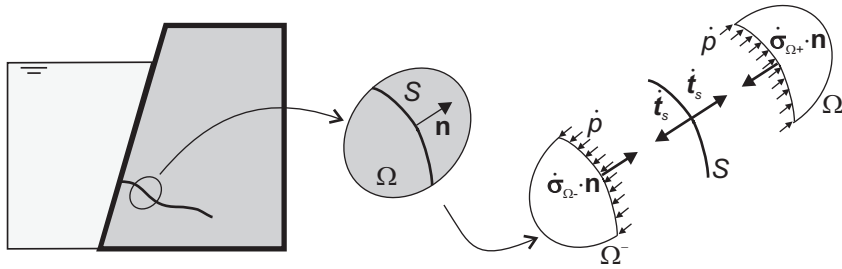


Figura 6.53: Fractura hidráulica: equilibrio interno de tracciones.

- Para la formulación simétrica, y substituyendo a la Ecuación (3.29):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(e)} &:= \int_{\Omega^{(e)}} \left(\mu_S^{(e)} \frac{1}{h(t)} [\mathbf{n}]^{(e)} - [\nabla \varphi]^{(e)} \right)^T \{\boldsymbol{\sigma}\}^{(e)} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^{(e)}} \mu_S |\dot{p}| \mathbf{n} d\Omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

Observación 6.3.2. En las Ecuaciones (6.8) y (6.9), el término \dot{p} no depende de los grados de libertad $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, ya que se ha supuesto que la totalidad de la presión hidrostática se aplica en el instante en el que se cumple la condición de localización, independientemente del valor del salto en el campo de los desplazamientos. Aunque esta simplificación no es real, pues la permeabilidad del medio depende del nivel de fisuración del mismo, se puede afirmar de ella que:

- a) está del lado de la seguridad al aumentar la influencia desfavorable de la presión hidrostática en la resistencia última de la estructura.
- b) permite mantener la definición de la matriz estructural global dada en las Ecuaciones (2.84-2.88) para la formulación no simétrica o en las Ecuaciones (3.31-3.35) para la formulación simétrica (debido a que \dot{p} no depende de $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$).

Resumen de los análisis numéricos realizados

El Cuadro 6.21 resume los análisis numéricos realizados, donde se han aplicado combinaciones de las anteriores cargas externas a los modelos bidimensional y tridimensional. Con estos ensayos se ha buscado estudiar dos fenómenos:

1. La importancia de realizar análisis tridimensionales, en aquellas estructuras donde la simplificación a un análisis plano conlleva a que se ignoren mecanismos resistentes importantes.
2. La importancia de tener en consideración la influencia de la fractura hidráulica, si bien en este caso esta influencia puede haber sido sobredimensionada como se ha indicado anteriormente.

Cuadro 6.21: Resumen de ensayos.

<i>Número de caso</i>	<i>Modelo geométrico</i>	<i>Peso propio</i>	<i>Fractura hidráulica</i>	<i>Hipótesis de carga externa</i>
1	2 Dimensiones	Si	No	Incremento de la densidad
2	3 Dimensiones	Si	No	Incremento de la densidad
3	2 Dimensiones	Si	Si	Incremento de la densidad
4	3 Dimensiones	Si	Si	Incremento de la densidad
5	2 Dimensiones	Si	No	Incremento del nivel de agua
6	3 Dimensiones	Si	No	Incremento del nivel de agua
7	2 Dimensiones	Si	Si	Incremento del nivel de agua
8	3 Dimensiones	Si	Si	Incremento del nivel de agua

Descripción de los resultados

En este apartado se describen los resultados obtenidos para cada uno de los ocho análisis numéricos resumidos en el Cuadro 6.21. Para hacerlo se proporcionan para cada uno de estos análisis la siguiente información:

1. *Curva de equilibrio*, donde se muestra el factor de carga (bien la densidad del fluido o bien la altura de éste sobre la cota de coronación de la presa) *vs.* el desplazamiento horizontal en la cresta de la presa. Dentro de la curva de equilibrio se indican distintos puntos importantes (marcados con A, B, C,...) en los que muestra en figuras pequeñas la evolución del dominio donde falla el material.

En los análisis tridimensionales, el desplazamiento horizontal corresponde a un punto de la coronación de la presa, independientemente del modo de fallo de ésta, por lo que este valor no se corresponde con el valor obtenido del análisis bidimensional. Lo que si son comparables en ambos análisis son los factores de carga.

En los casos 5, 6, 7 y 8 correspondientes a los análisis cuya carga exterior ha consistido en aumentar el nivel de agua, en las curvas de equilibrio se dibujan los puntos pertenecientes a la fase II. Por lo tanto, la abscisa inicial no está en el origen de coordenadas, sino en el valor del desplazamiento horizontal una vez se ha aplicado la fase I.

2. *Patrones de fisuración* Se muestran los contornos de iso-desplazamientos para los puntos marcados como A, B, C,... en la curva de equilibrio. La concen-

tración de estos contornos indica dónde el gradiente del campo de los desplazamientos aumenta y por lo tanto, dónde aparecen las bandas de localización de deformaciones.

3. *Información adicional* Se resumen los distintos factores de carga para los puntos representativos de la curva de equilibrio.

A continuación, y siguiendo el anterior esquema, se proporcionan los resultados numéricos caso por caso:

Caso 1. *Análisis bidimensional incrementando la densidad del fluido y no considerando la fractura hidráulica.*

Para este caso, y como se indica en la Figura 6.54, el inicio de la no-linealidad y el inicio del proceso de fisuración tiene lugar en el punto A con un factor de carga de 1,08. Así mismo, la carga pico se alcanza con un factor de carga de 1,6 para, posteriormente, caer al punto B.

La Figura 6.55 muestra en el dominio del análisis la concentración de las líneas de iso-desplazamientos. Como se puede observar, esta localización tiene lugar en la interfaz cimentación-estructura.

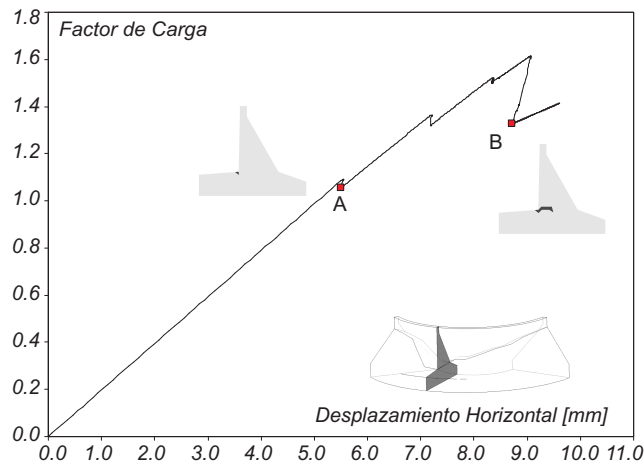


Figura 6.54: *Caso 1: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

Caso 2. *Análisis tridimensional incrementando la densidad del fluido y no considerando la fractura hidráulica.*

En el Caso 2, el inicio de la fisuración ocurre en el punto A de la Figura 6.56 para un factor de carga de 2,6 y la carga pico en el punto C para un valor de 7,3. Una vez alcanzado la carga pico, la estructura descarga hasta el punto D.

La concentración de deformaciones tiene lugar durante los primeros estados de carga en la interfaz cimentación-estructura para, una vez alcanzado la

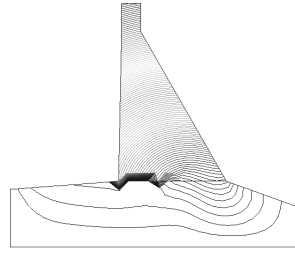


Figura 6.55: *Caso 1: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica. Concentración de líneas de iso-desplazamientos.*

carga pico, atravesar el cuerpo de la presa hasta la cota de coronación (ver Figura 6.57d).

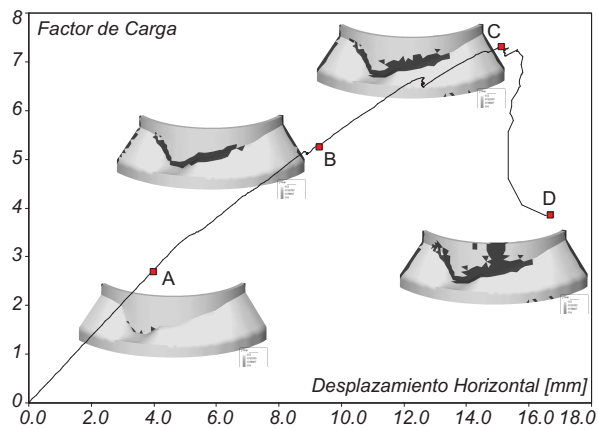


Figura 6.56: *Caso 2: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica. Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.*

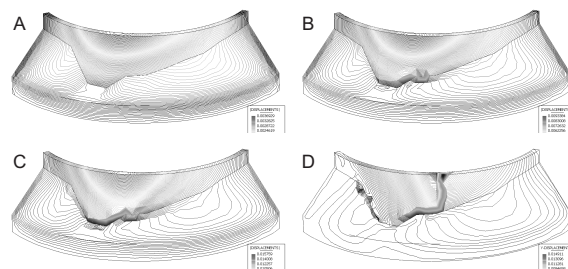


Figura 6.57: *Caso 2: Incremento de la densidad y sin fractura hidráulica. Concentración de líneas de iso-desplazamientos.*

Caso 3. *Análisis bidimensional incrementando la densidad del fluido y considerando la fractura hidráulica.*

El inicio de la no-linealidad y de la fisuración tiene lugar en el punto A de la Figura 6.58 para un factor de carga de 1,08. Tras alcanzar la carga pico de 1,22 se produce una descarga hasta el punto B.

La Figura 6.59 muestra la concentración de las líneas de iso-desplazamientos que tiene lugar en la unión del cuerpo de la presa y la cimentación.

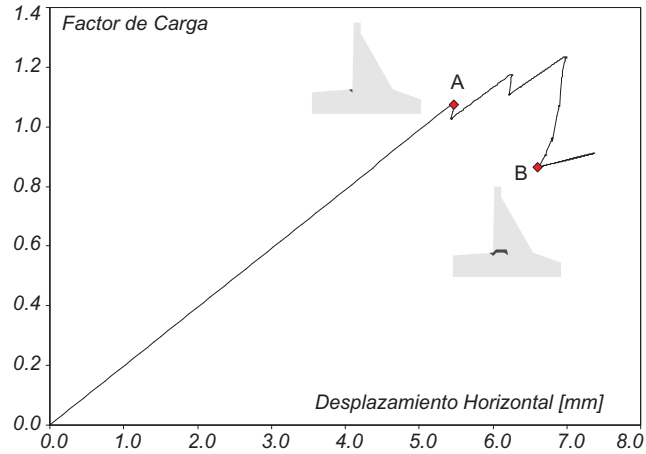


Figura 6.58: *Caso 3: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

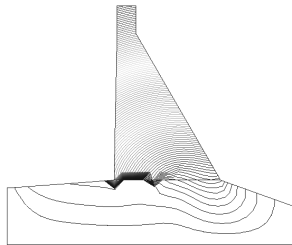


Figura 6.59: *Caso 3: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica.* Concentración de líneas de iso-desplazamientos.

Caso 4. *Análisis tridimensional incrementando la densidad del fluido y considerando la fractura hidráulica.*

El inicio de la no-linealidad se produce en el punto A para un factor de carga de 2,6 mientras que la primera fisura macroscópica aparece en el punto B para un factor de carga de 3,03. La carga pico corresponde al punto D para

un valor de 5,14 para después caer a un valor de 3,5 en el punto E (ver Figura 6.60).

La Figura 6.61 muestra el esquema de fisuración de la presa. En los primeros estados de carga la fisuración se desarrolla en la interfaz entre la estructura y la cimentación para, una vez alcanzada la carga pico, atravesar el cuerpo de la presa en la rama de descarga (ver Figura 6.61d y e).

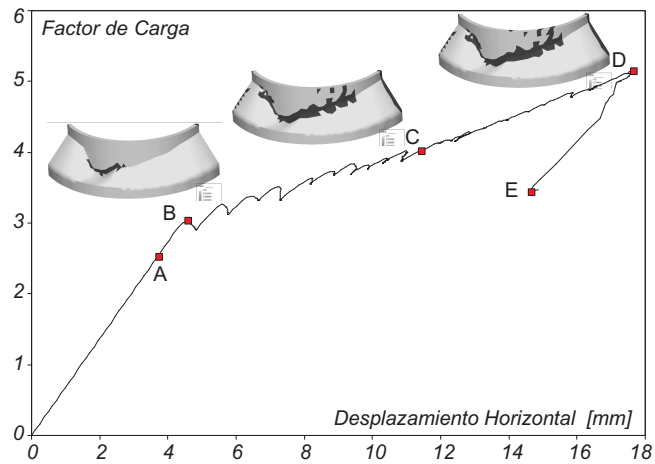


Figura 6.60: *Caso 4: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica. Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.*

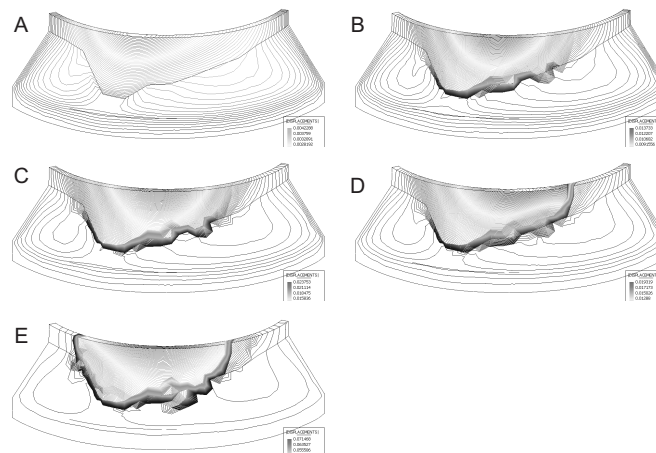


Figura 6.61: *Caso 4: Incremento de la densidad y con fractura hidráulica. Concentración de líneas de iso-desplazamientos.*

Caso 5. *Análisis bidimensional aumentando el nivel de agua y no considerando la fractura hidráulica.*

El inicio de la no linealidad en la curva de equilibrio de la Figura 6.62 tiene lugar para una altura del nivel de agua sobre la cota de coronación de la presa de 1 m. La fisuración comienza a una altura de agua de 1,28 m para posteriormente sufrir una pequeña descarga (punto A). Tras varias ramas de carga-descarga correspondientes a avances en el frente fisura, la carga pico se alcanza para una altura del nivel de agua sobre la coronación de la presa de 5,75 m. Posteriormente se produce una descarga hasta llegar al punto D.

La Figura 6.63 muestra los contornos de iso-desplazamientos al final del proceso de carga. Como se observa, la localización de deformaciones ha tenido lugar en la interfaz entre el cuerpo de la presa y la cimentación.

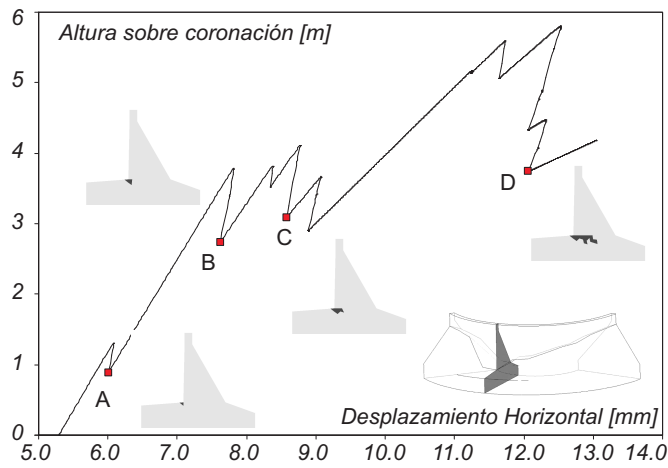


Figura 6.62: *Caso 5: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

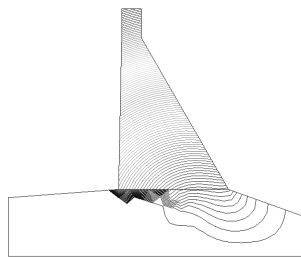


Figura 6.63: *Caso 5: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica.* Concentración de líneas de iso-desplazamientos.

Caso 6. *Análisis tridimensional aumentando el nivel de agua y no considerando la fractura hidráulica.*

En la curva de equilibrio de la Figura 6.64 el inicio de la no-linealidad tiene lugar para una altura de agua de 16,2 m sobre el nivel de coronación de la presa (punto A). La fisuración empieza a una altura de 22,2 m mientras que la carga pico tiene lugar para una altura de 73,0 m para luego proceder a descargar (punto C).

La Figura 6.65 muestra el proceso de la localización de deformaciones, que tiene lugar en la interfaz entre el cuerpo de la presa y la cimentación para, una vez superada la carga pico, transcurrir por la estructura de la presa hasta alcanzar la cota de coronación (ver Figura 6.65c).

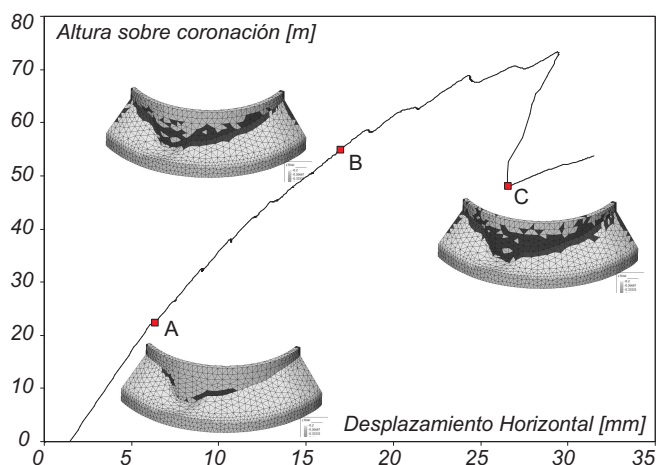


Figura 6.64: *Caso 6: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

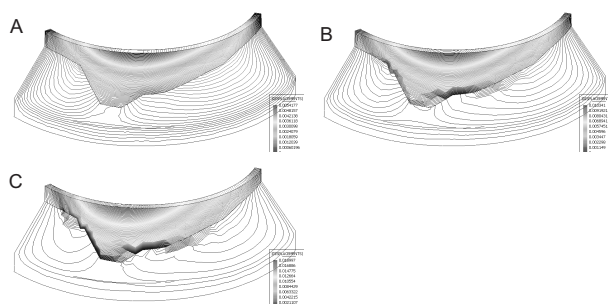


Figura 6.65: *Caso 6: Incremento del nivel de agua y sin fractura hidráulica.* Concentración de líneas de iso-desplazamientos.

Caso 7. *Análisis bidimensional aumentando el nivel de agua y considerando la fractura hidráulica.*

Para el Caso 7, el inicio de la no-linealidad y de la fisuración ocurre para una altura sobre el nivel de la coronación de la presa de 1 m tras la cual aparece una rama de descarga. Posteriormente, la carga pico tiene lugar para una altura de 1,82 m. En este caso, durante el proceso de carga se han considerado puntos de la curva de equilibrio en los que el nivel de agua está por debajo de la cota de coronación de la presa (ver Figura 6.66).

La Figura 6.67 describe la concentración de las líneas de iso-desplazamientos que muestran cómo la localización de deformaciones tiene lugar en la interfaz entre la estructura y la cimentación de la presa.

