



Luciano Combi

# Equivalencia entre Relatividad General y Gravedad de Torsión

**Tesis de Licenciatura en Física**

Departamento de Física, Facultad de Cs. Exactas  
Universidad Nacional de La Plata (UNLP)

**Director**

Gustavo E. Romero

Diciembre 2016



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Gravedad de Torsión</b>	<b>5</b>
2.1. Tétradas . . . . .	5
2.2. Estructura afín . . . . .	7
2.3. Curvatura y torsión . . . . .	9
2.4. Geometría afín de Einstein-Cartan . . . . .	11
2.5. Geometría de Weitzenböck . . . . .	12
2.6. Brevísimos compendio de Relatividad General . . . . .	14
2.7. Gravedad de Torsión . . . . .	14
2.8. Sistemas de referencia . . . . .	17
2.8.1. Velocidad y transformaciones de Lorentz . . . . .	18
2.8.2. Sobre la inercia y el significado físico de la torsión . . . . .	20
2.8.3. Torsión en Minkowski $M^4$ . . . . .	22
2.9. Energía-impulso . . . . .	24
2.9.1. Materia . . . . .	24
2.9.2. Espacio-tiempo . . . . .	26
2.9.3. Energía-impulso gravitacional en Gravedad de Torsión . . . . .	27
<b>3. Axiomática</b>	<b>29</b>
3.1. El método axiomático . . . . .	29
3.2. Axiomática para la Gravedad Teleparalela . . . . .	30
3.3. Comentarios . . . . .	33
<b>4. Análisis</b>	<b>35</b>
4.1. Referentes . . . . .	36
4.2. Representación . . . . .	36
4.3. Teoremas representativos . . . . .	41
4.3.1. Teorías teleparalelas alternativas . . . . .	48
4.4. Conclusiones . . . . .	48

<b>5. Aplicaciones</b>	<b>51</b>
5.1. Características cinemáticas asociadas a la geometría teleparalela de Weitzenböck y energía teleparalela . . . . .	51
5.1.1. Contorsión y congruencias . . . . .	51
5.1.2. Propiedades generales de la energía teleparalela . . . . .	54
5.2. Análisis energético de la geometría de Reissner-Nordström . . . . .	60
<b>6. Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>A. Axiomatización de la Relatividad General</b>	<b>71</b>
<b>B. Formulación Lagrangiana. Pseudotensores y gravedad modificada.</b>	<b>73</b>
B.1. Acción en Relatividad General . . . . .	73
B.2. Acción de primer orden . . . . .	74
B.3. Acción teleparalela . . . . .	74
B.4. Teorías $f(\mathbb{T})$ y $f(R)$ . . . . .	75
B.5. Conexión de Lorentz . . . . .	76

# Agradecimientos

A Gustavo, por su predisposición, su honestidad, y su guía intelectual. A Fede, por las discusiones que ayudaron a dar forma a esta Tesis y principalmente por su calidad humana. A Edu, por acompañarme en los momentos importantes. A Lucas, Santi, y Vale, por la amistad y el cariño fundamental de estos seis años. A todos mis amigos, los nuevos y los viejos. A toda mi familia, por el apoyo y el amor constante. A mi hermanita. A Romeo, a Pili y a Diana.

A Ana, por todo.



# Resumen

La teoría estándar que permite representar la interacción gravitatoria es la Relatividad General, formulada por Albert Einstein en 1915. Trece años después de su publicación, el propio Einstein intenta construir una teoría geométrica unificada del electromagnetismo y la gravitación, reemplazando a la métrica por un objeto dinámico que posee más grados de libertad, la tétrada. Pese a no encontrar ecuaciones de campo consistentes, en estos trabajos aparece por primera vez la posibilidad de formular una teoría teleparalela equivalente a la Relatividad General, denominada Gravedad de Torsión, en donde la torsión reemplaza a la curvatura.

En los últimos años, se han desarrollado numerosas aplicaciones de esta teoría, principalmente en el cálculo de cargas conservadas para el campo gravitatorio. Motivados por estas diferencias conceptuales entre ambos enfoques, nos proponemos en esta tesis evaluar si las teorías son completamente equivalentes. Para ello, desarrollamos una formulación axiomática de ambas teorías que permite un análisis riguroso de sus postulados. Luego, exploramos algunas características generales de la energía teleparalela y realizamos una aplicación de este concepto a la geometría de un agujero negro cargado.



# Prefacio

El presente trabajo es el resultado de las investigaciones realizadas para obtener el título de *Licenciado en Física* en la Universidad Nacional de La Plata. Las mismas fueron desarrolladas de Mayo a Diciembre del 2016 en el Instituto Argentino de Radioastronomía y en el domicilio de la calle 64. Dos trabajos basados en esta tesis han sido aceptados en revistas internacionales con referato:

- **Is Teleparallel Gravity really equivalent to General Relativity?**, aceptado en *Annalen der Physik* (2017).
- **Gravitational energy and radiation of a charged black hole**, aceptado en *Classical and Quantum Gravity* (2017).



# Nomenclatura

## Símbolos

$\mathcal{G}$	Geometría afín.
${}^0\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$	Conexión de Levi-Civita (Símbolo de Christoffel)
${}^*\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$	Conexión de Weitzenböck.
${}^*\nabla$	Derivada covariante con la conexión de Weitzenböck
${}^0\nabla$	Derivada covariante con la conexión de Levi-Civita
$\hat{=}$	Representación
$:=$	Definición

## Convenciones

Utilizamos la convención de Einstein para la sumatoria, e.g.  $\sum_{\mu} a_{\mu} b^{\mu} \equiv a_{\mu} b^{\mu}$

Diferenciamos dos marcos coordenados con un tilde en los índices, e.g.  $\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}}\right) \partial_{\nu'}$ .  
 $a, b, c, d\dots$ (latinos) con  $a = (0), \dots, (4)$  son índices SO(3,1) o de Lorentz.

$\mu, \nu, \rho, \sigma\dots$  (griegos) con  $\mu = 1, \dots, 4$  son índices espacio-temporales.

$\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  es la métrica de Minkowski.

Los corchetes en subíndices indican antisimetrización,  $A_{[a,b]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$ .

Los paréntesis en subíndices indican simetrización,  $A_{(a,b)} = \frac{1}{2}(A_{ab} + A_{ba})$ .

## Acrónimos y abreviaciones

RG	Relatividad General.
GT	Gravedad de Torsión.
ILL	Invariante local de Lorentz.
SR	Sistema de Referencia.
$\mathcal{ET}$	Espacio-tiempo.



# Capítulo 1

## Introducción

*“And now, in our time, there has been unloosed a cataclysm which has swept away space, time, and matter hitherto regarded as the firmest pillars of natural science, but only to make place for a view of things of wider scope, and entailing a deeper vision. This revolution was prompted essentially by the thoughts of one man, Albert Einstein.”*

– Hermann Weyl, *Space, time, and matter*.

La mayoría de las teorías físicas presuponen la existencia del espacio-tiempo. Este constituye, en general, el escenario en donde se formula la dinámica de una teoría. La representación matemática del espacio-tiempo requiere una geometría. Por ejemplo, el electromagnetismo de Maxwell y la teoría cuántica de campos están formulados sobre el espacio de Minkowski, mientras que la mecánica clásica y la mecánica cuántica no relativista adoptan una geometría galileana. La elección de una geometría es fundamental ya que el espacio-tiempo determina la estructura causal y la conservación de propiedades físicas como la energía y el momento.

A diferencia de otras interacciones fundamentales, la gravitación posee una íntima relación con el espacio-tiempo. El carácter universal de esta interacción y las dificultades para generalizar la gravitación newtoniana al espacio de Minkowski motivaron a Albert Einstein a construir la primer teoría *dinámica* del espacio-tiempo, la Relatividad General (RG), una teoría esencialmente geométrica. En su formulación original, utiliza un tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  con el cual se construye la conexión de Levi-Civita  ${}^0\Gamma_{\nu\rho}^{\mu}$ , y con ello las ecuaciones de campo en términos de la curvatura de Riemann. La fuente de estas ecuaciones no lineales de segundo orden para la métrica es la energía-impulso de la materia. En palabras de [Misner et al., 1973]:

“Space acts on matter, telling it how to move. In turn, matter reacts back on space, telling it how to curve”

Los primeros intentos de modificar y extender la RG llegaron casi de inmediato en busca de una teoría geométrica unificada de la gravitación y el campo electromagnético. Las primeras modificaciones importantes fueron la teoría de gauge de Weyl (1918), la teoría de cinco dimensiones de Kaluza (1919) y la teoría afín de Eddington

(1920) [Goenner, 2004] . Algunos años más tarde, en 1928, el propio Einstein buscó formular una teoría de campo unificada en base al concepto de teleparalelismo, también llamado "Fernparallelismus" (paralelismo absoluto en alemán) [Sauer, 2006]. Su propuesta se basa en la introducción de un nuevo elemento geométrico denominado *tétrada* que posee 16 componentes independientes. Einstein pretende representar en la *tétrada* los 10 grados de libertad de la métrica asociados al campo gravitatorio y los 6 grados de libertad asociados al campo electromagnético. Estos trabajos provocaron una intensa comunicación entre el físico alemán y el matemático francés Elie Cartan [Debever, 2015], quien había desarrollado el concepto de paralelismo seis años antes<sup>1</sup>. Una de las contribuciones más importantes de Cartan fue explicitar que la métrica y la conexión afín son dos conceptos lógicamente independientes. Como hace notar a Einstein, la elección en RG de la conexión de Levi-Civita es una de infinitas posibles. En particular, en su nueva teoría teleparalela, la conexión que utiliza Einstein no posee curvatura pero sí posee torsión, otra propiedad geométrica. Al no encontrar ecuaciones de campo consistentes y únicas, Einstein abandona su intento de unificación en 1931. Sin embargo, en sus trabajos se introduce por primera vez la idea de que la gravitación puede ser formulada de manera equivalente a partir de dos elementos geométricos alternativos a la métrica y la curvatura: la *tétrada* y la torsión.

Desde estas primeras épocas, numerosas teorías alternativas a la RG para explicar la interacción gravitatoria han sido desarrolladas [Lobo, 2015]. Algunas de ellas han sido formuladas para dar cuenta de ciertos fenómenos observados asociados a la "materia oscura", como la curva de rotación de galaxias (e.g. teorías STVG) y la expansión acelerada del universo (e.g. teorías  $f(T)$ ). Otras pretenden solucionar supuestos problemas conceptuales de la RG (e.g. teoría no-locales) o extender su régimen predictivo (e.g. teorías  $f(R)$ ). Entre estas teorías alternativas encontramos también las formulaciones de gauge, iniciadas por Weyl, y motivadas principalmente por el éxito de las teorías de Yang-Mills en la física de partículas. Los primeros trabajos importantes en este campo se encuentran en los años 1970 con la teoría de gauge del grupo de traslaciones por Cho [Cho, 1976] y el conjunto de teorías llamadas New General Relativity, desarrolladas por Hayashi [Hayashi and Shirafuji, 1979] en 1979, en las cuales utiliza un marco geométrico similar al de Einstein en su *Fernparallelismus*. Posteriormente, Helh mostró que todas estas teorías son casos particulares de una rama mayor de teorías llamadas métrico-afines [Gronwald and Hehl, 1995].

Es posible en este contexto obtener una teoría con ecuaciones de campo equivalentes a la Relatividad General pero en donde la torsión reemplaza a la curvatura para describir la gravitación. Esta teoría, que denominamos *Gravedad de Torsión* (GT), también conocida como el Equivalente Teleparalelo a la RG, ha cobrado un renovado interés en las últimas dos décadas (ver [Maluf, 2015]). En estos trabajos, desarrollados principalmente en Brasil, se señalan importantes diferencias conceptuales entre la RG y la GT, pero no se ha desarrollado un análisis riguroso de comparación entre

<sup>1</sup>"In particular, I learned from Mr. Weitzenböck and Mr. Cartan that the treatment of continua of the species which is of import here, is not really new.[...] In any case, what is most important in the paper, and new in any case, is the discovery of the simplest field laws that can be imposed on a Riemannian manifold with Fernparallelismus." A. Einstein [Einstein, 1930]

ambas teorías. Motivado por esto, *el objetivo principal de esta tesis es establecer si existe una equivalencia completa entre ambas teorías*. Nuestra metodología consistirá en construir una formulación axiomática rigurosa para identificar los conceptos fundamentales de la GT y contrastarlos con la RG. Con estos resultados, realizaremos algunas aplicaciones de este formalismo, como el cálculo de energías gravitatorias, y explicitaremos el rol físico de la torsión.

La tesis posee la siguiente estructura: en el *Capítulo 2* introducimos la Gravedad de Torsión de forma heurística, presentando primero las herramientas formales de geometría diferencial necesarias para entender los conceptos de afinidad y espacio tangente de una variedad. Luego, realizamos una caracterización de los sistemas de referencia a partir de las tétradas y el rol de la torsión. Mostramos como se construye la GT a partir de estos conceptos, presentando las ecuaciones fundamentales de la teoría y algunos comentarios generales. Los siguientes capítulos constituyen los resultados originales de esta tesis. En el *Capítulo 3* procedemos a axiomatizar la teoría mediante el enfoque de axiomatización dual. En el *Capítulo 4* discutimos las implicancias formales y físicas de la axiomática realizada, mostrando primero su relación con RG a partir de los teoremas fundamentales de la teoría. En el *Capítulo 5* exploramos aplicaciones de lo presentado en los capítulos anteriores, comenzando con la caracterización cinemática de la geometría de Weitzenböck y el rol de estas cantidades en la GT. Luego, mostramos algunos resultados para la energía gravitatoria en la geometría de un agujero negro de Reissner-Nordström. En el *Capítulo 6* resumimos las conclusiones principales y las cuestiones abiertas surgidas de esta investigación. Por último, en el Apéndice A exponemos la axiomatización para la Relatividad General y en el Apéndice B algunos aspectos de la formulación lagrangiana de la teoría.



# Capítulo 2

## Gravedad de Torsión

En Gravedad de Torsión deseamos extender la geometría de la Relatividad General añadiendo a la teoría un objeto adicional: la tetrada. Con ella es posible trabajar en la geometría de Weitzenböck y construir la torsión que describe la gravitación. A continuación introducimos estas herramientas formales para describir la dinámica de las teorías espaciotemporales que utilizan torsión. Luego, presentamos una versión heurística de la GT que utilizaremos para la descripción rigurosa y axiomática del Capítulo 3.

### 2.1. Tétradas

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad  $C^\infty$  diferenciable 4-dimensional Hausdorff pseudo-riemanniana. En cada punto  $p \in \mathcal{M}$  es posible definir un espacio vectorial de la misma dimensión que la variedad denominado espacio tangente  $T_p\mathcal{M}$ . Dado un sistema de coordenadas  $\{x_\mu\}_p$  en un conjunto abierto  $U_p \subset \mathcal{M}$ , podemos formar una base de vectores de  $T_p\mathcal{M}$  llamada base coordenada  $\{\partial_\mu(p)\}$ . A partir de esta base podemos construir bases más generales cuyos elementos estarán dados por

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \partial_\mu, \quad (2.1)$$

donde  $e_a^\mu$  es la matriz de cambio entre la base nueva y la coordenada.

De manera análoga, en cada  $p \in \mathcal{M}$  podemos definir 1-formas o vectores duales pertenecientes al espacio vectorial cotangente  $T_p^*\mathcal{M}$  con base coordenada  $\{dx^\mu(p)\}$ , donde  $dx^\nu(\partial_\mu) = \delta_\mu^\nu$ . Una base general del espacio dual será entonces un conjunto de covectores dados por:

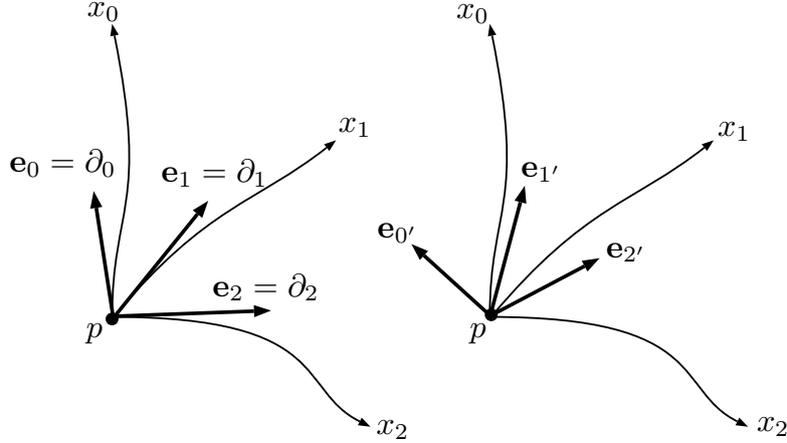
$$\mathbf{e}^a = e_\mu^a dx^\mu, \quad (2.2)$$

donde:

$$e_a^\mu e_\nu^\mu = \delta_\nu^a. \quad (2.3)$$

La inclusión de un tensor métrico en nuestra geometría nos permite introducir una noción de ortogonalidad. Una base ortonormal en un punto  $p \in \mathcal{M}$  satisface:

$$\eta_{ab} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b), \quad (2.4)$$



**Figura 2.1:** A la izquierda, representación de una base de vectores coordenados, tangentes a las coordenadas. A la derecha, representación de una base arbitraria, no necesariamente tangente a un sistema de coordenadas.

donde  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$  son las componentes de la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas. En términos de la base coordenada, por linealidad del tensor métrico en (2.4) y por (2.1), se obtiene:

$$\eta_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

siendo  $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$  las componentes del tensor métrico definido en la variedad. Notar que esta última ecuación relaciona índices de la variedad (de coordenadas) con índices del espacio tangente. Un conjunto de campos vectoriales  $\{\mathbf{e}_a(p)\}$  que es base ortonormal en cada  $p \in \mathcal{M}$  se denomina tétroda o base *vierbein*. Seguimos aquí la convención de Weitzenböck indicando con índices griegos ( $\mu, \nu, \rho, \dots$ ) los elementos de las bases coordenadas y con índices latinos ( $a, b, c, \dots$ ) los de una base general.

Una herramienta útil para estudiar vectores en el espacio tangente es el corchete de Lie. Para las tétradas, este satisface:

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = \Omega_{ab}^c \mathbf{e}_c, \quad (2.6)$$

donde  $\Omega_{ab}^c = e_a^\mu e_b^\nu \partial_\nu e_\mu^c$  son las denominadas constantes de estructura. Si  $\Omega_{ab}^c = 0$ , se dice que la tétroda es holónoma y en caso contrario que es anholónoma. El teorema de Frobenius [Fecko, 2011] asegura que si la tétroda  $\{\mathbf{e}_a(p)\}$  es holónoma, existe un sistema de coordenadas  $\{x_\nu\}$  tal que  $e_a^\nu = \delta_a^\nu$ , i.e la tétroda corresponde a la base coordenada  $\{\partial_\nu\} \equiv \{\mathbf{e}_a(p)\}$ . Si la tétroda es anholónoma, entonces no existe una transformación de coordenadas que transforme las componentes del *vierbein* en componentes coordenadas, e.g. la base polar unitaria del plano  $\{\hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_r\}$  no es una base coordenada. Las tétradas son invariantes frente a difeomorfismos:

$$\mathbf{e}_a = e_a^\mu \mathbf{e}_\mu = e_a^\mu \left( \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial x_\mu} \right) \mathbf{e}_{\nu'} = e_a^{\nu'} \mathbf{e}_{\nu'}. \quad (2.7)$$

Sin embargo, podemos efectuar cambios de bases en cada punto de la variedad; en el espacio tangente, dos bases están relacionadas entre sí por una transformación

lineal no singular  $\Lambda_b^a$ . Como trabajamos con campos vectoriales, podemos considerar transformaciones de base que sean diferentes en cada punto de la variedad; las denominamos transformaciones locales  $\Lambda_{b'}^a(p)$  con  $p \in \mathcal{M}$ :

$$\mathbf{e}_{b'} = \Lambda_{b'}^a(p)\mathbf{e}_a. \quad (2.8)$$

Una transformación local que conserve la ortonormalidad de las bases debe ser una transformación lineal perteneciente al grupo de Lorentz  $SO(1,3)$ . De esta manera, dado  $e_\mu^a$ , los índices latinos  $a$  se transforman con matrices de Lorentz  $\Lambda_{b'}^a$  mientras que los índices griegos se transforman con difeomorfismos  $\partial x^\mu / \partial x^{\nu'}$ .

Notar que una transformación local puede transformar tétradas holónomas en tétradas no holónomas. En efecto, las constantes de estructura en la ecuación (2.6), que determina si la base es holónoma, se transforman ante una transformación local  $\Lambda_{b'}^a(p)$  de manera no covariante [Aldrovandi and Pereira, 2013]. Podemos ver esto de otra manera: si  $\{\mathbf{e}_a\}$  es holónoma, entonces existen funciones llamadas coordenadas del espacio tangente  $\{x^a(x^\mu)\}$  de manera tal que  $\mathbf{e}_a(x^b) = \delta_a^b$ , con lo cual:

$$e_\mu^a = \partial_\mu x^a. \quad (2.9)$$

Al realizar una transformación local de Lorentz sobre estas funciones coordenadas  $x^{b'} = \Lambda_{b'}^a(x)x^a$ , se obtiene:

$$e_\mu^c = \partial_\mu x^c + \omega_{b\mu}^c x^b, \quad (2.10)$$

donde  $\omega_{b\mu}^c := \Lambda_a^c(x)\partial_\mu \Lambda_b^a(x)$  se denomina conexión de Lorentz. Si la transformación es global ( $\Lambda_{b'}^a$  para todo  $p \in M$ ) entonces la holonomía siempre se conserva.

Podemos expresar las componentes  $V^a$  de un vector  $\mathbf{V} = V^a \mathbf{e}_a \in T_p M$  en términos de la base coordenada como:

$$V^a = e_\mu^a V^\mu, \quad (2.11)$$

y componentes contravariante en covariantes de la tetrada como:

$$V^a = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b V_b. \quad (2.12)$$

## 2.2. Estructura afín

Las propiedades físicas suelen ser representadas por tensores. Para formular leyes que describan cambios en estas cantidades debemos comparar tensores en diferentes puntos de la variedad  $\mathcal{M}$ . Sin embargo, dados dos vectores  $\mathbf{V} \in T_p \mathcal{M}$  y  $\mathbf{U} \in T_q \mathcal{M}$ , no podemos distinguir, en principio, si estos son iguales debido a que  $T_p \mathcal{M}$  y  $T_q \mathcal{M}$  son espacios diferentes. Necesitamos entonces introducir un concepto de transporte sobre la variedad que conecte los diferentes espacios tangentes en cada punto. Esta noción de cambio es equivalente a definir una derivada tensorial. Introducimos para ello un operador lineal  $\nabla_{\mathbf{W}} : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l)$  denominado *derivada covariante* en la dirección de  $\mathbf{W}$  definido por las siguientes propiedades [Fecko, 2011] :

1 Es lineal :

$$\nabla_{\mathbf{W}}(A + \lambda B) = \nabla_{\mathbf{W}} A + \lambda \nabla_{\mathbf{W}} B$$

con  $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**2** Cumple la regla de Leibniz:

$$\nabla_W(A \otimes B) = (\nabla_W A) \otimes B + A \otimes (\nabla_W B)$$

**3** Para  $\Phi \in \mathcal{T}(0,0) \equiv \mathcal{F}(\mathcal{M})$ , definido sobre el conjunto de funciones sobre la variedad, tenemos:

$$\nabla_W \Phi = \mathbf{W}(\Phi)$$

**4** Conmuta con la contracción:

$$\nabla_W \circ C = C \circ \nabla_W$$

donde  $C$  es algún operador de contracción.

**5** Es  $\mathcal{F}$ -lineal con respecto al vector  $\mathbf{V}$ <sup>1</sup>

$$\nabla_{W+fV} = \nabla_W + f\nabla_V$$

Este operador queda totalmente determinado por su acción sobre una base *vierbien*: dado  $\{\mathbf{e}_a(p)\}$ , la derivada covariante sobre un miembro de la base es un vector que puede ser escrito a su vez como combinación lineal de las tétradas:

$$\nabla_a \mathbf{e}_b = \omega_{ab}^c \mathbf{e}_c, \quad (2.13)$$

donde  $\nabla_a := \nabla_{\mathbf{e}_a}$ , es decir, es la derivada covariante en la dirección de la tétrada  $\mathbf{e}_a$ . Los coeficientes  $\omega_{ab}^c$  son denominados conexión lineal afín y definen completamente al operador derivada. En efecto, expandiendo tensores de rango arbitrario en las tétradas y sus duales, utilizando  $\nabla_a \mathbf{e}^b = -\omega_{ac}^b \mathbf{e}^c$  y  $\nabla_W \mathbf{e}_a = (\omega_{ab}^c W^b) \mathbf{e}_c$ , es posible ver que la derivada covariante de un tensor arbitrario en la dirección  $\mathbf{W}$  queda especificada de manera única por la conexión afín. Si elegimos un marco coordinado (holónomo), la conexión afín se anota de la manera usual como  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ :

$$\nabla_\mu \partial_\rho = \Gamma_{\mu\rho}^\nu \partial_\nu. \quad (2.14)$$

Por ejemplo, dado  $\mathbf{V} = V^\mu \partial_\mu$ , la derivada covariante en la dirección de  $\mathbf{W}$  está dada por:

$$\nabla_W \mathbf{V} = (W^\mu \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu W^\sigma V^\rho) \partial_\nu = (W^\mu \nabla_\mu V^\nu) \partial_\nu \quad (2.15)$$

donde  $\nabla_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho$ . Esta última expresión conforma las componentes de un tensor  $(1,1)$  y suele ser utilizada en la literatura para definir la derivada covariante.

Las conexiones  $\omega_{ab}^c$  y  $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$  pertenecen a la *misma* derivada covariante pero expresadas en distintas bases. La relación entre ellas se puede obtener de las ecuaciones (2.13) y (2.14):

$$\partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho - e_b^\nu e_\mu^c \omega_{ca}^b = 0, \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>Notar que la propiedad 5 es la única que diferencia al operador  $\nabla_W$  de la derivada de Lie  $\mathcal{L}_W$ , otra noción de derivada tensorial. Esta propiedad es importante para que el operador no dependa de otros objetos geométricos afuera de la curva.

identidad conocida como *primer postulado de vierbein*. Es importante notar que la conexión, en general, no es un tensor de rango  $(1, 2)^2$ . El objeto transformado  $\omega_{\mu c}^a = e_{\mu}^b \omega_{bc}^a$  suele llamarse conexión de spin. Con ella es posible formar una nueva derivada covariante de spin que tiene propiedades adecuadas de transformación en el espacio tangente [Ortin, 2015].

En lo que sigue, adoptemos la siguiente definición:

Una variedad diferencial dotada de una conexión y una métrica se denomina *geometría afín*,  $\mathcal{G} = \langle \mathcal{M}, \mathbf{g}, \Gamma \rangle$ .

En una geometría afín podemos definir el **transporte paralelo** de un vector  $V$  a lo largo de una curva  $\gamma(t) \subset M$  con  $t \in [0, a]$ , de la siguiente manera: dado un campo vectorial  $\omega(\gamma(t)) = \omega(t)$ , donde  $\omega(0) = V_p$  y  $\nabla_{\mu} \omega^{\nu}(t) = 0$  para todo  $t \in [0, a]$  (covariantemente constante sobre la curva), entonces  $\omega(a) = V_q$  es el vector transportado paralelamente de  $p = \gamma(0)$  a  $q = \gamma(a)$ . El vector transportado depende en general de la curva  $\gamma(t)$  elegida. Dada una curva parametrizada como  $x^{\mu}(t)$ , con vector tangente  $V^{\mu} = dx^{\mu}/dt$ , se dice que esta es *autoparalela*<sup>3</sup> si se cumple:

$$V^{\nu} \nabla_{\nu} V^{\mu} = \frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} + \frac{dx^{\rho}}{dt} \frac{dx^{\nu}}{dt} \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} = 0. \quad (2.17)$$

Estudiamos en la siguiente sección dos cantidades importantes que dependen de la geometría adoptada, la curvatura y la torsión.

### 2.3. Curvatura y torsión

Cuando el transporte paralelo de un vector depende de la curva y no solo de los puntos iniciales y finales, la variedad presenta **curvatura**; en un loop infinitesimal  $\epsilon$  definido por  $A^{\lambda}$  y  $B^{\nu}$ , la diferencia entre el vector original y el transportado es (ver Figura 2.2):

$$\delta V^{\mu} = A^{\lambda} B^{\nu} V^{\rho} R_{\lambda\nu\rho}^{\mu}, \quad (2.18)$$

donde  $R_{\lambda\nu\rho}^{\mu}$  es el tensor de Riemann definido en una base coordenada como:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}(\Gamma) := 2\partial_{[\mu} \Gamma_{\nu]\rho}^{\sigma} + 2\Gamma_{[\mu|\lambda}^{\sigma} \Gamma_{\nu]\rho}^{\lambda}. \quad (2.19)$$

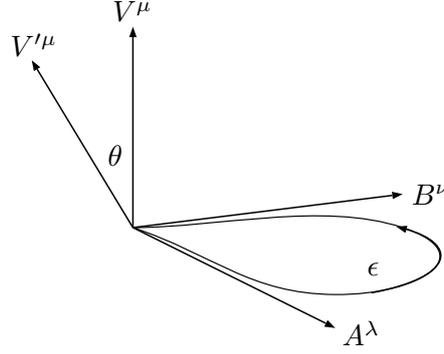
De manera más general, es posible definir un mapeo  $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : T_p \rightarrow T_p$  como:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}, \quad (2.20)$$

donde  $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{\lambda}^{\mu} = R_{\lambda\nu\rho}^{\mu} X^{\nu} Y^{\rho}$ . La expresión (2.20) es válida en cualquier base del espacio tangente que utilicemos.

