

# Formulación del LPIM en base a las leyes fundamentales del plasma ionosférico

Emilio Camilion

Director: Dr. Claudio Brunini  
Co-Director: Dr. Francisco Azpilicueta

Tesis para obtener el Doctorado en Geofísica



Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas  
Universidad Nacional de La Plata



El Tribunal Examinador de esta Tesis doctoral fue integrado por:

-----  
Dr. Mauricio Gende (Universidad Nacional de La Plata)

-----  
Dr. Rodolfo Rodriguez (Universidad de Concepción)

-----  
Dr. Alejandro de la Torre (Universidad Austral)



## Tabla de contenidos

<b>Introducción.....</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos.....	1
1.2 Resumen de la tesis .....	2
<b>Capítulo 1: El Modelo Ionosférico de La Plata.....</b>	<b>5</b>
1.1 Introducción.....	5
1.2 Primera versión del LPIM (año 1998) .....	6
1.2.1 Módulo de pre-procesamiento del LPIM .....	6
1.2.2 Módulo de procesamiento del LPIM.....	9
1.2.3 Resultados obtenidos.....	17
1.3 Primeros modelos globales de densidad electrónica (año 1999) .....	17
1.3.1 Formulación del modelo .....	18
1.3.2 Resultados alcanzados.....	20
1.4 Desarrollo de la capacidad de procesar observaciones de fase de las portadoras GPS (año 2000) .....	22
1.4.1 Detección de saltos de ciclo .....	23
1.4.2 Estimación de la ambigüedad ionosférica.....	24
1.5 Implementación de la latitud ‘modip’ en la representación espacial del contenido vertical total de electrones (año 2006) .....	25
1.5.1 Latitud geográfica y geomagnética.....	25
1.5.2 Latitud modip.....	25
1.5.3 Argumentos en favor de la latitud modip.....	26
1.5.4 Resultados alcanzados.....	27
1.6 Modelo global de la densidad de electrones basado en observaciones GNSS en la tierra y en satélites de órbitas baja (año 2009).....	31
1.6.1 Modelo para la distribución vertical de electrones libres.....	31
1.7 Predicción de la densidad electrónica usando el LPIM .....	35
1.7.1 Predicción de la densidad electrónica mediante el modo autónomo .....	35
1.7.2 Predicción de la densidad electrónica mediante el modo asimilación de datos .....	37
1.7.3 Resultados obtenidos.....	37
1.8 Conclusiones del capítulo .....	40
<b>Capítulo 2: Ionosfera .....</b>	<b>41</b>
2.1 Introducción.....	41
2.2 Interacción Tierra-Viento solar: La magnetósfera.....	42
2.3 Atmósfera neutra .....	44
2.4 Vientos termosféricos.....	46
2.5 Campo Magnético Terrestre.....	47
2.6 La Ionosfera .....	51
2.7 Absorción de la radiación solar .....	54
2.8 Producción de ionización.....	56
2.8.1 Fotoionización.....	56
2.8.2 Procesos de ionización secundarios.....	59
2.8.3 Intercambio de cargas .....	59

2.8.4 Precipitación de partículas .....	61
2.9 Pérdida de ionización .....	62
2.9.1 Recombinación disociativa de Iones moleculares .....	62
2.9.2 Recombinación radiativa de Iones atómicos .....	62
2.9.3 Intercambio de cargas .....	63
2.10 Capas ionosféricas .....	63
2.11 Tope de la ionosfera y la Plasmaesfera .....	67
2.12 Estructura térmica de la ionosfera .....	68
2.13 Variaciones sistemáticas en la ionosfera.....	70
2.13.1 Variaciones diurnas .....	70
2.13.2 Variaciones estacionales .....	71
2.13.3 Variaciones con el ciclo solar .....	73
2.14 Región F ecuatorial .....	73
2.15 Generación de campos eléctricos en la ionosfera .....	76
<b>Capítulo 3: Ecuaciones de Transporte .....</b>	<b>79</b>
3.1 Introducción.....	79
3.2 Ecuación de Boltzmann .....	79
3.3 Momentos de la función de distribución .....	81
3.4 Ecuaciones de transporte generales .....	83
3.5 Distribución de velocidad Maxwelliana.....	86
3.6 Cerrando el sistema de ecuaciones de transporte.....	86
3.7 Ecuaciones de transporte de 13 momentos.....	88
3.8 Aproximación de los 5 momentos.....	89
3.9 Términos de colisión para distribuciones de velocidad Maxwellianas .....	90
3.10 Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes.....	93
3.11 Aplicación a la ionosfera terrestre .....	95
<b>Capítulo 4: Modelado numérico – Método de Volúmenes Finitos.....</b>	<b>98</b>
4.1 Introducción.....	98
4.2 Componentes del Modelado Numérico .....	98
4.2.1 Modelo Matemático.....	98
4.2.2 Método Numérico.....	98
4.2.3 Sistema coordinado .....	98
4.2.4 Grilla Numérica .....	99
4.3 Propiedades de los Métodos de resolución numérica .....	101
Consistencia .....	101
Estabilidad .....	101
Convergencia .....	102
Conservación.....	102
Precisión.....	103
4.4 Métodos Numéricos .....	103
4.4.1 Método de diferencias finitas (MDF).....	104
4.4.2 Método de volúmenes finitos (MVF) .....	104
4.4.3 Método de elementos finitos (MEF) .....	105
4.4.4 Métodos espectrales.....	105
4.5 Método de volúmenes finitos .....	106
4.5.1 Aproximación a las integrales de superficie .....	107

4.5.2 Aproximación a las integrales de volumen.....	108
4.5.3 Diferenciación e interpolación .....	109
4.5.4 Métodos para problemas no estacionarios (discretización temporal).....	111
4.5.5 Geometrías complejas .....	118
<b>Capítulo 5: Metodología .....</b>	<b>122</b>
5.1 Introducción.....	122
5.2 Sistema de ecuaciones para la ionosfera a latitudes bajas y medias.....	122
5.2.1 Ecuación de continuidad.....	122
5.2.2 Ecuación de movimiento.....	123
5.2.3 Ecuación para la Temperatura .....	123
5.2.4 Ecuaciones de Maxwell.....	124
5.2.5 Sistema de ecuaciones simplificado .....	126
5.3 Modelos para la Producción y la Pérdida de Ionización.....	129
5.3.1 Fotoionización.....	129
5.3.2 Producción y pérdida por reacciones químicas .....	132
5.4 Sistema coordenado dipolar.....	133
5.5 Dominio espacial y condiciones de borde.....	135
5.6 Discretización del dominio espacial .....	136
5.7 Resolución numérica .....	138
5.8 Esquema general de simulación .....	142
5.9 Valores de entradas.....	143
5.9.1 Modelo para la Intensidad de radiación solar EUV .....	143
5.9.2 Modelo para la Atmósfera neutra .....	144
5.9.3 Modelo para el Drift $E \times B$ .....	145
5.9.4 Modelo para el Campo geomagnético .....	146
5.9.5 Modelo para la temperatura de los electrones .....	147
<b>Capítulo 6: Resultados y Conclusiones .....</b>	<b>149</b>
6.1 Resultados .....	149
6.2 Análisis de perfiles de densidad .....	149
6.3 Cortes latitudinales.....	157
6.4 Conclusiones.....	166
6.5 Resumen .....	168
6.6 Trabajos a futuro .....	169
<b>Apéndice A.....</b>	<b>171</b>
<b>Apéndice B.....</b>	<b>174</b>
<b>Apéndice C.....</b>	<b>177</b>
<b>Referencias .....</b>	<b>181</b>



# Introducción

## I.1 Objetivos

El objetivo de esta tesis ha sido el desarrollo de una herramienta de investigación ionosférica, más específicamente, un modelo ionosférico local (a futuro global) basado en principios físicos fundamentales. En este contexto, el concepto de ‘herramienta’ hace referencia a un conjunto de programas abiertos, implementados en una computadora, conformando una plataforma de experimentación que puede ser utilizada no sólo por su desarrollador, sino también por otros investigadores. La idea de ‘plataforma de experimentación’ se refiere a la posibilidad de ensayar modificaciones sobre cualquiera de las aproximaciones físicas o de los algoritmos numéricos involucrados en el modelo, incluyendo la innumerable variedad de ‘trucos’ que siempre se esconden detrás de un programa complejo con el objetivo de extender o mejorar sus prestaciones actuales. Para que esa experimentación sea fructífera, no alcanza con disponer de un programa abierto (de otros grupos de investigación) cuyo código fuente pueda ser modificado o extendido; es necesario, además y por sobre todo, contar con la experiencia que sólo alcanzan los desarrolladores de los modelos y para lo cual no existe ningún ‘manual para el usuario’

Esta tesis se ha concebido como un nuevo eslabón de una cadena que comenzó a forjarse hace aproximadamente quince años y continuará forjándose por muchos años más. La forja de su primer eslabón comenzó a finales de los años 80 y se completó a finales de la década siguiente, con el establecimiento de la primera versión operativa del Modelo Ionosférico de La Plata, identificado en la literatura internacional con las siglas inglesas LPIM (La Plata Ionospheric Model). El significado de la sigla ‘M’ –por modelo, o *model* si nos atenemos al idioma inglés– ha variado significativamente con el transcurso de los años. En primer lugar, porque las primeras versiones del LPIM no tenían la capacidad de predecir el estado de la ionosfera si no se las alimentaba con mediciones. La palabra ‘modelo’ aludía, entonces, al conjunto de aproximaciones usadas para extraer la información ionosférica de las mediciones GPS. En las versiones más recientes, y sobre todo en la que se ha desarrollado en esta tesis doctoral, la palabra modelo alude a un conjunto de aproximaciones capaces de predecir el estado de la ionosfera sin la necesidad de alimentarlas con mediciones. Esa predicción puede mejorar, si el modelo asimila mediciones reales, pero la asimilación de éstas no es una condición sine qua non para el uso del modelo, como sí lo era en las versiones primitivas del LPIM. En segundo lugar, el modelo utilizado en las primeras versiones del LPIM era, esencialmente, un conjunto de aproximaciones matemáticas elegidas para representar la variabilidad espacio-temporal de la ionosfera, siguiendo un procedimiento empírico con poco sustento físico. Las sucesivas versiones del LPIM permitieron analizar diferentes procesos ionosféricos con grado de complejidad creciente, incorporando la capacidad de describir la variabilidad de la densidad electrónica con la altura. Pero los procesos físicos que engendraban tales variabilidades debían ser inferidos a partir de los resultados que generaba el LPIM, luego de procesar los diferentes tipos de mediciones que eran necesarias para estimar sus parámetros fundamentales. La nueva versión de la herramienta LPIM que se ha

desarrollado en esta tesis doctoral ofrece, por primera vez en la historia del LPIM, la posibilidad de estudiar los cambios que se engendran en la ionosfera como consecuencia de cambios en las condiciones físicas fundamentales imperantes en el medio Sol-Tierra.

## I.2 Resumen de la tesis

El trabajo realizado en esta tesis doctoral se basa en caracterizar la variabilidad espacial y temporal que presenta el plasma que se encuentra en la alta atmósfera, región conocida como la ionosfera, mediante el modelado de las leyes físicas que rigen su comportamiento. El parámetro más relevante a la hora de estudiar a la ionosfera es la densidad de electrones, cuya presencia se debe a la ionización de varias de las componentes neutras de la atmósfera al absorber la radiación solar ultravioleta, dando como resultado pares de electrón-ion libre. Luego, como por cada electrón existente en la ionosfera se encuentra un ion, la densidad de electrones libre es simplemente igual a la suma sobre las densidades de las distintas especies ionizadas.

Dado que la distribución de los iones es inhomogénea respecto de la altura, la densidad de los electrones está controlada por distintas especies en función de la altura. Por esta razón, en lugar de tratar de modelar de manera directa la densidad de electrones, se la modela de manera indirecta, al calcular la densidad de las especies ionizadas. Este procedimiento permite un mejor entendimiento de los distintos procesos físicos y químicos que suceden en las distintas regiones de la ionosfera. Para este trabajo se eligió modelar 7 especies ionizadas que abarcan las diferentes regiones de la ionosfera:  $NO^+$ ,  $N_2^+$  y  $O_2^+$  para modelar la región E y la parte baja de la región F, el  $O^+$  y el  $N^+$  para modelar la región F y el  $He^+$  y el  $H^+$  para modelar la región por encima de la capa F.

La ecuación que regula el comportamiento de la densidad es la llamada “ecuación de continuidad”, en la que se tiene en cuenta varios procesos: i) la producción de iones por fotoionización y reacciones de intercambio, ii) la pérdida de iones debido a interacciones químicas con los electrones y con los elementos neutros de la atmósfera, iii) efectos de transporte por movimientos convectivos originados en la interacción entre el campo magnético terrestre, los campos eléctricos presentes en la ionosfera y la acción de los vientos neutros.

Se elige un sistema coordenado asociado con el campo magnético de la Tierra lo que permite llevar el problema de 3 dimensiones a 2 dimensiones y presenta la ventaja de desacoplar los movimientos en las direcciones paralela y perpendicular a las líneas de campo magnético.

Como las especies ionizadas interactúan entre sí a través de reacciones químicas y de colisiones, las ecuaciones para cada especie están acopladas y es necesario resolver el sistema en forma simultánea. De este manera, el sistema a resolver queda conformado por ecuaciones diferenciales parciales en su forma conservativa. Se utiliza el Método de Volúmenes Finitos con un esquema de “upwind” para su resolución.

El resultado final es un modelo que permite estimar el comportamiento que presenta la ionosfera a latitudes bajas y medias a través de la evolución temporal y espacial de las densidades para 7 especies ionizadas y para los electrones sin la necesidad de alimentarlas con mediciones.

A continuación se describe en forma resumida el contenido de cada capítulo.

### ***Capítulo 1: El Modelo Ionosférico de La Plata***

La primera parte de este capítulo introduce una descripción del LPIM, presentando las diferentes partes que conforman al algoritmo que se utiliza en el modelo. La segunda parte describe la evolución del modelo LPIM.

### ***Capítulo 2: Ionosfera***

En este capítulo se presenta una descripción general de la ionosfera como también de los sistemas físicos que interactúan con ella. Contiene una descripción de la atmósfera neutra, el campo magnético de la Tierra, los campos eléctricos, la generación de vientos, los procesos de generación de iones y electrones, y de la variación tanto espacial como temporal que presenta la ionosfera.

### ***Capítulo 3: Ecuaciones de Transporte***

En este capítulo se presenta el sistema general de ecuaciones de transporte para flujos de gases neutros y plasmas. Este sistema de ecuaciones, tiene la ventaja de que permite a las diferentes especies tener velocidades y temperaturas separadas.

### ***Capítulo 4: Modelo Numérico - Método de Volúmenes Finitos***

En la primera parte de este capítulo se da una descripción general de las diferentes partes que conforman el modelado numérico. La segunda parte describe el Método de Volúmenes Finitos, que es el esquema adoptado para resolver el sistema de ecuaciones planteado en este trabajo.

### ***Capítulo 5: Metodología***

Este capítulo resume el trabajo realizado en el contexto de esta tesis. Se presenta el sistema de ecuaciones y las simplificaciones realizadas para conformar el modelo matemático que representa a la ionosfera, el armado de la grilla adaptada al sistema coordinado, la aplicación del método de volúmenes finitos al sistema de ecuaciones, la resolución del sistema de ecuaciones resultante y una descripción de los modelos utilizados para determinar las variables de entrada.

### ***Capítulo 6: Resultados y conclusiones***

En este capítulo se presentan y se analizan los resultados obtenidos a lo largo del trabajo realizado durante la Tesis. Se describen las simulaciones realizadas para evaluar la calidad de representación del modelo a escala de variaciones diarias, variaciones estacionales, variaciones con el ciclo solar y variaciones latitudinales. El capítulo termina presentando las conclusiones que incluyen las ventajas y limitaciones del modelo desarrollado en esta Tesis, y en base a éstas se establecen las líneas de trabajo a futuro.



# Capítulo 1: El Modelo Ionosférico de La Plata

## 1.1 Introducción

El grupo de Geodesia Espacial y Aeronomía (GESA) empezó a gestarse en la segunda mitad de los años 80, en el seno del Departamento de Astrometría de la Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas (FCAG) de la Universidad Nacional de La Plata (UNLP). Su consolidación, como grupo de investigación, se produjo hacia mediados de los años 90, con el establecimiento del Modelo Ionosférico de La Plata, identificado en la literatura internacional con las siglas inglesas LPIM (La Plata Ionospheric Model). El desarrollo del LPIM comenzó en la primera mitad de los años noventa y en el año 1998 se publicó su primera versión operativa. Desde entonces, su perfeccionamiento ha sido una tarea continua del grupo GESA.

Los principales hitos en el desarrollo del LPIM han sido:

- En 1998: establecimiento de la primera versión de un modelo global para representar el contenido vertical total de electrones (vTEC de acuerdo con las siglas inglesas) a partir de observaciones de código P colectadas por una red global de estaciones GPS de medición continua;
- En 1999: primeros intentos para establecer un modelo global para representar la densidad de electrones a partir de observaciones GPS colectadas por receptores fijos en la tierra y volando a bordo de satélites en órbitas de baja elevación;
- En 2000: desarrollo de la capacidad de procesar observaciones de fase de las portadoras GPS;
- En 2006: implementación de la latitud ‘modip’ en la representación espacial del vTEC;
- En 2009: establecimiento de un modelo global para representar la densidad de electrones a partir de observaciones GNSS colectadas por receptores fijos en la tierra y volando a bordo de satélites en órbitas de baja elevación.

Este capítulo describe la evolución del LPIM con la intención de presentar una perspectiva histórica dentro de la cual situar la investigación abordada en esta tesis doctoral. Como se verá, el significado de la sigla ‘M’ –por modelo, o *model* si nos atenemos al idioma inglés– ha variado significativamente con los años. En primer lugar, porque las primeras versiones del LPIM no tenían la capacidad de predecir el estado de la ionosfera si no se las alimentaba con mediciones; la palabra ‘modelo’ aludía, entonces, al conjunto de aproximaciones usadas para extraer la información ionosférica de las mediciones GPS. En las versiones más recientes, y sobre todo en la que se presentará en esta tesis doctoral, la palabra modelo alude a un conjunto de aproximaciones capaces de predecir el estado de la ionosfera sin la necesidad de alimentarlas con mediciones; esa predicción puede mejorar si el modelo asimila mediciones, pero la asimilación de éstas no es una condición sine qua non para el uso del modelo, como sí lo era en las primeras versiones del LPIM.

En segundo lugar, el modelo utilizado en las primeras versiones del LPIM era,

esencialmente, un conjunto de aproximaciones matemáticas elegidas para representar la variabilidad espacio-temporal de la ionosfera, siguiendo un procedimiento empírico con poco sustento físico-teórico. Por el contrario, la versión de LPIM que se presentará en esta tesis doctoral se apoya íntegramente en la solución de las ecuaciones físicas fundamentales que gobiernan al plasma ionosférico.

La principal fuente bibliográfica utilizada en la elaboración de este capítulo fueron las tesis doctorales de Francisco Azpilicueta, Claudio Brunini, Mauricio Gende, Érika Gularte y Amalia Meza, que se citan al final del capítulo. Esas tesis contienen, a su vez, todas las referencias bibliográficas necesarias.

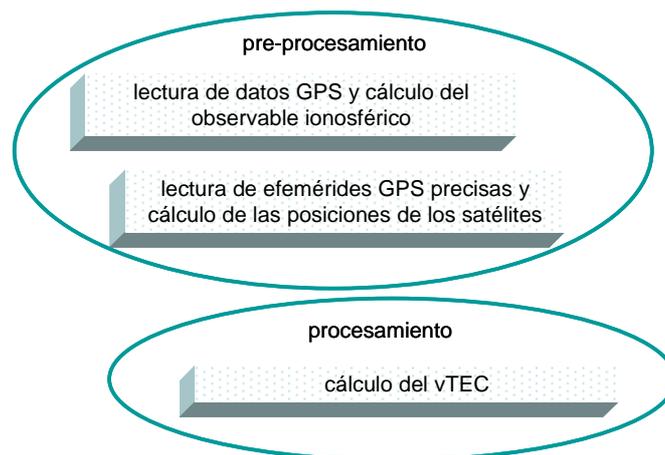
## **1.2 Primera versión del LPIM (año 1998)**

La Fig. (1.1) presenta un esquema en bloques del algoritmo LPIM donde se puede apreciar que estaba compuesto por un módulo de pre-procesamiento, que ejecutaba dos funciones principales: la lectura de los datos GPS y el cálculo del observable ionosférico y la lectura de las efemérides GPS precisas y el cálculo de las posiciones de los satélites; y un módulo de procesamiento que implementaba el cálculo del vTEC. Las secciones siguientes describen cada uno de esos módulos.

### **1.2.1 Módulo de pre-procesamiento del LPIM**

#### **Lectura de los datos GPS y el cálculo del observable ionosférico**

El algoritmo estaba diseñado para leer archivos diarios de datos GPS en formato RINEX. Los archivos se descargaban mediante la Internet, de los bancos de datos globales del *International GPS Service* (IGS – luego, *International GNSS Service*). Para la época en que se implementó la primera versión del LPIM, la red global del IGS estaba compuesta por no más de cien estaciones de medición continua, distribuidas heterogéneamente sobre el planeta.