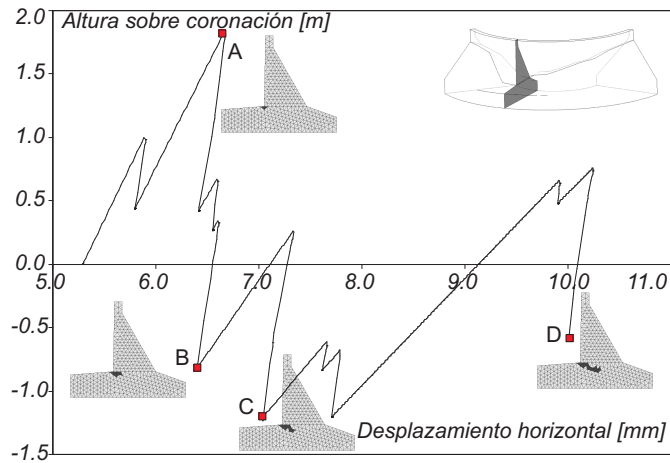


Figura 6.66: *Caso 7: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

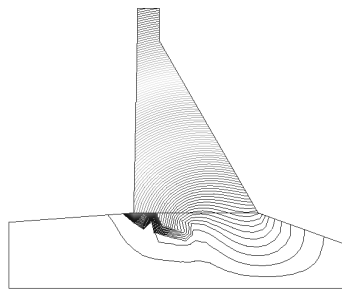


Figura 6.67: *Caso 7: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica.* Concentración de líneas de iso-desplazamientos.

Caso 8. *Análisis tridimensional aumentando el nivel de agua y considerando la fractura hidráulica.*

En el Caso 8, como se describe en la Figura 6.68, el inicio de la no-linealidad tiene lugar para una altura de agua de 16,2 m sobre el nivel de coronación de la presa. La fisuración empieza a una altura de 20,5 m mientras que la carga pico tiene lugar para una altura de 48,3 m.

A su vez, la Figura 6.69 muestra, utilizando los contornos de iso-desplazamientos, como la localización de deformaciones ocurre en la interfaz entre la estructura de la presa y la cimentación para, tras la carga pico, atravesar el cuerpo de la presa (ver Figura 6.69c).

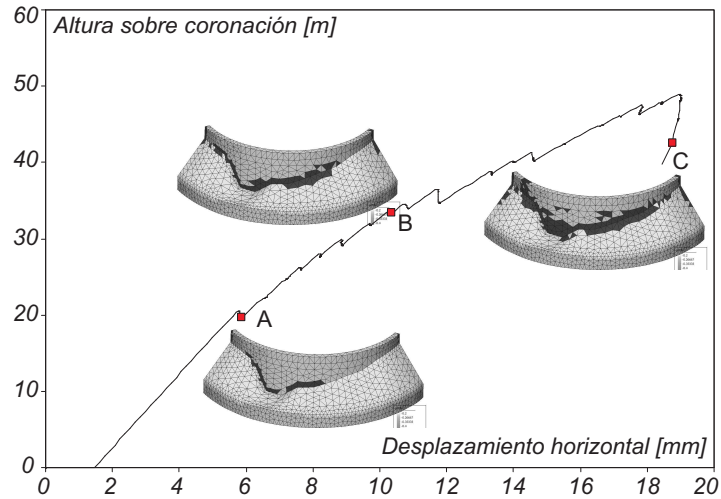


Figura 6.68: *Caso 8: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica.* Curva Factor de Carga vs. Desplazamiento horizontal.

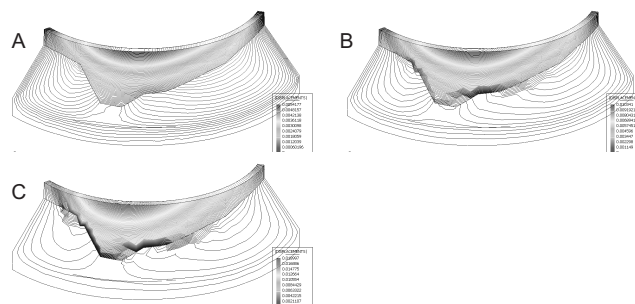


Figura 6.69: *Caso 8: Incremento del nivel de agua y con fractura hidráulica.* Concentración de líneas de iso-desplazamientos.

Finalmente, en la Figura 6.70 se muestra las deformadas de los análisis tridimensionales al final del proceso de cálculo. Para cada uno de los casos se muestra:

- una perspectiva de la estructura deformada.
- una visión de la sección de coronación antes y después del proceso de carga.

Como se observa en la Figura 6.70, la descarga en la curva de equilibrio tiene lugar cuando la fractura propaga hasta alcanzar la cota de coronación. Considerando la vista presentada desde aguas abajo, en el Caso 2 la fractura alcanza la cota de coronación en la parte central, en los Casos 4 y 6 en la parte izquierda y en el Caso 8 en la parte derecha.

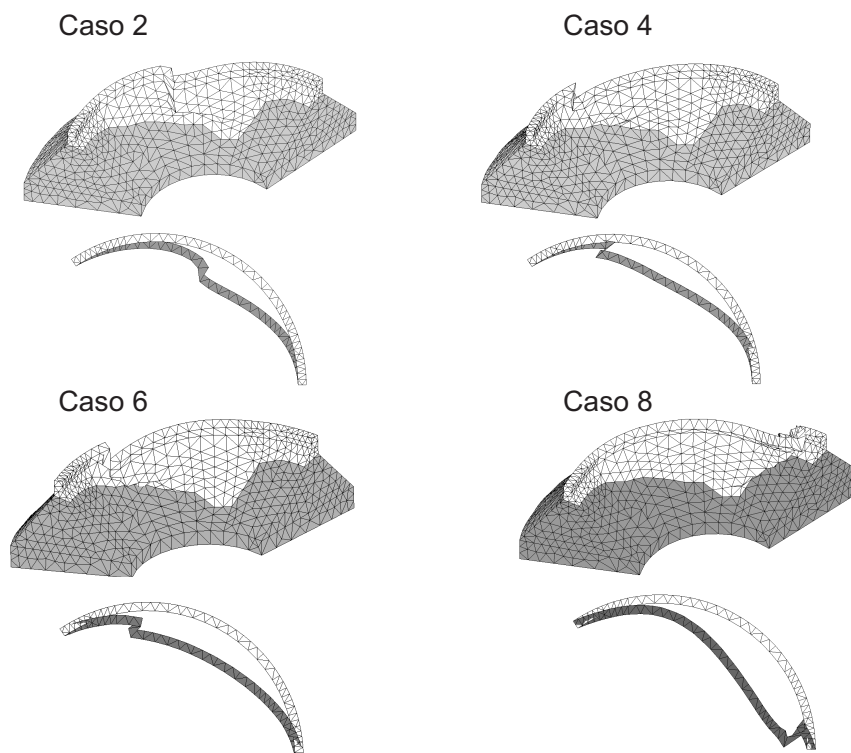


Figura 6.70: Deformadas de los casos tridimensionales al final del análisis.

Resumen y análisis de los resultados

Para poder comparar los resultados obtenidos es necesario obtener unos factores de seguridad para cada uno de los escenarios de cargas considerado. Según la carga exterior que se aplique, dichos factores de seguridad se definen como:

- Bajo la hipótesis de carga *incremento de la densidad* se obtiene un factor, llamado factor de incremento de densidad:

$$\lambda_{ID} = \lambda \quad (6.10)$$

siendo λ el factor por el que multiplicamos la densidad del agua para la situación de presa llena.

- Bajo la hipótesis de carga *incremento del nivel de agua* se obtiene un factor, llamado factor de inundación inminente:

$$\lambda_{IFF} = \frac{H + H'}{H} \quad (6.11)$$

siendo H' la altura que alcanza el nivel del agua sobre la cota de coronación de la presa y H la altura de la misma.

En los Cuadros 6.22 y 6.23 se resumen, respectivamente, los resultados numéricos obtenidos para la hipótesis de carga *incremento de la densidad* y para la hipótesis de carga *incremento del nivel de agua*. Para cada uno de los dos escenarios se indican dos factores de carga: aquel que provoca el inicio de la fisuración y aquel que provoca la fisuración generalizada previa al fallo estructural global.

Cuadro 6.22: Resumen de ensayos: hipótesis *Incremento de la densidad*.

Caso	Modelo	Fractura hidráulica	Inicio Fisuración Factor λ_{ID}	Fisuración Generalizada Factor λ_{ID}
1	2 Dim.	No	1,08	1,60
2	3 Dim.	No	2,60	7,30
3	2 Dim.	Si	1,08	1,22
4	3 Dim.	Si	2,60	5,14

Cuadro 6.23: Resumen de ensayos: hipótesis *Incremento del nivel de agua*.

Caso	Modelo	Fractura hidráulica	Inicio Fisuración Factor λ_{IFF}	Fisuración Generalizada Factor λ_{IFF}
5	2 Dim.	No	1,03	1,16
6	3 Dim.	No	1,46	3,06
7	2 Dim.	Si	1,03	1,05
8	3 Dim.	Si	1,46	2,36

Si se analizan los valores obtenidos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1. *Respecto a la influencia de análisis bidimensional frente al análisis tridimensional.*

Los resultados muestran que los análisis bidimensionales, al ignorar los mecanismos resistentes específicamente tridimensionales, subestiman la capacidad portante de la estructura hasta en un 60%.

2. *Respecto a la influencia de la fractura hidráulica en la resistencia última.*

La consideración de la fractura hidráulica conlleva a obtener valores de la carga última de la estructura un 20 %-30 % inferiores respecto a los obtenidos cuando este factor no es considerado. Sin embargo, dada las hipótesis conservadoras que se han asumido para reproducir la fractura hidráulica, estos porcentajes deberían ser algo menores si se hubiese reproducido el problema mecánico-hidráulico acoplado real.

3. *Respecto a las limitaciones del propio modelo.*

Además de las simplificaciones asumidas para reproducir la fractura hidráulica, los análisis presentados tienen una limitación muy importante: no se ha modelado *a priori* la junta que existe entre el cuerpo de la presa y la cimentación. Dado que en todos los análisis la localización de deformaciones tiene lugar inicialmente (hasta alcanzarse la carga pico) en esa interfaz, si se hubiera modelado la junta y no se hubiese partido de una unión completamente solidaria, los valores obtenidos para los factores de seguridad hubiesen sido menores.

Otra limitación que sufre los análisis, al no haber considerado una junta preexistente entre el cuerpo de la presa y la cimentación, es que no se ha tenido en cuenta la subpresión inicial. Sin embargo, esta presión desestabilizadora sí que se considera una vez la fisura se ha desarrollado.

6.3.2. La presa de Alqueva

Descripción de la presa

La presa de Alqueva, construida en el río Guadiana, está situada en el Alentejo interior, la región más calurosa y seca de Portugal próxima a la frontera española. Fue acabada de construir en el 2002 dando lugar a la mayor reserva de agua dulce embalsada por métodos artificiales en Europa. Forma parte de un conjunto de infraestructuras formado por la propia presa, una central de energía hidroeléctrica y un amplio sistema de regadíos. La Figura 6.71 muestra una panorámica aguas abajo.

Se trata de una presa bóveda de doble curvatura de 96 metros de alto, estando el punto más alto a una cota de 154 metros sobre el nivel del mar. La presa tiene 458 metros de largo, un espesor en su base de entre 32 y 33 metros y un espesor en su coronamiento de 7 metros. Bajo la cimentación transcurre una falla en el terreno que forma un ángulo aproximadamente de 30° con el plano vertical de simetría de la presa. La Figura 6.72 muestra la definición geométrica de la obra donde se ha dibujado la trayectoria de la falla.

Descripción del ensayo numérico

Para analizar la seguridad de la presa de Alqueva, se ha considerado el escenario en el que tuviera lugar un deslizamiento del terreno situado a la derecha de la falla, tal como ha sido dibujado en la Figura 6.73. Este desplazamiento impuesto se descompone en una componente tangencial a la falla y una componente normal



Figura 6.71: Presa de Alqueva. Perspectiva.

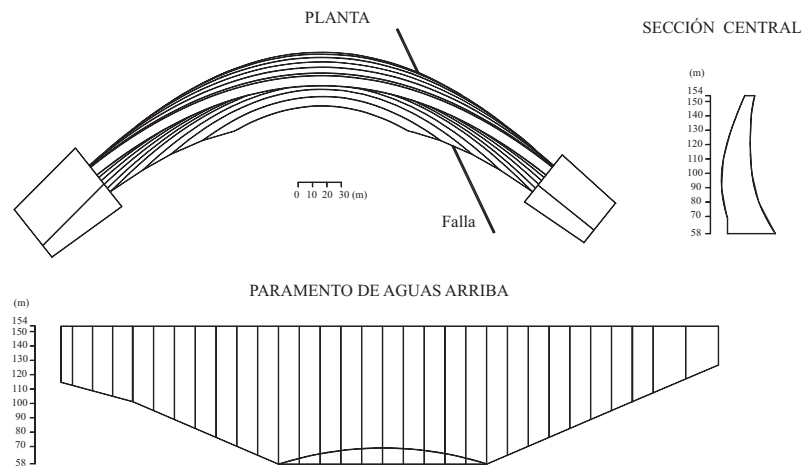


Figura 6.72: Presa de Alqueva. Definición geométrica.

que es las tres cuartas partes de la componente tangencial. Se ha considerado esta hipótesis especial en el deslizamiento de la falla con el objetivo de poder comparar con los resultados experimentales obtenidos en modelos a escala de mortero de cemento por Oliveira *et al.* [49].

Aunque los datos experimentales existentes son de modelos a escala, para realizar el análisis numérico se ha optado por reproducir el comportamiento de la presa real. Para ello se ha utilizado el modelo geométrico, discretizado por elementos finitos, descrito en la Figura 6.74 que representa la presa a escala 1:1. Una de las

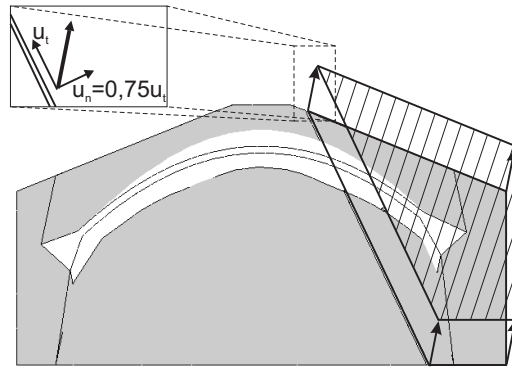


Figura 6.73: Presa de Alqueva. Desplazamiento del terreno.

diferencias entre el modelo numérico y el modelo real reside en que en la construcción de la presa se utilizaron juntas verticales de construcción. Estas juntas, que también fueron utilizadas en el modelo a escala, no han sido reproducidas en el modelo numérico. También se ha considerado que la unión cuerpo de hormigón-terreno de cimentación es completamente solidaria sin utilizar elementos junta entre ellos.

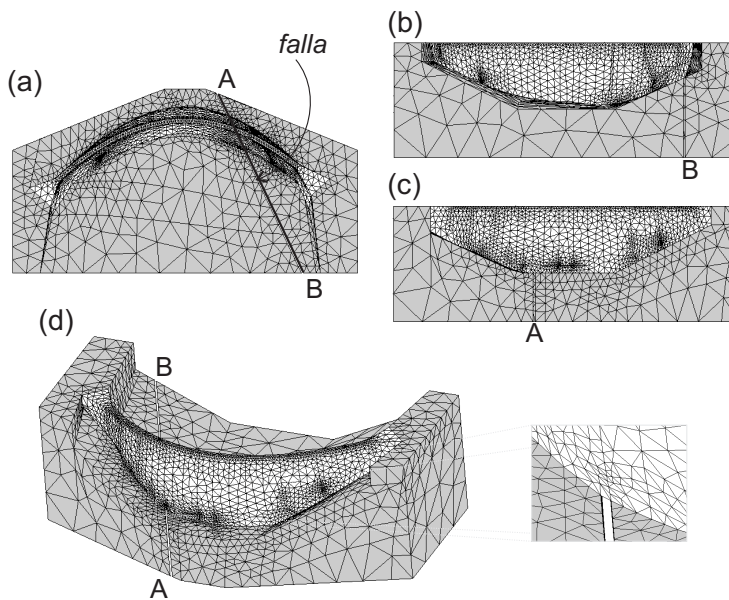


Figura 6.74: Presa de Alqueva. Modelo geométrico discretizado por elementos finitos: (a) planta, (b) paramento aguas arriba, (c) paramento aguas abajo y (d) perspectiva con detalle de falla.

Se han utilizado elementos tetraédricos con interpolación lineal y un modelo del

Cuadro 6.24: Características del ensayo numérico.

Número de nodos	Número de elementos	Tipo de elemento	Número de puntos de Gauss	Modelo material
5211	19260	Tetraedro	1	Daño isótropo

continuo de daño isótropo con resistencia diferenciada a tracción y a compresión. El Cuadro 6.24 resume las características principales del ensayo numérico.

Para caracterizar los materiales se ha considerado, a falta de valores reales que permitiesen caracterizar el terreno de cimentación, que tanto el hormigón del cuerpo de la presa como la roca de la cimentación tienen las mismas características mecánicas. Estas propiedades están resumidas en los Cuadros 6.25 y 6.26 para el hormigón y la roca de cimentación respectivamente.

Cuadro 6.25: Propiedades del hormigón.

σ_e^+ [MPa]	σ_e^- [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
3,5	25,5	35,0	0,2	80	2400

Cuadro 6.26: Propiedades de la cimentación.

σ_e^+ [MPa]	σ_e^- [MPa]	E [MPa]	ν	G_f [kN/m]	Densidad Kg/m ³
3,5	25,5	35,0	0,2	80	2400

Finalmente, las acciones exteriores aplicadas al modelo numérico descrito han sido las siguientes (aplicadas consecutivamente una tras la otra):

1. La acción del empuje del agua considerando el escenario en que la presa esté llena.
2. El desplazamiento del terreno con la hipótesis anteriormente descrita: un desplazamiento tangencial a la falla y un desplazamiento normal a ella que valga tres cuartas partes del tangencial.

Descripción y análisis de los resultados

Como primera acción se ha aplicado el empuje hidrostático del agua, considerando que el agua llega hasta la cota 153 sobre el nivel del mar (un metro por debajo de la cota de coronación). Bajo esta acción ningún punto del sólido de estudio abandona el régimen elástico.

Posteriormente se aplica el desplazamiento impuesto en el terreno según está explicado en la Figura 6.73. Al incrementar este desplazamiento impuesto se inicia una fisura en la unión de la falla con el cuerpo de la presa. Esta fisura, tras propagarse verticalmente, sufre un quiebro y traza un camino casi horizontal para, posteriormente, volver a adoptar un camino vertical hasta alcanzar la cota de coronación. La Figura 6.75 muestra, utilizando las líneas de iso-desplazamientos, cual a sido el camino seguido por la fisura obtenida numéricamente, mientras que la Figura 6.76 muestra una deformada de la estructura al final del proceso.

