

Adaptividade e Estimativas de Erro Orientadas por Metas Aplicadas a um *Benchmark Test* de Propagação de Onda

L.M. STEFFENS^{1*}, P. DÍEZ¹, N. PARÉS¹ e M.K. ALVES²

RESUMO. O objetivo deste artigo é estudar a eficiência e a robustez de técnicas adaptativas e estimativas de erro orientadas por metas para um *benchmark test*. As técnicas utilizadas aqui são baseadas em um simples pós-processo das aproximações de elementos finitos. As estimativas de erro orientadas por metas são obtidas por analisar o problema direto e um problema auxiliar, o qual está relacionado com a quantidade de interesse específico. O procedimento proposto é válido para quantidades lineares e não-lineares. Além disso, são discutidas diferentes representações para o erro e é analisada a influência do erro de dispersão. Os resultados numéricos mostram que as estimativas de erro fornecem boas aproximações ao erro real e que a técnica de refino adaptativo proposta conduz a uma redução mais rápida do erro.

Palavras-chave: Estimativas de Erro, Adaptividade Orientada por Meta, *Benchmark Test*.

1 INTRODUÇÃO

Integrated Multiphysics Design Database [1] foi lançado em março de 2009, visando a fornecer uma ferramenta computacional para a avaliação geral de incertezas e obter referências com orientações úteis para a validação de futuros produtos em áreas multidisciplinares, tais como: engenharias, telecomunicações, aeroespacial, energia, biomecânica, medicina e ciência da computação. O objetivo é gerar um banco de dados que possibilite a avaliação da eficiência de forma inovadora. Este banco de dados é organizado pela Universidade de Jyväskylä, na Finlândia, a qual organizou dois eventos para engajar e envolver a comunidade científica e tecnológica. O primeiro, realizado em dezembro de 2009, foi concentrado na apresentação e análise de *benchmark tests* acadêmicos. O segundo, realizado em março de 2010, preocupou-se com a apresentação, análise e discussão de resultados para *benchmark tests* industriais, bem como acadêmicos.

*Autor correspondente: Lindaura Maria Steffens.

¹Departament de Matemàtica Aplicada III, Laboratori de Càlcul Numèric, Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), Jordi Girona 1-3, E-08034, Barcelona, Espanha.

E-mails: lindaura.steffens@upc.edu; pedro.diez@upc.edu; nuria.pares@upc.edu

²Departamento de Engenharia Mecânica, Laboratório de Mecânica Aplicada e Computacional, Campus Universitário Trindade, 88040-900 Florianópolis, SC, Brasil. E-mail: krajnc@emc.ufsc.br

Neste artigo estudamos o problema dado pela propagação de ondas de um radar, que envolve o fenômeno de *scattering*, descrito pela onda refletida a partir de uma onda que incide sobre um obstáculo acusticamente rígido. O problema é simulado através da equação de Helmholtz e o obstáculo é composto de três elipses. Este problema foi desenvolvido como um *benchmark test* para o segundo evento, denominado como *Industrial and Academic Database Workshop*, realizado na Finlândia em março de 2010. Em particular, o exemplo foi desenvolvido para estudar o problema inverso de recuperar uma pressão específica na superfície das duas elipses pequenas. O objetivo de problemas inversos é recuperar a posição das elipses pequenas. Embora o objetivo original era estudar o problema inverso completamente, subproblemas menores também foram considerados para estudar e avaliar o desempenho de diferentes métodos. Em particular, neste trabalho substancial esforço foi empregado para estudar o comportamento de algoritmos adaptativos para o cálculo do campo acústico em normas globais ou em quantidades de interesse específicas. Para mais informações e detalhes sobre a definição do problema veja o *testcase TA2*.

Aqui o *benchmark test* é utilizado para analisar e demonstrar a eficiência e robustez da estratégia de refino adaptativo proposta em [5]. O processo de refino pode ser resumidamente esquematizado como: 1) estimar o erro de discretização; 2) desenvolver a estratégia de refino h adaptativo; e finalmente, 3) gerar uma nova malha. O mais importante neste procedimento é definir uma estimativa de erro confiável.

O artigo está estruturado da seguinte maneira: a Seção 2 apresenta a descrição do problema geral de Helmholtz a ser resolvido. A Seção 3 introduz o procedimento para avaliar o erro em quantidades de interesse não-lineares. As ideias e conceitos empregados no processo de refino adaptativo são resumidos na Seção 4. Finalmente, na Seção 5 a técnica de adaptatividade orientada por metas proposta é testada para o *benchmark test*. A relação entre as diferentes representações do erro e influência do erro de dispersão dos problemas direto e adjunto também são abordados.

2 PROBLEMA MODELO

Considere o problema de propagação de onda acústica governado pela equação de Helmholtz em um domínio limitado Ω . O contorno Γ é assumido ser suficientemente suave e está dividido em três partes disjuntas, Γ_D , Γ_N e Γ_R , onde são aplicadas condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin, respectivamente. A solução fraca do problema é a amplitude complexa da pressão acústica $u \in \mathcal{U}$, verificando

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (2.1)$$

onde

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \kappa^2 u \bar{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_R} m u \bar{v} \, d\Gamma, \\ \ell(v) &:= \int_{\Omega} f \bar{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g \bar{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_R} \beta \bar{v} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (2.2)$$

e o símbolo $\bar{\cdot}$ denota o complexo conjugado. Aqui, \mathcal{U} e \mathcal{V} são os espaços solução e teste definidos como $\mathcal{U} := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega), u|_{\Gamma_D} = u_D\}$ e $\mathcal{V} := \{v \in \mathcal{H}^1(\Omega), v|_{\Gamma_D} = 0\}$, respectivamente,

onde $\mathcal{H}^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev usual. Os dados prescritos, f , g , m e β , são assumidos ser suficientemente suaves e κ é o número de onda associado ao problema.

O objetivo da maioria das simulações de elementos finitos é determinar quantidades específicas (em inglês denominadas de *outputs*), as quais dependem da solução obtida das equações diferenciais parciais que governam o problema. Essas quantidades de interesse são aproximadas usando a aproximação de elementos finitos de u , isto é u_H , e estratégias de avaliação de erro orientadas por metas visam a estimar o erro cometido em tais quantidades e, possivelmente, fornecer limites para o erro.

As quantidades de interesse consideradas aqui são funcionais não-lineares da solução, denominadas como $J(u)$, e o objetivo é avaliar o erro cometido quando aproximamos estas quantidades usando a aproximação de elementos finitos. Especificamente, o objetivo é avaliar e controlar a quantidade

$$J(u) - J(u_H). \quad (2.3)$$

3 AVALIAÇÃO DE ERRO PARA QUANTIDADES DE INTERESSE NÃO-LINEARES

A maioria das técnicas existentes para avaliar o erro em quantidades de interesse não-lineares introduz uma linearização da quantidade de interesse. A mesma abordagem é usada aqui, sendo assim conveniente obter, mais explicitamente, as contribuições linear, quadrática e os termos de ordem superior de $J(u)$. Para este fim, $J(u)$ é expandida introduzindo a primeira e segunda derivadas de Gateaux de $J(\cdot)$ em u_H , ou seja,

$$J(u_H + v) = J(u_H) + \ell^0(v) + \mathcal{Q}(v, v) + \mathcal{W}(v), \quad (3.1)$$

onde $\ell^0(v) = [D_v J](u_H) \cdot (v)$, $2\mathcal{Q}(v_1, v_2) = [D_v^2 J](u_H) \cdot (v_1, v_2)$ e o funcional \mathcal{W} contém os termos de ordem superior, veja [3, 4].