**Figura 1.1** - Esquema en bloques del algoritmo LPIM.

La primera tarea que realizaba el LPIM era la identificación de estaciones no redundantes. Para ello, establecía una malla de triángulos equiláteros, con lados de aproximadamente 5°, sobre toda la superficie de la Tierra. Inspeccionaba luego triángulo por triángulo y en aquellos que hallaba más de una estación, seleccionaba la

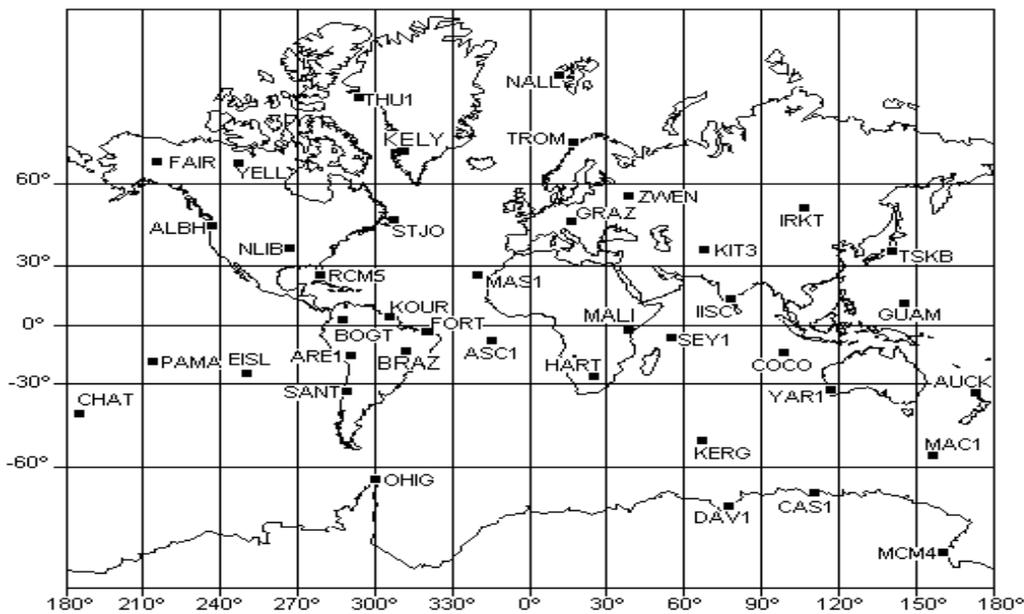
que contaba con mayor cantidad de datos y descartaba las otras. De este modo, lograba establecer una red global de estaciones “no redundantes” (Fig. 1.2).

A continuación, el LPIM calculaba el observable ionosférico para cada satélite medido en cada una de las estaciones no redundantes de la red global. Ese cálculo se realizaba usando solamente mediciones de código P en las dos frecuencias principales de GPS. Se evitaba el uso de mediciones de fase de la portadora por la complejidad que implica detectar y corregir los saltos de ciclos y estimar las ambigüedades que afectan a esa clase de mediciones.

La Ec. (1.1) define al observable ionosférico utilizado por el LPIM y establece la relación de esa cantidad con el contenido de electrones libre que interactúan con la señal electromagnética que viaja desde el satélite al receptor GPS:

$$P_1 = P_1 - P_2 = \kappa_4 \cdot sTEC + c \cdot (\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + U_{PI}, \quad (1.1)$$

en la que  $P_1$  es el observable ionosférico derivado de las observaciones de código P,  $P_1$  y  $P_2$ , en las frecuencias primarias y secundaria de GPS,  $\kappa_4$  es una constante,  $sTEC$  es el contenido total de electrones oblicuo,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $\Delta\tau_{RP}$  y  $\Delta\tau_{SP}$  son constantes de calibración del receptor y del satélite GPS asociadas al código P y  $U_{PI}$  es el error resultante de la combinación de los errores que afectan a las mediciones  $P_1$  y  $P_2$ , al que denominaremos error de medición.



**Figura 1.2** - Red global de estaciones no redundantes procesada por el LPIM a finales de los años 90 (tomada de Brunini, 1998).

El contenido total de electrones, habitualmente identificado con las siglas inglesas TEC (*total electron content*) se define por la cantidad de electrones libres contenidos dentro de un cilindro de sección transversal unitaria que atraviesa a la ionosfera. Si el cilindro se dispone verticalmente, se usa la sigla vTEC (*vertical TEC*), mientras que si se dispone de manera oblicua (por ejemplo, a lo largo de la línea recta que conecta al satélite con el receptor), su usa la sigla sTEC (*slant TEC*).

Las constantes de calibración del receptor y del satélite GPS,  $\Delta\tau_{RP}$  y  $\Delta\tau_{SP}$ , aparecen en la Ec. (1.1) para tomar en cuenta que las componentes electrónicas y el software de los

receptores y de los satélites originan retardos entre los tiempos de recepción y emisión de las señales y los tiempos correspondientes medidos por los relojes del receptor y del satélite. Si se usa el sistema de unidades MKS, las mediciones de código P, el observable ionosférico y el error de medición estarán expresados en metros, la velocidad de la luz en metros por segundo, las constantes de calibración en segundos y el TEC en electrones libres por metro cuadrado. Es usual introducir una unidad ad-hoc para medir el TEC, denominada TECu (TEC *unit*) y definida como equivalente a  $10^{16}$  electrones libres por metro cuadrado.

Usando las unidades definidas en el párrafo precedente, la constante  $\kappa_4$  que aparece en la Ec. (1.1) toma el valor:

$$\kappa_4 = 40.28 \times 10^{16} \left( \frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right) = -0.105 \text{ m / TECu} \quad (1.2)$$

en la que  $f_1 = 1575.42$  MHz y  $f_2 = 1227.60$  MHz son las frecuencias de las portadoras primaria y secundaria de GPS.

El intervalo de muestreo de los receptores GPS que integraban la red global del IGS en la época en que se ensayaron las primeras versiones del LPIM era de 30 segundos. Puesto que el LPIM no intentaba resolver variaciones temporales que ocurrieran en intervalos más cortos de varias horas, le aplicaba a los datos un filtro pasa-bajos que reducía la cantidad de valores a procesar y el efecto de los errores de medición. El filtro utilizado por el LPIM se basaba en el conocido algoritmo de Savitzky-Golay e implementaba regresiones lineales por los datos medidos en ventanas de 480 segundos (8 minutos) de longitud. Ese filtro reducía la cantidad de datos a procesar en un factor  $480/30 = 16$  y el desvío estándar de las mediciones en un factor aproximadamente igual a 3.7. Además de ello, permitía detectar y eliminar eventuales mediciones discordantes.

### ***Lectura de efemérides GPS y cálculo de las posiciones de los satélites***

El módulo de procesamiento del LPIM requiere conocer los parámetros geométricos que caracterizan a las mediciones. Como se verá luego, los parámetros más adecuados son el acimut, ARS, y la elevación, ERS, de las direcciones receptor – satélite, para cada uno de los receptores que componen la red global de estaciones no redundantes y para cada uno de los satélites y cada una de las épocas de medición.

Para calcular tales parámetros es necesario conocer las posiciones de los receptores y las de los satélites medidos en cada instante de medición. Las primeras se expresaban mediante las coordenadas geodésicas latitud,  $\varphi_R$ , longitud,  $\lambda_R$ , y altura,  $h_R$ , o equivalentemente, mediante las coordenadas rectangulares geocéntricas,  $X_R$ ,  $Y_R$  y  $Z_R$ . Las segundas se obtenían a partir de las efemérides precisas de los satélites GPS, que son calculadas por el IGS y puestas a disposición de la comunidad a través de la Internet. Consisten en archivos diarios con las coordenadas rectangulares geocéntricas,  $X_S$ ,  $Y_S$  y  $Z_S$  (y otras cantidades que no son utilizadas por el LPIM), de todos los satélites, tabuladas cada 15 minutos. La decisión de calcular las posiciones de los satélites GPS utilizando efemérides precisas en lugar de las transmitidas se basó en las conveniencias que éstas presentaban y no en la precisión requerida. Como el LPIM no intentaba resolver variaciones espaciales que se desarrollan en pocos cientos de kilómetros, no era necesario que las posiciones de las estaciones y de los satélites

fueran determinadas con gran exactitud.

Luego de leer el archivo diario de efemérides precisas, el LPIM calculaba las coordenadas rectangulares geocéntricas de cada satélite para los instantes de medición (puntos normales cada 8 minutos). Usaba para ello un polinomio interpolador de grado 7. A continuación el LPIM procedía al cálculo del acimut y de la elevación de cada uno de los satélites medidos por cada una de las estaciones de la red en cada instante de medición. Para esto aplicaba la siguiente transformación, que traslada el origen del sistema de coordenadas del genocentro al topocentro y rota luego los ejes para llevarlos a coincidir con las direcciones norte, este y vertical:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_R \cos\lambda_R & -\sin\varphi_R \sin\lambda_R & \cos\lambda_R \\ -\sin\lambda_R & \cos\lambda_R & 0 \\ \cos\varphi_R \cos\lambda_R & \cos\varphi_R \sin\lambda_R & \sin\varphi_R \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_S - X_R \\ Y_S - Y_R \\ Z_S - Z_R \end{pmatrix}, \quad (1.3.a)$$

seguida del cálculo del acimut (medido desde el norte hacia el este) y de la elevación:

$$A = \text{atan}\left(\frac{v}{u}\right) \text{ y} \quad (1.3.b)$$

$$E = \text{atan}\left(\frac{w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right). \quad (1.3.c)$$

## 1.2.2 Módulo de procesamiento del LPIM

### La aproximación de capa delgada

La primera versión del LPIM se basó en una aproximación muy simple de la ionosfera global: redujo esa región de la atmósfera a una capa esférica, de espesor despreciable, ubicada a una altura de aproximadamente 350 kilómetros por sobre la superficie de la Tierra. La elección de esa altura se basó en el criterio rudimentario de ubicar la capa a la altura a la que se halla la media de la distribución vertical de electrones libres, en condiciones nominales y de acuerdo con la Ionosfera Internacional de Referencia (International Reference Ionosphere – IRI, Bilitza et. al., 2011) Años después, ese criterio fue revisado al tiempo que se investigaron los errores causados por una elección inapropiada de la altura de la capa delgada [Brunini et al., 2011].

Se asumía entonces que sobre la capa delgada existía una distribución espacio-temporal de  $vTEC$  equivalente a la que existía en la totalidad de la ionosfera y se intentaba describirla mediante un desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas con coeficientes que variaban en el tiempo:

$$vTEC(\alpha, \beta, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^{\min(l, M)} \left[ a_{lm}(t) \cos(m\alpha) + b_{lm}(t) \sin(m\alpha) \right] P_{lm}(\sin\beta), \quad (1.4)$$

en la que  $\alpha$   $[0, 2\pi)$  y  $\beta$   $[-\pi/2, \pi/2]$  son las coordenadas esféricas que describen la posición de un punto sobre la capa delgada,  $t$  es el tiempo universal,  $L$  y  $M \leq L$  son el grado y el orden máximo de la serie y  $P_{lm}$  son las funciones asociadas de Legendre. De esta manera, la Ec. (1.4) contiene  $(L+1)^2 - (L-M)(L-M+1)$  coeficientes dependientes del tiempo,  $a_{lm}(t)$  y  $b_{lm}(t)$ , que deben ser determinados bajo la condición de

representar lo más fielmente posible la distribución espacio-temporal de vTEC que realmente existe en la ionosfera.

### **Elección del sistema de coordenadas**

La mayor variabilidad temporal que experimenta el vTEC en cualquier sitio del planeta se debe al movimiento aparente diario del Sol en torno a la Tierra. De aquí que las variaciones temporales del vTEC se verán minimizadas si se usa un sistema de coordenadas en el que la posición del Sol permanezca aproximadamente constante. La primera versión del LPIM adoptó un sistema de coordenadas esféricas en el que la coordenada longitudinal,  $\alpha$ , se hizo coincidir con el ángulo solar local,  $\varpi$   $[0, 2\pi)$ , definido mediante la relación<sup>1</sup>:

$$\varpi = \frac{2\pi}{24}t + \lambda - \pi, \quad (1.5)$$

en la que  $\lambda$   $[0, 2\pi)$ , es la longitud geográfica. Puede comprobarse fácilmente que el valor  $\varpi = 0$  corresponde a un punto que se encuentra situado en el mismo meridiano que el Sol, que los valores de  $\varpi < 0$  le corresponden a puntos situados en el sector del pre-mediodía y que los valores de  $\varpi > 0$  le corresponden a puntos situados en el sector de post-mediodía.

La coordenada latitudinal,  $\beta$ , se hizo coincidir con la latitud geográfica,  $\varphi$   $[-\pi/2, \pi/2]$ . En lo sucesivo nos referiremos a este sistema de coordenadas con la apelación 'sistema sol-fijo'.

### **Modelización de la variabilidad temporal del vTEC**

El paso siguiente en la modelización del LPIM consistió en asumir que la variabilidad temporal del vTEC, expresada a través de los coeficientes,  $a_{lm}(t)$  y  $b_{lm}(t)$  de la Ec. (1.4), podía representarse mediante una función escalonada del tipo:

$$a_{lm}(t) = a_{lmi} \text{ si } t_i \leq t \leq t_i + \Delta t, \text{ con } i = 1, 2, \dots, k \text{ y}$$

$$\Delta t = 24/k, \text{ y análogamente para } b_{lm}(t), \quad (1.6)$$

en la que  $k$  es la cantidad de intervalos de duración  $\Delta t$  en la que se divide el día. Esta aproximación implicaba aceptar una representación discontinua de la evolución temporal del vTEC. En otras palabras, lo que el LPIM podría ofrecer serían imágenes globales de la distribución espacial media del vTEC para cada intervalo  $\Delta t$  centrado en el instante  $t = t_i + \Delta t/2$ , sin solución de continuidad entre las representaciones de intervalos consecutivos. La cantidad de coeficientes  $(a_{lmi}, b_{lmi})$  necesarios para representar la variación espacio-temporal del vTEC a lo largo de un día completo es igual a  $k[(L+1)^2 - (L-M)(L-M+1)]$ .

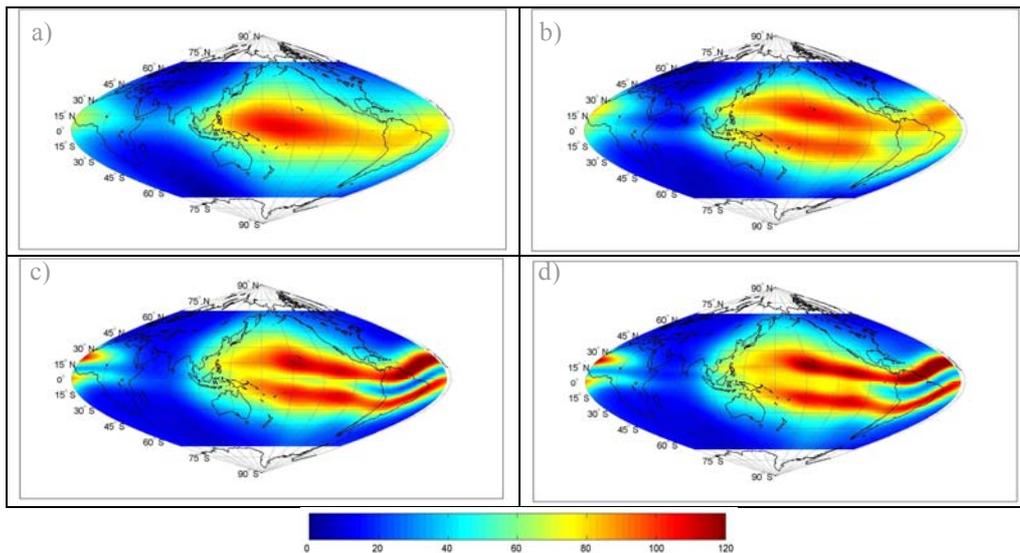
### **Resolución espacio-temporal**

En el párrafo anterior se ha explicado la forma en que el LPIM modelaba la variación temporal de vTEC. Se infiere de allí que la resolución temporal de esa representación quedaba fijada por el intervalo  $\Delta t$  que aparece en la Ec. (1.6).

Por otro lado la resolución espacial quedaba determinada por el máximo grado,  $L$ , y el máximo orden,  $M$ , en que se trunca el desarrollo en serie de funciones armónicas

esféricas de la Ec. (1.4). En otras palabras, las dimensiones angulares de las estructuras ionosféricas más pequeñas que el LPIM podría representar quedaba establecido de manera aproximada por las relaciones  $\Delta\vartheta \cong 2\pi/M$  y  $\Delta\varphi \cong 2\pi/L$ .

La Fig. (1.3) ilustra las diferencias que se producen en la representación global del vTEC cuando se utilizan series de funciones armónicas esféricas truncadas en diferentes grados máximos. Las limitaciones que impone el truncamiento de la serie en grados máximos relativamente bajos (por ejemplo,  $L = 2$  o  $L = 6$ ) se manifiestan con especial énfasis en la imposibilidad de separar los dos picos de la Anomalía Ecuatorial.



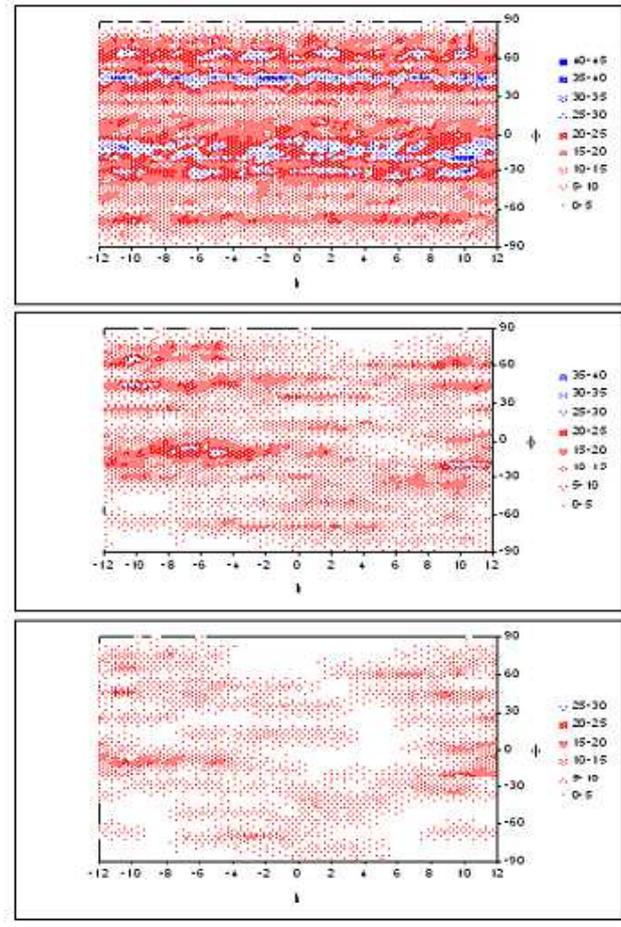
**Figura 1.3.** Diferencias en la representación global del vTEC utilizan series de funciones armónicas esféricas truncadas en: a)  $L = M = 2$  b)  $L = M = 6$ , c)  $L = M = 10$  y d)  $L = M = 15$  (tomado de Azpilicueta, 2006).

Alta resolución espacial y alta resolución temporal son dos propiedades a las que todo modelo geofísico ambiciona. Lamentablemente, en la gran mayoría de los casos esas dos propiedades compiten entre sí, en el sentido de que el aumento de una de ellas va acompañado por la disminución de la otra por lo que se debe buscar un balance entre ambas propiedades. El factor que condiciona la relación es la cobertura en el espacio y en el tiempo de las mediciones que se usarán para ajustar el modelo.

Para el LPIM, los  $k[(L+1)^2 - (L-M)(L-M+1)]$  coeficientes  $(a_{lmi}, b_{lmi})$  necesarios para describir la variación espacio-temporal del vTEC a lo largo de un día completo, se determinaban con las mediciones colectadas por la red global de estaciones GPS que se mostró en la Fig. (1.2). La Fig. (1.4) muestra la distribución espacial de las mediciones proporcionadas por aquella red, en el sistema sol-fijo, a lo largo de intervalos de 6, 12 y 24 horas. La principal información que brinda esa figura es que a lo largo de las 24 horas del día, las mediciones se distribuyen cubriendo prácticamente todo el espacio del sistema sol-fijo. Con esa cobertura de datos sería posible aspirar a una gran resolución espacial (valores altos de  $L$  y de  $M$ ), a costa de una pobre resolución temporal ( $\Delta t = 24$  horas). Si por el contrario se quiere mejorar la resolución temporal llevándola, por ejemplo,  $\Delta t = 6$  horas, aparecen grandes huecos de datos en el sistema sol-fijo, lo que obliga a reducir la resolución espacial (reducir los valores de  $L$

y de  $M$ ), con la desventaja de que el modelo genere valores artificiales en las regiones que los datos no cubren.

El balance de los factores presentados en el párrafo anterior llevó a que la primera versión del LPIM se desarrollara para una resolución espacial de aproximadamente  $11^\circ$  ( $L = M = 8$ ), y una resolución temporal de 12 horas ( $\Delta t = 12$  horas o, equivalentemente,  $k = 2$ ), necesitando solamente 162 coeficientes ( $a_{lmi}, b_{lmi}$ ) para representar la variación espacio-temporal del vTEC a lo largo de un día completo.