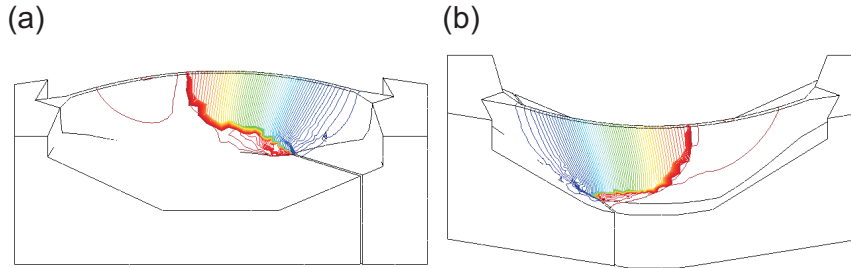


Figura 6.75: Presa de Alqueva: líneas de iso-desplazamientos. (a) paramento aguas abajo, (b) paramento aguas arriba

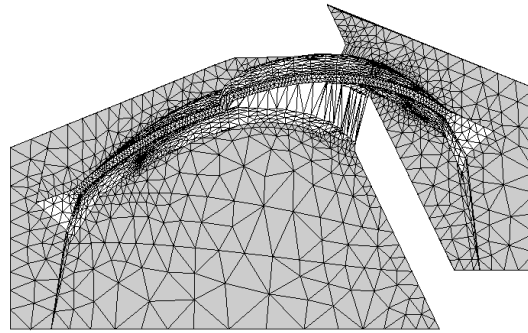


Figura 6.76: Presa de Alqueva: deformada al final del proceso

La comparación entre las trayectorias de la fisura obtenidas en la simulación numérica y en los ensayos a escala de Oliveira *et al.* [49] se describen en la Figura 6.77. En esa figura se observa que si bien la fisura obtenida numéricamente reproduce correctamente la experimental en los dos primeros tramos, difiere de ésta cuando toma el camino vertical para llegar a la cota de coronación. Esta diferencia se debe a que no han sido considerados en el análisis numérico los planos de debilidad que constituyen las juntas de construcción. Si se observa las fisuras experimentales de la Figura 6.77, se ve que aparecen cuatro fisuras verticales, las dos más exteriores

marcadas con trazo grueso y las dos interiores marcadas con trazo fino. Estas fisuras corresponden a las juntas de construcción y no aparecen en el análisis numérico porque no han sido consideradas, lo que conduce a la diferencia que se observa en los trazados de la superficie de fractura en los ensayos experimental y numérico.

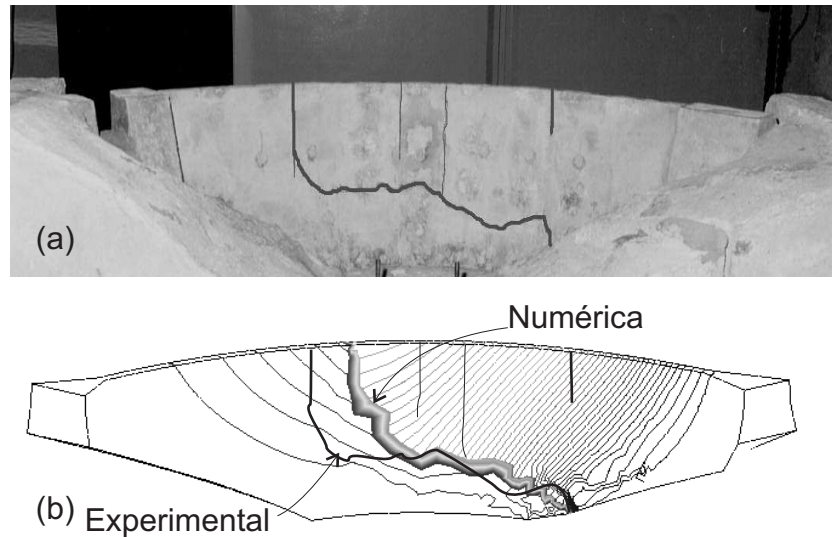


Figura 6.77: Presa de Alqueva.

6.4. Resumen del capítulo

El objetivo de este capítulo ha sido describir la capacidad de la metodología numérica presentada para abordar el análisis del fallo material en estructuras reales. Una de las ideas clave que busca mostrar es que hay análisis donde es necesario utilizar una herramienta numérica que, además de proporcionar una respuesta objetiva⁶ e independiente de la malla, sea capaz de realizar análisis tridimensionales. Típicamente los análisis tridimensionales son imprescindibles en aquellos casos donde la estructura moviliza mecanismos resistentes que no se consideran cuando el análisis se reduce a un análisis plano (*v.gr.* el efecto arco).

Los ejemplos presentados en este capítulo se clasifican en tres grupos:

- Reproducción de ensayos de piezas de hormigón cuya forma de fallo predominante es en modo I.
- Reproducción de ensayos de estabilidad de taludes cuya forma de fallo es de deslizamiento.

⁶Se entiende por respuesta objetiva aquella que tiene una disipación correcta de la energía.

- Reproducción de ensayos para obtener la capacidad resistente de presas en los que aparecen mecanismos resistentes tridimensionales (efecto arco).

Capítulo 7

CONCLUSIONES

7.1. Conclusiones

Los algoritmos desarrollados para el análisis numérico en problemas de mecánica de sólidos, y en particular para el análisis numérico de la localización de deformaciones en un medio continuo¹, pueden caracterizarse atendiendo a su *exactitud*, a su *robustez* y al *tiempo de cálculo* que requieren para encontrar la solución del problema. La robustez y el tiempo de cálculo están relacionados, dado que los algoritmos poco robustos necesitan muchas iteraciones por paso de tiempo para la convergencia del sistema de ecuaciones global de la estructura. En este contexto se entenderá por robustez la capacidad de la herramienta numérica para llevar a término los análisis bajo diferentes condiciones numéricas impuestas, como cambios en las longitudes de los pasos de integración, tolerancias requeridas para la convergencia del sistema de ecuaciones, etc. . .

Toda herramienta numérica, que busque ser utilizada en el análisis del fallo material en estructuras reales, debe poseer una adecuada combinación de estas tres características. En particular, dado los severos problemas de convergencia que presentan los problemas de localización de deformaciones, es imprescindible que dicha herramienta garantice:

- la robustez necesaria para proporcionar un resultado,
- la exactitud necesaria para que ese resultado sea confiable y
- la velocidad de convergencia suficiente para que el análisis numérico sea factible en tiempo de cálculo.

En este trabajo se ha buscado reformular el método de discontinuidades fuertes de continuo de forma que cumpla las tres condiciones anteriores. Dicha reformulación ha consistido en:

- adoptar una formulación simétrica y un nuevo esquema de integración IMPL-EX, que asegure:

¹Este análisis es equivalente al análisis del fallo material de estructuras por ablandamiento.

- la robustez de la herramienta numérica al garantizar la definición positiva de las matrices algorítmicas intervinientes.
 - la necesaria velocidad de convergencia.
- utilizar unos esquemas de control del error que proporcionan la capacidad de estudiar, de forma óptima, la convergencia de la solución al imponer condiciones cada vez más restrictivas a dichos algoritmos.
 - utilizar un nuevo método de continuación específico para el esquema de integración IMPL-EX, que asegura la obtención de la curva de equilibrio correcta atendiendo a las dificultades existentes en los puntos límite.

Esta reformulación del método de discontinuidades fuertes de continuo presenta, como toda aproximación numérica, la necesidad de realizar dos series de estudios para garantizar que la solución encontrada sea aceptable:

1. *Un análisis de la convergencia de la solución en un proceso de refinado del tamaño característico de la malla de elementos finitos utilizada.*

El objetivo de este análisis es garantizar que la formulación simétrica cinemáticamente óptima no introduce errores, debido a los problemas que tiene para capturar el estado tensional en elementos que estén completamente agotados.

2. *Un análisis de la convergencia de la solución en un proceso de reducción del tamaño de paso de tiempo.*

Este estudio se realiza utilizando los algoritmos de control del error descritos.

La necesidad de realizar estos análisis sobre la convergencia de la solución coloca en desventaja la metodología propuesta frente a la presentada en las Referencias [45], [79], [19] y [69] para el caso de análisis bidimensionales o análisis tridimensionales muy sencillos. Sin embargo, en análisis tridimensionales de geometría compleja donde aparezcan varias fisuras, la incapacidad de la formulación anterior para abordarlos hace patente la aplicabilidad de la nueva formulación propuesta.

Apéndice A

Análisis de la localización en los modelos inelásticos invíscidos

A.1. Resumen histórico

El problema de la *localización de deformaciones*, entendiéndolo como una inestabilidad del material (en este trabajo no se han considerado las inestabilidades geométricas), ha sido objeto de estudio desde principios del siglo XIX hasta nuestros días. Este fenómeno puede ocurrir, bajo unas condiciones de carga adecuadas, en prácticamente todos los materiales sólidos: frágiles como los hormigones o las rocas y dúctiles como los metales o las arcillas.

Observación A.1.1. *Definiremos la localización de deformaciones como un proceso por el cual en un sólido sometido a unas fuerzas externas, la deformación se concentra en una región estrecha (comparada con el tamaño del sólido analizado) llegándose, por agotamiento de la capacidad resistente, al fallo material.*

Fenomenológicamente, este proceso se asocia con la concentración de defectos micro-estructurales los cuales evolucionan a bandas de cortante (materiales dúctiles) o a microfisuras (materiales frágiles). Matemáticamente, este fenómeno se traduce en un mal condicionamiento de las ecuaciones en derivadas parciales que rigen el problema de continuo, lo cual es signo de la existencia de una bifurcación en la solución de equilibrio, es decir, aparece una solución que mantienen los campos de deformaciones continuos y otra solución que inicia la discontinuidad en dichos campos.

La primera definición rigurosa y el primer análisis de estabilidad de este problema se debe a Hadamard (1903), que lo realizó en deformaciones finitas elásticas. Hadamard afirmó en [31] que las condiciones que determinan la aparición de inesta-

bilidad material son la *pérdida de elipticidad fuerte* en las ecuaciones de equilibrio¹. Hill (1962) llegó a la misma condición de estabilidad en [32] aplicando una pequeña perturbación a una losa infinita bajo un estado de tensiones homogéneo e identificando la inestabilidad material con las condiciones que hacen esa perturbación crecer (la Referencia [10] da una descripción de este método). Siguiendo el mismo método, Rudnicki & Rice (1975) en [77] demostraron que las inestabilidades materiales pueden tener lugar incluso en la presencia de endurecimiento para el caso de plasticidad no asociada (debida a la falta de simetría mayor en el módulo tangente constitutivo).

Basándose en estos resultados, la condición que garantiza la estabilidad material es la llamada *condición Legendre-Hadamard*, la cual establece que, para todas las direcciones de propagación \mathbf{n} y para cualquier vector no nulo \mathbf{h} , un punto material es estable si se cumple (condición de elipticidad fuerte):

$$(\mathbf{n} \otimes \mathbf{h}) : \mathbb{C}^i : (\mathbf{h} \otimes \mathbf{n}) > 0 \quad \forall \mathbf{n}, \mathbf{h} \quad (\text{A.1})$$

donde \mathbb{C}^i es el operador tangente constitutivo y \mathbf{h} , en el contexto de propagación de ondas, es la polarización de la onda (ver [80] y [10]).

Observación A.1.2. *En el análisis estático de sólidos y bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales, la condición Legendre-Hadamard se reduce a:*

$$\det(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^i \cdot \mathbf{n}) > 0 \quad (\text{A.2})$$

dónde de nuevo \mathbf{n} es la dirección de propagación y \mathbb{C}^i es el operador tangente constitutivo.

Sabiendo que \mathbb{Q} , *tensor característico o tensor de localización*, se expresa como $\mathbb{Q}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^i \cdot \mathbf{n}$, se puede interpretar la Ecuación (A.2) diciendo que una condición necesaria para el inicio de la inestabilidad material (localización de deformaciones) es la singularidad del tensor de localización o característico.

Asumiendo los anteriores resultados, es decir, que una condición necesaria para la no unicidad de la solución es la singularidad de \mathbb{Q} , muchos autores han desarrollado criterios para obtener los módulos de endurecimiento/ablandamiento para los cuales empieza la localización y la dirección de dicha localización. Siguiendo la secuencia de desarrollos descrita en [78] por Runesson *et al.*, fue Mandel (1964) [44] el primero que determinó el módulo de endurecimiento crítico para materiales granulares en deformación plana empleando el criterio de fallo de Mohr-Coulomb y una regla de flujo no asociado para describir la dilatación. Bajo las mismas asunciones que Mandel, Vermeer (1982) [89] y Vermeer & De Borst (1984) [90] rederivaron el valor del módulo de endurecimiento y determinaron la orientación de la banda de cortante crítica asumiendo que la tensión principal intermedia se encuentra fuera del plano del análisis bidimensional. Rice (1976) [73] y Rudnicki & Rice (1975) [77] derivaron expresiones explícitas para las direcciones críticas de bifurcación y el correspondiente valor del módulo de endurecimiento con el criterio de fallo

¹Hadamard probó que en equilibrio estable, la desigualdad que define la elipticidad fuerte debe mantenerse pero admitiendo que el ' $>$ ' sea reemplazado por un ' \geq ' (ver [46])

de Drucker-Prager para un estado tridimensional sin restricciones (considerando no-asociativa la parte volumétrica de la regla de flujo). Finalmente, Ottosen & Ruesson (1991) [66], con las mismas asunciones que Rudnicki & Rice generalizó los resultados para un criterio de fallo arbitrario definido por los tres invariantes.

En esta anejo se va a realizar un amplio estudio del problema de la localización de deformaciones. El Apartado §2.2 resume una deducción directa de la condición matemática que marca el inicio del proceso de localización: la singularidad del tensor de localización \mathbb{Q} . Este criterio se aplica en el Apartado §A.3 a una clase general de modelos materiales inelásticos, donde no se han supuesto ninguna asunción sobre estos modelos. Posteriormente, en el Apartado §A.4 se derivan expresiones analíticas para los valores críticos de los módulos de ablandamiento y las direcciones de localización para dos modelos asociados: el modelo de daño isótropo y el modelo de plasticidad asociada no viscosa. Finalmente, el Apartado §A.5 resume los anteriores valores para el caso bidimensional.

A.2. Análisis de bifurcación discontinua

Como fue anteriormente dicho, los modelos inelásticos pueden presentar puntos de bifurcación en la curva de equilibrio en los cuales una rama está asociada a una solución que proporciona campos discontinuos. Este modo de fallo puede aparecer debido a la existencia de operadores constitutivos no simétricos en el caso de flujo no asociado y/o debido a la utilización de modelos materiales equipados con ablandamiento [28]. Esta sección busca mostrar una demostración directa de la condición necesaria para la localización de deformaciones asociada a un punto de bifurcación: la singularidad del tensor de localización \mathbb{Q} .

Sea entonces un dominio Ω en el cual todas las variables $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{u})$ son espacialmente continuas en el estado actual de equilibrio estático, y una superficie \mathcal{S} que divide este dominio en una parte positiva Ω^+ y una parte negativa Ω^- (ver Figura A.1). Para obtener las condiciones de localización de deformaciones se considerará, para un estado de carga creciente, que la bifurcación implica la existencia de una solución alternativa (diferente de la cuasi-homogénea) caracterizada por una campo tasa de desplazamiento $\dot{\mathbf{u}}$ y un campo tasa del gradiente del desplazamiento $\nabla^s \dot{\mathbf{u}}$ discontinuos a través de la superficie de discontinuidad \mathcal{S} . Se asumirá también que la diferencia en los valores de $\dot{\mathbf{u}}$ para los campos bifurcados y no bifurcados es constante a lo largo de \mathcal{S} .

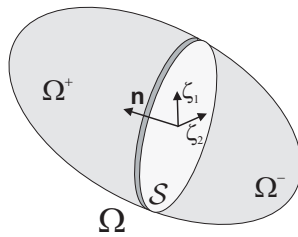


Figura A.1: Continuum con una superficie de localización

Definiendo para cada punto material en S un sistema de coordenadas local $\{\zeta_1, \zeta_2, \mathbf{n}\}$, donde ζ_1 y ζ_2 son vectores tangente unitarios a S y \mathbf{n} es un vector unitario normal a S , la asunción que $[[\dot{\mathbf{u}}]]$, entendiendo $[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^-$ como la diferencia entre los valores de $\dot{\mathbf{u}}$ en S y $\Omega \setminus S$, es constante a lo largo de S puede ser establecida como:

$$\partial_{\zeta_i} [[\dot{\mathbf{u}}]] = [[\partial_{\zeta_i} \dot{\mathbf{u}}]] = [(\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}) \cdot \zeta_i] = [(\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})] \cdot \zeta_i = 0 \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

teniendo la solución general a la Ecuación (A.3) la siguiente forma:

$$[(\nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})] = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n}) \quad (\text{A.4})$$

donde $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ es un vector arbitrario mientras que \mathbf{n} es el vector unidad normal a S .

Considerando la hipótesis de deformaciones infinitesimales, el salto en el campo tasa de deformaciones tiene, basado en la Ecuación (A.4), la siguiente expresión (también llamada condición de compatibilidad cinemática de Maxwell):

$$[[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = [[\nabla^s \dot{\mathbf{u}}]] = (\dot{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{n})^s \quad (\text{A.5})$$

donde $(\bullet)^s$ es la parte simétrica de (\bullet) .

Si se impone el equilibrio a ambos lados de la superficie de discontinuidad se establece que la tasa del vector tracción $\dot{\mathbf{t}}$ a través de la superficie S es única, con lo que:

$$\dot{\mathbf{t}}^+ - \dot{\mathbf{t}}^- = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ \cdot \mathbf{n} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \cdot \mathbf{n} = [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A.6})$$

y, utilizando la ecuación constitutiva de un sólido elastoplástico inviscido:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}^i : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (\text{A.7})$$

donde \mathbb{C}^i es el tensor constitutivo tangente (tensor de cuarto orden), se llega a dos posibles escenarios: *bifurcación continua* y *bifurcación discontinua*. Se considerará únicamente en este trabajo el primer escenario, la bifurcación continua, porque la bifurcación discontinua, como fue indicado por Rice & Rudnick [72] y Ottosen & Runesson [66] constituye una situación menos crítica en términos de posibilidad de bifurcación².

En el escenario de bifurcación continua, tanto los campos incrementales bifurcados y no-bifurcados corresponden a carga plástica. En este caso, combinando las Ecuaciones (A.5), (A.7) y (A.6) y considerando la simetría de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, se obtiene el siguiente problema de autovectores:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^i \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (\text{A.8})$$

expresión que puede ser escrita en términos del tensor de localización o característico \mathbb{Q} :

$$\mathbb{Q}(\mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (\text{A.9})$$

²Como aclaración, indicar que la bifurcación discontinua es el escenario donde los campos incrementales bifurcados corresponden a carga plástica mientras que los campos incrementales no bifurcados corresponden a descarga elástica.

La singularidad de \mathbb{Q} es la única solución no trivial de la Ecuación (A.9). Por lo tanto, un condición necesaria para que tenga lugar la localización de deformaciones es que, para algún \mathbf{n} :

$$\det(\mathbb{Q}(\mathbf{n})) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Como fue mencionado en el Apartado §A.1, este criterio para detectar el inicio de la bifurcación en la curva de equilibrio fue establecido por Hill en 1962.

A.3. Análisis de bifurcación de una clase general de modelos inelásticos

En este apartado se desarrollará el análisis de bifurcación de una clase general de modelos materiales, sin presuponer ninguna asunción sobre sus criterios de fallo y sus potenciales plásticos. Las únicas restricciones que se impondrán serán las siguientes dos: el gradiente de la función de daño y el potencial plástico tendrán las mismas direcciones principales y todas las inestabilidades geométricas serán ignoradas.

Para poder entender la notación usada en el resto del anejo, el Cuadro A.3.1 resume las ecuaciones básicas de gobierno del modelo general de plasticidad invíscida con endurecimiento isótropo.

CAJA A.3.1. Ingredientes del modelo de plasticidad.

- Relaciones tensión-deformación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (\text{A.11})$$

siendo \mathbb{C}^e el módulo elástico y $\boldsymbol{\epsilon}^p$ el tensor de deformaciones plásticas.

- Dominio elástico en el espacio de las tensiones:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0\} \quad (\text{A.12})$$

siendo χ la variable interna tipo tensión y $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función de fluencia.

- Regla de flujo y regla de endurecimiento/ablandamiento:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \gamma \mathbf{g}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \\ \dot{\chi} &= -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

siendo $\gamma \geq 0$ el multiplicador plástico, $\mathbf{g} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}$ la regla de flujo plástico y $\mathbf{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la ley de endurecimiento.