Usando essa decomposição e tendo em conta que $e = u - u_H$, o erro na quantidade de interesse pode ser reescrito como

$$J(u) - J(u_H) = J(u_H + e) - J(u_H) = \ell^0(e) + \mathcal{Q}(e, e) + \mathcal{W}(e). \quad (3.2)$$

Portanto, fica claro que para estimar o erro na quantidade de interesse é suficiente estimar os termos linear, quadrático e de ordem superior separadamente, $\ell^0(e)$, $\mathcal{Q}(e, e)$ e $\mathcal{W}(e)$, respectivamente.

A avaliação *a-posteriori* das quantidades de interesse não-lineares baseia-se em obter uma boa aproximação de $\ell^0(e)$, $\mathcal{Q}(e, e)$ e $\mathcal{W}(e)$. Isto traduz-se em encontrar uma nova solução melhorada u^* , baseada em informações conhecidas *a-priori*, ou seja u_H , de tal forma que u^* aproxima a solução real u muito melhor do que u_H . Assim, uma estimativa de erro calculável é facilmente obtida por

$$e \approx e^* = u^* - u_H, \quad (3.3)$$

produzindo também uma estimativa correspondente para a quantidade de interesse, dada por

$$J(u) - J(u_H) \approx \ell^0(e^*) + \mathcal{Q}(e^*, e^*) + \mathcal{W}(e^*). \quad (3.4)$$

Esta aproximação do erro na quantidade de interesse é obtida a partir da equação 3.2 substituindo o erro real e pela sua aproximação e^* . Assim, a chave da questão em qualquer técnica de estimativa de erro é produzir adequadamente uma solução melhorada u^* .

Na prática, uma vez que o termo que mais contribui para o erro na quantidade de interesse é o termo linear, representações alternativas são utilizadas para o termo $\ell^0(e^*)$, enquanto que nenhum esforço adicional é empregado para os termos de ordem superior. Estas representações alternativas envolvem a introdução do problema auxiliar adjunto associado à contribuição linear da quantidade de interesse selecionada, juntamente com a sua aproximação de elementos finitos, ψ_H , e uma solução melhorada adequadamente ψ^* .

Mais especificamente, a técnica para avaliar o erro em uma quantidade de interesse não-linear pode ser esquematizada como:

1. Calcule a aproximação de elementos finitos do problema primal: ache $u_H \in \mathcal{U}_H$ tal que

$$a(u_H, v) = \ell(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_H, \quad (3.5)$$

onde $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}$ são os espaços associados a malha de elementos finitos.

2. Introduz o problema adjunto associado com a contribuição linear da quantidade de interesse selecionada: ache $\psi \in \mathcal{V}$ tal que

$$a(v, \psi) = \ell^0(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad (3.6)$$

e calcule sua aproximação de elementos finitos: ache $\psi_H \in \mathcal{V}_H$ tal que

$$a(v, \psi_H) = \ell^0(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_H. \quad (3.7)$$

3. Recupere a aproximação para o erro na quantidade de interesse através dos quatro seguintes passos:

- 3.1. Recupere as soluções melhoradas u^* e ψ^* a partir de u_H e ψ_H em uma malha de referência mais fina, e calcule as estimativas do erro

$$e^* = u^* - u_H \quad \text{e} \quad \varepsilon^* = \psi^* - \psi_H. \quad (3.8)$$

- 3.2. Considere a representação usual

$$\ell^0(e) = R^P(\varepsilon) = R^D(e), \quad (3.9)$$

onde $R^P(\cdot)$ e $R^D(\cdot)$ representam os resíduos dos problemas primal e adjunto na forma fraca, associados com as aproximações u_H e ψ_H respectivamente,

$$R^P(v) = \ell(v) - a(u_H, v), \quad R^D(v) = \ell^0(v) - a(v, \psi_H), \quad (3.10)$$

$$e = u - u_H \quad \text{e} \quad \varepsilon = \psi - \psi_H.$$

3.3. Calcule a estimativa do termo linear $\ell^0(e)$, seja por meio de

$$R^D(e^*) \quad \text{ou} \quad R^P(\varepsilon^*). \quad (3.11)$$

3.4. Calcule uma das seguintes estimativas para a quantidade de interesse total

$$J(u) - J(u_H) \approx R^D(e^*) + \mathcal{Q}(e^*, e^*) + \mathcal{W}(e^*), \quad (3.12)$$

ou

$$J(u) - J(u_H) \approx R^P(\varepsilon^*) + \mathcal{Q}(e^*, e^*) + \mathcal{W}(e^*). \quad (3.13)$$

As estratégias apresentadas pelos autores são utilizadas aqui para recuperar as soluções melhoradas u^* e ψ^* , a partir de u_H e ψ_H , respectivamente. Uma técnica simples e barata de pós-processo é utilizada para recuperar as aproximações u^* e ψ^* de u e ψ em uma malha de referência mais fina, associada ao tamanho característico da malha $h \ll H$. Assim, $u^* \in \mathcal{U}_h$ e $\psi^* \in \mathcal{V}_h$, onde \mathcal{U}_h e \mathcal{V}_h são os espaços discretos funcionais associados à malha de referência mais fina, $\mathcal{U}_H \subset \mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ e $\mathcal{V}_H \subset \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$.

Para malhas suficientemente refinadas, o erro na quantidade de interesse é controlado pelo termo linear, já que as contribuições quadrática e de ordem superior convergem mais rapidamente para zero. Assim, o procedimento proposto é fazer uso da estimativa disponível, e^* , para obter uma estimativa simples e barata das contribuições não-lineares. Ou seja, as contribuições quadrática e de ordem superior para o erro, $\mathcal{Q}(e, e)$ e $\mathcal{W}(e)$, respectivamente, são avaliadas por meio da reconstrução do erro primal e^* utilizado para avaliar a parte linear do erro, isto é,

$$\mathcal{Q}(e, e) \approx \mathcal{Q}(e^*, e^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{W}(e) \approx \mathcal{W}(e^*). \quad (3.14)$$

Uma descrição precisa deste procedimento pode ser encontrada em [5] juntamente com alguns detalhes de implementação numérica.

4 REFINO ADAPTATIVO

Atualmente, a técnica de refino adaptativo de malhas é uma ferramenta essencial para obter simulações altamente confiáveis com baixo custo. Os principais ingredientes do processo adaptativo proposto são: **refino h** , ou seja, as novas malhas são obtidas pela divisão dos elementos da malha; **indicadores ótimos**, o refino é organizado com o objetivo de alcançar a igualdade de erro em cada elemento da nova malha; **processo iterativo**, o objetivo em cada passo do refino é reduzir o erro global calculado até que o erro diminua abaixo de uma tolerância especificada pelo usuário.

Além disso, avaliar e medir o erro através de alguma norma funcional nem sempre é suficiente para muitas aplicações. Na prática, o usuário de elementos finitos está interessado em magnitudes específicas, extraídas da solução global por algum pós-processo. Como mencionado anteriormente, estas grandezas são referenciadas como quantidades de interesse. Estratégias de

avaliação do erro orientadas por metas visam a estimar o erro cometido nestas quantidades e, possivelmente, fornecer limites para o erro.

Isto requer a obtenção de indicadores de erro locais que permitam decidir os elementos a serem marcados para o refino, ou seja, aqueles com maiores contribuições para o erro total. Assim, para determinar a contribuição de cada elemento para o erro total, distribuições espaciais das estimativas do erro são obtidas pela decomposição da estimativa global em uma soma de contribuições locais em cada elemento da malha, induzida por \mathcal{U}_H .

