La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares

Analía Bergé[1,4], Mara Cedrón[2,5], Betina Duarte[2,6], Romina Herrera[3,7] , Cecilia Lamela[2,8].

[1] Universidad de Québec à Rimouski
[2] Universidad Pedagógica Nacional – UNIPE
[3] Universidad Nacional de La Plata
[4] analia_berge@uqar.ca
[5] mara.cedron@unipe.edu.ar
[6] betina.duarte@unipe.edu.ar
[7] roherrera.fcnym@unlp.edu.ar
[8] cecilia.lamela@unipe.edu.ar

Resumen
En esta comunicación analizamos textos escolares recortando el contenido de los mismos a la introducción de los números reales, según el planteo desarrollado en el proyecto de investigación PICTO-2017-0022 “De la resolución de problemas hacia la construcción de teoría en el aula. Puentes posibles en el campo de los Números Reales”, donde nos proponemos estudiar condiciones didácticas para abordar un proceso de conceptualización del campo de los números reales en el nivel secundario que promueva un pensamiento teórico. Enmarcados en la Teoría de Situaciones y en la TAD para una perspectiva institucional acerca de la enseñanza, nuestro objetivo es estudiar qué conceptualización de los reales se promueve desde el discurso que vive en los textos utilizados en la actualidad, cuál es el rol de las representaciones de los reales que se asumen necesarios, cuál es el abordaje que en ellos se promueve acerca de la densidad y las operaciones.

Palabras clave: textos escolares; números reales; escuela secundaria.

Introducción

El conjunto de los números reales es el dominio natural de las funciones que se estudian en la escuela secundaria, en el nivel terciario y en la universidad, y está presente en los diseños curriculares a partir de 3er año de la escuela secundaria. Algunos investigadores señalan cierta falta de claridad al definirlos en el nivel secundario (Licera, 2017, Bronner 1997). Otros, por ejemplo Castela (1997), afirman que se asume de manera implícita la identificación entre los números reales y los puntos de una recta graduada, una identificación que no es evidente para muchos alumnos. El hecho de que una recta graduada "racional" y una recta graduada "real" sean indistinguibles en una representación gráfica dificulta la representación de los reales en el aprendizaje (Durand-Guerrier, 2016). La realización de operaciones entre números reales apela a la idea de infinito actual, presente en el desarrollo decimal infinito de los números irracionales. Estas cuestiones brevemente mencionadas aquí (definición, representación, densidad del orden y operaciones) constituyen para este campo numérico un desafío para la enseñanza.

A diferencia de los naturales, enteros y racionales, los números irracionales constituyen un objeto netamente escolar en la medida que no representan medidas que aparezcan efectivamente en un contexto extra-matemático (por ejemplo, para medir el contorno de una mesa circular de 3 metros de diámetro se utilizará una aproximación de π a los fines prácticos). Es por eso que los alumnos reconocerán este conjunto de los irracionales y con ellos el de los reales a partir del trabajo matemático que puedan desarrollar sobre este campo numérico en la escuela, a propósito de sus representaciones, sus características y sus propiedades. Estas nociones forman parte de la matemática de la escuela secundaria y de la educación superior en el estudio de los procesos infinitos que constituyen el núcleo del cálculo y el análisis matemático. Incluso algunas de ellas forman también parte del currículum de la modalidad técnica de la educación secundaria.

Encuadre teórico y metodológico

Para realizar el presente trabajo tomamos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico- TAD- (Chevallard, 1999) su enfoque institucional que asume como punto de partida que los objetos matemáticos son el resultado de prácticas institucionales y considera las elecciones hechas por una institución al organizar la enseñanza de un tema y las consecuencias de estas elecciones para la enseñanza y el aprendizaje. Desde este enfoque también se releva el papel significativo que desempeñan los libros de textos en la institución "enseñanza de matemática en secundaria" y en particular en las decisiones de enseñanza de los docentes. Estos aspectos también fueron considerados por otros autores para el análisis de textos en otros países (Bronner 1997, González-Martín, Giraldo y Souto, 2013). Consideramos para nuestro análisis de libros de textos la esfera de la práctica que se despliega a través de ejemplos, de tareas y de técnicas propuestas a los estudiantes y la esfera de la teoría en tanto discurso que se construye y que describe, explica y justifica lo que se hace (el cual puede elaborarse con mayor o menor participación de los alumnos).

En la presente comunicación nos referiremos a dos textos escolares elegidos por su arraigo en el mercado editorial. Este análisis está en proceso y continuará con otros textos.