**Figure 1.4.** Distribución espacio-temporal de las mediciones proporcionadas por la red global de estaciones no redundantes procesadas por el LPIM a finales de los años 90, en el sistema sol-fijo, a lo largo de intervalos de: a) 6 horas, b) 12 horas y c) 24 horas. La escala de colores se asocia con la cantidad de datos dentro de mosaicos de  $5^\circ \times 5^\circ$  (tomado de Brunini, 1998).

### **Regularización de las soluciones del LPIM**

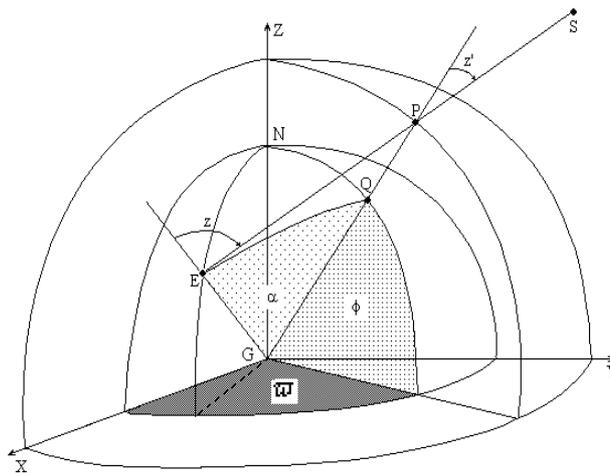
Con el propósito de atenuar las discontinuidades en la distribución espacio-temporal global del vTEC de intervalos consecutivos y, fundamentalmente, de evitar la aparición de valores artificiales de vTEC en las regiones sin o con pobre cobertura de datos, el LPIM incluye una condición estadística que limita la variabilidad de los coeficientes ( $a_{lmi}, b_{lmi}$ ) de intervalos consecutivos que está dada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 E[a_{l_{mi+1}} - a_{l_{mi}}] &= 0 & E[(a_{l_{mi+1}} - a_{l_{mi}})^2] &= \Sigma^2 \\
 E[b_{l_{mi+1}} - b_{l_{mi}}] &= 0 & E[(b_{l_{mi+1}} - b_{l_{mi}})^2] &= \Sigma^2
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

en las que  $E[\bullet]$  es el operador estadístico esperanza matemática y  $\Sigma^2$  es una varianza empíricamente determinada, cuyo valor resultó ser 0.0092 TECu/hora.

### Relación entre sTEC y vTEC

La Fig. (1.5) es un esquema de las condiciones geométricas de la aproximación de capa delgada: la Tierra se halla envuelta por un cascarón esférico de espesor despreciable que representa a la totalidad de la ionosfera; la señal proveniente del satélite S atraviesa esa capa en el punto P, que denominamos ‘punto de penetración’, y llega al receptor E con una distancia cenital  $z$ ; la intersección con la superficie terrestre de la vertical que pasa por el punto de penetración determina el punto Q, que denominamos ‘punto sub-ionosférico’; el sistema de coordenadas rectangulares representado en la figura tiene su origen en el genocentro, G, su eje Z apuntando hacia el polo norte geográfico y su eje X contenido en el meridiano donde se aloja el Sol; se trata por lo tanto del sistema sol-fijo.



**Figura 1.5.** Geometría de la aproximación de capa delgada en el sistema sol-fijo (tomado de Brunini, 1998).

Para relacionar el sTEC que efectivamente afecta a la señal en su recorrido dentro de la ionosfera, con el vTEC que existe a lo largo de la vertical que pasa por el punto de penetración, el LPIM recurre a una nueva aproximación consistente en suponer que la relación entre esas dos cantidades es equivalente a la relación entre las longitudes de los recorridos oblicuo y vertical:

$$\frac{sTEC}{vTEC} \cong \frac{1}{\cos(z')}
 \tag{1.8.a}$$

en la que  $z'$  es la distancia cenital de la señal, medida a la altura del punto de penetración.

Aplicando el teorema del seno en el triángulo plano *EGP* de la Fig. (1.5) se obtiene una relación que permite expresar el término derecho de la Ec. (1.8.a) en función de la distancia cenital observada:

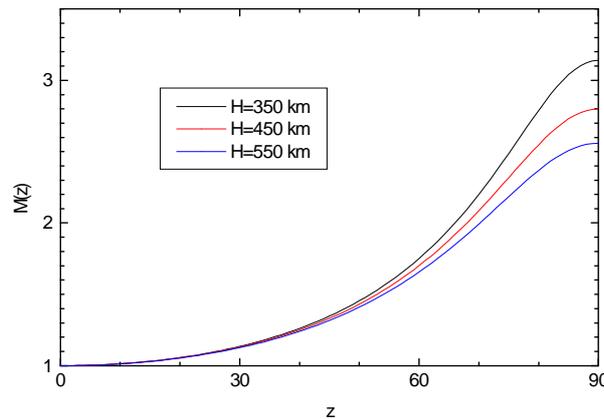
$$\cos(z') = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R+H}\right) \sin^2(z)}, \quad (1.8.b)$$

en la que  $R$  es el radio de la Tierra (que para la precisión requerida por el LPIM puede considerarse esférica),  $H$  es la altura de la capa delgada y  $z$  es la distancia cenital observada, que puede obtenerse fácilmente a partir de la elevación del satélite (que se calcula usando la Ec. (1.3.c)).

Resumiendo, el LPIM vincula al sTEC que afecta a la señal, con el vTEC sobre la capa delgada, mediante una aproximación de naturaleza geométrica (no física), denominada ‘función de mapeo’, cuyo valor depende de la distancia cenital observada y de altura a la que se ubica la capa delgada:

$$M(z,H) = \left[ 1 - \left(\frac{R}{R+H}\right) \sin^2(z) \right]^{-1/2}. \quad (1.8.c)$$

La Fig. (1.6) muestra la dependencia de la función de mapeo con la distancia cenital observada para diferentes alturas de la capa delgada.



**Figura 1.6.** Variación de la función de mapeo con la distancia cenital observada para diferentes alturas de la capa delgada (tomado de Brunini, 1998).

La función de mapeo dada por la Ec. (1.8.c) equivale a despreciar la existencia de gradientes horizontales en la distribución de electrones libres en la ionosfera. Si la distribución de éstos tuviera simetría radial, la función de mapeo proporcionaría una relación exacta entre el sTEC y el vTEC. Sin embargo, incluso en este caso se tiene el problema de determinar la altura de la capa que haría que tal relación estuviera exenta de errores. Este problema ha sido estudiado en profundidad varios años después de que se estableciera la primera versión del LPIM [Brunini et al, 2011].

### **Cálculo de las coordenadas del punto sub-ionosférico**

Para describir por completo las condiciones geométricas que caracterizan a las mediciones es necesario calcular las dos coordenadas esféricas del punto sub-

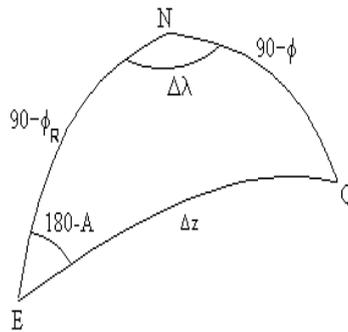
ionosférico. En el sistema sol-fijo tales coordenadas son (Fig. 1.5): el ángulo solar local,  $\omega$ , y la latitud geográfica,  $\varphi$ .

La latitud geográfica puede calcularse resolviendo el triángulo esférico  $ENQ$  (Fig. 1.5), que se forma sobre la superficie de la Tierra con vértices en el receptor GPS (E), el polo norte geográfico (N) y el punto sub-ionosférico (Q). Ese triángulo se reproduce con mayor detalle en la Fig. (1.7), donde además se han señalado con  $\varphi$  y  $\varphi_R$  a las latitudes geográficas del punto sub-ionosférico y del receptor GPS, con  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_R$  a la diferencia entre las longitudes geográficas del punto sub-ionosférico y del receptor GPS, con  $S$  al acimut del satélite GPS (que se calcula usando la Ec. 1.3.b) y con  $\Delta z = z - z'$  a la diferencia entre las distancias cenitales observada y la medida a la altura del punto de penetración. Aplicando el teorema del seno en el triángulo plano  $EGP$  de la Fig. (1.5) se obtiene la siguiente relación:

$$\Delta z = z - \arcsin\left(\frac{R}{R+H} \sin z\right), \quad (1.9.a)$$

y aplicando el teorema del coseno en el triángulo esférico  $ENQ$  de la Fig. (1.7) se obtiene la expresión para la latitud geográfica del punto sub-ionosférico:

$$\varphi = \arcsin\left(\sin\varphi_R \cos\Delta z - \cos\varphi_R \cos\Delta z \cos A\right), \quad (1.9.b)$$



**Figura 1.7.** Triángulo esférico sobre la superficie de la Tierra con vértices en el receptor GPS (E), el polo norte geográfico (N) y el punto sub-ionosférico (Q).

Para calcular el ángulo solar local es necesario recurrir a la Ec. (1.5), en la que interviene la longitud geográfica,  $\lambda$ , del punto sub-ionosférico y el tiempo universal,  $t$ , de la medición. La longitud geográfica del punto sub-ionosférico se obtiene a partir de:

$$\lambda = \lambda_E + \Delta\lambda, \quad (1.9.c)$$

y  $\Delta\lambda$  se obtiene resolviendo el teorema del seno en el triángulo esférico  $ENQ$  (Fig. 1.7):

$$\Delta\lambda = \arcsin\left(\frac{\sin\Delta z \sin A}{\cos\varphi}\right). \quad (1.9.d)$$

### **Estimación de la distribución espacio-temporal global del vTEC**

Para estimar la distribución espacio-temporal global del vTEC, la primera versión del LPIM recurría al método de Mínimos Cuadrados. La ecuación de observación se obtiene reemplazando en la Ec. (1.1) las expresiones obtenidas en las secciones precedentes: el desarrollo en series de funciones esféricas armónicas para representar la variación espacio-temporal global del vTEC (Ec. 1.4) y la función de mapeo para relacionar el vTEC con el sTEC (Ec. 1.8c). La ecuación de observación resultante es:

$$P_i = \kappa_4 \cdot M(z, H) \cdot \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^{\min(l, M)} [a_{lmi} \cos(m\varpi) + b_{lmi} \sin(m\varpi)] P_{lm}(\sin\varphi) + c(\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + u_{pi}, \text{ para } t_i \leq t \leq t_i + \Delta t \quad (1.10.a)$$

A esta ecuación se deben agregar las ecuaciones de condición (Ec. 1.7) que atenúan las discontinuidades en la distribución espacio-temporal global del vTEC de intervalos consecutivos.

Como se mencionó anteriormente, en la época en que se implementó la primera versión del LPIM, la red global de estaciones GPS estaba integrada por 40 receptores. Por otro lado, la constelación GPS contaba con 24 satélites operativos. De allí que fuera necesario estimar 40 constantes de calibración,  $\Delta\tau_{RP}$  para los receptores y 24 constantes de calibración,  $\Delta\tau_{SP}$  para los satélites. También se mencionó que el desarrollo en serie de funciones armónicas esféricas utilizado para representar la distribución espacial global del vTEC se truncaba en grado y orden máximos iguales a 8 y que se estimaban una distribución media cada 12 horas. Para esto era necesario estimar  $2 \times 81 = 162$  coeficientes ( $a_{lmi}$ ,  $b_{lmi}$ ).

Resulta imposible estimar conjuntamente los 162 coeficientes de las funciones armónicas esféricas y las  $40 + 24 = 64$  constantes de calibración de los receptores y de los satélites, pues la matriz de diseño del problema de Mínimos Cuadrados tiene una deficiencia de rango de orden uno. Para resolver este problema, el LPIM agregaba una ecuación de condición que impone que la suma de las constantes de calibración de todos los receptores de la red fuera nula:

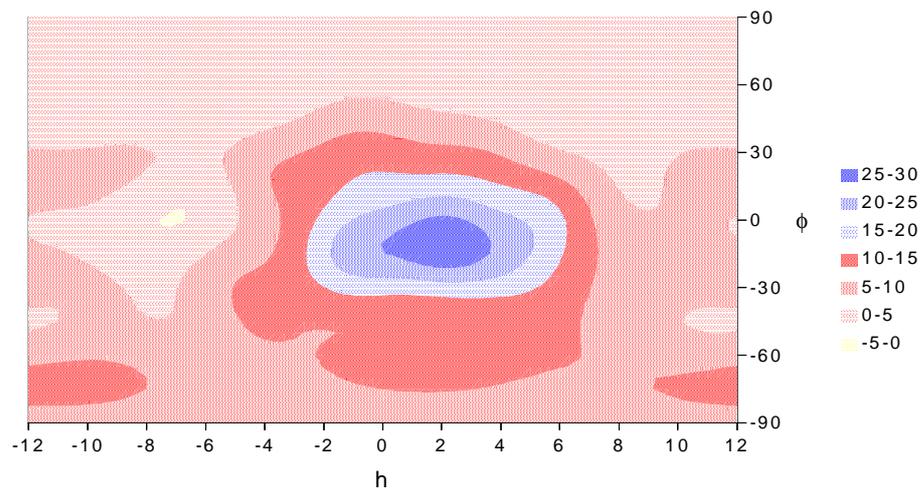
$$\sum_{i=1}^{40} \Delta\tau_{RPi} = 0. \quad (1.10.b)$$

Esta condición es equivalente a aceptar la imposibilidad de estimar los valores absolutos de las constantes de calibración de todos los satélites y de todos los receptores y reducir al problema a la estimación de valores relativos a un cero arbitrario, cuyo efecto desaparece en la Ec. (1.10.a), donde se suman las constantes de calibración del satélite medido con la del receptor que hizo la medida.

Resumiendo, para cada día el LPIM estimaba dos distribuciones globales espaciales del vTEC, lo que implicaba la estimación de  $162 + 64 = 226$  parámetros. Los parámetros se estimaban usando el método de Mínimos Cuadrados y las observaciones proporcionadas por la red global de 40 receptores GPS no redundantes. Las observaciones de la red se usaban para formar puntos normales cada 8 minutos, lo que llevaba a procesar unos 60.000 puntos normales por día.

### 1.2.3 Resultados obtenidos

La Fig. (1.8) muestra un mapa ionosférico global típico de los que se obtenían con la primera versión del LPIM. En la actualidad, el LPIM, posee capacidades muy superiores a las que presupone el mapa que se muestra en esta figura, donde ni siquiera puede apreciarse los dos picos de la Anomalía Ecuatorial. No obstante ello, los primeros mapas ionosféricos globales calculados con el LPIM fueron, en su tiempo, comparables a los de los mejores grupos científicos internacionales.



**Figura 1.8.** Mapa ionosférico global típico calculado con la primera versión del LPIM, mostrando la distribución global del vTEC (en TECu), promediada a lo largo de un intervalo de 12 horas, en el sistema sol-fijo (tomado de Brunini, 1998).

### 1.3 Primeros modelos globales de densidad electrónica (año 1999)

En abril de 1995, un experimento denominado GPS-Met, coordinado por el University Consortium for Atmospheric Research (UCAR), lanzó al espacio el primer micro-satélite equipado con un receptor GPS destinado a estudiar la atmósfera neutra e ionizada, utilizando la técnica de radio-ocultación. El satélite describía una órbita circular a 730 km de altura (lo que lo ubicaba dentro del segmento de los satélites de órbita terrestre baja o LEO de acuerdo con las siglas inglesas de *Low Earth Orbiter*), inclinada 60° con respecto al plano ecuatorial terrestre. Cuando las mediciones registradas por aquel receptor fueron puestas a disposición de la comunidad, se abrió la posibilidad de combinar mediciones obtenidas desde la superficie de la Tierra con mediciones colectadas desde el espacio. Mientras que en el primer caso las señales atraviesan la ionosfera en una dirección predominantemente vertical, muestreando las variaciones horizontales del TEC, en el segundo la atraviesan en una dirección predominantemente horizontal, muestreando los cambios del TEC con la altura. Ello abrió la interesante posibilidad de combinar ambos tipos de mediciones para recuperar la distribución espacio-temporal de la densidad electrones que engendra el sTEC que afecta a las señales.

### 1.3.1 Formulación del modelo

El punto de partida del análisis consistió en reescribir la Ec. (1.1) de la siguiente manera:

$$P_l = \kappa_4 \cdot \int_S N \cdot ds + c \cdot (\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + u_{pl}, \quad (1.11.a)$$

en la que se ha realizado el reemplazo:

$$sTEC = \int_S N \cdot ds, \quad (1.11.b)$$

siendo  $N$  una función que describe la distribución espacio-temporal global de la densidad de electrones libres en la ionosfera y  $S$  el camino que recorre la señal para llegar desde el satélite GPS al receptor, ya sea que éste se encuentre sobre la superficie de la Tierra u orbitando en el espacio.

Para describir la distribución espacio-temporal global de la densidad electrónica es necesario apelar a una función que dependa de cuatro coordenadas. Utilizando el sistema sol-fijo, tales coordenadas son: la altura por sobre la superficie de la Tierra,  $h$ , el ángulo solar local,  $\varpi$ , la latitud geográfica,  $\varphi$ , y el tiempo universal,  $t$ . Para modelar la variación de la densidad electrónica con la altura se utilizó la teoría de Chapman, que describe la velocidad de producción de electrones libres a diferentes alturas en un punto determinado del espacio sol-fijo y en un momento específico del tiempo:

$$N(\varpi, \varphi, h, t) = N_m(\varpi, \varphi, t) \cdot \exp \left[ 1 - \frac{h - h_m(\varpi, \varphi, t)}{H(\varpi, \varphi, t)} - \exp \left( - \frac{h - h_m(\varpi, \varphi, t)}{H(\varpi, \varphi, t)} \right) \right], \quad (1.12.a)$$

en la que  $N_m(\varpi, \varphi, t)$  es el valor máximo de la densidad electrónica,  $h_m(\varpi, \varphi, t)$  es la altura en la cual se produce ese máximo (son los valores que corresponden al pico de la capa F2 de la ionosfera) y  $H(\varpi, \varphi, t)$  es la altura de escala del perfil vertical de densidad electrónica, asociados a ese lugar y ese momento. Siguiendo la teoría de Chapman, los tres parámetros que definen el perfil vertical de densidad electrónica están vinculados por las siguientes relaciones:

$$h_m(\varpi, \varphi, t) = H(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H(\varpi, \varphi, t)) \quad \text{y} \quad N_m(\varpi, \varphi, t) = \frac{q}{H(\varpi, \varphi, t)}, \quad (1.12.b)$$

en las que  $p$  y  $q$  son cantidades que pueden considerarse aproximadamente constantes. Éstas permiten expresar la función de Chapman en términos de un solo parámetro (la altura de escala):

$$N(H(\varpi, \varphi, t), h) = \frac{q}{H(\varpi, \varphi, t)} \cdot \exp \left[ \frac{1 - \frac{h - H(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H(\varpi, \varphi, t))}{H(h, \varphi, t)}}{-\exp \left( - \frac{h - H(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H(\varpi, \varphi, t))}{H(\varpi, \varphi, t)} \right)} \right], \quad (1.12.c)$$

Es posible ahora aproximar a la función de Chapman mediante un desarrollo en serie de Taylor en torno de un valor nominal de la altura de escala,  $H_0(\varpi, \varphi, t)$ . Si el desarrollo se trunca al primer orden, se obtendrá una expresión del tipo:

$$N(H(\varpi, \varphi, t), h) = N_0(H_0(\varpi, \varphi, t), h) + N'_0(H_0(\varpi, \varphi, t), h) \cdot \Delta H(\varpi, \varphi, t), \quad (1.12.d)$$

en la que:

$$N_0(H_0(\varpi, \varphi, t), h) = \frac{q}{H_0(\varpi, \varphi, t)} \exp \left[ \frac{1 - \frac{h - H(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H_0(\varpi, \varphi, t))}{H_0(\varpi, \varphi, t)}}{\exp \left( -\frac{h - H(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H_0(\varpi, \varphi, t))}{H_0(\varpi, \varphi, t)} \right)} \right] \quad (1.12.e)$$

$$N'_0(H_0(\varpi, \varphi, t), h) = \frac{1}{H_0(\varpi, \varphi, t)} \cdot \exp \left[ \frac{1 - \frac{h - H_0(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H_0(\varpi, \varphi, t))}{H_0(\varpi, \varphi, t)}}{-\exp \left( -\frac{h - H_0 \cdot \log(p \cdot H_0(\varpi, \varphi, t))}{H_0(\varpi, \varphi, t)} \right)} \right] \cdot \left[ -1 + \exp \left( -\frac{h - H_0(\varpi, \varphi, t) \cdot \log(p \cdot H_0(\varpi, \varphi, t))}{H_0(\varpi, \varphi, t)} \right) \right] \quad (1.12.f)$$

El término  $\Delta H(\varpi, \varphi, t) = H(\varpi, \varphi, t) - H_0(\varpi, \varphi, t)$  de la Ec. (1.12.d) constituye la corrección que debe aplicarse al valor aproximado de la altura de escala,  $H_0(\varpi, \varphi, t)$ , para corregir el perfil vertical de densidad electrónica dado por la Ec. (1.12.e).