As estimativas para o erro na quantidade de interesse são da forma

$$J(u) - J(u_H) \approx \ell^{\mathcal{O}}(e^*) + \mathcal{Q}(e^*, e^*) + \mathcal{W}(e^*), \quad (4.15)$$

onde o termo linear $\ell^{\mathcal{O}}(e^*)$ é substituído por $R^P(e^*)$ ou $R^D(e^*)$, dependendo da representação selecionada para o termo linear. Visto que o termo linear é o termo predominante ao erro na quantidade de interesse, neste trabalho, o processo adaptativo é conduzido por $\ell^{\mathcal{O}}(e^*)$. Assim, a estimativa global para o termo linear $\ell^{\mathcal{O}}(e^*)$ é decomposta em uma soma de contribuições locais em cada elemento e estas quantidades locais são usadas para designar o processo adaptativo.

4.1 Indicadores locais

A restrição das formas integrais $a(\cdot, \cdot)$, $\ell(\cdot)$ e $\ell^{\mathcal{O}}(\cdot)$ para cada elemento da malha Ω_k produz as contribuições elementares denotadas por $a_k(\cdot, \cdot)$, $\ell_k(\cdot)$ e $\ell_k^{\mathcal{O}}(\cdot)$ tal que

$$a(u, v) = \sum_{k=1}^{n_{el}} a_k(u, v), \quad \ell(v) = \sum_{k=1}^{n_{el}} \ell_k(v), \quad \ell^{\mathcal{O}}(v) = \sum_{k=1}^{n_{el}} \ell_k^{\mathcal{O}}(v). \quad (4.16)$$

Similarmente, os resíduos primal e adjunto são decompostos como

$$R^P(v) = \sum_{k=1}^{n_{el}} R_k^P(v), \quad R^D(v) = \sum_{k=1}^{n_{el}} R_k^D(v), \quad (4.17)$$

onde $R_k^P(\cdot) := \ell_k(\cdot) - a_k(u_H, \cdot)$ e $R_k^D(\cdot) := \ell_k^{\mathcal{O}}(\cdot) - a_k(\cdot, \psi_H)$.

Assim, as representações para a contribuição linear do erro na quantidade de interesse, dado pela equação 3.9, são associadas as distribuições elementares do erro

$$\ell^{\mathcal{O}}(e) = \sum_{k=1}^{n_{el}} R_k^P(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n_{el}} R_k^D(e). \quad (4.18)$$

É importante mencionar que, enquanto as quantidades do erro global são iguais em ambas representações, as quantidades locais $R_k^P(\varepsilon)$ e $R_k^D(e)$ representam contribuições elementares diferentes ao erro e, além disso, elas não são necessariamente positivas, nem mesmo números reais.

Analogamente, as estimativas globais

$$\eta^\varepsilon := R^P(\varepsilon^*) \quad \text{e} \quad \eta^e := R^D(e^*), \quad (4.19)$$

são associadas aos indicadores de erro locais $\eta_k^\varepsilon := R_k^P(\varepsilon^*)$ e $\eta_k^e := R_k^D(e^*)$, tal que

$$\eta^\varepsilon = \sum_{k=1}^{n_{el}} \eta_k^\varepsilon \quad \text{e} \quad \eta^e = \sum_{k=1}^{n_{el}} \eta_k^e. \quad (4.20)$$

Uma simples estratégia adaptativa é empregada, utilizando os indicadores locais produzidos durante o cálculo da estimativa para a quantidade de interesse, para guiar a quantidade de interesse não-linear a uma precisão prescrita. Ou seja, o algoritmo termina se

$$\sum_{k=1}^{n_{el}} \eta_k^\circledast + \mathcal{Q}(e^*, e^*) + \mathcal{W}(e^*) < \Delta_{tol}, \quad (4.21)$$

onde η_k^\circledast representa qualquer uma das seguintes contribuições locais η_k^ε ou η_k^e , Δ_{tol} é uma precisão final desejada e prescrita pelo usuário, e em cada nível de refino, os elementos marcados para refinar são aqueles com maiores valores à contribuição linear local η_k^\circledast .

4.2 Critério de remalhamento

Em problemas acústicos, as contribuições locais não são necessariamente positivas e, de fato, ao contrário do que ocorre em problemas térmicos ou de elasticidade, podem ser números complexos. Assim, para selecionar os elementos com maiores contribuições locais, o módulo dos valores η_k^\circledast é considerado. As seguintes estratégias utilizadas são:

- **Estratégia 1:** os elementos a serem refinados são aqueles que verificam

$$|\eta_k^\circledast| \geq \frac{\sum_{k=1}^{n_{el}} |\eta_k^\circledast|}{n_{el}}. \quad (4.22)$$

Note que este algoritmo de marcação visa a obtenção dos elementos com contribuição de erro local igual. Entretanto, isso não é equivalente a obter uma distribuição do erro espacial uniforme, uma vez que os elementos com maior área são penalizados. A fim de obter uma distribuição de erro espacial uniforme, as contribuições locais são ponderadas pela área do elemento, produzindo o seguinte critério de marcação.

- **Estratégia 2:** os elementos a serem subdivididos são os que verificam

$$\frac{|\eta_k^\circledast|}{A_k} \geq \frac{\sum_{k=1}^{n_{el}} |\eta_k^\circledast|}{A_\Omega}, \quad (4.23)$$

onde A_k é a área do elemento Ω_k e A_Ω é a área do domínio completo Ω . Note que as expressões 4.22 e 4.23 são equivalentes em malhas uniformes, onde todos os elementos tem a mesma área, uma vez que neste caso $A_k = A_\Omega/n_{el}$ é constante.

5 APRESENTAÇÃO DO BENCHMARK TEST

Nesta seção utilizamos o *benchmark test*, dado pelo problema da propagação de ondas de radar, para o estudo das técnicas de estimativas de erro e de refino adaptativo descritas nas seções anteriores. O problema de ondas de radar em questão envolve o *scattering* a partir de um obstáculo acusticamente rígido, onde o obstáculo é composto de três elipses, veja a Figura 1.

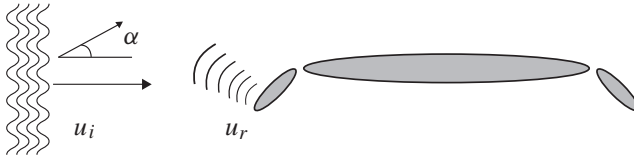


Figura 1: Problema de *scattering*: espalhamento de uma onda refletida a partir de uma onda que atinge o obstáculo rígido composto por três elipses.

São considerados dois domínios computacionais diferentes contendo as elipses: um domínio retangular de dimensões 30×20 e um domínio circular de raio $r = 25$, veja a Figura 2.

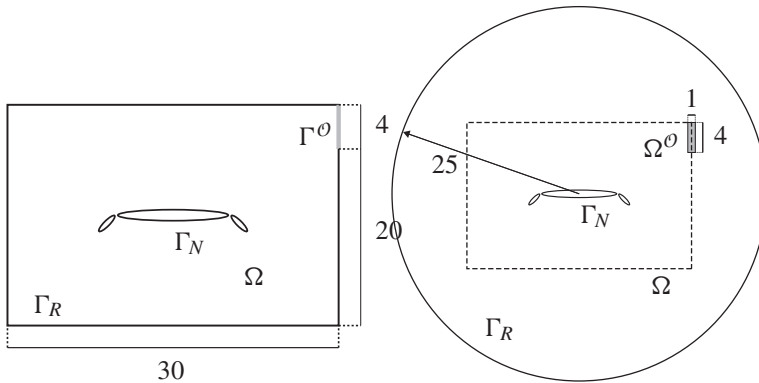


Figura 2: Descrição da geometria e condições de contorno da onda plana refletida pelas três elipses, onde o contorno exterior é descrito por dois domínio distintos, um retangular (superior) e outro circular (inferior).

