CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Tratamiento numérico de los Materiales Compuestos

E. Car
S. Oller
E. Oñate

Monografía CIMNE Nº-57, Julio 2000

Tratamiento Numérico de los Materiales Compuestos

E. Car
S. Oller
E. Oñate

Monografía CIMNE Nº-57, Julio 2000

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición: Julio 2000

TRATAMIENTO NUMÉRICO DE LOS MATERIALES COMPUESTOS
Monografía CIMNE M 57
© El autor

ISBN: 84-89925-66-6

Agradecimientos

Este trabajo a sido posible gracias al apoyo económico de diversas entidades y empresas. En primer lugar quiero agradecer al Ministerio de Asuntos Exteriores y a la Agencia Española de Cooperación Internacional que me brindado su apoyo a través del programa de becas MUTIS. Deseo expresar mi agradecimiento, también, a IBERDROLA y la Generalitat de Catalunya-Direcció General de Recerca quienes me han apoyado económicamente a través del programa de Ayuda a la realización de tesis doctorales y del programa de becas de formación de personal investigador (TDOC) respectivamente.

A la empresa Construcciones Aeronáuticas S.A. (CASA) División Espacio y en especial a Pedro Luengo por su desinteresada colaboración aportando los datos experimentales que se han utilizado en este trabajo.

Índice General

1 Introducción **1**

1.1 Generalidades 1
1.2 Aplicaciones de los materiales compuestos 2
1.2.1 Utilización de materiales compuestos en la industria automotriz 2
1.2.2 Utilización de materiales compuestos en aviación 4
1.2.3 Utilización de los materiales compuestos en la industria naval 6
1.2.4 Utilización de los materiales compuestos en la ingeniería civil . 7
1.3 Contenido de la monografía 11

2 Propiedades estructurales de los materiales compuestos **13**

2.1 Generalidades 13
2.2 Clasificación de los materiales compuestos. 16
2.2.1 Clasificación según su topología 16
2.2.2 Clasificación constituyente 17
2.2.3 Clasificación estructural 18
2.2.4 Fibras 19
2.2.5 Matrices 21
2.3 Características estructurales y propiedades mecánicas de los materiales compuestos reforzados 26
2.3.1 Materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales . 27
2.3.2 Materiales compuestos reforzados con tejidos bidireccionales . 28
2.3.3 Materiales compuestos reforzados con fibras con distribución aleatoria 29
2.3.4 Materiales compuestos refozados con fibras con distribución tridimensional 30
2.4 Modelos constitutivos existentes para el estudio de los materiales compuestos 30
2.5 Modelo elástico lineal para laminados 31
2.5.1 Propiedades elásticas de un laminado 32
2.5.2 Propiedades elásticas de láminas unidirecionales 36

2.5.3 Modelo elástico lineal para una lámina unidireccional 40
2.5.4 Modelo elástico lineal para laminados simétricos 42
2.6 Modelos para barras laminadas rectas y curvas 43
2.7 Placas laminadas 44
2.8 Láminas laminadas 45
2.9 Análisis de materiales compuestos por el Método de los Elementos Finitos 47
2.9.1 Teoría de capa única equivalente 47
2.9.2 Teorías basadas en análisis como elemento sólido 52
2.9.3 Teoría de aproximación bidimensional por capas 53
2.10 Resistencia de láminas unidireccionales 54
2.10.1 Introducción 54
2.10.2 Resistencia a tracción longitudinal 55
2.11 Criterios de falla para materiales compuestos 57
2.11.1 Criterio de máxima tensión 57
2.11.2 Criterio de rotura de Azzi-Tsai-Hill 59
2.11.3 Criterio de fluencia de Tsai-Wu 60
2.12 Modelos estructurales multi-escala 61
2.12.1 Teoría de homogeneización 61
2.12.2 Estructura interna de un material compuesto. Formulación de un modelo constitutivo (Zalamea *et al.* 1999) 62
2.13 Conclusiones 66

3 Propuesta de un modelo constitutivo para materiales compuestos 71
3.1 Introducción 71
3.2 Modelo constitutivo elastoplástico 74
3.2.1 Parámetros del modelo constitutivo 75
3.2.2 Caso de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas. Expresión de la energía libre. 77
3.2.3 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico en la configuración referencial. Definiciones básicas 78
3.2.4 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico en la configuración actualizada. Definiciones básicas 80
3.3 Consideración general de la anisotropía en la ecuación constitutiva . . 84
3.4 Generalidades sobre la formulación propuesta 85
3.5 Función de fluencia y de potencial plástico para materiales anisótropos 89
3.6 Anisotropía en la configuración referencial 91
3.6.1 Transformación del espacio de tensiones. 91
3.6.2 Transformación del espacio de deformaciones 93
3.7 Anisotropía en la configuración actualizada 95

3.7.1 Transformación del espacio de tensiones 95
3.7.2 Transformación del espacio de deformaciones 97
3.7.3 Transformación de espacios aplicada a diversas funciones umbrales de discontinuidad 98
3.8 Regla de flujo. Ley de evolución de las variables internas 100
3.8.1 Configuración referencial 101
3.8.2 Configuración actualizada 105
3.9 Definición de la disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de disipación 109
3.9.1 Configuración referencial 109
3.9.2 Configuración actualizada 110
3.10 Ecuación constitutiva tangente 111
3.10.1 Configuración referencial 112
3.10.2 Configuración espacial 113
3.11 Definición de la algoritmia utilizada para la integración de la ecuación constitutiva 115
3.11.1 Cambio de espacio en la configuración referencial 115
3.11.2 Cambio de espacio en la configuración actualizada 115

4 Teoría de mezclas **121**
4.1 Introducción 121
4.2 Teoría de mezclas clásica 122
4.2.1 Expresión de la energía libre 123
4.3 Modificación de la teoría clásica. Modelo serie/paralelo 125
4.3.1 Energía libre del compuesto 127
4.4 Extensión de la teoría clásica a grandes deformaciones 129
4.4.1 Ecuación de cierre 129
4.4.2 Función de energía libre 130
4.4.3 Ecuación constitutiva 131
4.5 Modificación de la teoría de mezclas clásica. Refuerzo de longitud corta 134
4.5.1 Distribución de tensión axial en la fibra 135
4.5.2 Distribución de tensión cortante en la interfase 138
4.5.3 Modelo constitutivo para fibras cortas 139
4.6 Ecuación constitutiva del material compuesto 140
4.6.1 Función de energía libre para compuestos reforzados con fibras cortas 140
4.7 Propiedades mecánicas de las fibras a considerar en la Teoría de mezclas en régimen lineal para materiales compuestos 144

5 El fenómeno de deslizamiento fibra matriz (DFM) 147
5.1 Introducción . . . 147
5.2 Estudio de la distribución de tensiones a lo largo de la fibra . . . 148
5.3 Interacción entre grietas y fibras . . . 150
5.4 Modelos constitutivos para materiales compuestos con DFM . . . 151
5.5 Propuesta para el tratamiento del DFM . . . 154
5.5.1 Modificación del modelo constitutivo para considerar el fenómeno DFM . . . 155
5.6 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico del refuerzo . . . 159
5.6.1 Configuración referencial . . . 159
5.6.2 Configuración actualizada . . . 160

6 Implementación computacional 163
6.1 Introducción . . . 163
6.2 Planteamiento del problema . . . 164
6.2.1 Variables de estado . . . 164
6.2.2 Ecuaciones de gobierno . . . 164
6.3 Equivalencia entre las ecuaciones diferenciales y las formas integrales o débiles . . . 166
6.4 Formulaciones lagrangeanas total y actualizada . . . 168
6.5 Discretización espacial . . . 170
6.5.1 Método de Galerkin . . . 174
6.6 Resolución del problema no-lineal . . . 175
6.7 Implementación de la teoría de mezclas y anisotropía en el contexto del MEF . . . 180
6.8 Integración de la ecuación constitutiva isótropa . . . 185
6.8.1 Algoritmo de integración: regla del trapecio generalizada . . . 186
6.8.2 Algoritmo de integración: regla del punto medio generalizada . 187
6.8.3 Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva con el Método de Backward-Euler . . . 188
6.8.4 Matrices de rigidez consistentes . . . 191
6.8.5 Tensor constitutivo algorítmico. Obtención en forma numérica. 193

7 Ejemplos numéricos 199
7.1 Introducción . . . 199
7.2 Verificación del modelo propuesto en régimen elástico lineal . . . 200
7.2.1 Módulo elástico de un material compuesto en función del ángulo de orientación de las fibras . . . 200
7.2.2 Módulo elástico transversal de un material compuesto en función de la participación volumétrica de las fibras . . . 203

7.3 Análisis y comparación entre un micromodelo y el modelo propuesto . 205
7.4 Estudio del fenómeno DFM a través de un micromodelo y comparación con el modelo propuesto 210
7.5 Ensayo a tracción de probetas entalladas 218
7.5.1 Descripción general 218
7.5.2 Ensayo de probetas **T300/914C** con fibras orientadas a 0^o respecto al eje longitudinal. 219
7.5.3 Ensayo de probetas **T300/914C** con fibras orientadas a 10^o respecto al eje longitudinal. 228
7.5.4 Ensayo de probetas **T300/914C** con fibras orientadas a 45^o respecto al eje longitudinal 233
7.5.5 Ensayo de probetas **T300/914C** con fibras orientadas a 90^o respecto al eje longitudinal 240
7.6 Ensayo para la determinación de las propiedades a cortante en materiales compuestos 245
7.7 Comparación del modelo desarrollado con otras teorías 251
7.8 Simulación del comportamiento de mezclas asfálticas 258
7.8.1 Introducción 258
7.8.2 Motivación del trabajo y descripción del problema 259
7.8.3 Parametrización de los materiales. Granulometría simplificada y corrección de las propiedades por relación de aspecto . . 261
7.8.4 Simulación Numérica 262

A Elementos de mecánica del continuo en grandes deformaciones 269
A.1 Introducción 269
A.2 Ecuaciones del movimiento 269
A.2.1 Desplazamientos 271
A.2.2 Gradientes material, espacial y derivadas del tiempo 271
A.2.3 Velocidad 272
A.2.4 Gradiente de la deformación 272
A.2.5 Cambio de volumen. Determinante del gradiente de deformación 274
A.3 Fuerzas y medidas de tensión 274
A.3.1 Postulado de Cauchy 275
A.3.2 Principio de balance de la cantidad de movimiento 276
A.3.3 El tensor de tensiones de Cauchy 277
A.3.4 Tensores de tensión de Piola-Kirchhoff 278
A.3.5 Tensiones de Kirchhoff 280
A.4 Operaciones de transporte de tensores 280
A.5 Cinemática del problema elastoplástico. Descomposición multiplicativa 282
A.5.1 Tensores de deformación 283

A.5.2 Relaciones cinemáticas 285
A.5.3 Variaciones de los tensores de deformación 286

B Termodinámica **289**
B.1 Bases de la ecuación constitutiva isótropa 289
B.2 Primer principio de la termodinámica 289
B.3 Función de energía libre de Helmholtz 291
B.4 Definición de las variables libres del problema 291
B.4.1 Hipótesis de Elasticidad desacoplada. 292
B.5 Segundo principio de la termodinámica 292
B.6 Expresión de la disipación 293

C Modelo de daño **295**
C.1 Introducción 295
C.2 Modelos de daño isótropo 296
C.3 Energía libre de Helmholtz y ecuación constitutiva 297
C.4 Criterio de daño 299
C.5 Leyes de evolución de las variables 299
C.6 Tensor constitutivo de daño tangente 300
C.7 Particularización del criterio de daño. Ablandamiento exponencial . . 301
C.8 Particularización del criterio de daño. Ablandamiento lineal 301
C.9 Particularización de la norma 302
C.9.1 Modelo de Simo y Ju 302
C.9.2 Modelo de Lemaitre y Mazars 305
C.9.3 Modelo de daño propuesto 305

D Cálculo del módulo elástico de un material compuesto **311**
D.1 Introducción 311
D.2 Ecuación de equilibrio 311
D.2.1 Condición de compatibilidad en la dirección y 311
D.2.2 Condición de equilibrio en la dirección y 312
D.2.3 Ecuación constitutiva de la matriz 313

Referencias **315**

Capítulo 1

Introducción

"Cuando se es muy joven y se sabe un poco, las montañas son montañas, el agua es agua, y los árboles son árboles. Cuando se ha estudiado y se ha leído, las montañas ya no son montañas, el agua ya no es agua, y los árboles ya no son árboles. Cuando se es sabio, nuevamente las montañas son montañas, el agua es agua y los árboles son árboles. "

Antiguo refrán del Budismo Zen

1.1 Generalidades

El uso de materiales compuestos en el diseño de estructuras se ha visto incrementado notablemente en los últimos años. Esta tendencia se debe al hecho de que poseen ciertas características especiales y sus cualidades resultan totalmente diferentes de las de los materiales simples isótropos utilizados normalmente con fines estructurales.

Estos materiales presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso, son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Los componentes estructurales que requieren gran rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y considerable volumen de producción resultan ideales para ser fabricados a partir de materiales compuestos. Por ello, su uso en la fabricación de piezas de automóviles se ha extendido en los últimos años (Ali, 1996) (O'Rourke, 1989). Además, también se utilizan mucho en la industria aeronáutica y aeroespacial.

En aplicaciones estructurales es necesario combinar distintos materiales básicos para obtener materiales compuestos cuyas propiedades y cualidades mecánicas son superiores a las de sus constituyentes. Entre los componentes más utilizados están las partículas y las fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En los compuestos con fibras, estas constituyen el refuerzo y pueden orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar la mayor resistencia y rigidez global posibles. Las sustancias componentes que forman la estructura del compuesto pueden apilarse de manera tal que la rigidez del compuesto se obtiene a partir de la rigidez de los constituyentes y su distribución topológica.

La principal dificultad que se encuentra en el momento de diseñar estructuras con materiales compuestos es la falta de modelos constitutivos que permitan simular su comportamiento. Las técnicas analíticas convencionales utilizadas para el estudio de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortótropo con propiedades del conjunto. Puede observarse en distintas referencias los intentos que ha habido para modelar el comportamiento de materiales compuestos, utilizando la técnica de elementos finitos para el análisis y diseño de estructuras, donde la correlación entre los análisis y los resultados experimentales no resulta satisfactoria (Ali, 1996) (Klintworth y Macmillian, 1992). El proceso de diseño de componentes en materiales compuestos se ha basado, principalmente, en métodos empíricos, observándose en la literatura la ausencia de análisis o simulaciones del comportamiento de materiales compuestos sometidos a niveles de esfuerzos que sobrepasan el límite elástico.

1.2 Aplicaciones de los materiales compuestos

1.2.1 Utilización de materiales compuestos en la industria automotriz

La utilización de materiales compuestos con fines estructurales en la industria del automóvil es baja (Noguchi, 1993), aunque su uso relevante en el mundo de la competición, laboratorio de prueba de la industria automotriz, donde se demuestra el alto potencial que tiene este tipo de materiales. Los automóviles especiales, por ejemplo los vehículos de Fórmula 1, resultan extremadamente sofisticados en diseño, construcción y operación. La mayoría de los equipos que forman parte del mundo de la Fórmula 1 han realizado grandes inversiones en tecnología que les permite obtener ventajas respecto del resto de equipos. Como resultado, gracias al gran desarrollo e impulso que les ha dado la industria aeronáutica los materiales com-

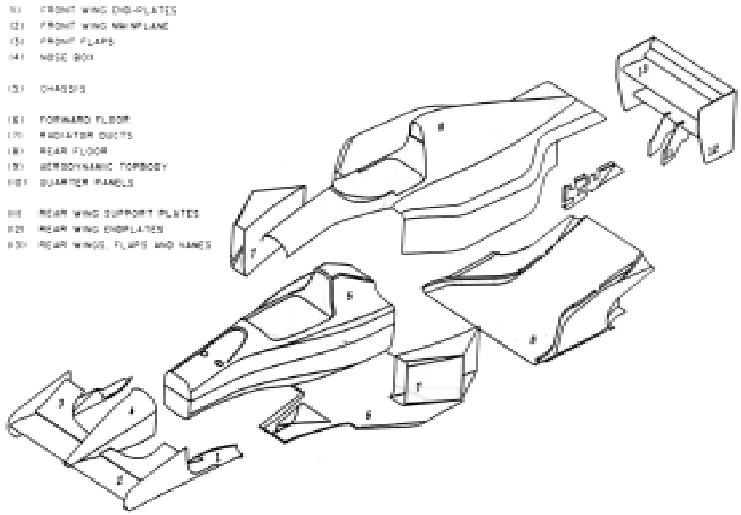

Figura 1.1: Esquema de los componentes de material compuesto en un automóvil de Fórmula 1 (McLaren MP4/7 1992).

puestos han comenzado a ser muy utilizados a partir del año 1980. Los diseñadores de automóviles de carrera deben respetar ciertas reglas impuestas en cuanto a la resistencia, rigidez y peso de los coches. El peso del vehículo constituye también una variable fundamental en el momento de definir los materiales que se utilizarán en la construcción del casco de los coches. La solución a este problema se obtiene optimizando la geometría, y la calidad de los materiales a emplear.

La utilización de materiales compuestos reforzados con fibras se remonta al año 1950. En aquella época se utilizaban mucho los compuestos de matriz de resina poliéster y refuerzo de fibra de vidrio orientada aleatoriamente. Este material se ha utilizado hasta finales de la década de 1980.

A partir de la década de los 80 comienza la utilización de materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Este uso se ha generalizado debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso; son resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. En la actualidad en los vehículos de Fórmula 1 el 75% de los mismos está constituido por materiales compuestos, porcentaje que se incrementa a diario. En la Figura 1.1 se muestran las diversas partes de un coche de Fórmula 1 constituidas por materiales compuestos.

La utilización de materiales compuestos ha permitido por un lado mejorar las prestaciones de los vehículos y por otro incrementar la seguridad de los mismos de-

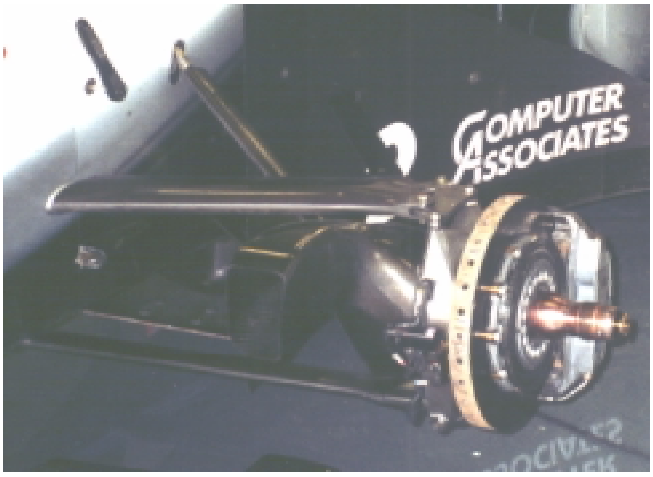

Figura 1.2: Diseño típico de la suspensión de un automóvil de Fórmula 1 (McLaren MP4-14 1999).

bido a la gran capacidad de estos materiales para absorber energía ante impactos. Adicionalmente a las partes estructurales, los materiales compuestos se utilizan en otras partes de los vehículos tales como discos de freno de carbono-carbono, embragues y como aislante térmico. Los discos de freno de carbono-carbono permiten una significativa reducción del peso de los mismos al igual que un aumento en la capacidad de frenado del vehículo.

La más reciente innovación ha sido el diseño de componentes de suspensión con materiales compuestos en el año 1992 por parte del equipo McLaren, lo que permitió una reducción del 50-60% del peso, lo que se traduce en una reducción de la inercia. En la Figura 1.2 se muestra el esquema típico de un sistema de suspensiones de un coche de Fórmula 1.(Savage, 1993)

1.2.2 Utilización de materiales compuestos en aviación

La utilización de materiales compuestos en la industria aeronáutica es anterior a la de la industria automotriz. Se la considera como precursora en el uso de estos materiales en diversas aplicaciones. La elevada resistencia y rigidez junto a menores costos y peso de los materiales compuestos son los principales factores que han permitido su uso en la industria aeroespacial. El peso constituye la variable fundamental para la elección del material a utilizar en las estructuras de aeronaves. La utilización a gran escala de estos materiales en motores de aviación se debe a Rolls-Royce, utilizando en partes del sistema de compresión de la turbina RB108 plástico reforzado con fibra de vidrio.

En motores, los materiales compuestos de matriz polimérica (PMC) compiten con

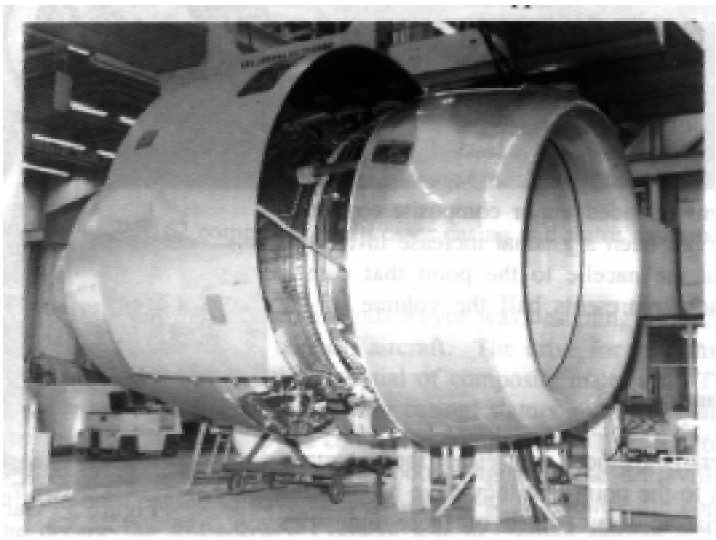

Figura 1.3: Carcasa de turbina realizada en matriz epoxídica con fibra de carbono (Rolls Royce RB211).

el titanio en su utilización debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso. Los materiales compuestos de matriz metálica (MMC) resultan potencialmente atractivos en situaciones en que elevadas temperaturas puedan dañar los materiales compuestos de matriz polimérica. En zonas de temperaturas muy elevadas se utilizan materiales compuestos de matriz cerámica (CMC). Los materiales CMC son conceptualmente diferentes a los PMC y a los MMC debido a que las fibras modifican la forma de propagación de las fisuras en el material y no actúan como un refuerzo de una matriz (Ruffles, 1993).

La introducción de motores "big-fan" en los primeros años de la década de los 70 coincide con la amplia disponibilidad de los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono. Con la introducción de estos materiales se lograba una mejora de sus características y una disminución considerable de peso. A pesar de las ventajas citadas, estos "fans" no superaban las pruebas de choque contra aves y el material compuesto fue reemplazado por titanio.

A excepción del propio "fan" y de la zona de combustión, la mayor parte de la estructura vista desde el exterior de una turbina está constituida por material compuesto reforzado con fibras de carbono. En la Figura 1.3 se observa la carcasa de una turbina realizada en material compuesto reforzado con fibra de carbono correspondiente a una turbina Rolls-Royce. En el interior de una turbina muy pocas piezas están realizadas en material compuesto. A pesar de esto los materiales compuestos representan alrededor del 10% en peso de una turbina (Ruffles, 1993).

En el futuro, la utilización de los materiales compuestos deberá extenderse hacia

la zona interior de la turbina. Los programas de desarrollo de motores para aviación civil impulsados por Rolls-Royce tienen como objetivo realizar el "fan case" y la estructura de soporte del "fan" en material compuesto reforzado con fibras de carbono.

En los motores de aviación destinados a uso militar las partes realizadas con materiales compuestos son diferentes debido fundamentalmente a que estos motores se montan directamente en la estructura del avión y no tiene una cubierta exterior. En la actualidad se encuentran bajo desarrollo diversas partes realizadas con materiales MMC y CMC.(Ruffles, 1993)

1.2.3 Utilización de los materiales compuestos en la industria naval

El uso de materiales compuestos orgánicos (OMC) en aplicaciones marinas data del año 1940. En la actualidad su uso se ha extendido a pequeñas embarcaciones. La utilización en grandes navíos y estructuras offshore no se ha generalizado debido fundamentalmente a que los diseñadores y constructores de este tipo de estructuras no están familiarizados con este tipo de material y deben desarrollar nuevas tecnologías que permitan su aplicación en la industria naval. Existe en la actualidad una fuerte demanda de materiales compuestos para la fabricación de embarcaciones, submarinos y estructuras offshore debido a que permiten una reducción en peso del 25-50% con respecto a los materiales tradicionales (aluminio y acero). Además, tienen una elevada resistencia a la corrosión (que se traduce en una disminución del mantenimiento), baja conductividad térmica, no resultan atraídas por campos magnéticos y su reparación resulta sencilla.

En la industria naval el uso de materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio se ha extendido debido fundamentalmente a que presenta una muy buena relación precio-resistencia. Las fibras de vidrio tipo E son las más utilizadas debido a que tienen una buena resistencia y son resistentes al ataque del agua marina. La fibra de vidrio tipo S tiene una resistencia superior a la tipo E y tiene muy buena resistencia a la fatiga, pero su costo es elevado (ver Sección 2.2.4).

La aplicación naval más significativa de los materiales es en la construcción de buques buscaminas, debido a que este tipo de embarcaciones requiere fundamentalmente materiales con bajas propiedades magnéticas y buena resistencia a cargas de impacto. Otra aplicación la constituyen las embarcaciones de patrulla rápida. En la marina comercial existen aplicaciones en embarcaciones pesqueras pequeñas (<25 m longitud) que se benefician en la reducción del peso y en el mantenimiento. En estructuras offshore los materiales compuestos se utilizan debido a su bajo peso y elevada resistencia a la corrosión. En el sector de las embarcaciones de competición los materiales compuestos reforzados con fibras de carbono y aramida resultan muy

utilizados debido fundamentalmente a su elevada resistencia en comparación con los materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio, minimizan el peso y permiten construir embarcaciones de altas prestaciones. En el mundo de la competición los diseños utilizan tecnología de punta, lo que permite obtener datos valiosos en cuanto a las prestaciones de los materiales que resultan útiles en otras aplicaciones en la industria naval.

Futuro de los materiales compuestos en la industria naval

Como resultado del continuo desarrollo de estos materiales, las propiedades mecánicas y físicas no se encuentran suficientemente caracterizadas. Los materiales compuestos de matriz de resina termoestable y refuerzos de fibra de altas prestaciones (aramida, carbono) resultan adecuados para estructuras que requieren poco peso con buenas características mecánicas. A pesar de poseerlas es necesario realizar mejoras y ensayos para establecer su respuesta bajo condiciones de servicio, por ejemplo degradación a la exposición por largo tiempo en agua de mar, cargas de fatiga impacto o resistencia al fuego.

Los materiales compuestos resultan especialmente indicados para colocar en su interior sensores y actuadores durante el proceso de fabricación con el objetivo de controlar deformaciones, temperaturas, vibraciones, rigidez, etc. Esta característica puede facilitar información a diseñadores para optimizar el diseño estructural y los factores de seguridad en las estructuras.

Los materiales CMC y MMC se utilizan solo en casos excepcionales en los que se requiere elevada resistencia a las temperaturas y rigidez.

Los métodos de ensayo de materiales compuestos se basan en los realizados en la industria aeronáutica y algunos no pueden aplicarse a la industria naval, por lo tanto, es necesario definir ensayos y metodologías que permitan caracterizar estos materiales para aplicaciones en esta industria.

1.2.4 Utilización de los materiales compuestos en la ingeniería civil

La aplicación de materiales compuestos a la realización de obras civiles comienza a ser relevante en la última década, ya que anteriormente su presencia en este campo ha sido virtualmente inexistente. Hallan su aplicación en la industria de la construcción en estructuras sometidas a la acción de ambientes agresivos, plataformas offshore, depósitos, anclajes al terreno, construcciones no conductivas y no magnéticas, refuerzos de estructuras, armaduras pasivas, armaduras activas, cables, tableros para pasarelas, perfilería y recubrimientos de túneles.

Refuerzos de estructuras

De los diversos métodos empleados en el refuerzo de estructuras, el encolado de chapas de acero mediante adhesivo estructural es uno de los sistemas más ampliamente utilizado y de mayor eficacia gracias al desarrollo de las técnicas adhesivas. A pesar de la eficacia demostrada por las láminas encoladas de acero, estas presentan algunos inconvenientes:

- Las láminas de acero constituyen elementos de peso elevado, lo que dificulta su manejo y puesta en obra. Son necesarios medios auxiliares para su colocación, los cuales deben permanecer por elevados períodos de tiempo con las consiguientes molestias en el tránsito en el caso de refuerzos de pasos a sobrenivel.

- Corrosión en las láminas, que afecta a su resistencia y a la adherencia entre la lámina y el hormigón.

- Necesidad de superficies de hormigón planas que permitan el perfecto encolado de las láminas.

El sistema de refuerzos de estructuras con materiales compuestos ha sido desarrollado en los Laboratorios Federales Suizos para el Ensayo de Materiales (EMPA) en la década de los 80 con el objetivo de solventar los inconvenientes citados anteriormente y ante el elevado número de estructuras existentes que requieren ser reforzadas.

La utilización de laminados compuestos de fibra de carbono y resina epoxi en el refuerzo de estructuras de hormigón, metálicas, de madera, etc. comienza a ser una alternativa al sistema de refuerzo convencional mediante el encolado de chapas de acero. El aumento en el uso de materiales compuestos para refuerzos se debe fundamentalmente a las mejores prestaciones mecánicas, buena resistencia a la corrosión y bajo peso que facilita su transporte, manejo y colocación en obra. La primera aplicación a escala de este tipo de refuerzo data del año 1991 en el puente Ibach en Lucerna.

Este sistema se aplica en diversos países, y tan sólo en Suiza y Alemania el número de realizaciones de refuerzos de estructuras con láminas de material compuesto encoladas asciende a 250 y existen más de 1000 en el mundo, concentradas en países tales como Suiza, Alemania, Japón, EE.UU. y Canadá. Gracias al empleo de medios auxiliares más ligeros durante un tiempo menor se pueden llegar a obtener ahorros de hasta un 25% en el proceso total de refuerzo de la estructura, compensando el mayor costo económico del material compuesto frente al del acero (G. Pulido y Sobrino, 1998).

Figura 1.4: Colocación de refuerzo a flexión en viga lateral de un puente.

En la Figura 1.4 se observa el proceso de colocación del refuerzo a flexión en una viga lateral de un puente. En la misma fotografía se observan los medios auxiliares ligeros empleados en la colocación del material compuesto, lo que permite disminuir los costos del proceso de refuerzo de la estructura.

En la Figura 1.5 se muestra la colocación de refuerzo a cortante en una viga de un puente. Se aprecia la utilización, también, de sencillos medios auxiliares para la colocación del refuerzo en las caras laterales de la viga.

Armaduras del hormigón

Otra utilización de los compuestos reforzados con fibras es la de sustituir las armaduras utilizadas para el armado de hormigón o en tendones de pretensado. Se aplica fundamentalmente en ocasiones en que el uso del acero como armadura del hormigón presenta serios problemas como corrosión, magnetismo o densidad elevada. La alternativa la constituye el redondo compuesto por fibra de vidrio revestida por una matriz termoendurecible (poliéster o epoxi). La adherencia entre el hormigón y este tipo de refuerzo es muy alta ya que se obtienen superficies con relieves comparables a las de los redondos de acero.

Actualmente las aplicaciones son muy variadas: losas no magnéticas, velos delgados de hormigón (las armaduras pueden estar muy próximas a la superficie exterior), tierra armada, tirantes de arriostramientos, etc.

Figura 1.5: Colocación de refuerzo a esfuerzos cortantes en un puente.

Tirantes

Los tirantes de fibras se utilizan fundamentalmente en aplicaciones donde existen problemas de corrosión, o en edificios de comunicaciones o transmisiones donde los tirantes metálicos serían susceptibles de calentamiento por absorción de la energía radiante o de interferencias en la transmisión de ondas electromagnéticas.

Para el caso de esfuerzos de tracción de nivel medio alto (hasta 2700 MPa.) se utilizan fibras de vidrio y para esfuerzos superiores se usan fibras de carbono o aramida. Un ejemplo de aplicación lo constituye la conocida Torre de Telecomunicaciones de Colserolla de 268 metros de altura de la ciudad de Barcelona. En este caso se utilizó una fibra de aramida y cada uno de los tirantes se compone de siete cordones de 50 mm colocados dentro de una vaina de polietileno.

Perfiles de pultrusión

Los perfiles fabricados por el proceso de pultrusión se utilizan en edificios industriales donde existe el peligro de corrosión debido a la presencia de ácidos. Un ejemplo lo constituyen las plantas de obtención de aluminio, donde la presencia de vapores de hidróxido de sodio y ácido hidroclórico generan serios problemas de corrosión. Otro ejemplo de aplicación lo constituyen los edificios industriales destinados para ensayos de ordenadores y productos electrónicos debido a las propiedades aislantes de estos materiales a ondas electromagnéticas.

1.3 Contenido de la monografía

Esta monografía presenta un modelo constitutivo que permite simular el comportamiento de materiales compuestos reforzados y su correspondiente implementación en el contexto del método de los elementos finitos. Está organizada en 8 capítulos y tres apéndices en los que se exponen los aspectos más relevantes del comportamiento de estos materiales.

En el capítulo 2 se presenta un estudio exhaustivo de las distintas topologías y componentes de los materiales compuestos. Se presenta, también, un estado del arte de los diversos modelos en régimen elástico lineal propuestos por distintos autores para simular el comportamiento constitutivo de este tipo de materiales. Posteriormente, se realiza un análisis de los criterios de falla propuestos por diversos investigadores. Por último, se presenta una nueva metodología que plantea una solución diferente al modelo propuesto en este trabajo con base en la teoría de homogeneización en la que el problema se divide en dos escalas de orden diferente: macroscópica y microscópica.

El modelo constitutivo que se propone en esta monografía está basado en tres teorías que permiten simular los diversos mecanismos que se generan durante el proceso de falla de los materiales compuestos: la de grandes deformaciones para materiales isótropos, la de transformación de espacios para materiales anisótropos y la de mezclas para materiales isótropos. El capítulo 3 presenta el modelo constitutivo elastoplástico isótropo en régimen de grandes deformaciones y su posterior generalización para materiales anisótropos. La extensión del modelo elastoplástico isótropo al campo anisótropo se realiza a través de una transformación lineal de los tensores de tensiones y deformaciones. En la transformación se utilizan tensores de cuarto orden que contienen la información de la anisotropía del material. La hipótesis básica del modelo consiste en simular el comportamiento del material anisótropo real a través de uno isótropo ficticio. Este método tiene la ventaja de permitir la utilización de los algoritmos desarrollados para el caso de materiales isótropos.

En el capítulo 4 se presenta la teoría de mezclas de sustancias básicas que permite simular el comportamiento constitutivo de cada una de las fases que componen un material compuesto. Se basa en el principio de interacción de las sustancias componentes. Esta teoría se considera adecuada para simular el comportamiento de un material compuesto reforzado con fibras largas en régimen lineal y con ciertas modificaciones permite simular, también, el comportamiento una vez superado el límite de proporcionalidad. En este capítulo se presenta una extensión de la teoría de mezclas clásica a grandes deformaciones y se propone una modificación de la misma que permita tener en cuenta materiales compuestos reforzados con fibras cortas.

Una de las causas del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos se

debe al fenómeno de formación de grietas en la matriz lo que produce una disminución de su capacidad para transferir esfuerzos a la fase de refuerzo. En el capítulo 5 se presenta una extensión de la teoría de mezclas que permite tener en cuenta la interacción entre fibra y matriz. El agrietamiento de la matriz conduce a una disminución de su capacidad de transferir esfuerzos con lo que se producen deslizamientos o movimientos relativos entre el refuerzo y la matriz.

En el capítulo 6 se presenta la implementación numérica de los modelos constitutivos desarrollados en los capítulos precedentes. Se presenta el planteamiento del problema junto con las variables de estado utilizadas para caracterizar el material y las ecuaciones que gobiernan el comportamiento mecánico del sólido. Posteriormente, se describe la discretización espacial del problema continuo utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Debido a la presencia de grandes deformaciones y de fenómenos plásticos, el problema planteado resulta no-lineal. En este capítulo se presenta, también, la resolución de este problema a través de un planteamiento incremental-iterativo basado en la linealización del sistema de ecuaciones no-lineal. Por último, se presenta el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva utilizado en esta monografía que permite obtener matrices de rigidez consistentes que preserva la convergencia cuadrática de los esquemas de solución basados en métodos de Newton.

En el capítulo 7 se presentan ejemplos numéricos de aplicación de los modelos. Está dividido en dos partes; en la primera se presentan ejemplos sencillos de verificación del modelo constitutivo propuesto, y en la segunda se desarrollan ejemplos en los que se simulan numéricamente ensayos experimentales de materiales compuestos. El primero de los ejemplos consiste en simular una serie de ensayos que se realizan sobre un conjunto de probetas con una entalla en la zona central que presentan diferentes orientaciones de la fase de refuerzo. El siguiente ejemplo consiste en simular numéricamente el ensayo ASTM D4255 que se utiliza para determinar las propiedades a cortante de un material compuesto. Posteriormente, se presenta un ejemplo de comparación entre la teoría desarrollada en este trabajo y la basada en la de homogeneización. Por último, se presenta un ejemplo en el que se simula el comportamiento de mezclas asfálticas. Todas las simulaciones numéricas se contrastan con resultados experimentales.

El último capítulo presenta las conclusiones a las que se ha llegado en este estudio y se sugieren las futuras líneas de investigación.

Capítulo 2

Propiedades estructurales de los materiales compuestos

" Yo opero dentro de las reglas. Si hay una ruptura en las reglas, no es mi culpa como un participante legal: los culpables son aquellos que establecieron las reglas".

G. Soros

2.1 Generalidades

En los últimos años, la utilización de materiales compuestos se ha incrementado notablemente. Esta tendencia se debe al hecho de que los materiales compuestos tienen ciertas características especiales y resultan totalmente diferentes a los materiales isótropos normalmente utilizados. Debido a que presentan una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso, resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Los componentes estructurales que requieren una elevada rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y un alto volumen de producción resultan ideales para ser fabricados en materiales compuestos. Es por ello que el uso de estos materiales en la fabricación de piezas de automóviles se ha extendido en los últimos años (Ali, 1996) (O'Rourke, 1989), siendo muy utilizados también en la industria aeronáutica y aeroespacial.

Los materiales compuestos surgen como consecuencia de la búsqueda de materiales que reúnan las características siguientes:

- Bajo costo.
- Buen comportamiento estructural.
- Bajo peso.

- Posibilidad de producción en forma masiva.

Las propiedades de los polímeros sintéticos pueden ser incrementadas, en gran medida, a través de mezclar componentes diferentes que al encontrarse unidos producen un material con más capacidad de desempeñar su función que una sustancia simple.

Los materiales compuestos son utilizados en diversos sectores industriales debido a las características económicas que presentan, pues reducen sustancialmente el volumen de materiales de alto costo colocándolos exclusivamente en las direcciones y o zonas en las que son realmente requeridas.

Los materiales que se obtienen presentan las siguientes características:

- Buen aislamiento térmico y acústico.
- Resistencia a algunos agentes químicos.
- Disipación de energía provocada por la microfisuración en las interfases de sus componentes de modo que el comportamiento general de la estructura no presenta una brusca caída de su resistencia última.
- Bajo peso, economía y facilidad de transporte y reducción de pesos muertos.
- Excelente comportamiento ante la corrosión en ambientes agresivos.
- Elevadas propiedades mecánicas.
- Alta resistencia al fuego.
- Configuración sándwich que permite conseguir bajos coeficientes de conductividad térmica.
- Inertes al agua y a agentes químicos diversos.

Para aplicaciones civiles y/o estructurales es necesario combinar el polí mero con otros materiales para obtener materiales compuestos cuyas propiedades superen las de sus constituyentes. El componente más comúnmente utilizado está en forma de partículas o en forma de fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En compuestos fibrosos el refuerzo puede orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar resistencia y rigidez óptimas. Gracias a la moldeabilidad del material pueden seleccionarse las formas estructurales que se consideren más efectivas.

Las unidades estructurales que forman la estructura completa pueden apilarse de manera que la rigidez del conjunto se deriva tanto de su configuración como del material mismo.

En la industria de la construcción se utilizan la fibra de vidrio, la fibra de carbono o aramida, o la combinación de ambas para obtener fibras híbridas. La fibra de vidrio y el polímero de poliéster o epoxi se utilizan para formar un material compuesto fibroso que recibe el nombre de poliéster. Entre las principales desventajas que presentan los materiales compuestos es posible mencionar:

- Los materiales presentan en general un comportamiento no-lineal aún para tensiones muy bajas.
- En el proceso de fabricación del material compuesto, debido a las variaciones de temperatura, el material presenta tensiones residuales muy difíciles de cuantificar.
- Los materiales de refuerzo en un compuesto (fibras, partículas, etc.) generalmente cambian sus propiedades mecánicas al ser sometidos a efectos del medio ambiente, degradando la resistencia final del compuesto.

Para la utilización de materiales compuestos en componentes estructurales es necesario realizar un diseño específico del material a utilizar. Esto se debe fundamentalmente a la elevada anisotropía y relación de resistencia entre fibra y matriz. Este proceso de diseño del material compuesto se ha basado en métodos empíricos, observándose en la literatura la ausencia de análisis o simulaciones del comportamiento de estos materiales sometidos a niveles de solicitaciones que sobrepasan el límite elástico. Las técnicas convencionales para el análisis de materiales simples isótropos son inadecuadas para el análisis de materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortótropo con propiedades del conjunto. Puede observarse en distintas referencias los intentos por modelar el comportamiento de materiales compuestos utilizando la técnica de elementos finitos para el análisis y diseño de estructuras, donde la correlación entre los análisis y los resultados experimentales no resulta satisfactoria (Ali, 1996) (Klintworth y Macmillian, 1992).

La principal dificultad que se encuentra con el método de los elementos finitos convencional es la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales últamente anisótropos sometidos a cargas que superan los límites de proporcionalidad del material.

Por ello resulta necesario a los fines de modelar materiales compuestos introducir teorías que permitan simular el comportamiento de materiales que tienen las siguientes características: a) alta anisotropía con deformaciones permanentes direccionadas; b) existencia de varias sustancias que conforman el compuesto; c) flujo

plástico unidireccional en el caso de refuerzo con fibras; d) deslizamientos relativos entre matriz y fibra (debonding) a nivel de interface con pérdida de compatibilidad cinemática e) pandeo local del refuerzo; f) tendencia de las fibras a alinearse con la dirección del esfuerzo mayor; g) presencia de grandes deformaciones debido al fenómeno de alineación del refuerzo en la dirección del esfuerzo mayor. Todos estos fenómenos inducen a una pérdida de resistencia y rigidez global del material compuesto con pérdida de linealidad en la respuesta del conjunto. Durante la fase de comportamiento inelástico la energía disipada se calcula como la suma de la contribución de la energía disipada por cada componente mas la disipación en la interface.

Los compuestos son materiales no homogéneos que tienen dos o más componentes: un refuerzo que provee las características mecánicas y una matriz que aglutina el refuerzo y permite una deformación uniforme del mismo.

La combinación de los distintos materiales componentes permite obtener materiales compuestos cuyas propiedades y cualidades mecánicas son superiores a las de sus constituyentes. Entre los componentes más utilizados como refuerzo de matriz es posible mencionar a las partículas y las fibras. En el primero de los casos las partículas de un material o materiales específicos están adheridas entre sí mediante una matriz continua con bajo módulo de elasticidad. En compuestos con fibras, estas constituyen el refuerzo y pueden orientarse en la dirección que sea necesaria para proporcionar mayor resistencia y rigidez global. Las sustancias componentes que forman la estructura del compuesto pueden apilarse de manera que la rigidez del conjunto resulta tanto de su topología como de la composición del material mismo.

El comportamiento mecánico de un material compuesto está determinado por las propiedades del refuerzo, de la matriz y de la interfase fibra-matriz. Las propiedades del compuesto no solo dependen de las propiedades de cada uno de los componentes sino también de los métodos utilizados para combinarlos. Por ejemplo la interface entre fibra y matriz juega un papel fundamental en el comportamiento mecánico del conjunto. A continuación se presentan las principales características de los diversos refuerzos y matrices.

2.2 Clasificación de los materiales compuestos.

2.2.1 Clasificación según su topología

Los materiales compuestos se clasifican según su configuración en: materiales de matriz compuesta, materiales de matriz compuesto con fibras cortas y/o largas y materiales laminados. En la Figura 2.1 se observa la clasificación de los materiales compuestos en función de su configuración

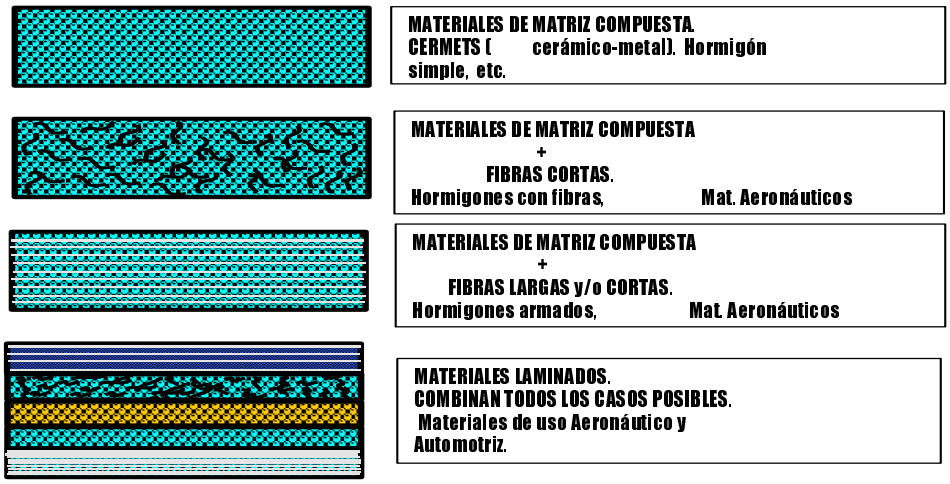

Figura 2.1: Clasificación de los materiales compuestos según su topología.

2.2.2 Clasificación constituyente

Los materiales compuestos, en función del tipo y forma de los materiales que integran el compuesto se clasifican en (Botello, 1993):

- Fibrosos: Compuestos por fibras continuas cortas o largas, en una dos o tres direcciones, o bien distribuidas en forma aleatoria aglutinados por una matriz. A su vez esta matriz puede estar formada por dos o más materiales.
- Particulados: Formados por partículas que puntualmente trabajan aglutinadas por una matriz.
- Laminares: Compuestos por capas o constituyentes laminares con características de resistencia en magnitud y dirección diferentes.
- Hojuelados: Compuestos por hojuelas planas inmersas en una matriz.
- Relleno barra esqueleto: formado por un esqueleto relleno por otro material.

Los más utilizados son los fibrosos, en los cuales las fibras asumen el papel de resistir las acciones mecánicas y la matriz sirve como aglutinante y protector del medio ambiente. La resistencia mecánica de las fibras es del orden de 25 a 50 veces mayor que la matriz. En el caso del hormigón a tracción esta relación es del orden de 100 veces. Esto provoca un comportamiento fuertemente anisótropo.

Al aplicar un carga en un material compuesto se producen en su interior esfuerzos y para lograr una buena transición de estos entre fibra y matriz se coloca una resina y una encima.

La función de la matriz es la de repartir y transmitir las cargas a las fibras. En el caso de laminados compuestos las propiedades de resistencia al corte son muy importantes. La matriz cumple la función de asegurar la continuidad de desplazamientos entre láminas en todo el espesor de la estratificación e influye en el modo de rotura.

En láminas sometidas a compresión la matriz influye en la longitud de pandeo de las fibras. Las matrices más comunes son: matrices poliméricas, matrices metálicas y matrices cerámicas

Las más utilizadas son las poliméricas, que a su vez se clasifican en: polímeros termoplásticos, polímeros termoestables y polímeros espumados.

Las propiedades mecánicas en estado sólido para un material termoplástico son generalmente no-lineales con un módulo de elasticidad muy bajo y un comportamiento dúctil. Los materiales termoendurecibles tienen unas propiedades muy linealizables con un alto módulo de elasticidad y comportamiento frágil.

2.2.3 Clasificación estructural

Desde el punto de vista del estudio del comportamiento mecánico, los materiales compuestos pueden clasificarse en:

- Estructura básica: se estudia el comportamiento de las moléculas singulares o mallas cristalinas
- Estructura microscópica: se estudia la interacción fibra-matriz, su influencia en la distribución de tensiones y la aparición de fallas, discontinuidades o fisuras bajo condiciones de cargas elementales.
- Estructura macroscópica: se estudia al material como un compuesto de diferentes materiales que contribuyen al estado de equilibrio bajo la acción de solicitaciones mecánicas externas.

En el presente trabajo se realizará un estudio estructural desde el punto de vista macroscópico, considerando las siguiente hipótesis:

- Las fibras se distribuyen uniformemente en la matriz
- Existe perfecta adherencia entre la matriz y el refuerzo
- La matriz no contiene vacíos
- No existen tensiones residuales en el material compuesto provenientes de posibles defectos en la fabricación

2.2.4 Fibras

En el refuerzo de materiales compuestos se utilizan fibras cuyo diámetro varía entre 5-200μm Estas fibras pueden ser largas, cortas o estar entretejidas. Uno de los requisitos que se exigen a las fibras es su compatibilidad con el material que constituye la matriz. Los componentes se consideran compatibles si la resistencia de la interface es similar a la resistencia de la matriz.

Existen distintos tipos de fibras, entre las más comunes se puede citar (Hull, 1987b) (Botello, 1993) (Vasiliev, 1993) (Barbero, 1998):

Fibras de vidrio: presentan un diámetro de 3-20μm, una resistencia a la tracción entre 2 y 6 GPa. y un módulo de elasticidad entre 50-100GPa. La resistencia de las fibras es esencialmente dependiente de la temperatura, incrementándose en un factor de 1.5 a 2.0 veces con temperaturas inferiores a 196^oC y reduciéndose para altas temperaturas. Entre las ventajas de las fibras se puede citar: alta resistencia a tracción y compresión, buena compatibilidad con matrices poliméricas y bajos costos. Entre las desventajas se puede citar un bajo módulo elástico y la dependencia de sus propiedades mecánicas con la temperatura. Las fibras de vidrio más comunes son:

- Tipo E: buen aislante eléctrico, buenas propiedades mecánicas y bajo costo.
- Tipo R: de alta resistencia mecánica y módulo de elasticidad
- Tipo S: es la de mayor costo. Tiene alta resistencia a la tracción y estabilidad térmica. Muy utilizada en la industria aeronáutica
- Tipo ERC: con propiedades eléctricas combinada con resistencia química.
- Tipo D: Alto coeficiente dieléctrico.

El proceso de fabricación de las fibras de vidrio es idéntico al del vidrio clásico. Las fibras se extraen realizando un filtrado a través de una malla de platino. El diámetro de los filamentos es función de la temperatura del vidrio, tamaño de la malla y velocidad de estiramiento de la fibra. El vidrio en los plásticos reforzados con fibra de vidrio es usado como tejido que permite conseguir resistencia en dos direcciones.

Fibra de vidrio para morteros y hormigones: Fibras AR: la fibra AR es una fibra de alto módulo (diez veces más resistentes que el polipropileno) con una gran resistencia a la tracción (tres a cuatro veces la del acero). Es una fibra ideal para reforzar matrices de cemento. Al ser incorporadas a la mezcla cemento/arena resulta un material ligero y similar al hormigón con las siguientes propiedades:

- Ligero: Reduce costo de transporte, puesta en obra e instalación.

- Gran resistencia: Controla la propagación de fisura.
- Reducen los cuidados de mantenimiento.

Entre las aplicaciones más comunes en ingeniería civil es posible mencionar:
Encofrados de tableros de puentes y parapetos.
Muros antirruido
Renovación de alcantarillas
Sistemas de transporte de aguas

Fibras de carbono o grafito: se caracterizan por una resistencia a la tracción que oscila entre 1.5 a 7.0 GPa. y un módulo de elasticidad de 150 a 800 GPa. La principal ventaja es su alta resistencia en comparación con las fibras de vidrio y la independencia de sus propiedades con temperaturas inferiores a los 450^oC. Las fibras de carbono están caracterizadas por coeficientes de expansión térmica negativos. Es muy utilizada en la industria aeroespacial y automotriz. Las fibras de carbono tienen módulo de elasticidad elevado, así como ligaduras covariantes bidimensionales, dando lugar a una estructura paracristalinas 100 %.

Los filamentos de fibras de carbono tienen un diámetro típico que oscila entre 5 y 8 micrones, y están combinados en mechas que contienen 5 y 12 mil filamentos. Estas mechas pueden relacionarse en hilos y formar tejidos parecidos a los de la fibra de vidrio.

Existen también tejidos híbridos formados por fibras de vidrio y carbono.

El módulo de elasticidad crece exponencialmente a lo largo de todo el rango de temperaturas cuando aumenta el tratamiento de calentamiento para la fibra. A partir de estas temperaturas se identifican tres tipos de fibras de carbono.

- Tipo I: Es la más rígida y mayor temperatura de tratamiento.
- Tipo II: Es una fibra intermedia
- Tipo III: Es la más barata con menor rigidez que las anteriores.

Fibra de aramida: Son fibras orgánicas y sintéticas que poseen un alto grado de cristalinidad, gran resistencia y ligadura covariante dentro de los ejes de la fibra.

Existen dos grados de rigidez: uno con un módulo de rigidez en el rango de 60 Gpa. y otro con un módulo de 130 Gpa. La fibra de más alto módulo es la que se utiliza en materiales compuestos de matriz termoestable.

Las cuatro principales fibras aramidas son: Kevlar RI, Kevlar 29, Kevlar 49 y Nomex. El Kevlar RI se aplica para el cordaje de refuerzo de neumáticos y el Kevlar 29 en paracaídas, cuerdas y cables. El Kevlar 49 tiene un módulo elástico superior pero la misma resistencia que el Kevlar 29 y es la fibra preferida para materiales compuestos de elevadas prestaciones.

Las principales características del Kevlar son: buena resistencia específica a tracción, ligereza, estabilidad mecánica en el rango de -30^o a +200^{o}C, es cinco veces más resistente que el acero, posee un elevado módulo de elasticidad y no es atacado por agentes químicos a diferencia de los metales.

Fibra de Boro: presentan un diámetro que oscila entre 100-200 μm, una resistencia a tracción entre 2 a 4 Gpa. y un módulo de elasticidad entre 370 a 430 GPa. Sus propiedades mecánicas resultan independientes de temperaturas inferiores a los 400^oC. Estas fibras pueden combinarse satisfactoriamente con matrices poliméricas o metálicas. Su principal ventaja es su elevada rigidez y resistencia a la compresión. Su principal desventaja es el elevado costo.

Fibras sintéticas: las fibras sintéticas se fabrican a partir de polímeros termoplásticos tales como los polipropilenos, polietilenos, nylon y poliéster.

Los polidefinos se usan en la producción de materiales compuestos, cemento (mortero), las poliamidas y poliésteres son utilizados en geosintéticos.

El principal interés industrial en el uso de fibras sintéticas radica en el campo de los geotextiles, ya que sus características los hacen ideales para aplicaciones de refuerzos de mallas.

Los geotextiles se dividen en dos grupos:

- Geotextiles convencionales tejidos, no tejidos, mallas y cosidos
- Geotextiles especiales

Los geocomposites se fabrican colocando fibras de alta resistencia en una lámina de material polímero. La fibra proporciona la resistencia a tracción y el polímero la forma geométrica y el medio de protección para la fibra.

Fibras orgánicas de alto módulo: Los progresos realizados en el proceso de síntesis de varios materiales permite obtener fibras orgánicas de alto módulo que compiten satisfactoriamente con las fibras inorgánicas. Se caracterizan por una resistencia a la tracción de 2-4 Gpa., un módulo de elasticidad de 70-150 Gpa. y por preservar sus propiedades mecánicas con temperaturas inferiores a los 180^oC. (Ej. Kevlar)

2.2.5 Matrices

En los materiales compuestos las fibras de refuerzo están aglutinadas por una matriz isótropa polimérica o metálica. Esta matriz provee la forma del producto realizado en material compuesto y tiene como misión fundamental garantizar la uniformidad de las deformaciones de las fibras y la redistribución de la carga ante la falla de las fibras.

La resistencia de la matriz es un factor determinante en el caso en que la orientación de las cargas no sea coincidente con la dirección del refuerzo. La naturaleza de la matriz determina los rangos de temperatura a los cuales puede estar sometido el material compuesto, así como la estabilidad del material bajo distintos tipos de acciones externas.

Los materiales compuestos más utilizados están basados en matrices poliméricas o metálicas.

Matrices de polímeros termoestables

Los polímeros termoestables se fabrican normalmente a partir de precursores líquidos o semisólidos (resinas, un agente curador, un catalizador y un solvente agregado para disminuir la viscosidad y mejorar la impregnación del refuerzo) que se convierten en sólidos rígidos o frágiles por uniones químicas cruzadas que llevan a la formación de una red tridimensional fuertemente unida de cadena de polímeros que endurece irreversiblemente (Hull, 1987b). En el estado inicial las matrices termoestables son un líquido viscoso, cuya temperatura de curado es elevada.

El proceso de endurecimiento es una reacción química conocida como policondensación, polimerización o curado y al final del proceso la resina líquida se convierte en un sólido duro. Este proceso se caracteriza por ser una reacción exotérmica. Las propiedades mecánicas dependen de las unidades moleculares que forman la red y de la extensión y densidad de los enlaces cruzados.

Las matrices de polímeros termoestables poseen baja viscosidad lo que posibilita una excelente impregnación de las fibras de refuerzo y elevadas velocidades en los procesos de producción.

El procedimiento de curado es importante para alcanzar las propiedades óptimas del polímero. Muchos polímeros termoestables pueden polimerizar a temperatura ambiente, pero el material suele ser expuesto a una temperatura relativamente alta en un curado final destinado a minimizar cambios de propiedades durante la vida en servicio. Dependiendo del tipo de catalizador y de la resina los ciclos de curado pueden variar de minutos a horas.

Las matrices termoestables experimentan retracciones durante el proceso de endurecimiento, que varían en un 4% para resinas epoxídicas a un 8% para las del tipo poliéster. Debido fundamentalmente a que el refuerzo no experimenta retracciones se inducen en el material estados tensionales. Las tensiones de contracción durante el proceso de polimerización y las tensiones térmicas provocadas por la diferencia entre el coeficiente de contracción térmica entre matriz y fibra afectan a la microtensiones de los materiales compuestos añadiéndose a las desarrolladas por la carga.

En las resinas pueden utilizarse rellenos y pigmentos. Los rellenos tienen la finalidad de mejorar las propiedades mecánicas y los pigmentos mejoran la apariencia

Resistencia a la tracción	$30 - 120\ Mpa$
Resistencia a compresión	$80 - 250\ Mpa$
Módulo elástico	$2.5 - 10.0\ Gpa$
Densidad	$1200 - 1400\ kg/m^3$

Tabla 2.1: Propiedades de las resinas termoestables.

y la protección.

Las propiedades mecánicas de las matrices termoestables se presentan en la Tabla 2.1(Vasiliev, 1993) (Barbero, 1998).

La resinas termoestables son normalmente isótropas. Su característica más relevante es su comportamiento a elevadas temperaturas ya que, al contrario de las matrices termoplásticas, no se funden al calentarlas. Sin embargo, pierden sus propiedades de rigidez a la temperatura de distorsión térmica que define un límite superior efectivo para su uso en componentes estructurales.

La principal resina termoestable utilizada en la industria de la construcción es la resina de poliéster. Las matrices poliméricas termoestables más utilizadas son:

Resinas poliéster: se caracterizan por su elevada resistencia a los agentes externos tales como acción del agua, aceites minerales, ácidos inorgánicos y la mayoría de los solventes orgánicos.

Existen diversos tipos de resinas poliéster: Isophtalic, que se caracterizan por una moderada resistencia a la corrosión a temperaturas inferiores a 82^oC y buena resistencia al ataque de agentes químicos, BPA Fumarate, que se caracterizan por una mejor resistencia en ambientes con elevada acidez o alcalinidad y Chlorendic que se utilizan en ambientes con elevadas temperaturas. Las principales ventajas de las matrices de resina poliéster son su baja densidad, lo que proporciona una buena impregnación de las fibras, un gran rango de temperaturas de curado a bajas presiones y bajo costo. Entre las desventajas se pueden citar sus pobres características mecánicas, elevada retracción y la presencia de componentes tóxicos.

Resinas Phenolformaldehyde: se caracteriza por su resistencia a temperaturas elevadas, cercana a los $200^o\ C$, su elevada fragilidad y su elevada retracción durante el proceso de curado (15-20%).

Resina Epoxi: este tipo de resinas poseen un conjunto de propiedades muy favorables por lo cual resultan muy utilizadas en la manufactura de diversos tipos de compuestos. Se caracterizan por su elevada resistencia, buena adherencia, baja retracción durante el proceso de curado lo que permite moldeos de alta calidad con buena tolerancia dimensional.

Uno de los principales campos de aplicación de las matrices epoxídicas es la industria aeronáutica, donde se utiliza como adhesivo en las estructuras tipo panal o en la estructura de aviones o misiles. En la industria de la construcción se utiliza en edificios y carreteras para la confección de juntas o elementos selladores.

Resinas organosílicas: se caracterizan por su alta resistencia a un elevado rango de temperaturas (-200^oC a +350^o C), estabilidad a la acción de solventes orgánicos y ácidos minerales. Entre las desventajas se puede mencionar su baja resistencia mecánica a bajas temperaturas (menores a 100^oC), un período de curado elevado y altos costos de producción.

Resinas Polyamidas: se caracterizan por requerir elevadas temperaturas de curado lo que provee estabilidad a altas temperaturas, buenas características mecánicas, resistencia a la acción de agentes externos agresivos y un coeficiente de dilatación térmica muy reducido.

Matrices de polímeros termoplásticos

Las matrices poliméricas termoplásticas son las que poseen una asociación lineal de moléculas y al contrario de los polímeros termoestables no poseen enlaces cruzados. La cadena de moléculas se mantiene unida por fuerzas de Van der Walls relativamente débiles. La valencia química es extremadamente fuerte por lo que su resistencia y rigidez se derivan de las propiedades inherentes a los monómeros y a su elevado peso molecular. Estos polímeros pueden ser amorfos o cristalinos. Los polímeros amorfos se caracterizan por una alta concentración de entramados moleculares que actúan como enlaces cruzados. En los polímeros cristalinos existe un alto grado de orientación y ordenación molecular. En los materiales amorfos el calentamiento conduce al desentramado y al cambio de sólido rígido a líquido viscoso y en los cristalinos da como resultado la fusión de la fase cristalina con lo que se obtiene un líquido amorfo y viscoso.

Ambos tipos de polímeros termoplásticos pueden tener propiedades anisótropas dependiendo de las condiciones de solidificación. En los polímeros amorfos esto se debe fundamentalmente a la orientación molecular que se produce durante el flujo en estado líquido durante el proceso de moldeo. En los polímeros cristalinos las unidades laminares cristalinas pueden desarrollar una orientación preferencial debido a su crecimiento en algunas direcciones a causa de los gradientes de temperatura en el material fundido. Existen evidencias de que este efecto puede tener una profunda influencia en las propiedades de los materiales compuestos.(Hull, 1987b)

Los polímeros termoplásticos más utilizados en ingeniería son:

Geotextiles: Polipropileno, polietileno (baja, alta y extra alta densidad), poliamida (nylon), aramida, poliésteres.

Unidades con carga y semicarga: PVC, acrílicos.

Componentes estructurales con refuerzos de fibras.

La utilización de matrices de polímeros termoplásticos ha aumentado considerablemente en los últimos años. Este tipo de polímeros presenta un punto de fusión elevado. Entre las ventajas de este tipo de materiales respecto de las matrices ter-

Resistencia a la tracción	$50 - 100\ Mpa$
Módulo elástico	$1.4 - 4.2\ Gpa$
Densidad	$1100 - 1700\ kg/m^3$

Tabla 2.2: Propiedades de las resinas termoplásticas.

moestables es posible citar un período de vida útil más elevado y una estructura química más estable.

Las propiedades mecánicas de las matrices termoplásticas poliméricas se pueden observar en la Tabla 2.2(Vasiliev, 1993) (Barbero, 1998).

La resistencia mecánica y térmica de este tipo de matrices depende fundamentalmente de la historia del proceso, del peso molecular y su distribución y a la química molecular. Todos estos plásticos fluyen y experimentan grandes deformaciones antes de su rotura siendo sus propiedades mecánicas fuertemente dependientes de la temperatura y de la relación de deformación aplicada. Esto se traduce en el hecho de que en los materiales compuestos habrá un redistribución de la carga entre la resina y las fibras durante la deformación.

El método de producción de este tipo de matrices presenta algunas dificultades asociadas con su elevada viscosidad. Es necesario a los fines de lograr la total impregnación de las fibras utilizar elevadas presiones en los procesos de fabricación lo que puede causar daños a las fibras de refuerzos.

Matriz de carbono

Los materiales compuestos basados en matrices de carbono se obtienen como resultado de someter a un tratamiento preliminar (carbonización) de sistemas compuestos de fibras de carbono y matrices de resinas fenólicas.

Debido a la elevadas temperaturas y los procesos necesarios para su manufactura se utilizan fibras de carbono en una matriz de carbono. Las principales ventajas de este tipo de materiales son su estabilidad térmica y química y su baja densidad.

Matrices metálicas

Estos materiales están constituidos por fibras de elevada rigidez (boro o carbón) y una matriz metálica con capacidad de deformaciones plásticas tales como el aluminio o el titanio. Debido a que las propiedades mecánicas de las matrices metálicas son superiores a las de las matrices poliméricas los materiales compuestos que se obtienen con este tipo de matrices se caracterizan por una elevada rigidez y resistencia en dirección transversal al refuerzo.

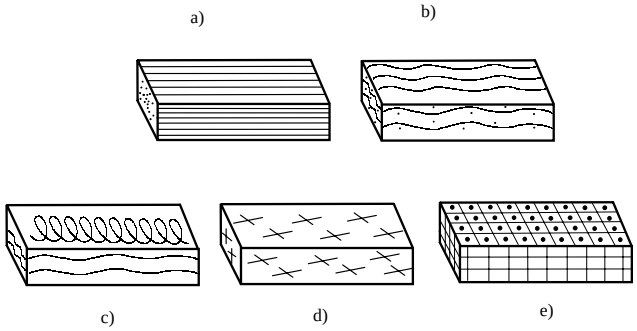

Figura 2.2: Materiales compuestos típicos reforzados a)fibras unidireccionales, b) tejido, c) orientación aleatoria, d) orientación aleatoria cruzada y e) espacial

2.3 Características estructurales y propiedades mecánicas de los materiales compuestos reforzados

Los materiales compuestos surgen de combinar adecuadamente los elementos de refuerzo y los diversos tipos de matrices considerados en el apartado anterior. La posición y tipo de refuerzo dan lugar a los distintos tipos de materiales compuestos reforzados (ver Figura 2.2):

- Materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales paralelas
- Materiales compuestos reforzados con tejidos de fibras
- Materiales compuestos reforzados con fibras con distribución aleatoria
- Materiales compuestos reforzados tridimensionalmente

Los distintos tipos de materiales compuestos reforzados con fibras considerados anteriormente resultan no homogéneos a nivel micro y macro estructural. A nivel micro estructural la no homogeneidad está asociada con la existencia de al menos 2 fases (matriz y fibra) y a nivel macro estructural está asociada a la presencia de láminas microestructuralmente no homogéneas con diferente orientación. En el presente trabajo ambos niveles de no homogeneidad se tienen en cuenta a través de la formulación de un modelo constitutivo adecuado para cada fase y para el conjunto.

El principal problema en el análisis de materiales compuestos es la determinación del módulo elástico del conjunto.

En la actualidad existen diversos micro y macro modelos para el análisis de materiales compuestos. Los *micromodelos* y los *macromodelos* constituyen las alternativas para de estudiar el comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Los micromodelos se concentran en el estudio del comportamiento del material a nivel interatómico (Obraztsov y Vasilev, 1982). Estos modelos presentan un alto costo computacional en la práctica. Los macromodelos expresan el comportamiento constitutivo del material compuesto como si se tratase de un solo material.

La gran mayoría de los modelos macromecánicos están basados en la *teoría de mezclas*. Esta teoría permite estudiar el comportamiento del material compuesto como una combinación de materiales componentes simples cada uno con su modelo constitutivo "base" que satisfacen una ecuación de cierre apropiada[1].

2.3.1 Materiales compuestos reforzados con fibras unidireccionales

Los laminados reforzados con fibras unidireccionales constituyen el ejemplo más simple de materiales compuestos. La secuencia de apilamiento de las diversas láminas da origen a diversos tipos de materiales compuestos con diferentes propiedades. Las propiedades de las láminas de materiales compuestos reforzadas con fibras unidireccionales se presenta en la Tabla 2.3(Vasiliev, 1993)

Del análisis de las propiedades de los materiales dada en la Tabla 2.3se observa que las propiedades mecánicas de las láminas en el sentido de las fibras es considerablemente superior a las de algunas aleaciones metálicas, mientras que las propiedades mecánicas en la dirección transversal al refuerzo, especialmente la resistencia es muy inferior.

La relación tensión deformación a tracción o compresión en los materiales compuestos unidireccionales en la dirección de las fibras es posible considerarla lineal hasta cierto límite. En el caso de cargas transversales y bajo estado de corte, el material presenta un comportamiento no-lineal y su rigidez resulta muy inferior respecto a la dirección coincidente con el refuerzo.

La capacidad de carga de materiales unidireccionales en la dirección del refuerzo está dada fundamentalmente por las propiedades del refuerzo y la rotura se produce debido a la fractura del refuerzo o despegue del refuerzo de la matriz. En el caso de cargas de compresión la falla se produce debido a la presencia de pandeo en el refuerzo o despegue de la fibra respecto de la matriz. Bajo estado de corte el

[1]Se denomina ecuación de cierre a la condición de compatiblidad de deformaciones expresada en la ec. (4.1). (Ver apartado 4.2)

Característica	Tipo de compuesto reforzado unidireccionalmente						
	Glass-Epoxy	Carbon-Epoxy	Organic-Epoxy	Boron-Epoxy	Carbon-Carbon	Carbon-Aluminium	Boron-Aluminium
Densidad kg/m^3	2.1	1.5	1.38	2.0	1.9	2.2	2.64
Resistencia a tracción en la dirección de las fibras Gpa	1.75	1.10	1.8	1.6	0.34	1.10	1.40
Módulo elástico en la dirección de las fibras Gpa	57	180	72	210	170	200	230
Resistencia a tracción en la dirección normal a las fibras Gpa	0.034	0.033	0.028	0.065	0.007	0.045	0.14
Módulo elástico en la dirección normal a las fibras Gpa	9	6.2	4.9	19	19		140
Resistencia a cortante Gpa	0.048	0.027	0.042	0.102	0.03	0.045	0.084
Módulo a cortante Gpa	5.2	5.0	2.0	6.2	9		63

Tabla 2.3: Propiedades de láminas unidireccionales.

mecanismo de falla está asociado con la matriz y con el despegue de la matriz respecto de la fibra.

En la Figura 2.3 se observa una micrografía de barrido electrónico de un material compuesto unidireccional en la que se muestra el fenómeno de despegue entre fibra y matriz, zonas de plastificación en la matriz y fisuras en las fibras de refuerzo.

2.3.2 Materiales compuestos reforzados con tejidos bidireccionales

La mayoría de los distintos tipos de fibras se utilizan también para fabricar tejidos que se utilizan como refuerzo en materiales compuestos. En la Figura 2.4 se observa una micrografía de barrido electrónico de un tejido de mechas antes de su impregnación con resina.

En este tipo de materiales debido a que la fibra no se encuentra en un plano y que presenta ondas la capacidad de carga de la lámina se reduce considerablemente. La estructura del tejido conduce a la formación de bolsas de resina en los puntos de cruce que disminuyen también la capacidad portante de la lámina.

Las características de los materiales compuestos reforzados con tejido depende fundamentalmente del ángulo formado por la dirección de la carga y el refuerzo. Para determinados ángulos la resistencia y rigidez del material depende fundamentalmente de las propiedades de la matriz.

La resistencia de estos materiales en la dirección de las fibras depende fundamentalmente de la proporción volumétrica del refuerzo respecto del volumen total y la resistencia a cortante en el plano del refuerzo está determinada fundamentalmente

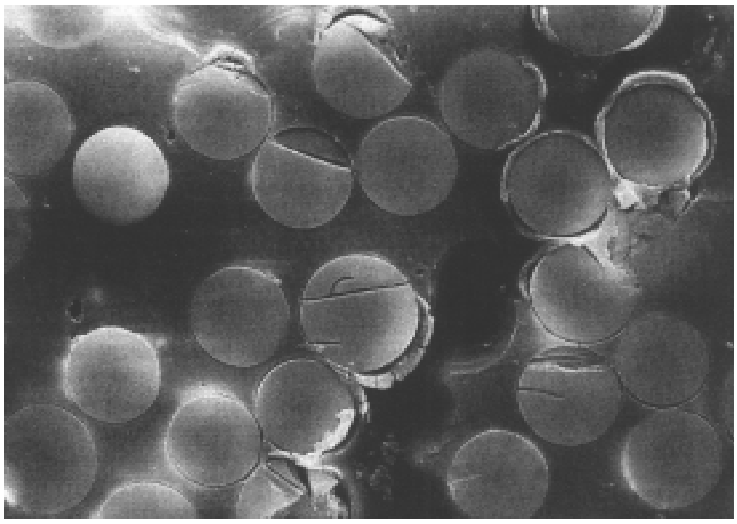

Figura 2.3: Micrografia de barrido electrónico de un material compuesto unidireccional.

por las propiedades de la matriz

2.3.3 Materiales compuestos reforzados con fibras con distribución aleatoria

Estos materiales están formados por la combinación de una matriz polimérica reforzada con fibras dispuestas con una orientación aleatoria y de longitudes variables. Las propiedades mecánicas de estos materiales está en función de la longitud del refuerzo y del grado de orientación del refuerzo. El grado de orientación de las fibras

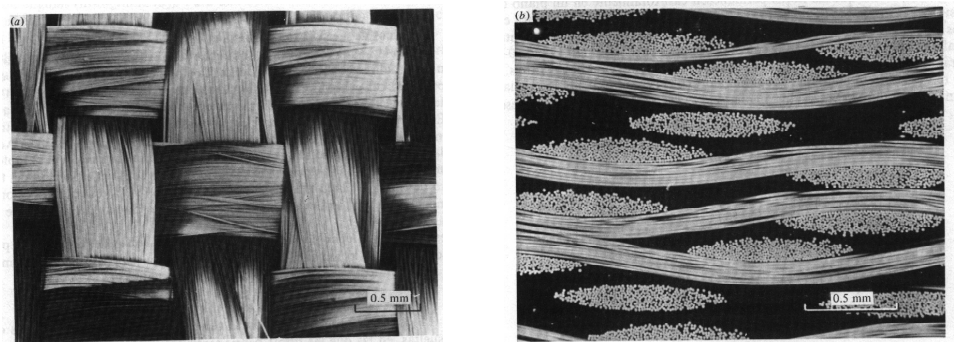

Figura 2.4: Micrografia de barrido electrónico de un tejido de fibras 0-90.

depende fundamentalmente del tipo proceso empleado en su producción. La ventaja principal de este tipo de material es su relativo bajo costo de producción.

En la Figura 2.5 se observa una micrografía de barrido electrónico de fibras orientadas aleatoriamente antes de su impregnación con resina.

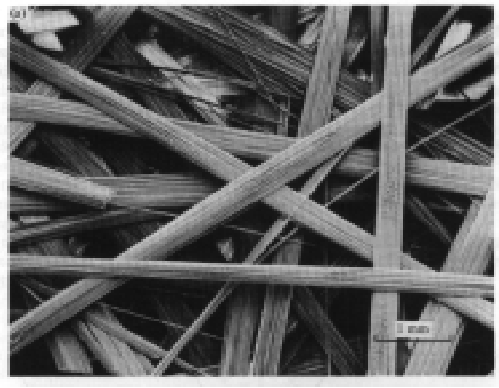

Figura 2.5: Micrografía de barrido electrónico de fibras en disposición aleatoria.

2.3.4 Materiales compuestos refozados con fibras con distribución tridimensional

Uno de los principales problemas de los materiales compuestos formados por láminas es su baja resistencia interlaminar que está controlada fundamentalmente por las propiedades de la matriz. Es posible solucionar esta deficiencia utilizando un refuerzo con distribución tridimensional.

Los materiales compuestos reforzados con tejidos espaciales se obtienen mezclando fibras paralelas que forman ciertos ángulos con las restantes. Este tipo de refurzo se utiliza para materiales compuestos constituidos por matrices de carbono y fibras de carbono. Este tipo de material, a diferencia del resto de materiales compuestos, presenta un alto grado de isotropía y muy baja expansión térmica.

2.4 Modelos constitutivos existentes para el estudio de los materiales compuestos

Los *micromodelos* y los *macromodelos* constituyen las alternativas de estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Los micromodelos se concentran en el estudio del comportamiento del material a nivel de cada componente(Obraztsov y Vasilev, 1982) ; en la práctica estos modelos presentan un alto costo

computacional. Los macromodelos representan el comportamiento constitutivo del material compuesto como si se tratase de un único material.

Se han formulado algunas teorías para solucionar las dificultades que se derivan de los problemas con materiales compuestos. Las teorías más utilizadas son: la *teoría de mezclas* y la *teoría de homogeneización*. La teoría de mezclas pertenece al grupo de los macromodelos y determina el comportamiento del material compuesto como una combinación de materiales componentes simples, cada uno con su modelo constitutivo propio que satisface una condición de compatibilidad con los restantes.

La teoría de homogeneización plantea una solución muy diferente a la planteada por la teoría de mezclas, dividiendo el problema de los materiales compuestos en dos escalas de diferente orden, denominadas *macroscópica* o *global* y *microscópica* o *local*.

La escala microscópica se utiliza con el objetivo de analizar la estructura interna o micro-estructura del material compuesto y obtener las variables de estado[2] del problema micro-mecánico. Estas variables de estado permiten determinar las macro-variables del problema. La escala macroscópica se utiliza para analizar el problema global y en ella se considera al material compuesto como un material homogéneo.(Zalamea *et al.*, 1999) (Car *et al.*, 1999d)

Se presentan a continuación macromodelos y micromodelos constitutivos para materiales compuestos.

2.5 Modelo elástico lineal para laminados

Las láminas de materiales compuestos unidireccionales poseen una elevada anisotropía coplanar. Para superar este problema es necesario componer las láminas unidireccionales a diferentes ángulos. Las estructuras de materiales compuestos están realizadas con laminados que presentan varias láminas con diversa orientación. La orientación de las láminas es función de la orientación de las cargas, teniendo en cuenta que el material compuesto laminado es más resistente y rígido en la dirección del refuerzo.

Existen diversos modelos que permiten simular el comportamiento de los laminados compuestos basados fundamentalmente en el análisis tridimensional de sólidos y en la teoría de placas laminadas. Antes de considerar los diversos modelos es necesario estudiar los diversos tipos de secuencias de apilamiento de las láminas así como los esfuerzos de acoplamiento que surgen cuando dos o más láminas ortótropas

[2] *Variables de estado, independientes o libres*: es un subconjunto del grupo de variables termodinámicas en función de las cuales se pueden expresar todas las demás. *Variables termodinámicas*: conjunto de variables macroscópicas que caracterizan el sistema e intervienen en todos los procesos físicos a estudiar.

se unen y se someten a una carga exterior.

Este apartado tiene como objetivo determinar las propiedades elásticas de laminados a partir de las propiedades, orientación y distribución de las láminas que lo componen.

2.5.1 Propiedades elásticas de un laminado

Este apartado tiene como objetivo dar una visión física de la naturaleza de los esfuerzos de acoplamiento que surgen cuando dos o más láminas no isótropas se unen y se someten a la acción de cargas o de la temperatura.

En la Figura 2.9 se muestra un laminado cruzado constituido por dos láminas unidireccionales con refuerzo a (0^o-90^o)

Si se aplica a cada lamina por separado un esfuerzo de tracción unidireccional σ, debido a la diferencia en los módulos elásticos en la dirección del esfuerzo aplicado, se generan en cada lámina diferentes deformaciones. Cuando las láminas se encuentran unidas formando una placa delgada, el esfuerzo aplicado produce la misma deformación en cada lámina siempre y cuando esta se mantenga plana. Los esfuerzos a tracción en cada lámina no resultan iguales y esto da lugar a unas fuerzas de acoplamiento que producen unos esfuerzos adicionales en el plano normal al de tracción. (ver Figura 2.6) El módulo elástico del laminado está comprendido entre los valores de los módulos elásticos longitudinal y transversal de cada lámina. Bajo la acción de cargas térmicas se produce un fenómeno similar debido a la diferencia entre los valores del coeficiente de dilatación térmica longitudinal y transversal de las láminas.

En la Figura 2.7 se observa un laminado equiangular de dos capas. En este caso la aplicación de un esfuerzo de tracción en cada lámina por separado con un ángulo respecto de la dirección del refuerzo produce un cambio de forma que implica deformaciones longitudinales y angulares. El cambio de forma en cada capa es el mismo pero en sentido opuesto. Cuando las láminas se unen entre sí el cambio de forma es diferente y se desarrollan esfuerzos de acoplamiento fuera del plano como se observa en la Figura 2.7

En los laminados equiangulares sometidos las cargas de origen térmico se produce un retorcimiento como el que se ilustra en la Figura 2.8.

Los esfuerzos de acoplamiento surgen porque el laminado no es simétrico respecto al plano medio y añade un grado de complejidad al cálculo de la respuesta. Debido a esto los laminados más comunes son simétricos. La simetría depende del número y el espesor de las láminas diferentemente orientadas respecto del plano medio. En la Figura 2.10 se muestran ejemplos sencillos de laminados simétricos y no simétricos.

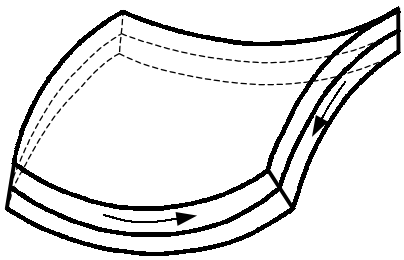

Figura 2.6: Distorsión de doble curvatura de un laminado de dos capas cruzadas.

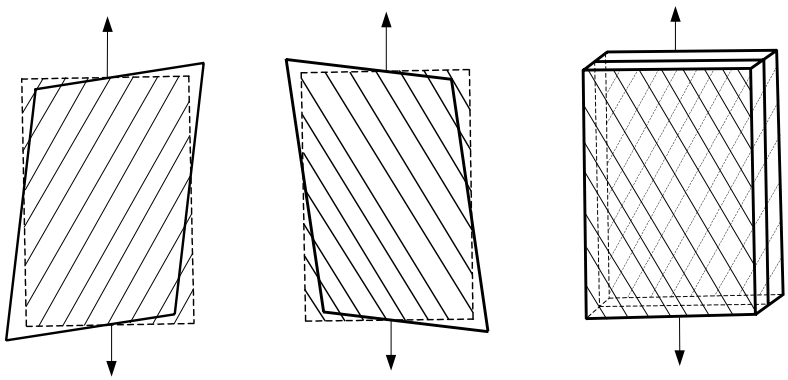

Figura 2.7: Cambio de forma en una lámina única y en un laminado de dos capas equiangular bajo un esfuerzo de tracción unidireccional.

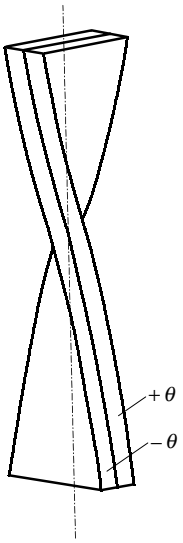

Figura 2.8: Cambio de forma de un laminado de pliegues no simétrico bajo carga térmica.

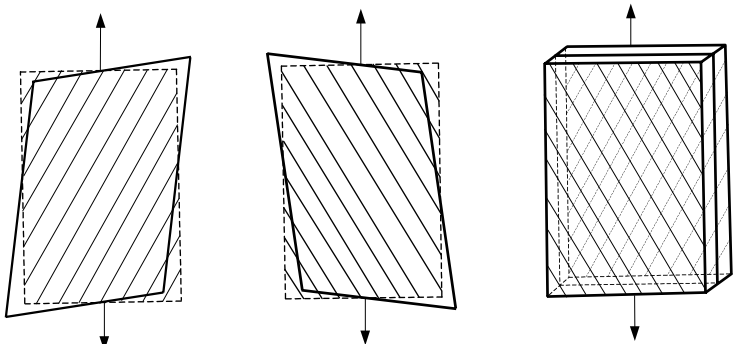

Figura 2.9: a) Laminados de dos capas de láminas cruzadas. b) Cambio de forma bajo la acción de un esfuerzo en la dirección del refuerzo.

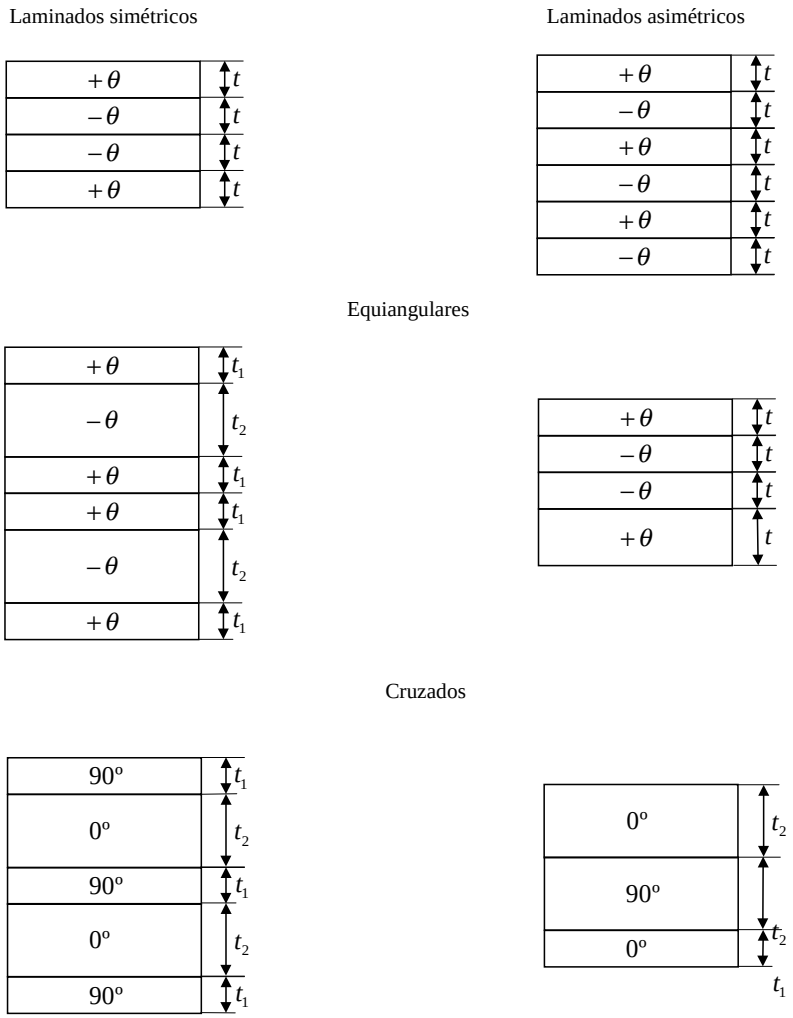

Figura 2.10: Ejemplos de laminados simétricos y no simétricos.

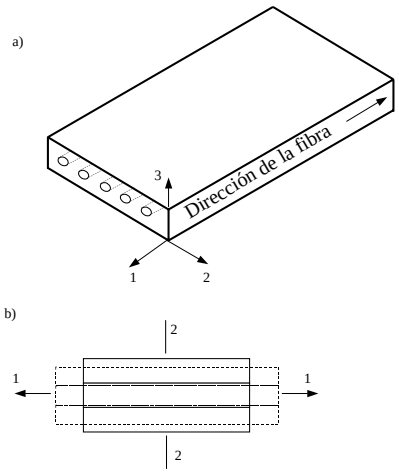

Figura 2.11: a) Lámina unidireccional. b) Cambio de forma en una lámina unidireccional bajo acción de un esfuerzo en la dirección 1.

2.5.2 Propiedades elásticas de láminas unidirecionales

Los modelos constitutivos propuestos por diversos autores para simular el comportamiento mecánico de los materiales compuestos en régimen elástico lineal se basa en la "*regla de mezclas unidimensional*" de sustancias.(Hull, 1987b) (Barbero, 1998) (Matthews y Rawlings, 1994). Esta regla se basa fundamentalmente en la hipótesis de que en un material compuesto bajo un estado de cargas paralelo a la dirección del refuerzo las deformaciones en la matriz son iguales a las del refuerzo. En el caso de un comportamiento elástico lineal de ambas fases, los esfuerzos correspondientes a cada componente están dados por:

$$\sigma_f = E_f\ \varepsilon, \quad \sigma_m = E_m\ \varepsilon \tag{2.1}$$

donde ε es la deformación en la dirección del refuerzo, E_f y E_m son los módulos elásticos correspondientes a la fibra y matriz respectivamente y σ_f y σ_m son las tensiones en la fibra y matriz respectivamente en la dirección de las fibras.

En una sección recta de una lámina de material compuesto de superficie total A el esfuerzo total está dado por:

$$\sigma_c\ A = \sigma_f\ A_f + \sigma_m\ A_m \Rightarrow \quad \sigma_c = \sigma_f\ k_f + \sigma_m\ k_m \tag{2.2a}$$

$$k_f = \frac{A_f}{A}, \quad k_m = \frac{A_m}{A} \tag{2.2b}$$

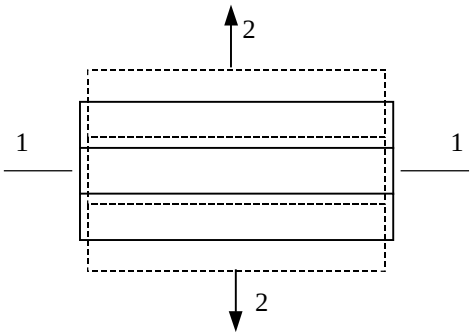

Figura 2.12: Cambio de forma de una lámina unidireccional debido a una carga a tracción en la dirección 2 cuando hay una unión perfecta entre fibra y matriz.

donde A_f y A_m representan las áreas en la sección de las fibras y de la matriz respectivamente y k_f y k_m representan los coeficientes de participación volumétrica de fibra y matriz.

El módulo elástico del compuesto en la dirección del refuerzo se obtiene teniendo en cuenta las Ecs. (2.1) y (2.2a), esto es:

$$E_1 = E_f \; k_f + E_m \; k_m \tag{2.3}$$

donde E_1 representa el módulo elástico del compuesto en la dirección del refuerzo. En la Figura 2.11 se presenta una lámina unidireccional sometida a un esfuerzo en la dirección coincidente con la del refuerzo.

Un procedimiento similar permite obtener el módulo elástico de un material compuesto cargado en la dirección perpendicular al refuerzo. La obtención del módulo transversal del material compuesto se basa en la hipótesis de igualdad de tensiones en la fibra y matriz $\sigma_f = \sigma_m$ y de una unión perfecta entre fibra y matriz. Las deformaciones en cada componente resultan entonces:

$$\varepsilon_f = (E_f)^{-1} \sigma, \;\; \varepsilon_m = (E_m)^{-1} \sigma \tag{2.4}$$

La deformación del compuesto está dada por:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_f \; k_f + \varepsilon_m \; k_m \tag{2.5}$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (2.4) y (2.5) el módulo de elasticidad del material compuesto en la dirección transversal a la fibra resulta:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f k_m + E_m k_f} \tag{2.6}$$

En la Figura 2.12 se presenta un laminado unidireccional sometido a un esfuerzo en la dirección perpendicular a la del refuerzo. En la misma se observa que la contracción en la dirección perpendicular al esfuerzo y coincidente con la del refuerzo es menor que la contracción que se observa cuando la dirección de la carga coincide con la del refuerzo (ver Figura 2.11). Este fenómeno se debe a la presencia de la fibra que impide la contracción de la matriz.

El módulo elástico transversal calculado de acuerdo con la ec.(2.6) está razonablemente de acuerdo con los resultados experimentales que se presentan en la Figura 2.13 para un material compuesto de resina de poliéster reforzado con fibras de vidrio. Sin embargo, la ecuación no es un buen ajuste a los resultados reales debido a que con esta formulación no es posible tener en cuenta la presencia de las fibras en la dirección perpendicular al esfuerzo, existiendo una cantidad considerable de dispersión. Se han propuesto otras ecuaciones similares a la ec.(2.6) que permite tener en cuenta los efectos de la contracción de Poisson que se ilustran en la Figura 2.12 y permite un mejor ajuste a los resultados experimentales. Una modificación de la ec.(2.6) está dada por:

$$E_2 = \frac{E_f E_m^{'}}{E_f k_m + E_m^{'} k_f} \tag{2.7}$$

donde $E_m^{'}$ está dado por:

$$E_m^{'} = \frac{E_m}{1 - \nu_m^2} \tag{2.8}$$

Con la ec.(2.7) se obtienen resultados más próximos a los valores experimentales. Los datos de la ec.(2.7) los datos no pueden extrapolarse a E_m para $k_f = 0$ debido a que aplicando esta ecuación no se obtiene el módulo elástico de la matriz.