El paso siguiente en la modelización de la distribución espacio-temporal global de la densidad electrónica consistió en asumir que la corrección a la altura de escala podía representarse mediante una serie de funciones armónicas esféricas con coeficientes dependientes del tiempo, tal como se había hecho en la primera versión del LPIM para modelar la distribución del vTEC:

$$\Delta H(\varpi, \varphi, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\min(l, M)} \left[ a_{lmi} \cos(m\varpi) + b_{lmi} \sin(m\varpi) \right] P_{lm}(\sin\varphi), \quad (1.13)$$

para  $t_i \leq t \leq t_i + \Delta t$ . Luego, introduciendo la Ec. (13) en la Ec. (12.d) resulta:

$$N(\varpi, \varphi, h, t) = N_0(\varpi, \varphi, h, t) + \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^l \left[ a_{lmi} N'_0(\varpi, \varphi, h, t) \cos(m\varpi) + b_{lmi} N'_0(\varpi, \varphi, h, t) \sin(m\varpi) \right] P_{lm}(\sin\varphi). \quad (1.14)$$

Si la Ec. (1.14) se reemplaza dentro de la integral de la Ec. (1.11.b), se obtiene:

$$sTEC = \int_s N_0(\varpi, \varphi, h, t) ds + \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^l \left[ a_{lmi} \int_s N'_0(\varpi, \varphi, h, t) \cos(m\varpi) P_{lm}(\sin\varphi) ds + b_{lmi} \int_s N'_0(\varpi, \varphi, h, t) \sin(m\varpi) P_{lm}(\sin\varphi) ds \right]. \quad (1.15)$$

Finalmente, reemplazando la Ec. (1.15) en la Ec. (1.11.a), resulta la ecuación de condición utilizada para estimar, mediante el método de Mínimos Cuadrados, la distribución espacio-temporal global de la densidad electrónica:

$$\begin{aligned}
P_i = & \kappa_4 \int_S N_0(\varpi, \varphi, h, t) ds \\
& + \kappa_4 \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^l \left[ \begin{aligned} & a_{lmi} \int_S N_0'(\varpi, \varphi, h, t) \cos(m\varpi) P_{lm}(\sin\varphi) ds + \\ & b_{lmi} \int_S N_0'(\varpi, \varphi, h, t) \sin(m\varpi) P_{lm}(\sin\varphi) ds \end{aligned} \right], \quad (1.16) \\
& + c(\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + U_{PI}
\end{aligned}$$

Para resolver las integrales que aparecen en el miembro derecho de la Ec. (1.16), es necesario conocer el camino,  $S$ , que recorre la señal para llegar desde el satélite GPS al receptor, ya sea que este se encuentre sobre la superficie de la Tierra u orbitando en el espacio. En el caso de los datos colectados por receptores GPS sobre la superficie de la Tierra, ese camino queda definido por las posiciones de los receptores GPS (cuyos valores son conocidos) y por las posiciones de los satélite GPS (cuyos valores pueden calcularse siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 1.1). Para los datos colectados desde el espacio, es necesario calcular la posición del LEO, para lo cual se procedía de modo similar al descrito en esa sección, utilizando las efemérides precisas del LEO que también eran calculadas y puestas a disposición de la comunidad por el IGS.

También es necesario contar con una descripción aproximada de la variación espacio-temporal global de la altura de escala,  $H_0(\varpi, \varphi, t)$ , necesaria para evaluar las funciones  $N_0(H_0(\varpi, \varphi, t), h)$ , usando la Ec. (1.12.e), y  $N_0'(H_0(\varpi, \varphi, t), h)$ , usando la Ec. (1.12.f). Para esto se utilizó la relación que sigue, también derivada de la teoría de Chapman:

$$H(\varpi, \varphi, t) = \frac{q}{\exp[1 - \sec\chi(\varpi, \varphi, t)]}, \quad (1.17)$$

en la que  $q$  es el mismo valor constante aparecido en una de la ecuaciones (1.12.b) y (1.12.c) y  $\chi(\varpi, \varphi, t)$  es el ángulo subtendido entre la dirección definida por las coordenadas esféricas  $\varpi$  y  $\varphi$  y la dirección al sol en el instante  $t$ .

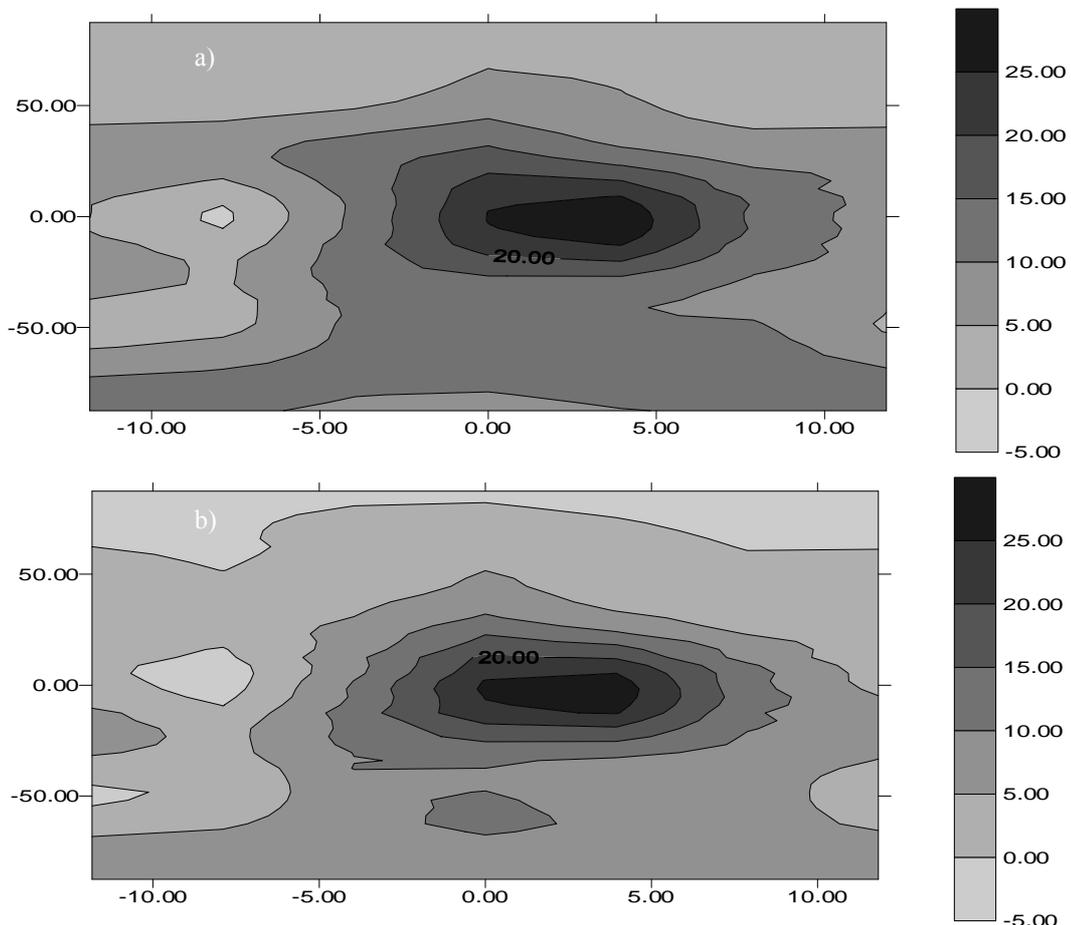
### 1.3.2 Resultados alcanzados

La distribución espacial global del vTEC que se muestra en la Fig. (1.9.a) se obtuvo usando la versión del LPIM descrita en la Sección 1 de este capítulo, procesando las mediciones proporcionadas por la red global de 40 receptores GPS a la que ya se ha hecho referencia. La distribución espacial global del vTEC que se muestra en la Fig. (1.9.b) se obtuvo integrando a lo largo de la dirección vertical la densidad de electrones calculada con la versión del LPIM descrita en esta sección, agregando a las mediciones proporcionadas por la red global, las obtenidas por el receptor GPS a bordo del LEO.

Comparando las figuras (1.9.a) y (1.9.b) se puede ver que ambas distribuciones son muy similares y tanto una como otra versión del LPIM eran capaces de reproducir las principales características de la ionosfera global: máximo desplazado hacia el hemisferio sur, coherentemente con la posición del sol para la fecha en que se realizaron las mediciones (febrero), y desplazado aproximadamente dos horas con

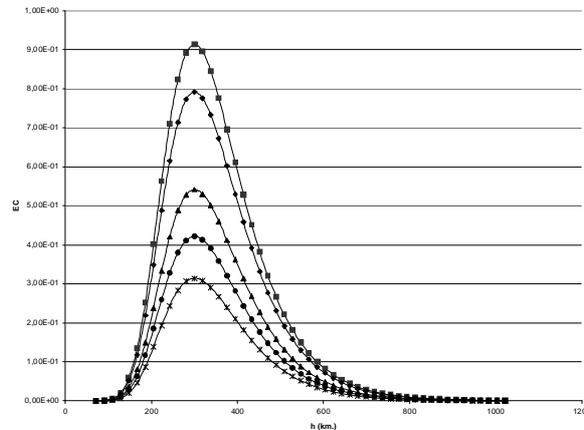
respecto al mediodía local en dirección hacia el atardecer. El análisis de los residuos del ajuste por mínimos cuadrados revelaba que los valores obtenidos con el modelo bidimensional eran casi dos veces menores que los obtenidos con el modelo tridimensional. Esa desventaja aparente era compensada por el hecho de que el modelo tridimensional aportaba una información adicional de gran valor geofísico, que es la variación de la densidad electrónica con la altura. Este modelo supone una ionosfera más realista, con una distribución radial que se extiende entre aproximadamente 60 y 1000 km, en lugar de un cascaron esférico delgado situado a una altura fija por sobre la superficie de la Tierra.

La resolución temporal de ambos modelos es de 12 horas, lo que significa que todas las perturbaciones ionosféricas que se desarrollan con periodos que van desde los pocos minutos a las pocas horas son promediadas y sólo se evidencian a través de los residuos de las observaciones después del ajuste por Mínimos Cuadrados. Las perturbaciones ionosféricas de más largo período, como por ejemplo las estacionales, podían ser estudiadas a través del análisis de una serie de modelos ajustados a lo largo del tiempo.



**Figura 1.9.** Distribución espacial global del vTEC: el panel superior muestra el resultado obtenido con la versión bidimensional del LPIM; mientras que el panel inferior el resultado obtenido integrando a lo largo de la dirección verticalmente la densidad de electrones calculada con la versión tridimensional del LPIM. Los valores están en TECu; el sistema de coordenadas es el sol fijo (tomada de Brunini et al., 1999).

La Fig. (1.10) muestra varios perfiles verticales de densidad electrónica calculados en la dirección del sol ( $\varpi = 0$ ), para diferentes latitudes que van desde  $+30^\circ$  hasta  $-30^\circ$ . Puede verse que los mayores valores se producen en la dirección  $-15^\circ$ , la que concuerda prácticamente con la dirección del sol, cuya declinación es  $-17^\circ$ .



**Figura 1.10.** Perfiles verticales de densidad electrónica obtenidos con la versión tridimensional del LPIM (tomada de Brunini et al., 1999).

#### **1.4 Desarrollo de la capacidad de procesar observaciones de fase de las portadoras GPS (año 2000)**

Como se mencionó anteriormente las primeras versiones del LPIM utilizaban las observaciones de código P registradas por los receptores GPS, ya sea que estos se hallaran sobre la Tierra u orbitando en un LEO. Hacia el año 2000 se agregó al módulo de pre-procesamiento del LPIM un nuevo paquete de rutinas dedicado al procesamiento de las observaciones de fase de la portadora. Estas observaciones son unas 100 veces más precisas que las de código P. Tal afirmación puede cuantificarse de un modo aproximado diciendo que la suma del error de medición y del multi-camino puede causar un error de pocos decímetros en las pseudo-distancias medidas con el código P, cuando se usa la fase de la portadora el mismo error es del orden de muy poco milímetros. Para poder procesar las observaciones de fase de la portadora fue necesario desarrollar una serie de programas capaces de detectar los saltos de ciclo que pueden afectar a esas mediciones y reducir de ellas el error sistemático causado por las ambigüedades de fase.

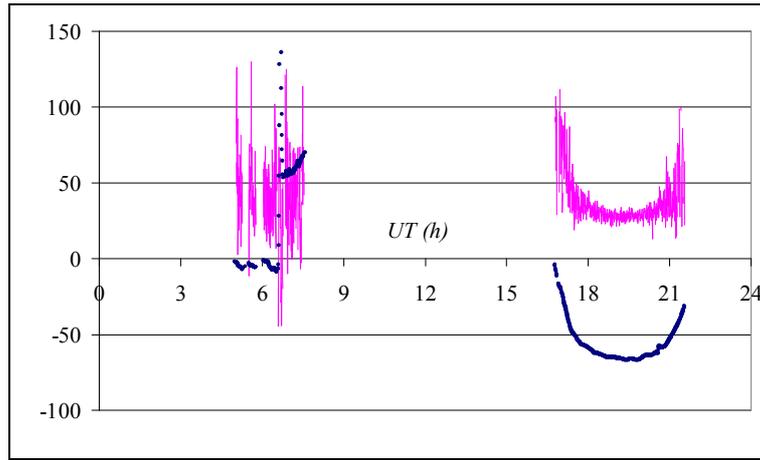
El observable ionosférico,  $L_I$ , derivado de las observaciones de fase de la portadora en las frecuencias primaria y secundaria de GPS,  $L_1$  y  $L_2$ , tiene la siguiente expresión:

$$L_I = L_1 - L_2 = -\kappa_4 \cdot sTEC + c \cdot (\Delta\tau_{RL} + \Delta\tau_{SL}) + \beta + u_{LI}, \quad (1.18.a)$$

en la que  $\Delta\tau_{RL}$  y  $\Delta\tau_{SL}$  son constantes de calibración del receptor y del satélite GPS asociadas a la fase de la portadora,  $u_{LI}$  es el error resultante de la combinación de los errores que afectan a las mediciones  $L_1$  y  $L_2$ , los términos  $\kappa_4$ ,  $sTEC$  y  $c$  tienen el mismo significado que en la Ec. (1.1) y el término  $\beta$ , al que denominaremos ambigüedad ionosférica, es el efecto combinado de las ambigüedades de fase que afectan a ambas portadoras:

$$\beta = n_1 \cdot \lambda_1 - n_2 \cdot \lambda_2, \quad (1.18.b)$$

en la que  $n_1$  y  $n_2$  son números desconocidos pero enteros y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son las longitudes de onda de las portadoras primaria (aproximadamente 19 cm) y secundaria (aproximadamente 24 cm) del GPS. De la Ec. (1.18.b) se puede ver que la ambigüedad ionosférica es un número real, cuyo valor desconocido permanece constante en la medida que no se produzcan interrupciones en el rastreo de ninguna de las dos portadoras GPS. Toda interrupción en el rastreo de una o de ambas portadoras puede engendrar un cambio en cualquiera de los valores enteros  $n_1$  o  $n_2$ , con el correspondiente cambio de la ambigüedad ionosférica. Tales cambios se denominan saltos de ciclo (Fig. 1.11).



**Figura 1.11.** Observable ionosférico (en TECu) calculado a partir de mediciones de código P (magenta) y de fase de la portadora (azul), para dos pasos consecutivos del mismo satélite por la misma estación; en el primer paso, entre UT 6 y 9 hs, se observa una sucesión de saltos de ciclos; el desplazamiento entre los arcos azules y magenta son debidos a la ambigüedad ionosférica (tomada de Brunini et al., 1999).

#### 1.4.1 Detección de saltos de ciclo

El primer paso que realiza el paquete de detección de saltos de ciclos del LPIM es la identificación de los arcos continuos de mediciones de fase de la portadora, entendiendo como tales a los segmentos de observaciones consecutivas a lo largo de los cuales no se han producido cambios en ninguno de los dos números enteros  $n_1$  y  $n_2$ . Para ello, escanea el observable ionosférico, estación por estación, satélite por satélite y época por época, y marca una discontinuidad sospechosa cada vez que se verifica alguna de las condiciones:

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i > \Delta t_{max}, \quad (1.19.a)$$

$$|\Delta L_{i,j}| = |L_{i,j+1} - L_{i,j}| > \Delta L_{lmax}, \quad (1.19.b)$$

en las que  $t_i$  es el tiempo correspondiente a la medición  $L_{i,j}$  y los parámetros  $\Delta t_{max}$  y  $\Delta L_{lmax}$  se determinaron empíricamente, resultando iguales a 600 seg y 10 TECu respectivamente.

A continuación, el paquete analiza cada uno de los arcos identificados como continuos en el paso anterior. El análisis se basa en las diferencias temporales del observable ionosférico ‘mapeado sobre la vertical’, esto es:

$$\Delta L'_{i,j} = (L_{i,j+1} - L_{i,j}) \cdot M(z_i, H), \quad (1.20.a)$$

en la que  $M(z_i, H)$  es la función de mapeo definida por la Ec. (1.8.c). Sobre esas diferencias el paquete ajusta un polinomio de grado 3 y calcula los desvíos entre ese polinomio y los datos. Cada vez que se verifica la condición:

$$\left| \Delta L_{i,j} - \text{Polinomio} \left( \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right| > \max(3 \times \Sigma, 1.5 \text{ TECu}), \quad (1.20.b)$$

en la que  $\Sigma$  es el desvío estándar del ajuste polinomial, el paquete marca una discontinuidad entre las épocas  $t_i$  y  $t_{i+1}$ . Si suponemos que el arco original se extendía entre las épocas  $t_0$  y  $t_f$ , ahora quedará dividido en dos arcos más cortos, el primero entre las épocas  $t_0$  y  $t_i$  y el segundo entre las épocas  $t_{i+1}$  y  $t_f$ .

El paquete descarta aquellos arcos continuos cuya duración resulta inferior a 2.5 hs. Esa duración mínima fue establecida empíricamente con el propósito de lograr una estimación confiable de las ambigüedades ionosféricas (usando el método que se explicará en sub-sección siguiente).

#### 1.4.2 Estimación de la ambigüedad ionosférica

La estimación se basa en la Ec. (1.21) que resulta de sumar la Ec. (1.1) y la Ec. (1.18.a):

$$P_i + L_i = c \cdot (\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + c \cdot (\Delta\tau_{RL} + \Delta\tau_{SL}) + \beta + u_{PI} + u_{LI}. \quad (1.21)$$

Tomando promedios en ambos miembros de la Ec. (1.20):

$$\langle P_i + L_i \rangle = c \cdot (\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + c \cdot (\Delta\tau_{RL} + \Delta\tau_{SL}) + \beta + \langle u_{PI} \rangle + \langle u_{LI} \rangle, \quad (1.22)$$

en la que el símbolo  $\langle \bullet \rangle$  denota al promedio de todos los valores correspondientes a un arco continuo. Si ahora se despeja la ambigüedad ionosférica de la Ec. (1.18.b) y se introduce el resultado en la Ec. (18.a) resulta:

$$\bar{L}_i = L_i - \langle P_i + L_i \rangle = -\kappa_4 \cdot sTEC - c \cdot (\Delta\tau_{RP} + \Delta\tau_{SP}) + u_{LI}, \quad (1.23)$$

en la que se ha asumido que los términos  $\langle u_{LI} \rangle$  y  $\langle u_{PI} \rangle$  tienen un valor despreciable. La validez de esta suposición ha sido analizada exhaustivamente por Ciralo et al. [2007], Brunini y Azpilicueta [2009] y [2010] y Conte et al. [2011], llegando a la conclusión de que el término  $\langle u_{PI} \rangle$  puede ocasionar errores sistemáticos que no son completamente despreciables.

Las sucesivas versiones del LPIM se basaron en el observable ionosférico  $\bar{L}_i$ , definido mediante la Ec. (1.23) y denominado de manera sintética como ‘fases niveladas al código’.

## 1.5 Implementación de la latitud 'modip' en la representación espacial del contenido vertical total de electrones (año 2006)

### 1.5.1 Latitud geográfica y geomagnética

Las primeras versiones del LPIM utilizaban por defecto la latitud geográfica ( $\beta$  en la Ec. 1.4) como argumento de las funciones asociadas de Lagrange empleadas para mapear la variabilidad espacial del vTEC. Aquellas versiones ofrecían la opción de reemplazar la latitud geográfica por la geomagnética, definida sobre la base del dipolo que mejor ajusta el campo magnético de la Tierra. La aproximación dipolar asigna a la latitud geomagnética  $+90^\circ$  o  $-90^\circ$  en los polos geomagnéticos, definidos por los puntos donde el eje del dipolo atraviesa la superficie del planeta, y latitud geomagnética  $0^\circ$  a todos los puntos ubicados sobre el ecuador geomagnético, definido por la intercepción con la superficie de la Tierra, del plano perpendicular al eje del dipolo que pasa por el geocentro. La latitud geomagnética,  $\varphi_m$ , de un punto cuyas coordenadas geográficas son  $\lambda$  y  $\varphi$ , se calcula mediante la sencilla relación:

$$\sin\varphi_m = \sin\varphi \cdot \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cdot \cos\varphi_0 \cdot \cos(\lambda - \lambda_0), \quad (1.24)$$

en la que  $\lambda_0 = -71.65^\circ$  y  $\varphi_0 = -79.53^\circ$  son la longitud y la latitud geográfica del polo geomagnético norte.

