

# O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AO PROBLEMA DA ONDA ESCALAR: DERIVADAS ESPACIAIS E TEMPORAL

J.A.M. CARRER

e

W.J. MANSUR

*COPPE/UFRJ Programa de Engenharia Civil  
Caixa Postal 68506  
CEP 21945-970 Rio de Janeiro, RJ - Brasil*

## SUMÁRIO

As equações correspondentes às derivadas espaciais e temporal da representação integral de Volterra do problema de propagação da onda escalar são escritas empregando-se o conceito de parte finita da integral. Admitindo variações linear e constante para o potencial e sua derivada na direção normal, respectivamente, a integração no tempo é efetuada analiticamente. Apresenta-se, no final do trabalho, um exemplo para testar a eficiência da formulação, comparando-se as respostas numérica e analítica.

## SUMMARY

The equations corresponding to spatial and time derivatives of the Volterra integral representation of the scalar wave propagation problem are written using the concept of the finite part of the equation. Allowing linear variations for the potential and constant variation for its normal derivative, time integration is performed analytically. An example is presented to test the efficiency of the formulation, comparing numerical and analytical solutions.

## INTRODUÇÃO

Os estudos da elastodinâmica e do problema de propagação da onda escalar constituem uma das mais interessantes aplicações do método dos elementos de contorno. Após o trabalho inicial de Mansur<sup>4</sup>, muitas aplicações práticas foram apresentadas nos últimos anos<sup>1,2</sup>, demonstrando a eficiência e justificando o emprego do método dos elementos de contorno para a solução de problemas que envolvem a variável tempo. Alguns problemas ainda estão em fase de estudo hoje em dia; entre eles, os da obtenção das equações integrais para o cálculo das tensões na elastodinâmica e das derivadas do potencial no problema escalar.

Recibido: Enero 1995

### EQUAÇÃO INTEGRAL

O problema de propagação da onda escalar é representado pela equação abaixo ( $\xi$  é o ponto fonte,  $X$ , o ponto campo e  $\Gamma$  e  $\Omega$  representam, respectivamente, o contorno e o domínio):

$$\begin{aligned}
 4\pi c(\xi)u(\xi, t) &= \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) - \\
 &- \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) - \\
 &- \frac{1}{c} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} u_o^*(X, t; \xi) u_o(X) d\Gamma(X) + \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} u_o^*(X, t; \xi) v_o(X) d\Omega(X) + \\
 &+ \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left\{ \left[ \frac{u_o^*(X, t; \xi)}{r} - b_o^*(X, t; \xi) \right] u_o(X) + u_o^*(X, t; \xi) \frac{\partial u_o(X)}{\partial r} \right\} d\Omega(X)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Na equação acima,  $u(X, \tau)$  é o potencial,  $p(X, \tau) = \partial u(X, \tau) / \partial n$ , a sua derivada na direção normal e

$$u^*(X, t; \xi, \tau) = U^*(X, t; \xi, \tau) H[c(t - \tau) - r] \tag{2}$$

é a solução fundamental, com

$$U^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{2c}{\sqrt{c^2(t - \tau)^2 - r^2}} \tag{3}$$

onde  $r = |\mathbf{r}|$  é a distância entre  $X$  e  $\xi$ .

Os termos com índice zero se referem ao estado inicial ( $\tau = 0$ ); na terceira integral de contorno à direita da igualdade e nas integrais de domínio da equação (1), tem-se

$$\begin{aligned}
 u_o^*(X, t; \xi) &= u^*(X, t; \xi, 0); \quad b_o^*(X, t; \xi) = b^*(X, t; \xi, 0) \\
 u_o(X) &= u(X, 0); \quad v_o(X) = \left. \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Adicionalmente

$$b^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{2c[c(t - \tau) - r]}{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^{3/2}} H[c(t - \tau) - r] \tag{5}$$

Na equação (1), o símbolo  $\int$  representa a parte finita da integral<sup>3</sup> e é definido como segue (note-se que  $u_r^*(X, t; \xi, \tau) = U_r^*(X, t; \xi, \tau) H[c(t - \tau) - r]$ ):

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \int_0^{t^+} \frac{2cr}{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^{3/2}} u(X, \tau) H[c(t - \tau) - r] d\tau = \\
 &= \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_0^{\tau} U_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau - \frac{1}{c} U^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) \right\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

DERIVADAS ESPACIAIS

A derivada da equação (1), para pontos internos ( $c(\xi) = 1$ ), em uma direção genérica  $m(\xi)$ , tem a seguinte representação (condições iniciais não são incluídas neste trabalho):

$$\begin{aligned}
 4\pi \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial m(\xi)} = & - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) d\tau (\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{m}^o) d\Gamma(X) - \\
 & - \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \frac{1}{r} [(\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{m}^o)(\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{n}^o) - (\mathbf{m}^o \cdot \mathbf{n}^o)] d\Gamma(X) + \quad (7) \\
 & + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \right) (\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{m}^o)(\mathbf{r}^o \cdot \mathbf{n}^o) d\Gamma(X)
 \end{aligned}$$