<sup>2</sup>Sin embargo, al fijar la componente contravariante  $b$  de la conexión  $\omega_{ab}^c$  podemos formar un tensor  $(1, 1)$ ,

<sup>3</sup>Nos reservamos el término de geodésica para la geometría de Riemann.

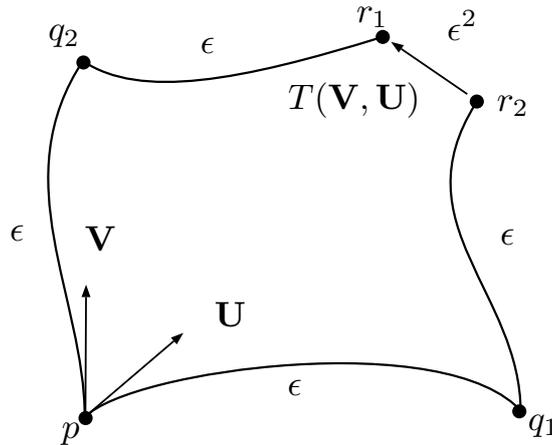


**Figura 2.2:** Representación de curvatura sobre un loop infinitesimal definido por dos vectores.

Tal como el tensor de curvatura es una medida de la no conmutatividad de *vectores* al ser transportados paralelamente (deficit angular), existe un tensor llamado **tor-sión** que representa una medida de la no conmutatividad de *puntos* en la variedad (deficit de distancia).

En efecto, sean dos vectores,  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{U}$ , definidos en un punto  $p$  los cuales a su vez definen geodésicas  $\gamma_U(t)$  y  $\gamma_V(t)$  (ver Figura 2.3). Transportando paralelamente a  $\mathbf{V}$  por  $\gamma_U(t)$  hasta el punto  $q_1 = \gamma_U(\epsilon)$  obtenemos el vector  $\mathbf{V}_{\parallel}$  que a su vez define una geodésica  $\gamma_{V_{\parallel}}(t)$  y con ella el punto  $r_2 = \gamma_{V_{\parallel}}(\epsilon)$ . Realizando el mismo proceso con  $\mathbf{U}$  obtenemos los puntos  $q_2$  y  $r_1$ . Si esta operación se realiza en el plano, obtenemos un paralelogramo con vértice en  $p$  donde  $r_1 = r_2$ . Sin embargo, en un espacio con una geometría general  $\mathcal{G}$  se ve que  $r_1 \neq r_2$ . Este gap de distancia entre los vértices de un paralelogramo es a orden  $\epsilon^2$  proporcional a  $T_{\mu\nu}^\lambda V^\mu U^\nu$ , donde definimos el tensor de torsión en una base coordenada como:

$$T_{\mu\nu}^\lambda := 2\Gamma_{[\mu\nu]}^\lambda. \quad (2.21)$$



**Figura 2.3:** Paralelogramo infinitesimal no cerrado formado por geodésicas generadas por los vectores  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  en una geometría con torsión.

El tensor de torsión se puede describir como una 2-forma que mapea vectores en

vectores como:

$$T(\mathbf{V}, \mathbf{U}) := \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (2.22)$$

que en una base arbitraria es:

$$T = \frac{1}{2}\mathbf{e}_c \otimes T_{ab}^c dx^a \wedge dx^b. \quad (2.23)$$

Notar que  $T_{ab}^c \neq 2\Gamma_{[ab]}^c$ , dado que esta relación solo vale en una base coordenada. De manera más general, podemos obtener de la ecuación (2.22):

$$T_{ab}^c = \omega_{ab}^c - \omega_{ba}^c + 2\Omega_{ab}^c. \quad (2.24)$$

Equivalentemente, la torsión y la curvatura se pueden obtener por medio de las identidades de Ricci:

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\phi &= T_{\mu\nu}^{\sigma}\phi \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} &= R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}V^{\sigma} + T_{\mu\nu}^{\sigma}\nabla_{\sigma}V^{\rho} \\ [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]w_{\rho} &= -R_{\mu\nu\sigma}^{\rho}w_{\sigma} + T_{\mu\nu}^{\sigma}\nabla_{\sigma}w_{\rho} \end{aligned} \quad (2.25)$$

A partir de esto podemos deducir las identidades de Bianchi generales:

$$\begin{aligned} R_{(\mu\nu)\sigma}^{\rho} &= 0 \\ R_{[\mu\nu\sigma]}^{\rho} + \nabla_{[\mu}T_{\nu\sigma]}^{\rho} + T_{[\mu\nu}^{\gamma}T_{\sigma]\gamma}^{\rho} &= 0 \\ \nabla_{[\mu}R_{\nu\sigma]\rho}^{\gamma} + T_{[\mu\nu}^{\delta}R_{\sigma]\delta\rho}^{\gamma} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

## 2.4. Geometría afín de Einstein-Cartan

Dado una geometría  $\mathcal{G}$  arbitraria, con una conexión  $\Gamma$ , podemos realizar siempre la siguiente descomposición:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = {}^0\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + K_{\mu\nu}^{\rho} + L_{\mu\nu}^{\rho}, \quad (2.27)$$

donde

$${}^0\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} := \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}), \quad (2.28)$$

son los *símbolo de Christoffel*, completamente determinados por la métrica,

$$K_{\mu\nu}^{\rho} := \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(T_{\nu\rho\mu} + T_{\mu\sigma\nu} - T_{\sigma\mu\nu}) = g^{\rho\sigma}K_{\sigma\mu\nu}, \quad (2.29)$$

es el *tensor de contorsión*, y

$$L_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu}^{\rho} + Q_{\nu\mu}^{\rho} - Q_{\mu\nu}^{\rho}), \quad (2.30)$$

es el tensor de no metricidad, donde  $Q_{\mu\nu\sigma} := \nabla_{\mu}g_{\nu\sigma}$ . Hemos tenido en cuenta que  $T_{\lambda\mu\nu} := g_{\lambda\rho}T_{\mu\nu}^{\rho}$  es antisimétrico en sus dos últimos índices y  $K_{\sigma\mu\nu}$  antisimétrico

en sus dos primeros índices. De todos las geometrías posibles  $\mathcal{G}$ , nos interesan las compatibles con la métrica, i.e. aquellas cuyas conexiones satisfagan:

$$\nabla_{\mu}g_{\rho\theta} \equiv 0. \quad (2.31)$$

Estas geometrías se denominan de Einstein-Cartan<sup>4</sup>,  $\mathcal{G}_{EC}$ . La importancia de su estudio en física reside en la posibilidad que ofrecen para formular una teoría de gauge de la gravitación y su compatibilidad con algunos requisitos físicos importantes [Gronwald and Hehl, 1995]. Reescribiendo (2.27) para  $\mathcal{G}_{EC}$ , como se tiene  $L_{\mu\nu}^{\rho} = 0$ :

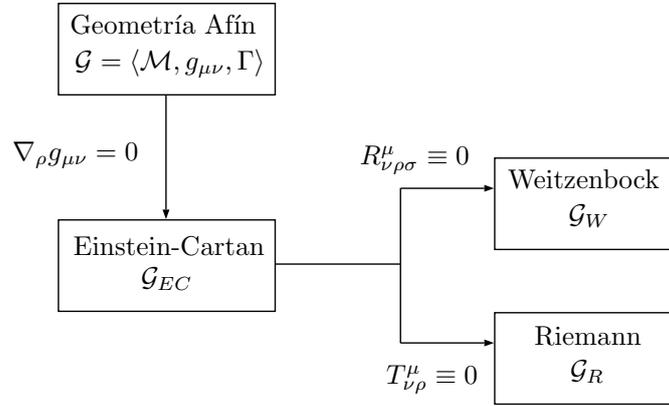
$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = {}^0\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} + K_{\mu\nu}^{\rho}. \quad (2.32)$$

Todavía quedan grados de libertad para elegir la conexión debido a que no hemos determinado la torsión. Una conexión afín totalmente determinada por la métrica estará dada por una  $\Gamma$  que cumpla:

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda} = 0, \quad (2.33)$$

i.e. la conexión debe ser simétrica en sus índices covariantes. Dado que la descomposición (2.27) es única, la única conexión que satisface esta condición es  ${}^0\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ . La geometría resultante es la de Riemann  $\mathcal{G}_R$ , utilizada en Relatividad General.

Nos interesa ahora formular una geometría donde haya una definición de paralelismo absoluto o teleparalelismo, es decir, donde los vectores transportados paralelamente dependan solo del punto y no de la curva elegida. De la ecuación (2.18) vemos que esta condición es equivalente a pedir que la curvatura  $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = 0, \forall p \in M$  en  $\mathcal{G}$ . La geometría métrico-afín con estas características se denomina de Weitzenböck  $\mathcal{G}_W \subset \mathcal{G}_{EC}$ . Resumimos lo expuesto en la Figura 2.4.



**Figura 2.4:** Esquema de geometrías afines y las condiciones por las cuales se definen.

## 2.5. Geometría de Weitzenböck

Para construir una geometría sin curvatura debemos encontrar una conexión  $\Gamma$  que cumpla  $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} \equiv 0$ . Es posible mostrar que [Ortin, 2015]:

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}) = e_{\rho}^a e_b^{\sigma} R_{\mu\nu a}^b(\omega_{\nu a}^b), \quad (2.34)$$

<sup>4</sup>Denominados así por las contribuciones de Cartan a la generalización de espacios riemannianos

donde la curvatura depende de la conexión de spin  $\omega$  como:

$$R_{b\mu\nu}^a(\omega) = \partial_\mu\omega_{\nu b}^a - \partial_\nu\omega_{\mu b}^a + \omega_{\mu c}^a\omega_{\nu b}^c - \omega_{\nu c}^a\omega_{\mu b}^c. \quad (2.35)$$

De esta ecuación, si imponemos que  $\omega_{\mu b}^a \equiv 0$ , como  $R_{b\mu\nu}^a(0) = 0$ , obtenemos  $R_{\mu\nu\rho}^\sigma \equiv 0$  tal como buscábamos. Por la ecuación (2.16), al fijar  $\omega_{ac}^b = 0$ , la conexión de Weitzenböck cumple:

$$\partial_\mu e_a^\nu + {}^*\Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho = 0,$$

es decir,

$${}^*\Gamma_{\mu\nu}^\rho = e_a^\rho \partial_\mu e_\nu^a. \quad (2.36)$$

La conexión de Weitzenböck solo puede ser escrita en términos de las tétradas, es por ello que resulta imprescindible el formalismo del *vierbein* para estudiar la geometría  $\mathcal{G}_W$ . La derivada covariante de un campo vectorial  $\omega^\mu(t)$  sobre una curva  $\gamma(t)$  está dada por:

$${}^*\nabla_\nu \omega^\nu = \partial_\nu \omega^\mu + {}^*\Gamma_{\rho\nu}^\mu \omega^\rho = e_a^\mu \partial_\nu \omega^a, \quad (2.37)$$

que se anula cuando  $\omega^a = \text{cte}$ ,  $\forall a$  y  $\forall t$ , i.e un campo  $\omega(t)$  es covariantemente constante si sus componentes sobre la base  $\{\mathbf{e}_a\}$  dadas por  $\omega^a$  son constantes. Podemos ahora precisar la noción de teleparalelismo (paralelismo a la distancia) o paralelismo absoluto: dos vectores  $\mathbf{V} \in T_p\mathcal{M}$  y  $\mathbf{W} \in T_q\mathcal{M}$  son paralelos si sus componentes en la base  $\{\mathbf{e}_a(p)\}$  son proporcionales, es decir  $V^a = \alpha W^a$ , condición que depende del punto  $p \in \mathcal{M}$  y no del camino para conectar los espacios tangentes. En la geometría de Riemann, no podemos afirmar si estos vectores son paralelos sin especificar una curva que conecte esos espacios. En particular,

$${}^*\nabla_\nu e_a^\lambda \equiv 0, \quad (2.38)$$

con lo cual, decimos que la conexión es compatible con la tétrada. La torsión de la geometría  $\mathcal{G}_W$  se puede escribir (ver ecuación (2.21)) como:

$$T_{\mu\nu}^\rho = e_a^\rho \left( \partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a \right) = -\Omega_{\mu\nu}^\rho, \quad (2.39)$$

donde  $\Omega_{\mu\nu}^\rho = e_a^\rho e_\mu^b e_\nu^c \Omega_{cb}^a$  son los coeficientes de estructuras definidos en la ecuación (2.6). Esto muestra que la torsión de Weitzenböck caracteriza la holonomidad de los campos vectoriales, lo cual será de gran importancia en nuestro análisis posterior. De la ecuación (2.39) también tenemos las relaciones para la derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_{e_a} \mathbf{e}_b = [\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = -T_{ab}^c \mathbf{e}_c, \quad (2.40)$$

y para las derivadas exteriores de  $\mathbf{e}^a$ :

$$d\mathbf{e}^a = \frac{1}{2} T_{ab}^c \mathbf{e}^a \wedge \mathbf{e}^b. \quad (2.41)$$

La torsión y la conexión de Weitzenböck son invariantes ante transformaciones de Lorentz globales de la tétrada, pero no ante transformaciones locales de Lorentz. Discutiremos esto en las siguientes secciones. Por último, las identidades de Ricci en este espacio son:

$${}^*\nabla_{[\mu} T_{\nu\sigma]}^\rho + T_{[\mu\nu}^\gamma T_{\sigma]\gamma}^\rho = 0. \quad (2.42)$$

## 2.6. Brevísimo compendio de Relatividad General

La estructura formal de la Relatividad General de Einstein se basa en la geometría Riemanniana  $\mathcal{G}_R$ . La conexión está totalmente determinada por la métrica (ver ecuación (2.28) ) siendo esta última el objeto dinámico principal de la teoría. Un modelo específico de espacio tiempo en RG necesita además la especificación del tensor de energía-impulso  $\Theta^{\mu\nu}$ , que describe la distribución de materia. Las ecuaciones dinámicas de la teoría son las ecuaciones de Einstein :

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{1}{4\kappa}\Theta_{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

donde  $R^{\mu\nu}$  y  $R$  son el tensor y el escalar de Ricci, respectivamente. Las ecuaciones de Einstein son 10 ecuaciones de segundo orden no lineales para las diez componentes independientes de la métrica. Debemos tener en cuenta además la restricción a  $R_{\mu\nu}$  dada por la identidad  $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$ , i.e solo hay 6 ecuaciones verdaderamente independientes en (2.43). Esto último corresponde a la invarianza frente al grupo  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  de cambios generales de coordenadas <sup>5</sup>. Notemos que el tensor de energía impulso depende en general de la métrica, en contraste con las ecuaciones de Maxwell donde el tetravector  $j^\mu$  representa una auténtica fuente del campo electromagnético (ver Sección 2.9)

La determinación de la métrica permite describir el movimiento de partículas de prueba:

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + {}^0\Gamma_{\rho\nu}^\mu \frac{dx^\rho}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0, \quad (2.44)$$

que se mueven por *geodésicas* (autoparalelas de  $\mathcal{G}_R$ ). Es posible obtener (2.43) a partir de un principio variacional y la construcción de una acción. La acción más simple invariante frente al grupo  $\text{Diff}(\mathcal{M})$  con ecuaciones de segundo orden para la métrica es:

$$S[g] = \frac{1}{16\pi G} \int R d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.45)$$

de cuya variación con respecto a  $g_{\mu\nu}$  se obtienen las ecuaciones (2.43).

## 2.7. Gravedad de Torsión

La GT ha sido estudiada como una teoría de tétradas y conexión de Lorentz (ver [Aldrovandi and Pereira, 2013]) y como una teoría de tétradas pura (ver [Møller, 1961] y [Maluf, 2015] ). La distinción entre estos enfoques se ha estipulado claramente en los últimos años (ver [Maluf, 1994] y [Krššák, 2015]). Estudiaremos en este trabajo el enfoque de tétrada pura, donde la teoría utiliza exclusivamente la tétrada como objeto dinámico.

---

<sup>5</sup>Si la métrica  $g_{\mu\nu}$  es solución en un dado sistema de coordenadas también debería ser solución la métrica  $g_{\mu'\nu'}$  en otro sistema de coordenadas. De esta manera, las restricciones del cambio de coordenadas  $x^\mu(x^{\mu'})$  introducen cuatro grados de libertad no físicos en la métrica

Si se busca una teoría de tétradas que no introduzca más grados de libertad que la RG, esta teoría deberá tener ecuaciones para las tétradas cuyas simetrías construyan una misma métrica. Dado que:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab}, \quad (2.46)$$

una métrica fija determina la tétrada a menos de transformaciones *locales* de Lorentz. De esa manera las ecuaciones en la GT deberán poseer estas mismas simetrías. Para construir la dinámica de la teoría utilizaremos la geometría de Weitzenbock, en particular, la torsión.

La manera natural de obtener las ecuaciones de campo para las tétradas en esta geometría es construir una acción invariante global de Lorentz e invariante ante difeomorfismos que sea equivalente a la acción de la RG. Se propone entonces el siguiente lagrangiano con derivadas *primeras* de la tétrada:

$$\mathcal{L} = \kappa \left( a_1 T^{\rho}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{\rho} + a_2 T^{\rho}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_{\rho} + a_3 T^{\rho}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_{\nu} \right), \quad (2.47)$$

donde cada término es un invariante global de Lorentz construido con todas las posibles combinaciones cuadráticas de la torsión. El conjunto de parámetros libres  $a_i$  da lugar a una clase de teorías usualmente denominadas New General Relativity, estudiadas por [Hayashi and Shirafuji, 1979]. Si tomamos  $a_1 = 1/4$ ,  $a_2 = 1/2$  y  $a_3 = -1$ , es posible ver que:

$$\mathcal{L} = \kappa \mathbb{T} = \kappa \Sigma^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu}, \quad (2.48)$$

siendo

$$\mathbb{T} := \frac{1}{4} T^{\rho}_{\mu\nu} T^{\mu\nu}_{\rho} + \frac{1}{2} T^{\rho}_{\mu\nu} T^{\nu\mu}_{\rho} - T^{\rho}_{\mu\rho} T^{\nu\mu}_{\nu}, \quad (2.49)$$

y en donde definimos el tensor:

$$\Sigma^{\rho\mu\nu} := \frac{1}{2} \left( K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T^{\sigma\mu}_{\sigma} + g^{\rho\mu} T^{\sigma\nu}_{\sigma} \right), \quad (2.50)$$

denominado *superpotencial*. Luego de algunas manipulaciones algebraicas (ver sección 4.1) llegamos a la siguiente identidad:

$$-R \equiv \mathbb{T} + 2\nabla^{\mu} T^{\nu}_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

donde  $R := R^{(0)\Gamma}$  es el escalar de Ricci en  $\mathcal{G}_R$ . Como  $R$  es invariante local de Lorentz (ILL) ya que depende solo de la métrica, el lado derecho de (2.51) también lo es. Por el contrario, tanto  $\mathbb{T}$  como  $\nabla^{\mu} T^{\nu}_{\mu\nu}$  no son invariantes locales de Lorentz. Sin embargo, las ecuaciones de movimiento que se derivan del lagrangiano  $\mathcal{L}$  para la GT, son las mismas ecuaciones de que se derivan del lagrangiano para RG dado por  $R$  ya que ambos lagrangianos difieren en una divergencia total. Es decir, para esta elección de los parámetros  $a_i$  recuperamos la Relatividad General. La acción total, incluyendo el lagrangiano de materia, es:

$$S[e] = -\kappa \int \mathbb{T} \sqrt{-g} d^4x + S_M, \quad (2.52)$$

donde  $S_M$  es la acción de materia. Notar que el lagrangiano está formado por primeras derivadas de la tétradas mientras que el lagrangiano de RG por segundas derivadas de la métrica; es decir, las segundas derivadas están encapsuladas en el término de divergencia  $\nabla^\mu T^\nu_{\mu\nu}$  de la ecuación (2.51). Desarrollamos algunos conceptos importante de esta formulacion lagrangiana en el Apéndice B.

Al considerar una acción compuesta por derivadas primeras, las ecuaciones de movimiento [Aldrovandi and Pereira, 2013] se pueden obtener de las ecuaciones de Euler-Lagrange (o equivalentemente, variando la acción con respecto a  $e_a^\mu$ ) con lo cual:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_{a\rho}} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma e_{a\rho})} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\rho}}, \quad (2.53)$$

obteniendo las ecuaciones dinámicas de la teoría:

$$\partial_\nu \left( \sqrt{-g} \Sigma^{a\nu} \right) = \frac{\sqrt{-g}}{4k} \left( t^{\lambda a} + \Theta^{\lambda a} \right), \quad (2.54)$$

siendo  $\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta e_{a\rho}} := \sqrt{-g} e_\nu^a \Theta_\rho^\nu$  el tensor de energía-impulso de la materia (igual que en RG) y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma e_{a\lambda})} = -4\kappa \sqrt{-g} \Sigma^{a\lambda\sigma}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_{a\lambda}} := -\sqrt{-g} t^{\lambda a} \equiv -\kappa \sqrt{-g} e_\mu^a \left( 4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}^\mu - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd} \right), \quad (2.56)$$

donde  $t^{\lambda\mu} = t^{\lambda a} e_a^\mu$  se denomina tensor de energía-impulso del campo gravitatorio, cuyo nombre quedará justificado más adelante (ver sección 2.9.3 y Apéndice B). Estas ecuaciones determinan la tétrada  $e_\mu^a$  con una degeneración de seis parámetros dada por la invarianza de (2.54) ante transformaciones de Lorentz. Las ecuaciones de campo (2.54) son equivalentes a las ecuaciones de Einstein para cualquier valor de la torsión (ver Sección 4.1). Una vez obtenida una tétrada, fijados sus seis grados de libertad, podemos estudiar en conjunto la geometría de Weitzenböck y la geometría de Riemann (es decir, cantidades asociadas a la métrica). La tétrada establece un sentido de paralelismo absoluto en la variedad como vimos en la Sección 2.5:

$$*\nabla_\mu e_a^\mu = 0. \quad (2.57)$$

Esta definición de paralelismo es invariante ante transformaciones globales de Lorentz de la tétrada, pero no frente a transformaciones locales. Dos tétradas solución de (2.54) relacionadas a través de una transformación local no compartirán el mismo paralelismo y por tanto, ninguna cantidad construida en la geometría de Weitzenböck. Como justificaremos más adelante, esto se debe a que los tensores en la geometría de Weitzenböck representan características del sistema de referencia adoptado (dado por los seis parámetros libres de la tétrada) mientras que los tensores de la geometría de Riemann representan características del espacio-tiempo exclusivamente. La dinámica de las partículas de prueba siguen geodésicas de  $\mathcal{G}_R$ . En la geometría de Weitzenböck, de la relación (2.27), la ecuación de movimiento es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + {}^* \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = K_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}, \quad (2.58)$$

una ecuación con un término de fuerza dado por el tensor de contorsión. A continuación, analizamos en detalle el concepto de sistema de referencia a partir del formalismo de tétradas. Esto será necesario para la completa interpretación de la GT y como base para las aplicaciones.

## 2.8. Sistemas de referencia

Los valores que toma una propiedad  $\mathcal{P}$  de un sistema físico  $\sigma$  (e.g. energía, velocidad, momento) son siempre referidas localmente a un sistema de referencia (SR), i.e., otro sistema físico<sup>6</sup>[Mashhoon, 2013]. La correcta caracterización de este SR es fundamental para formular una teoría de la medición en un espacio tiempo arbitrario [De Felice and Bini, 2010] y para interpretar correctamente la Gravedad de Torsión. La representación para el SR que adoptaremos aquí consiste en un sistema macroscópico  $K$  que sigue una curva  $\gamma(\tau)$  tipo tiempo y que posee un sistema de ejes ortonormales (las tétradas) en cada punto de su trayectoria, es decir:

$$K \hat{=} \{\gamma(\tau), \mathbf{e}_a(\tau)\}, \quad (2.59)$$

donde  $\mathbf{e}_a$  es la tétrada asociada, con  $\mathbf{e}_0$  el vector tangente a la curva. Esta caracterización se extiende para una congruencia de curvas  $\mathcal{C}_{e_0}$  con vectores tangentes  $\mathbf{e}_0(p)$ . Notemos que (a) esta noción de SR es más completa que la tradicional asociada a un campo de velocidades o a un dado sistema de coordenadas y (b) que el SR se “mueve” en un espacio de estados (o base fibrada) de 10 dimensiones asociado al punto en donde se encuentra (cuatro coordenadas) y los seis grados de libertad para elegir las tétradas (ver ecuación (2.46)) [Auchmann and Kurz, 2014].

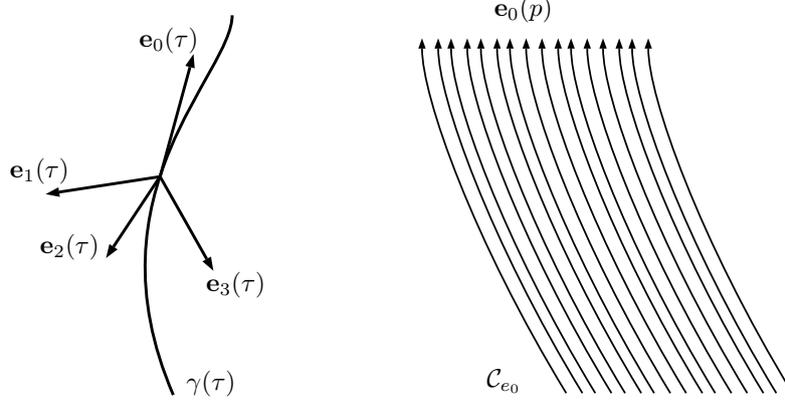
Para tratar con cantidades físicas, como las propiedades de un objeto, en un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  arbitrario debemos recuperar localmente las nociones de espacio y de tiempo. Esto puede realizarse utilizando proyecciones sobre las tétradas que representan el SR, en lo que se conoce como el formalismo 1 + 3 ortonormal. El ejemplo más típico de ello es la caracterización del momento  $P^\mu$  de una partícula: adoptando un SR representado por  $\mathbf{e}_a$  que se encuentra con la partícula en un punto  $p$ , el momento sobre este marco está dado por

$$\mathbf{P} = P^{(0)} \mathbf{e}_0 + P^{(i)} \mathbf{e}_i. \quad (2.60)$$

De esa manera, la energía del sistema es  $E := P^{(0)} = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_0$ , es decir, la proyección del vector sobre el eje temporal  $\mathbf{e}_0$  del SR. Localmente, la relación entre las propiedades que miden distintos sistemas en un dado punto se consigue transformando las tétradas con un cambio de base que conserve la ortonormalidad, es decir, con una transformación de Lorentz. Examinemos primero, como ejemplo, el

<sup>6</sup>Operativamente, los SR se suelen asociar en la literatura como observadores “equipados” con relojes, reglas y lasers de luz.

rol de las tétradas y las transformaciones de Lorentz para tratar la velocidad de una partícula.



**Figura 2.5:** A la izquierda: representación de un sistema de referencia  $K$  con una tetrada dada por  $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  que sigue una curva  $\gamma$ . A la derecha: una congruencia  $\mathcal{C}$  de curvas con tétradas  $\mathbf{e}_a$  que representan sistemas de referencia  $K_{\mathcal{C}}$

### 2.8.1. Velocidad y transformaciones de Lorentz

La velocidad es la propiedad que caracteriza cómo cambia un objeto con respecto al espacio-tiempo, representada por el vector  $\mathbf{U}$  tangente a la curva que sigue. Con ella, es posible definir otra propiedad importante llamada *velocidad física*<sup>7</sup>, que representa el cambio con respecto a una hipersuperficie  $\Sigma$  espacial asociada al sistema de referencia.

Consideremos la definición local de esta velocidad física: dado un sistema de referencia  $K$  que sigue una curva  $\gamma(s)$ , sea  $\mathbf{e}_a$  su tetrada asociada en un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ , con  $\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{U}$  el vector tangente a la curva. Sea un sistema  $\sigma$  que sigue una trayectoria  $\zeta(s)$  con vector tangente  $\mathbf{V}$  y que se encuentra con  $K$  en el punto  $p$ . Buscamos ahora definir la velocidad física del sistema  $\sigma$  en el marco de referencia  $K$ . En el espacio de Minkowski, donde la tetravelocidad es  $\mathbf{U} = \gamma(\partial_t + v^i \partial_i)$  en un marco inercial, la trivelocidad física está dada por  $\mathbf{v} = v^i \partial_i$ , es decir, la proyección espacial de  $\mathbf{U}/\gamma = (\partial_t + \mathbf{v})$ , donde la componente temporal está normalizada a uno. En un espacio-tiempo arbitrario, podemos generalizar esta definición descomponiendo a la tetravelocidad en un sistema de referencia  $K$  como:

$$\mathbf{V} = V^0 \mathbf{e}_0 + V^i \mathbf{e}_i = V^0 \mathbf{U} + V^i \mathbf{e}_i = V^0 \left( \mathbf{U} + \frac{V^i}{V^0} \mathbf{e}_i \right), \quad (2.61)$$

donde  $V^0 = -\mathbf{g}(\mathbf{V}, \mathbf{U}) := \gamma$ . Definimos la trivelocidad asociada entonces como:

$$\vec{v} := v^i \mathbf{e}_i = \frac{V^i}{\gamma} \mathbf{e}_i = \frac{V^\mu e_\mu^i}{V^\mu e_\mu^0} \mathbf{e}_i. \quad (2.62)$$

<sup>7</sup>Se denomina velocidad física porque es aquella que mediría un observador adaptado a un dado sistema de referencia.

La rapidez se puede obtener tomando el cuadrado de este tri-vector como:

$$v^2 = v^i v_i = \frac{(g_{\mu\nu} + e_\mu^0 e_\nu^0) V^\mu V^\nu}{(V^\mu e_\mu^0)^2} = 1 - \frac{1}{(V^\mu U_\mu)^2}. \quad (2.63)$$

Este resultado se puede obtener también en el formalismo 3 + 1 de *slicing*, donde el significado físico de (2.63) es más transparente [Crawford and Tereno, 2002]. La definición es local y consistente para sistemas que se encuentran en un mismo punto  $p \in \mathcal{M}$  (ver algunas aplicaciones en [Bolos, 2007]).