Como se explicó en la Sección 1.1.2, el LPIM restringía estadísticamente la variabilidad de los coeficientes armónicos esféricos de intervalos temporales consecutivos mediante la expresión dada por la Ec. (1.7), para atenuar las discontinuidades en la distribución espacio-temporal global del vTEC de intervalos consecutivos y, sobre todo, para evitar la aparición de valores artificiales de vTEC en las extensas regiones del espacio sol-fijo donde la cobertura de datos era pobre o inexistente. Pero el costo que se pagaba por ese beneficio era el de suavizar artificialmente algunas variaciones espacio-temporales verdaderas que tienen lugar, sobre todo, en la región de la Anomalía Ecuatorial.

En otras palabras: la condición impuesta por la Ec. (1.7) equivale a pedir que el vTEC que tendrá lugar en el instante  $t_2$ , en el punto de coordenadas  $\lambda_2$  y  $\varphi_2$  (o  $\varphi_{m,2}$  si se usaba la altitud geomagnética en lugar de la geográfica), fuera aproximadamente igual al vTEC que tenía lugar en el punto de coordenadas  $\lambda_1$  y  $\varphi_1 = \varphi_2$  (o  $\varphi_{m,1} = \varphi_{m,2}$  si se usaba la altitud geomagnética en lugar de la geográfica), en el instante  $t_1 = t_2 - 24(\lambda_1 - \lambda_2)/2\pi$  (ver Ec. 1.5); matemáticamente:

$$vTEC(\lambda_2, \varphi_2, t_2) \cong vTEC(\lambda_1, \varphi_1, t_1) \text{ si } t_1 = t_2 - \frac{24}{2\pi}(\lambda_1 - \lambda_2) \text{ y } \varphi_1 = \varphi_2. \quad (1.25)$$

Ese problema se atenuó significativamente con el uso de la latitud modip en lugar de las latitudes geográfica o geomagnética.

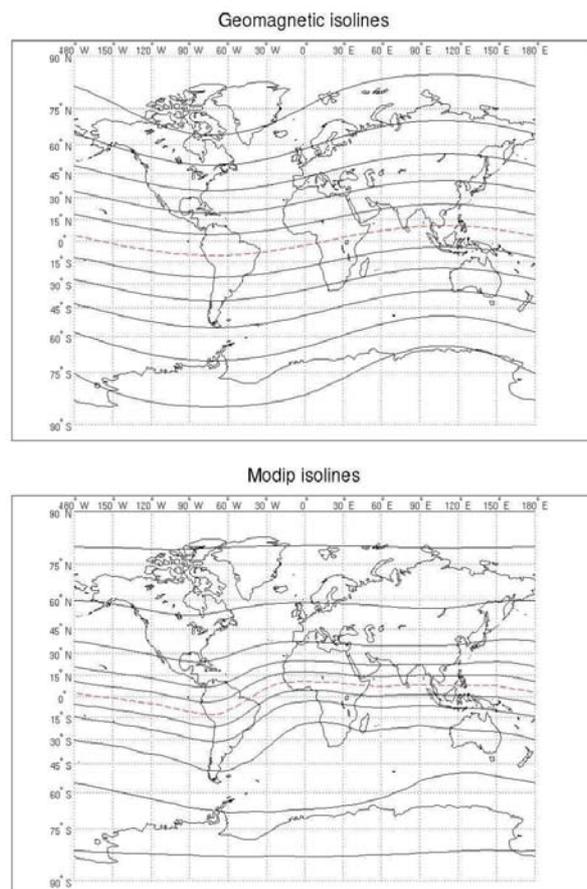
### 1.5.2 Latitud modip

La latitud 'modip' fue introducida por Karl Rawer para mapear la capa F de la ionosfera. Se la define mediante la siguiente expresión:

$$\tan\mu = \frac{I(\lambda, \varphi, h_F)}{\sqrt{\cos\varphi}}, \quad (1.26)$$

en la que  $\mu$  es la latitud modip e  $I(\lambda, \varphi, h_F)$  es la inclinación verdadera del campo geomagnético en el punto de coordenadas geográficas  $\lambda$  y  $\varphi$  y altura  $h_F$  donde se desarrolla la capa F de la ionosfera. Para calcular esa cantidad el LPIM utilizaba el Campo Magnético Internacional de Referencia conocido con las siglas inglesas IGRF.

La Fig. (1.12) compara los paralelos de latitud geomagnética con los de latitud modip. Puede verse allí que en las cercanías del ecuador geográfico, los paralelos de modip se desvían considerablemente de los geográficos para seguir las líneas de inclinación magnética, pero ambos paralelos van convergiendo a medida que nos acercamos a los polos geográficos, donde ambos polos coinciden perfectamente. Además de la diferencia señalada, existe un factor de escala introducido por el denominador de la Ec. (1.26), que aumenta la separación entre los paralelos de modip a medida que nos acercamos al ecuador.

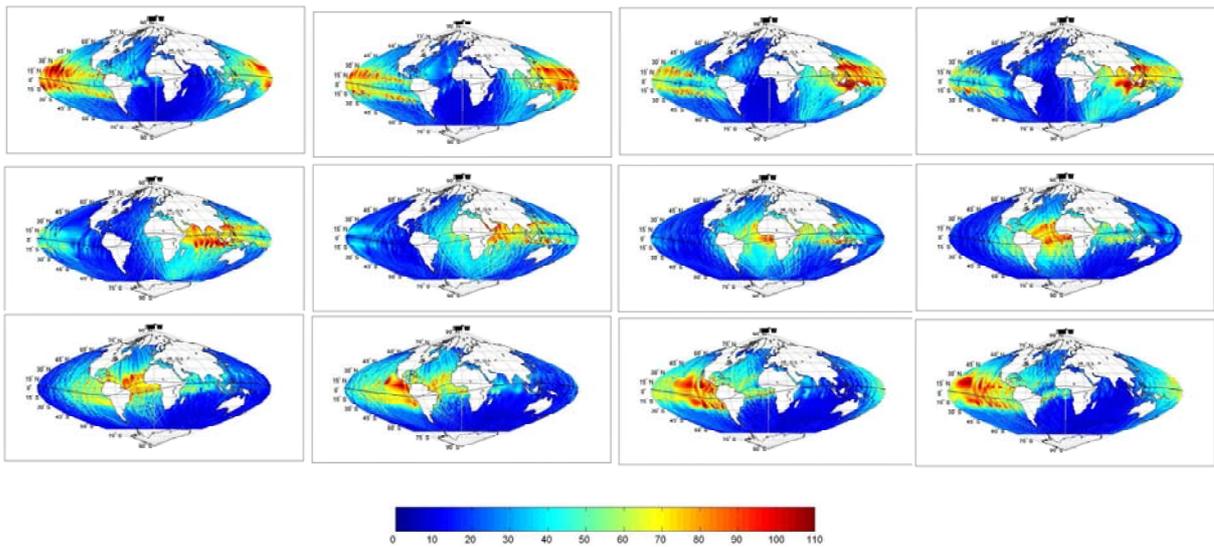


**Figura 1.12.** Paralelos de latitud geomagnética (arriba) y los mismos paralelos de latitud modip (abajo) (tomada de Azpilicueta et al., 2005).

### 1.5.3 Argumentos en favor de la latitud modip

La Fig. (1.13) muestra 12 mapas de  $\nu$ TEC derivados de las mediciones del radar de doble frecuencia TOPEX embarcado en la misión TOPEX/Poseidon. Para construirlos se usaron los datos colectados a lo largo de tres meses (en este caso, marzo, abril y mayo

de 1999). En ese intervalo, los datos cubren la totalidad de la superficie oceánica del planeta entre  $\pm 66^\circ$  de latitud geográfica y muestrean homogéneamente todas las horas locales en todas las longitudes geográficas. Esos datos se clasificaron dentro de intervalos de 2 hs de tiempo universal y se volcaron a los mapas que se muestran en la figura, en los que se han representado también los ecuadores geomagnético y modip. Esos mapas ilustran claramente cómo las estructuras de la Anomalía Ecuatorial se desarrollan a lo largo del ecuador modip, desviándose significativamente del ecuador geográfico y, aún, del ecuador geomagnético, especialmente en la región dominada por la Anomalía Magnética del Atlántico Sur.



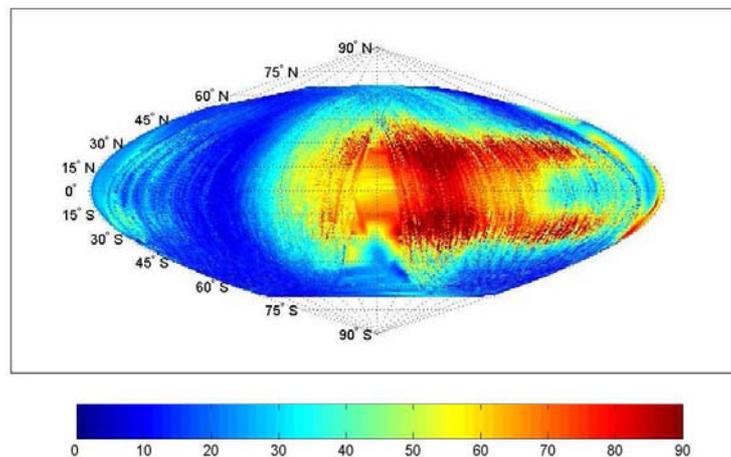
**Figura 1.13.** Mapas de vTEC (en TECu) en intervalos de dos horas de tiempo universal, construidos usando tres meses de datos proporcionados por de la misión TOPEX / Poseidon (los mapas están ordenados de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, comenzando con el intervalo 0-2 UT y finalizando con el intervalo 22-24 UT); sobre los mapas se han trazado los ecuadores geomagnéticos y modip (tomada de Azpilicueta y Brunini, 2006).

El mapa presentado en la Fig. (1.14) es especialmente interesante. La retícula representada sobre ese mapa corresponde al sistema de coordenadas sol fijo – modip. El mapa muestra muy claramente que, cuando se las representa usando ese sistema de coordenadas, las principales estructuras del vTEC permanecen aproximadamente invariables a lo largo del tiempo. Esta evidencia ha proporcionado el principal sustento para adoptar la latitud modip (y descartar la geográfica y, aún la geomagnética) en las sucesivas versiones del LPIM, en tanto que las condiciones expresadas por la Ec. (1.7), se verifican más certeramente en el sistema de coordenadas sol fijo – modip antes que en los sistemas sol fijo – latitud geográfica o sol fijo – latitud geomagnética.

#### **1.5.4 Resultados alcanzados**

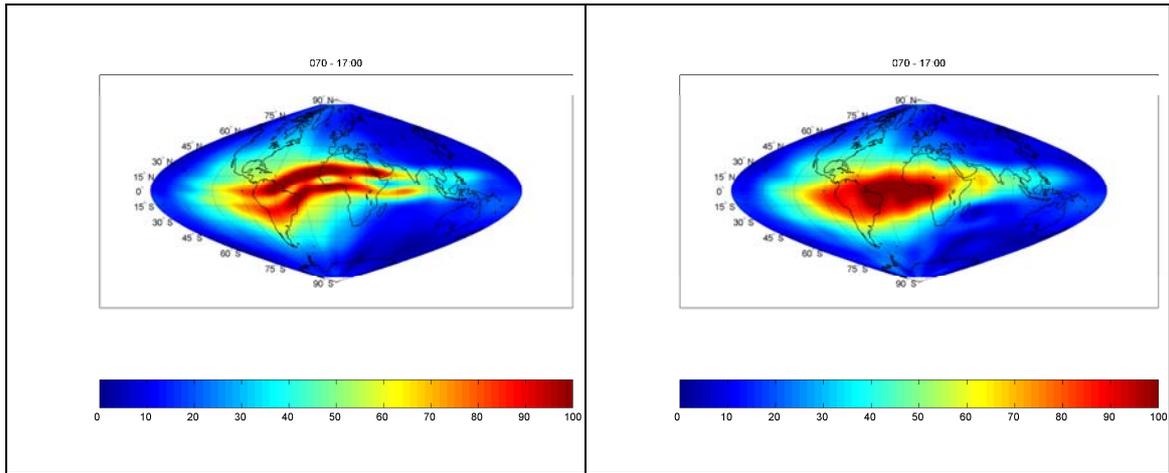
La estrategia utilizada para verificar las mejoras producidas en el LPIM con el uso de la latitud modip consistió en calcular dos series de mapas globales de vTEC, una usando la altitud geomagnética y otra usando la latitud modip, y luego comparar ambas series con determinaciones de vTEC totalmente independientes del LPIM. En

principio y a modo de ejemplo, la Fig. (1.15) muestra los mapas correspondientes al intervalo 16 – 18 hs de tiempo universal del día 10 de marzo de 1999. Se puede comprobar que la representación lograda con el uso de modip (izquierda) describe las estructuras de la anomalía ecuatorial mucho mejor que la que se logra con el uso de la latitud geomagnética (derecha).

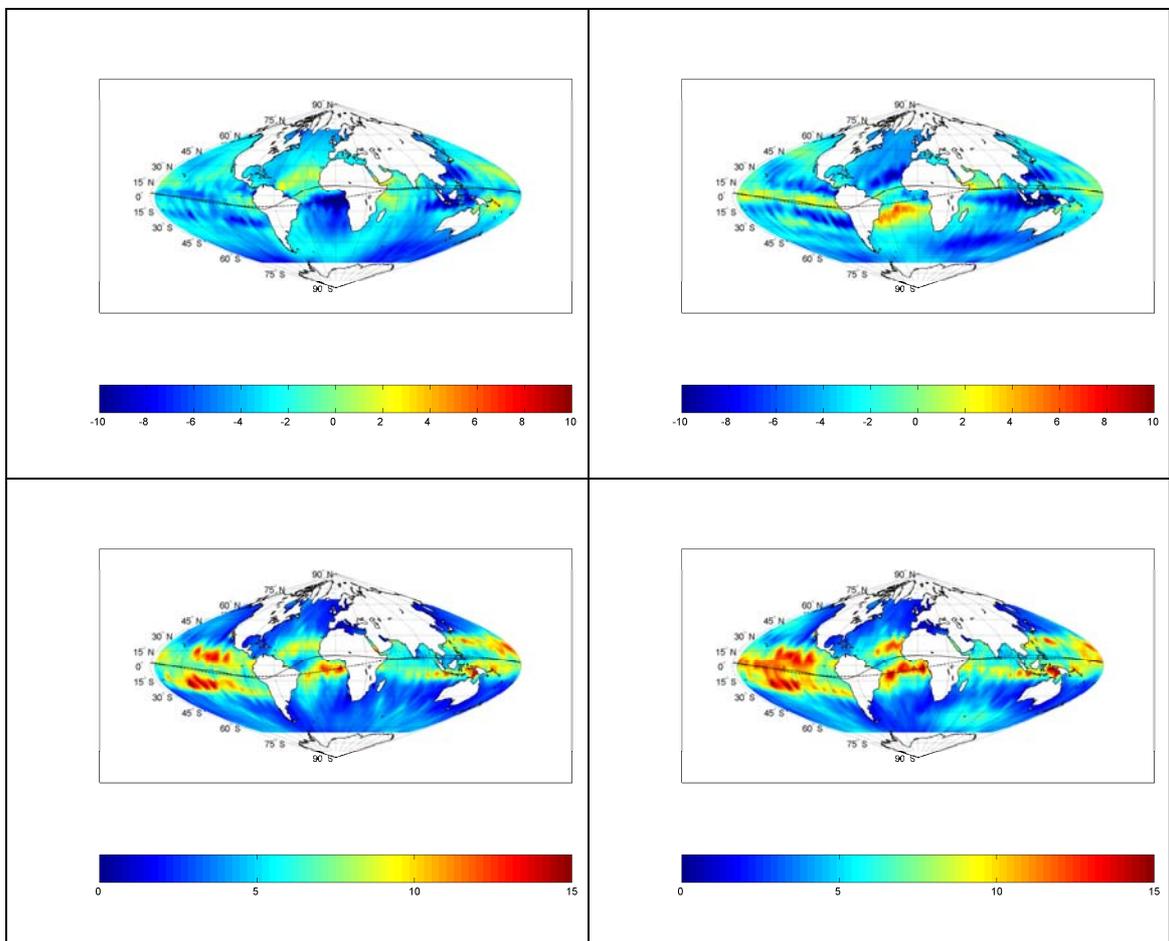


**Figura 1.14.** Mapa de vTEC (en TECu) construido con los datos proporcionados por la misión TOPEX / Poseidon (24 horas a lo largo de tres meses); la rectícula dibujada sobre el mapa corresponde al sistema de coordenadas sol fijo – modip (tomada de Azpilicueta y Brunini, 2008).

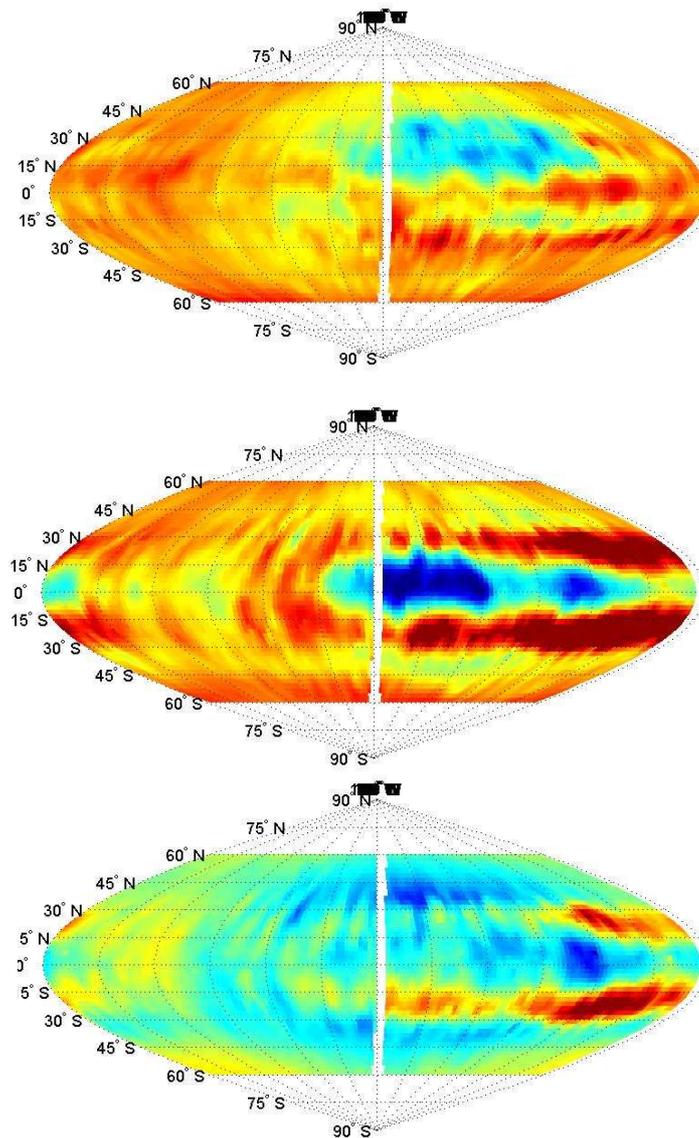
Las determinaciones de vTEC utilizadas como valores de control fueron aportadas por radar de doble frecuencia TOPEX de la misión TOPEX/Poseidon. Los resultados que se describen a continuación se basan en el análisis de una serie de datos de tres meses de duración (en este caso, marzo, abril y mayo de 1999), periodo que permite que TOPEX muestree toda la superficie oceánica del planeta entre  $\pm 66^\circ$  de latitud geográfica, en todas las horas locales para todas las longitudes. La superficie de la tierra cubierta por los datos TOPEX fue teselada en triángulos esféricos equiláteros con lados de  $9^\circ$  y dentro de cada triángulo se calculó la media y el desvío estándar de las diferencias entre los valores calculados con el LPIM y los proporcionados por TOPEX. Los resultados obtenidos, presentados en la Fig. (1.16), muestran de una manera elocuente las mejoras ocasionadas por el uso de la latitud modip. En el caso de la media, se nota que el vTEC medido por TOPEX es sistemáticamente mayor –entre 4 y 5 TECu– que el calculado con el LPIM, ya sea usando la latitud modip o la geomagnética. La causa de esa diferencia sistemática fue analizada minuciosamente y atribuida a un error sistemático en la calibración de la banda C del radar TOPEX (Azpilicueta y Brunini, 2006). Una vez descontada esa diferencia sistemática, se aprecia que el uso de la latitud modip reduce significativamente las diferencias entre el vTEC calculado con el LPIM y medido por TOPEX. Una reducción similar se aprecia para en el caso del desvío estándar.



**Figura 1.15.** Mapas de vTEC (en TECu) calculados con LPIM usando la latitud modip (izquierda) y geomagnética (derecha) (tomada de Azpilicueta, 2006).



