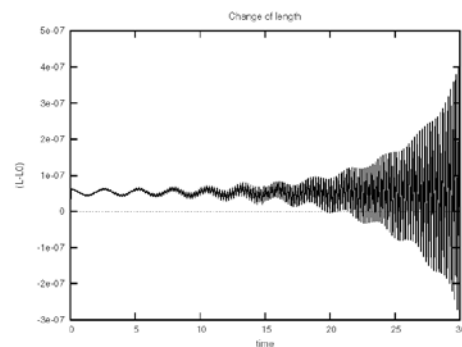
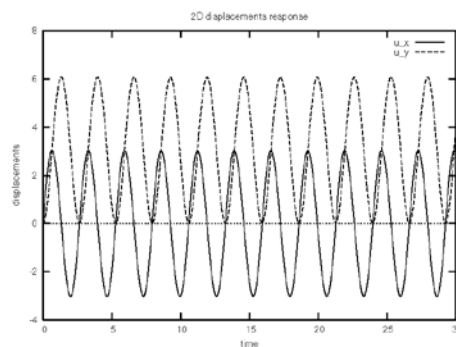
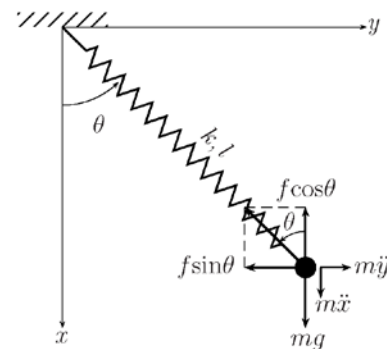


Aplicaciones de algoritmos que conservan la energía-momentum en dinámica no-lineal

W. Taylor Matias



Aplicaciones de algoritmos que conservan la energía-momentum en dinámica no-lineal

W. Taylor Matias

Publicación CIMNE N°-259, Octubre 2004

Aplicaciones de algoritmos que conservan la energía-momentum en dinámica no-lineal

William Taylor Matias Silva
Departamento de Engenharia Civil - Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília - UnB
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brazil
Tel.: +55-61-2741517 Fax.: +55-61-2734644
e-mail: taylor@unb.br

Resumen

En este trabajo se estudia los algoritmos de integración en el tiempo que se basan en el método α generalizado. Para realizar dicho estudio se adoptan los planteamientos desarrollados en KUHL & CRISFIELD [1999]. Por tanto, el principal objetivo es investigar el comportamiento, en el análisis dinámico no-lineal, de los siguientes algoritmos:

1. La regla de trapecio - RT;
2. La regla del punto medio - RPM;
3. El método de Newmark - NM;
4. El método α de Bossak - $M\alpha B$;
5. El método α de Hilber - $M\alpha H$;
6. El método α generalizado - $M\alpha G$;
7. El método de energía-momentum - MEM;
8. El método de energía-momentum modificado - MEM $+\xi$;
9. El método de energía-momentum generalizado - MEMG;
10. El método de energía-momentum generalizado modificado - MEMG $+\xi$;

Según las siguientes características deseables:

1. Estabilidad numérica;
2. Conservación y decaimiento de la energía total;
3. Mínima disipación de frecuencias bajas;
4. Máxima disipación de frecuencias altas;
5. Convergencia durante el proceso iterativo;

Para ello se ha analizado el problema del péndulo simple no-lineal discretizado con el elemento de barra bi-articulado. En la primera simulación numérica se ha tratado el péndulo como rígido mientras que en la segunda simulación se considera el péndulo elástico.

1 Introducción

En régimen lineal, la noción de estabilidad implica que la ley de conservación de la energía impone un límite al crecimiento desmedido de la solución. Por otro lado, en un problema no lineal, el concepto de linealización del equilibrio en el tiempo no necesariamente implica conservación de la energía. Normalmente ocurre un crecimiento patológico de la energía, que se ha observado en algunas situaciones para algoritmos que son incondicionalmente estables durante la linealización. Un ejemplo de este caso ocurre al utilizar la regla del trapecio o algoritmo de Newmark con $\beta = 1/4$ y $\gamma = 1/2$. Con este razonamiento se hace más evidente la cuestión si son o no adecuadas las nociones de estabilidad propuestas para problemas lineales. De esta manera, una condición suficiente en análisis no lineal es la conservación o el decremento de la energía total en el paso de tiempo. Este criterio se puede escribir como (BELYTSCHKO & SCHOEBERLE [1975]):

$$U_{n+1} - U_n + K_{n+1} - K_n \leq W_{\text{ext}} \quad (1)$$

donde U_{n+1} y U_n representan la energía de deformación en el paso de tiempo actual $n+1$ y el anterior n , respectivamente. K_{n+1} y K_n denotan la energía cinética y W_{ext} representa el trabajo de las fuerzas externas dentro del paso de tiempo, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Un algoritmo que cumpla dicha condición puede ser estable aunque puede no converger en situaciones donde ocurra un crecimiento desmedido de la energía cinética. Para superar dicho problema, es necesario introducir parámetros en el algoritmo de integración temporal que produzcan disminución de energía. Por tanto, estos parámetros introducen la disipación numérica para las respuestas del sistema en altas frecuencias.

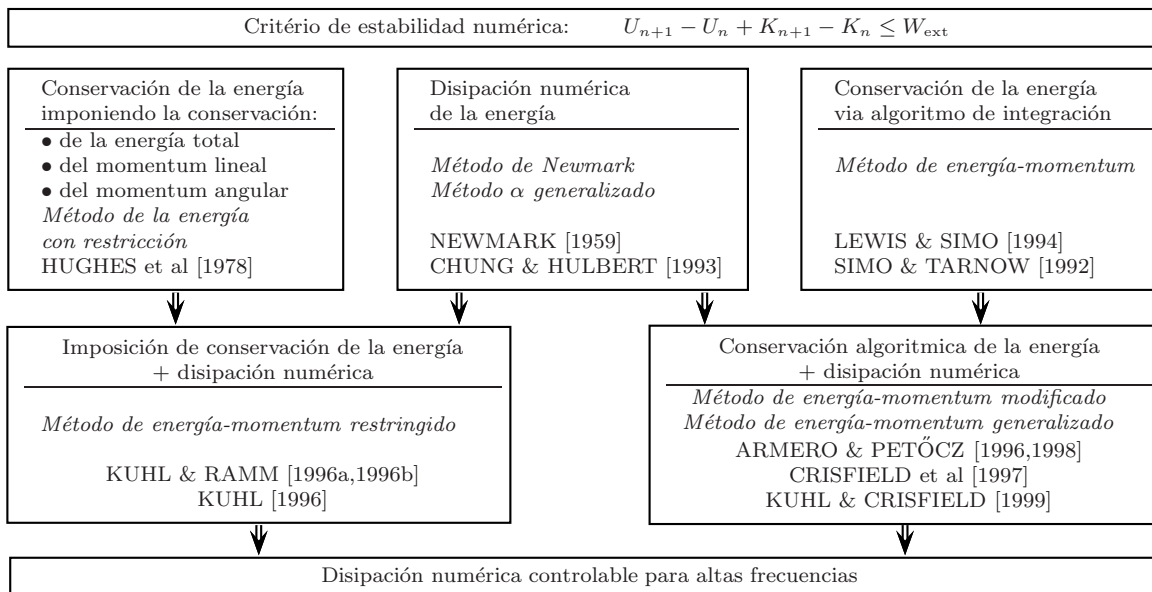


Figura 1. Métodos de integración temporal que cumplen el criterio de estabilidad (1) y poseen disipación numérica para las altas frecuencias

1.1 Estabilidad numérica

En la Figura 1 se detallan tres grupos de algoritmos de integración en el tiempo que cumplen el criterio energético descrito en (1), cuyas principales características son:

1. Disipación numérica;
2. Conservación de la energía a través de restricciones;
3. Conservación algorítmica de la energía.

El primer grupo utiliza la disipación numérica para cumplir la inecuación (1). Tratase de algoritmos que poseen disipación controlable para altas frecuencias en el análisis dinámico lineal. En la referencia CRISFIELD et al [1996a] se presentan algunas de las desventajas de este grupo de algoritmos cuando aplicados en el análisis dinámico no-lineal. Ellos no garantizan la disipación de la energía con los mismos parámetros utilizados en un análisis lineal. Aún queda pendiente de solución, la obtención de un paso de tiempo estable con una elección arbitraria de parámetros de integración.

El segundo grupo ha sido propuesto por HUGHES et al [1978]. Estos algoritmos cumplen el criterio (1) imponiendo la conservación de la energía total, del momentum lineal y del momentum angular. Se denominan *Método de energía con restricción*, tratase de una extensión de la *regla del trapecio* con la restricción impuesta a través de los multiplicadores de Lagrange. KUHL & RAMM [1996a,1996b] han observado que dicho algoritmo conserva la energía total, sin embargo no ha convergido para algunos casos con respuestas en altas frecuencias. Estos autores han detectado problemas de convergencia en la reproducción del fenómeno del *rebote hacia delante* en láminas cilíndricas.

Por otra parte, el último grupo de algoritmos ha sido propuesto por SIMO & TARNOW [1992a] se denomina *Método energía-momentum*. Tratase del método más popular entre aquellos que garantizan un paso de tiempo estable a lo largo del proceso incremental-iterativo. Dicho método resulta de una simple modificación de la *regla del punto medio*, a través de la sustitución del tensor de tensiones evaluado en el punto medio por el promedio de dicho tensor calculados en los pasos previo y actual del tiempo que garantiza la conservación algorítmica de la energía. El *Método de energía-momentum* posee una precisión de segundo orden, además conserva la energía total, el momentum lineal y el momentum angular. Según parece, este método es adecuado para el análisis dinámico no-lineal de estructuras.

Recentemente, ARMERO & ROMERO [2001a], [2001b], [2003] y ROMERO & ARMERO [2002], han propuesto estrategias de integración que se basan en la conservación de algunas propiedades geométricas de sistemas Hamiltonianos simétricos que conservan la energía total y el momentum angular. En la referencia HAIRER et al [2002] se describe detalladamente el tratamiento matemático-numérico de dichas estrategias.

1.2 Disipación numérica controlable

En los problemas prácticos de ingeniería los esquemas de integración en el tiempo son utilizados en el análisis de sistemas estructurales con múltiples grados de libertad. Para este tipo de problemas con comportamiento lineal, la disipación numérica es una propiedad esencial en los algoritmos de integración. Newmark, en 1959, ha incluido la disipación numérica para las frecuencias más altas utilizando pasos de tiempos moderados. La desventaja de dicha inclusión fue la pérdida de la precisión de segundo orden del algoritmo. Sin embargo, en los 70 HILBER et al [1977] propusieron una modificación que recuperaba

la precisión de segundo orden. Este algoritmo fue denominado *Método α de Hilber*. Este método combina la estabilidad incondicional, la precisión de segundo orden y la disipación numérica para las altas frecuencias en el análisis dinámico lineal. Por otra parte, para problemas no-lineales diversos autores han propuestos algoritmos que incorporan las tres propiedades anteriormente comentadas, a través de diferentes ideas y modelos de disipación numérica; por ejemplo, ver las referencias ARMERO & PETŐCZ [1996], [1998], CRISFIELD et al [1996a], CRISFIELD et al [1997b]. Estos autores han desarrollado un modelo de disipación numérica para el *método de energía-momentum* que será aquí denominado el *método de energía-momentum modificado*.

Por otra parte, para superar los obstáculos presentados por el *método de energía con restricción*, KUHL & RAMM [1996a,1996b] han combinado la estrategia de Newmark, que presenta una disipación numérica arbitraria, con la imposición de conservación de la energía, del momentum lineal y angular del *método de energía con restricción*. Dicha modificación ha resultado en un algoritmo que presenta una disipación numérica controlable para las altas frecuencias, bien como, una disipación numérica mínima para las frecuencias más bajas, características que se presentan en el *método α generalizado* propuesto por CHUNG & HULBERT [1993].

1.3 Objetivos del trabajo

Teniendo en cuenta los comentarios de los apartados anteriores, un esquema de integración en el tiempo para el análisis dinámico no-lineal debe presentar las siguientes características:

1. Disipación numérica mínima para frecuencias bajas;
2. Disipación numérica máxima para frecuencias altas;
3. Conservación de la energía de deformación y cinética;
4. Conservación del momentum lineal y angular.

Por tanto, adoptando esquemas de integración temporal que mantienen las propiedades óptimas de disipación numérica, el objetivo de este trabajo es incorporar en dichos esquemas modelos teóricos de conservación de la energía y del momentum lineal y angular, utilizando los siguientes algoritmos:

1. La regla de trapecio - RT;
La regla del punto medio - RPM;
2. El método de Newmark - MN;
El método α de Hilber - $M\alpha H$;
El método α de Bossak - $M\alpha B$;
El método α generalizado - $M\alpha G$;
3. El método energía-momentum - MEM;
El método energía-momentum modificado - MEM+ ξ ;
El método energía-momentum generalizado - MEMG;
El método energía-momentum generalizado modificado - MEMG+ ξ .

Por otra parte, en los *métodos α generalizados* se hará una análisis espectral para la obtención de valores óptimos para los parámetros de integración α_m , α_f , β y γ , con el objetivo de proponer pasos de tiempo que puedan garantizar la estabilidad del esquema de integración y la disipación numérica para frecuencias más altas em régimen no-lineal.

Se aplicará estos algoritmos en la obtención de la respuesta dinámica no-lineal de

sistemas discretizados por elementos de barras articulados tanto el plano (2D) cuanto en el espacio (3D). Se utilizará la formulación Lagrangiana Total para describir el movimiento del elemento de barra que puede estar sujeto a grandes translaciones y grandes rotaciones de cuerpo rígido. Se adoptará la medida de deformación ingenieril y las propiedades mecánicas del material de Saint Venant Kirchhoff. La formulación del elemento aquí descrito para otros tipos de deformaciones se encuentra detallada en la referencia SILVA [2001].

1.4 Contenido del trabajo

Para la materialización de los objetivos enumerados en el punto anterior, este trabajo se estructura en siete apartados. En el apartado 2 se discute brevemente los conceptos teóricos de los métodos explícito y implícito. En el apartado 3 se describe la ecuación de movimiento no-lineal del péndulo simple con un grado de libertad. En este apartado se presenta la estructura del algoritmo de Newmark y de los métodos α generalizados para la resolución de problemas no-lineales. En el apartado 4 se presenta la ecuación de movimiento no-lineal considerando dos grados de libertad para describir el comportamiento del péndulo. En este apartado, se deduce las expresiones analíticas del vector de fuerzas internas y de la matriz de rigidez tangente. En el apartado 5 se utiliza el elemento de barra bi-articulado en el espacio para deducir la ecuación de movimiento no-lineal para problemas con varios grados de libertad. En este apartado se presenta las expresiones del vector de fuerzas internas y de la matriz de rigidez tangente para diferentes algoritmos de integración en el tiempo. También, se presenta la estructura del algoritmo de Newmark y de los métodos α generalizados para problemas con varios grados de libertad. En este apartado se detallan los métodos de energía-momentum y algunas modificaciones propuestas en la literatura técnica internacional. En el apartado 6 se presentan los resultados numéricos obtenidos con los algoritmos descritos en los apartados anteriores para el péndulo simple (rígido) y elástico. En este apartado se discute detalladamente el comportamiento de cada algoritmo descrito en el apartado 6. Por último, se presentan las conclusiones generales.

2 Solución explícita-implícita

En este apartado se presenta de manera sucinta los conceptos que fundamentan los métodos explícito y implícito para la obtención de la respuesta transiente de la ecuación del movimiento. Para mayores detalles consultar el capítulo 3 de la referencia OLLER [2002], el capítulo 7 de la referencia GÉRADIN & RIXEN [1997], el capítulo 10 de la referencia GÉRADIN & CARDONA [2001] y el capítulo 9 de las referencias BATHE [1996] y HUGHES [1987].

La solución en el tiempo de la ecuación del movimiento puede obtenerse siguiendo una estrategia de solución implícita o explícita. Esto es, si la respuesta en el instante actual $t + \Delta t$ depende complementamente de la solución en el paso previo t , se tiene una solución explícita, pero si la solución actual depende de la velocidad y aceleración en el instante actual $t + \Delta t$, se tiene una solución implícita. A modo de ejemplo se adopta la siguiente ecuación $\mathbf{A}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t), t) - \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) = \mathbf{0}$. A través de esta ecuación puede explicarse en forma simple el concepto sobre solución implícita-explícita diciendo que, dada la solución

en desplazamientos y velocidades en un tiempo t , se obtiene en un tiempo posterior $t + \Delta t$, la siguiente solución,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t + \Delta t) &= \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t + \alpha \Delta t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) &= (1 - \alpha) \dot{\mathbf{u}}(t) + \alpha \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)\end{aligned}\tag{2}$$

donde α es un parámetro que permite obtener una solución:

- **Explícita** en la que se formula el equilibrio en el instante t , con $\alpha = 0$ (forward Euler). Se obtiene el desplazamiento en el paso posterior dependiente de la velocidad y el desplazamiento en el anterior.
- **Implícita** en la que se plantea el equilibrio en el instante $t + \Delta t$ con $\alpha = 1$ (backward Euler). Se obtiene el desplazamiento en el paso posterior dependiente de la velocidad en tiempo actual y el desplazamiento en el paso anterior.

Haciendo una comparación entre una solución en el tiempo explícita y otra implícita, resultan los siguientes tópicos, que deben matizarse según el problema que se esté resolviendo,

Integración temporal explícita:

Se requiere poco tiempo de cálculo para cada paso de tiempo

- El algoritmo de solución es simple tanto en su lógica como en su estructura, por lo tanto permite un tratamiento simple de las distintas no linealidades;
- Requiere menos esfuerzo computacional en cuanto al almacenamiento en memoria;
- No necesita de operadores tangentes costosos de obtener y que son propios de los métodos implícitos;
- Los métodos explícitos ofrecen algoritmos confiables;
- El incremento de tiempo en la solución está acotado y normalmente resulta muy pequeño haciendo difícil la solución de problemas que se desarrollan en dominios del tiempo muy grandes.

Integración temporal implícita:

Son métodos muy estables y robustos,

- Los incrementos de tiempos pueden ser mucho más grandes que en los métodos explícitos, conservando la estabilidad en la solución;
- Permiten soluciones más exactas, ajustando mucho la solución mediante tolerancias de error muy bajas;
- Una relativa desventaja está en la linealización de la solución que suele llevarse a cabo mediante Newton-Raphson y esto exige operadores tangentes que en muchos casos son de difícil obtención;
- Otra desventaja puede encontrarse en el gran requerimiento de almacenamiento en caso de utilizarse métodos directos de solución del sistema de ecuaciones.

Debido a la robutez que ofrece en la solución los métodos implícitos, se orientará el resto de este trabajo a presentar sus particularidades frente a problemas con no linealidades geométricas. Por otro lado, hay distintas maneras de formular un integrador implícito en el tiempo. Entre los procedimientos mas comunes están los métodos de *integración de un paso*, al que pertenece la familia de métodos tipo Newmark. También

hay *métodos multipasos*, como lo son la familia de métodos tipo Houbolt, que tienen más precisión a cambio de mantener almacenada mayor información, razón que los hace más caro en término de cálculo computacional.

3 El péndulo simple - 1 grado de libertad

La formulación analítica de la ecuación no-lineal del péndulo simple aquí descrita se encuentra detallada en los Capítulos 1 y 5 de las referencias ABELL & BRASELTON [2004] y GERÁDIN & RIXEN [1997], respectivamente.

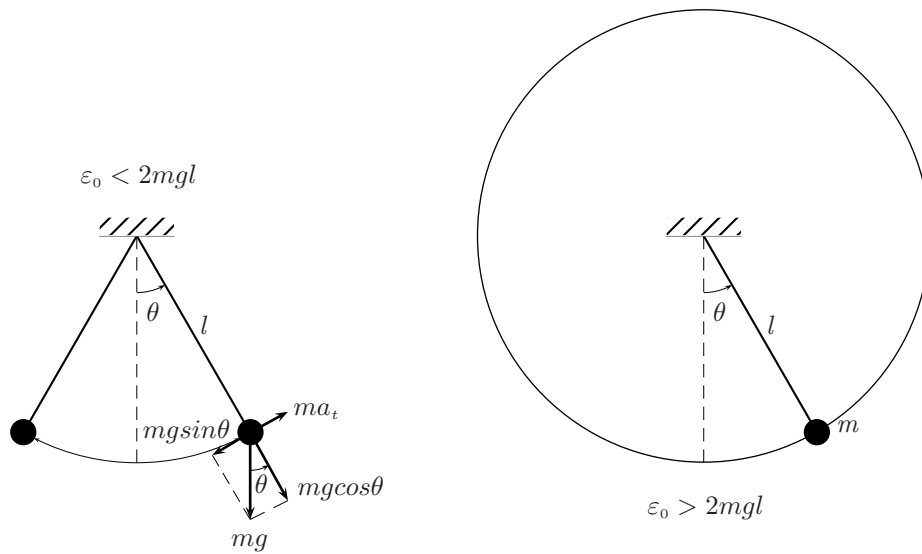


Figura 2. El péndulum simple no-lineal

La ecuación no-lineal del movimiento del péndulo simple se obtiene a través de la segunda Ley de Newton, $\sum F_t = ma_t$, que se aplica en el punto de masa m de acuerdo con la Figura 2a, donde F_t es la fuerza tangencial y a_t la aceleración tangencial. Por otra parte, teniendo en cuenta que $a_t = l\ddot{\theta}$, dicha ecuación se escribe como

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (3)$$

donde θ es el desplazamiento angular y $\ddot{\theta}$ la aceleración angular. Notese que la no linealidad de la ecuación de movimiento surge por el término $\sin\theta$. Teniendo en cuenta que la máxima energía potencial del sistema es $\varepsilon_0 = 2mgl$, dos situaciones distintas pueden ocurrir dependiendo de la energía inicial introducida en el sistema. Si se introduce una energía inicial de $\varepsilon_0 < 2mgl$, el péndulo oscilará con ángulos acotados por el límite $\theta < 2\pi$, ver la Figura 2a. Por otra parte, si se introduce una energía inicial de $\varepsilon_0 > 2mgl$, el péndulo irá girar conforme se muestra en la Figura 2b. En ambos casos las frecuencias de oscilación del desplazamiento, de la velocidad y de la aceleración angulares son bajas conforme se muestra en las Figuras 4b y 5c, respectivamente. Debido a ello los algoritmos de integración temporal cuando se aplican a la ecuación (3) tienen un comportamiento estable desde el punto de vista numérico aunque el problema sea no-lineal.

3.1 Discretización temporal

Para discretizar en el tiempo la ecuación (3) se utilizará el método de Newmark y el método α generalizado que se detallan en los apartados siguientes.

3.1.1 El método de Newmark

De acuerdo con el método de Newmark, la velocidad y el desplazamiento angulares en el paso de tiempo $n + 1$ se describen como

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{n+1} &= \dot{\theta}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\theta}_n + \gamma\Delta t\ddot{\theta}_{n+1} \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta t\dot{\theta}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\theta}_n + \beta\Delta t^2\ddot{\theta}_{n+1}\end{aligned}\quad (4)$$

De la ecuación (4) se define la predicción de la velocidad y del desplazamiento angulares, en función de las variables conocidas en el paso de tiempo anterior n , como

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{n+1}^* &= \dot{\theta}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\theta}_n \\ \theta_{n+1}^* &= \theta_n + \Delta t\dot{\theta}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2\ddot{\theta}_n\end{aligned}\quad (5)$$

Introduciendo las variables predichas $\dot{\theta}_{n+1}^*$ y θ_{n+1}^* en la ecuación (4), se obtiene que

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{n+1} &= \dot{\theta}_{n+1}^* + \gamma\Delta t\ddot{\theta}_{n+1} \\ \theta_{n+1} &= \theta_{n+1}^* + \beta\Delta t^2\ddot{\theta}_{n+1}\end{aligned}\quad (6)$$

Utilizando la ecuación (6) se puede escribir la velocidad y aceleración angulares en función de los desplazamientos, θ_{n+1} y θ_{n+1}^* , del modo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{n+1} &= \dot{\theta}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\theta_{n+1} - \theta_{n+1}^*) \\ \ddot{\theta}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\theta_{n+1} - \theta_{n+1}^*)\end{aligned}\quad (7)$$

Por otra parte, la forma discreta de la ecuación no lineal del péndulo simple en el paso de tiempo $n + 1$ se define como $\ddot{\theta}_{n+1} + \frac{g}{l}\sin\theta_{n+1} = 0$. Se puede escribir dicha ecuación en función de los desplazamientos utilizando la ecuación (7). Una vez que dicha ecuación es no lineal, su forma discreta genera fuerzas desequilibradas o residuales que se definen como

$$r(\theta_{n+1}) = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\theta_{n+1} - \theta_{n+1}^*) + \frac{g}{l}\sin\theta_{n+1} \neq 0 \quad (8)$$

Como tratase de un problema no lineal es necesario utilizar un procedimiento incremental-iterativo a lo largo del tiempo. Esto se hace a través de la linealización de la ecuación

residual definida en (8). Por lo tanto, expandiendo en serie de Taylor hasta los términos de primer orden el residuo en la iteración k , se obtiene la siguiente expresión para el residuo en la iteración $k + 1$

$$r(\theta_{n+1}^{k+1}) = r(\theta_{n+1}^k) + \frac{dr(\theta_{n+1}^k)}{d\theta_{n+1}} \Delta\theta^k + \mathcal{O}(\Delta\theta^k)^2 = 0 \quad (9)$$

Imponiendo que el residuo r_{n+1}^{k+1} sea nulo, se obtiene el incremento del desplazamiento angular del siguiente modo

$$\Delta\theta^k = -\frac{r(\theta_{n+1}^k)}{k(\theta_{n+1}^k)} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (8), la matriz tangente iterativa k_{n+1}^k se expresa como

$$k(\theta_{n+1}^k) = \frac{dr(\theta_{n+1}^k)}{d\theta_{n+1}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} + \frac{g}{l} \cos\theta_{n+1}^k \quad (11)$$

Finalmente, se actualizan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angulares, en la iteración $k + 1$, en función de la corrección $\Delta\theta^k$ obtenida en (10). Dicha actualización, teniendo en cuenta la ecuación (7), se expresa como

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}^{k+1} &= \theta_{n+1}^k + \Delta\theta^k \\ \dot{\theta}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\theta}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \Delta\theta^k \\ \ddot{\theta}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\theta}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta\Delta t^2} \Delta\theta^k \end{aligned} \quad (12)$$

El esquema incremental-iterativo utilizando el método de Newmark se encuentra detallado en el diagrama de bloques de la Figura 3.

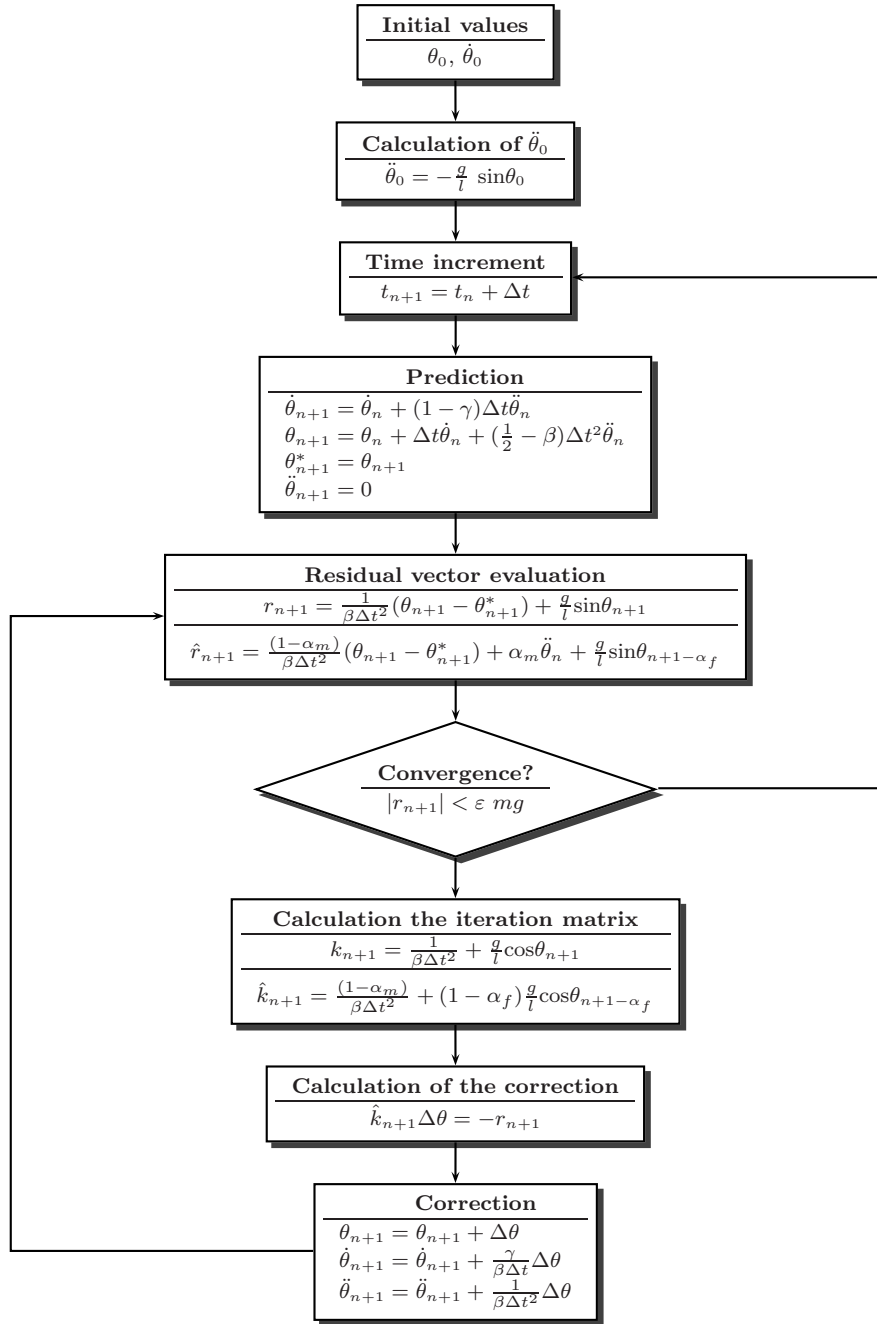


Figura 3. Esquema de integración de Newmark para sistemas no-lineales con 1 grado de libertad

3.1.2 El método α generalizado

En el método α generalizado se asume que la aceleración, la velocidad y el desplazamiento angulares serán evaluados a través del promedio ponderado de esas mismas variables calculadas en los pasos de tiempo n y $n + 1$, de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_{n+1-\alpha_m} &= (1 - \alpha_m)\ddot{\theta}_{n+1} + \alpha_m\ddot{\theta}_n \\
\dot{\theta}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\dot{\theta}_{n+1} + \alpha_f\dot{\theta}_n \\
\theta_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\theta_{n+1} + \alpha_f\theta_n
\end{aligned} \tag{13}$$

donde α_m y α_f son los parámetros de ponderación. Como el método α generalizado se basa en el esquema de integración de Newmark, descrito en el apartado anterior, las modificaciones que se introducen en el proceso incremental-iterativo son muy simples como se muestra a continuación.