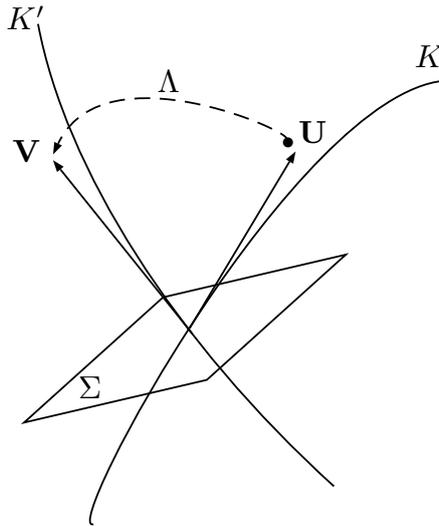
Con esta definición de velocidad, es posible esclarecer el significado físico de las transformaciones de Lorentz propias en un espacio-tiempo arbitrario. Consideremos dos sistemas  $K$  y  $K'$  con tétradas  $\mathbf{e}_a$  y  $\mathbf{e}_{a'}$  respectivamente, que se encuentran en un punto  $p$ . Ambas tétradas se relacionan por una transformación de Lorentz  $\Lambda_{b'}^a(p)$  en el espacio tangente  $T_p \mathcal{M}$ . Supongamos que esta transformación es un *boost* en una dirección  $\mathbf{n}$  arbitraria:

$$\Lambda(\beta) = I - \gamma\beta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}) + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K})^2, \quad (2.64)$$

donde  $\mathbf{K}$  es el vector formado con las matrices de la representación de boost matricial. Si  $K'$  tiene una tetravelocidad  $U \equiv \mathbf{e}_{0'}$ , la rapidez física de este sistema medida por  $K$  está dada por (2.64) de donde resulta fácilmente:

$$v^2 = 1 - \frac{1}{(U^\mu V_\mu)^2} = 1 - \frac{1}{(\Lambda_0^a e_a^\mu e_\mu^0)^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \beta^2, \quad (2.65)$$

ya que  $\Lambda_0^a e_a^\mu e_\mu^0 = \Lambda_0^0 = \gamma$ , resultado consistente con la interpretación de velocidad del parámetro  $\beta$  en el boost (2.64). Si la transformación es una rotación, ambos sistemas se encuentran estáticos con respecto al otro ya que en ese caso  $\Lambda_0^0 = 1$  y por lo tanto  $v^2 = 0$ .



**Figura 2.6:** Representación de dos sistemas de referencia  $K$  y  $K'$  con tetravelocidades  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  respectivamente que se encuentran en un punto de la variedad. En ese punto, existe una transformación de Lorentz  $\Lambda$  que relaciona un sistema con otro.

Las transformaciones de Lorentz en espacios curvos se realizan sobre cada espacio tangente, i.e. punto a punto. Cabe destacar que en todo este razonamiento estamos realizando una hipótesis implícita de carácter físico: no importa la historia de los sistemas de referencia considerados, las propiedades que se registran en uno y en otro se relacionan por una transformación de Lorentz en ese punto. Esta es una de las versiones de la “Hipótesis de Localidad” introducida por [Mashhoon, 2003]. Mencionemos por último que podemos extender la definición de velocidad a sistemas que no coinciden en un mismo punto a través de geodésicas tipo luz (velocidad espectroscópica) o a través de hipersuperficies espaciales (ver [Bolos, 2007] )

### 2.8.2. Sobre la inercia y el significado físico de la torsión

Una de las formulaciones del *principio débil de equivalencia* establece que todo cuerpo libre de interacciones sigue una geodésica del espacio-tiempo. Cualquier perturbación (no gravitatoria) inducirá al cuerpo a un estado de movimiento no inercial con respecto a esta geodésica. Con ello, es natural definir el concepto de aceleración propia como el cambio de la tetravelocidad  $u^\mu$  tangente sobre la curva  $\gamma$ :

$$a^\mu := \frac{Du^\mu}{ds} = u^\nu \nabla_\nu u^\mu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds}, \quad (2.66)$$

donde  $\nabla$  es la derivada covariante de la geometría de Riemann. Si  $u^\mu(s)$  es la tetravelocidad de una trayectoria geodésica, entonces el sistema está en caída libre y la aceleración es  $a^\mu = 0$ . En otras palabras, un sistema está acelerado o no dependiendo de su estado de movimiento sobre el espacio-tiempo de fondo. Considerando que un SR está representado con una tétrada  $e_\mu^a$  en cada  $p \in \gamma$  de la curva, el cambio o aceleración que sufren cada una de las componentes  $e_a^\mu$  está dada por:

$$\frac{De_a^\mu}{ds} = \phi_a^b e_b^\mu, \quad (2.67)$$

donde  $\phi^{ab}$  es el tensor de aceleración, antisimétrico ya que la ortonormalidad se mantiene en toda la curva. Podemos establecer una analogía con el tensor de Faraday  $F^{\mu\nu}$ , en la cual podemos identificar a  $\phi_{(0)(i)} = a_{(i)}$  como la aceleración translacional (parte eléctrica) y  $\phi_{(i)(j)} = \epsilon_{ijk} \Omega^k$  la frecuencia de rotación (parte magnética) del marco espacial con respecto a uno no rotante transportado Fermi-Walker [Maluf and Faria, 2008]. La aceleración proyectada sobre el marco de referencia definido por la tétrada es:

$$a^b = e_\mu^b a^\mu = \phi_0^b, \quad (2.68)$$

es decir,  $a^\mu$  y  $\phi_{(0)(i)}$  representan las mismas aceleraciones [Maluf et al., 2007b]. Tanto  $\mathbf{a}$  como  $\Omega$  dependen de la orientación y la velocidad del sistema, i.e cambian (de manera covariante) ante transformaciones globales de Lorentz. Podemos formar a partir del tensor de aceleración cantidades invariantes ante estas transformaciones como:

$$\mathcal{I} := \frac{1}{4} \phi_{ab} \phi^{ab} = \frac{1}{2} (\Omega^2 - a^2), \quad (2.69)$$

y el dual

$$\mathcal{I}^* := \frac{1}{4} \phi_{ab}^* \phi^{ab} = -\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.70)$$

Características de estas cantidades se muestran en [Mashhoon, 2011] y [Mashhoon, 2013]. Es posible escribir el tensor de aceleración en términos de cantidades construidas en la geometría de Weitzenböck  $\mathcal{G}_W$  con el tensor de torsión como:

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2} \left( T_{(0)ab} + T_{a(0)b} - T_{b(0)a} \right) \equiv K_{ab0} \equiv {}^0\omega_{0ab}. \quad (2.71)$$

donde  ${}^0\omega_{0ab}$  es la conexión de spin de RG. El tensor  $\phi_{ab}$  es invariante frente a transformaciones de coordenadas y covariante ante transformaciones globales de Lorentz pero no frente a transformaciones locales. Esto es consistente con la interpretación de  $\phi_{ab}$  como tensor de aceleración ya que un boost local transforma, en particular, sistemas inerciales en sistemas acelerados. Las cantidades ILL son las mismas para cualquier sistema de referencia, e.g la curvatura del ET, mientras que aquellas cantidades que dependen intrínsecamente de la naturaleza del sistema de referencia, como el tensor de aceleración, no son ILL. Establezcamos entonces la siguiente definición:

Un sistema de referencia  $K$  es *inercial* (y no rotante) con respecto a  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  si  $\phi_{ab} = 0$  en toda su trayectoria.

La definición se puede extender a una congruencia  $K_\sigma$  determinando que cada sistema de referencia de la congruencia cumpla con la condición  $\phi_{ab} = 0$ . En las aplicaciones de la GT nos interesará establecer sistemas de referencias globales (una congruencia que se extiende en una región  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ ) con las mismas características inerciales, i.e con un mismo tensor de aceleración. Es importante notar que la extensión no es trivial y existen ciertos casos donde no es posible (ver [Mashhoon, 1987]). El concepto de inercia presentado es independiente del sistema de coordenadas elegido. Esto remarca que en nuestra caracterización, los sistemas de coordenadas y los sistemas de referencia son conceptos diferentes.

Sin embargo, cabe mencionar que la elección de un sistema de coordenadas adecuado puede ser fundamental para la interpretación de mediciones y propiedades. En particular, existe una manera de construir coordenadas alrededor de una curva tipo tiempo arbitraria que extiende naturalmente el sistema cartesiano en espacio-tiempo arbitrarios, llamadas *coordenadas de Fermi*. Es posible mostrar que para un sistema  $K$  que sigue una curva  $\gamma(T)$  con tétradas  $\lambda_{\hat{\beta}}^\mu$  caracterizadas por  $\phi_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ , existen coordenadas  $\{T, X^{\hat{i}}\}$  alrededor de  $\gamma(T)$  tales que:

$$\begin{aligned} g_{\hat{0}\hat{0}} &= -\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 - R_{\hat{0}\hat{i}\hat{0}\hat{j}} X^{\hat{i}} X^{\hat{j}} + O(|\mathbf{X}|^3) \\ g_{\hat{0}\hat{i}} &= \mathcal{Q}_{\hat{i}} - \frac{2}{3} R_{\hat{0}\hat{j}\hat{i}\hat{k}} X^{\hat{j}} X^{\hat{k}} + O(|\mathbf{X}|^3) \\ g_{\hat{i}\hat{j}} &= \delta_{\hat{i}\hat{j}} - \frac{1}{3} R_{\hat{i}\hat{k}\hat{j}\hat{l}} X^{\hat{k}} X^{\hat{l}} + O(|\mathbf{X}|^3) \end{aligned} \quad (2.72)$$

donde se define:

$$\mathcal{P} := 1 + U, \quad U := \mathbf{a} \cdot \mathbf{X} \quad \mathcal{Q} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X},$$

y las componentes del tensor de Riemann están proyectadas en las tétradas sobre la curva  $\gamma$ :

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}(T) := R_{\mu\nu\rho\sigma}\lambda_{\hat{\alpha}}^{\mu}\lambda_{\hat{\beta}}^{\nu}\lambda_{\hat{\gamma}}^{\rho}\lambda_{\hat{\delta}}^{\sigma}. \quad (2.73)$$

Con estas coordenadas podemos generar tétradas alrededor de  $\gamma$  transportando paralelamente a  $\lambda_{\hat{\alpha}}^{\mu}$  por las geodésicas tipo espacio de  $X^i$  (ver [De Felice and Clarke, 1992]), resultando:

$$e_0^{\mu} = \delta_0^{\mu} + \phi_i^{\mu} X^i + \frac{1}{2} R_{ij0}^{\mu} X^i X^j + O(|\mathbf{X}|^3) \quad (2.74)$$

$$e_{\hat{k}}^{\mu} = \delta_{\hat{k}}^{\mu} + \frac{1}{6} R_{ij\hat{k}}^{\mu} X^i X^j + O(|\mathbf{X}|^3) \quad (2.75)$$

Vemos entonces que sobre la curva  $\gamma$  obtenemos:

$$e_{\hat{\alpha}}^{\mu} |_{\gamma} = \delta_{\hat{\alpha}}^{\mu}, \quad g_{\mu\nu} |_{\gamma} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.76)$$

En particular, si la curva  $\gamma$  es una geodésica, obtenemos:

$$e_{\hat{\alpha}}^{\mu} |_{\gamma} = \delta_{\hat{\alpha}}^{\mu}, \quad \delta_{\mu} e_{\hat{\alpha}}^{\nu} |_{\gamma} = 0, \quad g_{\mu\nu} |_{\gamma} = \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\hat{\nu}\hat{\rho}}^{\hat{\mu}} |_{\gamma} = 0. \quad (2.77)$$

Con ello, tenemos entonces:

$$T_{\hat{\nu}\hat{\rho}}^{\hat{\mu}} = e_{\hat{\alpha}}^{\mu} (\partial_{\nu} e_{\hat{\rho}}^{\hat{\alpha}} - \partial_{\rho} e_{\hat{\nu}}^{\hat{\alpha}}) |_{\gamma} = 0, \quad (2.78)$$

es decir, la torsión  $T_{\hat{\nu}\hat{\rho}}^{\hat{\mu}}$  es cero *sobre la curva* si esta es una geodésica y la tétrada está adaptada a las coordenadas de Fermi [Bini and Mashhoon, 2015]. Sin embargo, el valor de la torsión depende fuertemente de la elección global de la tétrada. En efecto, es posible construir tétradas  $\mathbf{e}_a$  en una región  $U \subset \mathcal{M}$  que representan sistemas inerciales (i.e. tensor de aceleración igual a cero) pero cuyo tensor de torsión es distinto de cero (ver Sección 5). La torsión entonces representa características de la congruencia de sistemas  $K_{\mathcal{C}}$ . En otras palabras, un marco inercial *coordinado* solo se puede construir sobre una curva y no es posible extenderlo al resto de la variedad si esta presenta curvatura. Si la curvatura es cero, entonces este sistema global, denominado sistema inercial, siempre existe. Veamos esto con más detalle.

### 2.8.3. Torsión en Minkowski $M^4$

Si la variedad tiene curvatura riemanniana nula en todo punto, entonces existe un sistema de coordenadas en donde la métrica toma la forma global  $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$ . Esas coordenadas se denominan coordenadas cartesianas y con ellas podemos formar una base ortonormal del espacio tangente  $\partial_{\mu}$  que es igual en todo punto, es decir, que sus ejes son paralelos independientemente de la curva y del punto. Decimos entonces que el espacio-tiempo es plano y lo identificamos con su propio espacio tangente. En el contexto de la geometría de Weitzenböck  $\mathcal{G}_W$ , si

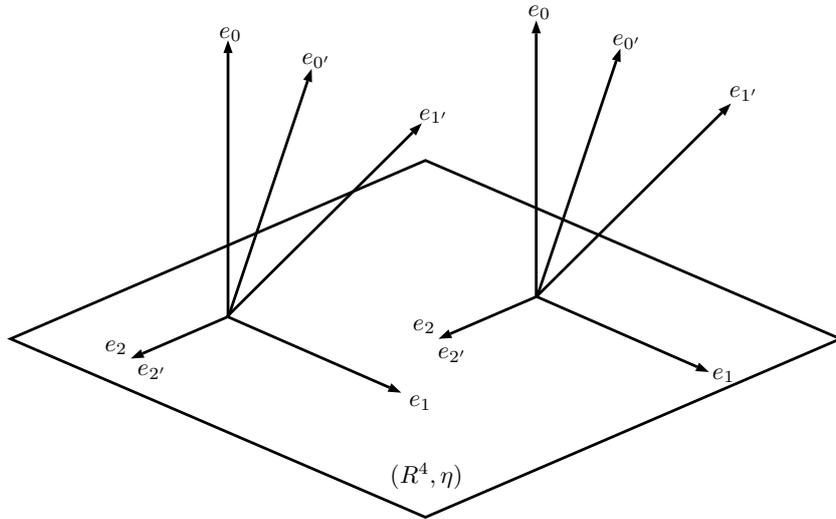
la torsión para la tétrada  $\mathbf{e}_a$  es cero en una región abierta  $U \subset \mathcal{M}$  entonces de la ecuación (2.6), el corchete de Lie es:

$$[\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b] = 0, \quad (2.79)$$

con lo cual, en esa región tenemos un marco coordenado ortonormal  $e_\mu^a = \delta_\mu^a$  de manera que  $e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = \eta_{\mu\nu}$ , es decir, la métrica del espacio-tiempo es minkowskiana. Así, las transformaciones de Lorentz globales, transformaciones de vectores en el espacio tangente, equivalen a transformaciones de *coordenadas* cartesianas:

$$\Lambda_{b'}^a \equiv \frac{\partial x^a}{\partial x^{b'}}, \quad (2.80)$$

ya que estas conservan la ortonormalidad y la relación de torsión cero del corchete de Lie dada en la ecuación (2.79). Es importante aclarar que esto sólo es cierto en espacios planos, donde la curvatura y la torsión son nulas en toda la variedad y el espacio-tiempo se identifica con su espacio tangente. En un espacio tiempo arbitrario donde la curvatura es no nula, los marcos ortonormales no son coordenados, con lo cual las transformaciones de Lorentz deben interpretarse como transformaciones entre bases ortonormales (tétradas) del espacio tangente, i.e sistemas de referencia, y no como un cambio de coordenadas.



**Figura 2.7:** Representación del espacio de Minkowski y dos bases cartesianas inerciales del espacio tangente relacionadas por una transformación de Lorentz global (*boost* en la dirección  $e_1$ ) en un punto. Las bases del espacio tangente cartesiano son paralelas en todo punto.

A diferencia de la geometría de Riemann  $\mathcal{G}_R$  donde la torsión y la curvatura del espacio de Minkowski son nulas en todo punto, existen tétradas  $e_\mu^a$  no coordenadas definidas en  $M^4$ , que cumplen  $\eta_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$ , pero que poseen torsión no nula. Estas tétradas representan, en general, sistemas de referencia no inerciales en  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ , asociados por ejemplo a una partícula acelerada o un sistema cuyos ejes espaciales rotan. Consideremos el siguiente ejemplo sencillo dado en [Maluf et al., 2007b]: Si el espacio-tiempo es minkowskiano  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , entonces se puede establecer un SR

inercial global dado por  $e_\mu^a = \delta_\mu^a$ . En este sistema, la torsión es trivialmente cero como también el tensor de aceleración  $\phi_{ab}$ . Si aplicamos un *boost*  $\Lambda_{b'}^a$  en el eje  $x$  a este sistema, obtenemos la tétrada:

$$e_\mu^{b'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta nueva tétrada corresponde a sistemas de referencia con tetravelocidad  $u^\mu = e_{(0)}^\mu = (\gamma, \beta\gamma, 0, 0)$ . Si consideramos  $\beta \equiv v(t)/c$ , es decir, un boost local (que varía punto a punto), la forma de la tétrada es la misma pero ahora la torsión no es cero. En efecto, si calculamos el tensor de aceleración, obtenemos

$$\phi_{(0)(1)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right). \quad (2.81)$$

Esto implica que el nuevo sistema de referencia, obtenido al aplicar un boost local en el eje  $x$  al sistema inercial, posee aceleración dada por la ecuación (2.81). La torsión entonces no es necesariamente nula en el espacio de Minkowski a diferencia de la curvatura, es decir, la torsión representa las características del espacio-tiempo y también el sistema de referencia adoptado. Aún más, existen tétradas que representan sistemas de referencia inerciales en Minkowski pero que su tensor de torsión es no nulo. Seguiremos con este tema en el capítulo 5.

Conectemos lo visto en esta sección con la Hipótesis de Localidad introducida en 2.8.1. Dado un SR  $K$  no inercial, en cada punto  $p$  de su trayectoria existe un SR inercial  $K'_p$  cuyos ejes coinciden con los del sistema  $K$ ,  $\mathbf{e}_a(p) = \mathbf{e}'_a(p)$ . Esto implica que las propiedades locales registradas por un sistema no inercial son las mismas que registra un sistema inercial en ese punto (ver [Mashhoon, 2003] y [Mashhoon and Muench, 2002]). En palabras de Mashhoon:

“ An accelerated observer measures the same physical results as a standard inertial observer that has the same position and velocity at the time of measurement. ”

Por supuesto, la evolución de un sistema inercial y uno no inercial serán enteramente diferentes. Existen ciertos casos donde la hipótesis debe ser revisada, por ejemplo al considerar fenómenos típicamente no locales como los ondulatorios; limitaciones de la hipótesis de localidad se tratan en [Mashhoon, 2003].

## 2.9. Energía-impulso

### 2.9.1. Materia

Todo sistema material posee energía. Esta propiedad fundamental de los sistemas físicos está codificada en el tensor de energía-impulso, cuya naturaleza está

íntimamente relacionada con el espacio-tiempo. En efecto, su definición depende en general de la intensidad del campo  $\Phi$  (u otra propiedad que caracteriza al sistema) pero también de la métrica  $g_{\mu\nu}$ ; por ejemplo, el tensor de energía-impulso del campo electromagnético:

$$\Theta_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{4\pi}(F_{\mu}^{\lambda}F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\sigma\lambda}F_{\lambda\sigma}). \quad (2.82)$$

En la formulación lagrangiana, la definición del tensor de energía-impulso corresponde a la variación del lagrangiano de materia con respecto a la métrica:

$$\Theta_{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta\mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \Phi, \nabla_{\nu}\Phi)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.83)$$

es decir, el espacio-tiempo (representado aquí por la métrica) es parte esencial de su definición<sup>8</sup>. La invarianza frente a difeomorfismos de la acción permite deducir la conservación local del tensor de energía-impulso:

$$\nabla_{\nu}\Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (2.84)$$

Este tensor permite la construcción de corrientes de Noether  $\mathcal{J}^{\mu} := \Theta^{\mu\nu}\xi_{\nu}$  conservadas cuando el espacio-tiempo admite simetrías representadas por vectores de Killing  $\xi_{\nu}$  [Saravi, 2004]. Con esta corriente es posible construir cargas conservadas en una región  $\mathcal{D} \subset \Sigma$  de la hipersuperficie tipo espacio  $\Sigma$ :

$$Q_{\mathcal{D}}[\xi] := \int_{\mathcal{D}} \xi_{\rho}\Theta^{\nu\rho}d\mathcal{D}_{\nu}, \quad (2.85)$$

donde  $d\mathcal{D}_{\nu}$  es el elemento de hipersuperficie, que a su vez podemos escribir como  $\mathcal{D}_{\nu} = n^{\nu}\sqrt{\gamma}d^3x$ , con  $n^{\nu}$  el vector tipo tiempo normal a la hipersuperficie y  $\sqrt{\gamma}d^3x$  el elemento de volumen inducido. Cuando el espacio-tiempo es plano, entonces la ecuación de conservación se reduce en coordenadas cartesianas a:

$$\partial_{\nu}\Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (2.86)$$

Con ello, por ejemplo, dado los generadores de traslaciones escritos como  $\partial_{\nu}$  (en una base cartesiana), tenemos cuatro cargas conservadas que forman el cuadrimento:

$$P_{\nu} := \int \Theta_{\mu\nu}n^{\mu}\sqrt{\gamma}d^3x. \quad (2.87)$$

Cuando el espacio-tiempo no tiene simetrías entonces ocurren ambigüedades para definir la masa y el momento angular de los sistemas, que dependerá del sistema de referencia adoptado (ver [Jaramillo andourgoulhon, 2009]): si el espacio tiene simetrías, entonces existe una elección natural para definir estas cantidades. En Minkowski, por ejemplo, son la clase de sistemas de referencia inerciales. Esta dificultad para elegir un SR en un espacio-tiempo curvo arbitrario representa el principal problema a la hora de definir la energía asociada al propio espacio-tiempo.

<sup>8</sup>Esto muestra que el tensor de energía-impulso no es una propiedad intrínseca del sistema, sino “relacional”, en este sentido, con respecto al espacio-tiempo, ver [Lehmkuhl, 2011].

### 2.9.2. Espacio-tiempo

Si el espacio-tiempo (o campo gravitatorio) es también considerado como un sistema material, entonces es natural preguntarse si es posible asignarle un tensor de energía-impulso. Sin embargo, una definición adecuada de esta cantidad ha sido motivo de controversia desde los albores de la RG. El problema radica en la búsqueda de una ley de conservación en derivadas parciales con la forma:

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}(\Theta^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})) = 0, \quad (2.88)$$

que permita obtener cargas conservadas, donde  $t^{\mu\nu}$  es la cantidad asociada al espacio-tiempo. Las expresiones usualmente encontradas para  $t^{\mu\nu}$  no son tensoriales sino pseudotensoriales (ver Apéndice B). La imposibilidad de encontrar una expresión tensorial se asocia al hecho de que la interacción gravitatoria (mediada por la presencia de curvatura) no es detectable en un punto, con lo cual una expresión de la densidad de energía-impulso  $t^{\mu\nu}$  debería ser nula en coordenadas normales y, si es una expresión tensorial, será nula en todas las coordenadas. Esta dificultad, asociada al principio de equivalencia, lleva a cantidades pseudotensoriales que poseen coordenadas pseudocartesinas preferidas. Existen numerosas propuestas para estos pseudotensores, como los de Einstein, Landau y Möller, entre otros [Favata, 2001a]. La ecuación (2.88) se puede obtener de un superpotencial  $S^{\mu\nu\sigma}$  asociado, antisimétrico en los últimos índices con la forma:

$$\partial_\sigma(\sqrt{-g}S^{\mu\nu\sigma}) = \sqrt{-g}(\Theta^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}). \quad (2.89)$$

Diferentes pseudotensores tienen asociados entonces su correspondiente superpotencial. Con ello, se puede formar un cuádrimomento conservado integrando en un volumen tipo-espacio como:

$$P^\mu = \int_{\mathcal{D}} d\mathcal{D}_\nu(\Theta^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}). \quad (2.90)$$

Estas energías construidas a partir de densidades pseudotensoriales son casos particulares del enfoque más abarcador de las energías gravitatorias cuasilocales, investigado intensamente en las últimas décadas (ver [Liu et al., 2011] y [Szabados, 2009]). La búsqueda misma de una expresión para la energía gravitatoria ha sido cuestionada. Muchas críticas se basan en el principio de equivalencia, mencionado anteriormente. En palabras de [Misner et al., 1973]:

“Anyone who looks for a magic formula for ‘local gravitational energy’ is looking for the right answer to the wrong question.”

Sin embargo, existen varios argumentos y motivaciones para encontrar una expresión local o cuasilocal de la energía gravitatoria:

- 1 Pese a que los efectos gravitatorios no se pueden “detectar” en un punto y la conexión de Levi-Civita puede hacerse nula en coordenadas normales, cantidades construidas a partir de derivadas segundas de la métrica como el tensor de Bel-Robinson y la curvatura de Riemann no son nulas: estas cantidades representan la presencia local de curvatura [Butcher et al., 2008].

- 2 Existen buenos argumentos para pensar que las ondas gravitacionales transmiten energía (ver [Chen et al., 2016])
- 3 Las fuerzas de marea de Júpiter calientan el satélite Io produciendo volcanismo. Este trabajo de marea es realizado por el campo gravitatorio [Favata, 2001b].
- 4 Un estudio termodinámico completo de agujeros negros precisa una noción de energía gravitatoria.
- 5 El cálculo de energías gravitatorias es útil en contextos cosmológicos.

Por otra parte, el concepto de energía en todas las teorías físicas es una propiedad que depende fuertemente del sistema de referencia considerado. Esto es una dificultad importante en RG ya que no existe una noción preferencial de sistema de referencia, mientras que en Relatividad Especial siempre se consideran sistemas inerciales. Además, en espacios-tiempo asintóticamente planos, se espera que las construcciones de energía gravitatoria cuasilocales reproduzcan resultados aceptados como la masa y el momento angular ADM o la masa de Bondi-Sachs

### 2.9.3. Energía-impulso gravitacional en Gravedad de Torsión

Adoptando el formalismo y la interpretación de las tétradas en Gravedad de Torsión es posible derivar una noción de energía-gravitatoria que ha resultado útil en muchos escenarios (ver [Maluf et al., 2007b], [Maluf, 2013] y [Ulhoa et al., 2010]). Una de las ventajas más importantes de este enfoque es una definición de tensor de energía impulso bien comportado frente a difeomorfismos y que obedece una ecuación de conservación deducida naturalmente de las ecuaciones de campo de la teoría. En efecto, a partir de las ecuaciones de campo, derivando con respecto a  $\mu$  y considerando la antisimetría del superpotencial, se obtiene:

$$\partial_\mu \left[ \sqrt{-g}(t^{\mu a} + \Theta^{\mu a}) \right] = \nabla_\mu (t^{\mu a} + \Theta^{\mu a}) = 0, \quad (2.91)$$

donde  $t^{\mu a} = e_\nu^a t^{\mu\nu}$  está dado por (2.56). Debemos notar que la ecuación (2.91) no es invariante local de Lorentz. Sin embargo, esta libertad de gauge en la definición de del tensor de energía impulso puede resolverse físicamente si se elige una tétrada que represente un sistema de referencia  $K$  particular. Teniendo en cuenta (2.91), definimos el tetraimpulso gravitatorio como:

$$P^a = \int_{\mathcal{D}} (t^{\lambda a} + \Theta^{\lambda a}) d\mathcal{D}_\lambda \equiv 4\kappa \int_{\mathcal{D}} \nabla_\sigma (\Sigma^{a\lambda\sigma}) d\mathcal{D}_\lambda. \quad (2.92)$$

En particular, denominamos energía total a la componente cero de este tetraimpulso:

$$E = P^{(0)} = \int_{\mathcal{D}} (t^{\lambda\mu} + \Theta^{\lambda\mu}) U_\mu d\mathcal{D}_\lambda, \quad (2.93)$$

donde  $U_\mu = e_\mu^{(0)}$  es el campo de velocidad de la congruencia. Eligiendo coordenadas de manera que  $x^0$  sea constante en la hipersuperficie espacial  $\mathcal{D}$  considerada,

tenemos  $d\mathcal{D}_\lambda \equiv \delta_\lambda^0 \sqrt{-g} d^3x$ . Además, siendo  $\Sigma^{a\lambda\sigma}$  un tensor antisimétrico, si este es bien comportado en la hipersuperficie, podemos utilizar el teorema de Stokes en cuatrodimensiones de manera que la expresión (2.92) se reduce a:

$$P^a = \int_{\mathcal{D}} dx^3 \sqrt{-g} (t^{0a} + \Theta^{0a}) \equiv 4\kappa \oint_{\partial\mathcal{D}} \Sigma^{a\lambda\sigma} d\mathcal{S}_{\lambda\sigma}, \quad (2.94)$$

invariante frente a reparametrizaciones temporales, invariante ante cambios de coordenadas en la hipersuperficie e invariante global de Lorentz. De (2.91), obtenemos la ecuación de conservación:

$$\frac{dP^a}{dx^0} = -\Psi_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^a - \Psi_M^a, \quad (2.95)$$

donde en el lado derecho tenemos los flujos gravitatorios y de materia respectivamente que podemos transformar en integrales de superficie vía el teorema de Gauss dados por:

$$\Psi_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^a := \oint_{\partial\mathcal{D}} \sqrt{-g} t^{ja} d\mathcal{S}_j, \quad (2.96)$$

$$\Psi_M^a := \oint_{\partial\mathcal{D}} \sqrt{-g} \Theta^{ja} d\mathcal{S}_j, \quad (2.97)$$

Es interesante notar que la expresión de la energía total solo depende de los valores que toma el superpotencial en el borde  $\partial\mathcal{D}$  de la hipersuperficie tipo espacio  $\mathcal{D}$ . El tensor de energía impulso no es simétrico para cualquier tétrada, con lo cual la conservación del momento angular no está asegurada. Una definición para el momento angular gravitatorio puede conseguirse en la formulación hamiltoniana de la gravedad teleparalela:

$$L^{ab} = 4\kappa \int_{\mathcal{D}} d^3x \sqrt{-g} (\Sigma^{a0b} - \Sigma^{b0a}). \quad (2.98)$$

En el espacio de fase de la teoría, es posible ver que estas definiciones de momento satisfacen el álgebra del grupo de Poincaré [Maluf et al., 2006]:

$$\{P^a, P^b\} = 0, \quad (2.99)$$

$$\{P^a, L^{bc}\} = \eta^{ab} P^c - \eta^{ac} P^b, \quad (2.100)$$

$$\{L^{ab}, L^{cd}\} = \eta^{ac} L^{bd} + \eta^{bd} L^{ac} - \eta^{ad} L^{bc} - \eta^{bc} L^{ad}. \quad (2.101)$$

# Capítulo 3

## Axiomática

En este capítulo axiomatizamos la Gravedad de Torsión en base a los desarrollos presentados en el segundo capítulo. Realizamos primero una breve exposición del método axomático y algunos problemas filosóficos de la RG.