**Figura 1.16.** Diferencia entre el vTEC calculado con el LPIM y medido por TOPEX; las figuras de la parte superior muestran el valor medio de las diferencias y las de la parte inferior muestran el desvío estándar de las diferencias; las figuras de la izquierda corresponden al uso de la latitud modip y las de la derecha al uso de la latitud geomagnética; todos los valores están en TECu (tomada de Azpilicueta, 2006).



**Figura 1.17.** Diferencia promedio entre el vTEC calculado con el LPIM (mapa superior), el CODE (mapa medio) y el JPL (mapa inferior) y medido por TOPEX, representadas en el sistema de coordenadas sol fijo – modip; todos los valores están en TECu (tomada de Azpilicueta y Brunini, 2009).

Un análisis similar se realizó para los mapas ionosféricos globales que, hacia la misma época, calculaban los centros de análisis ionosféricos del Centre for Orbit Determination in Europe (CODE), de la Universidad de Berna, Suiza, y del Jet Propulsion Laboratory (JPL), de NASA, Estados Unidos, ambos integrantes del grupo de trabajo ionosférico del IGS. Los resultados obtenidos se muestran en la Fig. (1.17), para cuya representación se ha usado el sistema de coordenada sol fijo - modip. Los mapas calculados con el LPIM y por el CODE presentan la ya mencionada diferencia sistemática de entre 4 y 5 TECu que, como se señaló, ha sido atribuida a un error sistemático del vTEC medido por TOPEX. Más allá de esa diferencia sistemática, se aprecia que el LPIM producía valores más concordantes con TOPEX que los que producía el CODE, especialmente en la región de la anomalía ecuatorial. Los mapas calculados por el JPL no presentan ninguna diferencia sistemática con TOPEX porque ese centro de análisis ionosférico aplicaba una corrección constante a sus mapas para

llevarlos a coincidir, en valor medio, con TOPEX. Nuevamente, si se descarta el error sistemático, los mapas calculados con el LPIM concordaban mejor con TOPEX que los calculados por el JPL.

## **1.6 Modelo global de la densidad de electrones basado en observaciones GNSS en la tierra y en satélites de órbitas baja (año 2009)**

Hacia el año 2009 el LPIM había evolucionado de un modelo para calcular el vTEC global, basado en aproximar a la ionosfera mediante una sola capa de espesor despreciable, a un modelo para calcular la distribución global de la densidad electrónica, basado en un perfil que describía la distribución vertical de electrones libres tomando en cuenta las regiones ionosféricas más importantes. Al mismo tiempo había desarrollado la capacidad de procesar observaciones GNSS proporcionadas por receptores estacionados sobre la superficie terrestre y perfiles de densidad electrónica derivados, mediante la técnica de radio ocultación, de mediciones GPS obtenidas por receptores a bordo de diferentes satélites (SAC-C, SAC-D, CHAMP, GRACE, FORMOSAT 3 / COSMIC, etc.). La presente sección se basa en Brunini et al. [2011b], [2011c], [2013] y [2013b].

### **1.6.1 Modelo para la distribución vertical de electrones libres**

El LPIM describe la distribución vertical de electrones libres en un dado lugar y en un instante determinado, mediante dos funciones acopladas que representan la densidad electrónica por debajo y por encima del pico F2. Para las regiones ubicadas debajo del pico F2 se utiliza una superposición de tres capas Chapman alfa que representan a las regiones E, F1, F2 y al perfil de tope se utiliza otra capa alfa Chapman; matemáticamente:

$$N(h) = \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \tilde{N}_{m,i} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h-h_{m,i}}{H_i} - \exp \left( -\frac{h-h_{m,i}}{H_i} \right) \right], & \text{si } h \leq h_{m,3} \\ N_{m,3} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h-h_{m,3}}{H_4} - \exp \left( -\frac{h-h_{m,3}}{H_4} \right) \right], & \text{si } h > h_{m,3} \end{cases}, \quad (1.27)$$

en la que  $N(h)$  es la densidad electrónica a la altura  $h$  y el subíndice  $i$  identifica a la región ionosférica:  $i = 1$  para la región E,  $i = 2$  para la región F1,  $i = 3$  para la región F2 e  $i = 4$  para el perfil de tope; los restantes parámetros involucrados en la Ec. (1.27) son:

- $\tilde{N}_{m,1}$  = densidad electrónica aparente del máximo de la región E,
- $h_{m,1}$  = altura del máximo de la región E,
- $H_1$  = ancho de escala de la región E,
- $\tilde{N}_{m,2}$  = densidad electrónica aparente del máximo de la región F1,
- $h_{m,2}$  = altura del máximo de la región F1,
- $H_2$  = ancho de escala de la región F1,
- $\tilde{N}_{m,3}$  = densidad electrónica aparente del máximo de la región F2,
- $h_{m,3}$  = altura del máximo de la región F2,

- $H_3$  = ancho de escala de la región F2,
- $N_{m,3}$  = densidad electrónica del máximo de la región F2 y
- $H_4$  = ancho de escala del perfil de tope.

Las densidades electrónicas aparentes,  $\check{N}_{m,1}$ ,  $\check{N}_{m,2}$  y  $\check{N}_{m,3}$ , de los máximos de las regiones E, F1 y F2, se determinan sobre la base de las siguientes condiciones, que las relacionan con las densidades electrónicas verdaderas,  $N_{m,1}$ ,  $N_{m,2}$  y  $N_{m,3}$ , de esos máximos:

$$N(h_{m,1}) = \check{N}_{m,1} + \check{N}_{m,2} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,1} - h_{m,2}}{H_2} - \exp \left( -\frac{h_{m,1} - h_{m,2}}{H_2} \right) \right] + \check{N}_{m,3} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,1} - h_{m,3}}{H_3} - \exp \left( -\frac{h_{m,1} - h_{m,3}}{H_3} \right) \right] = N_{m,1} \quad (1.28.a)$$

$$N(h_{m,2}) = \check{N}_{m,1} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,2} - h_{m,1}}{H_1} - \exp \left( -\frac{h_{m,2} - h_{m,1}}{H_1} \right) \right] + \check{N}_{m,2} + \check{N}_{m,3} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,2} - h_{m,3}}{H_3} - \exp \left( -\frac{h_{m,2} - h_{m,3}}{H_3} \right) \right] = N_{m,2} \quad (1.28.b)$$

$$N(h_{m,3}) = \check{N}_{m,1} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,3} - h_{m,1}}{H_1} - \exp \left( -\frac{h_{m,3} - h_{m,1}}{H_1} \right) \right] + \check{N}_{m,2} \cdot \exp \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{h_{m,3} - h_{m,2}}{H_2} - \exp \left( -\frac{h_{m,3} - h_{m,2}}{H_2} \right) \right] + \check{N}_{m,3} = N_{m,3} \quad (1.28.c)$$

Con ello se logra que la suma de las tres funciones Chapman alfa que se usan para representar la parte del perfil que se halla debajo del pico F2, engendre los valores  $N_{m,1}$ ,  $N_{m,2}$  y  $N_{m,3}$  a las alturas  $h_{m,1}$ ,  $h_{m,2}$  y  $h_{m,3}$ , respectivamente.

La Ec. (1.27) produce un perfil vertical continuo, cuya derivada primera y segunda con respecto de la altura son también continuas. La continuidad del perfil y de sus dos primeras derivadas son condiciones indispensables para que el LPIM pueda ser utilizado en problemas de trazado de rayos en el medio ionosférico.

### **Modelos para los parámetros de las diferentes regiones ionosféricas**

Para describir la variabilidad espacio-temporal de los tres parámetros de la región F2, el LPIM recurre a la misma estrategia utilizada para describir la variabilidad espacio-temporal del  $vTEC$  sobre la capa de espesor despreciable (ver Ec. 1.4), esto es, desarrollos en serie de funciones armónicas esféricas con coeficientes variables en el tiempo:

$$\Omega(\varpi, \mu, t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^{\min(l,M)} \left[ a_{lm}(t) \cdot \cos(m\varpi) + b_{lm}(t) \cdot \sin(m\varpi) \right] P_{lm}(\sin\mu), \quad (1.29.a)$$

en la que  $\Omega$  es cualquiera de los tres parámetros  $N_{m,3}$ ,  $h_{m,3}$  o  $H_3$ ,  $\varpi$  y  $\mu$  son las coordenadas esféricas en el sistema sol fijo – modip,  $t$  es el tiempo universal,  $L$  y  $M \leq L$  son el grado y el orden máximo de la serie y  $P_{lm}$  son las funciones asociadas de

Legendre. Siempre siguiendo la misma estrategia usada en las primeras versiones del LPIM, la variabilidad temporal de los parámetros se representó apelando a una función escalonada para los coeficientes armónicos esféricos (ver Ec. 1.6), esto es:

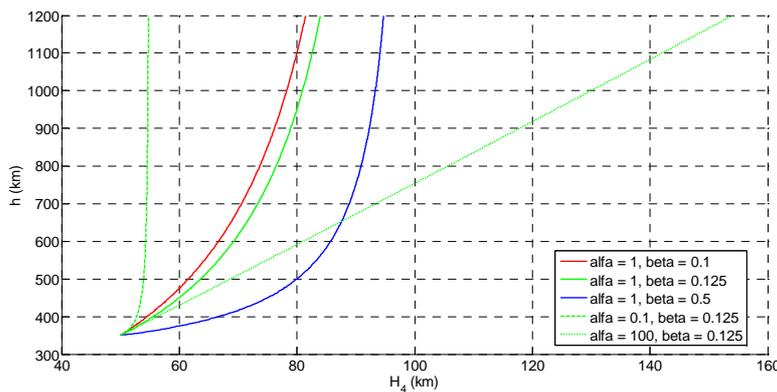
$$a_{lm}(t) = a_{lmi} \text{ si } t_i \leq t \leq t_i + \Delta t, \text{ con } i = 1, 2, \dots, k \text{ y } \Delta t = \frac{24}{k}, \text{ y análogamente para } b_{lm}(t), \quad (1.29.b)$$

en la que  $k$  es la cantidad de intervalos de duración  $\Delta t$  en la que se divide el día.

El LPIM modela la altura de escala del perfil de tope,  $H_4$ , mediante la siguiente función empírica que depende de la altura:

$$H_4(h) = H_3 \cdot \left[ 1 + \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (h - h_{m,3})}{\alpha \cdot H_3 + \beta \cdot (h - h_{m,3})} \right], \quad (1.29.c)$$

en la que  $\alpha$  y  $\beta$  son parámetros que controlan la forma y la velocidad con que la altura de escala crece con la altura (Fig. 1.18).



**Figura 1.18.** Variación con la altura de la altura de escala del perfil de tope, para diferentes valores de los parámetros de forma y pendiente.

Los restantes parámetros del LPIM se modelan siguiendo las recomendaciones de la ITU-R (Radio Communication Sector of the International Telecommunications Union), de acuerdo con las cuales se tiene:

- para la densidad electrónica máxima de la región E, expresada en electrones por metro cúbico, se utiliza la siguiente expresión:

$$N_{m,1} = 5.4684 \times 10^8 \cdot \left[ \frac{\left[ 1.112 + 0.019 \cdot \left( 1 - \frac{2}{1 + \exp(0.3\varphi)} \right) \right]^2 \cdot \sqrt{F10.7}}{\left[ 1.112 \right]^2 \cdot \sqrt{F10.7}} \cdot \cos^2 \chi \right], \quad (1.30.a)$$

$$\left[ \frac{\left[ 1.112 - 0.019 \cdot \left( 1 - \frac{2}{1 + \exp(0.3\varphi)} \right) \right]^2 \cdot \sqrt{F10.7}}{\left[ 1.112 \right]^2 \cdot \sqrt{F10.7}} \right]$$

en las que  $\varphi$  es la latitud geográfica expresada en grados sexagesimales,  $F_{10.7}$  es la intensidad del flujo solar en la longitud de onda de 10.7 cm (en unidades de flujo solar equivalentes a  $10^{-22} \text{ Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ ) y  $\tilde{\chi}$  es el ángulo solar aparente, definido a partir del ángulo solar verdadero,  $\chi$ , a través de la expresión:

$$\tilde{\chi} = \frac{(90 - 0.24 \cdot \exp(20 - 0.2 \cdot \chi)) \cdot \exp(12 \cdot (\chi - \chi_0)) + \chi}{\exp(12 \cdot (\chi - \chi_0)) + 1}, \quad (1.30.b)$$

en la que  $\chi_0 = 86.23292796211615^\circ$ ; la línea superior de la Ec. (28.a) corresponde a los meses de enero, febrero, noviembre y diciembre, la línea intermedia a los meses de marzo, abril, septiembre y octubre y la línea inferior a los meses de mayo, junio, julio y agosto;

- la altura del máximo y el ancho de escala de la región E, ambas expresadas en kilómetros, se establecen de la siguiente manera:

$$h_{m,1} = 120, \quad (1.30.c)$$

$$H_1 = 5.0 + h_{m,3} - h_{m,1}; \quad (1.30.d)$$

- para la densidad electrónica máxima de la región F1, también expresada en electrones por metros cúbicos, se utiliza el siguiente procedimiento recursivo:

$$N_{m,2}'' = 1.96 \cdot N_{m,1} \cdot \left[ \frac{\exp(8.98 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{N_{m,1}} - 2000)}{\exp(8.98 \times 10^{-3} \cdot \sqrt{N_{m,1}} - 2000) + 1} \right]^2, \quad (1.30.e)$$

$$N_{m,2}' = \frac{1.96 \cdot N_{m,2}''}{\left[ \exp(8.98 \times 10^{-3} \cdot (\sqrt{N_{m,1}} - \sqrt{N_{m,2}''})) + 1 \right]^2}, \quad (1.30.f)$$

$$N_{m,2} = N_{m,2}' \cdot \left[ \frac{\exp(4.58 \times 10^{-4} \cdot \sqrt{N_{m,3}} - 5.39 \times 10^{-4} \cdot \sqrt{N_{m,2}'})}{\exp(4.58 \times 10^{-4} \cdot \sqrt{N_{m,3}} - 5.39 \times 10^{-4} \cdot \sqrt{N_{m,2}'}) + 1} \right]^2; \quad (1.30.g)$$

- la altura del máximo y el ancho de escala de la región F1, ambas expresadas en kilómetros, se calculan del siguiente modo:

$$h_{m,2} = 165 + 0.6 \cdot \tilde{\chi} \quad (1.30.h)$$

$$H_2 = 0.4 \cdot (h_{m,3} - h_{m,1}), \quad (1.30.i)$$

siendo  $\tilde{\chi}$  el ángulo solar aparente en grados sexagesimales ya definido a través de la Ec. (1.30.b);

- finalmente, para calcular la altura de escala del perfil de tope, el LPIM utiliza los siguientes valores empíricamente determinados para los parámetros de forma y pendiente:

$$\alpha = 100 \quad (1.30.j)$$

$$\beta = 0.125. \quad (1.30.k)$$

## 1.7 Predicción de la densidad electrónica usando el LPIM

Para predecir la densidad electrónica en un punto cualquiera de coordenadas geográficas  $\lambda$  y  $\varphi$  a una altura  $h$  y en un instante  $t$ , el LPIM puede proceder de dos maneras: en 'modo autónomo', utilizando la base de datos ITU-R para calcular valores medianos mensuales de la densidad electrónica máxima y la altura del máximo de la región F2; y en modo 'asimilación de datos', calculando la densidad electrónica máxima, la altura del máximo y la altura de escala de la región F2 sobre la base de medidas GNSS colectadas por receptores fijos sobre la superficie de la Tierra y perfiles de densidad electrónica derivados de radio ocultaciones GPS.

### 1.7.1 Predicción de la densidad electrónica mediante el modo autónomo

En esta modalidad, el LPIM calcula valores medianos mensuales de la densidad electrónica máxima,  $N_{m,3}$ , y la altura del máximo,  $h_{m,3}$ , de la región F2 utilizando desarrollos en series de funciones armónicas esféricas como las presentadas en las ecuaciones (1.27), (1.28) y (1.29). Los grados y órdenes máximos y la cantidad de intervalos temporales utilizados para estos desarrollos son:  $L = M = 9$  y  $k = 12$  para  $N_{m,3}$  y  $L = M = 8$  y  $k = 6$  para  $h_{m,3}$ . Los coeficientes  $a_{lmi}$  y  $b_{lmi}$ ,  $l = 0,1,\dots,L$ ,  $m = 0,1,\dots,\min(l,M)$ ,  $i = 0,1,\dots,k$  necesarios para evaluar los desarrollos armónicos esféricos se calcularon de manera tal de reproducir los mapas medianos mensuales de  $N_{m,3}$  y  $h_{m,3}$  que se calculan con la base de datos ITU-R [Brunini et al., 2013].

Dicha base de datos consiste en un conjunto de coeficientes numéricos que permiten calcular la frecuencia crítica  $f_0F2$  y el factor de propagación  $M_{3000}F2$  de la capa F de la ionosfera y, a partir de ellos, la densidad electrónica máxima y la altura del máximo de esa región. La base de datos fue establecida a comienzos de los años 60 por los científicos estadounidenses William Jones y Roger Gallet, quienes, para construirla, desarrollaron una técnica de mapeo ad-hoc. De acuerdo con la misma, la variación diurna mediana mensual de  $f_0F2$  y  $M_{3000}F2$  queda representada con una función armónica:

$$\Omega = a_0 + \sum_{j=1}^J [a_j \cdot \cos(j \cdot t) + b_j \cdot \sin(j \cdot t)], \quad (1.31.a)$$

en la  $\Omega$  que es el parámetro que se desea mapear,  $t$  es el tiempo universal y  $J$  es la cantidad de armónicos utilizados que, en el caso de  $f_0F2$  resultó igual a 6 y en el caso de  $M_{3000}F2$  resultó igual a 4. La variación espacial mediana mensual de los parámetros es tomada en cuenta a través de los coeficientes armónicos:

$$a_j = \sum_{k=0}^K U_{2j,k} \cdot G_k, \quad j \geq 0 \quad \text{y} \quad (1.31.b)$$

$$b_j = \sum_{k=0}^K U_{2j-1,k} \cdot G_k, \quad j \geq 1, \quad (1.31.c)$$

en las que  $K = 75$  para  $f_0F2$  y 49 para  $M_{3000}F2$ ,  $U_{1,0},\dots,U_{2J,K}$  son los coeficientes numéricos que componen la base de datos ITU-R (988 para  $f_0F2$  y 441 para  $M_{3000}F2$ ) y  $G_0,\dots,G_K$  son funciones especiales cuya forma explícita depende del índice  $k$ , por ejemplo:

$$G_{54} = \sin^8(\mu) \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \cos(2 \cdot \lambda), \quad (1.31.d)$$

siendo  $\lambda$  y  $\varphi$  las coordenadas geográficas longitud y latitud y  $\mu$  la ya mencionada latitud modip.

Los coeficientes numéricos de las ecuaciones (1.31.b) y (1.31.c) se determinaron a partir de valores medianos mensuales de  $f_0F2$  y  $M_{3000}F2$  derivados de una red global de ionosondas. El ajuste se realizó usando el método de mínimos cuadrados y las mediciones utilizadas provenían de unas 150 ionosondas distribuidas irregularmente sobre el planeta (como es habitual, con más instrumentos en Europa y Estados Unidos que en el resto del mundo). Las mediciones usadas se extendían entre los años 1954 y 1958, lo que permitió determinar, para cada mes del año, dos juegos de coeficientes para  $f_0F2$  y otros dos juegos para  $M_{3000}F2$ , uno válido para actividad solar baja y el otro para actividad solar alta. De acuerdo con esta técnica, la actividad solar se caracteriza a través de la media móvil anual,  $R_{12}$ , del número medio mensual de manchas solares. Los dos juegos de coeficientes CCI-R corresponden a  $R_{12} = 0$  y  $R_{12} = 100$  y para cualquier actividad solar diferente deben ser interpolados o extrapolados linealmente.

Una vez calculados  $f_0F2$  y  $M_{3000}F2$  para el mes, la hora y la actividad solar correspondientes, es posible calcular  $N_{m,3}$  usando la simple relación:

$$N_{m,3} = 1.24 \times 10^{10} \cdot f_0F2^2, \quad (1.32.a)$$

en la que  $f_0F2$  está medido en MHz y  $N_{m,3}$  en electrones por metro cúbico, y  $h_{m,3}$  usando las expresiones:

$$h_{m,3} = \frac{1490}{M_{3000}F2 + CF} - 176, \quad (1.32.b)$$

con el siguiente factor de corrección:

$$CF = \frac{[0.00232 \cdot R_{12} + 0.222] \cdot \left[ 1 - \frac{R_{12}}{150} \exp\left(-\frac{\varphi_m^2}{1600}\right) \right]}{\frac{N_{m,2}}{N_{m,1}} - 1.2 - 0.0116 \cdot \exp(0.0239 \cdot R_{12})} + 0.096 \cdot \frac{(R_{12} - 25)}{150}, \quad (1.32.c)$$

en las que  $R_{12}$  es la media móvil anual del número medio mensual de manchas solares,  $\varphi_m$  es la latitud geomagnética expresada en grados, el factor de propagación  $M_{3000}F2$  es una cantidad adimensional y tanto  $CF$  como  $h_{m,3}$  resultan en kilómetros.