Las ecs. (2.6) y (2.7) aportan poco conocimiento físico de la distribución de esfuerzos y deformaciones alrededor de las fibras. La hipótesis en la que se basa la ec.(2.6) no es realista, debido fundamentalmente a que las fibras no pueden considerarse como hojas como se observa en la Figura 2.12. Esto puede demostrarse observando la Figura 2.14 en la cual se muestra una red ideal hexagonal de fibras en una matriz, sometidos a una deformación uniforme. La mayor parte de la deformación de la sección XX ocurre en la fibra, debido a que $E_f \gg E_m$. La deformación en la sección YY que pasa completamente a través de la resina será mucho más uniforme y la deformación media será menor que en la sección XX, produciéndose una amplificación de la deformación en la resina entre las fibras. Este fenómeno conduce a esfuerzos adicionales y a una distribución de esfuerzos no uniforme. A

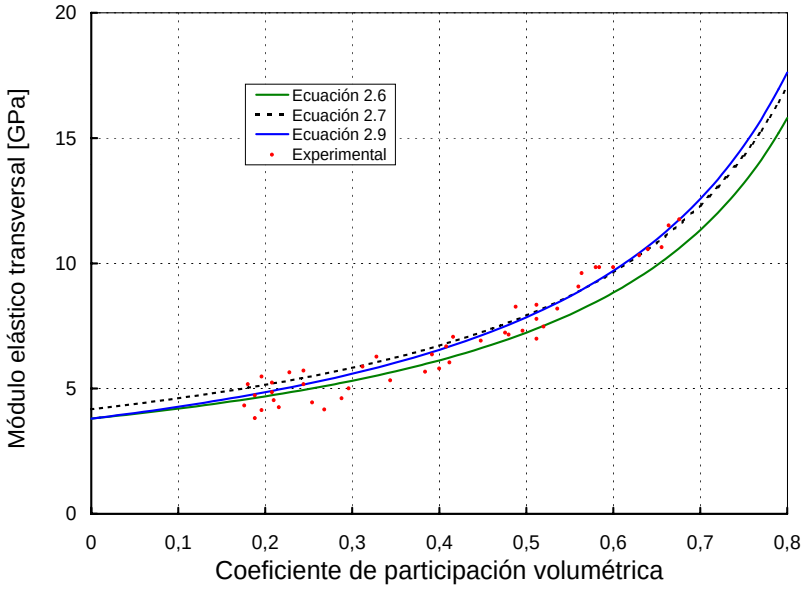

Figura 2.13: Módulo elástico transversal a las fibras en láminas unidireccionales de resina de poliéster y fibra de vidrio para diferentes volúmenes de fibra.

los fines de predecir el módulo elástico transversal del material compuesto se han utilizado la teoría de la elasticidad y análisis por el método de los elementos finitos. Una simplificación de algunas de estas soluciones ha sido desarrollada por Halpin y Tsai (1969) y está dada por la siguiente fórmula semiempírica

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_m} &= \frac{(1+\xi\ \eta\ k_f)}{(1-\eta\ k_f)} \\ \eta &= \frac{(M_f\ /\ M_m)-1}{(M_f\ /\ M_m)+\xi} \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde M puede ser el módulo elástico transversal del compuesto E_2, el módulo elástico transversal G o el coeficiente de Poisson ν_{23}, M_f es el módulo elástico de la fibra E_f o el módulo transversal de la fibra G_f, M_m es el módulo elástico de la matriz E_m o el módulo transversal de la matriz G_m y ξ es un factor empírico que depende de las características de la fase de refuerzo tales como la forma y la relación de aspecto de la fibra, forma y regularidad del empaquetamiento y también de las condiciones de carga y se obtiene ajustando los resultados a las curvas experimentales. El valor $\xi = 0.2$ (Hull, 1987b) se utiliza par el caso de fibras de sección circular o cuadradas. Para fibras de sección rectangular $\xi = 2a/b$ (Barbero, 1998) donde a y b son las dimensiones del rectángulo en la dirección de la carga y perpendicular

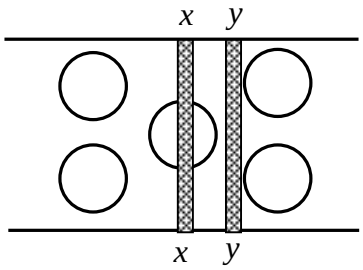

Figura 2.14: Representación esquemática de la amplificación de la deformación en una lámina unidireccional sujeta a una carga transversal.

respectivamente.

En la Figura 2.13 se observa, para volúmenes de fibra comprendidos entre el 10% y el 45% , una elevada dispersión en los datos experimentales. La ec.(2.9) es la que mejor ajusta a los resultados experimentales, sobre todo para valores elevados de k_f.

Kies (1962) hizo una de las primeras estimaciones cuantitativas de la distribución no uniforme de deformación en la matriz entre las fibras utilizando el sencillo modelo que se muestra en la Figura 2.15. La red cuadrada se somete a una deformación sencilla a tracción y la deformación en la resina a lo largo de la línea AB está dada por (Kies, 1962):

$$\frac{\varepsilon_x}{\bar{\varepsilon}_x} = 2 + \frac{s}{r} / \left[\frac{s}{r} + 2 \left(\frac{E_m}{E_f} \right) \right] \tag{2.10}$$

donde s y r están definidos en la Figura 2.15. Del análisis de la ec.(2.10) se observa que se producen amplificaciones en la deformación muy grandes para fracciones de volumen altas. La amplificación de la deformación depende fundamentalmente de las condiciones de carga.

2.5.3 Modelo elástico lineal para una lámina unidireccional

Los materiales ingenieriles poseen la característica de que a escala microscópica constan de una fina dispersión de una fase en otra. Al considerar las propiedades elásticas de estos materiales se prescinde de esta microheterogeneidad y es usual considerar por ejemplo a los metales como isótropos y homogéneos. En forma análoga en el análisis de las propiedades elásticas de los laminados se supone que las láminas son homogéneas, aunque estudios microscópicos revelan una evidencia considerable de

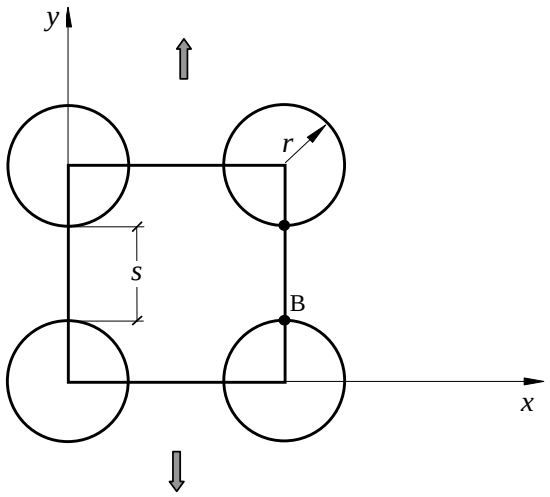

Figura 2.15: Modelo de red cuadrada usado por Kies (1962) para calcular la amplificación de la deformación.

microheterogeneidad. En el apartado anterior se ha demostrado que las láminas de materiales reforzados no son isótropas debido al diferente comportamiento mecánico de las distintas fases que componen la lámina.

A los fines de simular analíticamente el comportamiento del conjunto se considera que está constituido por un material elástico lineal ortótropo bajo un estado de tensión plana. Este modelo se basa en la ley de Hooke generalizada, que para el caso isotérmico y restringido a pequeñas deformaciones se expresa como (Malvern, 1969):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.11}$$

donde σ_{ij} es el tensor de tensiones de Cauchy, ε_{ij} es el tensor de deformaciones y C_{ijkl} es el tensor constitutivo que depende de las propiedades mecánicas del material, referido a un sistema coordenado cartesiano fijo. La expresión matricial del tensor constitutivo local ortótropo en el caso de tensión plana resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{E_{xx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{\nu_{xy}E_{xx}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ \frac{\nu_{yx}E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & \frac{E_{yy}}{1-\nu_{xy}\nu_{yx}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

donde E_{xx} y E_{yy} son los módulos de Young en las direcciones xx e yy respectivamente del conjunto que se obtienen de acuerdo a lo expresado en la Apartado 2.5.2, ν_{xy} y

ν_{yx} son los coeficientes de Poisson en la dirección xy e yx respectivamente y G_{xy} es el módulo a cortante en el plano xy

La ec.(2.11) establece que los materiales ortótropos ensayados a tracción o compresión según las direcciones principales del material no manifiestan deformaciones angulares y por lo tanto la deformación es independiente del módulo a cortante. Esta situación no se verifica cuando la lámina se ensaya con ángulos arbitrarios a las direcciones principales del material. En este caso la ley de Hooke generalizada queda:

$$\sigma_{ij} = C^*_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.13}$$

donde C^*_{ijkl} es el tensor constitutivo transformado. La expresión matricial de este tensor para el estado plano de tensiones está dado por:

$$\begin{bmatrix} C^*_{11} & C^*_{12} & C^*_{16} \\ C^*_{12} & C^*_{22} & C^*_{26} \\ C^*_{16} & C^*_{26} & C^*_{66} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

donde las C^* están dadas por (Hull, 1987b) (Reddy y Miravete,) (Pendleton y Tuttle, 1989)

$$\begin{aligned}
C^*_{11} &= C_{11}\cos^4\theta + 2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{22}\sin^4\theta && \text{(2.15a)}\\
C^*_{12} &= \left(C_{11}+C_{22}-4C_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + C_{12}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) && \text{(2.15b)}\\
C^*_{22} &= C_{11}\sin^4\theta + 2\left(C_{12}+2C_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + C^4_{22}\cos\theta && \text{(2.15c)}\\
C^*_{16} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta \\
&\quad + \left(C_{12}-C_{22}-2C_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta && \text{(2.15d)}\\
C^*_{26} &= \left(C_{11}-C_{12}-2C_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta \\
&\quad + \left(C_{12}-C_{22}-2C_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta && \text{(2.15e)}\\
C^*_{66} &= \left(C_{11}+C_{22}-2C_{12}-2C_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + C_{66}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) && \text{(2.15f)}
\end{aligned}$$

donde θ es el ángulo formado entre la dirección principal del material y la del ensayo. Por lo tanto, conocidas las propiedades E_{xx}, E_{yy}, G_{xy} y ν_{xy} pueden obtenerse las propiedades elásticas de una lámina orientada a cualquier ángulo.

2.5.4 Modelo elástico lineal para laminados simétricos

En este apartado se presenta un método empleado para la determinación de los esfuerzos en laminados basado en la teoría de laminación (Ashton *et al.*, 1969)

(Jones, 1975) (Hull, 1987b). Esta teoría se basa en las hipótesis de la elasticidad anisótropa.

La teoría de la laminación parte de las siguientes hipótesis: i) las láminas están perfectamente unidas y sin deslizamiento relativo entre ellas, ii) la unión entre las láminas es infinitamente delgada y iii) el laminado tiene las propiedades de una hoja delgada (Hull, 1987b)

Los compuestos laminados están formados por una secuencia de láminas apiladas orientadas en direcciones diferentes, por lo tanto sus propiedades elásticos derivan de las propiedades de las láminas unidireccionales, esto es para la capa k-ésima la relación tensión deformación está dada por la ec.(2.13), esto es:

$$[\sigma_{ij}]_z = \left[C^*_{ijkl}\right]_z \varepsilon_{kl} \tag{2.16}$$

donde $[\sigma_{ij}]_z$ y $\left[C^*_{ijkl}\right]_z$ representan la tensión y el tensor constitutivo de la capa z-ésima respectivamente. El tensor constitutivo C^*_{ijkl} debe evaluarse para cada capa puesto que dependen del ángulo entre el sistema coordenado usado y las direcciones principales del material.

La relación esfuerzo deformación del conjunto está dada por:

$$\sigma_{ij} = \hat{C}^*_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.17}$$

donde $\hat{C}^*_{ijkl}$ es el tensor constitutivo del conjunto que se determina sumando la rigidez de las capas individuales multiplicada por la fracción de volumen de la capa respecto del volumen total, esto es:

$$\hat{C}^*_{ijkl} = \sum_{z=1}^{N} \left[C^*_{ijkl}\right]_z V_z \tag{2.18}$$

donde V_z representa la fracción de volumen de la capa respecto del volumen total.

2.6 Modelos para barras laminadas rectas y curvas

Las barras rectas y curvas son elementos estructurales ampliamente utilizados en ingeniería. El problema de flexión en vigas de materiales compuestos ha sido tratado por diversas teorías y aproximaciones, entre las que se puede citar:

1. Mecánica de materiales compuestos

2. Teoría elástica no homogénea

3. Teoría macroestructural

La aproximación de mecánica de materiales compuestos fue inicialmente desarrollada por Hoft (1949) y una presentación mas general fue introducida por Berkowitz (1969) .

Todos los análisis existentes de vigas laminadas aplicando teoría de elasticidad no homogénea en dos dimensiones suponen simplificaciones. Cheng (1964) y Gerstnen (1968) consideran solamente cargas de corte, mientras que Lekhnistskii (1968) y Schile (1962) también consideran cargas por momentos. El análisis de Cheng (1964) desprecia la deformación normal a través del espesor y Schile (1962) y Gerstnen (1968) consideran que cada capa es isótropa en su plano de flexión. La teoría de Lekhnistskii (1968) se puede utilizar para el análisis de vigas laminadas de materiales compuestos en capas bajo la hipótesis de que cada capa es ortótropa en el plano. El análisis de Cheng (1964) se limita al estudio de vigas laminadas simétricas y los de Schile (1963) y Gerstnen (1968) se limitan solo caso de 3 capas laminadas simétricamente. El trabajo de Lekhnistskii (1968) es más general y en el se incluye un ejemplo numérico de un laminado asimétrico de 2 capas.

La flexión en barras constituidas por capas con diferentes propiedades mecánicas puede analizarse utilizando la teoría general de la elasticidad. En el caso de capas con iguales coeficientes de Poisson entre capas se puede tomar como referencia los trabajos de Muskhelishvili (1963) y de Schile (1962) .

Los análisis hasta ahora citados son aplicables a barras que contienen diferentes capas de materiales compuestos pero con una orientación del refuerzo paralela al eje de la barra. En el caso de que los refuerzos forman un ángulo con el eje de la barra es necesario abordar el análisis teniendo en cuenta leyes ortótropas. (Payne, 1949)

Las barras curvas y circulares de materiales compuestos son usadas extensívamente como elementos estructurales. Desafortunadamente no existen métodos de análisis apropiados para estos tipos de barras.

2.7 Placas laminadas

Existen diversos tipos de teorías y niveles de sofisticación para el análisis de placas laminadas. Estas teorías pueden ser lineales o no-lineales. Se distinguen para cada caso tres tipos de teorías

1. Análisis de placas delgadas
2. Placas moderadamente gruesas (incluyen deformación por cortante a través del espesor)
3. Teoría clásica

El análisis de placas delgadas es el más popular, probablemente debido a su sencillez. En este tipo se distinguen dos tipos de análisis:

1. Análisis simplificado (Hoff, 1949) (Smith, 1953) aplicable solamente a placas laminadas simétricas con respecto a su plano medio

2. Análisis completo (Reissner y Stavsky, 1961) (Stavsky, 1961) incluyendo el efecto acoplado de flexión-extensión y aplicable tanto a laminados simétricos como asimétricos.

El efecto acoplado de flexión-extensión en el laminado es un acoplamiento entre el plano de extensión (o acción de membrana) y la flexión de la placa. Este fenómeno fue identificado y descrito por Ambartsumyan (1964) y se presenta en placas ortótropas laminadas no simétricas. Este efecto de acoplamiento en el laminado es la mayor diferencia entre el comportamiento estructural macroscópico de una placa con laminado arbitrario y placas homogéneas clásicas tratadas en libros, por ejemplo por Timoshenko y Woinowsky-Krieger (1959) .

Werren y Norris (1953) muestran que es posible orientar las leyes de un laminado multicapa de tal forma que el resultado del comportamiento de equivalente sea isótropo. Es necesario, para que se cumpla lo anterior, que las placas laminadas cumplan con las siguientes condiciones:

1. El número de capas debe ser superior a 3

2. Cada una de las capas debe tener las mismas propiedades ortótropas y espesor

3. Una capa típica puede estar orientada en un ángulo con respecto a la dirección de referencia

Si un laminado cumple con las hipótesis anteriores se puede considerar como isótropo y se tendrá en cuenta solo la rigidez a flexión y en general no se consideran los efectos de flexión y de membrana-flexión acoplados. Trabajos futuros que relacionan a las propiedades invariantes de materiales anisótropos fueron realizados por Tsai y Pagano (1966)

2.8 Láminas laminadas

En el caso de las láminas se tiene una mayor cantidad de teorías y niveles de sofisticación que en el caso de placas. Entre las diversas teorías se pueden considerar:

- Teoría de membrana: es la más simple de todas debido a que desprecia la rigidez a flexión de la lámina. Hartung (1963) utiliza esta teoría para aplicarla a láminas de materiales compuestos.

- Teoría aproximada de lámina: es una teoría simplificada que incluye la rigidez a flexión, pero desprecia los efectos de desplazamientos tangenciales a la superficie media sobre las curvaturas y también desprecia los términos de la forma Q_i/R_i en las ecuaciones tangenciales de movimiento, donde Q_i es la tensión cortante en el espesor y R_i es el radio de curvatura de la lámina. Donell (1933) introduce esta teoría para láminas cilíndricas y la primera aplicación a materiales compuestos se debe a Dong (1962). La teoría de Donell puede simplificarse aún más despreciando el término Z/R_i, donde Z es la coordenada a través del espesor.

- Teoría de primer orden: Esta teoría consiste en despreciar el término Z/R_i en las expresiones de la deformación pero no en las expresiones de la curvatura (L.Langhaar *et al.*, 1970). Esta teoría resulta aparentemente inconsistente para láminas curvas, pero es más adecuada que la teoría aproximada de láminas en la cual el término Z/R_i siempre se desprecia. La teoría de primera aproximación más popular es conocida como teoría de Love y la derivación de esta fue realizada por Reissner (1952) . Esta teoría tiene la desventaja de que surgen ciertas componentes de deformación en una lámina general sujeta a rotaciones de cuerpo rígido alrededor de un eje normal a la superficie media de la lámina. Una mejora a esta teoría que permite eliminar este problema ha sido introducida por Sanders (1959).

- Teoría de segundo orden: esta teoría se basa en la hipótesis de que $(h_i/R_i)^2 \ll 1.0$ y ha sido desarrollada por Love (1944) y Flügge (1960) . Cheng y Ho (1963) son los primeros en aplicar esta teoría láminas de materiales compuestos.

- Teorías que incluyen las tensiones normales y deformaciones de corte a través del espesor. Esta teoría para láminas de revolución se debe a Reissner (1952) y fue extendida por Naghdi (1957)

- Teoría tridimensional elástica

Todas las teorías de láminas mencionadas son potencialmente aplicables a láminas compuestas de diferentes materiales. Sin embargo debido a la complejidad del comportamiento mecánico del material y el fenómeno de acoplamiento membrana-flexión primero se desarrollaron las teorías más simples. El análisis de láminas anisótropas ha sido desarrollado por Ambartsumyan (1964) y Librescu (1975) .

2.9 Análisis de materiales compuestos por el Método de los Elementos Finitos

En la actualidad, el análisis de estructuras realizadas con materiales compuestos se realiza utilizando técnicas numéricas y fundamentalmente el método de los elementos finitos (MEF) (Zienkiewicz y Taylor, 1994). Existen intentos de simular el comportamiento de estos materiales a través de métodos que proporcionan la solución analítica exacta de las ecuaciones de la mecánica de sólidos tridimensionales. Debido a la elevada complejidad estos trabajos son escasos incluso para los casos más simples bidimensionales considerando un comportamiento elástico lineal en el material. (Pagano, 1969, 1970).

Una clasificación de las teorías más utilizadas en el contexto del MEF podría ser la siguiente

1. Teorías de capa única equivalente.

2. Teorías de elementos de sólido bi y tridimensional.

3. Teoría de aproximación bidimensional por capas.

2.9.1 Teoría de capa única equivalente

En esta teoría un laminado se representa por una capa única equivalente con las propiedades anisótropas del material. Esta teoría es la más sencilla y económica de todas las teorías de laminados desde el punto de vista del costo computacional.

En esta teoría los desplazamientos se obtienen como una combinación lineal de la coordenada del espesor y funciones de posición sobre la superficie de referencia, esto es:

$$u_i(x, y, z) = \sum_{j=0}^{M_i} u_i^j z^j \tag{2.19}$$

donde M_i es el número de términos del desarrollo (usualmente $M_1 = M_2$) de i-ésimo componente del vector de desplazamiento. En todas las teorías de capa única los desplazamientos y sus derivadas son continuos a través del espesor del laminado. El campo de tensiones resulta discontinuo en las superficies de contacto entre capas debido a las diferentes propiedades mecánicas de cada capa.

En función de los valores de M_i se pueden desarrollar diferentes teorías.

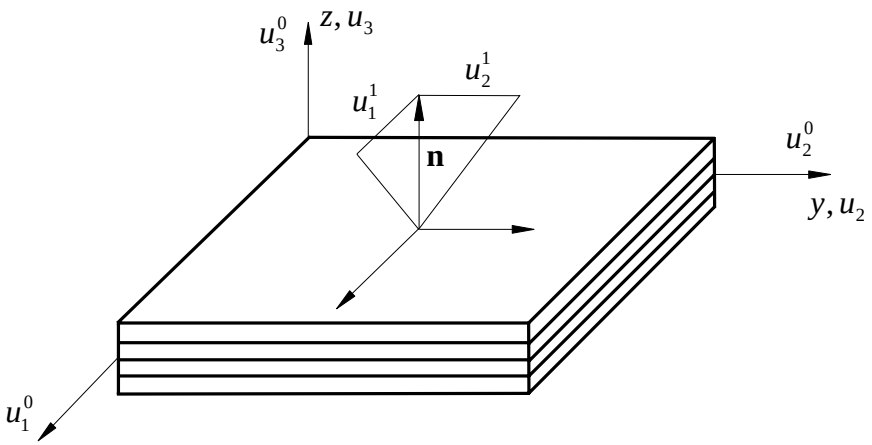

Figura 2.16: Placa laminada. Giros de la normal en la teoría de capa única de primer orden.

Teorías de capa única de primer orden

Esta teoría consiste en considerar $M_1 = M_2 = 1$ y $M_3 = 0$ en la teoría de capa única equivalente, por lo tanto el campo de desplazamientos está dado por:

$$u_1 = u_1^0 + zu_1^1,\ u_2 = u_2^0 + zu_2^1,\ u_3 = u_3^3 \tag{2.20}$$

En las ecs.(2.20) las funciones u_i^0 son los desplazamientos a lo largo de tres líneas coordenadas de un punto sobre la superficie de referencia y u_1^1 y u_2^1 son los giros de la normal sobre los ejes x e y respectivamente. (ver Figura 2.16)

La ecs. (2.20) no imponen ninguna condición al giro de la normal, otra que la normal se mantiene recta durante la deformación y constituye la base de la teoría de placas y láminas laminadas de Reissner-Midlin (Reissner y Stavsky, 1961) (Midlin, 1951) (Oñate, 1992). Si se admite la hipótesis de que las normales se mantienen ortogonales a la superficie media tras la deformación se obtiene la teoría clásica de placas y láminas laminadas de Kirchhoff (Oñate, 1992). La teoría de capa única se basa también en la hipótesis de que la tensión normal resulta nula ($\sigma_z = 0$).

En ambos casos las ecs. (2.20) son el punto de partida para obtener las deformaciones del laminado como:

$$\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \cdots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \cdots \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}_m + z\hat{\varepsilon}_f \\ \cdots \\ \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} \tag{2.21}$$

donde

$$\hat{\varepsilon}_m = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1^0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial y} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x} \end{array} \right\} \tag{2.22a}$$

$$\hat{\varepsilon}_f = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1^1}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2^1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_1^1}{\partial y} + \frac{\partial u_2^1}{\partial x} \end{array} \right\} \tag{2.22b}$$

$$\hat{\varepsilon}_c = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_3^0}{\partial x} + u_1^1 \\ \frac{\partial u_3^0}{\partial y} + u_2^1 \end{array} \right\} \tag{2.22c}$$

donde los subíndices m, f y c denotan deformaciones generalizadas de membrana, flexión y cortante transversal respectivamente. En el caso de la teoría clásica de placas laminadas, de la ecs. (2.22c) se obtiene que las deformaciones a cortante son nulas $\hat{\varepsilon}_c = 0$ y la de flexión resultan:

$$\hat{\varepsilon}_m = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \tag{2.23}$$

En las ecs. (2.22c) se observa que solo intervienen derivadas primeras de los movimientos, lo que permite utilizar aproximaciones de elementos finitos de clase C^0. La introducción de derivadas segundas de la flecha en la ec.(2.23) obliga a utilizar elementos finitos de continuidad C^1 para modelar el estado de flexión.

El análisis tensional de un laminado multicapa se realiza bajo la hipótesis de un estado plano de tensión, por lo tanto, para una capa k la relación en el sistema coordenado global entre tensiones y deformaciones está dada en general por:

$$\boldsymbol{\sigma}_m^k = \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\}_k = C_m^k \varepsilon_m^k \tag{2.24a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_c^k = \left\{ \begin{array}{c} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\}_k = \left[\begin{array}{cc} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{array} \right\}_k = D_c^k \varepsilon_c^k \tag{2.24b}$$

En la teoría clásica de placas laminadas las tensiones tangenciales τ_{13} y τ_{23} no pueden obtenerse en función de las deformaciones ε_{13} y ε_{23} por ser nulas y por lo tanto su valor se obtiene por condición de equilibrio.

Los esfuerzos sobre el laminado se obtiene por integración sobre el espesor, esto es

$$\hat{\sigma}_m = [N_x, N_y, N_{xy}]^T = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]_k^T \, dz \tag{2.25}$$

$$\hat{\sigma}_f = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} z \, [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]_k^T \, dz \tag{2.26}$$

$$\hat{\sigma}_c = [Q_x, Q_y]^T = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} [\tau_{xz}, \tau_{yz}]_k^T \, dz \tag{2.27}$$

donde h_k es la distancia de la superficie media de la capa k y n el número de capas. La relación entre esfuerzos y deformaciones generalizadas se puede escribir como

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\sigma}_m \\ \hat{\sigma}_f \\ \hat{\sigma}_c \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \hat{D}_m & \hat{D}_{mf} & 0 \\ \hat{D}_{mf} & \hat{D}_f & 0 \\ 0 & 0 & \hat{D}_c \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \hat{\varepsilon}_m \\ \hat{\varepsilon}_f \\ \hat{\varepsilon}_c \end{array} \right\} \tag{2.28}$$

donde

$$\hat{D}_m = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} D_m^k dz \quad ; \quad \hat{D}_{mf} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} z D_m^k dz \tag{2.29}$$

$$\hat{D}_f = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} z^2 D_m^k dz \quad ; \quad \hat{D}_c = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_{k+1}} C D_c^k dz \tag{2.30}$$

donde $\hat{D}_{mf}$ es la matriz constitutiva de acoplamiento membrana-flexión. esta matriz resulta nula en el caso de que el laminado presente simetría en las propiedades mecánicas respecto de la superficie media. La matriz C está dada por:

$$C = \left[\begin{array}{cc} \alpha_x & 0 \\ 0 & \alpha_y \end{array} \right] \tag{2.31}$$

siendo α_x y α_y los coeficientes correctores del esfuerzo cortante que permiten tener en cuenta el efecto de distorsión de la normal.

Teorías de capa única de mayor orden

Diferentes autores han propuesto teorías basadas en la inclusión de términos cuadráticos y cúbicos en la ec.(2.19), entre ellos se puede mencionar a Whitney (1973) quien propuso la siguiente aproximación cuadrática para el análisis de placas laminadas

$$u_1 = u_1^0(x,y) + zu_1^1(x,y) + \frac{z^2}{2}u_1^2(x,y) \tag{2.32}$$

$$u_2 = u_2^0(x,y) + zu_2^1(x,y) + \frac{z^2}{2}u_2^2(x,y) \tag{2.33}$$

$$u_3 = u_3^0(x,y) + zu_3^1(x,y) \tag{2.34}$$

Posteriormente, Nelson y Lorch (1974) y Nelson (1985) presentan un modelo cuadrático alternativo que difiere del de Whitney solamente en el término que afecta a u_3^1.

Posteriormente se propuso un modelo cúbico basado en un campo de desplazamientos caracterizado por la existencia de once variables (Lo *et al.*, 1977)

$$u_1 = u_1^0(x,y) + zu_1^1 + z^2u_1^2(x,y) + z^3u_1^3(x,y) \tag{2.35}$$

$$u_2 = u_2^0(x,y) + zu_2^1(x,y) + z^2u_2^2(x,y) + z^3u_2^3(x,y) \tag{2.36}$$

$$u_3 = u_3^0(x,y) + zu_3^1(x,y) + z^2u_3^2(x,y) \tag{2.37}$$

Es importante destacar que las teorías basadas en estos campos de desplazamientos introducen el efecto de la deformación normal ε_z y por lo tanto utilizan las ecuaciones constitutivas completas de la elasticidad tridimensional.

Reddy (1984) propone una teoría de tercer orden, compatible con la hipótesis de tensión plana a través del espesor del laminado. Esta teoría se basa en el campo de desplazamientos dado por:

$$u_1 = u_1^0(x,y) + zu_1^1 + z^2u_1^2(x,y) + z^3u_1^3(x,y) \tag{2.38}$$

$$u_2 = u_2^0(x,y) + zu_2^1(x,y) + z^2u_2^2(x,y) + z^3u_2^3(x,y) \tag{2.39}$$

$$u_3 = u_3^0(x,y) \tag{2.40}$$

Las funciones u_1^2, u_1^3, u_2^2 y u_2^3 se determinan basándose en la condición de que las tensiones tangenciales transversales τ_{xz} y τ_{yz} se anulan en la superficie superior e inferior de la placa, con lo cual el campo de desplazamientos es:

$$u_1 = u_1^0 + z\left[u_1^1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(u_1^1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x}\right)\right] \tag{2.41a}$$

$$u_2 = u_2^0 + z\left[u_2^1 - \frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(u_2^1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x}\right)\right] \tag{2.41b}$$

$$u_3 = u_3^0 \tag{2.41c}$$

Las ecs. (2.41a), (2.41b) y (2.41c) proporcionan una distribución parabólica de las tensiones tangenciales transversales, lo que representa una mejora con respecto a la distribución constante de la teoría de primer orden de Reissner-Mindlin. Si en esta teoría se introduce la hipótesis de ortogonalidad de la normal $u_1^1 = -\partial u_3^0/\partial x$ y $u_2^1 = -\partial u_3^0/\partial y$ se obtiene el campo de desplazamientos correspondiente a la teoría clásica de Kirchhoff.

Posteriormente Reddy y colaboradores (Reddy y Phan, 1984) (Phan y Reddy, 1985) (Putcha y Reddy, 1986) (Reddy, 1987b) han realizado una globalización de las teorías anteriores considerando el campo de desplazamientos dado por:

$$u_1 = u_1^0 + z\left[-\alpha\frac{\partial w}{\partial x} + \beta u_1^1 - \gamma\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(u_1^1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x}\right)\right] \tag{2.42}$$

$$u_2 = u_2^0 + z\left[-\alpha\frac{\partial w}{\partial y} + \beta u_2^1 - \gamma\frac{4}{3}\left(\frac{z}{h}\right)^2\left(u_2^1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x}\right)\right] \tag{2.43}$$

$$u_3 = u_3^0 \tag{2.44}$$

Los valores de α y β en la ecuación anterior permiten obtener las teorías anteriores. Si se toma $\alpha = 1$ y $\beta = \gamma = 0$ se obtiene el campo de desplazamientos de la teoría clásica de Kirchhoff, la teoría de primer orden de Reissner-Mindlin se obtiene con $\alpha = 0$ y $\beta = \gamma = 1$.

Las teorías de capa única son adecuadas para representar el comportamiento global de laminados delgados, pero resultan inadecuadas para aproximar con exactitud efectos locales tales como la distribución de tensiones interlaminar, fenómenos tales como delaminación, despegue entre fibra y matriz, etc.

2.9.2 Teorías basadas en análisis como elemento sólido

En estas teorías, un laminado se modela como un elemento continuo bi o tridimensional. El análisis elástico tridimensional requiere idealmente al menos un elemento a través del espesor de cada capa (Dana y Barker, 1974) (Putcha y Reddy, 1982) (Kupusamay y Reddy, 1984). Los materiales compuestos actuales presentan un elevado número de capas y un espesor reducido, lo cual conduce a un gran número de

elementos tridimensionales debido a que es necesario mantener ciertas relaciones en las dimensiones de los elementos para evitar problemas numéricos de bloqueo en la solución. Esto conduce a elevados costos computacionales lo cual hace inviable este tipo de análisis para estructuras de grandes dimensiones.

Con el objetivo de reducir el costo computacional que involucran los elementos tridimensionales es posible utilizar el concepto de sublaminado, en el cual varias capas se modelan utilizando un único elemento finito a través del espesor. Las propiedades del material del sublaminado se obtienen por integración de las propiedades de la lámina a través del espesor del sublaminado, en forma análoga al procedimiento utilizado en las teorías de capa única.

Las teorías de elemento sólido de capa única bidimensional (Chang y Sawamiphakdi, 1981) (Chao y Reddy, 1984) (Liao *et al.*, 1988) se derivan por degeneración de la teoría del elemento sólido tridimensional aplicando el mismo tipo de hipótesis que en las teorías de capa única o en las teorías de aproximación bidimensional por capas. Los elementos de lámina degenerados de elementos sólidos se obtienen a partir de elementos tridimensionales isoparamétricos imponiendo ciertas restricciones en la cinemática. Una selección apropiada de la interpolación de los desplazamientos incorpora en la teoría restricciones cinemáticas. Por ejemplo el conocido elemento de lámina degenerado de Zienkiewicz *et al.* (1971) (Zienkiewicz *et al.*, 1971) se basa en las ecuaciones de la elasticidad tridimensional pero con una interpolación isoparamétrica que impone las mismas restricciones cinemáticas que las de la teoría de deformación por cortante de primer orden de Reissner-Mindlin.

Ahmad, Irons y Zienkiewicz (1970) desarrollaron un elemento degenerado para el análisis lineal de estructuras laminadas moderadamente gruesas y delgadas y ha sido aplicado por diversos autores. Este elemento posee la ventaja de ser general en comparación con los elementos basados en la teoría de láminas y simple en comparación con los elementos tridimensionales.

Las teorías de elementos de lámina degenerados de sólidos tridimensionales y al de aproximación bidimensional por capas permiten representar el campo de tensiones interlaminares de un laminado compuesto. La utilización de elementos finitos que se basan en esta teoría en zonas locales donde se producen elevados gradientes en el campo tensional y otras teorías menos refinadas en zonas menos problemáticas resulta eficiente en problemas prácticos. Estos métodos se conocen con el nombre global-local (Jr. *et al.*, 1985) (Reddy, 1985) (Chow y Atluri, 1996)

2.9.3 Teoría de aproximación bidimensional por capas

Las teorías de capa única están basadas en campos de desplazamientos continuos a través del espesor del laminado. Para el caso de materiales compuestos con capas de materiales diferentes esto conduce a campos de tensiones tangenciales discontinuos.

Teniendo en cuenta las limitaciones de la teoría de capa única Reddy (1987) propuso una teoría alternativa basada en una aproximación bidimensional por capas que elimina el problema de campos tensionales tangenciales discontinuos. Esta teoría se basa en un campo de desplazamientos que resulta una combinación lineal de la coordenada sobre el espesor y funciones independientes de la posición dentro de cada capa, esto es:

$$u_i = (x, y, z) = u_i^0 (x, y) + \sum_{j=1}^{N_i} u_i^j (x, y) \Phi_j (z) \qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.45}$$

donde N_i es el número de subdivisiones a través del espesor del laminado y Φ_j son funciones de la coordenada sobre el espesor z. Las funciones Φ_j son continuas por intervalos, definidas solo en dos capas adyacentes y pueden interpretarse como funciones de interpolación de Lagrange globales asociadas con la superficie común de las capas, a través del espesor del laminado. Debido a la naturaleza local de la función Φ_j, los desplazamientos resultan continuos en el espesor en la capa. Esto también implica que el campo de deformaciones transversales es discontinuo en la superficie de contacto entre capas y por lo tanto existe la posibilidad de que las tensiones transversales interlaminares puedan ser continuas. Las deformaciones en el plano serán continuas pero las tensiones en el plano serán discontinuas debido al diferente comportamiento mecánico de las distintas fases del material compuesto. Una ventaja de la teoría de aproximación bidimensional por capas es que requiere solamente elementos finitos bidimensionales, pero con muchos grados de libertad por nodo. Aquí es también posible utilizar el concepto de sublaminación para reducir el costo computacional.

Botello (1993) presenta un nuevo elemento finito de sólido degenerado, basado en una aproximación bidimensional por capas para el análisis de multilaminados. Este elemento se basa en imponer un campo de deformaciones de cortante y con esto se evita el bloqueo de la solución por cortante (Zienkiewicz y Lefevre, 1988) (Oñate *et al.*, 1990) (Zienkiewicz *et al.*, 1990) (Oñate *et al.*, 1992) (Botello, 1993) (Botello *et al.*, 1999).

2.10 Resistencia de láminas unidireccionales

2.10.1 Introducción

La utilización de materiales compuestos unidireccionales es escasa debido fundamentalmente a que la rigidez y las resistencias transversales a cortadura y tracción son mucho menores que las correspondientes rigideces y resistencias paralelas a las fibras. En el primer caso las propiedades del material compuesto están dominadas

por las propiedades de la matriz y en el segundo por las propiedades de la fibra. Con el fin de obtener elevadas rigideces es necesario colocar laminados en varias direcciones. Por lo tanto es necesario conocer la resistencia individual de las distintas láminas.

En esta sección se hace una breve descripción del proceso de rotura y de resistencia de las distintas láminas y de los diversos criterios utilizados para determinar la rotura.

Una lámina puede fallar de varios modos diferentes dependiendo de las condiciones de carga, debido fundamentalmente a la elevada anisotropía de estos materiales. Para el cálculo de la resistencia de las láminas en función de la resistencia de las fibras y de la matriz es esencial la comprensión de los mecanismos de rotura.

2.10.2 Resistencia a tracción longitudinal

La resistencia de los materiales compuestos depende de las deformaciones de rotura relativas de la matriz y de la fibra, considerándose dos posibles situaciones:

- Deformación a tracción uniaxial de rotura de la fibra mayor que la de la matriz $\left(\varepsilon_f^* > \varepsilon_m^*\right)$
- Deformación a tracción uniaxial de rotura de la matriz mayor que la de la fibra $\left(\varepsilon_m^* > \varepsilon_f^*\right)$

En el primer caso pueden considerarse dos secuencias de rotura diferentes dependiendo del volumen de fibra y de matriz en el compuesto. Para el caso de un bajo contenido en volumen de fibras la resistencia de la lámina depende fundamentalmente de las propiedades de la matriz. La matriz colapsa antes que las fibras y entonces toda la carga es soportada por las fibras, pero como el volumen de fibras es pequeño estas son incapaces de soportar esa carga y se rompen. Cuando el contenido de fibras es mayor, la matriz absorbe solo una mínima proporción de la carga debido fundamentalmente a su menor módulo elástico. Por lo tanto cuando la matriz se rompe, la transmisión de carga a las fibras es insuficiente para causar su rotura. La transmisión de esfuerzos se realiza desde la matriz a la fibra y al estar agotada la capacidad resistente de la misma la trasmisión produce deslizamientos relativos entre fibra y matriz y la transmisión de los esfuerzos se realiza gracias a la presencia de fuerzas friccionales. Un ejemplo de este caso lo constituyen los materiales compuestos de resina de poliéster y fibra de vidrio. Para estos laminados se observa que para volúmenes de fibra superiores al 10% el comportamiento del material compuesto depende de las propiedades de la fibra. La mayoría de los laminado comerciales poseen un volumen de fibra que oscila entre un 40% y un 70% (Hull, 1987b).

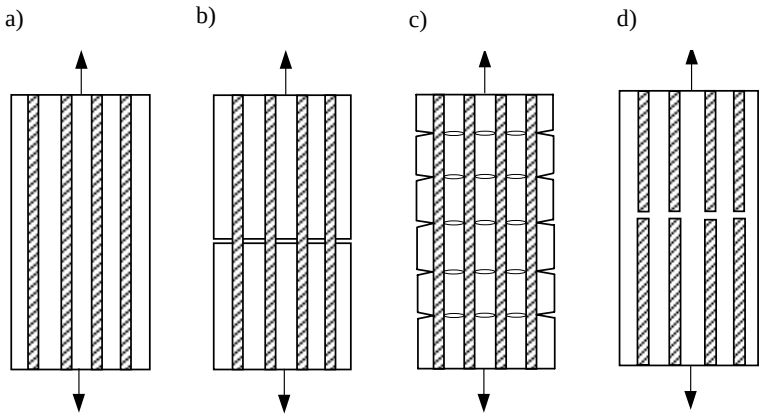

Figura 2.17: Rotura a tracción longitudinal de láminas unidireccionales. a) Antes de la rotura. b) Rotura de resina antes de la rotura de las fibras. c) Agrietamiento de la matriz. d) Rotura de la fibra antes de la rotura de la matriz.

Para contenidos de fibras altos en volumen se produce un agrietamiento múltiple de la resina (Aveston y Kelly, 1973). En la Figura 2.17 se observa una representación esquemática del proceso de rotura de una lámina unidireccional sometida a tracción longitudinal.

En la Figura 2.17 se observa el agrietamiento múltiple, el cual surge debido a que las primeras grietas que se forman en el material (ver Figura 2.17b) no ocasionan una descarga completa de la resina. El espaciado final de las grietas depende de la relación entre los módulos elásticos de las fibras y de la matriz y de la adherencia entre fibra y matriz.

En el caso en que la deformación de rotura de la matriz sea mayor que la de la fibra pueden considerarse, también, dos secuencias de rotura diferentes dependiendo del volumen de fibra y de matriz en el compuesto. A bajos volúmenes de fibra la carga adicional por rotura de las mismas en la matriz no es suficiente para producir su agotamiento.(ver Figura 2.17d) Sin embargo, al reducirse la sección neta efectiva de la matriz por la presencia de los huecos en las puntas de la fibra, su resistencia es menor en una cantidad proporcional al volumen de fibras.

Para volúmenes de fibra grandes la carga transmitida a la matriz debido a la rotura de las fibras es muy elevada y no podrá ser soportada por la matriz, por lo tanto la matriz romperá cuando se rompan las fibras. Este análisis puede aplicarse a los materiales compuestos de fibra de carbono y resina epoxi en los que la deformación a rotura de la fibra es inferior que la de la resina. Hull (1987) muestra que en estos

casos para volúmenes de fibra superiores al 3% el comportamiento del compuesto depende de las fibras indicando que la contribución de la matriz a la resistencia a tracción longitudinal es pequeña.

El tratamiento anterior desprecia algunas características significativas de la resistencia de las fibras tales como la variación de la resistencia entre las distintas fibras, la distribución de defectos a lo largo de cada fibra y los fenómenos de despegue entre fibra y matriz, pero ofrece una aproximación que permite comprender los mecanismos de rotura de los materiales compuestos.

2.11 Criterios de falla para materiales compuestos

Al igual que en los materiales isótropos, los criterios de fluencia se utilizan para determinar la resistencia y el comportamiento de los materiales compuestos. Existen diversos criterios de fluencia formulados y algunos han sido formulados específicamente para un determinado material.

2.11.1 Criterio de máxima tensión

El criterio de máxima tensión establece que la rotura en una lámina se produce cuando los esfuerzos en las direcciones principales del material compuesto exceden un valor máximo especificado. El criterio de máxima tensión se escribe como

$$-\sigma_x^{*\prime} < \sigma_x < \sigma_x^* \tag{2.46}$$
$$-\sigma_y^{*\prime} < \sigma_y < \sigma_y^* \tag{2.47}$$
$$-\sigma_{xy}^{*} < \sigma_{xy} < \sigma_{xy}^* \tag{2.48}$$

donde σ_x^* y $\sigma_x^{*\prime}$ son las resistencias a tracción y compresión respectivamente en la dirección x, σ_y^* y $\sigma_y^{*\prime}$ son las resistencias a tracción y compresión respectivamente en la dirección y y σ_{xy}^* es la resistencia a cortante. Los valores de σ_x, σ_y y σ_{xy} para un esfuerzo aplicado a un ángulo θ respecto de la dirección principal están dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\theta \cos^2\theta \\ \sigma_y &= \sigma_\theta \sin^2\theta \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_\theta \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{2.49}$$

Para $\theta = 0^o$ la falla se produce por rotura longitudinal y para $\theta = 90^o$ la falla se produce por rotura transversal. Para ángulos intermedios el esfuerzo de rotura

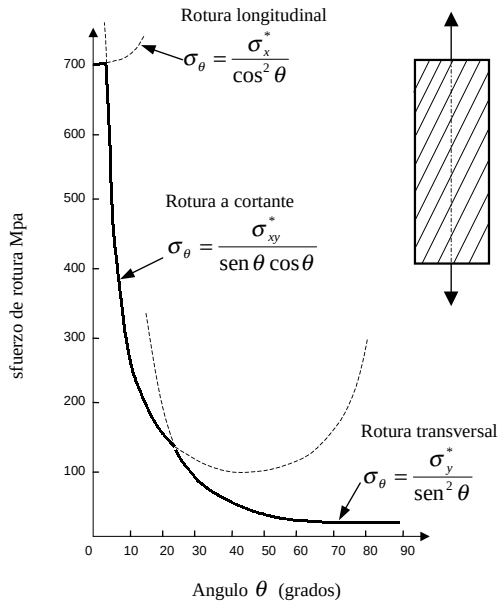

Figura 2.18: Criterio de fluencia de máxima tensión en función del ángulo de orientación del refuerzo sobre láminas unidireccionales de resina poliester y fibra de vidrio (Hull, 1987b).

depende de los valores relativos de σ_x^*, σ_y^* y σ_{xy}^* obteniéndose del menor valor de los esfuerzos dados por:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x^* / \cos^2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_y^* / \sin^2\theta \\ \sigma_\theta &= -\sigma_{xy}^* / \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \tag{2.50}$$

En la Figura 2.18 se observa la resistencia a rotura determinada de acuerdo a la teoría de máxima tensión (Hull, 1987b).

En la Figura 2.19 se observa resultados de ensayos de una lámina de resina epoxi y fibra de carbono con un contenido volumétrico de fibras del 50%. La Figura muestra que existe un acuerdo excelente entre la teoría del esfuerzo máximo y los resultados experimentales excepto para valores de θ comprendidos entre 18^o y 42^o (Hull, 1987b). En esta zona existe una interacción de esfuerzos y la rotura se produce a valores menores que los predichos por la teoría de máxima tensión. El criterio empleado para definir los límites de resistencia del material que se muestran en los ensayos experimentales dados en la Figura 2.19 no establece si el límite del material se

verifica cuando una de las fases alcanza este límite o cuando se verifica un cambio en la pendiente de la respuesta del material compuesto.

Este criterio tiene el inconveniente de no tener en cuenta los fenómenos de interacción de esfuerzos y ha sido formulado como criterio de fluencia para el material compuesto y por lo tanto no puede tener en cuenta los comportamientos mecánicos de los distintos componentes de un material compuesto, como así tampoco los fenómenos de despegue entre fibra y matriz (debonding).

Los criterios de rotura de Azzi-Tsai-Hill y Tsai-Wu (secciones 2.11.2 y 2.11.3) han sido desarrollados específicamente teniendo en cuenta los fenómenos de interacción de los esfuerzos.

2.11.2 Criterio de rotura de Azzi-Tsai-Hill

El criterio de máxima tensión permite distinguir entre la falla debido a la fibra, representada por la máxima resistencia del material compuesto en la dirección de la fibra, y la falla en la matriz, representada por la máxima resistencia transversal a las fibras y no tiene en cuenta la interacción entre las componentes del tensor de tensiones. Por lo tanto resulta necesario formular criterios que permitan tener en cuenta la interacción entre las componentes del tensor de tensiones, pero teniendo en cuenta de no incluir componentes no relacionadas ya que esto puede conducir a resultados erróneos.

Los primeros criterios de fluencia para materiales anisótropos que tienen en cuenta la interacción entre esfuerzos han sido propuestos por Hill (1948). Estos criterios resultan de una generalización del criterio de fluencia de Von Mises para materiales isótropos y ha sido aplicado por Tsai a materiales compuestos. Suponiendo un estado de tensión plana, el criterio de fluencia se escribe como

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x^*}\right)^2 - \left[\frac{\sigma_x \sigma_y}{(\sigma_x^*)^2}\right] + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_y^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}^*}\right)^2 = 1 \tag{2.51}$$

La ec.(2.51) describe una superficie en el espacio que establece que no se producirá la rotura del material siempre que el estado tensional este representado por un punto interior a ella. En general, en los materiales compuestos se verifica que $\sigma_x^* \gg \sigma_y^*$ de forma que el segundo término resulta despreciable y el criterio de fluencia se puede escribir como

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_x^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_y^*}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}^*}\right)^2 = 1 \tag{2.52}$$

En la Figura 2.19 se observa una comparación de resultados experimentales de láminas de fibra de carbono y resina epoxi con los provistos por la ec.(2.51)

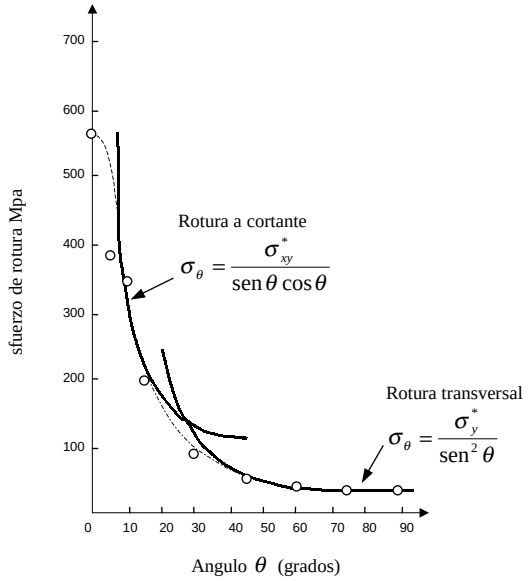

Figura 2.19: Resultados experimentales de ensayos de láminas unidireccionales de resina epoxi reforzada con fibras de carbono tipo I (Hull, 1987b).

Este criterio tiene la desventaja de no distinguir diferentes comportamientos del material a tracción y compresión y por lo tanto no resulta adecuado para simular el comportamiento mecánico de materiales con comportamientos diferentes a tracción y compresión. El criterio que se presenta en la sección 2.11.3 se ha desarrollado con el objetivo de superar este problema. Este criterio tampoco incluye los diferentes comportamientos mecánicos de los distintos componentes de un material compuesto, como así tampoco los fenómenos de despegue entre fibra y matriz (debonding).

2.11.3 Criterio de fluencia de Tsai-Wu

Este criterio es una generalización del criterio de fluencia de Azzi-Tsai-Hill e incorpora la posibilidad de diferenciar las resistencias a compresión y tracción y la interacción entre las tensiones. En el espacio de tensiones se escribe como:

$$F_{xx}\sigma_x^2 + 2F_{xy}\sigma_x\sigma_y + F_{yy}\sigma_y^2 + F_{ss}\sigma_{xy}^2 + F_x\sigma_x + F_y\sigma_y = 1 \tag{2.53}$$

donde

$$F_x = \frac{1}{\sigma_x^*} - \frac{1}{\sigma_x^{*\prime}}, \quad F_y = \frac{1}{\sigma_y^*} - \frac{1}{\sigma_y^{*\prime}}, \quad F_{xx} = \frac{1}{\sigma_x^*\sigma_x^{*\prime}}, \quad F_{yy} = \frac{1}{\sigma_y^*\sigma_y^{*\prime}}, \quad F_{ss} = \frac{1}{\left(\sigma_{xy}^*\right)^2} \tag{2.54}$$

donde σ_i^* y $\sigma_i^{*\prime}$ representan las resistencias a tracción y compresión respectivamente en la dirección i. Los parámetros de resistencia del material se obtienen de ensayos usuales, pero el término de interacción F_{xy} se obtiene a través de ensayos biaxiales. Debido a la complejidad de este ensayo el factor F_{xy} se trata como una constante empírica dependiente del material y se define como

$$F_{xy} = F_{xy}^* \sqrt{F_{xx} F_{yy}} \tag{2.55}$$

donde F_{xy}^* es un factor empírico comprendido entre -1 y 1.(Surrel *et al.*, 1990) (Tsai, 1974) (Tsai y Wu, 1971)

Este criterio no tiene en cuenta los comportamientos mecánicos diferentes de los distintos componentes de un material compuesto y tampoco tiene en cuenta los fenómenos que se producen en la interfase fibra matriz.

2.12 Modelos estructurales multi-escala

2.12.1 Teoría de homogeneización

La teoría de homogeneización plantea una solución muy diferente a la expuesta en los apartados anteriores. Esta teoría se basa en dividir el problema de los materiales compuestos en dos escalas de diferente orden, denominadas *macroscópica* o *global* y *microscópica* o *local*.

La escala microscópica se utiliza con el objetivo de analizar la estructura interna o micro-estructura del material compuesto y obtener las variables de estado del problema micro-mecánico. Estas variables de estado permiten luego determinar las macro-variables del problema.

La escala macroscópica se utiliza para analizar el problema global y en ella se considera al material compuesto como un material homogéneo.

Bajo estos conceptos pueden encontrarse diferentes formulaciones de los pioneros de esta teoría. Hill y Mandel (1972) plantean el *método de promedios*, donde la ley de homogeneización elástica del compuesto se establece a través del promedio de los campos de las variables microscópicas. Por otro lado, Sanchez-Palencia (1974) (1980) , Bensoussan-Lions-Papanicolaou (1978) desarrollan la teoría de homogeneización a través de los *desarrollos asintóticos*, mediante los cuales se determinan de manera rigurosa las leyes que gobiernan en cada una de estas escalas. Suquet (1982) (1987) retoma y generaliza el método de promedios, además formula un *método de convergencia* para materiales periódicos, y extiende el concepto de homogeneización al rango no-lineal. En todos los casos, las ecuaciones que gobiernan el problema en las dos escalas son similares. La principal dificultad de la teoría de homogeneización es que las variables macroscópicas dependen del campo completo de las variables

microscópicas. Con el propósito de salvar esta dificultad, y desacoplar las variables globales de las locales Michel (1984) , Suquet (1987) realizan algunas simplificaciones. En los últimos años se han presentado muchas aportaciones a este tema (Fish *et al.*, 1997) (Smit *et al.*, 1998) (Moulinec y Suquet, 1998), pero aún no se ha logrado consenso.

Zalamea *et al.* (1999) plantea un nuevo punto de vista sobre las clásicas ideas de homogeneización. La periodicidad de la micro-estructura permite establecer ciertos conceptos, mediante los cuales se obtienen formalmente los tensores globales de deformaciones y tensiones. Las expresiones resultantes son similares a las obtenidas por las anteriores teorías, sin embargo no se introduce los tensores denominados de *influencia* (Hill, 1967) *concentración* (Mandel, 1972) o *localización* (Suquet, 1987) , ni las funciones periódicas (Sanchez-Palencia, 1980) (Duvaut, 1976). Además, puesto que las variables macroscópicas dependen de un "infinito número" de variables internas microscópicas (Suquet, 1987) , se soluciona el problema mediante un código de elementos finitos formulado en las dos escalas.

2.12.2 Estructura interna de un material compuesto. Formulación de un modelo constitutivo (Zalamea *et al.* 1999)

La distribución periódica de los componentes de un material compuesto establece un cierto número de simetrías que permiten dividir al compuesto en unidades estructurales denominadas *celda unidad* o *células*. Esta división virtual del material se realiza a través de *superficies materiales*, denominadas *caras* o *lados*. Un material compuesto representado en dos dimensiones es posible dividirlo en células de 4 caras o cuadriláteras, o bien en células de 6 caras o hexagonales. Se definen como *puntos periódicos* a aquellos cuyas coordenadas materiales X tiene la misma posición relativa en las células vecinas. En la figura 2.20 se han señalado dentro de una celda de dominio Ω_c un punto cualquiera P y en las células vecinas estos mismos puntos P periódicos. La posición relativa entre dichos puntos determina una base de vectores (D_i) denominada *vectores de periodicidad* que poseen dimensiones y direcciones específicas.

Se considera que bajo la escala global el volumen de una célula es muy pequeño $(V \to 0)$, por consiguiente el compuesto puede ser considerado como un material homogéneo, formado por pequeñas partículas exactamente iguales. Al deformarse la macro-estructura cambian los vectores de periodicidad y al considerar la micro-estructura, el campo de deformaciones sufre fuertes fluctuaciones por la diferencia de rigidez de los materiales componentes. La deformación global del campo microes-

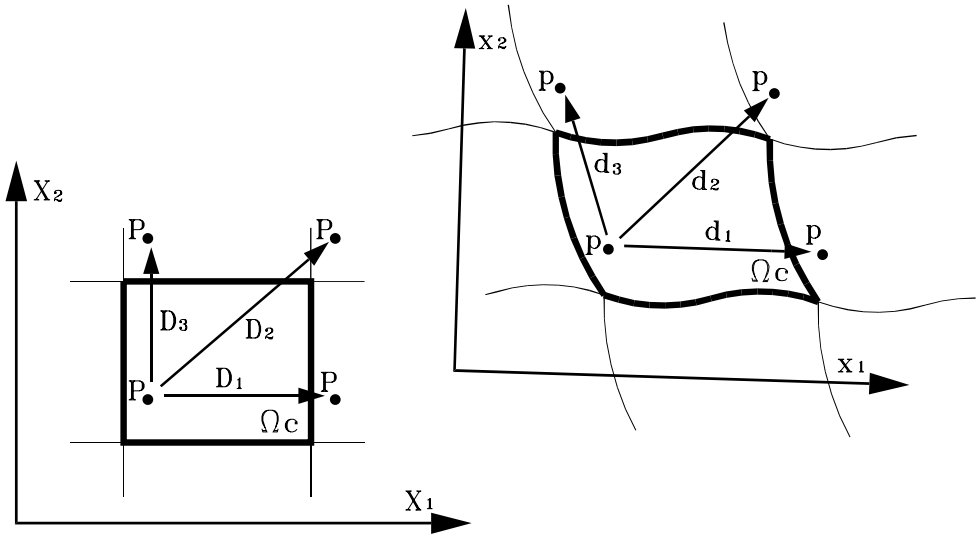

Figura 2.20: Vectores de peridiocidad en la configuración de referencia D_i y actualizada d_i ($D_2 = D_1 + D_3$, $d_2 = d_1 + d_3$).

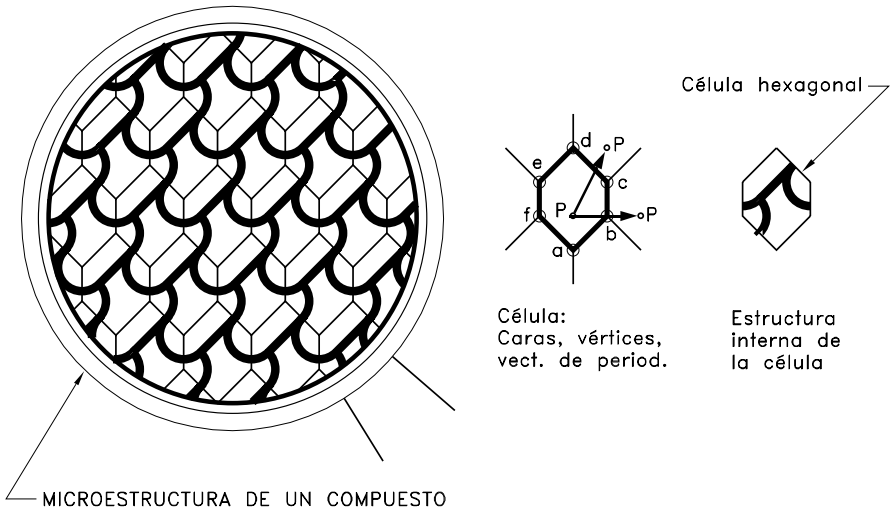

Figura 2.21: Microestructura de un compuesto. División de la microestructura en células hexagonales.

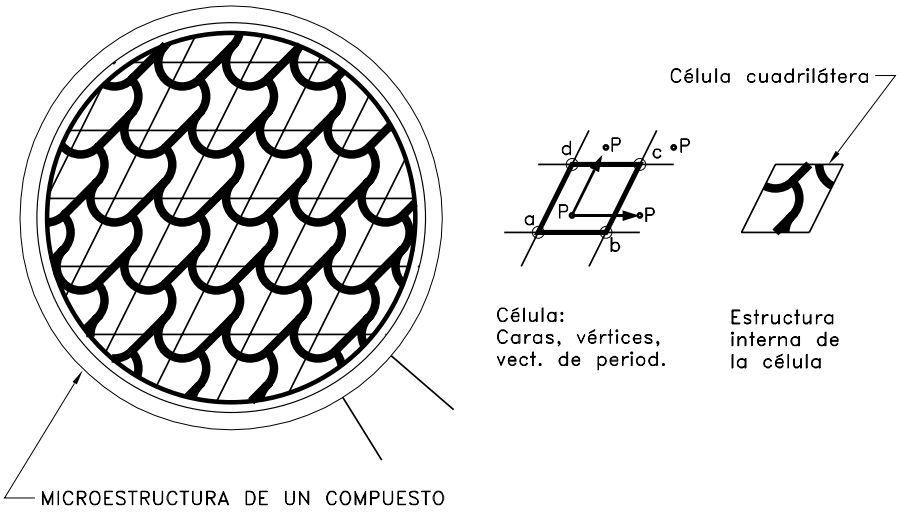

Figura 2.22: Microestructura de un compuesto. División de la microestructura en células cuadradas.

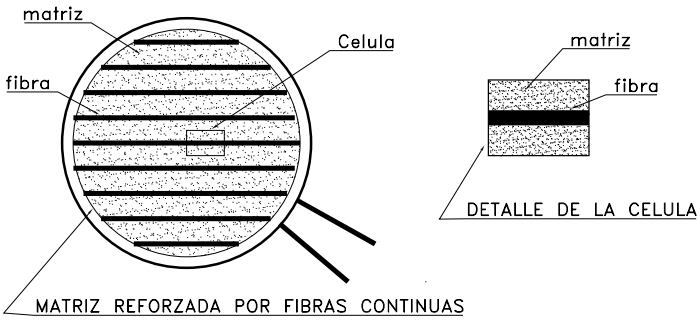

Figura 2.23: Micro-estructura de una matriz con fibras continuas y célula del compuesto.

tructural está asociada al cambio de los vectores de periodicidad D_i.

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial \boldsymbol{D}}^T \frac{\partial \boldsymbol{d}}{\partial \boldsymbol{D}} - \boldsymbol{I}\right] \tag{2.56}$$

Por otra parte, la condición de periodicidad de la estructura del compuesto, junto con la consideración de que el volumen de la célula es muy pequeña ($V \to 0$), implica que las fuerzas de superficie exteriores al dominio en las caras opuestas de la célula son iguales pero de sentido contrario. Es decir, el campo de fuerzas en el contorno de la célula es antiperiódico (Bensoussan *et al.*, 1978; Suquet, 1983). Esto permite definir a un *tensor homogeneizado de tensiones* $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ como el promedio de las tensiones en el volumen de la célula

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{\sigma} dV. \tag{2.57}$$

Las condiciones de desplazamientos periódicos, y fuerzas antiperiódicas en el contorno de la célula, permiten aplicar una deformación global $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ a la celda unidad. Mediante la utilización del método de elementos finitos se encuentra el equilibrio en el dominio de la célula. La tensión global del material se determina utilizando la ec.(2.57). Si, en cada incremento de carga se almacena el estado de los materiales componentes en todo el dominio de la célula (lo cual representa una cantidad grande de variables internas), y a partir de esta información se calcula la respuesta del compuesto ($\boldsymbol{\Sigma}$). Entonces, dicho procedimiento hace la función de una ecuación constitutiva del compuesto.

La solución del problema de materiales compuestos se determina mediante el método de los elementos finitos formulado en las dos escalas. En consecuencia, se discretizan las dos estructuras: la macroscópica y la microscópica; para encontrar el equilibrio de la macro-estructura se requiere el comportamiento del material en cada punto de integración de los elementos (elementos finitos de la macro-estructura). Dicho comportamiento se obtiene a través del análisis de la celda unidad. De esta forma la solución del problema de materiales compuestos se determina a través del equilibrio de la macro-estructura, y tantas células como puntos de integración tiene la estructura global. Para ello se ha desarrollado un algoritmo, y un código de elementos finitos que soluciona el problema en paralelo; mayor detalle al respecto se encuentra en Zalamea et al (1998).

En la Figura 2.24 se presenta el esquema de solución en la escala microscópica y macroscópica utilizando el método de los elementos finitos. Esta metodología se basa en la existencia de dos escalas: macroscópica y microscópica. El algoritmo de solución se plantea utilizando el MEF en ambas escalas. En la escala global se busca el equilibrio del macro-dominio, mientras que en la escala microscópica se determina el comportamiento del material. Por lo tanto cada punto de integración

de los elementos finitos del macro-dominio representa un problema de valores de contorno en la escala microscópica (Zalamea *et al.*, 1999). Por lo tanto se deben solucionar simultáneamente la macro-estructura y tantas células como puntos de integración tiene el problema. La solución se encuentra cuando todos los dominios cumplen con las condiciones de equilibrio.

En la Figura 2.24 se observa el algoritmo de solución para cada escala. Se debe destacar que el algoritmo de la escala macroscópica carece del módulo correspondiente a la ecuación constitutiva, ya que el comportamiento del material se determina en la escala microscópica.

La potencia de este método radica en que modela la forma real de la microestructura, en cuyo interior se encuentran los componentes, cada uno de los cuales poseen sus correspondientes formas y propiedades. Esto permite que el método sea absolutamente general, ya que se puede representar cualquier microestructura. Es por ello que la teoría de homogeneización es válida para materiales como: matrices reforzadas por fibras cortas, mamposterías, etc. En el caso en que el compuesto está formado por una matriz con fibras largas, de acuerdo a la geometría, la célula se reduce a un prisma, cuya sección transversal está en función de las proporciones de fibra y matriz (ver Figura 2.23). El valor de la longitud de la célula es simplemente un valor conveniente, gracias a las condiciones de periodicidad, la geometría de la célula resultante es sencilla.

Car *et al.* (1999) presentan una comparación entre un modelo micromecánico y la teoría de homogeneización mediante la simulación numérica de un ensayo realizado sobre probetas de carbono-epoxi **T300/914C** con una entalla en la zona central. En la simulación del comportamiento constitutivo de la fibra se utiliza una ecuación constitutiva elastoplástica isótropa con endurecimiento y para la matriz una ecuación constitutiva elastoplástica con ablandamiento exponencial. La anisotropía del compuesto resulta de la interacción de los componentes dentro del dominio de la célula.

La principal desventaja del método basado en la teoría de homogeneización es su elevado costo computacional. La ventaja de estos modelos es que permiten modelar materiales con estructura interna de elevada complejidad.

2.13 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado una breve reseña de los distintos constituyentes de un material compuesto y sus características estructurales y propiedades mecánicas.

Los materiales compuestos surgen de una combinación adecuada en volumen de elementos de refuerzo y matrices. Estos elementos de refuerzo se caracterizan por sus elevadas propiedades mecánicas y su anisotropía. Por lo tanto los materiales que

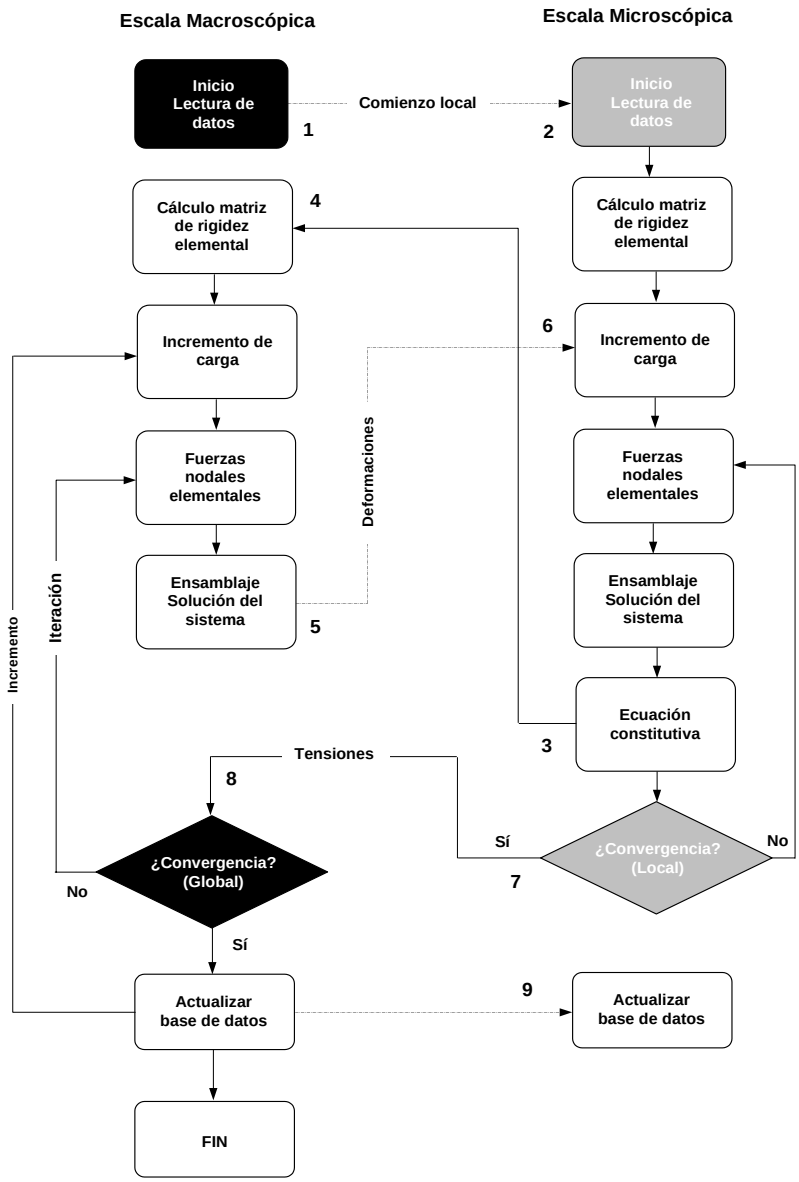

Figura 2.24: Esquema de solución utilizando la teoría de homogeneización.

surgen de esta combinación presentan una elevada anisotropía. La posición y tipo de refuerzo dan lugar a diversos tipos de materiales compuestos. Los componentes estructurales que requieren una elevada rigidez, resistencia a los impactos, formas complejas y un alto volumen de producción resultan ideales para ser fabricados en materiales compuestos. Es por ello que el uso de estos materiales en la fabricación de piezas de automóviles se ha extendido en los últimos años (Ali, 1996) (O'Rourke, 1989), siendo muy utilizados también en la industria aeronáutica y aeroespacial.

Se presenta también una breve reseña de los diversos modelos constitutivos utilizados y las distintas metodología basadas en el MEF para simular el comportamiento mecánico de los materiales compuestos.

Del análisis de los diversos modelos constitutivos presentados se observa que la mayoría de ellos no tienen en cuenta fenómenos de no-linealidad en el comportamiento constitutivo del material. La anisotropía del material solo se tiene en cuenta en régimen elástico y en el caso inelástico solo se considera el comportamiento hasta el pico de resistencia máxima a través de modelos cuadráticos (Azzi-Tsai-Hill, Tsai-Wu) que no diferencian explícitamente el comportamiento de la fibra y de la matriz. Estos modelos presentan un buen acuerdo con los ensayos experimentales solo en los casos en que las tensiones que interactúan producen la rotura de uno de los materiales que componen el compuesto, como por ejemplo el caso de tensiones transversales a la dirección de la fibra y las tensiones cortantes que producen fallas en la matriz. Algunos autores (Hashin, 1980) (Hahn *et al.*, 1982) en un intento por diferenciar el comportamiento entre fibra y matriz proponen separar la expresión cuadrática de Tsai-Wu en dos criterios separados.

En este capítulo se han presentado también otras metodologías para la simulación de materiales compuestos basados en modelos estructurales multiescala basados en la teoría de homogeneización. Esta teoría plantea una solución muy diferente y se basa en dividir el problema en dos escalas de diferente orden, denominadas *macroscópica* o *global* y *microscópica* o *local*. La escala microscópica se utiliza con el objetivo de analizar la estructura interna o micro-estructura del material compuesto y obtener las variables de estado del problema micro-mecánico. Estas variables de estado permiten luego determinar las macro-variables del problema. La escala macroscópica se utiliza para analizar el problema global y en ella se considera al material compuesto como un material homogéneo.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo constitutivo que permite superar las dificultades que presentan los modelos analizados. Para ello es necesario desarrollar un modelo que permita simular los siguientes fenómenos a) alta anisotropía con deformaciones permanentes direccionadas; b) existencia de varias sustancias que conforman el compuesto; c) flujo plástico unidireccional en el caso de refuerzo con fibras; d) deslizamientos relativos entre matriz y fibra ("debonding") a nivel de interfase con pérdida de compatibilidad cinemática e) pandeo local del refuerzo; f)

tendencia de las fibras a alinearse con la dirección del esfuerzo mayor; g) presencia de grandes deformaciones debido al fenómeno de alineación del refuerzo en la dirección del esfuerzo mayor; h) fenómenos de microfisuración en la matriz y i) fallas en la fase de refuerzo. Todos estos fenómenos inducen a una pérdida de resistencia y rigidez global del material compuesto con pérdida de linealidad en la respuesta del conjunto.

Capítulo 3

Propuesta de un modelo constitutivo para materiales compuestos

"Progress in design of new structures seems to be unlimited"
K. J. Bathe

3.1 Introducción

Según se ha visto en el capítulo anterior la mayoría de los modelos constitutivos para la simulación del comportamiento de materiales compuestos no tienen en cuenta los fenómenos no-lineales en el comportamiento constitutivo del material. Por otra parte la anisotropía del material solo se tiene en cuenta en régimen elástico o través de modelos cuadráticos (Azzi-Tsai-Hill, Tsai-Wu) que no diferencian explícitamente el comportamiento del refuerzo y de la matriz. Estos modelos presentan un buen acuerdo con los ensayos experimentales solo en los casos en que las tensiones que interactúan producen la rotura de uno de los materiales que componen el compuesto, como por ejemplo el caso de tensiones transversales a la dirección de la fibra y las tensiones cortantes que producen fallas en la matriz. Por lo tanto, es necesario desarrollar modelos constitutivos que permitan tener en cuenta los complejos fenómenos que se observan durante el proceso de carga en los que se verifican roturas de los materiales componentes del compuesto.

Los materiales compuestos constituidos por plásticos reforzados con fibras (FRP "fiber reinforced plastic") y, especialmente, los materiales compuestos reforzados con fibras de vidrio o carbono constituyen los materiales especialmente indicados para la fabricación de elementos estructurales en los que el peso y la resistencia constituyen variables fundamentales durante el proceso de diseño. Por lo tanto, es

necesario establecer la respuesta de este tipo de materiales bajo diversos tipos de solicitaciones. El mecanismo de falla en los materiales plásticos reforzados con fibras es complejo debido a la presencia de diversos fenómenos y mecanismos. Dependiendo del tipo de material y de los esfuerzos a los que está sometido la pieza el proceso de falla del material puede sobrevenir como una combinación de diversos mecanismos de falla.

El modelo constitutivo que se desarrolla en este trabajo tiene como objetivo simular el complejo mecanismo de falla de los materiales compuestos. Está basado en tres teorías que permiten simular los diversos mecanismos que se generan durante el proceso de falla de los materiales compuestos: la de grandes deformaciones para materiales isótropos, la de mezclas para materiales isótropos y la de transformación de espacios para materiales anisótropos. Cualquier método basado en la aproximación Lagrangeana actualizada o total es directamente aplicable a materiales plásticos reforzados con fibras o materiales compuestos en general. La elección del modelo constitutivo, de un criterio de fluencia y de una regla de flujo plástico adecuados resultan de gran importancia en la descripción del comportamiento no-lineal anisótropo de los materiales FRP.

Una revisión de los distintos métodos de cálculo para problemas no-lineales en régimen de deformaciones finitas se puede encontrar en Cheng y Kikuchi (1985), en García Garino (1993) o en Cante (1995). Sun y Chen (1989) proponen una función de fluencia cuadrática y una regla de flujo asociada basados en el criterio de Hill para describir el comportamiento plástico anisótropo de materiales compuestos. La función propuesta se reduce a la función de Misses-Reuss en el caso de materiales anisótropos. En el modelo propuesto es necesario determinar ciertas constantes de la función de fluencia en forma experimental. Una vez determinadas las constantes Sun y Chen proponen que el comportamiento anisótropo de materiales compuestos con diferentes direcciones de fibra y orientaciones de las láminas puede ser descrito por una curva simple en el espacio de tensiones y deformaciones plásticas efectivas. Espinosa *et al.* (1997) extendieron la formulación propuesta por Sun y Chen al campo de las grandes deformaciones para simular el comportamiento de materiales compuestos reforzados con tejidos de fibra de vidrio.

Chen *et al.* (1997) extendieron la función de fluencia propuesta introduciendo el concepto de PPR (plastic poisson's ratio). Con el objetivo de determinar la variación de la tensión efectiva con la deformación plástica efectiva proponen realizar ensayos experimentales sometidos a diversos estados de carga. Las constantes que intervienen en la función de fluencia se determinan a través de un procedimiento de ajuste de manera tal de converger a una curva de tensiones y deformaciones efectivas.

O'Donoghue *et al.* (1992) utilizaron la función de fluencia anisótropa propuesta por Hill para describir el comportamiento no-lineal de materiales compuestos. La

dependencia de la presión en las componentes desviadoras de las deformaciones la tienen en cuenta añadiendo los términos apropiados en la ecuación de estado del material. Voyiadjis y Thiagarajan (1995) proponen una superficie de fluencia anisótropa para materiales compuestos reforzados en función de un tensor de cuarto orden. En este modelo los parámetros de resistencia axial y cortante se combinan a través de cuatro constantes de ajuste que permite determinar el tensor de cuarto orden anisótropo. Este método tiene la ventaja de que su implementación en códigos de elementos finitos resulta sencilla tanto en coordenadas locales como globales. Las funciones de fluencia propuestas son los intentos de homogeneizar "mecánicamente" las propiedades direccionales de materiales compuestos. Para cada nuevo material que se utilice es necesario realizar nuevos ensayos experimentales para "calibrar" las constantes de la función de fluencia según los resultados experimentales.

Anderson *et al.*(1990) propone un modelo para materiales compuestos basado en la teoría de mezclas. El modelo propuesto es considerado heterogéneo, pero debido a las hipótesis de la teoría de mezclas el movimiento relativo entre constituyentes no es considerado. Este modelo se utilizó para el estudio de la propagación de ondas en materiales plásticos reforzados con fibras.

Thaumaturgo *et al.* (1997) utilizó datos de impacto de Marsh (1980) para estudiar la influencia de la interfase fibra-matriz en la absorción de energía bajo cargas dinámicas. Thaumaturgo encontró a través de simulaciones numéricas y ensayos experimentales que la energía absorbida bajo cargas de impacto depende fundamentalmente de los mecanismos de falla que se desarrollan en los materiales compuestos, por ejemplo rotura de fibra y matriz, deslizamientos relativos entre fibra y matriz, fenómenos de delaminación, etc.

Se han realizado diversos estudios para determinar el tipo de falla en materiales compuestos bajo distintos estados de carga. Una revisión detallada de este trabajo se puede encontrar en Abrate (1991, 1994) . Estudios realizados por Williams y Rhodes (1982) y Huston (1984) establecen que bajo la acción de cargas dinámicas las propiedades mecánicas de la matriz determinan el umbral de daño y el progreso del daño debido a cargas de impacto, mientras que las fibras determinan la resistencia a la penetración.

La interfase fibra-matriz también ha sido objeto de estudio por parte de diversos investigadores. Estudios realizados por Beaumount (1979) establece que el fenómeno de deslizamiento posterior al debonding es la principal fuente de absorción de energía en materiales reforzados con fibras.

Adicionalmente a los estudios experimentales, las técnicas numéricas se han utilizado para determinar la resistencia de materiales compuestos reforzados con fibras. El fenómeno de delaminación es el mecanismo de falla típico en los materiales compuestos reforzados con fibras, responsable de una disminución considerable en la resistencia y rigidez del material. Este fenómeno ha sido modelado utilizando la

mecánica de fractura. Estos modelos se basan en evaluar la integral J de Eshelby (1956) o Rice (1968) para el caso de cargas estáticas, extendida por Nishioka y Atluri (1983) para el caso de cargas dinámicas, o la integral cerrada de Irwin (1958) . Lo *et al.* (1993) utilizó la integral J para evaluar la variación temporal de la energía libre G de un sólido bidimensional bajo cargas dinámicas.

Para simular el fenómeno de la delaminación se utilizan modelos basados en superficies cohesivas. Camacho y Ortiz (1996) utilizaron este modelo para simular el avance de fractura en materiales frágiles. El modelo consiste, básicamente, en abrir una fisura duplicando los nodos en una malla de elementos finitos cuando el nivel tensional en el nodo es igual al factor de intensidad de tensiones efectivas. La fisura se propaga permitiendo la separación de los nodos de acuerdo a una ley cohesiva. Esta ley cohesiva tiene en cuenta la pérdida de resistencia en función de la apertura de la fisura. Espinoza *et al.* (1998) utilizaron los modelos de zona cohesiva para el estudio del inicio y propagación de fisuras en materiales frágiles. En esta aproximación se utilizan elementos de espesor nulo, embebidos en la malla de elementos finitos, que poseen una ley constitutiva de superficie cohesiva. En esta aproximación después de que las tensiones alcanzan el nivel de la tensión máxima admisible se produce una disminución de las mismas hasta anularse. En este punto se produce la fractura del material y la creación automática de una nueva superficie y se evitan los problemas asociados a las técnicas de duplicación de nodos.

En este capítulo se describe el modelo propuesto para la simulación numérica de materiales compuestos. El modelo constitutivo propuesto está escrito en el contexto de la termodinámica de sólidos irreversibles, está inmerso en la teoría de grandes deformaciones plásticas y la teoría de mezclas de sustancias básicas y se restringe al proceso puramente mecánico, es decir procesos termodinámicos térmicamente estables.

En la sección 3.2 se describe el modelo constitutivo elastoplástico en régimen de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas.

3.2 Modelo constitutivo elastoplástico

Los materiales compuestos surgen de una combinación adecuada en volumen y forma (orientación) de elementos de refuerzo y matrices. Estos elementos de refuerzo se caracterizan por sus elevadas propiedades mecánicas y su anisotropía.. Por lo tanto, los materiales que surgen de esta combinación presentan una elevada anisotropía.. La posición y tipo de refuerzo dan lugar a diversos tipos de materiales compuestos.

En este apartado se formula el modelo constitutivo que es capaz describir el comportamiento de materiales compuestos multifase. Para ello es necesario desarrollar un modelo que permita simular los siguientes fenómenos: a) alta anisotropía con

deformaciones permanentes direccionadas; b) existencia de varias sustancias que conforman el compuesto; c) flujo plástico unidireccional en el caso de refuerzo con fibras; d) deslizamientos relativos entre matriz y fibra ("debonding") a nivel de interfase con pérdida de compatibilidad cinemática e) pandeo local del refuerzo; f) tendencia de las fibras a alinearse con la dirección del esfuerzo mayor; g) presencia de grandes deformaciones debido al fenómeno de alineación del refuerzo en la dirección del esfuerzo mayor; h) fenómenos de microfisuración en la matriz y i) fallas en la fase de refuerzo.

El modelo se formula en el contexto de la mecánica no-lineal de medios continuos en régimen de grandes deformaciones y debe satisfacer entre otros postulados las leyes de la termodinámica. El mismo se desarrolla siguiendo el enfoque utilizado por Ortiz (1987) y Moran *et al.* (1990), entre otros que consiste en definir *a priori* los elementos del modelo constitutivo: energía libre, función de fluencia y potencial plástico, variables internas y sus leyes de evolución. El modelo se obtiene de la segunda ley de la termodinámica expresada en este contexto mediante la desigualdad de Clasius-Duhem. (ver Apéndice B)

3.2.1 Parámetros del modelo constitutivo

En presencia de grandes transformaciones la elección de la configuración en la que se obtienen las mediciones de los ensayos no resulta trivial. Si se pretende emplear en el contexto de las grandes deformaciones el valor de las tensiones uniaxiales τ obtenidas a partir de ensayos de tracción simple, deben emplearse las medidas de deformación adecuadas para que el modelo constitutivo respete la física del problema(García Garino, 1993) (Bathe, 1982).

Existe una pérdida de unicidad en los resultados dependiendo si el ensayo se refiere a la configuración original o a la deformada. De aquí se concluye que es necesario emplear los argumentos adecuados en la descripción de la ecuación constitutiva. Con el objetivo de definir la ecuación constitutiva y para la implementación numérica del modelo constitutivo se utilizarán las variables espaciales que describen de manera natural la física del problema. Lo anterior no impide que el modelo constitutivo pueda formularse utilizando variables materiales o con referencia a otra configuración distinta de la deformada. La implementación práctica de este tipo de modelos supone un tratamiento matemático muy complejo.

En presencia de estados tensionales uniaxiales el límite elástico del material se encuentra definido en las curvas tensión-deformación. En general, para casos tridimensionales, todos los estados tensionales que producen fluencia en el material constituyen el límite elástico del mismo definido matemáticamente a través de un cierto *criterio o condición de fluencia*. El criterio de fluencia inicial es una función

del estado tensional y en general se expresa como[1]:

$$\phi\left\{\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{g}\right\}=0 \tag{3.1}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un conjunto de variables de estado denominadas variables internas que tienen en cuenta la historia de las deformaciones inelásticas del sólido.

En el problema elastoplástico resulta fundamental la definición del criterio de fluencia. Este criterio debe tener en cuenta los cambios en la geometría y en general se escribe en la configuración espacial como:

$$\phi\left\{\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{g}\right\}=f\left\{\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{g}\right\}-K\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\}\leq 0 \tag{3.2}$$

donde f es una función continua de las tensiones, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración actual o deformada y α es un conjunto de variables internas que permiten tener en cuenta el cambio en la forma de la función ϕ.

La ec.(3.2) no puede utilizarse indistintamente en cualquier configuración ya que:

$$f\left\{\boldsymbol{S}\right\}\neq f\left\{\boldsymbol{\tau}\right\} \tag{3.3}$$

donde $\boldsymbol{S}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff en la configuración inicial o de referencia y $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en la configuración actual o deformada.

El primer término de la ec.(3.2) se puede interpretar como una tensión efectiva que se compara con un resultado experimental. Resulta esencial que la tensión efectiva que se calcula sea independiente de los argumentos que intervienen en su definición. Con el objetivo de conseguir este propósito deben emplearse transformaciones tensoriales adecuadas que se introducen en el Apéndice A. Estas transformaciones matemáticas se deben tener en cuenta en la función de fluencia y en la definición de las funciones de potencial plástico, energía libre y en los tensores de tensiones y deformaciones.

Como conclusión se puede expresar que ninguna medida de la deformación o de la tensión resultan inadecuadas para describir correctamente el comportamiento de un material, pero siempre respetando sus parámetros físicos. Las variables espaciales describen en forma natural la física del problema y por este motivo se utilizan en este trabajo como argumentos del modelo constitutivo sin pérdida de generalidad, ya que luego se extiende el modelo a variables materiales.

[1]En este trabajo se adopta la convención de que dada una función $f\left\{\bullet\right\}$, $\bullet$ representa los argumentos de la misma.

3.2.2 Caso de pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas. Expresión de la energía libre.

Los materiales compuestos, a excepción de los materiales elastómeros, presentan deformaciones elásticas pequeñas aún cuando están sometidos a procesos de grandes deformaciones. Esto conduce a que la parte elástica del tensor gradiente de deformaciones $\boldsymbol{F}^e$ se aproxime a la identidad y la parte elástica del tensor izquierdo de Cauchy-Green $(\boldsymbol{b}^e)^{-1}$tiende al tensor métrico espacial $\boldsymbol{g}$ (ver Apéndice A). En este caso la distinción entre configuración intermedia y deformada carece de importancia. Sin embargo, las deformaciones plásticas continúan siendo finitas y es necesario mantener la presencia del tensor derecho de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$ en la expresión material del modelo constitutivo(Lubliner, 1990). Si este tensor no se tiene en cuenta explícitamente, se está definiendo un *material diferente*, matemáticamente válido pero se pierde la validez física. Para el caso de pequeñas deformaciones elásticas, resulta suficiente caracterizar la componente elástica de la energía libre (ver Apéndice B) mediante una función cuadrática del tensor elástico de deformaciones de Almansi $\boldsymbol{e}^e$, esto es:

$$\psi^e = \frac{1}{2m}\boldsymbol{e}^e : \boldsymbol{c} : \boldsymbol{e}^e \tag{3.4}$$

donde $\boldsymbol{c}$ es el tensor constitutivo en la configuración actualizada. La expresión en la configuración referencial[2] de la ec.(3.4) resulta:

$$\Psi^e = \frac{1}{2m^0}\boldsymbol{E}^e : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \boldsymbol{E}^e \tag{3.5}$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ es el tensor constitutivo en la configuración referencial. Teniendo en cuenta la hipótesis de elasticidad desacoplada (ec. B.14), la expresión de la energía libre (ec. 3.4) resulta:

$$\psi = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{e}^e : \boldsymbol{c} : \boldsymbol{e}^e\right) + \psi^p \tag{3.6a}$$

donde ψ^p representa la parte plástica de la energía libre. En forma análoga la expresión de la energía libre en la configuración material está dada por la suma de la parte elástica y la parte plástica de la energía, esto es:

$$\Psi = \frac{1}{2m^0}\left(\boldsymbol{E}^e : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \boldsymbol{E}^e\right) + \Psi^p \tag{3.7}$$

[2] En este trabajo la expresión configuración referencial se refiere a la configuración inicial en la que el material se encuentra en estado virgen

Al igual que en la definición de la energía libre en la configuración actualizada (ec. 3.6a) aquí Ψ^p representa la parte plástica de la energía libre pero en la configuración referencial.

3.2.3 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico en la configuración referencial. Definiciones básicas

El modelo que se presenta en este apartado se conoce en la literatura como modelo de Kirchhoff-St. Venant (Marsden y Hughes, 1994) y ha sido denominado también por García Garino y Oliver (1988) *modelo hiperelástico lineal material*.

Este modelo se obtiene teniendo en cuenta la ec.(B.28) y la descomposición aditiva dada por la ec.(B.13) el tensor de tensiones resulta:

$$\boldsymbol{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{E}^e} = \boldsymbol{\mathcal{C}} : \boldsymbol{E}^e = \boldsymbol{\mathcal{C}} : (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^p) \tag{3.8}$$

Condición de fluencia

La condición de fluencia distingue entre dos estados: uno elástico que se encuentra en el interior del dominio delimitado por la llamada función de fluencia y otro estado plástico que se localiza sobre dicha superficie (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991). La condición de fluencia depende fundamentalmente del tipo de material y se define en la configuración material de la siguiente forma:

$$\Phi\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} = F\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C}\right\} - K\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.9}$$

donde $\boldsymbol{S}$ es el segundo tensor de Piola Kirchhoff, $\boldsymbol{C}$ es el tensor derecho de Cauchy-Green y $\boldsymbol{\alpha}$ es la variable interna de plasticidad que controla la evolución de la superficie Φ.

Regla de flujo

La regla de flujo estable la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración referencial como:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}} \tag{3.10}$$

donde $\mathcal{G} = \mathcal{G}\left(\boldsymbol{S};\boldsymbol{C}\right)$ es la función de potencial plástico y $\dot{\lambda}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991) dadas por:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \Phi\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\Phi\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.11}$$

Las condiciones dadas por la ec.(3.11) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la variación temporal de la función de fluencia:

$$\dot{\Phi}\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\}=0 \tag{3.12}$$

Tensor constitutivo elastoplástico tangente

El tensor constitutivo elastoplástico tangente relaciona el segundo tensor de tensiones de Piola Kirchhoff con las deformaciones de Green-Lagrange en la forma:

$$\dot{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ep}:\dot{\boldsymbol{E}} \tag{3.13}$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene considerando la variación temporal de la ec.(3.8), esto es:

$$\dot{\boldsymbol{S}}=\underbrace{\dot{\boldsymbol{\mathcal{C}}}:(\mathbf{E}-\mathbf{E}^{p})}_{=0}+\boldsymbol{\mathcal{C}}:\left(\dot{\boldsymbol{E}}-\dot{\boldsymbol{E}}^{p}\right) \tag{3.14}$$

Se parte de la hipótesis de plasticidad sin influencia del daño de manera que el tensor constitutivo $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ se mantiene constante en la configuración referencial con lo cual el primer término de la ec.(3.14) es nulo. Teniendo en cuenta la condición de consistencia (ec.(3.12)) y la definición de la condición de fluencia en la configuración referencial (ec.(3.9)) la condición de consistencia se puede reescribirse como:

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{S}}:\dot{\boldsymbol{S}}+\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}+\frac{\partial\Phi}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial\alpha}\dot{\alpha}=0 \tag{3.15}$$

donde $\dot{\alpha}$ representa la ley de evolución de las variables internas y está dada por:

$$\dot{\alpha}=\dot{\lambda}\left[H_{\kappa}:\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{S}}\right]=\boldsymbol{H}_{\kappa}:\dot{\boldsymbol{E}}^{p} \tag{3.16}$$

donde $\boldsymbol{H}_{\kappa}$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico K; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Teniendo en cuenta la definición de la deformación de Green-Lagrange dada por la ec.(A.56) se obtiene que $\dot{\boldsymbol{C}}=2\dot{\boldsymbol{E}}$ y considerando la ec.(3.10), la ec.(3.14) y la ec.(3.15), la condición de consistencia se reescribe de la siguiente manera

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{S}}:\boldsymbol{\mathcal{C}}:\left[\dot{\boldsymbol{E}}-\dot{\lambda}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{S}}\right]+2\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{E}}-\frac{\partial K}{\partial\alpha}\dot{\lambda}\left[\boldsymbol{H}_{\kappa}:\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{S}}\right]=0 \tag{3.17}$$

De esta última ecuación se obtiene el parámetro de consistencia plástica como

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{S}} : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \dot{\boldsymbol{E}} + 2\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{C}} : \dot{\boldsymbol{E}}}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{S}} : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}} - \dfrac{\partial K}{\partial \kappa}\left[H_\kappa : \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}}\right]} \tag{3.18}$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene reemplazando en la ec.(3.14) el parámetro de consistencia plástica (ec.(3.18)) y la definición del flujo plástico dado por la ec.(3.10)

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \left[\boldsymbol{\mathcal{C}} - \frac{\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{S}} : \boldsymbol{\mathcal{C}} + 2\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{C}}\right) \otimes \left(\boldsymbol{\mathcal{C}} : \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}}\right)}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{S}} : \boldsymbol{\mathcal{C}} : \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}} - \dfrac{\partial K}{\partial \kappa}\left[\boldsymbol{H}_\kappa : \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}}\right]}\right] : \dot{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\mathcal{C}}^{ep} : \dot{\boldsymbol{E}} \tag{3.19}$$

donde $\boldsymbol{\mathcal{C}}^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente.

3.2.4 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico en la configuración actualizada. Definiciones básicas

Teniendo en cuenta la ec.(B.26) y la descomposición aditiva expresada en la ec.(B.12) las tensiones de Kirchhoff resultan:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{e}^e = \boldsymbol{c} : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p) \tag{3.20}$$

donde $\boldsymbol{c}$ es el tensor constitutivo en la configuración actualizada. En la ec.(3.20) el tensor constitutivo $\boldsymbol{c}$ es posible considerarlo constante tanto en la configuración actualizada como en la referencial. En el caso de considerarlo constante en la configuración referencial el tensor constitutivo $\boldsymbol{c}$ se obtiene como el "push forward" del tensor constitutivo en la configuración referencial (ver Apéndice A). Así en la definición de la ecuación constitutiva y en su implementación numérica se utilizarán variables espaciales que describen la física del problema más cercana a la realidad. Esto no impide que el modelo constitutivo pueda formularse utilizando variables materiales o en otra configuración distinta de la deformada.