En primer lugar, se escribe la ecuación no lineal del péndulo simple en el punto medio generalizado que se expresa como

$$\ddot{\theta}_{n+1-\alpha_m} + \frac{g}{l}\sin\theta_{n+1-\alpha_f} = 0 \tag{14}$$

Por otra parte, se obtiene la aceleración y la velocidad en el punto medio generalizado en función del desplazamiento obtenido en el paso $n + 1$, sustituyendo la ecuación (7) en (13), tal que, se llega a la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)\dot{\theta}_{n+1}^* + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}(\theta_{n+1} - \theta_{n+1}^*) + \alpha_f\dot{\theta}_n \\
\ddot{\theta}_{n+1-\alpha_m} &= \frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}(\theta_{n+1} - \theta_{n+1}^*) + \alpha_m\ddot{\theta}_n
\end{aligned} \tag{15}$$

La fuerza residual modificada resulta de la sustitución de la ecuación (15) en (14) que se escribe como

$$\hat{r}(\theta_{n+1}^k) = \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta\Delta t^2}(\theta_{n+1}^k - \theta_{n+1}^*) + \alpha_m\ddot{\theta}_n + \frac{g}{l}\sin\theta_{n+1-\alpha_f}^k \tag{16}$$

Por fin, la matriz tangente iterativa modificada resulta de la linealización de la fuerza residual dada por (16) en el paso de tiempo $n + 1$. La expresión de dicha matriz se escribe como

$$\hat{k}(\theta_{n+1}^k) = \frac{dr(\theta_{n+1}^k)}{d\theta_{n+1}} = \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta\Delta t^2} + (1 - \alpha_f)\frac{g}{l}\cos\theta_{n+1-\alpha_f}^k \tag{17}$$

Las modificaciones aquí introducidas se encuentran detalladas en el diagrama de bloque de la Figura 3.

3.2 Análisis numérico

En este apartado se hace el análisis dinámico no-lineal del péndulo simple utilizando el método de Newmark con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{4}$. Se ha adoptado una tolerancia de $TOL = 10^{-5}$

para la convergencia y el paso de tiempo igual a $\Delta t=0.1$ s. Los datos aquí descritos fueran tomados del capítulo 9 de la referencia BATHE [1996]. Por lo tanto, para la longitud, la masa del péndulo y la aceleración de la gravedad se asumen los valores de $l=3.0443$ m, $m=10$ Kg y 9.8 ms^{-2} , respectivamente. La energía potencial total del sistema es $2mgl=596.68$ Nm.

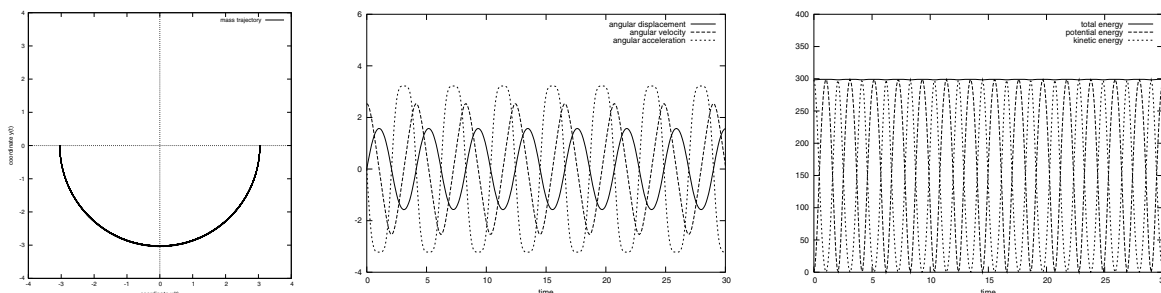


Figura 4. El péndulo simple ($\varepsilon_0 < 2mgl$). Solución obtenida con el esquema de Newmark.

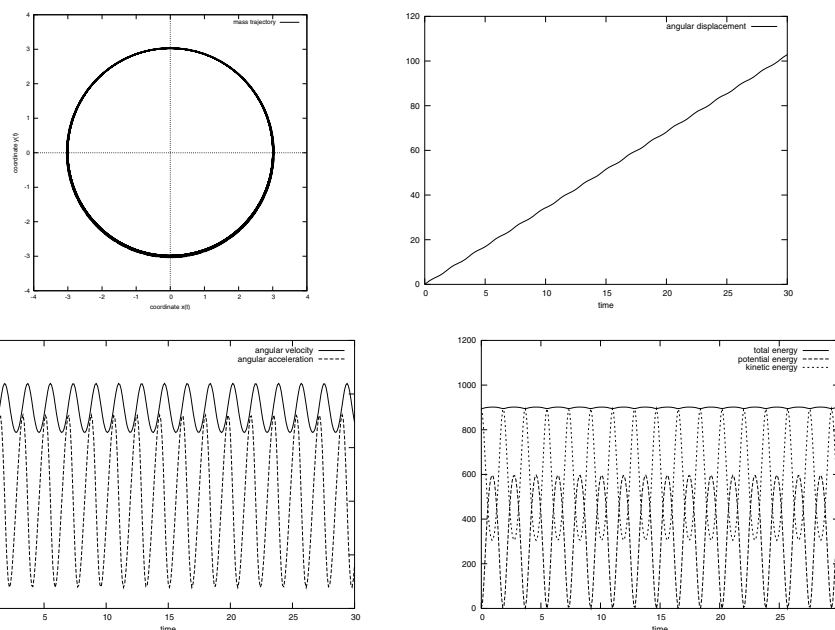


Figura 5. (El péndulo simple $\varepsilon_0 > 2mgl$). Solución obtenida con el esquema de Newmark.

Se ha simulado dos situaciones distintas en un intervalo de tiempo de 30 s. La posición inicial del péndulo es $x=0$ y $y=-3.0443$ m. Para ambos casos, se ha supuesto la aceleración angular inicial nula, $\ddot{\theta}_0 = 0$. En la primera simulación numérica, se ha introducido una energía inicial $\varepsilon_0 = mgl=298.34$ Nm $< 2mgl$, lo que implica en una velocidad angular inicial $\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}=2.54$ s^{-1} , que se aplica en la extremidad libre del péndulo. Consecuentemente, la trayectoria del péndulo oscila sobre una semi-circunferencia como se muestra en la Figura 4a. Por otra parte, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración angulares oscilan a baja frecuencia como se detalla en la Figura 4b, y en la Figura 4c se muestra la conservación de la energía total. Mientras que en la segunda simulación, se ha introducido

una energía inicial $\varepsilon_0 = 3mgl=895.02 \text{ Nm} > 2mgl$, lo que corresponde a una velocidad angular inicial $\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{6g}{l}}=4.39 \text{ s}^{-1}$. Como consecuencia el péndulo gira indefinidamente sobre una circunferencia como se muestra en la Figura 5a. En la Figura 5b se muestra el crecimiento casi lineal del desplazamiento angular, mientras que en la Figura 5c se muestra la oscilación a baja frecuencia de la velocidad y de la aceleración angulares. Por fin, en la Figura 4d se muestra la conservación de la energía total del sistema. Cabe comentar que el método de Newmark ha obtenido buenos resultados aunque la respuesta del péndulo sea no lineal porque dicha respuesta ocurre a bajas frecuencias. Por ello, se ha obtenido la conservación de la energía del sistema en el intervalo de tiempo del análisis.

4 El péndulo elástico - 2 grados de libertad

En este apartado se describe la ecuación de movimiento no-lineal del péndulo con dos grados de libertad. La respuesta de dicho sistema se caracteriza por la presencia de movimientos angulares a baja frecuencia, mientras que en la dirección axial del péndulo ocurre una oscilación a alta frecuencia. Por ello, los algoritmos estandar de integración temporal fallan en la obtención de la respuesta de estos sistemas. En los apartados posteriores se discutirán estos fallos y se va proponer modificaciones en el esquema de Newmark para superar esta limitación.

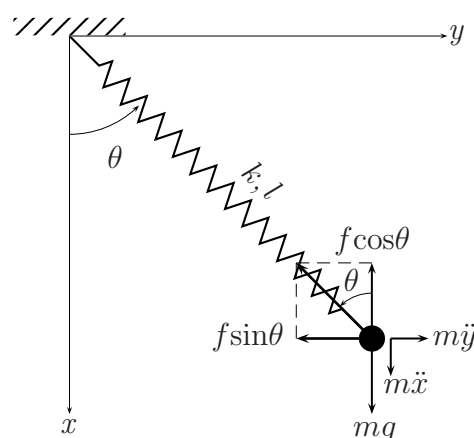


Figura 6. El péndulo elástico no-lineal

Por otra parte, el objetivo en este apartado es la obtención de las expresiones analíticas del vector de fuerzas internas y de la matriz de rigidez tangente al adoptar dos grados de libertad para describir la ecuación de movimiento del péndulo. Para mayores detalles consultar el capítulo 7 de la referencia GÉRADIN & RIXEN [1997]. Por lo tanto, sea $l_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ la longitud inicial del péndulo y $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ la longitud en el paso tiempo actual, como se muestra en la Figura 6. La dirección del péndulo en el instante actual viene dada por los cosenos directores que se escribe como $\sin\theta = \frac{y}{l}$ y $\cos\theta = \frac{x}{l}$. Por otra parte, k denota la rigidez del péndulo. La fuerza desarrollada en el muelle durante el movimiento del péndulo se expresa como $f = k(l - l_0)$.

La ecuación no lineal del péndulo elástico se obtiene utilizando la segunda Ley de Newton, $\sum \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$, que se aplica en el punto de masa m de acuerdo con la Figura 6. Dicha ecuación en coordenadas cartesianas se expresa como

$$\begin{aligned}\sum F_x &= m\ddot{x} \longrightarrow m\ddot{x} + k(l - l_0)\frac{x}{l} - mg = 0 \\ \sum F_y &= m\ddot{y} \longrightarrow m\ddot{y} + k(l - l_0)\frac{y}{l} = 0\end{aligned}\quad (18)$$

Por otra parte, la forma matricial de la ecuación (18) se escribe como

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + k\frac{(l - l_0)}{l} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} mg \\ 0 \end{Bmatrix}\quad (19)$$

o en forma compacta como $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{\text{ext}}$, donde \mathbf{M} es la matriz de masa, \mathbf{f}^{int} es el vector de fuerzas internas y \mathbf{f}^{ext} es el vector de fuerzas externas. Notese que el vector de fuerzas internas depende de la longitud del péndulo y de sus cosenos directores en la configuración deformada, por tanto, este término introduce la no linealidad geométrica a la ecuación de movimiento del péndulo elástico. Por otra parte, el vector de fuerzas residuales se define como $\mathbf{r} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^{\text{ext}} \neq \mathbf{0}$. La matrices de rigidez tangente y iterativa resultan de la linealización del vector de fuerzas residuales como se ha comentado en los apartados anteriores. Al derivar el vector de fuerzas internas respecto a las coordenadas actualizadas se obtiene la expresión de la matriz de rigidez tangente que se expresa como

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}^t = \begin{bmatrix} k(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{l_0 x^2}{l^3}) & k\frac{l_0 xy}{l^3} \\ k\frac{l_0 xy}{l^3} & k(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{l_0 y^2}{l^3}) \end{bmatrix}\quad (20)$$

Notese que para la hipótesis de $k \rightarrow \infty$, el vector de fuerzas internas en (19) se anula, pues $l \rightarrow l_0$ y la matriz de rigidez tangente se torna singular, $\det \mathbf{K}^t \rightarrow 0$, por tanto, se obtiene la ecuación del péndulo simple dada en (3).

Por último, a través del método de Newmark se puede expresar la aceleración en función del desplazamiento como $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{n+1}^*)$, de acuerdo con la ecuación (7). Teniendo en cuenta esta expresión y la ecuación (19), al linealizarse el vector de fuerzas residuales se obtiene la siguiente expresión para la matriz tangente iterativa

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} = \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}^t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} k(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{l_0 x^2}{l^3}) & k\frac{l_0 xy}{l^3} \\ k\frac{l_0 xy}{l^3} & k(1 - \frac{l_0}{l} + \frac{l_0 y^2}{l^3}) \end{bmatrix} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\quad (21)$$

Notese que la linealización del vector de fuerzas residuales en el paso de tiempo $n + 1$ se expresa como $\frac{\partial \mathbf{r}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} + \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}}$.

5 Elemento de barra bi-articulado

En este apartado se describe la discretización por el método dos elementos finitos del elemento de barra bi-articulado 3D. La descripción cinemática aquí descrita se encuentra

detallada en la referencia SILVA [2001]. Considérese un elemento finito de barra articulado que se mueve en el espacio de acuerdo con la Figura 7. Se define \mathcal{C}_0 como la configuración *inicial* cuya posición viene dada por las coordenadas materiales \mathbf{X} . Por otra parte, \mathcal{C} es la configuración *actual* cuya posición se define a través de las coordenadas espaciales \mathbf{x} . El movimiento del elemento entre \mathcal{C}_0 y \mathcal{C} se expresa a través del vector de desplazamientos \mathbf{u} . La relación entre los vectores \mathbf{X} , \mathbf{x} y \mathbf{u} viene dada por $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}$.

En la configuración *inicial* se denota la longitud del elemento como l_0 , el área de la sección transversal como A_0 y la densidad como ρ_0 . El volumen en dicha configuración se expresa como $V_0 = A_0 l_0$. Por otra parte, l denota la longitud del elemento en la configuración *actual*. A es el área, ρ expresa la densidad y el volumen en dicha configuración viene dado por $V = Al$. La relación entre las áreas A_0 y A viene dada por, CRISFIELD [1991],

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{2\nu}, \quad \begin{cases} \text{si } \nu = 0 \implies A_0 = A \\ \text{si } \nu = 1/2 \implies V_0 = V \end{cases} \quad (22)$$

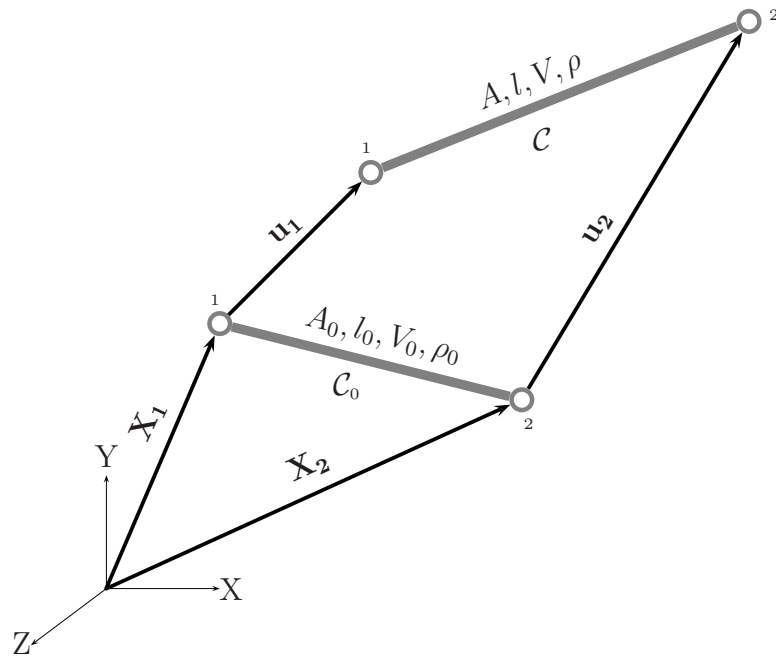


Figura 7. Movimiento del elemento de barra bi-articulado en el espacio

donde ν es el coeficiente de poisson. La relación entre los demás parámetros viene dada por el principio de conservación de la masa que permite escribir que: $\rho_0 l_0 A_0 = \rho l A$. Teniendo en cuenta la ecuación (22) se reescribe dicho principio como

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{l}{l_0}\right)^{1-2\nu}, \quad \begin{cases} \text{si } \nu = 0 \implies \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{l}{l_0} \\ \text{si } \nu = 1/2 \implies \frac{\rho_0}{\rho} = 1 \end{cases} \quad (23)$$

En este trabajo se adopta $\nu = 0$, por tanto, a lo largo del movimiento del elemento el área se mantiene constante. A continuación se formula la descripción cinemática

del elemento de barra articulado en 3D. En el espacio la longitud del elemento en las configuraciones \mathcal{C}_0 y \mathcal{C} se escribe del siguiente modo

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{(X_{21})^2 + (Y_{21})^2 + (Z_{21})^2} \\ l &= \sqrt{(X_{21} + u_{21})^2 + (Y_{21} + v_{21})^2 + (Z_{21} + w_{21})^2} \end{aligned} \quad (24)$$

donde

$$\begin{aligned} X_{21} &= X_2 - X_1, & u_{21} &= u_2 - u_1 \\ Y_{21} &= Y_2 - Y_1, & v_{21} &= v_2 - v_1 \\ Z_{21} &= Z_2 - Z_1, & w_{21} &= w_2 - w_1 \end{aligned} \quad (25)$$

Por otra parte, los cosenos directores del elemento en la configuración deformada se escriben como

$$\begin{aligned} \cos\theta_X &= c_X = \frac{X_{21} + u_{21}}{l} = \frac{x_{21}}{l} \\ \cos\theta_Y &= c_Y = \frac{Y_{21} + v_{21}}{l} = \frac{y_{21}}{l} \\ \cos\theta_Z &= c_Z = \frac{Z_{21} + w_{21}}{l} = \frac{z_{21}}{l} \end{aligned} \quad (26)$$

En las ecuaciones (24), (25) y (26) se definen las variables cinemáticas que expresan el movimiento del elemento de barra articulado 3D. A partir de ellas se obtienen el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente en función del tipo de deformación que se adopte. Se obtienen el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente a través de las derivadas primera y segunda del funcional de la energía de deformación respectivamente. Así, se calculan las derivadas primera y segunda de la longitud del elemento en la configuración deformada respecto a los desplazamientos nodales \mathbf{u} . Teniendo en cuenta las ecuaciones (24b), (26) y la relación $c_X^2 + c_Y^2 + c_Z^2 = 1$, dichas derivadas se expresan como

$$\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} = \left\{ \begin{array}{c} -\cos\theta_X \\ -\cos\theta_Y \\ -\cos\theta_Z \\ \cos\theta_X \\ \cos\theta_Y \\ \cos\theta_Z \end{array} \right\} \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} (c_Y^2 + c_Z^2) & -c_X c_Y & -c_X c_Z & -(c_Y^2 + c_Z^2) & c_X c_Y & c_X c_Z \\ -c_X c_Y & (c_X^2 + c_Z^2) & -c_Y c_Z & c_X c_Y & -(c_X^2 + c_Z^2) & c_Y c_Z \\ -c_X c_Z & -c_Y c_Z & (c_X^2 + c_Y^2) & c_X c_Z & c_Y c_Z & -(c_X^2 + c_Y^2) \\ -(c_Y^2 + c_Z^2) & c_X c_Y & c_X c_Z & (c_Y^2 + c_Z^2) & -c_X c_Y & -c_X c_Z \\ c_X c_Y & -(c_X^2 + c_Z^2) & c_Y c_Z & -c_X c_Y & (c_X^2 + c_Z^2) & -c_Y c_Z \\ c_X c_Z & c_Y c_Z & -(c_X^2 + c_Y^2) & -c_X c_Z & -c_Y c_Z & (c_X^2 + c_Y^2) \end{bmatrix} \quad (28)$$

Notese que $\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)$ es un vector cuyas componentes son los cosenos directores definidos en la ecuación (26). Por otra parte, $\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2}\right)$ denota una matriz con componentes también dadas en función de los cosenos directores.

5.1 Ecuación no-lineal del movimiento

En este apartado para escribir la ecuación del movimiento se consideran las fuerzas inercial, interna y externa dependientes del tiempo. Las fuerzas internas provienen de las deformaciones elásticas, además se las consideran independientes de las velocidades, es decir, que no se considera el efecto del amortiguamiento. Por otra parte, se asume que las fuerzas externas no dependen de los desplazamientos. Por tanto, el principio de los trabajos virtuales (PTV) en la configuración deformada descrito en coordenadas Lagrangianas \mathbf{u} materiales se expresa como

$$\frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + A_0 l_0 \delta \varepsilon E \varepsilon = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (29)$$

Suponiéndose la deformación infinitesimal o ingenieril, su variación virtual respecto a los desplazamientos se describe como

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} \longrightarrow \delta \varepsilon = \frac{\delta l}{l_0} \longrightarrow \delta l = \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)^T \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \longrightarrow \delta \varepsilon = \frac{1}{l_0} \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \quad (30)$$

Sustituyendo la variación virtual de la deformación en la expresión del PTV, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + E A_0 \varepsilon \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \delta \mathbf{u}^T \left(\frac{1}{2} \rho_0 A_0 l_0 \mathbf{I}_6 \ddot{\mathbf{u}}\right) + \delta \mathbf{u}^T \left(E A_0 \varepsilon \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right) &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (31)$$

Como la variación virtual de los desplazamientos es arbitraria, aplicando el PTV en la ecuación (31) se obtiene la ecuación no-lineal del movimiento descrita como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}(t), t) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) \quad (32)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de masa y \mathbf{f}^{int} es el vector de fuerzas internas que vienen definidos pelas siguientes expresiones, respectivamente,

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\rho_0 A_0 l_0 \mathbf{I}_6 \quad \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = EA_0 \varepsilon(\mathbf{u}) \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}) \quad (33)$$

Notese que la masa está concentrada en los nudos del elemento. Por otra parte, el vector de fuerzas internas depende de los desplazamientos a través de la deformación y de los cosenos directores del elemento definidos en la configuración deformada. Por tanto, las componentes de vector de fuerzas internas expresan una relación no lineal respecto a los desplazamientos.

5.2 Discretización temporal de la ecuación de movimiento

En este apartado se plantea la discretización en el tiempo de la ecuación de movimiento dada en (32). Se utilizará el método de Newmark como procedimiento básico. En el esquema de integración de Newmark se introducen nuevos métodos, como por ejemplo, el método α generalizado, el método de energía-momentum, el método de energía-momentum generalizado y el método de energía-momentum generalizado modificado. Cabe comentar que en la literatura tecnica se encuentra otras metodologías distintas de las propuestas aquí. Para mayores detalles consultar ARMERO & ROMERO [2001a], [2001b], [2003], ROMERO & ARMERO [2002]. En este trabajo se sigue la metodología propuesta por KUHLE & CRISFIELD [1999], KUHLE & RAMM [1996a], [1996b], [1998], [1999].

5.2.1 El método de Newmark

De acuerdo con el método de Newmark, la velocidad y el desplazamiento en el paso de tiempo $n + 1$ se describen como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{aligned} \quad (34)$$

De la ecuación (34) se define la predicción de la velocidad y del desplazamiento en función de las variables conocidas en el paso de tiempo anterior n , como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* &= \dot{\mathbf{u}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \mathbf{u}_{n+1}^* &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \end{aligned} \quad (35)$$

Utilizando las variables predichas en el paso de tiempo n a través de $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^*$ y \mathbf{u}_{n+1}^* , la velocidad y el desplazamiento en el paso de tiempo $n + 1$ se reescriben como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^* + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{aligned} \quad (36)$$

A través de la ecuación (36) se puede expresar la aceleración y la velocidad, en el paso de tiempo $n + 1$, en función de \mathbf{u}_{n+1} y \mathbf{u}_{n+1}^* , del modo siguiente

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*)\end{aligned}\tag{37}$$

Por otra parte, la forma discreta de la ecuación de movimiento en el paso de tiempo $n + 1$ se expresa como: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}$. Una vez definida la aceleración en función del desplazamiento a través de (37b), se puede reescribir la ecuación de movimiento del modo siguiente: $\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}$. Como se trata de un problema no-lineal, su forma discreta genera fuerzas desequilibradas o residuales que se expresan por medio de la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M}(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \neq \mathbf{0}\tag{38}$$

Para disipar las fuerzas residuales es necesario emplear una estrategia de solución incremental-iterativa a lo largo del tiempo. Por tanto, expandiendo en serie de Taylor hasta los términos de primer orden el residuo en la iteración k , se obtiene la siguiente expresión para el residuo en la iteración $k + 1$

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k) + \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial\mathbf{u}_{n+1}}\Delta\mathbf{u}^k + \mathcal{O}(\Delta\mathbf{u}^k)^2 = \mathbf{0}\tag{39}$$

Imponiendo que el residuo \mathbf{r}_{n+1}^{k+1} sea nulo, se puede despejar de la ecuación (39) el incremento de desplazamiento, con lo cual, se actualizará la aceleración, la velocidad y el desplazamiento en la iteración $k + 1$. Por otra parte, teniendo en cuenta la expresión (38), la matriz tangente iterativa $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}$ se define del modo siguiente

$$\frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial\mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\partial(\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}})^k}{\partial\mathbf{u}_{n+1}}, \quad \hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{\partial\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}^k)}{\partial\mathbf{u}_{n+1}}, \quad \mathbf{K}_{n+1}^t = \frac{\partial(\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}})^k}{\partial\mathbf{u}_{n+1}}\tag{40}$$

donde \mathbf{K}_{n+1}^t es la matriz de rigidez tangente que se obtiene a través de la derivada del vector de fuerzas internas, dado en (33b), respecto al vector de desplazamiento. Por tanto, la expresión en notación compacta de la matriz tangente iterativa se escribe como

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1}^t\tag{41}$$

Finalmente, se actualizan el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, en la iteración $k + 1$, en función de la corrección $\Delta\mathbf{u}^k$ obtenida en (39). Dicha actualización, teniendo en cuenta la ecuación (37), se expresa como

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{u}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{u}^k \\
\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u}^k \\
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^{k+1} &= \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}^k + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{u}^k
\end{aligned} \tag{42}$$

El esquema incremental-iterativo aquí descrito, utilizando el método de Newmark, se encuentra detallado en el diagrama de bloque de la Figura 8.

5.2.2 El método α generalizado

En el método α generalizado se asume que la aceleración, la velocidad, el desplazamiento, las fuerzas internas y las fuerzas externas sean calculados a través del promedio ponderado de sus respectivos valores en los pasos de tiempo n y $n+1$. De esta manera, las expresiones que definen dichas variables en el punto medio generalizado se escriben como

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} &= (1 - \alpha_m) \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_m \ddot{\mathbf{u}}_n \\
\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f) \dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \alpha_f \dot{\mathbf{u}}_n \\
\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f) \mathbf{u}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{u}_n \\
\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} &= (1 - \alpha_f) \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} + \alpha_f \mathbf{f}_n^{\text{ext}}
\end{aligned} \tag{43}$$

donde α_m y α_f son los parámetros de ponderación que representan la disipación numérica para altas frecuencias. Con relación a la definición del vector de fuerzas internas en el punto medio generalizado se discutirá en los próximos apartados.