### 3.1. El método axiomático

El proceso de construcción de una teoría es esencialmente heurístico. Sus fundamentos se establecen en general luego de un período de desarrollo. Sin embargo, aún en su estado de maduración, la teoría puede estar sujeta a problemas de interpretación si es lo suficientemente compleja. Para clarificar sus supuestos fundamentales es conveniente realizar una *axiomatización*. Este método consiste en ordenar el cuerpo de conocimientos de la teoría de forma lógica, clara y sistemática. En este contexto, una teoría  $T$  es un conjunto de enunciados  $s$  cerrado bajo operaciones de implicación lógica sobre la base axiomática  $\mathcal{A}$ , es decir  $T = \{s : \mathcal{A} \rightarrow s\}$ .

Los orígenes de la axiomática pueden rastrearse hasta el siglo V a.c con los primeros trabajos de Euclides. Desde entonces, ha sido frecuentemente utilizado en ciencia [Bunge, 2016]. El primer proponente de la axiomatización en teorías físicas, fue David Hilbert, impulsor de la axiomática moderna [Corry, 1997]. En sus famosos 23 problemas presentados en Göttingen, la axiomatización de las teorías físicas aparece en el sexto lugar:

*“The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which already today mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics.”* [Hilbert, 1902]

A diferencia de la matemática, las teorías físicas deben incluir entre sus postulados axiomas semánticos  $\mathcal{A}_S$  que provean de sentido y referencia fáctica a los conceptos matemáticos presentados en los axiomas formales  $\mathcal{A}_F$  [Bunge, 1973]. Por ejemplo, el enunciado “ $\mathbf{E}$  denota un campo vectorial diferenciable” es un axioma formal, mientras que “ $\mathbf{E}$  representa la intensidad de un campo eléctrico  $\sigma$ ” es un axioma semántico que relaciona el constructo matemático (el campo vectorial) con

una propiedad del referente físico (el campo electromagnético). La base axiomática de una teoría fáctica se compone entonces como

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_F \wedge \mathcal{A}_S \wedge \mathcal{A}_P,$$

donde  $\mathcal{A}_P$  denomina a los axiomas físicos en donde se presentan las relaciones entre los diferentes constructos que representan entidades físicas (usualmente en forma de ecuaciones integro-diferenciales). Los referentes de una teoría, i.e. los objetos de los cuales la teoría trata, deben quedar explicitados en la base axiomática. Podemos entonces construir diferentes teorías, con diferentes referentes, si mantenemos los axiomas físicos y formales pero cambiamos los axiomas semánticos. Esto se denomina usualmente cambiar la interpretación de la teoría. Por supuesto además de la base axiomática, toda teoría presupone un trasfondo filosófico y formal adecuado.

El enfoque axiomático descrito en esta sección se denomina *axiomática dual* [Bunge, 2016] y permite estudiar una teoría explicitando el contenido físico de manera precisa, utilizando las herramientas de una semántica formal [Bunge, 1974]. Los pocos ejemplos que presentan un tratamiento adecuado de este aspecto meta-teórico pueden verse para Mecánica Cuántica (ver [Perez-Bergliaffa et al., 1996] y [Perez Bergliaffa et al., 1993]), Relatividad General (ver [Covarrubias, 1993]) y otras teorías clásicas (ver [Bunge, 1967]).

## 3.2. Axiomática para la Gravedad Teleparalela

Retomemos nuestra discusión sobre la GT resumiendo los resultados del Capítulo 2 en la Tabla 3.1. Se sabe que es posible establecer una equivalencia formal entre las ecuaciones de campos y de movimiento en ambas teorías (ver sección 4.2). Sin embargo, la equivalencia total entre ambas solo estará dada si todo teorema en  $T_{GT}$  se puede obtener en  $T_R$  y viceversa. Formalmente, esto implica construir axiomatizaciones para ambas teorías y mostrar si es posible establecer un isomorfismo entre ambas,  $\mathcal{A}(T_{GT}) \longleftrightarrow \mathcal{A}(T_R)$ . Notar que esta doble implicación involucra también a los axiomas semánticos y no solo a los axiomas formales. Presentamos ahora una axiomatización de la GT, la cual contrastaremos con la RG, cuya axiomatización relegamos al apéndice A.

	Gravedad de Torsión	Relatividad General
Geometría	Weitzenböck $\mathcal{G}_W$	Riemann $\mathcal{G}_R$
Objeto dinámico	$e_\mu^a$ (16 componentes)	$g_{\mu\nu}$ (10 componentes)
Descripción Gravitatoria	$T_{\nu\rho}^\mu$ (torsión)	$R_{\rho\nu\sigma}^\mu$ (curvatura)
Ecuaciones de campo	$\partial_\nu(\sqrt{-g} \Sigma^{a\lambda\nu}) = (\sqrt{-g}/4\kappa)(t^{a\lambda} + \Theta^{a\lambda})$	$G^{\mu\nu} = (1/2\kappa) \Theta^{\mu\nu}$
Ecuaciones de movimiento	$\frac{d^2x}{d\tau^2} + {}^* \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = K_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}$	$\frac{d^2x}{d\tau^2} + {}^0 \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0$

**Cuadro 3.1:** Tabla comparativa entre la Gravedad de Torsión y la Relatividad General

Antes de presentar los axiomas que componen la teoría, debemos detallar el trasfondo de la teoría, que incluye el aspecto formal, el filosófico y el profísico. Explicamos la base primitiva de símbolos que posee la teoría, algunas definiciones, y luego los axiomas, que dividimos en cuatro grupos: espacio-tiempo, materia, sistemas de referencia y dinámica. Cada uno de los axiomas es de índole formal, semántica (AS), o física. Estos últimos comprenden el núcleo de la teoría y tratan sobre el sistema físico en sí, e.g. leyes o ecuaciones dinámicas que relacionan diferentes propiedades del referente. Comencemos con el trasfondo.

## Trasfondo

El trasfondo formal que necesitamos para construir la teoría comprende esencialmente la lógica de predicados, el análisis matemático y la geometría diferencial. Nuestro enfoque filosófico es realista y materialista. Una teoría espacio-temporal, como la que construiremos, es fundamental en el sentido de que no supone un trasfondo físico adicional, e.g. como la física del estado sólido supone la mecánica cuántica. Existen diversas propuestas para describir una composición más fundamental del espacio-tiempo como en *Causal Sets* (ver [Sorkin, 2003]) y *Quantum Loop Gravity* (ver [Rovelli, 2004]), que no necesitamos en nuestra descripción clásica. El trasfondo profísico de la teoría consiste solamente en una teoría de sistemas, que permitirá entender la relación entre el espacio-tiempo y la materia ordinaria.

## Base generadora y definiciones

La base primitiva de la teoría se compone de once elementos:

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{ET}, \Sigma, \mathbb{K}, \mathcal{M}, \{\mathbf{g}\}, \{\mathbf{e}_a\}, \{\Theta\}, \{\phi\}, \{\Lambda_b^{a'}\}, \kappa, \Lambda\} \quad (3.1)$$

La forma y significado de cada uno de estos símbolos se describen en la base axiomática. Primero, es conveniente explicitar algunas definiciones que se utilizarán en la axiomática, en particular, los tensores definidos en la geometría de Weitzenböck:

**D<sub>1</sub>**  $T_{\mu\nu}^\rho := e_a^\rho (\partial_\nu e_\mu^a - \partial_\mu e_\nu^a)$  es el tensor de torsión.

**D<sub>2</sub>**  $K_{\mu\nu}^\rho := \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (T_{\nu\rho\mu} + T_{\mu\sigma\nu} - T_{\sigma\mu\nu})$  es el tensor de *contorsión*.

**D<sub>3</sub>**  $\Sigma^{\rho\mu\nu} := \frac{1}{2} (K^{\mu\nu\rho} - g^{\rho\nu} T_{\sigma}^{\sigma\mu} + g^{\rho\mu} T_{\sigma}^{\sigma\nu})$  es el *superpotencial*.

**D<sub>4</sub>**  $t^{\lambda\mu} := \kappa (4\Sigma^{bc\lambda} T_{bc}^{\mu} - g^{\lambda\mu} \Sigma^{bcd} T_{bcd})$  es el tensor energía impulso gravitatorio.

## Base axiomática

La base axiomática se conforma de  $\mathcal{A}(T_{GT}) = \bigwedge_i^{16} \mathbf{A}_i$ .

## Axiomas

### Grupo I: Espacio-tiempo

**A<sub>1</sub>**  $\mathcal{M}$  es una variedad diferencial Hausdorff paracompacta  $C^\infty$ , 4-dimensional, real y pseudo-riemanniana.

**A<sub>2</sub>**  $\{\mathbf{g}\}$  es una familia de tensores métricos de rango 2, simétricos, y signatura +2 definidos sobre  $\mathcal{M}$ . Todos los principales menores de  $(g^{\mu\nu})$  son negativos (*Condición de threading*).

**A<sub>3</sub>**  $\{\phi\}$  es una familia de isometrías:  $\phi^*\mathbf{g} = \mathbf{g}$ .

**A<sub>4</sub>** (AS) El espacio-tiempo  $\mathcal{ET}$  es el sistema físico representado por la clase de equivalencia de difeomorfismos isométricos de una métrica dada, i.e.  $\mathcal{ET} \hat{=} \langle \mathcal{M}, \mathbf{g} \rangle$ .

### Grupo II: Materia

**A<sub>5</sub>**  $\Sigma$  es una familia no vacía de elementos  $\sigma \in \Sigma$ .

**A<sub>6</sub>** (AS) Cada  $\sigma$  es un sistema físico distinto al espacio-tiempo.

**A<sub>7</sub>** (AS) Para cada  $\sigma$  existe un tensor  $\Theta \equiv \Theta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  simétrico que representa la energía y el momento del sistema.

### Grupo III: Sistemas de referencia

**A<sub>8</sub>** La tétrada  $\{\mathbf{e}_a(p)\}$  es una base ortonormal del  $T_pM$  en cada punto de la variedad de manera que  $e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$ .

**A<sub>9</sub>**  $\mathbb{K} \subset \Sigma$  es una familia no vacía de elementos  $K \in \mathbb{K}$ .

**A<sub>10</sub>** (AS)  $K$  es un sistema de referencia físico.

**A<sub>11</sub>** (AS) Un sistema de referencia  $K$  está representado por una curva  $\gamma(\tau) \subset \mathcal{M}$  tipo tiempo y una tétrada  $\{\mathbf{e}_a(\tau)\}$  definida sobre  $\gamma(\tau)$ , donde  $\mathbf{e}_0 \equiv \mathbf{U}$  es el vector tangente de  $\gamma(\tau)$ , i.e.  $\langle \gamma(\tau), \mathbf{e}_a \rangle \hat{=} K$ .

**A<sub>12</sub>**  $\{\Lambda_a^{b'}(x)\}$  es una familia de transformaciones de Lorentz (local o global).

**A<sub>13</sub>** (AS)  $\forall K, K' \in \mathbb{K}, \exists \Lambda_a^{b'}$  tal que si  $\langle \gamma'(\tau), \mathbf{e}_{a'} \rangle \hat{=} K'$  y  $\langle \gamma(s), \mathbf{e}_a \rangle \hat{=} K$  entonces  $\Lambda_a^{b'}(x) \mathbf{e}_{b'} = \mathbf{e}_a$  en el punto donde se encuentran las curvas (*Hipótesis de localidad*).

**A<sub>14</sub>** Dado una congruencia de curvas  $\mathcal{C}$  donde cada  $\gamma_q \subset \mathcal{C}$  es la curva asociada a un sistema  $K$ , si cada curva tiene asociada una tétrada de manera que  $\mathbf{U}(\tau, q) \equiv \mathbf{e}_0$  entonces  $K_{\mathcal{C}} \in \mathbb{K}$  es una *congruencia de sistemas de referencia*.

*Grupo IV: Dinámica*

**A<sub>15</sub>** Sea  $\kappa := c^3/16\pi G$  y  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , donde  $[\Lambda] = [L]^{-2}$ ,  $c$  es la velocidad de la luz y  $G$  la constante de Newton.

**A<sub>16</sub>** (Axioma físico) Una congruencia  $K_{\mathcal{C}}$  de sistemas está restringida por:

$$\partial_{\nu}(\sqrt{-g}\Sigma^{a\lambda\nu}) = \frac{\sqrt{-g}}{4k}e_{\mu}^a\left(t^{\lambda\mu} + \Theta^{\lambda\mu} + \frac{2}{\kappa}g^{\mu\lambda}\Lambda\right). \quad (3.2)$$

### 3.3. Comentarios

1. En esta teoría, el espacio-tiempo es un existente, con propiedades y ecuaciones dinámicas [Romero, 2016]. Esta representación continua del espacio-tiempo es válida al menos a escalas de  $10^{-15}$  cm (ver [Hawking and Ellis, 1973]). Como mencionamos, una estructura más fundamental de estos eventos debe ser tratada por una teoría de gravitación cuántica.
2. La condición sobre la métrica **A<sub>2</sub>** asegura la existencia, para todo sistema de coordenadas, de curvas tipo tiempo estáticas. Esto permite la separación de tiempo y espacio para un dado sistema de referencia. Existen condiciones más fuertes que pueden ser impuestas a las coordenadas para evitar curvas temporalmente cerradas como las condiciones de *slicing* o las condición de *Lichnerowicz*. Esta últimas no pueden ser incorporadas a la estructura geométrica del espacio-tiempo y solo representan restricciones adicionales a las coordenadas para preservar la cronología [Bini et al., 2012].
3. Los sistemas admisibles en  $\Sigma$  son macroscópicos; la simetría del tensor de energía-impulso  $\Theta$  implica que la materia que describimos no tiene spin. Este es el mismo tensor que encontramos en Relatividad General. Existen otras teorías alternativas que permiten la inclusión de spin pero deben incluir curvatura y torsión, i.e. tienen más grados de libertad que la RG y por lo tanto diferentes ecuaciones dinámicas. Recordemos que la GT utiliza solamente la torsión de Weitzenbock. La inclusión de las tétradas, objetos que transforman según el grupo de Lorentz, permite acoplar otras representaciones del grupo  $SO(3,1)$  como espinores, que representan partículas fermiónicas (ver por ejemplo [Aldrovandi and Pereira, 2013]).
4. La forma del tensor de energía impulso  $\Theta$  debe ser suplementada por la teoría que representa los sistemas físicos  $\sigma \in \mathbb{K}$ . Notemos que las ecuaciones de campo de la GT (y también de la RG) son afectadas solamente por la distribución de energía de los sistemas, independientemente de la dinámica que estos sigan y de su naturaleza. Podemos entender esto último como un principio de equivalencia débil generalizado. Sin embargo, debemos remarcar que el tensor de energía-impulso debe ser compatible con las ecuaciones de campo, es decir, debe ser simétrico y conservarse localmente,  $\nabla_{\mu}\Theta^{\mu\nu} = 0$ . Es posible, desde

la formulación lagrangiana obtener el tensor de energía-impulso variando la acción de materia con respecto a la tétrada (o equivalentemente a la métrica). La relación entre este tensor 'métrico' y el obtenido a través de las variaciones del campo puede verse por ejemplo en [Saravi, 2004].

5. Es usual la práctica de utilizar la conservación local para obtener ecuaciones de movimiento. Existen varios métodos propuesto para conseguir con ello la ecuación geodésica de una partícula libre; de aquí, se argumenta que el principio débil de equivalencia se deriva como teorema de las ecuaciones de campo. Recientemente se ha visto que estos métodos no son completamente consistentes (ver [Tamir, 2012]). De esta manera, como aclaramos en el punto anterior, las ecuaciones dinámicas de los sistemas  $\sigma$  no forman parte de la axiomática y deben ser suplementadas por otras teorías, incluida la ecuación de movimiento geodésico. Una forma unificada de tratar estas teorías es estudiar el lagrangiano del sistema total (gravitatorio+materia) y variar la acción con respecto a los campos que representan esos sistema (ver Teorema 5 en 4.3) .
6. Dado un sistema de referencia  $K$ , existen infinitas congruencias de sistemas  $K_C$  asociados a él. Los sistemas de referencia pueden estar asociados a partículas de prueba y las congruencias a fluidos o polvo. Los primeros se suelen identificar con "observadores " y los últimos a "laboratorios ". Considerar objetos más generales como SR, e.g. cuerpos rígidos, atañe ciertas dificultades conceptuales [Blanchet et al., 2011].
7. El axioma  $\mathbf{A}_13$  indica que la transformación entre sistemas acelerados se realiza a través de transformaciones de Lorentz locales (ver discusión en Sección 2.8).
8.  $\Lambda$  es la llamada constante cosmológica que debe entenderse, en principio, como un parámetro libre de la teoría. Su significado físico dentro del contexto de la GT ha sido estudiado en [Maluf et al., 2012] y [Ulhoa et al., 2010].
9. Las cantidades  $T_{\nu\rho}^\mu$ ,  $K_{\nu\rho}^\mu$  y  $t^{\mu\rho}$  son las componentes de tensores definidos sobre la variedad pero no son escalares de Lorentz. Su definición depende de un conjunto de tétradas  $\mathbf{e}_a$  relacionadas por transformaciones globales de Lorentz pero cambia ante transformaciones locales.

# Capítulo 4

## Análisis

Nuestro objetivo ahora es comparar la GT con la RG a partir de la axiomática construida en el Capítulo 3 y la axiomática de la RG construida en el apéndice B. Si las teorías son totalmente equivalentes, entonces debemos mostrar que  $\mathcal{A}(T_{GT}) \longleftrightarrow \mathcal{A}(T_R)$ . Sin embargo, la inclusión del grupo III de axiomas en la GT introduce nuevo contenido semántico con respecto a RG. Mostraremos esto de manera rigurosa, probando primero que la RG se puede recuperar completamente a partir de la GT y luego que existen teoremas en la GT que no pueden ser recuperados en el formalismo métrico de la RG. Ambos razonamientos pueden ser presentados en forma silogística de la siguiente manera:

$$\diamond T_{GT} \Rightarrow T_R$$

- (P<sub>1</sub>) A partir de la tétrada es posible recuperar la métrica y con ello la geometría de Riemann  $\mathcal{G}_R$ .
- (P<sub>2</sub>) Las ecuaciones de campo de la GT implican las ecuaciones de Einstein.
- (C) Todo el contenido físico de la RG se puede recuperar a partir de la GT, es decir  $\mathcal{A}(T_{GT}) \longrightarrow \mathcal{A}(T_R)$ .

$$\diamond T_R \not\Rightarrow T_{GT}$$

- (P'<sub>1</sub>) La tétrada tiene un contenido semántico diferente al de la métrica.
- (P'<sub>2</sub>) A partir de las ecuaciones de campo de la GT es posible obtener leyes de conservación que no pueden reproducirse en RG.
- (C') La gravedad de torsión provee un marco más amplio para describir la gravitación y no es equivalente a la RG.

Para demostrar ambos argumentos comencemos por mostrar y comparar punto a punto las estructuras de ambas teorías axiomatizadas, esto es, clasificar sus referentes y su representación.

## 4.1. Referentes

Si queremos comparar ambas teorías, debemos primero ver que ambas tratan de lo mismo, i.e. que poseen los mismos referentes. Con la construcción axiomática es trivial mostrar que la clase de referencia fáctica<sup>1</sup> de ambas teorías es idéntica:

$$\mathcal{R}(T_{GT}) = \mathcal{R}(T_R) = \{\mathcal{ET}, \Sigma\}, \quad (4.1)$$

es decir, ambas teorías tratan del espacio-tiempo y la materia<sup>2</sup>. Notar que la caracterización de los sistemas de referencia no implica la inclusión de nuevas entidades; estos están asociados a sistemas materiales.

## 4.2. Representación

La RG y la GT difieren en sus objetos dinámicos; las ecuaciones de la RG son ecuaciones para la métrica, mientras que las ecuaciones de la GT son ecuaciones para la tétrada. Esto indica que el espacio de estados de la teoría es diferente. Describámoslos brevemente:

### Relatividad General

La RG utiliza el formalismo de coordenadas (bases holónomas) sobre  $\mathcal{M}$  y una métrica Lorentziana. La dinámica de la teoría se formula en la geometría de Riemann  $\mathcal{G}_R = \langle \mathcal{M}, \mathbf{g}, {}^0\Gamma \rangle$ , donde la conexión de Levi Civita  ${}^0\Gamma$  está totalmente determinada por la métrica. La conexión permite definir un tensor de curvatura y sus asociados:

**D<sub>5</sub>**  $R_{\mu\lambda\nu}^{\rho} = 2\partial_{[\lambda} {}^0\Gamma_{\nu]\mu}^{\rho} + 2 {}^0\Gamma_{\sigma[\lambda}^{\rho} {}^0\Gamma_{\nu]\mu}^{\sigma}$  es el tensor de curvatura de Riemann.

**D<sub>6</sub>**  $R_{\mu\nu} := R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$  es el tensor de Ricci.

**D<sub>7</sub>**  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci.

**D<sub>8</sub>**  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  es el tensor de Einstein.

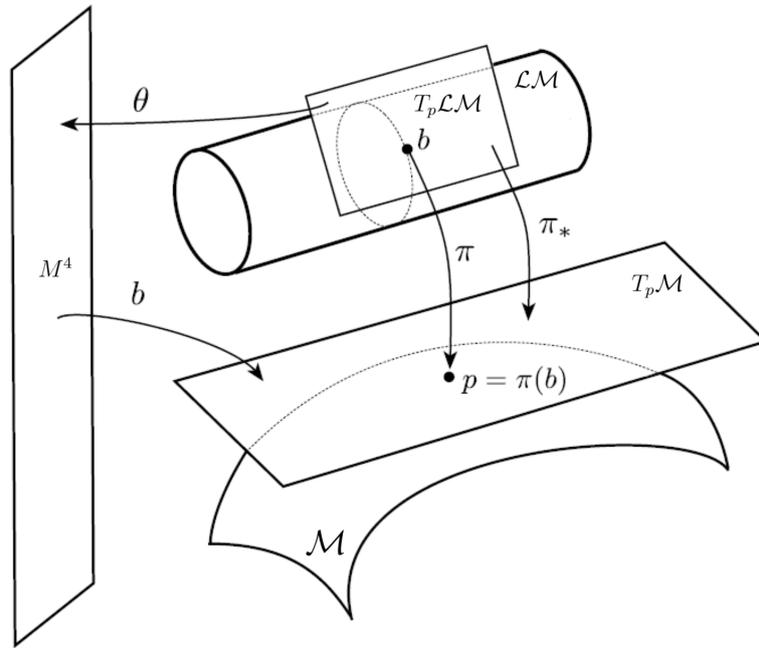
y con ello las ecuaciones de Einstein, ecuaciones de segundo orden no lineales que determinan la métrica. Esta métrica y todas las cantidades construidas en la geometría de Riemann, que dependen exclusivamente de la métrica, representan propiedades del espacio-tiempo, ya que  $\mathcal{ET} \hat{=} \{\mathcal{M}, \mathbf{g}\}$ . Las simetrías propias de esta teoría están dadas por el grupo  $\text{Diff}(\mathcal{M})$ . Con ello, es posible estudiar modelos genéricos de espacio-tiempo  $M = \langle \mathcal{M}, \mathbf{g}, T^{\mu\nu} \rangle$  y determinar geodésicas, singularidades, propiedades globales, entre otras características [Hawking and Ellis, 1973].

<sup>1</sup>La clase de referencia fáctica es semánticamente cerrada en una teoría axiomatizada, de manera que  $\mathcal{R}(\wedge_i \mathbf{A}_i) = \wedge_i \mathcal{R}(\mathbf{A}_i)$ .

<sup>2</sup>La inclusión de dos clases de entidades con características esencialmente diferentes no es extraña en teorías clásicas, e.g. la electrodinámica es una teoría que refiere a partículas cargadas (fuentes) y a campos. Por supuesto, estas entidades pueden ser emergentes de un sistema más fundamental.

### Gravedad de Torsión

La GT utiliza como objeto dinámico las tétradas (bases no holónomas), que representan en cada punto sistemas locales de referencia (Grupo II de axiomas). El espacio de estados de la teoría se formula de manera natural en el marco geométrico de las bases fibradas, en particular, las bases fibradas de Lorentz<sup>3</sup>. Esto implica que cada punto de la variedad contiene un “espacio interno” (también llamado fibra), que representa el conjunto de todas las bases ortonormales en ese punto. Estas tétradas que constituyen el espacio interno permiten establecer localmente las propiedades de cualquier otro sistema físico (vía Hipótesis de Localidad) (ver Figura 4.1)



**Figura 4.1:** Representación del fibrado de bases ortonormales. Notar que este fibrado tiene la particularidad de poseer una ‘forma soldadora’  $\theta$  que conecta unívocamente el espacio interno con el punto de la variedad. Esta diferencia fundamental con otras teorías de gauge que utilizan este marco geométrico muestra que la GT si se construye como una teoría de gauge, será un teoría no estandard, en particular, la conexión asociada tiene torsión. Ver para más detalle [Aldrovandi and Pereira, 2013]

Esta manera de formular la teoría en términos de marcos de referencia representados por fibrados ortonormales se conoce como el *frame bundle approach* de RG que constituye la base para construir la teoría de gauge traslacional de la gravitación (ver [Aldrovandi and Pereira, 2013]) y para aplicaciones a mecánica cuántica y cosmología, así como también es utilizado para estudiar algunas cuestiones de fundamentos [Prugovecki, 2013]. Teniendo en cuenta este enfoque, la dinámica de

<sup>3</sup>Esto es siempre posible si la variedad es orientable, compacta y tiempo orientable

la GT se construye de manera natural con la geometría de Weitzenböck  $\mathcal{G}_W$ <sup>4</sup>. La conexión de Weitzenböck permite definir una noción de teleparalelismo absoluto en la variedad y a partir de la torsión (i.e. las constantes de estructuras de la tétrada), se formulan las ecuaciones de campo.

### Conexión de representaciones

Debemos ahora conectar ambas representaciones. Como hemos establecido en el Capítulo 2, la tétrada es un objeto geométrico de 16 componentes mientras que la métrica tiene 10 componentes. Ambas están relacionadas por:

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab}, \quad (4.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  es invariante frente a transformaciones locales de Lorentz de la tétrada. Determinando la tétrada, la métrica queda totalmente especificada y con ella todos las características geométricas del espacio-tiempo en Relatividad General. Sin embargo, al fijar la métrica todavía existen 6 parámetros libres en la tétrada que corresponden a la elección particular de un sistema de referencia. La tétrada entonces tiene una capacidad representativa mayor que la métrica. La invarianza local de Lorentz se pierde para tensores definidos en la geometría de Weitzenböck  $\mathcal{G}_W$ , ya que estos dependen de la elección global de la tétrada  $e_a$  como veremos en el Corolario 1 a continuación. Es importante remarcar que una vez fijada la tétrada y establecido un sentido de paralelismo absoluto en la variedad la torsión y los tensores construido con ella son auténticos tensores bien comportados frente a diffeomorfismos. Vemos así que cualquier cantidad construida en  $\mathcal{G}_W$  depende intrínsecamente de la elección global del SR a menos de transformaciones globales de Lorentz. Es un error entonces afirmar que la torsión  $T^{\rho}_{\mu\nu}$  representa en esta teoría la interacción gravitatoria ; esta es una cantidad geométrica que representa el marco de referencia global adoptado dado por la tétrada, donde esta última está restringida por el espacio-tiempo de fondo por (4.2).

