

# ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO SINGULAR EN REDES ELÉCTRICAS NO LINEALES

Etchehoury, María<sup>†</sup> y González, Cecilia<sup>‡</sup>

<sup>†</sup>Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. UNLP, Argentina, [marila.mate@gmail.com](mailto:marila.mate@gmail.com)

<sup>‡</sup>Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. UNLP, Argentina, [ceciliazgonzalez@gmail.com](mailto:ceciliazgonzalez@gmail.com)

**Resumen:** En este trabajo analizamos la estabilidad del equilibrio singular para una clase de circuitos eléctricos no lineales que se modelizan por ecuaciones diferenciales algebraicas: *los circuitos RLC*. El análisis consta de dos partes: por un lado, se usan resultados conocidos que permiten determinar la estabilidad del equilibrio singular, y por el otro, se utiliza una técnica de reducción, que nos permite modelar el sistema por una ecuación diferencial ordinaria sobre un espacio de menor dimensión, de este modo el estudio de la estabilidad puede hacerse a partir de resultados clásicos de sistemas no-lineales. Además, se obtienen conclusiones sobre la dinámica alrededor del equilibrio, es decir, más allá de establecer la estabilidad asintótica, es posible determinar la caracterización de las órbitas en las cercanías del mismo.

**Palabras clave:** *ecuaciones diferenciales algebraicas, estabilidad, circuitos eléctricos, equilibrio singular.*

2000 AMS Subject Classification: 34D20 - 37C75

## 1. INTRODUCCIÓN

Una *ecuación diferencial algebraica cuasilineal* -EDAC- tiene la forma,

$$A(x)\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

donde  $A \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$  y  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Los puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\text{rg}A(x) < n$  se llaman *puntos singulares* de (1) y el *conjunto singular*  $M_s$  es el conjunto de todos los puntos singulares, es decir,  $M_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{rg}A(x) < n\}$ . Se llama *equilibrio singular* de la EDAC a un punto  $x^* \in M_s$  que además verifica  $f(x^*) = 0$ .

Para estudiar la estabilidad del equilibrio singular  $x^*$  utilizaremos resultados ya conocidos [2], que se basan fundamentalmente en el análisis del espectro de (1), que se define como  $\sigma(A, -J) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A - J) = 0\}$ , siendo  $A = A(x^*)$  y  $J = Df(x^*)$ , el Jacobiano del campo  $f$  evaluado en  $x^*$ . Por otro lado, analizaremos la estabilidad del equilibrio basándonos en una técnica de reducción, inspirada en [1], que nos permite describir el sistema por una ecuación diferencial ordinaria sobre un espacio de menor dimensión, más precisamente de dimensión dos.

## 2. ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS REGULARES

Una EDAC del tipo (1) se dice *localmente regular* en un punto  $x^* \in M_s$  si el *índice diferencial* está definido y es constante en un entorno de ese punto, siendo el índice diferencial de una EDA el mínimo número de diferenciaciones que se necesitan para reducir la EDAC a una Ecuación Diferencial Ordinaria equivalente, definida sobre una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ , donde puede garantizarse existencia de solución. En esta sección enunciamos algunos resultados sobre la estabilidad del equilibrio en EDACs localmente regulares, basados en la teoría de matrices pencil y usando la forma canónica de Kronecker y métodos de proyectores para determinar el índice [2], [3].

### 2.1. PRELIMINARES

- ◊ Una **matriz pencil**  $\{A, B\}$  es una familia de un parámetro:  $\{A, B\} = \{\det(\lambda A + B) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ .
- ◊ El **espectro** de la matriz pencil es el conjunto:  $\sigma(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda A + B) = 0\}$ .
- ◊ Una matriz pencil es **regular** cuando el polinomio en  $\lambda$ ,  $\det(\lambda A + B)$ , de grado  $k \leq n$ , no es idénticamente nulo o cuando el espectro es finito.
- ◊ Una matriz cuadrada  $A$  es **nilpotente** si existe un  $\nu \in \mathbb{N}$ , tal que  $A^\nu$  es la matriz nula, siendo  $\nu$  el menor

natural para el que se cumple esta propiedad, llamado índice de nilpotencia. El índice  $\nu$  es el **índice de Kronecker** de la matriz pencil  $\{A, B\}$ .

**Proposición 1** Si  $\{A, B\}$  es una matriz pencil regular, entonces existen matrices no singulares  $E, F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tales que:  $EA F = \begin{pmatrix} I & O \\ O & N \end{pmatrix}$ ,  $EB F = \begin{pmatrix} W & O \\ O & I \end{pmatrix}$ , con  $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $N \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$ , para algún  $m < n$ , siendo  $N$  una matriz nilpotente de índice  $\nu < n - m$ .

**Proyectores:** las técnicas de proyectores se aplican al estudio de la estabilidad de EDAs lineales de la forma  $A\dot{x} = Bx$ , y permiten conocer el índice de Kronecker de la matriz pencil  $\{A, B\}$ .