Como el método α generalizado se basa en el esquema de integración de Newmark, descrito en el apartado anterior, las modificaciones que se introducen en el proceso incremental-iterativo son muy sencillas como se muestra a continuación.

En primer lugar, se obtiene la aceleración y la velocidad en el punto medio generalizado en función del desplazamiento obtenido en el paso $n+1$, sustituyendo las ecuaciones (37a) y (37b) en (43), tal que, se llega a la expresión siguiente

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f) \dot{\mathbf{u}}_{n+1}^* + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_f \dot{\mathbf{u}}_n \\
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} &= \frac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_m \ddot{\mathbf{u}}_n
\end{aligned} \tag{44}$$

Por otra parte, la forma discreta de la ecuación de movimiento en el punto medio generalizado se expresa del siguiente modo

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} \tag{45}$$

Se obtienen las fuerzas residuales modificada sustituyendo la ecuación (44b) en (45), lo que resulta en la siguiente expresión

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{M} \left(\frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n+1}^*) + \alpha_m \ddot{\mathbf{u}}_n \right) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} \neq \mathbf{0} \tag{46}$$

Por último, la matriz tangente iterativa modificada resulta de la linealización de las fuerzas residuales dadas por (46) respecto a los desplazamientos en el paso de tiempo $n + 1$. La expresión de dicha matriz se escribe como

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1-\alpha_f} = \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t, \quad \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t = \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \quad (47)$$

donde $\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t$ es la matriz de rigidez tangente obtenida a través de la derivada del vector de fuerzas internas, definido en el punto medio generalizado, respecto al vector de desplazamiento calculado en el paso de tiempo $n + 1$. Cabe comentar que hay distintas maneras de se obtener dicha matriz en función de la definición del vector de fuerzas internas. En los próximos apartados se presenta cuatro diferentes expresiones para el vector de fuerzas internas y para la matriz de rigidez tangente. Las modificaciones aquí introducidas se encuentran detalladas en el diagrama de bloque de la Figura 8.

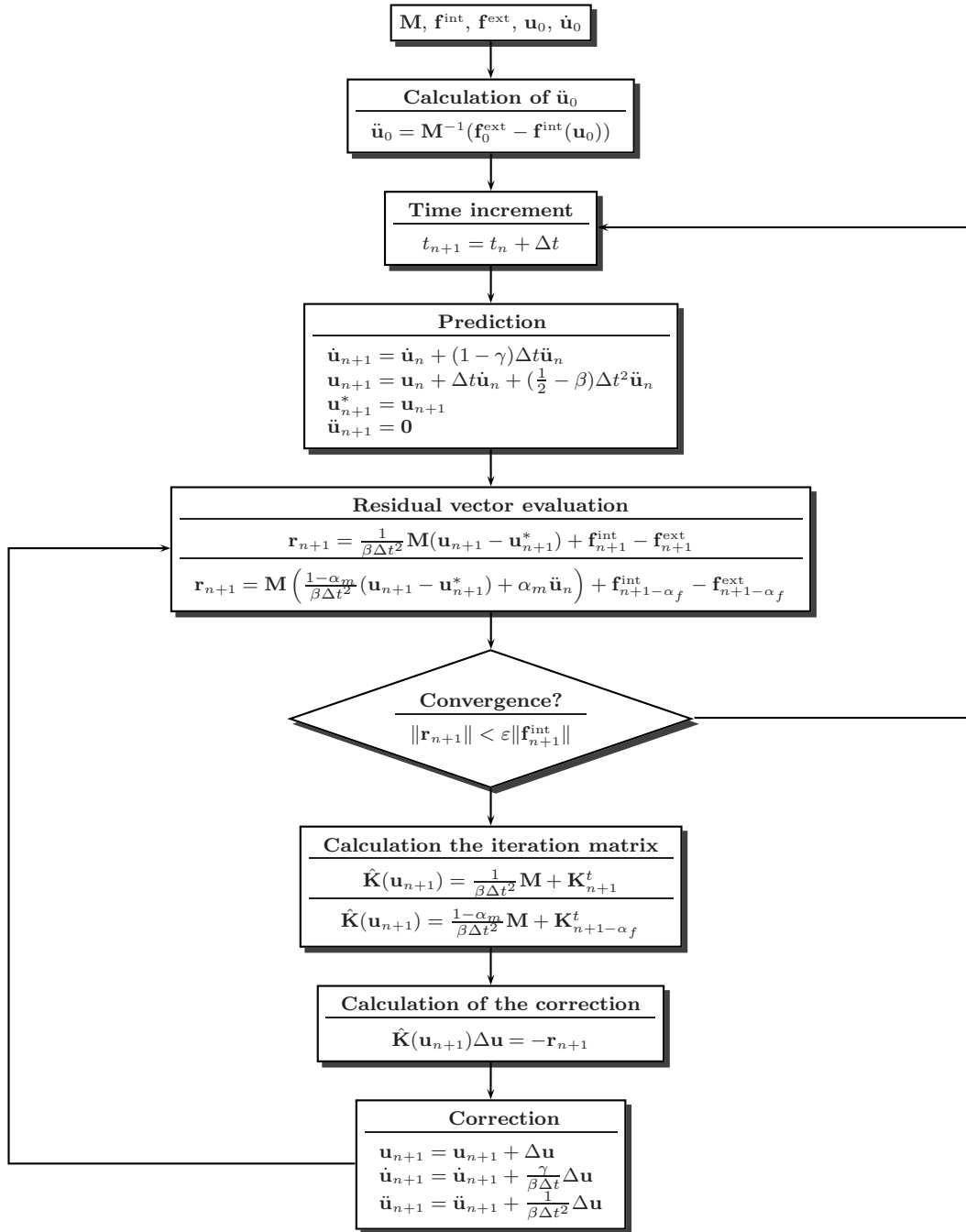


Figura 8. Esquema de integración de Newmark para sistemas no-lineales con varios grados de libertad

5.2.3 El vector de fuerzas internas y matriz de rigidez tangente - modo 1

Una de las maneras de escribir el vector de fuerzas internas en el punto medio generalizado es la que se sigue: $\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}} + \alpha_f\mathbf{f}_n^{\text{int}}$. Es decir, se toma el promedio ponderado de las fuerzas internas evaluadas en los pasos de tiempo n y $n + 1$. Por tanto, teniendo en cuenta la ecuación (33b) se puede escribir que

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) = (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1})\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1}) + \alpha_f EA_0\varepsilon(\mathbf{u}_n)\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_n) \quad (48)$$

o a través de la notación simplificada como

$$\boxed{\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon_{n+1} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + \alpha_f EA_0\varepsilon_n \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_n} \quad (49)$$

Notese que $\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}$ depende de las deformaciones y de los cosenos directores, del elemento de barra bi-articulado, evaluados en los extremos del intervalo de integración en el tiempo, además, del parámetro α_f .

La matriz de rigidez tangente se obtiene derivando la expresión (48) respecto al vector de desplazamientos calculado en el paso de tiempo $n + 1$. A continuación se muestran algunos pasos del desarrollo algebraico para la determinación de dicha matriz.

▷ derivadas

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = (1 - \alpha_f)EA_0\frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon_{n+1}\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \right) \quad (50)$$

▷ desarrollo algebraico

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} &= \frac{1}{l_0} \frac{\partial l_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = \frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \right) &= \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1} \end{aligned} \quad (51)$$

▷ expresión final

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t &= (1 - \alpha_f)\frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} + (1 - \alpha_f)EA_0\varepsilon_{n+1} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1} \\ &= (1 - \alpha_f)\mathbf{K}^t(\mathbf{u}_{n+1}) \end{aligned}} \quad (52)$$

Notese que la matriz de rigidez tangente (modo 1) depende de la deformación y de los cosenos directores, del elemento de barra bi-articulado, evaluados en el paso de tiempo $n + 1$, además, del parámetro α_f .

5.2.4 El vector de fuerzas internas y matriz de rigidez tangente - modo 2

La otra manera de escribir el vector de fuerzas internas se basa en la deformación calculada en el punto medio generalizado. Una vez más, teniendo en cuenta la ecuación (33b), se define el vector de fuerzas internas en función de la deformación generalizada del siguiente modo

$$\mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) = EA_0 \varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \quad (53)$$

o a través de la notación simplicada como

$$\boxed{\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f}} \quad (54)$$

donde, la deformación generalizada viene dada por

$$\varepsilon_{n+1-\alpha_f} = \frac{l_{n+1-\alpha_f} - l_0}{l_0} \quad (55)$$

la longitud generalizada se escribe como

$$l_{n+1-\alpha_f} = \sqrt{(X_{21} + u_{21n+1-\alpha_f})^2 + (Y_{21} + v_{21n+1-\alpha_f})^2 + (Z_{21} + w_{21n+1-\alpha_f})^2} \quad (56)$$

y los desplazamientos en el punto medio generalizado se describen según el método α generalizado como

$$\begin{aligned} u_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)u_{21n+1} + \alpha_f u_{21n} = (1 - \alpha_f)(u_{2n+1} - u_{1n+1}) + \alpha_f(u_{2n} - u_{1n}) \\ v_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)v_{21n+1} + \alpha_f v_{21n} = (1 - \alpha_f)(v_{2n+1} - v_{1n+1}) + \alpha_f(v_{2n} - v_{1n}) \\ w_{21n+1-\alpha_f} &= (1 - \alpha_f)w_{21n+1} + \alpha_f w_{21n} = (1 - \alpha_f)(w_{2n+1} - w_{1n+1}) + \alpha_f(w_{2n} - w_{1n}) \end{aligned} \quad (57)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (26), (27), (56) y (57), el vector que contiene los cosenos directores generalizados del elemento de barra bi-articulado, se escribe como

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} = \begin{pmatrix} -\cos\theta_{X_{n+1-\alpha_f}} \\ -\cos\theta_{Y_{n+1-\alpha_f}} \\ -\cos\theta_{Z_{n+1-\alpha_f}} \\ \cos\theta_{X_{n+1-\alpha_f}} \\ \cos\theta_{Y_{n+1-\alpha_f}} \\ \cos\theta_{Z_{n+1-\alpha_f}} \end{pmatrix} \quad (58)$$

donde los cosenos directores generalizados, de acuerdo con la ecuación (26), vienen dados por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \cos\theta_{X_{n+1-\alpha_f}} &= \frac{X_{21} + u_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \\ \cos\theta_{Y_{n+1-\alpha_f}} &= \frac{Y_{21} + v_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \\ \cos\theta_{Z_{n+1-\alpha_f}} &= \frac{Z_{21} + w_{21n+1-\alpha_f}}{l_{n+1-\alpha_f}} \end{aligned} \quad (59)$$

La matriz de rigidez tangente se obtiene derivando la expresión (53) respecto al vector de desplazamiento calculado en el paso de tiempo $n + 1$. A continuación se muestran algunos pasos del desarrollo algebraico para la determinación de dicha matriz.

▷ derivadas

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right) \quad (60)$$

▷ desarrollo algebraico

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} &= \frac{1}{l_0} \frac{\partial l_{n+1-\alpha_f}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = (1 - \alpha_f) \frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right) &= (1 - \alpha_f) \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f} \end{aligned} \quad (61)$$

▷ expresión final

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t &= (1 - \alpha_f) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + \\ &\quad + (1 - \alpha_f) EA_0 \varepsilon_{n+1-\alpha_f} \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f} \\ &= (1 - \alpha_f) \mathbf{K}^t(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \end{aligned} \quad (62)$$

Notese que la matriz de rigidez tangente (modo 2) depende de la deformación y de los cosenos directores, del elemento de barra bi-articulado, evaluados en el punto medio generalizado $n + 1 - \alpha_f$, además, del parámetro α_f . Por otra parte, teniendo en cuenta las ecuaciones (55), (56), (57), (58) y (59), se puede notar que la deformación y los cosenos directores generalizados dependen de los desplazamientos calculados en los pasos de tiempo n y $n + 1$ y del parámetro α_f . Por último, cabe comentar que si se utiliza los parámetros $\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$ en las expresiones (54) y (62), se obtiene el clásico método de la regla del punto medio.

5.2.5 El método energía-momentum generalizado

Motivado por la observación de la inestabilidad numérica en los esquemas de integración temporal en el análisis dinámico no-lineal SIMO y co-autores (LEWIS & SIMO [1994], SIMO & TARNOW [1992a], [1994], SIMO et al [1995], SIMO et al [1992b]) han propuesto el método de energía-momentum que conserva la energía y portanto cumple la condición de estabilidad (1). Dicho algoritmo tiene precisión de segundo orden además preserva la energía total, el momentum lineal y el momentum angular. Sin embargo, KUHLE & RAMM [1996a], [1996b] han observado problemas de convergencia al analizar el fenómeno *snap-through* en láminas cilíndricas cuya respuesta contiene modos de alta frecuencia. En este caso ha sido necesario utilizar pequeños pasos de tiempo para obtener una solución estable. Para superar dichos

problemas KUHL & CRISFIELD [1999], dentre otros, han extendido dicha formulación dentro de la estrategia del método α generalizado para incorporar la disipación numérica en altas frecuencias. Estos autores han denominado este algoritmo como el método de energía-momentum generalizado.

5.2.6 El método energía-momentum

Para mayores detalles sobre este método consultar las referencias SIMO et al [1995], SIMO & TARNOW [1992a], SIMO & TARNOW [1994], SIMO et al [1992b], SIMO & WONG [1991]. El método de energía-momentum se basa en la deformación calculada en el punto medio del intervalo de integración temporal, que se escribe como

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f})|_{\alpha_f=1/2} \longrightarrow \frac{\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + \varepsilon(\mathbf{u}_n)}{2} \quad (63)$$

Para la obtención del vector de fuerzas residuales y de la matriz tangente iterativa se utiliza la deformación del punto medio en las expresiones que calculan el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente correspondiente al modo 2.

5.2.7 Generalización del método energía-momentum

Tomando la expresión (63) como punto de partida, KUHL & CRISFIELD [1999], KUHL & RAMM [1996a], [1996b], [1998], [1999] propusieron el método de energía-momentum generalizado, que se basa en el cálculo de la deformación a través del promedio ponderado de sus respectivos valores en los pasos de tiempo n y $n + 1$. Es decir, que se está utilizando el método α generalizado para calcular las deformaciones en el punto medio generalizado. Se calcula dicha deformación por medio de la siguiente expresión

$$\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \longrightarrow (1 - \alpha_f)\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + \alpha_f\varepsilon(\mathbf{u}_n) \quad (64)$$

donde α_f es el coeficiente de ponderación. De este modo, teniendo en cuenta la ecuación (54), el vector de fuerzas internas se define como

$$\boxed{\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = EA_0((1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n) \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f}} \quad (65)$$

Para obtener la matriz de rigidez tangente se aplica la derivada del vector de fuerzas internas de (65) respecto al vector de desplazamientos calculado en el paso de tiempo $n+1$. A continuación se muestran algunos pasos del desarrollo algebraico para la determinación de dicha matriz.

▷ derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} = & (1 - \alpha_f)EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + \\ & + EA_0((1 - \alpha_f)\varepsilon_{n+1} + \alpha_f\varepsilon_n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right) \end{aligned} \quad (66)$$

▷ expresión final

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t &= (1 - \alpha_f) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + \\
&\quad + (1 - \alpha_f) EA_0 ((1 - \alpha_f) \varepsilon_{n+1} + \alpha_f \varepsilon_n) \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f} \\
&= (1 - \alpha_f) \mathbf{K}^t(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f})
\end{aligned} \tag{67}$$

Notese que la matriz de rigidez tangente (modo 3) depende de la deformación evaluada en los pasos de tiempo n y $n + 1$; de los cosenos directores, del elemento de barra bi-articulado, evaluados en el punto medio generalizado $n + 1 - \alpha_f$ y en el paso de tiempo $n + 1$, además, del parámetro α_f . Por otra lado, la parte material de $\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t$ es no simétrica, mientras que, la parte geométrica permanece simétrica.

5.2.8 Disipación numérica - ARMERO & PETŐCZ

Utilizando el método α generalizado, la deformación definida por la ecuación (64) y el modelo de disipación numérica propuesto por ARMERO & PETŐCZ [1996], [1998], KUHLE & CRISFIELD [1999] propusieron la siguiente expresión para el cálculo de la deformación en punto medio generalizado

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) &\longrightarrow (1 - \alpha_f) \varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + \alpha_f \varepsilon(\mathbf{u}_n) + \xi (\varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) - \varepsilon(\mathbf{u}_n)) \\
&= (1 - \alpha_f + \xi) \varepsilon(\mathbf{u}_{n+1}) + (\alpha_f - \xi) \varepsilon(\mathbf{u}_n)
\end{aligned} \tag{68}$$

donde ξ es el parámetro de disipación numérica propuesto por ARMERO & PETŐCZ [1996], [1998]. Una vez más, teniendo en cuenta la ecuación (54), el vector de fuerzas internas se define como

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}} = EA_0 ((1 - \alpha_f + \xi) \varepsilon_{n+1} + (\alpha_f - \xi) \varepsilon_n) \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \tag{69}$$

Para obtener la matriz de rigidez tangente se aplica la derivada del vector de fuerzas internas de (69) respecto al vector de desplazamientos calculado en el paso de tiempo $n + 1$. A continuación se muestran algunos pasos del desarrollo algebraico para la determinación de dicha matriz.

▷ derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} &= (1 - \alpha_f + \xi) EA_0 \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + \\
&\quad + EA_0 ((1 - \alpha_f + \xi) \varepsilon_{n+1} + (\alpha_f - \xi) \varepsilon_n) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{n+1}} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} \right)
\end{aligned} \tag{70}$$

▷ expresión final

$$\boxed{
\begin{aligned}
\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t = & (1 - \alpha_f + \xi) \frac{EA_0}{l_0} \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1} \otimes \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1-\alpha_f} + \\
& + (1 - \alpha_f) EA_0 ((1 - \alpha_f + \xi) \varepsilon_{n+1} + (\alpha_f - \xi) \varepsilon_n) \left(\frac{\partial^2 l}{\partial \mathbf{u}^2} \right)_{n+1-\alpha_f}
\end{aligned}
} \quad (71)$$

Notese que la matriz de rigidez tangente (modo 4) depende de la deformación evaluada en los pasos de tiempo n y $n + 1$; de los cosenos directores, del elemento de barra bi-articulado, evaluados en el punto medio generalizado $n + 1 - \alpha_f$ y en el paso de tiempo $n + 1$, además, de los parámetros α_f y ξ . Por otra lado, la parte material de $\mathbf{K}_{n+1-\alpha_f}^t$ es no simétrica, mientras que, la parte geométrica permanece simétrica. Por último, obsérvese que si se toma $\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$ y $\xi = 0$, se obtiene el método de energía-momentum definido en el apartado 5.2.6, mientras que, si se adopta $\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$ y $\xi \neq 0$, se obtiene el método energía-momentum modificado propuesto ARMERO & PETŐCZ [1996]. A continuación se demuestra que ambos métodos conservan las energías cinética y de deformación del sistema.

Teniendo en cuenta la regla del punto medio ($\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$), las ecuaciones (35a), (35b), (44a) y (44b), las velocidades y las aceleraciones se escriben como

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n), \quad \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) \quad (72)$$

La forma discreta de la ecuación de movimiento en el punto medio, asumiendo que $\mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{ext}} = \mathbf{0}$, se escribe como $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1/2} + \mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{int}} = \mathbf{0}$. Premultiplicando ambos términos de dicha ecuación por el vector de velocidades de (72a), se obtiene que

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/2} + \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2}^T \mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{int}} = 0 \quad (73)$$

Por otra parte, se puede escribir el vector de velocidades en el punto medio, de acuerdo con la ecuación (43b), como $\dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)$. Sustituyendo dicho término, las ecuaciones (72a) y (72b) en (73), se obtiene que

$$\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^T \mathbf{M} \frac{1}{\Delta t} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) + \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{int}} = 0 \quad (74a)$$

$$\frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n)^T \mathbf{M} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) + (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{int}} = 0 \quad (74b)$$

El término asociado a la matriz de masa \mathbf{M} , en (74b), corresponde a la diferencia entre los valores de la energía cinética calculados en los pasos de tiempo $n + 1$ y n , esto es, $K_{n+1} - K_n$. Por otra parte, se describe el vector de fuerzas internas en el punto medio, de acuerdo con la ecuación (69), como

$$\mathbf{f}_{n+1/2}^{\text{int}} = EA_0 \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n) + \xi (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \right) \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1/2} \quad (75)$$

donde $\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1} + \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_n \right)$, es el promedio de los vectores, que contienen los cosenos directores de la barra bi-articulada, evaluados en los pasos de tiempo $n + 1$ y n , respectivamente. Por tanto, se reescribe la ecuación (74b) del modo siguiente

$$K_{n+1} - K_n + EA_0 \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n) + \xi(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \right) (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1/2} = 0 \quad (76)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (26), (27) y $\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1/2} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1} + \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_n \right)$, después de algunos pasos de desarrollo algebraico, se puede demostrar la siguiente igualdad $(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1/2} = (l_{n+1} - l_n) \frac{1}{2} (1 + \cos(\theta_{n+1} - \theta_n))$. Por otra parte, a través de las deformaciones evaluadas en los pasos de tiempo $n + 1$ y n , se puede escribir que $l_{n+1} - l_n = l_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$. Una vez que se asume $\Delta t \ll 1$, esto implica que $\theta_{n+1} \approx \theta_n$ y $\cos(\theta_{n+1} - \theta_n) \approx 1$, consecuentemente, $\frac{1}{2}(1 + \cos(\theta_{n+1} - \theta_n)) \approx 1$. Por tanto, tomando las hipótesis aquí descritas, se puede concluir que $(\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n)^T \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}}\right)_{n+1/2} = l_0(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$. Esto permite reescribir la ecuación (76) del siguiente modo

$$K_{n+1} - K_n + EA_0 l_0 \left(\frac{1}{2}(\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n) + \xi(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) \right) (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n) = 0 \quad (77a)$$

$$K_{n+1} - K_n + \frac{1}{2} EA_0 l_0 (\varepsilon_{n+1}^2 - \varepsilon_n^2) + \xi EA_0 l_0 (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)^2 = 0 \quad (77b)$$

El tercer término de (77b) corresponde a la diferencia entre los valores de la energía de deformación calculados en los pasos de tiempo $n + 1$ y n , esto es, $U_{n+1} - U_n$. Obsérvese que el último término de (77b) es siempre positivo, una vez que $(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)^2 > 0$. Por tanto, la ecuación (77) se puede reescribir como

$$K_{n+1} - K_n + U_{n+1} - U_n + \xi EA_0 l_0 (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)^2 = 0 \quad (78a)$$

$$K_{n+1} - K_n + U_{n+1} - U_n = -\xi EA_0 l_0 (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)^2 \leq 0 \quad (78b)$$

Se puede observar en la ecuación (78b) que la diferencia entre los valores de la energía total dentro del paso de integración en el tiempo es igual a cero si se toma $\xi = 0$, mientras que es menor que cero si se adopta $\xi > 0$. Por tanto, la energía total se conserva dentro del paso de integración para valores $\xi = 0$, por otra parte, se produce un decaimiento en la energía total para valores $\xi > 0$. En el apartado de ejemplos numéricos, se podrá observar la conservación o el decaimiento de la energía total al se aplicar los métodos de energía-momentum ($\xi = 0$) y de energía-momentum modificado ($\xi > 0$), respectivamente. Por último, cabe comentar que dentro del marco de los algoritmos que conservan la energía hay otras aportaciones teóricas que en este trabajo no han sido desarrolladas. Para mayores detalles, consultar las referencias HUGHES et al [1978], HAIRER et al [2002], ARMERO & ROMERO [2001a], [2001b], [2003], ROMERO & ARMERO [2002].

6 Ejemplos numéricos

En los apartados anteriores se han presentado cuatro expresiones distintas para el cálculo del vector de fuerzas internas y para el cálculo de la matriz de rigidez tangente, respectivamente. Se ha asignado *modo 1* a las expresiones (49) y (52) que calculan el vector de fuerzas internas y la matriz de rigidez tangente, respectivamente; *modo 2* a las ecuaciones (54) y (62), *modo 3* a las ecuaciones (65) y (67) y *modo 4* a las expresiones (69) y (71). Notese que las expresiones del modo 3 son un caso particular de las del modo 4 asignando $\xi = 0$.

Método	Parámetros	$\mathbf{f}_{n+1+\alpha_f}^{int}$	$\mathbf{K}_{n+1+\alpha_f}^t$
RT, NEWMARK [1959]	$\alpha_m = \alpha_f = 0, 2\beta = \gamma = 1/2$	(49)	(52)
RPM	$\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2$	(54)	(62)
MN, NEWMARK [1959]	$\alpha_m = \alpha_f = 0$	(49)	(52)
M α B, WOOD et al [1981]	$\alpha_f = 0$	(49)	(52)
M α H1, HILBER et al [1977]	$\alpha_m = 0$	(49)	(52)
M α H2, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m = 0$	(54)	(62)
M α G1, CHUNG & HULBERT [1993]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0$	(49)	(52)
M α G2, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0$	(54)	(62)
MEM, SIMO & TARNOW [1992a]	$\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2, \xi = 0$	(69)	(71)
MEM+ ξ , ARMERO & PETŐCZ [1996]	$\alpha_m = \alpha_f = 2\beta = \gamma = 1/2, \xi \neq 0$	(69)	(71)
MEMG, KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0, \xi = 0$	(69)	(71)
MEMG+ ξ , KUHL & CRISFIELD [1999]	$\alpha_m \neq 0, \alpha_f \neq 0, \xi \neq 0$	(69)	(71)

Tabla 1: Sumario de los algoritmos de integración temporal

En las simulaciones numéricas que aquí se realizan se utilizaran los siguientes algoritmos de integración temporal:

1. La regla de trapecio - RT;
2. La regla del punto medio - RPM;
3. El método de Newmark - NM;
4. El método α de Bossak - M α B;
5. El método α de Hilber (modo 1) - M α H1;
6. El método α de Hilber (modo 2) - M α H2;
7. El método α generalizado (modo 1) - M α G1;
8. El método α generalizado (modo 2) - M α G2;
9. El método de energía-momentum - MEM;
10. El método de energía-momentum modificado - MEM+ ξ ;
11. El método de energía-momentum generalizado - MEMG;
12. El método de energía-momentum generalizado modificado - MEMG+ ξ ;

Para cada uno de estos algoritmos se asumen valores para los parámetros de disipación numérica y determinadas expresiones para el cálculo del vector de fuerzas internas y de la matriz de rigidez tangente. Esta información se encuentra detallada en la Tabla 1. Encuanto a los parámetros de disipación numérica se adoptan valores optimizados en función del radio espectral ρ_∞ . Estos valores se muestran en la Tabla 2. Notese que para

el $\rho_\infty = 1$ no ocurre disipación numérica, mientras que para valores decrecientes del radio espectral implica valores crecientes de disipación numérica. Obsérvese que los valores asignados a los parámetros α_m , α_f , γ y β en la Tabla 1, fueron obtenidos tomando $\rho_\infty=1$ en la Tabla 2. Cabe comentar que se puede utilizar valores arbitrarios, distintos de los presentados en la Tabla 2. Por otra parte, valores óptimos significan que el algoritmo que los utilizan poseerá disipación numérica mínima para las respuestas a baja frecuencia y disipación numérica máxima para las frecuencias más altas.

Algoritmo	α_m	α_f	β	γ
RT, MN (NEWMARK [1959])	0	0	$\frac{1}{(\rho_\infty+1)^2}$	$\frac{3-\rho_\infty}{2\rho_\infty+2}$
M α B (WOOD et al [1981])	$\frac{\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}$	0	$\frac{1}{4}(1-\alpha_m)^2$	$\frac{1}{2}-\alpha_m$
M α H1 (HILBER et al [1977]) M α H2 (KUHLE & CRISFIELD [1999])	0	$\frac{1-\rho_\infty}{\rho_\infty+1}$	$\frac{1}{4}(1+\alpha_f)^2$	$\frac{1}{2}+\alpha_f$
RPM, M α G1 (CHUNG & HULBERT [1993]), M α G2 (KUHLE & CRISFIELD [1999]), MEM (SIMO & TARNOW [1992a]), MEM+ ξ (ARMERO & PETŐCZ [1996]), MEMG y MEMG+ ξ (KUHLE & CRISFIELD [1999])	$\frac{2\rho_\infty-1}{\rho_\infty+1}$	$\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty+1}$	$\frac{1}{4}(1-\alpha_m+\alpha_f)^2$	$\frac{1}{2}-\alpha_m+\alpha_f$

Tabla 2: Valores óptimos de los parámetros de disipación numérica en función del radio del radio espectral ρ_∞

En los ejemplos numéricos que se analizan a continuación se adoptará para cada uno de los algoritmos enumerados en la Tabla 1 los siguientes valores para el radio espectral $\rho_\infty = 1$, $\rho_\infty=0.8$ y $\rho_\infty=0.6$, respectivamente. Por último, notese en la Tabla 1 que para $\alpha_m = \alpha_f = 0$ y $2\beta = \gamma = 1/2$, los algoritmos de Newmark, M α B, M α H1 y M α H2 coinciden con el método de la Regla del Trapecio, lo que se comprueba en los ejemplos aquí analizados.