O problema de *scattering* consiste em calcular a onda refletida u_r , solução da equação de Helmholtz com $f = 0$. Para este problema condições de contorno Neumann são aplicadas no obstáculo, isto é $\nabla u_r \cdot \mathbf{n} = -\nabla u_i \cdot \mathbf{n}$, e condições de contorno Bayliss-Gunzberger-Turkel (BGT) [6] de primeira ordem são aplicadas nos contornos fictícios exteriores, ou seja

$$\nabla u_r \cdot \mathbf{n} = m u_r = -i k u_r + \frac{\zeta}{2} u_r, \quad (5.24)$$

onde ζ é a curvatura na superfície refletora. Para o caso do contorno exterior retangular $\zeta = 0$, a equação 5.24 se reduz à condição de Robin usual, que é equivalente a condição BGT-0, de ordem zero. Sabe-se que uma condição BGT-0 não é muito precisa em implementações práticas [7].

Para o contorno exterior circular de raio r , a curvatura é dada por $\zeta = 1/r$. Portanto, é esperado que a aproximação do domínio circular produza erros menores, devido as aproximações das condições de contorno.

Em particular, aqui este *benchmark test* é utilizado para analisar a proposta de refino adaptativo para quantidades de interesse específico. Embora a quantidade de interesse mais relevante para este problema seja a *scattering cross-section*, uma meta inicial não tão ambiciosa foi considerada aqui: obter a média do módulo ao quadrado da solução refletida em Γ° e Ω° , respectivamente.

Assim, o problema simplificado de prever o ruído ou uma eventual redução dele em uma área específica do domínio é considerada como a quantidade de interesse específica. Para isso, o objetivo é aplicar a medição do módulo da solução refletida. Especificamente, para o exemplo com o contorno exterior retangular, a quantidade de interesse é a média do módulo da solução ao quadrado sobre a faixa do contorno Γ° , mostrada na parte superior da Figura 2, isto é $J_1(u_r)$, definida como

$$J_1(u) = \frac{1}{l_{\Gamma^\circ}} \int_{\Gamma^\circ} u \bar{u} d\Gamma, \quad (5.25)$$

onde l_{Γ° é o comprimento da faixa no contorno. Uma vez que este a quantidade de interesse depende quadraticamente de u , $\mathcal{W}_1(v) = 0$ e as contribuições linear e quadrática são

$$\ell_1^\circ(v) = \frac{1}{l_{\Gamma^\circ}} \int_{\Gamma^\circ} (u_H \bar{v} + \bar{u}_H v) d\Gamma \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_1(v, v) = J_1(v). \quad (5.26)$$

Note que $\ell_2^\circ(v)$ é um número real coincidindo com

$$\ell_1^\circ(v) = 2\Re \left(\frac{1}{l_{\Gamma^\circ}} \int_{\Gamma^\circ} \bar{u}_H v d\Gamma \right). \quad (5.27)$$

Para o exemplo com contorno exterior circular, a quantidade de interesse é a norma \mathcal{L}^2 do módulo ao quadrado da solução sobre o subdomínio Ω° , mostrado na Figura 2, ou seja, $J_2(u_r)$, definida por

$$J_2(u) = \frac{1}{A_{\Omega^\circ}} \int_{\Omega^\circ} u \bar{u} d\Omega \quad (5.28)$$

onde A_{Ω° representa a área do subdomínio Ω° . Novamente, sendo a quantidade de interesse quadrática $\mathcal{W}_2(v) = 0$,

$$\ell_2^\circ(v) = \frac{1}{A_{\Omega^\circ}} \int_{\Omega^\circ} (u_H \bar{v} + \bar{u}_H v) d\Omega \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2(v, v) = J_2(v). \quad (5.29)$$

Observe que, por simplicidade de cálculo para o contorno exterior circular, ao invés de considerar uma faixa dentro do domínio, um subdomínio Ω° é utilizado. Neste caso, Ω° é obtido a partir de Γ° expandindo a faixa a uma largura de $1m$.

As Figuras 3 e 4 mostram as aproximações de Galerkin dos problemas primal e adjunto, para o número de onda $\kappa = \pi/4$, correspondente aos contornos fictícios retangular e circular, respectivamente. Analogamente, as Figuras 5 e 6 mostram as aproximações correspondentes para o número de onda $\kappa = \pi$.

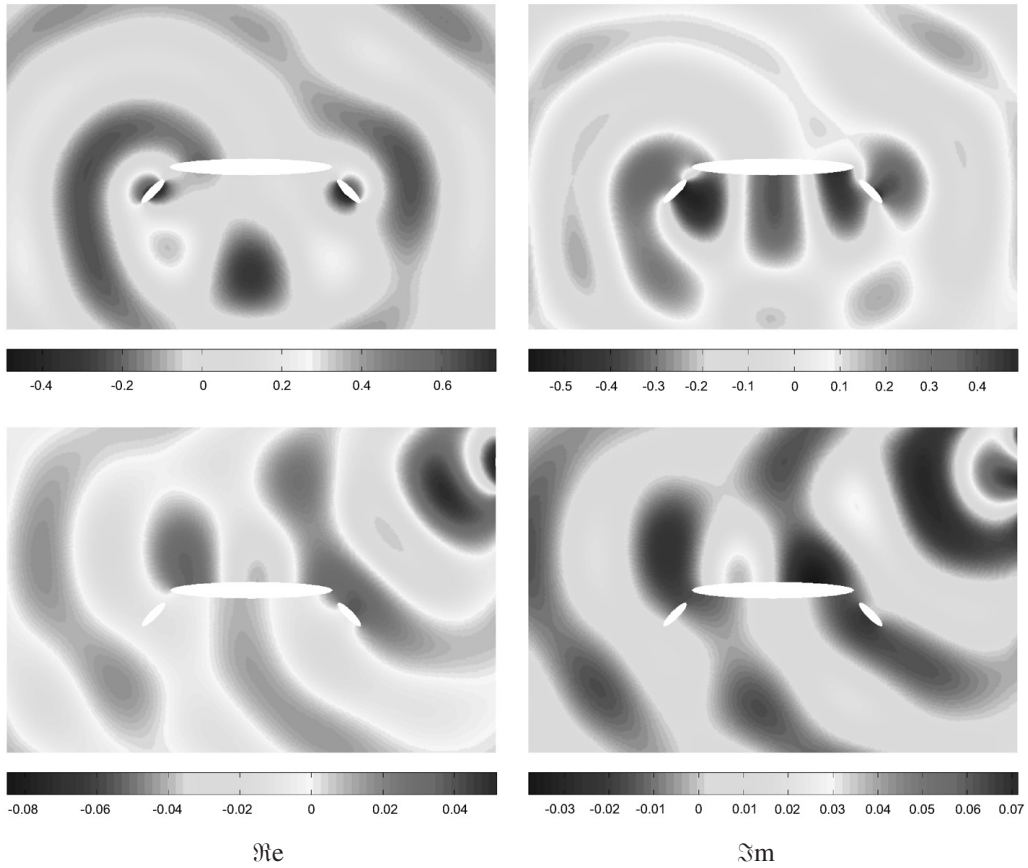


Figura 3: Aproximações de elementos finitos do problema primal (superior) e da solução adjunta (inferior) para o número de onda $\kappa = \pi/4$, para a malha de 16212 nós, correspondente ao problema de contorno exterior retangular.