En este caso hace falta tener en cuenta que la variedad solución  $\mathcal{M}$  de la EDA debe ser un subconjunto de  $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : Bx \in \text{Im}A\}$ . En la proposición que se enuncia a continuación se demuestra que para el caso de índice 1 los conjuntos  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{D}$  coinciden.

**Proposición 2** Sea  $Q$  algún proyector sobre  $\mathcal{N} = \text{Ker}A$ , es decir, un operador lineal que satisface  $Q^2 = Q$  y  $\text{Im}Q = \mathcal{N}$ . Son equivalentes:

1. La matriz pencil  $\{A, B\}$  tiene índice de Kronecker 1.
2. La matriz  $A_1 = A + BQ$  es no singular.
3.  $\mathbb{R}^n = \mathcal{N} \oplus \mathcal{D}$ .
4.  $\mathcal{M} = \mathcal{D}$ .

**Teorema 1 (Estabilidad del equilibrio en EDACs)** Sea una EDA del tipo (1) y  $x^*$  un punto de equilibrio singular de (1). Llamamos  $A = A(x^*)$  y  $J = Df(x^*)$  y supongamos que  $A(x)$  tiene rango constante en algún entorno de  $x^*$ . Si  $\{A, -J\}$  es una matriz pencil regular con índice de Kronecker 1, con  $\sigma(A, -J) \subset \mathbb{C}^-$ , entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable.

**Técnica de Reducción.** Dada una variedad analítica real  $M$  y un sistema del tipo (1), donde ahora  $A$  y  $f$  toman valores en  $M$ , puede demostrarse que (1) es equivalente a otra EDAC reducida que simbolizamos  $\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x)$ , y que resulta de rango localmente constante sobre una variedad analítica  $\tilde{N}$ . Además, existe una proyección de  $\tilde{N}$  sobre  $M$  tal que las soluciones de la EDAC reducida se proyectan como soluciones de la EDAC original. Para construir la variedad  $\tilde{N}$  se utiliza una técnica de reducción, llamada *desingularización* [1], que básicamente permite obtener una EDA equivalente, definida en general sobre una variedad de menor dimensión que  $M$ , y donde se puede garantizar existencia de solución.

### 3. CONDICIONES PARA LA ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO EN CIRCUITOS ELÉCTRICOS

Los resultados sobre estabilidad enunciados antes pueden aplicarse a distintos modelos de redes eléctricas que se representan por EDACs.

Consideramos un circuito RLC no lineal que consiste de una resistencia, un capacitor y un inductor en paralelo como en la Figura 1.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución del voltaje y la corriente son del tipo (1), con

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C(x_4) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ \psi(x_1, x_4 + E) \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Se puede aplicar el Teorema 1 para determinar la estabilidad del equilibrio singular. En este caso los equilibrios son de la forma  $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$ , con  $\psi(x_1^*, 0) = E$ , que resultan singulares pues  $\text{rg}A(x) = 2$ , para todo  $x$ , ya que  $L(x_3)$  y  $C(x_4)$  son funciones estrictamente positivas. A partir de la matriz pencil

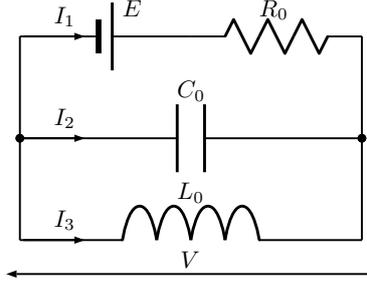


Figura 1: Circuito RLC no lineal

$\{A, -J\} = \{A(x^*), -Df(x^*)\}$ , se tiene

$$\lambda A - J = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} & 0 & 0 & -\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & \lambda L(-x_1^*) & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \lambda C(0) \end{pmatrix}.$$

Aplicando la Proposición 2 se demuestra que si  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1} \neq 0$ , la matriz pencil  $\{A, -J\}$  tiene índice de Kronecker 1, y podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 3** *Los equilibrios singulares de la EDA cuasilineal correspondiente al circuito RLC son de la forma  $x^* = (x_1^*, 0, -x_1^*, 0)$ , con  $\psi(x_1^*, 0) = E$ . Además, si  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_4}$  y  $\frac{\partial \psi(x_1^*, E)}{\partial x_1}$  son ambos no nulos y de signo contrario, entonces  $x^*$  es equilibrio asintóticamente estable.*

**Aplicación de la técnica de reducción.** Mostraremos que a partir de la técnica de reducción la EDAC que modeliza al circuito resulta equivalente a una EDO de orden 2, lo que nos permite determinar si el equilibrio  $x^*$  es un nodo o un foco. En este caso la variedad analítica real  $M$  está definida por las ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 ; \psi(x_1, x_4 + E) = 0.$$