Para analizar los resultados obtenidos con los algoritmos enumerados en la Tabla 1, se ha utilizado las siguientes gráficas:

1. La trayectoria del péndulo en el plano XY ;
2. La energía total \times tiempo;
3. Las componentes cartesianas del desplazamiento \times tiempo;
4. Las componentes cartesianas de la velocidad \times tiempo;
5. El desplazamiento axial ($\Delta l = l - l_0$) \times tiempo;
6. El numero de iteraciones por paso de tiempo.

con el objetivo de averiguar el comportamiento de dichos algoritmos respecto a la capacidad de:

1. Obtener la trayectoria correcta;
2. Conservar la energía total;
3. Disipar lo mínimo para movimientos a bajas frecuencias;
4. Disipar lo máximo para movimientos a altas frecuencias;
5. Converger durante el proceso iterativo;

6.1 El péndulo simple - Bathe

Este ejemplo ha sido analizado por BATHE [1996], CRISFIELD [1997a], CRISFIELD & SHI [1996b], KUHL & CRISFIELD [1999] entre otros autores. En este apartado se simula el péndulo simple como rígido, es decir, $k \rightarrow \infty$. Las características geométricas y físicas, las condiciones iniciales y demás datos del problema, se describen a continuación:

rigidez axial, $EA_0 = 10^{10}$ N;
 masa, $m = 10$ kg;
 longitud, $l = 3.0443$ m;
 aceleración de la gravedad, $g = 9.8$ m.s⁻²;
 paso de tiempo, $\Delta t = 0.1$ s;
 intervalo de tiempo, $t = 30$ s;
 numero de pasos, $N_t = 300$;
 tolerancia para la convergencia, $TOL = 10^{-5}$.

$$\text{posición inicial} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3.0443 \text{ m} \end{cases} \quad (79a)$$

$$\text{condiciones iniciales} \begin{cases} \dot{u}_0 = 7.72 \text{ m.s}^{-1} \\ \ddot{u}_0 = 19.6 \text{ m.s}^{-2} \end{cases} \quad (79b)$$

En la figura 9 se muestran el sistema de referencia adoptado, las características geométricas y las condiciones iniciales del péndulo simple. Se ha discretizado dicho péndulo con un elemento de barra bi-articulado 2D. Notese que para este caso, hay dos grados de libertad restringidos y dos grados de libertad libres.

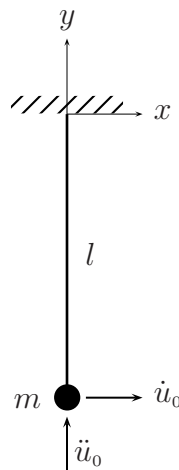


Figura 9. El péndulo simple. Condiciones iniciales

Como se ha comentado en el apartado 3, la respuesta del péndulo discretizado con sólo un grado de libertad presenta el desplazamiento angular con variación casi-lineal respecto al tiempo, mientras que la velocidad y la aceleración angulares oscilan a baja frecuencia. En este ejemplo, la inclusión de más un grado de libertad implica el surgimiento de una

oscilación axial de alta frecuencia, cuya máxima amplitud no excede el orden de tamaño de 5×10^{-4} debido a la hipótesis de inextensibilidad del péndulo. Dicho comportamiento se observa en los resultados numéricos que se detallan a continuación.

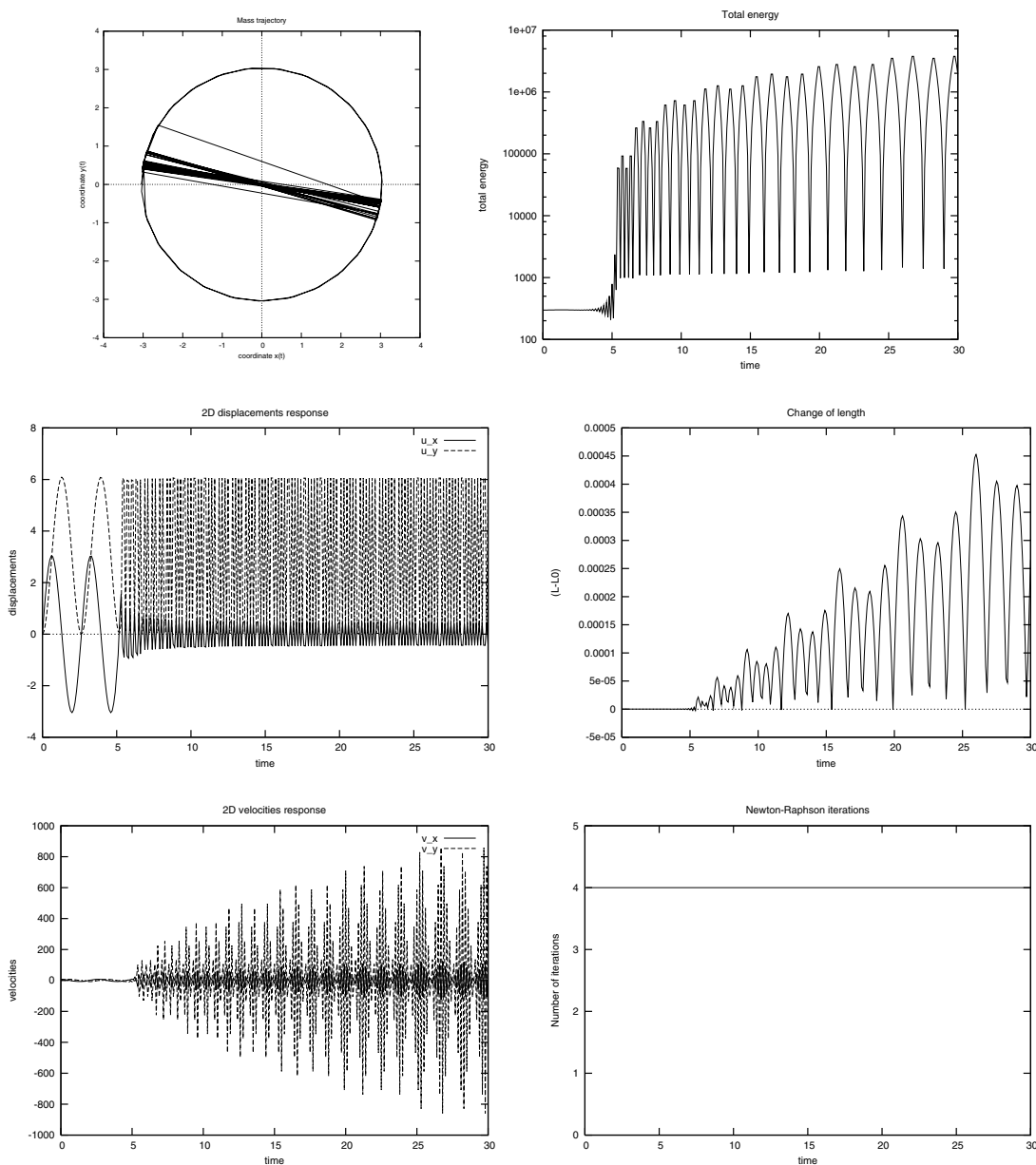


Figura 10. El péndulo simple. Solución con el esquema Newmark, $\rho_\infty = 1$.

Con relación al método de Newmark sin disipación numérica, se ha observado que: No obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 10a; No conserva la energía, hay un crecimiento desmedido de la misma a partir de un tiempo de 5 segundos como se puede observar en la Figura 10b. No disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 10d, incluso hay un crecimiento desmedido de la misma a partir de un tiempo de 5 segundos, lo mismo se observa con las componente de las velocidades conforme se muestra en la Figura 10e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 10f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones

axiales son del orden de 5×10^{-4} conforme se muestra en la Figura 10d.

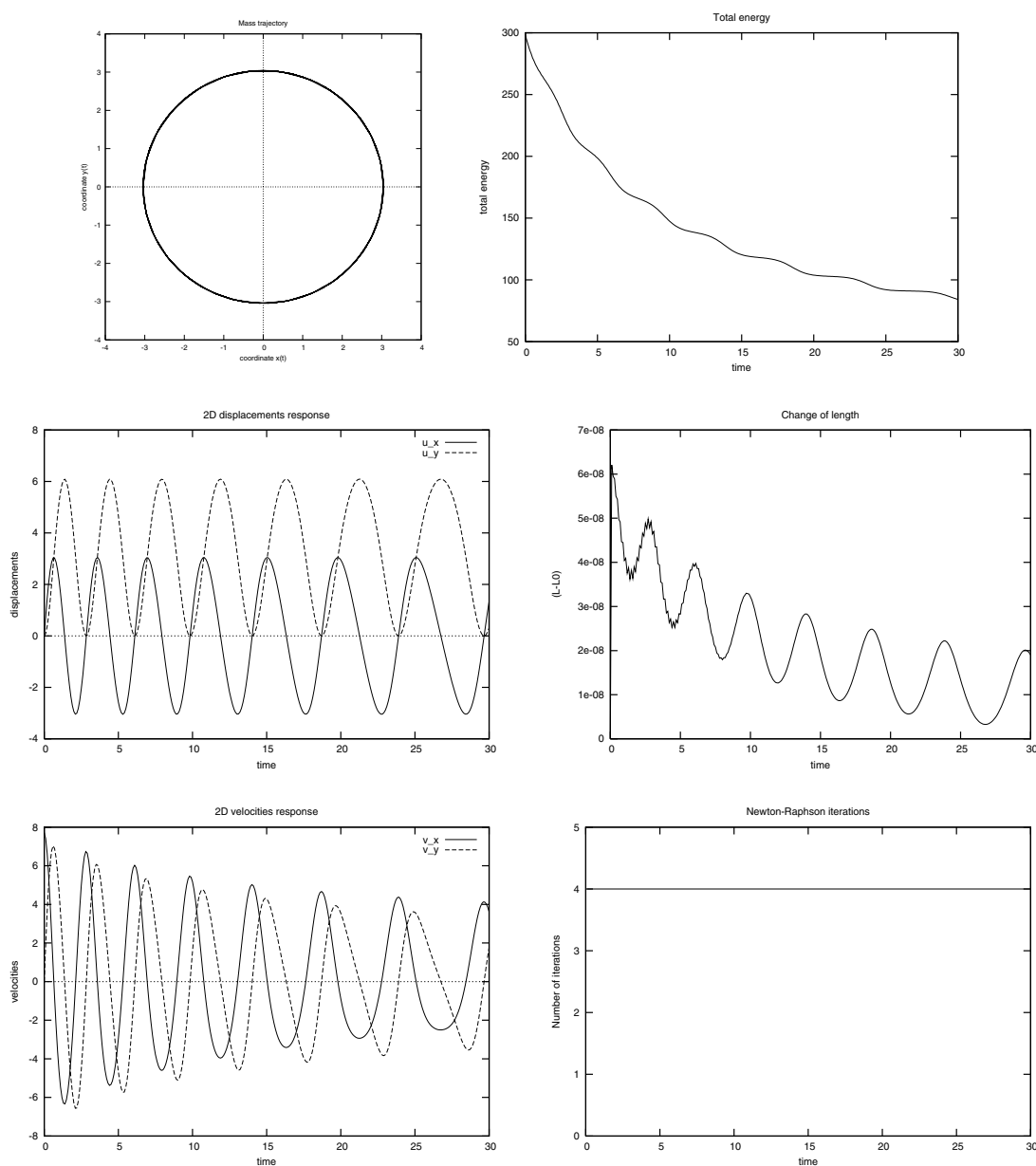


Figura 11. El péndulo simple. Solución con el esquema Newmark disipativo, $\rho_{\infty}=0.8$.

Por otra parte, respecto al método de Newmark con disipación numérica ($\rho_{\infty}=0.8$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 11a; Disipa desmesuradamente la energía como se puede observar en la Figura 11b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 11d. Introduce errores de periodo y de amplitud considerables conforme se muestra en la Figura 11e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 11f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 7×10^{-8} conforme se muestra en la Figura 11d.

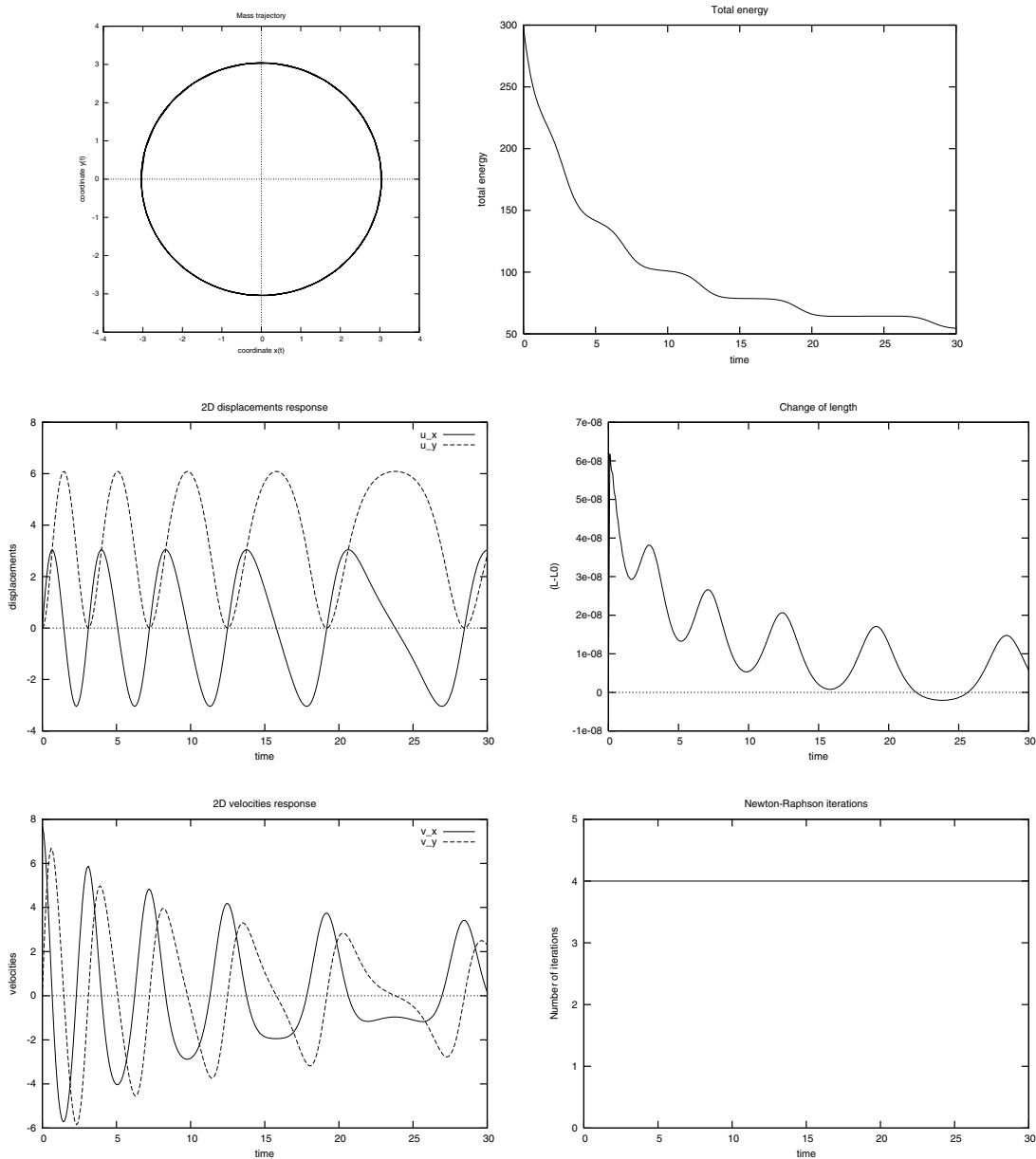


Figura 12. El péndulo simple. Solución con el esquema Newmark disipativo, $\rho_{\infty}=0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método de Newmark con disipación numérica ($\rho_{\infty}=0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 12a; Disipa desmesuradamente la energía como se puede observar en la Figura 12b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 12d. Introduce errores de periodo y de amplitud considerables conforme se muestra en la Figura 12e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 12f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 7×10^{-8} conforme se muestra en la Figura 12d.

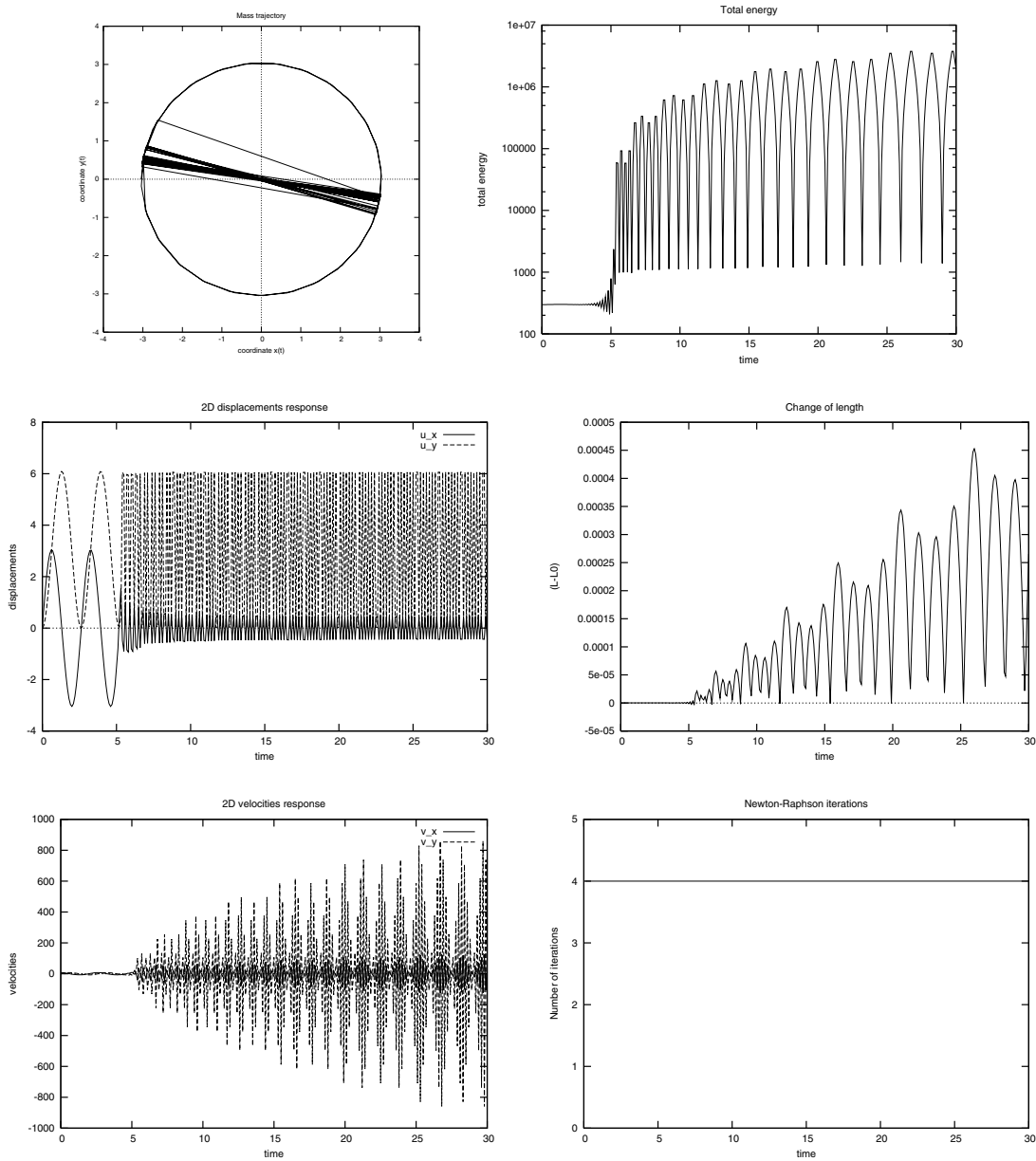


Figura 13. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Bossak, $\rho_\infty = 1$.

Conforme dicho en el apartado anterior, el método α de Bossak sin disipación obtiene los mismos resultados que el método de Newmark con ($\rho_\infty = 1$), conforme se puede observar en las graficas correspondientes a la Figura 13.

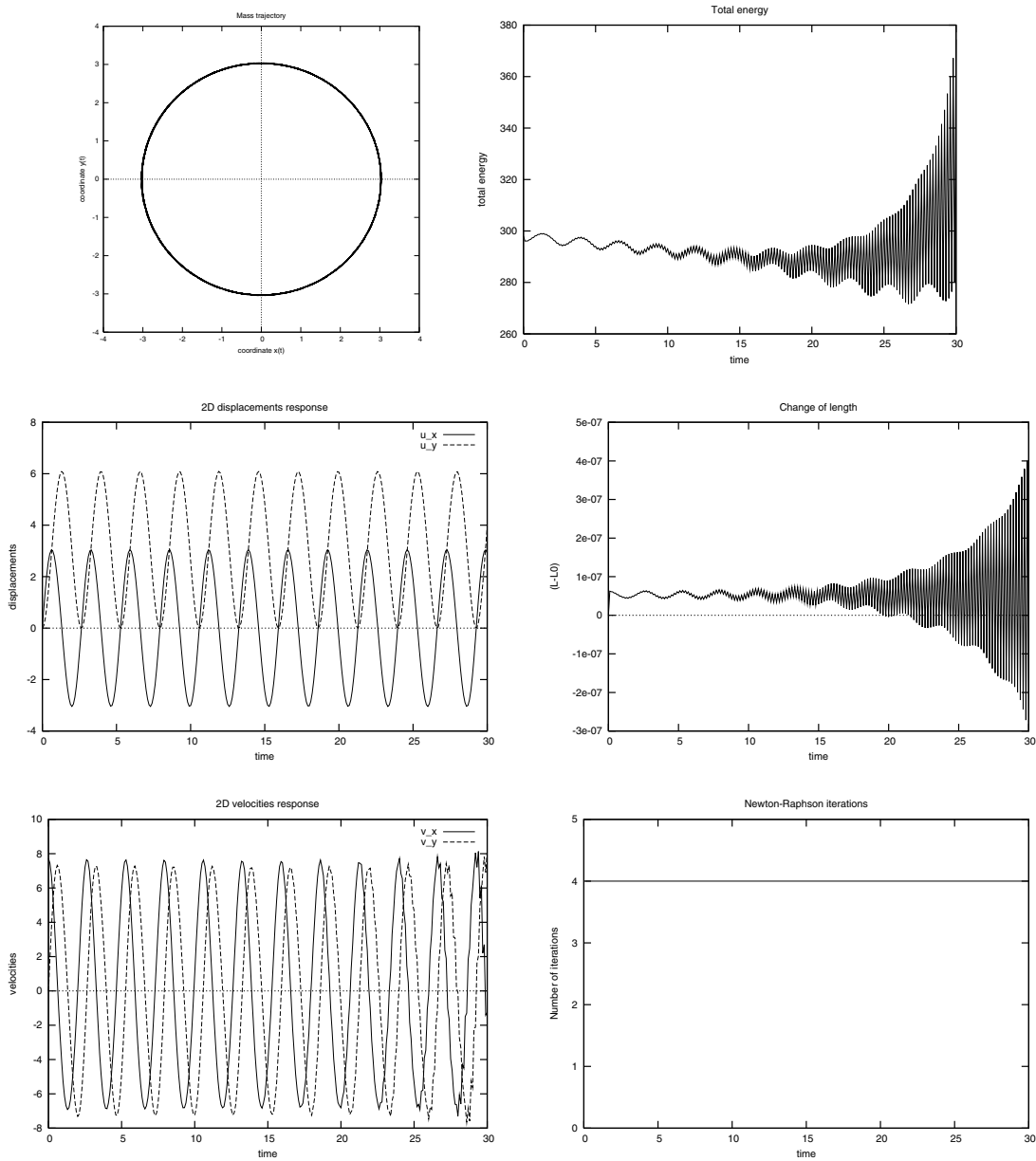


Figura 14. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Bossak disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Por otra parte, respecto al método α de Bossak con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.8$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 14a; Disipa la energía hasta el tiempo aproximadamente de 25 segundos, después de este tiempo se nota un crecimiento abrupto en la energía total como se puede observar en la Figura 14b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia hasta el tiempo aproximadamente de 25 segundos, posteriormente a este tiempo ocurre un crecimiento abrupto conforme se muestra en la Figura 14d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figura 14c y 14e, es decir, presenta disipación mínima para las frecuencias más bajas. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 14f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 5×10^{-7} conforme se muestra en la Figura 14d.

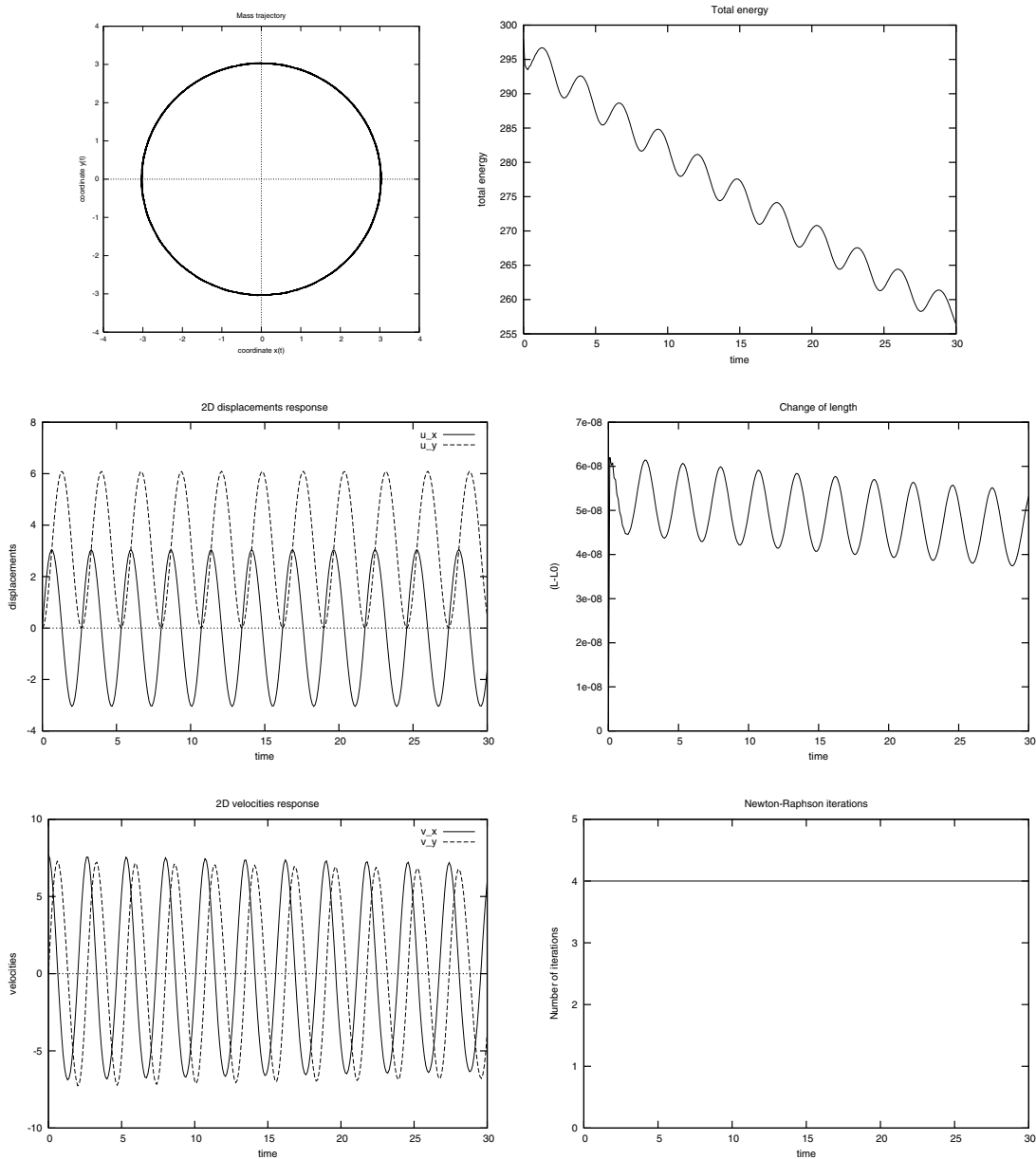


Figura 15. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Bossak disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método α de Bossak con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 15a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 255 N.m como se puede observar en la Figura 15b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 15d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 15c y 15e, lo que implica en una mínima disipación para las oscilaciones a baja frecuencia. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 15f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 7×10^{-8} conforme se muestra en la Figura 15d.