### Ecuaciones de campo

Si la dinámica de la GT no introduce ningún grado de libertad adicional a RG, las ecuaciones de campo deben ser invariante local de Lorentz (ILL) de manera de especificar la tétrada a menos de 6 parámetros. Mostramos ahora de manera explícita que a partir de las ecuaciones de campo de torsión  $\mathbf{A}_{16}$  se pueden obtener las ecuaciones de Einstein. Para ello, conectaremos los tensores definidos en  $\mathcal{G}_R$  con aquellos definidos en  $2\mathcal{G}_W$ , considerando la relación entre la conexión de Weitzenböck  ${}^*\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$  y la conexión de Levi-Civita  ${}^0\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ :

$${}^*\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = {}^0\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + K^{\rho}_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

<sup>4</sup>El enfoque en base a fibrados también se formula con la conexión de Riemann. Sin embargo, la geometría de Weitzenböck constituye la geometría más sencilla para formular la dinámica con la tétrada

donde  $K_{\mu\nu}^\rho$  es el tensor de contorsión. Utilizando (4.3), podemos escribir el tensor de curvatura en términos de la contorsión y la derivada covariante de Riemann como [Li et al., 2011]:

$$R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \nabla_\nu K_{\mu\lambda}^\rho - \nabla_\lambda K_{\mu\nu}^\rho + K_{\sigma\nu}^\rho K_{\mu\lambda}^\sigma - K_{\sigma\lambda}^\rho K_{\mu\nu}^\sigma. \quad (4.4)$$

A partir de (4.4) podemos escribir el tensor de Ricci como:

$$R_{\mu\nu} = \nabla_\nu K_{\mu\rho}^\rho - \nabla_\rho K_{\mu\nu}^\rho + K_{\sigma\nu}^\rho K_{\mu\rho}^\sigma - K_{\sigma\rho}^\rho K_{\mu\nu}^\sigma. \quad (4.5)$$

Consideremos el término  $\nabla_\rho K_{\mu\nu}^\rho$  de la ecuación anterior. De la definición de superpotencial tenemos:

$$\nabla_\rho K_{\mu\nu}^\rho = \nabla^\rho K_{\rho\mu\nu} = 2\nabla^\rho \Sigma_{\nu\rho\mu} + g_{\nu\mu} \nabla^\rho T_{\rho\sigma}^\sigma - g_{\nu\rho} \nabla^\rho T_{\nu\sigma}^\sigma \quad (4.6)$$

Como se tiene que  $K_{\rho\mu}^\mu \equiv -T_{\rho\mu}^\mu$ , entonces  $g_{\nu\rho} \nabla^\rho T_{\mu\sigma}^\sigma = -\nabla_\nu K_{\mu\rho}^\rho$  con lo cual, el tensor de Ricci se escribe:

$$R_{\mu\nu} = -2\nabla^\rho \Sigma_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\mu} \nabla^\rho T_{\rho\sigma}^\sigma + K_{\sigma\nu}^\rho K_{\mu\rho}^\sigma - K_{\sigma\rho}^\rho K_{\mu\nu}^\sigma. \quad (4.7)$$

Por otra parte, se puede ver fácilmente que se cumple la relación:

$$\Sigma_{\rho\mu}^\mu = K_{\rho\mu}^\mu \quad (4.8)$$

con lo cual, desarrollando con la definición del superpotencial, teniendo en cuenta las antisimetrías:

$$T^{\rho(\mu\nu)} = \Sigma^{\rho(\mu\nu)} = K^{(\rho\mu)\nu} = 0, \quad (4.9)$$

podemos escribir la expresión:

$$K_{\sigma\nu}^\rho K_{\mu\rho}^\sigma - K_{\sigma\rho}^\rho K_{\mu\nu}^\sigma = 2\Sigma_{\mu}^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma\nu}. \quad (4.10)$$

Así, el tensor de Ricci queda expresado como:

$$R_{\mu\nu} = -2\nabla^\rho \Sigma_{\nu\rho\mu} - g_{\nu\mu} \nabla^\rho T_{\rho\sigma}^\sigma + 2\Sigma_{\mu}^{\rho\sigma} K_{\rho\sigma\nu}. \quad (4.11)$$

El escalar de Ricci se escribe entonces:

$$R = -\mathbb{T} - 2\nabla^\mu (T_{\mu\nu}^\nu), \quad (4.12)$$

siendo  $\mathbb{T} := \Sigma^{\mu\nu\rho} T_{\mu\nu\rho} = -\Sigma^{\mu\nu\rho} K_{\mu\nu\rho}$ . A partir de (4.12) podemos ver que los lagrangianos de ambas teorías difieren en una divergencia total (ver discusión en Apéndice B) con lo cual las ecuaciones de movimientos son las mismas. Avanzaremos con la demostración a nivel de las ecuaciones; para ello, debemos construir el tensor de Einstein en términos de tensores de la geometría teleparalela. Utilizando (4.11) y (4.12), el tensor de Einstein se puede escribir como:

$$G^{\mu\nu} := R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 2\left(\nabla_\rho \Sigma^{\nu\mu\rho} + \Sigma^{\rho\sigma\mu} K_{\rho\sigma}^\nu + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}\mathbb{T}\right). \quad (4.13)$$

Desarrollemos la divergencia del superpotencial como:

$$\nabla_\rho \Sigma^{\nu\mu\rho} = \nabla_\rho (e_a^\nu \Sigma^{a\mu\rho}) = (\nabla_\rho e_a^\nu) \Sigma^{a\mu\rho} + e_a^\nu \nabla_\rho \Sigma^{a\mu\rho}. \quad (4.14)$$

Como la derivada covariante (de Levi-Civita) de la tétrada está dada por  $\nabla_\rho e_a^\nu = -e_a^\sigma K_{\sigma\rho}^\nu$ , usando la fórmula de la divergencia para tensores antisimétricos se obtiene:

$$\nabla_\rho \Sigma^{\nu\mu\rho} = K_{\sigma\rho}^\nu \Sigma^{\sigma\mu\rho} + \frac{1}{e} e_a^\nu \partial_\rho (e \Sigma^{a\mu\rho}). \quad (4.15)$$

Por último, se tiene que:

$$K_{\sigma\rho}^\nu \Sigma^{\sigma\mu\rho} + \Sigma^{\rho\sigma\mu} K_{\rho\sigma}^\nu = -\Sigma^{\rho\sigma\mu} T_{\rho\sigma}^\nu. \quad (4.16)$$

Combinando (4.15), (4.16) en (4.13) obtenemos:

$$G^{\mu\nu} = 2 \left( \frac{e_a^\nu}{e} \partial_\rho (e \Sigma^{a\mu\rho}) - \frac{1}{4\kappa} t^{\mu\nu} \right) \quad (4.17)$$

donde definimos el tensor  $t^{\mu\nu}$  como:

$$t^{\mu\nu} := \kappa \left( 4 \Sigma^{bc\mu} T_{bc}^\nu - g^{\mu\nu} \mathbb{T} \right), \quad (4.18)$$

Finalmente, utilizando la ecuación de campo dada por  $\mathbf{A}_9$  obtenemos

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \Theta^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Probamos así el siguiente teorema:

**Teorema 1.** *Las ecuaciones de campo en la GT implican las ecuaciones de Einstein.*

De este teorema se desprende el corolario de invarianza:

**Corolario 1.** *Las ecuaciones de campo de la GT son invariante ante transformaciones locales de la tétrada*

*Demostración.* El tensor de torsión  $T_{\nu\rho}^\mu[\mathbf{e}_a] = e_a^\mu (\partial_\nu e_\rho^a - \partial_\rho e_\nu^a)$  definido en la geometría de Weitzenböck a partir de una tétradas  $\mathbf{e}_a$  transforma correctamente frente a diffeomorfismos pero no es un escalar de Lorentz ya que no permanece invariante ante transformaciones locales de la tétrada. En efecto, se puede probar fácilmente que:

$$T_{\nu\rho}^\mu[\mathbf{e}_a] = T_{\nu\rho}^\mu[\mathbf{e}_{b'}] + e_a^\mu e_{\rho'}^b \omega_{\nu b}^a - e_{\nu'}^b e_a^\mu \omega_{\rho b}^a, \quad (4.20)$$

donde  $\omega_{\nu b}^a$  es la conexión de Lorentz y  $\mathbf{e}_{b'} = \Lambda_{b'}^a(x) \mathbf{e}_a$ . De la misma manera, los tensores  $t^{\mu\nu}$  y  $\Sigma^{\lambda\mu}$  tampoco son invariantes ante transformaciones de Lorentz. Sin embargo, todas las cantidades construidas en la geometría de Riemann son escalares de Lorentz ya que solo dependen de la métrica y no de las tétradas definidas en el espacio tangente. De esa manera, siendo  $G_{\mu\nu}$  un escalar de Lorentz, del teorema 1 obtenemos

$$G^{\mu\nu} = \frac{e_a^\nu}{e} \partial_\sigma (\Sigma^{a\mu\sigma}[\mathbf{e}_a]) - \frac{1}{4\kappa} t^{\mu\nu}[\mathbf{e}_a] = \frac{e_{b'}^\nu}{e} \partial_\sigma (\Sigma^{b'\mu\sigma}[\mathbf{e}_{b'}]) - \frac{1}{4\kappa} t^{\mu\nu}[\mathbf{e}_{b'}]. \quad (4.21)$$

□

Mostramos que debido a la ILL de las ecuaciones de Einstein, al ser equivalentes a las ecuaciones de la GT, estas también son invariante local de Lorentz. En nuestra axiomática, este teorema implica que las ecuaciones de campo son equivalentes para cualquier sistema de referencia, i.e. la estructura del espacio-tiempo es la misma para cualquier observador. Usualmente es la formulación original de Einstein del Principio de Covarianza General en término de coordenadas, i.e invarianza ante difeomorfismos, la que se asocia a la invarianza frente a cambios de marco de referencia de la teoría<sup>5</sup>. La usual confusión en la interpretación estriba en que las coordenadas cartesianas en el espacio de Minkowski representan a su vez una base ortonormal correspondiente a un observador inercial (ver Sección 2.8.3), mientras que en un espacio-tiempo curvado las coordenadas son simplemente etiquetas de los eventos que 'componen' al  $\mathcal{ET}$ . Finalmente, podemos expresar la primer tesis que expusimos al principio del capítulo como teorema:

**Teorema 2.** *Todos los axiomas de la RG son obtenidos de la base axiomática construida para la Gravedad de torsión,  $\mathcal{A}(GT) \rightarrow \mathcal{A}(RG)$ .*

*Demostración.* A partir del grupo I y II de axiomas, el axioma 8, junto con las definiciones de la geometría de Riemann y el Teorema 1 recuperamos toda la axiomática de la RG.  $\square$

En otras palabras, la caracterización global de un SR dada en la GT identifica unívocamente la métrica que describe al espacio-tiempo como en RG. Hemos distinguido entre cantidades ILL (construidas en la  $\mathcal{G}_R$ ) y cantidades que dependen intrínsecamente de la tétrada (construidas en la  $\mathcal{G}_W$ ). Con aquellas formadas exclusivamente con la métrica y la conexión de Levi-Civita podemos estudiar propiedades 'intrínseca' del espacio-tiempo que no necesitan adoptar un SR.

Por supuesto, esto no quiere decir que en RG no haya lugar para los SR; estos son necesarios para realizar verificaciones experimentales particulares. A diferencia de la GT, en la cual el objeto dinámico se utiliza para representar tanto el ET como el SR, en la RG se necesita agregar la representación de un SR *ad-hoc* para construir un modelo de medición o modelo específico,  $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}, T^{\mu\nu}, \mathbf{e}_a\}$  (ver [De Felice and Bini, 2010]). Estos modelos también aparecen en cosmología, dentro del llamado formalismo 1 + 3 de marcos ortonormales [Ellis and van Elst, 1999], donde el sistema de referencia se asocia a un fluido cosmológico.

Esta equivalencia en la dinámica pero inequivalencia en la representación de ambas teorías permite demostrar teoremas en la GT que no pueden ser derivados en la RG.

### 4.3. Teoremas representativos

Habiendo establecido las diferencias semánticas esenciales entre ambas teorías, probamos a continuación algunos teoremas representativos de la GT. Comencemos por enunciar el principio de equivalencia en el marco de esta teoría:

<sup>5</sup>En cambio, la invarianza frente a difeomorfismos posee otro tipo de interpretación, relacionada con el carácter '*background independent*' de la teoría, ver [Rovelli, 2004]

**Teorema 3.** (*Principio de Equivalencia Fuerte*) Dado una curva  $\gamma$  geodésica, siempre existe un sistema de referencia de Fermi, coordinado sobre la curva, de manera tal que:

$$e_{\hat{\alpha}}^{\mu} |_{\gamma} = \delta_{\hat{\alpha}}^{\mu}, \quad \partial_{\mu} e_{\hat{\alpha}}^{\nu} |_{\gamma} = 0, \quad g_{\mu\nu} |_{\gamma} = \eta_{\mu\nu}, \quad {}^* \Gamma_{\hat{\nu}\hat{\rho}}^{\hat{\mu}} |_{\gamma} = K_{\hat{\nu}\hat{\rho}}^{\hat{\mu}} |_{\gamma} = 0, \quad (4.22)$$

es decir, la torsión es cero sobre la curva. Todas las leyes de la física expresadas en las coordenadas adaptadas a este sistema se reducen a sus contrapartes en el espacio de Minkowski a primer orden.

*Demostración.* Ver sección 2.8.2 y ecuación 2.76. □

Existe una vasta literatura acerca del principio de equivalencia y distintas versiones del mismo (ver por ejemplo [Prugovecki, 2013]). Es importante notar que (a) el primer principio de equivalencia de Einstein [Schucking and Surowitz, 2015] establece la equivalencia entre un observador estacionario en un campo gravitatorio uniforme (sin efectos de marea) y un observador acelerado en Minkowski, (b) la aceleración con respecto a un espacio-tiempo dado es una cantidad absoluta <sup>6</sup> y no debe confundirse con el concepto newtoniano de aceleración [Mashhoon, 1994] y (c) la torsión está identificada con las características inerciales del SR mientras que la curvatura representa en general el gradiente de aceleración<sup>7</sup>. En resumen, a primer orden y para sistemas inerciales la estructura infinitesimal de la GT (y RG) es la misma que en Relatividad Especial. A segundo orden y para observadores acelerados, aparecerán efectos de curvatura e inerciales acoplados, i.e RG y Relatividad Espacial comparten la misma estructura infinitesimal (vía la Hipótesis de Localidad) pero no la misma estructura local [Friedman, 2014]. Esto implica que uno no puede deducir la invarianza de la teoría ante transformaciones locales de Lorentz a partir de el principio de equivalencia solamente; este se obtiene como un teorema aparte de las ecuaciones de campo (Corolario 1). Otra versión del Principio de equivalencia fuerte encontrada en la literatura hace referencia a la invarianza de todas las leyes clásicas de la física ante transformaciones de Lorentz locales; una extensión del Corolario 1.

Veamos ahora como derivar la solución de Schwarzschild en la GT:

**Teorema 4.** *La solución de vacío con simetría esférica y asintóticamente plana de sistemas estacionarios con respecto a este espacio-tiempo está dada por:*

$$e_a^{\mu} = \begin{pmatrix} \sqrt{c^2 - \frac{2Gm}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{1-2Gm/c^2r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

<sup>6</sup>Es interesante la relación entre el principio de equivalencia y el concepto de aceleración con la radiación de partículas cargadas que da lugar a aparentes paradojas [Rohrlich, 2007]

<sup>7</sup>Recientemente, Schulking ha propuesto que la gravitación es representada correctamente por la torsión y no por la curvatura. Su argumento se basa en que las propiedades de un objeto en un marco de referencia acelerado simulan un campo gravitatorio uniforme y por tanto también se debería considerar a estos sistemas como gravitatorios [Schucking and Surowitz, 2015]

*Demostración.* Si consideramos un espacio-tiempo con simetría esférica y estacionario, entonces tenemos cuatro vectores de Killings  $\xi_i$ , i.e  $\mathcal{L}_{\xi_i} g_{\mu\nu} = 0$ . De esa manera, un espacio-tiempo estacionario y esféricamente simétrico tiene en general la métrica:

$$ds^2 = -e^A dt^2 + e^B dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin \theta d\phi^2, \quad (4.23)$$

donde  $A = A(r)$  y  $B = B(r)$ . Notemos que la imposición de esta simetría en la métrica no determina las simetrías de la tétrada, ya que en general  $\mathcal{L}_{\xi} e_a^\mu \neq 0$ . La condición más general que se puede obtener para la tétrada ante la presencia de una isometría [Chinea, 1988] es la relación:

$$\mathcal{L}_{\xi_i} e_\mu^a = \chi_i^b{}_a e_\mu^b, \quad (4.24)$$

con  $\chi_i^b{}_a$  una matriz perteneciente al álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(1,3)$ . Para construir una solución particular debemos imponer simetrías adicionales que contemplan la elección de un SR particular. Consideremos observadores no rotantes ( $\phi_{(i)(j)} = 0$ ) estacionarios  $e_{(0)}^\mu = (e^{A/2}, 0, 0, 0)$  en estas coordenadas, cuya representación más sencilla está dada por:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} e^{-A/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-B/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Utilicemos ahora esta tétrada para calcular las componentes no nulas de la torsión, que están dadas por:

$$T_0^{01} = \frac{1}{2} A' e^{-B}, \quad T_2^{21} = T_3^{31} = \frac{1}{r} e^{-B}, \quad T_3^{32} = \frac{1}{r^2 \sin \theta}. \quad (4.25)$$

Con ello, el superpotencial se escribe como:

$$\Sigma_0^{10} = \frac{e^B}{r}, \quad \Sigma_0^{20} = \Sigma_1^{21} = \frac{\cot \theta}{2r^2}, \quad \Sigma_2^{12} = \Sigma_3^{13} = e^{-B} \frac{rA' + 2}{4r}, \quad (4.26)$$

y el tensor  $t_\mu^\rho$ :

$$t_0^0 = t_1^1 = t_2^2 = t_3^3 = \frac{c^4}{4\pi G} e^{-B} \frac{rA' + 1}{2r^2},$$

$$t_2^1 = -\frac{c^4}{4\pi G} (A' + B') \frac{\cot \theta}{4r^2}, \quad t_1^2 = -\frac{c^4}{4\pi G} e^{-B} (rA' + 2) \frac{\cot \theta}{4r}. \quad (4.27)$$

Utilizando las ecuaciones de campo de la GT obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$e^{-B} \left( \frac{B'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (4.28)$$

$$e^{-B} \left( \frac{A'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0, \quad (4.29)$$

$$2A'' + \left( \frac{2}{r} + A' \right) (A' - B') = 0. \quad (4.30)$$

Las ecuaciones independientes de este sistema son (4.29) y (4.28), cuya solución se encuentra fácilmente como:

$$e^{-B} = e^A = 1 + \frac{\alpha}{r}, \quad (4.31)$$

donde  $\alpha$  es la constante de integración que definimos en término de la masa  $\alpha = -2Gm/c^2$ . Con ello, la solución está dada por:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} c\sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{1 - \frac{2Gm}{c^2r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

y la métrica correspondiente por:

$$ds^2 = -\sqrt{c^2 - \frac{2Gm}{r}} dt^2 + \frac{1}{\sqrt{1 - 2Gm/c^2r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.32)$$

□

Notemos que esta solución presenta el siguiente comportamiento asintótico para  $r \rightarrow \infty$  y para  $M \rightarrow 0$ :

$$e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) \approx \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Vemos entonces que en el infinito, donde la métrica es aproximadamente minowskiana, la solución posee torsión distinto de cero. El SR elegido para resolver las ecuaciones de campo es un sistema no holónomo en el infinito correspondiente a la base esférica unitaria. Este ejemplo muestra, como vimos en la Sección 2.8.3, que la torsión tiene un carácter muy diferente a la curvatura; en particular, es no nula incluso en el espacio plano. Es un error entonces afirmar que la torsión reemplaza a la curvatura para caracterizar la gravitación. Esta última puede ser determinada unívocamente por cantidades ILL que permanecen invariantes ante cambios de observador.

Ahora, estudiaremos la solución para la dinámica de partículas de prueba en el formalismo de torsión.

**Teorema 5.** (*Principio de Equivalencia Débil*) Una partícula de prueba neutra  $\sigma$  con una acción asociada  $S = -mc \int_I d\sigma$  sigue una trayectoria dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + {}^* \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = K_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau}, \quad (4.33)$$

según un sistema de referencia  $K_C$ .

*Demostración.* Consideremos un sistema de referencia representado por  $\mathbf{e}_a$  y la tetravelocidad de una partícula dada por  $\mathbf{U} = U_\mu dx^\mu$ . Como  $U^\mu = dx^\mu/d\sigma$ , donde  $\sigma$  es el tiempo propio, el desplazamiento  $d\sigma$  sobre el espacio-tiempo se puede escribir como:

$$d\sigma = U_a e_\mu^a dx^\mu, \quad (4.34)$$

donde  $U_a$  es la tetravelocidad proyectada (“medida”) sobre la tétrada (el SR). Con ello, la acción de una partícula libre está dada por:

$$S = -mc \int_I U_a e_\mu^a dx^\mu. \quad (4.35)$$

Realizando la variación  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta x^\mu$  y dado que  $\delta U_a e_\mu^a dx^\mu = 0$ , obtenemos:

$$\delta S = -mc \int \left( U_a \delta e_\mu^a dx^\mu + U_a e_\mu^a \delta(dx^\mu) \right). \quad (4.36)$$

Teniendo en cuenta  $\delta e_\mu^a = \partial_\rho e_\mu^a \delta x^\rho$  y que  $\delta(dx^\mu) = d(\delta x^\mu)$ , integrando por partes el segundo término:

$$\delta S = -mc \int \left( U_a (\partial_\rho e_\mu^a) \delta x^\rho dx^\mu - d(U_\mu) \delta x^\mu \right), \quad (4.37)$$

con lo cual, dado que  $*\Gamma_{\mu\rho}^\nu = e_a^\nu \partial_\rho e_\mu^a$ ,

$$\delta S = -mc \int \left( \frac{dU_\mu}{d\sigma} - *\Gamma_{\mu\nu}^\rho U_\rho U^\nu \right) d\sigma \delta x^\mu. \quad (4.38)$$

Considerando variaciones arbitrarias de  $\delta x^\mu$  y  $d\sigma$ , junto con la invarianza de la acción, se obtiene:

$$\frac{dU_\mu}{d\sigma} - *\Gamma_{\mu\nu}^\rho U_\rho U^\nu = 0. \quad (4.39)$$

Usando la relación  $T_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\rho$ , obtenemos:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + *\Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma} = K_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\sigma}. \quad (4.40)$$

□

La ecuación (4.40) se puede reescribir en términos de la derivada covariante de la geometría de Weitzenböck como:

$$*\nabla_U U^\mu = \mathcal{F}^\mu, \quad (4.41)$$

donde  $\mathcal{F}^\mu := K_{\nu\rho}^\mu U^\nu U^\rho$  es un tensor de fuerza. Por otra parte, de la relación 2.32 obtenemos la ecuación geodésica de la geometría de Riemann:

$$\nabla_U U^\mu = 0. \quad (4.42)$$

Ambas ecuaciones determinan la trayectoria  $x^\mu(\sigma)$  de la partícula sobre el espacio-tiempo: (4.41) es una ecuación de fuerza sobre la geometría de Weitzenböck mientras que (4.42) es una ecuación geodésica. Por supuesto, esta trayectoria es independiente del sistema  $K_{\mathcal{C}}$  elegido como se puede ver de la invarianza local de Lorentz de la acción. Sin embargo, notemos que ninguno de los términos en la ecuación (4.41) es ILL. Por ello, al estar incluidos las características propias del SR, el término  $\mathcal{F}^\mu$  debe ser considerado como una pseudo-fuerza, e.g. puede ser distinta de cero incluso en el espacio de Minkowski.

Por otra parte, una partícula libre de interacciones siempre tiene aceleración igual a cero en el sentido de la ecuación (4.42). Por ejemplo, la interacción entre un campo electromagnético y una carga provocará que esta se desvíe de la geodésica y adquiera una aceleración absoluta dada por  $a^\mu = \frac{Q}{M} F^{\mu\nu} U_\nu$ . La definición de aceleración entonces debe ser dada en el contexto de la geometría de Riemann para que describa auténticos cambios sobre el espacio-tiempo. Como mencionamos en la sección 2, la aceleración, dado un espacio-tiempo, tiene un carácter absoluto. Notar además que la presencia de esta fuerza no viola el principio de equivalencia, ya que en un sistema inercial de Fermi, donde tenemos torsión cero sobre la curva, tanto la conexión de Weitzenböck como la contorsión son cero (ver Teorema 3). Localmente, la evolución de la velocidad vista desde el SR,  $U^a$ , está dada por la ecuación:

$$\frac{dU^a}{d\sigma} + K_{bc}^a U^b U^c = 0. \quad (4.43)$$

Consideremos ahora la aproximación newtoniana en la GT.

**Teorema 6.** *Dado un espacio-tiempo estacionario y localizado, en el régimen de campo débil y para un SR asintóticamente inercial, la ecuación dinámica (4.41) se reduce a la ecuación newtoniana.*

*Demostración.* Dada las condiciones de estacionalidad, localización y de campo débil sobre la métrica, podemos escribir la tétrada como:

$$e_\mu^a = \delta_\mu^a + B_\mu^a, \quad |B_\mu^a| \ll 1, \quad \partial_t B_\mu^a = 0, \quad (4.44)$$

es decir, la tétrada se puede separar una parte que representa un SR inercial en coordenadas cartesianas y otra parte  $B_\mu^a$  que representa la contribución de la curvatura, sin dependencia temporal y débil. Consideremos además que la velocidad de la partícula es mucho menor que la velocidad de la luz, de manera que  $U^i \ll U^0$  en el SR. Expresando la ecuación de movimiento como:

$$\frac{dU^\rho}{d\sigma} + {}^* \Gamma_{\mu\nu}^\rho U^\mu U^\nu = T_{\mu\nu}^\rho U^\mu U^\nu, \quad (4.45)$$

y dado que  ${}^* \Gamma_{\mu\nu}^\rho = \partial_\nu B_\mu^\rho$  a primer orden en  $B_\mu^a$ , obtenemos:

$$\frac{dU^\rho}{d\sigma} = \partial^\rho B_{00} U^0 U^0. \quad (4.46)$$

Como aquí se tiene que  $U^0 = cdt/d\sigma$ , la ecuación (4.46) queda como:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\sigma^2} = c^2 \partial^\rho B_{00} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2. \quad (4.47)$$

Considerando  $\partial^0 B_{00} = 0$ , obtenemos para la componente temporal  $x^{(0)} := ct$  y espacial respectivamente:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 0 \rightarrow \frac{dv^j}{dt} = c^2 \partial^j B_{00}. \quad (4.48)$$

Identificando  $cB_{00} \equiv \Phi$ , obtenemos finalmente:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\Phi. \quad (4.49)$$

□

Esta es una manera más natural para conseguir la aproximación Newtoniana que en RG. Si consideramos un marco de referencia no inercial en el límite asintótico, es decir  $e_a^\mu = A_a^\mu + B_a^\mu$ , con  $A_a^\mu$  la tétrada correspondiente a un sistema no inercial en el espacio plano, entonces no podremos describir la evolución del sistema como en la ecuación (4.49) debido a que no existen coordenadas  $(t, x, y, z)$  que rerepresenten a un marco no inercial, debido a su anholonomidad. Consideremos finalmente la ecuación de conservación que se deduce de las ecuaciones de campo.

**Teorema 7.** *Dado un espacio-tiempo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  y un SR  $K_C$ , la ecuación de campo implica una ecuación de conservación:*

$$\partial_\mu \left( \sqrt{-g} t^{a\mu} + \sqrt{-g} \Theta^{a\mu} \right) = 0. \quad (4.50)$$

*Demostración.* Dada la antisimetría de  $\Sigma^{a\lambda\mu} = -\Sigma^{a\mu\lambda}$ , derivando la ecuación 3.2 con respecto a  $\partial_\lambda$  obtenemos trivialmente la ecuación (7). □

A partir de 4.48 podemos obtener ciertas cargas conservadas  $P^a$  interpretadas como el cuadrimento gravitatorio (ver Sección 2.9.3 y Sección 5). Estas cantidades no pueden ser obtenida en el formalismo métrico de la RG. De hecho, la ecuación 4.48 no es ILL. Esta libertad de gauge con respecto a la tétrada tiene su interpretación en la GT como la elección de un sistema de referencia específico. La no invarianza local de Lorentz en la definición de la energía es entendida en este contexto como un resultado natural ya que la energía es una propiedad que depende fuertemente del sistema de referencia elegido. Podemos ver ahora el resultado fundamental de esta sección como teorema.

**Teorema 8.** *La GT posee una capacidad representativa mayor que la RG; las teorías no son completamente equivalentes.*

*Demostración.* La inclusión del grupo de axiomas III provee a la tetrada, el objeto dinámico de la teoría, de una carga semántica mayor que la métrica. A partir de estos axiomas y la ecuación de campo es posible deducir e interpretar leyes de conservación (Teorema 7) que no pueden ser obtenidas en RG.  $\square$

La GT no predice resultados diferentes a los de RG, como lo hacen las teorías que modifican las ecuaciones de campo, e.g. teorías  $f(r)$ , STVG,  $f(T)$ , etc. Sin embargo, permite, en principio, representar ciertos aspectos del espacio-tiempo, como su energía y momento, que no pueden ser correctamente representados en RG. Notemos por último que la RG es una teoría perfectamente consistente sin la inclusión del formalismo e interpretación *vierbein*. La GT cambia, no solo el formalismo, incluyendo la tetrada y otra conexión, si no la interpretación de estas cantidades.

### 4.3.1. Teorías teleparalelas alternativas

La Hipótesis de Localidad (Axioma 13) establece que los todos los observadores están relacionados punto a punto por una transformación local de Lorentz. Junto con las ecuaciones de campo (axioma 16), que poseen ILL, esto implica que existen diversos observadores que poseen el mismo espacio-tiempo de fondo. Si se modifican las ecuaciones dinámicas de manera que se pierda esta ILL, entonces diferentes tétradas con la misma métrica proveen diferentes soluciones de la ecuación de movimiento. Esto implica que la degeneración de seis parámetros que posee la tetrada en GT, que fija el marco de referencia, desaparece y las ecuaciones determinan un “sistema de referencia fundamental” a menos de un grupo de transformaciones determinados por las simetrías de la teoría. De esta manera, la noción de sistema de referencia cambia radicalmente en esta situación.