Hemos recorrido los textos estructurando nuestra lectura sobre la base de cuatro ejes de análisis: 1.- Definición y conceptualización; 2.- Representación; 3.- Orden y Densidad y, finalmente, 4.- Operatoria. La construcción de estos ejes se sostiene en parte sobre el propio diseño curricular y en parte sobre los aspectos que consideramos indispensables abordar para una conceptualización profunda del número real según los objetivos de nuestro propio proyecto de investigación (Bergé et al, 2018). Los desarrollamos a continuación.

1.- Definición y conceptualización: nos interesa comprender de qué modo se define en los textos a los números irracionales y a los reales. Indagamos si el texto proporciona alguna justificación acerca de la necesidad de la existencia de otros números además de los racionales. Es decir, nos preguntamos si el texto toma a su cargo hacer visible la razón de ser de los números reales dando cuenta de qué nuevos problemas permiten resolver estos números. En torno a la conceptualización de los irracionales consideramos como un asunto de la enseñanza la necesidad de problematizar la relación entre las representaciones de ciertos números irracionales en términos de operaciones y su posible representación decimal. En este sentido consideramos necesario asumir como cuestiones de la enseñanza preguntas tales como: ¿es posible distinguir el número de la operación?

2.- Representación: nos referimos a la cuestión de la representación de los reales en dos sentidos, por un lado la representación del objeto en sí mismo (que admite, para algunos números reales múltiples formas) y por el otro, la forma de encontrar su ubicación en una recta graduada si eso resulta viable. En relación a la representación en la recta graduada nos preguntamos:

-Si se apela a la relación pitagórica para representar en la recta las raíces cuadradas de ciertos – algunos, pocos, muchos – números naturales, y cuál es el uso de esta técnica.

En relación a la representación de los números irracionales nos preguntamos:

-Qué tipo de representaciones de los números se ponen en juego en la resolución de problemas y qué vínculos se proponen entre distintas representaciones.

-Qué números irracionales se presenta a los estudiantes y cómo se comunica su no racionalidad.

3.- Orden y Densidad: entendemos que la comprensión de la densidad tanto de los racionales como de los irracionales, supone una percepción del infinito –en tanto proceso o conjunto- que no es evidente para este nivel de enseñanza. La representación de los números en la recta y la posibilidad de ordenarlos puede constituir un pie de apoyo en esta empresa. Nos preguntamos en relación a estas cuestiones:

-Cuál es el tratamiento que se da a la noción de densidad en racionales y en irracionales.

-Qué vínculo proponen entre las técnicas de representación en la recta, el orden y la densidad.

4.- Operatoria: tradicionalmente la enseñanza se ha encargado de poner en primer plano el dominio por parte de los estudiantes del cálculo en todos los conjuntos numéricos. En particular en el conjunto de los irracionales existen prácticas arraigadas donde el dominio de una técnica se ubica por encima de la necesidad del cálculo. La imposibilidad de expresar a muchos de los irracionales en una expresión decimal en forma completa favorece este tipo de prácticas. Nos preguntamos:

- Qué papel se le otorga a la operatoria y qué aspectos de la representación del número se vinculan a esta actividad.

Resultados Preliminares

Presentamos a continuación un esbozo de nuestros primeros análisis sobre los materiales abordados. Se trata de un informe de avance pues la actividad está todavía en proceso.

1) *Texto 1* [1]*:*

En relación al eje **definición y conceptualización** el texto comunica como punto de partida en una única placa:

a) que los números irracionales son aquellos que no pueden escribirse como fracción, sin mencionar el desarrollo decimal de los números irracionales,
b) que los números racionales, son los números que se pueden escribir como fracción y que las fracciones tienen una expresión decimal finita o periódica,
c) que π , ϕ, $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$ son irracionales. Estos primeros ejemplos se apoyan aparentemente en conocimientos previos de los alumnos.
d) que los reales constituyen el conjunto que reúne a racionales e irracionales,
e) que las raíces con índice natural de números naturales que no dan resultados enteros son números irracionales (esta afirmación no tendrá validación en el capítulo).

Nos interesa destacar el tratamiento diferenciado para los irracionales. La definición encuadra al número irracional como aquel que no puede escribirse como fracción mientras que en ejemplos y tareas se apela a la escritura decimal donde se lo caracteriza como expresión decimal infinita sin período. Esto requiere un dominio por parte de los alumnos de una equivalencia que sabemos es débil en la escuela secundaria (y luego también) a saber: “un número se escribe como fracción si y solo sí tiene desarrollo finito o infinito con período”. Sabemos que en años anteriores la técnica de paso de un número decimal a fracción y la recíproca ha sido empleada sin pretensión de generalidad.