Una vez calculados  $N_{m,3}$  y  $h_{m,3}$ , el LPIM utiliza la siguiente relación empírica para calcular el ancho de escala de la región F:

$$H_3 = \frac{4.774 \cdot f_0F2^2}{\exp(-3.467 + 1.714 \cdot \log(f_0F2) + 2.02 \cdot \log(M_{3000}F2))}, \quad (1.33)$$

en la que debe expresarse en MHz, el factor de propagación  $M_{3000}F2$  es, como ya se dijo, una cantidad adimensional y  $H_3$  resulta en kilómetros.

### 1.7.2 Predicción de la densidad electrónica mediante el modo asimilación de datos

El LPIM implementa la asimilación de datos sobre la base de la siguiente ecuación de condición:

$$N_{dat} = N_{pri} + \frac{\partial N}{\partial N_{m,3}} \cdot \Delta N_{m,3} + \frac{\partial N}{\partial h_{m,3}} \cdot \Delta h_{m,3} + \frac{\partial N}{\partial H_3} \cdot \Delta H_3 + v, \quad (1.34.a)$$

en la que  $N_{dat}$  es la densidad electrónica que se desea asimilar,  $N_{pri}$  es la densidad electrónica a priori, calculada en la modalidad autónoma que se explicó en la sección precedente, usando los valores a priori de los parámetros,  $N_{m,3,pri}$ ,  $h_{m,3,pri}$  y  $H_{3,pri}$ , que se calculan de la manera que acaba de explicarse,  $\partial N/\partial N_{m,3}$ ,  $\partial N/\partial h_{m,3}$  y  $\partial N/\partial H_3$  son las derivadas del modelo LPIM con respecto a los tres parámetros de la región F2,  $\Delta N_{m,3} = N_{m,3,pos} - N_{m,3,pri}$ ,  $\Delta h_{m,3} = h_{m,3,pos} - h_{m,3,pri}$  y  $\Delta H_3 = H_{3,pos} - H_{3,pri}$  son las correcciones que deben aplicarse a los valores a priori de los parámetros para que el modelo LPIM se ajuste los datos asimilados y  $v$  son los desvíos entre los datos asimilados y las densidades electrónicas calculadas a posteriori del ajuste de los parámetros, lo cual se realiza mediante el método de mínimos cuadrados.

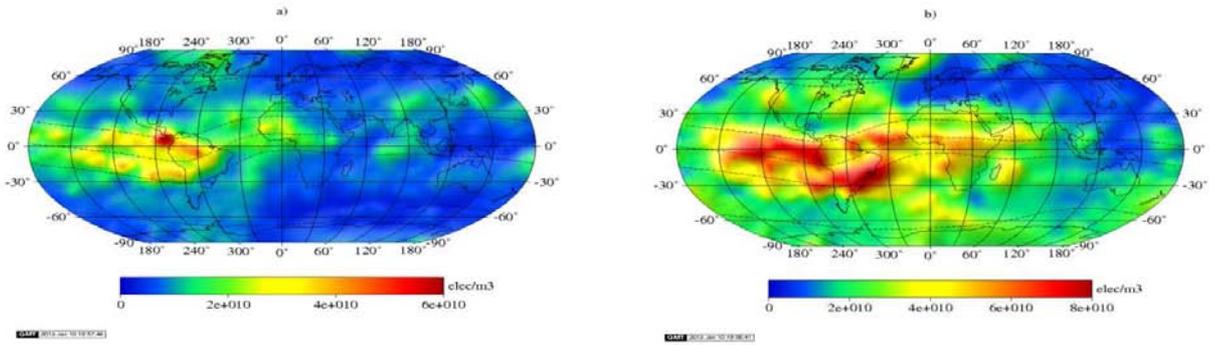
La versión actual del LPIM puede ajustar dos tipos de datos en forma simultanea: densidades electrónicas derivadas mediante la técnica de radio ocultación, de mediciones GPS obtenidas por receptores a bordo de diferentes satélites (SAC-C, SAC-D, CHAMP, GRACE, FORMOSAT 3 / COSMIC, etc.) y sTEC derivados de mediciones GNSS realizadas por receptores fijo sobre la tierra. En este último caso, la ecuación de condición (1.34.a) debe modificarse de la siguiente manera:

$$sTEC_{dat} = \int_{RX}^{SV} N_{dat} ds = \int_{RX}^{SV} N_{pri} ds + \Delta N_{m,3} \cdot \int_{RX}^{SV} \frac{\partial N}{\partial N_{m,3}} ds + \Delta h_{m,3} \cdot \int_{RX}^{SV} \frac{\partial N}{\partial h_{m,3}} ds + \Delta H_3 \cdot \int_{RX}^{SV} \frac{\partial N}{\partial H_3} ds + v' \quad (1.34.b)$$

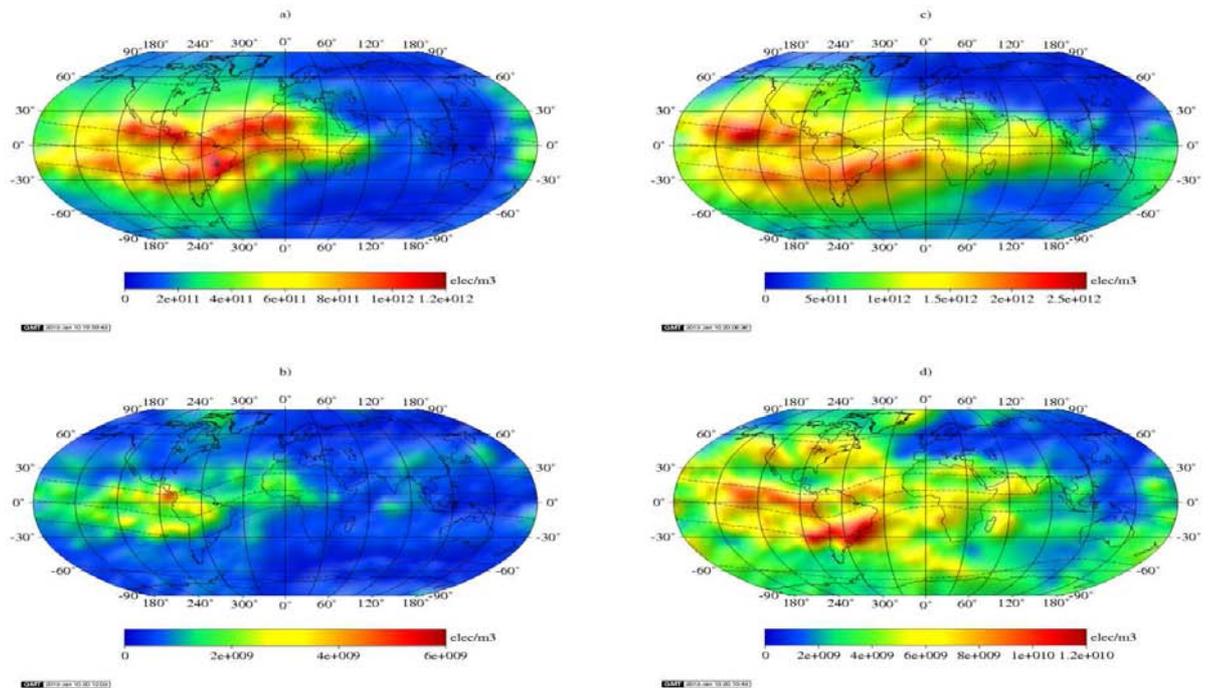
en la que las integrales deben calcularse a lo largo de la línea que une al receptor,  $RX$ , con el satélite GNSS,  $SV$ , y  $v'$  son los desvíos entre los datos asimilados y las los sTEC calculados a posteriori del ajuste de los parámetros.

### 1.7.3 Resultados obtenidos

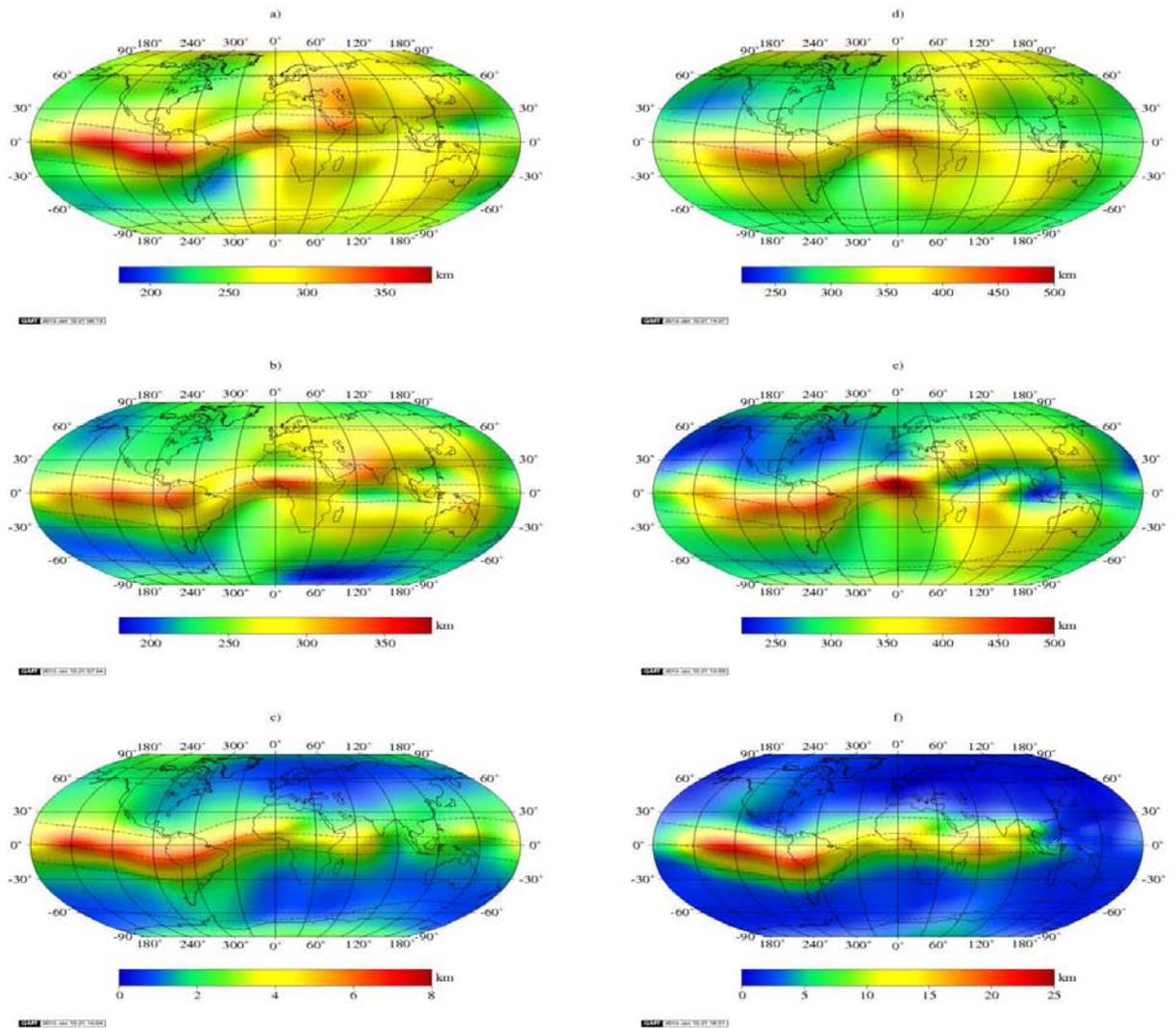
A modo de ejemplo, las figuras siguientes muestran algunos resultados obtenidos con la versión actual del LPIM; en todos los casos, los datos asimilados fueron densidades electrónicas derivadas por la misión FORMOSAT 3 / COSMIC durante el intervalo de 18 a 20 horas de tiempo universal, a lo largo de 30 días centrados en el equinoccio de septiembre del año 2007 o en solsticio diciembre del año 2011. Todas las figuras fueron tomadas de [Brunini et al., 2013a].



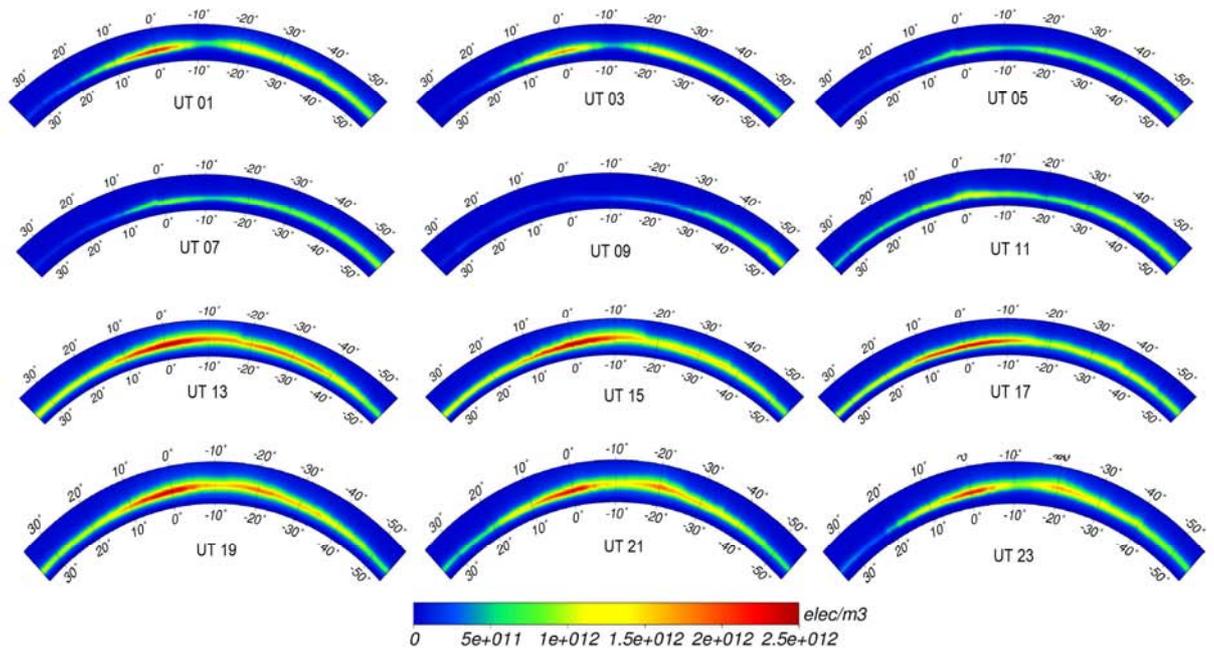
**Figura 1.19.** Representación global del RMS de las diferencias entre los datos asimilados y las densidades electrónicas calculadas por el LPIM; a) equinoccio de septiembre de 2007; b) solsticio diciembre de 2011.



**Figura 1.20.** Representación global del parámetro  $N_{m,3}$  (figuras superiores) y de su error estimado (figuras inferiores) calculados con el LPIM; a) y b) equinoccio de septiembre de 2007; c) y d) solsticio de diciembre de 2011.



**Figure 1.21.** Representación global de los valores medios mensuales del parámetro  $h_{m,3}$  para el equinoccio de septiembre de 2007 (figuras de la izquierda) y el solsticio de 2011 (figuras de la derecha); a) y d) valores calculados con la base de datos ITU-R; b) y e) valores calculados con el LPIM; c) y f) errores estimados de los mapas calculados con el LPIM.



**Figure 1.22.** Corte vertical de la anomalía ecuatorial a lo largo del meridiano 60°W durante el solsticio de 2011.

### 1.8 Conclusiones del capítulo

El objetivo de este capítulo fue presentar la evolución del LPIM desde el establecimiento de la primera versión operativa, a finales de los años 80, hasta la actualidad. Se ha podido ver como las sucesivas versiones permitieron analizar procesos ionosféricos de mayor complejidad, desde las primeras, que permitían estudiar la variabilidad espacio-temporal del  $\nu\text{TEC}$  sin discriminar a qué altura se producían las componentes principales de esa variabilidad, hasta las más recientes, que poseen la capacidad de describir la variabilidad de la densidad electrónica con la altura.

Pese a su evolución permanente, el LPIM carece aún de capacidades suficientes para predecir la respuesta que tendrá la ionosfera frente a cambios en las condiciones físicas fundamentales imperantes en el medio Sol-Tierra. Aún las versiones más recientes son modelos fenomenológicos cuyas predicciones dependen fundamentalmente de la asimilación de mediciones actuales y, de una manera muy secundaria, de algunos pocos parámetros del espacio Sol-Tierra (por ejemplo, el número de manchas solares, la distancia angular del Sol o la época del año).

Como se verá en los capítulos siguientes, esta tesis avanza hacia una nueva versión del LPIM, menos fenomenológica que las precedentes, basada enteramente en la solución de las ecuaciones físicas fundamentales que gobiernan al plasma ionosférico. Esta versión ofrece, por primera vez, la posibilidad de estudiar los cambios que se producirán en la ionosfera como consecuencia de cambios en las condiciones físicas fundamentales imperantes en el medio Sol-Tierra.

## Capítulo 2: Ionosfera

### 2.1 Introducción

La ionosfera consiste en la parte ionizada de la atmósfera superior. Esta definición implica que se trata de una mezcla de gases neutros y cargados eléctricamente que se encuentra limitada espacialmente por efectos térmicos y gravitacionales. Aunque solo está presente como un elemento minoritario, la componente que contiene cargas tiene consecuencias importantes. Por ejemplo, permite el flujo de corrientes eléctricas, lo que lleva a perturbaciones del campo magnético y efectos de calentamiento electrodinámico. También modifica la dinámica de la atmósfera superior al producir o frenar los vientos termosféricos. Finalmente modifica mediante reflexión o refracción, atenuación o rotación del plano de polarización las ondas electromagnéticas que lo atraviesan. Esto último afecta las comunicaciones satelitales que atraviesan la ionosfera, las comunicaciones que utilizan a la ionosfera como un espejo, el posicionamiento y la navegación satelital y a los satélites de órbitas baja (LEO) alterando su órbita debido a la fuerza de arrastre que ejerce el gas de plasma sobre estos. Lo expuesto anteriormente lleva a que el conocimiento del comportamiento y la estructura de la ionosfera sean de gran interés.

La ionosfera es un sistema dinámico en donde los parámetros del plasma ionosférico de la Tierra muestran una marcada variación con la altura, la latitud, longitud, el tiempo universal, las estaciones, el ciclo solar y la actividad magnética. Las variaciones no son solamente el resultado de los mecanismos de acoplamiento y retroalimentación que operan en el sistema ionosfera-atmósfera neutra, sino que se deben también al acoplamiento que presenta la ionosfera con otras regiones del sistema solar-terrestre, que incluyen al sol, el medio interplanetario, la magnetósfera. En la primera parte de este capítulo se describirán los sistemas que interactúan con la ionosfera.

Los diversos mecanismos externos, acoplados con procesos radiativos, químicos, dinámicos y electrodinámicos que operan en la ionosfera, actúan determinando la distribución global de los parámetros densidad, temperatura y drift del plasma. Por lo que en la segunda parte de este capítulo se realiza una descripción de la variación espacial y temporal de la ionosfera a partir de estos parámetros macroscópicos que describen el comportamiento de un plasma. Se concentra en los procesos que afectan la ionosfera a latitudes bajas y medias, donde el plasma esencialmente co-rota con la Tierra. Los temas cubiertos en este capítulo incluyen la generación de partículas cargadas a partir de absorción de radiación solar y otros procesos secundarios, la formación de las capas ionosféricas, los procesos de mantenimiento nocturnos, estructuras de gran escala ionosféricas, procesos de transporte de plasma, campos eléctricos de dínamo, y la estructura térmica del plasma. Las referencias bibliográficas principales utilizadas para este capítulo son los libros de Schunk [2000], de Pröls [2004] y de Kelley [Kelley, 2009]

## 2.2 Interacción Tierra-Viento solar: La magnetósfera

El campo magnético de la Tierra (CMT) actúa como un escudo contra el viento solar, deflectándolo alrededor de la Tierra y dejando una cavidad magnética con una estructura similar a la forma que presenta la cabeza y cola de un cometa. Del lado que mira al Sol la presión ejercida por el viento solar actúa comprimiendo el CMT, mientras que el viento solar forzado a fluir alrededor de la Tierra actúa deformando el campo magnético, llevándolo a tomar la forma de una elongada cola del lado de la Tierra oculto al Sol que se extiende unos cuantos radios terrestres. Cuando el viento solar supersónico se encuentra con el CMT se forma una onda de choque, que forma una región que se denomina *frente de choque*. La ubicación de este frente está determinado por el balance entre la presión dinámica del viento solar y la presión magnética del campo geomagnético comprimido. La superficie del frente de choque recubre a la Tierra, y su forma y orientación varía en función del campo magnético interplanetario y de la velocidad del viento solar. El frente de choque es inusual en el sentido que es un frente libre de colisiones, es el resultado de “colisiones” de partículas con campos eléctricos oscilatorios, a diferencia de lo que sucede con frentes de choque alrededor de naves supersónicas que son causados por colisiones entre partículas.