Na equação (7), as duas primeiras partes finitas das integrais em  $\tau$  à direita da igualdade devem ser interpretadas como representado pela equação (6). A derivada da parte finita, por sua vez, é definida como segue

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \right) = & \\
 = \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\partial U_r^*(X, t; \xi, \tau)}{\partial r} u(X, \tau) d\tau - \frac{2}{c} U_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) + \right. & (8) \\
 \left. + \frac{1}{c^2} \left[ U^*(X, t; \xi, \tau) \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} + U_{\tau}^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

com

$$U_{\tau}^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{\partial U^*(X, t; \xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{2c^3(t - \tau)}{[c^2(t - \tau)^2 - r^2]^{3/2}} \quad (9)$$

Os vetores unitários  $\mathbf{r}^o$ ,  $\mathbf{m}^o$  e  $\mathbf{n}^o$ , presentes na equação (7), estão representados na Figura 1

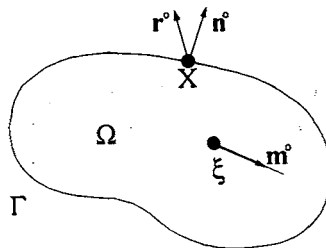


Figura 1. Definição dos vetores unitários

A equação (7) pode ser particularizada quando o vetor  $\mathbf{m}^o$  coincide com os vetores unitários  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  do sistema de coordenadas cartesiano, possibilitando o cálculo de  $\partial u(X, \tau)/\partial x$  e  $\partial u(X, \tau)/\partial y$ .

### DERIVADA TEMPORAL

A derivada em relação ao tempo da equação (1) ( $c(\xi) = 1$ ) tem a seguinte expressão

$$4\pi \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = \int_{\Gamma} \int_0^{t^+} u_t^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) d\tau d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \right) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma(X) \quad (10)$$

A parte finita da integral no tempo do primeiro termo à direita da igualdade, na equação (10), é definida como segue:

$$\int_0^{t^+} u_t^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) d\tau = \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_0^{\tau} U_t^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) d\tau - U^*(X, t; \xi, \tau) p(X, \tau) \right\} \quad (11)$$

onde

$$U_t^*(X, t; \xi, \tau) = \frac{\partial U^*(X, t; \xi, \tau)}{\partial t} = -U_r^*(X, t; \xi, \tau) \quad (12)$$

A derivada da parte finita tem a seguinte expressão

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^{t^+} u_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) d\tau \right) = \lim_{\tau \rightarrow t-r/c} \left\{ \int_0^{\tau} \frac{\partial U_r^*(X, t; \xi, \tau)}{\partial t} u(X, \tau) d\tau + U_r^*(X, t; \xi, \tau) u(X, \tau) - \frac{1}{c} U^*(X, t; \xi, \tau) \frac{\partial u(X, \tau)}{\partial \tau} \right\} \quad (13)$$

### RESOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Para a resolução numérica do problema, são adotadas variações linear e constante para  $u(X, \tau)$  e  $p(X, \tau)$ , respectivamente. A integração no tempo nas equações (1), (7) e (10) é efetuada analiticamente. Considerando um intervalo de tempo qualquer  $t_l \ll \tau \ll t_{l+1}$ , tem-se

$$u(X, \tau) = \Phi_I(\tau) u^l(X) + \Phi_F(\tau) u^{l+1}(X) \quad (14)$$

$$p(X, \tau) = \Theta_F(\tau) p^{l+1}(X) \quad (15)$$

onde (ver Figura 2)

$$\Phi_I(\tau) = (t_{l+1} - \tau) / \Delta t \tag{16}$$

$$\Phi_F(\tau) = (\tau - t_l) / \Delta t \tag{17}$$

$$\partial_F(\tau) = 1 \tag{18}$$

É importante observar que os resultados da integração analítica devem ser particularizados conforme a posição da frente de onda<sup>5</sup>.

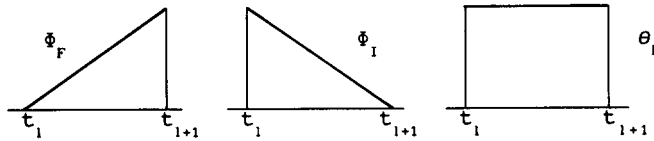


Figura 2. Funções de interpolação

### APLICAÇÃO NUMÉRICA

O exemplo apresentado consiste em uma barra uni-dimensional, de dimensões  $a$  e  $b$  ( $b = a/2$ ), fixa em uma de suas extremidades e sujeita a uma carga aplicada instantaneamente em  $t = 0$  igual a  $Ep$ , como indicado na Figura 3 (E é o módulo de elasticidade longitudinal do material).