Como esperado, ambas aproximações fornecem resultados similares para o campo acústico, nas proximidades onde é avaliada a quantidade de interesse e ao redor do obstáculo. Note que, para melhor visualização das legendas e dos resultados as soluções estão apresentadas fora de escala, uma vez que o domínio com contorno circular é maior que o retangular, como descrito anteriormente (Fig. 2) com as respectivas dimensões.

A Figura 7 apresenta a parte real da aproximação do problema adjunto com contorno exterior circular para $\kappa = \pi/4$, destacando a parte retangular do domínio referente ao problema com contorno exterior retangular e ao lado direito apresenta a aproximação correspondente a este problema em escala. Além disso, como era esperado os valores para as contribuições lineares das quantidades de interesse J_1 e J_2 são similares, $\ell_1^O(u_h) = 0.38442$ e $\ell_2^O(u_h) = 0.43467$.

Em [5] uma nova técnica de pós-processo para recuperar a solução melhorada u^* é introduzida. Esta nova técnica utiliza um ajuste complexo-exponencial por mínimos quadrados e sub-

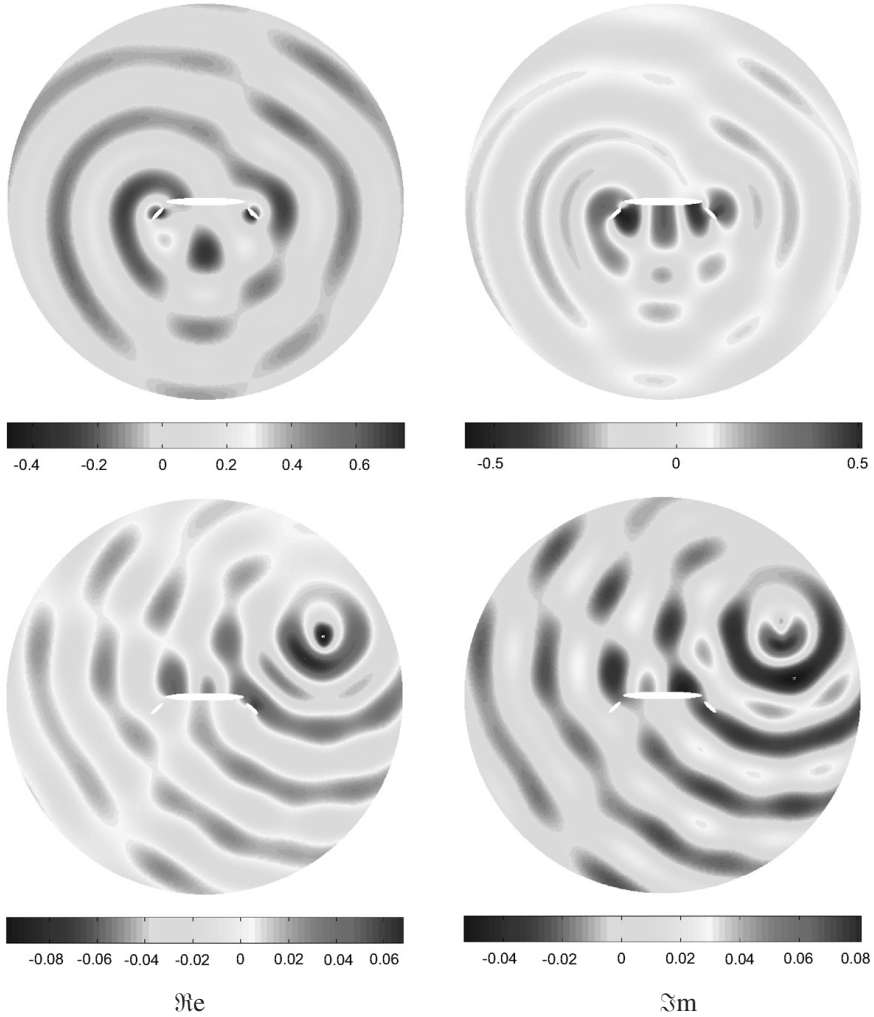


Figura 4: Aproximações de elementos finitos do problema primal (superior) e da solução adjunta (inferior) para o número de onda $\kappa = \pi/4$, para a malha de 26584 nós, correspondente ao problema de contorno exterior circular.

títui a técnica padrão de ajuste polinomial. As duas estratégias (polinomial e exponencial) são comparadas e a nova técnica fornece resultados muito mais precisos na maioria das aplicações consideradas. Isto se deve ao fato que as aproximações obtidas pelo ajuste exponencial respeitam a natureza e o caráter da solução do problema de onda. Portanto, neste artigo as estimativas da contribuição linear ao erro na quantidade de interesse $\eta := \ell^{\mathcal{O}}(e)$, são obtidas utilizando esta nova estratégia de pós-processo. Estas estimativas são denotadas por $\eta^{\varepsilon} = R^P(\varepsilon^*)$ e $\eta^{\varepsilon} = R^D(\varepsilon^*)$. Note que em [5] as mesmas estimativas eram denotadas pelo sub-índice exp para distinguir do ajuste polinomial.

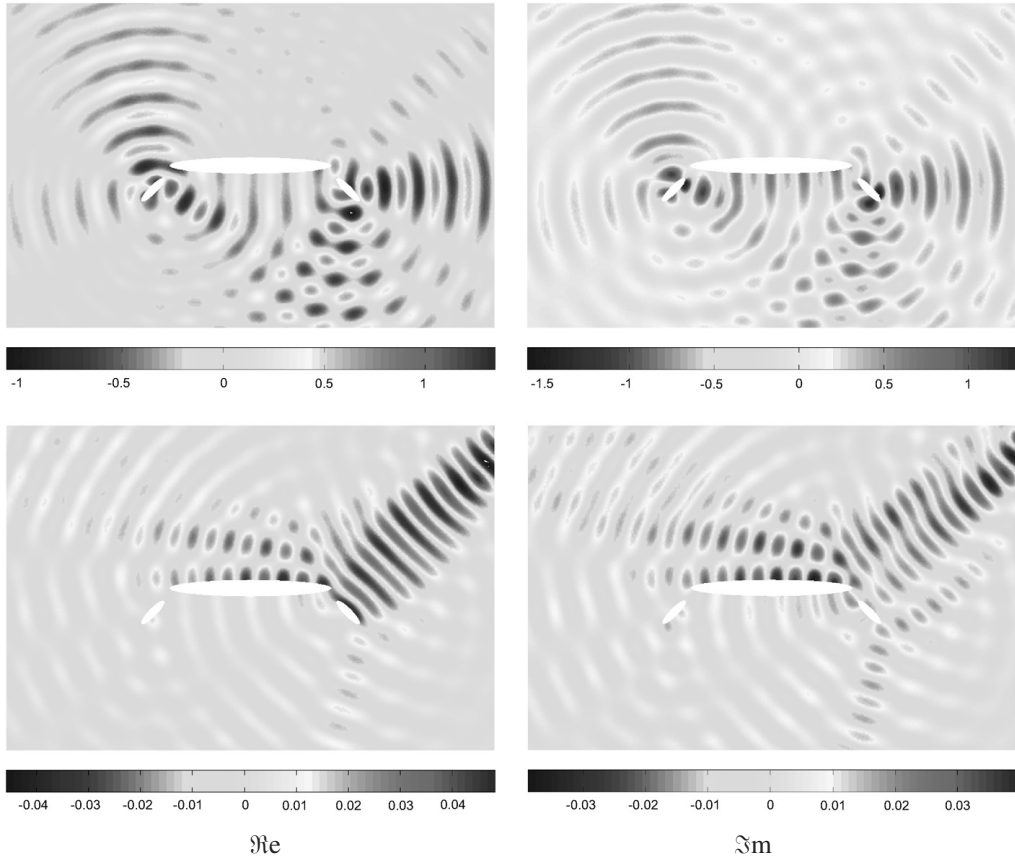


Figura 5: Aproximações de elementos finitos do problema primal (superior) e da solução adjunta (inferior) para o número de onda $\kappa = \pi$ para a malha de 16212 nós, correspondente ao problema de contorno exterior retangular.