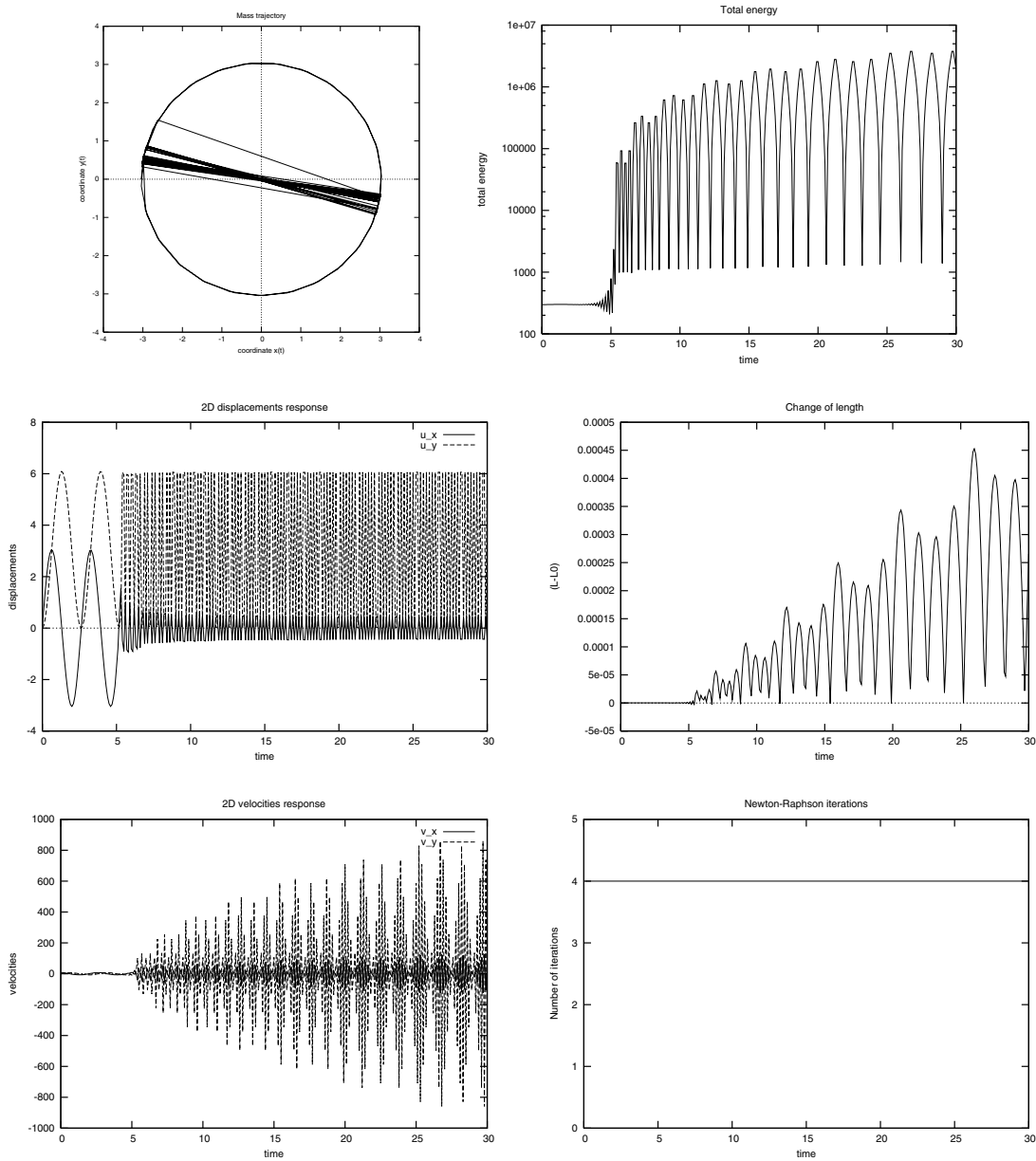


Figura 16. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Hilber, $\rho_\infty = 1$.

Conforme dicho en el apartado anterior, el método α de Hilber sin disipación obtiene los mismos resultados que el método de Newmark con ($\rho_\infty = 1$), conforme se puede observar en las graficas correspondientes a la Figura 16.

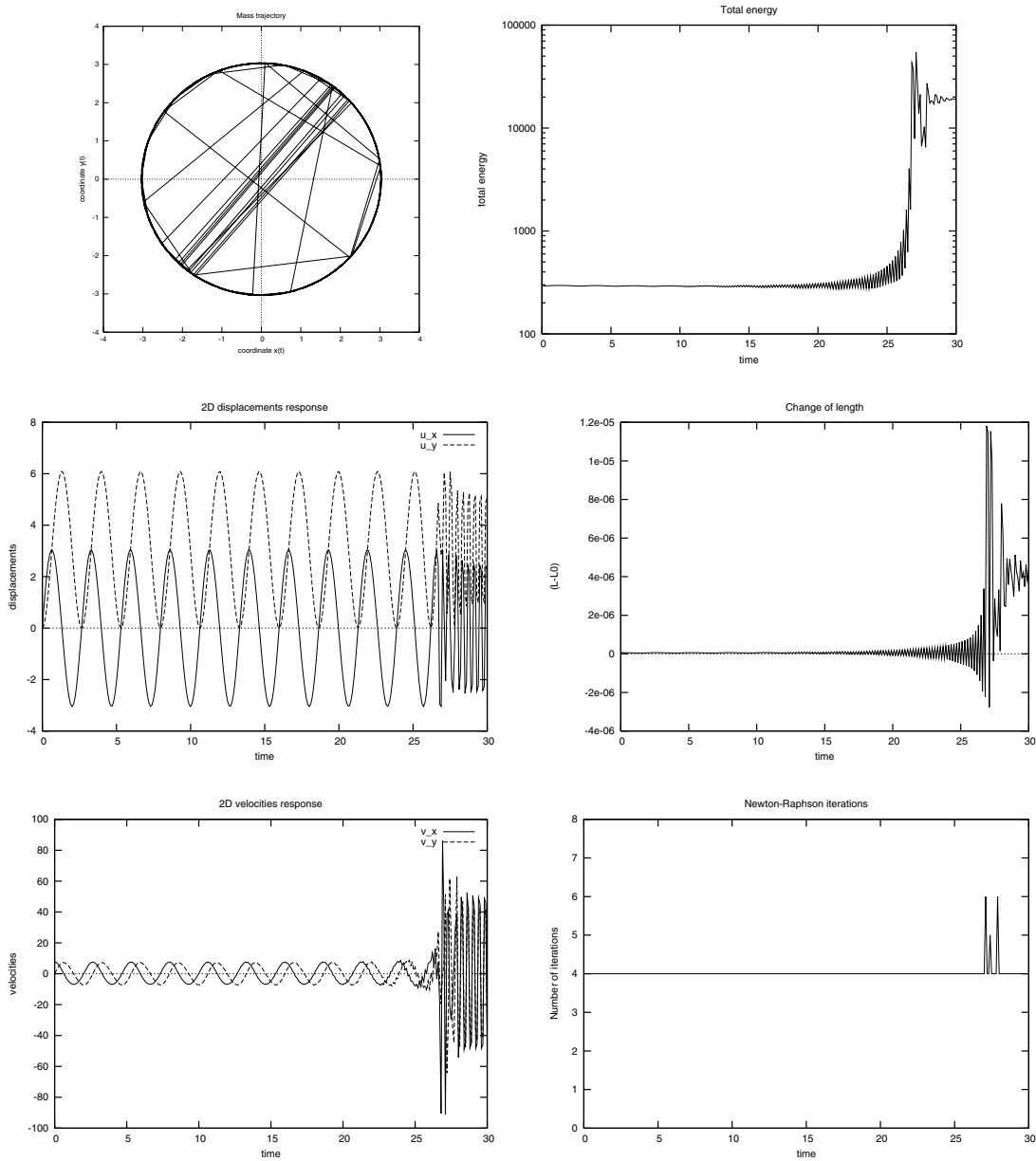


Figura 17. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Hilber disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Por otra parte, respecto al método α de Hilber con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.8$), se ha observado que: No obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 17a; Disipa la energía hasta el tiempo aproximadamente de 25 segundos, después de este tiempo se nota un crecimiento abrupto en la energía total como se puede observar en la Figura 17b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia hasta el tiempo aproximadamente de 25 segundos, posteriormente a este tiempo ocurre un crecimiento abrupto conforme se muestra en la Figura 17d. Introduce errores de periodo y de amplitud de gran después de transcurridos 25 segundos conforme se muestra en las Figura 17c y 17e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 17f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 1.2×10^{-5} conforme se muestra en la Figura 17d.

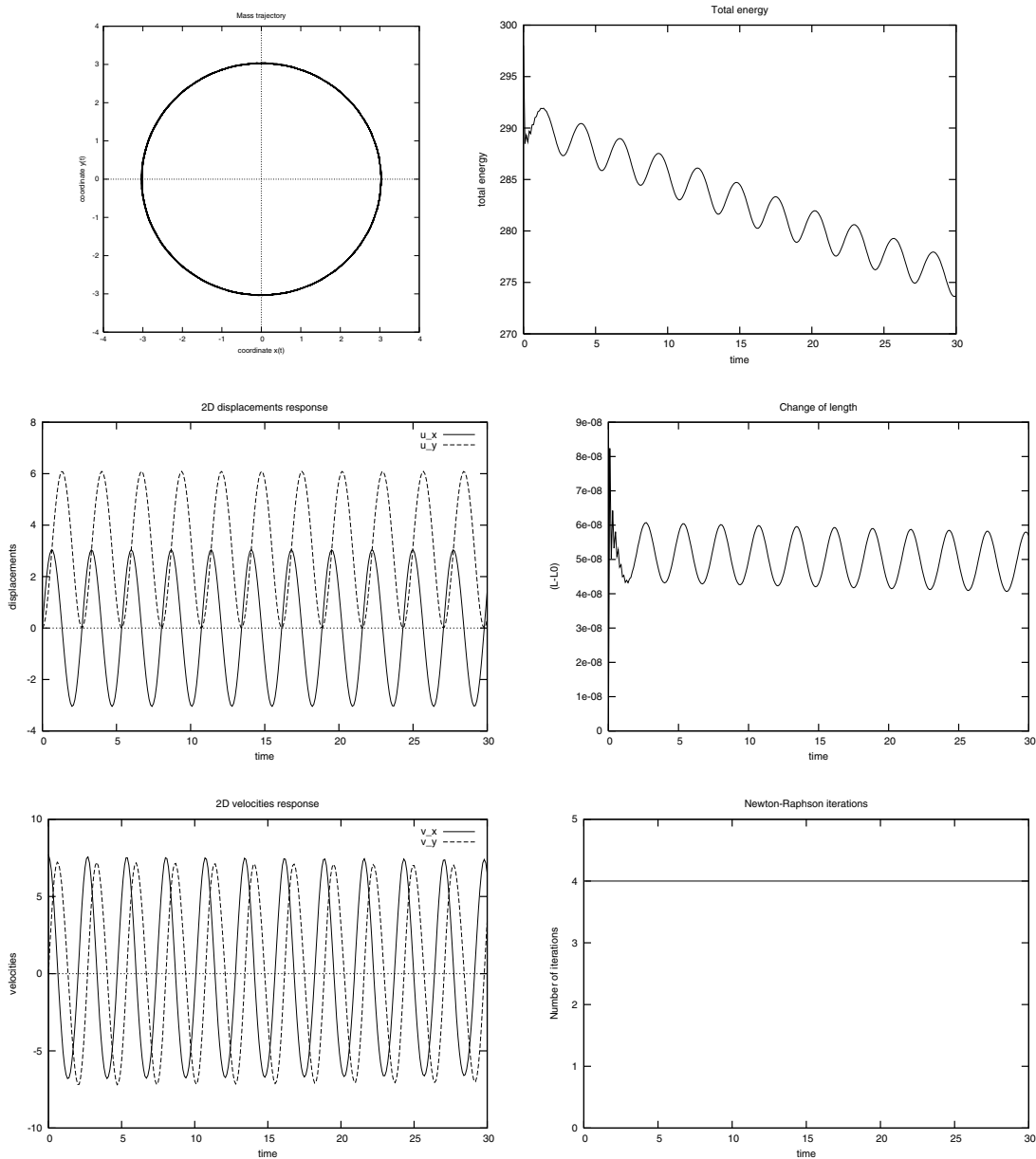


Figura 18. El péndulo simple. Solución con el esquema α -Hilber disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método α de Hilber con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 18a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 275 N.m como se puede observar en la Figura 18b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 18d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud de periodo y de amplitud conforme se muestra en las Figuras 18c y 18e, lo que implica en una mínima disipación para las oscilaciones a baja frecuencia. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 18f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 8×10^{-8} conforme se muestra en la Figura 18d.

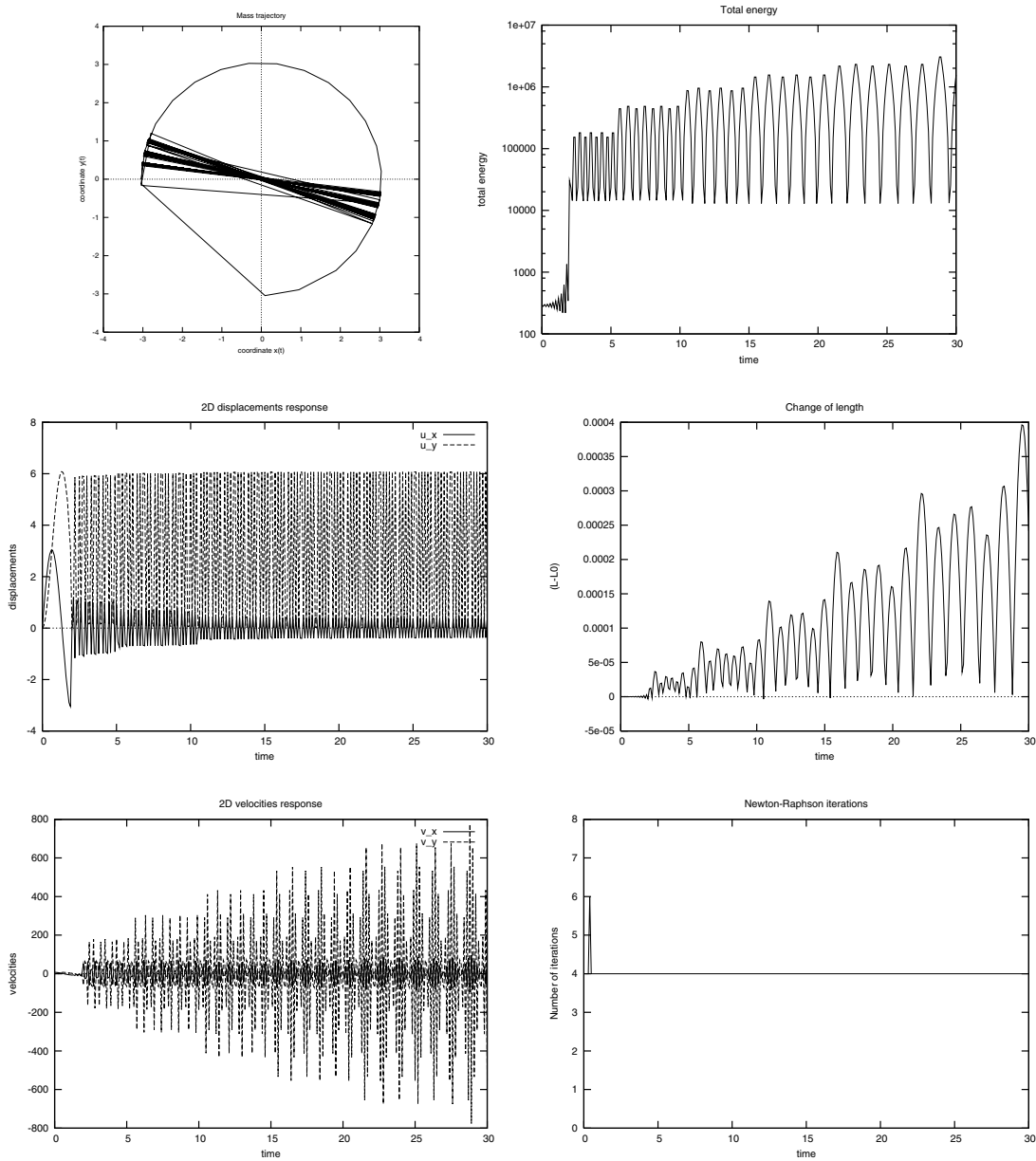


Figura 19. El péndulo simple. Solución con el esquema α -generalizado, $\rho_\infty = 1$.

Con relación al método α generalizado sin disipación numérica ($\rho_\infty = 1$), se ha observado que: No obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 19a; No conserva la energía, hay un crecimiento desmedido de la misma a después de transcurridos aproximadamente 2 segundos como se puede observar en la Figura 19b. No disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 19d, incluso hay un crecimiento desmedido de la misma a partir de un tiempo de 2 segundos, lo mismo se observa con las componentes del desplazamiento y de las velocidades conforme se muestra en las Figura 19c y 19e, respectivamente. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 19f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 4×10^{-4} conforme se muestra en la Figura 19d.

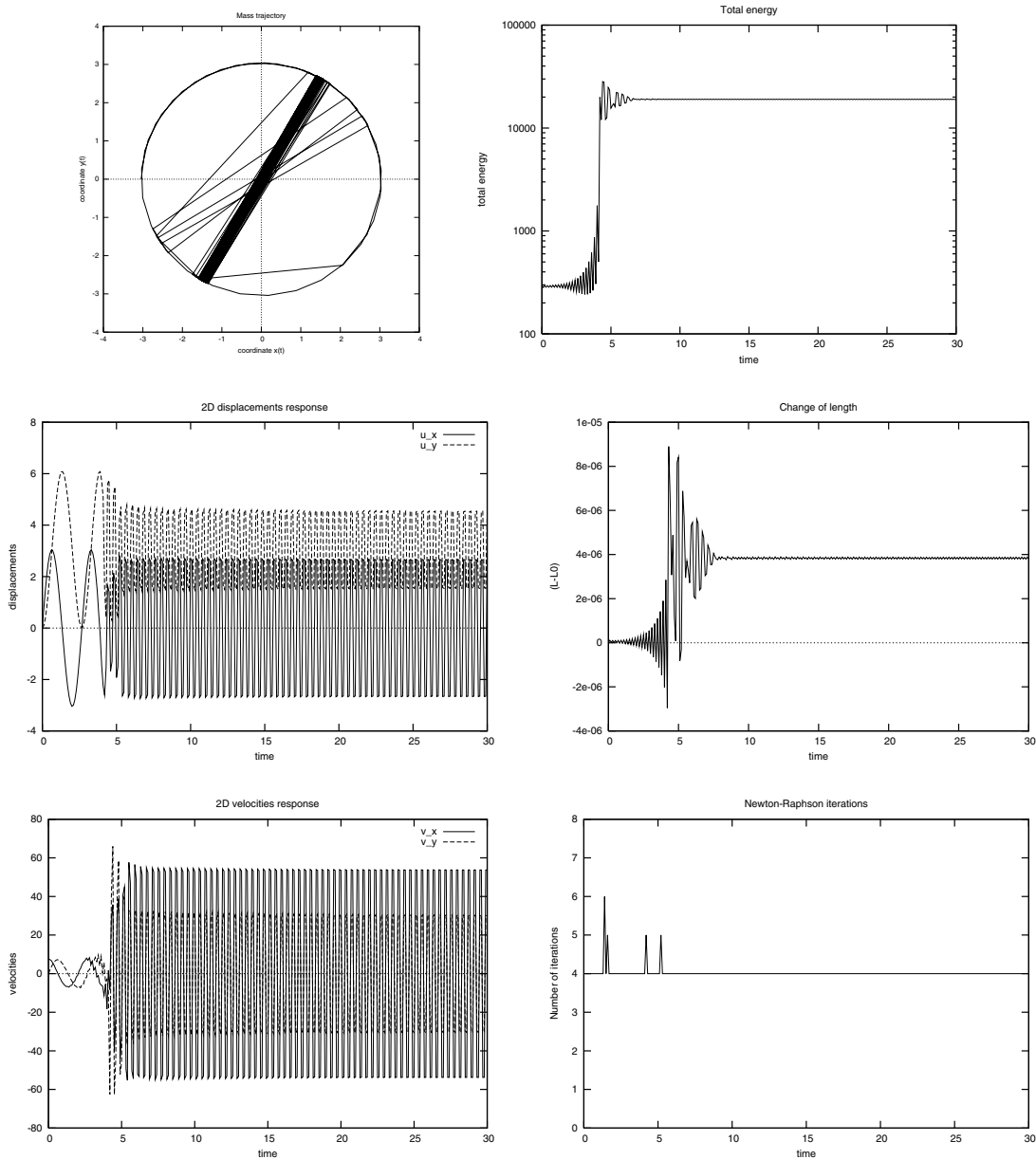


Figura 20. El péndulo simple. Solución con el esquema α -generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Por otra parte, respecto al método α generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.8$), se ha observado que: No obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 20a; No conserva la energía, hay un crecimiento desmedido de la misma a despues de transcurridos aproximadamente 4 segundos como se puede observar en la Figura 20b. No disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 20d, incluso hay un crecimiento desmedido de la misma a partir de un tiempo de 4 segundos, lo mismo se observa con las componentes del desplazamiento y de las velocidades conforme se muestra en las Figura 20c y 20e, respectivamente. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 20f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 1×10^{-5} conforme se muestra en la Figura 20d.

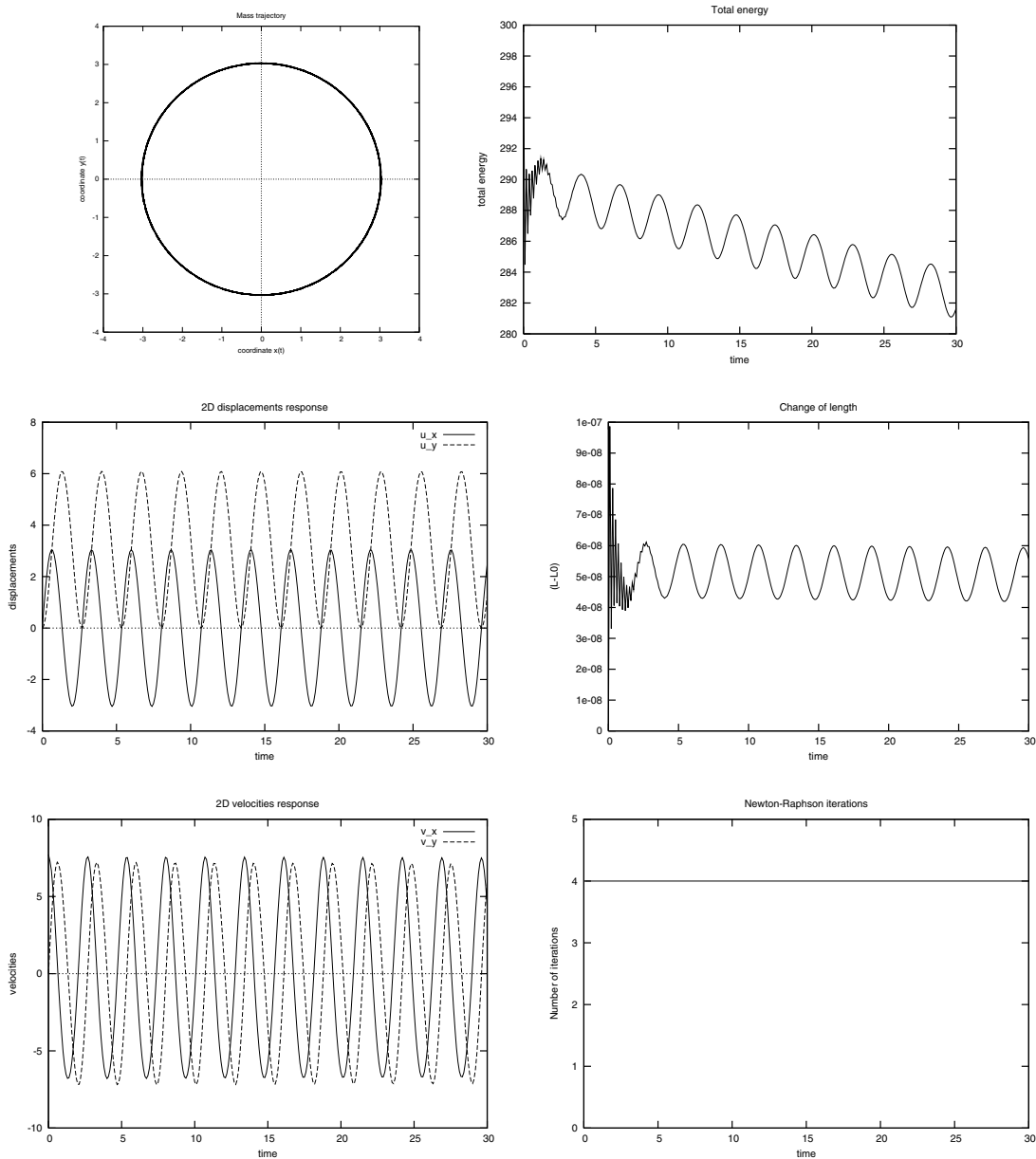


Figura 21. El péndulo simple. Solución con el esquema α -generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método α generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 21a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 280 N.m como se puede observar en la Figura 21b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 21d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 21c y 21e, lo que implica en una mínima disipación para las oscilaciones a baja frecuencia. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 21f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 1×10^{-7} conforme se muestra en la Figura 21d.

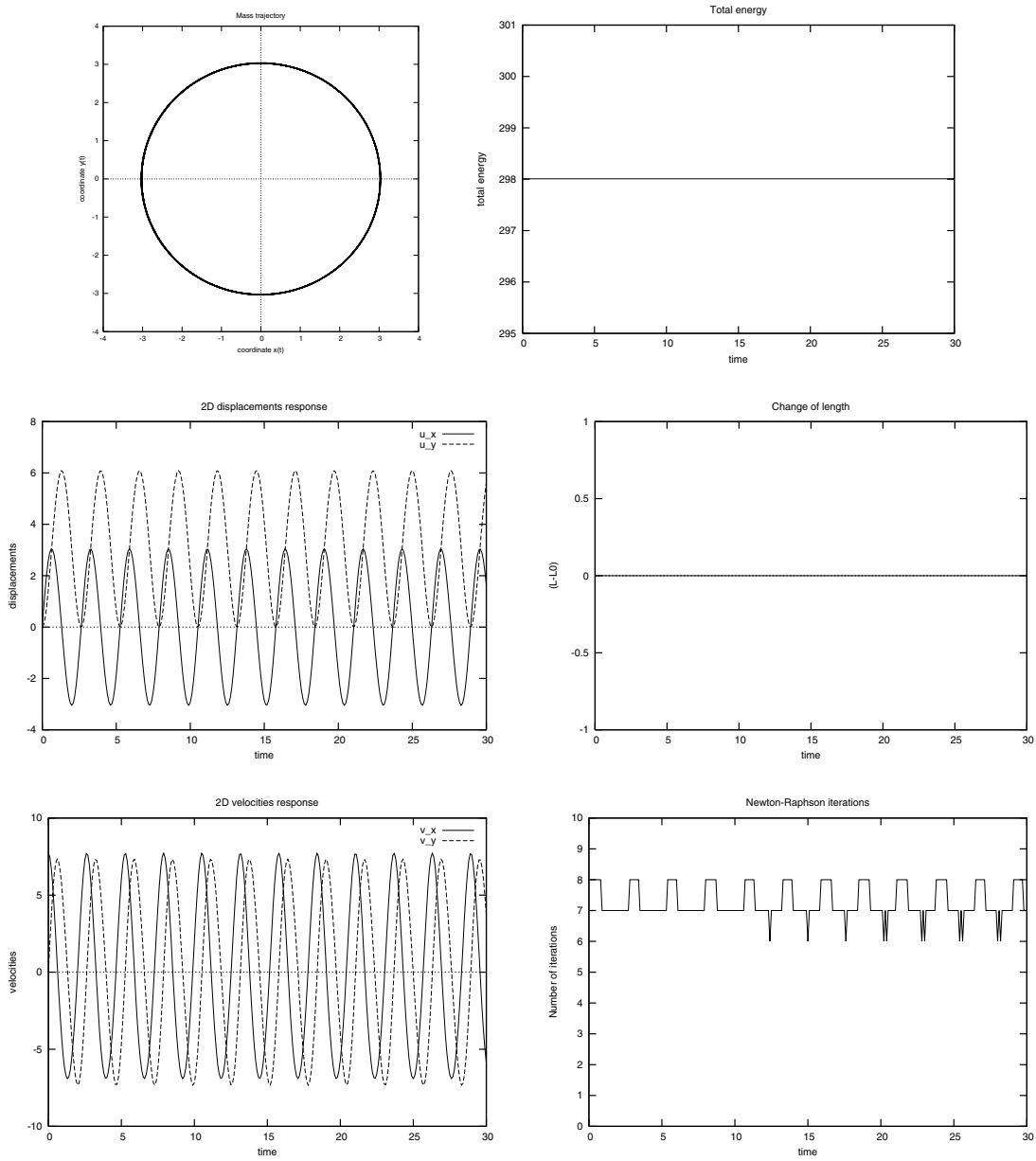


Figura 22. El péndulo simple. Solución con el esquema energía-momentum generalizado, $\rho_\infty = 1$.