Condición de fluencia

La condición de fluencia distingue entre dos estados: uno elástico que se encuentra en el interior del dominio delimitado por la llamada función de fluencia y otro estado plástico que se localiza sobre dicha superficie (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991). La condición de fluencia depende fundamentalmente del tipo de material y se define en la configuración material de la siguiente forma:

$$\phi\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha}\right\} = F\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g}\right\} - k\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.21}$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, $\boldsymbol{g}$ es el tensor métrico en la configuración actualizada y $\boldsymbol{\alpha}$ es la variable interna de plasticidad que controla la evolución de la superficie ϕ.

Regla de flujo

La regla de flujo estable la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración actualizada como:

$$L_v\left(\boldsymbol{e}\right)^p = \boldsymbol{d}^P = \dot{\lambda}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{3.22}$$

donde $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g}\right\}$ es la función de potencial plástico y $\dot{\lambda}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991) dadas por:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \phi\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha}\right\} \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\phi\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.23}$$

Las condiciones dadas por la ec.(3.23) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la derivada objetiva de la función de fluencia:

$$\dot{\phi}\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g};\boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.24}$$

Tensor constitutivo elastoplástico tangente

El tensor constitutivo elastoplástico tangente relaciona el tensor de tensiones de Kirchhoff con las deformaciones de Almansi en la forma:

$$L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \boldsymbol{c}^{ep} : L_v\left(\boldsymbol{e}\right) \tag{3.25}$$

La derivada objetiva de la ec.(3.20) resulta:

$$L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) = L_v\left(\boldsymbol{c}\right) : \left(\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p\right) + \boldsymbol{c} : \left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - L_v\left(\boldsymbol{e}^p\right)\right] \tag{3.26}$$

Hipótesis 1: tensor constitutivo constante en la configuración actualizada
En este apartado se deduce la expresión del tensor constitutivo tangente del problema planteado, partiendo de la hipótesis que el tensor constitutivo $\boldsymbol{c}$ se mantiene constante en la configuración actualizada. Este modelo se conoce en la literatura como modelo de Murnagaham (1937) y cuya forma lineal ha sido denominada como

modelo hiperelástico lineal espacial, por García Garino y Oliver (1988) . Teniendo en cuenta la condición de consistencia (ec.(3.24)) y la definición de la condición de fluencia en la configuración actualizada (ec.(3.21)), la condición de consistencia se puede escribir como:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : L_v(\boldsymbol{\tau}) + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}} : L_v(\boldsymbol{g}) + \frac{\partial \phi}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = 0 \tag{3.27}$$

donde $\dot{\alpha}$ representa la ley de evolución de las variables internas y está dada por:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\left[h_\kappa : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right] = h_\kappa : L_v(\boldsymbol{e}^p) \tag{3.28}$$

y h_κ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones y de la variable de endurecimiento plástico k; que en el caso más simple de la teoría incremental de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones de Kirchhoff. La derivada objetiva del tensor métrico espacial se obtiene teniendo en cuenta la relación entre la variación temporal del tensor derecho de Cauchy-Green y la variación temporal del tensor de deformaciones de Green-Lagrange $\dot{\boldsymbol{C}}=2\dot{\boldsymbol{E}}$. En la configuración actualizada la relación anterior se escribe como:

$$L_v(\boldsymbol{g}) = 2L_v(\boldsymbol{e}) \tag{3.29}$$

Considerando las ecs.(3.22), (3.26), (3.27) y (3.29) la condición de consistencia se reescribe de la siguiente manera:

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \left[\underbrace{L_v(\boldsymbol{c}) : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p) + \boldsymbol{c} : \left(L_v(\boldsymbol{e}) - \dot{\lambda}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)}_{L_v(\boldsymbol{\tau})}\right] \tag{3.30}$$

$$+\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}} : \underbrace{2L_v(\boldsymbol{e})}_{L_v(\boldsymbol{g})} - \underbrace{\frac{\partial k}{\partial \boldsymbol{\kappa}}\dot{\lambda}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]}_{\dot{\alpha}} = 0 \tag{3.31}$$

El producto doblemente contraído $L_v(\boldsymbol{c}) : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p)$ puede reescribirse en la forma deducida por Cante (1995) , esto es:

$$L_v(\boldsymbol{c}) : (\boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p) = \hat{\boldsymbol{d}} : L_v(\boldsymbol{e}) \tag{3.32}$$

donde $\hat{\boldsymbol{d}}$ está dada por (Cante, 1995):

$$\hat{d}_{ijkl} = -4\overline{\mu}\left[e^e_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}e^e_{lj}\right] - 2\overline{\lambda}\left[\delta_{ij}e^e_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl}\mathrm{tr}\left[\boldsymbol{e}^e\right]\right] \tag{3.33}$$

Teniendo en cuenta la ec.(3.30), la ec.(3.32) y la ec.(3.33) se obtiene el parámetro de consistencia plástica

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \left(\boldsymbol{c} + \hat{\boldsymbol{d}}\right) : L_v\left(e\right) + 2\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}} : L_v\left(\boldsymbol{e}\right)}{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \dfrac{\partial k}{\partial \kappa}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]} \tag{3.34}$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene teniendo en cuenta la ec.(3.26), el parámetro de consistencia plástica dado en la ec.(3.34) y la definición del flujo plástico dado por la ec.(3.22)

$$\begin{aligned} L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) &= \left[\left(\boldsymbol{c} + \hat{\boldsymbol{d}}\right) - \frac{\left[\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \left(\boldsymbol{c} + \hat{\boldsymbol{d}}\right) + 2\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}}\right] \otimes \left(\boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)}{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \dfrac{\partial k}{\partial \kappa}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]}\right] : L_v\left(\boldsymbol{e}\right) \\ &= \boldsymbol{c}^{ep} : L_v\left(\boldsymbol{e}\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde $\boldsymbol{c}^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración espacial que relaciona el incremento de deformaciones en la configuración actualizada con el incremento de tensiones de Kirchhoff.

Hipótesis 2: tensor constitutivo constante en la configuración referencial En este apartado se obtiene el tensor constitutivo tangente partiendo de la hipótesis de que el tensor constitutivo permanece constante en la configuración referencial. En el caso elástico lineal este modelo coincide con el modelo de Kirchhoff-St. Venant (Marsden y Hughes, 1994) o modelo hiperelástico lineal material. Bajo esta hipótesis la derivada objetiva del tensor constitutivo $L_v\left(\boldsymbol{c}\right)$, es decir su variación en la configuración referencial es nula. Por lo tanto, el primer miembro de la ec.(3.26) es nulo y la variación de la tensión resulta:

$$L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \boldsymbol{c} : \left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - L_v\left(\boldsymbol{e}^p\right)\right] \tag{3.36}$$

Teniendo en cuenta la ec. (3.36) la condición de consistencia expresada en la ec. (3.30) resulta

$$\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \left[\boldsymbol{c} : \left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]\right] + 2\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}} : L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \frac{\partial k}{\partial \kappa}\dot{\lambda}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right] = 0 \tag{3.37}$$

El parámetro de consistencia plástica $\dot{\lambda}$ se obtiene a partir de la ec.(3.37)

$$\dot{\lambda} = \frac{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : (\boldsymbol{c}) : L_v(\boldsymbol{e}) + 2\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}} : L_v(\boldsymbol{e})}{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \dfrac{\partial k}{\partial \kappa}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]} \tag{3.38}$$

El tensor constitutivo elastoplástico tangente se obtiene teniendo en cuenta la ec.(3.36), el parámetro de consistencia plástica dado por la ec.(3.38) y la definición del flujo plástico dado por la ec.(3.22)

$$\begin{aligned} L_v(\boldsymbol{\tau}) &= \left[(\boldsymbol{c}) - \frac{\left[\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{c} + 2\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{g}}\right] \otimes \left(\boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)}{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} : \boldsymbol{c} : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \dfrac{\partial k}{\partial \kappa}\left[\boldsymbol{h}_\kappa : \dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right]}\right] : L_v(\boldsymbol{e}) \\ &= \boldsymbol{c}^{ep} : L_v(\boldsymbol{e}) \end{aligned} \tag{3.39}$$

donde $\boldsymbol{c}^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en la configuración espacial que relaciona el incremento de deformaciones en la configuración actualizada con el incremento de tensiones de Kirchhoff.

Comparación entre modelos A partir de las ecuaciones que definen los distintos modelos constitutivos es posible comparar las respuestas para cada uno de ellos para el caso elástico lineal. En la Figura 3.1 se muestra la respuesta (tensiones de Cauchy) del material en función de las deformaciones. En la misma se observa que el modelo hiperelástico lineal material caracteriza un material que endurece bajo deformación impuesta, mientras que el modelo hiperelástico lineal espacial define un material que ablanda bajo deformación impuesta.

3.3 Consideración general de la anisotropía en la ecuación constitutiva

Los modelos constitutivos desarrollados para la simulación del comportamiento constitutivo de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos debido fundamentalmente a la elevada anisotropía de los materiales compuestos. Tampoco ha resultado satisfactoria la representación de un compuesto mediante un único material ortótropo con propiedades del conjunto.

En distintas referencias se observan intentos de modelar el comportamiento de materiales compuestos utilizando la técnica de elementos finitos pero la correlación entre los análisis y los resultados experimentales no resulta satisfactoria.

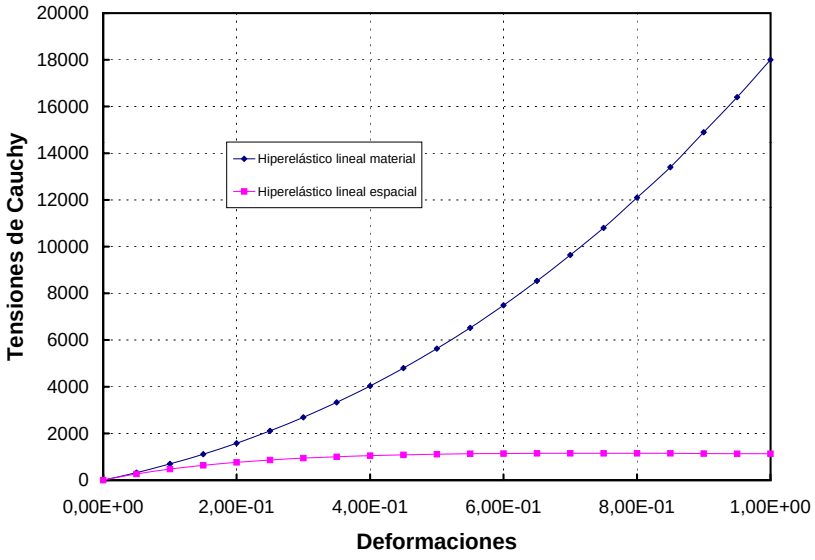

Figura 3.1: Comparación de la respuesta de los modelos constitutivos

La principal dificultad que se encuentra con el método de los elementos finitos convencional es la imposibilidad de modelar el comportamiento de materiales altamente anisótropos sometidos a cargas que superan los límites de proporcionalidad del material. Existen diversas formulaciones para materiales anisótropos que presentan una respuesta constitutiva no-lineal (Hill, 1971) (Bassani, 1977) (Barlat y Lian, 1989) (Barlat *et al.*, 1991). Estas teorías, en general, se basan en formular funciones de fluencia y potencial plástico anisótropas; lo que obliga a desarrollar nuevos procedimientos para integrar la ecuación constitutiva.

La teoría anisótropa que se propone en esta monografía es una generalización del caso isótropo, y se basa en transformar los parámetros constitutivos del material y su estado tensional a un espacio isótropo ficticio y, utilizar todas las técnicas y procedimientos desarrollados para la integración de la ecuación constitutiva de materiales isótropos.

3.4 Generalidades sobre la formulación propuesta

La formulación de una ley constitutiva adecuada para sólidos ortótropos o anisótropos elastoplásticos no proporcionales[3] constituye un problema de elevada com-

[3]Se entiende por material no proporcional a aquel en el cual la relación entre los módulos elásticos del material en dos direcciones no es igual a la relación entre las resistencias en la mismas

plejidad. Los materiales compuestos reforzados con fibras constituyen una forma simplificada de materiales no proporcionales anisótropos bifase. La descripción del comportamiento en régimen elástico de un sólido anisótropo no presenta grandes dificultades. Es posible utilizar para tal fin las formas generales de la teoría de la elasticidad (Hull, 1987a) (Matthews y Rawlings, 1994) (Pendleton y Tuttle, 1989). Existen en la bibliografía numerosos intentos de describir el comportamiento de sólidos no proporcionales anisótropos. Estos intentos pueden clasificarse en dos tipos de aproximaciones:

- Micromecánica
- Continua

La *aproximación micromecánica* considera al material compuesto constituido por dos materiales diferentes, y las propiedades del material compuesto surgen de las propiedades individuales de cada uno de los materiales constituyentes. La mayoría de los modelos micromecánicos están basados en la teoría de campo medio, en la que la variaciones locales de las tensiones y deformaciones están distribuidas en un valor medio de una región (ej. homogeneización). El comportamiento global del compuesto se deduce utilizando un procedimiento de homogeneización[4] adecuado.

En contraste con la aproximación micromecánica la *aproximación continua* considera al material compuesto como un material simple con propiedades diferentes en direcciones distintas.

La formulación general de superficies de fluencia anisótropas debe ser capaz de describir el comportamiento de materiales isótropos como un caso particular de la misma y describir la anisotropía de cualquier estado tensional del material. Cuando la superficie de fluencia se obtiene como un caso particular, esta debe poseer las propiedades de funciones isótropas como describen Malvern (1969), Gurtin (1981) y Chen y Han (1988). Estas propiedades se refieren a la simetría[5] de la función de fluencia y a su convexidad.

Los primeros intentos de formular funciones de fluencia para materiales ortótropos no proporcionales se deben a Hill quien logró extender el modelo isótropo de Von Mises al caso ortótropo (Hill, 1971) (Hill, 1979) (Hill, 1990). La principal limitación de esta teoría se encuentra en la imposibilidad de modelar el comportamiento de

direcciones

[4]Se entiende por homogeneización el procedimiento que permite obtener las variables que gobienan el comportamiento global de un material compuesto a partir de las variables que rigen el comportamiento de la aproximación micromecánica

[5]Dado un estado de tensiones principales σ_1, σ_2 y σ_3 la función de fluencia f resulta simétrica si se cumple

$f\ (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f\ (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_3)$

materiales que presentan un comportamiento que no solo depende del segundo invariante del tensor de tensiones, como por ejemplo el caso de geomateriales o materiales compuestos. Diversos autores han propuesto funciones de fluencia en el espacio de tensiones para materiales anisótropos, entre ellos se puede mencionar Bassani (1977) , Budiansky (1984) y Barlat *et al.* (1989, 1991) (Barlat *et al.*, 1991). Barlat *et al.* (1991) utilizan una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo multiplicando todos los componentes del tensor de tensiones por diferentes constantes. Karafillis y Boyce (1993) proponen una expresión general para superficies de fluencia de materiales policristalinos que permite describir materiales isótropos y anisótropos. La anisotropía del material la describen introduciendo un conjunto de variables tensoriales irreducibles. Este conjunto de variables tensoriales permite realizar una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo a un estado que denominan IPE (Isotropic Plasticity Equivalent material). Dvorak y Bahei-El-Din (1982) utilizaron también operadores tensoriales en conjunción con el criterio de fluencia de Von Mises para el análisis de materiales compuestos. Diversos autores han utilizado tensores de cuarto orden en la formulación de criterios de fluencia para materiales anisótropos entre ellos se puede citar a Shih y Lee (1978) , Eisenberg y Yen (1984) y Voyiadjis y Foroozesh(1990). Voyiadjis y Thiagarajan (1995) realizan el estudio de materiales compuestos reforzados unidireccionalmente formulando una superficie de fluencia general que depende de un tensor de cuarto orden.

La teoría anisótropa que se desarrolla en este trabajo es una generalización de la teoría isótropa clásica. Esta teoría se basa en aplicar una transformación lineal tanto al tensor de tensiones como al de deformaciones a través de tensores de cuarto orden que contienen la información de la anisotropía del material. Esta transformación lineal garantiza la convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico (Eggleston, 1969). La convexidad de la función de fluencia asegura que el material no retorna a un estado elástico una vez que ha plastificado bajo carga creciente. Esta teoría que se denomina de transformación de espacios, se basa en las ideas propuestas por Betten (Betten, 1981) (Betten, 1988) y utiliza el concepto de *tensor de tensiones mapeado* a un espacio de tensiones ficticio. La transformación generalizada del tensor de tensiones del material anisótropo se representa esquemáticamente en la Figura 3.2. Este concepto permite utilizar los algoritmos usados para el caso de materiales isótropos, con las consiguientes ventajas en la implementación computacional del modelo.

En trabajos previos, diversos autores han desarrollado una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo (Oller *et al.*, 1993b) (Oller *et al.*, 1993a). La idea básica consistía en modelar el comportamiento de un sólido en el *espacio anisótropo real* a través de un sólido ideal en el *espacio isótropo ficticio* (ver Figura 3.2). El modelo se basa en realizar una transformación lineal del tensor de

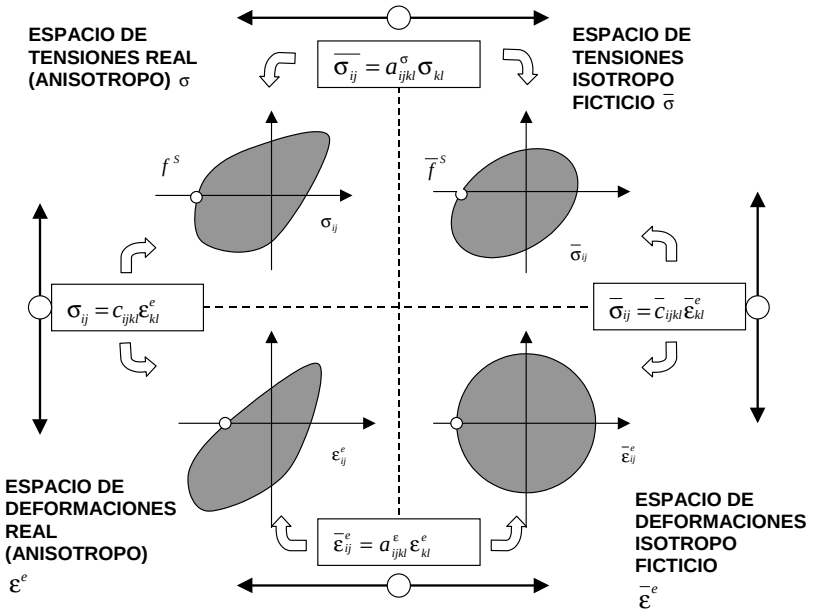

Figura 3.2: Transformación de espacios. Espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios en pequeñas deformaciones.

tensiones suponiendo que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material. Para evitar este inconveniente Oller *et al.* (1995) proponen que la aplicación lineal se realice tanto sobre el espacio de tensiones como sobre el de deformaciones.

El modelo constitutivo que se presenta en este trabajo resulta aplicable a materiales que presentan una alta anisotropía, como en el caso de los materiales compuestos reforzados con fibras y resulta de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica. El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isótropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropo. Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos. Toda la información de la anisotropía del material se en-

cuentra en los tensores de cuarto orden de transformación de los espacios de tensiones $\left(\boldsymbol{A}^S \text{ o } \boldsymbol{a}^\tau \text{ en la configuración referencial o actualizada respectivamente}\right)$ y deformaciones $\left(\boldsymbol{A}^E \text{ o } \boldsymbol{a}^e \text{ en la configuración referencial o actualizada respectivamente}\right)$. La utilización de la teoría de transformación de espacios permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado.

La formulación resultante es completamente general y permite realizar análisis de materiales multifase que presentan un grado de anisotropía elevado.

3.5 Función de fluencia y de potencial plástico para materiales anisótropos

En los apartados siguientes se presenta un modelo elasto plástico que puede formularse indistintamente en la configuración referencial o actualizada utilizando la cinemática lagrangeana total o actualizada (Green y P., 1964) (Lubliner, 1990). Este modelo permite simular el comportamiento no-lineal de materiales sometidos a grandes deformaciones plásticas y pequeñas deformaciones elásticas debido a que para la definición de la energía libre elástica se utiliza un potencial cuadrático (García Garino y Oliver, 1991)(Lubliner, 1990).

Las funciones de fluencia y potencial plástico pueden definirse en el espacio de tensiones de Kirchhoff (configuración actualizada) de la siguiente forma:

$$\text{Función de fluencia } \phi^\tau \left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{g}\right\} = 0 \tag{3.40}$$

$$\text{Función de potencial g}\left\{\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g}\right\} = K \tag{3.41}$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff y ϕ^τ y g representan las funciones de fluencia y potencial plástico en la configuración actualizada. También pueden estar definidas estas funciones en la configuración referencial, esto es:

$$\text{Función de fluencia } \Phi^S \left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{G}\right\} = 0 \tag{3.42}$$

$$\text{Función de potencial } \mathcal{G}\left\{\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{G}\right\} = K \tag{3.43}$$

donde $\boldsymbol{S}$ es el segundo tensor de Piola Kirchhoff y Φ^S y $\mathcal{G}$ son las funciones de fluencia y potencial plástico escritas en la configuración referencial. Es necesario resaltar que las funciones ϕ^τ, g, Φ^S y $\mathcal{G}$ son funciones isótropas, simétricas y convexas.

La función de fluencia y potencial plástico en el caso más general puede expresarse como una función de 6 variables independientes, componentes del tensor de tensiones

$$\Phi^S \{S_{11}; S_{22}; S_{33}; S_{12}; S_{13}; S_{23}; \alpha\} = 0 \quad (3.44)$$
$$\mathcal{G} \{S_{11}; S_{22}; S_{33}; S_{12}; S_{13}; S_{23}; \alpha\} = K \quad (3.45)$$

o en función de las tensiones principales en el caso isótropo:

$$\Phi^S \{S_1; S_2; S_3; \alpha\} = 0 \quad (3.46)$$
$$\mathcal{G} \{S_1; S_2; S_3; \alpha\} = K \quad (3.47)$$

que resultan de una transformación del estado tensional. Las funciones de fluencia y potencial plástico resultan isótropas si se cumple que para cualquier transformación ortogonal se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial (Malvern, 1969), esto es:

$$\Phi^S \{a_{ip} a_{jq} S_{pq}; \boldsymbol{\alpha}\} = \Phi^S \{S_{ij}; \boldsymbol{\alpha}\} = 0 \quad (3.48)$$
$$\mathcal{G} \{a_{ip} a_{jq} S_{pq}; \boldsymbol{\alpha}\} = \mathcal{G} \{S_{ij}; \boldsymbol{\alpha}\} = K \quad (3.49)$$

donde $a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ representa una transformación ortogonal y δ_{ij} son las componentes del tensor de Kronecker. Los materiales isótropos satisfacen la condición de invariancia y esto permite escribir la función de fluencia y potencial plástico en función de los invariantes del tensor de tensiones, esto es:

$$\Phi^S \{I_1; I_2; I_3; \alpha\} = 0 \quad (3.50)$$
$$\mathcal{G} \{I_1; I_2; I_3; \alpha\} = K \quad (3.51)$$

En el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica[6], las funciones de fluencia y potencial plástico resultan:

$$\Phi^S \{J_2; J_3; \alpha\} = 0 \quad (3.52)$$
$$\mathcal{G} \{J_2; J_3; \alpha\} = K \quad (3.53)$$

donde J_2 y J_3 representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. En forma análoga en la configuración actualizada se tiene que la función de fluencia o de potencial plástico resultan

[6] La condición de incompresibilidad plástica se verifica cuando función de fluencia no está afectada de la parte esférica del tensor de tensiones.

isótropas si se verifica la condición de invariancia de la función de fluencia o del potencial, y para el caso de materiales que satisfacen la condición de incompresibilidad plástica se escriben como:

$$\phi^{\tau}\left\{j_2; j_3; \boldsymbol{\alpha}\right\} = 0 \tag{3.54}$$

$$\mathrm{g}\left\{j_2; j_3; \boldsymbol{\alpha}\right\} = K \tag{3.55}$$

donde j_2 y j_3 representan el segundo y tercer invariante de la parte desviadora del tensor de tensiones de Kirchhoff.

3.6 Anisotropía en la configuración referencial

Los procedimientos tradicionales que permiten obtener las ecuaciones constitutivas para materiales anisótropos elastoplásticos se basan en la descripción de una superficie de fluencia y una superficie de potencial plástico en términos de las propiedades características del material. Satisfacer las condiciones de invariancia en estos casos resulta difícil y en algunos casos imposible.

Un procedimiento que garantiza esta condición de invariancia consiste en definir las propiedades del sólido "*anisótropo real*" en términos de un sólido "*isótropo ficticio*", estableciendo una relación lineal entre el espacio de tensiones real y el espacio de tensiones ficticio a través de un tensor de cuarto orden que contiene la información de la anisotropía que producen las distintas resistencias en las direcciones ortogonales del material (Oller *et al.*, 1995a) (Casas *et al.*, 1998) (ver Figura 3.2).

3.6.1 Transformación del espacio de tensiones.

La transformación del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff del espacio anisótropo real al espacio isótropo ficticio que garantiza la invariancia antes definida, se realiza a través de un tensor de cuarto orden (Oller *et al.*, 1995a)

$$\overline{S}_{IJ} = A^{S}_{IJKL} S_{KL} \tag{3.56}$$

donde $\boldsymbol{A}^S$ es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $A^S : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente, $\bar{\boldsymbol{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio ficticio y $\boldsymbol{S}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio anisótropo real. El tensor de cuarto orden $\boldsymbol{A}^S$ se define en la configuración referencial y permanece constante en esta configuración. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio resulta:

$$\bar{\Phi}\left\{\bar{\boldsymbol{S}}\ ;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\}=0 \tag{3.57}$$

donde $\bar{\Phi}$ es la función de fluencia en el espacio isótropo ficticio y se diferencia de la función de fluencia en el espacio anisótropo Φ en que el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio $\bar{\boldsymbol{S}}$ sustituye al segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio $\boldsymbol{S}$ como argumento. En la definición de la forma y propiedades del operador tensorial $\boldsymbol{A}^S$ introducido es necesario tener en cuenta la simetría del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio $\boldsymbol{S}$ y $\bar{\boldsymbol{S}}$ respectivamente, esto es:

$$A^S_{IJKL}=A^S_{JIKL}=A^S_{JILK} \tag{3.58}$$

Se parte de la hipótesis de que el tensor de cuarto orden de transformación de espacio de tensiones $\boldsymbol{A}^S$ presenta la simetría

$$A^S_{IJKL}=A^S_{KLIJ} \tag{3.59}$$

Oller *et al.* (1995) definen una forma simplificada del operador lineal $\boldsymbol{A}^S$ como:

$$A^S_{IJKL}=f^{\bar{S}}_{IK}\ \left(f^S_{JL}\right)^{-1} \tag{3.60}$$

donde $f^{\bar{S}}_{IK}$ y f^S_{JL} son los tensores de segundo orden de tensiones que representan la resistencia correspondiente a los espacios isótropo ficticio y anisótropo real. La definición del operador lineal dada en la ec. (3.60) no es unívoca ya que en general dado un par $\left(\boldsymbol{f}^{\bar{S}}\ ,\left(\boldsymbol{f}^S\right)^{-1}\right)$ no es posible obtener un tensor $\boldsymbol{A}^S$ que verifique la relación

$$f^{\bar{S}}_{IJ}=A^S_{IJKL}\ f^S_{KL} \tag{3.61}$$

La ec. (3.61) se verifica solo para el caso de tensores $\boldsymbol{f}^{\bar{S}}$ y $\boldsymbol{f}^S$ diagonales.

En el modelo constitutivo anisótropo que se desarrolla en esta monografía, las componentes del tensor de cuarto orden de transformación de espacios $\left(\boldsymbol{A}^S\right)$ se definen en la configuración referencial como:

$$A^S_{1111}=R(0)\quad A^S_{2222}=R(90)\quad A^S_{1212}=A^S_{2121}=A^S_{2112}=R(45) \tag{3.62}$$

donde $R(0)=\frac{S^{\lim}_{11_{fict}}}{S^{\lim}_{11_{\text{real}}}}$ representa el cociente entre las resistencias del material en los espacios isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente en la dirección del eje local x, $R(90)=\frac{S^{\lim}_{22_{fict}}}{S^{\lim}_{22_{\text{real}}}}$ representa el cociente entre las resistencias del material en los espacios isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente en la dirección del

eje local y y $R(45) = \frac{S^{\lim}_{12_{fict}}}{S^{\lim}_{12_{\text{real}}}}$ representa el cociente entre las resistencias del material a esfuerzos cortantes en el espacio isótropo ficticio y el anisótropo real respectivamente. Las componentes restantes se definen como nulas. Es importante notar que los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales simples.

La determinación del límite elástico se realiza sobre ensayos experimentales reales y por lo tanto con la pieza en estado deformado (configuración actualizada). Por consiguiente este valor límite obtenido se encuentra en la configuración actualizada. Para hallar el tensor $\boldsymbol{A}^S$ es necesario obtener el valor de este límite de resistencia en la configuración referencial y por lo tanto debe realizarse el pull-back (ver Apéndice A) de la tensión límite obtenida en un ensayo uniaxial, esto es:

$$\boldsymbol{f}_S = \overleftarrow{\phi}\,(\boldsymbol{\tau}) \tag{3.63}$$

donde $\overleftarrow{\phi}$ representa el pull-back del primer tensor de Kirchhoff, función del tensor gradiente de las deformaciones. El cálculo de este tensor se obtiene componente a componente a partir del tensor gradiente de las deformaciones, que para el caso unidimensional resulta

$$F = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = l_f/l_0 \tag{3.64}$$

donde l_0 es la longitud de la probeta ensayada en forma uniaxial y l_f es la longitud de la probeta correspondiente a la tensión en la que se verifica la pérdida de linealidad en la respuesta. Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$, el valor de la resistencia del material en la configuración referencial[7] resulta:

$$f_S = \frac{l_0}{l_f} f_\sigma \tag{3.65}$$

donde f_S es la resistencia del material en la configuración referencial.

3.6.2 Transformación del espacio de deformaciones

La transformación de espacios definida en la ec. (3.56) solo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales para los cuales la relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante, esto es:

$$f_{11}/E_{11} = f_{22}/E_{22} = ... = f_{23}/E_{23} \tag{3.66}$$

[7] En este trabajo la expresión configuración referencial se refiere a la configuración inicial en la que el material se encuentra en estado virgen

donde f y E representan la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración referencial para cada dirección del espacio. Esta implica que el tensor de deformación elástica debe ser el mismo en los espacios real y ficticio (Oller *et al.*, 1993a). Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller *et al.* (1995) proponen una transformación del espacio de deformaciones reales.

Se define la relación entre las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "anisótropo real" E^e_{IJ} y las deformaciones de Green-Lagrange elásticas en el espacio "isótropo ficticio" $\overline{E}^e_{IJ}$ (ver Figura 3.3) a través de un tensor de cuarto orden

$$\overline{E}^e_{IJ} = A^E_{IJKL} E^e_{KL} \tag{3.67}$$

donde $\boldsymbol{A}^E$ es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $A^E : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de deformaciones de Green-Lagrange reales y ficticias respectivamente, $\bar{\boldsymbol{E}}$ es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isótropo ficticio y $\boldsymbol{E}$ es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real. Esta hipótesis implica no unicidad en las deformaciones elásticas entre espacios. El *tensor de transformación de las deformaciones* $\boldsymbol{A}^E$ se puede calcular teniendo en cuenta la ec.(3.56) y la ec.(3.67) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{C}}_{IJMN}\, \overline{E}^e_{MN} &= A^S_{IJKL}\, \mathcal{C}_{KLRS}\, E^e_{RS} \\
\overline{\mathcal{C}}_{IJMN}\, A^E_{MNRS}\, E^e_{RS} &= A^S_{IJKL}\, \mathcal{C}_{KLRS}\, E^e_{RS} \\
\overline{\mathcal{C}}_{IJMN}\, A^E_{MNRS} &= A^S_{IJKL}\, \mathcal{C}_{KLRS} \\
A^E_{MNRS} &= \left(\overline{\mathcal{C}}_{IJMN}\right)^{-1} A^S_{IJKL}\, \mathcal{C}_{KLRS}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

donde $\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ es un tensor constitutivo arbitrario definido en el espacio isótropo ficticio y $\bar{\boldsymbol{C}}$ es el tensor constitutivo en el espacio anisótropo real. La elección de $\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ es arbitraria y puede estar representado por las propiedades de cualquier material isótropo conocido, debido a que solo se utiliza para trabajar en el espacio ficticio y luego se cancela su influencia al regresar al espacio real. Teniendo en cuenta la ec.(3.68) es posible establecer la relación entre los tensores constitutivos en el espacio anisótropo real e isótropo ficticio:

$$\mathcal{C}_{KLRS} = \left(A^S_{IJKL}\right)^{-1} \overline{\mathcal{C}}_{IJMN}\, A^E_{MNRS} \tag{3.69}$$

El tensor constitutivo anisótropo real $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ y el tensor de transformación de tensiones $\boldsymbol{A}^S$ están expresados en coordenadas locales, por lo tanto resulta necesario expresarlos en el sistema de referencia global a través de un tensor de rotación de cuarto orden $\boldsymbol{R}$ esto es:

$$\mathcal{C}_{IJKL} = R_{IJRS}\left(\mathcal{C}_{RSPQ}\right)_{loc} R_{PQKL} \tag{3.70}$$
$$A^S_{IJKL} = R_{IJRS}\left(A^S_{RSPQ}\right)_{loc} R_{PQKL} \tag{3.71}$$

donde $\left(\mathcal{C}_{RSPQ}\right)_{loc}$ es el tensor constitutivo local de cuarto orden en el espacio anisótropo real y $\left(A^S_{RSPQ}\right)_{loc}$ es el tensor de cambio de espacios local. El tensor de rotaciones R_{IJKL} se define como:

$$R_{IJKL} = r_{IK} r_{JL} \tag{3.72}$$

donde $r_{IK} = \cos\left[\left(\overrightarrow{e}_I\right)_{glob}, \left(\overrightarrow{e}_K\right)_{loc}\right]$, siendo $\overrightarrow{e}_i$ el versor unitario correspondiente a la componente i-ésima del sistema de referencia coordenado. El tensor de rotación $\boldsymbol{R}$ tiene en cuenta los ángulos entre las direcciones principales del material anisótropo y el sistema de coordenadas globales.

3.7 Anisotropía en la configuración actualizada

Luego de un detallado estudio de la generalización del modelo elastoplástico isótropo en la configuración referencial, es posible extender el tratamiento de la anisotropía a la configuración actualizada en forma análoga a lo realizado en la configuración referencial. Se presentan a continuación los tensores de cuarto orden que definen la aplicación lineal que relaciona los espacios anisótropo real e isótropo ficticio de tensiones y deformaciones en la configuración actualizada y se demostrará la veracidad de esta formulación, lo que da una gran generalidad a la teoría desarrollada.

3.7.1 Transformación del espacio de tensiones

La relación lineal entre los espacios de tensiones de Kirchhoff isótropo ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada (ver Figura 3.3) se propone a través de un tensor de cuarto orden como:

$$\overline{\tau}_{ij} = a^{\tau}_{ijkl} \tau_{kl} \tag{3.73}$$

donde $\boldsymbol{a}^{\tau}$ es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\boldsymbol{a}^{\tau} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de tensiones reales y ficticias respectivamente en la configuración actualizada, $\overline{\boldsymbol{\tau}}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio y $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio anisótropo real. La condición de fluencia del material anisótropo en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada resulta:

$$\bar{\phi}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}\ ;\boldsymbol{\alpha};\boldsymbol{g}\right)=0 \tag{3.74}$$

donde $\bar{\phi}$ es la función de fluencia en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada y se diferencia de la función de fluencia en el espacio anisótropo ϕ en que el tensor de tensiones de Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ reemplaza a $\boldsymbol{\tau}$ como argumento de la función de fluencia dada en la ec.(3.22).

En el contexto de deformaciones finitas el operador lineal $\boldsymbol{a}^{\tau}$, que relaciona los espacios de tensiones de Kirchhoff ficticio y real, no es constante. Esto se debe al cambio de configuración y, por lo tanto, es función del tensor de transformación de tensiones en la configuración referencial $\boldsymbol{A}^{S}$ y de los gradientes de deformaciones $\boldsymbol{F}$, como se demostrará a continuación.

El tensor de cambio de espacio entre tensiones en la configuración actualizada se obtiene teniendo en cuenta la ec.(3.56) y la operación push-forward $\overrightarrow{\phi}$ del tensor de tensiones (ver Apéndice A), esto es:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}=\phi^{*}\bar{\boldsymbol{S}}\Rightarrow\overline{\tau}_{ij}=F_{iI}\,\overline{S}_{IJ}\,\left(F^{T}\right)_{Jj} \tag{3.75}$$

Sustituyendo el valor del segundo tensor de Piola-Kirchhoff en el espacio isótropo ficticio por la expresión dada en la ec.(3.56) se tiene:

$$\overline{\tau}_{ij}=F_{iI}\,A^{S}_{IJKL}\,S_{KL}\,\left(F^{T}\right)_{Jj} \tag{3.76}$$

El tensor de tensiones anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el pull-back $\overleftarrow{\phi}$ del tensor de tensiones anisótropo de Kirchhoff, esto es:

$$S_{KL}=\left(F^{-1}\right)_{Kk}\tau_{kl}\left(F^{-T}\right)_{lL} \tag{3.77}$$

Reemplazando la ec.(3.77) en la ec.(3.76) se obtiene:

$$\overline{\tau}_{ij}=\underbrace{F_{iI}\,A^{S}_{IJKL}\,\left(F^{-1}\right)_{Kk}\,\left(F^{-T}\right)_{lL}\,\left(F^{T}\right)_{Jj}}_{a^{\tau}_{ijkl}}\,\tau_{kl} \tag{3.78}$$

De la ecuación anterior se obtiene que el tensor de transformación de espacios de tensiones en la configuración actualizada es una función del gradiente de las deformaciones, que expresa el movimiento del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones en la configuración referencial (ver Figura 3.3)

$$a^{\tau}_{ijkl}=F_{iI}\,\left(F^{-1}\right)_{Kk}\,\left(F^{-T}\right)_{lL}\,\left(F^{T}\right)_{Jj}\,A^{S}_{IJKL} \tag{3.79}$$

donde $\boldsymbol{F}$ es el tensor gradiente de la deformaciones, $\boldsymbol{F}^T$ es la traspuesta del tensor gradiente de las deformaciones, $\boldsymbol{F}^{-1}$ es la inversa del tensor gradiente de las deformaciones, $\boldsymbol{F}^{-T}$ es la traspuesta de la inversa del tensor gradiente de las deformaciones y $\boldsymbol{A}^S$ es el tensor de cambio de espacio en la configuración referencial.

3.7.2 Transformación del espacio de deformaciones

En forma análoga a lo dicho en el apartado 3.6.2, la transformación de espacios definida en la ec. (3.73) solo puede aplicarse a materiales proporcionales, esto es, materiales para los cuales la relación entre las tensiones de fluencia y el módulo de Young para cada dirección del espacio es constante, esto es:

$$f_{11}/E_{11} = f_{22}/E_{22} = ... = f_{23}/E_{23} \tag{3.80}$$

donde f y E representan la resistencia y el módulo elástico del material en la configuración actualizada para cada dirección del espacio. Esta implica que el tensor de deformación elástica sea el mismo en los espacios real y ficticio. Con el objetivo de generalizar la formulación a diversos materiales Oller *et al.* (1995) proponen una transformación del espacio de deformaciones reales.

La relación entre los espacios de deformaciones de Almansi isótropo ficticio y anisótropo real en la configuración actualizada se define a través de un tensor de cuarto orden (ver Figura 3.3)

$$\overline{e}_{ij} = a^e_{ijkl} e_{kl} \tag{3.81}$$

donde, en forma análoga a lo expresado en el apartado 3.6.2 $\boldsymbol{a}^e$ es un tensor de cuarto orden definido como el operador lineal $\boldsymbol{a}^e : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ que establece la relación entre el espacio de los tensores simétricos de deformaciones de Almansi reales y ficticias respectivamente, $\bar{\boldsymbol{e}}$ es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio isótropo ficticio y $\boldsymbol{e}$ es el tensor de deformaciones de Almansi en el espacio anisótropo real.

El operador lineal $\boldsymbol{a}^e$ se encuentra definido en la configuración actualizada y debido al cambio de configuración no permanece constante. En el contexto de deformaciones finitas este operador es función del tensor de cambio de tensiones en la configuración material $\boldsymbol{A}^E$ y de los gradientes de deformaciones $\boldsymbol{F}$, como se demostrará a continuación.

El tensor de cambio de espacio en la configuración actualizada entre tensiones se obtiene teniendo en cuenta la ec.(3.56) y la operación push-forward $\overrightarrow{\phi}$ del tensor de deformaciones de Green-Lagrange (ver Apéndice A), esto es:

$$\bar{\boldsymbol{e}} = \phi^* \bar{\boldsymbol{E}} \Rightarrow \overline{e}_{ij} = \left(F^{-T}\right)_{iI} \overline{E}_{IJ} \left(F^{-1}\right)_{Jj} \tag{3.82}$$

Sustituyendo el valor de las deformaciones de Green-Lagrange en el espacio isótropo ficticio por la expresión dada en la ec.(3.67) se tiene:

$$\overline{e}_{ij} = \left(F^{-T}\right)_{iI} \; A^{E}_{IJKL} \, E_{KL} \; \left(F^{-1}\right)_{Jj} \tag{3.83}$$

El tensor de deformaciones de Green-Lagrange anisótropo real en la configuración referencial se obtiene realizando el pull-back $\overleftarrow{\phi}$ del tensor de deformaciones de Almansi anisótropo, esto es:

$$E_{KL} = \left(F^{T}\right)_{Kk} e_{kl} F_{lL} \tag{3.84}$$

Reemplazando la ec.(3.84) en la ec.(3.83) se obtiene:

$$\overline{e}_{ij} = \underbrace{\left(F^{-T}\right)_{iI} \; A^{E}_{IJKL} \; \left(F^{T}\right)_{Kk} \; F_{lL} \; \left(F^{-1}\right)_{Jj}}_{a^{e}_{ijkl}} \; e_{kl} \tag{3.85}$$

De la ecuación anterior se obtiene el tensor de transformación de espacios de deformaciones en la configuración actualizada

$$a^{e}_{ijkl} = \left(F^{-T}\right)_{iI} \; \left(F^{T}\right)_{Kk} \; F_{lL} \; \left(F^{-1}\right)_{Jj} \; A^{E}_{IJKL} \tag{3.86}$$

donde $\boldsymbol{A}^{E}$ es el tensor de cambio de espacio de deformaciones en la configuración referencial. En la Figura 3.3 los espacios de tensiones y deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada. La relación entre los espacios de tensiones y deformaciones reales y ficticios está dada por los operadores lineales $A^{S} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$, $A^{E} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$, $\boldsymbol{a}^{\tau} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$ y $\boldsymbol{a}^{e} : \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathcal{S}_2$. La relación entre los espacios de tensiones y deformaciones, tanto en la configuración referencial como actualizada está dada por la ley de Hooke generalizada.

3.7.3 Transformación de espacios aplicada a diversas funciones umbrales de discontinuidad

Las transformaciones dadas en la ecs.(3.56) y (3.73) conduce a cambios en la forma de la superficie de fluencia en las configuraciones referencial y actualizada. Esto se puede observar en la Figura 3.4 para los criterios de fluencia más utilizados: Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb y Drucker-Prager. La transformación de espacios permite representar adecuadamente materiales áltamente anisótropos, tal el caso de una fibra de refuerzo en una matriz de material compuesto cuando la relación $r_{ii} = \overline{\sigma}_{ii}/\sigma_{ii}$ tiende a infinito[8]. Por ejemplo para el caso de plasticidad asociada y criterio de

[8] r_{ii} es la relación entre las tensiones de fluencia en los espacios isótropo ficticio y anisótropo real

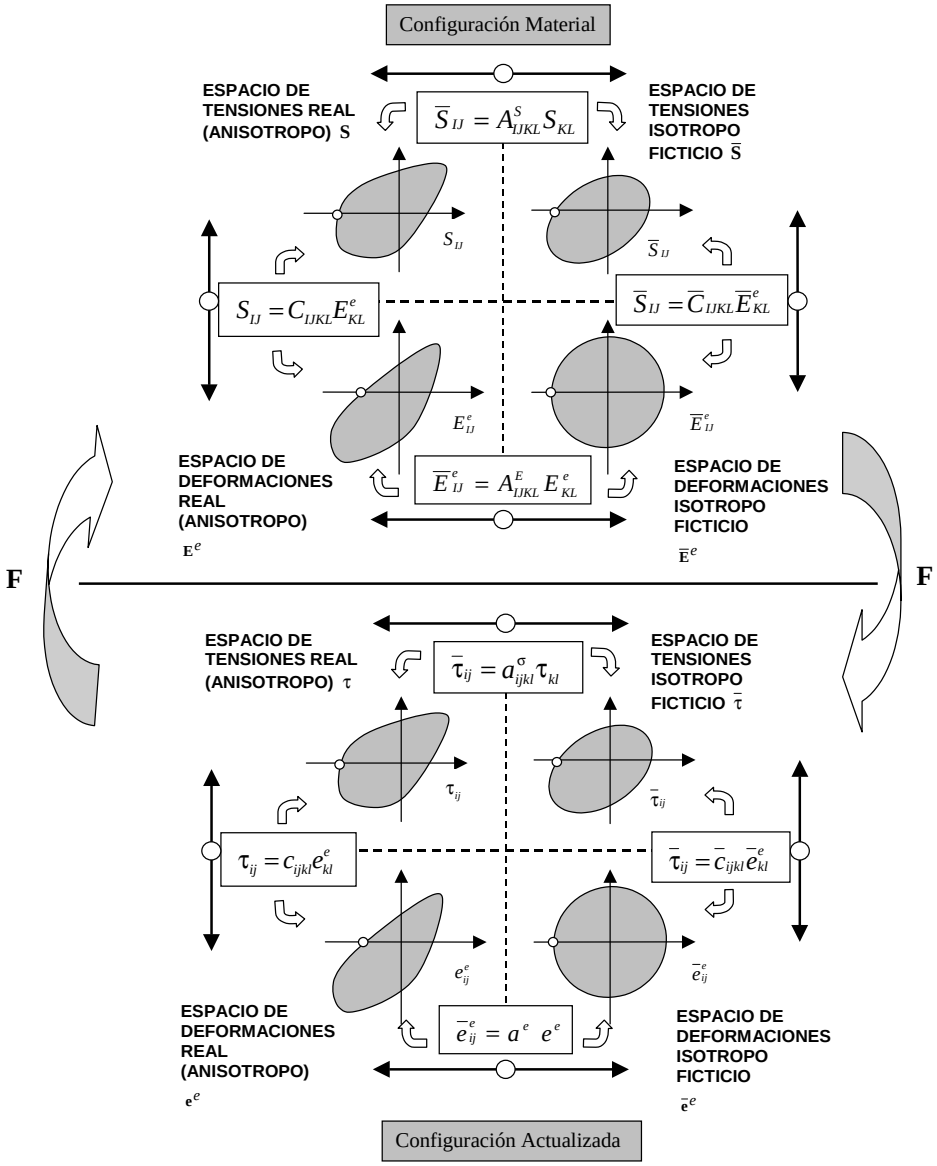

Figura 3.3: Tensores de transformación de tensiones y deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada.

fluencia de Von Mises la Figura 3.4 muestra la pérdida resistencia en una dirección dada, mientras que en la dirección normal a esta existe un crecimiento del flujo plástico en la misma proporción.

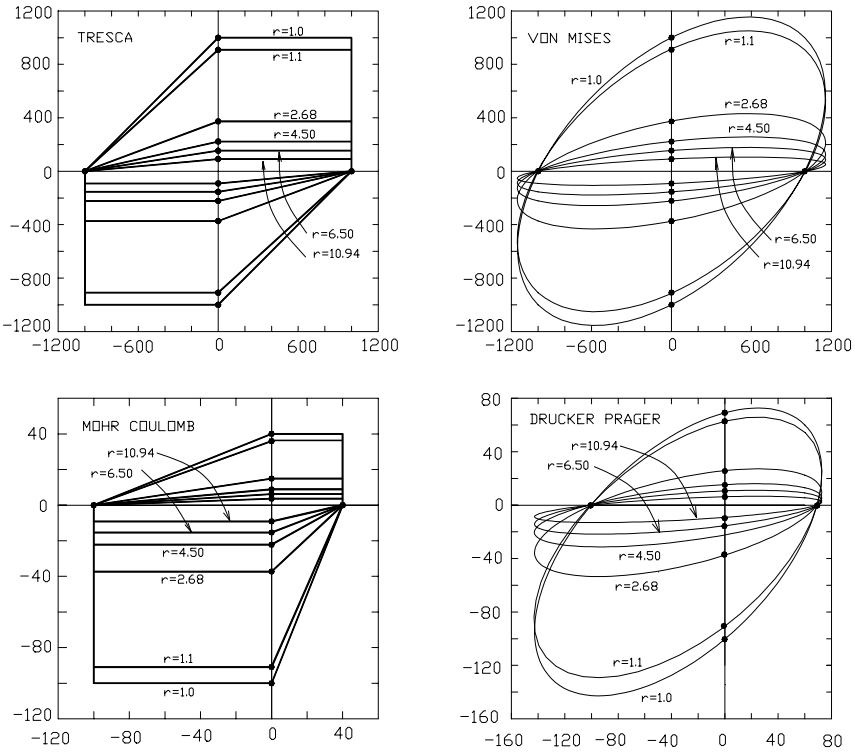

Figura 3.4: Modificación de la forma de diversas funciones de fluencia.

3.8 Regla de flujo. Ley de evolución de las variables internas

A continuación se presenta la regla de flujo y la ley de evolución de las variables internas que rigen el comportamiento del material en régimen plástico. En forma análoga a lo realizado en apartados anteriores su deducción se realiza para los modelos constitutivos en las configuraciones referencial y actualizada.

3.8.1 Configuración referencial

En la configuración referencial la ley de evolución de la deformación plástica en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}} \tag{3.87}$$

Teniendo en cuenta que toda la información de la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación $\mathbf{A}^S$, se propone la función de potencial plástico para el sólido anisótropo de la siguiente forma:

$$\mathcal{G}\left\{\boldsymbol{S};\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} = \overline{\mathcal{G}}\left\{\boldsymbol{S};\boldsymbol{A}^S;\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} = \overline{\mathcal{G}}\left\{\bar{\boldsymbol{S}};\boldsymbol{C};\boldsymbol{\alpha}\right\} = K \tag{3.88}$$

Reemplazando la ec.(3.88) en la ec.(3.87) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Green-Lagrange resulta:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{S}} = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}}{\partial \boldsymbol{S}} = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \boldsymbol{A}^S = \left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^S : \boldsymbol{A}^S \tag{3.89}$$

donde $\left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^S = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}}$ es el flujo plástico normal al potencial isótropo $\overline{\mathcal{G}}$. El concepto de aditividad de las deformaciones en la configuración referencial[9] permite extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^p = \boldsymbol{A}^E : \dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{A}^E : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \boldsymbol{A}^S = \boldsymbol{A}^E : \left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^S : \boldsymbol{A}^S \tag{3.90}$$

donde $\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^p$ es el incremento de la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración referencial. La ley de evolución de las variables internas de endurecimiento plástico viene dada por la siguiente regla general

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\, \left(\boldsymbol{H}^m\right)_S : \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}\, \left(\boldsymbol{H}^m\right)_S : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{S}}}{\partial \boldsymbol{S}} = \dot{\lambda}\, \left(\boldsymbol{H}^m\right)_S : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \boldsymbol{A}^S \tag{3.91}$$

donde $\left(\boldsymbol{H}^m\right)_S$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del segundo tensor

[9] El concepto de aditividad de las deformaciones establece que $\dot{\boldsymbol{E}}^e = \dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}^p$ y al ser $\boldsymbol{A}^E$ una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta $\boldsymbol{A}^E \dot{\boldsymbol{E}}^e = \boldsymbol{A}^E \left(\dot{\boldsymbol{E}} - \dot{\boldsymbol{E}}^p\right)$ con lo cual se obtiene $\dot{\bar{\boldsymbol{E}}}^e = \dot{\bar{\boldsymbol{E}}} - \dot{\bar{\boldsymbol{E}}}^p$ donde la ley de evolución de la deformación plástica ficticia está dada por : $\dot{\bar{\boldsymbol{E}}}^p = \boldsymbol{A}^E \dot{\boldsymbol{E}}^p$

de tensiones de Piola-Kircchoff y en este caso $\dot{\alpha}$ coincide con la densidad de energía plástica. La ley de evolución de la variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\bar{\boldsymbol{S}} : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} = \dot{\Psi}^p \tag{3.92}$$

Las Figuras 3.5, 3.7 y 3.9 muestran para una superficie de fluencia de Von Mises y plasticidad asociada diversos casos de materiales que presentan las siguientes características:

1. Material isótropo homogéneo en régimen lineal y con diferentes resistencias en la dirección y,

2. Material anisótropo en régimen elástico y plástico pero con iguales resistencias en todas sus direcciones,

3. Material anisótropo en régimen elástico y plástico y con diferentes resistencias en la dirección y.

Material isótropo homogéneo en régimen lineal y con diferentes resistencias en una dirección

En la Figura 3.5 se muestra la superficie fluencia de Von Mises para un caso anisótropo con tensiones en las direcciones x e y y con tensiones cortantes nulas y su correspondiente transformación en una función isótropa. La superficie isótropa surge de considerar un material isótropo homogéneo, es decir con un tensor constitutivo isótropo, y con una relación de resistencias en la dirección y entre el espacio ficticio y el espacio real b. Para el caso de plasticidad asociada, en la figura se representan también el vector de flujo dado por la ec. (3.89) y el vector de flujo plástico normal al potencial isótropo $\overline{\mathcal{G}}$. Teniendo en cuenta la ec. (3.89) para este caso el vector de flujo en el espacio real está dado por:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^S : \boldsymbol{A}^S = \begin{bmatrix} \left(\dot{\overline{E}}\right)_1^S \\ b\left(\dot{\overline{E}}\right)_2^S \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

La ec. (3.93) muestra que para el caso de materiales con diferentes resistencias en distintas direcciones el flujo plástico en la dirección de menor resistencia es mayor en una magnitud igual a la relación de resistencias entre los espacios isótropo ficticio y anisótropo real. La Figura 3.6 muestra el vector de flujos en el espacio isótropo ficticio.

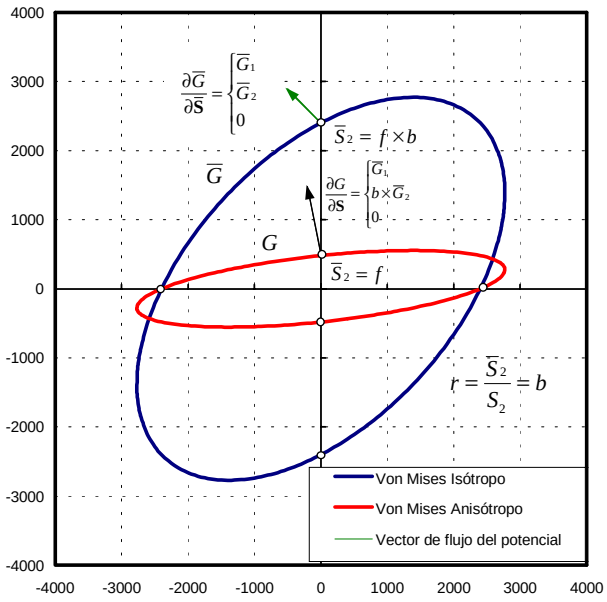

Figura 3.5: Superficies de fluencia y potencial plástico de Von Mises para un material anisótropo con distinta resistencia en la dirección y.

Material anisótropo en régimen elástico y plástico pero con iguales resistencias en todas sus direcciones

La Figura 3.7 muestra el caso de un material anisótropo en régimen elástico y plástico, es decir un material con diferentes propiedades mecánicas en cada dirección, y con igual resistencia en todas sus direcciones. Al igual que en apartado anterior la relación entre el módulo elástico del material en los espacios isótropo ficticio y anisótropo es b. Al tratarse de un material con iguales umbrales de resistencia en ambos espacios las superficies de fluencia y potencial ficticias y reales coinciden. La Figura 3.8 muestra el vector de flujos en el espacio isótropo ficticio. Se observa en este caso que el flujo plástico en el espacio isótropo es menor en la dirección en la cual el módulo elástico del material resulta menor. Teniendo en cuenta la ec. (3.89) para este caso el vector de flujo en el espacio real está dado por:

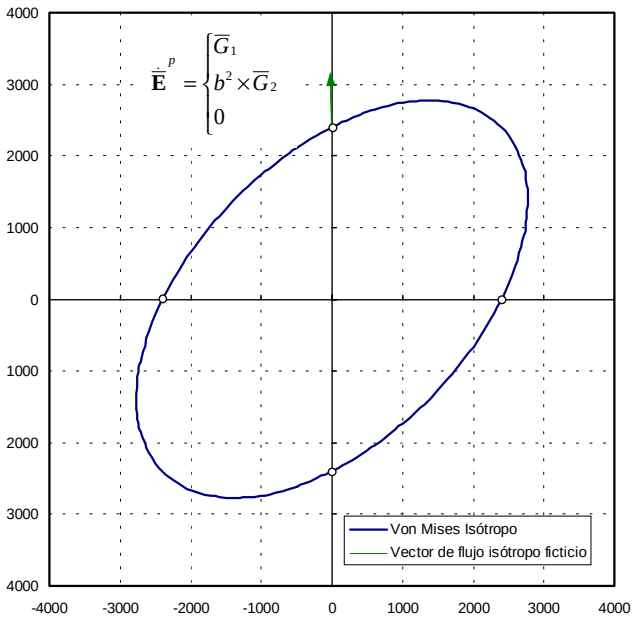

Figura 3.6: Superficie de potencial plástico y vector de flujo en el espacio isótropo ficticio para un material con diferente resistencia en la dirección y.

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{p} = \left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^{S} : \boldsymbol{A}^{S} = \begin{bmatrix} \left(\dot{\overline{E}}\right)_1^S \\ \left(\dot{\overline{E}}\right)_2^S \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

Combinación de los casos anteriores

La Figura 3.9 muestra un caso que resulta de combinar los dos anteriores, es decir, un material anisótropo en régimen elástico y plástico y con una relación de resistencias en la dirección y entre el espacio ficticio y el espacio real de b y con una relación de módulos elásticos en la dirección y de c. Teniendo en cuenta la ec. (3.89) para este caso el vector de flujo en el espacio real está dado por:

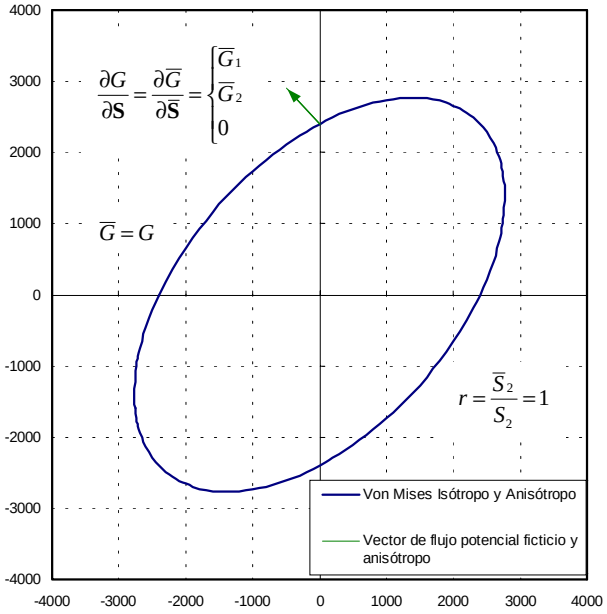

Figura 3.7: Superficies de fluencia y potencial plástico de Von Mises para un material anisótropo en régimen elástico y plástico con igual resistencia en todas las direcciones.

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \left(\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}\right)^S : \boldsymbol{A}^S = \begin{bmatrix} \left(\dot{\overline{E}}\right)^S_1 \\ b\left(\dot{\overline{E}}\right)^1_2 S \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

Comparando los flujos plásticos en los espacios anisótropos ficticios de las Figuras 3.6 y 3.10 se observa que para este último caso la componente en la dirección del material con menor módulo elástico es inferior.

3.8.2 Configuración actualizada

En la configuración actualizada la ley de evolución de las deformaciones plásticas en el espacio anisótropo está dada por la siguiente regla de normalidad:

$$L_v\left(\boldsymbol{e}^p\right) = \boldsymbol{d}^p = \dot{\lambda}\, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{3.96}$$

Teniendo en cuenta que toda la anisotropía del material está contenida en el tensor de transformación $\boldsymbol{a}^\tau$, la función de potencial plástico para el sólido anisótropo

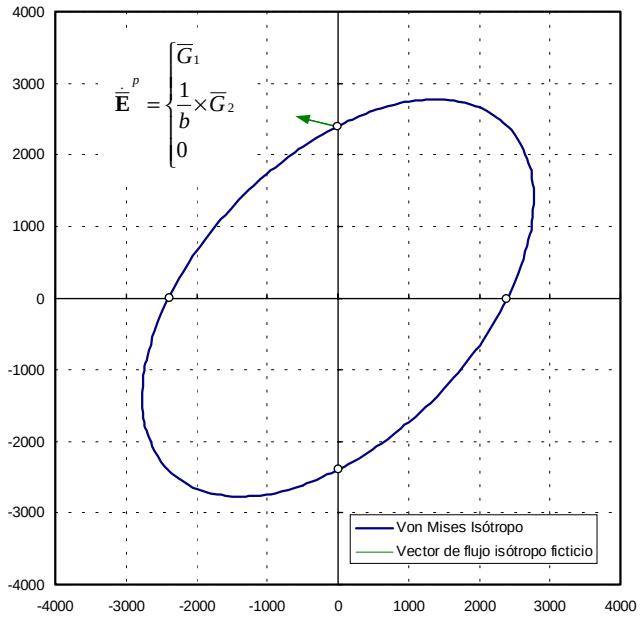

Figura 3.8: Superficie de potencial plástico y vector de flujo en el espacio isótropo ficticio para un material anisótropo en régimen elástico y plástico con igual resistencia en todas las direcciones.

se propone como:

$$\mathrm{g}\left\{\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{g};\alpha\right\} = \overline{\mathrm{g}}\left\{\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{a}^{\tau};\boldsymbol{g};\alpha\right\} = \overline{\mathrm{g}}\left\{\bar{\boldsymbol{\tau}};\boldsymbol{g};\alpha\right\} = k \tag{3.97}$$

Reemplazando la ec.(3.97) en la ec.(3.96) el incremento de la cuota plástica de la deformación de Almansi resulta:

$$\boldsymbol{d}^{p} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^{\tau} = \left(\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}\right)^{\tau} : \boldsymbol{a}^{\tau} \tag{3.98}$$

donde $\left(\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}\right)^{\tau} = \dot{\lambda}\,\frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}}$ es el flujo plástico normal al potencial plástico isótropo $\overline{\mathrm{g}}$. El concepto de aditividad de las deformaciones[10] en la configuración espacial permite

[10] El concepto de aditividad de las deformaciones establece que $\dot{\boldsymbol{e}}^{e} = \dot{\boldsymbol{e}} - \dot{\boldsymbol{e}}^{p}$ y al ser $\boldsymbol{a}^{E}$ una aplicación lineal, la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange resulta $\boldsymbol{a}^{e}\dot{\boldsymbol{e}}^{e} = \boldsymbol{a}^{e}\left(\dot{\boldsymbol{e}} - \dot{\boldsymbol{e}}^{p}\right)$con lo cual se obtiene $\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{e} = \dot{\bar{\boldsymbol{e}}} - \dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{p}$ donde la ley de evolución de la deformación plástica ficticia está dada por : $\dot{\bar{\boldsymbol{e}}}^{p} = \boldsymbol{a}^{e}\dot{\boldsymbol{e}}^{p}$

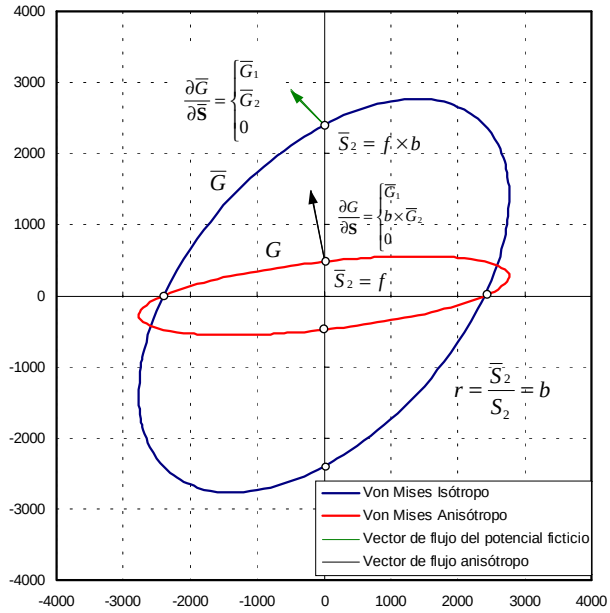

Figura 3.9: Superficies de fluencia y potencial plástico de Von Mises para un material anisótropo en régimen elástico y plástico con distinta resistencia en la dirección y.

extender la regla de transformación de las deformaciones a la cuota plástica de las deformaciones, es decir:

$$\overline{\boldsymbol{d}}^p = \boldsymbol{a}^e : \boldsymbol{d}^p = \dot{\lambda}\, \boldsymbol{a}^e : \frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \overline{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^\tau = \boldsymbol{a}^e : \left(\dot{\overline{\boldsymbol{e}}}\right)^\tau : \boldsymbol{a}^\tau \tag{3.99}$$

donde $\overline{\boldsymbol{d}}^p$ es la deformación plástica isótropa ficticia en la configuración actualizada. La ley de evolución de la variable interna de endurecimiento plástico viene dada por la siguiente regla general:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\, (\boldsymbol{h}^m)_\tau : \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}\, (\boldsymbol{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \overline{\boldsymbol{\tau}}} : \frac{\partial \overline{\boldsymbol{\tau}}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \dot{\lambda}\, (\boldsymbol{h}^m)_\sigma : \frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \overline{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^\tau \tag{3.100}$$

donde $(\boldsymbol{h}^m)_\tau$ es un tensor de segundo orden, función del estado de tensiones actualizado y de la variable de endurecimiento plástico también actualizada que en el caso más simple de la teoría de la plasticidad toma la forma del tensor de tensiones y en este caso $\dot{\alpha}$ coincide con la densidad de energía plástica. La ley de evolución de la

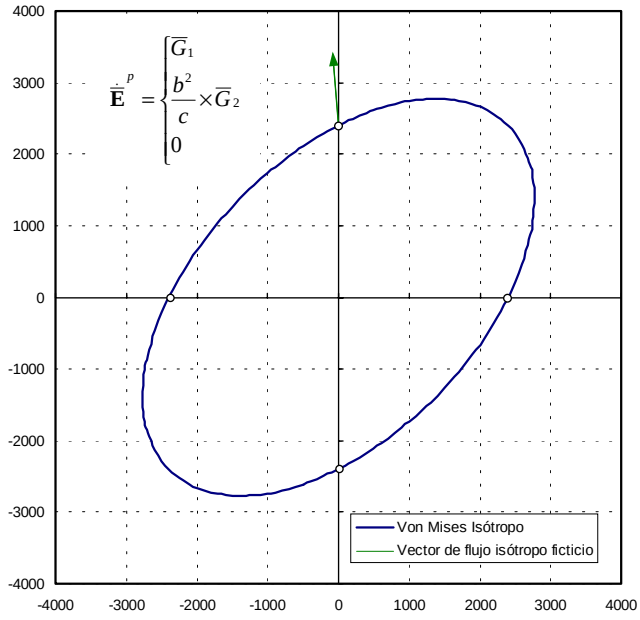

Figura 3.10: Superficie de potencial plástico y vector de flujo en el espacio isótropo ficticio para un material anisótropo en régimen elástico y plástico con distinta resistencia en la dirección y.

variable interna resulta:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda}\, \bar{\boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \overline{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \dot{\psi}^p \tag{3.101}$$

Los valores de la disipación plástica dada por las ecs. (3.92) y (3.101) son los mismos. Esto puede demostrarse teniendo en cuenta las operaciones de transporte push-forward y pull-back (ver Apéndice A)[11] y considerando la expresión de la disipación en la configuración referencial, se verifica su conservación en la configuración actualizada

$$\dot{\Psi}^p \;=\; \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^P = \left(\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{F}^{-T}\right) : \left(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{d}^p \cdot \boldsymbol{F}\right)$$

[11] El producto tensorial $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) : \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} : \left(\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{C}\right) = \boldsymbol{A} : \left(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{B}^T\right)$

$$= \quad (\boldsymbol{\tau}) : \left(\underbrace{\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{F}^{T}}_{\boldsymbol{I}} \cdot \boldsymbol{d}^{p} \cdot \underbrace{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}}_{\boldsymbol{I}} \right) = \dot{\psi}^{p} \tag{3.102}$$

3.9 Definición de la disipación en el espacio isótropo ficticio. Unicidad de disipación

Este apartado tiene como objetivo demostrar que la disipación plástica del modelo constitutivo anisótropo desarrollado en los apartados anteriores es igual, independientemente de si se la considera en el espacio real o en el ficticio. Como se ha mencionado anteriormente la utilización del modelo constitutivo en el espacio ficticio tiene la ventaja de poder utilizar todos los algoritmos desarrollados para materiales isótropos con la consiguiente ventaja en la implementación en un código de elementos finitos.

3.9.1 Configuración referencial

En la configuración referencial isótropa la expresión de la energía libre de Helmholtz para un proceso isotérmico resulta:

$$\bar{\Psi}\left(\bar{\boldsymbol{E}}^{e}; \alpha\right) = \frac{J}{2m^{0}} \left(\bar{\boldsymbol{E}}^{e} : \bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}} : \bar{\boldsymbol{E}}^{e}\right) + \bar{\Psi}^{p}\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\} \tag{3.103}$$

donde $\bar{\Psi}$ es la energía libre total ficticia y $\bar{\Psi}^{p}$ es la cuota plástica de la energía libre en el espacio isótropo ficticio. La ecuación constitutiva en la configuración actualizada del material isótropo ficticio surge de considerar la expresión de Clasius-Duhem (ec. B.25) y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones y deformaciones (ecs. 3.56 y 3.67). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^{p} - m^{0} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \dot{\alpha} - \frac{1}{\theta} \dot{\boldsymbol{q}} . \nabla \theta \geq 0 \tag{3.104}$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración referencial es posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones y deformaciones $\boldsymbol{A}^{S}$ y $\boldsymbol{A}^{E}$ respectivamente y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^{p} = \left[\left(\boldsymbol{A}^{S}\right)^{-1} : \bar{\boldsymbol{S}}\right] : \left[\left(\boldsymbol{A}^{E}\right)^{-1} : \dot{\bar{\boldsymbol{E}}}^{p}\right] \tag{3.105}$$

Reemplazando en la ec.(3.105) la variación de la deformación plástica ficticia dada por la ec.(3.99) se obtiene:

$$\boldsymbol{S} \;:\; \dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\left(\boldsymbol{A}^S\right)^{-1} : \bar{\boldsymbol{S}} : \left(\boldsymbol{A}^E\right)^{-1} : \boldsymbol{A}^E : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} : \boldsymbol{A}^S \tag{3.106}$$

$$\boldsymbol{S} \;:\; \dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\, \bar{\boldsymbol{S}} : \frac{\partial \overline{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\boldsymbol{S}}} = \bar{\boldsymbol{S}} : \dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^p \tag{3.107}$$

Considerando la ecuación anterior, la expresión de la disipación para procesos isotérmicos resulta:

$$\Xi_{mec} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = \bar{\boldsymbol{S}} : \dot{\overline{\boldsymbol{E}}}^p - m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\dot{\alpha} \equiv \overline{\Xi}_{mec} \geq 0 \tag{3.108}$$

La expresión anterior de la disipación obtenida a partir de la ec. (3.104) demuestra que teniendo en cuenta las transformaciones entre espacios, resulta equivalente escribir el modelo constitutivo en el espacio real o en el ficticio. La implementación computacional de este modelo para anisotropía presenta grandes ventajas. Al tratarse el material en un espacio isótropo ficticio solo es necesario realizar una transformación de los espacios de tensión y deformación a un espacio isótropo ficticio y luego utilizar los algoritmos desarrollados en la literatura clásica para materiales isótropos.

3.9.2 Configuración actualizada

La expresión de la energía libre de Helmholtz en el espacio isótropo ficticio en la configuración actualizada para un proceso isotérmico resulta:

$$\overline{\psi}\left\{\bar{\boldsymbol{e}}^e; \alpha\right\} = \frac{1}{2m}\left(\bar{\boldsymbol{e}}^e : \bar{\boldsymbol{c}} : \bar{\boldsymbol{e}}^e\right) + \overline{\psi}^p\left\{\boldsymbol{\alpha}\right\}$$

donde $\overline{\psi}$ es la energía libre total ficticia y $\overline{\psi}^p$ es la cuota plástica de la energía libre en el espacio isótropo ficticio. La ecuación constitutiva en la configuración actualizada del material isótropo ficticio surge de considerar la expresión de Clasius-Duhem (ec. B.24) y las ecuaciones de transformación de espacios de tensiones y deformaciones (ecs. 3.73 y 3.81). La disipación está dada en forma general por:

$$\Xi = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\dot{\alpha} - \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \geq 0 \tag{3.109}$$

El primer término de la expresión de la disipación en la configuración actualizada es posible escribirlo en función de los tensores de transformación de espacios de tensiones y deformaciones $\boldsymbol{a}^\sigma$ y $\boldsymbol{a}^e$ respectivamente y de los espacios de tensiones y deformaciones ficticias como

$$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p = \left[(\boldsymbol{a}^\tau)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\tau}}\right] : \left[(\boldsymbol{a}^e)^{-1} : \bar{\boldsymbol{d}}^p\right] \tag{3.110}$$

Reemplazando en la ec.(3.110) la variación de la deformación plástica ficticia dada por la ec.(3.99) se obtiene:

$$\boldsymbol{\tau} \;:\; \boldsymbol{d}^p = \dot{\lambda}\, (\boldsymbol{a}^\tau)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\tau}} : (\boldsymbol{a}^e)^{-1} : \boldsymbol{a}^e : \frac{\partial \bar{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} : \boldsymbol{a}^\sigma \tag{3.111}$$

$$\boldsymbol{\tau} \;:\; \boldsymbol{d}^p = \dot{\lambda}\, \bar{\boldsymbol{\tau}} : \frac{\partial \bar{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\boldsymbol{\tau}}} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\boldsymbol{d}}^p \tag{3.112}$$

Considerando la ecuación anterior, la expresión de la disipación, para procesos isotérmicos, está dada por:

$$\Xi_{mec} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\, \dot{\alpha} = \bar{\boldsymbol{\tau}} : \bar{\boldsymbol{d}}^p - m\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\, \dot{\alpha} \equiv \overline{\Xi}_{mec} \geq 0 \tag{3.113}$$

De la ec.(3.113) se deduce, como era de esperar, que la disipación es una invariante del proceso termodinámico, siendo su valor independiente si se calcula en el espacio isótropo ficticio o en el anisótropo real.

3.10 Ecuación constitutiva tangente

El método de Newton-Raphson, que utiliza matrices de rigidez tangente es una de las técnicas más utilizadas en la aproximación numérica de las ecuaciones que rigen el comportamiento de sólidos elastoplásticos. Por lo tanto, es necesaria una relación incremental entre las tensiones y las deformaciones para obtener el operador lineal tangente. A continuación se presentan los operadores lineales elastoplásticos tangentes continuos que establecen la relación entre el incremento de tensiones y el de deformaciones totales en las configuraciones referencial y actualizada.

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de sistemas acoplados de ecuaciones diferenciales de primer orden de pasos de tiempo(Simo y Taylor, 1985). El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no-lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual. Este algoritmo de integración permite tratar el problema elastoplástico fundamentalmente como un problema elástico equivalente en el paso de tiempo.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en

métodos de Newton(Simo y Taylor, 1985) (Crisfield, 1991). La precisión con la que se obtiene la matriz de rigidez tangente del sistema influye directamente en la velocidad de convergencia y es de una importancia fundamental en la exactitud general del análisis.(Ortiz y Popov, 1985)

El operador elastoplástico que se presenta en este apartado es independiente del proceso de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no preserva la convergencia cuadrática propia de los esquemas de solución basados en métodos de Newton. En el Apartado 6.8.5 se presenta la expresión del operador lineal elastoplástico tangente consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de este operador permite obtener convergencia cuadrática en el problema no-lineal propia del método Newton-Raphson.

3.10.1 Configuración referencial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Kirchhoff (ec. 3.8), esto es:

$$\dot{S}_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial E^e_{kl}} \dot{E}^e_{kl} \tag{3.114}$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Kirchhoff en el espacio anisótropo es función de la tensión en el espacio isótropo ficticio se tiene

$$\dot{S}_{ij} = \underbrace{\frac{\partial S_{ij}}{\partial \bar{S}_{rs}}}_{\left(A^S_{ijrs}\right)^{-1}} \frac{\partial \bar{S}_{rs}}{\partial \bar{E}^e_{mn}} \underbrace{\frac{\partial \bar{E}^e_{mn}}{\partial E^e_{kl}}}_{A^E_{mnkl}} \dot{E}^e_{kl}$$

$$\dot{S}_{ij} = \left(A^S_{ijrs}\right)^{-1} \overline{\mathcal{C}}_{rsmn}\, A^e_{mnkl}\, \dot{E}^e_{kl}$$

$$\dot{S}_{ij} = \left(A^S_{ijrs}\right)^{-1} \overline{\mathcal{C}}_{rsmn} \left(\dot{\overline{E}}_{kl} - \dot{\overline{E}}^p_{kl} \right) \tag{3.115}$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{S}}} = \left(\overline{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\right)^{ep} : \dot{\overline{\boldsymbol{E}}} \tag{3.116}$$

donde $(\bar{\boldsymbol{c}})^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio y está dado por:

$$\overline{\mathcal{C}}^{ep}_{ijkl} = \overline{\mathcal{C}}_{ijkl} - \frac{\left(\overline{\mathcal{C}}_{ijrs}\dfrac{\partial\overline{\mathcal{G}}}{\partial\overline{\sigma}_{rs}}\right)\left(\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{S}_{rs}}\overline{\mathcal{C}}_{rskl}\right)}{\dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\bar{S}_{pq}}\overline{\mathcal{C}}_{pqln}\dfrac{\partial\overline{\mathcal{G}}}{\partial\bar{S}_{ln}} - \sum_n \dfrac{\partial\bar{\Phi}}{\partial\alpha^m_s}\left(h^m_{tu}\right)_{\bar{S}}\dfrac{\partial\overline{\mathcal{G}}}{\partial\bar{S}_{tu}}} \tag{3.117}$$

Teniendo en cuenta la ec.(3.56), que relaciona el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff en los espacios real y ficticio, es posible obtener la variación de tensión anisótropa real como:

$$\dot{S}_{ij} = \left(A^S_{ijkl}\right)^{-1}\overline{\mathcal{C}}^{ep}_{klrs}\,\dot{\overline{E}}_{rs} \tag{3.118}$$

Combinando la ec.(3.118) con la ec.(3.67) y teniendo en cuenta que el tensor de transformación de espacios $\boldsymbol{A}^E$ no depende del tiempo, se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{S}_{ij} = \underbrace{\left(A^S_{ijkl}\right)^{-1}\overline{\mathcal{C}}^{ep}_{klrs}\;A^E_{rspq}}_{\mathcal{C}^{ep}_{ijpq}}\dot{E}_{pq} \tag{3.119}$$

donde $\mathcal{C}^{ep}_{ijpq} = \left(A^S_{ijkl}\right)^{-1}\overline{\mathcal{C}}^{ep}_{klrs}\;A^E_{rspq}$ es el tensor elastoplástico anisótropo, que resulta una función del tensor constitutivo elastoplástico tangente isótropo ficticio.

3.10.2 Configuración espacial

La ecuación constitutiva tangente en la configuración espacial se obtiene considerando la variación temporal de la tensión de Kirchhoff (ec. 3.20), esto es:

$$\dot{\tau}_{ij} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial e^e_{kl}}\dot{e}^e_{kl} \tag{3.120}$$

Teniendo en cuenta que la tensión de Kirchhoff en el espacio anisótropo es función de la tensión en el espacio isótropo ficticio se tiene

$$\dot{\tau}_{ij} = \underbrace{\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial\bar{\tau}_{rs}}}_{\left(a^\tau_{ijrs}\right)^{-1}}\frac{\partial\bar{\tau}_{rs}}{\partial\bar{e}^e_{mn}}\underbrace{\frac{\partial\bar{e}^e_{mn}}{\partial e^e_{kl}}}_{a^e_{mnkl}}\dot{e}^e_{kl}$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \left(a^\tau_{ijrs}\right)^{-1}\bar{c}_{rsmn}a^e_{mnkl}\dot{e}^e_{kl}$$

$$\dot{\tau}_{ij} = \left(a^\tau_{ijrs}\right)^{-1}\bar{c}_{rsmn}\left(\dot{\bar{e}}_{kl} - \dot{\bar{e}}^p_{kl}\right) \tag{3.121}$$

Teniendo en cuenta la condición de consistencia plástica es posible obtener la ecuación constitutiva en el espacio isótropo ficticio, esto es:

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\tau}}} = (\bar{\boldsymbol{c}})^{ep} : \dot{\bar{\boldsymbol{e}}} \tag{3.122}$$

donde $(\bar{\boldsymbol{c}})^{ep}$ representa el tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio y está dado por:

$$\bar{c}^{ep}_{ijkl} = \bar{c}_{ijkl} - \frac{\left(\bar{c}_{ijrs}\frac{\partial \bar{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\tau}_{rs}}\right)\left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\tau}_{rs}}\bar{c}_{rskl}\right)}{\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \bar{\tau}_{pq}}\bar{c}_{pqln}\frac{\partial \bar{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\tau}_{ln}} - \sum_{n}\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \alpha^m_s}\left(h^m_{tu}\right)_{\bar{\tau}}\frac{\partial \bar{\mathrm{g}}}{\partial \bar{\tau}_{tu}}} \tag{3.123}$$

Teniendo en cuenta la ec.(3.73) que relaciona el tensor de tensiones en el espacio anisótropo real y el espacio isótropo ficticio es posible obtener la variación de tensión en el espacio anisótropo real como:

$$\dot{\tau}_{ij} = \left(a^{\tau}_{ijkl}\right)^{-1}\bar{c}^{ep}_{klrs}\,\dot{\bar{e}}_{rs} \tag{3.124}$$

Combinando la ec.(3.124) con la ec.(3.81) y teniendo en cuenta que el tensor de transformación de espacios $\boldsymbol{a}^e$ no cambia en la configuración referencial, se obtiene la expresión del tensor constitutivo elastoplástico anisótropo como:

$$\dot{\tau}_{ij} = \underbrace{\left(a^{\tau}_{ijkl}\right)^{-1}\bar{c}^{ep}_{klrs}a^{e}_{rspq}}_{c^{ep}_{ijpq}}\dot{e}_{pq} \tag{3.125}$$

La ec.(3.125) muestra la expresión del tensor elastoplástico anisótropo, que resulta una función del tensor constitutivo elastoplástico tangente en el espacio isótropo ficticio.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes obtenidos anteriormente no permiten obtener convergencias cuadráticas en la solución de problemas incrementales basados en métodos de Newton, debido a que en su deducción no se ha tenido en cuenta el procedimiento de integración de la ecuación constitutiva y por lo tanto no es consistente con el mismo. En el Apartado 6.8.5 se presenta la deducción de los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes algorítmicos considerando cualquier función de fluencia o potencial plástico.

Los tensores constitutivos elastoplásticos tangentes ficticios dados por las ecs. (3.117) y (3.123) para el caso de plasticidad asociada resultan simétricos, mientras que el tensor elastoplástico tangente anisótropo en las configuraciones referencial o actualizada dado por las ecs. (3.119) y (3.125) en general resultan no simétricos.

3.11 Definición de la algoritmia utilizada para la integración de la ecuación constitutiva

Entre las diversas posibilidades que se presentan para la resolución de este problema, en este apartado se presenta una que resulta coherente con un código de elementos finitos lagrangeano.

El modelo constitutivo presentado necesita solamente, a los fines de modelar el comportamiento constitutivo de un material anisótropo, definir las siguientes características del material en los espacios real y ficticio:

- Espacio anisótropo real:
  - Tensor constitutivo inicial en coordenadas locales $\boldsymbol{c}_{local}$
  - Umbral de fluencia del material τ_{yield}
  - Tensor de rotaciones $\boldsymbol{R}$
- Espacio isótropo ficticio:
  - Función de fluencia $\bar{\phi}\left\{\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\alpha}\right\} = 0$
  - Función de potencial plástico $\bar{\mathrm{g}}\left\{\bar{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{\alpha}\right\} = 0$
  - Umbral de fluencia del material $\bar{\tau}_{yield}$

A continuación se presenta el algoritmo que permite realizar el análisis de materiales anisótropos empleando el modelo propuesto. Aquí se pueden diferenciar dos caminos a seguir teniendo en cuenta si la transformación desde el espacio anisótropo al isótropo ficticio se realiza en la configuración referencial o en la actualizada.

3.11.1 Cambio de espacio en la configuración referencial

El Cuadro 1 resume el algoritmo resultante de la aplicación del modelo constitutivo propuesto en el contexto del método de los elementos finitos, considerando que la transformación entre los espacios anisótropo e isótropo ficticio se realiza en la configuración referencial. En la Figura 3.12 se muestra en forma esquemática las operaciones detalladas en el Cuadro 1

3.11.2 Cambio de espacio en la configuración actualizada

El Cuadro 2 muestra el algoritmo del modelo constitutivo propuesto para su aplicación en el contexto del método de los elementos finitos, considerando que la transformación entre los espacios anisótropo e isótropo ficticio se realiza en la configuración

actualizada. Esta versión del algoritmo presenta el inconveniente de tener que calcular los operadores lineales de cambio de espacio $\boldsymbol{a}^{\tau}$ y $\boldsymbol{a}^{e}$ debido a que los mismos no permanecen constantes en la configuración espacial. Ambos operadores son función del gradiente de las deformaciones, que expresa el movimiento del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones y deformaciones en la configuración referencial. (ver Apartados 3.7.1 y 3.7.2). En la Figura 3.11 se muestra en forma esquemática las operaciones detalladas en el Cuadro 2.

Como se muestra en el Cuadro 2 este algoritmo presenta el inconveniente de tener que calcular para cada punto de integración el operador de transformación. Este operador de transformación es un tensor de cuarto orden irreducible a forma matricial, por lo tanto es necesario realizar para cada punto de integración las operaciones tensoriales completas con el consiguiente aumento en el costo computacional.

Cuadro 1: Algoritmo del modelo anisótropo propuesto

★ LOOP SOBRE CADA ELEMENTO i=1, NELEM.

• LOOP SOBRE CADA PUNTO DE GAUSS j=1, NGAUS

1. Transporte de los tensores de tensiones predictoras y de deformaciones del espacio anisótropo al isótropo ficticio

$$\bar{\boldsymbol{S}}^* = \boldsymbol{A}^s : \boldsymbol{S}^* \qquad \bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{A}^E : \boldsymbol{E}$$

2. Transporte a la configuración actualizada de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^* = \overrightarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{S}}^* \quad \bar{\boldsymbol{e}} = \overrightarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{E}} \quad \bar{\boldsymbol{c}} = \underrightarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$$

3. Integración de la ecuación constitutiva. Obtención de un nuevo estado tensional y del tensor constitutivo elastoplástico tangente

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^* \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad \overline{c}^{ep}_{ijkl} = \overline{c}_{ijkl} - \frac{(\overline{c}_{ijrs}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{rs}))\left(\left(\partial \bar{\phi}/\partial \bar{\tau}_{rs}\right)\overline{c}_{rskl}\right)}{\left(\partial \bar{\phi}/\partial \bar{\tau}_{pq}\right)\bar{c}_{pqln}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{ln}) - \sum\limits_{n}\left(\partial \bar{\phi}/\partial \alpha^m_s\right)(h^m_{tu})_{\bar{\tau}}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{tu})}$$

4. Transporte de los tensores de tensiones, deformaciones y elastoplástico tangente a la configuración referencial ficticia

$$\bar{\boldsymbol{S}} = \overleftarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{\tau}} \quad \bar{\boldsymbol{E}} = \overleftarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{e}} \quad \bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}^{ep} = \underleftarrow{\phi}\,\bar{\boldsymbol{c}}^{ep}$$

5. Transporte de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo elastoplástico tangente al espacio anisótropo real

$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{A}^s)^{-1} : \bar{\boldsymbol{S}} \quad \boldsymbol{E} = \left(\boldsymbol{A}^E\right)^{-1} : \bar{\boldsymbol{E}} \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}^{ep} = (\boldsymbol{A}^s)^{-1}\,\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}^{ep}\,\boldsymbol{A}^E$$

• END LOOP SOBRE CADA PUNTO DE GAUSS

★ END LOOP SOBRE CADA ELEMENTO

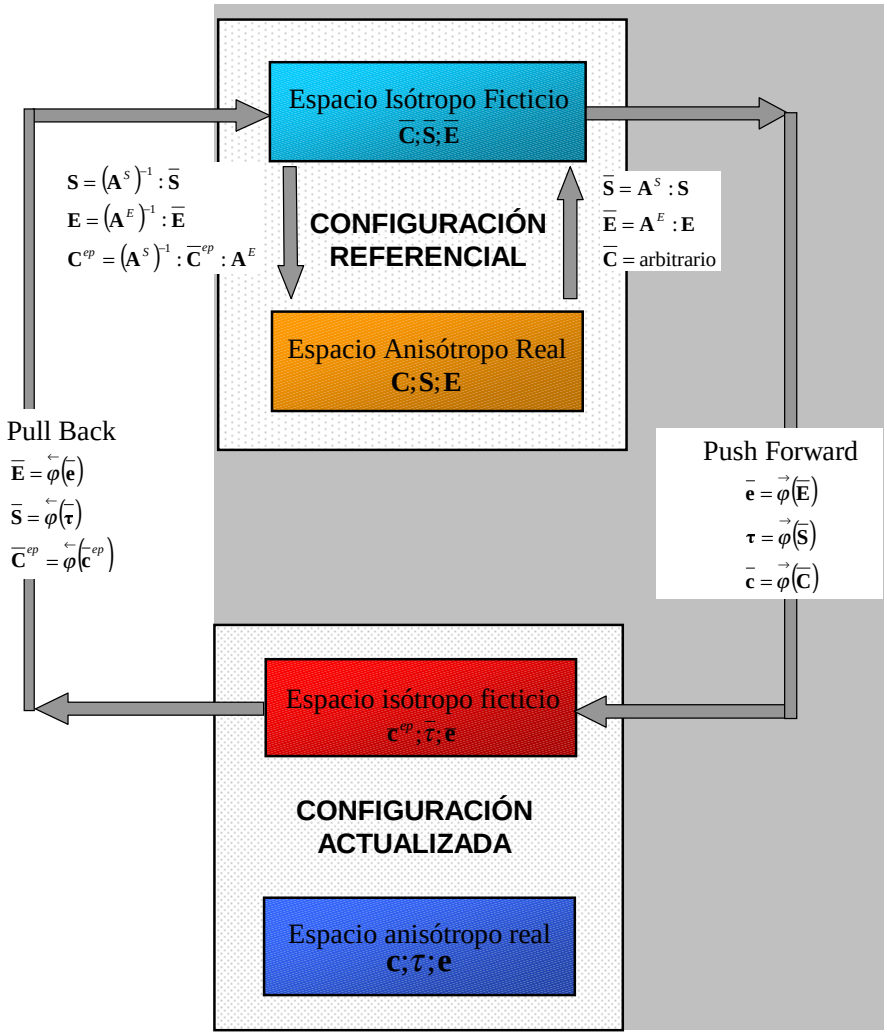

Figura 3.11: Modelo elastoplástico anisótropo considerando el cambio del espacio real al ficticio en la configuración actualizada.

Cuadro 2: Algoritmo del modelo anisótropo propuesto

★ LOOP SOBRE CADA ELEMENTO i=1, NELEM.