Para ver o quão eficiente é o desempenho dos estimadores, são necessários os valores verdadeiros do erro $J(u) - J(u_H)$ ou $\ell^{\mathcal{O}}(e)$, entretanto as soluções analíticas dos problemas considerados não são disponíveis. Um valor preciso para o erro verdadeiro é obtido por usar uma aproximação suficientemente precisa, u_h de u , em uma malha de referência mais fina, isto é, as estimativas são comparadas com os valores de referência $J(u_h) - J(u_H)$ e $\eta_h := \ell^{\mathcal{O}}(e_h)$, respectivamente.

Note que o valor de referência η_h também pode ser obtido a partir de uma representação fiel do problema adjunto ψ_h , uma vez que $\eta_h = \ell^{\mathcal{O}}(e_h) = R^P(\psi_h) = R^P(\varepsilon_h)$. Observe também que $\eta_h = R^D(e_h) = R^P(\varepsilon_h)$ mostra que a qualidade das estimativas depende da qualidade das aproximações $e^* \approx e_h$ e $\varepsilon^* \approx \varepsilon_h$. A exatidão dessas aproximações está intimamente relacionada com o chamado erro de **poluição** ou de **dispersão**. A influência deste erro dispersão nas estimativas para as quantidades de interesse é analisada usando as estimativas para o erro de dispersão. Estas estimativas são denotadas por E^e e E^ε para os problemas primal e adjunto, respectivamente.

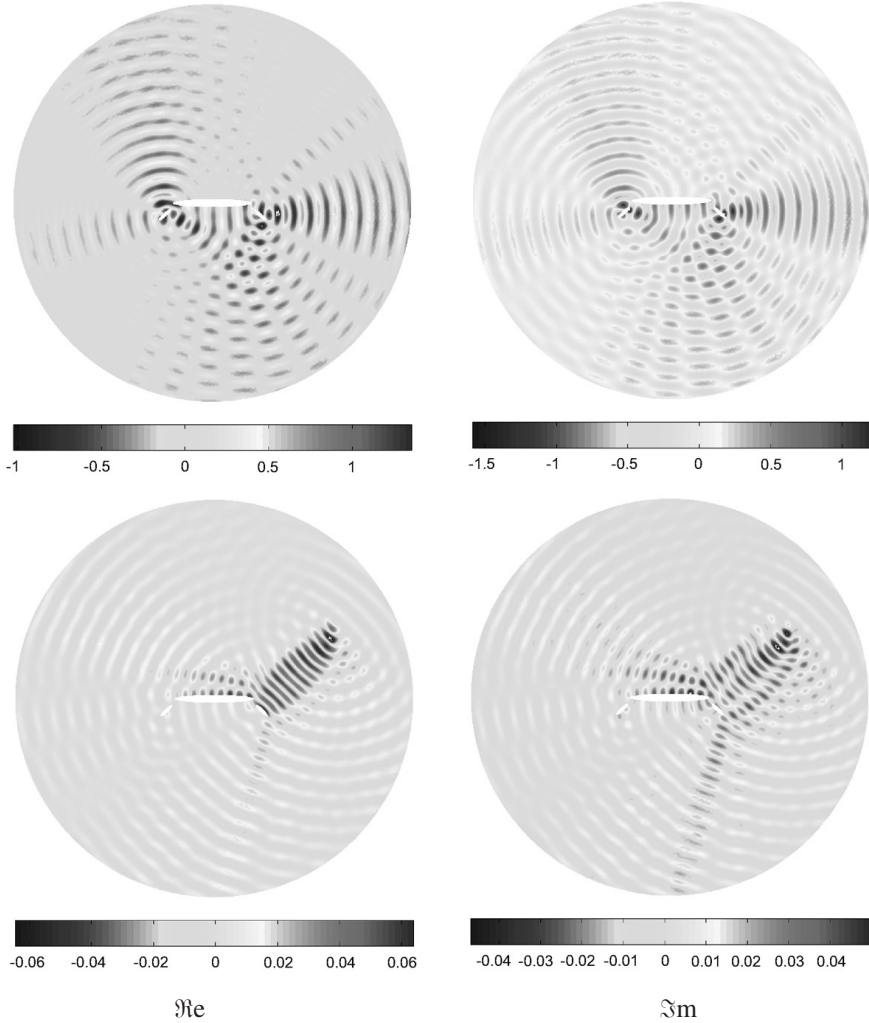


Figura 6: Aproximações de elementos finitos do problema primal (superior) e da solução adjunta (inferior) para o número de onda $\kappa = \pi$ para a malha de 26584 nós, correspondente ao problema de contorno exterior circular.

Primeiramente, a contribuição linear do erro $\ell_2^0(u_r)$ é analisada para uma malha uniforme refinada em uma série de malhas não-estruturadas para ambos os números de onda. A Tabela 1 mostra os valores dos erros de referência relativos, isto é $\rho_h = \ell_2^0(e_h)/\ell_2^0(u_H)$, e suas estimativas correspondentes $\rho^\varepsilon = \eta^\varepsilon/\ell_2^0(u_H)$ e $\rho^e = \eta^e/\ell_2^0(u_H)$, juntamente com as estimativas para o erro de dispersão relativo, $\rho^{E^\varepsilon} = E^\varepsilon/\kappa$ e $\rho^{E^e} = E^e/\kappa$. Note que, mesmo que os erros são maiores para $\kappa = \pi$ as estimativas comportam-se de modo semelhante, fornecendo erros relativos similares. O erro de dispersão é uma importante fonte de erro para esse problema e está intimamente associado ao comportamento das representações η^ε e η^e . Na verdade, a representação utilizando

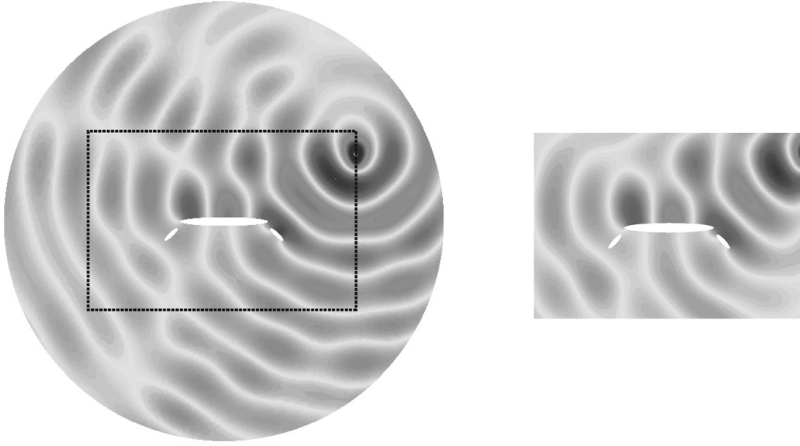


Figura 7: Parte real da aproximação de elementos finitos do problema adjunto para o contorno exterior circular (à esquerda) com o retângulo destacado e a aproximação correspondente ao problema com contorno exterior retangular (à direita) para o número de onda $\kappa = \pi/4$.

a recuperação do erro adjunto, ε^* , é ligeiramente melhor do que a representação utilizando a recuperação do erro primal e^* . Assim, o erro de dispersão pode ser utilizado para escolher a representação do erro para obter a aproximação para a quantidade de interesse.