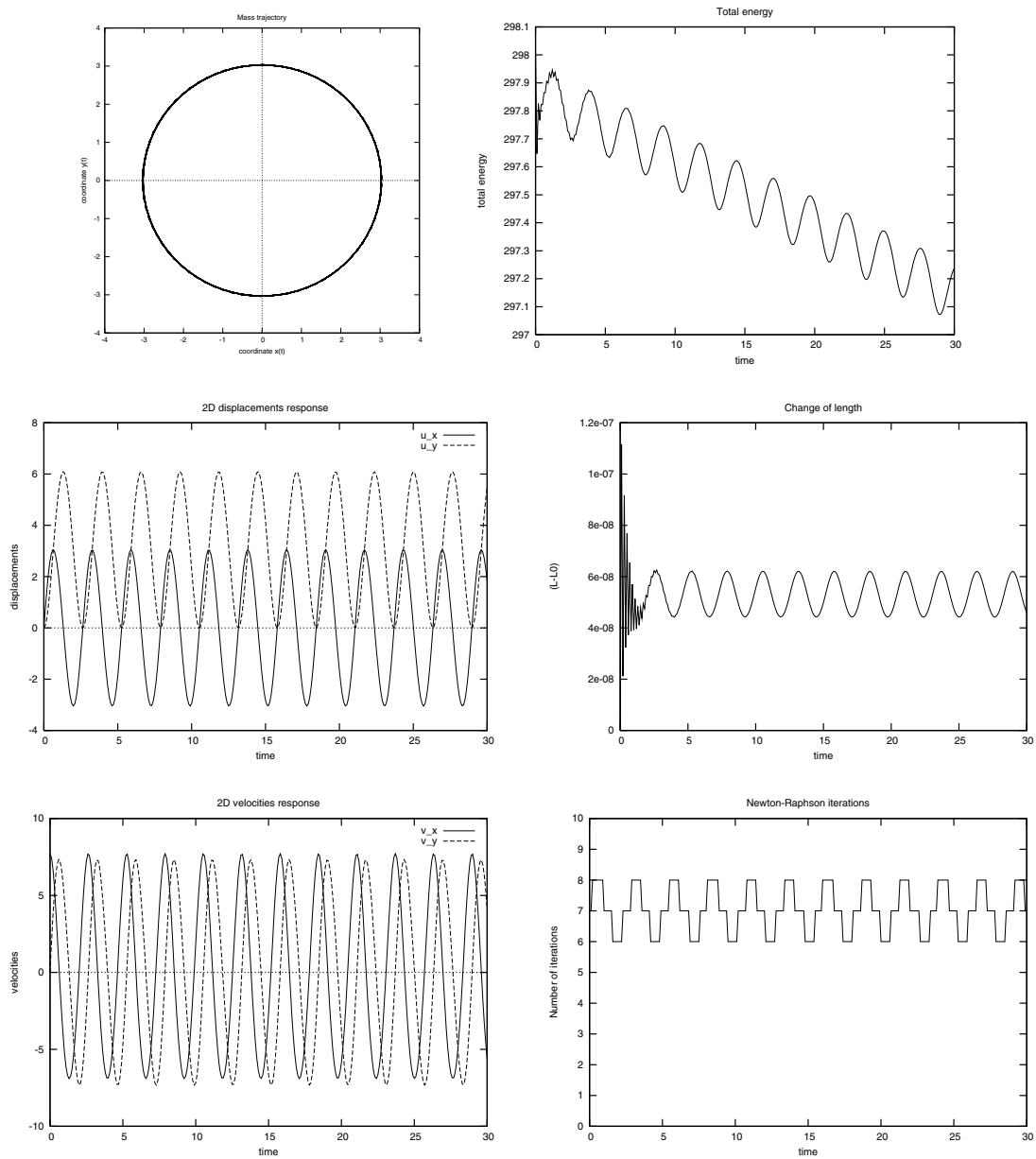


Figura 23. El péndulo simple. Solución con el esquema energía-momentum generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

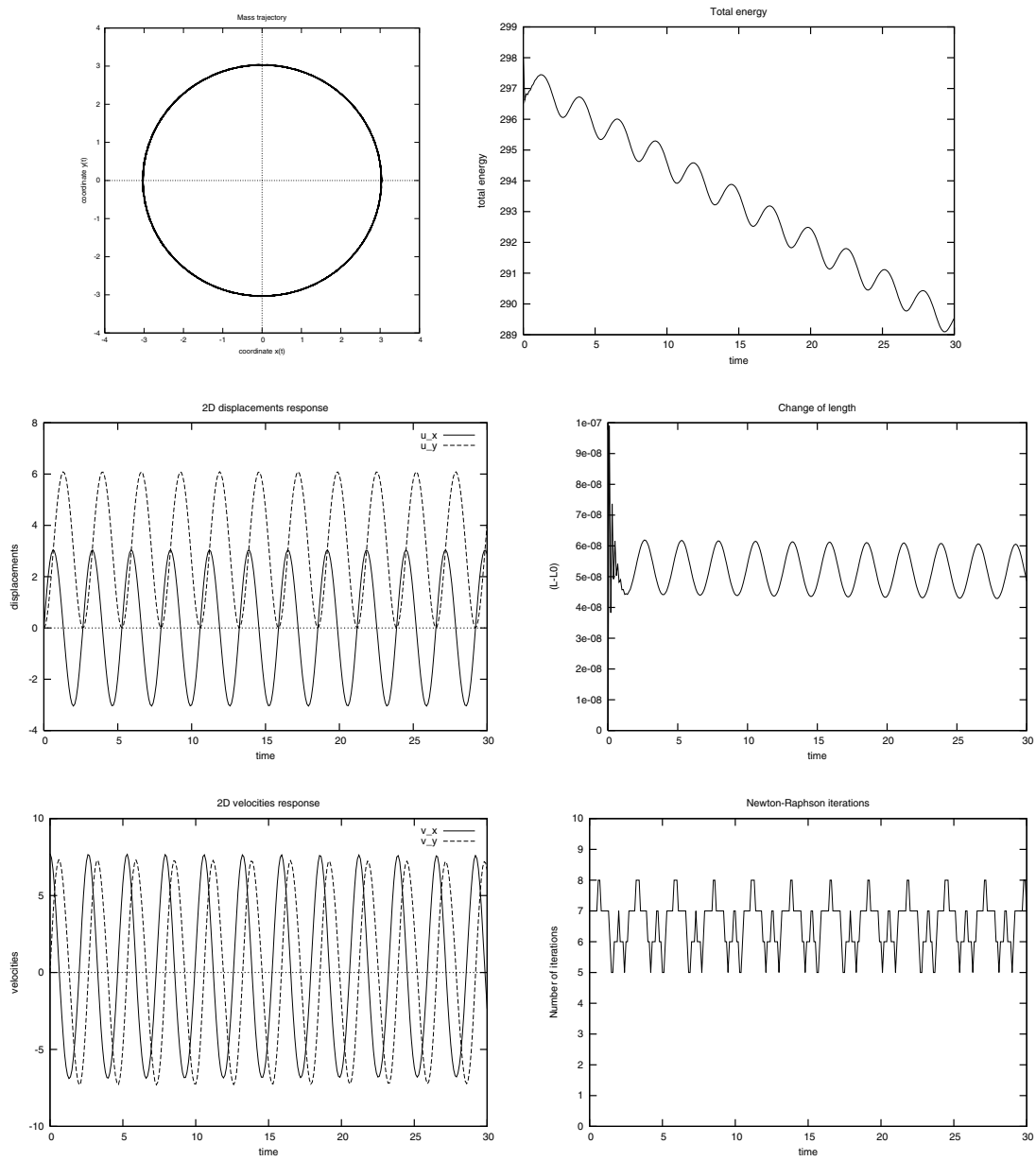


Figura 24. El péndulo simple. Solución con el esquema energía-momentum generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

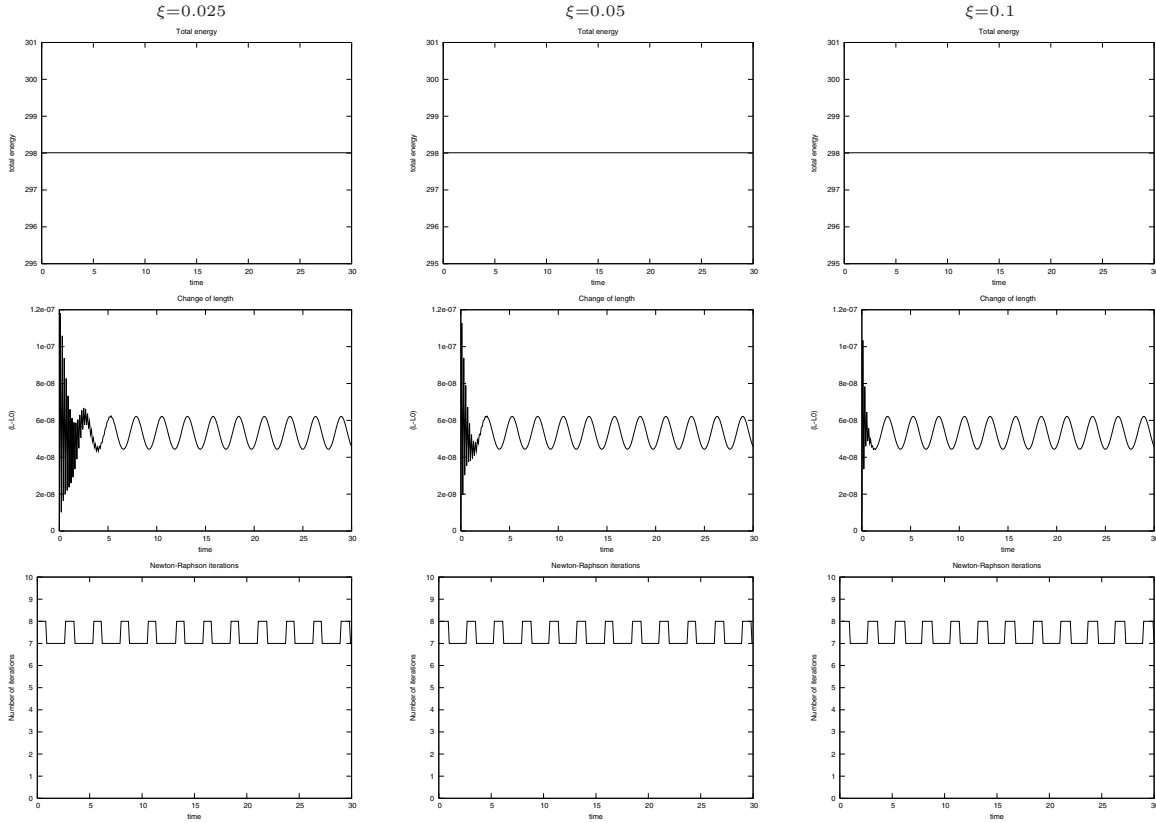


Figura 25. El péndulo simple. Solución con el esquema energía-momentum generalizado + ξ , $\rho_\infty=1$.

De acuerdo con las Figuras 22, 23, 24 y 25 se puede observar que los métodos de energía-momentum generalizado y de energía-momentum generalizado modificado han presentado la mejor performance entre los métodos aquí estudiados. Estos algoritmos conservan la energía, poseen disipación mínima para frecuencias bajas, presentan máxima disipación para frecuencias altas y introduce error de periodo y de amplitud de muy pequeña magnitud.

6.2 El péndulo elástico - Bathe

Este ejemplo ha sido analizado por KUHLE & CRISFIELD [1999]. En este apartado se considera el péndulo flexible. Las características geométricas y físicas, las condiciones iniciales y demás datos del problema, se describen a continuación:

- rigidez axial, $EA_0 = 10^4$ N;
- masa, $m = 10$ kg;
- longitud, $l = 3.0443$ m;
- aceleración de la gravedad, $g = 9.8$ m.s⁻²;
- paso de tiempo, $\Delta t = 0.05$ s;
- intervalo de tiempo, $t = 30$ s;
- numero de pasos, $N_t = 600$;
- tolerancia para la convergencia, $TOL = 10^{-5}$.

$$\text{posición inicial} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -3.0443 \text{ m} \end{cases} \quad (80a)$$

$$\text{condiciones iniciales} \begin{cases} \dot{u}_0 = 7.72 \text{ m.s}^{-1} \\ \ddot{u}_0 = 0 \end{cases} \quad (80b)$$

En la figura 26 se muestran el sistema de referencia adoptado, las características geométricas y las condiciones iniciales del péndulo elástico. Se ha discretizado dicho péndulo con un elemento de barra bi-articulado 2D. Notese que para este caso, hay dos grados de libertad restringidos y dos grados de libertad libres.

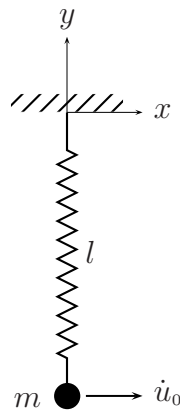


Figura 26. El péndulo elástico. Condiciones iniciales

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, la inclusión de un grado de libertad más resulta en el apareamiento de la oscilación axial de alta frecuencia, cuya máxima amplitud, de acuerdo con los resultados numéricos, no supera el valor de 120 mm, pues, aquí se considera la longitud del péndulo extensible, esto es, deformable elásticamente. Por otra parte, el desplazamiento angular varía casi linealmente respecto al tiempo, mientras que la velocidad y la aceleración oscilan con baja frecuencia. Aunque haya oscilaciones de alta frecuencia, debido a la deformabilidad del péndulo, no hay un crecimiento abrupto o desmesurado en la amplitud de la oscilación axial. Dicho comportamiento se observa en los resultados numéricos que se detallan a continuación.

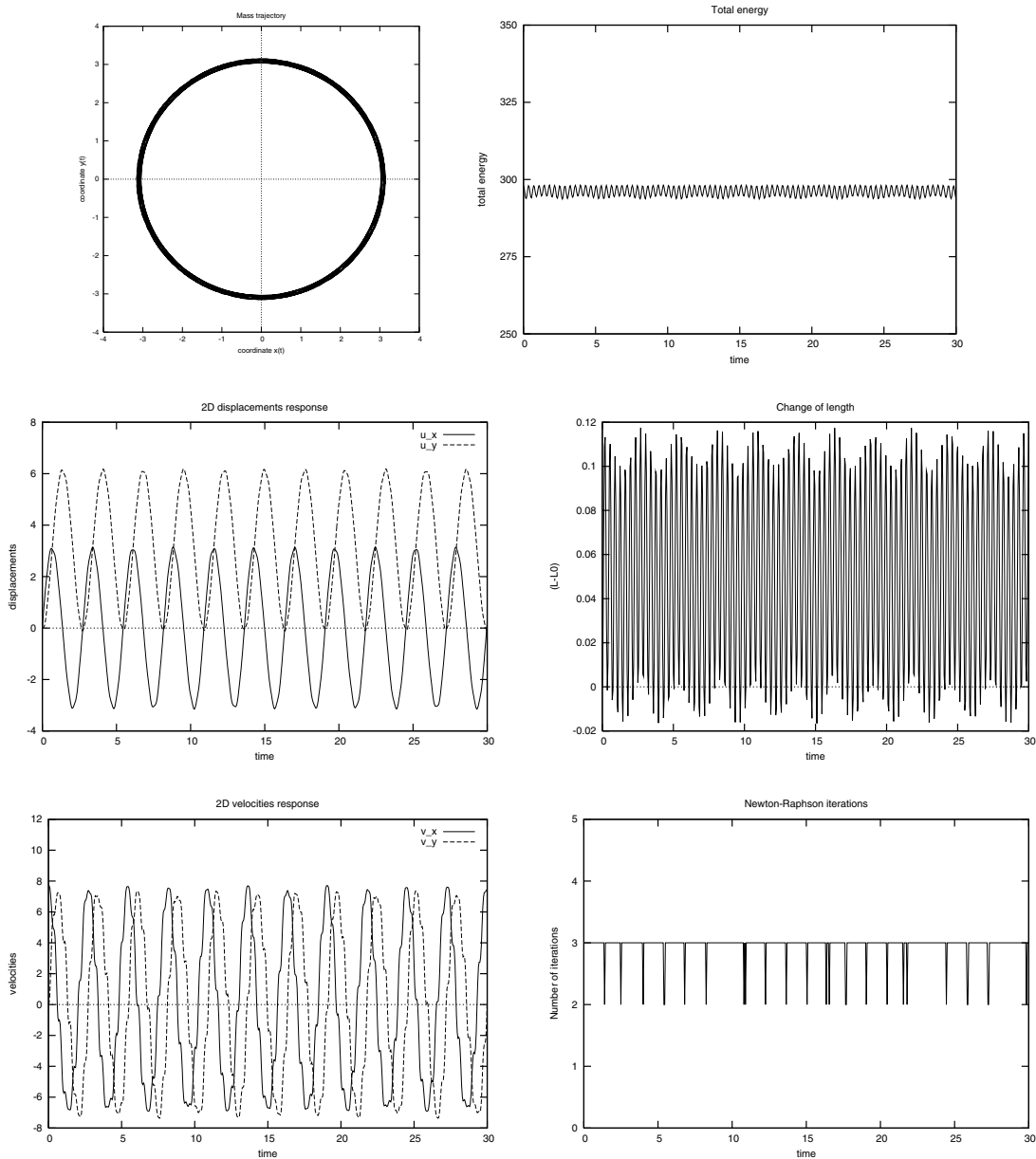


Figura 27. El péndulo elástico. Solución con el esquema Newmark, $\rho_\infty = 1$.

Con relación al método de Newmark sin disipación numérica, se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 28a; No conserva la energía total sin embargo no se observa un crecimiento abrupto de la misma como se puede notar en la Figura 28b; Los errores de periodo y de amplitud son de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 27c y 27e; Las oscilaciones axiales son de alta frecuencia pero se mantienen acotadas, además, las máximas amplitudes están por debajo de 120 mm como se muestra en la Figura 27d. No presenta fallos de convergencia de acuerdo con la Figura 27f.

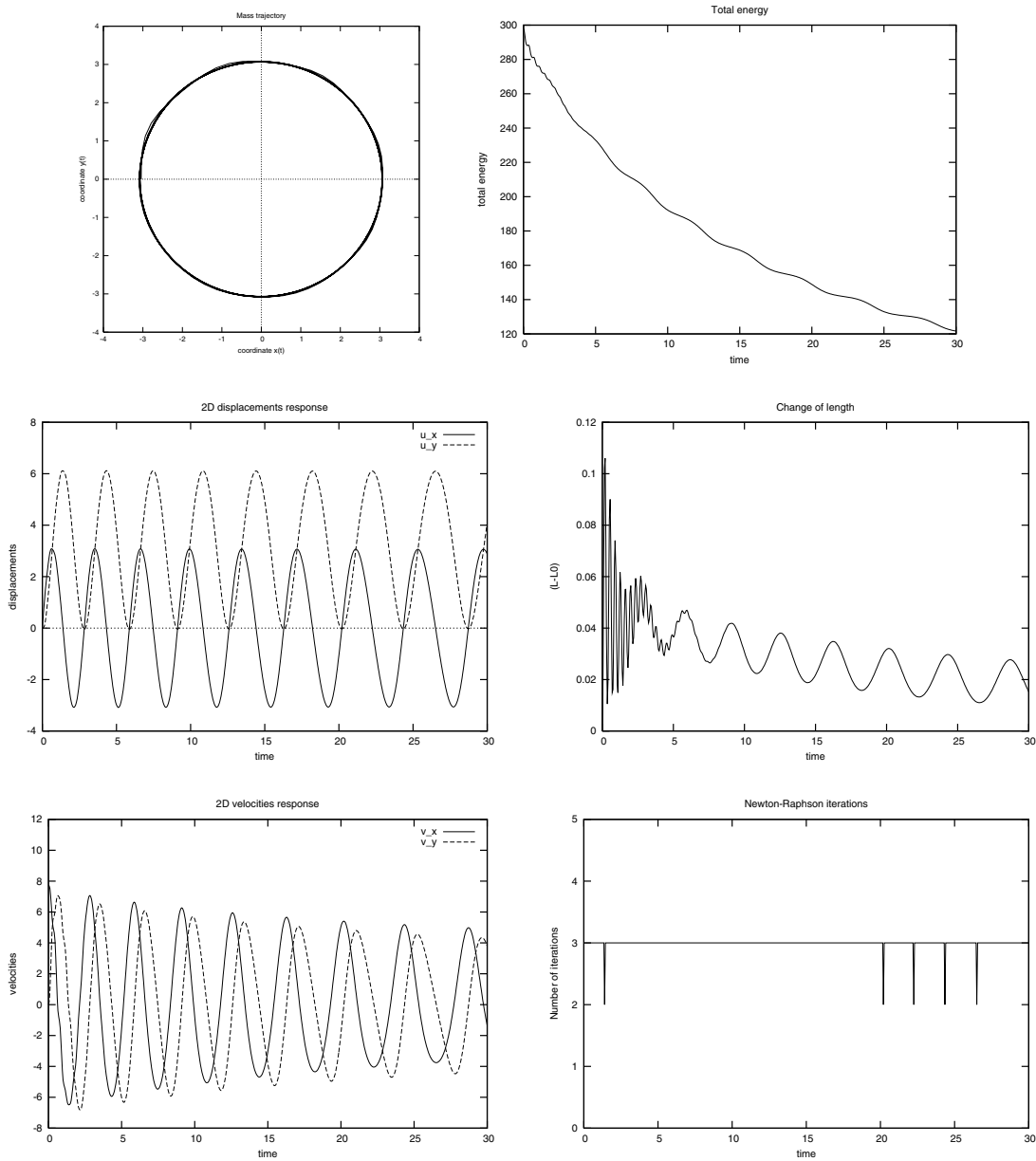


Figura 28. El péndulo elástico. Solución con el esquema Newmark disipativo, $\rho_{\infty} = 0.8$.

Por otra parte, respecto al método de Newmark con disipación numérica ($\rho_{\infty} = 0.8$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 28a; Disipa desmesuradamente la energía como se puede observar en la Figura 28b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 28d. Introduce errores de periodo y de amplitud de gran magnitud conforme se muestra en las Figuras 28c y 28e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 28f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 100 mm conforme se muestra en la Figura 28d.

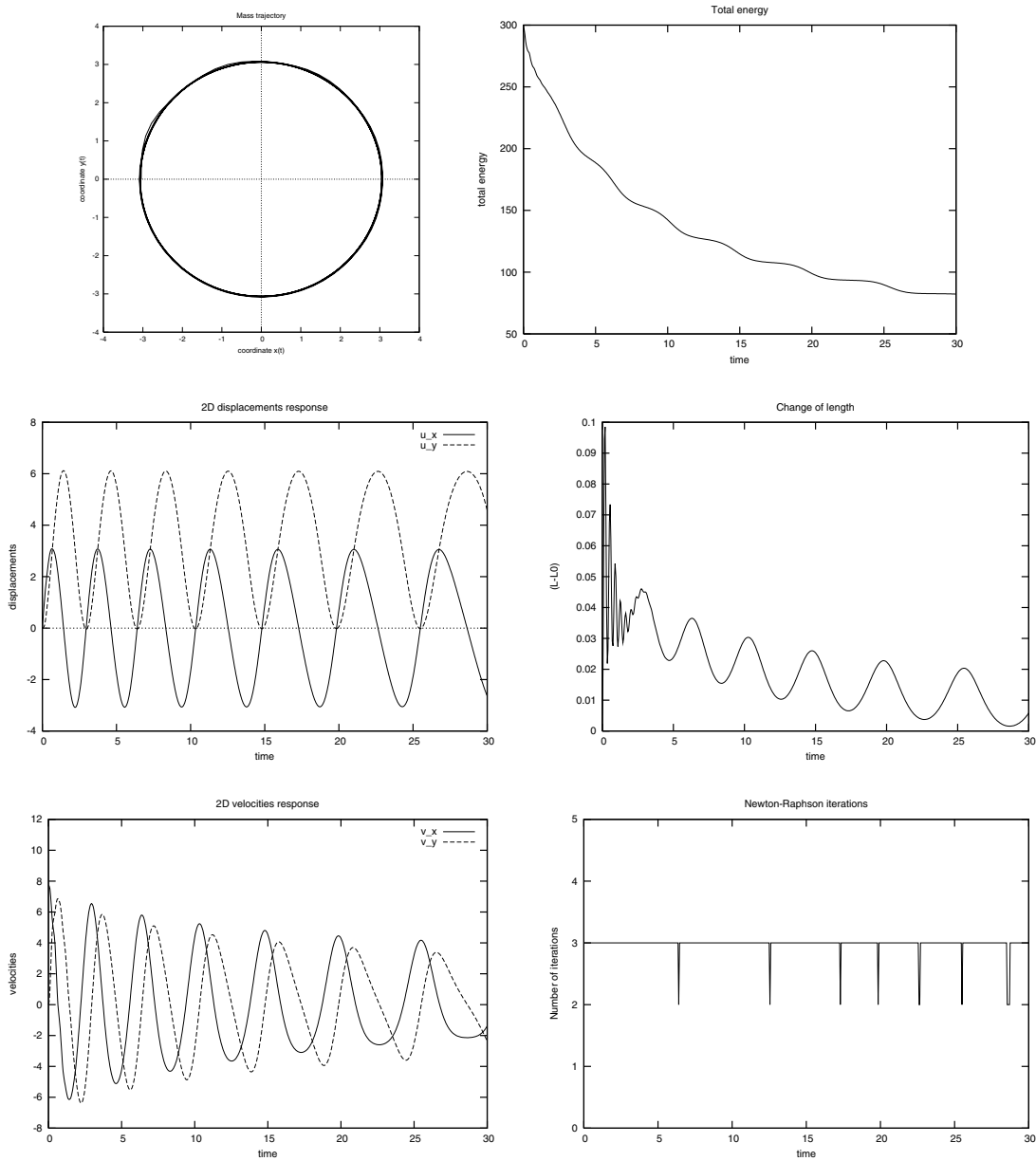


Figura 29. El péndulo elástico. Solución con el esquema Newmark disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método de Newmark con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 29a; Disipa desmesuradamente la energía como se puede observar en la Figura 29b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 29d. Introduce errores de periodo y de amplitud de gran magnitud conforme se muestra en la Figura 29e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 29f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 100 mm conforme se muestra en la Figura 29d.

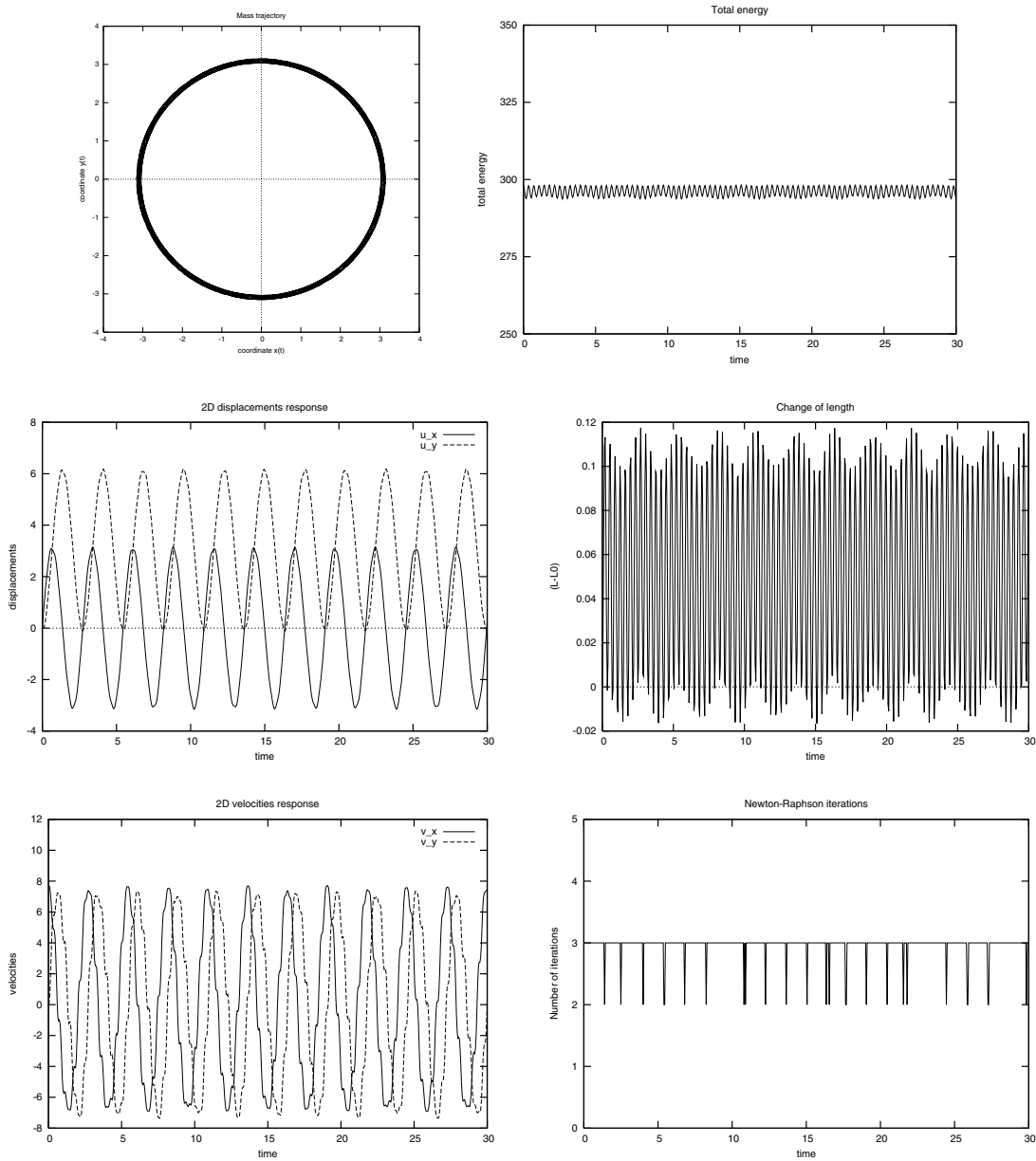


Figura 30. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Bossak, $\rho_\infty = 1$.