Entre este tipo de teorías, encontramos a la Gravedad No Local [Mashhoon, 2015], que posee ecuaciones integro-diferenciables. Otro tipo de teoría no ILL son las llamadas  $f(\mathbb{T})$  (ver Apéndice B), ampliamente estudiadas en la última década. Aunque menos investigadas, también existen en la literatura teorías con acoples no mínimos a la torsión, teorías teleparalelas conformes y teorías teleparalelas generalizadas, que rompen la simetría local de Lorentz [Cai et al., 2016].

## 4.4. Conclusiones

Resumamos las conclusiones más importantes desarrolladas en este capítulo:

- 1 La RG es una teoría consistente formulada en la geometría de Riemann y que describe propiedades “intrínsecas” del espacio-tiempo y su interacción con la materia.
- 2 La GT es una teoría consistente formulada en la geometría de Weitzenböck que permite representar las características del SR en un espacio-tiempo arbitrario.
- 3 A partir de la GT se puede recuperar las ecuaciones de Einstein y la descripción del espacio-tiempo que presenta la RG.

- 4 El objeto dinámico de la GT, la tétrada, contiene más información que la métrica ya que permite describir las características de un determinado SR. En particular, el tensor de torsión no es equivalente a la curvatura para describir la interacción gravitatoria debido a que no es ILL.
- 5 La incorporación del SR permite describir propiedades relacionales (con respecto a un SR) del espacio-tiempo como la energía gravitatoria utilizando las ecuaciones de la GT. En particular, se obtienen un tensor de energía-impulso definido a partir de las tétradas, bien comportado ante diffeomorfismos y que cumple una ecuación de conservación. Esta ecuación es una característica propia de la GT y no puede ser deducida en RG. Concluimos que las teorías no son completamente equivalentes.



# Capítulo 5

## Aplicaciones

### 5.1. Características cinemáticas asociadas a la geometría teleparalela de Weitzenböck y energía teleparalela

Los diferentes métodos desarrollados para calcular energías gravitatorias (cuasi)locales necesitan de la elección de una condición de contorno o gauge de algún tipo ([Butcher et al., 2010], [Liu et al., 2011]). En el caso de las teorías teleparalelas gravitatorias, esta condición depende de la elección de la tétrada particular elegida. En la interpretación que hemos adoptado de la GT, las tétradas representan el sistema de referencia físico adoptado.

Si la energía gravitatoria depende del SR y éste está representado por  $\mathbf{e}_a$ , el primer problema que debemos afrontar es obtener una caracterización completa del SR para poder interpretar las correspondientes expresiones de la energía. El proceso usual llevado a cabo en la literatura [Maluf et al., 2007b] es elegir un tensor de aceleración  $\phi_{ab}$  que lleva información de las características inerciales del sistema. Por ejemplo, si queremos obtener la energía gravitatoria dada por un observador inercial debemos en principio construir una tétrada que satisfaga  $\phi_{ab} = 0$ . Sin embargo, mostraremos en esta sección que a diferencia de lo afirmado en estos trabajos, el tensor de aceleración no caracteriza completamente al sistema, sino solo un aspecto parcial del mismo. En efecto, es posible construir diferentes congruencias  $\mathcal{C}_U$  con las mismas características inerciales (mismo tensor de aceleración) pero que difieren en su cinemática. De esta manera, la elección de diferentes clases de congruencia resultará en diferentes valores de energía gravitatoria. Mostraremos a continuación que la contorsión provee de la caracterización dinámica de la congruencia. En la última sección, presentamos un ejemplo del cálculo de energías para tres observadores distintos en la geometría de Reissner-Nördstrom.

#### 5.1.1. Contorsión y congruencias

La caracterización cinemática completa de una congruencia  $\mathcal{C}_U$  dada por un campo de tétradas  $\mathbf{e}_a(p)$  con tetravelocidad  $\mathbf{U} \equiv \mathbf{e}_0$  puede realizarse observando como

cambian las tétradas en cada una de las direcciones definidas por las mismas tétradas, esto es:

$$\nabla_{e_a} \mathbf{e}_b = \omega_{ab}^c \mathbf{e}_c, \quad (5.1)$$

donde  $\omega_{ab}^c$  es la conexión de spin de la geometría de Riemann, también llamado coeficiente de rotación de Ricci. Recordemos que esta expresión se puede escribir en términos de la contorsión como:

$$e_c^\nu \nabla_\nu e_\mu^a = K_{bc}^a e_\mu^c, \quad (5.2)$$

donde  $K_{bc}^a = -\omega_{bc}^a$  y  $K_{(ab)c} = 0$  para conservar la ortonormalidad de las tétradas en cada punto. Podemos con esta fórmula interpretar físicamente las componentes de la contorsión. Para  $c = (0)$ , tenemos

$$U^\nu \nabla_\nu e_\mu^a = K_{b(0)}^a e_\mu^b = \phi_b^a e_\mu^b, \quad (5.3)$$

donde  $\phi_{ab}$  es el tensor antisimétrico de aceleración mencionado anteriormente; este tensor determina cómo cambian las tétradas en la dirección tangente a la curva que sigue un observador de la congruencia con tetravelocidad  $U^\mu(\tau)$ . Si consideramos un solo observador, entonces el tensor de aceleración caracteriza completamente al marco de referencia. Sin embargo, si buscamos estudiar las propiedades de sistemas extendidos, necesitamos establecer la caracterización extendida de una congruencia, con lo cual debemos estudiar las componentes restantes de la contorsión. Si  $c = (i)$  y  $a = (0)$  es posible mostrar que:

$$e_{(i)}^\nu \nabla_\nu e^{(0)\mu} = K_{b(i)}^{(0)} e_\mu^b \equiv K_{(j)(i)}^{(0)} e_\mu^{(j)} \equiv k_{(j)(i)} e_\mu^{(j)}, \quad (5.4)$$

donde  $k_{\mu\nu}$  es el tensor cinemático definido como

$$k_{\mu\nu} := w_{\mu\nu} - \theta_{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

siendo  $w_{\mu\nu}$  el conocido tensor de vorticidad y  $\theta_{\mu\nu}$  el tensor de expansión. En término de la contorsión, se pueden escribir como:

$$w_{ab} := K_{(0)(ab)}, \quad \theta_{ab} := K_{(0)[ab]} \quad (5.6)$$

Si el tensor de vorticidad es cero, entonces vía el teorema de Frobenius, existe una familia de hipersuperficies espaciales ortogonales a la congruencia definida por  $\mathbf{e}_{(0)}$  ([De Felice and Clarke, 1992]). En este caso, el enfoque 1+3 de threading que utiliza marcos ortonormales es equivalente al enfoque 3+1 de slicing que utiliza foliaciones del espacio tiempo.

Finalmente, para  $a = (i)$  y  $c = (j)$  tenemos:

$$e_{(i)}^\nu \nabla_\nu e^{(j)\mu} = K_{b(i)}^{(j)} e_\mu^b \equiv k_{(i)}^{(j)} e_\mu^{(0)} + K_{(l)(i)}^{(j)} e_\mu^{(l)}. \quad (5.7)$$

Estas componentes puramente espaciales de la contorsión representan la rotación espacial *entre* las tétradas. Es importante remarcar que esta rotación espacial es

diferente a lo usualmente denominado rotación del sistema. Esto último está caracterizado por las componentes del tensor de aceleración  $\phi_{(i)(j)} = e_{ijk}\omega^{(k)}$  y representa la rotación de la tétrada *sobre* la curva. Las componentes espaciales de la contorsión suelen ser descompuestas como:

$$K_{(i)(j)(k)} = 2a_{[i}\delta_{j]k} + \epsilon_{k\delta[i}n_{j]}^\delta + \frac{1}{2}\epsilon_{ij\delta}n_k^\delta \quad (5.8)$$

donde  $a^i$  y  $n_{ij}$  son las denominadas funciones espaciales de rotación [Ellis and van Elst, 1999]. La interpretación física de las componentes de la contorsión como la vorticidad, la expansión y la aceleración han sido ampliamente estudiadas en la literatura, ya que muchas propiedades cinemáticas dependen de estas cantidades. La caracterización de las propiedades de objetos espacialmente extendidos o que cambian a través de una hipersuperficie espacial depende también de las componentes de contorsión  $K_{(j)(k)}^{(i)}$  en la congruencia. Para entender estas componentes consideremos dos sistema de referencia en el espacio de Minkowski dados por

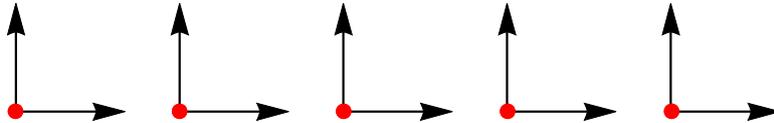
$$[K1]e_a^\mu(c, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi)\sin(\theta) & \frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & -\frac{\csc(\theta)\sin(\phi)}{r} \\ 0 & \sin(\theta)\sin(\phi) & \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r} & \frac{\csc(\theta)\csc(\theta)}{r} \\ 0 & \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$[K2]e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \sin \theta \end{pmatrix}.$$

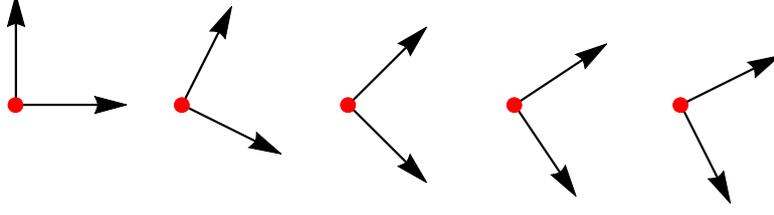
El sistema  $K1$  es un sistema inercial cartesiano escrito en coordenadas esféricas ( $e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) \equiv \delta_a^\nu(t, x, y, z)$ ) mientras que el sistema  $K2$  corresponde a un sistema ortonormal formado a partir de las coordenadas esféricas (recordemos que las coordenadas esféricas no conforman una base coordenada unitaria). Es fácil ver que estos SR poseen tensor de aceleración idénticamente nulo, i.e son sistemas de congruencias inerciales. Sin embargo, las componentes espaciales de la contorsión difieren: el sistema  $K1$ , al poseer torsión nula tiene  $[K1]K_{bc}^a \approx 0$  mientras que para el SR  $K2$ , tenemos las componentes no nulas de la contorsión dadas por:

$$[K2]K_{(2)(3)(3)} = 1/r, \quad [K2]K_{(2)(4)(4)} = 1/r, \quad [K2]K_{(3)(4)(4)} = \cot(\theta)/r \quad (5.9)$$

Esto indica que  $K2$  representa un marco inercial que rota entre sí espacialmente (Figura 5.2) a diferencia del SR  $K1$  (Figura 5.1), cuyos ejes espaciales se mantienen paralelos entre sí.



**Figura 5.1:** Representación de los ejes  $e_2$  y  $e_3$  para  $\phi = 0$  y  $t = \text{constante}$  en el sistema  $K1$ . El punto rojo indica la dirección temporal dada por el eje  $e_0$ . Notar que para distintos valores de  $(r, \theta)$  los ejes se mantienen paralelos entre sí



**Figura 5.2:** Representación de los ejes  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  para  $\phi = 0$  y  $t = \text{constante}$  en el sistema  $K2$ . El punto rojo indica la dirección temporal dada por el eje  $\mathbf{e}_0$ . Notar que para distintos valores de  $(r, \theta)$  los ejes están rotados entre sí

Esta rotación espacial puede influir, por ejemplo, en la velocidad que registra el sistema para una partícula que atraviesa la congruencia [De Felice and Bini, 2010].

### 5.1.2. Propiedades generales de la energía teleparalela

La energía teleparalela, siendo la propiedad de un sistema extendido estará determinada por el espacio-tiempo y las características cinemáticas (codificadas en el tensor de contorsión) de la tétrada. A diferencia de otros métodos métricos para tratar la energía gravitatoria, la energía teleparalela sufre de un nivel alto de degeneración debido a la libertad para elegir el SR, que dificultan el análisis y la obtención de propiedades generales. Nuestra intención en esta sección es mostrar algunos resultados que ayuden a la caracterización sistemática de la propiedades, globales y locales, de la energía teleparalelas. Comencemos por enunciar algunos teoremas que relacionan la energía teleparalela en límite de interés.

**Teorema 9.** *Consideremos un espacio-tiempo estacionario asintóticamente plano y un SR que es cartesiano en el infinito:*

$$e_a^\mu = \delta_a^\mu + \frac{1}{2}h_a^\mu(1/r) \quad (5.10)$$

La energía teleparalela se reduce para este marco a la energía ADM:

$$E = 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow \infty} e\Sigma^{(0)0i} dS_i \equiv 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow \infty} \left( \partial_i h_{ik} - \partial_k h_{ii} \right) dS_k =: E_{ADM} \quad (5.11)$$

*Demostración.* Las componentes del superpotencial para la energía total pueden ser escritas fácilmente como:

$$\Sigma_{(0)}^{0i} = e_a^0 e_b^i (\phi^{ab} + \delta_{(0)}^a T^b - \delta_{(0)}^b T^a), \quad (5.12)$$

En el límite asimptótico que estamos considerando nos quedamos al primer orden en las tétradas, obteniendo:

$$\Sigma_{(0)}^{0i} = \phi^{0i} + T^i, \quad (5.13)$$

donde ya no distinguimos entre índices hólomos e índices de Lorentz y usamos que  $\delta_{(0)}^b \delta_b^i = 0$ . Como  $\phi^{0i} = K^{0i}_0$  y  $T^i = -K^{ai}_a = -K^{0i}_0 - K^{ki}_k$ , tenemos que:

$$P_{(0)} = 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow \infty} e\Sigma^{(0)0i} dS_i = 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow \infty} T^{ki}_k dS_i. \quad (5.14)$$

De la definición de torsión, tenemos finalmente:

$$E = -P_{(0)} = 2\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow \infty} \left( \partial_k h_{ki} - \partial_i h_{kk} \right) dS_i = E_{ADM}. \quad (5.15)$$

□

Notar que hemos usado  $h_k^k = h_{kk}$ , que en este caso representa la métrica tridimensional sobre la hipersuperficie espacial  $\partial\mathcal{D}$ . La masa ADM ha sido ampliamente estudiada (ver [Jaramillo andourgoulhon, 2009]) y posee numerosas aplicaciones y propiedades deseables. Considerando un espacio-tiempo asintóticamente plano, si la tétrada no satisface el límite (5.10), entonces la torsión será, en general, distinta de cero en este régimen. Esto puede inducir a resultados no físicos o divergentes para la energía total del  $\mathcal{ET}$ . Un ejemplo sencillo de esto lo podemos encontrar para el espacio-tiempo de Schwarzschild con la elección del sistema estacionario  $e_a^\mu = \text{diag}(1/\alpha(r), \alpha(r), 1/r, 1/r \sin(\theta))$ . Esta tétrada se reduce en el infinito a  $e_a^\mu = \text{diag}(1, 1, 1/r, 1/r \sin(\theta))$ , i.e. un sistema de referencia inercial pero espacialmente rotado (ver Figura 5.3 y discusión anterior). La energía teleparalela para una esfera de radio  $R$  está dada por:

$$E'(R) = -\alpha(R) R \quad (5.16)$$

que diverge como  $E'(R) \approx M - R$  para  $R \rightarrow \infty$ . Es decir, tenemos una contribución  $-R$  a la energía proveniente de la rotación espacial de los sistemas. Ante la presencia de estas divergencias y resultados físicamente inaceptables se han propuestos varios métodos de regularización. En [Maluf et al., 2007a] se ha presentado una regularización que consiste en restar a la energía total una 'energía de fondo' dada por el valor que esta energía toma al tender los parámetros físicos a cero en la tétrada. De esa manera, si definimos  $E_a^\mu := e_a^\mu|_{\alpha \rightarrow 0}$  donde  $\alpha$  es un conjunto de parámetros físicos, la energía regularizada queda definida por:

$$P_{\text{reg}}^a := P^a(e_a^\mu) - P^a(E_a^\mu) \quad (5.17)$$

Este método, sin embargo, (a) no es consistente para espacio-tiempos cuyos parámetros físicos no tengan un límite trivial al espacio de Minkowski, e.g. en escenarios cosmológicos, (b) no entrega el resultado esperado cuando buscamos energías gravitatorias para observadores no inerciales en el infinito, por ejemplo, cuando queremos obtener la energía gravitatoria de un sistema acelerado [Maluf, 2005]. Otros métodos propuestos en [Krššák and Pereira, 2015] y [Lucas et al., 2009] consisten en la introducción de una conexión de Lorentz, determinada por el límite  $\alpha \rightarrow 0$  que regulariza 'localmente' la torsión, o por otros procedimientos. Este proceso sufre de los mismos problemas mencionados anteriormente, perdiendo además el significado físico de la energía y su relación con el sistema de referencia ya que estas nuevas cantidades son ahora ILL por la introducción de la conexión. El problema de la interpretación de los infinitos que ocurren en los cálculos de energía teleparalelas es, en nuestra opinión, un problema que necesita más investigación; todavía no se ha formulado un criterio para la elección de SR físicamente aceptables en el cálculo de energía teleparalelas, como los que se pueden encontrar en las formulaciones covariante hamiltonianas de energías cuasilocales [Liu et al., 2011] o en [McGrath et al., 2012].

### Simetría esférica y límite gravitoelectromagnético

Existe otra conexión importante dada para la energía teleparalela; si el espacio-tiempo tiene simetría esférica, existe un sistema de referencia estático cuasi-cartesiano cuya energía cuasi-local es la de Brown-York.

**Teorema 10.** *Considérese un espacio-tiempo esféricamente simétrico con métrica dada por:*

$$ds^2 = -\alpha(r, t)dt^2 + \beta(r, t)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (5.18)$$

*Construyendo un SR estacionario en estas coordenadas como:*

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\alpha(r, t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\beta(r, t)} \cos(\phi) \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & -\frac{\csc(\theta) \sin(\phi)}{r} \\ 0 & 1/\sqrt{\beta(r, t)} \sin(\theta) \sin(\phi) & \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r} & \frac{\csc(\theta) \csc(\theta)}{r} \\ 0 & 1/\sqrt{\beta(r, t)} \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix},$$

la energía teleparalela en una esfera espacial de radio  $R$  es, a tiempo  $t$ , la energía de Brown-York:

$$E(R) = R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\beta(R, t)}} \right). \quad (5.19)$$

*Demostración.* La energía total en una esfera de radio  $R$  puede escribirse como

$$E = 4\kappa \int_{\partial S} e\Sigma^{(0)0i} dS_i = 4\kappa \int_{\partial S} e\Sigma^{(0)01} dS_1 = 4\kappa \int_{\partial S} e\Sigma^{(0)0r} d\theta d\phi, \quad (5.20)$$

con lo cual, solo debemos computar la componente radial del superpotencial. Después de manipulaciones algebraicas encontramos que  $\Sigma^{(0)0r} = (1-\beta)/r$ , con lo cual, siendo  $e = r^2 \sin(\theta)$ :

$$E(R) = R \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\beta(R, t)}} \right) = E_{BY}. \quad (5.21)$$

donde usamos unidades geométricas  $\kappa = 1/16\pi$ . □

La energía de Brown-York es obtenida a partir de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi para RG y ha sido analizada en varias situaciones de interés. Además, vemos que si  $\beta(R, t) \ll 1$  entonces podemos expandir la expresión para la energía (5.21) resultando:

$$E(R) = \frac{R}{2}(1 - \beta(R, t)) = E_{MS} \quad (5.22)$$

i.e., la masa de Misner-Sharp. La masa de Misner-Sharp, que puede encontrarse como caso particular de la energía de Hawking-Hayward, tiene numerosas propiedades deseables (ver [Hayward, 1996]) y es usualmente utilizada en cosmología, debido a que está bien definida incluso si el espacio-tiempo no es asintóticamente plano.

Veamos finalmente como es la forma de la energía teleparalela en un región pequeña del espacio-tiempo. Consideremos una región  $\mathcal{D}$  alrededor de un punto  $p \in \gamma$  de una curva  $\gamma$  geodésica. Ahora construyamos una congruencia de Fermi alrededor de

esta curva (ver Sección 2.8.3). Para ello, consideremos coordenadas de Fermi  $\{T, X\}$  de manera que la métrica se puede escribir como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X), \quad (5.23)$$

donde  $h_{00} := -2\Phi$ ,  $h_{0i} := -\mathcal{A}_i$  y  $h_{ij} := -\Sigma_{ij}$ , estando relacionadas estas cantidades con los potenciales gravitoelectromagnéticos [Bini and Mashhoon, 2015] dados por:

$$\Phi := \frac{1}{2}\hat{R}_{0i0j}(T)X^iX^j, \quad \mathcal{A}_i := \frac{1}{3}\hat{R}_{0ijk}(T)X^jX^k, \quad \Sigma_{ij} := \frac{1}{6}\hat{R}_{ijkl}(T)X^kX^l \quad (5.24)$$

Construimos ahora un sistema de referencia estacionario en estas coordenadas. En término de las cantidades definidas en (5.24), podemos expresar la tétrada, a primer orden en la curvatura, como:

$$e_a^\mu = \delta_a^\mu - \psi_a^\mu, \quad (5.25)$$

donde tenemos la matriz:

$$[\psi_a^\mu] = \begin{pmatrix} \Phi & 0 & 0 & 0 \\ 2\mathcal{A}_1 & -\Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 2\mathcal{A}_2 & 2\Sigma_{12} & -\Sigma_{22} & 0 \\ 2\mathcal{A}_3 & 2\Sigma_{13} & 2\Sigma_{23} & -\Sigma_{33} \end{pmatrix}.$$

Podemos utilizar la aproximación a primer orden en las tétradas (a primer orden en la curvatura) realizada en el Teorema 7 para una región suficientemente pequeña. La energía teleparalela está dada entonces por:

$$E = 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow 0} e^{\Sigma^{(0)0i}} dS_i \equiv 4\kappa \int_{\partial\mathcal{D} \rightarrow 0} \left( \partial_i \Sigma_{ik} - \partial_k \Sigma_{ii} \right) dS_k \quad (5.26)$$

Notemos que esta expresión relaciona directamente las componentes (proyectadas) de la curvatura de Riemann con la energía teleparalela. Esto es posible ya que el sistema de referencia de Fermi permite construir tétradas cuyas componentes cinemáticas (dadas por la contorsión) están dadas en términos de la curvatura de Riemann. Un sistema de referencia arbitrario adaptado a una curva geodésica no tendrá en general esta propiedad; aún más, la torsión sobre la curva en el sistema de Fermi es cero, como mostramos en la sección 2.8.4, lo cual no es cierto para cualquier otra congruencia inercial. La relación entre la energía teleparalela y el régimen gravitoelectromagnético merece una investigación más profunda.

### Propiedades locales del tensor energía-impulso teleparalelo

La GT admite una auténtica definición tensorial, y no pseudotensorial, para el tensor de energía-impulso del espacio-tiempo. La interpretación local de este tensor, sin embargo, ha sido poco explorado en la literatura (ver sin embargo, [Itin, 2002]). Dado el lagrangiano de primer orden de la GT, la corriente teleparalela queda definida como:

$$t_a^\mu = \kappa \left( 4\Sigma_c^{b\mu} T_{ba}^c - e_a^\mu \mathbb{T} \right), \quad (5.27)$$

con la cual se define el tensor de energía-impulso

$$t_{\nu}^{\mu} := e_{\nu}^a t_a^{\mu}. \quad (5.28)$$

El tensor, como ya hemos mencionado, no es invariante ante transformaciones locales de Lorentz y tiene traza nula. Esto implica inmediatamente que el comportamiento local de este tensor está fuertemente determinado por la tétrada elegida en la geometría de Weitzenböck. Notar la diferencia fundamental con el tensor de energía impulso de la materia que aparece en las ecuaciones de campo de la GT,  $\Theta^{a\mu} \equiv e_{\nu}^a \Theta^{\nu\mu}$ , que transforma covariantemente ante difeomorfismos y transformaciones locales de Lorentz. A diferencia del espacio-tiempo, *la presencia local de energía-impulso de la materia es invariante para cualquier observador*. En efecto, este hecho está asociado al principio de equivalencia: la presencia local de energía gravitatoria depende tanto de la curvatura y del SR en ese punto.

Para ver esto, consideremos primero un sistema de referencia de Fermi geodésico de manera que sobre la curva de referencia  $\gamma$  tengamos:

$$e_a^{\mu}|_{\gamma} = \delta_a^{\mu}, \quad \partial_{\mu} e_a^{\nu}|_{\gamma} = 0. \quad (5.29)$$

Sobre la curva tenemos entonces  $t_a^{\mu}|_{\gamma} = 0$ , es decir, punto a punto la densidad de energía gravitatoria es cero para un observador geodésico de Fermi <sup>1</sup>. Las ecuaciones de campo teleparalela dadas por (2.54), a diferencia de las ecuaciones de Einstein están naturalmente separadas en una parte de orden  $\mathcal{O}(X^2)$  en coordenadas de Fermi dada por el tensor  $t^{\mu\nu}$  y una parte  $\mathcal{O}(X)$  dada por el superpotencial  $\Sigma^{a\mu\sigma}$ . De esta manera, sobre la curva, toman la forma:

$$\partial_{\sigma}(e\Sigma^{a\mu\sigma})|_{\gamma} = \frac{1}{4\kappa} e\Theta^{a\mu}|_{\gamma}. \quad (5.30)$$

De esta ecuación es posible, a partir de (5.24), ver que la densidad de energía  $\Theta^{00}$  de la materia está relacionada localmente con la curvatura de Riemann sobre la curva como:

$$\Theta^{00} = \hat{R}_{2323}(T) + \hat{R}_{3434}(T) + \hat{R}_{2424}(T). \quad (5.31)$$

Aún más, la ley de conservación local sobre la curva queda expresada como:

$$\partial_{\mu}\Theta^{a\mu}|_{\gamma} = 0, \quad (5.32)$$

en esta aproximación y en este marco, un sistema material no pierda ni gana energía. A segundo orden en el sistema de Fermi y en vacío, es posible ver que el tensor de energía impulso se reduce al tensor de Bel-Robinson:

$$t_{\nu}^{\mu} \approx \frac{1}{4} B_{\nu ij}^{\mu} X^i X^j \quad (5.33)$$

donde

$$B_{\alpha\beta\mu\nu} := R_{\alpha\lambda\mu\sigma} R_{\beta\nu}^{\lambda\sigma} + R_{\alpha\lambda\nu\sigma} R_{\beta\mu}^{\lambda\sigma} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R_{\mu}^{\gamma\sigma\delta} R_{\gamma\sigma\nu\delta}. \quad (5.34)$$

<sup>1</sup>Notemos que este sistema no conforma una congruencia geodésica, solo la curva  $\gamma$  de referencia es geodésica, mientras que las demás curvas de la congruencia de Fermi poseen una aceleración determinada exclusivamente por la curvatura [Mashhoon, 2015]

Para obtener este resultado, los autores en [So and Nester, 2009] utilizan una expresión en término de n-formas para al tensor de energía impulso gravitatorio y adoptan un sistema de Fermi. Es posible encontrar esta misma expresión en el formalismo tensorial pero la prueba es más extensa. Esta propiedad del tensor de energía-impulso es muy conveniente debido a que existen numerosas aplicaciones y características estudiadas para el tensor de Bel-Robinson.

La elección de una congruencia geodésica, pero no coordinada como la de Fermi, resultará en un tensor de energía-impulso gravitatorio no nulo sobre una geodésica de la congruencia. Para ver esto con más detalle, consideremos otra congruencia en caída libre radialmente dada por

$$e_a^\mu(t, r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \alpha(r) & -\beta(r) & 0 & 0 \\ \alpha(r)\beta(r) \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & -\frac{\csc(\theta) \sin(\phi)}{r} \\ \alpha(r)\beta(r) \sin(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi) \csc(\theta)}{r} \\ \alpha(r)\beta(r) \cos(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

con  $\alpha(r) = \frac{1}{1-2M/r}$  y  $\beta(r) = \sqrt{2M/r}$ . Las características cinemáticas de esta congruencia pueden obtenerse de las únicas componentes no nulas de la contorsión dadas por:

$$K_{(0)(1)(1)} = \sqrt{\frac{M}{2r^3}}, \quad K_{(0)(2)(2)} = -\sqrt{\frac{2M}{r^3}}, \quad K_{(0)(3)(3)} = -\sqrt{\frac{2M}{r^3}}. \quad (5.35)$$

Notemos que no hay desviación espacial de las tétradas ni vorticidad, solo contracción dada por  $\theta_{ab} = K_{(0)[ab]}$ , que indica que las congruencias convergen a la singularidad. Esta congruencia resulta en un tensor de energía-impulso simétrico dado por:

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{M^2}{2\pi r^2(-2M+r)^2} & -\frac{(\frac{M}{r})^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi(2M-r)r} & 0 & 0 \\ -\frac{(\frac{M}{r})^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi(2M-r)r} & -\frac{M}{4\pi r^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{8\pi r^5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{M}{8\pi r^5} \end{pmatrix},$$

no nulo sobre una geodésica radial.<sup>2</sup>

El tensor de energía-impulso tiene codificado información local sobre la elección global de la congruencia. Mostramos así una característica general de la torsión que se traslada al tensor de energía-impulso teleparalelo: la torsión está determinada por las características globales de la congruencia, dada por la tétrada, que establece un sentido de paralelismo absoluto en la variedad<sup>3</sup>. Así, podemos tener valores diferentes de la torsión sobre una misma curva con las mismas características cinemáticas.

<sup>2</sup>Sin embargo, la energía contenida en una esfera de radio  $R$  medida por este observador es idénticamente cero [Maluf et al., 2007b]. Esto muestra que esta congruencia de observadores sobre una esfera tipo espacio de radio  $R$  no detecta la masa del agujero negro.

<sup>3</sup>Operacionalmente, si recordamos lo expuesto en la sección, esto implica que los paralelogramos infinitesimales en el sistema de Fermi son cerrados, mientras que en una curva geodésica con torsión distinto de cero podemos tener deficiencias en la clausura del paralelogramo.