Note também que aumentando o valor de κ não envolve uma deterioração das estimativas. De fato, os índices de efetividade melhoram. Na verdade, para a representação η^ε , o índice de efetividade ρ^e/ρ_h diminui de 0.58 a 0.40 para a primeira malha, e de 0.89 para 0.81 na malha final.

Tabela 1: Estimativas para o erro no termo linear $\ell_2^0(e_h)$ relativo à $\ell_2^0(u_H)$ e o erro de dispersão relativo para os problemas primal e adjunto em um conjunto de malhas refinadas uniformemente.

$\kappa = \pi/4$					
n_{np}	ρ_h	ρ^ε	ρ^e	ρ^{E^ε}	ρ^{E^e}
1711	0.1006	0.0590	0.0472	0.0429	0.0468
6713	0.0690	0.0353	0.0305	0.0124	0.0131
26584	0.0279	0.0248	0.0233	0.0030	0.0031
$\kappa = \pi$					
n_{np}	ρ_h	ρ^ε	ρ^e	ρ^{E^ε}	ρ^{E^e}
1711	0.8873	0.3563	0.3430	0.1101	0.1906
6713	0.7341	0.2753	0.2699	0.0994	0.1002
26584	0.1313	0.1067	0.0780	0.0431	0.0504

É interessante notar que um comportamento similar é obtido para o problema com o contorno retangular e a quantidade de interesse $J_1(u_r)$.

A Tabela 2 mostra as estimativas obtidas para a quantidade de interesse $J_1(u_r)$, referente ao parâmetro $\kappa = \pi/4$, utilizando três malhas uniformemente refinadas para a geometria do contorno exterior retangular. Para ilustrar a influência dos diferentes termos que contribuem para o erro na quantidade de interesse, as contribuições linear e quadrática são mostradas separadamente. Observe que, o termo linear fornece uma boa aproximação para o erro total uma vez que o termo quadrático converge rapidamente para zero. Para todas as malhas o erro de dispersão é menor para o problema adjunto, o que faz com que a representação η^ε seja mais precisa do que η^e .

Tabela 2: Estimativas para a quantidade de interesse não-linear $J_1(u_r)$ para $\kappa = \pi/4$ e para seu erro, incluindo as contribuições linear e quadrática para a quantidade de interesse e os erros de dispersão para os problemas primal e adjunto.

	número de nós		
	1065	4123	16212
$J(u_h)$	3.3862e-2	4.2634e-2	4.7342e-2
$J(u_H)$	2.4265e-2	3.7859e-2	4.5476e-2
$J(u_H) + \eta^\varepsilon + Q(e^*, e^*)$	2.6712e-2	3.9939e-2	4.6638e-2
$J(u_H) + \eta^e + Q(e^*, e^*)$	2.6622e-2	3.9867e-2	4.6588e-2
η^ε	2.4350e-3	2.0785e-3	1.1621e-3
η^e	2.3456e-3	2.0068e-3	1.1117e-3
$Q(e^*, e^*)$	1.2002e-5	1.2984e-6	1.0155e-7
E^ε	5.9456e-3	1.4779e-3	3.5560e-4
E^e	8.7771e-3	3.9217e-3	1.5675e-3

A convergência das estimativas para um procedimento de refino uniforme e um adaptativo, usando a estratégia dada na equação 4.23, são mostrados na Figura 8. Note que, o refino adaptativo leva a uma redução mais rápida do erro e também observe que os indicadores locais, associados as estimativas, comportam-se adequadamente uma vez que as curvas de convergência das estimativas estão de acordo com as de referência. A curva associada a estimativa de referência η_h , para $\kappa = \pi/4$, o refino uniforme tem uma convergência de $\mathcal{O}(n_{np})^{2/3}$. Entretanto, para as estimativas η^ε e η^e , há um pequeno intervalo onde a solução está em um estágio pré-assintótico [7]. Observe que quando o número de onda κ é maior, por exemplo $\kappa = \pi$, o intervalo pré-assintótico também aumenta devido ao maior erro de dispersão.

A Figura 9 mostra as contribuições elementares locais de η^ε , para o erro na quantidade de interesse na malha inicial do problema com geometria retangular, referente ao dois números de onda $\kappa = \pi/4$ e $\kappa = \pi$. Além disso, uma malha intermediária e a malha final produzidas pelo processo adaptativo associado com esta estimativa são mostrados na Figura 10. Note que o

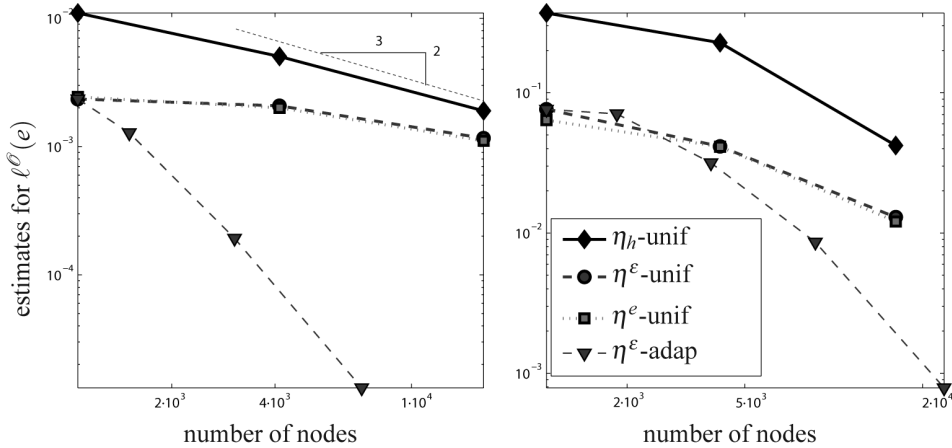


Figura 8: Convergência do erro relativo para a quantidade de interesse $J_1(u_r)$ para $\kappa = \pi/4$ (esquerda) e $\kappa = \pi$ (direita), para processo de refino uniforme e adaptativo da solução de referência comparada com as soluções melhoradas, respectivamente.

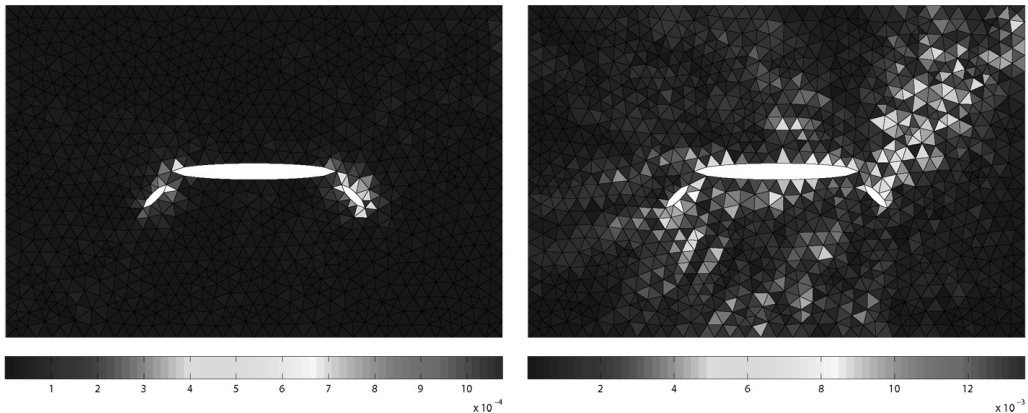


Figura 9: Mapas locais do erro para a contribuição ao termo linear à quantidade de interesse $J_1(u_r)$ usando a representação η^ϵ para $\kappa = \pi/4$ (esquerda) e $\kappa = \pi$ (direita).

procedimento adaptativo refina em torno do obstáculo mas também refina ao redor da faixa no contorno, onde é avaliada e calculada a quantidade de interesse da solução.