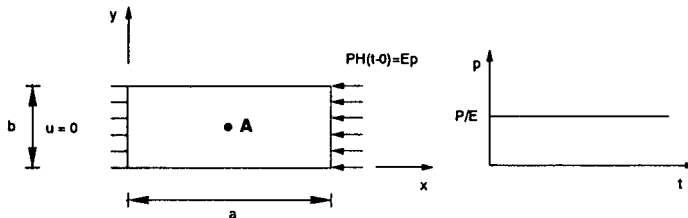


Figura 3. Condições de contorno e definições geométricas

O contorno foi discretizado com o emprego de vinte e quatro elementos lineares de mesmo comprimento (Figura 4) e o tempo, subdividido em intervalos iguais tais que  $\beta = (c\Delta t/l) = (0,6)$ , onde  $l$  é o tamanho do elemento.

São apresentados, nas Figuras 5, 6 e 7, os resultados relativos ao ponto  $A(a/2, b/2)$ , correspondentes a  $u$ ,  $p_x = \partial u / \partial x$  e  $v = \partial u / \partial t$  e as respectivas soluções analíticas.

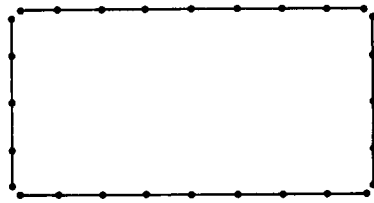


Figura 4. Malha de elementos de contorno

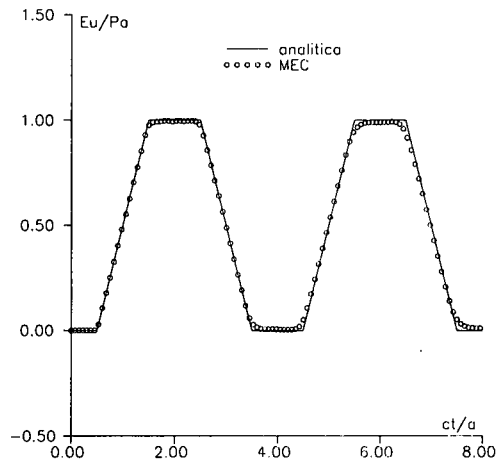


Figura 5. Ponto A ( $a/2, b/2$ ): resultados relativos a  $u$

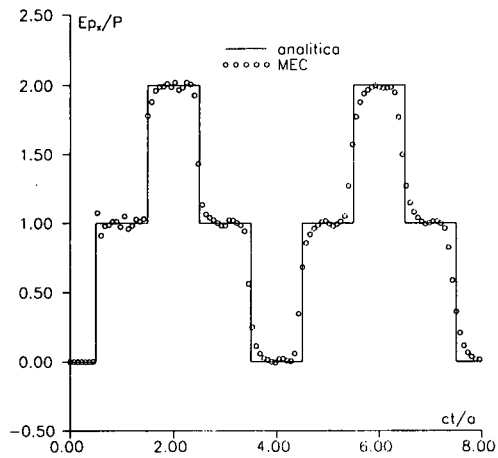


Figura 6. Ponto A ( $a/2, b/2$ ): resultados relativos a  $p_x$

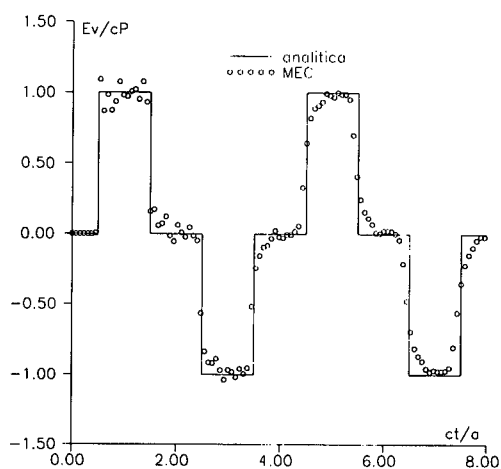


Figura 7. Ponto A ( $a/2, b/2$ ): resultados relativos a  $v$

## CONCLUSÕES

O procedimento apresentado neste trabalho, baseado na aplicação do conceito de parte finita da integral, é inteiramente análogo<sup>5</sup> àquele baseado na regularização das integrais no tempo<sup>4</sup>. O cálculo preciso das derivadas, através das correspondentes equações integrais, estimula implementações posteriores, tais como o cálculo de tensões na elastodinâmica e a inclusão das condições iniciais, tanto para o problema tratado aqui como para a elastodinâmica.

## REFERÊNCIAS

1. H. Antes and O. Von Estorff, "On FEM-BEM Coupling for Fluid-Structure Interaction Analyses in the Time Domain", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **31**, pp. 1151-1168, (1991).
2. J. Dominguez and R. Gallego, "Time Domain Boundary Element Method for Dynamic Stress Intensity Factor Computations", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **33**, pp. 635-647, (1992).
3. J. Hadamard, "*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*", Dover Publications, New York, (1952).
4. W.J. Mansur, "*A Time-stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*", Ph.D. Thesis, University of Southampton, England, (1983).
5. W.J. Mansur and J.A.M. Carrer, "Two-dimensional Transient BEM Analysis for the Scalar Wave Equation: Kernels", *Eng. Anal. with Boundary Elements*, Vol. **12**, pp. 283-288, (1993).