Con respecto a la necesidad de distinguir entre “el número” y la operación con la que se lo representa, el texto propone el uso de la calculadora; por ejemplo, se pide aproximar el valor de un determinado número tal como $\sqrt{7}$. Nos preguntamos en qué sentido el alumno puede controlar cuál es el número y cuál la aproximación. Discernir entre el resultado que

[1] Corresponde a la serie Entre números III, Matemática, de editorial Santillana. Material de distribución gratuita en escuelas de todo el país por el Ministerio de Educación en 2018.

arroja el visor y el resultado exacto supone conocer de antemano éste último. Sin embargo, este conocimiento no está disponible en un momento introductorio como éste. Nos preguntamos entonces cómo, frente a una expresión nueva es posible rechazar el resultado que aporta la calculadora y controlar la información que ella devuelve.

Sobre la cuestión de la **representación**, la notación de puntos suspensivos se utiliza para encontrar una regla de formación del número en expresiones decimales infinitas no periódicas. Estos números, -bien identificados- son una buena herramienta para desnaturalizar la idea que impera en estudiantes que egresan del secundario acerca de que los irracionales son unos pocos números raros (Cifuentes, Ferrero y Montoro (2012)).

Notamos que en algunos casos las regularidades numéricas no son únicas. Por ejemplo, la expresión decimal 0,123456… podría continuar en 0,123456123456123456… así como 0,123456789101112131415... o incluso 0,123456012345601234560…

Sobre la **representación en la recta**, el texto ofrece representar a través de Pitágoras una raíz cuadrada particular a partir de lo cual propone la tarea de determinar la posición de otras raíces. Esto permite que el estudiante acumule un buen número de irracionales a ubicar en la recta lo que también contribuye a considerar a este conjunto como algo más que un par de ejemplos de números “raros”. Sin embargo, no se problematiza la condición de irracionalidad de estas nuevas raíces ni la posibilidad de generalizar el método para así poder ubicar una raíz cuadrada arbitraria e irracional utilizando este método. Esta técnica de representación no queda aislada sino que será reutilizada para abordar el orden entre los reales.

Por último en relación con la representación de las raíces cuadradas en la recta el texto **comunica** que la ubicación de todos los números reales en la recta deja a la recta completa y que es por esto que los reales se consideran un *conjunto completo*. Queremos notar que, por un lado la técnica del uso de Pitágoras solo permite ubicar raíces cuadradas quedando fuera de esta técnica un conjunto infinito de irracionales. Sería ésta una buena oportunidad, apelando a otras raíces de señalar que esta técnica es limitada. Por otra parte pero también ligado a este hecho consideramos que la completitud de los reales está lejos de poder ser comprendida en función de esta representación y aun contando con otras.

En relación al **orden y la densidad**, el uso de Pitágoras para la representación de raíces cuadradas será puesto en el lugar de **herramienta** para decidir por el orden en la recta de otras raíces cuadradas y también de números que se obtiene como resultado de operar (sumar, dividir, multiplicar) con raíces cuadradas ya presentadas y ubicadas en la recta.

A través de actividades propuestas a los alumnos el texto da un espacio para que un docente-comandado por un proyecto de enseñanza- aproveche esta actividad – que consiste en ubicar irracionales entre racionales o irracionales – para considerar la densidad de cada uno de estos conjuntos, a saber: la densidad de los racionales en los racionales y la de irracionales en los irracionales. Se trata de una propuesta ligada a la de ordenar los reales. Entendemos que esto es un punto de partida y que el texto supondrá otra instancia para considerar la densidad.

En cuanto a la **operatoria** se proponen ejercicios para operar con radicales involucrando las cuatro operaciones básicas. La operatoria se desvincula de lo realizado hasta el momento. Predominan expresiones con raíces cuadradas.

La actividad de operatoria no es la principal del capítulo. Hemos mencionado otras en torno al reconocimiento y clasificación de números racionales e irracionales, la representación en la recta, el ordenamiento apelando a diferentes recursos y la búsqueda de racionales e irracionales acotados entre números preestablecidos. Además el texto propone actividades de aproximación, redondeo y truncamiento y otras destinadas a comprender el uso de conjuntos acotados, no acotados con primer elemento, con último elemento y sin ellos. Un par de problemas sobre áreas y perímetros de distintas figuras incorpora como datos de las medidas de los lados de las figuras a números irracionales (en casi todos los casos raíces cuadradas) con los cuales el alumno tendrá que operar para hallar área y perímetro de figuras conocidas.