En otras palabras, pese a que el tensor está bien definido localmente, depende de la elección global de la tétrada al no ser un escalar local de Lorentz. A continuación, exploraremos el comportamiento de este tensor para una geometría particular.

Por último, mencionemos que para ondas gravitacionales planas, el tensor de energía-impulso teleparalelo es nulo [Obukhov et al., 2009], [da Rocha-Neto and Maluf, 2014], como lo es para la aproximación lineal [Aldrovandi et al., 2010]. Para el caso no lineal, el tensor de energía-impulso todavía no ha sido estudiado.

## 5.2. Análisis energético de la geometría de Reissner-Nordström

En los últimos años, la expresión de energía teleparalela ha sido ampliamente utilizada en varios escenarios [Maluf, 2013] de manera exitosa. En general, todas las investigaciones con energías quasilocales tratan con la energía total del sistema, dada por la integración sobre una hipersuperficie espacial del superpotencial  $\Sigma_{(0)}^{\mu\nu}$ . En esta sección, evaluaremos por separado la contribución de energía del espacio tiempo y la materia para el caso sencillo de un agujero negro de Reissner-Nordström (RN), donde tenemos la presencia del campo electromagnético, para diferentes sistemas de referencia. La métrica de una distribución de masa cargada esféricamente simétrica está dada, afuera de la fuente, por la métrica de RN:

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \frac{1}{\alpha^2(r)}dr^2 + r^2d\Omega, \quad (5.36)$$

con  $\alpha(r) := \sqrt{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}$  en unidades geométricas. La métrica posee dos horizontes dados por  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ , siendo  $r_+$  un horizonte de eventos y  $r_-$  un horizonte de Cauchy.

### Sistema de referencia estacionario

Consideremos una congruencia de sistemas de referencia estacionarios, en estas coordenadas, dada por:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} \alpha(r)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(r) \cos(\phi) \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & -\frac{\csc(\theta) \sin(\phi)}{r} \\ 0 & \alpha(r) \sin(\theta) \sin(\phi) & \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi) \csc(\theta)}{r} \\ 0 & \alpha(r) \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Este observador posee aceleración en la dirección radial dada por:

$$\mathbf{a} = \frac{-Q^2 + Mr}{r^3\alpha(r)}\check{\mathbf{r}}, \quad (5.37)$$

donde  $\check{\mathbf{r}} := (\cos(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\theta))$ , necesaria para que el sistema se mantenga en el régimen estacionario. Por otra parte, es posible ver que el sistema no

posee rotación, i.e.  $\phi_{(i)(j)} = 0$ . La energía total en una esfera espacial de radio  $R$  se puede calcular utilizando el superpotencial  $\Sigma^{(0)0i} = (\frac{1-\alpha}{r}, 0, 0)$  como:

$$P^{(0)} = 4\kappa \int \partial_i(\Sigma^{(0)0i} \sqrt{-g}) d^3x. \quad (5.38)$$

Como el superpotencial no está bien definido en  $r = 0$ , para utilizar el teorema de Gauss debemos encerrar a la singularidad con una esfera de radio  $\epsilon < r_-$  y después tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , de esa manera:

$$P^{(0)} = 4\kappa \oint \left( (\Sigma^{(0)0i}(R) - \Sigma^{(0)0i}(\epsilon)) \sqrt{-g} \right) d\mathcal{S}_i = 4\kappa \oint (\Sigma^{(0)01}(R) - \Sigma^{(0)01}(\epsilon)) \sqrt{-g} d\theta d\phi, \quad (5.39)$$

con lo cual se obtiene:

$$P_\epsilon^{(0)} = R(1 - \alpha(R)) - \epsilon(1 - \alpha(\epsilon)),$$

Tomando el límite, la energía total está dada por:

$$P^{(0)} = R(1 - \alpha(R)) + |Q|,$$

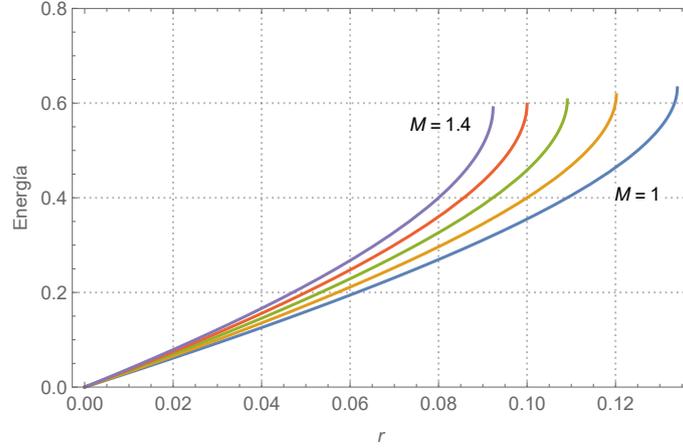
expresión que ha sido obtenida en [Maluf et al., 2012] y en [Lundgren et al., 2007] a menos de la constante  $Q$ , proveniente de la singularidad del superpotencial <sup>4</sup>. Es fácil ver también que el momento espacial total es cero,  $P^{(i)} = 0$ . En el límite asimptótico  $r \rightarrow \infty$  recuperamos  $P^{(0)}(r \rightarrow \infty) = M + |Q|$ , i.e. observadores inerciales estacionarios en el infinito registran que el agujero negro posee masa total igual a  $M + |Q|$ . A segundo orden:

$$P^{(0)} = M + |Q| + \frac{M^2}{2R} - \frac{Q^2}{2R} + \mathcal{O}(R^{-3}), \quad (5.40)$$

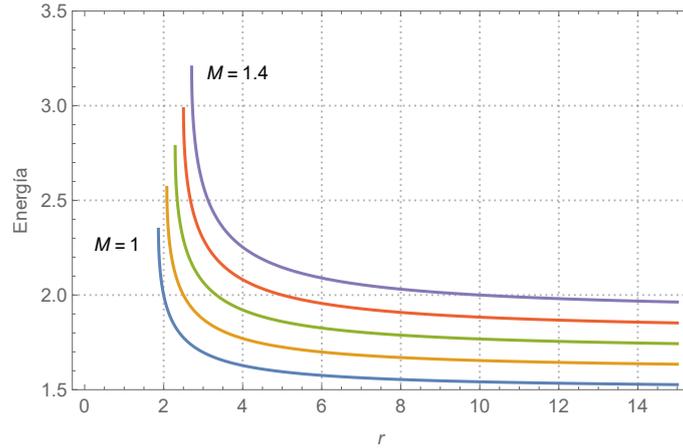
donde tenemos contribuciones similares de la carga y la masa. En la Figura 5.3 y 5.4 mostramos como varía la energía total contenida en una esfera  $R$  para las regiones  $r < r_-$  y  $r > r_+$ .

---

<sup>4</sup>Si la definición de momento está dada directamente por la integral de flujo como en el caso de la energía de Brown-Yorm, entonces no tenemos la contribución de la constante y obtenemos una energía negativa en la singularidad dada por  $-|Q|$ . Para la energía teleparalela, la integral de flujo se obtiene luego de aplicar el teorema de Gauss



**Figura 5.3:** Energía total para un sistema de referencia estacionario en la geometría de Reissner-Nordström en la región  $r < r_-$  para  $Q = 0,5M$ .



**Figura 5.4:** Energía total para un sistema de referencia estacionario en la geometría de Reissner-Nordström en la región  $r > r_+$  para  $Q = 0,5M$ .

El decaimiento en la energía para  $R$  grande muestra que en la región  $(R, \infty)$ , con  $R > r_+$  tenemos una contribución de energía negativa. La energía neta sin embargo es positiva. De hecho, existe una prueba de positividad para la energía total tipo Brown-York encerrada en una superficie [Liu and Yau, 2003]. Por otra parte, notemos que la energía (5.2) no está definida en la región  $r_- < r < r_+$  ya que en esta región la tetrada no está bien definida debido a que no pueden existir observadores estacionarios (la coordenada  $r$  es tipo tiempo en esta región). Para la región interior volvemos a tener observadores estacionarios (la coordenada vuelve a ser tipo espacio). En este caso, la energía encerrada es positiva y cero en el origen, resultando  $P^{(0)}(0) = 0$ .

Ahora nos ocuparemos de estudiar cuál es la contribución del espacio-tiempo y del campo electromagnético a esta energía total. Para ello, tenemos que estudiar las expresiones de los tensores de energía impulso de ambos sistemas. El tensor de energía impulso del campo electromagnético inmerso en esta geometría está dado por:

$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{Q^2}{8\pi r^4 \alpha(r)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2 \alpha(r)^2}{8\pi r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{8\pi r^6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 \csc(\theta)^2}{8\pi r^6} \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Para calcular el tensor de energía impulso del campo gravitatorio, utilizamos la definición (5.27), y luego de operaciones algebraicas llegamos a la expresión simétrica:

$$t^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{(1-\alpha(r))^2}{8\pi r^2 \alpha(r)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma(r)}{8\pi r^6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\alpha(r)-1) - Q^2 + Mr}{\alpha(r) 8\pi r^6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\alpha(r)-1) (-Q^2 + Mr) \csc(\theta)^2}{\alpha(r) 8\pi r^6} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

donde definimos  $\sigma(r) := -r^2 Q^2 \alpha(r)^2 - 2(1 - \alpha(r))r^4 + M(-2 + \alpha(r))$ . Notemos que en el límite asintótico, ambos tensores se comportan de la misma manera con un cambio de signo:

$$t^{11} \approx -\frac{M^2}{8\pi r^4}, \quad t^{22} \approx \frac{M^2}{8\pi r^4}, \quad (5.43)$$

$$\Theta^{11} \approx \frac{Q^2}{8\pi r^4}, \quad \Theta^{22} \approx -\frac{Q^2}{8\pi r^4}. \quad (5.44)$$

Este comportamiento similar de ambos tensores de energía-impulso está en acuerdo con el régimen gravitoelectromagnético de las ecuaciones de Einstein en campo débil [Costa and Natario, 2014]. Nos proponemos ahora calcular la contribución a la energía total de cada uno de los sistemas. A diferencia de la energía total, que está determinada sobre una superficie de dos dimensiones, la energía de cada uno de los sistemas está dada por la integral de la densidad sobre una hipersuperficie espacial, en este caso, la hipersuperficie con  $t = \text{cte}$ . La energía del campo eletromagnético proyectada sobre este SR está dada por:

$$\begin{aligned} P_{EM}^{(0)} &= \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} \Theta^{0(0)} = \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} \frac{Q^2}{8\pi r^4 \alpha(r)}, \\ &= \frac{Q}{2} \log \left[ \frac{r}{Mr - Q(Q + r\alpha(r))} \right] \Big|_{r=0}^{r=R} \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} &= \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} t^{0(0)} = - \int dr d\theta d\phi \sqrt{-g} \frac{(1 - \alpha(r))^2}{8\pi r^2 \alpha(r)}, \\ &= R(1 - \alpha(R)) + |Q| - \frac{Q}{2} \log \left[ \frac{r}{Mr - Q(Q + r\alpha(r))} \right] \Big|_{r=0}^{r=R} \end{aligned} \quad (5.46)$$

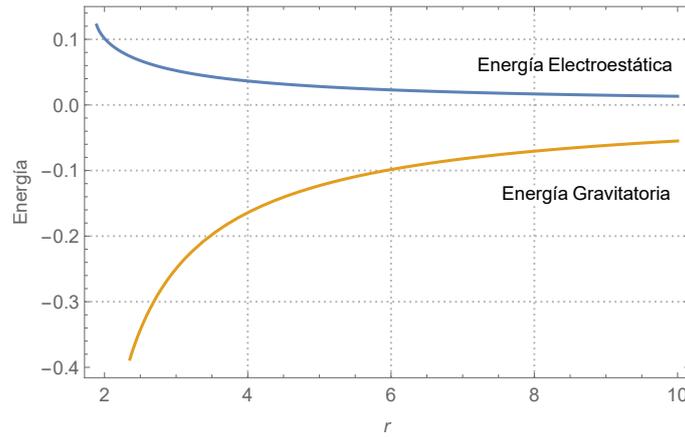
para el campo electromagnético y el espacio-tiempo respectivamente. Notemos que de la ecuación (5.39),  $P^{(0)} = P_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} + P_{EM}^{(0)}$ . Sin embargo, ambas expresiones tienen problemas de autoenergías en el origen, resultado esperado para partículas cargadas

[Rohrlich, 2007]. Pese a que ambas energías divergen en  $R = 0$ , estas divergencias son compensadas en la energía total, resultado que ya ha sido comentado en la Ref. [Lundgren et al., 2007] para la energía de Brown-York. Es interesante calcular con estas expresiones la energía contenida en la región  $(R, \infty)$  (Ver Figura 5.5), dada por:

$$E(R, \infty)_{\mathcal{E}\mathcal{T}} = -R(1 - \alpha(R)) + \frac{Q}{2} \log \left[ \frac{r}{Mr - Q(Q + r\alpha(r))} \right] - \frac{1}{2}Q \log(M - Q) + M, \quad (5.47)$$

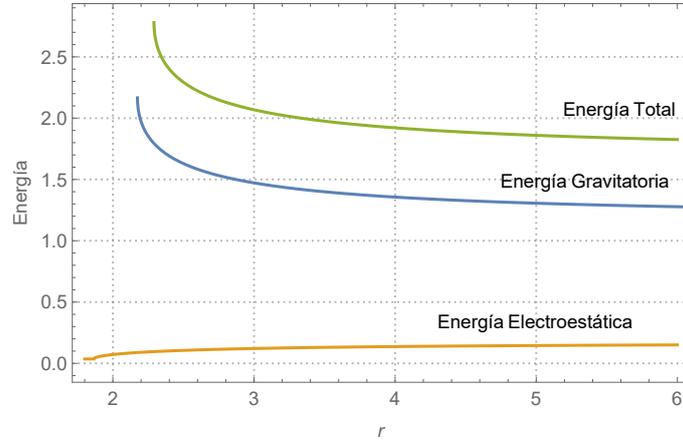
$$E(R, \infty)_{EM} = -\frac{Q}{2} \log \left[ \frac{r}{Mr - Q(Q + r\alpha(r))} \right] + \frac{1}{2}Q \log(M - Q). \quad (5.48)$$

En los límites asimptóticos tenemos  $E(R, \infty)_{EM} \approx \frac{Q^2}{2r}$  y  $E(R, \infty)_{\mathcal{E}\mathcal{T}} \approx -\frac{M^2}{2r}$  para  $R \rightarrow \infty$ . Como esperábamos, la contribución de la energía electrostática es igual que en el espacio-tiempo plano para este límite. Por otra parte, vemos que la contribución de energía negativa que comentamos anteriormente está dada efectivamente por el campo gravitatorio.



**Figura 5.5:** Energía total contenida en la región  $(R, \infty)$  para  $M = 1$  y  $Q = 0,5M$

La energía del campo electromagnético y del espacio tiempo encerrado en una región  $R$ , regularizando la divergencia en el origen se puede ver en la Figura 5.6.



**Figura 5.6:** Energía total, gravitatoria y electroestática encerrada en una esfera de radio  $r$  para  $M = 1$  y  $Q = 0,5M$

Este tipo de divergencias podrían evitarse considerando espacios-tiempo con una distribución finita de carga y masa [Herrera and Varela, 1996].

### Sistema de referencia acelerado.

Construyamos ahora un SR que está uniformemente acelerado en la dirección  $\mathbf{e}_1$  en el infinito. Esto significa que en el límite asintótico,  $r \rightarrow \infty$ , el sistema de referencia adopta la tétrada, en coordenadas cartesianas dada por:

$$e_a^\mu(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

donde  $\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-\beta(t)^2}}$  y  $\beta(t)$  la velocidad del sistema, que en este caso depende del tiempo. La tétrada es el resultado de aplicar una transformación de Lorentz local  $\Lambda_b^a(t)$  dependiente del tiempo a la tétrada inercial cartesiana  $\delta_a^\mu$ . Un sistema de referencia adaptado a esta tétrada para el espacio de RN puede escribirse, en coordenadas esféricas, como:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} \alpha(r)^{-1}\gamma & \gamma\beta\alpha(r)\cos(\phi)\sin(\theta) & \gamma\beta\frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & -\gamma\beta\frac{\csc(\theta)\sin(\phi)}{r} \\ \gamma\beta\alpha(r)\beta & \gamma\alpha(r)\cos(\phi)\sin(\theta) & \gamma\frac{\cos(\theta)\cos(\phi)}{r} & -\gamma\frac{\csc(\theta)\sin(\phi)}{r} \\ 0 & \alpha(r)\sin(\theta)\sin(\phi) & \frac{\cos(\theta)\sin(\phi)}{r} & \frac{\cos(\phi)\csc(\theta)}{r} \\ 0 & \alpha(r)\cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que ahora el sistema tiene una aceleración que podemos escribir como:

$$a^{(1)} = \gamma\cos(\phi)\sin(\theta)\frac{-Q^2 + Mr}{r^3\alpha(r)} + \gamma^3\frac{\beta'(t)}{\alpha(r)}, \quad (5.50)$$

$$a^{(2)} = \gamma^2\sin(\phi)\sin(\theta)\frac{-Q^2 + Mr}{r^3\alpha(r)} + \beta^2\gamma^2\sin(\phi)\sin(\theta)\frac{-Q^2 + Mr + r^2(1 - \alpha(r))}{r^3\alpha(r)},$$

$$a^{(3)} = \gamma^2 \cos(\theta) \frac{-Q^2 + Mr}{r^3 \alpha(r)} + \beta^2 \gamma^2 \cos(\theta) \frac{-Q^2 + 2Mr - r^2(1 - \alpha(r))}{r^3 \alpha(r)},$$

y una rotación adicional inducida por el movimiento en el eje  $\mathbf{e}_1$ . Ahora, repitamos el análisis para este sistema de referencia. Considerando de nuevo la parte del superpotencial con componentes  $\Sigma^{(0)0i}$  obtenemos para la energía total:

$$P^{(0)} = \gamma(R(1 - \alpha(R)) + |Q|), \quad (5.51)$$

A diferencia del caso estacionario anterior, la componente del superpotencial  $\Sigma^{(1)0i}$  es no nula, con lo cual, obtenemos un impulso dado por:

$$P^{(1)} = -\beta(t)\gamma R(1 - \alpha(R)). \quad (5.52)$$

En el límite asimptótico, el tetraimpulso total es análogo al de una partícula de masa  $M + |Q|$  que se mueve en la dirección  $x$  con velocidad negativa:

$$P^{(0)} \approx \gamma(M + |Q|), \quad P^{(1)} \approx -\gamma\beta(M + |Q|). \quad (5.53)$$

Estas formas asimptóticas para el tetraimpulso fueron encontradas primero por [Maluf, 2005] para un espacio-tiempo de Schwarzschild. Las expresiones encontradas aquí ((5.51)) son, sin embargo, exactas. El tensor de energía impulso del espacio-tiempo adquiere en este caso una forma no simétrica más complicada. En el límite asimptótico, el más bajo orden está dado por la componente:

$$t^{22} = \frac{M}{4\pi r^2} \cos(\phi) \sin(\theta) \gamma^2 \beta'(t). \quad (5.54)$$

A diferencia de (5.42), el orden más bajo del tensor de energía-impulso es ahora  $\mathcal{O}(r^{-2})$ , inducida por la aceleración del sistema. Notemos que esta densidad de momento tiene un máximo en la dirección  $x$ . La ley de conservación de la gravedad teleparalela (ver Sección 2.9) muestra que, debido a la dependencia temporal de  $\gamma$  tendremos un flujo del campo electromagnético y del espacio-tiempo como:

$$\frac{dP^{(0)}}{dt} = R(1 - \alpha(R))\beta\gamma^3\beta'(t) = -\Phi_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} - \Phi_{EM}^{(0)}. \quad (5.55)$$

Para calcular cada uno de estos flujos sobre la superficie de una esfera de radio  $R$ , debemos integrar las componente  $\Theta^{(0)2}$  y  $t^{(0)2}$ . Para el campo electromagnético obtenemos:

$$\Phi_{EM}^{(0)} = \oint \Theta^{(0)2} \sqrt{-g} d\theta d\phi = \oint \left( \frac{Q^2}{8\pi r^4} \alpha(r) \gamma \beta(t) \cos(\phi) \sin(\theta) \right) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = 0, \quad (5.56)$$

y para el espacio-tiempo:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} &= \oint t^{(0)2} \sqrt{-g} d\theta d\phi = \\ &= - \oint \left( \frac{\cos(\phi) \sin(\theta)}{\gamma^2} \xi(r) + 2r^3(1 - \alpha(r))\beta'(t) \right) \frac{\gamma^3 \beta(t)}{8\pi r^4} r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (5.57)$$

donde  $\xi(r) = 2Mr - 2r^2 + \alpha(r)(2r^2 - Q^2)$ . Integrando este último termino obtenemos finalmente

$$\Phi_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} = -R(1 - \alpha(R))\beta\gamma^3\beta'(t), \quad (5.58)$$

como debía ser por la ley de conservación (5.55). Vemos así que este flujo neto de energía tiene solo contribución gravitatoria. La aparición de este flujo de energía surge debido a que las componentes de la curvatura  $R_{abcd} = R_{\mu\nu\rho\sigma}e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho e_d^\sigma$  medidas por el observador acelerado  $e_a$  dependen del parámetro temporal  $t$ . Recordemos que esta dependencia surge exclusivamente por la características del observador ya que el espacio tiempo es estacionario, i.e. las componentes holónomas de la curvatura son independientes del tiempo. Es interesante comparar este flujo dependiente del observador con los flujos de energía en espacio-tiempos de radiación.

### Sistema de referencia geodésico.

Por último, consideremos un observador geodésico inmerso en la geometría de RN. Para su construcción, consideremos primero que la tetravelocidad de un observador en caída libre radialmente está dada por  $e_{(0)}^\mu = (\alpha(r)^{-2}, -\sqrt{1 - \alpha^2}, 0, 0)$ . Luego, podemos formar la congruencia a partir de una tétrada dada por:

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} \alpha(r)^{-2} & -\sqrt{1 - \alpha(r)^2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - \alpha(r)^2}\alpha(r)^{-2} \cos(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta) \cos(\phi)}{r} & -\frac{\csc(\theta) \sin(\phi)}{r} \\ \sqrt{1 - \alpha(r)^2}\alpha(r)^{-2} \sin(\theta) \sin(\phi) & \sin(\theta) \sin(\phi) & \frac{\cos(\theta) \sin(\phi)}{r} & \frac{\csc(\theta) \cos(\phi)}{r} \\ \sqrt{1 - \alpha(r)^2}\alpha(r)^{-2} \cos(\theta) & \cos(\theta) & -\frac{\sin(\theta)}{r} & 0 \end{pmatrix}.$$

La energía total en una esfera de radio  $R$  se puede calcular como en los casos anteriores a partir del superpotencial. Como la componente  $\Sigma^{(0)0i} = 0$  vemos que la energía total es idénticamente cero para un observador en caída libre,  $P^{(0)} = 0$ . Las componentes del superpotencial que determinan el momento espacial total se pueden escribir como  $\Sigma^{(i)02} = -\frac{\alpha(r)}{r} \check{r}_i$ , con lo cual:

$$\mathbf{P} = \oint \alpha(r) \mathbf{r} \sin(\theta) d\theta d\phi = 0, \quad (5.59)$$

sobre una esfera. Computando los tensores de energía impulso es posible ver que las energías del campo gravitatorio y del campo electromagnético son no nulas y opuestas:

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{T}}^{(0)} = \frac{Q^2}{2\sqrt{(M - Q)(M + Q)}} \arctan\left(\frac{r - M}{\sqrt{(M - Q)(M + Q)}}\right) = -P_{EM}^{(0)}. \quad (5.60)$$

Este resultado ha sido encontrado por [Maluf et al., 2007b] para un agujero negro de Schwarzschild. Para ese caso, siendo la solución de vacío, la energía total es igual a la energía del espacio-tiempo. Para RN, para un observador en caída libre, la energía gravitatoria compensa la energía electromagnética. A diferencia del caso estacionario, la congruencia está bien definida para todo  $r$ , incluso dentro del horizonte.

Hemos calculado la energía teleparalela de un espacio-tiempo de Reissner-Nördstrom para tres observadores: estacionario, acelerado y en caída libre. Para cada uno de ellos, obtuvimos una expresión para el tetraimpulso total de los campos (gravitatorio+electromagnético) que es consistente con lo esperado y los límites asintóticos. Luego, hemos presentado la forma del tensor de energía-impulso del campo gravitatorio para estos tres casos y con ello, hemos calculado la contribución de cada uno de los campos a la energía total. En el caso del observador acelerado hemos calculado el flujo de energía en una esfera de radio  $R$  alrededor de la singularidad y la hemos asociado a la dependencia temporal de la curvatura medida por esta congruencia. Estos ejemplos proveen la base para utilizar estas leyes de conservación en situaciones de mayor interés que involucren espacios-tiempo dinámicos, por ejemplo, un agujero negro de RN acelerado [Griffiths and Podolskỳ, 2009] o inestabilidades asociadas a la extracción de energía gravitatoria.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El objetivo principal de este trabajo ha sido analizar si existe una equivalencia total entre la Gravedad de Torsión y la Relatividad General. Para ello, hemos construido una formulación axiomática rigurosa de ambas teorías donde se explicita la interpretación física de ambas. Hemos encontrado que el objeto dinámico de la GT, la tétrada, tiene un contenido semántico mayor que la métrica (el objeto dinámico de la RG), ya que es posible asociar a la tétrada la representación de un sistema de referencia. A partir de ello, hemos demostrado primero la equivalencia entre las ecuaciones de campo y las ecuaciones dinámicas de partículas, para luego mostrar teoremas específicos de la GT. Concluimos:

- Todos los axiomas de la RG se pueden obtener a partir de la GT.
- La interpretación adoptada para la tétrada y las ecuaciones de campo de la GT permiten deducir una ley de conservación que no es posible obtener con la formulación métrica de la RG.

Una consecuencia importante de esto es que la formulación teleparalela de la gravitación provee una noción de energía gravitatoria covariante global de Lorentz pero no es invariante local de Lorentz, consistente con el principio de equivalencia. Hemos analizado las características de la geometría de Weitzenböck y su relación con los SR, estudiando las cantidades típicas de esta geometría como el tensor de torsión, la contorsión y el superpotencial. Con ello, mostramos algunas características generales de las expresiones para la energía teleparalela, explicitando su carácter dependiente del SR que posee esta definición a diferencia de los enfoques métricos al problema de la energía.

Por último, evaluamos la caracterización de la energía para la geometría de Reissner-Nördstrom, utilizando para ello tres observadores distintos: estacionario, acelerado y en caída libre. A diferencia de otros enfoques cuasilocales a la energía gravitatoria, la GT provee de un tensor de energía-impulso bien comportado ante difeomorfismos que permite computar la contribución de la materia y el campo gravitatorio a la energía total. Para el observador estacionario, encontramos que el tensor de energía-impulso se comporta como el tensor de energía-impulso electromagnético en el infinito, consistente con el régimen gravitoelectromagnético de campo débil. Para

el observador acelerado, hemos visto que existe un flujo de energía gravitatoria, surgido de la dependencia temporal de la curvatura medida en este marco. Finalmente, para el observador en caída libre hemos encontrado que la energía gravitatoria es nula.

Este trabajo ha motivado una serie de cuestiones que exigen una mayor investigación:

- Caracterización completa del sistema de referencia y el tensor de energía-impulso teleparalelo: El grado de degeneración en la elección de la tétrada dificultan explorar las propiedades generales de este tensor. Un criterio para elegir un SR físicamente aceptable podría ayudar a obtener propiedades más generales de este tensor.
- Una mayor investigación en la geometría de Weitzenböck y su utilidad en gravitación.
- Utilización del formalismo de GT para explorar las energías en escenarios de agujeros negros cosmológicos para estudiar la interacción de estos sistemas con el universo.
- Analizar el significado físico de la curvatura dependiente del tiempo medida por un observador acelerado. Estudiar en qué difiere este tipo de radiación con la radiación de un espacio-tiempo de ondas gravitacionales.
- Estudiar los flujos de energía para agujeros negros cargados acelerados y compararlos con los resultados obtenidos cuando el observador está acelerado.

La comparación entre la RG y la GT que hemos desarrollado a lo largo de la tesis muestra que existen diversos aspectos metateóricos que pueden ser analizados exitosamente a través de una semántica rigurosa. Estos métodos formales pueden ser utilizados también para responder a preguntas de carácter ontológico: ¿qué es el espacio-tiempo?, ¿cuál es su relación con las propiedades básicas de un individuo?, ¿qué es un sistema de referencia?. Estas preguntas fundamentales se encuentran en la intersección donde confluyen física y filosofía, disciplinas que no debemos separar si pretendemos entender de qué está hecho el *mundo*.

# Apéndice A

## Axiomatización de la Relatividad General

Presentamos en esta sección la axiomatización de la RG para su comparación con la GT.

### Base generadora y definiciones

La base primitiva de la teoría se compone de ocho elementos:

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{ET}, \Sigma, \mathcal{M}, \{\mathbf{g}\}, \{\Theta\}, \{\phi\}, \kappa, \Lambda\} \quad (\text{A.1})$$

Precisamos también las definiciones de la geometría de Riemann:

**D'**<sub>1</sub>  $R^\rho_{\mu\lambda\nu} = 2\partial_{[\lambda} {}^0\Gamma^\rho_{\nu]\mu} + 2 {}^0\Gamma^\rho_{\sigma[\lambda} {}^0\Gamma^\sigma_{\nu]\mu}$  es el tensor de curvatura de Riemann.

**D'**<sub>2</sub>  $R_{\mu\nu} := R^\rho_{\mu\rho\nu}$  es el tensor de Ricci.

**D'**<sub>3</sub>  $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$  es el escalar de Ricci.

**D'**<sub>4</sub>  $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  es el tensor de Einstein.

### Base axiomática

La base axiomática se conforma de  $\mathcal{A}(T_{RG}) = \bigwedge_i^9 \mathbf{A}_i$ .