- Condiciones de carga-descarga de Khun-Tucker:

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0, \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Ingredientes del modelo de plasticidad (*continuación*).

- Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0 \quad (\text{A.15})$$

- Módulo tangente elastoplástico:

$$\mathbb{C}^{ep} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C}^e & \text{if } \gamma = 0 \\ \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \mathbf{g} \otimes \mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbb{C}^e : \mathbf{g} + \partial_{\chi} f \cdot \mathbf{h}} & \text{if } \gamma > 0 \end{array} \right\} \quad (\text{A.16})$$

siendo $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f$ el gradiente de la función de daño y asumiendo en adelante que $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f := \mathbf{f}$. También se asumirá en este trabajo que $\partial_{\chi} f \cdot \mathbf{h} = H$ (un escalar).

Siguiendo la notación establecida en el anterior cuadro, el análisis de bifurcación parte con la condición necesaria para el inicio de la localización expresada en la Ecuación (A.10):

$$\det(\mathbb{Q}(\mathbf{n})) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^{ep} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (\text{A.17})$$

donde \mathbf{n} es la dirección de localización y \mathbb{C}^{ep} representa el tensor constitutivo tangente, el cual se define, en un formato general, como:

$$\mathbb{C}^{ep} = \vartheta_1 \mathbb{C}^e - \frac{\kappa}{\vartheta_2(H)} \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{f} : \mathbb{C}^e \quad (\text{A.18})$$

donde ϑ_1 y $\vartheta_2(H)$ dependen del modelo material elegido; \mathbf{f} y \mathbf{g} son, respectivamente, los gradientes de la función de daño y el potencial plástico; $\kappa = 1$ en carga plástica mientras $\kappa = 0$ en (des)carga elástica; H representa el modulo de ablandamiento del continuo y, finalmente, \mathbb{C}^e es tensor constitutivo elástico.

Si se inserta la Ecuación (A.18) en la Ecuación (A.17) y se expande la expresión obtenida se tiene:

$$\det\left(\vartheta_1 \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n} - \frac{\kappa}{\vartheta_2(H)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \otimes \mathbf{f} : \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}\right) = 0 \quad (\text{A.19})$$

en la cual se asumirá que $\vartheta_1 > 0$ (más adelante, cuando se particularicen los resultados para los diferentes modelos se verá que esta asunción es aceptable) y donde $\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}$, el tensor característico o acústico elástico \mathbb{Q}^e , es definido positivo. Basado en la positividad del tensor $(\vartheta_1 \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n})$, la expresión de la Ecuación (A.19) es equivalente a:

$$\det\left(\mathbf{1} - \frac{\kappa}{\vartheta_1 \vartheta_2(H)} \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \cdot \mathbb{Q}^{e-1} \otimes \mathbf{f} : \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}\right) = 0 \quad (\text{A.20})$$

donde se ha substituido $(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n})$ por \mathbb{Q}^e y donde $\mathbf{1}$ representa el tensor unitario de segundo orden.

En la expresión (A.20) puede aplicarse la siguiente propiedad de los determinantes:

$$\det(\mathbf{1} + \alpha \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 1 + \alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{A.21})$$

siendo \mathbf{a} y \mathbf{b} vectores y α un escalar. Con esta propiedad, la expresión (A.20) es equivalente a:

$$1 - \frac{\kappa}{\vartheta_1 \vartheta_2(H)} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \cdot \mathbb{Q}^{e-1}) \cdot (\mathbf{f} : \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (\text{A.22})$$

Considérese ahora que se está tratando con un material isótropo cuyo tensor constitutivo elástico es:

$$\mathbb{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (\text{A.23})$$

siendo λ y μ los coeficientes de Lamé. Después de algunas manipulaciones, la inversa del tensor elástico característicos tiene la siguiente expresión:

$$\mathbb{Q}^{e-1} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{\mu} \mathbf{I} \quad (\text{A.24})$$

Entonces, insertando la Ecuación (A.24) en la Ecuación (A.22), y de nuevo tras algunas manipulaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta_1} \left(-\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) \right) \\ = \vartheta_2(H) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

donde se ha supuesto que se está en carga plástica ($\kappa = 1$). Se puede ver que la variación de \mathbf{n} únicamente influye en la parte izquierda de la Ecuación (A.25), por lo que se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\vartheta_1} Z(\mathbf{n}) = \vartheta_2(H) \quad (\text{A.26})$$

siendo $Z(\mathbf{n})$:

$$Z(\mathbf{n}) = -\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{g}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) \quad (\text{A.27})$$

Las soluciones de la Ecuación (A.26) definen un conjunto de números reales:

$$\mathcal{G} = \{H \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \exists \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} \mid \det(\mathbb{Q}(H, \mathbf{n})) = 0\} \quad (\text{A.28})$$

siendo H_{crit} , módulo de ablandamiento de crítico o de bifurcación, el máximo del conjunto \mathcal{G} y siendo \mathbf{n}_{crit} , dirección de localización, la normal que maximiza H en \mathcal{G} . Dicho de otro modo, se busca una normal \mathbf{n}_{crit} que cumpla las siguientes condiciones³:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{ ser definido negativo} \quad (\text{A.29})$$

³Nos encontramos en un contexto de maximización debido al carácter negativo del módulo de ablandamiento H .

A partir de la Ecuación (A.26) y considerando el carácter monótono creciente de la función $\vartheta_2(H)$ en H , las condiciones expresadas en (A.29) son equivalentes a:

$$\frac{\partial Z(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Z(\mathbf{n})}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{ ser definido negativo} \quad (\text{A.30})$$

En el contexto de la simulación numérica del fallo material, las Ecuaciones (A.30) pueden ser resueltas numéricamente por proceso de maximización local (ver [64]). Sin embargo, para problemas grandes esto implica un coste computacional demasiado grande y, para evitarlo, se han desarrollado procedimientos analíticos para unas familias particulares de modelos constitutivos del continuo. En el siguiente apartado, se mostrarán estos resultados analíticos derivados de los modelos materiales usados en este trabajo: el modelo de daño isótropo y el modelo de plasticidad con flujo asociativo.

A.4. Valores críticos de modelos materiales particulares

En este apartado se particulariza el análisis previo de bifurcación para los modelos materiales inelásticos cuya ley de flujo plástico es del tipo asociativo. Se van a estudiar dos modelos: el modelo de daño continuo isótropo y el modelo de plasticidad general asociativa invíscida. Como resultado preliminar, que servirá para justificar posteriores asunciones que se asumirán sobre la estructura de \mathbf{n}_{crit} , se reproduce a continuación la interpretación geométrica de la condición (A.26) explicada en [91] y [54].

A.4.1. Interpretación geométrica: la elipse de localización

Sea la Ecuación (A.25) restringida al caso asociativo ($\mathbf{f} = \mathbf{g}$):

$$c_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + c_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) = \vartheta_2(H) \quad (\text{A.31})$$

donde:

$$c_1 = -\frac{1}{\vartheta_1} \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \quad c_2 = \frac{1}{\vartheta_1} \frac{1}{\mu} \quad (\text{A.32})$$

Si se substituye $\mathbb{C}^e : \mathbf{f}$ por $\boldsymbol{\sigma}$ y se tiene en consideración que:

$$\sigma_n = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \quad \text{y} \quad \tau^2 = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \sigma_n^2 \quad (\text{A.33})$$

se obtiene, después de algunas manipulaciones y en el espacio (σ_n, τ) , la expresión matemática de una elipse (llamada *elipse de localización* por [91]):

$$\frac{\sigma_n^2}{\frac{\vartheta_2(H)}{c_2 - c_1}} + \frac{\tau^2}{\frac{\vartheta_2(H)}{c_2}} = 1 \quad (\text{A.34})$$

El tamaño de esta elipse, cuyo centro se sitúa en el $(0,0)$, depende únicamente de H y sus semiejes tienen una relación constante entre ellos. Por lo tanto, se puede

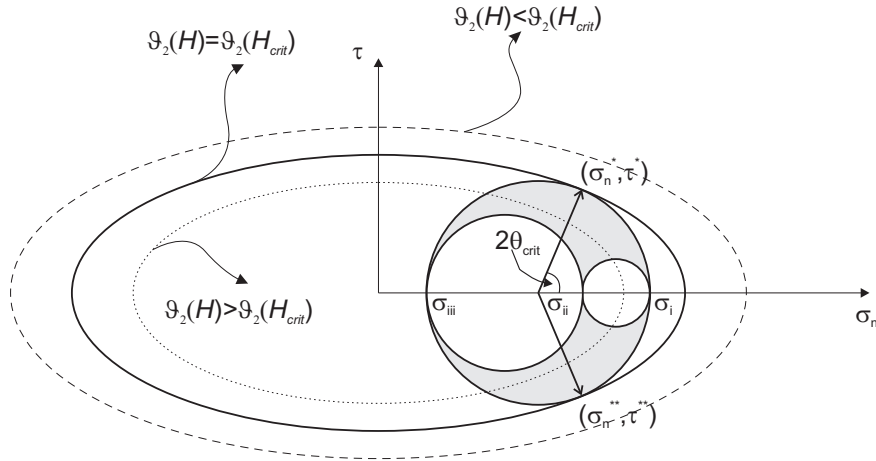


Figura A.2: Elipse de localización y círculos de Mohr

definir H_{crit} como el valor máximo de H para el cual existe la intersección de la zona admisible dentro del área de los círculos de Mohr con la elipse de localización. Este concepto se describe en la Figura A.2.

Como se observa en la Figura A.2, la elipse de localización interseca el círculo máximo de Mohr, por lo que se puede afirmar que la normal \mathbf{n}_{crit} se sitúa en el plano 1-3 de la base formada por las direcciones principales de $\boldsymbol{\sigma}$. Como se está trabajando con un tensor constitutivo isótropo \mathbb{C}^e , puede afirmarse que \mathbf{n}_{crit} también se encuentra en el plano 1-3 de la base formada por las direcciones principales de \mathbf{f} . Esto significa que, en esa base, el vector \mathbf{n}_{crit} tiene la siguiente estructura $\mathbf{n}_{crit} = (n_1, 0, n_3)^T$ (ver Figura A.3).

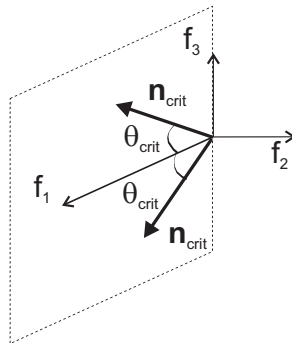


Figura A.3: Direcciones de \mathbf{n}_{crit} en espacio de los autovectores de \mathbf{f}

A.4.2. Valores críticos del ángulo de localización

Asumiendo, como se indicó anteriormente, que \mathbf{n}_{crit} tiene la siguiente estructura:

$$\mathbf{n}_{crit} = (n_1, 0, n_3)^T \quad (\text{A.35})$$

y trabajando en el espacio de las direcciones principales de \mathbf{f} , se imponen a continuación las condiciones expresadas en la Ecuación (A.30). De las ecuaciones (A.25) y (A.26) se obtiene, imponiendo $\mathbf{f} = \mathbf{g}$:

$$c_1 (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + c_2 (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) = Z(\mathbf{n}) \quad (\text{A.36})$$

siendo:

$$c_1 = -\frac{1}{\vartheta_1} \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \quad c_2 = \frac{1}{\vartheta_1} \frac{1}{\mu} \quad (\text{A.37})$$

Sabiendo que:

$$\mathbb{C}^e = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (\text{A.38})$$

$$\mathbb{C}^e : \mathbf{f} = \lambda \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{f} \quad (\text{A.39})$$

donde $\text{tr}(\mathbf{f})$ es la traza del tensor \mathbf{f} , es decir, $\text{tr}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^3 f_i$, se puede expresar la Ecuación (A.36) en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{n}) &= c_1 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) + 2\mu \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{n})^2 \\ &\quad + c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} + 2\mu \mathbf{f} \cdot \mathbf{n})^T (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} + 2\mu \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Considerando (A.35), la expresión (A.40) puede ser expandida como:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{n}) &= c_1 \lambda^2 \text{tr}^2(\mathbf{f}) + 4c_1 \mu^2 (f_1 n_1^2 + f_3 n_3^2)^2 \\ &\quad + 4c_1 \mu \lambda \text{tr}(\mathbf{f}) (f_1 n_1^2 + f_3 n_3^2) + c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) n_1 + 2\mu f_1 n_1)^2 \\ &\quad + c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) n_3 + 2\mu f_3 n_3)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

y, basándose de nuevo en (A.35) y sabiendo que $|\mathbf{n}_{crit}| = 1$, n_3 puede ser substituido por:

$$n_3^2 = 1 - n_1^2 \quad (\text{A.42})$$

entonces, la expresión (A.41) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{n}) &= c_1 \lambda^2 \text{tr}^2(\mathbf{f}) + 4c_1 \mu^2 (f_3 + (f_1 - f_3) n_1^2)^2 + 4c_1 \mu \lambda \text{tr}(\mathbf{f}) f_1 n_1^2 \\ &\quad + c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) + 2\mu f_1)^2 n_1^2 + 4c_1 \mu \lambda \text{tr}(\mathbf{f}) f_3 - 4c_1 \mu \lambda \text{tr}(\mathbf{f}) f_3 n_1^2 \\ &\quad + c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) + 2\mu f_3)^2 - c_2 (\lambda \text{tr}(\mathbf{f}) + 2\mu f_3)^2 n_1^2 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

y finalmente, si se agrupan en términos de potencias de n_1 , se obtiene la siguiente expresión para $Z(\mathbf{n})$:

$$\begin{aligned}
 Z(\mathbf{n}) = & \underbrace{[c_1 \lambda^2 \operatorname{tr}^2(\mathbf{f}) + 4c_1 \mu^2 f_3^2 + 4c_1 \mu \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{f}) f_3 + c_2 (\lambda \operatorname{tr}(\mathbf{f}) - 2\mu f_3)^2]}_{TERM1} \\
 & + \underbrace{[8c_1 \mu^2 f_3 f_1 - 8c_1 \mu^2 f_3^2 + 4c_1 \mu \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{f}) f_1 + c_2 4\mu^2 f_1^2 + 4c_2 \lambda \mu \operatorname{tr}(\mathbf{f}) f_1 - 4c_1 \mu \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{f}) f_3 - 4c_2 \mu^2 f_3^2 - 4c_2 \lambda \mu \operatorname{tr}(\mathbf{f}) f_3]}_{TERM2} \cdot n_1^2 \\
 & + \underbrace{[-4c_1 \mu^2 f_1^2 - 4c_1 \mu^2 f_3^2 - 8c_1 \mu^2 f_1 f_3]}_{TERM3} \cdot n_1^4
 \end{aligned} \tag{A.44}$$

En este punto, es fácil imponer las condiciones expresadas en (A.30) a la Ecuación (A.44). Si se trabaja en forma compacta se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \quad \rightarrow \quad \frac{\partial Z(n_1)}{\partial n_1} = 0 \\
 \frac{\partial (TERM1 + TERM2 n_1^2 + TERM3 n_1^4)}{\partial n_1} = 0 \\
 2 TERM2 n_1 + 4 TERM3 n_1^3 = 0
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

y, finalmente, se puede expresar el valor de n_1 como:

$$n_1^2 = -\frac{TERM2}{2 TERM3} \tag{A.46}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 TERM2 &= \frac{4\mu}{1-\nu} f_1 f_1 + \frac{4\mu\nu}{1-\nu} f_1 f_2 - \frac{4\mu}{1-\nu} f_1 f_3 - \frac{4\mu\nu}{1-\nu} f_2 f_3 \\
 TERM3 &= -\frac{2\mu}{1-\nu} f_1 f_1 + \frac{4\mu}{1-\nu} f_1 f_3 - \frac{2\mu}{1-\nu} f_3 f_3
 \end{aligned} \tag{A.47}$$

donde se han insertados los valores de c_1 y c_2 dados en (A.32), la expresión (A.44) se ha expandido completamente y únicamente se han usado los módulos elásticos μ y ν .

Insertando la Ecuación (A.47) en (A.46) y tomando en consideración (A.42), se puede afirmar que:

$$\begin{aligned}
 n_1^2 &= \frac{f_1 f_1 + \nu f_1 f_2 - f_1 f_3 + \nu f_2 f_3}{f_1 f_1 + f_3 f_3 - 2f_1 f_3} \\
 n_3^2 &= \frac{f_3 f_3 + \nu f_2 f_3 - f_1 f_3 - \nu f_1 f_2}{f_1 f_1 + f_3 f_3 - 2f_1 f_3}
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

lo que implica que, para el caso asociativo, el ángulo crítico de localización es (ver Figura A.3):

$$\tan^2(\theta_{crit}) = \frac{n_3^2}{n_1^2} = \frac{f_3 f_3 + \nu f_2 f_3 - f_1 f_3 - \nu f_1 f_2}{f_1 f_1 + \nu f_1 f_2 - f_1 f_3 + \nu f_2 f_3} = -\frac{f_1 + \nu f_2}{f_3 + \nu f_2} \tag{A.49}$$

siempre que se satisfagan las condiciones:

$$(f_1 + \nu f_2) \geq 0 \quad \text{y} \quad (f_3 + \nu f_2) \leq 0. \quad (\text{A.50})$$

Se analizará a continuación si el valor de \mathbf{n}_{crit} expresado en (A.48) corresponde a un máximo de H , esto es, si se cumple la segunda parte de la condición (A.30). La condición a imponer es:

$$\frac{\partial^2 Z(\mathbf{n})}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{ definido negativo} \iff \frac{\partial^2 Z(n_1)}{\partial^2 n_1} \leq 0 \quad (\text{A.51})$$

Utilizando la expresión de $Z(\mathbf{n})$ dada en (A.44), la expresión anterior (A.51) lleva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z(n_1)}{\partial^2 n_1} &= \frac{\partial^2 (TERM1 + TERM2 n_1^2 + TERM3 n_1^4)}{\partial^2 n_1} \\ &= 2 TERM2 + 12 TERM3 n_1^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

donde $TERM2$ y $TERM3$ se han definido en (A.47). Insertando la expresión (A.46) en la Ecuación (A.52) se llega a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Z(n_1)}{\partial^2 n_1} &= 2 TERM2 + 12 TERM3 n_1^2 \\ &= 2 TERM2 + 12 TERM3 \left(-\frac{TERM2}{2 TERM3} \right) \\ &= 2 TERM2 - 6 TERM2 \\ &= -4 TERM2 \leq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Por lo tanto, la condición a probar es $TERM2 \geq 0$ lo que implica, usando (A.47a), que:

$$\begin{aligned} \frac{4\mu}{1-\nu} f_1 f_1 + \frac{4\mu\nu}{1-\nu} f_1 f_2 - \frac{4\mu}{1-\nu} f_1 f_3 - \frac{4\mu\nu}{1-\nu} f_2 f_3 &\geq 0 \\ f_1 f_1 + \nu f_1 f_2 - f_1 f_3 - \nu f_2 f_3 &\geq 0 \\ (f_1 + \nu f_2)(f_1 - f_3) &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Como $(f_1 - f_3)$ es siempre positivo, la condición para asegurar el máximo de H es $(f_1 + \nu f_2) \geq 0$, que es una de las dos condiciones derivadas de las expresiones de θ_{crit} (A.49 y A.50). En el Apartado §A.4.4 se lleva a cabo un estudio para el caso en el las condiciones (A.50) no se verifican, donde se derivan los valores del módulo de ablandamiento y del ángulo críticos.

A.4.3. Valor crítico del módulo de ablandamiento

Para obtener el máximo valor de H , es necesario insertar el valor de \mathbf{n}_{crit} de la Ecuación (A.48) en la expresión general de H dada en la Ecuación (A.26) y (A.31). En este caso, es necesario hacer un estudio diferenciado para el modelo de plasticidad asociada y para el modelo de daño, debido a la diferente estructura que presentan los módulos tangentes constitutivos de ambos modelos.