• LOOP SOBRE CADA PUNTO DE GAUSS j=1, NGAUS

1. Transporte a la configuración actualizada de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo

$$\boldsymbol{\tau}^* = \overrightarrow{\phi}\,\boldsymbol{S}^* \quad \boldsymbol{e} = \overrightarrow{\phi}\,\boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{c} = \underrightarrow{\phi}\,\boldsymbol{\mathcal{C}}$$

2. Cálculo de los operadores lineales de transformación de espacios en la configuración actualizada

$$a^{\tau}_{ijkl} = F_{iI}\ \left(F^{-1}\right)_{Kk}\ \left(F^{-T}\right)_{lL}\ \left(F^{T}\right)_{Jj}\ A^{S}_{IJKL}$$
$$a^{e}_{ijkl} = \left(F^{-T}\right)_{iI}\ \left(F^{T}\right)_{Kk}\ F_{lL}\ \left(F^{-1}\right)_{Jj}\ A^{E}_{IJKL}$$

3. Transporte de los tensores de tensiones predictoras y de deformaciones del espacio anisótropo al isótropo ficticio

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^* = \boldsymbol{a}^{\tau} : \boldsymbol{\tau}^* \qquad \bar{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{a}^{e} : \boldsymbol{e}$$

4. Integración de la ecuación constitutiva. Obtención de un nuevo estado tensional y del tensor constitutivo elastoplástico tangente

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^* \Rightarrow \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad \bar{c}^{ep}_{ijkl} = \bar{c}_{ijkl} - \frac{(\bar{c}_{ijrs}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{rs}))\left(\left(\partial \bar{\phi}/\partial \bar{\tau}_{rs}\right)\bar{c}_{rskl}\right)}{\left(\partial \bar{\phi}/\partial \bar{\tau}_{pq}\right)\bar{c}_{pqln}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{ln}) - \sum\limits_{n}\left(\partial \bar{\phi}/\partial \alpha^{m}_{s}\right)(h^{m}_{tu})_{\bar{\tau}}(\partial \bar{\mathrm{g}}/\partial \bar{\tau}_{tu})}$$

5. Transporte de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo elastoplástico tangente al espacio anisótropo real

$$\boldsymbol{\tau} = \left(\boldsymbol{a}^{\tau}\right)^{-1} : \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad \boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{a}^{e}\right)^{-1} : \bar{\boldsymbol{e}} \quad \boldsymbol{c}^{ep} = \left(\boldsymbol{a}^{\tau}\right)^{-1} \bar{\boldsymbol{c}}^{ep} \boldsymbol{a}^{e}$$

6. Transporte de los tensores de tensiones, deformaciones y elastoplástico tangente a la configuración referencial real

$$\boldsymbol{S} = \overleftarrow{\phi}\,\boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{E} = \overleftarrow{\phi}\,\boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{\mathcal{C}}^{ep} = \underleftarrow{\phi}\,\boldsymbol{c}^{ep}$$

• END LOOP SOBRE CADA PUNTO DE GAUSS

★ END LOOP SOBRE CADA ELEMENTO

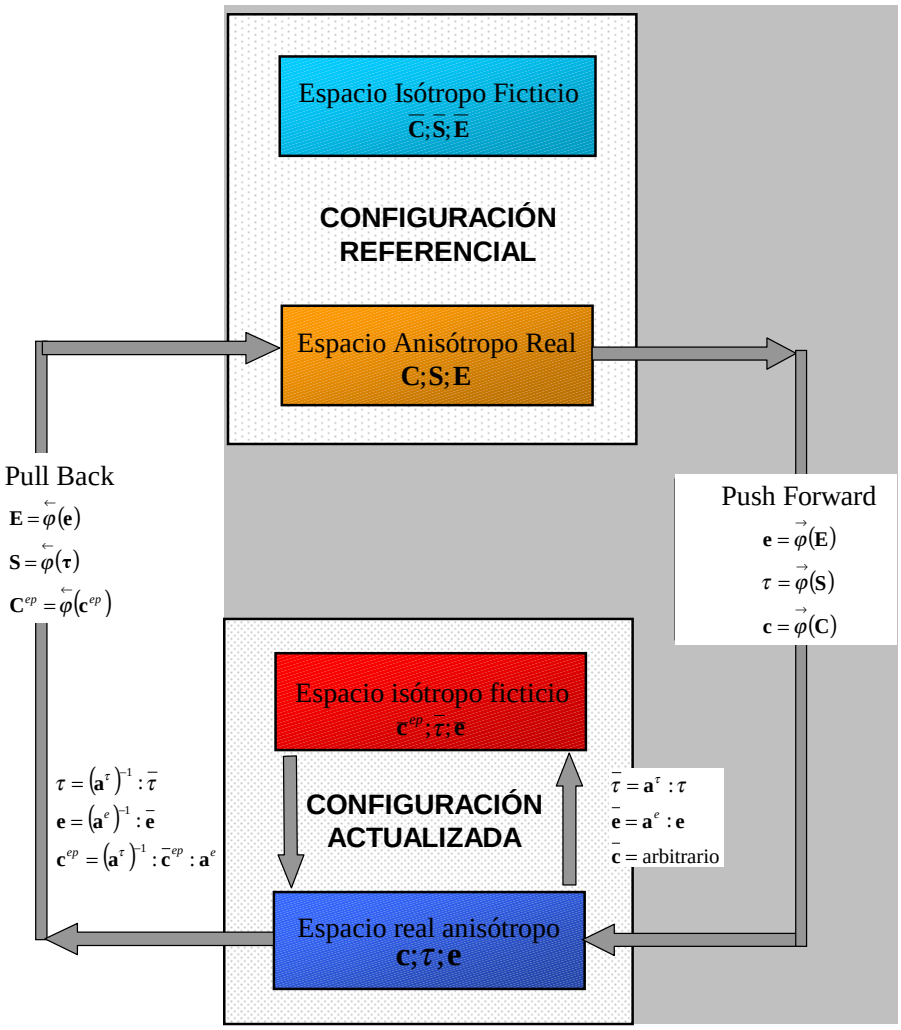

Figura 3.12: Modelo elastoplástico anisótropo considerando el cambio del espacio real al ficticio en la configuración referencial.

Capítulo 4

Teoría de mezclas

"Por la calle del ya voy, se va a la casa del nunca. "
Miguel de Cervantes Saavedra

4.1 Introducción

Los materiales compuestos están formados por diferentes tipos de sustancias inorgánicas u orgánicas. Su estado de equilibrio atómico puede depender de ligaduras interatómicas de distintos tipos dando lugar a materiales amorfos o cristalinos.

Las características mecánicas de los materiales compuestos dependen de sus propiedades intrínsecas (estructura macroscópica, tipo de ligadura, estructura cristalina, etc.). También influyen en el comportamiento de estos materiales sus propiedades extrínsecas: características del proceso de fabricación, tamaño de microporos y distribución de los mismos, microfisuras, estados tensionales iniciales, etc.

Cada una de las sustancias componentes que integran el compuesto condicionan con su propia ley constitutiva el comportamiento del conjunto en función de la proporción del volumen en que participan y de su distribución morfológica en el compuesto.

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos. La *Teoría de Mezclas* se considera adecuada para la simulación del comportamiento de materiales compuestos en régimen lineal y con ciertas modificaciones permite simular, también, el comportamiento una vez superado el límite de proporcionalidad del material.

La teoría de mezclas fue estudiada por Trusdell y Toupin (1960) y a su vez estos estudios dieron las bases de los trabajos de Ortiz y Popov (1982). Los resultados obtenidos por Trusdell constituyen también la base de trabajos como el de Green y Naghdi (1965) y el de Ortiz y Popov (1982) para materiales bifase. La teoría que aquí se presenta es más general y representa el comportamiento constitutivo de

un material compuesto de "n" fases altamente anisótropas en régimen de grandes deformaciones.

A continuación se presenta la teoría de mezclas clásica generalizada para "n" componentes que permite considerar la combinación simultánea del comportamiento de las diversas fases de un compuesto. Cada una de estas sustancias puede tener una ley constitutiva isótropa o anisótropa. La teoría de mezclas clásica es solo adecuada para simular ciertos materiales compuestos que presentan un comportamiento en paralelo, por ej. matrices plásticas con refuerzo de fibras largas. Para otros tipos de materiales compuestos es necesario realizar modificaciones en esta teoría. El Apartado 4.3 presenta una modificación de la teoría de mezclas clásicas realizada por Neamtu *et al.* (1995) que permite tener en cuenta la presencia de refuerzos de corta longitud así como la distribución topológica del refuerzo en el material compuesto. En el Apartado 4.5 se presenta otra modificación que permite mantener las hipótesis básicas de la teoría de mezclas y tener en cuenta la presencia de refuerzos de corta longitud así como también la distribución topológica del refuerzo en la matriz mediante un cambio en las propiedades mecánicas de las distintas fases del material compuesto.

4.2 Teoría de mezclas clásica

La teoría de mezclas de sustancias básicas se basa en la mecánica del sólido continuo local y se considera adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto. Se basa en el principio de interacción de sustancias componentes que constituyen el material, asumiendo las siguientes hipótesis: (i) en cada volumen infinitesimal de un compuesto participan un conjunto de sustancias componentes; (ii) cada componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica; (iii) todos los componentes poseen la misma deformación (ecuación de cierre o compatibilidad); (iv) el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La segunda de las hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en una cierta región del compuesto. La interacción entre las diferentes sustancias componentes, cada una con su respectiva ley constitutiva, determina el comportamiento del material compuesto y depende básicamente del porcentaje en volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto. Esto permite combinar materiales con comportamientos diferenciados (elástico, elasto-plástico, etc.), donde cada uno de ellos presenta un comportamiento evolutivo gobernado por su propia ley.(Green y Naghdi, 1965) (Trusdell y Toupin, 1960) (Ortiz y Popov, 1982b) (Oller *et al.*, 1996).

La tercera hipótesis establece que en ausencia de difusión atómica[1] se cumple la siguiente condición de compatibilidad bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones para cada una de las fases del material compuesto:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_1 = (\varepsilon_{ij})_2 = ... = (\varepsilon_{ij})_n \tag{4.1}$$

donde ε_{ij} y $(\varepsilon_{ij})_n$ representan las deformaciones del conjunto y de la componente i-ésima del material respectivamente.

4.2.1 Expresión de la energía libre

La energía libre de un material compuesto está dada por la sumatoria de las energías libres de cada una de las fases del material ponderadas en función de su participación volumétrica, esto es:

$$m\Psi\left(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta, \alpha^m\right) = \sum_{c=1}^{n} k_c m_c \Psi_c \left[\boldsymbol{\varepsilon}, \left(\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)_c, \theta, \alpha_c^m\right] \tag{4.2}$$

donde Ψ_c es la energía libre correspondiente a cada una de las "n" sustancias componentes de la mezcla, k_c es el coeficiente de participación volumétrica, $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^p\right)_c$ es la deformación plástica de cada fase y α_c^m son las variables internas del componente c-ésimo que definen el comportamiento físico de cada sustancia componente.

El factor de ponderación o coeficiente de participación volumétrica k_c permite considerar la contribución de cada fase y se obtiene considerando la participación en volumen de cada una de las componentes respecto del volumen total

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \tag{4.3}$$

donde V_c representa el volumen del componente c-ésimo del material y V_0 es el volumen total del material compuesto. Los coeficientes de participación volumétrica de los distintos componentes de un material compuesto deben satisfacer la siguiente condición:

$$\sum_{c=1}^{n} k_c = 1 \tag{4.4}$$

la cual permite recuperar la energía libre para el caso de materiales monofase y garantiza la conservación de la masa. Siguiendo un procedimiento similar al utilizado para materiales simples (Lubliner, 1985) (Oller, 1988) (Lubliner *et al.*, 1989) (Oñate

[1] Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas cercanas al punto de fusión. En los análisis se considera una temperatura inferior a la correspondiente al punto de fusión.

et al., 1991) (Oller *et al.*, 1996), a partir de la desigualdad de Clasius-Duhem y aplicando el método de Coleman se obtiene la entropía que está dada por:

$$\eta = -m\frac{\partial \Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial \theta} = -\sum_{c=1}^{n}\left(k_c m_c \frac{\partial \Psi_c\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\right)}{\partial \theta}\right) = -\sum_{c=1}^{n} k_c m_c \eta_c \quad (4.5)$$

donde η_c es la entropía de cada una de las fases. La ecuación constitutiva surge también aplicando el método de Coleman a la desigualdad de Clasius-Duhem

$$\sigma_{ij} = m\frac{\partial \Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^{n} k_c m_c \frac{\partial \Psi_c\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\right)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(\sigma_{ij}\right)_c \quad (4.6)$$

La ecuación constitutiva secante para el material compuesto (ec. (4.6)) se escribe como:

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(\sigma_{ij}\right)_c = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(C^S_{ijkl}\right)_c \left(\varepsilon^e_{ij}\right)_c = C^S_{ijkl}\varepsilon^e_{ij} \quad (4.7)$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad expresada por la ec. (4.1), la deformación para cada componente está dada por:

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_c = \varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon^e_{ij}\right)_c + \left(\varepsilon^p_{ij}\right)_c + \left(\varepsilon^\theta_{ij}\right)_c \Rightarrow \left(\varepsilon^e_{ij}\right)_c = \varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon^p_{ij}\right)_c - \left(\varepsilon^\theta_{ij}\right)_c \quad (4.8)$$

donde $\left(\varepsilon^e_{ij}\right)_c$, $\left(\varepsilon^p_{ij}\right)_c$ y $\left(\varepsilon^t_{ij}\right)_c$ representan las cuotas de deformación elástica, plástica y de origen térmico. La deformación plástica del material compuesto se obtiene desarrollando ambos miembros de la igualdad expresada en la ec. (4.7) considerando la ec. (4.8) y teniendo en cuenta que para el material compuesto las deformaciones elásticas resultan $\varepsilon^e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij} - \varepsilon^t_{ij}$, esto es[2]:

$$\left(C^S_{ijkl}\right)\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon^p_{ij} - \varepsilon^t_{ij}\right) = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(C^S_{ijkl}\right)_c \left(\varepsilon_{ij} - \left(\varepsilon^p_{ij}\right)_c - \left(\varepsilon^t_{ij}\right)_c\right) \Rightarrow \quad (4.9)$$

$$\varepsilon^p_{ij} = \left(C^S_{ijkl}\right)^{-1}\left[\sum_{c=1}^{n} k_c \left(C^S_{ijkl}\right)_c \left(\left(\varepsilon^p_{ij}\right)_c - \left(\varepsilon^t_{ij}\right)_c\right)\right] - \left(\varepsilon^t_{ij}\right) \quad (4.10)$$

El tensor constitutivo tangente surge de considerar la variación de la tensión respecto de las deformaciones y está dado por:

[2]Para deducir está expresión es necesario tener en cuenta la condición de compatibilidad de deformaciones dada por la ec. (4.1) y de que $\left(C^S_{ijkl}\right)\left(\varepsilon_{ij}\right) = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(C^S_{ijkl}\right)_c \left(\varepsilon_{ij}\right)$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = m \frac{\partial^2 \Psi \left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i \right)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(C_{ijkl} \right)_c \tag{4.11}$$

El tensor conjugado del coeficiente de dilatación térmica resulta de considerar la variación de la energía libre de Helmholtz respecto de las deformaciones y de la temperatura

$$\beta_{ij} = -m \frac{\partial \Psi^2 \left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i \right)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \theta} = -\sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(\beta_{ij} \right)_c \tag{4.12}$$

La teoría de mezclas clásica, en la cual se parte de la hipótesis de que el campo de deformaciones es el mismo para cada uno de los componentes del compuesto, es rigurosamente válida sólo si se aplica a materiales con comportamiento en paralelo. Estos materiales se caracterizan por que su estado tensional resulta ser la sumatoria de las tensiones de cada componente, ponderadas de forma proporcional al volumen que ocupa cada fase respecto del total, ej.: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc. En el caso de matrices con refuerzo de longitud corta no resulta válida la hipótesis de igualdad entre las deformaciones de todos los componentes. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas: definir otra ecuación de cierre que permita simular adecuadamente los fenómenos que se producen en el material, o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la hipótesis de iguales deformaciones en cada uno de los componentes del compuesto.

4.3 Modificación de la teoría clásica. Modelo serie/paralelo

Neamtu *et al.* (1995) describen una generalización de la teoría de mezclas clásica en pequeñas deformaciones para representar compuestos cuyos componentes participan según una combinación de comportamientos serie/paralelo lo que implica un ajuste automático de las propiedades del compuesto teniendo en cuenta cada componente y su distribución topológica.

La Figura 4.1 muestra un esquema del significado del comportamiento en serie y en paralelo de un material compuesto.

La hipótesis fundamental del modelo constitutivo se basa en la definición del campo de deformaciones del conjunto como una suma ponderada de las contribuciones en serie y en paralelo, esto es:

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \aleph)\, \varepsilon_{ij}^{par} + \aleph \varepsilon_{ij}^{ser} \tag{4.13}$$

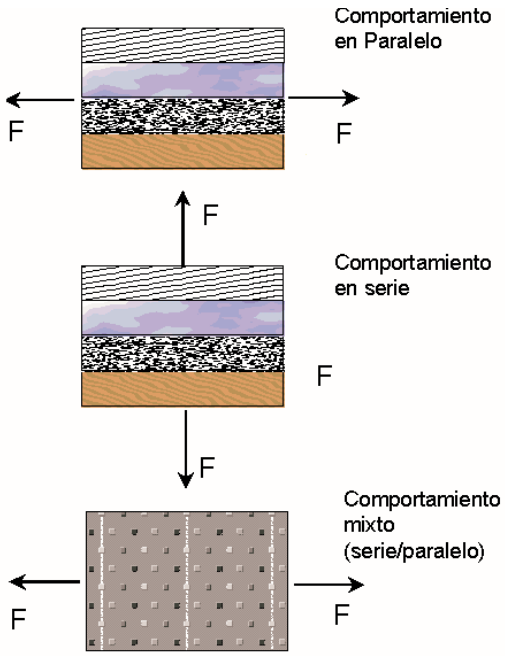

Figura 4.1: Comportamiento esquemático serie-paralelo de un compuesto.

donde ε_{ij}^{par} y ε_{ij}^{ser} representan las deformaciones en paralelo y en serie respectivamente y $\aleph$ es el parámetro de acoplamiento serie-paralelo que relaciona de manera ponderada los dos tipos de deformaciones. Las componentes en paralelo y en serie de la deformación están dadas por:

$$\varepsilon_{ij}^{par} = \frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}\right)_c \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_{ij}^{ser} = \sum_{c=1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}\right)_c \tag{4.14}$$

Teniendo en cuenta las ecs. (4.13) y (4.14) la deformación se escribe como

$$\varepsilon_{ij} = (1-\aleph)\left[\frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}\right)_c\right] + \aleph\left[\sum_{c=1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}\right)_c\right] = \left[\frac{1}{n}(1-\aleph)+\aleph\right]\sum_{c=1}^{n}\left(\varepsilon_{ij}\right)_c \tag{4.15}$$

donde $\left(\varepsilon_{ij}\right)_c$ es la deformación de cada componente del compuesto, n es el número de componentes, ε_{ij} es la deformación total de un punto del compuesto. La ec. (4.15) se puede interpretar como una relajación de los comportamientos básicos serie-paralelo y con influencias recíprocas debido a la utilización de $\aleph$. El parámetro $\aleph$ se obtiene de ensayos experimentales y permite el acoplamiento de los comportamientos básicos bajo la hipótesis de un modelo energético cerrado. Bajo esta hipótesis el

acoplamiento supone una redistribución interna ponderada de la energía libre del sistema.

4.3.1 Energía libre del compuesto

De acuerdo con el principio de acoplamiento, la energía libre de este modelo está dada por (Oller *et al.*, 1995b):

$$\begin{aligned}\Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right) &= (1-\aleph)\underbrace{\left[\sum_{c=1}^{n} k_c\Psi_c\left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c;\theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\ \right)\right]}_{\Psi^P} \\ &\quad +\aleph\underbrace{\left[\frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n} k_c\Psi_c\left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c;\theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\ \right)\right]}_{\Psi^S}\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde α_i es un conjunto de variables internas, θ es la temperatura y k_c es el coeficiente de participación volumétrica del componente.

La entropía del sistema surge de considerar la forma local espacial de la desigualdad de Clasius-Duhem y está dada por (Oller *et al.*, 1995b):

$$\eta = -\frac{\partial\Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial\theta} = (1-\aleph)\sum_{c=1}^{n}\left(k_c\eta_c\right) + \aleph\frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n}\left(k_c\eta_c\right) \tag{4.17}$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clasius-Duhem y el método de Coleman (Malvern, 1969):

$$\sigma_{ij} = m\frac{\partial\Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial\varepsilon_{ij}} = m\left[\frac{1}{n}\left(1-\aleph\right)+\aleph\right]^{-1}\frac{\partial\Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial\left(\varepsilon_{ij}\right)_c} \tag{4.18}$$

$$= \left[\frac{(1-\aleph)+\frac{1}{n}\aleph}{\frac{1}{n}\left(1-\aleph\right)+\aleph}\right]\sum_{c=1}^{n}\frac{m}{m_c}k_c\left(\sigma_{ij}\right)_c \tag{4.19}$$

El tensor constitutivo tangente resulta de considerar la variación de la tensión respecto del espacio de deformaciones y está dado por:

$$C_{ijkl} = \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\partial\Psi^2}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}} = \frac{\left[(1-\aleph)+\frac{1}{n}\aleph\right]}{\left[\frac{1}{n}\left(1-\aleph\right)+\aleph\right]^2}\sum_{c=1}^{n}\frac{m}{m_c}k_c\left(C_{ijkl}\right)_c \tag{4.20}$$

Posteriormente (Oñate *et al.*, 1997b) extendieron la formulación presentada anteriormente modificando la definición del campo de deformaciones del conjunto

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\,\boldsymbol{\varepsilon}^{par} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{\varepsilon}^{ser} \tag{4.21}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad y $\boldsymbol{N}$ es la matriz diagonal de acoplamiento serie-paralelo cuyos elementos deben obtenerse de ensayos experimentales y cumplen la condición de que $0 \leq N_i \leq 1$. De acuerdo con la nueva hipótesis expresada en la ec. (4.21) la energía libre del sistema está dada por:

$$\Psi\left(\varepsilon_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right) = (1 - N)\,\Psi^P + N\Psi^S \tag{4.22}$$

donde Ψ^P y Ψ^S representan las contribuciones de la energía libre al comportamiento en serie y en paralelo y están dadas por

$$\Psi^P = \sum_{c=1}^{n} k_c \Psi_c \left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c ; \theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\right) \qquad \Psi^S = \frac{1}{n}\sum_{c=1}^{n} k_c \Psi_c \left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c ; \theta;\ \left(\alpha_i\right)_c\ \right) \tag{4.23}$$

El parámetro escalar de acoplamiento N de la ec. (4.22) puede relacionarse con la matriz de acoplamiento $\boldsymbol{N}$ con la siguiente expresión:

$$N = \sqrt{\left(\frac{1}{n_d}\sum_{i=1}^{n_d} N_i^2\right)} \tag{4.24}$$

siendo N_i los coeficientes de la diagonal de la matriz $\boldsymbol{N}$.

Bajo estas nuevas hipótesis la ecuación constitutiva y el tensor constitutivo tangente resultan:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[(1 - N) + \frac{N}{n}\right] \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(\boldsymbol{\sigma}\right)_c \left[\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\right) + \boldsymbol{N}\right]^{-1} \tag{4.25}$$

$$\boldsymbol{C} = \left[(1 - N) + \frac{N}{n}\right] \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(\boldsymbol{C}\right)_c \left[\frac{1}{n}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}\right) + \boldsymbol{N}\right]^{-2} \tag{4.26}$$

El modelo presentado tiene la ventaja de ser una formulación general y permite analizar un material equivalente utilizando ℵ o $\boldsymbol{N}$ sin necesidad de distinguir el tipo de comportamiento de cada uno de los constituyentes del material compuesto. Este modelo tiene el inconveniente de necesitar una calibración de los valores de ℵ o $\boldsymbol{N}$ teniendo en cuenta ensayos experimentales (Oñate *et al.*, 1997a)

4.4 Extensión de la teoría clásica a grandes deformaciones

En este apartado se presenta la extensión al campo de las deformaciones finitas de la teoría de mezclas clásica. Esta extensión es necesaria debido a que permite tener en cuenta los fenómenos de alineación de la fase de refuerzo con respecto a la dirección del esfuerzo al que está sometido el material. En el Apartado 7.3 se presenta un ejemplo que ilustra el fenómeno mencionado y muestra como esta extensión de la teoría de mezclas permite simular este fenómeno.

4.4.1 Ecuación de cierre

La tercera hipótesis en la que se basa la teoría de mezclas supone que en ausencia de difusión atómica la deformación es idéntica para todos los componentes del compuesto. Está hipótesis se debe verificar tanto en la configuración referencial como en la configuración espacial para cada fase. En la configuración referencial la condición de compatibilidad de deformaciones está dada por (Trusdell y Toupin, 1960) (Oñate *et al.*, 1991):

$$E_{IJ} \equiv (E_{IJ})_1 = (E_{IJ})_2 = ... = (E_{IJ})_n \tag{4.27}$$

donde $E_{IJ} = \frac{1}{2}(C_{IJ} - G_{IJ})$ es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange donde $\boldsymbol{G}$ es el tensor métrico material que para un sistema de coordenadas ortogonales se escribe como $G_{IJ} = I_{IJ} = \delta_{IJ} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } I \neq J \\ 1 \text{ si } I = J \end{array} \right\}$ y $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ es el tensor de deformaciones derecho de Cauchy-Green.

En la configuración actualizada la condición de compatibilidad de deformaciones se propone como:

$$e_{ij} \equiv (e_{ij})_1 = (e_{ij})_2 = ... = (e_{ij})_n \tag{4.28}$$

donde $e_{ij} = \frac{1}{2}\left(g^{ij} - (b_{ij})^{-1}\right)$ es el tensor de deformaciones de Almansi, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T$ es el tensor *de deformaciones izquierdo de Cauchy-Green* y g_{ij} es el tensor métrico espacial dado por:

$$g_{ij} = I_{ij} = \delta_{ij} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } j = j \end{array} \right\} \tag{4.29}$$

y F es el gradiente de deformaciones $F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$[3] (Santalo, 1981)

[3] La relación entre el tensor de tensiones de Almansi y el de Green-Lagrange se muestra en el Apéndice A

Teniendo en cuenta la definición del tensor derecho de Cauchy-Green y la ec.(4.27) se obtiene la ecuación de cierre en función de los gradientes de deformaciones:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2 = ... = \boldsymbol{F}_n \tag{4.30}$$

Esta hipótesis vale rigurosamente sólo si se aplica la teoría de mezclas para materiales con comportamiento en paralelo, es decir, que el estado tensional del compuesto resulta de la suma de las tensiones de cada componente proporcional al volumen que ocupan respecto del total, ej.: matriz con fibras largas, hormigón armado, etc. En el caso de matriz con refuerzo de fibras cortas la hipótesis de que las deformaciones de todos los componentes es igual no es válida. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas: definir otra ecuación de cierre que permita simular adecuadamente los fenómenos que se producen en el material (ver Apartado 4.3) o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica (ec.4.28).

4.4.2 Función de energía libre

Los materiales compuestos que cumplen con la ec.(4.28) y ec.(4.27), satisfacen también la condición básica de la aditividad de la energía libre de sus componentes tanto en la configuración referencial como en la actualizada (Trusdell y Toupin, 1960):

$$m^0\Psi\left(\boldsymbol{E}^e, \theta, \alpha^m\right) = \sum_{c=1}^{n} k_c m_c^0 \Psi_c \left[\boldsymbol{E}, \left(\boldsymbol{E}^p\right)_c, \theta, \alpha_c^m\right] \tag{4.31}$$

$$m\psi\left(\boldsymbol{e}^e, \theta, \alpha^m\right) = \sum_{c=1}^{n} k_c m_c \psi_c \left[\boldsymbol{e}, \left(\boldsymbol{e}^p\right)_c, \theta, \alpha_c^m\right] \tag{4.32}$$

donde Ψ_c y ψ_c son las energías libres correspondientes a cada una de las "n" sustancias componentes de la mezcla definidas en la configuración referencial y la actualizada respectivamente, k_c es el coeficiente de participación volumétrica, $\left(\boldsymbol{E}^p\right)_c$ y $\left(\boldsymbol{e}^p\right)_c$ son las deformaciones plásticas de cada fase en las configuraciones referencial y actualizada respectivamente y α_c^m son las variables internas del componente c^{esimo} que definen el comportamiento físico de cada sustancia componente.

La teoría de mezcla de sustancias básicas aquí utilizada se basa en que todas las sustancias intervienen en la respuesta del compuesto en forma proporcional al volumen que ocupan respecto del volumen total. El coeficiente de participación volumétrica se define en la configuración referencial como:

$$k_c = \frac{dV_c}{dV_0} \tag{4.33}$$

donde V_c es el volumen del componente y V_0 es el volumen total del compuesto en la configuración referencial.

La ecuación de continuidad establece que:

$$\frac{dv_0}{dV_0} = \det \boldsymbol{F} = J \tag{4.34}$$

donde v_0 es el volumen del compuesto en la configuración actualizada. Teniendo en cuenta la ecuación de cierre (ec. 4.30) se deduce:

$$\frac{dv_c}{dV_c} = \det \boldsymbol{F}_c = J \Rightarrow dV_c = \frac{1}{J} dv_c \tag{4.35}$$

La ec.(4.35) establece que la relación entre el volumen de un componente en la configuración espacial y el volumen del componente en la configuración referencial está dado por el determinante del gradiente de deformaciones. Teniendo en cuenta las ecs.(4.35), (4.33) y se tiene:

$$k_c = \frac{1}{J}\frac{dv_c}{dV_0} = \frac{dv_c}{dv_0} \tag{4.36}$$

La ec.(4.36) muestra que el coeficiente de participación se mantiene constante en ambas configuraciones. El coeficiente de participación volumétrico de cada componente debe cumplir con la siguiente condición que garantiza la conservación de la masa:

$$\sum_{c=1}^{n} k_c = 1 \tag{4.37}$$

4.4.3 Ecuación constitutiva

Una vez definida la función de energía libre a los fines de simular el material compuesto es necesario definir la ecuación constitutiva del mismo. A continuación se presenta la ecuación constitutiva tanto para la configuración referencial como para la actualizada.

Configuración referencial

La definición de la tensión para el compuesto $\boldsymbol{S}$ se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando la condición de disipación del segundo Principio de la Termodinámica (Malvern, 1969), esto es:

$$\boldsymbol{S} = m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{E}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m^0}{m_c^0} k_c \frac{\partial \Psi_c}{\partial \boldsymbol{E}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m^0}{m_c^0} k_c \left(\boldsymbol{S}\right)_c \tag{4.38}$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en los Apartados 4.2 y 4.5 el tensor tangente constitutivo del compuesto está dado por:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}^T = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \boldsymbol{E} \otimes \partial \boldsymbol{E}} = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(\boldsymbol{\mathcal{C}}^T\right)_c \tag{4.39}$$

donde $\left(\boldsymbol{\mathcal{C}}^T\right)_c$ representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente $c^{ésimo}$.

Configuración actualizada

En forma análoga a la configuración referencial, la definición de la tensión para el compuesto $\boldsymbol{\tau}$ se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando la condición de disipación del Segundo Principio de la Termodinámica (Malvern, 1969). Esto es:

$$\boldsymbol{\tau} = m\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{e}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \frac{\partial \psi_c}{\partial \boldsymbol{e}} = \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_c} k_c \left(\boldsymbol{\tau}\right)_c \tag{4.40}$$

Siguiendo un procedimiento similar al utilizado en los Apartados 4.2 y 4.5 el tensor tangente constitutivo del compuesto en la configuración actualizada, está dado por:

$$\boldsymbol{c}^T = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{e} \otimes \partial \boldsymbol{e}} = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(\boldsymbol{c}^T\right)_c \tag{4.41}$$

donde $\left(\boldsymbol{c}^T\right)_c$ representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente $c^{ésimo}$.

En la Figura 4.2 se observa un diagrama de flujo esquemático a seguir en la solución de problemas no-lineales en deformaciones finitas de un material compuesto multifase por el MEF. En la misma se observa que cada fase tiene su propio modelo constitutivo y resulta independiente de las otras fases que conforman el compuesto.

El algoritmo comienza en la configuración referencial y luego a través de las operaciones de transporte push-forward (ver Apéndice A) se plantea la ecuación constitutiva para cada uno de las fases del material compuesto. Cada una de estas fases puede presentar distintos modelos constitutivos (plasticidad, daño, etc.) que a su vez pueden ser isótropos o anisótropos. Una vez determinado el estado tensional de cada uno de los componentes es necesario determinar la tensión del material compuesto, teniendo en cuenta la ec. (4.7), que permite determinar las fuerzas internas que se desarrollan en el material. Una vez determinadas las fuerzas internas es necesario verificar el equilibrio de estas con las fuerzas externas aplicadas.

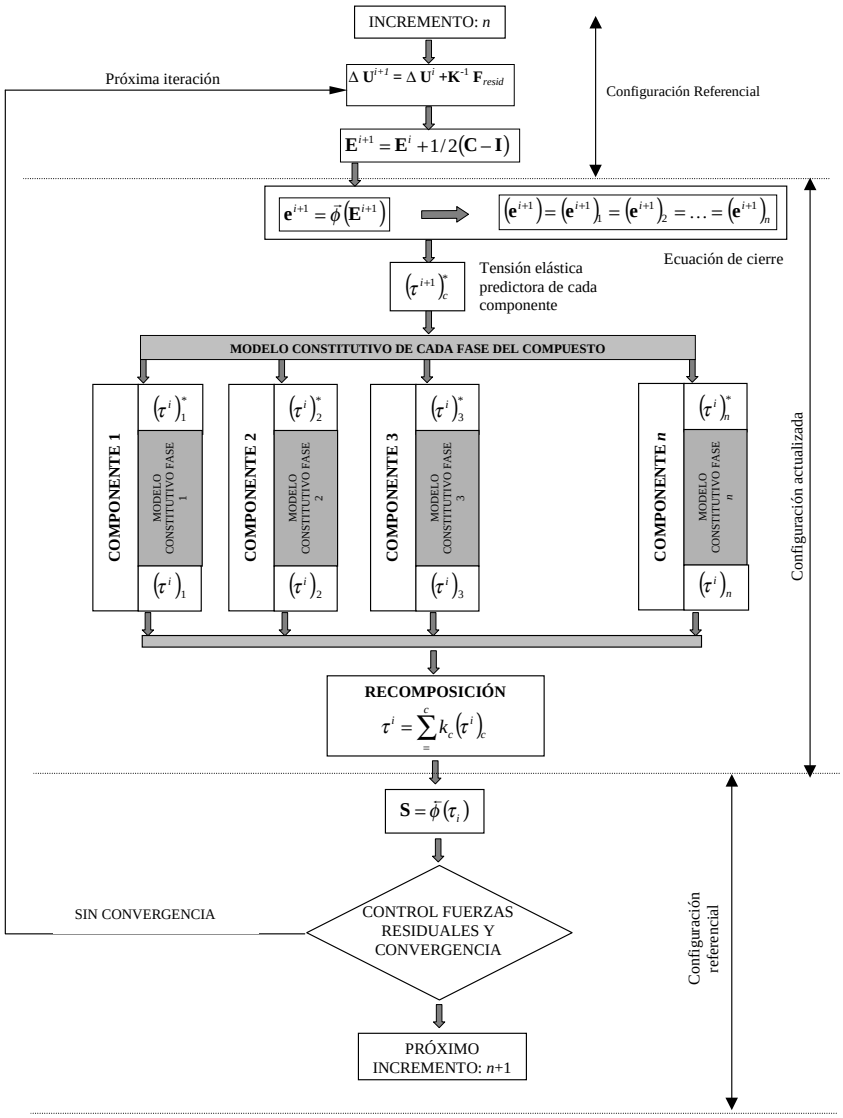

Figura 4.2: Esquema de solución de un problema no lineal multifase desarrollado en la configuración referencial y actualizada.

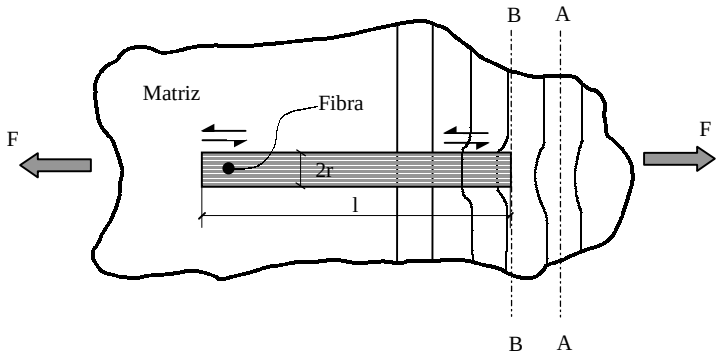

Figura 4.3: Deformación alrededor de una fibra discontínua embebida en una matriz sometida a tracción.

4.5 Modificación de la teoría de mezclas clásica. Refuerzo de longitud corta

En los apartados anteriores con el objetivo de determinar las propiedades elásticas de los materiales compuestos se parte de la hipótesis de que las fibras son suficientemente largas y por lo tanto los efectos asociados a los extremos de las mismas son despreciables. Sin embargo, a medida que la relación de aspecto[4] de la fibra disminuye, el efecto de los extremos de las mismas se hace progresivamente significativo debido a que los campos de tensiones y deformaciones en la fibra y la matriz circundante se modifican a causa de la discontinuidad. La "eficacia" de las fibras en la rigidez del material compuesto disminuye en la medida en que lo hace la longitud de la misma.

La Figura 4.3 muestra la deformación de la matriz circundante a una fibra discontinua embebida en la misma y sometida a una carga de tracción paralela a la fibra.

En un material compuesto con refuerzo de fibras largas bajo un estado de tracción el estado de deformaciones de la matriz y de las fibras es igual y por lo tanto la tensión a lo largo del refuerzo no varia salvo en la zona de las puntas, donde se verifica que la deformación de la misma es menor respecto a la de la matriz. En el caso de refuerzos de longitud corta embebidos en una matriz este fenómeno juega un papel fundamental en la determinación de las propiedades mecánicas del compuesto. Este problema ha sido tratado por Cox (1952) utilizando el llamado *análisis de retardo*

[4]Se define como relación de aspecto al cociente $l/2r$ donde l y r son la longitud y el radio de la fibra

en cortadura y bajo la hipótesis de que se mantienen elástica tanto la fibra como la matriz.

Este fenómeno puede explicarse teniendo en cuenta la Figura 4.3. En la misma, en la sección AA la deformación del conjunto se debe solo a la deformación de la matriz. En la sección BB, justo en el extremo de la fibra, evidencias experimentales muestran que la transferencia de esfuerzos de la matriz hacia la fibra es gradual, con esfuerzo nulo en la punta y con un aumento gradual de la tensión a lo largo de la fibra hasta el punto en el cual las deformaciones de matriz y fibra son iguales. De acuerdo con esto, la zona central de una fibra presenta el máximo valor de tensión axial. Se define como *longitud de transferencia* l_c a la longitud de refuerzo necesaria para transferir los esfuerzos desde la matriz hacia la fibra. En la Figura 4.4 se muestra la distribución de esfuerzos en una fibra de refuerzo. El esfuerzo cortante es máximo en las puntas de las fibras y resulta casi nulo en la zona central. En la misma Figura se observa que existen regiones en las puntas de las fibras que no soportan la carga completa de manera tal que el esfuerzo medio en una fibra de longitud l es menor que en una fibra continua sometida a las mismas cargas externas. La eficacia del refuerzo disminuye en la medida en que lo hace la longitud de la fibra debido a la mayor proporción de longitud total de fibra que no está completamente cargada. Por lo tanto, en los materiales compuestos reforzados con fibras cortas es necesario que la longitud l de la fibra sea superior a l_c con el objetivo de que las mismas sean aprovechadas a su máxima capacidad.

En todos los casos de materiales compuestos existe una longitud de transferencia mínima, que garantiza la perfecta compatibilidad entre matriz y refuerzo. Esta medida se denomina longitud crítica l_c. Cualquier refuerzo cuya dimensión fundamental sea inferior a esta magnitud, no participa plenamente en los mecanismos de transferencia de esfuerzo (Jayatilaka, 1979).

Debido a los fenómenos que se producen los materiales compuestos reforzados con fibras cortas no cumplen exactamente con la condición de compatibilidad expresada en la ec. (4.28), debido a las diferentes deformaciones que se presentan en la matriz y en las fibras. Por ello, a los fines de simular el comportamiento de estos materiales, es necesario el planteo de otra ecuación de cierre de deformaciones (Oller *et al.*, 1995b), o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la hipótesis de iguales deformaciones en cada uno de los componentes de la teoría de mezclas clásica (Jayatilaka, 1979).

4.5.1 Distribución de tensión axial en la fibra

En los apartados anteriores se ha mencionado que la transferencia de esfuerzos se verifica desde la matriz hacia las fibras en la zona de interfase en la que se generan tensiones tangenciales. A los fines de determinar una expresión analítica de la dis-

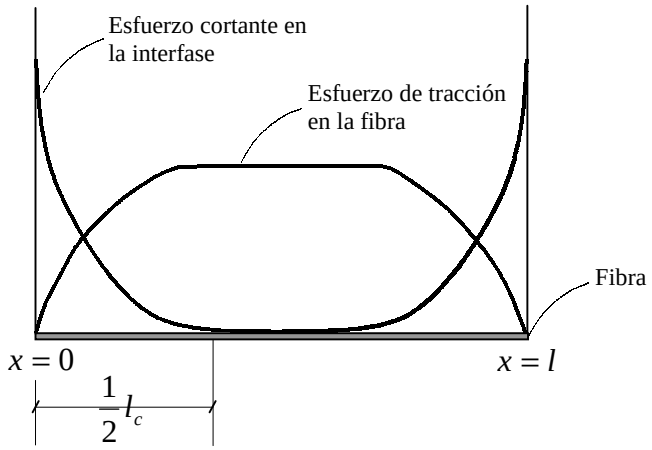

Figura 4.4: Distribución de esfuerzos axiales en la fibra y cortantes en la interfase fibra-matriz.

tribución de tensiones en una fibra es necesario considerar el equilibrio en la zona de transferencia de los esfuerzos (ver Figura 4.5).

El equilibrio de la fibra en la dirección longitudinal x está dado por:

$$\sigma_f \pi r^2 + 2\tau\pi r dx = (\sigma_f + d\sigma_f)\,\pi r^2 \Rightarrow \frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{2\tau}{r} \tag{4.42}$$

o, en términos de la carga de la fibra:

$$\frac{dP_f}{dx} = 2\tau\pi r \tag{4.43}$$

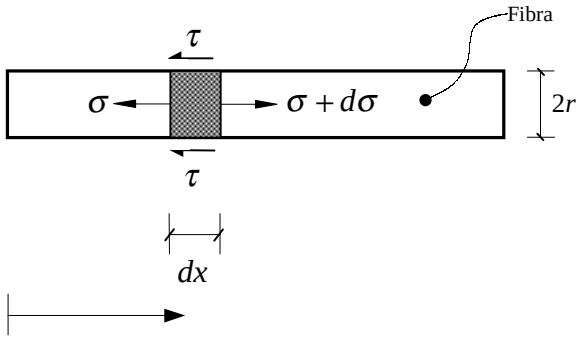

Figura 4.5: Esfuerzos en los extremos de fibras.

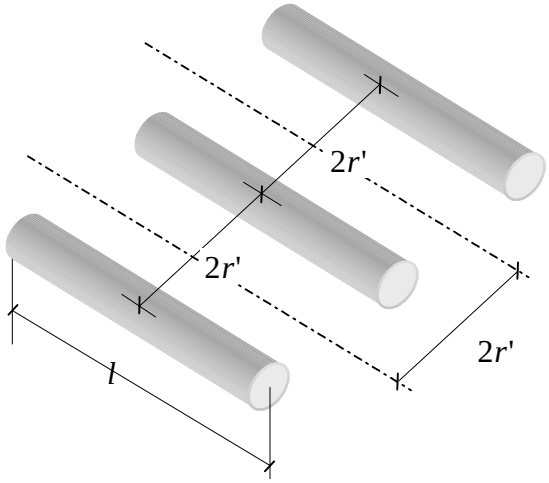

Figura 4.6: Relación de aspecto que se considera en el refuerzo.

donde σ_f es la tensión en la fibra en x, $d\sigma_f$ es el incremento de la tensión en la fibra en $x + dx$ y τ es la tensión cortante en la interfase fibra-matriz. La tensión cortante τ se produce debido a las distintas deformaciones entre fibra y matriz y por lo tanto depende de la diferencia entre los distintos campos de desplazamientos de fibra y matriz. La ecuación diferencial de equilibrio en el eje longitudinal de la fibra resulta (Jayatilaka, 1979).

$$\frac{d^2 P_f}{dx^2} = H\left[\frac{P_f}{C_f A_f} - E\right] \tag{4.44}$$

donde P_f es la fuerza máxima de interacción entre el refuerzo y la matriz, H una constante que depende de la distribución topológica de las fibras, C_f el módulo de Young del refuerzo, A_f la sección transversal media del refuerzo y E es la deformación en la matriz. La solución de la ecuación diferencial 4.44 expresa la fuerza P_f como:

$$P_f = C_1 \sinh(\beta x) + C_2 \cosh(\beta x) + C_f A_f E \tag{4.45}$$

donde C_1 y C_2 son constantes, β es un coeficiente dado por $\sqrt{\frac{H}{C_f A_f}} = \sqrt{\frac{G_m}{C_f} \frac{2\pi}{A_f \ln\left(\frac{r'}{r}\right)}}$ (Jayatilaka, 1979) , G_m es el módulo elástico transversal del compuesto y r' la distancia media entre las partículas de refuerzo (ver Figura 4.6). Las dos constantes se obtienen de las condiciones de borde $P_f = 0$ para $x = 0$ y $x = l$.

Una vez obtenidas las constantes de integración, la tensión se escribe como:

$$\sigma_f = C_f E \left[1 - \frac{\cosh \beta \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cosh \left(\frac{\beta l}{2} \right)} \right] \qquad \forall 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \tag{4.46}$$

La ec. (4.46) establece la distribución de tensiones axiales a lo largo de la fibra. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 4.4. En la zona central del refuerzo no existe un valor de tensión constante, pero si el refuerzo es lo suficientemente largo se tiene que $\sigma_f \rightarrow C_f E$. El valor de tensión máximo se produce en $x = l/2$ y está dado por:

$$\sigma_{f_{\max}} = C_f E \left[1 - \frac{1}{\cosh \left(\frac{\beta l}{2} \right)} \right] \tag{4.47}$$

4.5.2 Distribución de tensión cortante en la interfase

La distribución de esfuerzos cortantes en la zona de interfase se obtiene teniendo en cuenta la ecs. (4.42) y (4.46)

$$\tau = \frac{C_f E r \beta}{2} \frac{\sinh \beta \left(\frac{1}{2} l - x \right)}{\cosh \left(\frac{1}{2} \beta l \right)} \tag{4.48}$$

La ec.(4.48) establece la distribución de tensiones cortantes en la interfase fibra-matriz. Esta distribución se muestra esquemáticamente en la Figura 4.4. El valor de la tensión cortante es nulo en la zona central de la fibra y coincidente con el máximo esfuerzo axial. En esta zona no existen deformaciones diferenciales entre fibra y matriz lo cual explica el valor nulo de las tensiones tangenciales. La máxima tensión cortante se verifica en la punta de la fibra y está dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{C_f E r \beta}{2} \tanh \left(\frac{1}{2} \beta l \right) \tag{4.49}$$

Para incorporar esta contribución del refuerzo en la teoría de mezclas de sustancias básicas, es necesario establecer el promedio de la tensión a lo largo de la fibra como:

$$\bar{\sigma}_f = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_f = C_f \left(1 - \frac{\tanh \left(\frac{\beta l}{2} \right)}{\frac{\beta l}{2}} \right) E = \hat{C}_f E \tag{4.50}$$

siendo $\hat{C}_f$ el módulo de Young promedio del refuerzo. La ec.(4.50) muestra que el módulo de Young de un refuerzo de fibras es función de la longitud de las mismas. En el caso de fibras largas el módulo elástico promedio tiende al valor del módulo de Young del refuerzo, en tanto en este caso se ve fuertemente afectado por las cualidades de la interfase matriz-refuerzo para transferir los esfuerzos.

4.5.3 Modelo constitutivo para fibras cortas

Un material compuesto reforzado con fibras de longitud corta tiene la característica de que la matriz soporta una carga superior a la que soporta la matriz de un material compuesto con refuerzos continuos. En general, las propiedades mecánicas del material compuesto con fibras cortas es menor que la del mismo material con refuerzo continuo[5].

La definición anterior para el módulo de Young, permite redefinir la cuota elástica de la función de energía libre ecs.(B.11) y (B.10) en la configuración referencial o en la actualizada para la fase de refuerzo como:

$$\Psi = \Psi^e\left(\boldsymbol{E}^e;\theta\right)+\Psi^p\left(\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{2m^0}\left[\boldsymbol{E}^e:\hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}:\boldsymbol{E}^e\right]+\Psi^p\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{4.51}$$

$$\psi = \psi\left(\boldsymbol{e}^e;\theta\right)+\psi^p\left(\boldsymbol{\alpha}\right)=\frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{e}^e:\hat{\boldsymbol{c}}:\boldsymbol{e}^e\right]+\psi^p\left(\boldsymbol{\alpha}\right) \tag{4.52}$$

Extendiendo el concepto dado en la ec. (4.50), se adopta la siguiente relación para definir el tensor constitutivo de la fibra

$$\hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}=\left(\boldsymbol{\mathcal{C}}\right)_{fib}\left[1-\frac{\tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\frac{\beta l}{2}}\right] \tag{4.53}$$

donde el tensor constitutivo del refuerzo en la configuraciones referencial $\left(\boldsymbol{\mathcal{C}}\right)_{fib}$ resulta ortótropo. El tensor constitutivo de la fibra en la configuración actualizada es función de la longitud, el área y la separación entre las fibras que constituyen el refuerzo y se puede obtener como el "push forward" (ver Apéndice A) del tensor constitutivo dado por la ec.(4.53), esto es:

$$\hat{\boldsymbol{c}}=\overrightarrow{\phi}\left(\hat{\boldsymbol{\mathcal{C}}}\right) \tag{4.54}$$

De esta manera la formulación general puede tener en cuenta la pérdida de efectividad en la respuesta del refuerzo debido a su escasa longitud que impide una total transferencia de los esfuerzos desde la matriz.

A partir del segundo principio de la termodinámica, se deduce entonces la tensión en las configuraciones referencial o actualizada teniendo en cuenta las ecs. (B.28) y (B.26)

$$\boldsymbol{S} = m^0\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{E}^e}=\underbrace{\left[1-\frac{\tanh\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\frac{\beta l}{2}}\right]}_{\varsigma}\boldsymbol{\mathcal{C}}:\boldsymbol{E}^e \tag{4.55}$$

[5] Se entiende por refuerzo continuo a aquel que presenta una longitud mayor a la necesaria para transmitir los esfuerzos desde la matriz hacia el refuerzo

$$\boldsymbol{\tau} = m\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{e}^e} = \hat{\boldsymbol{c}} : \boldsymbol{e}^e \tag{4.56}$$

En las ecs. (4.55) y (4.56) el factor ς representa la corrección debido a la presencia de un refuerzo de longitud corta en el material compuesto.

4.6 Ecuación constitutiva del material compuesto

El análisis de materiales compuestos reforzados con fibras cortas utilizando la teoría de mezclas clásica resulta insuficiente, debido a que esta no puede tener en cuenta los fenómenos que tienen lugar en la zona de interfase de ambos materiales. La ecuación de cierre solo es válida para materiales con refuerzo continuo, por ejemplo matrices con fibras largas, despreciando los fenómenos que ocurren en los extremos de las fibras. En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas la ecuación de compatibilidad o cierre no se cumple. Por lo tanto, resulta necesario modificar la teoría de mezclas clásica debido a que no se cumple la ecuación de compatibilidad, definiendo por ello una ecuación de cierre distinta (Oller *et al.*, 1995b) o realizando una corrección en las propiedades de cada componente manteniendo la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica (Car *et al.*, 1998c). Este último método conduce a una formulación más simple.

4.6.1 Función de energía libre para compuestos reforzados con fibras cortas

La energía libre de un material compuesto reforzado con fibras en la configuración referencial está dada por la sumatoria de las energías libres de cada una de las fases que forman la matriz del material ponderadas en función de su participación volumétrica, esto es:

$$\begin{aligned} m^0\Psi\left(\boldsymbol{E}^e, \theta, \alpha^m\right) = & \underbrace{\sum_{c=1}^{n_m} k_{c_m} m^0_{c_m} \Psi_{c_m}\left[\boldsymbol{E}, \left(\boldsymbol{E}^p\right)_{c_m}, \theta, \alpha^m_{c_m}\right]}_{\text{Componentes de la matriz}} \\ & + \underbrace{\sum_{c=1}^{n} k_{c_r} m^0_{c_r} \varsigma_{c_r} \Psi_{c_r}\left[\boldsymbol{E}, \left(\boldsymbol{E}^p\right)_{c_r}, \theta, \alpha^m_{c_r}\right]}_{\text{Componentes del refuerzo}} \end{aligned} \tag{4.57}$$

En la configuración actualizada la energía libre del compuesto está dada por:

$$
\begin{aligned}
m\psi\left(\boldsymbol{e}^{e},\theta,\alpha^{m}\right) &= \underbrace{\sum_{c=1}^{n_m} k_{c_m} m_{c_m} \psi_{c_m}\left[\boldsymbol{e},\left(\boldsymbol{e}^{p}\right)_{c_m},\theta,\alpha_{c_m}^{m}\right]}_{\text{Componentes de la matriz}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{c=1}^{n_r} k_{c_r} m_{c_r} \varsigma_{c_r} \psi_{c_r}\left[\boldsymbol{e},\left(\boldsymbol{e}^{p}\right)_{c_r},\theta,\alpha_{c_r}^{m}\right]}_{\text{Componentes del refuerzo}} \qquad (4.58)
\end{aligned}
$$

donde Ψ_{c_m} y Ψ_{c_r} son las energías libres de las componentes correspondientes a la matriz y al refuerzo en la configuración referencial, ψ_{c_m} y ψ_{c_r} son las energías libres de las componentes correspondientes a la matriz y al refuerzo en la configuración actualizada, k_{c_m}y k_{c_r} son los coeficientes de participación volumétrica de cada uno de los componentes de matriz y refuerzo, $\left(\boldsymbol{E}^{p}\right)_{c_m}$y $\left(\boldsymbol{E}^{p}\right)_{c_r}$ son las deformaciones plásticas en la configuración referencial de las componentes de fibra y matriz, $\left(\boldsymbol{e}^{p}\right)_{c_m}$y $\left(\boldsymbol{e}^{p}\right)_{c_r}$ son las deformaciones plásticas en la configuración actualizada de las componentes de fibra y matriz, ς representa la corrección en función de la longitud de la fase de refuerzo en el material compuesto, $\alpha_{c_m}^{m}$ y $\alpha_{c_r}^{m}$ son las variables internas de las componentes de matriz y refuerzo que definen el comportamiento físico de cada sustancia.

La eficacia del refuerzo de fibras cortas es menor que la del de fibras largas, por lo tanto se deduce que las propiedades mecánicas de los materiales compuestos reforzados con fibras cortas son menores. La expresión del tensor constitutivo del material compuesto dado en la ec.(4.11) en pequeñas deformaciones se generaliza para el caso de refuerzos de cortas longitud con grandes deformaciones:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{ijkl} &= m^{0}\frac{\partial S_{ij}}{\partial E_{kl}} = m^{0}\frac{\partial^{2}\Psi\left(E_{ij};\ \theta;\ \alpha_{i}\right)}{\partial E_{ij}\partial E_{kl}} \\
&= \sum_{c=1}^{n_m}\frac{m^{0}}{m_{c_m}}k_{c_m}\left(C_{ijkl}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n_r}\frac{m^{0}}{m_{c_r}}k_{c_r}\varsigma_{c_r}\left(C_{ijkl}\right)_{c_r} \qquad (4.59)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{ijkl} &= m\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial e_{kl}} = m\frac{\partial^{2}\psi\left(e_{ij};\ \theta;\ \alpha_{i}\right)}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} \\
&= \sum_{c=1}^{n_m}\frac{m}{m_{c_m}}k_{c_m}\left(c_{ijkl}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n_r}\frac{m}{m_{c_r}}k_{c_r}\varsigma_{c_r}\left(c_{ijkl}\right)_{c_r} \qquad (4.60)
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{C}_{ijkl}$ y c_{ijkl} son las componentes del tensor constitutivo del material compuesto en las configuraciones referencial y actualizada, n_m es el número de componentes

que constituyen la matriz del compuesto y n_r es el número de componentes que constituyen la fase del refuerzo. En el caso de refuerzos continuos el factor $\varsigma \rightarrow 1$ y la expresión anterior tiende a la expresión dada en la ec. (4.11)

La expresión de la tensión del material compuesto en las configuraciones referencial y actualizada está dada por:

$$S_{ij} = m^0 \frac{\partial \Psi\left(E_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial E_{ij}} = \sum_{c=1}^{n_m} \frac{m^0}{m_{c_m}} k_{c_m} \left(S_{ij}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n} \frac{m^0}{m_{c_r}} k_{c_r} \left(S_{ij}\right)_{c_r} \quad (4.61)$$

$$= \sum_{c=1}^{n_m} \frac{m^0}{m_{c_m}} k_{c_m} \left(C^S_{ijkl}\right)_{c_m} \left(E^e_{kl}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n} \frac{m^0}{m_{c_r}} k_{c_r} \varsigma_{c_r} \left(C^S_{ijkl}\right)_{c_r} \left(E^e_{kl}\right)_{c_r} \quad (4.62)$$

$$\tau_{ij} = m \frac{\partial \psi\left(e_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial e_{ij}} = \sum_{c=1}^{n_m} \frac{m}{m_{c_m}} k_{c_m} \left(\tau_{ij}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_{c_r}} k_{c_r} \left(\tau_{ij}\right)_{c_r} \quad (4.63)$$

$$= \sum_{c=1}^{n_m} \frac{m}{m_{c_m}} k_{c_m} \left(c^S_{ijkl}\right)_{c_m} \left(e^e_{kl}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n} \frac{m}{m_{c_r}} k_{c_r} \varsigma_{c_r} \left(c^S_{ijkl}\right)_{c_r} \left(e^e_{kl}\right)_{c_r} \quad (4.64)$$

La modificación en las propiedades mecánicas del material se puede interpretar también como una modificación de la ecuación de cierre o compatibilidad de deformaciones en la configuración referencial:

$$E_{ij} \equiv \underbrace{\left(E'_{ij}\right)_{m_1} = ... = \left(E'_{ij}\right)_{m_n}}_{\text{Componentes matriz}} = \underbrace{\left(E'_{ij}\right)_{r_1} = ... = \left(E'_{ij}\right)_{r_n}}_{\text{Componentes refuerzo}} \quad (4.65)$$

$$E_{ij} \equiv \underbrace{\left(E^e_{ij} + E^p_{ij}\right)_{m_1}}_{\left(E'_{ij}\right)_{m_1}} = ... = \underbrace{\left(E^e_{ij} + E^p_{ij}\right)_{m_n}}_{\left(E'_{ij}\right)_{m_n}} = \underbrace{\left(\vartheta_1 E^e_{ij} + E^p_{ij}\right)_{r_1}}_{\left(E'_{ij}\right)_{r_1}} = ... = \underbrace{\left(\vartheta_n E^e_{ij} + E^p_{ij}\right)_{r_n}}_{\left(E'_{ij}\right)_{r_n}}$$

De la ec. (4.65)se obtiene que la deformación elástica de las componentes del refuerzo está dada por:

$$\left(E^e_{ij}\right)_{r_n} = \frac{1}{\vartheta_{r_n}} \left[E_{ij} - \left(E^p_{ij}\right)_{r_n}\right]$$

$$\left(E^e_{ij}\right)_{r_n} = \varsigma_{r_n} \left[E_{ij} - \left(E^p_{ij}\right)_{r_n}\right] \quad (4.66)$$

Esta ecuación establece que las deformaciones en cada componente correspondiente al los refuerzos está afectada de un cierto factor ς_i función de la longitud del refuerzo y de la distribución topológica de las fibras. Teniendo en cuenta la

ec.(4.38) la expresión de la tensión en cada una de las componentes del refuerzo en la configuración referencial está dada por:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= m^0 \frac{\partial \Psi\left(E_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial E_{ij}} = \\ &= \sum_{c=1}^{n_m} \frac{m^0}{m_{c_m}} k_{c_m} \left(S_{ij}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n} \frac{m^0}{m_{c_r}} k_{c_r} \left(S_{ij}\right)_{c_r} \end{aligned} \tag{4.67}$$

donde las tensiones en la configuración referencial de la matriz y el refuerzo $\left(S_{ij}\right)_{c_m}$ y $\left(S_{ij}\right)_{c_r}$ están dadas por:

$$\left(S_{ij}\right)_{c_m} = \left(C_{ijkl}\right)_{c_m} \left(E^e_{kl}\right)_{c_m} = \left(C_{ijkl}\right)_{c_m} \left(E_{kl} - E^P_{kl}\right)_{c_m} \tag{4.68a}$$

$$\left(S_{ij}\right)_{c_r} = \left(C_{ijkl}\right)_{c_r} \left(E^e_{kl}\right)_{c_r} = \varsigma_{c_r} \left(C_{ijkl}\right)_{c_r} \left(E_{kl} - E^P_{kl}\right)_{c_r} \tag{4.68b}$$

En la configuración actualizada, el cambio en las propiedades es posible interpretarlo, también, como una modificación en la ecuación de cierre:

$$e_{ij} \equiv \underbrace{\left(e'_{ij}\right)_{m_1} = \ldots = \left(e'_{ij}\right)_{m_n}}_{\text{Componentes matriz}} = \underbrace{\left(e'_{ij}\right)_{r_1} = \ldots = \left(e'_{ij}\right)_{r_n}}_{\text{Componentes refuerzo}} \tag{4.69}$$

$$e_{ij} \equiv \underbrace{\left(e^e_{ij} + e^p_{ij}\right)_{m_1}}_{\left(e'_{ij}\right)_{m_1}} = \ldots = \underbrace{\left(e^e_{ij} + e^p_{ij}\right)_{m_n}}_{\left(e'_{ij}\right)_{m_n}} = \underbrace{\left(\vartheta_1 e^e_{ij} + e^p_{ij}\right)_{r_1}}_{\left(e'_{ij}\right)_{r_1}} = \ldots = \underbrace{\left(\vartheta_n e^e_{ij} + e^p_{ij}\right)_{r_n}}_{\left(e'_{ij}\right)_{r_n}}$$

De la ec. (4.69)se obtiene que la deformación elástica de las componentes del refuerzo está dada por:

$$\left(e^e_{ij}\right)_{r_n} = \frac{1}{\vartheta_{r_n}} \left[e_{ij} - \left(e^p_{ij}\right)_{r_n}\right]$$

$$\left(e^e_{ij}\right)_{r_n} = \varsigma_{r_n} \left(e_{ij} - e^p_{ij}\right)_{r_n} \tag{4.70}$$

Esta ecuación establece que las deformaciones en cada componente correspondiente al los refuerzos está afectada de un cierto factor ς_i función de la longitud del refuerzo y de la distribución topológica del mismo. Teniendo en cuenta la ec.(4.40) la expresión de la tensión en cada una de las componentes del refuerzo en la configuración referencial está dada por:

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= m\frac{\partial\psi\left(e_{ij};\ \theta;\ \alpha_i\right)}{\partial e_{ij}} = \\ &= \sum_{c=1}^{n_m}\frac{m}{m_{c_m}}k_{c_m}\left(\tau_{ij}\right)_{c_m} + \sum_{c=1}^{n}\frac{m}{m_{c_r}}k_{c_r}\left(\tau_{ij}\right)_{c_r} \end{aligned} \tag{4.71}$$

donde las tensiones en la matriz y refuerzo $\left(\tau_{ij}\right)_{c_m}$ y $\left(\tau_{ij}\right)_{c_r}$ están dadas por:

$$\left(\tau_{ij}\right)_{c_m} = \left(c_{ijkl}\right)_{c_m}\left(e^e_{kl}\right)_{c_m} = \left(c_{ijkl}\right)_{c_m}\left(e_{kl} - e^P_{kl}\right)_{c_m} \tag{4.72a}$$

$$\left(\tau_{ij}\right)_{c_r} = \left(c_{ijkl}\right)_{c_r}\left(e^e_{kl}\right)_{c_r} = \varsigma_{c_r}\left(c_{ijkl}\right)_{c_r}\left(e_{kl} - e^P_{kl}\right)_{c_r} \tag{4.72b}$$

Teniendo en cuenta la condición de compatibilidad dada en las ecs.(4.65) y (4.69) y la expresión de la tensión en las configuraciones referencial y actualizada dadas por las ecs.(4.67) y (4.71) se observa que existe un factor de proporcionalidad entre la deformación de los componentes que constituyen la fase de refuerzo y la deformación total del conjunto. El producto de este factor de proporcionalidad por el tensor constitutivo del componente provoca una modificación del tensor constitutivo del componente $\varsigma_{c_r}\ \boldsymbol{c}_c$ dando lugar a un nuevo tensor constitutivo para el componente que permite utilizar para el cálculo de la tensión en el componente la condición de compatibilidad de la teoría de mezclas clásica.

4.7 Propiedades mecánicas de las fibras a considerar en la Teoría de mezclas en régimen lineal para materiales compuestos

El objetivo de este apartado es establecer las propiedades mecánicas transversales de la fase de refuerzo. La teoría de mezclas de sustancias básicas, en su versión unidimensional, establece que el módulo elástico transversal de un material compuesto está dado por la suma ponderada de los módulos elásticos transversales de los componentes

$$E_2 = k_m\left(E_m\right) + k_f\left(E_2\right)_f \tag{4.73}$$

donde E_2, $\left(E_m\right)$ y $\left(E_2\right)_f$ son los módulos elásticos transversales del material compuesto, de la matriz y de la fibra respectivamente. Evidencias experimentales demuestran que las fibras no pueden ser consideradas como un material que solo posee rigidez longitudinal a los fines de simular el comportamiento del material compuesto

(ver Apartado 7.2). Por lo tanto, el refuerzo en posición transversal a un esfuerzo colabora en la rigidez del conjunto. El módulo elástico transversal del refuerzo surge de considerar la igualdad de las ecs. (4.73) y (2.6) para el caso unidimensional

$$(E_2)_f = \frac{\left[\frac{(E_m)(E_1)_f}{k_m(E_1)_f + k_f(E_m)} - k_m(E_m)\right]}{k_f} \tag{4.74}$$

Otra aproximación del módulo elástico transversal se puede obtener teniendo en cuenta la ec. (2.7) y la ec. (4.73) se obtiene:

$$(E_2)_f = \frac{\left[\frac{\left(E_m'\right)(E_1)_f}{k_m(E_1)_f + k_f\left(E_m'\right)} - k_m\left(E_m'\right)\right]}{k_f} \tag{4.75}$$

donde E_2' está dado por la ec. (2.8)

En forma análoga teniendo en cuenta la ecuación propuesta por Halpin y Tsai el módulo elástico transversal de la fibra esta dado por:

$$(E_2)_f = \frac{(E_2)_m \frac{\left(1+\xi\ \eta\ k_f\right)}{1-\eta\ k_f} - k_m(E_2)_m}{k_f} \tag{4.76}$$

donde η es un coeficiente que resulta ser una función del módulo elástico de la matriz, del módulo longitudinal del refuerzo y de un parámetro de carácter experimental ξ (Hull, 1987b) (Barbero, 1998):

$$\eta = \frac{\frac{(E_1)_f}{(E_m)} - 1}{\frac{(E_1)_f}{(E_m)} + \xi} \tag{4.77}$$

Capítulo 5

El fenómeno de deslizamiento fibra matriz (DFM)

"It is common sense to take a method and try it. If it fails, admit it frankly and try another. But above all, try something."

Former US President Franklin D. Roosevelt

5.1 Introducción

El objetivo del presente capítulo es introducir en la formulación constitutiva para materiales compuestos, presentada en el capítulo anterior, el fenómeno de movimiento relativo de cuerpo rígido que se verifica entre la fase de refuerzo y la de matriz cuando se excede un cierto valor de tensiones en la interfase entre ambos.

Uno de los motivos del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras es el fenómeno de formación de grietas en la matriz con el consiguiente deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se conoce en la literatura en inglés como "*debonding*" y se caracteriza porque el agrietamiento de la matriz y el deslizamiento entre fibra y matriz reducen la rigidez del material e induce deformaciones inelásticas o no recuperables en la estructura. El fenómeno antes mencionado se denominará en este trabajo DFM (deslizamiento fibra-matriz).

Al tratarse de un fenómeno de despegue o movimiento relativo entre fibra y matriz, es necesario primero estudiar el mecanismo de transferencia del esfuerzo entre matriz y fibra. En las estructuras o piezas constituidas por materiales compuestos los esfuerzos se transfieren desde la matriz a la fibra debido a que las solicitaciones son impuestas en la matriz del conjunto.

Los materiales compuestos están constituidos, en general, por una fase que presenta baja resistencia bajo un cierto estado de cargas, como es el caso de la matriz, y

una fase de refuerzo que excede la resistencia de la matriz. (Ej.: Hormigón armado).

En los materiales compuestos reforzados con fibras el agrietamiento o apertura de fisuras en la matriz está acompañada por el fenómeno de despegue de las fibras y por el posterior deslizamiento entre ambas fases (DFM). El proceso de apertura de fisuras en la matriz ocurre a niveles de tensiones que resultan significativamente menores que el nivel tensional necesario para producir la rotura de las fibras. La rotura de la matriz ocurre a valores bajos de tensión y está usualmente alineado con la dirección de las tensiones principales, produciendo una disminución en la rigidez e induciendo deformaciones inelásticas y ciclos de histéresis (Beyerley *et al.*, 1992) (Pryce y Smith, 1992).

A los fines de modelar micromecánicamente el fenómeno DFM en materiales compuestos, diversos modelos han sido propuestos.(Hild y Burr, 1996) (Owen y Lyness, 1972) (Agarwal y Bansal, 1979)

5.2 Estudio de la distribución de tensiones a lo largo de la fibra

El análisis de la distribución de tensiones a lo largo de una fibra debe tener en cuenta que en la zona final de las fibras se generan estados tensionales complejos.

A medida que la relación entre la longitud l y el diámetro d disminuye los fenómenos que se producen en la zona final del refuerzo son importantes afectando a la rigidez del conjunto.

La transferencia de tensiones entre matriz y fibras tiene lugar a través de la interfaz existente entre ambas fases. El mecanismo de transferencia de esfuerzos entre las fases se ve afectado por diversos factores tales como la química de la interfase y la fibra, el tratamiento superficial de las fibras, la fracción de volumen de fibras y las condiciones de temperatura y humedad.

El mecanismo de transferencia de tensiones entre fibra y matriz se observa en la Figura 5.1a. En esta figura se considera una fibra de longitud l embebida en una matriz y orientada en la dirección de la carga. La tensión aplicada a la matriz se transfiere a la fibra a través de la interfase. La matriz y la fibra experimentan diferentes deformaciones a tracción debido a la diferencia entre los módulos elásticos de la matriz y la fibra. En la Figura 5.1a se observa que la deformación en los extremos de las fibras es menor que en la matriz. Como resultado de esta diferencia en las deformaciones entre ambas fases se inducen tensiones cortantes alrededor de la fibra en la dirección de su eje longitudinal y la fibra se encuentra sometida a un estado de tracción. La resistencia de la interfaz fibra-matriz es relativamente baja, del orden de los 20 MPa.

La Figura 5.1b muestra la distribución analítica de las tensiones en una fibra

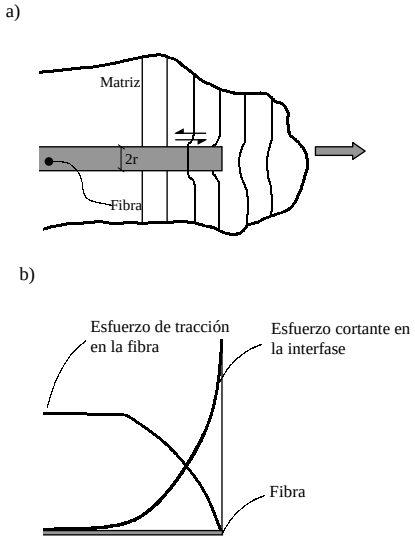

Figura 5.1: a) Deformación alrededor de una fibra discontinua embebida en una matriz sometida a tracción. b) Variación de los esfuerzos de tracción y cortantes a lo largo de una fibra.

paralela a la dirección de la carga. Esta distribución analítica se basa en las siguientes hipótesis:

- Se considera un comportamiento elástico de fibra y matriz
- La interfaz es delgada y proporciona una buena transferencia de los esfuerzos

De acuerdo con estas hipótesis la tensión axial resultante en el extremo de la fibra resulta nula y máxima en la zona central de la misma. Por el contrario las tensiones cortantes resultan máximas en los extremos y decrecen hasta anularse en la zona central, en el caso de fibras suficientemente largas. Este análisis se ha corroborado a través de ensayos de fotoelasticidad y espectrocopia de láser Raman (Hull, 1987b).

En el caso de superarse la resistencia máxima a cortadura de la interfaz, o del material de la matriz circundante, se producirá la rotura de la interfase y el consiguiente deslizamiento relativo entre fibra y matriz. La falla a cortadura no implica necesariamente que la matriz sea incapaz de transmitir carga a la fibra debido a la existencia de fuerzas de fricción entre fibra e interfase. La importancia de este fenómeno depende de las propiedades de las fibras, de la resina y del volumen total de fibras en el material compuesto.

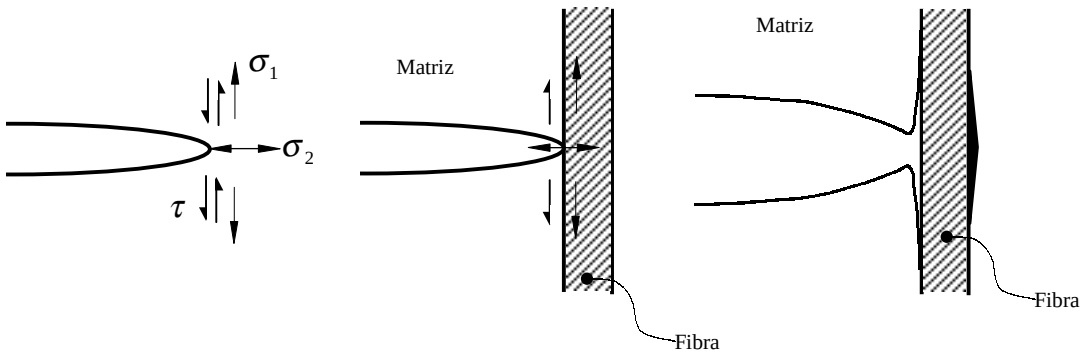

Figura 5.2: a) Representación esquemática de tensiones en el extremo de una grieta. b) Extremo de grieta en la interfase de la fibra. c) Rotura de interfase.

5.3 Interacción entre grietas y fibras

Algunas de las interacciones importantes de los procesos de rotura pueden ser comprendidos considerando los procesos que se desarrollan cuando una grieta aguda de la matriz entra en contacto con una fibra como se muestra en la Figura 5.2.

En la Figura 5.2 se muestran los esfuerzos que se generan cuando una grieta aguda y frágil entra en contacto con una fibra. Una grieta sometida a un esfuerzo de tracción unidireccional normal al plano de la misma genera esfuerzos adicionales.

La concentración de esfuerzos alrededor de una grieta es función del radio de curvatura del extremo de la grieta ρ y a la longitud l de la misma y está dada por la expresión $(l/\rho)^{\frac{1}{2}}$. Para una grieta sometida a un esfuerzo de tracción unidireccional normal al plano de la misma se generan, debido a la presencia de la fisura, esfuerzos a tracción adicionales paralelos al plano de la misma. En la Figura 5.2 se muestra los esfuerzos en el extremo de una grieta elíptica. El esfuerzo de tracción máximo σ_1 se produce en el extremo de la fisura y el esfuerzo de tracción σ_2 paralelo a la grieta se produce justo delante del extremo de la misma. Existe también un esfuerzo cortante τ en el plano normal al plano de la grieta.

El esfuerzo σ_1 en el extremo de la grieta tiende a causar la rotura de la fibra, el esfuerzo σ_2 conduce a una separación por tracción en la interfase y el esfuerzo τ causa la rotura a cortadura de la matriz. En la mayoría de los materiales compuestos se verifica la rotura por cortante de la interfase pero no se produce una descarga completa de la fibra debido a la presencia de fuerzas friccionales entre fibra y matriz.

El grado relativo de rotura de la interfase y la magnitud de las fuerzas de fricción determinan el tipo de rotura. El tipo de rotura depende fundamentalmente de la re-

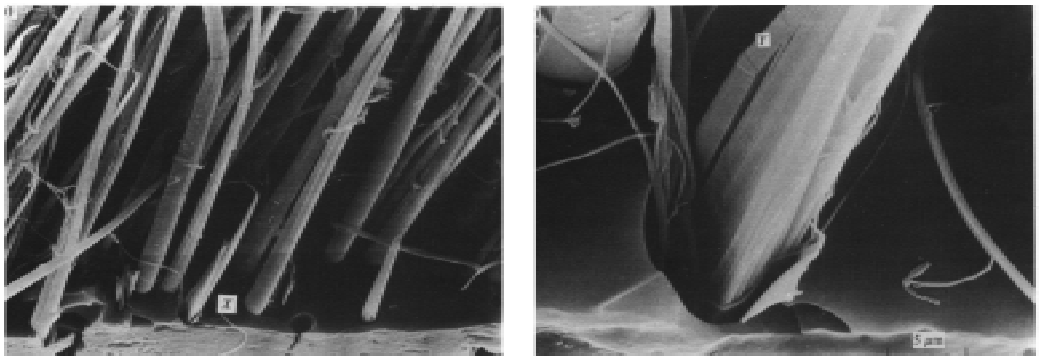

Figura 5.3: a) Rotura fibrosa de un material compuesto. b) Detalle de rotura fibrosa.

sistencia del material compuesto en las direcciones paralela y perpendicular a la fibra así como de la resistencia a cortante. En la mayoría de los materiales compuestos la relación entre el esfuerzo último paralelo a la dirección del refuerzo y el esfuerzo último cortante es elevada y por lo tanto el agrietamiento por cortadura en la interfaz se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz. Debido a que el proceso de fisuración de la matriz se produce a valores relativamente bajos comparados con la resistencia del refuerzo se asume que ambos mecanismos no están acoplados. Cuando se produce este mecanismo no se verifica una completa descarga debido a la existencia de fuerzas friccionales. En la Figura 5.3 se muestra la superficie de rotura en una resina epoxi con fibra de Kevlar 49 (Hull, 1987b). La superficie de rotura es muy fibrosa en apariencia con gran cantidad de arranque de fibra.

5.4 Modelos constitutivos para materiales compuestos con DFM

La mayoría de las investigaciones realizadas para determinar el comportamiento efectivo de materiales compuestos reforzados se basan en la hipótesis de adherencia perfecta entre ambas fases. El fenómeno de separación entre las fases o "*debonding*" es común en este tipo de materiales y, por lo tanto, debe tenerse en cuenta en el análisis del comportamiento mecánico de este tipo de material. Debido a la ausencia de uniformidad que se observa en el campo de desplazamientos, la incorporación de este fenómeno en la teoría de mezclas se debe realizar en el modelo constitutivo.

Diversos autores han estudiado este fenómeno utilizando el método de los elementos finitos. La gran mayoría de estos estudios se basan en permitir la ausencia de contacto entre fibra y matriz y emplear un procedimiento numérico para estu-

diar el fenómeno (Owen y Lyness, 1972). Otros estudios se basan en introducir una capa entre los componentes con el objetivo de simular la zona de interfase entre fibra y matriz (Agarwal y Bansal, 1979). Lené y Leguillon proponen un modelo que permite un deslizamiento tangencial entre fibra y matriz y utilizan el método de homogeneización conjuntamente con el método de los elementos finitos para modelar el comportamiento del material compuesto.

El comportamiento de materiales compuestos sin considerar el fenómeno de despegue entre fibra y matriz ha sido investigado por Aboudi (1982 y 1984) (Aboudi, 1984) utilizando un desarrollo de Legendre en una celda representativa. Posteriormente Beneviste y Aboudi (1984) modificaron su modelo para tener en cuenta el fenómeno de despegue entre fibra y matriz. El fenómeno de "*debonding*" se simula imponiendo la condición de continuidad en los desplazamientos normales en la zona de interface fibra-matriz, permitiendo el deslizamiento tangencial en esta zona. El concepto de deslizamiento tangencial ha sido usado por Drumheller (1973) para simular el fenómeno de debonding en materiales compuestos bilaminados periódicos. En este trabajo Drumheller (1973) estudia el efecto del debonding en la propagación de ondas en un medio laminado y está basado en el uso de las ecuaciones de la elasto-dinámica. Beneviste y Aboudi utilizan su modelo para estudiar la velocidad de propagación de ondas en materiales compuesto reforzados con fibras.

Otros autores proponen un modelo basado en la micromecánica del fenómeno (Cox, 1952) (Aveston *et al.*, 1971) (Hsueh, 1993). Todos estos modelos utilizan una celda de longitud $2l$ que caracteriza la separación entre fisuras y está constituida por materiales diferentes denominados 1 y 2 (ver Figura 5.4). Se supone la existencia de una fisura de tamaño $2a$ en la zona central de la celda y una longitud de fricción $2l_f$. Durante el fenómeno DFM y debido a la presencia de rozamiento entre fibra y matriz existe una diferencia de temperatura entre los materiales 1 y 2. El balance de las tensiones residuales resulta $-k_1E_1/E$ y $-k_2E_2/E$ en los materiales 1 y 2 respectivamente, donde E es el módulo de Young del compuesto no dañado, E_1 y E_2 son los módulos de Young del material 1 y 2 y k_i son los coeficientes de participación volumétrica de cada uno de los componentes. En el momento de la fisura las tensiones residuales se relajan con la región que se desliza.

Para caracterizar el estado del material compuesto se necesitan cuatro variables: la deformación total, la longitud de fricción $2l_f$, la longitud de la celda $2l$ y la apertura de la fisura en la matriz Δ (ver Figura 5.5). La deformación en la zona (2) es una función que depende de la interfaz. La densidad de energía libre del modelo se obtiene considerando la superposición de dos fenómenos. El primer paso consiste en obtener la densidad de energía cuando la parte (2) se mueve respecto de la (1) una longitud Δ sobre una longitud l_f sin la acción de cargas externas. El segundo paso consiste en cargar el sistema fisurado impidiendo que se desarrollen los fenómenos de fricción. La presencia de la fisura en la matriz produce una reducción en la rigidez

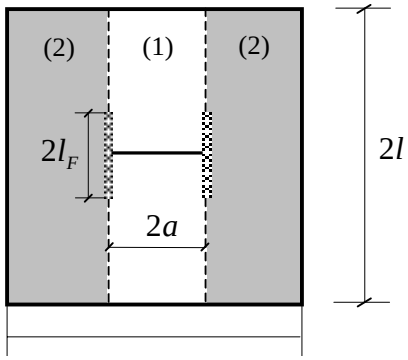

Figura 5.4: Celda elemental de tamaño $2l \; x \; 2w$ que contine una fisura de tamaño $2a$.

que se define a través de una variable interna D. Esta variable interna depende de la densidad de fisuras y de las propiedades elásticas de ambas fases. La energía libre total es la suma de ambos fenómenos y está dada por:

$$\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}\left(1-D\right)\left(\bar{\varepsilon}-\varepsilon^{i}\right)^{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{C}^{*}\left(\frac{\varepsilon^{i2}}{d}\right) \tag{5.1}$$

donde ε^i representa las deformaciones inelásticas debido al deslizamiento entre las fases.

La ley de evolución de las variables internas del problema (D, d y ε^i) se establece

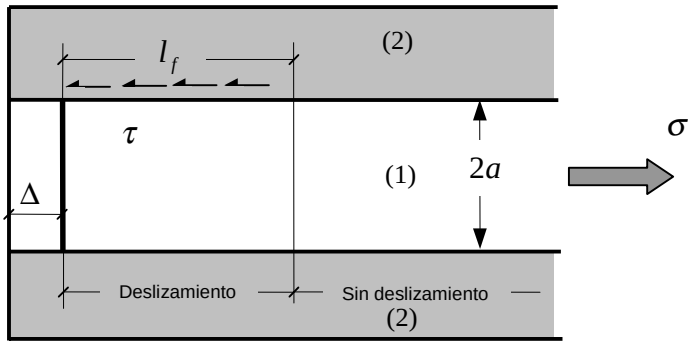

Figura 5.5: Esfuerzos debido al movimiento de la fase (1) respecto de la fase (2)

teniendo en cuenta el proceso de fragmentación en un modelo con tensiones cortantes constantes a lo largo de la zona de fricción (Curtin, 1991). Hild *et al.* (1996) propone un método práctico para determinar la ley de evolución de las variables internas a través de resultados experimentales. Esta metodología tiene el inconveniente de que para cada tipo de material o para el mismo material con distintas participaciones volumétricas de matriz y refuerzo es necesario realizar una serie de ensayos que permitan identificar las leyes de evolución de las variables internas.

Posteriormente Hutchinson y Jensen (1990) presentan diversos modelos para fibras embebidas en una matriz frágil, restringiendo el análisis a materiales compuestos con tensiones residuales de compresión actuando en la interfase fibra matriz y considerando que durante el fenómeno de arranque después de la rotura de las fibras existe fricción. La interacción fibra matriz se modela a través de una celda cilíndrica considerando dos tipos de condiciones de borde: una modelando fibra-matriz aisladas y otra considerando una matriz conteniendo un conjunto de fibras unidireccionales. Se considera que las fibras son isótropas transversalmente a lo largo de su eje longitudinal y que la matriz es isótropa.

Posteriormente Hild, Burr y Leckie (1995) presentan un modelo micromecánico, basado en la mecánica de medios continuos, que permite tener en cuenta los efectos de la rotura de la matriz y el deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Este modelo utiliza cuatro variables de estado y la energía libre del sistema se calcula en función de estas variables.

5.5 Propuesta para el tratamiento del DFM

El objetivo del apartado es realizar modificaciones al modelo constitutivo presentado en los capítulos anteriores que permita tener en cuenta el fenómeno DFM en los materiales compuestos reforzados con fibras.

El análisis de los materiales compuestos en este trabajo se realiza utilizando la teoría de mezclas de sustancias básicas. Esta teoría se basa en la combinación e interacción de las sustancias básicas que conforman el compuesto. Se considera que en cada punto del material en análisis participan todas las sustancias componentes a la vez y cada una de ellas con su propia ley constitutiva y en la proporción de volumen asignada. Todos lo componentes del material deben satisfacer la condición de compatibilidad cinemática. Esta condición establece que la deformación total en un punto es igual para todos los componentes (Ecuación de cierre). (ver Apartado 4)

Esta hipótesis es solo válida para materiales con comportamiento en paralelo, por ejemplo matrices con fibras largas, despreciando los fenómenos en los extremos de las fibras. En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas la

ecuación de compatibilidad o cierre no se cumple. En este caso es necesario definir una ecuación de cierre distinta (Oller *et al.*, 1995b) o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre (Car *et al.*, 1998c). (ver Apartados 4.3 y 4.5)

La ecuación de compatibilidad tampoco es válida en el caso en que se produzca un deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se produce en el instante en que la tensión cortante máxima admisible de la interfase entre fibra y matriz es superada.

5.5.1 Modificación del modelo constitutivo para considerar el fenómeno DFM

Los materiales compuestos constituidos por una matriz y un refuerzo poseen un comportamiento no-lineal complejo, debido a que se produce un deslizamiento del refuerzo, motivado por la pérdida de adherencia entre matriz y refuerzo. Este movimiento relativo entre refuerzo y matriz, produce también una pérdida de rigidez en el conjunto, que se refleja en una disminución de los parámetros mecánicos del compuesto, sin que ocurra rotura en la fase de refuerzo (Hild *et al.*, 1994) (Hild, 1994).

La modificación de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, basada en la mecánica de medios continuos, consiste en introducir en la ecuación constitutiva un comportamiento basado fundamentalmente en el movimiento relativo de cuerpo rígido que se verifica entre fibra y matriz. La incorporación del DFM en la ecuación constitutiva desarrollada en este trabajo se realiza teniendo en cuenta que este fenómeno presenta dos características: a) pérdida de rigidez global debido a la disminución de la colaboración de la fibra en la matriz y b) deslizamiento relativo irrecuperable entre fibra y matriz.

Los materiales compuestos sometidos a estados tensionales en los cuales se ha producido el fenómeno DFM no cumplen con la condición de compatibilidad impuesta por la teoría de mezclas de sustancias básicas. Este fenómeno tiene como consecuencia directa la imposibilidad de la matriz de transferir esfuerzos a la fibra. Esto es, la fibra no es capaz de aumentar su estado tensional por causas atribuibles a la zona de interfase fibra-matriz.

El modelo constitutivo se basa en la idea de que el proceso de transferencia de cargas de matriz a fibra varía en el momento en que la matriz sufre deformaciones plásticas. El movimiento relativo entre fibra y matriz puede representarse en mecánica de medios continuos a través de una deformación plástica irrecuperable en la fibra. La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante una condición de resistencia que compara la tensión efectiva del punto con la resistencia de la fibra. Dada la forma en que participa la fibra dentro del compuesto y el mecanismo

de transmisión de tensiones entre fibra y matriz, la determinación de su máxima resistencia o resistencia real y su capacidad de colaboración depende de su propia resistencia nominal $\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib}$, o resistencia de la fibra en condiciones aisladas, de la resistencia nominal de la matriz $\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{mat}$ y de la resistencia nominal de la interface fibra-matriz $\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib-mat}$, o capacidad de transferencia de tensiones desde la matriz a la fibra. Desde otro punto de vista, se puede decir que la fibra participa dentro del compuesto en función de su propia resistencia y de la capacidad de transferencia de esfuerzo de la interfaz fibra-matriz, por lo tanto su resistencia está influenciada por el medio que la contiene. Se define entonces la resistencia de una fibra contenida en una matriz como:

$$\left(\boldsymbol{f}^R\right)_{fib} = \min\left\{\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib},\ \left(\boldsymbol{f}^N\right)_{mat},\ \left[2\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib-mat}/r_f\right]\right\} \tag{5.2}$$

donde r_f es el radio de la fibra. La ec. (5.2) se deducen los siguientes casos límites:

- Si la matriz es mas resistente que la fibra y la adherencia fibra-matriz es perfecta, la capacidad de participación de la fibra queda limitada por su propia resistencia nominal $\left(\boldsymbol{f}^R\right)_{fib} = \left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib}$
- Si se produce una falla en la matriz por microfisuras, etc., en tanto la fibra se mantiene en régimen lineal, la resistencia de la fibra queda limitada por la resistencia de la matriz , pues no se podrá transferir más tensión que la que le permite el medio que la contiene $\left(\boldsymbol{f}^R\right)_{fib} = \left(\boldsymbol{f}^N\right)_{mat}$
- Si la falla se produce en la interface fibra-matriz, la resistencia de la fibra queda limitada por la de la interface $\left(\boldsymbol{f}^R\right)_{fib} = 2\left(\boldsymbol{f}^N\right)_{fib-mat}/r_f$

En la mayoría de los materiales compuestos se verifica que el agrietamiento por cortadura en la interfaz se produce antes que la rotura de las fibras y se observa una separación masiva entre fibra y matriz y por lo tanto la resistencia de la fibra queda limitada por la capacidad de la interfaz de transmitir esfuerzos. La aparición de fenómenos plásticos en la matriz de un material compuesto sometido a un estado de cargas monótono creciente impide la transferencia de los esfuerzos desde la matriz hacia las fibras dando lugar a la aparición de deformaciones irrecuperables por deslizamiento de la fase de refuerzo respecto de la matriz. A partir de este momento la transferencia de cargas de fibras a matriz no es nula debido a la presencia de fenómenos de fricción entre ambas fases del material compuesto. Por lo tanto, las fibras aumentan su estado tensional según un módulo elástico diferente del inicial.

El modelo que se propone en este trabajo se basa en establecer el estado tensional en el que se encuentra la fibra en el momento de producirse la rotura en la matriz del compuesto. A partir de aquí las deformaciones irrecuperables debidas al

deslizamiento entre ambas fases se tienen en cuenta con un modelo elastoplástico con endurecimiento para la fase de refuerzo debido a la presencia de las fuerzas de rozamiento entre fibra y matriz. Por lo tanto, se trata de un modelo *no local material*, debido a que el estado de uno de los materiales (refuerzo) depende de otro (matriz).

A los fines de tener en cuenta la interacción entre matriz y fibra, es necesario determinar el estado tensional de la fase de refuerzo en el momento en que se verifica el deslizamiento relativo entre fibra y matriz debido a la aparición de fenómenos plásticos en esta última. Este estado tensional es el máximo estado tensional que se transmite desde la matriz hacia la fibra bajo las condiciones de adherencia perfecta entre refuerzo y matriz. A partir de este momento los esfuerzos se transmiten por fenómenos friccionales. En la Figura 5.6 se muestra para el caso de un material compuesto formado por una matriz y fibra de refuerzos la interacción entre ambas fases que permite determinar la resistencia del refuerzo en función de los criterios enunciados anteriormente.

Con el objetivo de incluir el fenómeno de debonding en la formulación del modelo constitutivo para materiales compuestos se define la relación

$$r = \frac{\tau^n}{f_\tau^R} = \frac{S^n}{f_S^R} \tag{5.3}$$

donde f_τ^R y f_S^R representan las resistencias del refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada y τ^n y S^n representan la tensión en la dirección longitudinal del refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada en el momento en que se verifica el deslizamiento relativo entre fibra y matriz debido a la aparición de fenómenos plásticos en esta última.

A los fines de simular las deformaciones irrecuperables que se verifican como consecuencia del deslizamiento entre fibra y matriz es necesario redefinir el criterio de fluencia de la fase correspondiente al refuerzo y dado por la ec. (3.9) y (3.21) en las configuraciones referencial y actualizada. El factor r permite establecer el momento a partir del cual la matriz no es capaz de transferir carga a la fibra y simular los fenómenos de fricción entre fibra y matriz. Este factor se considera constante a partir del momento de plastificación de la matriz.

Por lo expuesto anteriormente, para incluir el fenómeno DFM en el modelo constitutivo es necesario redefinir el límite de proporcionalidad de las fibras, por lo tanto el criterio de fluencia en las configuraciones referencial y actualizada resulta:

$$\Phi\left(\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C};\alpha\right) = F(\boldsymbol{S}\,;\boldsymbol{C}) - rK(\alpha) = 0 \tag{5.4}$$

$$\phi\left(\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g};\alpha\right) = F(\boldsymbol{\tau}\,;\boldsymbol{g}) - rk(\alpha) = 0 \tag{5.5}$$

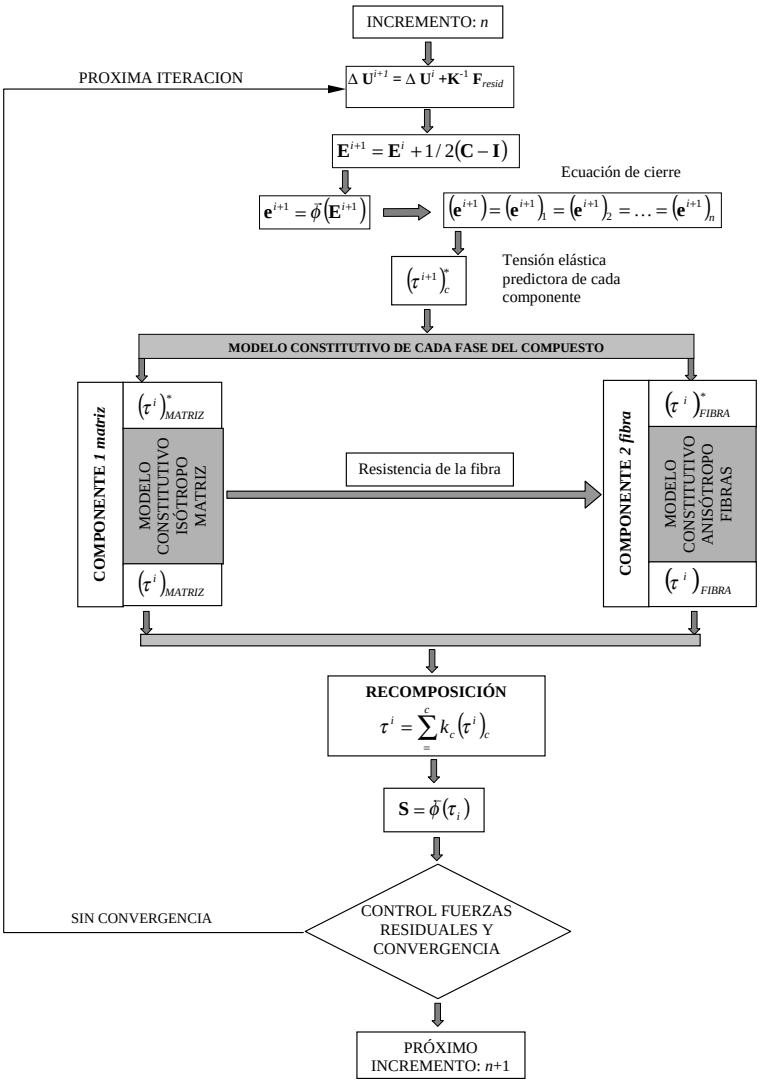

Figura 5.6: Esquema de solución de problema no lineal bifase con DFM

donde r está dado por la ec. (5.3). El producto $rK(\alpha)$ y $rk(\alpha)$ permite redefinir el umbral de tensiones en las configuraciones referencial y actualizada del refuerzo a partir del instante en el que se producen fenómenos plásticos en la matriz del material compuesto. La modificación en la condición de fluencia hace necesario redefinir nuevamente el modelo constitutivo elastoplástico de la fase de refuerzo en las configuraciones referencial y actualizada.