2) *Texto 2*[2]

El capítulo destinado a los reales comienza con una recuperación de ideas sobre las proporciones y, de este modo, sobre los números racionales. Se presenta a los racionales

[2] Corresponde a la serie Huellas, Matemática, [4] ES de editorial Estrada. Material de distribución gratuita en escuelas de todo el país por el Ministerio de Educación en 2016.

como aquellos números que pueden escribirse como fracción, privilegiando la escritura fraccionaria a la descripción de su expresión decimal. El método de la mediatriz para la representación en la recta permite problematizar la noción de **densidad** entre **racionales** argumentando que la técnica podría repetirse infinitamente.

En relación con la **definición y conceptualización** de los reales, se presenta $\sqrt{2}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de medida uno. La calculadora se utiliza como recurso para convencer al estudiante que este número no es racional. Para ello propone tomar el desarrollo decimal que la calculadora ofrece (1,414213562 según el texto), borrarlo, ingresarlo directamente y elevarlo al cuadrado para comprobar que el resultado no es 2 y así rechazar el resultado decimal finito 1,414213562 como valor de $\sqrt{2}$.

Nos interesa señalar que la propuesta del texto podría tener muchas respuestas posibles según el tipo de celular o de calculadora disponibles en el aula. Esta variedad de respuestas no necesariamente coincidirá con la que el texto indica, lo que puede derivar en un momento de la clase con muchas preguntas y pocas certezas. De todos modos creemos que el docente puede utilizar esta variedad de respuestas de la tecnología para abonar a la pregunta por el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$.

Finalmente el texto enuncia que no es posible encontrar una expresión decimal con período para $\sqrt{2}$ porque el número $\sqrt{2}$ es irracional y desarrolla la demostración clásica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$. Esta demostración no será reutilizada.

A estas ideas agrega una nueva: a partir de un ejemplo específico – 1/7-el texto explica a través de la cuenta de dividir "a mano" que, cuando la expresión decimal de un número racional es infinita, la existencia finita de restos posibles deriva en la presencia de un período. A partir de este ejemplo el texto concluye que los números irracionales son aquellos con una expresión decimal infinita no periódica.

También propone "demostrar" que el número de oro es irracional. Para esto reutiliza la estructura por el absurdo de la demostración realizada para $\sqrt{2}$. Sin embargo se asume la irracionalidad de $\sqrt{5}$. Luego el texto sentencia que "se puede demostrar que las raíces cuadradas que no son enteras son irracionales".

Se presentan números con expresiones decimales que se generan a través de un patrón claro para los alumnos y queda como tarea decidir si se trata de racionales o de irracionales. Nos parece bien interesante desplegar la búsqueda de patrones para ambos conjuntos.

Tomando el texto desde su planteo inicial hasta aquí, notamos que los irracionales aparecen como medidas asociadas a propiedades geométricas de algunas figuras. Así $\sqrt{2}$ se asocia al triángulo isósceles rectángulo, el número de oro al pentágono regular y π se vincula a la circunferencia. La geometría es la base de apoyo para dar un sentido de ser de los irracionales. Se evidencia en el texto una búsqueda de este sentido.

Luego de sostener tareas alrededor de los números irracionales define a los reales como la unión de los racionales e irracionales.

El texto se ocupa de validar algunas operaciones entre racionales e irracionales reutilizando la estructura de la demostración de $\sqrt{2}$ y la representación fraccionaria de los racionales.

Sobre la **representación** de los irracionales se comunica que la única forma de representar a $\sqrt{2}$ con precisión es escribir justamente esa expresión y que toda escritura decimal finita será una aproximación. Algunos irracionales quedan atrapados exclusivamente con un nombre, como π , otros en una operación como las raíces cuadradas no enteras de naturales y en el caso del número de oro, tiene nombre, ϕ , y expresión asociada: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Aparecen fracciones, expresiones decimales finitas, expresiones decimales infinitas, algunas claramente periódicas (indicadas con el arco sobre el periodo), irracionales conocidos, algunas expresiones con radicales. Según la tarea propuesta será posible utilizar distintas formas de representación de los números. Por ejemplo, en la búsqueda de la medida del lado de una figura, el pedido de precisión demandará el uso de representaciones de los números como las ya discutidas (para $\sqrt{2}$) donde la operación queda indicada. En otras, como las tareas de ordenar, será viable considerar representaciones decimales controlando la aproximación.