Sea entonces la expresión general de la condición de localización, particularizada por los valores críticos de H_{crit} y \mathbf{n}_{crit} :

$$\frac{1}{\vartheta_1} \left(-\frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} (\mathbf{n}_{crit} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{crit}) (\mathbf{n}_{crit} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}_{crit}) + \frac{1}{\mu} (\mathbf{n}_{crit} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) (\mathbf{n}_{crit} \cdot \mathbb{C}^e : \mathbf{f}) \right) = \vartheta_2(H_{crit}) \quad (\text{A.55})$$

donde los valores de ϑ_1 y $\vartheta_2(H)$, descritos en el siguiente cuadro, dependen del modelo material

Cuadro A.1: Constantes ϑ_1 y $\vartheta_2(H)$.

Modelo de daño	Modelo de plasticidad
$\vartheta_1 = \frac{\chi}{\xi}$	$\vartheta_1 = 1$
$\vartheta_2(H) = \frac{\chi - H \cdot \xi}{\xi^3}$	$\vartheta_2(H) = H + \mathbf{f} : \mathbb{C} : \mathbf{f}$

siendo, para el modelo de daño, χ la variable interna tipo tensión y ξ la variable interna tipo deformación (ver Apartado §2.3).

Si se desarrolla la expresión (A.55), considerando los valores del Cuadro A.1 y el valor de \mathbf{n}_{crit} dado en la Ecuación (A.48), y tras algunas manipulaciones algebraicas, se obtienen los siguientes valores de H_{crit} para los modelos de daño y de plasticidad asociada:

$$\begin{aligned} H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1 - \nu - 2\nu^2) \chi \xi}{E (f_1^2 (1 - \nu) + f_3^2 (1 - \nu) + 2\nu f_2 f_3 + 2\nu f_1 (f_2 + f_3) + 2\nu^2 f_2^2)} \\ H_{crit}^{Plast} &= -E f_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

donde, como en (A.49), se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$(f_1 + \nu f_2) \geq 0 \quad \text{y} \quad (f_3 + \nu f_2) \leq 0 \quad (\text{A.57})$$

A.4.4. Valores críticos en los casos extremos

Los valores críticos del módulo de ablandamiento, H_{crit} , y la normal a la superficie de fractura, \mathbf{n}_{crit} , obtenidos en las dos secciones precedentes, se han calculado asumiendo que se cumplen las condiciones expresadas en (A.50) o en (A.57), que son:

$$(f_1 + \nu f_2) \geq 0 \quad \text{y} \quad (f_3 + \nu f_2) \leq 0 \quad (\text{A.58})$$

A continuación se analizará qué ocurre cuando estas condiciones no se cumplen. Para poder obtener el máximo de la función $H = H(n_1)$, es necesario estudiar los valores de la derivada de $H(n_1)$ en el intervalo $0 \leq n_1^2 \leq 1$. El signo de la derivada de $H(n_1)$ es el mismo que el signo de la derivada de $Z(n_1)$ como se explicó en el Apartado §A.3 (ver la equivalencia entre la ecuaciones (A.29) y (A.30)). En este

caso el estudio se ha realizado sobre $\partial Z(n_1)/\partial n_1^2$ en vez de sobre $\partial Z(n_1)/\partial n_1^4$. Esta expresión se puede escribir, tras algunas manipulaciones algebraicas como:

$$\frac{\partial Z(n_1)}{\partial n_1^2} = \frac{4\mu}{1-\nu} (f_1 - f_3) (f_1 + \nu f_2) - \frac{2\mu}{1-\nu} (f_1 - f_3)^2 2n_1^2 \quad (\text{A.59})$$

y reordenando la expresión anterior, puede ser escrita como:

$$\frac{\partial Z(n_1)}{\partial n_1^2} = \frac{4\mu}{1-\nu} \overbrace{(f_1 - f_3)}^{\geq 0} \overbrace{\left(\underbrace{(f_1 + \nu f_2)}_{\text{term}_A} - \underbrace{(f_1 - f_3) n_1^2}_{\geq 0} \right)}^{\text{term}_B} \quad (\text{A.60})$$

donde el signo de term_B da el signo de $\partial Z(n_1)/\partial n_1^2$.

Cuando la primera condición de (A.58) no se satisface, es decir, cuando $(f_1 + \nu f_2) \leq 0$, se tiene a partir de la Ecuación (A.60) que $\partial Z(n_1)/\partial n_1^2 \leq 0$ para todo n_1^2 . Esto significa que H es decreciente en n_1^2 en el intervalo $0 \leq n_1^2 \leq 1$ y por lo tanto H toma su valor máximo cuando $n_1^2 = 0$, llegando a las soluciones siguientes (ver la Figura A.3):

$$\begin{aligned} \theta_{crit} &= 0^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1-\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{E(f_3(1-\nu) + (f_1 + f_2)\nu)^2} \frac{\chi \xi}{\xi} \\ H_{crit}^{Plast} &= -\frac{(f_1^2 + f_2^2 + 2\nu f_1 f_2) E}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Por el contrario, cuando la segunda condición de (A.58) no se satisface, es decir, cuando $(f_3 + \nu f_2) \geq 0$, a partir de la Ecuación (A.60) se tiene que $\partial Z(n_1)/\partial n_1^2 \geq 0$ para todo n_1^2 . Esto significa que H es creciente en n_1^2 en el intervalo $0 \leq n_1^2 \leq 1$, y por lo tanto H toma su valor máximo cuando $n_1^2 = 1$, llevando a las siguientes soluciones (ver la Figura A.3):

$$\begin{aligned} \theta_{crit} &= 90^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1-\nu)(1+\nu)(1-2\nu)}{E(f_1(1-\nu) + (f_2 + f_3)\nu)^2} \frac{\chi \xi}{\xi} \\ H_{crit}^{Plast} &= -\frac{(f_2^2 + f_3^2 + 2\nu f_2 f_3) E}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

A.4.5. Resumen de los valores críticos

A continuación se resumen los resultados anteriores teniendo en consideración si las condiciones expresadas en la Ecuación (A.58) se cumplen o no:

⁴Se puede tomar esta decisión porque $Z(n_1)$ tiene la estructura $Z(n_1) = \alpha + \beta n_1^2 + \gamma n_1^4$, ver Ecuación (A.47).

- *Caso 1.* $(f_1 + \nu f_2) \geq 0$ y $(f_3 + \nu f_2) \leq 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{crit} &= \arctan \sqrt{-\frac{f_1 + \nu f_2}{f_3 + \nu f_2}} \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1 - \nu - 2\nu^2) \chi \xi}{E(f_1^2(1 - \nu) + f_3^2(1 - \nu) + 2\nu f_2 f_3 + 2\nu f_1(f_2 + f_3) + 2\nu^2 f_2^2)} \\ H_{crit}^{Plast} &= -E f_2^2\end{aligned}\quad (\text{A.63})$$

- *Caso 2.* $(f_1 + \nu f_2) \leq 0$ y $(f_3 + \nu f_2) \leq 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{crit} &= 0^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1 - \nu)(1 + \nu)(1 - 2\nu) \chi \xi}{E(f_3(1 - \nu) + (f_1 + f_2)\nu)^2} \\ H_{crit}^{Plast} &= -\frac{(f_1^2 + f_2^2 + 2\nu f_1 f_2) E}{1 - \nu^2}\end{aligned}\quad (\text{A.64})$$

- *Caso 3.* $(f_1 + \nu f_2) \geq 0$ y $(f_3 + \nu f_2) \geq 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{crit} &= 90^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1 - \nu)(1 + \nu)(1 - 2\nu) \chi \xi}{E(f_1(1 - \nu) + (f_2 + f_3)\nu)^2} \\ H_{crit}^{Plast} &= -\frac{(f_2^2 + f_3^2 + 2\nu f_2 f_3) E}{1 - \nu^2}\end{aligned}\quad (\text{A.65})$$

A.5. Análisis bidimensional

El análisis de bifurcación discontinua en un marco bidimensional, *i.e.* bajo condiciones de tensión plana y de deformación plana, ha sido realizado por Runesson *et al.* en [78]. Los resultados que se presentan aquí se pueden contrastar en dicha referencia donde únicamente no están incluidos los valores críticos particularizados para el modelo de daño.

Para las condiciones de deformación plana, la tensión principal segunda es siempre perpendicular al plano de trabajo. Esto significa que, si se asume que el cuerpo de estudio está situado en el plano X-Y, la tensión principal segunda siempre tendrá la dirección del eje OZ y la primera y segunda tensión principal estarán siempre en el plano de estudio X-Y. Como se vio en la Sección §A.4.1, la dirección de bifurcación es siempre perpendicular a la tensión principal segunda, lo que implica que siempre estará situada en el plano de estudio X-Y y, por lo tanto, los valores de bifurcación para las condiciones de deformación plana son un caso particular del caso tridimensional⁵.

⁵Si para el caso de deformación plana las direcciones principales de \mathbf{f}_{SP} son $(f_{1_{SP}}, f_{2_{SP}})^T$, para poder usar correctamente las expresiones derivadas del caso general tridimensional es necesario tomar $f_{1_{3D}} = f_{1_{DP}}$, $f_{2_{3D}} = 0$ y $f_{3_{3D}} = f_{2_{DP}}$.

Por el contrario, no se pueden establecer las mismas conclusiones para el caso de condiciones de tensión plana y, dado que las expresiones analíticas de los valores de bifurcación son diferentes, se presenta a continuación un estudio completo de sus valores críticos.

Se empezará el estudio a partir de la condición general de localización expresada en la Ecuación (A.17), pero particularizada para el caso asociativo:

$$\det(\mathbb{Q}(\mathbf{n})) = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^{ep} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (\text{A.66})$$

En esta ecuación, el operador constitutivo tangente \mathbb{C}^{ep} se define como (para el caso asociativo):

$$\mathbb{C}^{ep} = \vartheta_1 \mathbb{C}_{TP}^e - \frac{\kappa}{\vartheta_2(H)} \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} : \mathbb{C}_{TP}^e \quad (\text{A.67})$$

habiéndose explicado las componentes de la expresión anterior en la Ecuación (A.18) pero particularizada a dos dimensiones, *i.e.*, \mathbf{f} corresponde a $\mathbf{f} = [f_1, f_2]^T$. El tensor constitutivo elástico \mathbb{C}_{TP}^e , en tensión plana, es:

$$\mathbb{C}_{TP}^e = \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + (1-\nu) \mathbf{I}) \quad (\text{A.68})$$

donde, en este caso, se han utilizado los módulos elásticos E y ν y se han redefinido los tensores unidad de segundo y cuarto orden de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\mathbf{1}]_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} & \alpha, \beta &= 1, 2 \\ [\mathbf{I}]_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}) & \alpha, \beta, \gamma, \delta &= 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Siguiendo el mismo método que en la sección §A.3, la condición de localización (A.66) pasa a ser:

$$1 - \frac{\kappa}{\vartheta_1\vartheta_2(H)} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbb{Q}^{e-1}) \cdot (\mathbf{f} : \mathbb{C}_{TP}^e \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (\text{A.70})$$

donde, para el caso de tensión plana, el inverso del tensor elástico acústico \mathbb{Q}^e es:

$$\mathbb{Q}_e^{-1} = \frac{1+\nu}{E} ((1+\nu) \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} + (1-\nu) \mathbf{1}) \quad (\text{A.71})$$

siendo $\mathbf{t} = [n_2, -n_1]^T$, como se muestra en la Figura A.4:

Para el caso de carga ($\kappa = 1$), y tras haber insertado la Ecuación (A.71) en la Ecuación (A.70), se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\vartheta_1} \left(\frac{(1+\nu)^2}{E} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \right. \\ \left. \frac{1-\nu^2}{E} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f}) \right) = \vartheta_2(H_{crit}) \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Debido a que la variación de \mathbf{n} únicamente afecta a la parte izquierda de la igualdad (A.72), esta expresión puede ser escrita como (usando el mismo criterio que en §A.3):

$$\frac{1}{\vartheta_1} Z(\mathbf{n}) = \vartheta_2(H) \quad (\text{A.73})$$

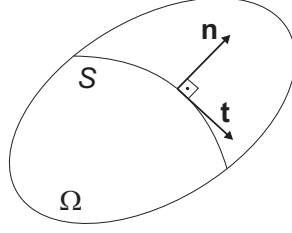


Figura A.4: Continuum con una superficie de localización y sistema coordenado local

siendo en este caso $Z(\mathbf{n})$:

$$Z(\mathbf{n}) = \frac{(1+\nu)^2}{E} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + \frac{1-\nu^2}{E} (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f}) (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f}) \quad (\text{A.74})$$

donde se han considerado las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{1} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}_{TP}^e : \mathbf{f} &= \frac{E\nu}{1-\nu^2} \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} + \frac{E}{1+\nu} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Como se dijo para el caso general tridimensional, las soluciones de la Ecuación (A.73) definen un conjunto de números reales (para el caso de tensión plana):

$$\mathcal{G} = \{H \in \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad \exists \mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} \mid \det(\mathbb{Q}(H, \mathbf{n})) = 0\} \quad (\text{A.76})$$

siendo H_{crit} , valor del módulo de ablandamiento de bifurcación, el máximo del conjunto \mathcal{G} y siendo \mathbf{n}_{crit} , dirección de localización, la normal que maximiza H en \mathcal{G} . Como se hizo en la Sección §A.3, se busca una normal \mathbf{n}_{crit} que cumpla:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{definido negativo} \quad (\text{A.77})$$

o, como condición equivalente debido a la naturaleza monótona creciente en H de $\vartheta_2(H)$, se busca una normal \mathbf{n}_{crit} que cumpla:

$$\frac{\partial Z(\mathbf{n})}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 Z(\mathbf{n})}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{definido negativo} \quad (\text{A.78})$$

A continuación se imponen las condiciones (A.78) para obtener un valor analítico de \mathbf{n}_{crit} . A partir de (A.74) y (A.75) se tiene:

$$Z(\mathbf{n}) = E (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{n})^T (\mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) + E(1-\nu) \left(\frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \right)^T \left(\frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\mathbf{f}) \mathbf{n} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \right) \quad (\text{A.79})$$

Para el siguiente paso, es necesario tener en cuenta que se está trabajando en un formato bidimensional y que la normal \mathbf{n} tiene la estructura $\mathbf{n} = (n_1, n_2, 0)$, donde la tercera coordenada pertenece al vector fuera del plano del sistema coordenado local mostrado en la Figura A.4. Por lo tanto, se puede afirmar que:

$$n_2^2 = 1 - n_1^2 \quad (\text{A.80})$$

y, entonces, la expresión (A.79) toma la siguiente forma agrupada en potencias de n_1 .

$$\begin{aligned} Z(\mathbf{n}) = & \frac{E}{1 - \nu^2} (f_2 + \nu f_1)^2 + \\ & + 2E(f_1 - f_2) f_1 n_1^2 - E(f_1 - f_2)^2 n_1^4 \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Imponiendo a la Ecuación (A.81) la condición expresada en (A.78a), y tras algunas manipulaciones algebraicas, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned} n_1^2 &= \frac{f_1}{f_1 - f_2} \\ n_2^2 &= \frac{f_2}{f_1 - f_2} \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

que lleva a la siguiente solución para el ángulo crítico:

$$\tan^2(\theta_{crit}) = -\frac{f_2}{f_1} \quad (\text{A.83})$$

siempre que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$f_1 \geq 0 \quad \text{and} \quad f_2 \leq 0 \quad (\text{A.84})$$

Para poder garantizar que la solución (A.83) y (A.84) corresponde a un máximo de H , es necesario demostrar que:

$$\frac{\partial^2 Z(\mathbf{n})}{\partial^2 \mathbf{n}} \text{ definido negativo} \iff \frac{\partial^2 Z(n_1)}{\partial^2 n_1} \leq 0 \quad (\text{A.85})$$

lo que implica, a partir de (A.81) y (A.82), que:

$$\frac{\partial^2 Z(n_1)}{\partial^2 n_1} = -8E(f_1 - f_2) f_1 \leq 0 \quad (\text{A.86})$$

que finalmente lleva a:

$$f_1 \geq 0 \quad (\text{A.87})$$

que es la condición (A.84a) anteriormente establecida.

Una vez que se ha definido el valor de \mathbf{n}_{crit} , es directo calcular el valor de H_{crit} para tanto el modelo de plasticidad asociada como el modelo de daño. Insertando

el valor de \mathbf{n}_{crit} dado en la expresión (A.82) en la Ecuación (A.72) y haciendo uso de los coeficientes dados en la Tabla A.1, los valores resultantes de H_{crit} son:

$$\begin{aligned} H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1-\nu)(1+\nu)^2 \chi \xi}{E(f_1^2 + f_2^2 + \nu(f_1 + f_2)^2 + 2\nu^2 f_1 f_2)} \\ H_{crit}^{Plast} &= 0 \end{aligned} \quad (A.88)$$

imponiéndose de nuevo las siguientes condiciones:

$$f_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad f_2 \leq 0 \quad (A.89)$$

Finalmente, y con los mismos argumentos que para el caso general tridimensional, las soluciones para las situaciones extremas, es decir, cuando las condiciones (A.84) o (A.89) no se satisfacen, son como siguen:

- cuando $f_1 \leq 0$ y $f_2 \leq 0$:

$$\begin{aligned} \theta_{crit} &= 0^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1-\nu^2) \chi \xi}{E(f_2 + \nu f_1)^2} \\ H_{crit}^{Plast} &= -E f_1^2 \end{aligned} \quad (A.90)$$

- cuando $f_1 \geq 0$ y $f_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \theta_{crit} &= 90^\circ \\ H_{crit}^{Dam} &= \frac{\chi}{\xi} - \frac{(1-\nu^2) \chi \xi}{E(f_1 + \nu f_2)^2} \\ H_{crit}^{Plast} &= -E f_2^2 \end{aligned} \quad (A.91)$$

Apéndice B

Análisis de los modelos de plasticidad

Los modelos de plasticidad, en contraposición a los de daño, son modelos constitutivos que reproducen el comportamiento de los materiales que sufren deformaciones irreversibles durante su proceso de agotamiento. Dentro de esta clase de materiales, cuya proceso de localización presenta un comportamiento dúctil, cabe destacar ciertos tipos de suelos, los metales o los plásticos.

En este anejo se resume el modelo material de plasticidad utilizado en el Capítulo §6.2: *el modelo de plasticidad asociada particularizado con el criterio de fallo de Von Mises*. En este modelo la componente hidrostática de las tensiones se mantiene elástica cualquiera que sea su valor y la condición de fluencia únicamente se debe a la componente desviadora [63].

La estructura de este apéndice es la siguiente: en la sección §B.1 se introducen los ingredientes principales del modelo general de plasticidad asociada. En la sección §B.2 se describe el modelo de continuo de plasticidad asociada de Von Mises y su correspondiente proyección en un modelo discreto, siguiendo el proceso de regularización descrito en el Apartado §2.7. Finalmente, en la sección §B.3 se describe el algoritmo de integración IMPL-EX aplicado al modelos de plasticidad, ya que para estos modelos el esquema de integración difiere levemente del presentado en el apartado §3.4 para los modelos de daño isótropo.

B.1. Modelo general de plasticidad asociada

Los ingredientes del modelo general de plasticidad asociada son los siguientes:

1. Energía libre de Helmholtz:

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p \\ \psi^e(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

donde $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_m\}$ son las variables internas tipo deformación y donde se ha realizado una descomposición aditiva de las deformaciones $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$.