Finalmente, a Figura 11 mostra os elementos marcados para ser refinados para o problema com contorno circular no primeiro passo, e uma malha intermediária e a malha final produzidas pelo procedimento adaptativo associado à estimativa η^ϵ para o número de onda $\kappa = \pi/4$. Pode-se observar que as regiões refinadas em ambas as geometrias são muito semelhantes. Entretanto, uma vez que o domínio circular é um pouco maior, neste caso, o processo adaptativo refinou áreas não incluídas no domínio retangular.

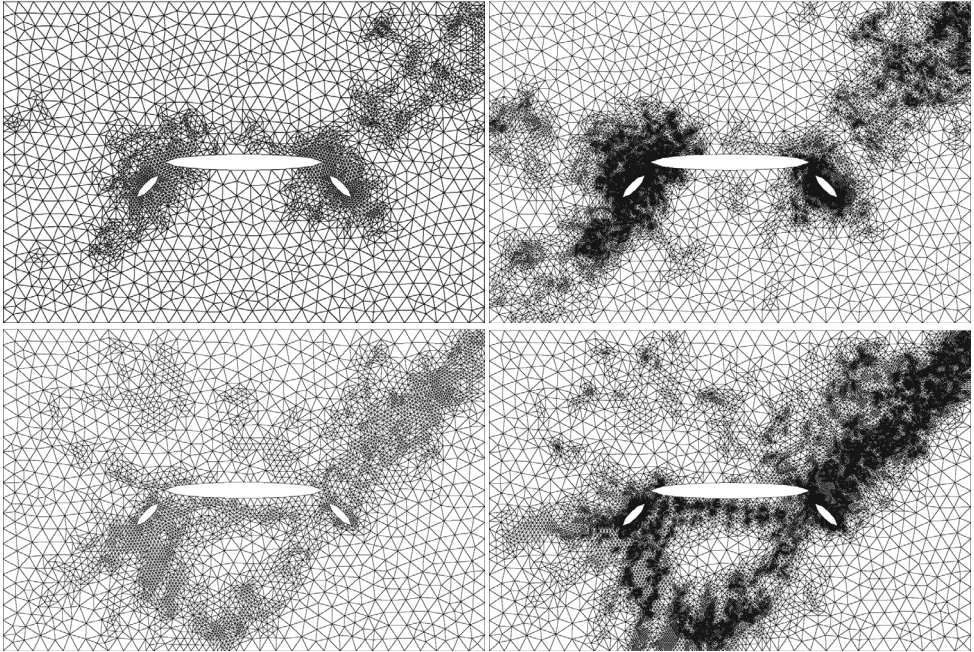


Figura 10: Malhas intermediária e final adaptadas para o contorno exterior retangular. Para $\kappa = \pi/4$ (superior) com 3050 e 17916 nós e para $\kappa = \pi$ (inferior) com 3842 e 23635 nós.

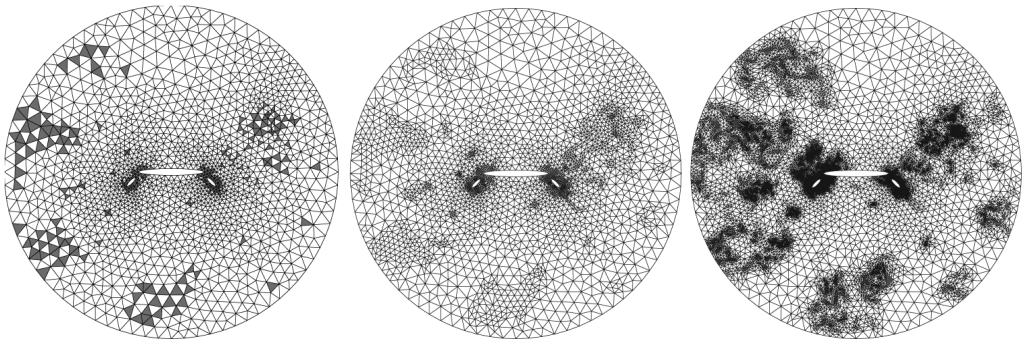


Figura 11: Elementos destacados para serem refinados no primeiro passo da estratégia proposta (esquerda) e malhas intermediária (meio) e final (direita) adaptadas com 2790 e 14207 nós para o contorno exterior circular com $\kappa = \pi/4$.

6 CONCLUSÃO

Uma estratégia simples e eficaz de adaptatividade orientada por meta foi apresentada e aplicada ao *benchmark test* dado pelo problema de *scattering* de ondas de um radar. Duas diferentes representações para o erro nas quantidades de interesse foram estudadas. Também foi analisada e comprovada que a exatidão destas representações, que envolvem o pós-processo das aproximações de elementos finitos para os problemas primal e adjunto, está relacionada ao erro de dispersão dos problemas correspondentes.

O processo adaptativo foi aplicado para duas quantidades de interesse não-lineares. Em ambos os casos, os indicadores locais que guiam a adaptatividade são obtidos a partir das aproximações linearizadas da quantidade de interesse. A parte linear da quantidade de interesse é o termo predominante, visto que as contribuições de ordem superior convergem mais rápido a zero.

Através da análise desenvolvida aqui e dos resultados numéricos obtidos, comprova-se que as estimativas de erro fornecem boas aproximações ao erro real e apresentam uma taxa de convergência adequada. Além disso, a técnica de refino adaptativo proposta conduz a uma redução mais rápida do erro.

ABSTRACT. The aim of this paper is to study the efficiency and robustness of adaptive techniques and goal-oriented error estimates for a benchmark test. The techniques used here are based on a simple post-process of the finite element approximations. The goal-oriented error estimates are obtained by analyzing the direct problem and an auxiliary problem related to a specific quantity of interest. The proposed procedure is valid for both linear and non-linear quantities. Different error representations are discussed and the influence of the dispersion error is analyzed. The numerical results show that the error estimates provide fairly good approximations of the actual error and that the proposed adaptive refinement technique leads to a faster reduction of the error.

Keywords: error estimates, goal-oriented adaptivity, Benchmark Test.

REFERÊNCIAS

- [1] *Integrated Multiphysics Desing Database*. <http://jucri.jyu.fi/>.
- [2] L.M. Steffens, N. Parés & P. Díez. Estimation of the dispersion error in the numerical wave number of standard and stabilized finite element approximations of the Helmholtz equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, **86** (2011), 1197–1224.
- [3] J. Sarrate, J. Peraire & A.T. Patera. A posteriori finite element error bounds for non-linear outputs of the Helmholtz equation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, **31**(1) (1999), 17–36.
- [4] Y. Maday, A.T. Patera & J. Peraire. A general formulation for a posteriori bounds for output functionals of partial differential equations; application to the eigenvalue problem. *C. R. Acad. Sci. Paris – Analyse Numérique*, **328**(1) (1999), 823–828.
- [5] L.M. Steffens, N. Parés & P. Díez. Goal-oriented *h*-adaptivity for the Helmholtz equation: error estimates, local indicators and refinement strategies. *Comput. Mech.*, **47** (2011), 681–699.

- [6] T. Walsh & T. Demkowicz. *hp* boundary element modeling of the external human auditory system – Goal oriented adaptivity with multiple load vectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **192** (1-2) (2003), 125–146.
- [7] F. Ihlenburg. Finite Element Analysis of Acoustic Scattering. *Applied Mathematical Sciences*, **132** (1998), Springer-Verlag, New York.