### Axiomas

*Grupo I: Espacio-tiempo*

**A**<sub>1</sub>  $\mathcal{M}$  es una variedad diferencial Hausdorff paracompacta  $C^\infty$ , 4-dimensional, real y pseudo-riemanniana.

**A<sub>2</sub>**  $\{\mathbf{g}\}$  es una familia de tensores métricos de rango 2, simétricos, y signatura +2 definidos sobre  $\mathcal{M}$ . Todos los principales menores de  $(g^{\mu\nu})$  son negativos (*Condición de threading*).

**A<sub>3</sub>**  $\{\phi\}$  es una familia de isometrías:  $\phi^*\mathbf{g} = \mathbf{g}$ .

**A<sub>4</sub>** (AS) El espacio-tiempo  $\mathcal{ET}$  es el sistema físico representado por la clase de equivalencia de diffeomorfismos isométricos de una métrica dada, i.e  $\mathcal{ET} \hat{=} \overline{\langle \mathcal{M}, \mathbf{g} \rangle}$ .

### *Grupo II: Materia*

**A<sub>5</sub>**  $\Sigma$  es una familia no vacía de elementos  $\sigma \in \Sigma$

**A<sub>6</sub>** (AS) Cada  $\sigma$  es un sistema físico distinto al espacio-tiempo.

**A<sub>7</sub>** (AS) Para cada  $\sigma$  existe un tensor  $\Theta \equiv \Theta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  simétrico que representa la energía y el momento del sistema.

### *Grupo III: Dinámica*

**A<sub>8</sub>** Sea  $\kappa := c^3/16\pi G$  y  $\Lambda \in \mathbb{R}$ , donde  $[\Lambda] = [L]^{-2}$ ,  $c$  es la velocidad de la luz y  $G$  la constante de Newton.

**A<sub>9</sub>** (Axioma físico) La métrica obedece las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2\kappa} \Theta_{\mu\nu} \tag{A.2}$$

# Apéndice B

## Formulación Lagrangiana. Pseudotensores y gravedad modificada.

### B.1. Acción en Relatividad General

En Relatividad General, la acción está dada por el lagrangiano construido con el escalar de Ricci:

$$S[g] = \int_{\mathcal{V}} \frac{R}{16\pi} \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{B.1})$$

Variando  $S$  con respecto a  $g_{\mu\nu}$  recuperamos las ecuaciones de Einstein, imponiendo la condición  $\delta g_{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{V}} = 0$ . Esta condición implica que la métrica inducida sobre el borde  $\partial\mathcal{V}$  dada por  $h_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu$  se mantiene fija en la variación. Realizando explícitamente la variación obtenemos:

$$\delta S = \int_{\mathcal{V}} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x - \oint_{\partial\mathcal{V}} h^{\mu\nu} \delta(\partial_\alpha g_{\mu\nu}) n^\alpha \sqrt{|h|} d^3y \quad (\text{B.2})$$

donde  $n^\alpha$  es el normal al borde  $\partial\mathcal{V}$ . En general, la derivada  $\partial_\alpha g_{\mu\nu} n^\alpha$  no es nula sobre este borde. Este término de borde aparece en la variación debido a que el lagrangiano posee derivadas segundas, un aspecto poco común en teoría de campos [Poisson, 2004]. Para remediarlo y obtener las ecuaciones de Einstein, debemos suplementar una acción de borde dada por:

$$I[h] := \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} (K - K_0) \sqrt{|h|} d^3x \quad (\text{B.3})$$

donde  $K$  es la traza de la curvatura extrínseca en el borde y  $K_0$  la traza de la curvatura extrínseca embebida en el espacio plano. Variando  $I[h]$ , se obtiene el término de borde (B.2), obteniendo de esta manera las ecuaciones de Einstein. Estos términos de borde son muy importantes para construir la formulación ADM hamiltoniana de la RG.

## B.2. Acción de primer orden

Supongamos que podemos realizar una separación del lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = R = \mathcal{L}_1 + \nabla_\mu \mathcal{W}_1^\mu \quad (\text{B.4})$$

donde  $\mathcal{L}_1$  es un lagrangiano de primer orden y  $\mathcal{W}^\mu$  un tetravector. El lagrangiano  $\mathcal{L}_1$  no será en general invariante frente a diffeomorfismos arbitrario; pese ello, la variación provee la correcta dinámica de la teoría debido a que solo difiere de  $R$  por una divergencia total. De esta manera, utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, válidas para lagrangianos de primer orden,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\rho}} - \partial_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma g_{\mu\rho})} = \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\rho}}, \quad (\text{B.5})$$

obtenemos la ecuación::

$$\partial_\sigma (\sqrt{-g} S^{\mu\rho\sigma}) = \sqrt{-g} (\tau^{\mu\rho} + \Theta^{\mu\rho}), \quad (\text{B.6})$$

siendo  $S^{\mu\rho\sigma}$  un superpotencial antisimétrico. La cantidad  $\tau^{\mu\rho}$  es el pseudotensor<sup>1</sup> de energía-impulso, que se puede escribir como en toda teoría de campos a partir del momento conjugado,

$$\pi^{\mu\alpha\beta} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu g_{\alpha\beta}}, \quad (\text{B.7})$$

dado entonces como:

$$\tau^{\mu\rho} := \sqrt{-g} \left( \partial^\nu g^{\alpha\beta} \pi^{\mu\alpha\beta} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right). \quad (\text{B.8})$$

conservado, como se puede ver de la ecuación (B.6). Podemos realizar entonces distintas separaciones del escalar de Ricci,

$$\mathcal{L}_1 + \nabla_\mu \mathcal{W}_1^\mu = \mathcal{L}_2 + \nabla_\mu \mathcal{W}_2^\mu = \dots \quad (\text{B.9})$$

siendo  $\mathcal{L}_i$  lagrangianos de primer orden, y de esa manera obtener diferentes expresiones pseudotensoriales. Un ejemplo de esta clase de lagrangianos es el de [Schrödinger, 1985], dado por:

$$R = \gamma + \nabla_\mu \omega^\mu \quad (\text{B.10})$$

siendo  $\gamma = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\beta\mu}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta)$ .

## B.3. Acción teleparalela

La única separación del tipo B.4 que preserva la invarianza ante diffeomorfismos es la realizada en GT:

$$-R \equiv \mathbb{T} + 2\nabla^\mu T_{\mu\nu}^\nu \quad (\text{B.11})$$

---

<sup>1</sup>El caracter pseudotensorial está asociado a que el lagrangiano no es invariante frente a difeomorfismos

de donde obtenemos las ecuaciones de campo teleparalelas:

$$\partial_\nu \left( \sqrt{-g} \Sigma^{a\lambda\nu} \right) = \frac{1}{4k} \sqrt{-g} t^{\lambda a} \quad (\text{B.12})$$

Como ya hemos comentado, pese a preservar la invarianza ante diffeomorfismos, el lagrangiano no es ILL; las ecuaciones de campo, sin embargo, s3 preservan la ILL debido a que difieren de  $R$  por una divergencia, i.e. son equivalentes a las ecuaciones de Einstein. Con el mismo razonamiento de la secci3n anterior, el tensor de energ3a-impulso teleparalelo que hemos estudiado se define como:

$$t^{\mu\nu} := \kappa \left( (\partial_\nu e_{a\rho}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu e_{a\rho}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) \quad (\text{B.13})$$

equivalente a la expresi3n utilizada en (2.56). Al igual que la acci3n, est3 bien definido frente a diffeomorfismos pero no es ILL. Notemos que el superpotencial  $\Sigma^{a\mu\nu}$  posee un 3ndice de Lorentz dentro de la derivada. Si expresamos a esta ecuaci3n con todos los 3ndices hol3nomos, obtenemos

$$\partial_\nu \left( \sqrt{-g} \Sigma^{\mu\lambda\nu} \right) = \frac{1}{4k} \sqrt{-g} j^{\lambda\mu} \quad (\text{B.14})$$

donde necesariamente  $j^{\mu\nu}$  se convierte en un pseudotensor [de Andrade et al., 2000] por la contribuci3n no tensorial de la conexi3n de Weitzenb3ck:

$$j^{\mu\nu} := t^{\mu\nu} + \kappa {}^* \Gamma^{\sigma\mu}_\rho \Sigma_\sigma{}^{\rho\nu} \quad (\text{B.15})$$

## B.4. Teor3as $f(\mathbb{T})$ y $f(R)$

A lo largo de esta tesis, nos hemos propuesto analizar el equivalente teleparalelo de RG, utilizando otra representaci3n del lagrangiano, dado por el escalar de torsi3n  $\mathbb{T}$ , invariante ante diffeomorfismos, invariante global de Lorentz, pero no ILL. La modificaci3n expl3cita del lagrangiano llevar3 a una clase de teor3as no equivalentes a RG. Dentro de este tipo de teor3as encontramos a las teor3as  $f(R)$ , donde las ecuaciones de movimiento resultantes son en general de cuarto orden en la m3trica, e.g. lagrangianos del tipo  $\mathcal{L} = R + \alpha R^2$ . En la 3ltima d3cada, motivado por aplicaciones cosmol3gicas, se han propuesto teor3as que modifican el escalar de torsi3n, dando lugar a una clase de teor3as denominadas  $f(T)$  (ver [Ferraro and Fiorini, 2011]), cuyas ecuaciones a diferencia de las teor3as  $f(R)$ , son de segundo orden. Un rasgo notable de estas teor3as es que el lagrangiano no es ILL como ocurre con las teor3as  $f(R)$ , ya que como hemos mencionado el escalar de torsi3n no es ILL. De esta manera, las ecuaciones de movimiento poseen un marco preferido, que determinan las 16 componentes de la t3trada. Notemos que las ecuaciones de la GT solo determinan 10 componentes de la t3trada ya que poseen ILL, es decir, las teor3as  $f(T)$  poseen determinan m3s grados de libertad que la GT [Li et al., 2011]. Recientemente, se han propuestos teor3as  $f(T, B)$ , donde  $B := 2\nabla_\mu T^\mu$ , que engloban a las teor3as  $f(R) = f(-T + B)$  y a las  $f(T)$  [Bahamonde et al., 2015]. En estos trabajos, se ha probado que las teor3as  $f(R)$  son las 3nicas teor3as modificadas que conservan la invarianza local de Lorentz para transformaciones arbitrarias.

## B.5. Conexión de Lorentz

Para construir una geometría sin curvatura hemos tomado  ${}^*\omega_{\mu c}^a = 0$ . Sin embargo, la conexión más general que cumple esta condición para tétradas ortonormales es la conexión de Lorentz (ver 2.10) dada por:

$$\omega_{\mu a'}^{c'} = \Lambda_b^{c'} (\partial_\nu \Lambda_{a'}^b) \quad (\text{B.16})$$

cuya ley de transformación es:

$$\omega_{\mu b'}^{a'} = \Lambda_c^{a'} \partial_\mu \Lambda_{b'}^c + \Lambda_c^{a'} \omega_{\mu d}^c \Lambda_{b'}^d \quad (\text{B.17})$$

Podemos construir así una geometría teleparalela  $\mathcal{G}_T$ , con curvatura cero, donde el tensor de torsión queda definido como:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}^a(e, \omega) = \partial_\mu e_\nu^a - \partial_\nu e_\mu^a + \omega_{\mu b}^a e_\nu^b - \omega_{\nu b}^a e_\mu^b \quad (\text{B.18})$$

donde ahora tenemos una nueva variable independiente además de la tétrada dada por la conexión no nula. Eliminar la conexión de spin de Lorentz, como hacemos en la geometría de Weitzenböck, produce que la cantidad definida por  $T_{\mu\nu}^a = e_\rho^a T_{\mu\nu}^\rho$  no sea un vector del grupo de Lorentz local. Es posible mostrar que:

$$T^a \equiv de^a = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}^a dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (\text{B.19})$$

no transforma como un vector de Lorentz. Si agregamos una uno-forma dada por la conexión de spin de Lorentz  $\omega_{c'}^{a'} = \Lambda_b^{c'} (\partial_\nu \Lambda_{a'}^b) dx^\nu$  entonces la cantidad

$$\mathcal{T}^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b, \quad (\text{B.20})$$

transforma correctamente como un vector del grupo local  $\text{SO}(1, 3)$ ,  $\mathcal{T}^{a'} = \Lambda_b^{a'} \mathcal{T}^b$ . Notar que  $de^a = T_{\nu\rho}^a dx^\nu \wedge dx^\rho$  es la torsión de la geometría  $\mathcal{G}_W$ , que coincide con las constantes de estructuras de la tétrada, mientras que  $\mathcal{T}_{\nu\rho}^a$  es la torsión de la geometría teleparalela  $G_T$ .

Un enfoque alternativo al seguido en esta tesis es consiste en formular la GT agregando una conexión de Lorentz como variable independiente. La razón de agregar una conexión de Lorentz es conservar la invarianza de las cantidades como  $t^{\mu\nu}$  y  $T_{\nu\rho}^\mu$  ante transformaciones locales de la tétrada. Recordemos que en la geometría de Weitzenböck estas cantidades solo son invariante ante transformaciones globales de la tétrada. En esta teoría, se supone una descomposición de la tétrada como:

$$e_\mu^a = \partial_\mu x^a + \omega_{\mu b}^a x^b + B_\mu^a \quad (\text{B.21})$$

donde  $B_\mu^a$  es el campo de gauge gravitatorio y  $\partial_\mu x^a$  la componentes holonómica de la tétrada. La conexión de spin  $\omega_{\mu b}^a$  en esta teoría representa los efectos inerciales de la tétradas. La razón de esta denominación es que al apagar los efectos puramente gravitatorios, dados por  $B_\mu^a$ , la tétrada resultante tiene en general una componente anholonómica dada por la conexión de spin. La inclusión de esta conexión introduce al menos dos problemas:

- 1 Ecuaciones inconsistentes: Si la conexión se introduce como variable independiente, debe ser variada en la acción. Esta variación es problemática y no está claro qué grados de libertad físico representa.
- 2 La introducción de una conexión de spin de Lorentz en la teoría implica la invarianza de los tensores de torsión  $T_{\nu\rho}^{\mu}$  ante transformaciones locales de Lorentz. Como vimos en la Sección 4, esto es inconsistente con la interpretación de tétradas como sistema de referencia.
- 3 Se han propuesto criterios para obtener esta conexión [Krššák and Pereira, 2015], suponiendo que la tétrada siempre admite la descomposición en una parte “inercial” y otra parte “gravitatoria”. Esta descomposición, sin embargo, no funciona para espacios-tiempo cosmológicos o cuando el límite al espacio-tiempo plano no es trivial.

Por estos motivos, decidimos formular la teoría en términos de una conexión nula. La teoría resultante es más sencilla, no tiene los problemas asociados a la conexión y posee *solo* covarianza global de Lorentz. Esto último es consistente con el principio de equivalencia. Trabajamos entonces en un marco fijo (a menos de estas transformaciones globales) dado por una tétrada  $\mathbf{e}_a$  que representa un sistema de referencia dado.



# Bibliografía

- [Aldrovandi and Pereira, 2013] Aldrovandi, R. and Pereira, J. G. (2013). *Teleparallel Gravity*, volume 173 of *Fundamental Theories of Physics*. Springer, Dordrecht.
- [Aldrovandi et al., 2010] Aldrovandi, R., Pereira, J. G., da Rocha, R., and Vu, K. H. (2010). Nonlinear Gravitational Waves: Their Form and Effects. *Int. J. Theor. Phys.*, 49:549–563.
- [Auchmann and Kurz, 2014] Auchmann, B. and Kurz, S. (2014). Observers and Splitting Structures in Relativistic Electrodynamics. *J. Phys.*, A47(43):435202.
- [Bahamonde et al., 2015] Bahamonde, S., Böhmer, C. G., and Wright, M. (2015). Modified teleparallel theories of gravity. *Phys. Rev.*, D92(10):104042.
- [Bini et al., 2012] Bini, D., Chicone, C., and Mashhoon, B. (2012). Spacetime Splitting, Admissible Coordinates and Causality. *Phys. Rev.*, D85:104020.
- [Bini and Mashhoon, 2015] Bini, D. and Mashhoon, B. (2015). Weitzenböck’s torsion, Fermi coordinates, and adapted frames. *Phys. Rev.*, D91:084026.
- [Blanchet et al., 2011] Blanchet, L., Spallicci, A., and Whiting, B. (2011). *Mass and Motion in General Relativity*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands.
- [Bolos, 2007] Bolos, V. J. (2007). Intrinsic definitions of ‘relative velocity’ in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 273:217–236.
- [Bunge, 1967] Bunge, M. (1967). *Foundations of Physics*. Springer Tracts in Natural Philosophy. Springer Heidelberg.
- [Bunge, 1973] Bunge, M. (1973). *Philosophy of physics*. Springer Heidelberg.
- [Bunge, 1974] Bunge, M. (1974). *Treatise on Basic Philosophy: Semantics I: Sense and Reference*. Treatise on Basic Philosophy. Springer Netherlands.
- [Bunge, 2016] Bunge, M. (2016). Why axiomatize? *Foundations of Science, Springer*, pages 1–13.
- [Butcher et al., 2010] Butcher, L. M., Hobson, M., and Lasenby, A. (2010). Localising the Energy and Momentum of Linear Gravity. *Phys. Rev.*, D82:104040.

- [Butcher et al., 2008] Butcher, L. M., Lasenby, A., and Hobson, M. (2008). The Physical significance of the Babak-Grishchuk gravitational energy-momentum tensor. *Phys. Rev.*, D78:064034.
- [Cai et al., 2016] Cai, Y.-F., Capozziello, S., De Laurentis, M., and Saridakis, E. N. (2016). f(T) teleparallel gravity and cosmology. *Rept. Prog. Phys.*, 79(10):106901.
- [Chen et al., 2016] Chen, C.-M., Nester, J. M., and Ni, W.-T. (2016). A brief history of gravitational wave research.
- [Chinea, 1988] Chinea, F. J. (1988). Symmetries in tetrad theories. *Classical and Quantum Gravity*, 5(1):135.
- [Cho, 1976] Cho, Y. M. (1976). Einstein Lagrangian as the Translational Yang-Mills Lagrangian. *Phys. Rev.*, D14:2521.
- [Corry, 1997] Corry, L. (1997). David hilbert and the axiomatization of physics (1894-1905). *Archive for History of Exact Sciences*, 51(2):83–198.
- [Costa and Natario, 2014] Costa, L. F. O. and Natario, J. (2014). Gravito-electromagnetic analogies. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1792.
- [Covarrubias, 1993] Covarrubias, G. M. (1993). An axiomatization of general relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, 32(11):2135–2154.
- [Crawford and Tereno, 2002] Crawford, P. and Tereno, I. (2002). Generalized observers and velocity measurements in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 34:2075.
- [da Rocha-Neto and Maluf, 2014] da Rocha-Neto, J. F. and Maluf, J. W. (2014). The angular momentum of plane-fronted gravitational waves in the teleparallel equivalent of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 46:1667.
- [de Andrade et al., 2000] de Andrade, V. C., Guillen, L. C. T., and Pereira, J. G. (2000). Gravitational energy momentum density in teleparallel gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4533–4536.
- [De Felice and Bini, 2010] De Felice, F. and Bini, D. (2010). *Classical Measurements in Curved Space-Times*. Cambridge University Press.
- [De Felice and Clarke, 1992] De Felice, F. and Clarke, C. J. S. (1992). *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press.
- [Debever, 2015] Debever, R. (2015). *Elie Cartan and Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932*. Princeton Legacy Library. Princeton University Press.
- [Einstein, 1930] Einstein, A. (1930). Auf die riemann-metrik und den fern-parallelismus gegründete einheitliche feldtheorie. *Mathematische Annalen*, 102(1):685–697.

- [Ellis and van Elst, 1999] Ellis, G. F. R. and van Elst, H. (1999). Cosmological models: Cargese lectures 1998. *NATO Sci. Ser. C*, 541:1–116.
- [Favata, 2001a] Favata, M. (2001a). Energy localization invariance of tidal work in general relativity. *Phys. Rev. D*, 63:064013.
- [Favata, 2001b] Favata, M. (2001b). Energy localization invariance of tidal work in general relativity. *Phys. Rev.*, D63:064013.
- [Fecko, 2011] Fecko, M. (2011). *Differential geometry and Lie groups for physicists*. Cambridge University Press.
- [Ferraro and Fiorini, 2011] Ferraro, R. and Fiorini, F. (2011). Non trivial frames for f(T) theories of gravity and beyond. *Phys. Lett.*, B702:75–80.
- [Friedman, 2014] Friedman, M. (2014). *Foundations of space-time theories: Relativistic physics and philosophy of science*. Princeton University Press.
- [Goenner, 2004] Goenner, H. F. M. (2004). On the history of unified field theories. *Living Reviews in Relativity*, 7(2).
- [Griffiths and Podolskỳ, 2009] Griffiths, J. B. and Podolskỳ, J. (2009). *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press.
- [Gronwald and Hehl, 1995] Gronwald, F. and Hehl, F. W. (1995). On the gauge aspects of gravity. In *Quantum gravity. Proceedings, International School of Cosmology and Gravitation, 14th Course, Erice, Italy, May 11-19, 1995*, pages 148–198.
- [Hawking and Ellis, 1973] Hawking, S. and Ellis, G. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [Hayashi and Shirafuji, 1979] Hayashi, K. and Shirafuji, T. (1979). New General Relativity. *Phys. Rev.*, D19:3524–3553. [Addendum: *Phys. Rev.*D24,3312(1982)].
- [Hayward, 1996] Hayward, S. A. (1996). Gravitational energy in spherical symmetry. *Phys. Rev.*, D53:1938–1949.
- [Herrera and Varela, 1996] Herrera, L. and Varela, V. (1996). Finite Self-Energy of Pointlike Sources for the Reissner-Nordstrom Metric. *Gen. Rel. Grav.*, 28:663–678.
- [Hilbert, 1902] Hilbert, D. (1902). Mathematical problems. *Bull. Amer. Math.*, (8):437–479.
- [Itin, 2002] Itin, Y. (2002). Coframe energy momentum current: Algebraic properties. *Gen. Rel. Grav.*, 34:1819–1837.

- [Jaramillo and Gourgoulhon, 2009] Jaramillo, J. L. and Gourgoulhon, E. (2009). Mass and angular momentum in general relativity. In *Mass and motion in general relativity*, pages 87–124. Springer.
- [Krššák, 2015] Krššák, M. (2015). Holographic Renormalization in Teleparallel Gravity. *arXiv*, gr-qc:1510.06676.
- [Krššák and Pereira, 2015] Krššák, M. and Pereira, J. G. (2015). Spin Connection and Renormalization of Teleparallel Action. *Eur. Phys. J.*, C75(11):519.
- [Lehmkuhl, 2011] Lehmkuhl, D. (2011). Mass–energy–momentum: Only there because of spacetime? *The British journal for the philosophy of science*, 62(3):453–488.
- [Li et al., 2011] Li, B., Sotiriou, T. P., and Barrow, J. D. (2011).  $f(T)$  gravity and local Lorentz invariance. *Phys. Rev.*, D83:064035.
- [Liu and Yau, 2003] Liu, C.-C. M. and Yau, S.-T. (2003). Positivity of Quasilocal Mass. *Phys. Rev. Lett.*, 90:231102.
- [Liu et al., 2011] Liu, J.-L., Chen, C.-M., and Nester, J. M. (2011). Quasi-local energy and the choice of reference. *Class. Quant. Grav.*, 28:195019.
- [Lobo, 2015] Lobo, F. S. N. (2015). Beyond Einstein’s General Relativity. *J. Phys. Conf. Ser.*, 600(1):012006.
- [Lucas et al., 2009] Lucas, T. G., Obukhov, Y. N., and Pereira, J. G. (2009). Regularizing role of teleparallelism. *Phys. Rev.*, D80:064043.
- [Lundgren et al., 2007] Lundgren, A. P., Schmekel, B. S., and York, Jr., J. W. (2007). Self-renormalization of the classical quasilocal energy. *Phys. Rev.*, D75:084026.
- [Maluf et al., 2006] Maluf, J., Ulhoa, S., Faria, F., and da Rocha-Neto, J. (2006). The angular momentum of the gravitational field and the poincaré group. *Classical and Quantum Gravity*, 23(22):6245.
- [Maluf et al., 2007a] Maluf, J., Veiga, M., and da Rocha-Neto, J. (2007a). Regularized expression for the gravitational energy-momentum in teleparallel gravity and the principle of equivalence. *General Relativity and Gravitation*, 39(3):227–240.
- [Maluf, 1994] Maluf, J. W. (1994). Hamiltonian formulation of the teleparallel description of general relativity. *J. Math. Phys.*, 35:335–343.
- [Maluf, 2005] Maluf, J. W. (2005). Accelerated observers and gravitational radiation. *Grav. Cosmol.*, 11:284–288.
- [Maluf, 2013] Maluf, J. W. (2013). The teleparallel equivalent of general relativity. *Annalen Phys.*, 525:339–357.

- [Maluf, 2015] Maluf, J. W. (2015). The Teleparallel Equivalent of General Relativity and the Gravitational Centre of Mass.
- [Maluf and Faria, 2008] Maluf, J. W. and Faria, F. F. (2008). On the construction of Fermi-Walker transported frames. *Annalen Phys.*, 17:326–335.
- [Maluf et al., 2007b] Maluf, J. W., Faria, F. F., and Ulhoa, S. C. (2007b). On reference frames in spacetime and gravitational energy in freely falling frames. *Class. Quant. Grav.*, 24:2743–2754.
- [Maluf et al., 2012] Maluf, J. W., Ulhoa, S. C., and da Rocha-Neto, J. F. (2012). Gravitational pressure on event horizons and thermodynamics in the teleparallel framework. *Phys. Rev. D*, 85:044050.
- [Mashhoon, 1987] Mashhoon, B. (1987). Wave propagation in a gravitational field. *Physics Letters A*, 122(6):299–304.
- [Mashhoon, 1994] Mashhoon, B. (1994). On the origin of inertial accelerations. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 109(2):187–199.
- [Mashhoon, 2003] Mashhoon, B. (2003). The Hypothesis of locality and its limitations.
- [Mashhoon, 2011] Mashhoon, B. (2011). Necessity of Acceleration-Induced Nonlocality. *Annalen Phys.*, 523:226–234.
- [Mashhoon, 2013] Mashhoon, B. (2013). Observers in Spacetime and Nonlocality. *Annalen Phys.*, 525:235–243.
- [Mashhoon, 2015] Mashhoon, B. (2015). Nonlocal General Relativity. *Galaxies*, 3(1):1–17.
- [Mashhoon and Muench, 2002] Mashhoon, B. and Muench, U. (2002). Length measurement in accelerated systems. *Annalen Phys.*, 11:532–547.
- [McGrath et al., 2012] McGrath, P. L., Epp, R. J., and Mann, R. B. (2012). Quasi-local Conservation Laws: Why We Need Them. *Class. Quant. Grav.*, 29:215012.
- [Misner et al., 1973] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco.
- [Møller, 1961] Møller, C. (1961). Tetrad fields and conservation laws in general relativity. In *Evidence for Gravitational Theories*, page 252.
- [Obukhov et al., 2009] Obukhov, Y. N., Pereira, J. G., and Rubilar, G. F. (2009). On the energy transported by exact plane gravitational-wave solutions. *Class. Quant. Grav.*, 26:215014.
- [Ortin, 2015] Ortin, T. (2015). *Gravity and Strings*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.

- [Perez-Bergliaffa et al., 1996] Perez-Bergliaffa, S. E., Romero, G. E., and Vucetich, H. H. (1996). Axiomatic foundations of quantum mechanics revisited: the case of systems. *Int. J. Theor. Phys.*, 35:1805–1820.
- [Perez Bergliaffa et al., 1993] Perez Bergliaffa, S. E., Vucetich, H., and Romero, G. E. (1993). Axiomatic foundations of nonrelativistic quantum mechanics: A Realistic approach. *Int. J. Theor. Phys.*, 32:1507.
- [Poisson, 2004] Poisson, E. (2004). *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press.
- [Prugovecki, 2013] Prugovecki, M. (2013). *Quantum Geometry: A Framework for Quantum General Relativity*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands.
- [Rohrlich, 2007] Rohrlich, F. (2007). *Classical charged particles*. World Scientific.
- [Romero, 2016] Romero, G. E. (2016). On the ontology of spacetime: Substantivalism, relationism, eternalism, and emergence. *Foundations of Science, Springer*, pages 1–19.
- [Rovelli, 2004] Rovelli, C. (2004). *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press.
- [Saravi, 2004] Saravi, R. E. G. (2004). On the energy–momentum tensor. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(40):9573.
- [Sauer, 2006] Sauer, T. (2006). Field equations in teleparallel space–time: Einstein’s fernparallelismus approach toward unified field theory. *Historia Mathematica*, 33(4):399 – 439. Special Issue on Geometry and its Uses in Physics, 1900-1930.
- [Schrödinger, 1985] Schrödinger, E. (1985). *Space-time structure*. Cambridge University Press.
- [Schucking and Surowitz, 2015] Schucking, E. L. and Surowitz, E. J. (2015). *Einstein’s Apple: Homogeneous Einstein Fields*. World Scientific.
- [So and Nester, 2009] So, L. L. and Nester, J. M. (2009). Gravitational energy-momentum in small regions according to the tetrad-teleparallel expressions. *Chin. J. Phys.*, 47:10–19.
- [Sorkin, 2003] Sorkin, R. D. (2003). Causal sets: Discrete gravity. In *Lectures on quantum gravity. Proceedings, School of Quantum Gravity, Valdivia, Chile, January 4-14, 2002*, pages 305–327.
- [Szabados, 2009] Szabados, L. B. (2009). Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 12(4).

- 
- [Tamir, 2012] Tamir, M. (2012). Proving the principle: Taking geodesic dynamics too seriously in einstein's theory. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 43:137–154.
- [Ulhoa et al., 2010] Ulhoa, S. C., da Rocha Neto, J. F., and Maluf, J. W. (2010). The Gravitational Energy Problem for Cosmological Models in Teleparallel Gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D19:1925–1935.