2. Leyes constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\chi}_i = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\xi}_i} \text{ con } i = 1, \dots, m \quad (\text{B.3})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{\chi} = \{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_m\}$ son las variables internas tipo tensión y $\mathbb{C}^e = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ es el módulo constitutivo elástico, con $\bar{\lambda}$ y μ los módulos de Lamé y $\mathbf{1}$ y \mathbf{I} los tensores unitarios de orden dos y cuatro.

3. Dominio elástico en el espacio de las tensiones:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \leq 0\} \quad (\text{B.4})$$

siendo \mathbb{S} el conjunto de los tensores simétricos de segundo orden y $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función del criterio de fallo que se expresa como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = \tilde{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \hat{f}(\sigma_u, \boldsymbol{\chi}) \quad (\text{B.5})$$

donde $\tilde{f}(\boldsymbol{\sigma})$ es la tensión equivalente y $\hat{f}(\sigma_u, \boldsymbol{\chi})$ incluye los efectos del ablandamiento (siendo σ_u la tensión última).

4. Reglas de flujo asociado y ley de ablandamiento:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}; \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \quad (\text{B.7})$$

siendo $\gamma \geq 0$ el parámetro de consistencia, $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{S}$ la regla de flujo plástico en plasticidad asociada y $\mathbf{h} : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la ley de ablandamiento (en formato general).

5. Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) \leq 0, \quad \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

6. Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad (\text{B.9})$$

7. Módulo tangente constitutivo:

$$\mathbb{C}^{ep} = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{C}^e & \text{if } \gamma = 0 \\ \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f \otimes \mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f + \partial_{\boldsymbol{\chi}} f \cdot \mathbf{h}} & \text{if } \gamma > 0 \end{array} \right\} \quad (\text{B.10})$$

B.2. Modelo de plasticidad de Von Mises con ablandamiento isótropo

El modelo de plasticidad asociada de Von Mises con ablandamiento isótropo es una particularización del modelo general descrito en el apartado anterior pero asumiendo [63]:

- una superficie de fluencia para la cual los estados de tensión hidrostáticos están siempre dentro del dominio elástico y el fallo es debido a los estados desviadores.
- la existencia únicamente de endurecimiento isótropo, con lo que el centro de la superficie de fluencia en el espacio de las tensiones principales permanece fijo.

B.2.1. Ingredientes

Los ingredientes del modelo plasticidad asociada con ablandamiento isótropo y criterio de fallo de Von Mises son los siguientes:

1. Energía libre de Helmholtz:

$$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\xi}) = \psi^e(\boldsymbol{\epsilon}^e) + \psi^p(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}^e = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p \\ \psi^e(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

donde $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p$ y $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}\}$ es la variable interna tipo deformación llamada *deformación plástica equivalente*.

2. Leyes constitutivas:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \boldsymbol{\epsilon}^e} = \mathbb{C}^e : \boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbb{C}^e : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (\text{B.12})$$

$$\chi = -\frac{\partial \psi^p}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (\text{B.13})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy, χ es la variable interna tipo tensión y $\mathbb{C}^e = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ es el módulo constitutivo elástico ya definido.

3. Dominio elástico en el espacio de las tensiones:

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{\sigma}} = \{(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \in \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \mid f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0\} \quad (\text{B.14})$$

siendo $f : \mathbb{S} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función del criterio de fallo que se expresa como:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev}} - (\sigma_u - \chi) \quad (\text{B.15})$$

donde $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ es la componente desviadora del tensor de tensiones.

4. Reglas de flujo y ley de ablandamiento:

$$\dot{\epsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|}; \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{\xi} = \gamma \frac{\partial f}{\partial \chi} = \gamma \text{ con } \xi|_{t=0} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{\chi} = -\gamma \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = -H(\chi(\xi)) \dot{\xi} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \chi|_{t=0} = 0 \\ \chi|_{t=\infty} = \sigma_u \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

siendo $\gamma \geq 0$ el multiplicador plástico y habiéndose particularizado $\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f$ y $\mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$.

5. Condiciones de carga/descarga de Kuhn-Tucker:

$$\gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) \leq 0, \gamma f(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0 \quad (\text{B.19})$$

6. Condición de consistencia:

$$\gamma \dot{f}(\boldsymbol{\sigma}, \chi) = 0 \quad (\text{B.20})$$

7. Módulo tangente constitutivo:

$$\mathbb{C}^{ep} = \begin{cases} \mathbb{C}^e & \text{si } \gamma = 0 \\ \mathbb{C}^e - \frac{\mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f \otimes \mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f}{\partial_{\boldsymbol{\sigma}} f : \mathbb{C}^e : \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f + H} & \text{si } \gamma > 0 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

$$\text{siendo } \partial_{\boldsymbol{\sigma}} f = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} \quad (\text{B.22})$$

B.2.2. Proyección del modelo continuo en uno discreto

Como se explicó en el Apartado §2.7, la utilización de un modelo del continuo para reproducir el fenómeno de la localización de deformaciones lleva a la proyección, en la superficie de discontinuidad, de este modelo continuo en otro discreto. Esta proyección tiene lugar tras la regularización tanto de la cinemática de discontinuidad fuerte (descrita en §2.6.1) como del módulo de ablandamiento continuo (descrita en §2.6.2).

En este Apartado se aplicará, para el modelo de plasticidad asociada con el criterio de fallo de Von Mises, el mismo esquema que el aplicado en el Apartado §2.7 para el modelo de daño. En ambos casos, se han seguido los desarrollos presentados por Oliver en [52] para los modelos genéricos de daño y plasticidad que se resumen a continuación.

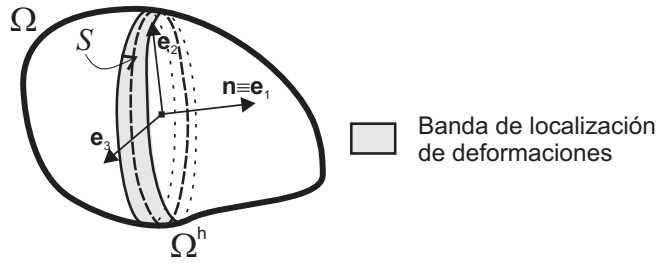


Figura B.1: Esquema de un sólido con una banda de discontinuidad en su seno.

Regularización del modelo de continuo

Sea un sólido Ω en el cual se ha desarrollado una banda de localización de deformaciones $\Omega^h \in \Omega$ de tamaño $h(t)$ variable. Este tamaño cumple que para el instante de tiempo t_B , en el que se inicia la localización de deformaciones, $h(t_B) = h_B$ y que para el instante de tiempo t_{DF} , en que se alcanza el régimen de discontinuidad fuerte, $h(t_{DF}) = k \rightarrow 0$ (ver Figura B.1).

Sean entonces las expresiones ya introducidas en el Apartado §2.6 de:

- la *versión regularizada del campo de la deformación*, compatible con el campo de los desplazamientos enriquecidos a nivel elemental con un modo $[[\dot{\mathbf{u}}]]$:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla^s \dot{\mathbf{u}} + \mathcal{H}_{\Omega^h} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]]}_{\equiv \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \text{ acotado}} + \mu_{\Omega^h} \frac{1}{h(t)} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \quad (\text{B.23})$$

siendo \mathcal{H}_{Ω^h} la función salto definida en Ω^h , μ_{Ω^h} una función de colocación en Ω^h ($\mu_{\Omega^h} = 1$ si $\mathbf{x} \in \Omega^h$ y $\mu_{\Omega^h} = 0$ si $\mathbf{x} \notin \Omega^h$), $\nabla^s(\bullet)$ el operador gradiente simétrico de (\bullet) y el vector \mathbf{n} el vector normal a la superficie de discontinuidad $S \subset \Omega^h$.

- la *versión regularizada del módulo de ablandamiento del continuo*:

$$H = h(t) \bar{H} \quad (\text{B.24})$$

donde H es el módulo de ablandamiento del continuo de la Ecuación (B.18) y \bar{H} es el módulo de ablandamiento del discreto, que en el caso más general se puede considerar que $\bar{H} = \bar{H}(\chi)$ [52].

Análisis del régimen de discontinuidad fuerte

En el régimen de discontinuidad fuerte la cinemática regularizada asume que el espesor de la banda de localización Ω^h es $h(t > t_{DF}) = k \rightarrow 0$. Por lo tanto, dicha banda de localización colapsa en una superficie $S \equiv \Omega^k \in \Omega$ que se ha llamado superficie de discontinuidad (ver Figura B.1). Se considerará, en los puntos pertenecientes a dicha superficie de discontinuidad, unos ejes locales $\{\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{n}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ donde \mathbf{n} representa la normal a S .

Sea entonces la expresión de la continuidad de la tasa tracciones en \mathcal{S} :

$$\dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{cont. interna de tracciones}) \quad (\text{B.25})$$

tal como fue introducida en la Ecuación (2.58) del Apartado §2.8, cuando se definió la forma fuerte del problema de valor de contorno¹.

Utilizando la ecuación constitutiva definida en (B.12) y la expresión de la cinemática enriquecida definida en (B.23), la Ecuación (B.25) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \mathbb{C}^e : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p) \cdot \mathbf{n} \\ &= \lim_{h(t) \rightarrow 0} \left(\mathbb{C}^e : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}} + \frac{1}{h(t)} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p \right) \cdot \mathbf{n} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

que permite, multiplicando ambos términos por $h(t)$, establecer la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \lim_{h(t) \rightarrow 0} h(t) \left(\mathbb{C}^e : \left(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}} + \frac{1}{h(t)} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p \right) \cdot \mathbf{n} - \dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}} \right) &= \mathbf{0} \Rightarrow \\ \lim_{h(t) \rightarrow 0} \left(h(t) \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} + \mathbb{C}^e : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \cdot \mathbf{n} \right. \\ &\quad \left. - h(t) \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p \cdot \mathbf{n} - h(t) \dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}} \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \mathbb{C}^e : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \cdot \mathbf{n} + \lim_{h(t) \rightarrow 0} \underbrace{\left(h(t) (\mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} - \dot{\mathbf{t}}_{\mathcal{S}}) \right)}_{\text{Acotado}} \\ &\quad - h(t) \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \mathbb{C}^e : ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \cdot \mathbf{n} &= \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t) \mathbb{C}^e : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Utilizando la definición del tensor acústico elástico $\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e \cdot \mathbf{n}$ y la definición de la regla de flujo plástico dada en (B.16), la Ecuación (B.27) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^e \cdot [\dot{\mathbf{u}}] &= \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t) \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathcal{S}}^p) \\ &= \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \lim_{h(t) \rightarrow 0} \left(h(t) \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_{\mathcal{S}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} \right) \\ &= \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^e : \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t) \gamma_{\mathcal{S}}) \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

La Ecuación (B.28) admite dos soluciones: una en la que el multiplicador de flujo plástico γ en \mathcal{S} sea acotado, lo que implicaría que $[\dot{\mathbf{u}}] = \mathbf{0}$ y que el modo propuesto no es admisible, y otra en la que γ en \mathcal{S} sea del orden $\mathcal{O}(1/h)$, lo que permitiría definir un nuevo *multiplicador plástico discreto* como

¹La estructura del problema de valor de contorno es independiente del modelo constitutivo elegido, por lo tanto las formulaciones variacionales no simétrica (desarrollada en el Apartado §2.8) y simétrica (desarrollada en el Apartado §3.3) son directamente aplicables para los modelos de plasticidad.

Definición multiplicador plástico discreto:

$$\bar{\gamma} \stackrel{def}{=} \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t)\gamma) \quad \text{siendo } \bar{\gamma} \text{ un valor acotado} \quad (\text{B.29})$$

con el cual la Ecuación (B.28) admite la solución $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$.

A partir de la expresión del nuevo multiplicador plástico discreto, puede definirse la *variable interna tipo deformación discreta* $\bar{\xi}$ cuya ley de variación es

Definición variable interna tipo deformación discreta:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\xi}} \stackrel{def}{=} \bar{\gamma} &= \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t)\gamma) = \lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t)\dot{\xi}) \\ \text{con } \begin{cases} \bar{\xi}|_{t=t_{DF}} = 0 \\ \bar{\xi} \in [0, \infty) \quad \forall t \geq t_{DF} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Finalmente, utilizando la expresión anterior para $\bar{\xi}$, la ley de variación de la variable interna tipo tensión χ definida en (B.18) pasa a ser

Definición ley de variación de la variable interna tipo tensión:

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= -H(\chi(\xi)) \dot{\xi} = -\underbrace{\bar{H}(\chi(\xi)) h(t)}_{\equiv H(\chi(\xi))} \dot{\xi} = -\bar{H}(\chi(\xi)) \dot{\bar{\xi}} \\ \text{con } \begin{cases} \chi|_{t=t_{DF}} = 0 \\ \chi|_{t=\infty} = \sigma_u \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

donde se ha utilizado la regularización del módulo de ablandamiento continuo definido en (B.24).

Sea ahora la expresión de la tasa de tensiones en un punto perteneciente a la superficie de discontinuidad \mathcal{S} :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{\mathcal{S}} &= \mathbb{C}^e : (\dot{\epsilon}_{\mathcal{S}} - \dot{\epsilon}_{\mathcal{S}}^p) = \lim_{h(t) \rightarrow 0} \left(\mathbb{C}^e : \left(\dot{\epsilon}_{\mathcal{S}} + \frac{1}{h(t)} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s - \dot{\epsilon}_{\mathcal{S}}^p \right) \right) \\ &= \lim_{h(t) \rightarrow 0} \left(\mathbb{C}^e : \left(\dot{\epsilon}_{\mathcal{S}} + \frac{1}{h(t)} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s - \sqrt{\frac{3}{2}} \gamma_{\mathcal{S}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Si se multiplica por $h(t)$ en ambos lados de la anterior igualdad y se tiene en consideración la definición del multiplicador plástico discreto de la Ecuación (B.29), se obtiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\lim_{h(t) \rightarrow 0} h(t) \dot{\sigma}_{\mathcal{S}}}_{=0} &= \underbrace{\lim_{h(t) \rightarrow 0} (h(t) \mathbb{C}^e : \dot{\epsilon}_{\mathcal{S}})}_{=0} + \mathbb{C}^e : ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s - \bar{\gamma}_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbb{C}^e : \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} \\ ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s &= \bar{\gamma}_{\mathcal{S}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}^{dev}}{\|\boldsymbol{\sigma}^{dev}\|} = \bar{\gamma}_{\mathcal{S}} \partial_{\sigma} f = \bar{\gamma}_{\mathcal{S}} \mathbf{m} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

que lleva a poder formular, en la base local $\{\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{n}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, en la superficie de

discontinuidad \mathcal{S} y para el régimen de discontinuidad fuerte, la siguiente igualdad:

$$\begin{bmatrix} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_1 & \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_2 & \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_3 \\ \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{\gamma}_S \begin{bmatrix} \partial_{\sigma_{11}} f & \partial_{\sigma_{12}} f & \partial_{\sigma_{13}} f \\ \partial_{\sigma_{21}} f & \partial_{\sigma_{22}} f & \partial_{\sigma_{23}} f \\ \partial_{\sigma_{31}} f & \partial_{\sigma_{32}} f & \partial_{\sigma_{33}} f \end{bmatrix} \quad (\text{B.34})$$

La Ecuación (B.34) permite definir los siguientes conceptos:

(a) el *vector de flujo plástico discreto* $\bar{\mathbf{m}}$:

Definición del vector de flujo plástico discreto:

$$\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \bar{\gamma} \begin{bmatrix} \partial_{\sigma_{11}} f \\ 2\partial_{\sigma_{12}} f \\ 2\partial_{\sigma_{13}} f \end{bmatrix} = \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} \quad \forall t > t_{DF} \quad (\text{B.35})$$

(b) las *condiciones de discontinuidad fuerte* (ver [52] para una descripción más detallada):

Definición de las condiciones a cumplir en el régimen de discontinuidad fuerte:

$$\begin{bmatrix} \partial_{\sigma_{22}} f \\ \partial_{\sigma_{23}} f \\ \partial_{\sigma_{33}} f \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \forall t > t_{DF} \quad (\text{B.36})$$

A partir de la Ecuación (B.36) se puede afirmar que, para el régimen de discontinuidad fuerte y en la base local anteriormente definida, la función de fluencia $f = f(\boldsymbol{\sigma}, \chi)$ depende exclusivamente de:

$$f = f(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \chi) \quad \forall t > t_{DF} \quad (\text{B.37})$$

Por otro lado, y en la misma base local, el vector tracción en \mathcal{S} se expresa como:

$$\mathbf{t}_S = \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{n} = [\sigma_{11_S}, \sigma_{12_S}, \sigma_{13_S}]^T \quad \text{donde } \mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_1 \quad (\text{B.38})$$

lo que permite expresar la *función de fluencia discreta* \bar{f} como:

Definición de la función de fluencia discreta:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \bar{f}(\mathbf{t}_S, \chi) \equiv f(\boldsymbol{\sigma}_S, \chi) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_S^{dev} : \boldsymbol{\sigma}_S^{dev} - (\sigma_u - \chi_S)} \\ &= \sqrt{3(\sigma_{12_S}^2 + \sigma_{13_S}^2) - (\sigma_u - \chi_S)} \\ &= \sqrt{3(t_{2_S}^2 + t_{3_S}^2) - (\sigma_u - \chi_S)} \quad \forall t > t_{DF} \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

cumpléndose que:

$$\bar{\mathbf{m}} = \partial_{\mathbf{t}} \bar{f} \quad \forall t > t_{DF} \quad (\text{B.40})$$

Finalmente, se definirá la energía libre del modelo discreto proyectado $\bar{\psi}$ como la cantidad de energía libre del modelo del continuo ψ existente en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , asumiendo que la superficie de discontinuidad tiene un espesor $h \rightarrow 0$, es decir:

$$\bar{\psi} = \lim_{h \rightarrow 0} (h(t) \psi_{\mathcal{S}}) \quad (\text{B.41})$$

Partiendo de la expresión de la energía libre dada en la Ecuación (B.11) la Ecuación (B.41) pasa a ser:

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \lim_{h \rightarrow 0} h(t) (\psi^e(\epsilon_{\mathcal{S}}^e) + \psi^p(\xi_{\mathcal{S}})) \\ &= \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \left(h(t) \frac{1}{2} \epsilon_{\mathcal{S}}^e : \mathbb{C} : \epsilon_{\mathcal{S}}^e \right)}_{\equiv \bar{\psi}^e = 0} + \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} (h(t) \psi^p(\xi_{\mathcal{S}}))}_{\equiv \bar{\psi}^p} \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Para obtener la expresión de $\bar{\psi}^p$ se considerará el valor de la variable interna tipo deformación ξ dentro del régimen de discontinuidad fuerte:

$$\begin{aligned} \xi_{\mathcal{S}}(t > t_{DF}) &= \int_0^t \dot{\xi}_{\mathcal{S}} dt \\ &= \int_0^{t_B} \dot{\xi}_{\mathcal{S}} dt + \int_{t_B}^{t_{DF}} \frac{1}{h(t)} \dot{\xi} dt + \int_{t_{DF}}^t \underbrace{\frac{1}{h}}_{h \rightarrow 0 \text{ cte}} \dot{\xi} dt \\ &= \underbrace{\int_0^{t_B} \dot{\xi}_{\mathcal{S}} dt}_{\xi_{DF}} + \underbrace{\int_{t_B}^{t_{DF}} \frac{1}{h(t)} \dot{\xi} dt}_{\xi_{DF}} + \frac{1}{h} \underbrace{\int_{t_{DF}}^t \dot{\xi} dt}_{\Delta \bar{\xi}|_{t_{DF}}^t} \\ &= \xi_{DF} + \Delta \bar{\xi}|_{t_{DF}}^t \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

donde se ha utilizado la definición de la variable interna discreta tipo deformación dada en (B.30).