Conforme se ha comentado anteriormente, el método α de Bossak sin disipación obtiene los mismos resultados que el método de Newmark con $(\rho_\infty = 1)$, que se puede observar en las graficas correspondientes a la Figura 30.

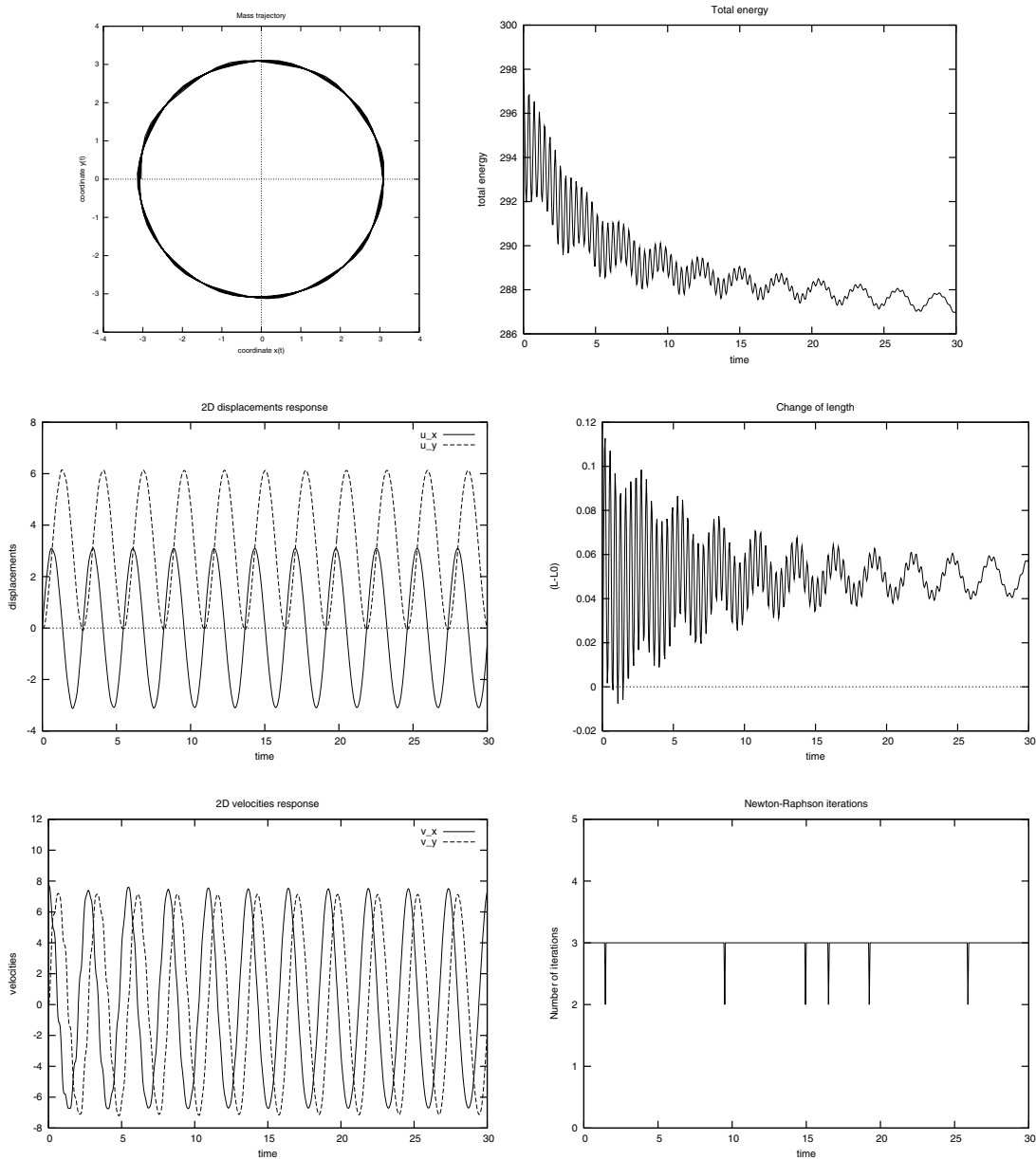


Figura 31. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Bossak disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Con relación al método α de Bossak con disipación numérica $\rho_\infty = 0.8$, se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 31a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 286 N.m como se puede observar en la Figura 31b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 31d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 31c y 31e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 31f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 31d.

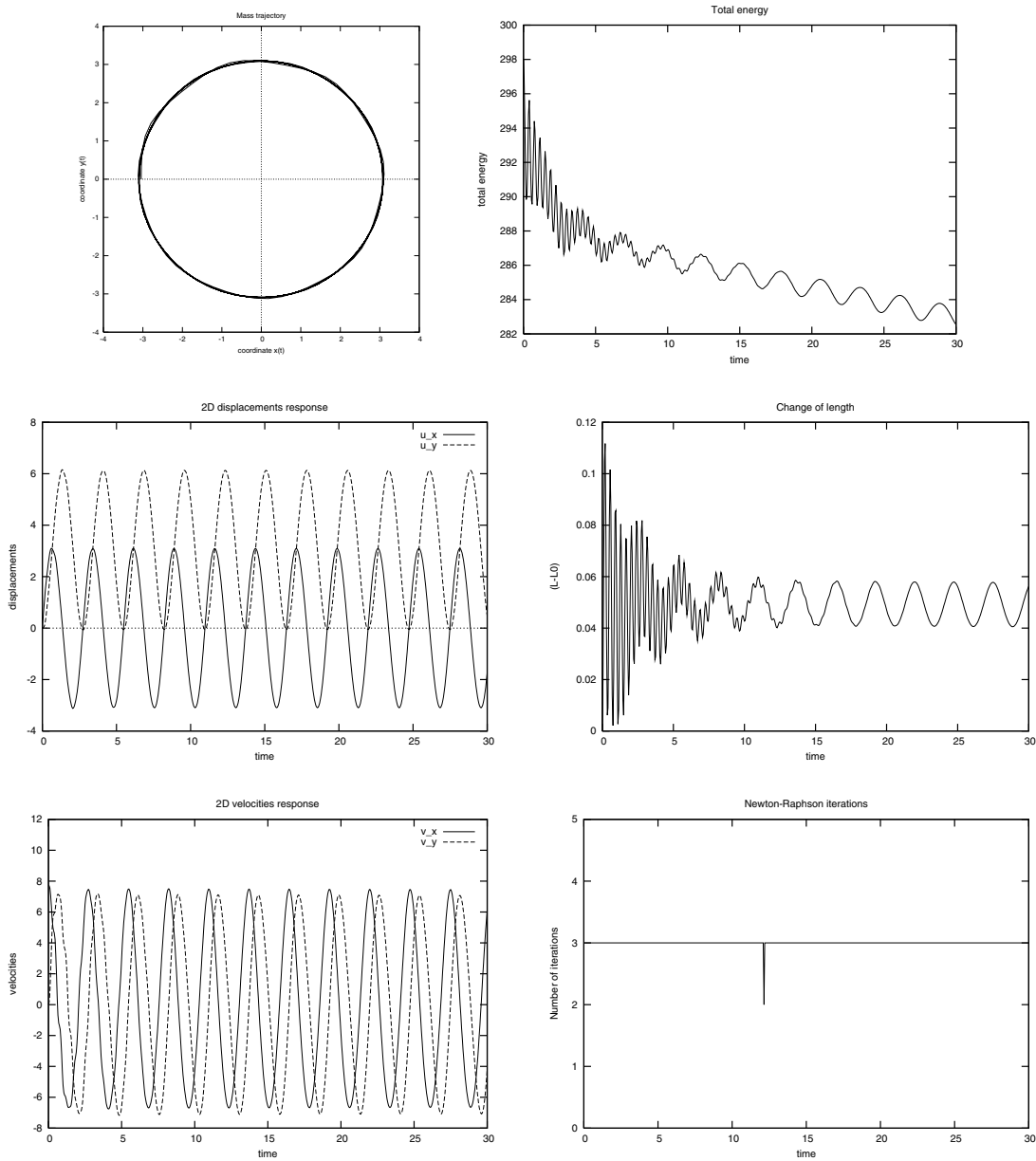


Figura 32. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Bossak disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método α de Bossak con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 32a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 282 N.m como se puede observar en la Figura 32b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 32d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 32c y 32e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 32f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 32d.

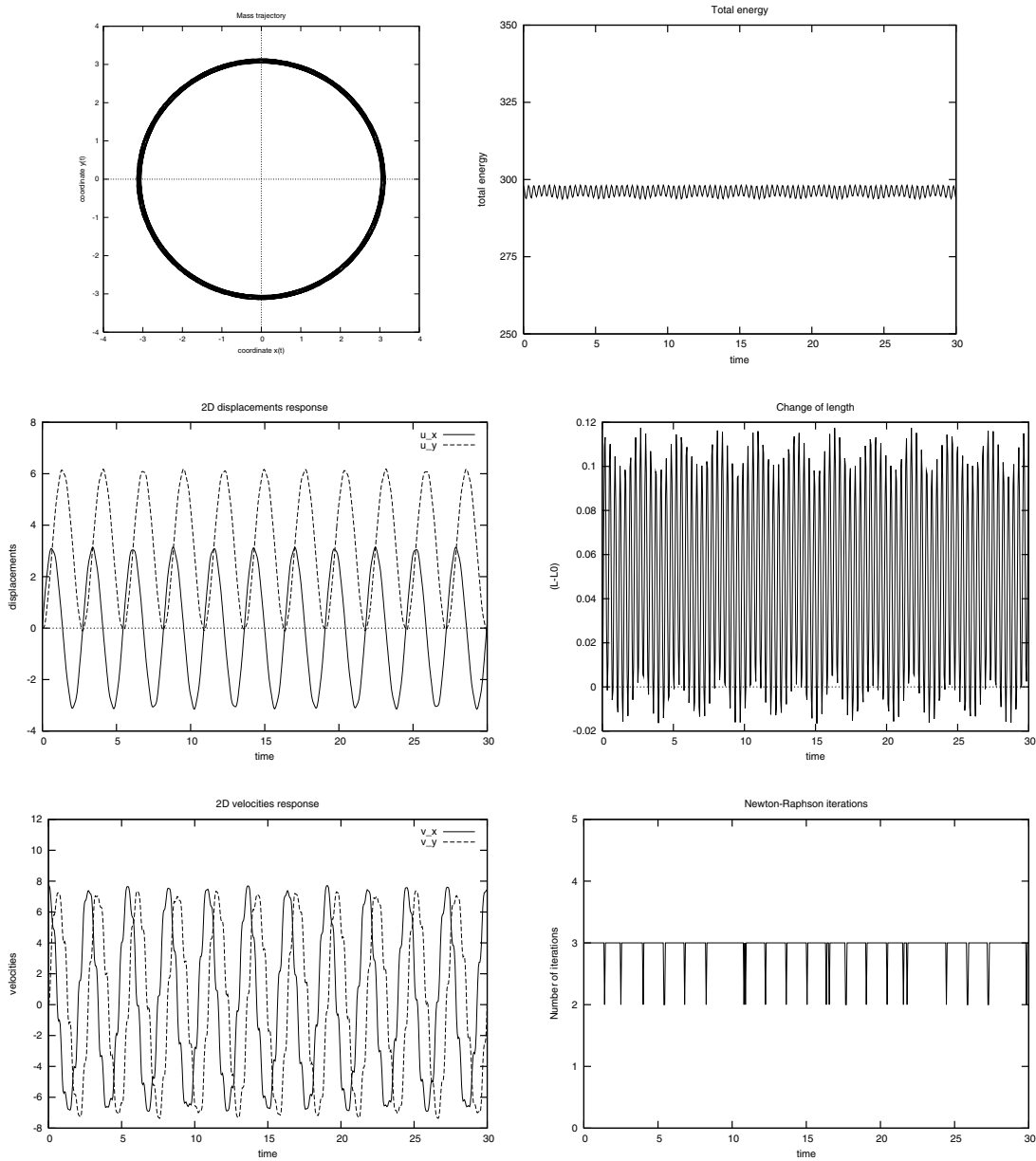


Figura 33. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Hilber, $\rho_\infty = 1$.

Conforme se ha comentado anteriormente, el método α de Hilber sin disipación obtiene los mismos resultados que el método de Newmark con ($\rho_\infty = 1$), que se puede observar en las graficas correspondientes a la Figura 33.

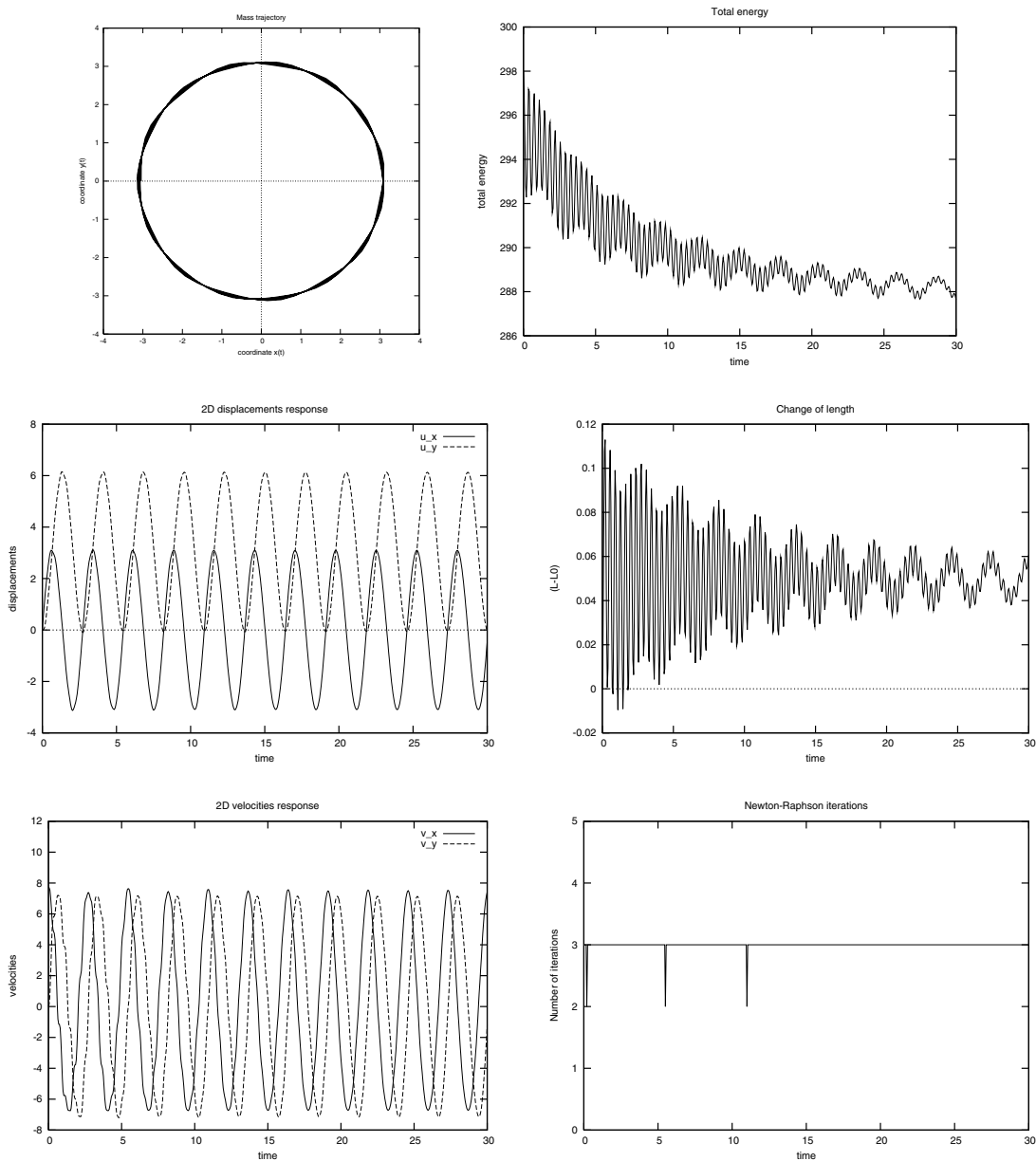


Figura 34. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Hilber disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Con relación al método α de Hilber con disipación numérica $\rho_\infty = 0.8$, se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 34a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 288 N.m como se puede observar en la Figura 34b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 34d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 34c y 34e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 34f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 34d.

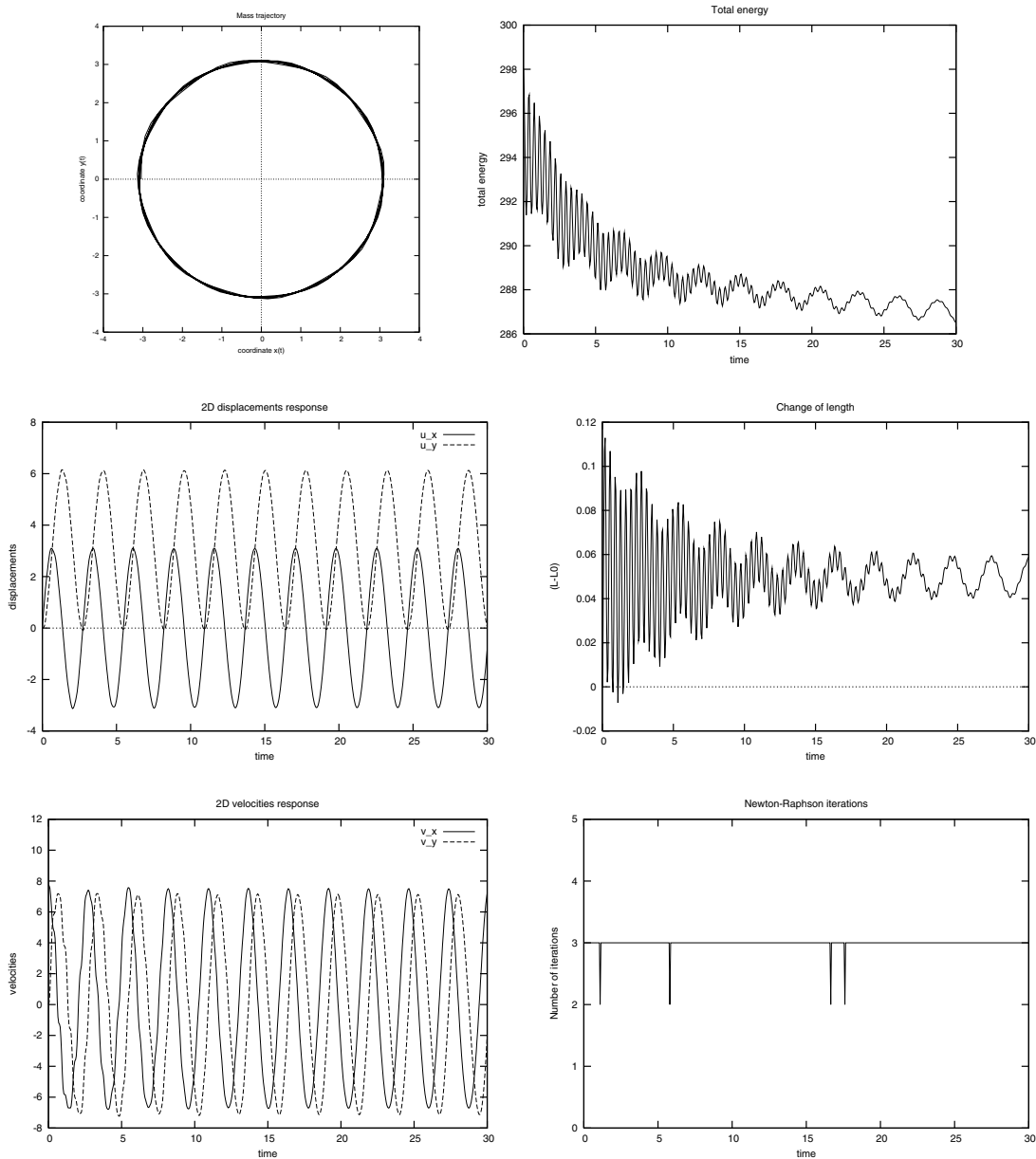


Figura 35. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -Hilber disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método α de Hilber con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 35a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 286 N.m como se puede observar en la Figura 35b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 35d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 35c y 35e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 35f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 35d.

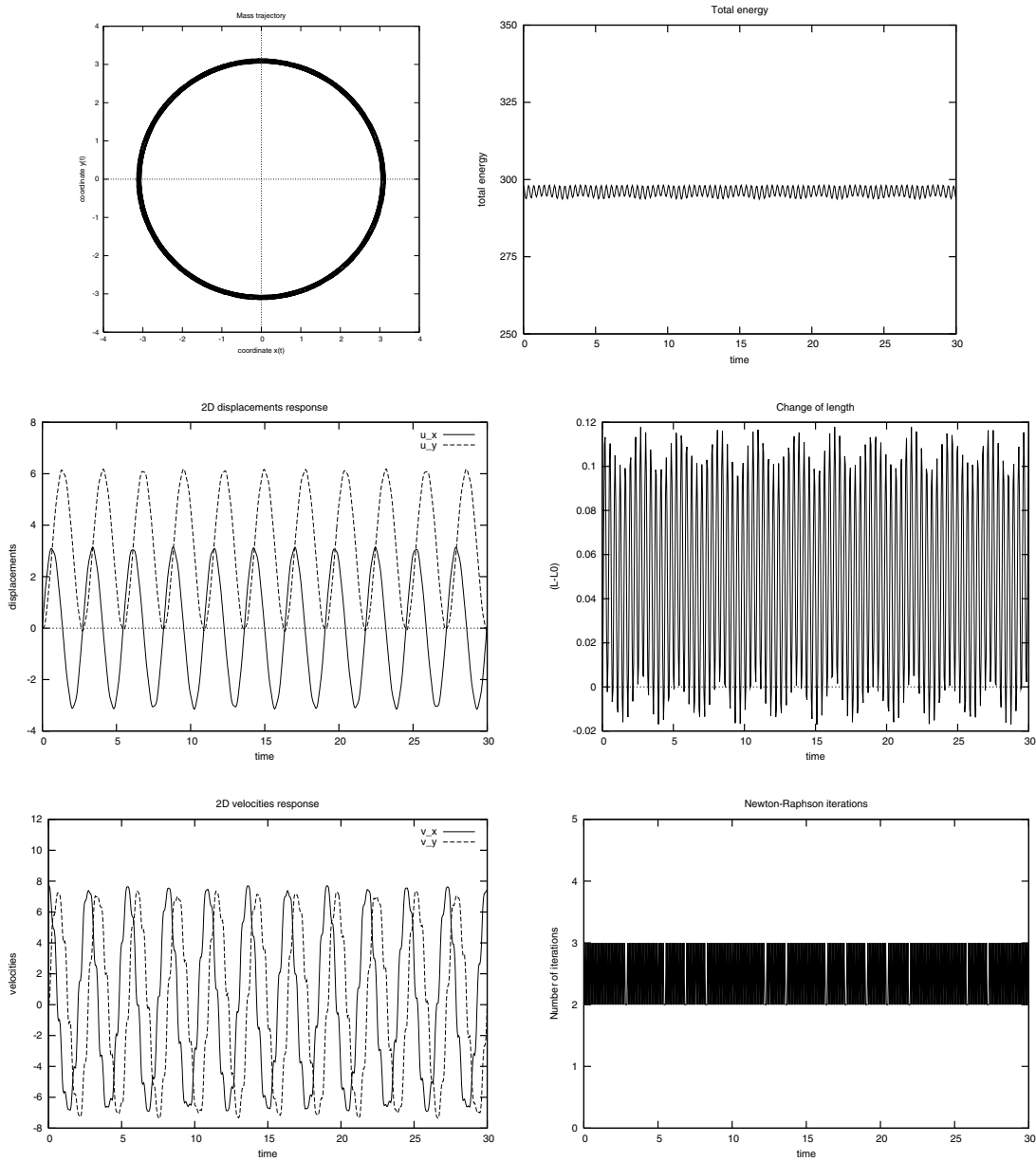


Figura 36. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -generalizado, $\rho_\infty = 1$.

Con relación al método α generalizado sin disipación numérica, se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 36a; No conserva la energía total sin embargo no se observa un crecimiento abrupto de la misma como se puede notar en la Figura 36b; Los errores de periodo y de amplitud son de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 36c y 36e; Las oscilaciones axiales son de alta frecuencia pero se mantienen acotadas, además, las máximas amplitudes están por abajo de 120 mm como se muestra en la Figura 36d. No presenta fallos de convergencia de acuerdo con la Figura 36f.

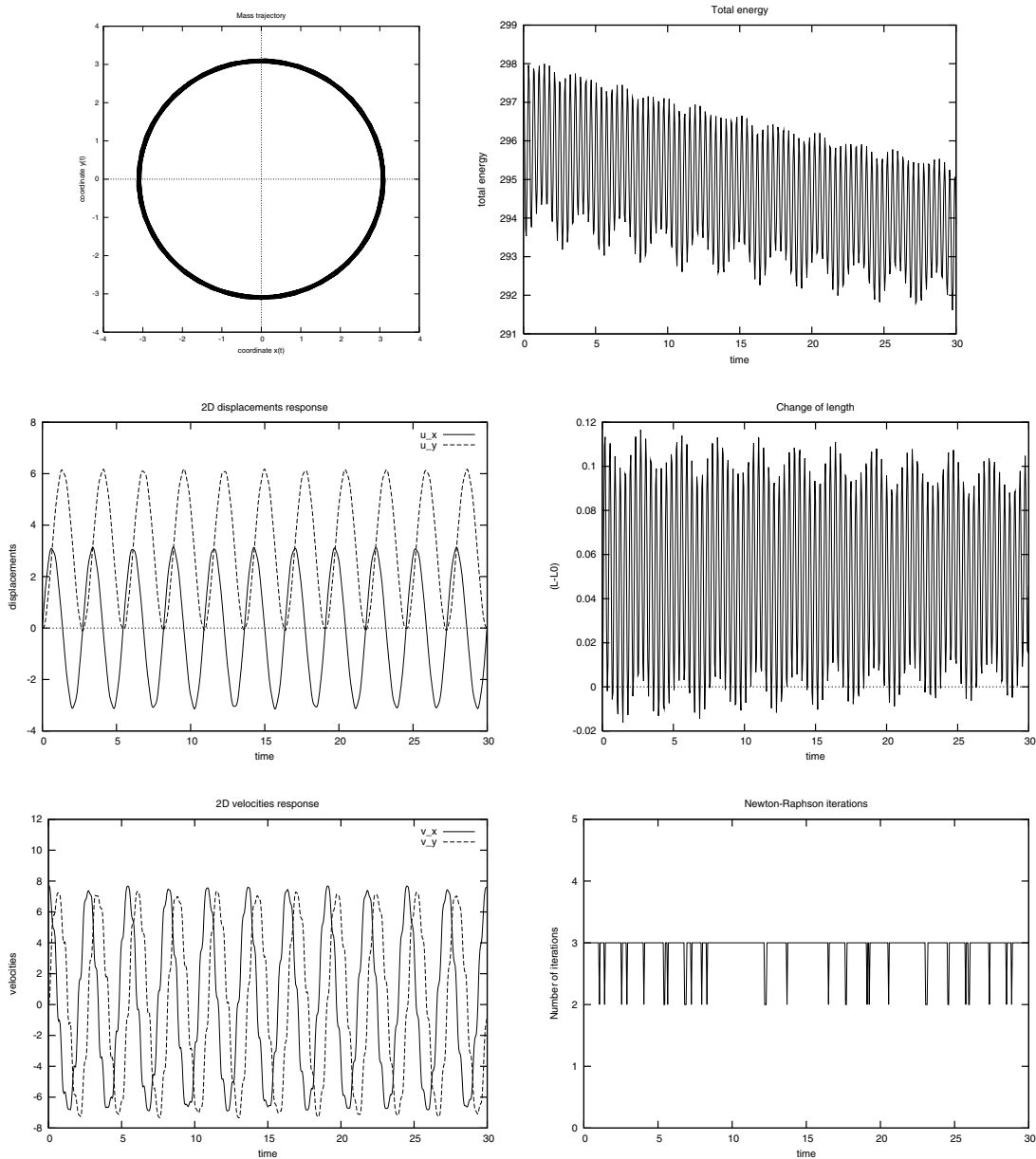


Figura 37. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

De los resultados obtenidos a través del método α generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 37a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 292 N.m como se puede observar en la Figura 37b. Disipa muy poco las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 37d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 37c y 37e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 37f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 37d.