Si  $\psi(x_1, x_4 + E)$  es tal que  $\frac{\partial \psi(x_1, x_4 + E)}{\partial x_4} \neq 0$  en un entorno del punto de equilibrio, aplicando el Teorema de la Función Implícita se tiene que existe una función  $\varphi$  continuamente diferenciable, tal que  $x_4 + E = \varphi(x_1)$ . Luego, el sistema original se reduce a otro del tipo

$$\tilde{A}(x)\dot{x} = \tilde{f}(x), \quad (2)$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(x) = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2) \\ C(\varphi(x_1) - E)\varphi'(x_1) & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x_1) - E \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Si  $\varphi(x_1^*) = E$  y  $\varphi'(x_1^*) \neq 0$ ,  $x^* = (x_1^*, 0)$  es un equilibrio regular del sistema reducido, pues en un entorno de  $x^*$  la matriz  $\tilde{A}(x)$  resulta no singular. Luego, localmente alrededor de  $x^*$  las trayectorias del sistema no lineal

$$\dot{x} = \tilde{A}^{-1}(x)\tilde{f}(x)$$

se corresponden con las del sistema lineal

$$\dot{x} = J(x^*)x,$$

donde  $J(x)$  es la matriz Jacobiana de  $\tilde{A}^{-1}(x)\tilde{f}(x)$ , Teorema de Hartman-Grobman [4].

**Ejemplo:** Considerando  $\psi(x_1, x_4) = x_4 - (x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1)$ , el equilibrio singular es  $x^* = (0, 0, 0, 0)$ . Aplicando la Proposición 3,  $x^*$  es asintóticamente estable para la EDAC que modeliza el circuito RLC,

puesto que  $\frac{\partial\psi(0,0)}{\partial x_4} = 1$  y  $\frac{\partial\psi(0,0)}{\partial x_1} = -24$ .

Usando la técnica de reducción obtenemos el sistema de orden dos equivalente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L(-x_1 - x_2) & -L(-x_1 - x_2)^{-1} \\ C(x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1) \cdot (3x_1^2 - 18x_1 + 24) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 - 9x_1^2 + 24x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

cuya linealización alrededor del equilibrio  $x_0^* = (0, 0)$  es

$$\dot{x} = J(x_0^*)x,$$

donde

$$J(x_0^*) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{24C(0)} \\ -\frac{24}{L(0)} & -\frac{1}{24C(0)} \end{pmatrix}.$$

Mediante cálculos sencillos podemos concluir que si  $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) \geq 0$  el equilibrio es un nodo (Fig. 2), mientras que si  $L(0) - 4 \cdot 24^2 C(0) < 0$  el equilibrio es un foco (Fig. 3).

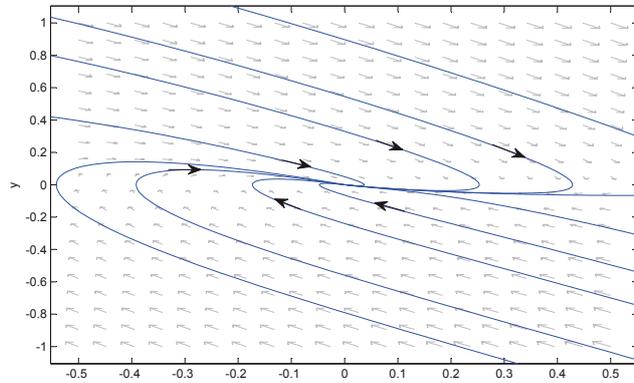


Figura 2

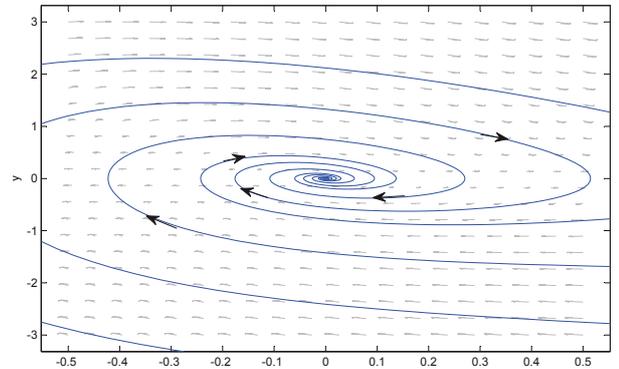


Figura 3

## REFERENCIAS

- [1] H. CENDRA, ETCHECHOURY, M., *Desingularization of implicit analytic differential equations*, J. Phys. A: Math. Gen.39 (2006), pp. 10975-11001.
- [2] R. RIAZA, *Stability Issues in Regular and Noncritical Singular DAEs*, Acta Applicandae Mathematicae 73 (2002), pp. 301-336.
- [3] R. RIAZA, *Differential-Algebraic Systems. Analytical Aspects and circuit applications*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [4] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer. 1991.