Llevando la Ecuación (B.43) a la Ecuación (B.42) se puede expresar la parte plástica de la energía libre discreta como:

$$\bar{\psi}^p = \lim_{h \rightarrow 0} (h \psi^p(\xi_{\mathcal{S}})) = \lim_{h \rightarrow 0} (h \psi^p(\xi_{DF} + \Delta \bar{\xi}|_{t_{DF}}^t)) = \bar{\psi}^p(\Delta \bar{\xi}) \quad (\text{B.44})$$

donde se asume que para el régimen de discontinuidad fuerte ($t > t_{DF}$) se utilizará $\Delta \bar{\xi} = \Delta \bar{\xi}|_{t_{DF}}^t$. La Ecuación (B.44) permite definir la *energía libre discreta* como:

<p>Definición de la energía libre discreta:</p> $\bar{\psi} = \bar{\psi}^e(\Delta[\mathbf{u}]) + \bar{\psi}^p(\Delta \bar{\xi}) = 0 + \bar{\psi}^p(\Delta \bar{\xi}) \quad (\text{B.45})$

cumpliéndose que, para el caso en que el ablandamiento es lineal, la Ecuación (B.44) tiene la siguiente expresión:

$$\bar{\psi}^p(\Delta \bar{\xi}) = \chi_{SD} \Delta \bar{\xi} + \frac{1}{2} \bar{H} \Delta \bar{\xi}^2 \quad (\text{B.46})$$

donde χ_{SD} es el valor de la variable interna tipo deformación del continuo en el instante en el que se inicia el régimen de discontinuidad fuerte.

La expresión de la energía libre discreta de la Ecuación (B.45) define un modelo constitutivo discreto *rígido-plástico con rigidez inicial infinita* (ver Figura B.2). Este modelo puede ser caracterizado, en un formato más general, como:

$$\begin{aligned}\bar{\psi} &= \bar{\psi}^e(\Delta[\mathbf{u}]) + \bar{\psi}^p(\Delta\bar{\xi}) \\ &= \frac{1}{2} (\Delta[\mathbf{u}] - \Delta[\mathbf{u}]^p) \cdot \bar{\mathbb{E}} \cdot (\Delta[\mathbf{u}] - \Delta[\mathbf{u}]^p) + \bar{\psi}^p(\Delta\bar{\xi})\end{aligned}\quad (\text{B.47})$$

habiéndose considerado que:

$$\bar{\mathbb{E}} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \text{representa la rigidez elástica inicial infinita} \quad (\text{B.48})$$

$$\Delta[\mathbf{u}] = \Delta[\mathbf{u}]^e + \Delta[\mathbf{u}]^p = \Delta[\mathbf{u}]^p \quad \text{pues } \Delta[\mathbf{u}]^e = \mathbf{0} \quad (\text{B.49})$$

Utilizando el método de Coleman y Noll [43] la expresión de la ecuación constitutiva discreta se puede expresar como:

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \Delta[\mathbf{u}]} = \bar{\mathbb{E}} \cdot (\Delta[\mathbf{u}] - \Delta[\mathbf{u}]^p) \quad (\text{B.50})$$

siendo $\bar{\mathbb{E}} = \infty$ y $\Delta[\mathbf{u}] = \Delta[\mathbf{u}]^p$.

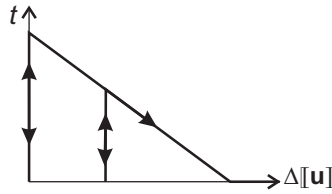


Figura B.2: Modelo discreto rígido-plástico de rigidez infinita.

Modelo discreto proyectado del modelo de Von Mises

A continuación se resumen los ingredientes del modelo de discreto equivalente al modelo de plasticidad asociada de Von Mises proyectado en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} .

1. Energía libre discreta:

$$\bar{\psi}(\Delta[\mathbf{u}], \Delta\bar{\xi}) = \bar{\psi}^e(\Delta[\mathbf{u}]) + \bar{\psi}^p(\Delta\bar{\xi}) = 0 + \bar{\psi}^p(\Delta\bar{\xi}) \quad (\text{B.51})$$

$$= \chi_{SD} \Delta\bar{\xi} + \frac{1}{2} \bar{H} \Delta\bar{\xi}^2 \quad (\text{B.52})$$

donde (B.52) es la particularización de la Ecuación (B.51) para el caso de ablandamiento lineal.

2. Ley cohesiva discreta:

$$\mathbf{t}_S = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \Delta[\mathbf{u}]} = \bar{\mathbb{E}} \cdot (\Delta[\mathbf{u}] - \Delta[\mathbf{u}]^p) \quad (\text{B.53})$$

siendo $\bar{\mathbb{E}} = \infty$ y $\Delta[\mathbf{u}] = \Delta[\mathbf{u}]^p$.

3. Dominio elástico en el espacio de las tensiones:

$$\mathbb{E}_t = \{(\mathbf{t}, \chi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \bar{f}(\mathbf{t}, \chi) \leq 0\} \quad (\text{B.54})$$

siendo $\bar{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función del criterio de fallo que se expresa como:

$$\bar{f}(\mathbf{t}, \chi) = \sqrt{3(t_2^2 + t_3^2)} - (\sigma_u - \chi) \quad (\text{B.55})$$

4. Reglas de flujo y ley de ablandamiento:

$$\Delta \bar{\xi} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \chi} = \bar{\gamma} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{\xi}|_{t=t_{DF}} = 0 \\ \bar{\xi} \in [0, \infty) \quad \forall t \geq t_{DF} \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

$$\Delta[\mathbf{u}] = \bar{\gamma} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \mathbf{t}} = \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} = \bar{\gamma} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t_2^2 + t_3^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad \forall t > t_{DF} \quad (\text{B.57})$$

$$\Delta \chi = -\bar{H} \Delta \bar{\xi} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \chi|_{t=t_{DF}} = 0 \\ \chi|_{t=\infty} = \sigma_u \\ \chi \in [0, \infty) \quad \forall t \geq t_{DF} \end{cases} \quad (\text{B.58})$$

donde \bar{H} es el módulo de ablandamiento discreto y donde t_B es el instante de inicio de la localización de deformaciones.

5. Condiciones de carga-descarga del modelo en el espacio de las tracciones:

$$\bar{\gamma} \geq 0; \quad \bar{f}(\mathbf{t}, \chi) \leq 0; \quad \bar{\gamma} \bar{f} = 0 \quad (\text{B.59})$$

6. Condición de consistencia en el espacio de las tracciones:

$$\bar{\gamma} \dot{\bar{f}}(\mathbf{t}, \chi) = 0 \quad (\text{B.60})$$

7. Disipación interna del modelo:

$$\Delta \mathcal{D} = -Y \Delta \bar{\xi} = -\frac{\partial \bar{\psi}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \Delta \bar{\xi})}{\partial (\Delta \bar{\xi})} \Delta \bar{\xi} \geq 0 \quad (\text{B.61})$$

$$= -\chi \Delta \bar{\xi} \geq 0 \quad (\text{B.62})$$

donde la Ecuación (B.62) es la particularización de la Ecuación (B.61) para el caso de ablandamiento lineal.

B.3. Esquema de integración IMPL-EX para los modelos de plasticidad

Como se indicó en el Apartado §3.4, el algoritmo de integración IMPL-EX resuelve el problema discreto utilizando dos esquemas:

1. *Un esquema implícito estándar Backward-Euler* (ver [83]).

Este esquema de integración se resume en los Cajas B.3.1 y B.3.2 para el paso de tiempo $n+1$.

CAJA B.3.1. Integración implícita en el paso $n+1$:

- Variable independiente de entrada $\mapsto \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}(\Delta t_{n+1})$

- Ecuaciones de evolución:

$$\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \gamma_{n+1} \mathbf{m}_{n+1} \quad \text{siendo } \mathbf{m}_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev} / \|\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}\|$$

$$\Delta \xi_{n+1} = \gamma_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \mathbb{C}^e : \gamma_{n+1} \mathbf{m}_{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi_{n+1} &= \chi_n + H(\chi_n) \Delta \xi_{n+1} \\ &= \chi_n + H(\chi_n) \gamma_{n+1} \end{aligned}$$

- Condición de consistencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n+1} \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \chi_{n+1}) \leq 0, \gamma_{n+1} f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \chi_{n+1}) = 0 \\ \gamma_{n+1} \dot{f}_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \chi_{n+1}) = 0 \end{array} \right\}$$

↓

si el material entra en régimen elastoplástico en carga aparece una ecuación no lineal en $\gamma_{n+1} > 0$ que se resuelve con un Newton-Raphson local

↓

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}(\gamma_{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{dev}(\gamma_{n+1}) - (\sigma_u - \chi_{n+1}(\gamma_{n+1})) = 0$$

- Variables de salida:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n+1} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1}) \end{array} \right.$$

CAJA B.3.2. Operador tangente algorítmico implícito en el paso $n+1$:

$$\bullet \Delta \sigma_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}^{alg} \Delta \epsilon_{n+1}$$

$$\mathbb{C}_{n+1}^{alg} = \begin{cases} \mathbb{C}_{n+1}^{alg} = \mathbb{C}^e & \text{régimen elástico/descarga} \\ \mathbb{C}_{n+1}^{alg} = \widehat{\mathbb{C}} - \frac{\widehat{\mathbb{C}} : \partial_{\sigma} f \otimes \partial_{\sigma} f : \widehat{\mathbb{C}}}{H + \partial_{\sigma} f : \widehat{\mathbb{C}} : \partial_{\sigma} f} & \text{régimen en carga} \end{cases}$$

$$\text{siendo } \begin{cases} \widehat{\mathbb{C}} = \left(\mathbb{C}^{e-1} + \gamma_{n+1} \mathbf{A}_{n+1} \right)^{-1} \\ \mathbf{A}_{n+1} = \frac{\partial^2 f(\sigma_{n+1}, \chi_{n+1})}{\partial \sigma_{n+1} \otimes \partial \sigma_{n+1}} \end{cases}$$

2. Un esquema de integración explícito

En este esquema de integración se utiliza una extrapolación del multiplicador plástico $\tilde{\gamma}_{n+1}$ a partir de los valores convergidos implícitamente en los pasos de tiempo anteriores $\{\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots\}$. A partir de este valor del multiplicador plástico $\tilde{\gamma}_{n+1}$, se obtiene el tensor de tensiones $\tilde{\sigma}_{n+1}$.

La tensión obtenida $\tilde{\sigma}_{n+1}(\tilde{\gamma}_{n+1})$ se utiliza en el problema discreto de minimizar las fuerzas residuales globales (ver la Ecuación (2.78) para la formulación no simétrica y la Ecuación (3.29) para la formulación simétrica) conduciendo a un operador algorítmico estructural constante en cada paso de tiempo. Las Cajas B.3.3 y B.3.4 resumen el esquema de integración IMPL-EX para el modelo de plasticidad asociada de Von Mises.

CAJA B.3.3. Integración explícita en el paso $n+1$:

$$\bullet \text{Variable independiente de entrada} \quad \mapsto \quad \epsilon_{n+1}(\Delta t_{n+1})$$

- Extrapolación del multiplicador plástico

$$\tilde{\gamma}_{n+1} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \gamma_n$$

Integración explícita en el paso $n+1$: (continuación)

- Ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\xi}_{n+1} &= \tilde{\gamma}_{n+1} \\
\tilde{\chi}_{n+1} &= \chi_n + H(\chi_n) \Delta \tilde{\xi}_{n+1} \\
&= \chi_n + H(\chi_n) \tilde{\gamma}_{n+1} \\
\Delta \tilde{\epsilon}_{n+1}^p &= \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} = \frac{3}{2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{dev} / (\sigma_u - \tilde{\chi}_{n+1}) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{dev} = \mathbf{I}^{dev} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \end{cases} \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^e \\
&= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : (\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \Delta \tilde{\epsilon}_{n+1}^p) \\
&= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbb{C}^e : \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \mathbb{C}^e : \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}) \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} &= \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{esf} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{dev} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{esf} \mathbf{1} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{dev} \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{esf} &= \boldsymbol{\sigma}_{pru}^{esf} \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{\sigma}_{pru}^{esf} = \boldsymbol{\sigma}_n^{esf} + \mathcal{K} \text{tr}(\Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}) \\
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}^{dev} &= \frac{1}{1 + \frac{3\mu \tilde{\gamma}_{n+1}}{(\sigma_u - \tilde{\chi}_{n+1})}} \boldsymbol{\sigma}_{pru}^{dev} \quad \text{siendo} \quad \boldsymbol{\sigma}_{pru}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}_n^{dev} + 2\mu \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}
\end{aligned}$$

- Variables de salida:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}(\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}, \tilde{\gamma}_{n+1})$$

donde \mathbf{I}^{dev} es el tensor desviador de cuarto orden y \mathcal{K} es el módulo de deformación volumétrica.

CAJA B.3.4. Operador tangente algorítmico IMPL-EX en el paso $n+1$:

- $\Delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1}^{eff} \Delta \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} \mathbb{C}_{n+1}^{eff} = \left(\mathbb{C}^{e-1} + \tilde{\gamma}_{n+1} \tilde{\mathbf{A}}_{n+1} \right)^{-1} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{n+1} = \frac{\partial^2 f(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \tilde{\chi}_{n+1})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} \otimes \partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{(\sigma_u - \tilde{\chi}_{n+1})} \mathbf{I}^{dev} \end{cases}$$

Apéndice C

Algoritmo de captura y gestión de discontinuidades

Sea un sólido Ω en cuyo seno se desarrolla una superficie de discontinuidad \mathcal{S} que divide el sólido en dos partes Ω^+ y Ω^- . Consideremos, tal como indica la Figura C.1, un caso más general en el que la superficie de discontinuidad \mathcal{S} no está completamente formada, pudiéndose distinguir dentro de ella una zona donde se ha iniciado la localización de deformaciones (se cumple la condición de localización, ver la Ecuación 2.1) y otra zona en la que no.

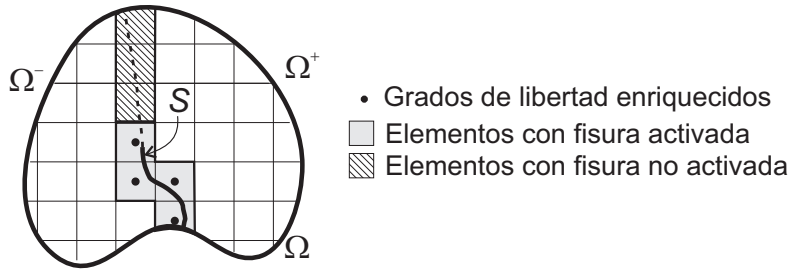


Figura C.1: Discretización del problema de un sólido en el que se forma una superficie de discontinuidad.

En los Apartados §2.8 y §3.3 se ha obtenido, respectivamente, la formulación variacional discretizada del problema no simétrico y simétrico de un sólido en cuyo seno se forma una superficie de discontinuidad. Para obtener esta formulación se expresó la cinemática de un elemento finito, en cuyo seno se desarrolla una superficie de discontinuidad \mathcal{S} que lo divide en dos partes $\Omega^{(e)+}$ y $\Omega^{(e)-}$, como:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{(e)} \llbracket \dot{\hat{\mathbf{u}}} \rrbracket^{(e)}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{C.1})$$

donde $\dot{\hat{\mathbf{u}}}^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ representa la aproximación del campo continuo de desplazamientos y $\llbracket \dot{\hat{\mathbf{u}}} \rrbracket^{(e)}(\mathbf{x}, t)$ el modo elemental mejorado que representa el salto que tiene lugar en \mathcal{S} .

La función salto unitario $\mathcal{M}_S^{(e)}$ se definió de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) \quad (\text{C.2})$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \\ \varphi^{(e)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_e^+} N_{i^+}^{(e)}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

donde $\mathcal{H}^{(e)}(\mathbf{x})$ es la función de Heaviside centrada en \mathcal{S} y la función $\varphi^{(e)}(\mathbf{x})$, que tiene como soporte el dominio elemental y cumple que para Ω^+ vale 1 y para Ω^- vale 0, se construye como la suma de las funciones de aproximación estándar elementales definidas para aquellos nodos que limitan con Ω^+ (ver Figura C.2).

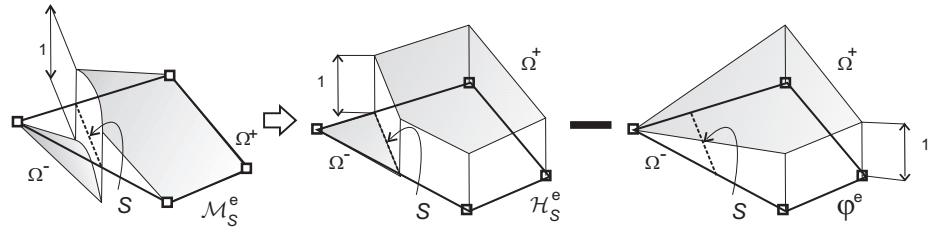


Figura C.2: Descripción de la función $\mathcal{M}_S^{(e)}$.

Las Ecuaciones (C.1) y (C.3b) muestran la necesidad de utilizar un algoritmo que permita, dado un conjunto de superficies de discontinuidad $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{n_s}\}$ dentro del dominio global Ω :

1. Conocer, para cada superficie de discontinuidad \mathcal{S}_i , los elementos finitos que atraviesa y en cuáles se ha cumplido la condición de localización (se activa el modo mejorado salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$) y en cuáles no.
2. Conocer, dentro de cada elemento finito atravesado por una discontinuidad, la ubicación exacta de dicha superficie de discontinuidad para poder construir la función $\varphi^{(e)}(\mathbf{x})$ y así integrar la cinemática descrita en la Ecuación (C.1).
3. Garantizar que la discriminación entre las zonas $\Omega^{(e)+}$ y $\Omega^{(e)-}$, en cada uno de los elementos finitos atravesados por la misma superficie de discontinuidad, no incurre en incompatibilidad cinemática, es decir, no identifica un nodo como perteneciente a $\Omega^{(e)+}$ en un elemento finito y como perteneciente a $\Omega^{(e)-}$ en el adyacente.

A continuación se describe un algoritmo capaz de cumplir las anteriores tres premisas. Este algoritmo, que entra dentro de la categoría de *algoritmos globales de captura de discontinuidades*, fue presentado en [79] y [57].

C.1. Algoritmo global tipo térmico

C.1.1. Fundamentos

A partir del análisis del inicio de la localización de deformaciones hecho en el Apartado §2.2 y en el Apéndice §A es posible obtener, en cada uno de los puntos pertenecientes al dominio de estudio Ω , la siguiente información:

1. Un *criterio de fallo* que indica cuándo un punto material forma parte de una superficie de discontinuidad. En este trabajo se utiliza la singularidad del tensor acústico como criterio para detectar la bifurcación en la curva de equilibrio.
2. Una dirección de propagación, proporcionada por el propio análisis de la bifurcación, que define en cada punto una normal $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ a la superficie de discontinuidad.

A partir de la dirección de propagación $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = (n_1, n_2, n_3)^T$ se puede definir, en cada punto del dominio $\mathbf{x} \in \Omega$, dos vectores $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ normales a $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ y normales entre sí como (ver Figura C.3):

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = (0, n_3, -n_2)^T \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = (n_3, 0, -n_1)^T \quad (\text{C.5})$$

Por construcción, el conjunto de las infinitas superficies de discontinuidad $\{S_i\}$ que pueden formarse en el dominio de estudio Ω son tangentes en cada punto a los vectores $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ definidos anteriormente (ver Figura C.3).