5.6 Expresión del modelo constitutivo elastoplástico del refuerzo

5.6.1 Configuración referencial

Condición de fluencia

Según se ha visto en el apartado anterior para tener en cuenta el fenómeno DFM es necesario realizar una modificación en la condición de fluencia de la fase de refuerzo que permita redefinir la resistencia del refuerzo a partir del instante en el que se producen fenómenos plásticos en la matriz del material compuesto.

El factor de proporcionalidad r afecta al límite de proporcionalidad del material. Este parámetro no se introduce directamente en la condición de fluencia con el objetivo de alterar lo menos posible la estructura matemática de la plasticidad. La condición de fluencia ec.(5.4) puede reescribirse como:

$$\Phi\left(\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{C};\alpha\right)=\frac{1}{r}F(\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{C})-K(\alpha)=0 \tag{5.6}$$

La ec.(5.6) representa el nuevo criterio de fluencia que permite tener en cuenta el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz a partir de establecer el momento a partir del cual la matriz no es capaz de transferir carga a la fibra y simular los desplazamientos relativos irrecuperables entre fibra y matriz a través de la plasticidad.

Regla de flujo

La regla de flujo estable la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración referencial como:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^{p}=\dot{\lambda}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\boldsymbol{S}} \tag{5.7}$$

donde $\mathcal{G}=\mathcal{G}\left(\boldsymbol{S};\boldsymbol{C}\right)$ es la función de potencial plástico y $\dot{\lambda}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que cumple con las

condiciones de Kuhn-Tucker (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991). Para el caso de plasticidad asociada la ley de evolución de las deformaciones plásticas queda:

$$\dot{\boldsymbol{E}}^p = \dot{\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{S}} \tag{5.8}$$

La teoría de la plasticidad exige también el cumplimiento de

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \Phi\left(\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{C};\alpha\right) \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\Phi\left(\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{C};\alpha\right) = 0 \tag{5.9}$$

Las condiciones dadas por la ec.(5.9) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la variación temporal de la función de fluencia:

$$\dot{\Phi}\left(\boldsymbol{S}\ ;\boldsymbol{C};\alpha\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{S}}\dot{\boldsymbol{S}} - \frac{\partial K}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = 0 \tag{5.10}$$

5.6.2 Configuración actualizada

Condición de fluencia

En forma análoga a lo realizado para la configuración referencial para tener en cuenta el fenómeno de fluencia es necesario realizar una modificación en la condición de fluencia de la fase de refuerzo que permita redefinir la resistencia del refuerzo a partir del instante en el que se producen fenómenos plásticos en la matriz del material compuesto.

El factor de proporcionalidad r afecta al límite de proporcionalidad del material. Este parámetro no se introduce directamente en la condición de fluencia con el objetivo de alterar lo menos posible la estructura matemática de la plasticidad procediéndose en forma similar a lo realizado para la condición de fluencia en la configuración referencial. La condición de fluencia ec.(5.5) puede reescribirse como:

$$\phi\left(\boldsymbol{\tau}\ ;\boldsymbol{g};\alpha\right) = \frac{1}{r}f(\boldsymbol{\tau}\ ;\boldsymbol{g}) - K(\alpha) = 0 \tag{5.11}$$

La ec.(5.6) representa el nuevo criterio de fluencia que permite tener en cuenta el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz a partir de establecer el momento a partir del cual la matriz no es capaz de transferir carga a la fibra y simular los desplazamientos relativos irrecuperables entre fibra y matriz a través de la plasticidad.

Regla de flujo

La regla de flujo estable la ley de evolución de las deformaciones plásticas y se define en la configuración referencial como:

$$L_v\left(\boldsymbol{e}\right)^p = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{5.12}$$

donde $g = g\left(\boldsymbol{\tau};\boldsymbol{g}\right)$ es la función de potencial plástico y $\dot{\lambda}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia plástica que cumple con las condiciones de Kuhn-Tucker (Lubliner, 1990) (Crisfield, 1991). Para el caso de plasticidad asociada la ley de evolución de las deformaciones plásticas queda:

$$L_v\left(\boldsymbol{e}\right)^p = \dot{\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{5.13}$$

La teoría de la plasticidad exige también el cumplimiento de

$$\dot{\lambda} \geq 0 \qquad \phi\left(\boldsymbol{\tau}\ ;\boldsymbol{g};\alpha\right) \leq 0 \qquad \dot{\lambda}\phi\left(\boldsymbol{\tau}\ ;\boldsymbol{g};\alpha\right) = 0 \tag{5.14}$$

Las condiciones dadas por la ec.(5.14) se conocen en la terminología clásica como condiciones de carga y descarga. Además, debe cumplirse la condición de persistencia expresada por la variación temporal de la función de fluencia:

$$\dot{\phi}\left(\boldsymbol{\tau}\ ;\boldsymbol{g};\alpha\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\tau}}\dot{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial K}{\partial \alpha}\dot{\alpha} = 0 \tag{5.15}$$

Capítulo 6

Implementación computacional

"640K ought to be enough for anybody."
Bill Gates (1981)

6.1 Introducción

En este capítulo se trata la implementación numérica de los modelos constitutivos analizados en los capítulos anteriores. Se pretende realizar una formulación numérica eficiente que permita el análisis de estructuras realizadas con materiales compuestos.

El modelo constitutivo para la simulación del comportamiento de materiales compuestos, formulado en esta monografía surge de la combinación de la teoría anisótropa planteada en el Apartado 3.3, de la teoría de mezclas modificada, presentada en el Capítulo 4, que permite tener en cuenta los fenómenos de deslizamiento entre fibra y matriz. Los modelos anteriormente mencionados están formulados en el contexto de una cinemática de grandes deformaciones.

En el Apartado 6.2 se presenta el planteamiento del problema junto con las variables de estado utilizadas para caracterizar el material y las ecuaciones que gobiernan el comportamiento mecánico del sólido.

A continuación, en el Apartado 6.3 se plantea la equivalencia entre las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento mecánico del medio continuo con las formas integrales o débiles.

Posteriormente, en el Apartado 6.4 se presentan las formulaciones lagrangeanas total y actualizada y la formulación propuesta en esta monografía.

En el Apartado 6.5 se describe la discretización espacial del problema continuo utilizando el método de los elementos finitos (MEF). Este método es el procedimiento elegido para la resolución aproximada de las ecuaciones diferenciales que expresan el comportamiento de un problema físico y que puede aplicarse a través de un tratamiento variacional o bien residual (Método de los residuos ponderados).

Debido a la presencia de grandes deformaciones y fenómenos plásticos el problema planteado resulta no-lineal. En el Apartado 6.6 se muestra la resolución de este problema a través de un planteamiento incremental-iterativo basado en la linealización del sistema de ecuaciones no-lineal.

Posteriormente, en el Apartado 6.7 se describe la implementación de las teorías presentadas en el Apartado 3.3 y en el Capítulo 4 y su modificación presentada en el Capítulo 5.

Por último, en el Apartado 6.8 se presenta el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva que permite obtener matrices de rigidez consistente. En la resolución de problemas elastoplásticos que incluyen ecuaciones constitutivas incrementales la consistencia entre el operador tangente y el algoritmo de integración empleado en la solución del problema incremental juega un papel fundamental en la reducción del tiempo de solución del problema. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton.

6.2 Planteamiento del problema

La simulación del comportamiento de materiales compuestos consiste en la resolución de un problema mecánico en el que se plantean las condiciones de equilibrio que deben satisfacer las tensiones que se generan cuando se someten estos materiales a la acción de cargas externas.

6.2.1 Variables de estado

En el Cuadro 1 se presentan las variables de estado de la formulación mecánica, en donde $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{e}$ representan los tensores de deformaciones en las configuraciones referencial y actualizada respectivamente, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{b}$ son los tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green, $\boldsymbol{G}$ y $\boldsymbol{g}$ representan la métrica en las configuraciones referencial y actualizada (ver Apéndice A) y $\boldsymbol{\alpha}$ es el conjunto de variables internas α_k $(k = 1, ..., n)$ (ver Capítulo 3). Se admite, además, la existencia de una función de energía libre específica en cada configuración (Ψ y ψ) que son funciones de estado y dependen de las variables de estado libres y de las internas.

6.2.2 Ecuaciones de gobierno

Configuración referencial

La ecuación diferencial que gobierna el problema mecánico es la de conservación de la cantidad de movimiento. La expresión local referencial del principio de conservación

Cuadro 1: Variables de estado y función de energía libre

•Variables de estado

Variables libres

Tensor de deformaciones en la configuración referencial

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}\right)$$

Tensor de deformaciones en la configuración actualizada

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{g} - \left(\boldsymbol{b}\right)^{-1}\right]$$

Variables internas

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_k] \text{ con } k = 1, ..., n$$

• Función de energía libre específica en la conf. referencial

$$\Psi = \Psi\left\{\boldsymbol{E},\ \boldsymbol{\mathcal{C}}, \boldsymbol{\alpha}\right\} \text{ en } \Omega$$

• Función de energía libre específica en la conf. actualizada

$$\psi = \psi\left\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{c}\ , \boldsymbol{\alpha}\right\} \text{ en } \Omega$$

de la cantidad de movimiento en una forma conveniente para su implementación en técnicas numéricas de solución de ecuaciones diferenciales está dada por (Simo y Hughes, 1998):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{B} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{V}} \qquad \text{en } \Omega_0 \tag{6.1}$$

donde $\boldsymbol{P}$ es el primer tensor de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{B}$ son las fuerzas másicas y $\dot{\boldsymbol{V}}$ es la aceleración. En el presente trabajo se estudian fenómenos cuasi-estáticos en los cuales los efectos inerciales no tienen ninguna participación y se caracterizan por el hecho de que $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{V}} = 0$. Por tanto la ecuación diferencial que gobierna el problema resulta:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{en } \Omega_0 \tag{6.2}$$

Configuración actualizada

La expresión local actualizada para fenómenos cuasi-estáticos del principio de conservación de la cantidad de movimiento en una forma conveniente para su implementación en técnicas numéricas de solución de ecuaciones diferenciales está dada por (Simo y Hughes, 1998):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{b} = 0 \qquad \text{en } \Omega_t \tag{6.3}$$

donde $\rho = \left(\frac{\rho_0}{J}\right)$ es la densidad en la configuración actualizada y b son las fuerzas másicas por unidad de volumen en la configuración actualizada.

En el Cuadro 2 se presenta la forma local de las ecuaciones básicas de la formulación mecánica junto a las condiciones de contorno e iniciales en un dominio abierto y acotado Ω y se asume la existencia de un contorno Γ $|\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ y $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$, donde Γ_u es la parte del contorno en la que se conocen los desplazamientos, Γ_t es la parte del contorno en la que se conocen las fuerzas y t representa el vector de tracciones.

Cuadro 2: Ecuaciones básicas

- Configuración referencial

  Ecuación de equilibrio mecánico

  $\nabla \cdot \boldsymbol{P} + \rho_0 \boldsymbol{B} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{V}}$ en Ω_0

  Condiciones de contorno

  Dirichlet

  $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$ en Γ_{u_0}

  Newman

  $\boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{N} = \boldsymbol{t}$ en Γ_{t_0} con normal $\boldsymbol{N}$

- Configuración actualizada

  Ecuación de equilibrio mecánico

  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \boldsymbol{b} = 0$ en Ω_t

  Condiciones de contorno

  Dirichlet

  $\boldsymbol{u} = \hat{\boldsymbol{u}}$ en Γ_{u_t}

  Newman

  $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{t}$ en Γ_{t_t} con normal $\boldsymbol{n}$

6.3 Equivalencia entre las ecuaciones diferenciales y las formas integrales o débiles

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con sus condiciones de borde existen básicamente para su resolución dos caminos posibles: a) encontrar la solución exacta o, en su defecto, de ser esta imposible o extremadamente laboriosa, b) buscar una solución aproximada al problema planteado (Métodos aproximados). Dentro de los

métodos aproximados es posible resolver la ecuación diferencial original directamente con el conocido método de las diferencias finitas o bien trabajar con una formulación integral equivalente a la diferencial.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales dados en las ecs. (6.2) y (6.3) deben ser nulos en todos los puntos del dominio Ω y se deben satisfacer, además, las condiciones de contorno impuestas. Aplicando el método de los residuos ponderados[1] en las configuraciones referencial y actualizada se obtiene respectivamente,

Configuración referencial:

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{W}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{P}\right) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{W}\rho_0 \boldsymbol{B} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t_0}} \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{N}\right) d\Gamma_{t_0} = 0 \tag{6.4}$$

Configuración actualizada:

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{W}\left(\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}\right) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{W}\rho \boldsymbol{b} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{t_t}} \boldsymbol{W}\left(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\right) d\Gamma_{t_t} = 0 \tag{6.5}$$

donde $\boldsymbol{W}$ es un conjunto de funciones arbitrarias de prueba asociadas al campo de los desplazamientos y que satisfacen las condiciones de contorno Dirichlet en el contorno Γ_{u_t}. Aplicando el teorema de Gauss, se obtiene la forma débil de la ecuación de movimiento:

Configuración referencial:

$$-\int_{\Omega_0} \nabla \boldsymbol{W}\boldsymbol{P} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \boldsymbol{W}\rho_0 \boldsymbol{B} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t_0}} \boldsymbol{W}\boldsymbol{t} d\Gamma_{t_0} = 0 \tag{6.6}$$

Configuración actualizada:

$$-\int_{\Omega_t} \nabla \boldsymbol{W}\boldsymbol{\tau} d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{W}\rho \boldsymbol{b} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{t_t}} \boldsymbol{W}\boldsymbol{t} d\Gamma_{t_t} = 0 \tag{6.7}$$

Las derivadas que se observan en las ecs. (6.6) y (6.7) exigen un menor orden de continuidad en el espacio de solución que las que se tienen en las ecs. (6.4) y (6.5). En este caso se necesita una continuidad de menor orden al elegir la función incógnita, pero al precio de mayor continuidad en las funciones de peso $\boldsymbol{W}$ (Zienkiewicz y Taylor, 1994).

[1] El método de los residuos ponderados se basa en una técnica que parte de operar, no ya con la ecuación diferencial del problema, sino con una ecuación integral equivalente a ella.

6.4 Formulaciones lagrangeanas total y actualizada

En la mecánica de medios continuos los problemas se pueden formular utilizando como referencia las coordenadas materiales $\boldsymbol{X}$ o las coordenadas espaciales $\boldsymbol{x}$, dando lugar a las descripciones material o langrangeana o a la descripción espacial o euleriana. La descripción material se caracteriza porque las propiedades de todas las partículas del cuerpo se siguen desde su posición original, en la configuración referencial, a su posición actual, prestándose atención a lo que le sucede a la partícula. En la descripción espacial la atención se centra en eventos que suceden en un punto fijo en el espacio. La descripción material o lagrangeana es muy utilizada en mecánica de sólidos; mientras que en mecánica de fluidos se adopta la descripción espacial o euleriana (Malvern, 1969).

Dado un cuerpo en el espacio y un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, el equilibrio de este cuerpo en el tiempo $t + \Delta t$ se expresa teniendo en cuenta el principio de los trabajos virtuales, que establece la igualdad de los trabajos virtuales internos y externos. En la configuración actualizada el principio de los trabajos virtuales está dado por:

$$\int_{V^{t+\Delta t}} \delta \boldsymbol{e}^{t+\Delta t} : \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} = \int_{V^{t+\Delta t}} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dV^{t+\Delta t} + \int_{S^{t+\Delta t}} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dS^{t+\Delta t} \tag{6.8}$$

donde $\boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, $\delta \boldsymbol{e}^{t+\Delta t}$ es el tensor de deformaciones virtuales correspondiente a un desplazamiento virtual $\delta \boldsymbol{u}$, $V^{t+\Delta t}$ es el volumen del cuerpo en el tiempo $t + \Delta t$, $\boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t}$ las fuerzas externas por unidad de volumen y $\boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t}$ las fuerzas externas por unidad de superficie aplicadas en el tiempo $t + \Delta t$. En la configuración referencial la expresión del principio de los trabajos virtuales resulta:

$$\int_{V^0} \delta \boldsymbol{E}^{t+\Delta t} : \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} = \int_{V^0} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dV^0 + \int_{S^0} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dS^0 \tag{6.9}$$

La dificultad fundamental en la aplicación de la ec.(6.8) o de la ec. (6.9) reside en que la configuración del sólido es desconocida en el tiempo $t + \Delta t$. El continuo cambio en la configuración del sólido conlleva importantes consecuencias en los procedimientos de análisis incrementales.

En el caso general, un sólido puede sufrir grandes desplazamientos y/o deformaciones y poseer una relación constitutiva no-lineal, por lo tanto no es posible hallar directamente una solución de la ec.(6.8) en el tiempo $t + \Delta t$. Para obtener

una solución aproximada, es necesario referir todas las variables a una configuración en equilibrio calculada previamente, luego se linealiza la ecuación resultante y se mejora esta aproximación en sucesivas iteraciones.

La configuración de equilibrio calculada previamente y utilizada como referencia puede ser cualquiera de las soluciones obtenidas para los tiempos 0, Δt, $2\Delta t$, ..., t. De todas estas opciones de referencia, en la práctica se eligen dos, dando lugar a las formulaciones denominadas *lagrangeana total* y *lagrangeana actualizada.* La descripción lagrangeana total utiliza como referencia la configuración inicial, es decir, cuando $t = 0$. La descripción lagrangeana actualizada toma como referencia la última configuración calculada. Ambas formulaciones incluyen todas las variables cinemáticas de grandes desplazamientos, deformaciones y rotaciones.

La formulación lagrangeana total considera la ecuación de equilibrio energético como:

$$\int_{V^0} \delta \boldsymbol{E}_0^{t+\Delta t} : \boldsymbol{S}_0^{t+\Delta t} \; dV^0 = \int_{V^0} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dV^0 + \int_{S^0} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dS^0 \tag{6.10}$$

donde V^0 es el volumen en la configuración inicial. En la formulación lagrangeana actualizada la ecuación de equilibrio energético resulta:

$$\int_{V^t} \delta \boldsymbol{e}^{t+\Delta t} : \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} dV^t = \int_{V^t} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dV^t + \int_{S^t} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t} \cdot \delta \boldsymbol{u} \; dS^t \tag{6.11}$$

donde V^t es el volumen actualizado del sólido. Las formulaciones lagrangeana total y actualizada expresadas en las ecs. (6.10) y (6.11) resultan similares. La única diferencia radica en la distinta configuración de referencia utilizada por cada una de las formulaciones. Ambas formulaciones conducen a idénticos resultados si se utilizan los tensores constitutivos apropiados (Bathe, 1982).

Disponiendo de los tensores de tensiones y constitutivo en la configuración referencial , los correspondientes tensores en la configuración actualizada se obtienen mediante las operaciones de transporte *push-forward.* El transporte a la configuración referencial se realiza mediante la operación *pull-back* (ver Apéndice A).

La implementación de las operaciones *push-forward* y *pull-back* en un código de elementos finitos que contemple grandes deformaciones, permite tratar el problema con cualquiera de las dos formulaciones: lagrangeana total o actualizada, debiéndose obtener idénticos resultados. La elección de una u otra formulación depende fundamentalmente de la configuración en la cual se conoce la forma explícita del tensor constitutivo, pues si bien este tensor puede transportarse de una a otra configuración con las operaciones *push-forward* y *pull-back*, estos transportes tienen un

coste computacional y al tratar con problemas no-lineales, estas operaciones deben realizarse en cada iteración hasta conseguir el equilibrio en el paso de carga.

En la Figura 6.1 se observa los pasos en un código de elementos finitos de las formulaciones lagrangeana total y actualizada.

En la Figura 6.2 se presenta el algoritmo utilizado en el modelo constitutivo para materiales compuestos propuesto. El algoritmo propuesto es una combinación de la formulación lagrangeana total y actualizada. Este algoritmo se caracteriza por realizar solo la integración de la ecuación constitutiva en la configuración actualizada, mientras que el resto de operaciones se llevan a cabo en la configuración referencial. La elección de esta formulación se debe a varias razones, entre ellas es posible mencionar que la verificación del equilibrio se realiza en la configuración referencial ya que en la misma el volumen se mantiene constante y tampoco es necesario realizar un seguimiento de las cargas. La integración de la ecuación constitutiva se lleva a cabo en la configuración actualizada ya que en esta configuración se conoce la tensión de fluencia del material. El paso del tensor de deformaciones de la formulación lagrangeana total a la actualizada se realiza a través de la operación push-forward y el retorno a la formulación total del tensor de tensiones que se obtiene de la integración del modelo constitutivo se realiza a través de la operación de pull-back.

6.5 Discretización espacial

En las últimas cuatro décadas el Método de los Elementos Finitos (MEF) se ha convertido en el procedimiento numérico más utilizado para la resolución numérica aproximada de un sistema de ecuaciones diferenciales y, es por ende, muy utilizado en el análisis de estructuras (Bathe, 1982) (Hughes, 1987) (Oñate, 1992) (Zienkiewicz y Taylor, 1994) .

El concepto fundamental de la discretización espacial consiste en aproximar la incógnita del problema ($\boldsymbol{u}$) a través de la sumatoria de un número finito y arbitrario n de funciones base N_i, multiplicadas por unos parámetros h_i de manera tal que

$$\boldsymbol{u} \simeq \tilde{\boldsymbol{u}} = \sum_{i=1}^{n} N_i h_i = \boldsymbol{N}\boldsymbol{h} \tag{6.12}$$

Así el problema se reduce a calcular el valor de los n parámetros h_i que satisfacen la forma integral de la ecuación diferencial. En el problema mecánico esta forma integral está representada por la forma débil de la ecuación del movimiento. (ver ecs. (6.6) y (6.7))

Discretizando el dominio en elementos finitos según la forma clásica y utilizando la interpolación espacial convencional para el campo de los desplazamientos se tiene

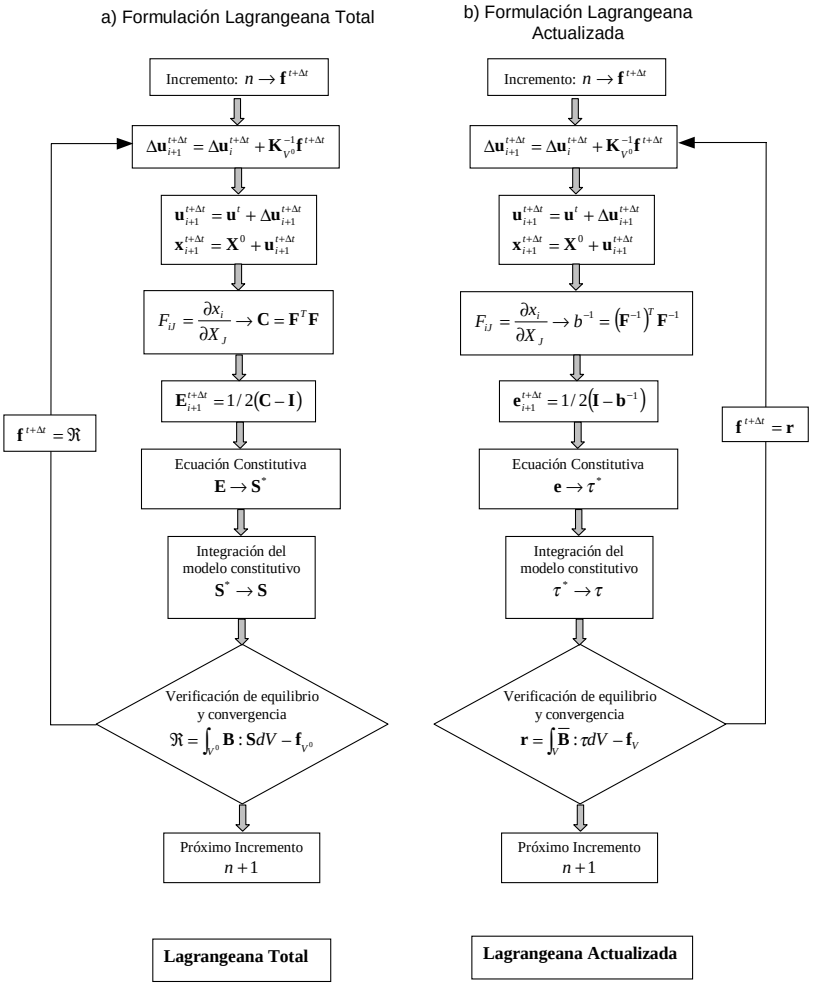

Figura 6.1: Resolución de un problema no lineal mediante las formulaciones lagrangeanas a) total y b) actualizada.

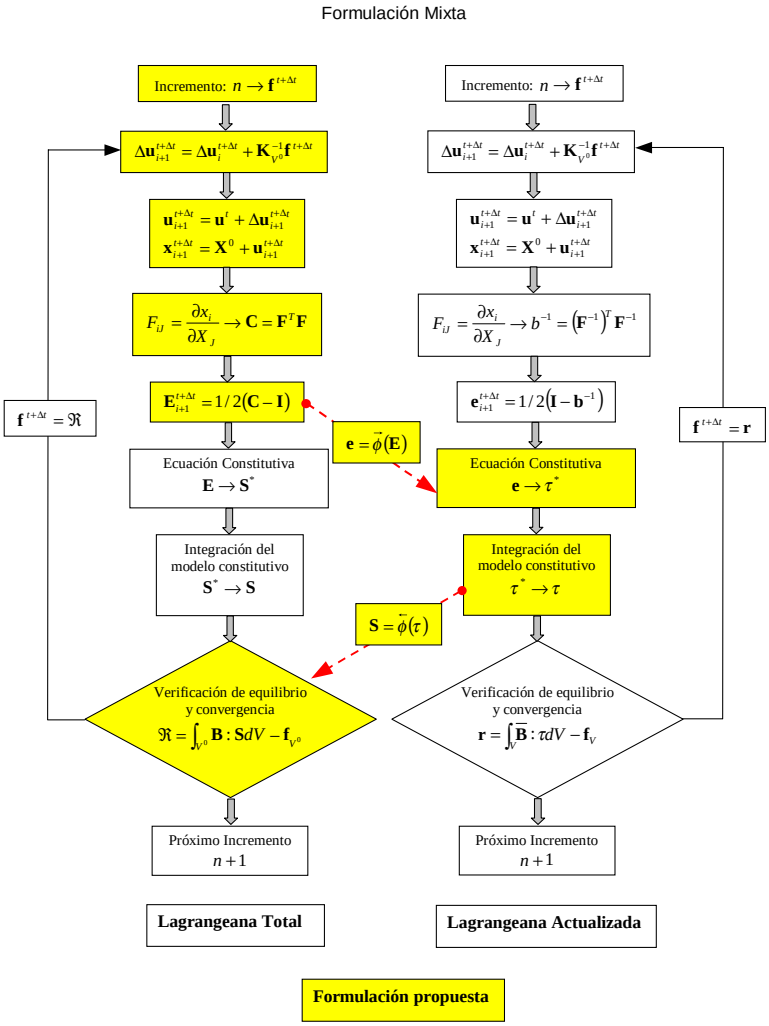

Figura 6.2: Resolución de un problema no lineal mediante una formulación mixta.

$$\boldsymbol{u}^e = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{N}^e_{U_i} \tilde{\boldsymbol{u}}^e_i = \boldsymbol{N}^e_U \tilde{\boldsymbol{u}}^e \tag{6.13}$$

donde $\boldsymbol{N}^e_U = \left[N^e_{U_1}, ..., N^e_{U_1}\right]$ son las funciones de interpolación de los desplazamientos elementales (e) desde $i = 1, ..., n_{node}$ y $\tilde{\boldsymbol{u}}^e$ son los desplazamientos nodales. La ecuación constitutiva establece el valor de las tensiones en las configuraciones referencial y actualizada y esta dada por las ecs. (3.8) y (3.20). Los tensores de deformación de Green-Lagrange y Almansi en función de los desplazamientos están dados por (Spencer, 1992):

$$E_{RS} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_R}{\partial X_S} + \frac{\partial u_S}{\partial X_R} + \frac{\partial u_i}{\partial X_R}\frac{\partial u_i}{\partial X_S}\right) \tag{6.14}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T\right)^{-1}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_R}{\partial x_i}\frac{\partial u_R}{\partial x_j}\right) \tag{6.15}$$

La deformación de Green-Lagrange elemental se obtiene teniendo en cuenta las ecs. (6.13) y (6.14)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}^{(e)} &= \bar{\nabla}^S\left(\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\bar{\nabla}\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right)\cdot\left(\bar{\nabla}\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right)^T\right] \\ &= \left[\boldsymbol{B}_0 + \frac{1}{2}\left(\left(\bar{\nabla}\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right) + \left(\bar{\nabla}\boldsymbol{N}^e_U\right)^T\right)\right]\tilde{\boldsymbol{u}}^e \\ &= \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L\left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right\}\right]\tilde{\boldsymbol{u}}^e = \bar{\boldsymbol{B}}\left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right\}\tilde{\boldsymbol{u}}^e \end{aligned} \tag{6.16}$$

donde $\boldsymbol{B}_0$ es la matriz que interviene cuando se consideran solo deformaciones infinitesimales, $\boldsymbol{B}_L$ es una matriz que es función lineal de los desplazamientos y origen de la no-linealidad geométrica y $\bar{\nabla}^S$ es el operador gradiente simétrico material[2].

En forma análoga la matriz de deformaciones de Almansi elemental resulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{(e)} &= \nabla^S\left(\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\nabla\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right)\cdot\left(\nabla\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right)^T\right] \\ &= \left[\boldsymbol{B}_0 + \frac{1}{2}\left(\left(\nabla\boldsymbol{N}^e_U\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right) + \left(\nabla\boldsymbol{N}^e_U\right)^T\right)\right]\tilde{\boldsymbol{u}}^e \\ &= \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L\left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right\}\right]\tilde{\boldsymbol{u}}^e = \bar{\boldsymbol{B}}\left\{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\right\}\tilde{\boldsymbol{u}}^e \end{aligned} \tag{6.17}$$

[2]Se define el operador gradiente simétrico material como $\bar{\nabla}^S(\bullet) = \frac{1}{2}\left[(\bullet)\otimes\bar{\nabla} + \bar{\nabla}\otimes(\bullet)\right]$ y $\bar{\nabla}^T = \left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3}\end{array}\right]$

donde ∇^S es el operador gradiente simétrico espacial[3]. Sin embargo el cálculo de la deformación se realiza según las ecs. (6.14) y (6.15). En este caso se utiliza la forma de las ecs. (6.16) y (6.17) para luego calcular la matriz de rigidez elemental.

6.5.1 Método de Galerkin

El método de Galerkin, el más conocido de los métodos de residuos ponderados, consiste en utilizar como funciones de peso las mismas que se utilizan para aproximar el campo incógnita. Este método permite obtener matrices simétricas (Hughes, 1987) (Zienkiewicz y Taylor, 1994). Aplicando este método a la forma débil de las ecuación de movimiento en las configuraciones referencial y actualizada (ecs. (6.6) y (6.7)) se tiene:

$$\left[\underbrace{\int_{\Omega_0^{(e)}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot \boldsymbol{B}_0 d\Omega_0}_{\boldsymbol{K}_0^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega_0^{(e)}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot \boldsymbol{B}_L d\Omega_0}_{\boldsymbol{K}_L^{(e)}} \right] \tilde{\boldsymbol{u}}^e = \int_{\Omega_0^{(e)}} \boldsymbol{N}_U \rho_0 \boldsymbol{B} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t_0}^{(e)}} \boldsymbol{N} \boldsymbol{t} d\Gamma_{t_0} \quad (6.18)$$

$$\left[\underbrace{\int_{\Omega_t^{(e)}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{B}_0 d\Omega_t}_{\boldsymbol{K}_0^{(e)}} + \underbrace{\int_{\Omega_t^{(e)}} \boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{B}_L d\Omega_t}_{\boldsymbol{K}_L^{(e)}} \right] \tilde{\boldsymbol{u}}^e = \int_{\Omega_t^{(e)}} \boldsymbol{N}_U \rho \boldsymbol{B} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{t_t}^{(e)}} \boldsymbol{N} \boldsymbol{t} d\Gamma_{t_t} \quad (6.19)$$

El primer miembro en las ecs. (6.18) y (6.19) representa a las fuerzas internas elementales o rigidez del sistema y está formado por la suma de las fuerzas internas correspondientes al problema de pequeñas deformaciones más un término correspondiente al problema de grandes deformaciones. El segundo miembro corresponde a las fuerzas elementales externas aplicadas. Las fuerzas internas y externas aplicadas totales resultan de la sumatoria ensamblada de las contribuciones elementales, esto es:

[3] Se define el operador gradiente simétrico espacial como $\nabla^S(\bullet) = \frac{1}{2}\left[(\bullet) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\bullet)\right]$ y $\nabla^T = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array} \right]$

$$\boldsymbol{F}^{int} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \boldsymbol{f}_{(e)}^{int} \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{F}^{ext} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \boldsymbol{f}_{(e)}^{ext} \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{F}^{int} = \boldsymbol{F}^{ext} \tag{6.22}$$

donde A es el operador de ensamblaje estándar del método de los elementos finitos (Hughes, 1987). En el Cuadro 3 se resumen las expresiones elementales.

Cuadro 3: Matrices y vectores elementales de la ecuación de equilibrio discretizada

- Matriz de rigidez elemental

$$\boldsymbol{K}^{(e)} = \boldsymbol{K}_0^{(e)} + \boldsymbol{K}_L^{(e)}$$

- Vectores de fuerzas externas

Configuración referencial

$$\boldsymbol{f}_{(e)}^{ext} = \int_{\Omega_0^{(e)}} \boldsymbol{N}_U \rho_0 \boldsymbol{B} d\Omega_0 + \int_{\Gamma_{t_0}^{(e)}} \boldsymbol{N}\boldsymbol{t} d\Gamma_{t_0}$$

Configuración actualizada

$$\boldsymbol{f}_{(e)}^{ext} = \int_{\Omega_t^{(e)}} \boldsymbol{N}_U \rho \boldsymbol{B} d\Omega_t + \int_{\Gamma_{t_t}^{(e)}} \boldsymbol{N}\boldsymbol{t} d\Gamma_{t_t}$$

6.6 Resolución del problema no-lineal

El problema planteado en la ec. (6.22) es no-lineal, debido a que las fuerzas internas dependen de la incógnita del problema. La resolución de problemas no-lineales en la mecánica de sólidos a través de técnicas de discretización, por ej. MEF, conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones no-lineales complementadas con algunas restricciones que representan las condiciones de borde. El sistema de ecuaciones no-lineales resultante de la discretización se resuelve utilizando una estrategia incremental-iterativa (Bathe, 1982) (Crisfield, 1991) basado en la linealización del sistema no-lineal.

La ecuación de equilibrio discretizada en las configuraciones referencial y actualizada surge de considerar la ecuación de equilibrio energético dada por las ecs. (6.8) y (6.9), la interpolación del campo de desplazamientos dada por la ec. (6.12) y las expresiones de la deformación de Green-Lagrange y Almansi dadas por las ecs. (6.16) y (6.17)

$$\delta \boldsymbol{E}^{(e)} = \bar{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{\delta} \tilde{\boldsymbol{u}}^e \tag{6.23}$$

$$\delta \boldsymbol{e}^{(e)} = \bar{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{\delta} \tilde{\boldsymbol{u}}^e \tag{6.24}$$

$$\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\delta \tilde{\boldsymbol{u}}^e \left(\underbrace{\int_{V^0} \bar{\boldsymbol{B}}^{t+\Delta t} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{f}^e_{int}} - \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t}\, dV^0 + \int_{S^0} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t}\, dS^0}_{\boldsymbol{f}^e_{ext}} \right) \right] = 0 \tag{6.25}$$

$$\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\delta \tilde{\boldsymbol{u}}^e \left(\underbrace{\int_{V^{t+\Delta t}} \bar{\boldsymbol{B}}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{f}^e_{int}} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \underbrace{\int_{V^{t+\Delta t}} \boldsymbol{f}_V^{t+\Delta t}\, dV^{t+\Delta t} + \int_{S^{t+\Delta t}} \boldsymbol{f}_S^{t+\Delta t}\, dS^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{f}^e_{ext}} \right) \right] = 0 \tag{6.26}$$

Como $\delta \tilde{\boldsymbol{u}}$ es cualquier desplazamiento virtual admisible, es necesario que se cumpla

$$\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \boldsymbol{r}^e \{\boldsymbol{u}\} = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{f}^e_{int} \{\boldsymbol{u}\} - \boldsymbol{f}^e_{ext} \right] = 0 \tag{6.27}$$

donde $\boldsymbol{f}^e_{int}$ es el vector de fuerzas internas elementales que depende de los desplazamientos(incógnita del problema), $\boldsymbol{f}^e_{ext}$ es el vector de las fuerzas externas aplicadas y $\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \boldsymbol{r}^e \{\boldsymbol{u}\}$ es el vector de fuerzas residuales, que resulta nulo si se verifica el equilibrio del medio.

La solución del problema no-lineal dado por la ec. (6.27) se plantea a través de un esquema incremental-iterativo (Bathe, 1982) (Crisfield, 1991) (Zienkiewicz y Taylor, 1994). Los desplazamientos $\boldsymbol{u}$ se aproximan para cada iteración en la forma:

$$\boldsymbol{u}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} \tag{6.28}$$

donde k es el contador de iteraciones y n es el instante de tiempo actual.

El cálculo del incremento de los desplazamientos $\Delta\boldsymbol{u}^{k+1}$ se realiza considerando la linealización del término de las fuerzas internas en torno a $\boldsymbol{u}_{n+1}^{k}$ (Simo y Hughes, 1998). Teniendo en cuenta el carácter lineal de la operación de ensamblaje $\mathop{\mathrm{A}}$, en la configuración referencial se tiene

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \frac{\partial \boldsymbol{f}_{int}^{e}}{\partial \boldsymbol{u}_{n+1}^{k}} \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} &= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \frac{\partial \left[\int_{V^0} \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right]^{t+\Delta t} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} \right]}{\partial \boldsymbol{u}_{n+1}^{k}} \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right] \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\}}{\partial \boldsymbol{u}} \right] \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad + \int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right] \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right) dV^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad + \int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \left(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right) dV^{t+\Delta t} \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right] \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{B}_0 dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_0^e} \right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\}\, dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}^e_{L_1}} \\
&+ \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\} \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{B}_0 dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}^e_{L_2}} + \\
&+ \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\} \frac{\partial \boldsymbol{S}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{E}} \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\}\, dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}^e_{L_3}} \\
&+ \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{S}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}^e_S} \Bigg] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{K}^e_0 + \underbrace{\left[\boldsymbol{K}^e_{L_1} + \boldsymbol{K}^e_{L_2} + \boldsymbol{K}^e_{L_3} \right]}_{\boldsymbol{K}^e_L} + \boldsymbol{K}^e_S \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} \tag{6.29}
$$

En forma análoga a lo realizado en la configuración referencial, en la configuración actualizada se tiene:

$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \frac{\partial \boldsymbol{f}^e_{int}}{\partial \boldsymbol{u}^k_{n+1}} \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} &= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \frac{\partial \left[\int_{V^0} \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\} \right]^{t+\Delta t} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} dV^{t+\Delta t} \right]}{\partial \boldsymbol{u}^k_{n+1}} \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \left[\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\} \right] \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{u}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\}}{\partial \boldsymbol{u}} \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad + \int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \{\tilde{\boldsymbol{u}}^e\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \left(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right) dV^{t+\Delta t} \right. \\
&\quad + \int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \left(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \right) dV^{t+\Delta t} \\
&\quad \left. + \int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t} \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \boldsymbol{B}_0 dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_0^e} \right. \\
&\quad + \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_{L_1}^e} \\
&\quad + \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \boldsymbol{B}_0 dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_{L_2}^e} + \\
&\quad + \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t}}{\partial \boldsymbol{e}} \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_{L_3}^e} \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_{V^0} \boldsymbol{\tau}^{t+\Delta t} \frac{\partial \boldsymbol{B}_L \left\{ \tilde{\boldsymbol{u}}^e \right\}}{\partial \boldsymbol{u}} dV^{t+\Delta t}}_{\boldsymbol{K}_S^e} \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1} \\
&= \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{K}_0^e + \underbrace{\left[\boldsymbol{K}_{L_1}^e + \boldsymbol{K}_{L_2}^e + \boldsymbol{K}_{L_3}^e \right]}_{\boldsymbol{K}_L^e} + \boldsymbol{K}_S^e \right] \Delta \boldsymbol{u}^{k+1}
\end{aligned}
\tag{6.30}
$$

Puede demostrarse que la matriz $\boldsymbol{K}_L^e$ puede obtenerse de otra forma manteniendo la hipótesis de que las deformaciones son infinitesimales y teniendo en cuenta en el cálculo de la matriz de rigidez la variación de coordenadas (Zienkiewicz y Taylor, 1994), es decir esta matriz expresa la actualización de la geometría. Realizando la operación de ensamblaje (Hughes, 1987) de las matrices elementales se tiene:

$$\boldsymbol{K}_T = \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{K}_0^e + \boldsymbol{K}_L^e + \boldsymbol{K}_S^e\right] \tag{6.31}$$

Teniendo en cuenta la ec. (6.31), el incremento de los desplazamientos $\Delta\boldsymbol{u}^{k+1}$ se obtiene reemplazando la ecuación de equilibrio discreta del sistema dada por la ec. (6.22) por la siguiente expresión lineal

$$\left[\underbrace{\left(\boldsymbol{F}^{int}\right)_{n+1}^{k} - \left(\boldsymbol{F}^{ext}\right)_{n+1}}_{\boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{u}_n^k\right\}}\right] + \mathop{\mathrm{A}}_{e=1}^{nelem} \frac{\partial \boldsymbol{f}_{int}^e}{\partial \boldsymbol{u}_{n+1}^k} \Delta\boldsymbol{u}^{k+1} = 0 \tag{6.32}$$

de donde se obtiene el sistema de ecuaciones que permite determinar el incremento de los desplazamientos $\Delta\boldsymbol{u}^{k+1}$

$$\boldsymbol{K}_T\left\{\boldsymbol{u}_n^k\right\}\Delta\boldsymbol{u}^{k+1} = -\boldsymbol{r}\left\{\boldsymbol{u}_n^k\right\} \tag{6.33}$$

donde $\boldsymbol{K}_T\left\{\boldsymbol{u}\right\}$ es la matriz de rigidez tangente del sistema. Este método se conoce como de Newton-Raphson y es el proceso de más rápida convergencia para la solución de problemas no-lineales y es el único con convergencia cuadrática a la solución (Crisfield, 1991) (Zienkiewicz y Taylor, 1994). El procedimiento iterativo continúa y por cada iteración se resuelve un nuevo sistema de ecuaciones linealizadas, hasta que un cierto criterio de convergencia, previamente seleccionado, sea satisfecho.

6.7 Implementación de la teoría de mezclas y anisotropía en el contexto del MEF

En esta sección se presentan los pasos necesarios para la implementación del modelo constitutivo propuesto en un código de elementos finitos estándar.

Para la implementación en el contexto del MEF de la teoría anisótropa desarrollada en el Apartado 3.3 se adopta el algoritmo de transformación de los tensores de tensiones, deformaciones y constitutivo en la configuración referencial (ver apartado 3.11.1). La transformación de tensores en la configuración actualizada no se utiliza debido a que esta versión del algoritmo presenta el inconveniente de tener que calcular los operadores lineales de cambio de espacio $\boldsymbol{a}^\tau$ y $\boldsymbol{a}^e$ para cada punto de Gauss en cada iteración de equilibrio, debido a que los mismos no permanecen constantes en la configuración espacial. Ambos tensores resultan función del gradiente de las deformaciones, que expresa el movimiento del sistema referencial, y del tensor de transformaciones de espacios de tensiones y deformaciones en la configuración

referencial. (ver Apartados 3.7.1 y 3.7.2). El transporte de los tensores de transformación de espacios dado por las ecs. (3.79) y (3.86) conduce a tensores en los que no resulta posible su representación como matriz y por lo tanto con este algoritmo será necesario realizar todas las operaciones a nivel tensorial, lo que implica un elevado costo computacional.

El algoritmo propuesto tiene la desventaja de que para realizar la transformación de cualquier cantidad del espacio anisótropo real al ficticio o viceversa es necesario primero transportar estas cantidades a la configuración referencial.

En el cuadro 4 se observa que las operaciones de transporte entre los espacios isótropo ficticio y anisótropo real se realizan con el objetivo de integrar la ecuación constitutiva.

Para la implementación de la teoría de mezclas en el contexto del MEF es necesario tener en cuenta que el cálculo de la tensión predictora y la integración de la ecuación constitutiva debe realizarse para cada fase que constituye el material compuesto. Es necesario destacar que para el caso de un material compuesto cuyos componentes son materiales que presentan fenómenos no reversibles (plasticidad, daño, etc.) es necesaria la existencia de variables internas que controlan los procesos irreversibles para cada una de las fases del material compuesto. La existencia de estas variables internas para cada una de las fases del compuesto supone un elevado costo computacional desde el punto de vista de memoria requerida para almacenar estas variables que tienen en cuenta la historia de carga del componente. En el cuadro 4 (continuación) se muestra el cálculo de la tensión predictora y la integración de la ecuación constitutiva. Estas operaciones se deben realizar para cada una de las fases que constituyen el material compuesto.

Cuadro 4 : Implementación numérica

- Definición del tensor constitutivo en el espacio real anisótropo, elección del tensor constitutivo isótropo ficticio y del tensor de rotación para cada fase del material compuesto.

$$\left(\bar{\boldsymbol{C}}\right)_c ; \left[(\boldsymbol{C})_{loc}\right]_c ; (\boldsymbol{R})_c$$

- Cálculo del tensor constitutivo anisótropo en el sistema de coordenadas globales para cada fase del material compuesto.

Modelo hiperelástico lineal material

$$(\boldsymbol{C})_c = (\boldsymbol{R})_c : \left[(\boldsymbol{C})_{loc}\right]_c : (\boldsymbol{R})_c$$

- Definición de los tensores de mapeo de espacios para cada fase del material compuesto según ec. (3.62).

$$A^S_{1111} = R(0) \quad A^S_{2222} = R(90) \quad A^S_{1212} = A^S_{2121} = A^S_{2112} = R(45)$$

$$\boldsymbol{A}^E = \left(\bar{\boldsymbol{C}}\right)^{-1} : \boldsymbol{A}^S : \boldsymbol{C}$$

- Cálculo de los tensores constitutivos isótropos y anisótropo del compuesto de acuerdo con la teoría de mezclas de sustancias.

$$\boldsymbol{C} = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(\boldsymbol{C}\right)_c \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{C}} = \sum_{c=1}^{n} k_c \left(\bar{\boldsymbol{C}}\right)_c$$

★ LOOP OVER INCREMENTO DE CARGAS $n = 1$, Max. Incr.. de cargas

• LOOP OVER ITER. DE EQUILIBRIO: $k = 1$, Max. núm. de iter.

1. Cálculo de la matriz de rigidez global.

$$\left[\boldsymbol{K}^{(e)}\right]_n^k \Rightarrow (\boldsymbol{K})_n^k = \mathbb{A}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{K}^{(e)}\right]_n^i$$

2. Cálculo del incremento de deformaciones en la configuración referencial.

$$(\Delta \boldsymbol{U})_n^k = \left[(\boldsymbol{K})_n^{k-1}\right]^{-1} \cdot (\boldsymbol{F}_{resid})_n^{k-1}$$

$$(\boldsymbol{U})_n^k = (\boldsymbol{U})_n^{k-1} + (\Delta \boldsymbol{U})_n^k$$

$$(\boldsymbol{E})_n^k = 1/2 \left(\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{I}\right)$$

$$(\boldsymbol{\Delta} E)_n^k = (\boldsymbol{E})_n^k + (\boldsymbol{E})_n^{k-1}$$

Cuadro 4: Implementación numerica (continuación)

♣ LOOP SOBRE CADA FASE DEL MATERIAL COMPUESTO: j=1,NCOMP

3. Cálculo de la tensión predictora

Modelo hiperelástico material

$$\left(\boldsymbol{S}_n^k\right)_c^* = \left(\boldsymbol{S}_n^{k-1}\right)_c + (\boldsymbol{C})_c : \left(\Delta \boldsymbol{E}_n^k\right)$$

Modelo hiperelástico espacial

"Push-forward" del tensor de deformaciones a la configuración actualizada (ver Apéndice A)

$$(\Delta \boldsymbol{e})_n^k = \overrightarrow{\phi}\left[(\Delta \boldsymbol{E})_n^k\right]$$

$$\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)_c^* = \left(\boldsymbol{\tau}_n^{k-1}\right)_c + (\boldsymbol{c})_c : \left(\Delta \boldsymbol{e}_n^k\right)$$

4. Transformación al espacio isótropo ficticio

Modelo hiperelástico lineal material

$$\left(\bar{\boldsymbol{S}}_n^k\right)_c^* = \left(\boldsymbol{A}^S\right)_c : \left(\boldsymbol{S}_n^k\right)_c^*$$

$$\bar{\boldsymbol{E}}_n^k = \left(\boldsymbol{A}^E\right)_c : \boldsymbol{E}_n^k$$

$$\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_n^k\right)_c^* = \overrightarrow{\phi}\left[\left(\bar{\boldsymbol{S}}_n^k\right)_c^*\right]$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_n^k = \overrightarrow{\phi}\left[\bar{\boldsymbol{E}}_n^k\right]$$

Modelo hiperelástico lineal espacial

$$\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_n^k\right)_c^* = \overrightarrow{\phi}\left[\boldsymbol{A}^S : \left[\overleftarrow{\phi}\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*\right]\right]$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}_n^k = \overrightarrow{\phi}\left[\boldsymbol{A}^E : \left[\overleftarrow{\phi}\left(\boldsymbol{e}_n^k\right)\right]\right]$$

5. Integración de la ecuación constitutiva isótropa en la configuración actualizada

Ver Cuadro 5

6. "Pull-Back" de los tensores de tensiones y constitutivo elastoplástico tangente isótropos.

$$\left(\bar{\boldsymbol{S}}_n^k\right)_c = \overleftarrow{\phi}\left(\bar{\boldsymbol{\tau}}_n^k\right)_c$$

$$\left[\left(\bar{\boldsymbol{C}}_{ep}^t\right)_n^k\right]_c = \overleftarrow{\phi}\left[\left(\bar{\boldsymbol{c}}_{ep}^t\right)_n^k\right]_c$$

Cuadro 4: Implementación numerica (continuación)

7. Transformación de los tensores de tensiones y constitutivo elastoplástico tangente al espacio anisótropo real.

$$\left(\boldsymbol{S}_n^k\right)_c = \left[\left(\boldsymbol{A}^S\right)^{-1}\right]_c : \left(\bar{\boldsymbol{S}}_n^k\right)_c$$

$$\left[\left(\boldsymbol{C}_{ep}^t\right)_n^k\right]_c = \left[\left(\boldsymbol{A}^S\right)^{-1}\right]_c : \left[\left(\bar{\boldsymbol{C}}_{ep}^t\right)_n^k\right]_c : \left(\boldsymbol{A}^E\right)_c$$

♣ END LOOP SOBRE CADA FASE DEL MATERIAL COMPUESTO

8. Cálculo de las tensiones y el tensor constitutivo de acuerdo con la teoría de mezclas de sustancias.

$$\left(\boldsymbol{S}\right)_n^k = \sum_{i=1}^{ncomp} k_c \left[\left(\boldsymbol{S}\right)_n^k\right]_c$$

$$\left[\boldsymbol{C}_{ep}^t\right]_n^k = \sum_{i=1}^{ncomp} k_c \left[\left[\boldsymbol{C}_{ep}^t\right]_n^k\right]_c$$

9. Cálculo de las fuerzas residuales en la configuración referencial.

$$\left[\boldsymbol{F}_{resid}^{(e)}\right]_n^k \Rightarrow \left(\boldsymbol{F}_{resid}\right)_n^k = \mathbb{A}_{e=1}^{nelem} \left[\boldsymbol{F}_{resid}^{(e)}\right]_n^k$$

Si $\|\boldsymbol{F}_{resid}\| > 0 \Longrightarrow k = k+1$ Regresar a (1)

si no solución convergida para el incremento n

$n = n+1$ Nuevo incremento de carga

• END LOOP SOBRE CADA ITERACION DE EQUILIBRIO

★ END LOOP SOBRE CADA INCREMENTO DE CARGA

STOP

6.8 Integración de la ecuación constitutiva isótropa

La formulación anisótropa presentada en el Apartado 3.3 permite utilizar todas las técnicas y procedimientos desarrollados para la integración de la ecuación constitutiva de materiales isótropos.

En los materiales que presentan un comportamiento inelástico la respuesta se obtiene como consecuencia de un proceso incremental caracterizado por ecuaciones constitutivas incrementales. Para el caso de materiales elásticos, la función de respuesta del tensor de tensiones se obtiene en forma directa y luego se introduce en la forma débil.

El caso de materiales con comportamiento inelástico requiere la integración numérica de la ecuación constitutiva en una secuencia discreta de pasos de tiempo (Simo y Taylor, 1985). El resultado del algoritmo de integración es una función de respuesta no-lineal que define el tensor de tensiones como una función de la historia de deformaciones hasta el paso de tiempo actual.

El operador tangente que interviene en el problema linealizado se debe obtener mediante una linealización de la función de respuesta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos tipo Newton(Simo y Taylor, 1985)(Crisfield, 1991). En funciones de potencial plástico sencillas es posible obtener una expresión analítica del tensor constitutivo algorítmico.

La precisión con la que se obtiene la matriz de rigidez tangente del sistema influye directamente en la velocidad de convergencia. La precisión con la que se integra la ecuación constitutiva tiene un impacto directo en la exactitud general del análisis.(Ortiz y Popov, 1985)

En el contexto de los elementos finitos la integración de la ecuación constitutiva se lleva a cabo a nivel de punto de Gauss para un incremento de deformaciones dado. Las incógnitas resultan la tensión actualizada y las variables internas.

El problema de integración de la ecuación constitutiva se resuelve mediante una linealización de la ecuación diferencial, esto es, reemplazando la ley elastoplástica diferencial por una regla que permita realizar los cálculos para incrementos finitos. Durante el cálculo se deben actualizar las deformaciones $(\boldsymbol{e})_{n-1}$, las variables internas $(\boldsymbol{\alpha})_{n-1}$ y las tensiones $(\boldsymbol{\tau})_{n-1}$ asociadas a una configuración en equilibrio $n-1$ a sus valores $(\boldsymbol{e})_n, (\boldsymbol{\alpha})_n$ y $(\boldsymbol{\tau})_n$ en la configuración actualizada n. Los estados $n-1$ y n corresponden, en general, a dos incrementos sucesivos durante la aplicación de una carga.

El proceso de integración de la ecuación constitutiva consiste en:

En cada punto de Gauss se conoce el incremento de las deformaciones de Almansi

$(\Delta \boldsymbol{e})_n$ y se debe actualizar el estado tensional y las variables internas

$$(\boldsymbol{\tau})_n = (\boldsymbol{\tau})_{n-1} + (\Delta \boldsymbol{\tau})_n \tag{6.34}$$
$$(\boldsymbol{\alpha})_n = (\boldsymbol{\alpha})_{n-1} + (\Delta \boldsymbol{\alpha})_n \tag{6.35}$$

donde los incrementos de tensión y de las variables internas están dados por

$$(\Delta \boldsymbol{\tau})_n = (\boldsymbol{c})^{ep} : [(\Delta \boldsymbol{e})_n - (\Delta \boldsymbol{e}^{ep})_n] \tag{6.36}$$

$$(\Delta \boldsymbol{e}^{ep})_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \, \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} d\boldsymbol{\tau} \tag{6.37}$$

$$(\Delta \boldsymbol{\alpha})_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \, \boldsymbol{H}_i \{\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}\} \, d\boldsymbol{\tau} \tag{6.38}$$

El problema consiste en evaluar las integrales de la ec.(6.37) y de la ec.(6.38) con el objetivo de actualizar el estado tensional y las variable internas a un nuevo estado n. Este nuevo estado debe satisfacer la condición de fluencia y la condición de consistencia, esto es:

$$f_n = f\{(\boldsymbol{\tau})_n, (\boldsymbol{\alpha})_n\} = 0 \quad \text{y} \quad \Delta f_n = f\{(\Delta \boldsymbol{\tau})_n, (\Delta \boldsymbol{\alpha})_n\} \tag{6.39}$$

Un algoritmo eficiente para la integración numérica de la ecuación constitutiva debe satisfacer tres requerimientos básicos: (a)Consistencia con las relaciones constitutivas a integrar o precisión de primer orden; (b) Estabilidad numérica; (c) Condición de consistencia plástica incremental. Las condiciones (a) y (b) se necesitan a los fines de obtener convergencia en la solución numérica a medida que el intervalo de tiempo tiende a cero.(Ortiz y Popov, 1985)

Ortiz y Popov (Ortiz y Popov, 1985) distinguen dos familias de algoritmos de integración de las ecuaciones constitutivas que satisfacen las condiciones anteriores:

- Regla del trapecio generalizada
- Regla del punto medio generalizada

6.8.1 Algoritmo de integración: regla del trapecio generalizada

Este algoritmo que permite integrar las ecuaciones 6.37 y 6.38 y satisface las condiciones $(a) - (d)$ esta dado por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_n &= \boldsymbol{\tau}_{n-1} + \boldsymbol{c}\colon(\Delta\boldsymbol{e}_n - \Delta\boldsymbol{e}_n^p) = \boldsymbol{\tau}_n^* - \boldsymbol{c} : \Delta\boldsymbol{e}_n^p && (6.40)\\
\Delta\boldsymbol{e}_n^p &= \Delta\lambda\left[(1-\gamma)\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1} + \gamma\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] && (6.41)\\
\boldsymbol{\alpha}_n &= \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \lambda\left[(1-\gamma)\left(\boldsymbol{H}\right)_{n-1} + \gamma\left(\boldsymbol{H}\right)_n\right] && (6.42)\\
f_n &= f\left[\left(\boldsymbol{\tau}\right)_n, \boldsymbol{\alpha}_n\right] = 0 && (6.43)
\end{aligned}$$

El proceso de actualización del estado tensional está dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\tau}_n^* - \lambda\boldsymbol{c}\colon\left[(1-\gamma)\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1} + \gamma\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] \qquad (6.44)$$

donde $\boldsymbol{\tau}_n^*$ es el predictor elástico de las tensiones y esta dado por:

$$\boldsymbol{\tau}_n^* = \boldsymbol{\tau}_{n-1} + \boldsymbol{c}\colon(\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_{n-1}) \qquad (6.45)$$

La ec.(6.44) muestra que las tensiones se actualizan en dos pasos. El primer paso consiste en llevar el estado tensional $\boldsymbol{\tau}_{n-1}$ al predictor elástico $\boldsymbol{\tau}_n^*$. Posteriormente este estado tensional es mapeado para restablecer la condición de fluencia. Esta transformación se realiza en dos etapas: primero una proyección a lo largo del flujo plástico inicial $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1}$ y las tensiones así obtenidas se proyectan hacia la superficie de fluencia segun la dirección del flujo plástico final.

El parámetro γ determina el peso dado al flujo plástico inicial y final $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1}$ y $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n$ respectivamente. Para $\gamma = 0$ el algoritmo es explícito, para $\gamma > 0$ el algoritmo resulta implícito, para $\gamma = \frac{1}{2}$ coincide con el procedimiento de la normal media, para $\gamma = 1$ y plasticidad asociada se obtiene el algoritmo de *proyección del punto más cercano.*

La regla del trapecio generalizada es consistente con las relaciones constitutivas elastoplásticas para cualquier valor de γ y presenta precisión de segundo orden para $\gamma = 1/2$. La estabilidad del algoritmo es sensible al grado de distorsión que presenta la superficie de fluencia. En particular en el caso de superficies de fluencia con aristas el único valor que garantiza estabilidad es $\gamma = 1$ con el que se obtiene el método de *Backward-Euler* (Ortiz y Popov, 1985)(Crisfield, 1991).

6.8.2 Algoritmo de integración: regla del punto medio generalizada

Un algoritmo alternativo se puede obtener considerando la regla del punto medio en la forma general:

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{c}\colon(\boldsymbol{e}_n - \boldsymbol{e}_n^p) \tag{6.46}$$

$$\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n^p + \lambda \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1+\gamma} \tag{6.47}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \lambda \left(\boldsymbol{H}\right)_{n-1+\gamma} \tag{6.48}$$

$$f_n = f\left\{\left(\boldsymbol{\tau}\right)_n, \boldsymbol{\alpha}_n\right\} = 0 \tag{6.49}$$

donde:

$$\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_{n-1+\gamma} = \frac{\partial \mathrm{g}\left(\left(1-\gamma\right)\boldsymbol{\tau}_{n-1} + \gamma\boldsymbol{\tau}_n, \left(1-\gamma\right)\boldsymbol{\alpha}_n + \gamma\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\right)}{\partial \boldsymbol{\tau}} \tag{6.50}$$

$$\left(\boldsymbol{H}\right)_{n-1+\gamma} = \boldsymbol{H}\left(\left(1-\gamma\right)\boldsymbol{\tau}_{n-1} + \gamma\boldsymbol{\tau}_n, \left(1-\gamma\right)\boldsymbol{\alpha}_n + \gamma\boldsymbol{\alpha}_{n+1}\right) \tag{6.51}$$

Las ecuaciones anteriores representan un sistema de ecuaciones no-lineales cuyas incógnitas son: $\boldsymbol{\tau}_n, \boldsymbol{e}_n^p, \boldsymbol{\alpha}_n$ y λ. La regla del punto medio generalizada resulta ser también un algoritmo de retorno mapeado en el que la tensión predicha elásticamente es proyectada sobre la superficie de fluencia actualizada según la dirección del flujo evaluado en un punto intermedio dado por la ec.(6.50).

En el caso particular de una superficie de fluencia de Von Mises con plasticidad asociada y una ley de endurecimiento lineal la regla del trapecio generalizada y la regla del punto medio coinciden.

El algoritmo del punto medio generalizado es consistente para todo valor de α y presenta precisión de segundo orden para $\gamma = 1/2$. Para $\gamma < 1/2$ la regla del punto medio generalizada es solo condicionalmente estable. A diferencia de la regla del trapecio generalizada para $\gamma \geq 1/2$ es incondicionalmente estable independientemente de la elección de la superficie de carga. (Ortiz y Popov, 1985)

6.8.3 Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva con el Método de Backward-Euler

El método de Backward-Euler se obtiene cuando se adopta $\gamma = 1$ en la ec.(6.41) y en la ec.(6.42), con lo que se tiene

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_n^k &= \boldsymbol{\tau}_n^{k-1} + \boldsymbol{c}\colon\left(\Delta\boldsymbol{e}_n^k - \Delta\left(\boldsymbol{e}_n^p\right)^k\right) = \underbrace{\boldsymbol{\tau}_n^{k-1} + \boldsymbol{c}\colon\Delta\boldsymbol{e}_n^k}_{\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*} - \boldsymbol{c}\colon\Delta\left(\boldsymbol{e}_n^p\right)^k \\ &= \left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k \end{aligned} \tag{6.52}$$

donde $\boldsymbol{\tau}_n^{k-1}$ es la tensión de Kirchhoff convergida de la iteración de equilibrio $k-1$. La ec. (6.52) establece que la tensión final en el incremento de carga n, iteración de equilibrio k $\boldsymbol{\tau}_n^k$ se obtiene como el incremento elástico menos la corrección plástica dada por $\Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k$ en la que $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k$ representa la normal en el punto $\boldsymbol{\tau}_n^k$, lo que introduce una no-linealidad. Para la resolución de la ec. (6.52) se propone un procedimiento iterativo basado en un método de Newton. Al ser desconocido $\boldsymbol{\tau}_n^k$ también resulta desconocido el vector normal a la superficie de potencial plástico en ese punto $\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k$. Una primera aproximación a ${}^1\boldsymbol{\tau}_n^k$ se obtiene considerando la normal al punto predictor $\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*$

$$ {}^1\boldsymbol{\tau}_n^k = \left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^* \tag{6.53} $$

donde $\left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^*$ representa la normal a la superficie de fluencia en el predictor elástico $\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*$. En general esta estimación inicial no satisface la condición de fluencia debido a que la normal en el punto $\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*$ no es igual a la normal en ${}^1\boldsymbol{\tau}_n^k$ lo que genera un residuo

$$ {}^1\boldsymbol{r}_n^k = {}^1\boldsymbol{\tau}_n^k - \left[\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k \Bigg|_{{}^1\boldsymbol{\tau}_n^k}\right] \tag{6.54} $$

En general el residuo resulta

$$ {}^i\boldsymbol{r}_n^k = {}^i\boldsymbol{\tau}_n^k - \left[\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k \Bigg|_{{}^i\boldsymbol{\tau}_n^k}\right] \tag{6.55} $$

El procedimiento iterativo basado en un método de Newton consiste en anular el residuo dado por la ec.(6.55) mientras las tensiones finales obtenidas satisfacen la condición de fluencia $\phi = 0$. Aplicando un desarrollo en series de Taylor a la ec.(6.55) y manteniendo constante la tensión $\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*$ se obtiene

$$ \begin{aligned} {}^i\boldsymbol{r}_n^k\left\{\boldsymbol{\tau};\Delta\lambda\right\} \;=\; & {}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\left\{{}^{i-1}\boldsymbol{\tau}_n^k;{}^{i-1}\Delta\lambda_n^k\right\}\left({}^i\boldsymbol{\tau}_n^k - {}^{i-1}\boldsymbol{\tau}_n^k\right) + \\ & \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Delta\lambda}\left\{{}^{i-1}\boldsymbol{\tau}_n^k;{}^{i-1}\Delta\lambda^k\right\}\left({}^i\Delta\lambda_n^k - {}^{i-1}\Delta\lambda_n^k\right) + O(\Delta\boldsymbol{\tau}^2) + O(\Delta\left(\Delta\lambda\right)^2) = 0 \end{aligned} \tag{6.56} $$

donde ${}^i\boldsymbol{r}_n^k$ es el valor del residuo en la iteración de la integración de la ecuación constitutiva i y $\boldsymbol{\tau}_n^k$ representa la tensión en el incremento n iteración k. La linealización de la ecuación anterior se obtiene despreciando los términos de orden superior

$$ {}^{i}\boldsymbol{r}_n^k = {}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\delta\boldsymbol{\tau}_n^k + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \Delta\lambda}\delta\Delta\lambda_n^k = 0 \tag{6.57} $$

Teniendo en cuenta la ec. (6.55) se obtiene

$$ {}^{i}\boldsymbol{r}_n^k = {}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k + \delta\boldsymbol{\tau}_n^k + \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\boldsymbol{\tau}^2}\right)_n^k\Bigg|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k} \delta\boldsymbol{\tau}_n + \delta\Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Bigg|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k} = 0 \tag{6.58} $$

donde $\delta\Delta\lambda$ representa el incremento en el parámetro de consistencia $\Delta\lambda$ y $\delta\boldsymbol{\tau}_n$ representa el incremento en las tensiones en el paso n que se obtiene a partir de la ec. (6.58) como

$$ \begin{aligned} \delta\boldsymbol{\tau}_n &= -\left[\boldsymbol{I} + \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\boldsymbol{\tau}^2}\right)_n^k\Bigg|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k}\right]^{-1}\left[{}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k + \delta\Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Bigg|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k}\right] \\ &= -\boldsymbol{Q}^{-1}\,{}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k - \delta\Delta\lambda\boldsymbol{Q}^{-1} : \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Bigg|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k} \end{aligned} \tag{6.59} $$

Con el objetivo de determinar el cambio en el incremento del parámetro de consistencia $\delta\Delta\lambda$ es necesario considerar una expansión en series de Taylor de la función de fluencia alrededor del punto n

$$ \begin{aligned} {}^{i}\phi_n^k\left\{\boldsymbol{\tau}_n^k;\boldsymbol{\alpha}\right\} &= {}^{i-1}\phi_n^k + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\left({}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k - {}^{i-1}\boldsymbol{\tau}_n^k\right) + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\left({}^{i}\boldsymbol{\alpha}_n^k - {}^{i-1}\boldsymbol{\alpha}_n^k\right) \\ &= {}^{i-1}\phi_n^k + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\delta\boldsymbol{\tau}_n^k + \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}}\delta\boldsymbol{\alpha}_n^k = 0 \end{aligned} \tag{6.60} $$

Teniendo en cuenta la ley de evolución de la variable interna dada por la ec. (3.101) se tiene que

$$ \delta\boldsymbol{\alpha}_n^k = \delta\boldsymbol{\Delta}\lambda_n^k\boldsymbol{\tau} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k \tag{6.61} $$

Combinando la ec.(6.59) y la ec.(6.60) se obtiene el cambio en el parámetro de consistencia

$$ \delta\lambda_n^k = \frac{{}^{i-1}\phi_n^k - \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{Q}^{-1}\,{}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k}{\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{Q}^{-1} : \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Big|_{{}^{i}\boldsymbol{\tau}_n^k} + \underbrace{\dfrac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\tau} : \left(\dfrac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n^k}_{\boldsymbol{H}}} $$

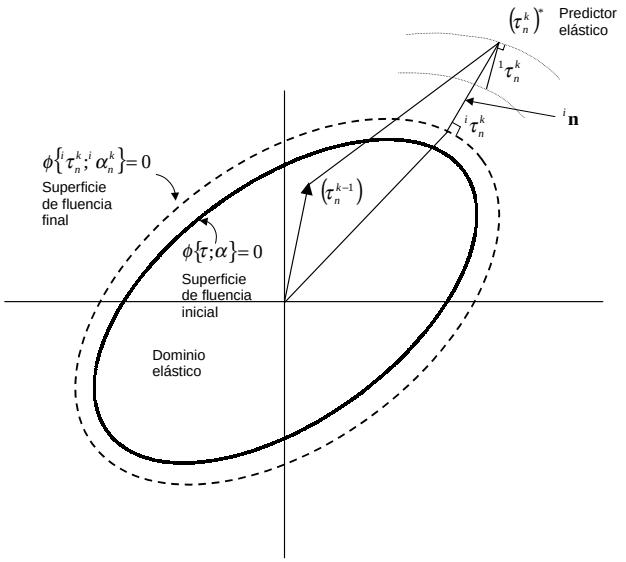

Figura 6.3: Interpretación geométrica del algoritmo de Backward-Euler para el caso de la superficie de fluencia de Von Mises bajo hipótesis de tensión plana

La dificultad de este método de integración de la ecuación constitutiva se encuentra en que para distintos criterios de potencial plástico se presenta la imposibilidad de evaluar el tensor $\boldsymbol{Q}^{-1}$ al ser dificultosa la obtención de una expresión analítica de la derivada segunda de la función de potencial plástico respecto de las tensiones.

En la Figura 6.3 se observa el método de Backward-Euler, el cual se reduce al problema de encontrar la mínima distancia entre la superficie de fluencia y el estado tensional predictor elástico.

6.8.4 Matrices de rigidez consistentes

En plasticidad computacional es necesario resolver dos tipos de problemas:

- Integración de la ecuación constitutiva a nivel de punto de Gauss (problema local).
- Equilibrio global del sólido.

La integración de la ecuación constitutiva con un método implícito, por ejemplo Backward-Euler, convierte al problema local en no-lineal. Este problema es posible resolverlo utilizando el método de Newton-Raphson. Para esto es necesario calcular el jacobiano del residuo.

El problema global se resuelve con una aproximación incremental y en cada incremento de carga es necesario resolver un sistema de ecuaciones no-lineales. A los fines de resolver el problema global no-lineal se utiliza también el método de Newton-Raphson. En este caso se necesita la matriz de rigidez tangente consistente con el objetivo de obtener convergencia cuadrática en el problema no-lineal propia del método de Newton-Raphson. La matriz de rigidez tangente consistente global se obtiene como una sumatoria ensamblada de las matrices tangentes consistentes elementales.

En la resolución de problemas elastoplásticos que incluyen ecuaciones constitutivas incrementales la consistencia entre el operador tangente y el algoritmo de integración empleado en la solución del problema incremental juega un papel fundamental. La utilización de estos operadores tangentes preserva la convergencia cuadrática de esquemas de solución iterativos basados en métodos de Newton. Las técnicas estándar utilizan el tensor tangente que resulta *inconsistente* con el método de integración de Backward-Euler y por lo tanto se destruye la convergencia cuadrática propia de estos métodos. A los fines de obtener convergencia cuadrática tanto a nivel local como global es necesario en ambos problemas el cálculo de las derivadas del vector de flujo generalizado.

El método Backward-Euler de integración de la ecuación constitutiva se expresa como

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{c} : \boldsymbol{e}_n - \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n \tag{6.62}$$

Diferenciado la ec.(6.62) se obtiene:

$$L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \boldsymbol{c} : L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n - \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}\right)_n l_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) \tag{6.63}$$

$$\begin{aligned} L_v\left(\boldsymbol{\tau}\right) &= \left[\boldsymbol{I} + \Delta\lambda \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\partial^2 \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right]^{-1} \boldsymbol{c} : \left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] && (6.64) \\ &= \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{c}\left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] = \boldsymbol{R}\left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] && (6.65) \end{aligned}$$

Las tensiones deben satisfacer la condición de consistencia, esto es $\dot{f}= 0$ y teniendo en cuenta la ec.(6.65) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right) : \boldsymbol{R}\left[L_v\left(\boldsymbol{e}\right) - \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right] - \dot{\lambda}\boldsymbol{H} = 0 \tag{6.66}$$

Reemplazando en la ec.(6.65) el valor de $\dot{\lambda}$ obtenido en la ec.(6.66) se obtiene:

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \underbrace{\left(\boldsymbol{R} - \frac{\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)_n : \boldsymbol{R} \right] \otimes \left[\boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)_n \right]}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)_n : \boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \right)_n + \boldsymbol{H}} \right)}_{\boldsymbol{c}_{ep}^t} L_v(\boldsymbol{e}) \tag{6.67}$$

$$= \boldsymbol{c}_{ep}^t : L_v(\boldsymbol{e}) \tag{6.68}$$

donde $\boldsymbol{c}_{ep}^t$ es el tensor constitutivo consistente con el operador tangente y el algoritmo de integración empleado en la solución del problema incremental. En la deducción del tensor constitutivo elastoplástico tangente estándar no se considera el último termino de la ec.(6.63) y por lo tanto se obtiene un tensor que no resulta consistente con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. En el cálculo de la matriz constitutiva elastoplástica tangente consistente interviene el tensor $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{c}$. El tensor $\boldsymbol{Q}$ modifica el tensor constitutivo $\boldsymbol{c}$ que interviene en el cálculo de la matriz elastoplástica tangente, en función del incremento en las condiciones de borde del problema global. Para el caso de incrementos infinitesimales el tensor $\boldsymbol{Q}$ tiende a la unidad debido a que el parámetro $\Delta\lambda$ que interviene en su definición tiende a anularse.

Para distintos criterios de fluencia se presenta la imposibilidad de evaluar el tensor $\boldsymbol{R}$ al ser dificultosa la obtención de una expresión analítica de la derivada segunda de la función de potencial plástico respecto de las tensiones.

Se propone utilizar la diferenciación numérica multivariable como herramienta para el cálculo de la derivada segunda de la función de potencial plástico respecto de las tensiones.

6.8.5 Tensor constitutivo algorítmico. Obtención en forma numérica.

El problema consiste en obtener en forma aproximada la derivada del vector de flujo generalizado con una herramienta simple y robusta. Esta aproximación se utilizará en la integración de la ecuación constitutiva (problema local) y en la resolución del problema global y por lo tanto debe ser lo suficientemente precisa a los fines de no destruir la convergencia cuadrática característica del método de Newton-Raphson utilizado en la solución del problema local y global.

El método se basa en obtener la derivada segunda de la función de potencial plástico respecto de las tensiones por el método de diferencias finitas multivariable (Car *et al.*, 1997a). Para el caso de una función $F : \Re^n \rightarrow \Re^m$ se utilizará el método

de diferencias hacia adelante para aproximar la componente (i, j) del jacobiano de la función (Dennis y Schnabel, 1983), esto es:

$$Q_{ij} = \frac{k_i \{\boldsymbol{\tau} + h\ i_j\} - k_i \{\boldsymbol{\tau}\}}{h} + \mathcal{O}\{h\} \tag{6.69}$$

donde $k_i = \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_i$ representa la componente i-esima del flujo plástico, i_j representa el vector unitario j-ésimo y h representa el tamaño del paso en el esquema de diferencias hacia adelante.

Esta aproximación en diferencias finitas requiere n evaluaciones de la función y puede resultar un algoritmo con un alto costo desde el punto de vista computacional si la expresión del potencial plástico es compleja. El problema se presenta en la definición del tamaño de paso h a utilizar.

Aproximación en diferencias finitas. Elección del incremento de tensiones a utilizar

La elección correcta de este incremento permite mantener la convergencia cuadrática al utilizar métodos de Newton en la solución del problema local y global. En aritmética exacta se debe adoptar el incremento lo más pequeño posible. En aritmética de precisión finita esto presenta problemas al evaluar el numerador del cociente incremental.

Los métodos de aproximaciones basados en esquemas de diferencias resultan afectados por errores de truncamiento y redondeo. El error de truncamiento decrece a medida que h tiende a cero. Por el contrario, el error de redondeo aumenta a medida que h tiende a anularse. Por lo tanto, existe un paso h óptimo que minimiza ambos errores. Dennis y Schnabel (1983) presentan una expresión que permite determinar el tamaño óptimo de h para esquemas en diferencias finitas de primer y segundo orden aplicado a primeras derivadas y para esquemas de primer orden aplicados a segundas derivadas.

Si se considera una función $f\{x\}$ unidimensional general, la cota superior del error $\mathrm{E}^{\mathrm{Tot}}$ de un esquema en diferencias finitas está dado por (Pérez Foguet *et al.*, 1998):

$$\left|\mathrm{E}^{\mathrm{Tot}}\right| \leq \left|\mathrm{E}^{\mathrm{Tr}}\right| + \left|\mathrm{E}^{\mathrm{Re}}\right| \leq \epsilon h^s + \frac{(a\xi + br)\,\hat{f}}{h^t} \tag{6.70}$$

donde t es el grado de la derivada, s es el orden en diferencias finitas empleado, $\hat{f}$ es la cota superior de $|f|$ en el entorno de x, ϵ es una constante relacionada con el orden $s + t$ de la derivada de f, r es la precisión de la máquina ($r \approx 10^{-17}$ en aritmética de doble presición), ξ es la precisión en la evaluación de la función f, y a y b son constantes relacionadas con el número de evaluaciones a

realizar de la función f. En el caso de funciones simples $\xi \approx r$, pero en el caso de necesitar varias evaluaciones de la función f, ξ aumenta.

El valor del tamaño óptimo de h que minimiza $\left|\mathrm{E}^{\mathrm{Tot}}\right|$ está dado por (Pérez Foguet *et al.*, 1998):

$$h^{\mathrm{opt}} = \sqrt[s+t]{\frac{t\,(a\xi + br)\,\hat{f}}{\epsilon\; s}} \tag{6.71}$$

El valor del tamaño óptimo de h dado por la ecuación anterior es desconocido *a priori* y no es posible calcularlo de manera sencilla ya que $\hat{f}$ y ϵ dependen de x.

Dennis y Schnabel (1983) presentan una simplificación para el cálculo de h^{opt} para esquemas de primer y segundo orden en primeras derivadas y una extensión para cualquier esquema en diferencias está dado por (Pérez Foguet *et al.*, 1998)

$$\frac{\hat{f}}{\epsilon} \propto \left(\max\left\{x, \mathrm{typ}_x\right\}\right)^{s+t} \tag{6.72}$$

donde typ_x es un valor típico de x. Considerando la ec. (6.72) la ec.(6.71) resulta:

$$h^{\mathrm{opt}} \propto \sqrt[s+t]{\max\left\{\xi; r\right\}} \max\left\{x, \mathrm{typ}_x\right\} \tag{6.73}$$

$$h^{\mathrm{opt}} = h_r^{\mathrm{opt}} \max\left\{x, \mathrm{typ}_x\right\} \tag{6.74}$$

donde h_r^{opt} se define como el tamaño de incremento óptimo relativo. El valor de h_r^{opt} es el único desconocido ya que typ_x se utiliza solamente para evitar valores muy pequeños de h^{opt} cuando $x \to 0$. La extensión de este concepto a derivadas multidimensionales se realiza aplicándolo a las derivadas parciales. Para el caso de plasticidad las funciones a evaluar no resultan complejas y por lo tanto $\xi \approx r$.

El propósito fundamental consiste en que si $k_i\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}$ tiene t dígitos *"creíbles"*, entonces $k_i\left\{\boldsymbol{\tau} + h\; i_j\right\}$ debe diferir de $k_i\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}$ en por lo menos la mitad de estos dígitos. Más precisamente, si ξ es el error relativo en el cálculo de $k_i\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}$ es deseable:

$$\frac{\left\|k_i\left\{\boldsymbol{\tau} + h\; i_j\right\} - k_i\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}\right\|}{\left\|k_i\left\{\boldsymbol{\tau}\right\}\right\|} \leq \sqrt{\xi} \tag{6.75}$$

Se define el tamaño del paso como:

$$h\; i_j = \sqrt{\xi}\,|\sigma| \tag{6.76}$$

En el caso de superficies de potencial plástico simples $\xi \simeq$ *macheps* (número de cifras significativas de la máquina) y para el caso de funciones complejas este valor debe ser superior a *macheps*.

Para valores de tensión cercanos a cero la ec.(6.76) conduce a valores muy próximos a cero, por lo tanto en el algoritmo para la obtención del incremento es necesario modificar la definición del tamaño del incremento teniendo en cuenta la ec. (6.74), con lo que se obtiene:

$$he_j = \sqrt{\eta}\max\left\{|\boldsymbol{\tau}|, typ\ \boldsymbol{\tau}\right\} \tag{6.77}$$

donde $typ\ \boldsymbol{\tau}$ representa un valor típico de $\boldsymbol{\tau}$. Se supondrá que $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\tau} + h\ \hat{\imath}$ son números calculados en forma exacta no afectados de errores de precisión finita y por lo tanto $\boldsymbol{\tau} + h\ \hat{\imath} \neq \boldsymbol{\tau}$.

Cuadro 5: Integración de la ecuación constitutiva

Dado un predictor elástico

Verificación de la condición de fluencia

Si $\phi\left\{\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*; \alpha\right\} \leq 0$ entonces

$$\boldsymbol{\tau}_n^k = \left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*$$
$$\left(e_n^k\right)^p = \left(e_n^{k-1}\right)^p$$

si no

Cálculo del parámetro de consistencia plástica

$$\Delta\lambda = \frac{f\left\{\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^*\right\}}{\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^* : \boldsymbol{c} : \left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^* + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\right) : \boldsymbol{\tau} : \left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^*}$$

Cálculo del primer corrector plástico $i = 1$

$${}^1\boldsymbol{\tau}_n^k = \left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left[\left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\right]^*$$

★ Cálculo del vector de residuo

$${}^i\boldsymbol{r}_n^k = {}^i\boldsymbol{\tau}_n^k - \left[\left(\boldsymbol{\tau}_n^k\right)^* - \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Big|_{{}^i\boldsymbol{\tau}_n^k}\right]$$

Cálculo del tensor $\boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{I} + \Delta\lambda\boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial^2 \mathrm{g}}{\boldsymbol{\tau}^2}\right)_n^k\Big|_{{}^i\boldsymbol{\tau}_n^k}\right]$$

Cálculo de la variación del parámetro de consistencia $\Delta\lambda$

$$\delta\lambda_n^k = \frac{{}^{i-1}\phi_n^k - \frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{Q}^{-1}\,{}^{i-1}\boldsymbol{r}_n^k}{\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{Q}^{-1} : \boldsymbol{c} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k\Big|_{{}^i\boldsymbol{\tau}_n^k} + \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{\alpha}} : \boldsymbol{\tau} : \left(\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial\boldsymbol{\tau}}\right)_n^k}_{\boldsymbol{H}}}$$

Cuadro 5: Integración de la ecuación constitutiva (continuación)

Cálculo de la variación de tensión

$$L_v(\boldsymbol{\tau}) = \underbrace{\left(\boldsymbol{R} - \frac{\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n : \boldsymbol{R}\right] \otimes \left[\boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right]}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n : \boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n + \boldsymbol{H}} \right)}_{\boldsymbol{c}^t_{ep}} L_v(\boldsymbol{e})$$

Cálculo del estado tensional $i = i + 1$, actualización de parámetro de consistencia $\Delta\lambda$ y verificación de la condición de fluencia

$$^i\boldsymbol{\tau}^k_n = {}^{i-1}\boldsymbol{\tau}^k_n + L_v(\boldsymbol{\tau})$$
$$^i\Delta\lambda^k_n = {}^{i-1}\Delta\lambda^k_n + \delta\lambda^k_n$$

Si $\phi\left\{\left(^i\boldsymbol{\tau}^k_n\right); \alpha\right\} \leq 0$ entonces

Actualización de las variables internas

Cálculo de la matriz de rigidez consistente

$$\boldsymbol{c}^t_{ep} = \boldsymbol{R} - \frac{\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n : \boldsymbol{R}\right] \otimes \left[\boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n\right]}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n : \boldsymbol{R} : \left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)_n + \boldsymbol{H}}$$

STOP

si no

retorno a ★

Capítulo 7

Ejemplos numéricos

7.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es la aplicación del modelo desarrollado en los Capítulos 3, 4 y 5 al análisis de piezas realizadas con materiales compuestos y comparar la respuesta del modelo propuesto con datos experimentales existentes en la literatura.

En primer lugar, en el Apartado 7.2 se presentan dos ejemplos de verificación de la teoría de mezclas básica en la que se analiza la respuesta de un material compuesto en régimen elástico lineal y en función del ángulo de orientación y de la participación volumétrica de las fibras.

Posteriormente, en el Apartado 7.3, se presenta un ejemplo cuyo objetivo es demostrar las capacidades del macromodelo desarrollado en esta monografía y comparar los resultados obtenidos con un micromodelo en el cual se individualiza cada uno de los materiales componentes del compuesto.

En el Apartado siguiente se presenta un ejemplo que consiste en comparar la simulación numérica de una probeta de material compuesto (hormigón armado) con una entalla central sometida a un estado de tracción en la cual se han discretizado las fases de refuerzo y matriz (micromodelo), con una probeta similar en la que solo existe un material compuesto constituido por una fase de refuerzo y la matriz (macromodelo). Este ejemplo tiene como objetivo principal estudiar el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz y comparar los resultados del micromodelo con los del modelo propuesto en este trabajo.

En el Apartado 7.5 se presenta la simulación numérica de la respuesta de probetas entalladas en la zona central y sometidas a un estado de tracción. La respuesta numérica se compara con ensayos experimentales obtenidos del ESI Project Nb ED/83-383/RD/MS y ED/84-415/RD/MS (Stavrinidis, 1985) y de los ensayos realizados por la European Space Agency (DFVLR, 1983).

En el Apartado 7.6 se presenta un ejemplo que consiste en simular numérica-

mente un ensayo de una probeta de material compuesto laminado multidireccional de 30 capas con una secuencia de apilamiento $(45^o, -45^o)_{SS}$ sometidas a un estado de corte plano. El ensayo se ejecuta de acuerdo con la norma ASTM D4255 (American Society for Testing and Material, 1994) y tiene por objetivo determinar las propiedades mecánicas a esfuerzos cortantes de materiales compuestos.

En el Apartado 7.7 se presenta un ejemplo cuyo objetivo principal es demostrar la capacidad del modelo constitutivo desarrollado en esta monografía y comparar su respuesta con un modelo constitutivo totalmente diferente (ver Apartado 2.12).

Finalmente, en el último apartado se presenta un ejemplo cuyo objetivo capítulo es mostrar las capacidades del modelo constitutivo desarrollado en este trabajo para simular distintos tipos de materiales compuestos tales como el concreto asfáltico.

7.2 Verificación del modelo propuesto en régimen elástico lineal

En este apartado se presentan dos ejemplos numéricos que tienen por objetivo ilustrar el comportamiento del modelo constitutivo propuesto. Para esto se compara información experimental existente en la literatura con la simulación numérica. Se proponen dos ejemplos:

1. Cálculo del módulo elástico de un material compuesto en función del ángulo de orientación de las fibras.

2. Cálculo del módulo elástico transversal de un material compuesto en función de la participación volumétrica de las fibras.

7.2.1 Módulo elástico de un material compuesto en función del ángulo de orientación de las fibras

El objetivo del ejemplo propuesto es demostrar la capacidad de la teoría de mezclas de sustancias básicas para predecir el módulo elástico de un material compuesto en función de la orientación de las fibras respecto de la dirección del esfuerzo principal. Para esto se compara información experimental existente en la literatura con las predicciones numéricas obtenidas utilizando el modelo propuesto.

Los ensayos se centran en la influencia del ángulo de orientación de la fibra respecto de la dirección del esfuerzo principal, para la determinación del módulo elástico del material compuesto. Por lo tanto, todos las simulaciones numéricas se llevan a cabo bajo régimen elástico lineal.

El ejemplo consiste en analizar una pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento de cuatro nodos en estado plano de tensiones. En la Figura

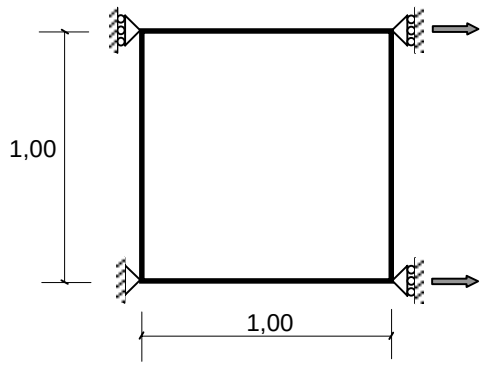

Figura 7.1: Esquema y condiciones de borde utilizadas para el cálculo del módulo elástico del compuesto.

Módulo de Young	$3,00\ Gpa$
Coeficiente de Poisson	$0,37$
V_m	$70,0\%$

Tabla 7.1: Propiedades resina poliéster

7.1 se muestra un esquema de las condiciones de borde utilizadas en la simulación numérica.

El material que se simula es un material compuesto de fibra de vidrio con resina poliéster. La matriz está constituida por un material isótropo y sus propiedades mecánicas se obtienen de datos experimentales. La fibra se simula como un material anisótropo, su módulo elástico longitudinal se obtiene de datos experimentales y los módulos elásticos transversales se pueden obtener teniendo en cuenta lo expuesto en el Apartado 4.7 y las ecs. (2.6), (2.7), (2.9) y la teoría de mezclas de sustancias básicas.

Las propiedades mecánicas de fibra y matriz utilizadas en la simulación numérica se presentan las Tablas 7.1 y 7.2.

Módulo elástico longitudinal	$75,00\ Gpa$
Módulo elástico transversal	Calculado según ecs. (4.74), (4.75) y (4.76)
Coeficiente de Poisson	$0,0$
V_m	$52,5\%$

Tabla 7.2: Propiedades fibra de vidrio

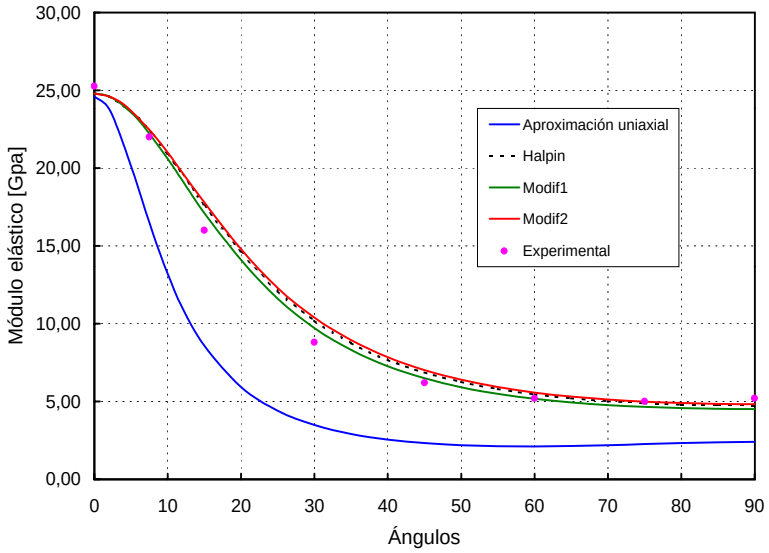

Figura 7.2: Módulo elástico de un compuesto de resina poliéster y fibra de vidrio en función del ángulo de orientación de las fibras. Datos experimentales de Hull D. (1987b).

En la Figura 7.2 se muestran los módulos elásticos del material compuesto obtenidos en la simulación numérica en función del ángulo de orientación de las fibras respecto del eje X. En la misma se presentan los resultados obtenidos en ensayos experimentales(Hull, 1987b) y cuatro curvas que muestran los resultados obtenidos teniendo en cuenta las ecs. (4.74), (4.75) y (4.76) y considerando que la fibra es un material que tiene solo rigidez longitudinal.