En relación con la **representación en la recta** el texto muestra la técnica de ubicación de $\sqrt{2}$ apelando a la relación pitagórica e indicando variantes para ubicar otras raíces lo que incluye el uso de la mediatriz para ubicar el número de oro. No propone reutilizar esta técnica, más allá de la ubicación de raíces cuadradas.

El **orden,** se apoya en la representación mencionada para comparar, por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ o también $\sqrt{5}.\sqrt{2}$ y $\sqrt{7}$. Cuando esta estrategia presenta límites, se propone una aproximación a los números a través de su expresión decimal, o un uso de expresiones equivalentes.

En cuanto a la **densidad**, se comunica para los racionales primero y para los irracionales luego, que cada uno de ellos es un conjunto denso. Las tareas que se proponen a los estudiantes harán jugar la densidad en los dos conjuntos en simultáneo. Es notable que habiendo realizado un conjunto de explicaciones para dar soporte a la densidad de los racionales el texto no repita este mismo procedimiento para convencer al estudiante de la densidad de los irracionales.

Hay un juego constante entre lo aritmético de los conjuntos numéricos y lo geométrico de la recta. Por ejemplo, al proponer la media aritmética como forma de encontrar un número entre otros dos y la mediatriz para ubicarlo en la recta, sin reparar en la naturaleza de los números.

Finalmente, con referencia a la **Operatoria** el texto prescinde de actividades repetitivas destinadas al dominio de las operaciones entre radicales. Toma contextos geométricos que involucran perímetros, áreas o medida de lados para realizar operaciones sencillas.

Conclusiones

Los textos analizados resultan representativos, a nuestro juicio, de los intentos por lograr un proyecto de enseñanza de los reales plausible en la escuela secundaria y comprometida con la prescripción curricular.

A modo de síntesis nos interesa señalar:

-La presencia en ambos textos de un conjunto de tareas sobre los irracionales que permite a los alumnos concebirlos como un conjunto infinito.

- La complejidad de atrapar la expresión decimal de los números irracionales se pone de manifiesto en el uso de puntos suspensivos. En un momento inicial de estudio, la formación de la expresión decimal es condición necesaria para determinar la racionalidad o irracionalidad del número. Consideramos conveniente que el texto tome a su cargo la explicación de la regla de formación del número evitando dejar a cargo de los estudiantes su comprensión. El uso de un texto explicativo podría contribuir a dar claridad. En la misma dirección consideramos interesante despegar la búsqueda de patrones de los números irracionales y plantearla tanto para racionales como para irracionales.

- La técnica de representación de raíces cuadradas contribuye a la tarea de ordenar números a través de su representación en la recta y ambos textos dan cuenta de su potencial uso. Sin embargo en ambos casos, la reutilización de esta técnica para la problematización de la densidad es menos logrado dejando en manos del docente este proyecto sobre la base de algunos pocos problemas. Desde nuestro punto de vista la densidad es una idea necesaria para concebir la infinitud de los irracionales aun en conjuntos acotados.

Referencias bibliográficas

Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R., Lamela, C. (2018). *De la Resolución de problemas a la construcción de teoría en el aula: puentes posibles en el campo de los reales*. Comunicación presentada en XLI Reunión de Educación Matemática. REM-UMA, 20-22 septiembre. La Plata. Argentina.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et seconde aux objets «nombre réel» et «racine carrée». *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (3), 55-80.

Castela C. (1997) *La droite des reéels en seconde: Point d'appui disponible ou enjeux clandestin?* IREM de Rouen, St. Étienne du Rouvray. Francia.

Cifuentes, M., Ferrero M. y Montoro V. (2012). Una experiencia de taller sobre números reales con ingresantes a la universidad. En Veiga, D. (Ed.). Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática, SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática, pp.54-61. Buenos Aires. Argentina.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en anthropologie du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 221-265.

Durand-Guerrier, V. (2016) La triade discret, dense, continu dans la construction des nombres. *Actes de la CORFEM,* Nîmes, 13-14 juin. Recuperado de http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2016_04.pdf

González-Martín, A., Giraldo, V. y Souto A. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks*, Research in Mathematics Education,* 15(3), 230-248.

Licera, R. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado* (Tesis de Doctorado no publicada). Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso. Chile.