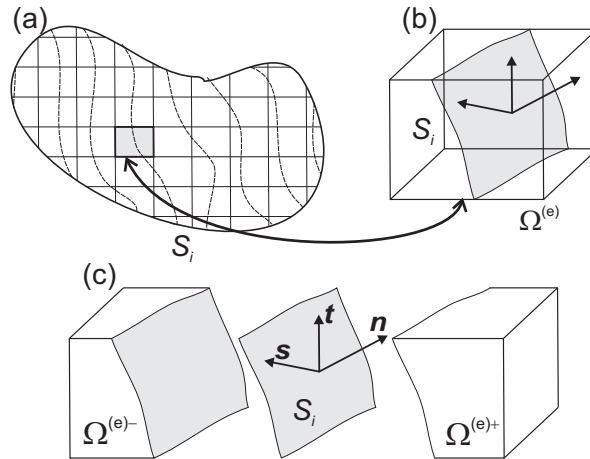


Figura C.3: Discretización del problema: (a) elementos enriquecidos.

Por otro lado, las superficies de discontinuidad se pueden identificar como las superficies de iso-valores de un campo escalar $\theta(\mathbf{x}, t)$ de forma que:

$$S_i = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \theta(\mathbf{x}, t) = \theta_i\} \quad \text{siendo } \theta_i \in R \quad (\text{C.6})$$

Este campo escalar es interpretable como la solución de un problema de valor de contorno tipo térmico, cuya solución $\theta(\mathbf{x}, t)$ deberá cumplir en todo punto del dominio Ω la siguiente doble condición:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{s} \cdot \nabla \theta = \nabla \theta \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{t} \cdot \nabla \theta = \nabla \theta \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (\text{C.8})$$

En el siguiente apartado se describe, tomado de las referencias [79] y [57], el algoritmo numérico basado en la obtención de un campo escalar que cumpla las condiciones definidas en las Ecuaciones (C.7-C.8)

C.1.2. Implementación

A partir de la definición de los vectores \mathbf{s} y \mathbf{t} se puede construir un tensor \mathbf{K} de orden dos como:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad (\text{C.9})$$

de forma que las condiciones (C.7-C.8) pueden ser reescritas de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = 0 \iff \mathbf{s} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \mathbf{0} \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{t}} = 0 \iff \mathbf{t} \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{K} \cdot \nabla \theta = \mathbf{0} \quad (\text{C.11})$$

Definiendo un vector de flujo $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}, t) \nabla \theta \quad (\text{C.12})$$

se obtiene el problema de valor de contorno tipo térmico descrito en la Caja C.1.1 y en la Figura C.4.

CAJA C.1.1. Problema de valor de contorno tipo térmico.

DADOS $\mathbf{q}^* = \mathbf{0} : \partial_q \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\theta^* : \partial_\theta \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$

ENCONTRAR $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$

que satisfaga:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (\text{Ecuación del calor}) \quad (\text{C.13})$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla \theta \quad \text{en } \Omega \quad (\text{Ley de Fourier}) \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial_q \Omega \quad (\text{Condición de contorno}) \quad (\text{C.15})$$

$$\theta = \theta^* \quad \text{en } \partial_\theta \Omega \quad (\text{Condición de contorno}) \quad (\text{C.16})$$

donde $\boldsymbol{\nu}$ es la normal al contorno del dominio $\partial \Omega$ y los contornos $\partial_\theta \Omega$ y $\partial_q \Omega$ cumplen $\partial_\theta \Omega \cup \partial_q \Omega = \partial \Omega$.

La forma fuerte del problema de valor de contorno de la Caja C.1.1 admite una formulación variacional que se resumen en la Caja C.1.2.

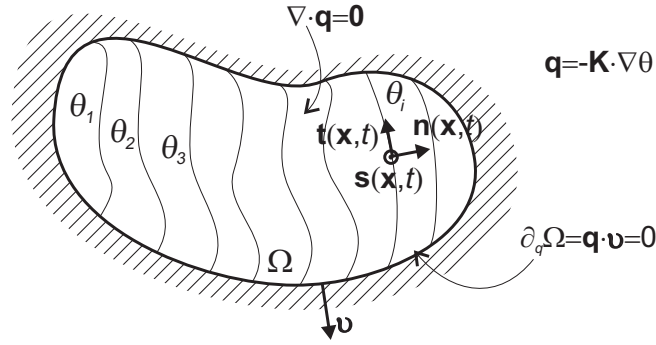


Figura C.4: Problema de valor de contorno tipo térmico (tomado de [79]).

CAJA C.1.2. Forma variacional del problema de valor de contorno tipo térmico.

DADOS $\mathbf{q}^* = \mathbf{0} : \partial_q \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\theta^* : \partial_\theta \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$

ENCONTRAR $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$

que satisfaga:

$$\int_{\Omega} \nabla \delta \theta \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta d\Omega = 0 \quad (\text{C.17})$$

donde:

$\theta \in \mathcal{V}_\theta \equiv \{\theta \mid \theta_{\partial_\theta \Omega} = \theta^*\}$ espacio de las funciones solución

$\delta \theta \in \mathcal{V}_{\delta \theta} \equiv \{\delta \theta \mid \delta \theta_{\partial_\theta \Omega} = 0\}$ espacio de las funciones peso

La discretización de la formulación variacional de la Caja C.1.2 lleva, finalmente, a una solución θ^h que permite implementar el algoritmo global de captura de las discontinuidades de la siguiente forma:

CAJA C.1.3. Algoritmo global tipo térmico de captura de las superficies de discontinuidad.

Sean $\{\mathbf{x} \in \Omega\}$ los puntos utilizados para la discretización del dominio Ω y θ^h la solución discretizada en dichos puntos del problema variacional (C.17). El algoritmo consiste en:

- *Identificar los elementos raíz de cada una de las superficies de discontinuidad.*

Un elemento raíz es aquel en que, sin pertenecer a una superficie de discontinuidad ya identificada en pasos de tiempo anteriores, se verifica la condición de localización de deformaciones.

Algoritmo global tipo térmico de captura de las superficies de discontinuidad. (*Continuación*)

- *Obtener, para cada elemento raíz, la temperatura de referencia θ_i que identificará la superficie de discontinuidad \mathcal{S}_i a la que pertenece.*

La temperatura de referencia se obtiene como:

$$\theta_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \theta^{(k)} \quad (\text{C.18})$$

donde n es el número de nodos del elemento finito raíz y $\theta^{(k)}$ son los valores del campo θ^h en dichos nodos.

- *Determinar la posible posición de la superficie de discontinuidad \mathcal{S}_i dentro de un elemento dado.*

Dado un elemento finito en el cual se ha verificado la condición de localización de deformaciones obtener, para cada una de las superficies de discontinuidad existentes $\{\mathcal{S}_i\}$, los valores

$$\{(\theta^{(k)} - \theta_i)\} \quad k = 1, \dots, n \quad (\text{C.19})$$

donde n es el número de nodos del elemento finito, $\theta^{(k)}$ son los valores del campo θ^h en dichos nodos y θ_i es la temperatura de referencia asociada a la superficie de discontinuidad \mathcal{S}_i .

Atendiendo al signo del conjunto de los escalares definidos en (C.19) pueden ocurrir dos situaciones:

- (a) Que tengan el mismo signo (positivo o negativo) para todos los valores de θ_i . En ese caso el elemento en consideración será un elemento raíz y habrá que obtener la temperatura de referencia (descrita en (C.18)) de una nueva superficie de discontinuidad.
- (b) Que para un valor de θ_i se cumpla que un grupo de valores sea positivo y otro negativo. Teniendo en cuenta que la posición de la superficie de localización viene dado por el valor de θ_i es directo obtener la posición geométrica de \mathcal{S}_i mediante una interpolación directa (ver Figura C.5).

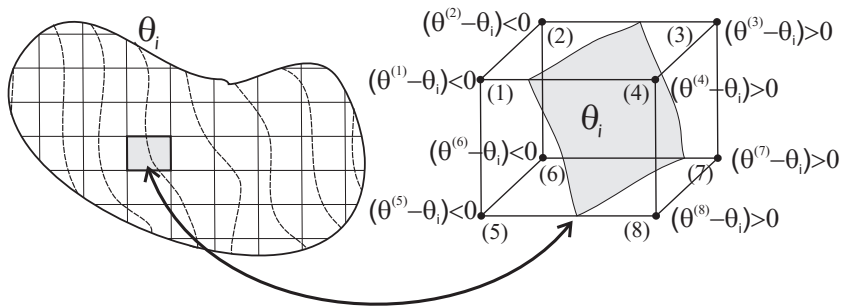


Figura C.5: Mecanismo de captura global de discontinuidades (tomado de [79]).

Bibliografía

- [1] M. Arrea and A. Ingraffea. *Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. Report 81-13*. Cornell University, New York, 1982.
- [2] B. E. Barragán. *Failure and toughness of steel fiber reinforced concrete under tension and shear*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2002.
- [3] G.I. Barrenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Adv. Appl. Mech.*, 7:55–129, 1962.
- [4] Z.P. Bažant. Crack band for fracture of concrete. *Mater. Construct.*, 93:155–177, 1983.
- [5] Z.P. Bažant. Size effect in blunt fracture: Concrete, rock, metal. *J. Eng. Mech. ASCE*, 110:518–535, 1984.
- [6] Z.P. Bažant. Size effect on structural strength: a review. *Archive of Applied Mechanics*, 69:703–725, 1999.
- [7] Z.P. Bažant and Z. Li. Modulus of rupture: size effect due to fracture initiation in boundary layer. *J. Struct. Eng., Am. Soc. Civil Eng.*, 121:739–746, 1995.
- [8] Z.P. Bažant and J. Planas. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. New Directions in Civil Engineering. CRC Press LLC, 1997.
- [9] T. Belytschko, J. Fish, and B.E. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70:59–89, 1988.
- [10] T. Belytschko, W. Kam Liu, and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons Ltd., 1993.
- [11] P. Bocca, A. Carpinteri, and S. Valente. Size effects in the mixed mode crack propagation: Softening and snap-back analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(1):159–170, 1990.
- [12] G.T. Camacho and M. Ortiz. Computational modelling of impact damage in brittle materials. *Int. J. Solids. Struct.*, 33:2899–2938, 1996.
- [13] L. Cangemi, M. Cocu, and M. Raous. *Proceedings of the 1996 Engineering Systems Design and Analysis Conference*, pages 157–163. 1996.

- [14] I. Carol and PC Prat. A statically constrained microplane model for the smeared analysis of concrete cracking. *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, BiAcaniAc N, Mang H (eds)*. Pineridge Press: Swansea, UK, pages 919–930, 1990.
- [15] A. Carpinteri and B. Chiaia. Embrittlement and decrease of apparent strength in large-sized concrete structures. *Sādhanā*, 27(4):425–448, 2002.
- [16] B.J. Carter, C.S. Chen, A.R. Ingraffea, and P.A. Wawrzynek. A topology-based system for modelling 3d crack growth in solid and shell structures. *Proceedings of the Ninth International Congress on Fracture ICF9*, pages 1923–1934, 1997.
- [17] J. Cervenka. *Discrete crack modelling in concrete structures*. PhD thesis, University of Colorado in Boulder, 1996.
- [18] J.L. Chaboche, R. Birard, and P. Levasseur. On the interface debonding models. *International Journal of Damage Mechanics*, 6:220–257, 1997.
- [19] E.W.V. Chaves. *A three dimensional setting for strong discontinuities modelling in failure mechanics*. PhD thesis, Universidad Politécnic de Cataluña, 2003.
- [20] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 2. John Wiley & Sons, 1997.
- [21] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1. John Wiley & Sons, 1997.
- [22] C. Daux, N. Moes, J. Dolbow, N. Sukumar, and T. Belytschko. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(12):1741–1760, 2000.
- [23] R. de Borst, G.N. Wells, and L.J. Sluys. Some observations on embedded discontinuity models. *Engng. Comput.*, 18:241–254, 2001.
- [24] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, 8:100–104, 1960.
- [25] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolates embedded localizations lines insensitive to mesh size and distortions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90:829–844, 1990.
- [26] R. Eligehousen, P. Bouška, V. Cervenka, and R. Pukl. *Fracture Mechanics of Concrete Structures (FRAMCOS I)*, pages 517–525. Elsevier Applied Science, 1992.
- [27] R. Eligehousen and J. Ozbolt. *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*, pages 95–117. 1999.
- [28] G. Etse and K. William. Failure analysis of elastoviscoplastic material models. *Int. Engrg. Mech.*, 125(1):60–69, 1999.

- [29] T.C. Gasser and G.A. Holzapfel. Modeling 3d crack propagation in unreinforced concrete using pufem. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 194:2859–2896, 2005.
- [30] G. Giuseppetti, G. Mazzr, M. Meghella, and M. Fanelli. *Seventh Benchmark Workshop On Numerical Analysis Dams*. Bucarest, Romania, 2003.
- [31] J. Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1903.
- [32] R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10:1–16, 1962.
- [33] A.E. Huespe, J. Oliver, Pulido M.G.D., Blanco S., and Linero D.L. On the fracture models determined by the continuum-strong discontinuity approach. *International Journal of Fracture*, 137:211–292, 2006.
- [34] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice Hall, 1987.
- [35] G.R. Irwin. *Handbuch der Physik VI*, pages 551–590. Springer-Verlag, 1958.
- [36] Y. Jenq and S.P. Shah. Two parameter fracture model for concrete. *J. Eng. Mech., Am. Soc. Civil Eng.*, 111:1227–1241, 1985.
- [37] M. Jirasek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 188:307–330, 2000.
- [38] M. Jirasek and T. Belytschko. Computational resolution of strong discontinuities. *Proceedings of the Fifth World Congress on Computational Mechanics (WCCM V), July*, pages 7–12, 2002.
- [39] M. Klisinski, K. Runesson, and S. Sture. Finite element with inner softening band. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, 117:575–587, 1991.
- [40] J. Lemaitre. *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag New York, Inc., 1992.
- [41] D.L. Linero. *Un modelo de fallo material en el hormigón armado, mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo y la teoría de mezclas*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2006.
- [42] H.R. Lofti and P.B. Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite-elements. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 38:1307–1325, 1995.
- [43] J. Lubliner. On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 7:237–254, 1976.
- [44] J. Mandel. *Conditions de Stabilité et Postulat de Drucker*. IUTAM Symposium on Rheology and Soil Mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1964.

- [45] O.L. Manzoli. *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en mecánica de sólidos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 1998.
- [46] V. Maz'ya and T. Shaposhnikova. *Jacques Hadamard, A Universal Mathematician*, volume 14 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [47] JM Melenk and I. Babuska. Partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1):289–314, 1996.
- [48] A. Needleman. Micromechanical modeling of interfacial decohesion. *Ultramicroscopy*, 40:203–214, 1992.
- [49] S.B. Oliveira and R. Faria. A Viscoelastic-damage model for the study of cracking evolution in concrete dams comparison with monitored results in prototypes. *Numerical Methods in Civil Eng.*, 43(July), 2001.
- [50] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39:3575–3600, 1996.
- [51] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulations. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 39:3600–3623, 1996.
- [52] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *Int. J. Solids. Struct.*, 37:7207–7229, 2000.
- [53] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 18:241–254, 2001.
- [54] J. Oliver. Topics on failure mechanics. Technical Report 68, International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, December 2002.
- [55] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. *Material Instabilities in Solids*, chapter 8, pages 107–123. John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- [56] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Biacaniac N, Mang H (eds)*. Pineridge Press: Swansea, UK, pages 945–957, 1990.
- [57] J. Oliver and A.E. Huespe. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:3195–3220, 2004.
- [58] J. Oliver and A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193:2987–3014, 2004.

- [59] J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, and D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(52):7093–7114, 2006.
- [60] J. Oliver, A.E. Huespe, Pulido M.G.D., and Chaves E. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engrg. Fract. Mech.*, 69:113–136, 2002.
- [61] J. Oliver, A.E. Huespe, and E. Samaniego. A study on finite elements for capturing strong discontinuities. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 56:2135–2161, 2003.
- [62] J. Oliver, A.E. Huespe, E. Samaniego, and E.W.V. Chaves. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(78):609–632, 2004.
- [63] J. Oliver Olivella and C. Agelet de Saracibar Bosch. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Politext. Ediciones U.P.C., 2000.
- [64] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 61:189–214, 1987.
- [65] M. Ortiz and A. Pandolfi. Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 44:1267–1282, 1999.
- [66] N. Ottosen and K. Runesson. Properties of bifurcation solutions in elastoplasticity. *Int. J. Solids and Structures*, 27:401–421, 1991.
- [67] K.D. Papoulia, C.H. Sam, and Vavasis S.A. Time continuity in cohesive finite element modeling. *Int. J. Numer. Methods Engrg.*, 58:679–701, 2003.
- [68] J. Planas, M. Elices, G.V. Guinea, F.J. Gómez, D.A. Cendón, and I. Arbillá. Generalizations and specializations of cohesive crack models. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:1759–1776, 2003.
- [69] M.D.G. Pulido. *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en grandes deformaciones*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2004.
- [70] T. Rabczuk and T. Belytschko. Cracking particles: a simplified meshfree method for arbitrary evolving cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61(13):2316–2343, 2004.
- [71] Y.R. Rashid. Analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design*, 7:334–344, 1968.
- [72] J. Rice and J. Rudnicki. A note on some features of the theory of localization of deformation. *Int. J. Solids and Structures*, 16:597–605, 1980.

- [73] J.R. Rice. *The localizations of plastic deformation*. Theoretical and Applied Mechanics, 14th IUTAM Congr. Nord Holland, 1976.
- [74] C. Rocco, V. Guinea, J. Planas, and M. Elices. Size effect and boundary conditions in the brazilian test: Experimental verification. *Materials and Structures*, 32:210–217, 1999.
- [75] C. Rocco, V. Guinea, J. Planas, and M. Elices. Size effect and boundary conditions in the brazilian test: theoretical analysis. *Materials and Structures*, 32:437–444, 1999.
- [76] C.G. Rocco. *Influencia del tamaño y mecanismos de rotura del ensayo de compresión diametral*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 1996.
- [77] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Conditions for localization in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371–394, 1975.
- [78] K. Runesson, N.S. Ottosen, and D. Perić. Discontinuous bifurcation of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *Int. J. of Plasticity*, 7:99–121, 1991.
- [79] E. Samaniego. *Contributions to the continuum modelling of strong discontinuities in two-dimensional solids*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña, 2002.
- [80] E. Samaniego and T. Belytschko. Continuum-discontinuum modelling of shear bands. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 62(13):1857–1872, 2004.
- [81] J. M. Sancho Aznal and J. Ortiz Herrera. Implementación de los métodos de riks-wempner, batoz-dhatt, powell-simons y otros en el programa de elementos finitos f.e.a.p. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 7:265–288, 1990.
- [82] J. Simo and S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 29:1595–1638, 1990.
- [83] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [84] J.C. Simo and J. Oliver. A new approach to the analysis and simulation of strong discontinuities. *Fracture and Damage in Quasi-brittle Structures*, pages 25–39, 1993.
- [85] J.C. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277–296, 1993.
- [86] N. Sukumar, N. Moes, B. Moran, and T. Belytschko. Extended Finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11):1549–1570, 2000.
- [87] C. Truesdell and W. Noll. *Handbuch der Physik III*. Springer-Verlag, 1965.

-
- [88] Y. Uchida. *Application of fracture mechanics to size effect on flexural strength of concrete*. Concrete Library of JSCE. JSCE Publications, 1992.
- [89] P.A. Vermeer. *A simple shear-band analysis using compliances*. IUTAM Conference of deformation and failure of granular materials. Balkema, Rotterdam, Delft, 1982.
- [90] P.A. Vermeer and R. De Borst. Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron*, 29, 1984.
- [91] K. William. *Constitutive models for materials: Encyclopedia of Physical Science & Technology*. Academic Press, 2000.
- [92] X.P. Xu and A. Needleman. Numerical simulations of fast crack growth in brittle solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 42(9):1397–1407, 1994.