Los resultados de la Figura 7.2 muestran que las fibras no pueden ser consideradas como un material que tiene solo rigidez longitudinal a los fines de simular el comportamiento mecánico del material compuesto. Se observa que para un ángulo de la fibra coincidente con la dirección del esfuerzo (0^o en el ejemplo), el módulo elástico del compuesto presenta un buen acuerdo con los ensayos experimentales. Para otros ángulos esta aproximación subestima el valor del módulo elástico del compuesto respecto de los valores experimentales. (ver Figura 7.2, aproximación uniaxial)

El módulo elástico del material compuesto que se obtiene considerando a la fibra como un material ortótropo cuyo módulo elástico en la dirección transversal está dado por la ec. (4.74) y resulta el que mejor aproxima a los resultados experimentales. El módulo elástico transversal de la fibra que se obtiene considerando la ec. (4.75) sobreestima los valores del módulo elástico del compuesto para ángulos de la fibra que no coinciden con la dirección del esfuerzo. Esto se debe a que el módulo elástico transversal de la fibra se calcula teniendo en cuenta el efecto de contracción de la

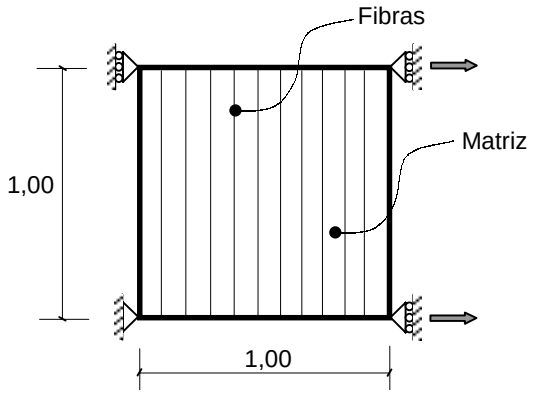

Figura 7.3: Esquema y condiciones de borde utilizadas para el cálculo del módulo elástico transversal del compuesto.

matriz. En esta monografía se presenta una formulación general tridimensional de la teoría de mezclas que permite tener en cuenta este fenómeno y por lo tanto no se debe tener en cuenta esta correción. En la Figura 7.2 se presenta también la aproximación del módulo elástico transversal considerada por Halpin y Tsai (1969) . Esta aproximación también sobreestima los valores del módulo elástico del compuesto para ángulos de la fibra que no coinciden con la dirección del esfuerzo.

7.2.2 Módulo elástico transversal de un material compuesto en función de la participación volumétrica de las fibras

El objetivo del ejemplo propuesto es demostrar la capacidad de la teoría de mezclas de sustancias básicas para predecir el módulo elástico transversal de un material compuesto en función de la participación volumétrica de las fibras. Para esto se compara información experimental existente en la literatura con las predicciones numéricas obtenidas utilizando el modelo propuesto.

Los ensayos muestran la influencia de las fibras transversales a la dirección del esfuerzo en la determinación del módulo elástico del material compuesto. Las simulaciones numéricas se llevan a cabo bajo régimen elástico lineal.

El ejemplo consiste en analizar una pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento de cuatro nodos en estado plano de tensiones. En la Figura 7.3 se muestra un esquema de las condiciones de borde utilizadas en la simulación numérica.

El material que se simula es un material compuesto de fibra de vidrio con resina poliéster. La matriz está constituida por un material isótropo y sus propiedades

Módulo de Young	$3,80\ Gpa$
Coeficiente de Poisson	$0,3$

Tabla 7.3: Propiedades resina poliéster

Módulo elástico longitudinal	$75,00\ Gpa$
Módulo elástico transversal	Calculado según ecs. (4.74), (4.75) y (4.76)
Coeficiente de Poisson	$0,0$

Tabla 7.4: Propiedades fibra de vidrio.

mecánicas se obtienen de datos experimentales. La fibra se simula como un material anisótropo, su módulo elástico longitudinal se obtiene de datos experimentales y los módulos elásticos transversales se pueden obtienen teniendo en cuenta las ecs. (4.74), (4.75), (4.76) y la teoría de mezclas de sustancias básicas.

Las propiedades mecánicas de fibra y matriz utilizadas en la simulación numérica se presentan las Tablas 7.3 y 7.4.

En la Figura 7.4 se observan los resultados experimentales y los obtenidos considerando las ecs. (4.74), (4.75), (4.76), un comportamiento mecánico de la fibra uniaxial, un modelo unidimensional y un cálculo teórico del módulo del compuesto.

Los resultados experimentales muestran, como en el ejemplo anterior, que las fibras no pueden ser consideradas como un material que tiene solo rigidez longitudinal a los fines de simular el comportamiento mecánico del material compuesto. La curva "aproximación uniaxial" son los resultados obtenidos considerando un comportamiento uniaxial de la fibra. La Figura 7.4 muestra que a mayores participaciones volumétricas de fibra el módulo elástico del compuesto disminuye. La curva "unidimensional" muestra los resultados considerando que en el sentido transversal solo colabora la matriz y que fenómenos de contracción en la dirección coincidente con las fibras son nulos (Poisson nulo). Esta curva tiene como objetivo mostrar la influencia de la contracción de la matriz por efecto de Poisson y como afecta al módulo elástico del material.

Los resultados obtenidos considerando la ec. (4.74) aproxima a los resultados experimentales para una participación volumétrica de las fibras de hasta un 55%. Para valores superiores del coeficiente de participación volumétrica esta formulación también aproxima a los resultados experimentales pero subestimándolos. El módulo elástico transversal de la fibra que se obtiene considerando las ecs. (4.75) y (4.76) sobreestiman los valores del módulo elástico del compuesto para valores por debajo del 55% de participación volumétrica. (ver Figura 7.4)

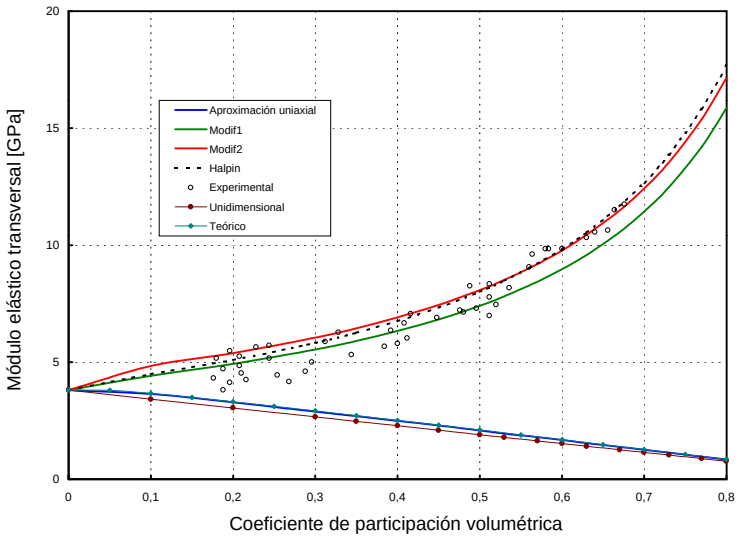

Figura 7.4: Módulo elástico de un compuesto de resina poliéster y fibra de vidrio en función de la participación volumétrica de las fibras. Datos experimentales de Hull D. (1987b).

7.3 Análisis y comparación entre un micromodelo y el modelo propuesto

El objetivo del presente ejemplo es demostrar las capacidades del macromodelo desarrollado en esta monografía y comparar los resultados obtenidos con un micromodelo en el cual se individualiza cada uno de los materiales componentes del compuesto.

El ejemplo consiste en someter a una pieza de dimensiones unitarias constituida por un material compuesto a un estado de tracción en la que se han discretizado la fase de refuerzo y la matriz y comparar los resultados obtenidos con este micromodelo con los resultados que se obtienen considerando el macromodelo propuesto en este trabajo. En la Figura 7.5 se observa la pieza de dimensiones unitarias en la que se han discretizado ambas fases del material compuesto y las condiciones de borde impuestas. La malla de elementos finitos está constituida por 5701 elementos finitos triangulares de 3 nodos y 2940 nudos.

En la simulación numérica empleando el modelo propuesto en esta monografía se analiza la misma pieza de dimensiones unitarias modelada con un único elemento finito de cuadro nodos y 2×2 puntos de integración. En este ejemplo no se considerará el fenómeno de deslizamiento entre fibra y matriz (DFM) ya que el objetivo de mismo es mostrar la validez del modelo propuesto bajo cargas que superan el límite

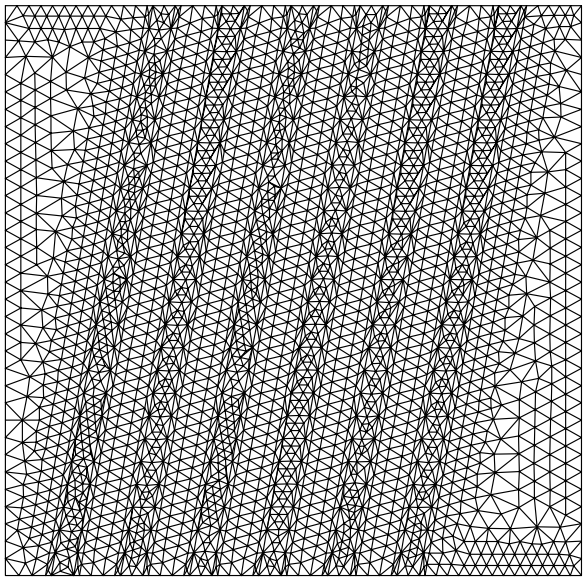

Figura 7.5: Malla elementos finitos del micromodelo

Módulo de Young	13000 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,325$
Tensión de fluencia	$43,323$ Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	$10N/m$
V_m	76%

Tabla 7.5: Propiedades resina epoxi macromodelo y micromodelo.

de proporcionalidad de los materiales componentes del compuesto.

Las propiedades mecánicas de los materiales empleados en la simulación numérica del material compuesto utilizando el modelo propuesto en este trabajo se muestran en la Tabla 7.5y 7.6.

El micromodelo está constituido por dos materiales, fibra y matriz que se consideran isótropos y homogéneos y cuyas propiedades mecánicas coinciden con las propiedades mecánicas de los componentes del macromodelo. En la Figura 7.6 se muestran los materiales empleados en el micromodelo y su distribución en la pieza.

La simulación consiste en someter a la pieza de dimensiones unitarias a desplazamientos impuestos en la parte superior de la misma generándose un estado de tracción. Este estado de tracción en la probeta genera una alineación del refuerzo en la dirección de la carga aplicada. En la Figura 7.7 se muestra la deformada en el estado final. En la misma se observa que las fibras se han alineado con la dirección

Módulo de Young	239.551 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,0$
Tensión de fluencia	3000 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
V_f	24%

Tabla 7.6: Propiedades fibra de carbono macromodelo y micromodelo.

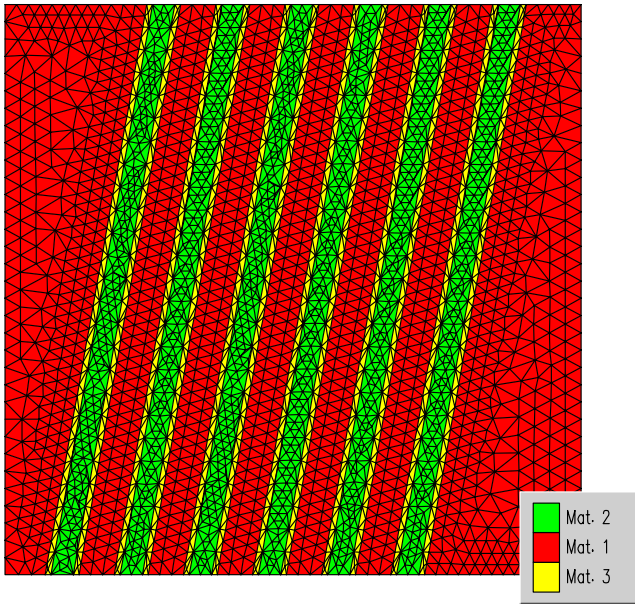

Figura 7.6: Materiales del micromodelo.

del esfuerzo aplicado. Este fenómeno de alineación de la fase de refuerzo con la dirección del esfuerzo aplicado hace necesaria la introducción de la teoría de grandes deformaciones en el modelo constitutivo propuesto en esta monografía.

El micromodelo tiene la ventaja de poder realizar un análisis detallado de los procesos que se verifican durante la aplicación de las cargas. En la Figura 7.8 se observa la tensiones cortante que se generan el material para distintos casos de carga. La Figura 7.8-1 muestra los estados tensionales en una etapa de carga en la que no se verifican tensiones superiores a los límites de proporcionalidad de los materiales que conforman el compuesto (ver Figura 7.10). En la misma se observan que la zona de la matriz comprendida entre las fibras es la que presenta un estado tensional superior. A medida que aumentan los desplazamientos impuestos (Figura 7.8-2, 7.8-3 y 7.8-4) se observa una homogeneización del estado tensional en la matriz.

En la Figura 7.9 se observan las tensiones en el micromodelo en la dirección del

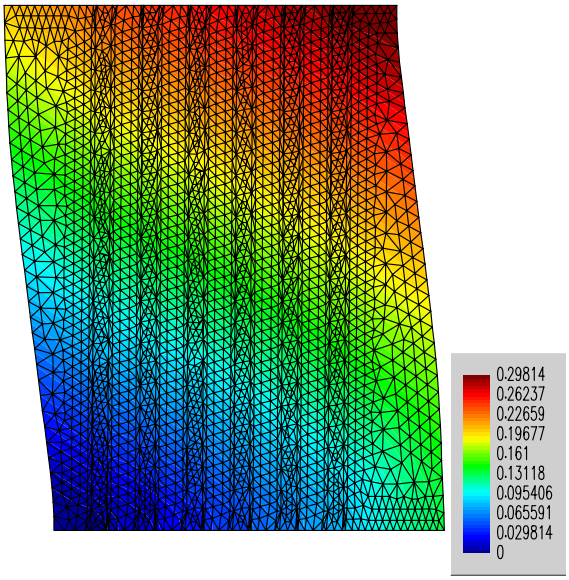

Figura 7.7: Contornos de desplazamientos y deformada del micromodelo.

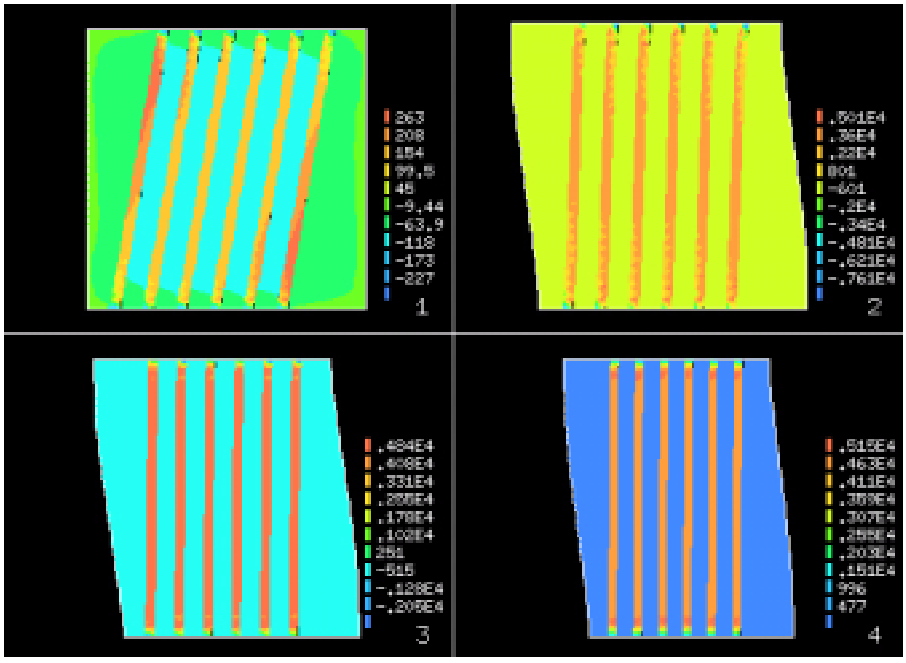

Figura 7.8: Contornos de tensiones σ_{xy} para distintas etapas de carga

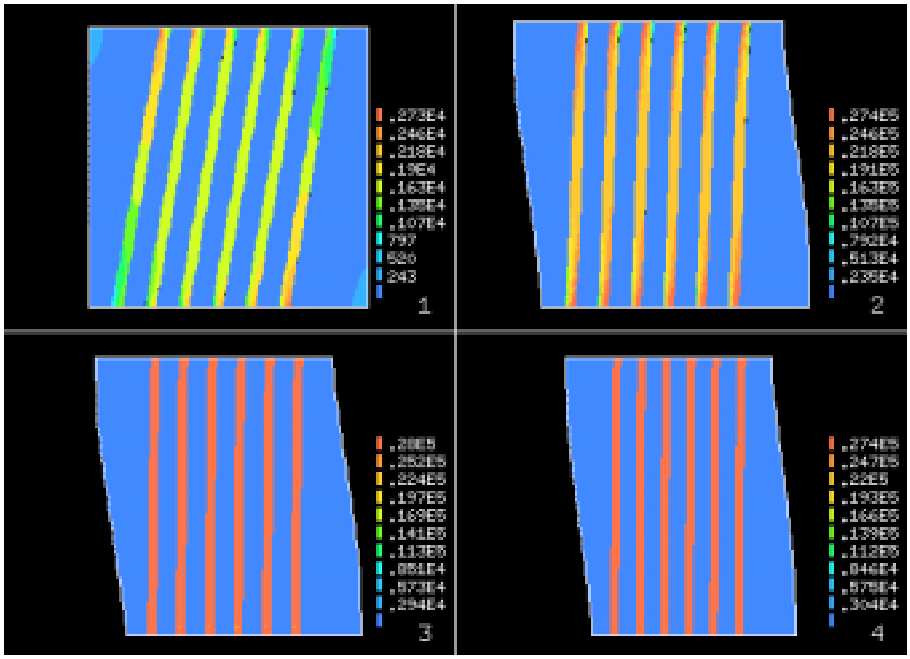

Figura 7.9: Contornos de tensiones σ_{yy} para distintas etapas de carga

desplazamiento impuesto. La Figura 7.9-1 corresponde a un estado tensional en una etapa de carga en la que no se verifican tensiones superiores a los límites de proporcionalidad de los materiales que conforman el compuesto (ver Figura 7.10). En las Figuras 7.9-2,7.9-3 y 7.9-4 se observa el estado tensional en la dirección del desplazamiento impuesto a medida que los desplazamientos aumentan. En las mismas se observa que en los primeros pasos de carga la matriz tiene un estado tensional homogéneo en la dirección del esfuerzo aplicado. En la Figura 7.9-2 se observa que el refuerzo aumenta considerablemente su estado tensional a medida que se alinea con la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 7.10 se observan los contornos de plasticidad a en cada uno de los componentes del compuesto. En la misma se observa que a medida que aumenta el desplazamiento impuesto se verifican deformaciones irreversibles en la matriz en la zona comprendida entre los refuerzos (ver Figura 7.10-2 y 7.10-3). En la Figura 7.10-4 se observa que ya se ha superado el límite de proporcionalidad del refuerzo y por lo tanto se verifican también para esta fase deformaciones irreversibles.

En la Figura 7.11 se muestra la respuesta carga-desplazamiento del micromodelo y del macromodelo considerando distintos valores del módulo transversal de la fase de refuerzo. En la misma se observa que el valor del módulo elástico transversal de esta fase juega un papel fundamental en la respuesta del macromodelo. Para el caso en que el módulo cortante es nulo se observa que una vez que la matriz ha

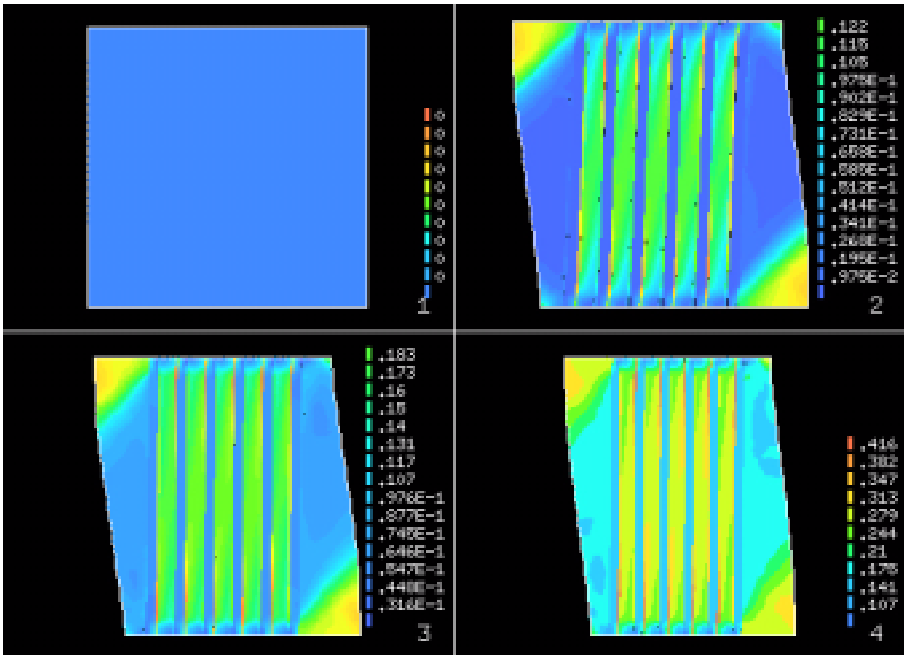

Figura 7.10: Contornos de la variable interna de plasticidad para distintos etapas de carga

alcanzado su límite de proporcionalidad la respuesta del sistema disminuye hasta el momento en el que las fibras coinciden con la dirección del esfuerzo aplicado. A partir de este punto es la fase de refuerzo la que aporta rigidez al sistema. En la figura también se observa la respuesta considerando la hipótesis de pequeñas deformaciones. La respuesta del material, para este caso, una vez alcanzado el límite de proporcionalidad de la matriz, disminuye y no se observa que las fibras colaboran en la respuesta debido a que bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones no se verifica una actualización de la geometría con lo cual las fibras no pueden alinearse con la dirección del esfuerzo aplicado.

7.4 Estudio del fenómeno DFM a través de un micromodelo y comparación con el modelo propuesto

En este apartado se presenta un ejemplo de aplicación de la formulación que combina la teoría de mezclas, el modelo anisótropo en régimen de grandes deformaciones y la teoría que permite tener en cuenta el fenómeno DFM (deslizamiento fibra-matriz)

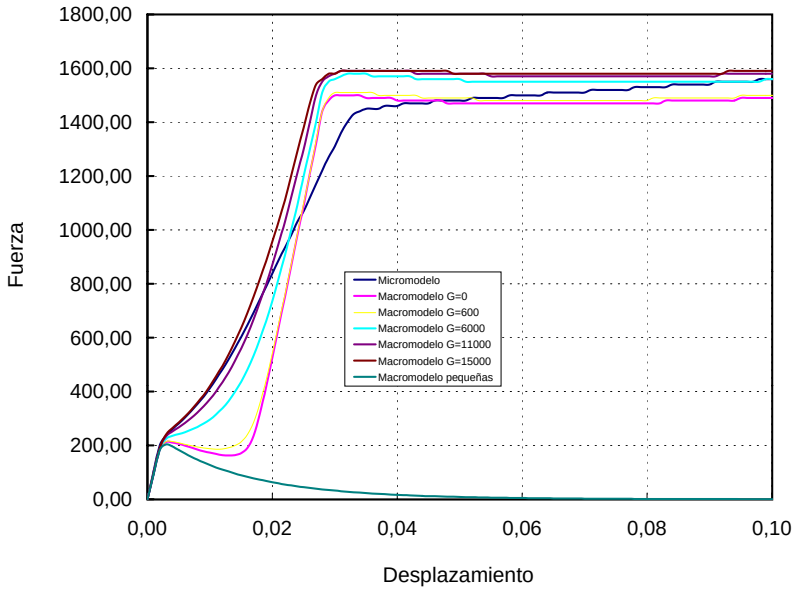

Figura 7.11: Comparación micromodelo-macromodelo. Curvas carga-desplazamiento

descrito en este trabajo. El ejemplo consiste en comparar la simulación numérica de una probeta de material compuesto (hormigón armado) con una entalla central sometida a un estado de tracción en la que se han discretizado las fases de refuerzo y matriz (micromodelo), con una probeta similar en la que solo existe un material compuesto constituido por una fase de refuerzo y la matriz (macromodelo). Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos con un total de 343 elementos, 392 nodos y 766 grados de libertad para el caso del micromodelo y 291 elementos, 336 nodos y 644 grados de libertad para el caso del macromodelo. En la Figura 7.12 se observan las mallas y las condiciones de borde empleadas para cada caso. En el micromodelo se considera que está formado por tres materiales, matriz, zona de interfase fibra-matriz y refuerzo. El macromodelo está constituido por un material compuesto constituido por dos fases: fibra de refuerzo y matriz. La Tabla 7.7 muestra las propiedades mecánicas de los materiales empleados en el micromodelo. Las propiedades mecánicas de las fases que constituyen el material compuesto del macromodelo son idénticas a las de la matriz y refuerzo correspondientes al micromodelo.

El objetivo del ejemplo es mostrar el fenómeno de transferencia de carga de la matriz hacia la fase de refuerzo. El estudio de este proceso se realiza a través de un micromodelo y luego se compara la respuesta carga-desplazamiento del mismo con un macromodelo constituido por un material compuesto y en el cual no se individualizan físicamente sus componentes. En la Figura 7.13 y 7.14 se muestra la evolución de

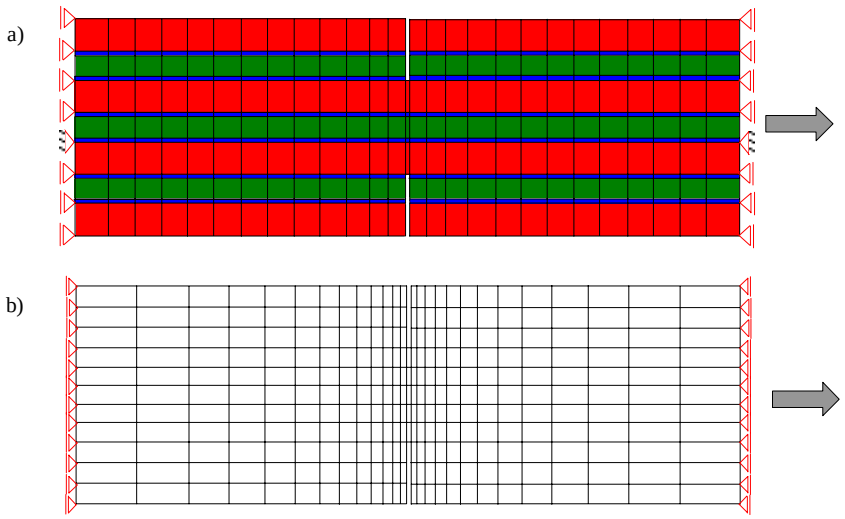

Figura 7.12: Malla de elementos finitos: a) micromodelo. b) macromodelo

	Material 1 Matriz de Hormigón	Material 2 Refuerzo de Acero	Material 3 Junta Mat-Refu
Tipo de Comportamiento	Mohr Coulomb Elasto-Plástico-Isótropo	Elástico-Isótropo	Daño de Kachanov
Mód. Young $[kp/cm^2]$	3.5×10^5	2.1×10^6	3.5×10^5
Coef. Poisson	0.2	0.0	0.0
Fricción interna	30^o	-	30^o
Resist. Compr.$[kp/cm^2]$	200	2000	20
Resist. Tracci.$[kp/cm^2]$	20	2000	20
Gf , Gc . $[kp/cm]$	$0.25, 26.0$		$2.0, 2.0$
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	Recto con ablandamiento		Exponencial con ablandamiento

Tabla 7.7: Propiedades mecánicas de los materiales del micromodelo.

la tensión cortante en la zona de interfase fibra-matriz para distintos incrementos de carga. En el primer incremento de carga, en el cual no se verifican procesos irreversibles, se observa que la distribución de cortante a lo largo del refuerzo es similar a la curva teórica que se muestra en la Figura 4.4. En la zona central se observa un cambio en el signo de los esfuerzos debido fundamentalmente a la presencia de la entalla. Las Figuras 7.15 y 7.16 muestran la evolución de la tensión longitudinal en la fase de refuerzo para distintos incrementos de carga. En la misma se observa, para el primer incremento de cargas, que en las zonas de los extremos del refuerzo se verifican las máximas tensiones cortantes mientras que las tensiones longitudinales crecen desde un valor nulo en el extremo hacia un valor constante a lo largo del refuerzo. En la zona central se observa, también, una variación de la tensión longitudinal debido a la presencia de la entalla. En estas figuras se observa, también, que un aumento en los esfuerzos aplicados produce fenómenos irreversibles en la zona de interfase matriz-refuerzo en los extremos del refuerzo. Este proceso produce una disminución de la capacidad de transferencia de esfuerzos desde la matriz hacia las fibras. Este fenómeno también provoca una modificación en el estado tensional del refuerzo y se observa que la curva de distribución de tensiones a lo largo del refuerzo deja de ser constante. En la Figura 7.17 se muestran las zonas de la interfase en las que se ha superado el límite de proporcionalidad del material para distintas etapas de carga. En la misma se observa que el fenómeno de deslizamiento relativo entre la matriz y el refuerzo comienza en la zona de los extremos de la fibra y progresa hacia el centro de la pieza.

La Figura 7.18 muestra los contornos de desplazamientos en el primer y último incremento de carga convergido para el micro y macromodelo. En el último incremento de cargas se observa que los desplazamientos se concentran en la zona central de la probeta y a lo largo del refuerzo central. En los extremos de la pieza se puede apreciar el "deslizamiento" entre fibra y refuerzo.

La Figura 7.19 muestra las respuestas en fuerzas totales para ambos casos. Se observa que los resultados del micromodelo presentan un acuerdo satisfactorio con los del macromodelo. Es necesario destacar que el micromodelo no tiene la capacidad de simular los movimientos relativos entre las distintas fases pero tiene la ventaja de permitir simular refuerzos cuya discretización aumentaría considerablemente el costo computacional del análisis debido a sus reducidas dimensiones, por ej. Fibras de Carbono.

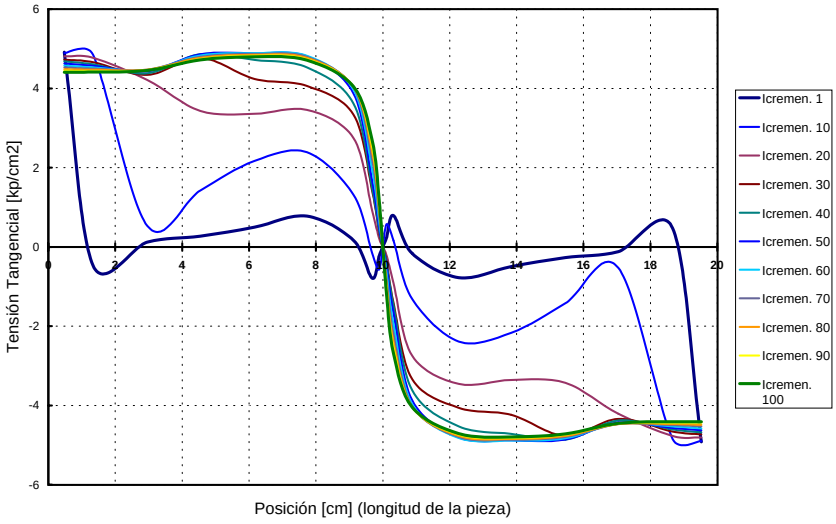

Figura 7.13: Tensiones cortantes en la interfase fibra-matriz. Incrementos 1-100

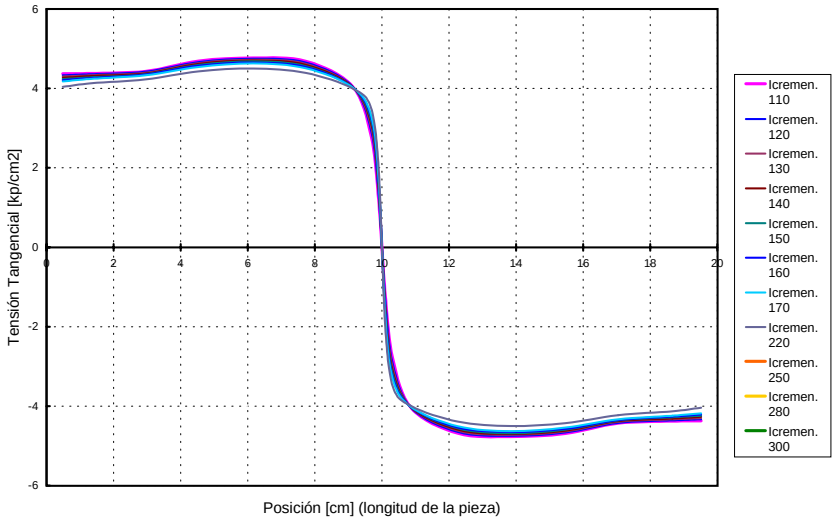

Figura 7.14: Tensiones cortantes en la interfase fibra-matriz. Incrementos 110-300

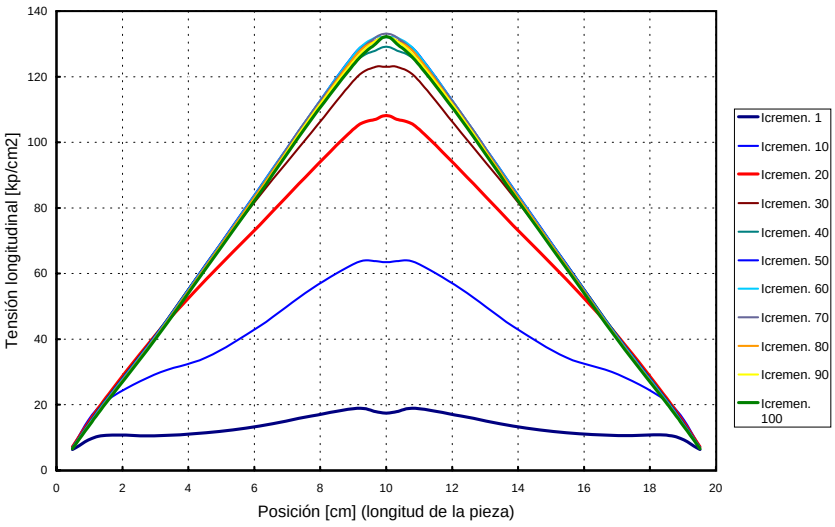

Figura 7.15: Tensiones longitudinales en el refuerzo. Incrementos 1-100

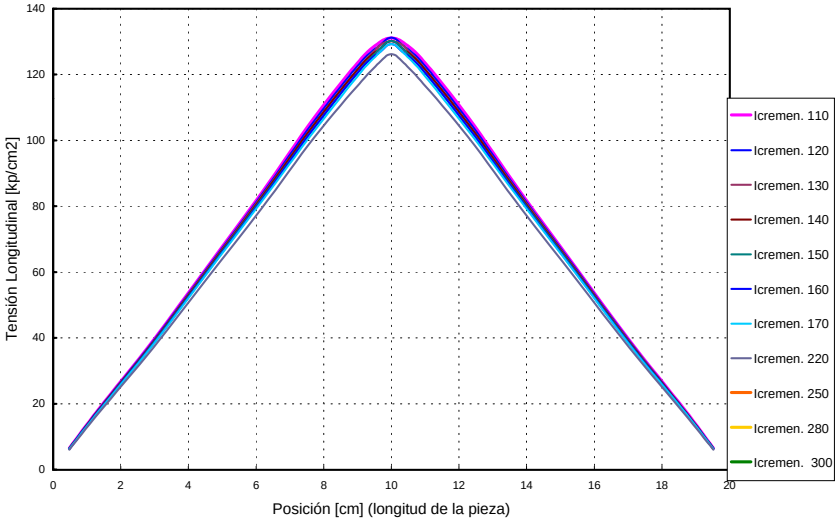

Figura 7.16: Tensiones longitudinales en el refuerzo. Incrementos 110-300

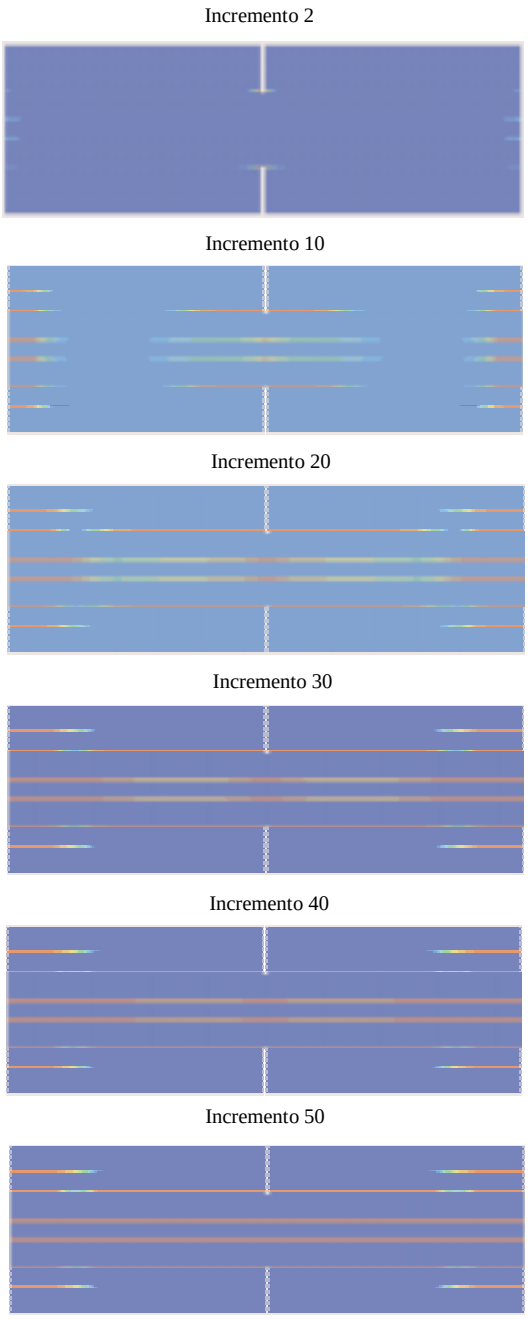

Figura 7.17: Deformaciones plásticas en la interfase fibra matriz para distintos incrementos de carga

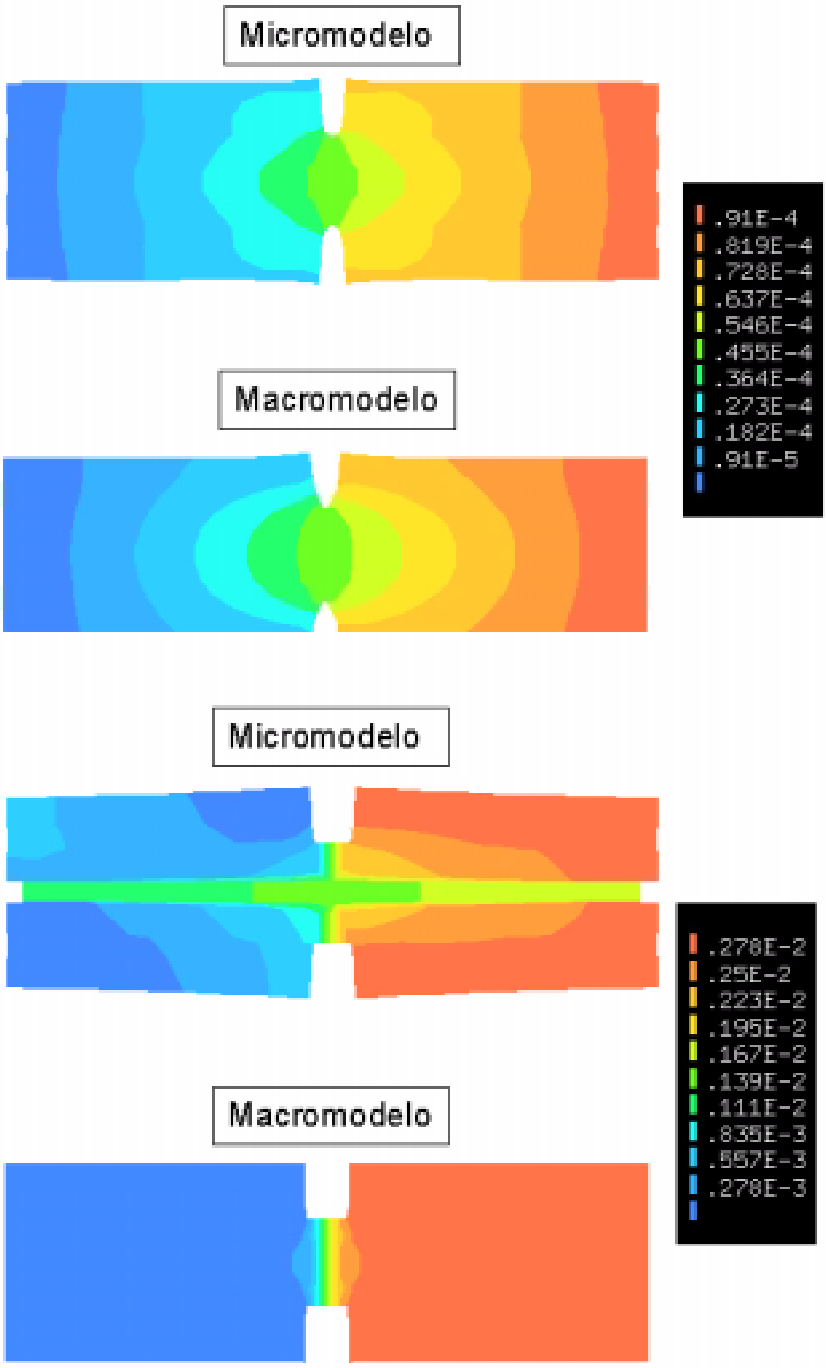

Figura 7.18: Contornos de desplazamientos del macro y micromodelo en el primer y último paso de cargas convergido

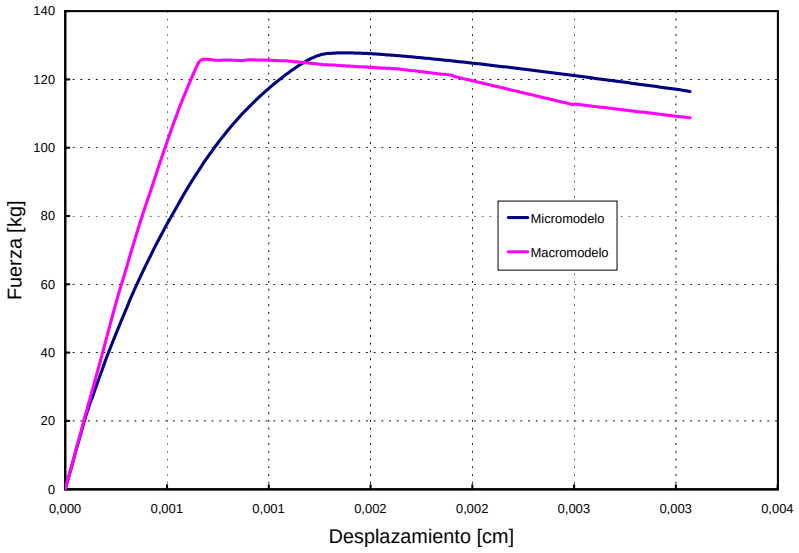

Figura 7.19: Curva Fuerza - Desplazamiento macro y micromodelo.

7.5 Ensayo a tracción de probetas entalladas

7.5.1 Descripción general

Los ejemplos que se presentan en este apartado consisten en simular numéricamente un ensayo sobre probetas de material compuesto sometidas a un estado de tracción. El objetivo principal es demostrar la capacidad del modelo constitutivo para representar el comportamiento de los materiales compuestos sometidos a esfuerzos de tracción. Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos con un total de 1988 elementos, 2097 nodos y 4194 grados de libertad. Esta malla resulta similar a la utilizada en estudio realizado por la European Space Agency (Stavrinidis, 1985). (ver Figura 7.21).

El ensayo se lleva a cabo sobre probetas de carbono-epoxi T300/914C que presentan una entalla en la zona central de la probeta. El refuerzo está constituido por fibras de carbono. Estas fibras presentan un ángulo de orientación distinto en cada ensayo de $0^o, 10^o, 45^o$ y 90^o respecto al eje longitudinal de la probeta.

El ensayo consiste en someter un estado de tracción imponiendo desplazamientos en la parte superior de las probetas. En la Figura 7.20 se observan las dimensiones de la probeta y un detalle de la zona central que presenta la entalladura. En este detalle se muestra, también, los puntos en los que se realizan la medición de la apertura de la entalla durante el ensayo.

En la zona de la entalla se genera una concentración de tensiones que produce

perturbaciones en el estado tensional de la matriz. Esta situación genera tensiones que exceden el límite elástico de la misma. En los materiales compuesto reforzados con fibras unidireccionales la fisura comienza siempre en la matriz y progresa con una dirección paralela a la de las fibras de refuerzo. Esta situación diferencia a los materiales compuesto de los materiales isótropos homogéneos en los cuales no se observa este fenómeno.

Para todas las simulaciones numéricas se supone que la matriz se comporta como un material isótropo elastoplástico, mientras que las fibras se consideran como un material elastoplástico anisótropo (DFVLR, 1983).

Las propiedades mecánicas de cada una de las fases que constituyen el material compuesto se sintetizan en las Tablas 7.8y 7.9. Los resultados que se obtienen de las simulaciones se dividen en dos grupos:

- Resultados gráficos, en los cuales se presentan la deformada de la pieza así como isoáreas de los estados finales tensionales, de plasticidad y de deformaciones.

- Resultados cuantitativos, en los cuales se detalla en curvas $X - Y$ el nivel de fuerzas en el extremo superior y los desplazamientos, contrastados con resultados experimentales, así como también la magnitud de la apertura en la zona de la entalladura respecto del desplazamiento en el extremo de la probeta, comparada con mediciones experimentales. Los datos experimentales se han obtenido del ESI Project Nb ED/83-383/RD/MS y ED/84-415/RD/MS (Stavrinidis, 1985) y de los ensayos realizados por la European Space Agency (DFVLR, 1983).

7.5.2 Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 0^o respecto al eje longitudinal.

Este ensayo consiste en someter a una probeta de material compuesto T300/914C, con fibras orientadas a 0^o respecto de su eje longitudinal, a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma. El ensayo se realiza sobre probetas que presentan una entalla en la zona central de la misma.

Se considera que la resina se comporta como un material isótropo tipo Von Mises con una ley de comportamiento elastoplástico. Las propiedades mecánicas de la resina epoxi se pueden observar en la Tabla 7.8.

Se considera que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo. Las propiedades mecánicas de las fibras utilizadas en la simulación numérica se resumen la Tabla 7.9.

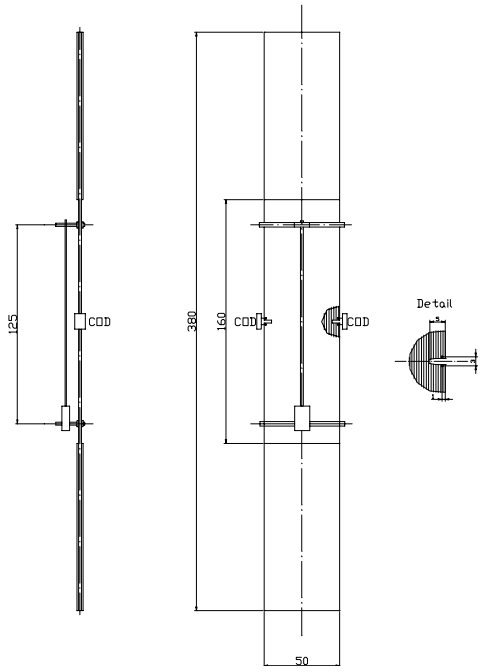

Figura 7.20: Dimensiones de la probeta. Detalle de la zona central.

Módulo de Young	13000 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,325$
Tensión de fluencia	$43,323$ Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	$5N/m$
V_m	$52,5\%$

Tabla 7.8: Propiedades resina epoxi.

Módulo de Young	239.551 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,0$
Tensión de fluencia	300 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
V_f	$47,5\%$

Tabla 7.9: Propiedades fibra de carbono.

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 30 incrementos de desplazamiento, resultando un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,385mm$.

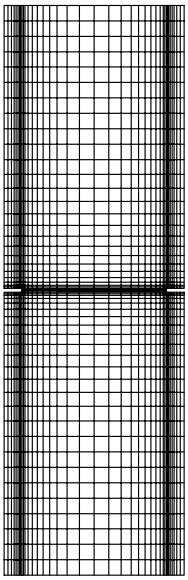

Figura 7.21: Malla de elementos finitos empleada en el análisis.

En las Figuras 7.22 y 7.23 se presenta la deformada de la probeta en el estado final y un detalle de la deformada en la zona central que presenta la entalladura respectivamente. Estas figuras presentan un factor de amplificación de los desplazamientos de 50 que permite apreciar adecuadamente los fenómenos más importantes que se obtienen del análisis.

En la Figura 7.22 se observa claramente que debido a la posición vertical de la fibra de carbono las caras exteriores de la probeta no presentan desviaciones respecto del eje vertical de la probeta, situación que si se produce cuando la fibra presenta un ángulo respecto al eje longitudinal de la probeta (ver ensayos con fibras a 10^o y 45^o Figuras 7.32 y 7.41). Se observan que se producen cuatro fisuras que comienzan en la raíz de las entallas y progresan según el eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección del refuerzo. Este fenómeno se puede apreciar con más detalle en la Figura 7.23. En la misma se muestra la zona de origen de dos pares de fisuras que nacen en la raíz de cada entalla y se propagan en la dirección del eje longitudinal de la probeta.

En la Figura 7.24 se presentan los contornos del módulo de los desplazamientos. Se observa que en la zona central de la probeta comprendida entre ambas entallas

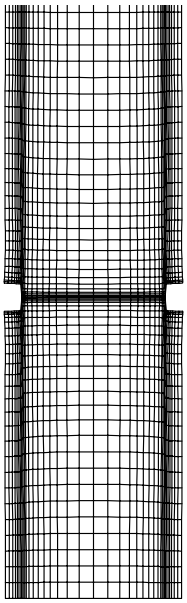

Figura 7.22: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Deformada 50:1.

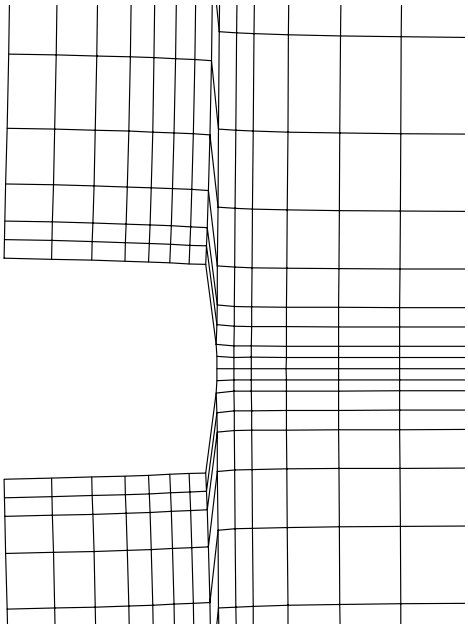

Figura 7.23: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Detalle deformada en la entalladura.

el campo de desplazamiento presenta una variación suave, existiendo cuatro zonas claramente diferenciadas en las cuales el campo de desplazamientos presenta una variación fuerte. Estas zonas comienzan en la raíz de cada una de las entallas y progresan paralelamente al eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección de la fase de refuerzo.

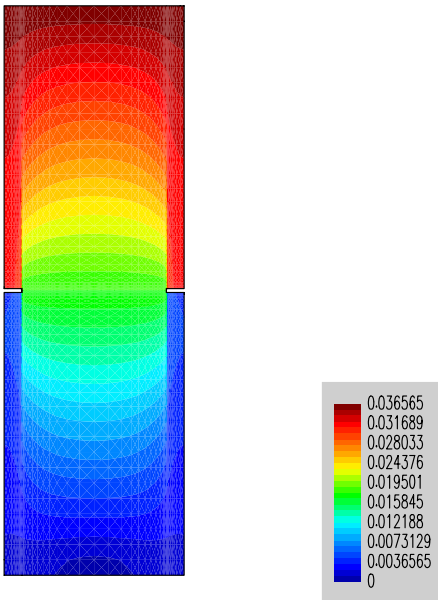

Figura 7.24: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de desplazamientos.

En la Figura 7.25 se observan las isoáreas de la variable interna de plasticidad para el compuesto que indican las zonas en las cuales se ha producido deformación plástica. Se muestra que las zonas más afectadas se encuentran en la raíz de las entallas debido a la concentración de tensiones en esa zona y que la plasticidad progresa en forma paralela al eje longitudinal de la probeta.

En la Figura 7.26 se presenta un contorno de las zonas donde se ha producido el fenómeno DFM o despegue de las fibras respecto de la matriz. Uno de los motivos del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras se debe al fenómeno de formación de grietas en la matriz y el consiguiente deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno de agrietamiento de la matriz y deslizamiento entre fibra y matriz reduce la rigidez del material e induce deformaciones inelásticas o no recuperables. Este fenómeno se tiene en cuenta en la simulación numérica limitando la capacidad de carga de la fibra debido a la imposibilidad de la matriz de transmitirle carga según la teoría desarrollada en el Capítulo 5. La Figura 7.26 muestra, claramente, como el fenómeno progresa desde

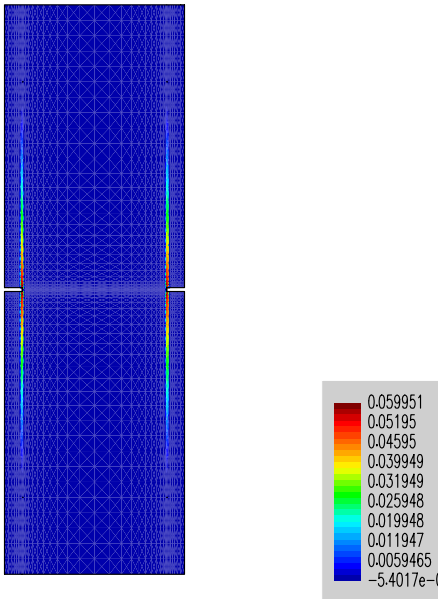

Figura 7.25: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de deformación plástica equivalente.

la raíz de las entallas, debido a la concentración de tensiones en la zona, hacia el centro de la probeta. El fenómeno de despegue de la fibra respecto de la matriz impide que las fibras alcancen la tensión máxima de fluencia de las mismas ya que la matriz no es capaz de transferir los esfuerzos a la fibra, observándose un cambio en la pendiente de la curva Carga - Desplazamiento. (ver Figura 7.30)

En las Figuras 7.27 y 7.28 se observan los contornos de tensiones σ_{xx} y σ_{yy} del material compuesto. Se muestra la concentración de tensiones que se produce en la zona de las entallas así como los cambios que se producen en el estado tensional en la zona de la entalla. En la Figura 7.28 se observa un detalle de la zona fisurada en la probeta así como la redistribución del estado tensional en la zona final de la fisura.

En la Figura 7.29 se observan un detalle en la zona de la entalla de las isoáreas de tensión el la dirección paralela al eje longitudinal de la probeta en la fibra.

Los resultados de las mediciones efectuadas durante el ensayo y los resultados obtenidos en la simulación numérica se observan en las Figuras 7.30 y 7.31. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

Las Figuras 7.30 y 7.31 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto.

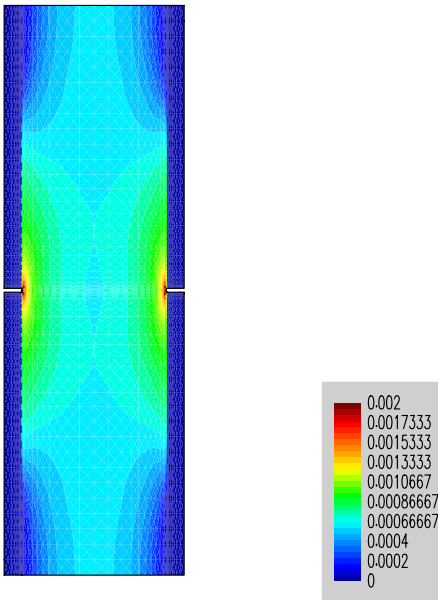

Figura 7.26: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de deformación plastica equivalente en las fibras.

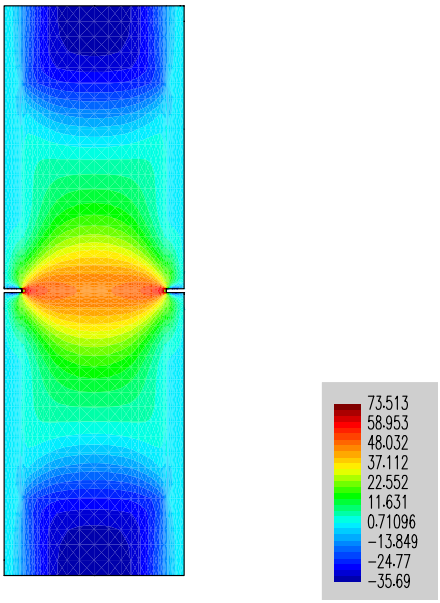

Figura 7.27: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de tensiones σ_{xx} en el compuesto.

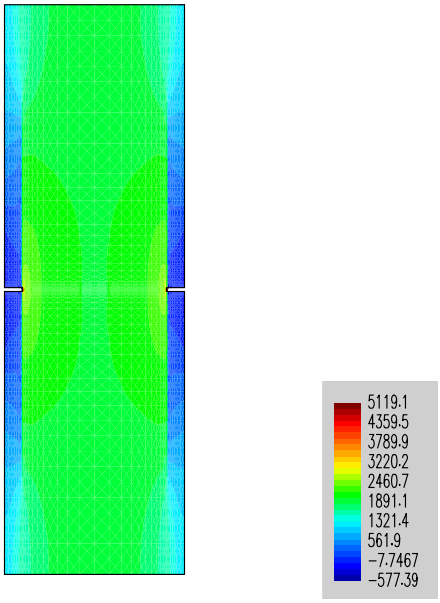

Figura 7.28: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de tensiones σ_{yy} en el compuesto.

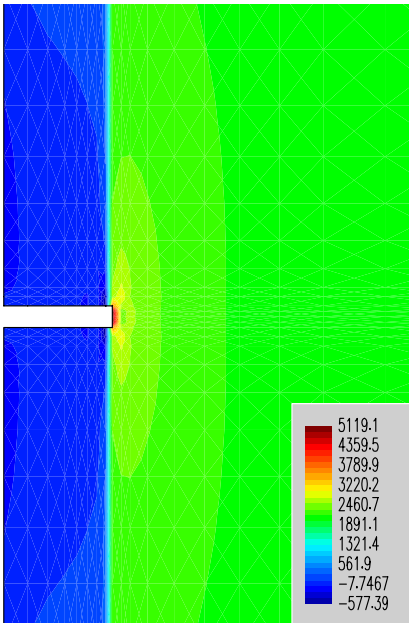

Figura 7.29: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Contorno de tensiones σ_{yy} en las fibras.

La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

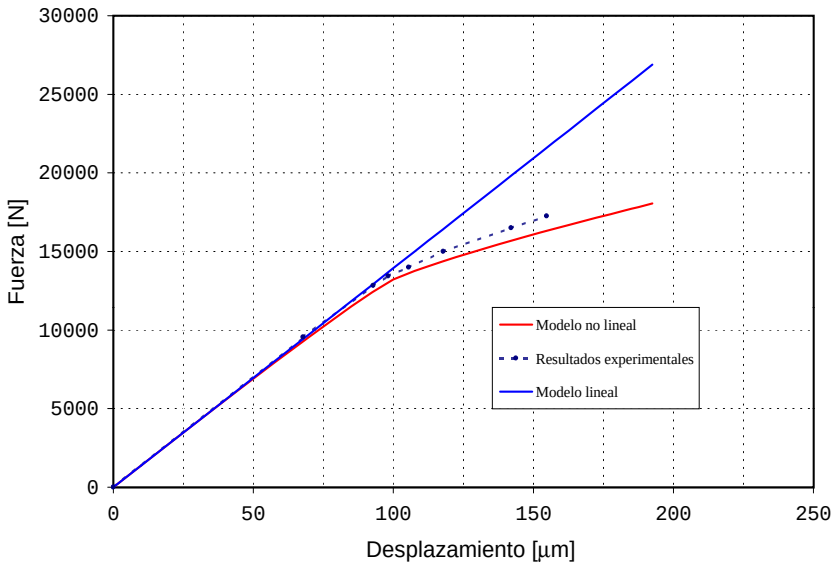

Figura 7.30: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Curva Carga - Desplazamiento en la parte superior.

A niveles de carga elevados se observa un fenómeno no-lineal en los ensayos experimentales relacionado con el problema de despegue entre fibra y matriz. La simulación numérica detecta con un acuerdo notable respecto de los resultados experimentales el comienzo de este fenómeno. En la Figura 7.31 se observa las curvas entre el desplazamiento en la parte superior de la probeta y la apertura de la entalla en la zona central. Se define como COD (Crack Opening Displacement) la apertura de la entalla medida a $1,5mm$ del eje longitudinal de la entalla hacia la parte superior y a $1,5mm.$ del eje longitudinal de la entalla hacia la zona inferior de la probeta y a $1mm$ desde el borde exterior de la probeta. (ver Figura 7.20)

Se observa en la Figura 7.31 que los resultados experimentales muestran una apertura inferior de la fisura para desplazamientos en la parte superior de la probeta comprendidos entre $0\mu m$ y $125\mu m$ y a partir de aquí los resultados experimentales son superiores a los obtenidos con el modelo analítico. A pesar de las pequeñas diferencias se resalta que los resultados analíticos presentan un acuerdo satisfactorio con los resultados obtenidos en laboratorio.

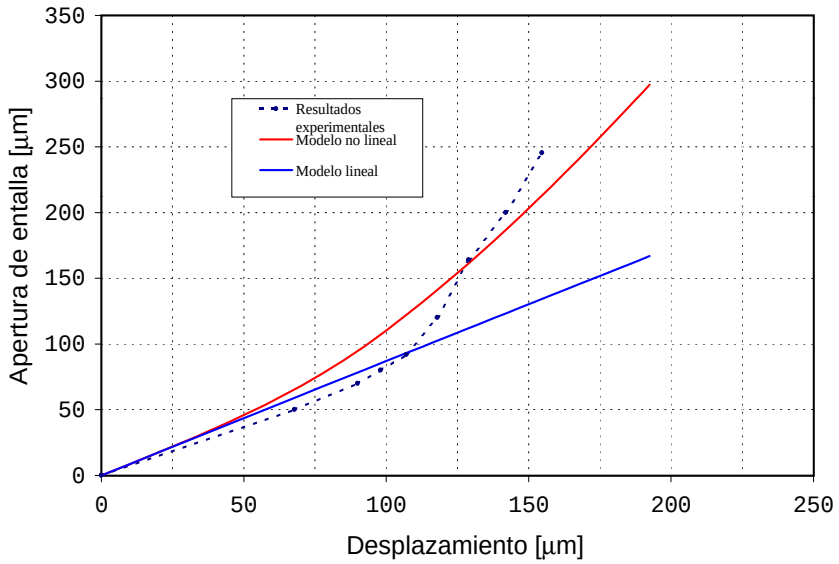

Figura 7.31: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta.

7.5.3 Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 10^o respecto al eje longitudinal.

En este caso la simulación numérica se ha realizado con un análisis incremental considerando un total de 50 incrementos de desplazamiento, resultando un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,59mm$

En la Figura 7.32 se presenta la deformada de la probeta en el estado final. Esta figura presenta un factor de amplificación de los desplazamientos de 30 que permite apreciar adecuadamente los fenómenos más importantes que se presentan en el análisis. En la Figura 7.32 se muestra que debido a la posición de la fibra de carbono las caras exteriores de la probeta presentan desviaciones respecto del eje vertical de la probeta, debido a una tendencia de las fibras a orientarse en la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 7.33 se presentan los contornos de la norma de los desplazamientos. En la misma se observa que el campo de desplazamientos presenta una discontinuidad fuerte en la zona central. En esta zona se genera una fisura con una orientación coincidente con la dirección del refuerzo.

En la Figura 7.34 se presentan los contornos de la variable interna de plasticidad para el compuesto que indican las zonas en las cuales se ha producido deformación plástica. Se observa que debido a las condiciones de contorno impuestas se generan

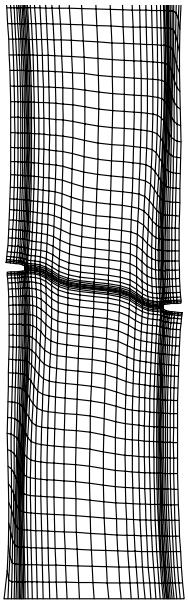

Figura 7.32: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Deformada 25:1.

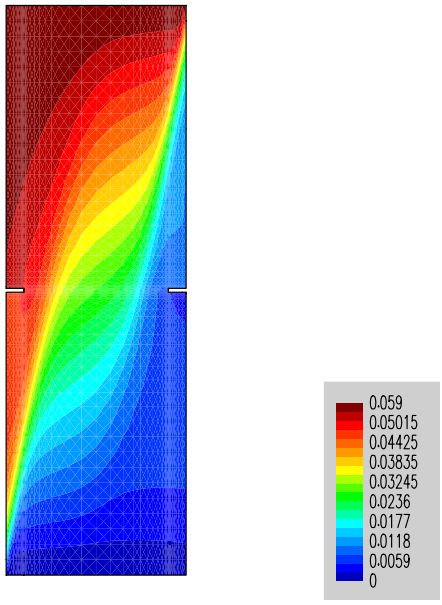

Figura 7.33: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Contorno de desplazamientos.

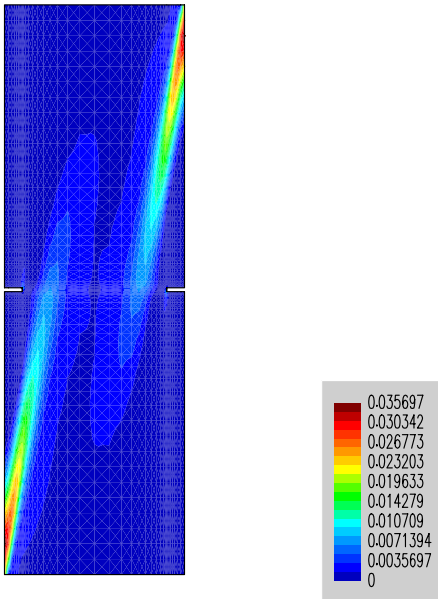

Figura 7.34: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Contorno de deformación plástica equivalente.

deformaciones plásticas en la zona superior derecha e inferior izquierda de la probeta y progresa en forma paralela a la orientación de las fibras.

La Figura 7.35 muestra la deformación plástica del compuesto en la dirección del eje longitudinal de la probeta. Se observa que se generan deformaciones plásticas en el borde superior derecho e inferior izquierdo y progresa hacia el centro de la probeta.

En las Figuras 7.36 y 7.37 se presentan los contornos de las tensiones σ_{xx} y σ_{yy}. En las mismas se observa la marcada direccionalidad en la respuesta del material compuesto.

Los resultados de las mediciones experimentales se observan en las Figuras 7.38, 7.39 y 7.40. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

Las Figuras 7.38, 7.39 y 7.40 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

En este caso los resultados analíticos presentan una notable concordancia con los obtenidos experimentalmente, salvo el caso de la curva de la Figura 7.39 en la cual

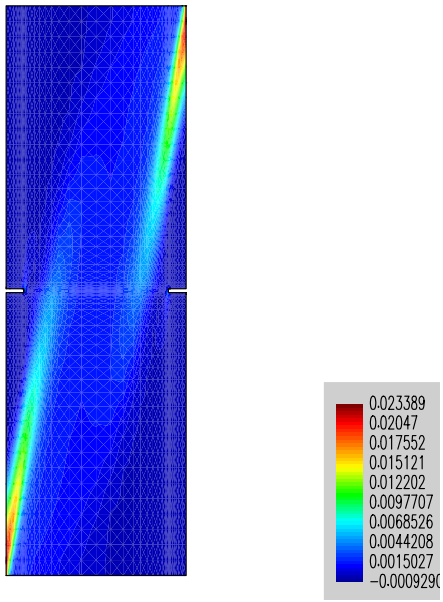

Figura 7.35: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10º. Contorno de deformación plástica ε_{yy}^{P}.

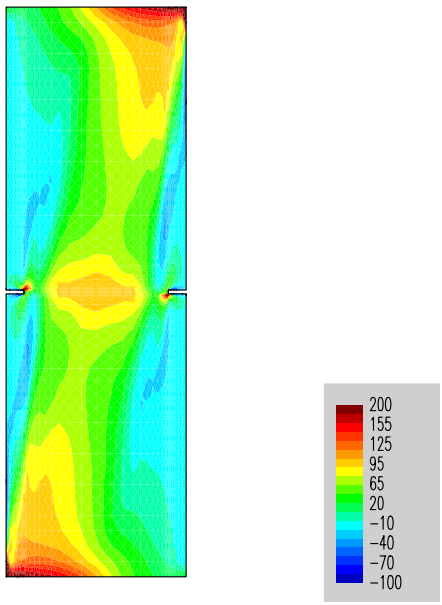

Figura 7.36: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10º. Contorno tensiones σ_{xx} en el compuesto.

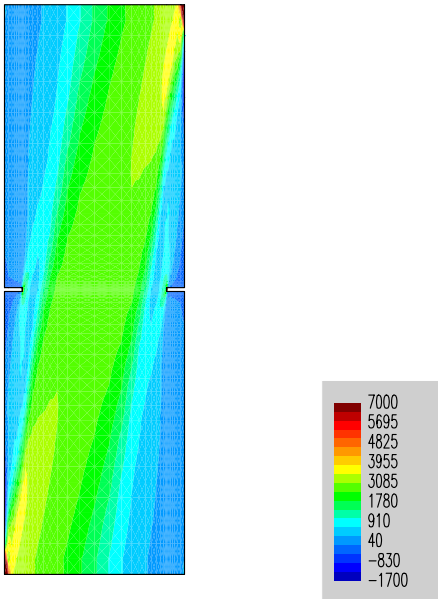

Figura 7.37: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Contorno de tensiones σ_{yy} en el compuesto.

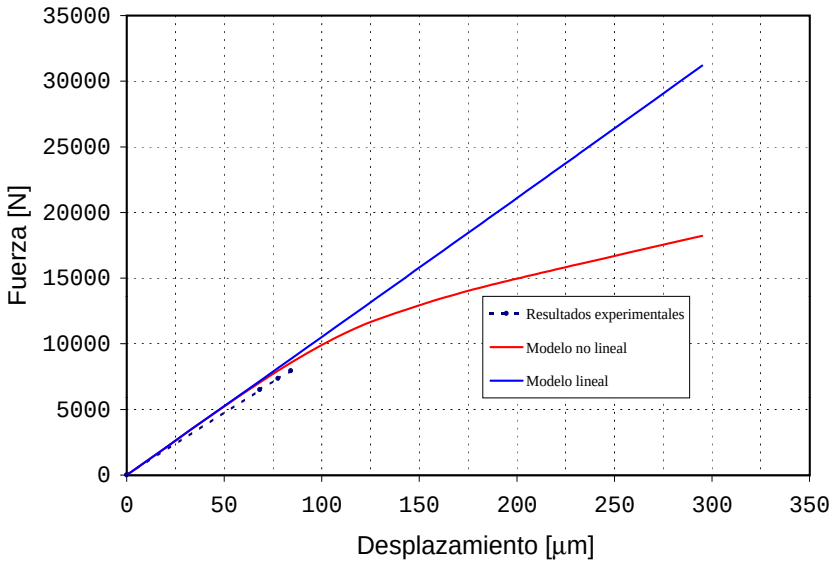

Figura 7.38: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Curva Carga - Desplazamiento parte superior de la probeta.

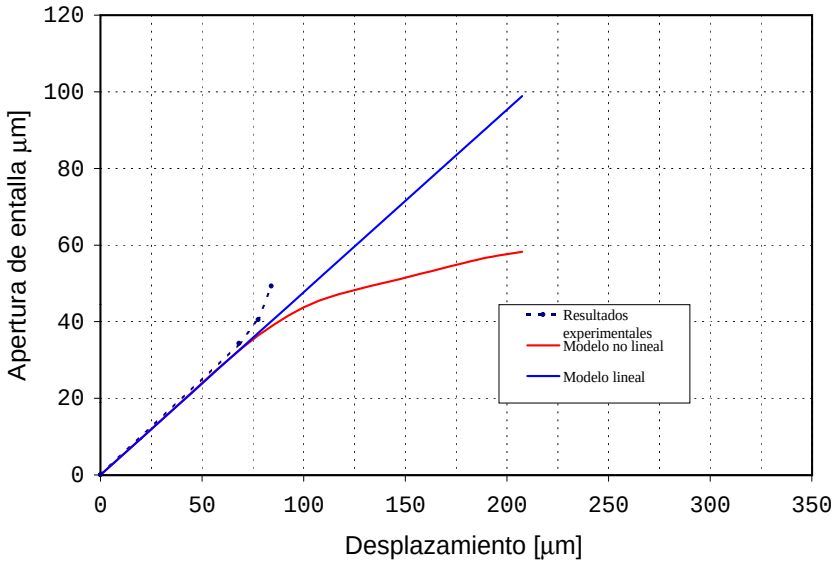

Figura 7.39: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Curva COD lado derecho - Desplazamiento parte superior de la probeta.

puede observarse una apertura excesiva en la zona de la entalla en el lado derecho de la probeta. Es necesario destacar que en los resultados obtenidos en el ensayo experimental el comportamiento de la probeta no muestran simetría, presentándose diferencias entre los resultados de la apertura en la zona de la entalla para el lado izquierdo como para el lado derecho. Este fenómeno no se observa en la simulación numérica, según la cual la deformada presenta simetría y los valores de la apertura de la entalla resultan iguales para ambos lados de la probeta. Este fenómeno que se detecta en el ensayo experimental podría deberse a factores tales como errores en la medición o presencia de discontinuidades en el material.

En la Figura 7.39 se observa una comparación entre los resultados de la simulación numérica y los experimentales obtenidos para el lado derecho de la probeta. Se observa un aumento no gradual de los desplazamientos en los resultados experimentales en la etapa final del ensayo. En la Figura 7.40 se observa que la simulación numérica presenta una concordancia elevada con los resultados experimentales.

7.5.4 Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 45^o respecto al eje longitudinal

La simulación numérica para probetas con fibras orientadas a 45^o respecto del eje longitudinal se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 50

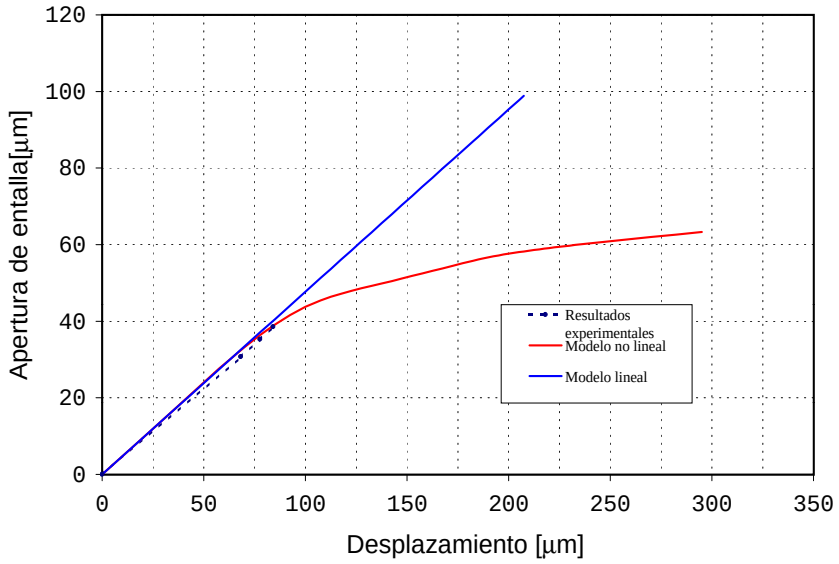

Figura 7.40: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 10^o. Curva COD lado izquierdo - Desplazamiento parte superior de la probeta.

incrementos de desplazamiento, lo que implica un desplazamiento impuesto en la zona superior de la probeta de $0,59mm$

En las Figuras 7.41 y 7.42 se presenta la deformada de la probeta y un detalle de la deformada en la zona central. Estas figuras presentan un factor de amplificación de 25 en los desplazamientos que permite apreciar de manera adecuada la forma final de la probeta.

Debido a la presencia de las fibras de refuerzo a 45^o respecto del eje longitudinal de la pieza se observa la falta de verticalidad de los laterales de la probeta así como una tendencia de las fibras a orientarse en la dirección del esfuerzo aplicado.

En la Figura 7.43 se presentan los contornos de la norma de los desplazamientos. En la misma se aprecia una localización de las deformaciones en la zona central de la probeta que surge desde la raíz de las entallas con una inclinación a 45^o respecto al eje longitudinal de la probeta. Este fenómeno concuerda con los resultados experimentales, ya que en los mismos se observa el progreso de las fisuras coincidente con la dirección de las fibras de refuerzo.

En la Figura 7.44 se observan los contornos de la variable interna de plasticidad. En la misma se aprecia que el fenómeno de plasticidad está a asociado a la matriz del material compuesto y que se desarrolla con una dirección perpendicular a la del refuerzo. Este fenómeno se produce por el hecho de que al intentar alinearse las fibras con la dirección del esfuerzo principal se producen en la matriz estados ten-

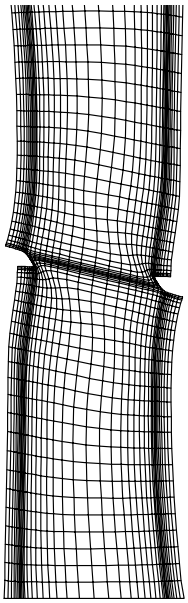

Figura 7.41: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Deformada 25:1.

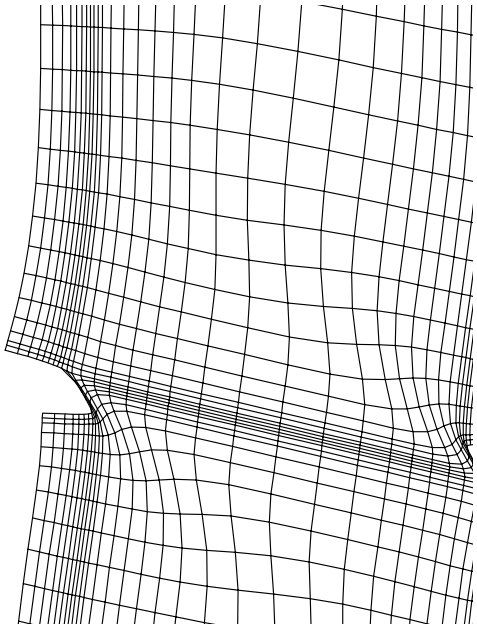

Figura 7.42: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Detalle de la deformada en la entalladura.

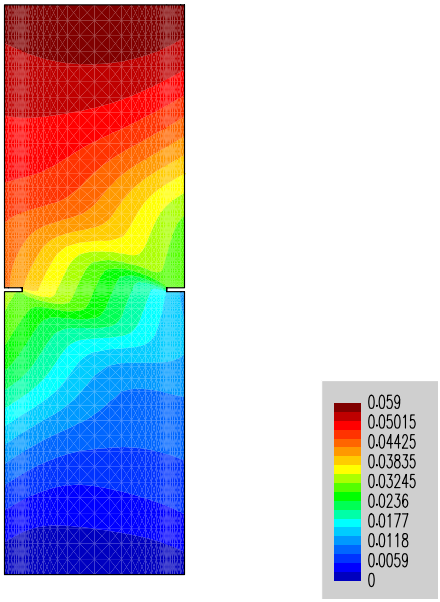

Figura 7.43: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45º. Contorno de desplazamientos.

sionales elevados que generan deformaciones plásticas, produciéndose un fenómeno de despegue de las fibras respecto de la matriz.

Las Figuras 7.46 y 7.47 muestran los contornos de tensiones σ_{xx} y σ_{yy}. Nuevamente se observa una marcada direccionalidad en la respuesta del material.

Los resultados de las mediciones efectuadas se observan en las Figuras 7.48, 7.49 y 7.50. Al igual que en los ejemplos anteriores, en la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta. Las Figuras 7.48, 7.49 y 7.50 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

En este caso los resultados analíticos presentan una notable concordancia con los obtenidos experimentalmente. Es necesario destacar que en los resultados obtenidos en el ensayo experimental el comportamiento de la probeta presenta simetría. Este fenómeno se observa también en la simulación numérica, según la cual la deformada presenta simetría y los valores de la apertura de la entalla resultan iguales para ambos lados de la probeta. En la Figura 7.49 y 7.50 se observa las curvas de la apertura en la zona de la entalla en función del desplazamiento de la parte superior de la probeta.

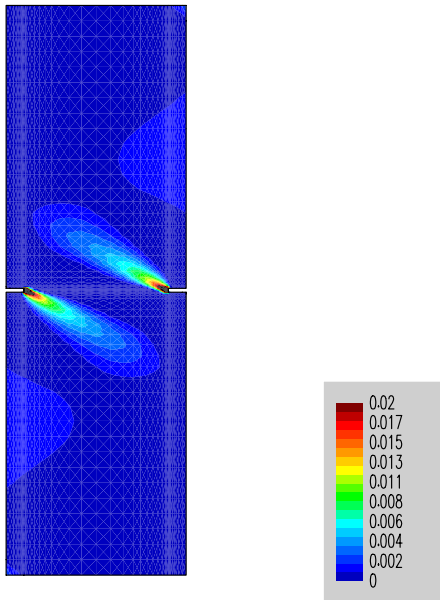

Figura 7.44: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Contorno de deformación plástica equivalente.

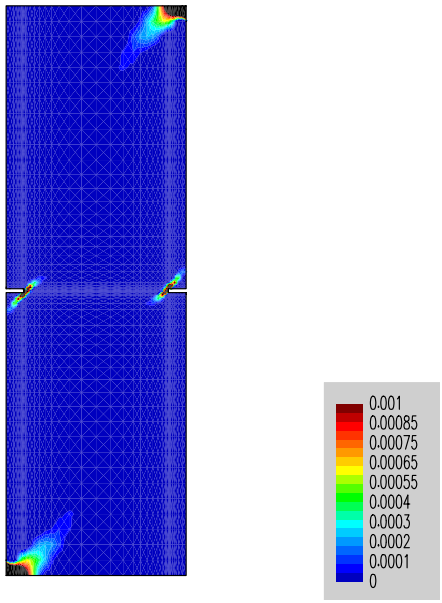

Figura 7.45: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Contornos de deformación plástica equivalente en las fibras.

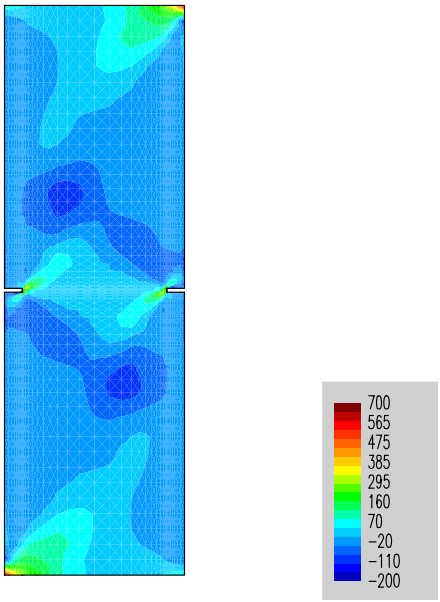

Figura 7.46: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Contorno de tensiones σ_{xx} en el compuesto.

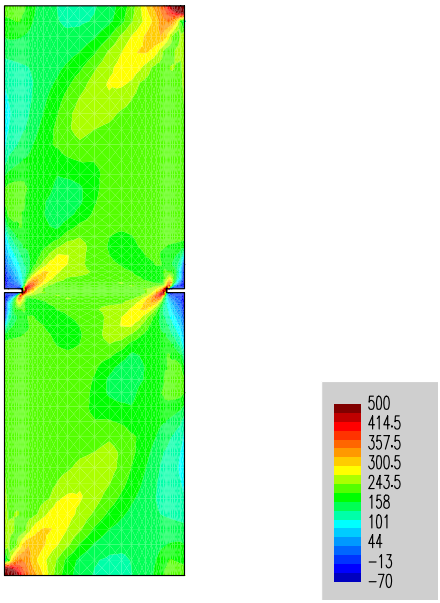

Figura 7.47: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Contorno de tensiones σ_{yy} en el compuesto.

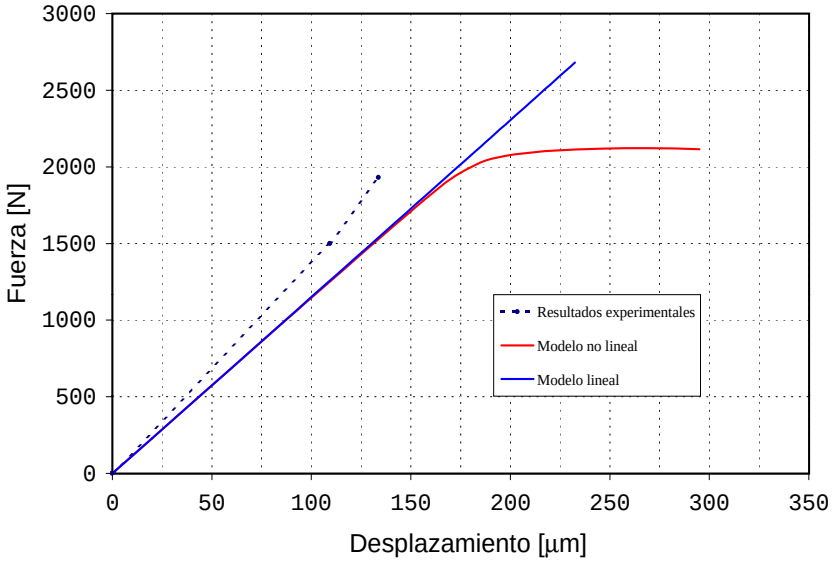

Figura 7.48: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Curva Carga - Desplazamiento parte superior de la probeta.

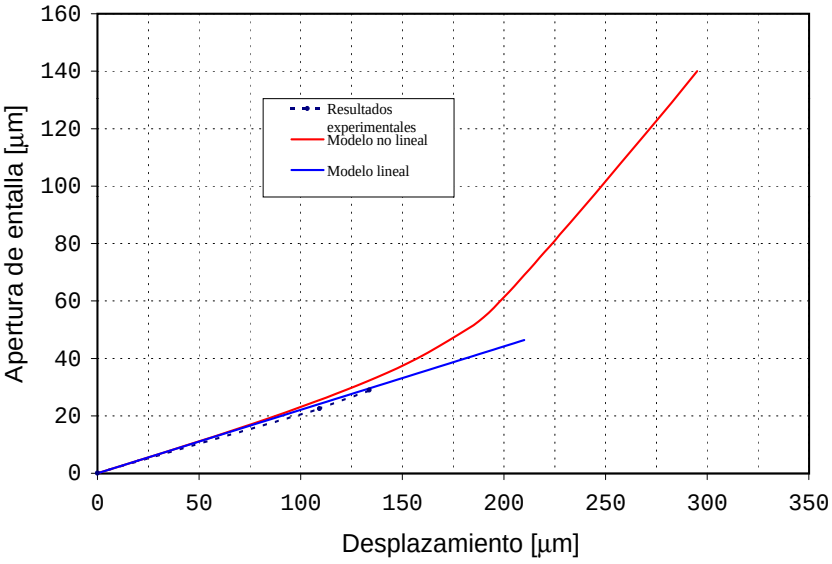

Figura 7.49: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Curva COD (lado derecho) - Desplazamientos parte superior de la probeta .

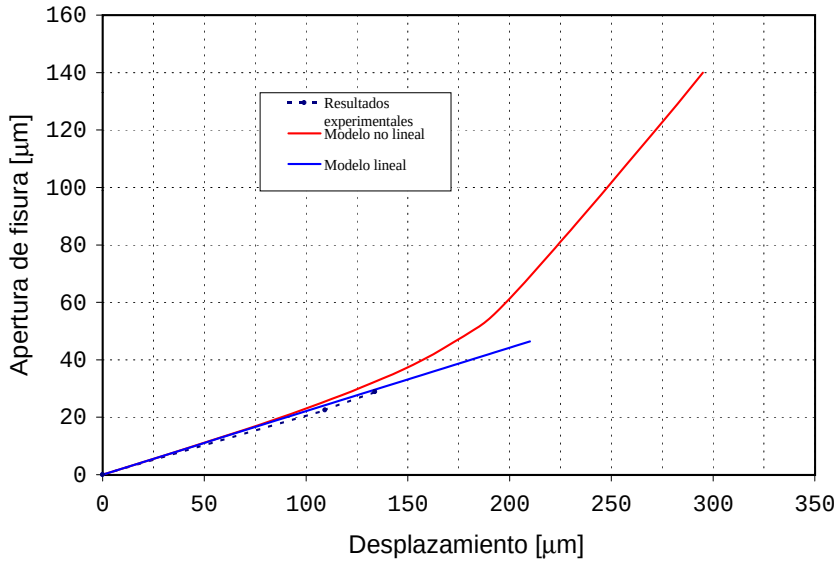

Figura 7.50: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 45^o. Curva COD (lado izquierdo) - Desplazamientos parte superior de la probeta.

7.5.5 Ensayo de probetas T300/914C con fibras orientadas a 90^o respecto al eje longitudinal

En este caso, se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 40 incrementos de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,385mm$.

En las Figuras 7.51 y 7.52 se presentan la deformada de la probeta y un detalle de la deformada en la zona de la entalladura respectivamente. Estas figuras presentan un factor de amplificación de 200 de los desplazamientos que permite apreciar de manera adecuada la forma final de la probeta.

En la Figura 7.51 se observa el contorno de la norma de los desplazamientos. La localización de las deformaciones se produce en la zona central de la probeta y en la dirección perpendicular al eje longitudinal de la misma coincidente con la dirección de las fibras del refuerzo.

En la Figura 7.54 se observa el contorno de la variable interna de plasticidad para el compuesto. Se aprecia que las deformaciones plásticas comienzan en la zona de la raíz de la entalla y se propagan en dirección paralela a las fibras hacia el interior de la probeta.

En las Figuras 7.55 y 7.56 se observan los contornos de tensiones σ_{xx} y σ_{yy} respectivamente. Se aprecia en ambas figuras la concentración de tensiones debida

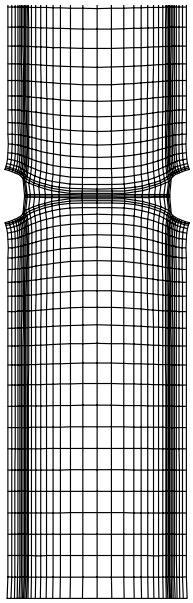

Figura 7.51: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Deformada 200:1.

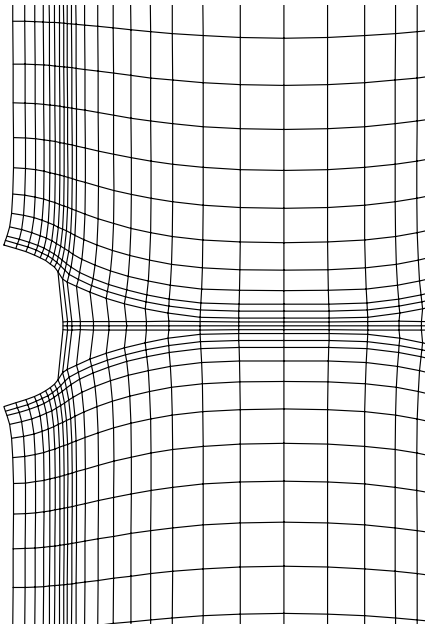

Figura 7.52: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Detalle deformada en la entalladura.

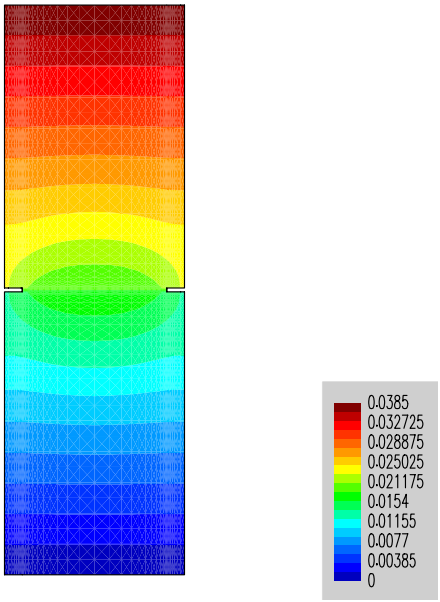

Figura 7.53: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Contornos de desplazamientos.

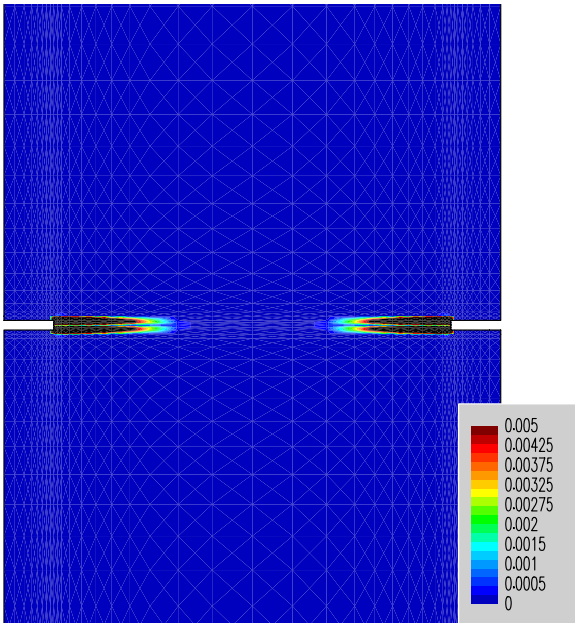

Figura 7.54: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Detalle contorno deformación plástica equivalente en el compuesto.

a la presencia de las entalladuras. Estas producen estados tensionales elevados que generan las deformaciones plásticas en la matriz de la probeta.

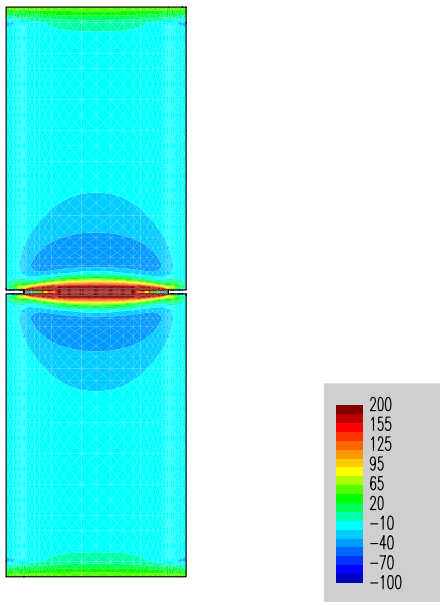

Figura 7.55: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Contorno de tensiones σ_{xx} en el compuesto.

Los resultados de las mediciones efectuadas se observan en las Figuras 7.57 y 7.58. En la primera de las curvas se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

Las Figuras 7.57 y 7.58 muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con el modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas.

Se observa en la Figura 7.58 que los resultados experimentales muestran una apertura inferior. A pesar de la diferencia apuntadas anteriormente se resalta que los resultados analíticos a nivel de fuerzas presentan un acuerdo satisfactorio con los resultados obtenidos en laboratorio.