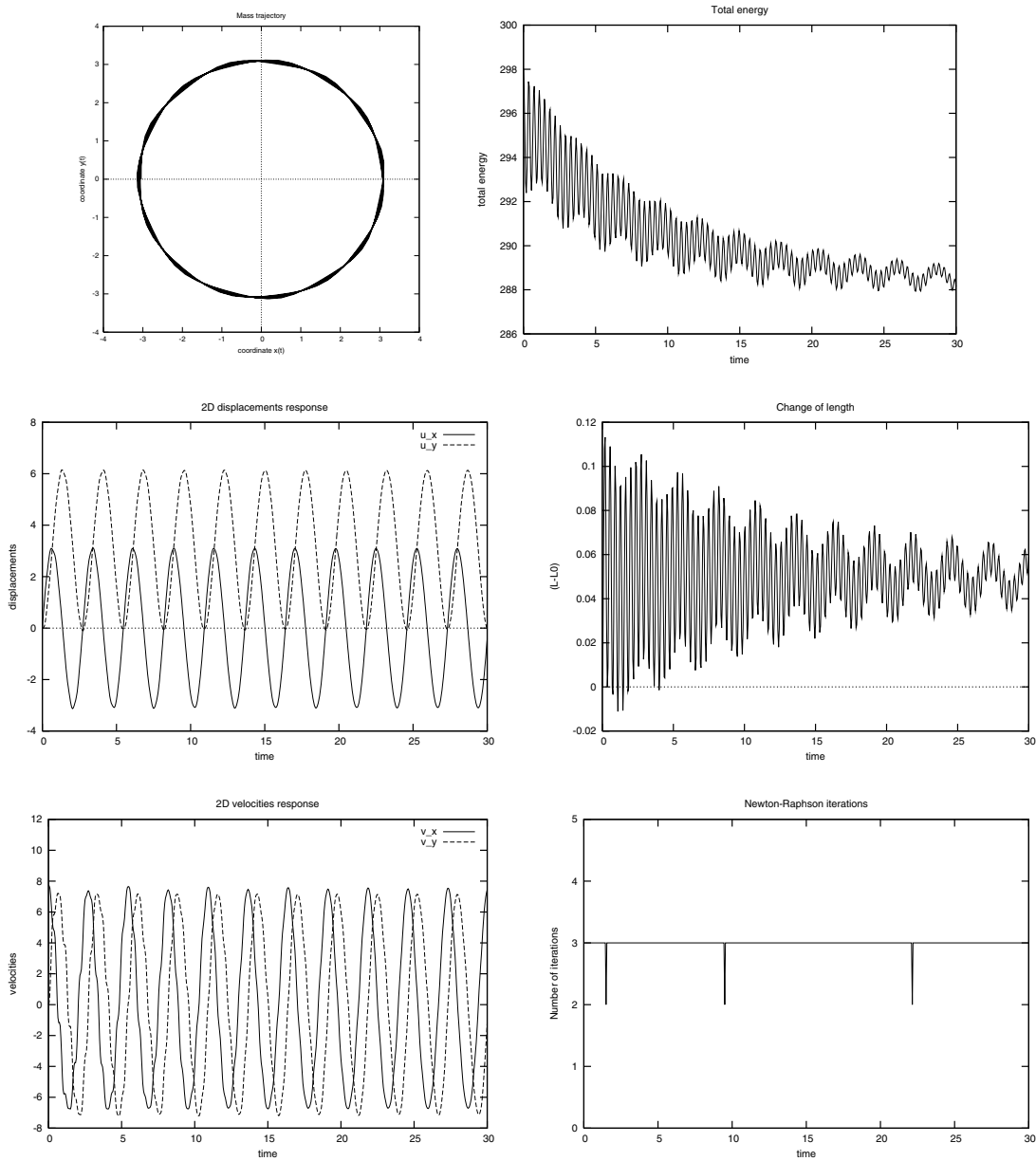


Figura 38. El péndulo elástico. Solución con el esquema α -generalizado disipativo, $\rho_\infty=0.6$.

Por otra parte, respecto al método α generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty=0.8$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 38a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 288 N.m como se puede observar en la Figura 38b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 38d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 38c y 38e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 38f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 110 mm conforme se muestra en la Figura 38d.

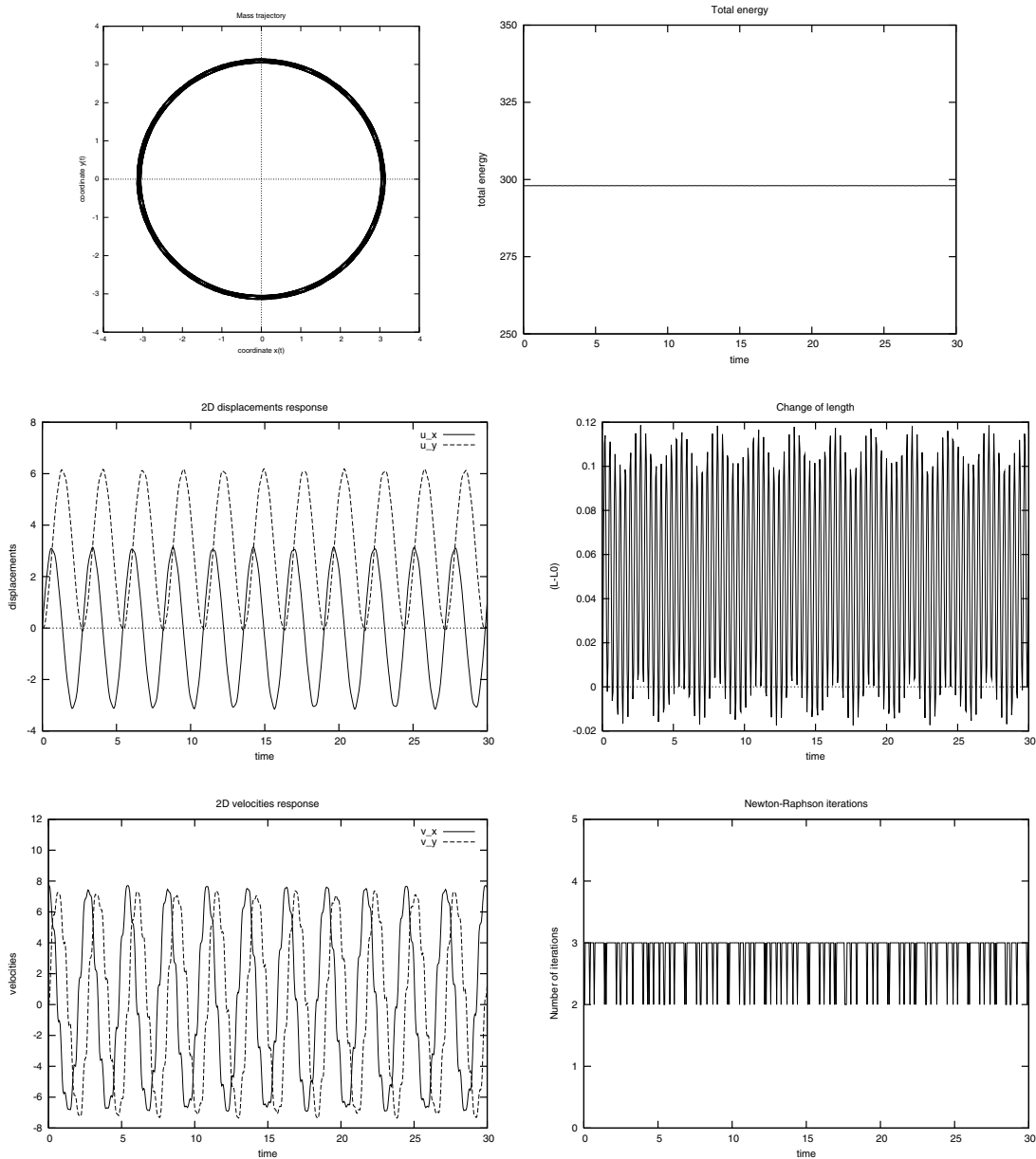


Figura 39. El péndulo elástico. Solución con el esquema energía-momentum generalizado, $\rho_\infty = 1$.

Con relación al método de energía-momentum generalizado sin disipación numérica, se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 39a; Conserva perfectamente la energía total como se puede notar en la Figura 39b; Los errores de periodo y de amplitud son de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 39c y 39e; Las oscilaciones axiales son de alta frecuencia pero se mantienen acotadas, además, las máximas amplitudes están por debajo de 120 mm como se muestra en la Figura 39d. No presenta fallos de convergencia de acuerdo con la Figura 39f.

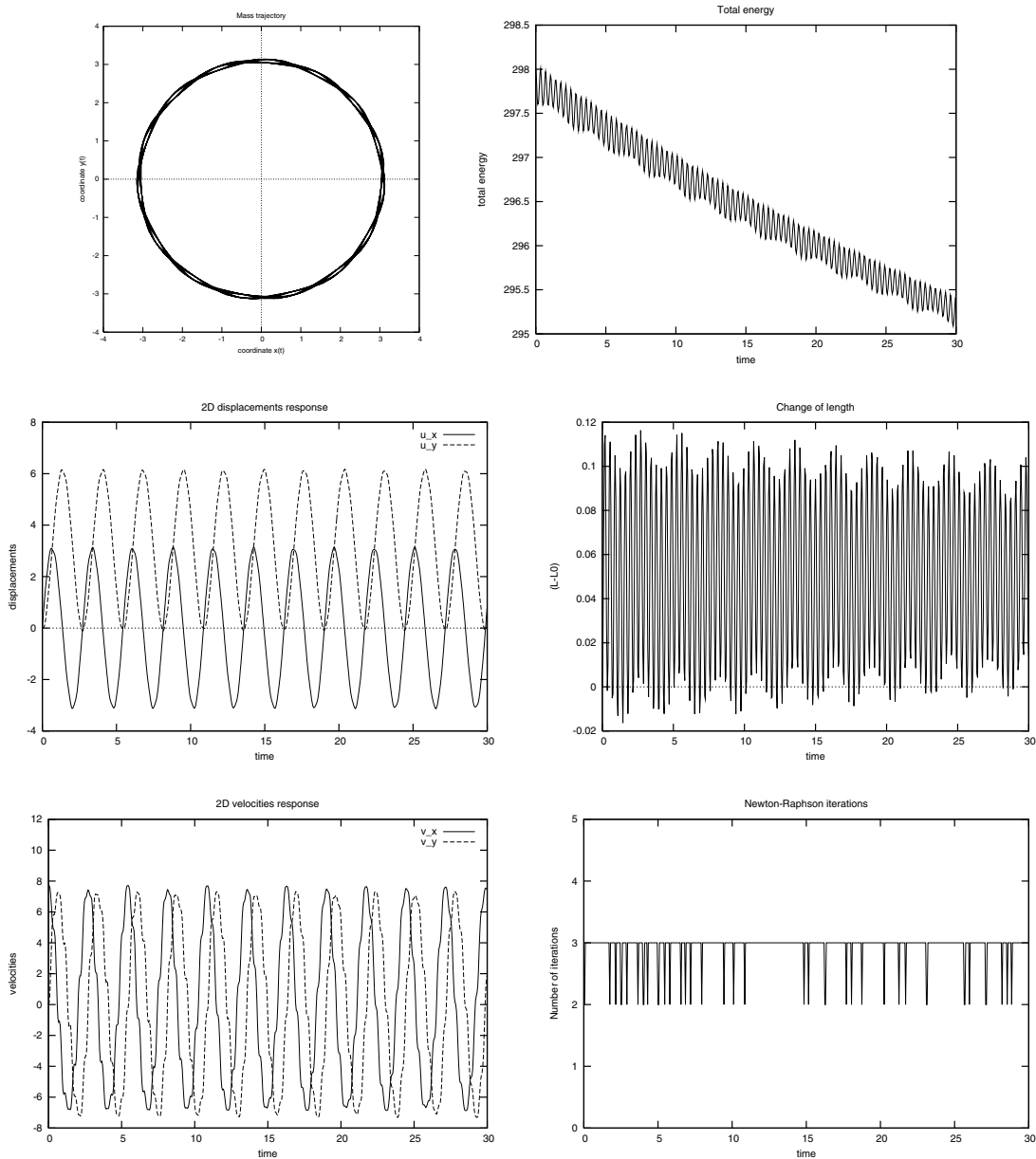


Figura 40. El péndulo elástico. Solución con el esquema energía-momentum generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.8$.

Por otra parte, respecto al método energía-momentum generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.8$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 40a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 295 N.m como se puede observar en la Figura 40b. Disipa muy poco las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 40d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 40c y 40e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 40f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 40d.

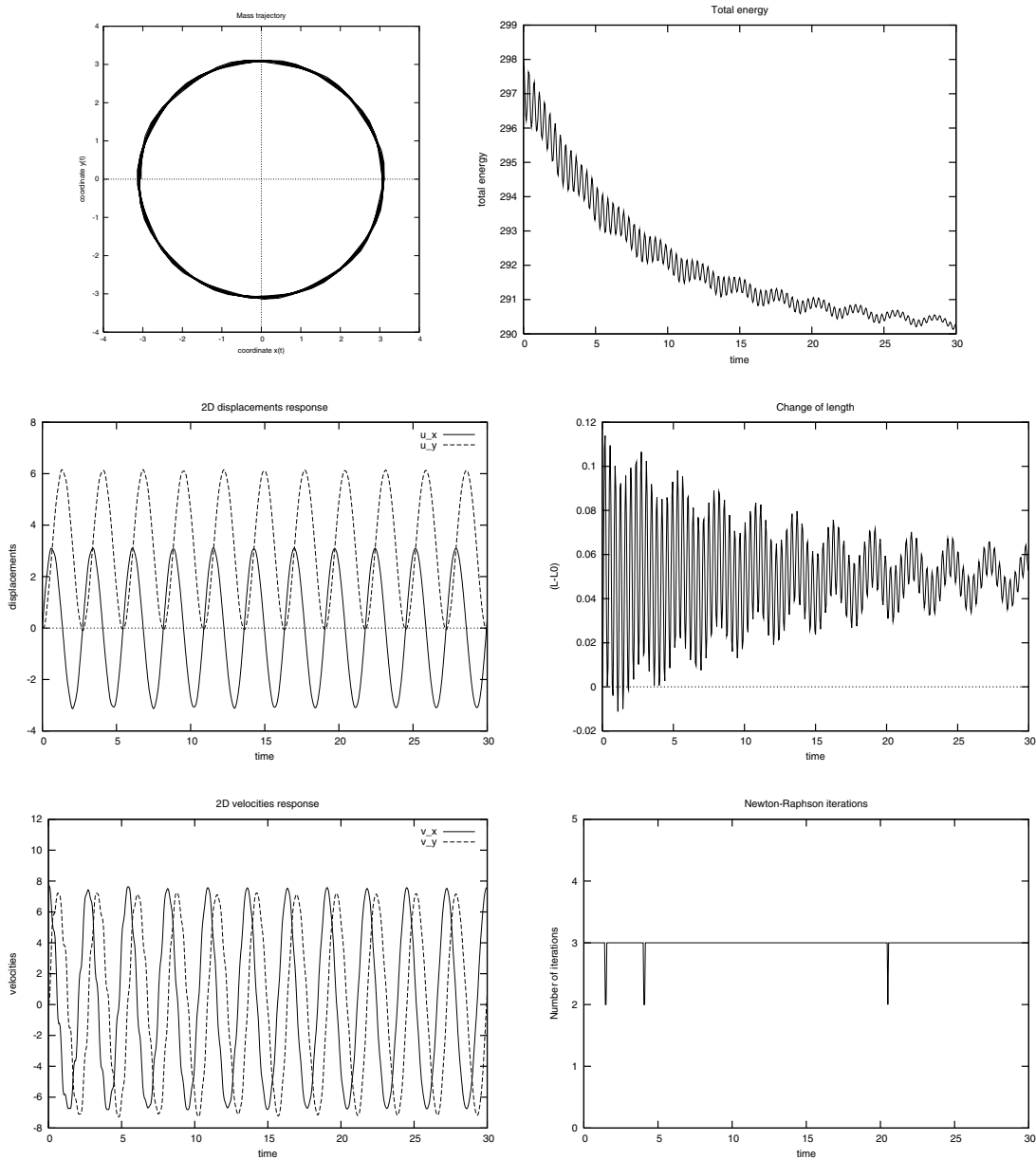


Figura 41. El péndulo elástico. Solución con el esquema energía-momentum generalizado disipativo, $\rho_\infty = 0.6$.

De los resultados obtenidos a través del método energía-momentum generalizado con disipación numérica ($\rho_\infty = 0.6$), se ha observado que: Obtiene la trayectoria correcta como se muestra en la Figura 41a; Disipa la energía del valor 298 N.m al valor 290 N.m como se puede observar en la Figura 41b. Disipa las oscilaciones axiales de alta frecuencia conforme se muestra en la Figura 41d. Introduce errores de periodo y de amplitud de pequeña magnitud conforme se muestra en las Figuras 41c y 41e. No presenta fallos de convergencia lo que se puede comprobar en la Figura 41f. Las máximas amplitudes de las oscilaciones axiales son del orden de 120 mm conforme se muestra en la Figura 41d.

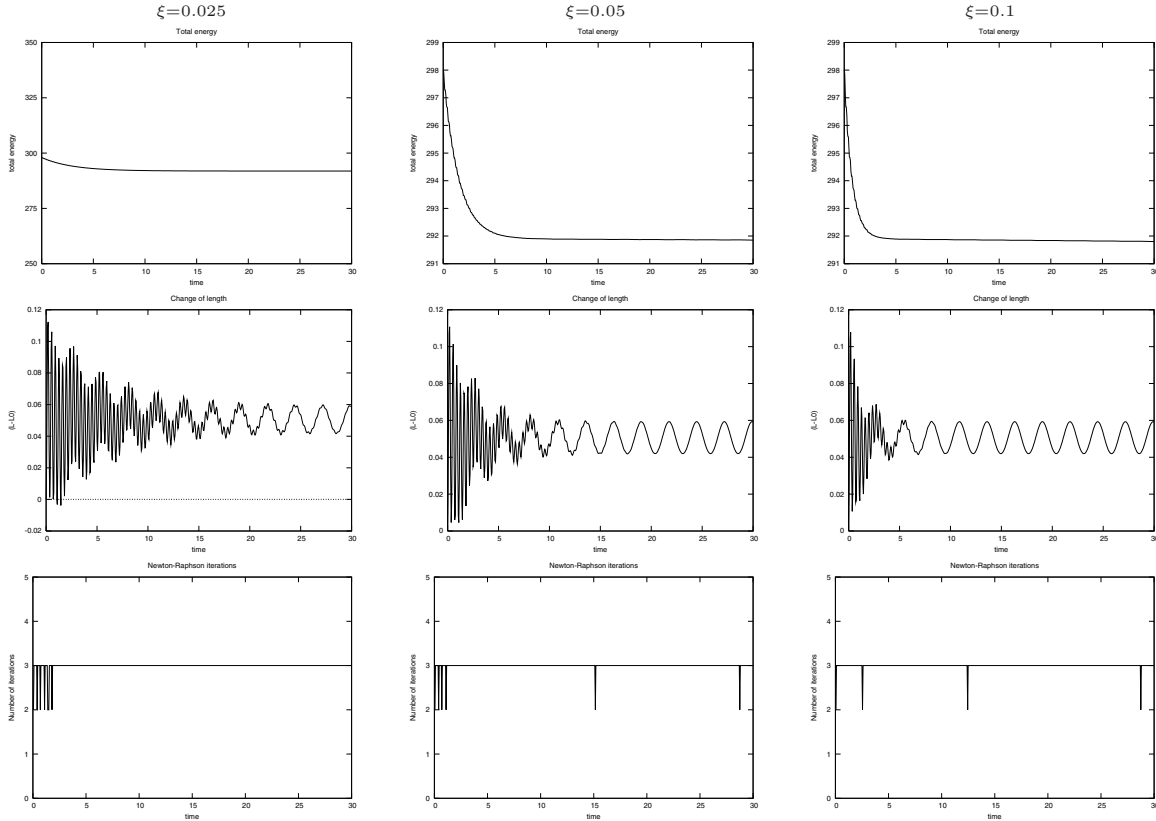


Figura 42. El péndulo elástico. Solución con el esquema energía-momento generalizado + ξ , $\rho_\infty=1$.

Por último, en la Figura 42 se puede observar que para distintos valores de ξ , el método de energía-momento generalizado modificado presenta un decaimiento de la energía total. Por otra parte, se nota la disipación de las oscilaciones axiales de alta frecuencia, bien como, no presenta fallos de convergencia.

7 Conclusiones

El principal objetivo en este trabajo ha sido comparar la performance de distintos esquemas de integración temporal aplicados a problemas de dinámica no-lineal. Se ha estudiado dos importantes propiedades que es la capacidad de mantenerse numericamente estable y de disipar altas frecuencias. Desde este punto de vista de extraer las siguientes conclusiones:

- El método de la regla del trapecio y el método del punto medio no garantizan la estabilidad numérica, bien como, no tienen la capacidad de disipar altas frecuencias (ver Figuras 10, 13, 16 y 19);
- Al incluir la disipación numérica los métodos de Newmark, α de Bossak, α de Hilber y α generalizado, han sido estables numericamente (ver Figuras 11, 12, 15, 18 y 21), aunque no para cualquiera elección del parámetro de disipación (ver Figuras 14, 17 y 20);

- La principal desventaja del método de Newmark es la excesiva disipación lo que implica en errores de periodo y de amplitud muy grandes, esto es, también disipa de manera excesiva bajas frecuencias (ver Figuras 11 y 12);
- La introducción de la conservación algorítmica de la energía, ecuación (63), dentro del esquema de Newmark (método energía-momentum) garantiza la estabilidad numérica en régimen no-lineal (ver Figura 22);
- El método de energía-momentum generalizado garantiza la estabilidad numérica además de disipar altas frecuencias (ver Figura 23 y 24);
- Si se hace una buena elección de los parámetros de disipación el método de energía-momentum generalizado garantiza la estabilidad incondicional, así como, disipa altas frecuencias;
- La principal desventaja del método de energía-momentum generalizado es que posee precisión de primer orden;
- Que parámetros escoger para garantizar la estabilidad incondicional utilizando el método de energía-momentum generalizado es tema abierto a la investigación

Es importante resaltar aunque los métodos de energía-momentum (MEM), energía-momentum generalizado (EMG) y energía-momentum generalizado modificado (MEMG+ ξ) hayan obtenido buenos resultados para los ejemplos aquí propuestos, esto no garantiza el buen comportamiento de dichos métodos frente a otros problemas de dinámica no-lineal. Por último, se puede decir que hay la necesidad de investigar nuevos algoritmos que puedan superar algunas debilidades que aún persisten en buena parte de los esquemas aquí estudiados, principalmente, respecto a la necesidad de obtener la estabilidad incondicional.

Referencias

- [1] ABELL M.L., BRASELTON J.P. [2004], *Differential equation with Mathematica*, Third Edition, Elsevier Academic Press.
- [2] ARMERO F., PETŐCZ E. [1996], A new class of conserving algorithms for dynamic contact problems. In: Désidéri J.A., LeTallec P., Oñate E., Périaux J., Stein E. Editors. Numerical Methods in Engineering '96. *Proc. 2nd ECCOMAS Conf. on Numerical Methods in Engineering*, Paris, France, 9-13 September, 861-867.
- [3] ARMERO F., PETŐCZ E. [1998], Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **158**(3-4), 269-300.
- [4] ARMERO F., ROMERO I. [2001a], On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I: low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 2603-2649.

- [5] ARMERO F., ROMERO I. [2001b], On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II: second-order methods, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**, 6783-6824.
- [6] ARMERO F., ROMERO I. [2003], Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear Cosserat rods, *Computational Mechanics*, **31**, 3-26.
- [7] BATHE K.J. [1996], *Finite element procedures*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc.
- [8] BELYTSCHKO T., SCHOEBERLE D.F [1975], On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **45**, 865-869.
- [9] CHUNG J., HULBERT G.M. [1993], A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **60**, 371-375.
- [10] CRISFIELD M.A. [1991], *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1, Essentials, John Wiley & Sons.
- [11] CRISFIELD M.A. [1997a], *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2, Advanced topics, John Wiley & Sons.
- [12] CRISFIELD M.A., GALVANETTO U., JELENÍČ G. [1997b], Dynamics of 3-D co-rotational beams, *Computational Mechanics*, **20**, 507-519.
- [13] CRISFIELD M.A., SHI J. [1994], A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **37**, 1897-1913.
- [14] CRISFIELD M.A., JELENÍČ G., ZHONG H.G., FAN Z. [1996a], Static and dynamic non-linear analysis of structures, In: Désidéri J.A., Hirsch C., LeTallec P., Oñate E., Pandolfi M., Périaux J., Stein E., Editors. *Computational Methods in Applied Sciences'96*, Paris, 9-13 September, 9-21.
- [15] CRISFIELD M.A., SHI J. [1996b], An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements, *Nonlinear Dynamics*, **9**, 37-52.
- [16] GALVANETTO U., CRISFIELD M.A. [1996], An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of planar beam structures, *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, **39**, 2265-2282.
- [17] GÉRADIN M., CARDONA A. [2001], *Flexible multibody dynamics*, John Wiley & Sons.
- [18] GÉRADIN M., RIXEN D. [1997], *Mechanical vibrations*, Second Edition, John Wiley & Sons.
- [19] HAIRER E., LUBICH C., WANNER G. [2002], *Geometric numerical integration: Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag.

- [20] HILBER H.M., HUGHES T.J.R., TAYLOR R.L. [1977], Improved numerical dissipation for the time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **5**, 283-292.
- [21] HUGHES T.J.R. [1987], *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, Inc.
- [22] HUGHES T.J.R., CAUGHEY T.K., LIU W.K. [1978], Finite element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy, *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of the ASME, **45**, 366-370.
- [23] KUHL D., CRISFIELD M.A. [1999], Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **45**, 569-599.
- [24] KUHL D., RAMM E. [1996a], Constraint energy momentum algorithm and its application to nonlinear dynamics of shells, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **136**, 293-315.
- [25] KUHL D., RAMM E. [1996b], Conservation of energy and momentum for implicit single step time integration schemes, In: Augusti G., Borri C., Spinelli P., Editors. *Structural Dynamics, Eurodyn'96 - (3rd) European Conference on Structural Dynamics*, Florence, 5-8 June, 349-356.
- [26] KUHL D., RAMM E. [1998], Generalized energy-momentum method for non-linear dynamics of shells. In: Idelson S.R., Oñate E., Dvorkin E.N., Editors. *Computational Mechanics, New Trends and Applications. Proc. 4th World Cong. on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 29 June - 2 July.
- [27] KUHL D., RAMM E. [1999], Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **178**, 343-366.
- [28] LEWIS D., SIMO J.C. [1994], Conserving algorithms for the dynamic of Hamiltonian systems on Lie groups, *Journal of Nonlinear Science*, **4**(3), 253-299.
- [29] NEWMARK N.M. [1959], A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, Proceedings of the ASCE, **85 (EM3)**, 67-94.
- [30] OLLER S. [2002], *Dinámica no-lineal*, Monografía CIMNE N° 63.
- [31] ROMERO I., ARMERO F. [2002], An objective finite element approximation of the kinematics of geometrically exact rods and its use in the formulation of an energy-momentum conserving scheme in dynamics, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **54**, 1683-1716.
- [32] SILVA W.T.M. [2001], Análisis no lineal elástico de estructuras de barras articuladas con diferentes medidas de deformaciones, *22 Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, November 7-9, Campinas, SP - Brasil, CDROM, 1-20.

- [33] SIMO J.C., TARNOW N., DOBLARÉ M. [1995], Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**, 1431-1473.
- [34] SIMO J.C., TARNOW N. [1992a], The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **43**, 757-792.
- [35] SIMO J.C., TARNOW N. [1994], A new energy and momentum conserving algorithm for the nonlinear dynamics of shells, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **37**(15), 2527-2549.
- [36] SIMO J.C., TARNOW N., WONG K.K. [1992b], Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **100**, 63-116.
- [37] SIMO J.C., WONG K.K. [1991], Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **31**, 19-52.
- [38] ZHONG H.G., CRISFIELD M.A. [1998], An energy-conserving co-rotational procedure for the dynamics of shell structures, *Engineering Computations*, **15**, 552-576.
- [39] WOOD W.L., BOSSAK M., ZIENKIEWICZ O.C. [1981], An alpha modification of Newmark's method. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **15**, 1562-1566.