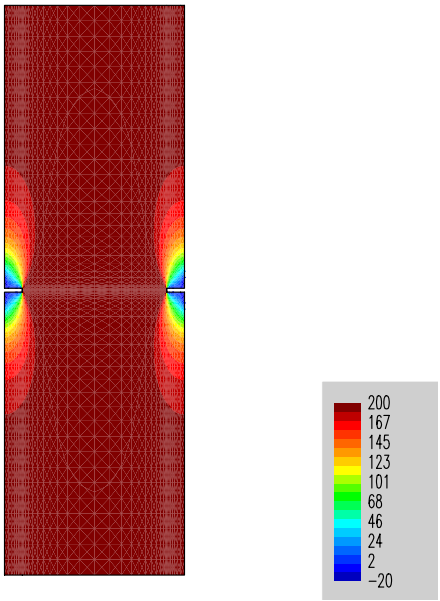

Figura 7.56: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 90^o. Contorno de tensiones σ_{yy} en el compuesto.

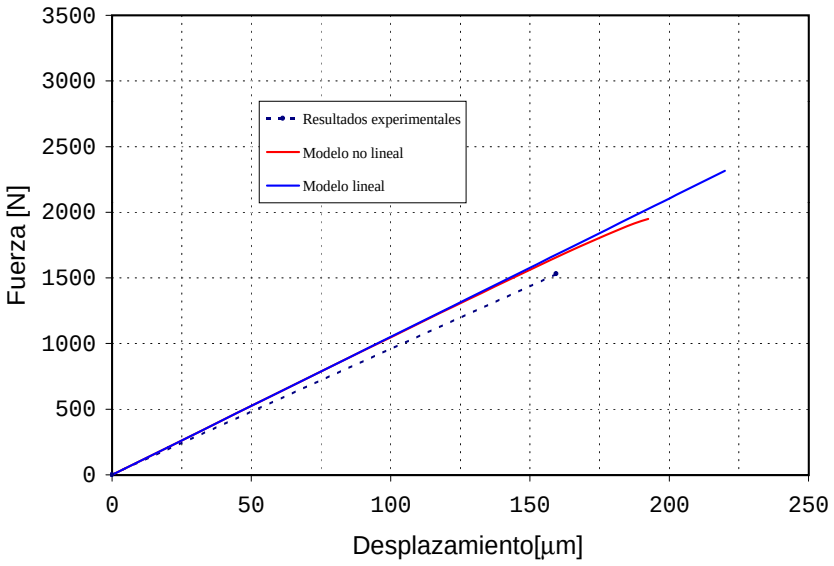

Figura 7.57: Curva Carga - Desplazamiento parte superior de la probeta.

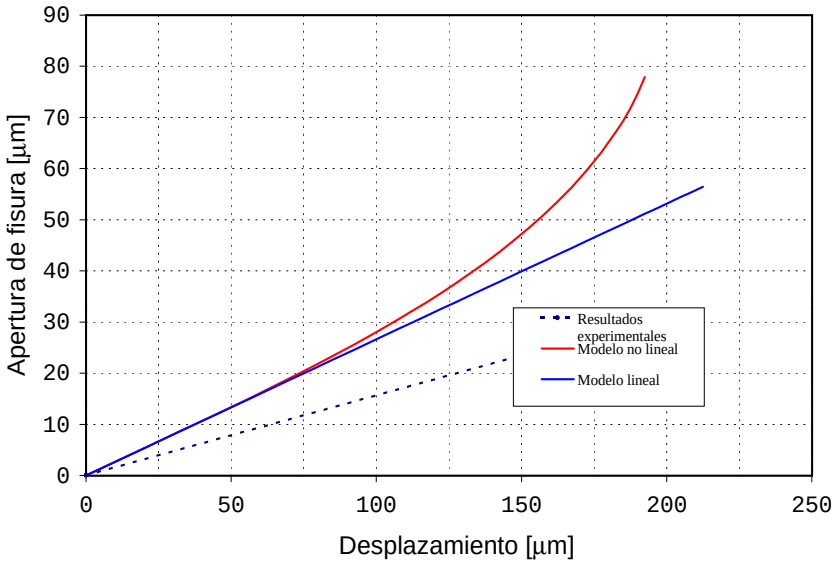

Figura 7.58: Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta.

7.6 Ensayo para la determinación de las propiedades a cortante en materiales compuestos

En este apartado se presenta un ejemplo que consiste en simular numé ricamente un ensayo de una probeta de material compuesto laminado multidireccional de 30 capas con una secuencia de apilamiento $(45^o, -45^o)_{SS}$ sometidas a un estado de corte plano. El ensayo se ejecuta de acuerdo con la norma ASTM D4255 (American Society for Testing and Material, 1994). El material compuesto está constituido por una resina denominada RS-3 Policinato y el refuerzo está constituido por fibra de carbono XN-50 con participaciones volumétricas del 40% y 60% respectivamente.

La resina se comporta como un material isótropo con una ley de comportamiento elastoplástico, mientras que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo. A los fines de simular el comportamiento del material compuesto se utilizan dos modelos "base" en el contexto de la teoría de mezclas, uno isótropo para la matriz y el modelo anisótropo para la fase de refuerzo.

Las propiedades mecánicas de la resina RS-3 Policinato y de la fibra de refuerzo XN-50 utilizados en la simulación numérica se pueden observar en las Tablas 7.10y 7.11.

En la Figura 7.59 se observa la geometría de la pieza y su posición en la máquina de ensayos. El ensayo consiste en someter a la pieza a un desplazamiento impuesto

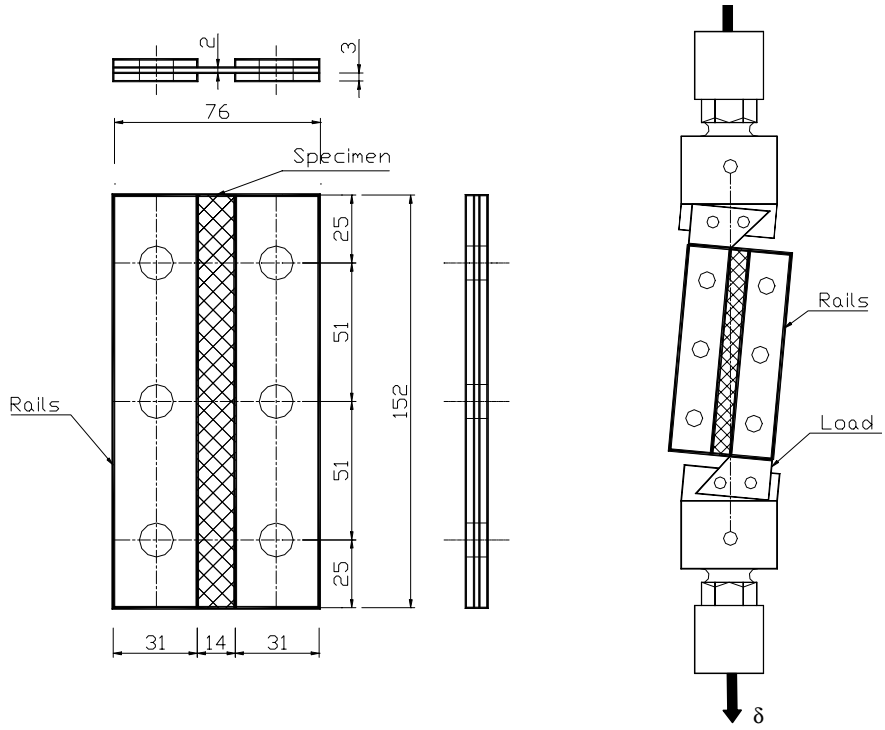

Figura 7.59: a) Dimensiones de la probeta. b) Aparato de ensayo.

Módulo de Young	3170 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,35$
Tensión de fluencia	$75,53$ Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	$1,47N/m$
V_m	40%

Tabla 7.10: Propiedades resina epoxi.

Módulo de Young	507.177 Mpa
Coeficiente de Poisson	$0,0$
Tensión de fluencia	3183.34 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
V_f	60%

Tabla 7.11: Propiedades fibra de carbono.

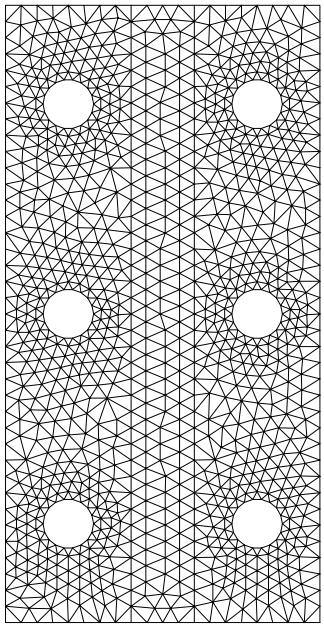

Figura 7.60: Malla de elementos finitos.

aplicado en los orificios de la misma induciendo un estado de corte plano. Para determinar el módulo a cortante del material se colocan "strain gages" en la zona central de la pieza formando un ángulo de 45^o con el eje longitudinal.

Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos triangulares de 3 nodos con un total de 2074 elementos, 1144 nodos y 2228 grados de libertad. En la Figura 7.60 se observa la malla de elementos finitos empleada.

En la Figura 7.61 se muestra un detalle de las condiciones de borde empleadas en la simulación numérica. La Figura 7.61a y b muestran las condiciones de borde impuesta en los orificios del lado izquierdo y derecho de la probeta respectivamente. La simulación numérica se realiza imponiendo desplazamientos en los orificios de la zona izquierda de la probeta. El análisis se lleva a cabo con un procedimiento incremental con un total de 200 pasos.

En la Figura 7.62 se observa la deformada de la probeta en el estado final. Esta figura presentan un factor de amplificación de 3 de los desplazamientos. Se observa en la misma figura los efectos locales que se producen en cada orificio y la desviación que sufre la probeta durante el ensayo

En la figura 7.63 se observan los contornos de desplazamiento en la probeta en el ultimo paso del análisis. En la misma se observa un fuerte gradiente en el campo de los desplazamientos en la zona central debido fundamentalmente a los desplazamientos relativos entre ambas mordazas de aluminio. En la figura 7.64a se presenta el contorno de las deformaciones plásticas cortantes, en la zona central de

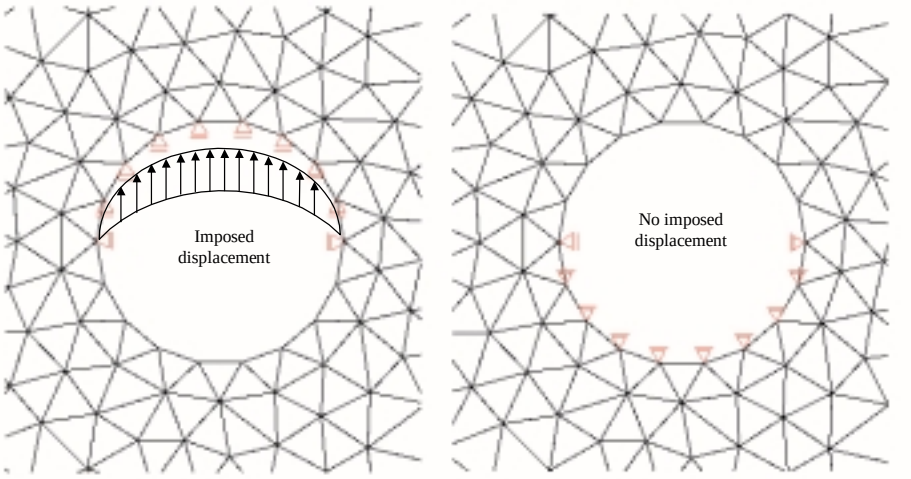

Figura 7.61: Condiciones de borde utilizadas en la simulación numérica.

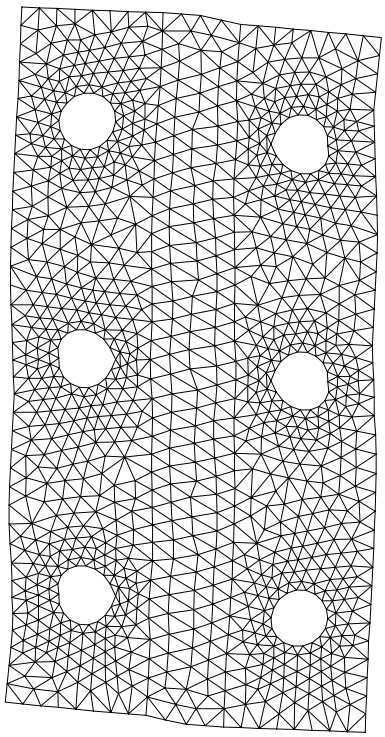

Figura 7.62: Ensayo a corte ASTM D4255. Deformada 3:1.

la probeta, en el último paso del análisis. En la figura7.64b se observa el contorno de las tensiones cortantes en el mismo paso del análisis en la zona central de la probeta. Las deformaciones plásticas se concentran en tres áreas uniendo los orificios del lado izquierdo de la probeta con los del lado derecho. Las deformaciones plásticas dan una idea de las zonas que presentan fractura difusa. (ver Figura 7.65)

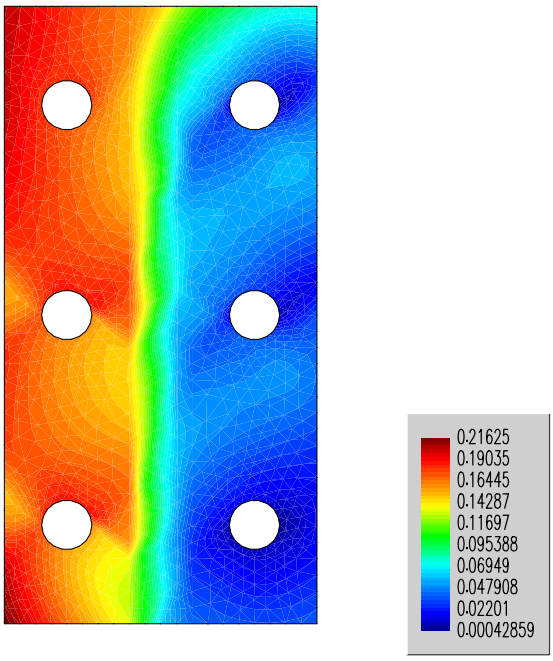

Figura 7.63: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50. Contorno de desplazamientos.

En la Figura7.65 se observa una comparación entre la simulación numérica y la probeta ensayada. En la Figura 7.65a se presenta la probeta ensayada. En la misma se observa la existencia de dos fisuras inclinadas a 45^o aproximadamente respecto del eje longitudinal de la probeta. La zona central que presenta una rotura generalizada. La Figura 7.65b presenta el contorno de las deformaciones plásticas efectivas obtenido con la simulación numérica que representan las regiones de fractura difusa (Lubliner *et al.*, 1989) (Oller, 1991). Al igual que en la fotografía de la probeta se observan dos zonas inclinadas aproximadamente a 45^o respecto del eje longitudinal y una zona de mayor tamaño en la zona central de la probeta que presentan las máximas deformaciones plásticas efectivas. La Figura 7.66 muestra un detalle de la zona central de la probeta y la Figura7.66b muestra un detalle de una de las fisuras. En ambas figuras es posible observar el fenómeno de delaminación que se produce en la probeta, debido a la presencia en el material compuesto de una fase con un alto módulo elástico, la fibra, y de otra fase con un bajo módulo elástico, la matriz,

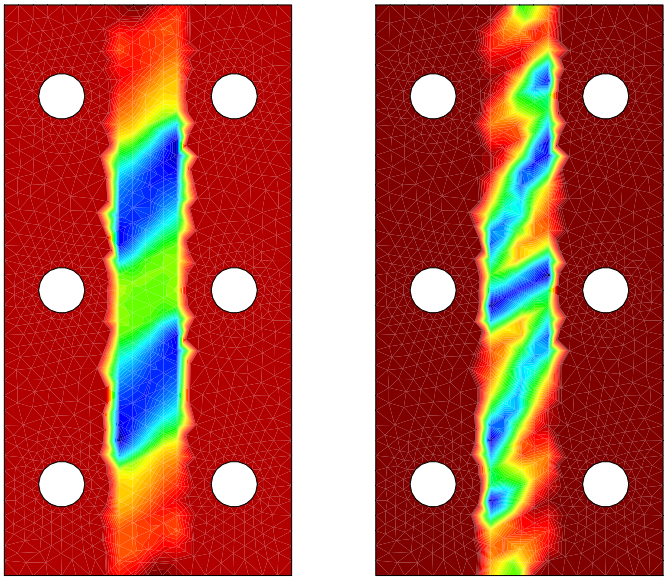

Figura 7.64: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50. a) Contorno de deformaciones plásticas XY. b) Contorno de tensiones XY.

cuya misión es aglutinar a las fibras y transmitir la carga aplicada.

La Figura 7.67 muestra una comparación de curvas Carga-Desplazamiento considerando diversos modelos constitutivos. Se considera diversos análisis numéricos basados en la teorías desarrolladas en esta monografía y teniendo en cuenta diversos comportamientos constitutivos: a) un modelo constitutivo elástico lineal para cada fase en pequeñas deformaciones, b) un modelo constitutivo elástico lineal para cada fase en grandes deformaciones y c) un modelo constitutivo elastoplástico con anisotropía en grandes deformaciones.

Los resultados considerando el modelo elástico lineal en pequeñas deformaciones para cada fase constituye la envolvente superior de las respuestas. Se observa en la Figura el carácter no-lineal de la respuesta considerando el modelo propuesto en este trabajo. Una de las razones del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos se debe al fenómeno de fisuración en la matriz y al despegue o deslizamiento relativo entre matriz y refuerzo que conduce a deformaciones irreversibles.

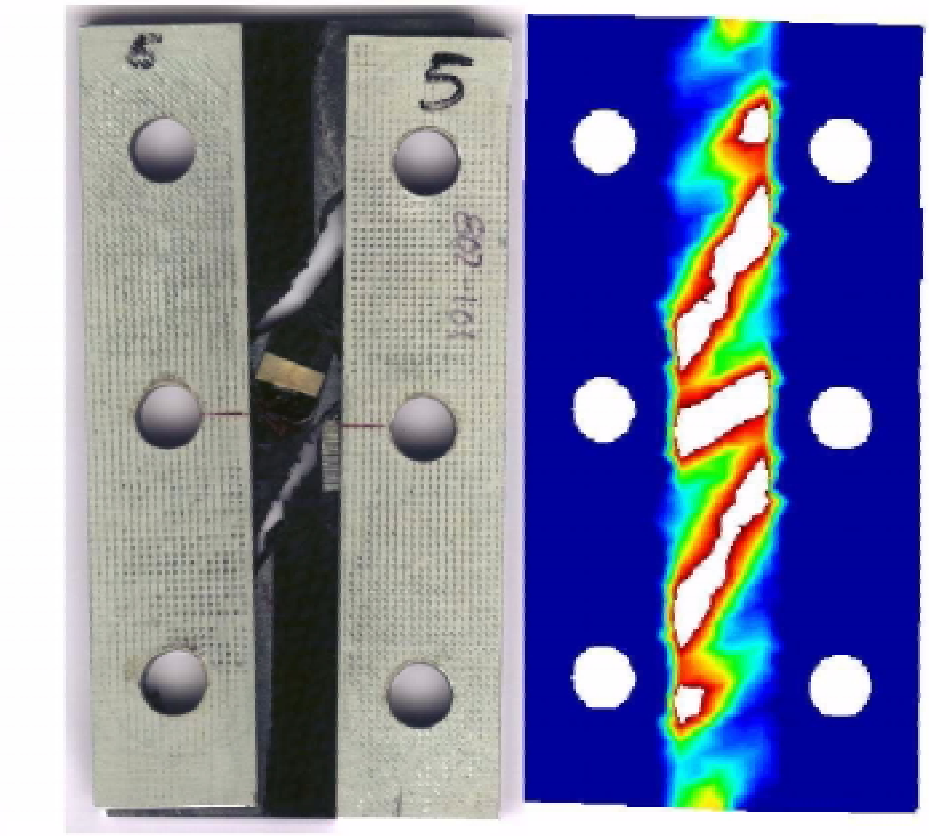

Figura 7.65: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50 a) Fotografía probeta ensayada. b) Contorno de deformación plástica efectiva.

7.7 Comparación del modelo desarrollado con otras teorías

El objetivo de ejemplo que se presenta en este apartado es comparar las respuestas del modelo constitutivo que se presenta en este trabajo con un modelo constitutivo multi-escala basado en la teoría de homogeneización (ver Apartado 2.12).

El ejemplo consiste en simular numéricamente el ensayo sobre probetas de carbono-epoxi **T300/914C** presentado en los apartados anteriores**.** El refuerzo está constituido por fibras de carbono orientadas según el eje longitudinal de la probeta. Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos con un total de 548 elementos, 603 nodos y 1124 grados de libertad. Se considera que la probeta está sometida a un desplazamiento impuesto en la parte superior de la misma generándose un estado de tracción. En ambos extremos de la probeta los grados de libertad se encuentran prescritos.

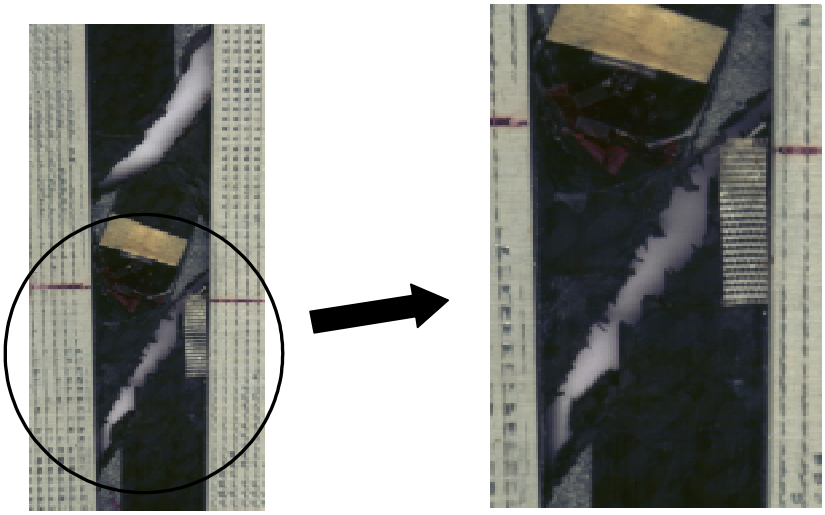

Figura 7.66: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50. a) Detalle zona central. b) Detalle de una fisura.

En la Figura 7.68 se observan las dimensiones de la probeta y un detalle de la zona central en la que se destacan los puntos en los cuales se realizaron las mediciones que determinan la apertura de la entalla respecto del desplazamiento del borde superior.

En la zona central donde se encuentran las entallas se generan zonas de concentración de tensiones, creándose perturbaciones locales en la matriz y generándose estados tensionales que superan el límite elástico de la matriz. En el caso de probetas con refuerzo unidireccional la fisura comienza y se propaga siempre en la matriz y, a diferencia de otros ensayos realizados sobre probetas de un material isótropo homogéneo esta fisura tiende a propagarse paralela a la dirección de las fibras.

Las propiedades del material empleadas en el análisis numérico se resumen en las Tablas 7.8y 7.9

Se ha realizado un análisis incremental considerando un total de 30 incrementos de desplazamiento, resultando en un desplazamiento impuesto en la zona superior de $0,385mm$.

En las Figuras 7.69a se presenta la deformada de la probeta en el estado final. Esta figura presenta un factor de amplificación de 50 de los desplazamientos veces que permite apreciar adecuadamente los fenómenos más importantes que se presentan en el análisis.

Se observa que se producen cuatro fisuras que comienzan en la raíz de las entallas y progresan según el eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección de

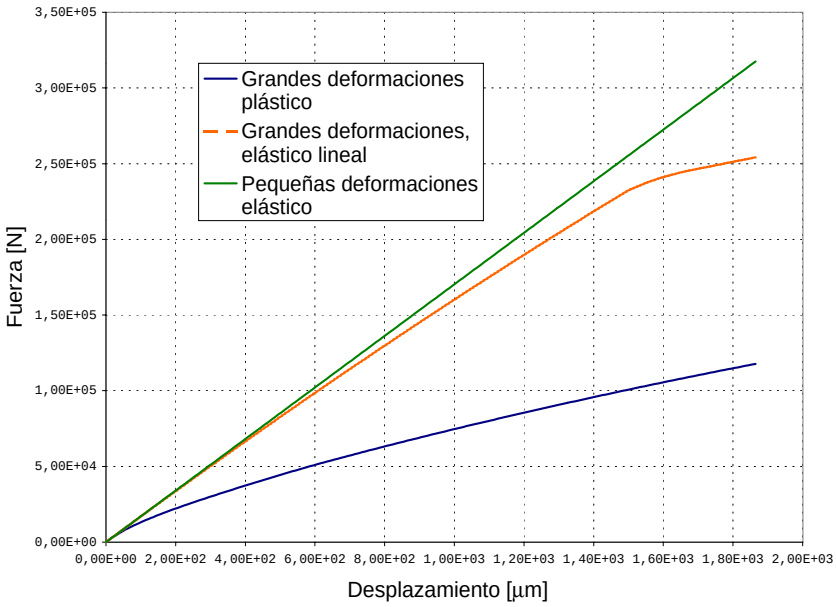

Figura 7.67: Ensayo Probeta Policinato RS-3 - XN-50. Curva Carga - Desplazamiento.

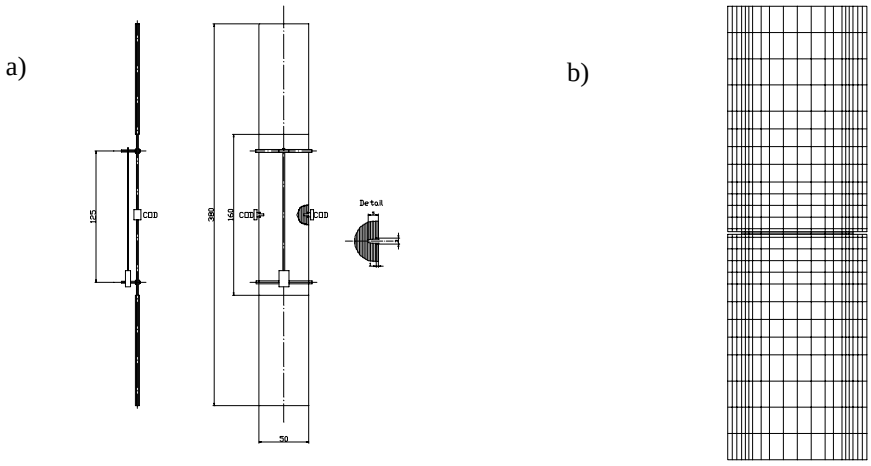

Figura 7.68: Dimensiones de la probeta. a) Detalle de la zona central. b) Malla de elementos finitos.

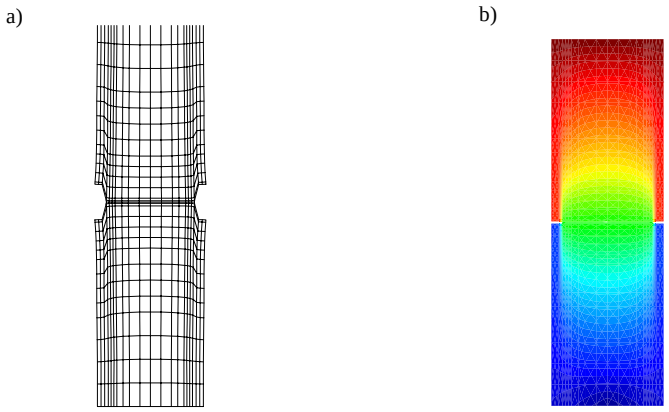

Figura 7.69: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. a) Deformada 50:1. b) Contorno de desplazamientos.

las fibras de carbono.

En la Figura 7.69 se presentan los contornos del módulo de los desplazamientos. Se observa que en la zona central de la probeta comprendida entre ambas entallas el campo de desplazamiento presenta una variación suave, existiendo cuatro zonas claramente diferenciadas en las cuales el campo de desplazamientos presenta una variación fuerte. Estas zonas comienzan en la raíz de cada una de las entallas y progresan paralelamente al eje longitudinal de la probeta coincidente con la dirección de las fibras.

En la Figura 7.70a se observan las isoáreas de la variable interna de plasticidad para el compuesto que indican las zonas en las cuales se ha producido deformación plástica. Se muestra que las zonas más afectadas se encuentran en la raíz de las entallas debido a la concentración de tensiones en esa zona y que la plasticidad progresa en forma paralela al eje longitudinal de la probeta.

En la Figura 7.70b se presenta un contorno de las zonas donde se ha producido el fenómeno DFM. Uno de los motivos del comportamiento no-lineal de los materiales compuestos reforzados con fibras se debe al fenómeno de formación de grietas en la matriz y el consiguiente deslizamiento o movimiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno reduce la rigidez del material e induce deformaciones inelásticas o no recuperables. En la simulación numérica, por lo tanto se limita la capacidad de carga de la fibra debido a la imposibilidad de la matriz de transmitirle carga. El fenómeno de despegue de la fibra respecto de la matriz impide que las fibras alcancen la tensión máxima de fluencia de las mismas ya que la matriz no es capaz de transferir los esfuerzos a la fibra, observándose un cambio en la pendiente de la

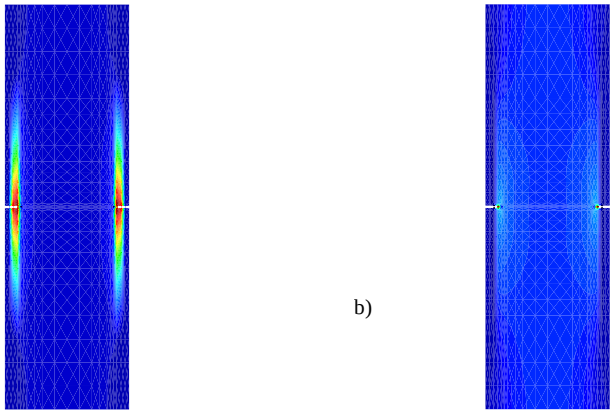

Figura 7.70: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. a) Contorno variable interna de plasticidad. b) Contorno de plasticidad en la fibra.

curva Carga - Desplazamiento. (ver Figura 7.71). En trabajos futuros se analizará con mayor detalle este fenómeno. En Figura 7.70b se observa como el fenómeno progresa desde la raíz de las entallas, debido a la concentración de tensiones en la zona, hacia el centro de la probeta.

Los resultados de las mediciones efectuadas durante el ensayo y los resultados obtenidos en la simulación numérica se observan en las Figuras 7.71 y 7.72. Las mismas muestran la comparación entre los resultados experimentales, los resultados obtenidos con ambos modelo propuesto considerando un comportamiento elástico lineal y un comportamiento elastoplástico del material compuesto. La simulación numérica considerando un comportamiento elástico lineal constituye la envolvente de las respuestas. En la primer Figura se ha graficado la fuerza necesaria en el nivel superior de la probeta en función del desplazamiento en la parte superior de la probeta.

A niveles de carga elevados se observa un fenómeno no-lineal en los ensayos experimentales relacionado con el problema de despegue entre fibra y matriz. La simulación numérica detecta con un acuerdo notable respecto de los resultados experimentales el comienzo de este fenómeno. En la Figura 7.72 se observa las curvas entre el desplazamiento en la parte superior de la probeta y la apertura de la entalla en la zona central. Se define como COD (Crack Opening Displacement) la apertura de la entalla medida a $1,5mm$ del eje longitudinal de la entalla hacia la parte supe-

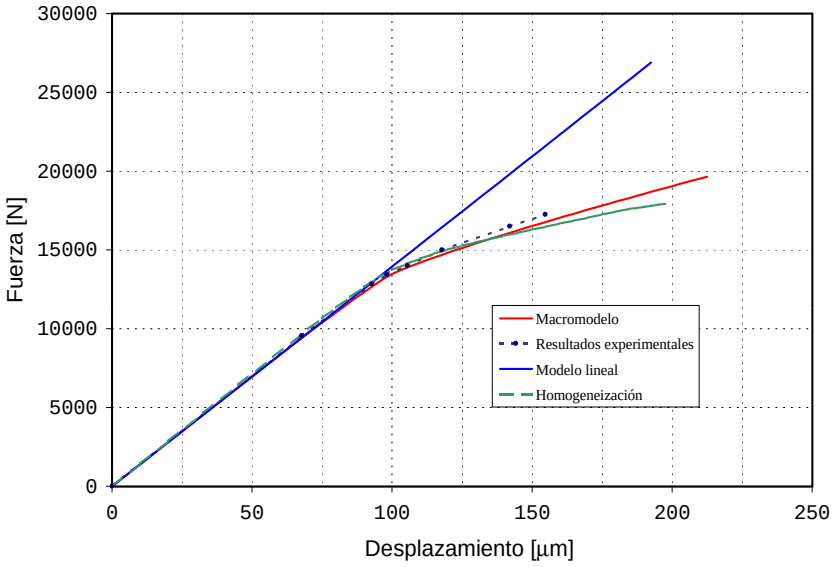

Figura 7.71: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Curva Carga - Desplazamientos en la parte superior.

rior y a $1,5mm$ del eje longitudinal de la entalla hacia la zona inferior de la probeta y a $1mm$ desde el borde exterior de la probeta. (ver Figura 7.20)

Se observa en la Figura 7.72 que los resultados experimentales muestran una apertura inferior de la fisura para desplazamientos en la parte superior de la probeta comprendidos entre $0\mu m$ y $125\mu m$ y a partir de aquí los resultados experimentales son superiores a los obtenidos con el macromodelo. Los resultados analíticos obtenidos con la teoría de homogeneización resultan inferiores a los experimentales. A pesar de la pequeñas diferencias se resalta que los resultados analíticos presentan un acuerdo satisfactorio con los resultados obtenidos en laboratorio.

El caso del modelo macromecánico resulta independiente de la discretización utilizada. En el caso del modelo basado en la teoría de la homogeneización no se ha probado la independencia de la respuesta respecto de la discretización utilizada, no existiendo evidencias de dependencia en la respuesta con la malla de elementos finitos utilizada. En la Figura 7.73 se observa la comparación de la respuesta obtenida considerando una malla de 548 elementos y otra de 1988 elementos respecto de los resultados experimentales.

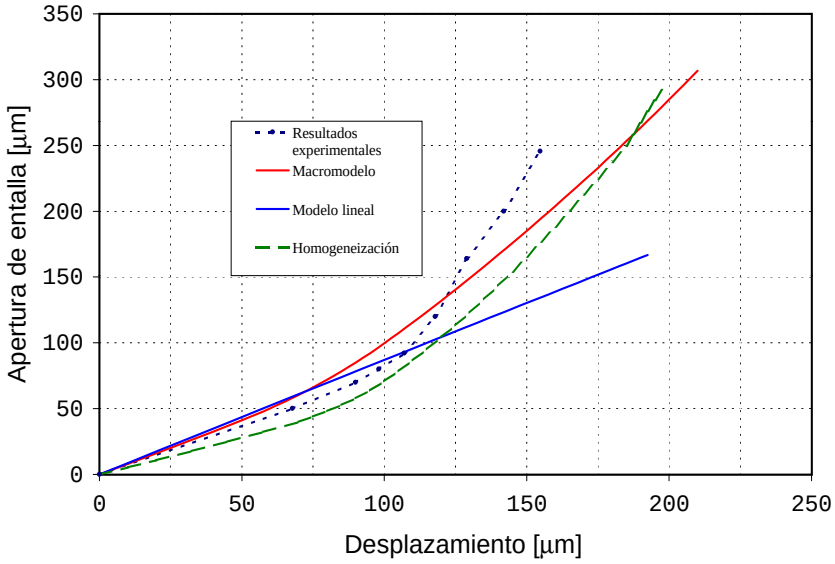

Figura 7.72: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Curva COD - Desplazamientos parte superior de la probeta.

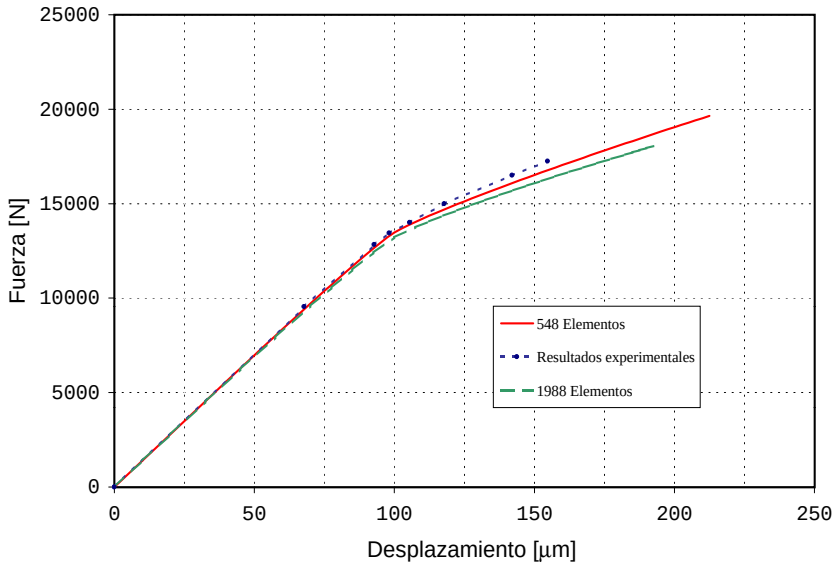

Figura 7.73: Ensayo probeta T300/914C con fibras a 0^o. Curva Carga - Desplazamientos en la parte superior para dos discretizaciones distintas.

7.8 Simulación del comportamiento de mezclas asfálticas

7.8.1 Introducción

El objetivo de esta monografía es el desarrollo de un modelo constitutivo que permita simular el comportamiento constitutivo de materiales compuestos. El modelo que se ha desarrollado es general y permite analizar diversos tipos de materiales compuestos.

En este capítulo se han presentado ejemplos de aplicación del modelo que muestran el comportamiento de probetas de un material compuesto de altas prestaciones con una entalla en la sección central. Está constituido por un refuerzo de fibras largas de muy reducido diámetro y una matriz de resina epoxy. Este material se utiliza fundamentalmente en aplicaciones aeronáuticas y aeroespaciales.

El objetivo del presente apartado es mostrar las capacidades del modelo constitutivo desarrollado en este trabajo para simular distintos tipos de materiales compuestos. Entre los distintos tipos de materiales compuestos se pueden citar por ejemplo al hormigón armado, concreto asfáltico y en general a todo material constituido por dos o más fases.

En este apartado se presenta la simulación numérica de un ensayo típico que se utiliza para dosificación de mezclas asfálticas.

Para la simulación del comportamiento de una mezcla asfáltica se ha reproducido numéricamente el ensayo Marshall. Este ensayo permite determinar la resistencia a la "deformación plástica de mezclas bituminosas". El procedimiento de ensayo en laboratorio puede utilizarse tanto para el proyecto de mezclas en laboratorio como para el posterior control en obra de la misma.

El ensayo Marshall consiste en determinar la resistencia de una probeta cilíndrica de 4 pulgadas de diámetro ($101,6mm$) y $2,5$ pulgadas de altura ($63,5mm$) frente a la aplicación de una carga a una temperatura aproximada de 60^oC. El ensayo permite determinar dos valores:

- Estabilidad : carga necesaria para producir la falla de la probeta
- Deformación : disminución del diámetro expresado en mm que experimenta una probeta entre el comienzo de la carga y el instante de rotura.

El ensayo permite realizar curvas Cargas - Desplazamientos con las cuales es posible determinar los valores de estabilidad y deformación definidos anteriormente. Para mas detalles consultar la norma NLT-159/86.

% en peso que pasa			
diámetro $[mm]$	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
25	90	100	100
20	78	94	100
12,5	56	71	82
10	52	67	65
5	36	50	41
2,5	25	36	14
0,63	13	19	8
0,32	8	12	7
0,16	6	8	6
0,08	4	6	5
ciego	0	0	0

Tabla 7.12: Granulometría de los áridos de las distintas mezclas.

7.8.2 Motivación del trabajo y descripción del problema

La motivación del presente trabajo, es mostrar en forma numérica, utilizando el modelo constitutivo desarrollado en esta monografía, el comportamiento de un material compuesto (mezcla bituminosa) sometido a la acción de cargas de servicio, en el que se ha supuesto que además sufre un daño exógeno al proceso mecánico mismo, provocado por un potencial no-mecánico (problemas químicos, higrométricos, etc.). Esta mezcla bituminosa está constituida por una fase de refuerzo (áridos) y una matriz (betún). La evolución de la capacidad portante de la mezcla bituminosa es no-lineal, debido a que el agente exógeno que produce degradación en las características mecánicas de una o más fases del compuesto se acopla al problema mecánico.

En este estudio se han considerado tres mezclas bituminosas (Mezcla 1, Mezcla 2, Mezcla 3), según la curva granulométrica y el porcentaje de betún que se ha incorporado en la mezcla (ver Tabla 7.12, Tabla 7.13 y Figura 7.74). Las características granulométricas de los áridos de cada una de las mezclas es función de la posición que ocupa la mezcla en el firme.

Con el objetivo de simular numéricamente el comportamiento constitutivo del material la curva granulométrica de los áridos se ha simplificado y dividido en dos partes. En la primera están comprendidos los áridos cuyo tamaño está situada entre el tamiz $25mm$ y $5mm$ (grava y gravilla) y una segunda que compuesta de

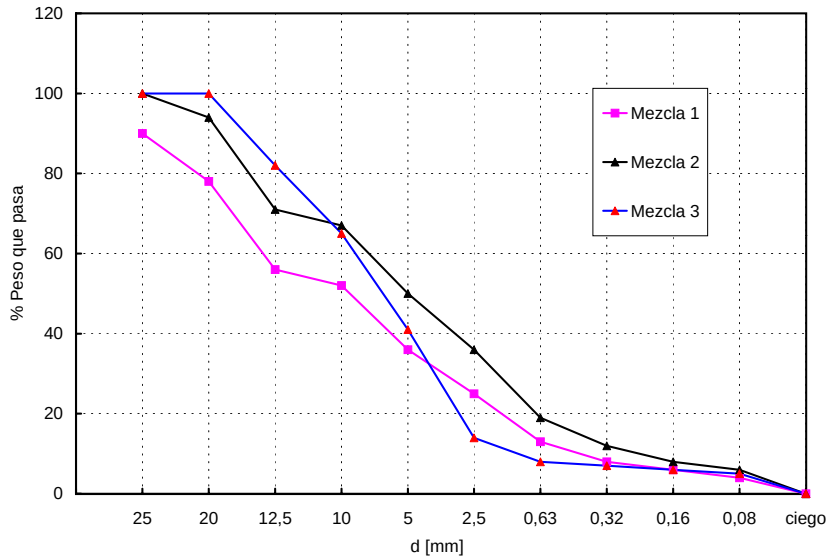

Figura 7.74: Curva granulométrica de los áridos de las distintas mezclas.

los áridos que pasan el tamiz de diámetro $5mm$ (arenas). En cada una de estas dos subdivisiones de la curva granulométrica se han considerado en porcentajes variables dos tipos de áridos, alterables frente a agentes externos no mecánicos (partículas blandas) y otros no alterables frente a un agente externo no mecánico. Además de los dos tipos básicos de áridos que integran cada mezcla, está el betún que participa en proporciones distintas en cada caso (ver participación en volumen en Tabla 7.13).

A los fines de simular el comportamiento mecánico de la mezcla asfáltica con el modelo desarrollado en esta monografía se ha considerada que las distintas mezclas están constituidas por 5 fases:

- Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica (grava y gravilla) susceptible de presentar degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico (partículas blandas).

- Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica (grava y gravilla) que no presenta degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico (partículas duras).

- Refuerzo en la zona alta de la curva granulométrica (grava y gravilla) susceptible de presentar degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico.

	% en peso que pasa			% retenido acumulado			% retenido parcial		
d $[mm]$	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3	Mezcla 1	Mezcla 2	Mezcla 3
20	78	94	100	22	6	0	22	6	0
12,5	56	71	82	44	29	18	22	23	18
5	36	50	41	64	50	59	20	21	41
0,32	8	12	7	92	88	93	28	38	34
0,08	4	6	5	96	94	95	4	6	2
ciego	0	0	0	100	100	100	4	6	5
betún	3,7	4,4	4,6						

Tabla 7.13: Granulometría simplificada de los áridos de las distintas mezclas.

- Refuerzo en la zona baja de la curva granulométrica (arena) que no presenta degradación en sus propiedades mecánicas debido a la existencia de un potencial externo no mecánico.

- Betún

7.8.3 Parametrización de los materiales. Granulometría simplificada y corrección de las propiedades por relación de aspecto

Se ha denominado Mezcla 1 a la curva granulométrica utilizada para la capa de base, Mezcla 2 a la utilizada en constituir la capa intermedia y Mezcla 3 la que incorpora la capa de rodadura. Estas mezclas bituminosas es posible considerarlas como un material compuesto reforzados con fibras cortas, es decir un refuerzo que debido a su escasa longitud no es posible realizar una transferencia de los esfuerzos de la matriz (betún) hacia el refuerzo (árido). Los áridos presentes en la mezcla bituminosa poseen dos tipologías claramente identificables según su comportamiento. La primera tipología corresponde a partículas blandas susceptibles de ser afectadas por la humedad, perdiendo capacidad mecánica en forma de degradación de la rigidez , donde depende entre otros fenómenos de la evolución de, que es la variable de degradación por acción de la humedad. La segunda tipología de los áridos, partículas duras, son insensibles a la acción de la humedad.

Por razones de simplicidad en el cálculo, se sintetizan los diámetros que participan en cada curva granulométrica como se muestra en la Tabla 7.13. De acuerdo a la forma, su separación, las propiedades mecánicas de los granos y su participación en el compuesto se deducen las propiedades corregidas de los áridos. Esta corrección sigue el criterio descrito en el Capítulo 4. En la Tabla 7.14 se muestran las propiedades mecánicas y la correción del módulo elástico del refuerzo teniendo en cuenta su longitud y distribución en el compuesto. Para módulo de Young del agregado en estado natural se adopta el valor $C_a = 300000\frac{kg}{cm^2}$ y corresponde a un material

Correción por fibra corta $C_b = 80,8529$									
L	r'	r	A	C_{mat}	ν_{mat}	G_{mat}	β	C_o	C_c
2	1,05	1,00	0,7854	80,375	0,4	28,705	0,12525	0,005197	1559,1311
1,25	0,65625	0,625	0,30679	80,375	0,4	28,705	0,20014	0,005197	1559,1311
0,5	0,2625	0,25	0,04908	80,375	0,4	28,705	0,50102	0,005197	1559,1311
0,032	0,0168	0,016	0,000201	80,375	0,4	28,705	7,82852	0,005197	1559,1311
0,008	0,0042	0,004	1,2566e-5	80,375	0,4	28,705	31,3140	0,005197	1559,1311
0,0001	0,0000525	0,00005	1,9635e-9	80,375	0,4	28,705	2505,12	0,005197	1559,1311

Tabla 7.14: Parámetros mecánicos de los constituyentes y su corrección.

simple, homogéneo y continuo. En este caso el material participa en forma de grano, pierde parte de sus propiedades por condiciones de adherencia y transmisión de tensión entre matriz y árido, con lo cual se obtiene $C_a^{corr} = 1559,1311 \frac{kg}{cm^2}$, en tanto el módulo de Poisson se mantiene constante en $\nu = 0,15$.

Las propiedades mecánicas del betún dependen fundamentalmente de su temperatura. En la simulación numérica se ha obtenido de una parametrización con el ensayo Marshall de la mezcla, teniendo en cuenta su participación volumétrica y la teoría de mezclas (Car *et al.*, 1998c).

La tensión umbral de inicio del comportamiento inelástico, se obtiene también a partir de una parametrización con el ensayo Marshall. Por ejemplo, para la Mezcla 2, se acepta que el inicio del comportamiento no-lineal de la mezcla $S^Y_{Marshall} = 20 \frac{kg}{cm^2}$, se debe a la plasticidad en el betún. Luego de un cierto punto del ensayo, se observa un fuerte quiebre en la curva, instante en el que se inicia el comportamiento inelástico del árido. Esto ocurre cuándo el betún ya exhibe una deformación excesiva, permitiendo el contacto de los áridos entre sí. Por esta razón, y apoyado en la condición de compatibilidad del compuesto, se puede obtener el umbral de plastificación del betún para el instante en que se inicia el comportamiento no-lineal de la mezcla.

El umbral de daño del árido se produce cuando el comportamiento plástico del betún es avanzado, luego del primer umbral de comportamiento inelástico de la mezcla.

7.8.4 Simulación Numérica

Para la simulación numérica del ensayo se ha discretizado una circunferencia de 101,6 mm. de diámetro y dos sectores de circunferencia constituidos en acero, que simulan las mordazas de la prensa utilizada en el ensayo. La malla de elementos finitos utilizada tiene 431 nodos y 776 elementos finitos triangulares lineales considerando un estado de tensiones planas y por lo tanto permitiendo el flujo del material en el sentido axial(ver Figura 7.75).

El casquete exterior del cilindro es de acero. Entre el acero y la mezcla bitu-

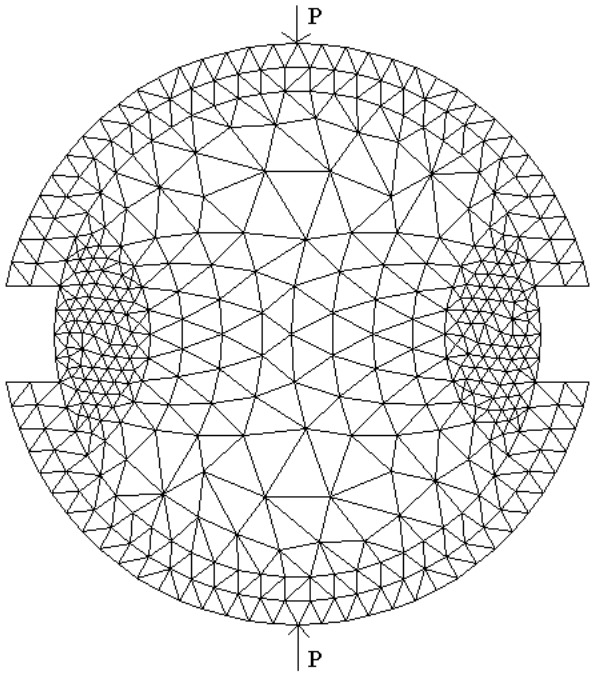

Figura 7.75: Malla de elementos finitos del ensayo Marshall para mezclas asfálticas.

minosa, se considera deslizamiento, por fricción, de la mezcla bituminosa gracias al control de la tensión tangencial entre ambos materiales.

Del ensayo se obtienen curvas *Cargas - Desplazamientos* con las cuales es posible determinar los valores de estabilidad y deformación definidos en la Norma NLT-159/86.

En la simulación numérica se ha utilizado la teoría de mezclas de sustancias básicas. La capa intermedia C-2 y la base C-1 del firme, se han modelado como materiales compuestos con tres componentes básicos cada uno de ellos:

Mezcla 1

- Material M-1.a: corresponde al árido comprendido entre 20 y 5 mm. de la curva granulométrica C-1. Participa en un 58,62% y presenta un daño inicial en función de la humedad y es mecánicamente degradable.

- Material M-1.b: corresponde al árido comprendido entre 0,32 mm. y el tamiz ciego de la curva granulométrica C-1. Participa en un 32,97%, siendo degradable por problemas mecánicos, pero insensible a la influencia de la humedad.

- Material M-1.c: corresponde al betún. Este material participa en un 8,41% del volumen de la mezcla y presenta un comportamiento elastoplástico.

Mezcla 2

- Material M-2.a: corresponde al árido comprendido entre 20 y 5 mm. de la curva granulométrica C-2. Participa en un 45,02% y presenta un daño inicial en función de la humedad y es mecánicamente degradable.

- Material M-2.b: corresponde al árido comprendido entre 0,32 mm. y el tamiz ciego de la curva granulométrica C-2. Participa en un 45,02%, siendo degradable por problemas mecánicos, pero insensible a la influencia de la humedad.

- Material M-2.c: corresponde al betún. Este material participa en un 9,96% del volumen de la mezcla y presenta un comportamiento elastoplástico.

En la Figura 7.76-1 se observa la malla de elementos finitos y los materiales empleados en la simulación numérica. En la Figura 7.76-2, 7.76-3 y 7.76-4 se presenta para la mezcla M-2 los contornos de evolución del daño en la mezcla para tres estados distintos del proceso de carga. Particularmente la Figura 7.76-2 muestra el daño mecánico en la mezcla M-2 partiendo de un daño higrométrico inicial nulo. La escala que se observa muestra el daño mecánico que alcanza todo este material. La Figura 7.76-4 muestra el daño mecánico de la mezcla M-2 considerando que la porción de agregado pétreo susceptible de daño no colabora en la capacidad soporte de la mezcla, es decir se encuentra con un daño inicial del 100%.

El problema se resuelve en tensión plana, permitiendo el flujo del material en el sentido axial. El casquete exterior del cilindro es de acero y el interior esta conformado por cada una de las tres mezclas. Entre el acero y la mezcla bituminosa, se considera deslizamiento, por fricción, gracias al control de la tensión tangencial entre ambos materiales. Los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas se presentan en las Figuras 7.77, 7.78, 7.79 y 7.80. En todas ellas se observa una disminución del módulo de carga $K = \frac{p}{\delta}$ a medida que aumenta el daño inicial. Sin embargo, hasta valores del 40% de daño inicial en la mezcla 1 no se observa una gran pérdida de resistencia, situación que se manifiesta para desplazamientos superiores a $2mm.$ aproximadamente.

Se observa, en las Figuras 7.77 y 7.78 para la mezcla M-2 y en las Figuras 7.79 y 7.80 para la mezcla M-1, una pérdida de rigidez y resistencia en función de la carga y del daño producido por efectos higrométricos. En ambos casos la capacidad soporte tiende asintóticamente a un valor cercano al 42% de la máxima para el caso del material virgen. Es necesario hacer notar, que la respuesta experimental presente un buen acuerdo con las respuestas "sin daño" mostradas en las Figuras 7.77 y 7.79.

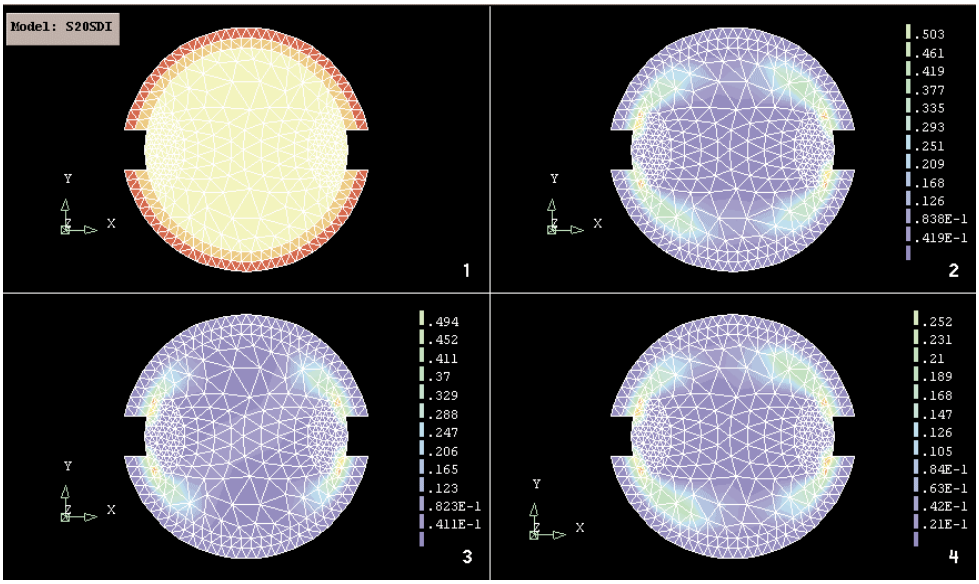

Figura 7.76: Materiales empleados - Variable interna de daño.

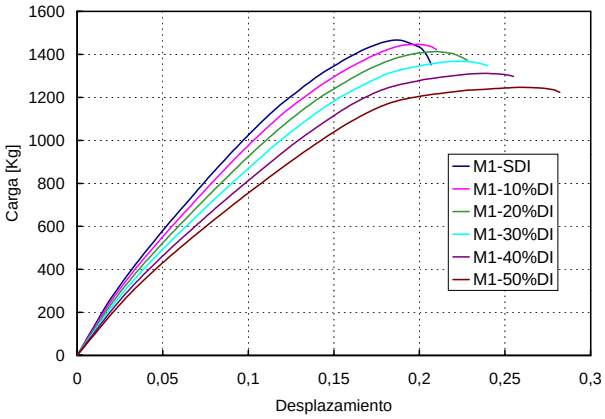

Figura 7.77: Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la Mezcla 1 $0 \leq d \leq 0,5$.

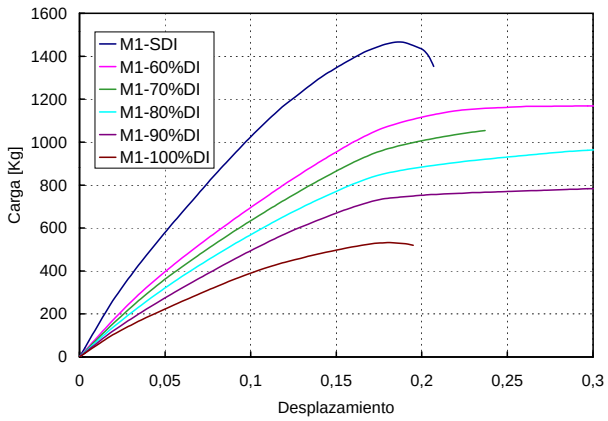

Figura 7.78: Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la Mezcla 1 $0,5 \leq d \leq 1$.

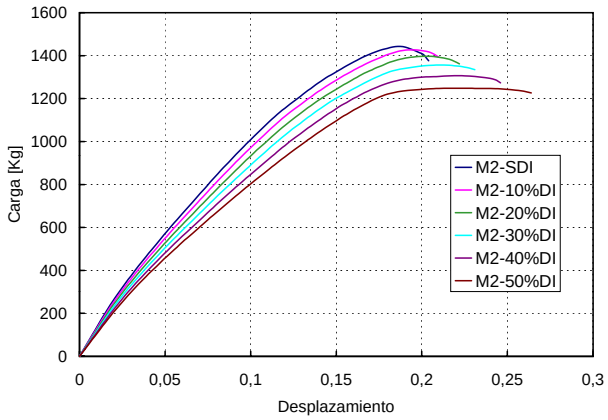

Figura 7.79: Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la Mezcla 2 $0 \leq d \leq 0,5$.

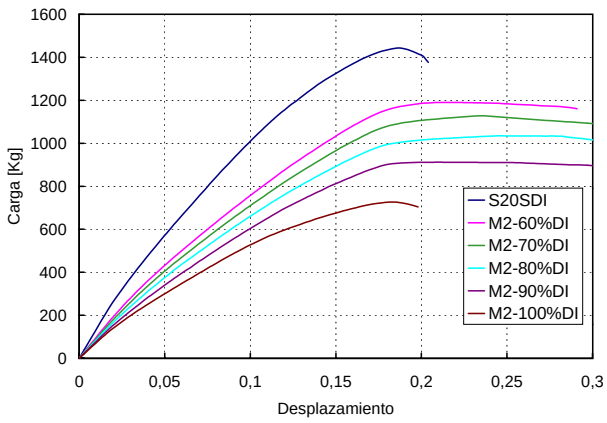

Figura 7.80: Curvas de respuesta del ensayo Marshall para la Mezcla 2 $0,5 \leq d \leq 1$.

Apéndice A

Elementos de mecánica del continuo en grandes deformaciones

A.1 Introducción

En este apéndice se presenta una revisión de los conceptos de mecánica de medios continuos en lo referente a la cinemática de grandes deformaciones. Esta revisión incluye, entre otros conceptos, la definición de las configuraciones referencial y actualizada o deformada, la definición del tensor gradiente de las deformaciones, los tensores de deformaciones de Green-Lagrange y Almansi, los operadores *"push-forward"* y *"pull-back"* y los distintos tensores de tensión (primer y segundo tensor de Piola-Kirchhoff, de Kirchoff y de Cauchy. Los conceptos que aquí se desarrollan se aplican, principalmente, en los Capítulos 3, 4, 5 y 6.

A.2 Ecuaciones del movimiento

La descripción más elemental del movimiento del Medio Continuo puede llevarse a cabo mediante funciones matemáticas que describan la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. En general se requiere que éstas funciones y sus derivadas sean continuas.

Se supone que el medio continuo está formado por infinitas partículas (*puntos materiales*) que ocupan diferentes posiciones del espacio físico durante su movimiento a lo largo del tiempo (ver Figura A.1). Se define como *configuración* del medio continuo en el instante t, que se denota por Ω_t, el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio los puntos materiales (partículas) del medio continuo en dicho instante.

El instante $t = t_0$ del intervalo de tiempo de interés se denomina instante de

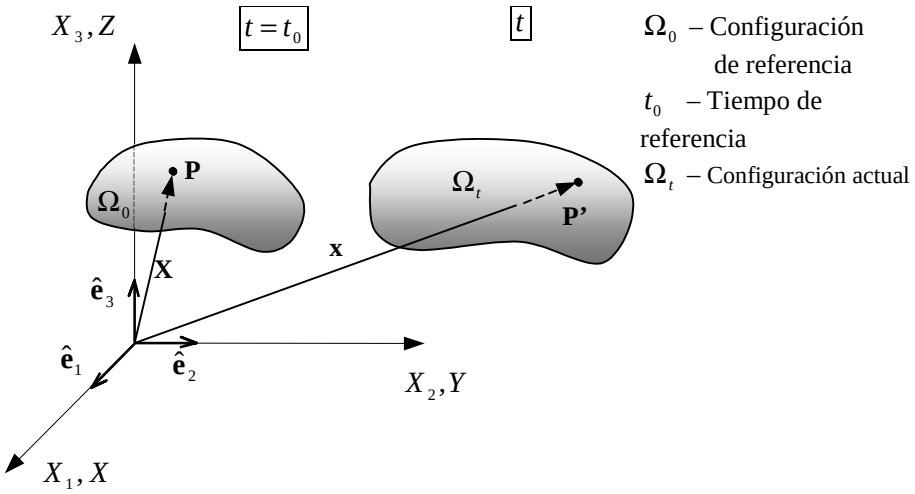

Figura A.1: Configuraciones del medio continuo.

referencia y la configuración en dicho instante se denomina configuración inicial, material o de referencia.

En la Figura A.1 se muestra el sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z) y la correspondiente base ortonormal $(\hat{\boldsymbol{e}}_1, \hat{\boldsymbol{e}}_2, \hat{\boldsymbol{e}}_3)$. En la configuración de referencia el vector de posición de una partícula que ocupa un punto **P** en el espacio (en el instante de referencia) está dado por:

$$\boldsymbol{X} = X_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + X_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + X_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{A.1}$$

donde las componentes (X_1, X_2, X_3) se denominan *coordenadas materiales* (de la partícula).

En la configuración actualizada Ω_t , la partícula situada originalmente en el punto **P** en la configuración referencial (ver Figura A.1) ocupa el punto $\mathbf{P}'$ en la configuración espacial y su vector de posición $\boldsymbol{x}$ está dado por:

$$\boldsymbol{x} = x_1\hat{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\hat{\boldsymbol{e}}_2 + x_3\hat{\boldsymbol{e}}_3 \tag{A.2}$$

donde las componentes (x_1, x_2, x_3) se denominan *coordenadas espaciales* (de la partícula) en el tiempo t.

El movimiento de las partículas del medio continuo puede describirse a través de la evolución de sus coordenadas espaciales (o de su vector de posición) a lo largo del tiempo. Matemáticamente esto requiere conocer una función que para cada partícula (identificada por una *etiqueta*) proporcione sus coordenadas espaciales x_i (o su vector

de posición espacial $\boldsymbol{x}$) en los sucesivos instantes de tiempo. Como etiqueta que caracteriza unívocamente a cada partícula puede elegirse sus coordenadas materiales $\boldsymbol{X}_i$ obteniéndose las *ecuaciones del movimiento*:

$$\boldsymbol{x} = \varphi\{\text{partícula}, t\} = \varphi\{\boldsymbol{X}, t\} \tag{A.3}$$

que proporcionan las coordenadas espaciales en función de las materiales; y las *ecuaciones del movimiento inversas*:

$$\boldsymbol{X} = \varphi^{-1}\{\boldsymbol{x}, t\} \tag{A.4}$$

que proporcionan las coordenadas materiales en función de las espaciales.

A.2.1 Desplazamientos

Se define como desplazamiento a la diferencia entre los vectores de posición de una misma partícula en las configuraciones actualizada y de referencia.

El desplazamiento de una partícula $\mathbf{P}$ en un instante determinado está definido por el vector $\boldsymbol{u}$ que une los puntos del espacio $\mathbf{P}$ (posición inicial) y $\mathbf{P}'$ (posición en el instante actual t) de la partícula (ver Figura A.2). El desplazamiento de todas las partículas del medio continuo define el *campo vectorial de desplazamientos* que, como toda propiedad del medio continuo, podrá describirse en forma material o espacial:

$$\boldsymbol{U}\{\boldsymbol{X}, t\} = \boldsymbol{x}\{\boldsymbol{X}, t\} - \boldsymbol{X} \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{u}\{\boldsymbol{x}, t\} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}\{\boldsymbol{x}, t\} \tag{A.6}$$

A.2.2 Gradientes material, espacial y derivadas del tiempo

Los gradientes material y espacial de un campo general γ, se definen como:

$$\nabla_X \gamma = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \gamma\{\boldsymbol{X}, t\} \qquad \text{y} \qquad \nabla_x \gamma = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \gamma\{\boldsymbol{x}, t\} \tag{A.7}$$

esto es, las derivadas de γ con respecto a $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{x}$ manteniendo fijo el tiempo t. En forma análoga, las derivadas temporales material $\dot{\gamma}$ y espacial γ' se definen como:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial}{\partial t} \gamma\{\boldsymbol{X}, t\} \qquad \text{y} \qquad \gamma' = \frac{\partial}{\partial t} \gamma\{\boldsymbol{x}, t\} \tag{A.8}$$

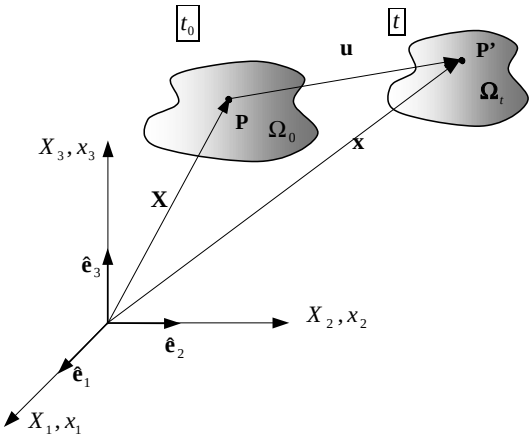

Figura A.2: Desplazamientos.

A.2.3 Velocidad

Se define como velocidad a la derivada temporal de las ecuaciones del movimiento. La descripción material de la velocidad está dada por:

$$\boldsymbol{V}\{\boldsymbol{X},t\} = \frac{\partial \boldsymbol{x}\{\boldsymbol{X},t\}}{\partial t} \tag{A.9}$$

La descripción espacial de la velocidad se obtiene a partir de las ecuaciones inversas del movimiento (ec. (A.4)):

$$\boldsymbol{v}\{\boldsymbol{x},t\} = \boldsymbol{V}\{\boldsymbol{X}\{\boldsymbol{x},t\},t\} \tag{A.10}$$

A.2.4 Gradiente de la deformación

El gradiente de la deformación del movimiento φ es un tensor bipuntual de segundo orden $\boldsymbol{F}$ y que se define como

$$\boldsymbol{F}\{\boldsymbol{X},t\} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{A.11}$$

teniendo en cuenta la ec. (A.6) el gradiente de las deformaciones se puede escribir como

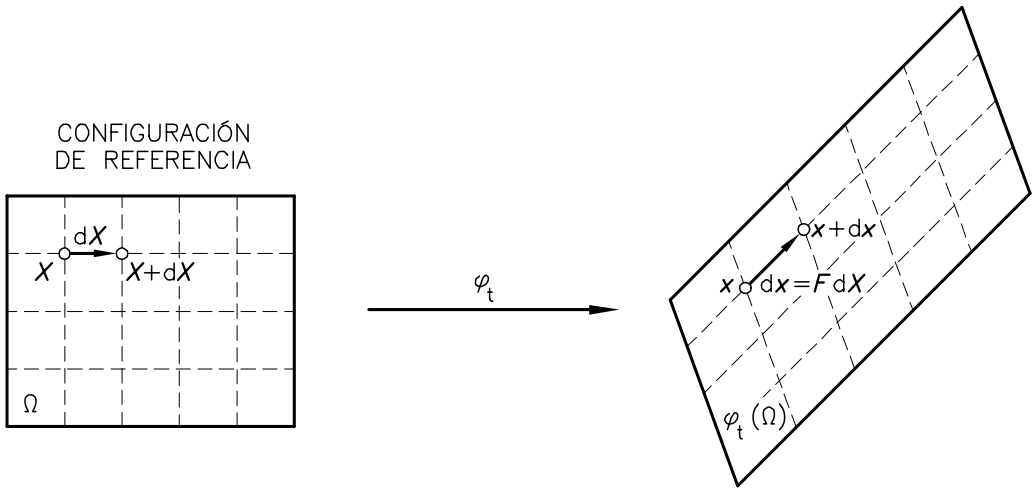

Figura A.3: Gradiente de deformación.

$$\boldsymbol{F}\{\boldsymbol{X},t\} = \boldsymbol{I} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} \tag{A.12}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es el tensor identidad de segundo orden. Las componentes cartesianas del gradiente de las deformaciones están dadas por:

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{A.13}$$

La Figura A.3 muestra una línea material infinitesinal $d\boldsymbol{X}$ que conecta dos partículas materiales próximas $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$ de un cuerpo deformable. Si se somete el cuerpo a una deformación, estas partículas son mapeadas en $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$, respectivamente. El gradiente de la deformación es el operador lineal que relaciona la línea material infinitesimal $d\boldsymbol{X}$ con su deformada $d\boldsymbol{x}$

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{X} \tag{A.14}$$

El *tensor gradiente de la deformación* $\boldsymbol{F}$ contiene la información del movimiento relativo, a lo largo del tiempo t, de todas las partículas materiales en el entorno de una dada, identificada por sus coordenadas materiales $\boldsymbol{X}$. En efecto, la ec. (A.11) proporciona la evolución del vector de posición relativo $d\boldsymbol{x}$ en función de la correspondiente posición relativa $d\boldsymbol{X}$ en el instante de referencia.

A.2.5 Cambio de volumen. Determinante del gradiente de deformación

Dado un volumen infinitesimal dv_0 definido por los vectores infinitesimales $d\boldsymbol{X}_1$, $d\boldsymbol{X}_2$ y $d\boldsymbol{X}_3$ con origen en una partícula material $\boldsymbol{X}$ en la configuración referencial (ver Figura A.4) se tiene:

$$dv_0 = (d\boldsymbol{X}_1 \times d\boldsymbol{X}_2) \cdot d\boldsymbol{X}_3 \tag{A.15}$$

Al aplicar una deformación los vectores infinitesimales en la configuración actualizada resultan $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{c}$ y el volumen infinitesimal en esta configuración está dado por:

$$dv = (\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2) \cdot \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_3 \tag{A.16}$$

Teniendo en cuenta la identidad:

$$\det[\boldsymbol{Z}] = \frac{(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{Z}\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{Z}\boldsymbol{w}}{(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot v} \tag{A.17}$$

válida para cualquier tensor $\boldsymbol{Z}$ y cualquier conjunto de vectores $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ linealmente independientes, el determinante del gradiente de la deformación resulta:

$$\det[\boldsymbol{F}] = \frac{dv}{dv_0} \tag{A.18}$$

La ec. (A.18) representa el volumen después de la deformación por unidad de volumen de referencia. Este determinante se denota usualmente J.

En la configuración referencial $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}$ y en consecuencia $\det[\boldsymbol{F}] = 1$. De la ec. (A.18) se deduce que, si $\det[\boldsymbol{F}] = 0$ el volumen infinitesimal ha colapsado en una partícula material, lo que resulta físicamente inaceptable. Cualquier configuración con $\det[\boldsymbol{F}] < 0$ no puede ser alcanzada desde la configuración de referencia sin haber pasado, en algún momento, por $\det[\boldsymbol{F}] = 0$. En consecuencia, para cualquier deformación del cuerpo, $\boldsymbol{F}$ es un tensor definido positivo.

$$\det[\boldsymbol{F}] > 0 \tag{A.19}$$

A.3 Fuerzas y medidas de tensión

En los apartados anteriores se ha hecho una descripción matemática de la cinemática de la deformación de un cuerpo sin hacer referencia a *fuerzas* y como éstas son transferidas entre cuerpos continuos. Estas fuerzas, asociadas con la descripción mecánica de un cuerpo, pueden ser clasificadas en tres categorías:

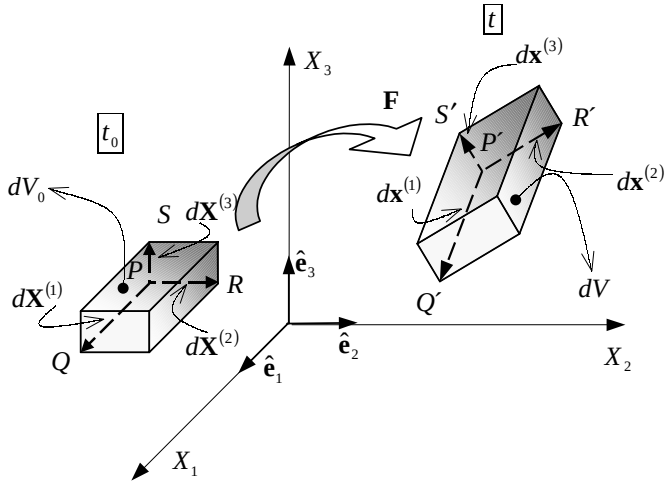

Figura A.4: Variación de volumen de un elemento diferencial.

Fuerzas de contorno, aplicadas en el contorno de un cuerpo, tales como las fuerzas resultantes del contacto con otro cuerpo.

Fuerzas de masa, en el interior del cuerpo. El peso y fuerzas magnéticas son ejemplos de este tipo de fuerza.

Fuerzas producto de interacciones internas entre partes adyacentes de un cuerpo y transmitidas a través de la superficie que separa estas partes.

Las fuerzas producidas por la interacción interna entre una parte del cuerpo y otra adyacente al igual que las fuerzas de contorno son transmitidas a través de una superficie, por lo que pueden ser agrupadas como fuerzas de superficie, y para su descripción matemática son necesarios los conceptos de tensión.

A.3.1 Postulado de Cauchy

En la Figura A.5 se muestra un medio continuo en equilibrio, sobre el que actúan unas fuerzas de volumen o fuerzas de masa y unas fuerzas de superficie. En la misma se observa un punto arbitrario **P** del interior del medio continuo y un plano arbitrario de normal unitaria que pasa por el punto P. Este plano corta al medio continuo en dos partes. En la superficie de corte de cada una de estas partes actúan las fuerzas que una parte del medio ejerce sobre la otra y viceversa. Dado un campo de tracciones que actúa en el punto **P** según el plano de normal unitaria $\boldsymbol{n}$ y sea el campo de tracciones que actúa en el punto $\mathbf{P}'$ según un plano de normal unitaria $-\boldsymbol{n}$.

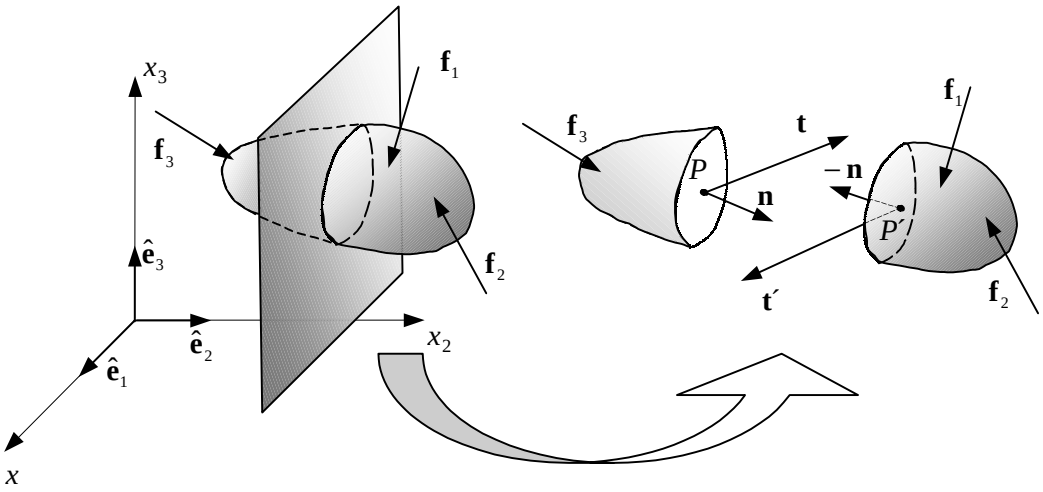

Figura A.5: Cuerpo en equilibrio.

El primer postulado de Cauchy establece que el vector de tracciones que actúa en un punto **P** de un medio continuo según un plano de normal unitaria $\boldsymbol{n}$ depende únicamente del punto **P** y de la normal $\boldsymbol{n}$ al plano que pasa por el punto **P**.

EL segundo postulado de Cauchy, conocido como el principio de acción y reacción, establece que el vector de tracciones en un punto **P** de un medio continuo, según un plano de normal unitaria $\boldsymbol{n}$ en el punto **P**, es igual y de sentido contrario al vector de tracciones en el mismo punto **P** según un plano de normal unitaria $-\boldsymbol{n}$ en el mismo punto:

$$\boldsymbol{t}\left\{\mathbf{P},\boldsymbol{n}\right\} = -\boldsymbol{t}\left\{\mathbf{P},-\boldsymbol{n}\right\} \tag{A.20}$$

A.3.2 Principio de balance de la cantidad de movimiento

El *axioma de balance de momento* expresa: Para toda parte $\mathcal{P}$ en la configuración deformada de un cuerpo $\mathcal{B}$, con contorno $\mathcal{S}$, el *balance de momento lineal* :

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{t}\left\{\boldsymbol{n}\right\} da + \int_{\mathcal{P}} \rho \boldsymbol{b} dv = \int_{\mathcal{P}} \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv \tag{A.21}$$

y el *balance de momento angular*:

$$\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t}\left\{\boldsymbol{n}\right\} da + \int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{x} \times \rho \boldsymbol{b} dv = \int_{\mathcal{P}} \boldsymbol{x} \times \rho \dot{\boldsymbol{v}} dv \tag{A.22}$$

son satisfechos, siendo $\rho = \rho\left\{\boldsymbol{x}\right\}$ el campo de densidad de masa, masa por unidad de volumen en la configuración deformada de $\mathcal{B}$. El lado derecho de las ecs. (A.21)

y (A.22) contiene los términos de inercia, siendo $\dot{\boldsymbol{v}}$ el campo de aceleraciones del cuerpo $\mathcal{B}$.

A.3.3 El tensor de tensiones de Cauchy

Como consecuencia del axioma de balance de momento, la dependencia de la fuerza de superficie $\boldsymbol{t}$ de la normal $\boldsymbol{n}$ es *lineal*. Esto implica que existe un campo tensorial $\boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{x}\}$ tal que el vector de tensiones de Cauchy está dado por :

$$\boldsymbol{t}\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\} = \boldsymbol{\sigma}\{\boldsymbol{x}\}\cdot\boldsymbol{n} \tag{A.23}$$

El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ es *simétrico* y se denomina *tensor de tensiones de Cauchy*, frecuentemente llamado de tensiones verdaderas.

Componentes del tensor de tensiones de Cauchy

Utilizando una base ortonormal $\{n_1, n_2, n_3\}$, el tensor de tensiones de Cauchy se representa como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_j \tag{A.24}$$

La componente σ_{ij} viene dada por:

$$\sigma_{ij} = (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_i)\cdot\boldsymbol{n}_j \tag{A.25}$$

De la ecuación A.23 se deduce que el vector $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_i$ es la fuerza por unidad de superficie ejercida a través de una superficie con vector normal $\boldsymbol{n}_i$. La componente σ_{ij} es la norma de la proyección de $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_i$ en la dirección de $\boldsymbol{n}_j$. La representación esquemática de tales proyecciones se presenta en la Figura A.6. Las componentes σ_{11}, σ_{22} y σ_{33} representan tracciones *normales* a las caras del cubo infinitesimal, mientras que las componentes σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{23}, σ_{31} y σ_{32} están asociadas con fuerzas de cortante que actúan paralelas a las caras.

Tensiones principales de Cauchy

Debido a su simetría, el tensor de tensiones de Cauchy admite la descomposición espectral:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{3} \sigma^*_{ii}\boldsymbol{n}^*_i \otimes \boldsymbol{n}^*_i \tag{A.26}$$

siendo $\{\boldsymbol{n}^*_1, \boldsymbol{n}^*_2, \boldsymbol{n}^*_3\}$ una base ortonormal en la cual todas las componentes de cortante del tensor de tensiones de Cauchy son nulas y solo las componentes normales pueden ser no nulas. Las componentes normales σ^*_{ii} son los autovalores de $\boldsymbol{\sigma}$ y se denominan *tensiones principales de Cauchy* y las direcciones definidas por la base

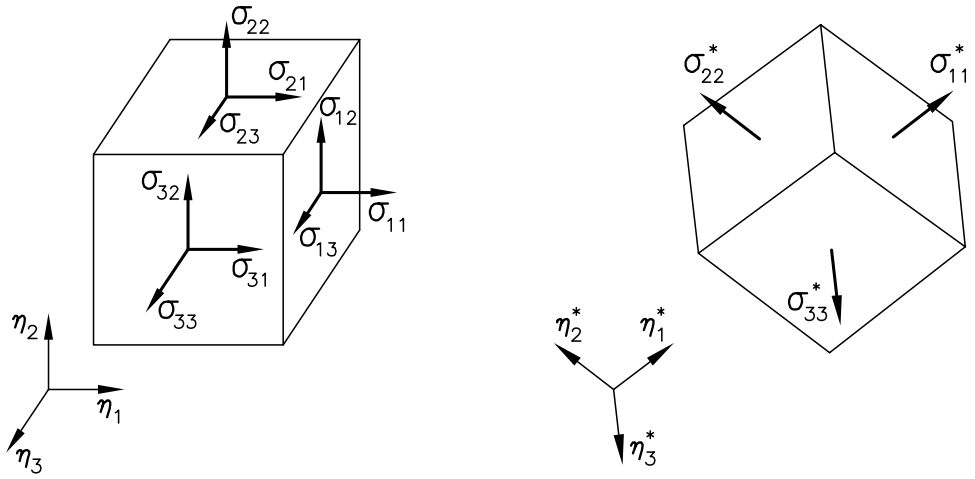

Figura A.6: Componentes del tensor de tensiones de Cauchy y tensiones principales de Cauchy.

$\{\boldsymbol{n}_1^*, \boldsymbol{n}_2^*, \boldsymbol{n}_3^*\}$ son denominadas *direcciones de las tensiones principales*. En la Figura A.6 se muestra la representación esquemática de fuerzas que actúan en las caras del cubo infinitesimal según las direcciones de las tensiones principales; las fuerzas son normales a las caras del cubo.

A.3.4 Tensores de tensión de Piola-Kirchhoff

El vector de tracciones $\boldsymbol{t}$ en la ecuación A.23 mide la fuerza ejercida a través de una superficie material por unidad de superficie *deformada*. Por otra parte, $\bar{\boldsymbol{t}}$ mide la fuerza que actúa en cualquier superficie cuya normal es $\boldsymbol{n}$ en la configuración deformada, por unidad de superficie de *referencia*. Siendo da un área infinitesimal de una superficie normal a $\boldsymbol{n}$ en la configuración deformada y da_o su equivalente en la posición no deformada, $\bar{\boldsymbol{t}}$ se expresa como:

$$\bar{\boldsymbol{t}} = \frac{da}{da_0}\boldsymbol{t} = \frac{da}{da_0}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} \tag{A.27}$$

Si se considera una superficie $\mathcal{S}$ del cuerpo $\mathcal{B}$ en la configuración de referencia (ver Figura A.7), uno vectores $d\boldsymbol{X}_1$ y $d\boldsymbol{X}_2$ infinitesimales tangentes a $\mathcal{S}$ en el punto material $\boldsymbol{X}$, una superficie da_o generada por $d\boldsymbol{X}_1$ y $d\boldsymbol{X}_2$ y un vector $\boldsymbol{m}$ a la normal a $\mathcal{S}$ en $\boldsymbol{X}$, se tiene:

$$\boldsymbol{m}da_0 = d\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{X}_2 \tag{A.28}$$

Sometido a deformación, los vectores tangentes $d\boldsymbol{X}_1$ y $d\boldsymbol{X}_2$ son transformados en $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_2$ tal que la normal a la configuración deformada de $\mathcal{S}$ es:

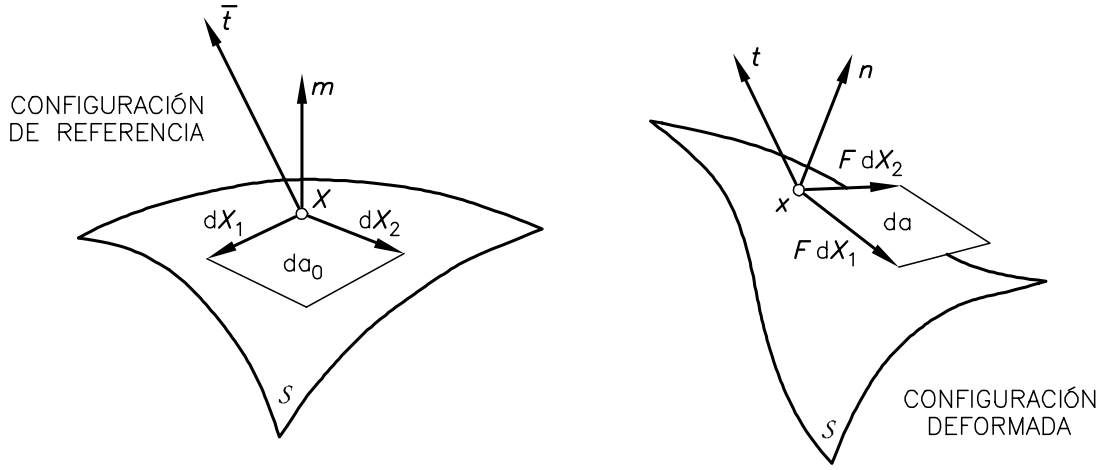

Figura A.7: El primer tesnor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

$$\boldsymbol{n}da = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X}_1 \times \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_2 \tag{A.29}$$

donde da es la correspondiente superficie deformada. Pre-multiplicando ambos lados de esta expresión por $\boldsymbol{F}^T$ y teniendo en cuenta la identidad:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \det[\boldsymbol{A}]\,\boldsymbol{A}^{-T}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \tag{A.30}$$

válida para todo tensor invertible $\boldsymbol{A}$ y vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, se obtiene:

$$\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{n}da = Jd\boldsymbol{X}_1 \times d\boldsymbol{X}_2 = J\boldsymbol{m}da_0 \tag{A.31}$$

donde $J = \det[\boldsymbol{F}]$. Esto es equivalente a

$$\frac{da}{da_o}\boldsymbol{n} = J\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{m} \tag{A.32}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en la ecuación A.27, $\bar{\boldsymbol{t}}$ puede escribirse en términos de $\boldsymbol{m}$ como:

$$\bar{\boldsymbol{t}} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{m} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{m} \qquad ; \qquad \boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{A.33}$$

El tensor $\boldsymbol{P}$ se denomina *primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff* y es usualmente llamado *tensión nominal*. El vector $\bar{\boldsymbol{t}}$ se obtiene aplicando el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff al vector unitario $\boldsymbol{m}$, normal a la configuración de referencia de $\mathcal{S}$, en el punto de interés. En contraste con el tensor de tensiones de Cauchy, $\boldsymbol{P}$ es en general asimétrico lo que constituye un problema para su utilización en ecuaciones constitutivas con un tensor de deformaciones simétrico.

El segundo tensor de Piola-Kirchhoff es un tensor simétrico y se prefiere su utilización para el caso de grandes deformaciones aún cuando las ecuaciones de movimiento o equilibrio en las que interviene son más complejas. El segundo tensor de Piola-Kirchhoff es un tensor que se relaciona con el primero en forma similar a la relación que existe entre una línea infinitesimal $d\boldsymbol{X}$ en la configuración de referencia con su deformada $d\boldsymbol{x}$ en la configuración espacial, esto es:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{P} \tag{A.34}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}^{-1}\underbrace{J\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{A.35}$$

A.3.5 Tensiones de Kirchhoff

Otra medida de tensiones frecuentemente utilizada es el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, definido por:

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \tag{A.36}$$

Debido a la simetría de $\boldsymbol{\tau}$ el tensor de tensiones de Kirchhoff es simétrico y por lo tanto admite la representación espectral:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii}^{*} \boldsymbol{n}_i^{*} \otimes \boldsymbol{n}_i^{*}$$

donde las *tensiones principales de Kirchhoff* τ_{ii}^{*} están relacionadas con las tensiones principales de Cauchy σ_{ii}^{*} por la expresión:

$$\tau_{ii}^{*} = J\sigma_{ii}^{*}$$

A.4 Operaciones de transporte de tensores

Conocido el tensor gradiente de deformación $\boldsymbol{F}$, el *push-forward* $\overrightarrow{\phi}$ de un tensor en la configuración de referencia Ω^0 indicado mediante $\boldsymbol{Z}$, es un tensor espacial o euleriano $\boldsymbol{z}$ en la configuración deformada Ω^t,

$$\boldsymbol{z} = \overrightarrow{\phi}\,\boldsymbol{Z} \tag{A.37}$$

que se escribe para un tensor contravariante $\boldsymbol{Z}^{\#}$:

$$z^{ij} = F_I^i F_J^j Z^{IJ} \tag{A.38}$$

$$\boldsymbol{z}^{\sharp} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Z}^{\sharp} \cdot \boldsymbol{F}^{T} \tag{A.39}$$

y se expresa para un tensor $\boldsymbol{Z}$ expresado en componentes covariantes como:

$$z_{ij} = (F_I^i)^{-1}(F_J^j)^{-1} Z_{IJ} \tag{A.40}$$

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{F}^{-T} \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{A.41}$$

La operación inversa denominada pull-back $\overleftarrow{\phi}$ transforma un tensor espacial $\boldsymbol{z}$, en la configuración deformada Ω^t, en otro tensor $\boldsymbol{Z}$ en la configuración original Ω^0.

$$\boldsymbol{Z} = \overleftarrow{\phi}\, \boldsymbol{z} \tag{A.42}$$

que se define para un tensor $\boldsymbol{z}^{\#}$ expresado en sus componentes contravariantes según:

$$Z^{IJ} = (F_I^i)^{-1}(F_J^j)^{-1} z^{ij} \tag{A.43}$$

$$\boldsymbol{Z}^{\sharp} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{z}^{\sharp} \cdot \boldsymbol{F}^{-T} \tag{A.44}$$

y se expresa para un tensor $\boldsymbol{z}$ expresado en componentes covariantes como:

$$Z_{ij} = F_I^i F_J^j z_{ij} \tag{A.45}$$

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{F}^{T} \cdot \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{F} \tag{A.46}$$

Utilizando los operadores *push-forward* $\overrightarrow{\phi}$ y *pull-back* $\overleftarrow{\phi}$, se establecen las siguientes relaciones entre los tensores de deformación:

$$\boldsymbol{e} = \overrightarrow{\phi}\, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}^{-T} \boldsymbol{E} \boldsymbol{F}^{-1} \tag{A.47}$$

$$\boldsymbol{E} = \overleftarrow{\phi}\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{F}^{T} \boldsymbol{e} \boldsymbol{F} \tag{A.48}$$

y de tensión:

$$\boldsymbol{S} = \overleftarrow{\phi}\, \boldsymbol{\tau} = J \overleftarrow{\phi}\, \boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{F}^{-T} \tag{A.49}$$

$$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{\phi}\, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{F} \boldsymbol{S} \boldsymbol{F}^{T} \tag{A.50}$$

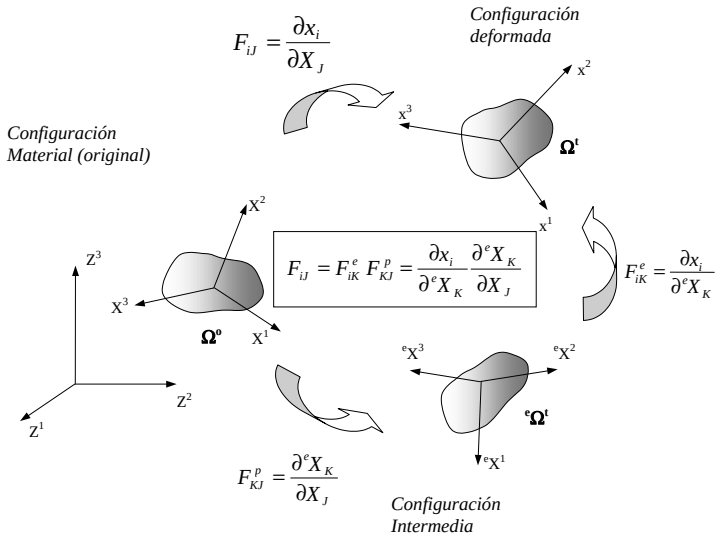

Figura A.8: Configuración original, intermedia y deformada.

A.5 Cinemática del problema elastoplástico. Descomposición multiplicativa

Uno de los aspectos más complejos en la formulación de las ecuaciones constitutivas bajo régimen de grandes deformaciones es tener en cuenta de manera adecuada los cambios geométricos. La cinemática utilizada en este trabajo se basa en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p$ introducida por Kroner (1960) y desarrollada por Lee (1969) y Mandel (1971) . Esta hipótesis es la base de los modelos constitutivos actuales y no es incompatible con las descomposiciones aditivas usuales (García Garino, 1993).

En la cinemática del continuo elastoplástico con grandes deformaciones se distinguen tres configuraciones: original ${}^0\Omega$, intermedia ${}^e\Omega^t$ y deformada ${}^t\Omega$. La configuración intermedia ${}^e\Omega^t$, está definida por un sistema de coordenada $\overline{\mathbf{X}}$. En la Figura A.8 se observan las diferentes configuraciones se ilustra el concepto de la descomposición multiplicativa.

La descomposición multiplicativa establece que:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}^e \cdot \boldsymbol{F}^p \tag{A.51}$$

donde $\boldsymbol{F}^e$ y $\boldsymbol{F}^p$ son las componentes elástica y plástica respectivamente del gradiente

de deformaciones. El tensor elástico $\boldsymbol{F}^e$ se obtiene realizando una descarga elástica de los puntos que conforman la configuración deformada. Esta descarga elástica genera lo que se llama configuración intermedia $\overline{\Omega}$.

A.5.1 Tensores de deformación

La Figura A.9 muestra una partícula del medio continuo que ocupa el punto del espacio **P** en la configuración material, y otra partícula **Q** de su entorno diferencial separada de la anterior por el segmento $d\boldsymbol{X}$ (de longitud $d\boldsymbol{S} = \sqrt{d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{X}}$) y al segmento $d\boldsymbol{x}$ (de longitud $d\boldsymbol{s} = \sqrt{d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{x}}$) homólogo del anterior en la configuración actual. Ambos vectores diferenciales están relacionados por el tensor gradiente de la deformación mediante la ec. (A.14) :

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X} \qquad d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1} d\boldsymbol{x} \tag{A.52}$$

Puede escribirse entonces:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{x} = [d\boldsymbol{x}]^T[\boldsymbol{g}][d\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}]^T[\boldsymbol{g}][\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X}] \\ &= d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^T\cdot g\cdot F\cdot d\boldsymbol{X}\end{aligned} \tag{A.53}$$

o, alternativamente,

$$\begin{aligned}(dS)^2 &= d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{X} = [d\boldsymbol{X}]^T[\boldsymbol{G}][d\boldsymbol{X}] = \left[\boldsymbol{F}^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}\right]^T[\boldsymbol{G}]\left[\boldsymbol{F}^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}\right] \\ &= d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{G}\cdot F^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{A.54}$$

El tensor material de deformación (Green-Lagrange) se obtiene restando a la ec. (A.53) la ec. (A.54)

$$\begin{aligned}(ds)^2-(dS)^2 &= d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{X} - d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{X} \\ &= d\boldsymbol{X}\cdot\underbrace{\left(\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}\right)}_{=2\boldsymbol{E}}\cdot d\boldsymbol{X} = 2d\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{X}\end{aligned} \tag{A.55}$$

La ec. (A.55) define implícitamente el denominado *tensor material de deformación* o *tensor de deformación de Green-Lagrange* como:

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X},t\} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{C}} - \boldsymbol{G}\right) \tag{A.56}$$

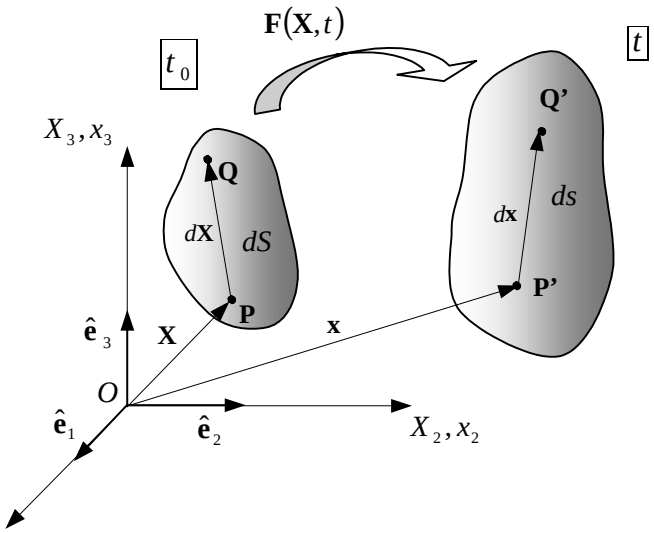

Figura A.9: Segmentos en la configuración referencial y actualizada.

El tensor de deformación en la configuración actualizada (Almansi) se obtiene restando a la ec. (A.53) la ec. (A.54)

$$\begin{aligned}(ds)^2-(dS)^2 &= d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{g}\cdot d\boldsymbol{x}-d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{G}\cdot F^{-1}\cdot d\boldsymbol{x}\\ &= d\boldsymbol{x}\cdot\underbrace{\left(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\right)}_{=2\boldsymbol{e}}\cdot d\boldsymbol{x}=2d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{x}\end{aligned}\qquad(A.57)$$

La ec. (A.57) define implícitamente el denominado *tensor de deformación en la configuración espacial* o *tensor de deformación de Almansi* como:

$$\boldsymbol{e}\left\{\boldsymbol{x},t\right\}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{g}-\underbrace{\boldsymbol{F}^{-T}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}}_{\boldsymbol{b}^{-1}}\right)\qquad(A.58)$$

$\boldsymbol{G}$ es el tensor métrico en la configuración original o material y está dado por:

$$G_{ij}=\left(\overrightarrow{E}_i\cdot\overrightarrow{E}_j\right)\quad i,j:1,2,3\qquad(A.59)$$

donde los vectores $\left\{\overrightarrow{E_i}\right\}$ definen un sistema de coordenadas en $\Re^3$. En forma análoga se define el tensor métrico $\boldsymbol{g}$ en la configuración deformada como:

$$g_{ij} = (\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j}) \quad i,j : 1,2,3 \tag{A.60}$$

donde los vectores $\{\overrightarrow{e_i}\}$ definen un sistema de coordenadas en la configuración deformada $({}^t\Omega)$.

En este trabajo se supone que $\left\{\overrightarrow{E_i}\right\}$coincide con la base canónica de $\Re^3$ y por lo tanto $\boldsymbol{G}$ es la identidad. Análogamente al caso material se supone que $\{\overrightarrow{e_i}\}$ coincide con la base canónica de $\Re^3$ y por lo tanto $\boldsymbol{g}$ resulta la identidad. Considerando tanto en la configuración referencial como en la actualizada un sistema de coordenadas ortonormales, los tensores de deformación de Green-Lagrange y de Almansi resultan:

$$\boldsymbol{E}\{\boldsymbol{X},t\} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{I}) \tag{A.61}$$

$$\boldsymbol{e}\{\boldsymbol{x},t\} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{b}^{-1}\right) \tag{A.62}$$

Se definen a continuación los siguientes tensores en la configuración de referencia:

$$\boldsymbol{C}^P = \boldsymbol{F}^{P^T}\cdot\boldsymbol{F}^P \tag{A.63}$$

$$\boldsymbol{E}^P = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C}^P-\boldsymbol{G}\right) \tag{A.64}$$

donde $\boldsymbol{C}^P$ es la parte plástica del tensor derecho de Cauchy-Green, $\boldsymbol{E}^P$ es la parte plástica del tensor de deformaciones de Green-Lagrange.

Se definen en la configuración actualizada los siguientes tensores:

$$\boldsymbol{b}^e = \boldsymbol{F}^e\cdot\boldsymbol{G}^{-1}\cdot(\boldsymbol{F}^e)^T \tag{A.65}$$

$$\boldsymbol{e}^e = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{b}^e)^{-1}\right] \tag{A.66}$$

$$\boldsymbol{e}^p = \frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{b}^e)^{-1}-\boldsymbol{b}^{-1}\right] \tag{A.67}$$

Los tensores $\boldsymbol{b}$ y $(\boldsymbol{b}^e)^{-1}$ se denominan tensores izquierdos de Cauchy-Green total y elástico respectivamente

A.5.2 Relaciones cinemáticas

En la Tabla A.1 se presenta la relación que existe entre los distintos tensores en las configuraciones original, intermedia y deformada.

Ω^0	${}^e\Omega^t$	Ω^t
$C_{IJ}=F^T_{iI}\ g_{ij}\ F_{jJ}$	$\overline{C}_{KL}=\left(F^e_{iK}\right)^T\ g_{ij}\ F^e_{jL}$	$\left(b^e_{ij}\right)^{-1}=\left(F^e_{iK}\right)^{-T}\ \overline{G}_{KL}\ \left(F^e_{jL}\right)^{-1}$
$C^p_{IJ}=\left(F^p_{KI}\right)^T\ {}^e\overline{G}_{KL}\ F^p_{IJ}$	$\left(b^p_{KL}\right)^{-1}=\left(F^p_{KI}\right)^{-T}\ G_{IJ}\ \left(F^p_{IJ}\right)^{-1}$	$\left(b_{ij}\right)^{-1}=\left(F_{iI}\right)^{-T}\ \overline{G}_{IJ}\ \left(F^e_{jJ}\right)^{-1}$
$E_{IJ}=\frac{1}{2}(C_{IJ}-G_{IJ})$	$\overline{E}_{KL}=\frac{1}{2}\left[\overline{C}_{KL}-\left(b^p_{KL}\right)^{-1}\right]$	$e_{ij}=\frac{1}{2}\left[g_{ij}-(b_{ij})^{-1}\right]$
$E^p_{IJ}=\frac{1}{2}\left(C^p_{IJ}-G_{IJ}\right)$	$\overline{E}^P_{KL}=\frac{1}{2}\left[\overline{G}_{KL}-\left(b^p_{KL}\right)^{-1}\right]$	$e^p_{ij}=\frac{1}{2}\left[\left(b^e_{ij}\right)^{-1}-\left(b_{ij}\right)^{-1}\right]$
$E^e_{IJ}=\frac{1}{2}\left(C_{IJ}-C^p_{IJ}\right)$	$\overline{E}^e_{KL}=\frac{1}{2}\left[\overline{C}_{KL}-\overline{G}_{KL}\right]$	$e^e_{ij}=\frac{1}{2}\left[g_{ij}-\left(b^e_{ij}\right)^{-1}\right]$
$E_{IJ}=E^e_{IJ}+E^p_{IJ}$	$\overline{E}_{KL}=\overline{E}^e_{KL}+\overline{E}^P_{KL}$	$e_{ij}=e^e_{ij}+e^p_{ij}$

Tabla A.1: Cinemática del contínuo elastoplástico.

En la Tabla A.1 se observa que la expresión de $\boldsymbol{C}^p$ introducido por Green y Nagdhi (1971) y Sidoroff (1970) es la conexión entre la descomposición multiplicativa y la descomposición aditiva del tensor de deformaciones de Green-Lagrange (García Garino, 1993)

A.5.3 Variaciones de los tensores de deformación

En la configuración material Ω^0 las variaciones temporales de las deformaciones se obtienen calculando las respectivas derivadas materiales. En las configuraciones intermedia ${}^e\Omega^t$ y deformada Ω^t es necesario calcular derivadas objetivas debido a que estas configuraciones no permanecen fijas. La derivada material de un campo tensorial espacial no resulta objetiva (Lubliner, 1990). Con el objetivo de calcular derivadas materiales en este trabajo se utilizará la derivada de Lie. La derivada de Lie elimina el problema de la objetividad transportando el tensor de la configuración espacial a la material, calculando en esta configuración su derivada material y transportando el resultado a la configuración espacial. La derivada de Lee de un tensor $\boldsymbol{t}$ se expresa como:

$$L_v\boldsymbol{t}=\overrightarrow{\phi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\overleftarrow{\phi}\,\boldsymbol{t}\right)\right] \tag{A.68}$$

Ω^0	${}^e\Omega^t$	Ω^t
$\dot{E}_{IJ}$	$\overline{D}_{KL} = L_v^p\left(\overline{E}_{KL}\right)$	$d_{ij} = L_v\left(e_{ij}\right)$
$\dot{E}_{IJ}=\dot{E}^e_{IJ} + \dot{E}^p_{IJ}$	$\overline{D}_{KL} = \overline{D}^e_{KL} + \overline{D}^p_{KL}$	$d_{ij} = d^e_{ij} + d^p_{ij}$

Tabla A.2: Cinemática del continuo elastoplástico. Variación de los tensores de deformación.

donde $\overrightarrow{\phi}$ y $\overleftarrow{\phi}$ representan las operaciones de push forward y pull back detalladas en el Apartado A.4. Utilizando el concepto de la derivada de Lie se obtienen las siguientes relaciones

$$\frac{1}{2}L_v\boldsymbol{g} = \boldsymbol{d} \tag{A.69}$$

$$L_v\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{A.70}$$

$$L_v\boldsymbol{e} = \boldsymbol{d} \tag{A.71}$$

En la Tabla A.2 se detallan las relaciones entre los tensores incremento de las deformaciones.

Apéndice B

Termodinámica

B.1 Bases de la ecuación constitutiva isótropa

La ecuación constitutiva para un material se obtiene a partir de escribir la disipación local en un proceso elastoplástico isotérmico, considerando el primer y segundo principio de la termodinámica.

El primer principio establece el balance de la energía, exigiendo la conservación de la energía total interna W del sistema. Este principio relaciona la potencia introducida al sistema y la cantidad de calor Q existente en el mismo, con el cambio de energía interna global $\dot{W}$ que este experimenta(Malvern, 1969) (Lubliner, 1990) (Oller, 1989).

El segundo principio establece que la generación de entropía en un medio continuo siempre es mayor o igual que la cantidad de calor que entra en el sistema por unidad de tiempo y de temperatura.

B.2 Primer principio de la termodinámica

El primer principio de la termodinámica se expresa matemáticamente en la forma *local euleriana* como:

$$m\,\dot{\omega} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} + m\,r - div\,(\boldsymbol{q}) \tag{B.1}$$

donde m es la densidad en la configuración actualizada, $\dot{\omega}$ es la variación temporal de la energía interna específica en la configuración actualizada, $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff, $\boldsymbol{d}$ es la derivada material de la deformación de Almansi, r es la fuente interna de calor específica, $\boldsymbol{q}$ es el flujo de calor por conducción[1].

[1]Solo resulta posible realizar una derivación temporal en la configuración material. Las derivadas temporales de variables expresadas en función de otras variables en la configuración actualizada

La forma local lagrangeana correspondiente a la ec.(B.1)se expresa como:

$$m^0\,\dot{\Omega} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} + m^0 r - div\,(J\boldsymbol{q}) \tag{B.2}$$

siendo m^0 la masa en la configuración referencial, $\dot{\Omega}$ es la variación temporal energía interna específica material en la configuración referencial, $\boldsymbol{S}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{E}$ el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, r es la fuente interna de calor específica, $\boldsymbol{q}$ es el flujo de calor por conducción y J es el determinante del gradiente de deformaciones $J = \det|\boldsymbol{F}|$.

Se define ahora la densidad de energía libre de Helmholtz ψ en la configuración actualizada y Ψ en la configuración referencial, como la parte de la energía aprovechable para realizar trabajo a temperatura constante:

$$\psi \overset{def}{=} \omega - \eta\theta \tag{B.3}$$

$$\Psi \overset{def}{=} \Omega - \eta\theta \tag{B.4}$$

siendo η la entropía específica y θ una medida de la temperatura. La variación temporal de la energía libre de Helmholtz se obtiene considerando la ec.(B.3) y se expresa como:

$$\dot{\psi} = \dot{\omega} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} \tag{B.5}$$

$$\dot{\Psi} = \dot{\Omega} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} \tag{B.6}$$

Reemplazando la ec.(B.4) en la ec.(B.2) resulta la expresión del primer principio de la termodinámica en función de la energía libre de Helmholtz.

$$m^0\left(\dot{\Psi} + \dot{\eta}\theta + \eta\dot{\theta}\right) = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} + m^0 r - div\,(J\boldsymbol{q}) \tag{B.7}$$

$$m^0\,\dot{\Psi} = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}} + m^0\,r - div\,(\overline{\boldsymbol{q}}) - m^0\dot{\eta}\,\theta - m^0\eta\,\dot{\theta} \tag{B.8}$$

La forma euleriana local del primer principio resulta de considerar la transformación $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} = \frac{1}{J}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}$[2], siendo $\boldsymbol{d} = L_v\,(\boldsymbol{e})$ el gradiente de velocidades, $m^0 = Jm$ es la densidad en la configuración referencial, $J = \det|\boldsymbol{F}| = \frac{dV}{dV_0}$ y $\overline{q} = J\boldsymbol{q}$.

---

se realizan teniendo en cuenta la derivada de Lee $L_V\,(\bullet)$

[2]Para obtener la forma lagrangeana de la expresión $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}$ se debe considerar que $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}$=$tr\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d})$, pero $\boldsymbol{d} = \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}$, por lo tanto $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}$=$tr\left[\boldsymbol{\tau}\cdot\left(\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T \cdot \dot{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}\right)\right] =$ $tr\left[\underbrace{\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^T}_{(1/J)\boldsymbol{S}}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right]$ con lo cual $tr\,(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{d}) = tr\left(\frac{1}{J}\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}\right) = \frac{1}{J}\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}$

$$m\,\dot{\psi} = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} + m\,r - div\,(\boldsymbol{q}) - m\,\dot{\eta}\,\theta - m\,\eta\,\dot{\theta} \tag{B.9}$$

expresión local Euleriana del primer principio de la termodinámica en función de la energía libre de Helmholtz.

B.3 Función de energía libre de Helmholtz

La energía libre de Helmholtz en la configuración actualizada puede definirse como

$$\psi = \psi\,(\boldsymbol{e}^e; \theta; \boldsymbol{\alpha}) = \omega - \eta\theta \tag{B.10}$$

donde la temperatura absoluta θ y el tensor de deformaciones de Almansi $\boldsymbol{e}^e$ son las variable libres del problema y $\boldsymbol{\alpha}$ es un conjunto de variables de estado plásticas, como, por ejemplo, la cohesión entre partículas, la variable de endurecimiento, el ángulo de rozamiento interno,etc. En la configuración material la energía libre puede definirse como:

$$\Psi = \Psi\,(\boldsymbol{E}^e; \theta; \boldsymbol{\alpha}) = \Omega - \eta\theta \tag{B.11}$$

donde la temperatura absoluta θ y el tensor de deformaciones de Green - Lagrange $\boldsymbol{E}^e$ son las variables libres del problema en la configuración referencial y $\boldsymbol{\alpha}$ es un conjunto de variables de estado plásticas.

B.4 Definición de las variables libres del problema

En este trabajo se definen como variables libres del problema la temperatura θ y la cuota elástica de la deformación de Almansi $\boldsymbol{e}^e$, la cual a su vez se define como:

$$\boldsymbol{e}^e = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^p = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{b}^{-1}\right) - \int_0^t \boldsymbol{d}^p dt \tag{B.12}$$

donde $\boldsymbol{e}^p$ es la deformación plástica en la configuración espacial, $\boldsymbol{b}$ es el tensor izquierdo de Cauchy-Green y $\boldsymbol{d}^p$ representa la variación temporal de la deformación plástica en la configuración actualizada. En la configuración referencial la cuota elástica de la deformación de Green-Lagrange se define como:

$$\boldsymbol{E}^e = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^p = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}\right) - \int_0^t \dot{\boldsymbol{E}}^p dt \tag{B.13}$$

donde $\boldsymbol{E}^p$ es la deformación plástica en la configuración espacial y $\boldsymbol{C}$ es el tensor derecho de Cauchy-Green.

B.4.1 Hipótesis de Elasticidad desacoplada.

Un caso particular de la función de energía libre lo constituye la hipótesis de elasticidad desacoplada que considera que la energía libre total de un sistema termodinámico resulta ser la suma de las cuotas elásticas y plásticas de la energía total del sistema, esto es:

$$\psi\left(\boldsymbol{e}^{e};\theta;\alpha\right)=\psi^{e}\left(\boldsymbol{e}^{e}\right)+\psi^{p}\left(\alpha\right) \tag{B.14}$$

$$\Psi\left(\boldsymbol{E}^{e};\theta;\alpha\right)=\Psi^{e}\left(\boldsymbol{E}^{e}\right)+\Psi^{p}\left(\alpha\right) \tag{B.15}$$

Las ecs. (B.14) y (B.15) constituyen la expresión matemática de la hipótesis de elasticidad desacoplada en las configuraciones espacial y material respectivamente. Esta hipótesis se basa en la evidencia experimental de que los niveles de energía necesarios para distorsionar la red cristalina, responsable de la deformación elástica, son diferentes de los niveles de energía necesarios para el deslizamiento intercristalino. Dicha hipótesis ha sido utilizada por diversos autores y constituye la base de modelos computacionales propuestos, entre otros, por García Garino & Oliver (1991,1992) Lubliner (1990) Oller (1989) y Luccioni(1993) .

B.5 Segundo principio de la termodinámica

El *segundo principio* establece que para un proceso irreversible se debe cumplir que el *cambio en la producción interna de entropía* debe ser mayor o igual que el *cambio de entropía introducida* (Malvern, 1969) (Oller, 1989), esto es:

$$\frac{d}{dt}\Im\geq\dot{\Im}_{in} \tag{B.16}$$

siendo la entropía interna $\Im=\int_V m\eta dV$ y la entropía introducida $\Im_{in}=\int_V\frac{mr}{\theta}dV+\oint_S\frac{q}{\theta}\boldsymbol{n}\ dS$. Transformando en la desigualdad anterior (ec. B.16) las integrales de superficie en integrales de volumen y combinándolas con la forma local euleriana (ec.B.1) del primer principio de la termodinámica, se obtiene la disipación local por unidad de masa como(Oller, 1989):

$$\Xi=\theta\dot{\eta}-\dot{\omega}+\left(\frac{\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}}{m}\right)-\frac{1}{\theta m}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \tag{B.17}$$

Teniendo en cuenta la definición de la energía libre de Helmholtz (ec.B.3) resulta la expresión local Euleriana de la disipación:

$$\Xi=-\dot{\theta}\eta-\dot{\psi}+\left(\frac{\boldsymbol{\tau}:\boldsymbol{d}}{m}\right)-\frac{1}{\theta m}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \tag{B.18}$$

En forma análoga se obtiene la disipación en la configuración material como:

$$\Xi = -\dot{\theta}\eta - \dot{\Psi} + \left(\frac{\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}}{m^0}\right) - \frac{1}{\theta m^0}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \tag{B.19}$$

B.6 Expresión de la disipación

La variación temporal de la energía libre resulta de considerar la expresión de la energía libre de Helmholtz en la configuración actualizada (ec.B.10)o referencial (ec.B.11):

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{e}^e}\boldsymbol{d}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{B.20}$$

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial\Psi}{\partial \boldsymbol{E}^e}\dot{\boldsymbol{E}}^e + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{B.21}$$

donde $\dot{\theta}$ representa la variación temporal de temperatura y $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ la ley de evolución de las variables internas del problema plástico. Reemplazando la ec.(B.20) en la ec.(B.18) resulta la expresión de la disipación en función de la energía libre de Helmholtz:

$$\Xi = -m\,\eta\,\dot{\theta} - \left(\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{e}^e}\boldsymbol{d}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)m + \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} - \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \geq 0 \tag{B.22}$$

Operando sobre la expresión de la disipación en la configuración actualizada, se obtiene la siguiente expresión:

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d} - \frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{e}^e}\boldsymbol{d}^e m\right] - m\dot{\theta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \eta\right] - m\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \geq 0 \tag{B.23}$$

Teniendo en cuenta la descomposición aditiva del tensor velocidad de deformación $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}^e + \boldsymbol{d}^p$, la ec.(B.23) queda escrita como:

$$\Xi = \left[\boldsymbol{\tau} - m\frac{\partial\psi}{\partial \boldsymbol{e}^e}\right] : \boldsymbol{d}^e - m\dot{\theta}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \eta\right] + \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}}\dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}.\nabla\theta \geq 0 \tag{B.24}$$

En forma análoga, reemplazando la ec.(B.21) en la ec.(B.19) se obtiene la expresión material de la disipación, esto es:

$$\Xi = \left[\boldsymbol{S} - m^0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}^e}\right] : \dot{\boldsymbol{E}}^e - m^0 \dot{\theta} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \eta\right] + \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^p - m^0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{1}{\theta} \bar{\boldsymbol{q}} . \nabla \theta \geq 0 \quad \text{(B.25)}$$

Las ecs. (B.24) y (B.25) reciben el nombre de desigualdad de Clasius-Duhem en la configuración espacial y material respectivamente. Sobre estas desigualdades se pueden realizar las siguientes consideraciones:

- Puesto que tanto $\boldsymbol{d}^e$ como $\dot{\theta}$ representan variaciones temporales arbitrarias de las variables libres del problema, para garantizar el cumplimiento de la ec.(B.24) para un dado estado termodinámico, sus multiplicadores deben ser idénticamente nulos. De aquí surge:

$$\boldsymbol{\tau} = m \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{e}^e}, \ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{(B.26)}$$

Estas expresiones pueden interpretarse como las relaciones constitutivas mas generales en la configuración actualizada compatibles con el segundo principio de la termodinámica.

- Para problemas termo-mecánicos desacoplados, se exige el cumplimiento en forma independiente de las desigualdades:

$$\begin{cases} \Xi_m = \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{d}^p - m \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \\ \Xi_\theta = -\frac{1}{\theta} \boldsymbol{q} . \nabla \theta \geq 0 \end{cases} \quad \text{(B.27)}$$

- En forma análoga en la ec.(B.25) $\dot{\boldsymbol{E}}^e$ y $\dot{\theta}$ representan variaciones temporales arbitrarias de las variables libres del problema, y, con el objetivo de garantizar el cumplimiento de la ec.(B.25) para un estado termodinámico dado, sus multiplicadores deben ser nulos, surgiendo:

$$\boldsymbol{S} = \frac{m}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{E}^e}, \ \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{(B.28)}$$

- Para problemas termo-mecánicos desacoplados, se exige el cumplimiento en forma independiente de las desigualdades:

$$\begin{cases} \Xi_m = \boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{E}}^p - m^0 \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0 \\ \Xi_\theta = -\frac{1}{\theta} \bar{\boldsymbol{q}} . \nabla \theta \geq 0 \end{cases} \quad \text{(B.29)}$$

Apéndice C

Modelo de daño

C.1 Introducción

La teoría de mezclas de substancias básicas permite considerar el comportamiento constitutivo de los distintos tipos de materiales que conforman el material compuesto. En general estos modelos pueden ser elásticos, viscoelásticos, plásticos, viscoplásticos, de daño continuo, etc. La teoría del Daño Continuo fue presentada por primera vez por Kachanov (1958) en el contexto de problemas relacionados con la fluencia, pero ha sido aceptada con posterioridad como una alternativa válida para simular el comportamiento de diversos materiales. Entre las diferentes posibilidades que se presentan en la literatura ((Lemaitre y Chaboche, 1978), (Chaboche, 1988b), (Chaboche, 1988a), (Simo y Ju, 1987a; Simo y Ju, 1987b)), en este trabajo se presenta un modelo de daño con una variable interna escalar que permite caracterizar el daño local.

El modelo de daño continuo se basa en dos estructuras de trabajo: la termodinámica de procesos irreversibles y la de variables internas de estado(Chaboche, 1988b), (Lemaitre y Chaboche, 1978), (Simo y Ju, 1987a). El modelo puede ser implementado en función de las deformaciones, lo que conduce a que la integración de la variable interna de daño que gobierna el problema resulte explícita (Simo y Ju, 1987a), (Oliver *et al.*, 1990). Está característica es muy deseable en modelos constitutivos que se utilizan para simular el comportamiento de estructuras a gran escala. Este tipo de modelo es muy popular debido a su simplicidad y versatilidad. Permiten simular el comportamiento de materiales en los que se verifica una degradación en la rigidez del material una vez superada el umbral de daño del material. Estos modelos, a diferencia de los modelos elastopláticos, se caracterizan por no presentar deformaciones permanentes, y esto puede verse en el caso de una descarga de un material cuyo estado tensional ha superado el umbral de daño.

La teoría de mezclas de substancias básicas, debido a su capacidad gestionar

distintos modelos constitutivos, permite simular el comportamiento de materiales que presentan deformaciones permanentes y degradación de rigidez en el caso de una descarga de un material cuyo estado tensional ha superado el umbral de resistencia. El modelo de daño que aquí se presenta se basa en el descrito en (Oliver *et al.*, 1990). Este modelo se basa en la hipótesis de pequeñas deformaciones.

C.2 Modelos de daño isótropo

En los últimos años los modelos constitutivos conocidos como de daño continuo han sido ampliamente aceptados para simular el complejo comportamiento constitutivo de los materiales. (Chaboche, 1988b), (Chaboche, 1988a), (Simo y Ju, 1987a), (Simo y Ju, 1987b). Este modelo se caracteriza por su simplicidad en la implementación, versatilidad y consistencia, ya que está basado en la teoría termodinámica de procesos irreversibles.

Kachanov (1958) ha introducido el concepto de tensiones efectivas con el objetivo de simular la rotura por fenómenos de creep(Rabotnov, 1963), (Leckie y Hayhurst, 1974), (Rabotnov, 1963), fatiga (Salomón *et al.*, 1999), interacción creep-fatiga (Lemaitre y Plumtree, 1979) y también se aplica para el caso de materiales frágiles como por ej. hormigones(Lemaitre, 1984), roca(Resende, 1984), (Resende y Martin, 1984) y dúctiles (Dragon, 1985), (Dragon y Chihab, 1985).

Físicamente, el proceso de degradación de las propiedades de un material es el resultado de la presencia y crecimiento de pequeñas fisuras y micro vacíos presentes en la estructura de cualquier material. Este proceso de crecimiento se puede simular, en el contexto de la mecánica de medios continuos, teniendo en cuenta la teoría de variables internas de estado, introduciendo una variable interna de daño representada por un vector o un tensor. Esta variable interna de daño caracteriza el daño del material y transforma el tensor de tensiones al tensor de tensiones efectivas,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \boldsymbol{M}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \tag{C.1}$$

donde $\boldsymbol{M}^{-1}$es un tensor de cuarto orden del modelo de daño anisótropo. Para el caso del modelo de daño isótropo, la degradación del material es independiente de la orientación y depende solamente de una variable escalar d, con lo que $\boldsymbol{M}$ se reduce a $(1-d)\,\boldsymbol{I}$, con lo que la ec. (C.1) queda:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} := \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-d)} \tag{C.2}$$

donde d es la variable interna de daño, $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de tensiones de Cauchy y $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ es el tensor de tensiones efectivas. Esta variable interna es una medida de la pérdida de rigidez del material y sus límites superior e inferior está dado por

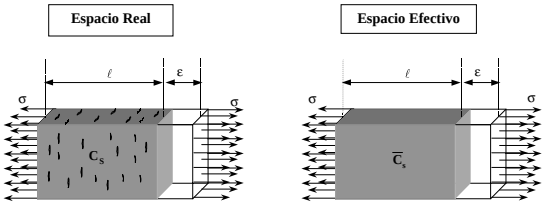

Figura C.1: Representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva.

$$0 \leq d \leq 1 \tag{C.3}$$

donde $d = 1$ significa un material *completamente degradado* y define la rotura local completa(Lemaitre, 1985) y $d = 0$ representa un material *no dañado.* El concepto de tensión efectiva se formuló por primera vez en conexión con la hipótesis de equivalencia de deformaciones (Lemaitre y Chaboche, 1978)

" *la deformación asociada a un estado dañado bajo una tensión aplicada* σ *es equivalente a la deformación asociada con el estado dañado sometido a una tensión efectiva* $\bar{\sigma}$ ". En la Figura C.1 se observa una representación esquemática de la hipótesis de tensión efectiva.

C.3 Energía libre de Helmholtz y ecuación constitutiva

La energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para el caso de un modelo de daño está dada por:

$$\psi = \psi\left\{\boldsymbol{\varepsilon}; d\right\} = (1-d)\,\psi_0\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\right\} \tag{C.4}$$

donde ψ_0 es la energía libre de Helmohtz elástica inicial del material no dañado. En el caso de pequeñas deformaciones es suficiente caracterizar a la energía libre a través de una función cuadrática de las deformaciones dada por:

$$\psi_0\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\right\} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{C.5}$$

donde $\boldsymbol{C}_0$ es el tensor constitutivo elástico del material. La desigualdad de Clasius-Duhem para fenómenos termo-mecánicos desacoplados se expresa como:

$$\Xi = \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \psi}{\partial d} \dot{d} = 0 \tag{C.6}$$

Puesto que $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representa una variación arbitraria del tensor de deformaciones, el cumplimiento de a inecuación dada por (C.6)se debe cumplir (método de Coleman (Malvern, 1969)):

$$\boldsymbol{\sigma} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \tag{C.7}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial d} = -\psi_0 \leq 0 \tag{C.8}$$

De la anterior se obtiene el valor de la disipación del modelo de degradación:

$$\Xi = \psi_0 \dot{d} \tag{C.9}$$

Teniendo en cuenta la ec. (C.7) se obtiene la ecuación constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}; d \right\}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \frac{\partial \psi_0 \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} \right\}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{C.10}$$

La ec. (C.10) es la ecuación constitutiva del modelo de daño y presenta la siguiente características:

1. el modelo de degradación es isótropo ya que las propiedades del material están afectadas solo de un escalar

2. la integración de la ecuación constitutiva es explícita

3. la ec. (C.10) se puede interpretar como una descomposición aditiva de las tensiones elásticas e inelásticas (Lubliner, 1972)

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}_0} - \underbrace{d \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}_i} \tag{C.11}$$

El modelo dado por la ec. (C.10) se encuentra definido si en cada instante del proceso es posible evaluar la variable interna de daño d. Con el objetivo de evaluar la variable de daño es necesario definir un criterio de daño que permita evaluar a partir de que estado tensional se produce la degradación del material y la ley de evolución de la variable interna del proceso.

C.4 Criterio de daño

La criterio de daño distingue entre dos estados: uno elástico que se encuentra en el interior del dominio delimitado por el llamado criterio de daño y otro estado en el cual se verifica el proceso de degradación de las propiedades del material. La condición de fluencia depende fundamentalmente del tipo de material y se define como:

$$F\{\tau, r\} = \tau - r \leq 0 \tag{C.12}$$

donde τ es una norma del tensor de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ o del tensor de tensiones *no dañado* ($\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{D}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}$) y r es el umbral de daño. La norma de τ se conoce también como *deformación equivalente* y se utiliza para comparar diferentes estados de deformación. Esto permite definir los conceptos de *carga*, *descarga* y *recarga*. Esta norma es una función escalar, debe ser positiva y para un estado indeformado debe ser nula. El valor inicial del umbral de daño r^0 es una propiedad del material y debe verificar que $r \geq r^0$.

La ec. (C.12) representa una superficie límite en el espacio de las deformaciones o de las tensiones no dañadas. El daño en el material se verifica cuando el valor de τ supera el valor de r^0 por primera vez. Una expresión equivalente a la dada por la ec. (C.12) está dada por:

$$\bar{F}\{\tau, r\} = G\{\tau\} - G\{r\} \leq 0 \tag{C.13}$$

donde $G\{\cdot\}$ es una función escalar monotónica creciente.

C.5 Leyes de evolución de las variables

En los problemas en los que interviene la teoría de variables internas es necesario definir la ley de evolución de las mismas. En el problema de daño, la ley de evolución de la variable interna está dada por:

$$\dot{d} = \dot{\mu}\frac{\partial \bar{F}\{\tau, r\}}{\partial \tau} = \dot{\mu}\frac{dG\{\tau\}}{d\tau} \tag{C.14}$$

donde $\dot{\mu}$ es una función escalar no negativa conocida como parámetro de consistencia y se utiliza para definir las condiciones de carga, descarga y recarga a través de las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad \bar{F}\{\tau, r\} \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu}\bar{F}\{\tau, r\} = 0 \tag{C.15}$$

Las condiciones expresadas en la ec. (C.15) corresponden a problemas que poseen restricciones unilaterales. Si el valor de $\bar{F}\{\tau, r\} < 0$ el criterio de daño no se verifica

y por la condición dada en la ec.(C.15$_3$) $\dot{\mu} = 0$ y teniendo en cuenta la ec. (C.14) $\dot{d} = 0$ y el material no presenta fenómenos de daño y se está ante un proceso elástico.

La ley de evolución del umbral de daño se define como

$$\dot{r} = \dot{\mu} \tag{C.16}$$

En el caso de que $\dot{\mu} > 0$, esto es un proceso de degradación en el material, la condición C.15$_3$ establece que $\bar{F}\{\tau, r\} = 0$ y el valor de $\dot{\mu}$ se determina teniendo en cuenta la condición de consistencia y la definición dada por la ec. (C.12):

$$\dot{\bar{F}}\{\tau, r\} = G'\{\tau\}\dot{\tau} - G'\{r\}\dot{r} = 0 \tag{C.17}$$

Teniendo en cuenta que $\bar{F}\{\tau, r\} = 0 \Rightarrow G\{\tau\} = G\{r\}$ y la ley de evolución del umbral de daño dada por la ec. (C.16) se obtiene:

$$\dot{\mu} = \dot{\tau} \tag{C.18}$$

Reemplazando en la ec. (C.14) se tiene:

$$\dot{d} = \frac{dG\{\tau\}}{d\tau}\dot{\tau} \Rightarrow \dot{d} = \dot{G}\{\tau\} \Rightarrow d = G\{\tau\} \tag{C.19}$$

De aquí se obtiene que el umbral de daño r en el tiempo t se obtiene como:

$$r^t = \max\left(r^0, \max \tau^s\right) \qquad 0 \leq s \leq t \tag{C.20}$$

C.6 Tensor constitutivo de daño tangente

El tensor constitutivo tangente de daño se obtiene considerando la variación temporal de la ecuación constitutiva (ec. (C.10))

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d)\,\boldsymbol{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{d}\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{C.21}$$

Reemplazando en la ecuación anterior la ley de evolución de la variable interna de daño $\dot{d}$ dada por ec. (C.14) se obtiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d)\,\boldsymbol{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{dG\{\tau\}}{d\tau}\dot{\tau}\,(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{C.22}$$

Teniendo en cuenta que $\tau = \tau\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, la variación temporal de τ resulta:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{C.23}$$

Reemplazando en la ec. (C.22) se tiene:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{dG\{\tau\}}{d\tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right)(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{C.24}$$

De la ecuación anterior se obtiene el tensor de daño tangente dado por:

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - \frac{dG\{\tau\}}{d\tau}(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(\frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right) \tag{C.25}$$

C.7 Particularización del criterio de daño. Ablandamiento exponencial

La función escalar $G\{\cdot\}$ que define la evolución del umbral de daño debe se monotónica y con un valor comprendido entre 0 y 1. Después de estudios Oliver et. al (1990) proponen

$$G\{r\} = 1 - \frac{r^0}{r} e^{A\left(1-\frac{r}{r^0}\right)} \qquad 0 < r^0 < r \tag{C.26}$$

$$G\{\tau\} = 1 - \frac{\tau^0}{\tau} e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} \tag{C.27}$$

donde A es un parámetro que depende de la energía de fractura del material . El valor de τ^0 se obtiene considerando el criterio de daño de la ec. (C.13) considerando el primer umbral de degradación, esto es $r = r^0 \Rightarrow G\{r^0\} = 0$ y considerando las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\bar{F}\{\tau, r\} = 1 - \frac{\tau^0}{\tau} e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)} = 0 \tag{C.28}$$

De aquí surge que $\tau^0 = \tau$ y una forma alternativa de expresar el criterio de daño

$$\bar{F}\{\tau, r\} = \tau - \tau^0 = 0 \tag{C.29}$$

De la ecuación anterior se deduce que $\tau^0 = r^0$

C.8 Particularización del criterio de daño. Ablandamiento lineal

Se propone una nueva función escalar $G\{\cdot\}$ que define la evolución del umbral de daño. Esta función debe ser monotónica y con un valor comprendido entre 0 y 1.

$$G\{r\} = \frac{\left(1-\frac{r^0}{r}\right)}{(1+A)} \qquad 0 < r^0 < r \tag{C.30}$$

$$G\{\tau\} = \frac{\left(1-\frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} \tag{C.31}$$

donde A es un parámetro que depende de la energía de fractura del material . El valor de τ^0 se obtiene considerando el criterio de daño de la ec. (C.13) considerando el primer umbral de degradación, esto es $r = r^0 \Rightarrow G\{r^0\} = 0$ y considerando las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\bar{F}\{\tau, r\} = \frac{\left(1-\frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} = 0 \tag{C.32}$$

De aquí surge, al igual que en el caso anterior, que $\tau^0 = \tau$.

C.9 Particularización de la norma

C.9.1 Modelo de Simo y Ju

Simo y Ju (1987) proponen utilizar la norma energética del tensor de deformaciones, esto es:

$$\tau = \sqrt{2\psi_0\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{C.33}$$

En este caso el tensor constitutivo tangente resulta teniendo en cuenta la ec. (C.25), esto es:

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - \left(\frac{dG\{\tau\}}{d\tau}\frac{1}{\tau}\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}\right) \otimes (\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{C.34}$$

Deducción del valor del parámetro A para el modelo de Simo y Ju

El parámetro A se deduce teniendo en cuenta la expresión de la disipación (ec. (C.9)) particularizada para un proceso uniaxial bajo carga monótona creciente. Teniendo en cuenta la norma τ propuesta por Simo y Ju (1987) se tiene:

$$\tau = \sqrt{2\psi_0\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} = \sqrt{\varepsilon C^0 \varepsilon} = \frac{\sigma_t^0}{\sqrt{C^0}} \Rightarrow \sigma_t^0 = \tau\sqrt{C^0} \tag{C.35}$$

donde σ_t^0 es el umbral de resistencia a tracción. Reemplazando esto en la expresión de la energía libre de Helmhotz (ec. (C.5)) se tiene:

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon C^0 \varepsilon = \frac{1}{2}\sigma^0 \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\left(\sigma^0\right)^2}{C^0} = \frac{1}{2}\frac{\left(\tau\sqrt{C^0}\right)^2}{C^0} = \frac{1}{2}\tau^2 \tag{C.36}$$

La disipación total se obtiene integrado la expresión de la disipación y teniendo en cuenta la ec. (C.19)

$$\int_{\tau^0}^{\infty} \Xi = \int_{\tau^0}^{\infty} \psi_0 \dot{d} = \int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\tau\right)^2 \frac{dG\left\{\tau\right\}}{d\tau} d\tau \tag{C.37}$$

Teniendo en cuenta la definición de $G\left\{\tau\right\}$ dada por la ec. (C.27) y aplicando el concepto de integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\tau\right)^2 dG\left\{\tau\right\} &= \left[\frac{1}{2}\left(\tau\right)^2 G\left\{\tau\right\}\right]\Big|_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \left(\tau\right) G\left\{\tau\right\} d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\tau\right)^2 G\left\{\tau\right\}\right]\Big|_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty} \left(\tau - \tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\tau^2 - \tau\tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\right)\Big|_{\tau^0}^{\infty} - \left(\frac{\left(\tau\right)^2}{2}\Big|_{\tau^0}^{\infty} + \frac{1}{A}\left(\tau^0\right)^2 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\Big|_{\tau^0}^{\infty}\right) \\
&= \tau^2 - \left(\frac{\left(\tau\right)^2}{2} - \frac{\left(\tau^0\right)^2}{2} - \frac{\left(\tau^0\right)^2}{A}\right) = \left(\tau^0\right)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A}\right)
\end{aligned}$$

La máxima energía disipada g_f es una característica del material, por lo tanto se tiene:

$$\left(\tau^0\right)^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A}\right) = g_f \Longrightarrow A = \frac{1}{\frac{g_f}{\left(\tau^0\right)^2} - \frac{1}{2}} \tag{C.38}$$

Para el caso de una función $G\left\{\tau\right\}$ lineal (ec. (C.27)), el extremo superior de la ecuación se obtiene teniendo en cuenta el valor máximo de la ec. (C.19), con lo que se obtiene

$$G\left\{\tau\right\} = 1 = \frac{\left(1 - \frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} \Rightarrow \tau = -\frac{\tau^0}{A} \tag{C.39}$$

La disipación total se obtiene como

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \Xi &= \int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \frac{1}{2}(\tau)^2 \frac{dG\{\tau\}}{d\tau} d\tau \qquad \text{(C.40)} \\
&= \left(\frac{1}{2}(\tau)^2 G\{\tau\}\right)\Big|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \frac{(\tau-\tau^0)}{(1+A)} d\tau \\
&= \left(\frac{1}{2}(\tau)^2 G\{\tau\}\right)\Big|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \frac{1}{(1+A)}\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0\tau\right)\Big|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \\
&= \frac{1}{2}(\tau)^2 \frac{\left(1-\frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)}\Big|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \frac{1}{(1+A)}\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0\tau\right)\Big|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{A^2} - \frac{1}{2}(1+A)\frac{(\tau^0)^2}{A^2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{A} \qquad \text{(C.41)}
\end{aligned}$$

La máxima energía disipada g_f es una característica del material, por lo tanto se tiene:

$$-\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{A} - g_f = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{g_f} \qquad \text{(C.42)}$$

Considerando un comportamiento post pico exponencial(ec.(C.27)) o lineal (ec. (C.31)) los tensores constitutivos tangentes para el modelo propuesto por Simo y Ju (1987) se obtienen como:

$$C^t = (1-d)\boldsymbol{C}_0 - e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2}(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}\right) \qquad \text{(C.43)}$$

$$C^t = (1-d)\boldsymbol{C}_0 - \frac{\tau^0}{\tau^2(1+A)}(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}\right) \qquad \text{(C.44)}$$

El tensor constitutivo tangente expresado en las ecs. (C.43) y (C.44) resulta simétrico. La simetría de este tensor depende fundamentalmente de la norma τ.

C.9.2 Modelo de Lemaitre y Mazars

Lemaitre y Mazars utilizan una norma basada en el tensor de deformaciones dada por:

$$\tau = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}} \tag{C.45}$$

Esta norma conduce a un tensor constitutivo tangente no simétrico, que para el caso de un comportamiento post pico exponencial(ec.(C.27)) o lineal (ec. (C.31)) se obtienen como:

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2}\,(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{C.46}$$

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - \frac{\tau^0}{\tau^2\,(1+A)}\,(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{C.47}$$

C.9.3 Modelo de daño propuesto

Es posible, también, utilizar como criterio de daño los criterios de fluencia utilizados frecuentemente en plasticidad: Von Mises, Mohr-Coulomb, Tresca, Drucker-Prager.

Criterio de fluencia de Von Mises

Este criterio fue formulado por Von Mises en 1913 y depende sólo de un parámetro, la máxima resistencia de corte octaédrica. Incluye en su formulación solo al segundo invariante del tensor desviador de las tensiones J_2 y es independiente del primer invariante del tensor de tensiones I_1 y del tercer invariante del desviador de tensiones J_3. Para este caso el criterio de daño expresado en la ec. (C.12) en función de las tensiones principales se expresa como:

$$F\{\tau, r\} = \tau - r = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right] - r = 0 \tag{C.48}$$

donde σ_1, σ_2 y σ_3 son las tensiones principales no dañadas. Otra forma de expresar la función matemática que describe este criterio de daño se obtiene de expresar la ec. (C.48)

$$\sqrt{J_2} - r = 0 \tag{C.49}$$

Criterio de Mohr-Coulomb

Este criterio, formulado por Coulomb en 1773 y desarrollado en profundidad por mohr en 1882, depende de dos parámetros del material: la cohesión interna entre las partículas del sólido c y el rozamiento interno entre ellas, dado por el ángulo ϕ. Este criterio depende del segundo y tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_2 y J_3 y del primer invariante del tensor de tensiones I_1. Esto se debe a que al ser un criterio basado en el concepto de rozamiento entre partículas, la fuerza desarrollada entre las mismas crece con el aumento de la presión en la masa del sólido. La expresión de este criterio en tensiones principales se expresa como:

$$F\{\tau, r\} = \tau - r = \left[\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\sin\phi - c\cos\phi\right] - r = 0 \qquad \text{(C.50)}$$

donde σ_1 y σ_3 son las tensiones principales mayor y menor respectivamente, c es la cohesión interna entre partículas del sólido y ϕ es el ángulo de rozamiento interno entre partículas del sólido.

Este criterio también puede expresarse en función del primer invariante del tensor de tensiones I_1, del segundo invariante del tensor desviador de la tensiones J_2 y del ángulo θ que depende del segundo y tercer invariantes del tensor desviador de tensiones:

$$F\{\tau, r\} = \tau - r = \left[\frac{I_1}{3}\sin\phi + \sqrt{J_2}\left(\cos\theta - \frac{\sin\phi\sin\theta}{\sqrt{3}}\right) - c\cos\phi\right] - r = 0 \quad \text{(C.51)}$$

Criterio de Drucker-Prager

Este criterio, formulado por Drucker y Prager en 1952, es considerado como una aproximación alisada del criterio de Mohr-Coulomb. La formulación matemática de este criterio surge como una simple modificación del criterio de Von Mises, donde se incluye el efecto de la presión hidrostática influenciada por una función del ángulo de rozamiento interno $\bar{\alpha}\{\phi\}$. Este criterio también depende del segundo invariante del tensor desviador de tensiones J_2, de la cohesión interna entre las partículas c, del rozamiento interno entre ellas ϕ y es independiente del tercer invariante del tensor desviador de tensiones J_3. Su expresión matemática en función de los invariantes está dada por:

$$F\{\tau, r\} = \tau - r = \bar{\alpha} I_1 + \sqrt{J_2} - r = 0 \qquad \text{(C.52)}$$

En el caso particular de que $\bar{\alpha} = 0$ se transforma en la teoría de Von Mises.

Deducción del valor del parámetro A

El parámetro A se deduce teniendo en cuenta un proceso uniaxial bajo carga monótona creciente. En este caso para el caso de un estado uniaxial de tensiones se tiene:

$$\tau = \sigma_t^0 \tag{C.53}$$

donde σ_t^0 es el umbral de resistencia a tracción. La expresión de la energía libre de Helmhotz (ec. (C.5)) se obtiene como:

$$\psi_0 = \frac{1}{2}\varepsilon C^0 \varepsilon = \frac{1}{2}\sigma^0 \varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\left(\sigma^0\right)^2}{C^0} = \frac{1}{2}\frac{\left(\tau\right)^2}{C^0} \tag{C.54}$$

La disipación total se obtiene integrado la expresión de la disipación y teniendo en cuenta la ec. (C.19)

$$\int \Xi = \int \psi_0 \dot{d} = \int \frac{1}{2}\frac{\left(\tau\right)^2}{C^0}\frac{dG\left\{\tau\right\}}{d\tau}d\tau \tag{C.55}$$

Teniendo en cuenta la definición de $G\left\{\tau\right\}$ dada por la ec. (C.27) y aplicando el concepto de integración por partes se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^0}^{\infty} \frac{1}{2}\frac{\left(\tau\right)^2}{C^0} dG\left\{\tau\right\} &= \left[\frac{1}{2}\frac{\left(\tau\right)^2}{C^0}G\left\{\tau\right\}\right]\Bigg|_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty}\frac{\left(\tau\right)}{C^0}G\left\{\tau\right\}d\tau \\
&= \left[\frac{1}{2}\frac{\left(\tau\right)^2}{C^0}G\left\{\tau\right\}\right]\Bigg|_{\tau^0}^{\infty} - \int_{\tau^0}^{\infty}\frac{1}{C^0}\left(\tau - \tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{2C^0}\left(\tau^2 - \tau\tau^0 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\right)\Big|_{\tau^0}^{\infty} - \frac{1}{C^0}\left(\frac{\left(\tau\right)^2}{2}\Bigg|_{\tau^0}^{\infty} + \frac{1}{A}\left(\tau^0\right)^2 e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\Bigg|_{\tau^0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{C^0}\left(\tau^2\right) - \frac{1}{C^0}\left(\frac{\left(\tau\right)^2}{2} - \frac{\left(\tau^0\right)^2}{2} - \frac{\left(\tau^0\right)^2}{A}\right) = \frac{\left(\tau^0\right)^2}{C^0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A}\right)
\end{aligned}$$

La máxima energía disipada g_f es una característica del material, por lo tanto se tiene:

$$\frac{\left(\tau^0\right)^2}{C^0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A}\right) = g_f \Longrightarrow A = \frac{1}{\frac{C^0 g_f}{\left(\tau^0\right)^2} - \frac{1}{2}} \tag{C.56}$$

Para el caso de una función $G\{\tau\}$ lineal (ec. (C.27)), el extremo superior de la ecuación se obtiene teniendo en cuenta el valor máximo de la ec. (C.19), con lo que se obtiene

$$G\{\tau\} = 1 = \frac{\left(1 - \frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)} \Rightarrow \tau = -\frac{\tau^0}{A} \tag{C.57}$$

La disipación total se obtiene como

$$\begin{aligned}
\int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \Xi &= \int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \frac{1}{2}\frac{(\tau)^2}{C^0}\frac{dG\{\tau\}}{d\tau}d\tau && \text{(C.58)}\\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{(\tau)^2}{C^0}G\{\tau\}\right)\Bigg|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \int_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} \frac{1}{C^0}\frac{(\tau-\tau^0)}{(1+A)}d\tau\\
&= \left(\frac{1}{2}\frac{(\tau)^2}{C^0}G\{\tau\}\right)\Bigg|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \frac{1}{C^0(1+A)}\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0\tau\right)\Bigg|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{(\tau)^2}{C^0}\frac{\left(1-\frac{\tau^0}{\tau}\right)}{(1+A)}\Bigg|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}} - \frac{1}{C^0(1+A)}\left(\frac{\tau^2}{2} - \tau^0\tau\right)\Bigg|_{\tau^0}^{-\frac{\tau^0}{A}}\\
&= \frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{A^2C^0} - \frac{1}{2}(1+A)\frac{(\tau^0)^2}{A^2C^0}\\
&= -\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{AC^0} && \text{(C.59)}
\end{aligned}$$

La máxima energía disipada g_f es una característica del material, por lo tanto se tiene:

$$-\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{AC^0} - g_f = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}\frac{(\tau^0)^2}{g_f C^0} \tag{C.60}$$

En este caso el tensor constitutivo tangente se obtiene teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^0}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = C^0 : \frac{\partial\tau}{\partial\boldsymbol{\sigma}^0} \tag{C.61}$$

Con lo que se obtiene el tensor constitutivo tangente considerando un comportamiento post pico exponencial(ec.(C.27)) o lineal (ec. (C.31))

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - \left(e^{A\left(1-\frac{\tau}{\tau^0}\right)}\frac{\tau^0 + A\tau}{\tau^2}\right)(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(C^0 : \frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}\right) \quad \text{(C.62)}$$

$$C^t = (1-d)\,\boldsymbol{C}_0 - \left(\frac{\tau^0}{\tau^2\,(1+A)}\right)(\boldsymbol{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}) \otimes \left(C^0 : \frac{\partial \tau}{\partial \boldsymbol{\sigma}^0}\right) \quad \text{(C.63)}$$

Esta norma conduce, también, a un tensor constitutivo tangente no simétrico.

Apéndice D

Cálculo del módulo elástico de un material compuesto

D.1 Introducción

El objetivo de este apéndice es obtener una expresión para el módulo elástico de un material compuesto con fibras en la dirección transversal y considerando a las mismas solo con rigidez axial. El objetivo es mostrar la influencia en el módulo elástico del compuesto de la contracción de la matriz en la dirección perpendicular, coincidente con la dirección de las fibras, al esfuerzo aplicado.

D.2 Ecuación de equilibrio

Para determinar el módulo elástico del material compuesto se considerará una barra constituida por un material compuesto de dos fases: matriz y fibra sometido a una deformación impuesta en la dirección del eje x. (ver Figura D.1). La deducción analítica del módulo elástico del material compuesto se realiza bajo las hipótesis siguientes: teoría de mezclas de sustancias básicas, pequeñas deformaciones, matriz isótropa y de que las fibras se comportan como un material uniaxial.

D.2.1 Condición de compatibilidad en la dirección y

La condición de compatibilidad de la teoría de mezclas de sustancias básicas establece que en la dirección y (ver Figura D.1) las deformaciones del conjunto y de cada uno de las fases del material compuesto son iguales. Las deformaciones en la fibra y en la matriz están dadas por:

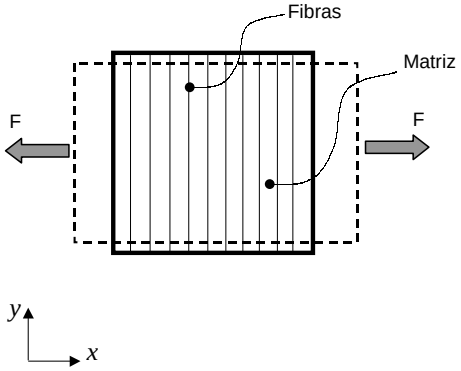

Figura D.1: Material compuesto sometido a tracción en la dirección x.

$$\varepsilon_{mx} = \frac{1}{E_m}\left(\sigma_{mx} - \nu_m \sigma_{my}\right) \tag{D.1}$$

$$\varepsilon_{my} = \frac{1}{E_m}\left(\sigma_{my} - \nu_m \sigma_{mx}\right) \tag{D.2}$$

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \tag{D.3}$$

donde ε_{mx} y ε_{my} son las deformaciones en la dirección x e y de la matriz respectivamente, ε_f es la deformación longitudinal de la fibra, E_m y E_f los módulos de Young de matriz y fibra respectivamente, σ_{mx} y σ_{my} son los estados tensionales de la matriz en la dirección x e y respectivamente, σ_f es el estado tensional de la fibra y ν_m es el coeficiente de Poisson de la matriz.

La condición de compatibilidad de la teoría de mezclas establece que las deformaciones dadas por las ecs. (D.2) y (D.3) son iguales de donde se obtiene:

$$\varepsilon_{mx} = \frac{1}{E_m}\left(\sigma_{mx} - \nu_m \sigma_{my}\right) \tag{D.4}$$

$$\frac{\sigma_f}{E_f} = \frac{1}{E_m}\left(\sigma_{my} - \nu_m \sigma_{mx}\right) \tag{D.5}$$

D.2.2 Condición de equilibrio en la dirección y

La condición de equilibrio establece que la tensión del material compuesto en la dirección y es nula. Teniendo en cuenta la teoría de mezclas, se tiene:

$$\sigma_y = 0 = k_f\ \sigma_f + k_m \sigma_{my} \Rightarrow \sigma_f = -\frac{k_m}{k_f}\sigma_{my} \tag{D.6}$$

Reemplazando la ec. (D.6) en la ec. (D.5) se tiene:

$$E_m \varepsilon_{mx} = (\sigma_{mx} - \nu_m \sigma_{my}) \tag{D.7}$$

$$-\frac{k_m}{k_f E_f}\sigma_{my} E_m = (\sigma_{my} - \nu_m \sigma_{mx}) \Rightarrow 0 = \left[-\nu \sigma_{mx} + \sigma_{my}\left(1 + E_m \frac{k_m}{k_f E_{fy}}\right)\right] \tag{D.8}$$

Teniendo en cuenta la ec. (D.4) y (D.5) y para un estado de deformaciones ε_x dado, se obtiene un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} E_m \varepsilon_{mx} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\nu_m \\ -\nu_m & 1 + E_m \frac{k_m}{k_f E_{fy}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{mx} \\ \sigma_{my} \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

La solución está dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{mx} \\ \sigma_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k_f E_{fy} + E_m k_m}{-k_f E_{fy} - E_m k_m + \nu_m^2 k_f E_{fy}} E_m \varepsilon_{mx} \\ -\frac{\nu_m}{-k_f E_{fy} - E_m k_m + \nu_m^2 k_f E_{fy}} k_f E_{fy} E_m \varepsilon_{mx} \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

D.2.3 Ecuación constitutiva de la matriz

La matriz se considera como un material isótropo y bajo la hipótesis de tensión plana y su ecuación constitutiva está dada por la ley de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{D.11}$$

donde $\boldsymbol{C}$ es el tensor constitutivo cuya expresión matricial para el caso de tensión plana está dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{E_m}{1-(\nu_m)^2} & \frac{\nu_m E_m}{1-(\nu_m)^2} & 0 \\ \frac{\nu_m E_m}{1-(\nu_m)^2} & \frac{E_m}{1-(\nu_m)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \end{bmatrix} \tag{D.12}$$

Las tensiones resultan entonces:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{mx} \\ \sigma_{my} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_m}{1-(\nu_m)^2} & \frac{\nu_m E_m}{1-(\nu_m)^2} \\ \frac{\nu_m E_m}{1-(\nu_m)^2} & \frac{E_m}{1-(\nu_m)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{mx} \\ \varepsilon_{my} \end{bmatrix} \tag{D.13}$$

La tensión en la dirección y en la matriz resulta entonces:

$$\sigma_{my} = \frac{\nu_m E_m}{1-(\nu_m)^2}\varepsilon_{mx} + \frac{E_m}{1-(\nu_m)^2}\varepsilon_{my} \tag{D.14}$$

Teniendo en cuenta la ec. (D.10) la deformación en la dirección y está dada por:

$$-\frac{\nu_m}{-k_f E_{fy} - E_m k_m + \nu_m^2 k_f E_{fy}} k_f E_{fy} E_m \varepsilon_{mx} = \frac{\nu_m E_m}{1-\nu_m^2}\varepsilon_{mx} + \frac{E_m}{1-\nu_m^2}\varepsilon_{my} \tag{D.15}$$

$$\varepsilon_{my} = \nu_m E_m \varepsilon_{mx} \frac{k_m}{-k_f E_{fy} - E_m k_m + \nu_m^2 k_f E_{fy}} \tag{D.16}$$

Teniendo en cuenta que la fibra tiene un comportamiento mecánico axial y considerando que la tensión en la dirección x del material compuesto es $\sigma_x = k_m \sigma_{mx}$, el módulo elástico del material compuesto está dado por:

$$\sigma_x = k_m \underbrace{\frac{k_f E_{fy} + E_m k_m}{k_f E_{fy} + E_m k_m - \nu_m^2 k_f E_{fy}} E_m}_{E_x} \varepsilon_{mx} \tag{D.17}$$

$$E_x = k_m E_m \frac{k_f E_{fy} + E_m k_m}{k_f E_{fy} + E_m k_m - \nu_m^2 k_f E_{fy}} \tag{D.18}$$

donde E_x es el módulo elástico del material compuesto en la dirección x. La ec. (D.18) muestra que para el caso de considerar la fibra con comportamiento uniaxial solamente el módulo elástico del material compuesto es función del coeficiente de participación volumétrica de la matriz y de su módulo elástico afectados por un parámetro que tiene en cuenta la influencia del fenómeno de contracción de la misma en la dirección longitudinal de las fibras. La Figura 7.4 muestra la evolución del módulo elástico del material compuesto en función de la participación volumétrica de las fibras en el mismo. Se observa, además, que los valores dados por la expresión analítica anterior coinciden con los resultados obtenidos con la predicción numérica obtenida utilizando el modelo propuesto en esta monografía.

Bibliografía

Aboudi, J. (1982). A continuum theory for fiber-reinforced elastic viscoplastic composites. *Int. J. Engng. Sci.*, 20, 605–621.

Aboudi, J. (1984). Effective behaviour of inelastic fiber-reinforced composites. *Int. J. Engng. Sci.*, 22, 439–449.

Abrate, S. (1991). Impact on laminated composite materials. *Trans. American Society of Mechanical Engineers; Applied Mechanics Review*, 44(4), 155 – 190.

Abrate, S. (1994). Impact on laminated composites: Recent advances. *Trans. American Society of Mechanical Engineers; Applied Mechanics Review*, 47(11), 517 – 544.

Agarwal, B. D. y Bansal, R. K. (1979). Effect of an interfacial layer on the properties of fibrous composites: a theoretical analysis. *Fibre Sci. Technol.*, 5, 129–141.

Ahmad, S., Irons, B. M., y Zienkiewicz, O. C. (1970). Analysis of thick and thin shell structures bycurved finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 419–451.

Ali, R. (1996). Use of finite element technique for the analysis of composite structures. *Computers & Structures*, 58, No. 5, 1015–1023.

Ambartsumyan, S. A. (1964). *Theory of Anisotropic Shells*. Technical Report TT F-118, NASA.

American Society for Testing and Material (1994). *ASTM Standards*. West Conshohocken, PA: American Society for Testing and Materials.

Anderson(Jr.), C. E., O'Donoghue, P. E., y Skerhut, D. (1990). A mixture theory approach for the shock response of composite materials. *Journal of Composite Materials*, 24, 1159 – 1178.

Ashton, J. E., Halpin, J. C., y Petit, P. H. (1969). *Primer on Composite Materials: Analysis*. Technomic, Wesport, Conn.

Aveston, J., Cooper, G. A., y Kelly, A. (1971). Single and multiple fracture. In *Conference Proceedings of the National Physical Laboratory: Properties of Fiber Composites*.

Aveston, J. y Kelly, A. (1973). Theory of multiple fracture of fibrous composites. *J. Mater. Sci.*, 8, 352 – 362.

Barbero, E. J. (1998). *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor and Francis.

Barlat, F., Lege, D. J., y Brem, J. C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 7, 693.

Barlat, F. y Lian, J. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. part i: A yield function for othotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity*, 5, 51.

Bassani, J. L. (1977). Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.*, 19, 651.

Bathe, K. J. (1982). *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc.

Beaumont, P. W. R. (1979). Fracture mechanisms in fibrous composites. In R. A. Smith (Ed.), *Fracture Mechanics, Current Status, Fracture Prospects* (pp. 211 – 233).: Pergamon Press.

Bensoussan, Lions, y Papanicolaou (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.

Benveniste, Y. y Aboudi, J. (1984). A continuum model for fiber reinforced materials with debonding. *Int. J. Solids Struct.*, 20, 935.

Berkowitz, H. M. (1969). A theory of simple beams and columns for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 3, 196–200.

Betten, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.*, 25, 565–581.

Betten, J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity*, 4, 29–46.

Beyerley, D., Spearing, S. M., Zok, F. W., y Evans, A. G. (1992). Damage, degradation and failure in a unidirectional ceramic-matrix composite. *J. Am. Ceram. Soc.*, 75, 2719–2725.

Botello, S. (1993). *Análisis de estructuras multilaminares por el método de los elementos finitos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.

Botello, S., Oñate, E., y Miquel, J. (1999). A layer-wise triangle for analysis of laminated composite plates and shells. *Computers & structures*, 70(6), 635–646.

Budiansky, B. (1984). Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheet. In G. J. Dvorak y R. T. Shield (Eds.), *Mechanics of Material Behavior* (pp.1̃5). Amsterdam: Elsevier.

Camacho, G. T. y Ortiz, M. (1996). Computational modeling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20 - 22), 2899 – 2938.

Cante, J. C. (1995). *Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Aplicación de técnicas de cálculo paralelo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1997a). Algoritmic tangent matrix in the elastoplastic problem (in spanish). In U. de Brasilia (Ed.), *XVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais Em Engenharia* (pp. 2093 – 2100). Brasilia.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1997b). Un modelo constitutivo elasto-plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. In U. de Brasilia (Ed.), *XVIII CILAMCE Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais Em Engenharia* (pp. 2100 – 2108). Brasilia.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1998a). *Estudio del comportamiento no lineal en materiales compuestos*. Technical Report 264, C.I.M.N.E. - Barcelona, Barcelona - Spain.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1998b). *Modelo Constitutivo Elastoplástico Anisótropo en Deformaciones Finitas para Análisis de Materiales Compuestos Reforzados con Fibras*. Technical Report 139, C.I.M.N.E. - Barcelona, Barcelona - Spain.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1998c). Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, 3(1), 19–37.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1999a). A large strain plasticity model for anisotropic material - Composite material application. *Accepted to be published in International Journal of Plasticity.*

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1999b). Plasticidad en grandes deformaciones para materiales anisótropos - Parte I: formulación teórica. In AMCA (Ed.), *Actas Del VI Congreso Argentino de Mecánica Computacional, MECOM'99* Mendoza - Argentina.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (1999c). Plasticidad en grandes deformaciones para materiales anisótropos - Parte II: teoría de mezclas y aplicaciones. In AMCA (Ed.), *Actas Del VI Congreso Argentino de Mecánica Computacional, MECOM'99* Mendoza - Argentina.

Car, E., Oller, S., y Oñate, E. (2000). An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2), 245–277.

Car, E., Zalamea, F., Oller, S., Miquel, J., y Oñate, E. (1999d). Simulación numérica de materiales compuestos reforzados con fibras. In R. Abascal, J. Dominguez, y G. Bugeda (Eds.), *Proceedings del IV Congreso de Métodos Numéricos En Ingeniería*: Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Casas, E. L., Oller, S., Rubert, J., Proença, S., y Oñate, E. (1998). A large strain explicit formulation for composites. In S. Idelsohn, E. Oñate, y E. Dvorkin (Eds.), *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics* Buenos Aires (Argentina): CIMNE, Barcelona, Spain.

Chaboche, J. (1988a). Continuum damage machanics part ii damage growth, crack initiation and crack growth. *Journal of applied mechanics*, 55, 65 – 72.

Chaboche, J. (1988b). Continuum damage mechanics part i general concepts. *Journal of Applied Mechanics*, 55, 59 – 64.

Chang, T. Y. y Sawamiphakdi, K. (1981). Large deformation analysis of laminated shells by finite element method. *Comp. and Struct.*, 13, 331–340.

Chao, W. C. y Reddy, J. (1984). Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3d element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 20, 1991–2007.

Chen, J. K., Allahdadi, F. A., y Sun, C. T. (1997). A quadratic yield function for fiber reinforced composites. *Journal of Composite Materials*, 31(8), 788 – 811.

Chen, W. F. y Han, D. J. (1988). *Plasticity for structural engineers*. New York: Springer-Verlag.

Chen, W. F. y Zhang (1991). *Structural Plasticity*. New York: Springer-Verlag.

Cheng, S. (1964). *Elasticity Solution of Flexure, Torsion and Buckling of Multilayered Beams*. Technical Report MRC-TSR-483, Army Mathematics Research Center, Univ. of Wisconsin, Wisconsin, U.S.A.

Cheng, S. y Ho, B. P. C. (1963). Stability of heterogeneous orthotropic cylindrical shells under combined loading. *AIAA Journal*, 1(4), 892–898.

Chow, W. y Atluri, S. (1996). Prediction of post-buckling strength of stiffened composite panels based on teh criterion of mixed-mode stress intensity factors. *Computational Mechanics*, (pp. 215–224).

Cox, H. L. (1952). The elasticity and the strength of paper and other fibrous materials. *Br. J. Appl. Phys.*, 3, 72–79.

Crisfield, M. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons Ltd.

Curtin, W. A. (1991). Exact theory of fiber fragmentation in single-filament composite. *J. Mater. Sci.*, 26, 5239–5253.

Dana, J. R. y Barker, R. M. (1974). *Three dimensional analysis for the stress distribution near circular holes in laminated composites*. Technical Report VPI-E-74-18, Virginia Polytechnic Institute and State University.

Dennis, J. E. y Schnabel, R. B. (1983). *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Wquations*. Prentince Hall Series In Computational Mathematics, Englewood Clifs, New Jersey.

DFVLR (1983). *Progress Letters on UD Specimen Tests*. Technical report, European Space Agency.

Dong, S. B., Pister, K., y Taylor, R. L. (1962). On the theory of laminated anisotropic shells and plates. *J. Aerospace Sci.*, 29, 969–975.

Donnell, L. H. (1933). *Stability of thin-walled tubes under torsion*. Technical Report 479, NASA.

Dragon, A. (1985). Plasticity and ductile fracture damage: study of void growth in metals. *Engng. Fract. Mech.*, 21, 875 – 885.

Dragon, A. y Chihab, A. (1985). On finite damage: ductile fracture-damage evolution. *Mech. of Mater.*, 4, 95 – 106.

Drumheller (1973). An effect of debonding on stress wave propagation in a composite material. *J. Appl. Mech.*, 40, 1146–1157.

Duvaut, G. (1976). *Analyse fontionnelle et mécanique de milieux continus*, (pp. 119 – 132). North Holland.

Eggleston, H. G. (1969). *Convexity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Eisenberg, M. A. y Yen, C. F. (1984). The anisotropic deformation of yield surfaces. *J. Engng. Mater. Technol.*, 106, 355.

Eshelby, J. D. (1956). The continuum theory of lattice defects. *Solid State Physics*, III, 79 – 144.

Espinosa, H. D., Lu, H. C., Dwivedi, S., y Zavattieri, P. D. (1997). A finite deformation anisotropic plasticity model for fiber reinforced composites. In *Proceedings, 12th. Annual Technical Conference of the American Society for Composites, Deaborn*.

Espinosa, H. D., Zavattieri, P. D., y Dwivedi, S. (1998). A finite deformation continuum-discrete model for the description of fragmentation and damage in brittle materials. *Submitted to the Special Issue of Journal of Mechanics and Physics of Solids*.

Fish, J., Shek, K., Pandheeradi, M., y Shephard, M. S. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogeneization: Theory and practice. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 148, 53 – 73.

Flügge, W. (1960). *Stresses in Shells*, (pp. 208–216). Springer-Verlag.

G. Pulido, M. D. y Sobrino, J. (1998). Los materiales compuestos en el refuerzo de puentes. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, 3(1), 75–95.

García Garino, C. (1993). *Un modelo numérico para el analisis de solidos elastoplásticos sometidos a grandes deformaciones*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.

García Garino, C. y Oliver, J. (1991). *A numerical model for elastoplastic large strain elastoplasticity*. Technical report, Escuela Técnica Superior de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona.

García Garino, C. y Oliver, J. (1992). Use of large strain elastoplastic model for simulation of metal forming processes. *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, (pp. 467–472).

García Garino, C. y Oliver, X. (1988). Estudio comparativo de la influencia de la ecuación constitutiva en la respuesta de sólidos elásticos sometidos a grandes deformaciones. In *MECOM 88* Córdoba - Argentina.

Gerstner, R. W. (1968). Stresses in composite cantilever. *Journal of Composite Materials*, 2, 498–501.

Grabovac, I. y Turley, D. (1993). Present and future of composite materials for marine applications. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 89 – 96). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

Green, A. y Naghdi, P. (1965). A dynamical theory of interacting continua. *Journal Engeneering Science*, 3, 3–231.

Green, A. y P., N. (1964). A general theory of an elasto-plastic continuum. *Archives Rational Mech. Anal.*, 18, 19–281.

Green, A. E. y Nagdhi, P. M. (1971). Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strains. *International Journal of Engineering Science*, 9, 1219–1229.

Gurtin, M. E. (1981). *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press.

Hahn, H. T., Erikson, J. B., y Tsai, S. W. (1982). Characterization of matrix/interface-controlled strength of composites. In G. Sih y V. P. Tamuzs (Eds.), *Fracture of Composite Materials* (pp. 197–214). The Netherlands: Martinus Nijhoff.

Halpin, J. y Tsai, S. W. (1969). *Effects of environmental factors on composite materials*. Technical Report 67-423, Air Force Materials Lab.

Hartung, R. F. (1963). Planar wound filamentary pressure vessels. *AIAA Journal*, 1(12), 2842–2844.

Hashin, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *J. Appl. Mech.*, 102, 329–334.

Hild, F. (1994). On the average pull-out length of the fibre-reinforced composites. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 319(Serie II), 1123–1128.

Hild, F. y Burr, A. (1996). Matrix cracking and debonding of ceramic-matrix composites. *Int. J. Solids Structures Vol. 33 No. 8*, (pp. 1209 – 1220).

Hild, F., Burr, A., y Leckie, A. (1994). Fiber breakage and fiber pull out of fiber-reinforced ceramic-matrix composites. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 13(6), 731–749.

Hill, R. (1948). A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 193, 281 – 297.

Hill, R. (1967). The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycristals. *J. Mech. Phys. Solid*, 15, 79–95.

Hill, R. (1971). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.

Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 85(1), 179 – 191.

Hill, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38(3), 405 – 417.

Hoff, N. J. (1949). *The Strength of laminates and Sandwich Structural Elements*, volume Engineering Laminates, chapter 1. Wiley: New York.

Hoft, N. J. (1949). *The Strength of Laminates and Sandwich Structural Elements*, chapter 1. Wiley.

Hsueh, C. H. (1993). Evaluation of interfacial properties of fiber-reinforced ceramic composites using a mechanical properties microprobe. *J. Am. Ceram. Soc.*, 76, 3041–3050.

Hughes, T. (1987). *The Finite Element Method*. Prentice-Hall.

Hull, D. (1987a). *An Introduction to Composite Materials*. Cambridge University Press.

Hull, D. (1987b). *Materiales compuestos*. Editorial Reverté, Espana.

Huston, D. L. (1984). Composite interlaminar fracture, effect of matrix fracture energy. *Composite Tech Review*, 6, 176 – 80.

Hutchinson, J. W. y Jensen, H. M. (1990). Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. *Mechanics of Materials*, 9, 139–163.

Irwin, G. R. (1958). Fracture mechanics. In J. Goodier y N. J. Hoff (Eds.), *Structural Mechanics: Proceedings of the 1st. Symposiumon Naval Structural Mechanics* (pp. 557 – 591). New York: Pergamon Press.

Jayatilaka, A. (1979). *Fracture of engineering brittle materials*. Applied Science Publishers.

Jones, R. M. (1975). *Mechanics of Composite Materials*. New York: McGraw-Hill.

Jr., N. K., Green, W. H., y Stroud, W. J. (1985). Nonlinear response of a blade-stiffened graphite-epoxy panel with a discontinuous stiffener: Work-in-progress. In NASA (Ed.), *Workshop on Computational Methods for Structural Mechanics and Dynamics* Langley Research Center, Hampton.

Kachanov, L. M. (1958). Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk, Otd Tech Nauk*, 8, 26 – 31.

Karafillis, A. P. y Boyce, M. C. (1993). A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. *J. Mech. Phys. Solids*, 41(12), 1859 – 1886.

Khan, A. S. y Huang, S. (1995). *Continuum theory of plasticity*. New York: John Wiley and Sons.

Kies, J. A. (1962). *Maximun strains in the resin of fiberglass composites*. Technical Report NRL 5752, US Naval Research Laboratory.

Klintworth, J. y Macmillian, S. (1992). Effective analysis of laminated composite structures. *Benchmark, NAFEMS*, (pp. 20–22).

Kroner, E. (1960). Arch ration. *Mech. Anal*, 4, 273.

Kupusamay, T. y Reddy, J. (1984). A three dimensional nonlinear analysisof cross-ply rectangular composite plates. *Comp. Struct*, 18, 263–272.

Leckie, F. y Hayhurst, D. (1974). Creep rupture of structures. *Proc. R. Soc. London*, (pp. 323).

Lee, E. H. (1969). Elastic-plastic deformation at finite strains. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 36, 1–6.

Lekhnitskii, S. G. (1957). *Anisotropic Plates*. English translation Gordon and Breach, New York (1968), 2nd. edition.

Lemaitre, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, (pp. 233–245).

Lemaitre, J. (1985). A continuous damage mechanics model for ductile fracture. *J. of Eng. Mater. Tech.*, 107, 83 – 89.

Lemaitre, J. y Chaboche, J. L. (1978). Aspects phénoménologiques de la rupture par endommagement (in french). *J. Méc. Appl.*, 2, 317 – 365.

Lemaitre, J. y Plumtree, A. (1979). Application of damage concepts to predict creep-fatigue failures. *J. Eng. Mater. Tech.*, 101, 284 – 292.

Len'e, F. y Leguillon, D. (1982). Homogeinized constitutive law for a partially cohesive composite material. *Int. J. Solids Structures*, 18, 443–458.

Liao, C. L., Reddy, J., y Engelstad, S. P. (1988). A solid-shell transition element for geometrically non-linear analysis of laminated composite structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 26, 1843–1854.

Librescu, L. (1975). *Elastostatics and Kinematics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures*. The Netherlands: Noordhoff.

L.Langhaar, H., Boresi, A. P., Mille, R. E., y Bruegging, J. J. (1970). Stability of hiperboloidal cooling tower. In *Proceedings of the ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division* (pp. 753–779).

Lo, C. Y., Nakamura, T., y Kushner, A. S. (1993). Dynamic failure analysis along interfaces in composite materials. In A. S. of Mechanical Engineers (Ed.), *Advanced Computational Methods for Material Modeling*, volume 180 (pp. 115 – 224).: American Society of Mechanical Engineers.

Lo, K. H., Christensen, R. M., y Wu, E. M. (1977). A high-order theory of plate deformation. *J. Appl. Mech TRans. ASME*, 44, 663–676.

Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover.

Lubliner, J. (1972). On thermodynamics foundations of non-linear solid mechanics. *Int. Journal Nonlinear Mechanics*, (7), 237–254.

Lubliner, J. (1985). *Thermomechanics of Deformable Bodies*. Deparment of Civil Engineering, University of California, Berkeley, U.S.A.

Lubliner, J. (1990). *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, U.S.A.

Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., y Oñate, E. (1989). A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25(3), 299,326.

Luccioni, B. (1993). *Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortotropos*. PhD thesis, Universidad Nacional de Tucuman.

Malvern, L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.

Mandel, J. (1971). *Plasticité classique et viscoplasticité. Cours au CISM Udine*. Springer Verlag.

Mandel, J. (1972). *Plasticié classique et viscoplasticité*. Number 97 in CISM Lecture Notes. Springer-Verlag.

Marsden, J. y Hughes, T. (1994). *Mathematical foundations of elasticity*. New York: Dover Publications.

Marsh, S. P. (1980). *LASL shock hogoniot data*. Technical report, University of California.

Matthews, F. L. y Rawlings, R. D. (1994). *Composite Materials: Engineering and Science*. Chapman and Hall.

Michel, J. C. (1984). *Homogénéisation de matériaux élastoplastiques avec cavités*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Midlin, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 18, 1031–1036.

Moran, B., Ortiz, M., y Shih, F. (1990). Formulation of implicit finite element methods for multiplicative finite deformation plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 483–514.

Moulinec, H. y Suquet, P. (1998). A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 157, 69 – 94.

Murnagaham, F. (1937). Finite deformations of an elastic solid. *Am. J. Math.*, 59, 235–260.

Muskhelishvili, N. I. (1963). *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, chapter 3. Noordhoff, Groningen: The Netherlands.

Naghdi, P. M. (1957). On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, 14, 369–380.

Neamtu, L., Oller, S., y Oñate, E. (1997). A generalizid mixing theory elasto-damage-plastic model for finite element analysis of composites. In D. Owen, E. Oñate, y E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity* (pp. 1214–1219).: CIMNE.

Nelson, R. B. (1985). A review of some problems in global-local stress analysis. In N. L. R. Center (Ed.), *Workshop on Computational Methods for Structural Mechanics and Dynamics*.

Nelson, R. B. y Lorch, D. R. (1974). A refined theory for laminated orthotropic plates. *J. Appl. Mech.*, 41, 177–183.

Nishioka, T. y Atluri, S. (1983a). A numerical study of the use of path-independent integrals in elasto-dynamic crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 18, 23 – 33.

Nishioka, T. y Atluri, S. (1983b). Path-independent integrals, energy release rates and general solutions of near-tip fields in mixed-mode dynamics fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 18, 1–22.

Noguchi, M. (1993). Present and future of composite materials for automotive application in japan. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 97 – 110). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Oñate, E., Neamtu, L., y Oller, S. (1997a). Generalization of the classical mixing theory for analysis of composite materials. In *International Conference on Computational Engineering Science*.

Oñate, E., Neamtu, L., y Oller, S. (1997b). Un modelo constitutivo para el análisis por el MEF para materiales compuestos. In J. Güemes y C. Navarro (Eds.), *Materiales Compuestos 97* (pp. 206–211).

Oñate, E., Oller, S., Botello, S., y Canet, J. (1991). *Methods for analysis of composite material structures (in Spanish)*. Technical Report 11, CIMNE, Barcelona, Spain.

Oñate, E., Taylor, R. L., y Zienkiewicz, O. C. (1990). Consistent formulation of shear reissner-mindlin plate elements. In G. Kuhn y H. Mang (Eds.), *Discretization Methods in Structural Mechanics*: Springer Verlag.

Oñate, E., Zienkiewicz, O. C., Suarez, B., y Taylor, R. L. (1992). A methodology for deriving shear-constrained reissner-mindlin plate elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 33, 345–367.

Obraztsov, I. F. y Vasilev, V. V. (1982). *Mechanics of Composites*. MIR Publishers Moscow.

O'Donoghue, P. E., Anderson(Jr.), C. E., Friesenhahn, G. J., y Parr, C. H. (1992). A constitutive formulation for anisotropic materials suitable for woven propagation computer programs. *Journal of Composite Materials*, 26(13), 1860 – 1884.

Oliver, J., Cervera, M., Oller, S., y Lubliner, J. (1990). Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. *Second international conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*.

Oliver, X. y Agelet, C. (1999). *Apuntes de mecánica de medios continuos*. Universidad Politécnica de Catalud'a.

Oller, S. (1988). *Un modelo constitutivo de daño continuo para materiales friccionales*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.

Oller, S. (1989). *New ceramic materials for engineering structures (in Spanish)*. Technical Report 2, C.I.M.N.E. - Barcelona.

Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de materiales friccionales*. Technical Report 3, C.I.M.N.E., Barcelona - Spain.

Oller, S., Botello, S., Miquel, J., y Oñate, E. (1995a). An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations*, 12(3), 245–262.

Oller, S., Car, E., y Oñate, E. (1999). Tratamiento numérico del fenómeno de debonding en compuestos de matriz con fibras largas. In *III Congreso Nacional de Materiales Compuestos* Málaga - Spain.

Oller, S., Neamtu, L., y Oñate, E. (1995b). Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, (pp. 433–438).

Oller, S., Oñate, E., y Miquel, J. (1993a). Simulation of anisotropic elastic-plastic behaviour of materials by means of an isotropic formulation. In *2nd. US Nat. Congr. Comput. Mech.* Washington DC.

Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., y Botello, S. (1993b). A finite element model for analysis of multiphase composite materials. In A. Miravete (Ed.), *Ninth International Conferences on Composite Materials* Zaragoza - Spain: Woodhead Publishing Limited.

Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., y Botello, S. (1996). A plastic damage constitutive model for composite materials. *Int. J. Solids and Structures*, 33(17), 2501–2518.

O'Rourke, B. P. (1989). The use of composite materials in the design and manufacture of formula 1 racing cars. *Proc. Inst. Mech. Engng.*, C387/025, 39–48.

Ortiz, M. (1987). Some computational aspects of finite deformation plasticity. In D. R. J. Owen (Ed.), *Computational Plasticity* (pp. 1717–1756).

Ortiz, M. y Popov, E. (1982a). A physical model for the inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London*, A383, 101–125.

Ortiz, M. y Popov, E. (1982b). Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*, 1, 139–150.

Ortiz, M. y Popov, E. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 21*, (pp. 1561 – 1576).

Owen, D. y Lyness, J. (1972). Investigation of bond failure in fibre-reinforced materials by the finite element method. *Fibre Sci. Technol.*, 5, 129–141.

Pagano, N. J. (1969). Exact solution for composite laminates in cylindrical bending. *Journal of Composite Materials*, 3, 398–411.

Pagano, N. J. (1970). Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. *Journal of Composite Materials*, 4, 20–34.

Payne, L. E. (1949). Torsion of composite sections. *Journal of science*, 23, 381–395.

Pendleton, R. y Tuttle, M. (1989). *Manual on Experimental Methods for Mechanical Testing of Composites*. Elsevier Applied Science Publishers.

Pérez Foguet, A., Rodríguez Ferran, A., y Huerta, A. (1998). *Applications of numerical differentiation to computational plasticity*. Technical Report MA010, Departamento de Matemática Aplicada III U.P.C.

Phan, N. D. y Reddy, J. (1985). Analysis of laminated composite plates using a high-order shear deformation theory. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12, 2201–2219.

Pryce, A. W. y Smith, P. A. (1992). Modelling of the stress/strain behavior of unidirectional ceramic matrix composite laminates. *J. Mater. Sci.*, 27, 2695–2704.

Putcha, N. S. y Reddy, J. (1982). Three dimensional finite element analysis of layered composite plates. In *Advances in Aerospace Structures* Phoenix, Arizona: Winter Annual Meeting of ASME.

Putcha, N. S. y Reddy, J. (1986). Stability and vibration analysis of laminated plates by using a mixed element bases on a refined plate theory. *J. Sound and Vibration*, 104, 285–300.

Rabotnov, I.Ñ. (1963). On the equations of state for creep. *Progress in Applied Mechanics, the Prager Anniversary Volume*, (pp. 307 – 315).

Reddy, J. (1984). A simple high-order theory for laminated composite plates. *Journal of Appl. Mech.*, 51, 745–751.

Reddy, J. (1985). On computational schemes for global-local stress analysis. In NASA (Ed.), *Workshop on Computational Methods for Structural Mechanics and Dynamics* Langley Research Center, Hampton.

Reddy, J. (1987a). A generalization of two-dimensional theories of laminates composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods*, 3, 113–180.

Reddy, J. (1987b). A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation. *Int. J. Solids Struct.*, 20, 881–896.

Reddy, J. y Miravete, A. *Practical analysis of composite laminates.*

Reddy, J. y Phan, N. (1984). Influence of transverse shear deformation on stability and vibration of laminated plates. In *Proc. 12th Southeast. Conf. Theoret. Appl. Mech.* (pp. 502–505).

Reissner, E. (1952). Stress strain relations in the theory of thin elastic shells. *Journal of Mathematics and Physics*, 31, 109–119.

Reissner, E. y Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous orthotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 28, 402–408.

Resende, L. (1984). *Constitutive modeling and finite element analysis in geomechanics*. PhD thesis, University of Cape Town, South Africa.

Resende, L. y Martin, J. (1984). A progressive damage continuum model for granular materials. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, 42, 1 – 18.

Rice, J. R. (1968). A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 376 – 386.

Ruffles, C. (1993). Applications of advanced composites in gas turbine aero engines. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 123 – 130). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

Salomon, O. (1998). *Un modelo numérico para el análisis de estructuras con aislamiento sísmico*. PhD thesis, Universitat Politecnica de Catalunya.

Salomón, O., Oller, S., Car, E., y nate, E. O. (1999). Thermomechanical fatigue analysis based on continuum mechanics. In *Actas Del VI Congreso Argentino de Mecánica Computacional*.

Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Eng. Sc.*, 12, 331–351.

Sanchez-Palencia, E. (1980). *Lecture Notes in Physics*, volume 127, chapter Non-homogeneous media and vibration theory. Springer-Verlag, Berling.

Sanchez Palencia, E. (1980). Non-homogeneous media and vibration. In *Lecture Notes in Physics*. Springer Verlag - Berlin.

Sanders, J. L. (1959). *An improved first approximation theory for thin shells*. Technical Report R-24, NASA.

Santalo, L. (1981). *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Savage, G. (1993). The use of fibre reinforced composite materials in formula 1 motor racing. In A. Miravete (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Composite Materials ICCM 9 Metal Matrix Composites* (pp. 97 – 110). Zaragoza - Spain: University of Zaragoza - Woodhead Publishing Limited.

Schile, R. D. (1962). A nonhomogeneous beam in plane stress. *Journal of Applied Mechanics*, 29, 582–583.

Schile, R. D. (1963). Bending of nonhomogeneous bars. *International Journal of Mechanical Sciences*, 5, 439–445.

Shih, C. F. y Lee, D. (1978). Further developments in anisotropic plasticity. *J. Engng Mater. Technol.*, 105, 242.

Sidoroff, F. M. (1970). *Quelques réflexions sur le principe d'indifference matérielle pour un milieu ayant un état relache*. Technical report, Comptes Remdus Acad. Sciences of Paris.

Simo, J. y Ju, J. (1987a). Strain and stress based continuum damage models - i formulation. *Int. J. Solids Structures*, 23, 821–840.

Simo, J. y Ju, J. (1987b). Strain and stress based continuum damage models - ii computational aspects. *Int. J. Solids Structures*, 23, 841–869.

Simo, J. y Taylor, R. (1985). Consistent tangent operators for rate-dependent elastoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, 101–118.

Simo, J. C. y Hughes, T. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer - Verlag.

Smit, R. J. M., Brekelmans, W. A. M., y Meijer, H. E. H. (1998). Precintion of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous system by multi-level finite element modeling. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 155, 181 – 192.

Smith, C. B. (1953). Some new types of orthotropic plates laminated of orthotropic material. *Journal of Applied Mechanics*, 20, 286–288.

Spencer, A. (1992). *Continuum mechanics*. Longman Scientific & Technical.

Stavrinidis, C. (1985). *Employment of Pam-Fiss Bi-Phase Computer Program for the Strength Analysis and Fracture Delamination Behaviour of Composites. Vol.7 Final Synthesis Report*. Technical report, European Space Agency.

Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of laminated orthotropic plates. *J. Engr. Mech. Div.*, 87, 31–56.

Sun, C. y Chen, J. L. (1989). A simple flow rule for characterizing the nonlinear behavior of fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 23, 1009 – 1020.

Suquet, P. (1982). *Plasticité et Homogénéisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.

Suquet, P. (1983). Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity. *Plasticity today: Modeling, methods and applications*.

Suquet, P. (1987). *Homogenization Techniques for Composite Media*, chapter Elements of homogenization for inelastic solid mechanics, (pp. 193–279). Spring-Verlag, Berlin.

Surrel, Y., Vautrin, A., y Verchery, G. (1990). *Analysis and design of composite materials structures*. Pluralis.

Thaumaturgo, C. y Costa, A. M. D. (1997). Shock waves on polymer composites. *Journal of Materials Science Letters*, 16(18), 1480 – 1482.

Timoshenko, S. y Woinowsky-Krieger, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw-Hill, 2nd. edition.

Trusdell, C. y Toupin, R. (1960). *The Classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I – Springer Verlag, Berlin.

Tsai, S. W. (1974). *Structural behaviour of composite materials*. Technical report, NASA Contract Report CR-71.

Tsai, S. W. y Pagano, N. J. (1966). Invariant properties of composite materials. In S. W. Tsai, J. C. Halpin, y N. J. Pagano (Eds.), *Composite Materials Workshop* (pp. 233–253).

Tsai, S. W. y Wu, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *J. Comp. Mat.*, 5, 58.

Vasiliev, V. (1993). *Mechanics of composite structures*. Taylor and Francis.

Voyiadjis, G. Z. y Foroozesh, M. (1990). Anisotropic distortional yield model. *J. Appl. Mech.*, 57, 537.

Voyiadjis, G. Z. y Thiagarajan, G. (1995). An anisotropic yield surface model for directionally reinforced metal matrix composites. *Intenational Journal of Plasticity*, 11, 867 – 894.

Voyiadjis, G. Z. y Thiagarajan, G. (1996). A cyclic anisotropic plasticity model for metal matrix composites. *International Journal of Plasticity*, 12(1), 69 – 91.

Werren, F. y Norris, C. B. (1953). *Mechanical properties of a laminate designed to be isotropic*. Technical Report 1841, Forest products Lab., Madison, Wis.

Whitney, J. M. (1973). A high-order theory for extensional motion laminated composites. *J. Sound and Vibration*, 30, 85–97.

Zalamea, F., Canet, J. M., y Oller, S. (1998). Treatment of composite materials based on the homogeneization method. In CIMNE (Ed.), *Proceedings of the Fourth World Congress on Computational Mechanics*.

Zalamea, F., Canet, J. M., y Oller, S. (1999). Teoría de homogeneización para el análisis de materiales compuestos con estructura interna periódica. In R. Abascal, J. Dominguez, y G. Bugeda (Eds.), *Proceedings del IV Congreso de Métodos Numéricos En Ingeniería*: Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería.

Zienkiewicz, O. y Taylor, R. (1994). *El Método de Elementos Finitos Vol. 1 y 2*. Mc Graw Hill - Cimne.

Zienkiewicz, O. C. y Lefevre, D. (1988). A robust triangular plate element of the reissner-mindlin type. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 26, 1169–1184.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Papadopoulos, P., y Oñate, E. (1990). Plate bending elements with discrete consrtaints: new triangular element. *Comp. and Struct.*, 35, 505–522.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., y Too, J. M. (1971). Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 275–290.