A medida que el viento solar atraviesa el frente de choque, es desacelerado, calentado, y deflectado alrededor de la Tierra en una región denominada *magnetovaina*. El espesor de la magnetovaina es aproximadamente de tres radios terrestres ( $R_T$ ) en el punto subsolar, pero se incrementa rápidamente a medida que se aleja del Sol. La capa que separa el plasma magnetizado del viento solar en la magnetovaina del plasma confinado por el CMT es llamada *magnetopausa*. Usualmente la magnetopausa es muy delgada (~100 km), y su ubicación está determinada por el balance entre la presión dinámica del viento solar en la magnetovaina y la presión magnética del CMT comprimido. A lo largo de la línea Tierra-Sol del lado diurno la posición radial de la magnetopausa es aproximadamente  $9 R_T$ . Una extensa corriente fluye a lo largo de la magnetopausa, que actúa separando el campo magnético del viento solar del campo geomagnético [Tsurutani et al., 2001]. Sobre el frente de la magnetopausa, el flujo de corriente es principalmente desde el amanecer hacia el anochecer, pero adquiere una creciente componente meridional (Norte-Sur) a medida que fluye alrededor de la Tierra.

La región donde domina el CMT se llama *magnetósfera* y ocupa todo el volumen encerrado por la magnetopausa, está poblado por un plasma térmico y partículas cargadas energéticas con orígenes tanto en el viento solar como terrestres. Aunque la mayor parte del viento solar es deflectado alrededor de la Tierra dentro de la magnetovaina, parte puede atravesar la magnetopausa y entrar en la magnetósfera. La entrada directa del plasma del viento solar ocurre del lado diurno en los alrededores de los casquetes polares. A alturas bajas (~300 km), esta banda ocupa una banda latitudinalmente angosta, pero extensa en longitud. Dentro de esta banda, las partículas del viento solar viajan a lo largo de las líneas de campo y depositan su energía en la atmósfera superior. Las partículas del viento solar también ingresan dentro de la cola de la magnetósfera por mecanismos que aun no han sido completamente explicados. Estas partículas junto con plasma que ha escapado de la atmósfera superior de la Tierra y viajando hacia la cola, pueblan una región conocida

como la *lámina de plasma*. Las partículas en la lámina de plasma ingresan a la atmósfera de la Tierra sobre el lado nocturno viajando a lo largo de específicas líneas de campo. Para alturas bajas las líneas convergen a una región espacial que es angosta en latitud pero extensa en longitud, que juntándose con la franja del lado diurno forma la región auroral. La región auroral existe en la región polar norte y en la sur. A medida que las partículas ingresan a la atmósfera a lo largo de las líneas, se aceleran y luego colisionan en la atmósfera alta, lo que produce las auroras.

Existe también un flujo de corriente de gran escala a través de la lámina de plasma desde el amanecer hacia el atardecer, que es llamada *corriente de lámina neutra*. Esta corriente actúa separando dos regiones con campo magnéticos con direcciones opuestas que se encuentran en la cola de la magnetósfera; el campo magnético apunta hacia la tierra por encima de la corriente neutra (hemisferio norte) y alejándose de la Tierra hacia abajo (hemisferio sur). Aunque las líneas de campo se extiendan de forma profunda en la cola de la magnetósfera, cerca de la magnetopausa se conectan con el campo magnético incrustado en el viento solar. Este fenómeno se conoce como reconexión magnética y genera diferencias de potencial sobre la cola de la magnetósfera tan grandes como 100.000 V, corrientes eléctricas mayores a  $10^7$  A, y más de  $10^{12}$  W de potencia. La diferencia de potencial se mapea hacia el casquete polar, que es la región al norte de la región auroral. El campo eléctrico que se genera apunta desde el amanecer hacia el anochecer atravesando el casquete polar y tiene un efecto importante sobre la atmósfera alta terrestre.

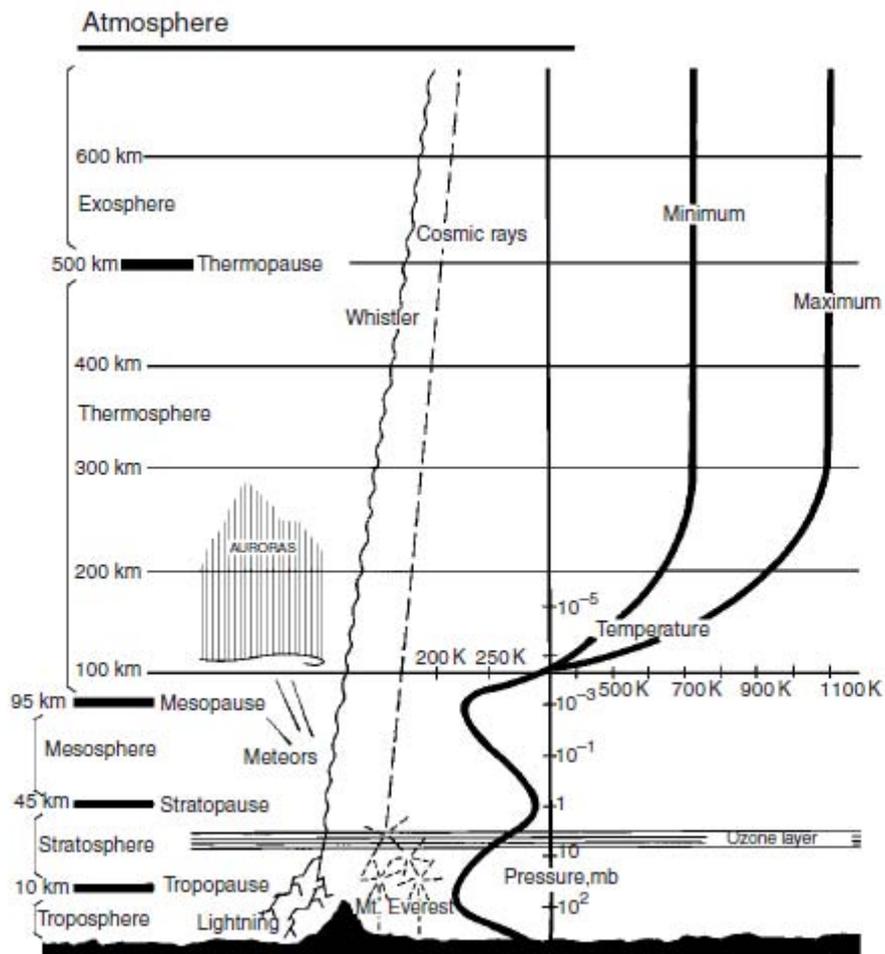
Las partículas energéticas cerca del centro de la lámina de plasma son arrastradas acercándose a la Tierra por acción de los campos eléctricos magnetosféricos para luego ser atrapadas por las líneas de campo geomagnético cerradas, formando los *anillos de radiación de Van Allen* [Van Allen, 1969]. Las partículas atrapadas se mueven a lo largo de las líneas de campo realizando un movimiento helicoidal, rebotando entre 2 puntos, llamados puntos espejo, ubicados uno en el hemisferio norte y otro en el sur. Los electrones y protones energéticos atrapados también presentan un drift en la dirección azimutal alrededor de la Tierra debido a los gradientes en el CMT, con los electrones y los protones moviéndose en direcciones opuestas. El resultado de este movimiento genera una corriente que rodea a la Tierra, llamada *corriente anillo*. Un aspecto importante de los anillos de radiación y de la corriente anillo es que impiden que los campos eléctricos de dínamo generados a altas latitudes penetren a latitudes media y bajas, excepto por periodos particulares y cortos de tiempo.

Cercana a la Tierra se encuentra la *plasmaesfera*, que es un volumen con forma de toroide que rodea a la Tierra y contiene plasma relativamente frío ( $\sim 5000$  K) y de alta densidad ( $\sim 10^2$  cm<sup>-3</sup>) que tiene su origen en la ionosfera. El plasma en esta región co-rota con la Tierra, pero también puede moverse de un hemisferio a otro a lo largo de las líneas de campo. En el plano ecuatorial, la plasmaesfera tiene una extensión radial de entre aproximadamente 4 y 8 RT dependiendo de la actividad magnética, y su frontera externa, llamada la *plasmapausa* esta marcada por una abrupta caída en la densidad del plasma. La plasmapausa es el límite entre el plasma que co-rota con la Tierra y el plasma que esta influenciado por los campos eléctricos magnetosféricos.

### 2.3 *Atmósfera neutra*

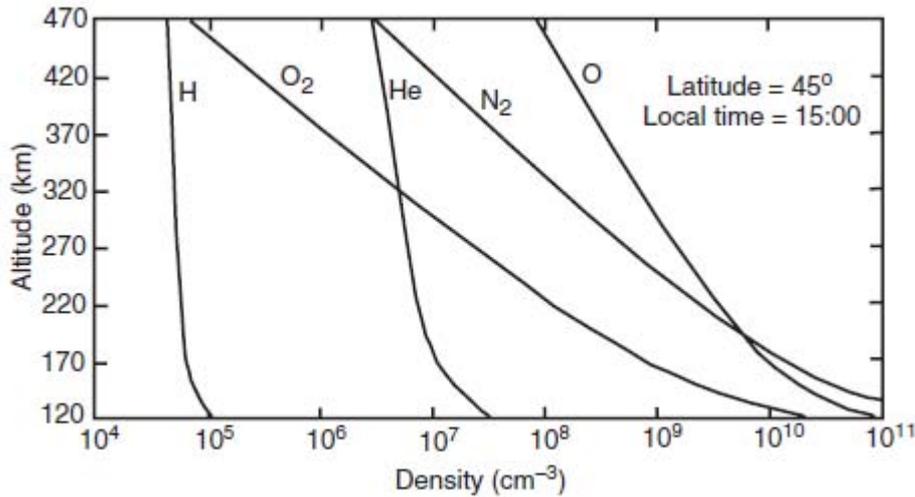
La atmósfera terrestre es la fuente principal de plasma cercana a la Tierra. Ocupa una capa esférica relativamente delgada que se extiende desde la superficie terrestre hasta una altura que supera los 1000 km. Por debajo de los 100 km de altura la atmósfera está bien mezclada y la composición relativa de los componentes principales ( $N_2$  y  $O_2$ ) es esencialmente constante, verificándose que la densidad decrece rápidamente con la altura. En contraste, la temperatura en la atmósfera inferior presenta fuertes variaciones con la altura produciendo capas estratificadas, como se muestra en la Fig. (2.1). La capa mas cercana a la superficie es la *troposfera*, que se extiende hasta aproximadamente los 10 km de altura y es la región asociada con la meteorología atmosférica. En esta región la temperatura decrece con la altura hasta un valor mínimo, que define su límite superior (*tropopausa*). Por encima de la tropopausa se encuentra la *estratosfera*, que se extiende desde los 10 km hasta los 45 km y es la región que contiene la capa del ozono. En la estratosfera la temperatura atmosférica se incrementa con la altura hasta un máximo local, que define su límite superior (la *estratopausa*). La capa siguiente, que se extiende desde los 45 hasta los 95 km, se llama *mesósfera* y se observa que la temperatura decrece nuevamente hasta un mínimo local en su límite superior (la *mesopausa*). La mesopausa corresponde a la región más fría de la atmósfera, en donde la temperatura puede llegar a tomar valores de 180 K. Cerca de la mesopausa se encuentra la región donde típicamente puede verse a los meteoros atravesando al cielo.

La *termósfera* es la región de la atmósfera superior que se extiende desde los 95 hasta los 500 km de altura. En esta región, la temperatura atmosférica primero se incrementa con la altura hasta alcanzar un valor máximo general (~1000 K) y luego se vuelve constante con la altura. La fotodisociación de las moléculas dominantes de  $N_2$  y  $O_2$  juega un rol importante en la producción de átomos de O y N. Además, los procesos de difusión son lo suficientemente grandes para que ocurra la separación gravitacional de las diferentes especies neutras. El efecto neto de estos procesos se muestra en la Fig. (2.2), donde los perfiles de densidad de las especies neutras se muestran en función de la altura para el día. Los elementos moleculares dominan a bajas alturas y los elementos atómicos dominan a altas alturas. Notar que la densidad decrece exponencialmente con la altura a tasas que están determinadas por la masa intrínseca de las especies neutras. Aproximadamente a los 500 km de altura, las densidades son lo suficientemente bajas para que las colisiones se vuelvan despreciables, por lo que la atmósfera superior ya no puede caracterizarse como un fluido. Esta transición con la altura es llamada exobase y la región por encima se denomina *exosfera*, donde los elementos neutros se comportan como partículas individuales.



**Figura 2.1** – Diagrama esquemático de la atmósfera de la Tierra mostrando los diferentes dominios. Las curvas negras muestran los perfiles de temperatura atmosférica para condiciones de máxima y mínima actividad solar, adaptado del Schunk [2000].

La dinámica de la atmósfera superior durante periodos de actividad geomagnética baja está principalmente controlada por el calentamiento solar sobre la cara iluminada de la Tierra. Los vientos termosféricos tienden a viajar horizontalmente a través de la Tierra de la región subsolar calentada hacia la región mas fría del lado nocturno. A medida que se generan los vientos, la fuerza de Coriolis asociada con la rotación de la Tierra actúa desviando los vientos. Además a altas altitudes el calentamiento debido a campos eléctricos magnetosféricos y a la precipitación de partículas cargadas actúa acelerando o desacelerando el flujo predominantemente antisolar. Típicamente, las velocidades de los vientos horizontales en la atmósfera superior varían entre los 100 y 300 m/s para condiciones magnéticas calmas, pero pueden alcanzar los 900 m/s sobre los casquetes polares durante condiciones magnéticas activas cuando los campos eléctricos magnetosféricos son grandes y la precipitación auroral es intensa. También, durante tiempos activos, el movimiento ascendente debido a procesos de calentamiento magnetosféricos impide la separación gravitacional de las especies neutras. Estos cambios en la circulación termosférica y en la densidad tienen un efecto significativo sobre las partículas cargadas inmersas en el gas neutro.



**Figura 2.2** – Perfil de las densidades de las especies neutras en función de la altura para la termosfera diurna a latitudes medias [Hedin et. al., 1977] adaptado del Schunk [2000].

## 2.4 Vientos termosféricos

Los vientos termosféricos juegan un rol importante en la distribución de plasma en la atmósfera superior; junto con la ionosfera conforman un sistema dinámico que responde a una variedad de fuerzas. El movimiento de aire neutro es clave para entender el sistema termosfera-ionosfera. Algunos aspectos importantes de la estructura ionosférica que dependen directamente de los vientos neutros y el transporte de plasma son el mantenimiento de la ionosfera en horarios nocturnos, la dispersión ecuatorial de la capa *F* y los efectos de las tormentas magnéticas. Los vientos en la termosfera son controlados principalmente por gradientes de presión resultantes de la variación de temperatura. El movimiento de los vientos también es manejado por: el efecto de la fuerza de Coriolis, la transferencia de momento debido a colisiones entre iones y partículas neutras y a fuerzas viscosas.

La absorción de radiación UV es la fuente de calentamiento dominante de la termosfera. Las desigualdades en el calentamiento entre el día y la noche, el verano y el invierno forman gradientes de presión que fuerzan a la atmósfera a moverse horizontalmente de regiones calientes a regiones más frías. Fuentes secundarias de calor surgen de colisiones entre constituyentes de la atmósfera y partículas energéticas precipitantes aurorales y de la fricción resultante de la interacción del gas neutro con flujos iónicos magnetosféricos en altas latitudes. También es importante la energía disponible en la baja atmósfera en la forma de ondas planetarias, ondas de marea y ondas de gravedad, especialmente en la termosfera baja. En altas latitudes, la convección de plasma a gran escala acelera los vientos neutros. En latitudes medias y bajas la fuerza de arrastre o fricción producida por los iones actúa retardando los vientos en la región *F*. Los sistemas de vientos de las capas *E* y *F* son muy diferentes entre sí, los vientos de la capa *F* se generan más rápidamente y tienen una menor estructura vertical que los de la capa *E* debido a la mayor viscosidad molecular. Los vientos a diferentes alturas forman cuplas a través del arrastre friccional,  $\mu/\rho$ , donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad y  $\rho$  la densidad media del gas. Como la densidad decrece exponencialmente con la altura y la viscosidad es prácticamente constante, el

arrastré friccional se incrementa de tal forma que a altitudes por encima de los 250 km la velocidad del viento horizontal es independiente de la altura.

Los campos eléctricos de dínamo de la capa *E* son generados por vientos asociados con ondas de marea que surgen de la absorción de radiación solar UV en la capa de ozono y en el vapor de agua atmosférico, como también del campo de gravitación lunar. El Sol actúa calentando la capa de ozono, mientras que la Luna actúa a través de su campo gravitatorio. La entrada de calor tiene un período de un día solar, y una fuerte componente armónica con un periodo igual a medio día. La distribución de la atmósfera es tal que sobre la mayoría de la Tierra responde a esta componente armónica con movimientos horizontales de aire (vientos) con un período de 12 horas, que son llamados mareas solares semi-diurnas. También se genera una marea lunar que como en el caso de las mareas de los océanos tiene un periodo de medio día lunar. En la atmósfera, a diferencia que en los océanos, el origen termal de la marea solar causa que la marea solar sea mayor que la luna. El movimiento de una capa conductora (la ionosfera) generado por estas ondas de marea a través de un campo magnético permanente da origen a las corrientes y campos eléctricos de dínamo de la capa *E*.

A diferencia del caso anterior el viento termosférico responsable del campo eléctrico de dínamo de la capa *F* resulta de las mareas solares térmicas que surgen de la absorción de radiación solar EUV a altitudes de la termosfera. Pueden detallarse algunas características de los vientos a latitudes ecuatoriales. En orden cero, hay un flujo hacia el este del lado diurno hacia el lado nocturno que es controlado principalmente por el calentamiento de la atmósfera debido a la absorción de radiación solar EUV. Los vientos diurnos meridionales (norte-sur) apuntan al norte y los vientos nocturnos apuntan hacia el ecuador. Los vientos zonales (este-oeste) apuntan hacia el oeste antes del mediodía local y hacia el este en la tarde. Los vientos zonales a unos 250 km de altura se tornan al este alrededor de las 17-18 hora local durante diciembre y los meses equinocciales, mientras que en junio la inversión hacia el este es retardada. A alturas menores de 114 km los vientos zonales son principalmente hacia el oeste durante la última mitad del día. Esto puede causar un movimiento hacia abajo de iones por la fuerza  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , contribuyendo a la convergencia vertical de iones por un viento zonal de corte. Tal convergencia vertical de iones podría llevar al desarrollo de la capa esporádica *E* a este tiempo. Los vientos meridionales muestran amplitudes significativas sobre regiones ecuatoriales durante diciembre y junio, con amplitudes pequeñas durante los meses equinocciales.

## **2.5 Campo Magnético Terrestre**

El efecto que tienen los diversos procesos externos sobre la ionosfera, culminan en gran parte en procesos de transporte de plasma, que son afectados por el campo magnético intrínseco de la Tierra. La aproximación más común para el campo magnético de la Tierra es la de un dipolo magnético. La versión más simple es la del dipolo axial centrado, en la cual el eje dipolar y el rotacional de la Tierra coinciden. La siguiente aproximación es la del dipolo inclinado, en donde el eje del dipolo forma un ángulo de aproximadamente  $11^\circ$  con el eje de rotación, intersectando a la superficie terrestre en los puntos de coordenadas geográficas  $78,5^\circ$  N,  $291^\circ$  E y  $78,5^\circ$  S,  $111^\circ$  E.

Finalmente una mejor aproximación se tiene con el dipolo excéntrico, en la cual el eje dipolar está desplazado unos 500 km en la dirección NE [Fraser-Smith, 1987].

La representación más precisa del campo magnético de la Tierra es la que se obtiene cuando el potencial escalar magnético es expandido en una serie de armónicos esféricos de la forma

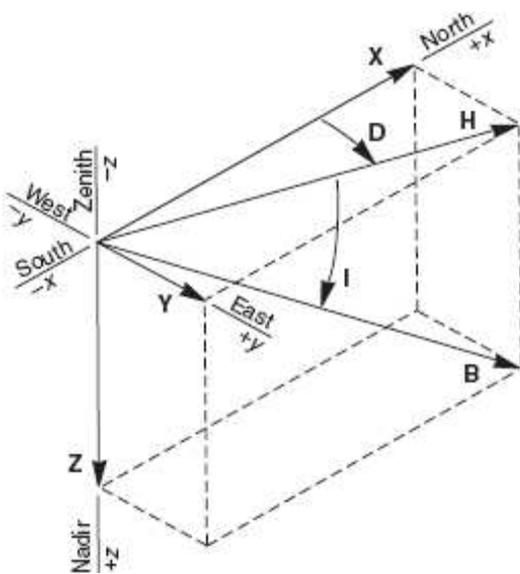
$$\Phi_m(r_g, \theta_g, \phi_g) = R_T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^{n+1} (g_n^m \cos m\phi_g + h_n^m \sin m\phi_g) P_n^m(\cos \theta_g), \quad (2.1)$$

donde  $(r_g, \theta_g, \phi_g)$  son las coordenadas geográficas, y  $r_g$  aumenta en la dirección radial hacia afuera,  $\theta_g$  es la colatitud medida desde el polo norte geográfico, y  $\phi_g$  es la longitud positiva hacia el este. En la Ec. (2.1),  $P_n^m(\cos \theta_g)$  son los polinomios asociados de Legendre de grado  $n$  y orden  $m$ , y  $g_n^m$  y  $h_n^m$  son los coeficientes de la serie. Estos coeficientes se obtienen al ajustar el potencial magnético (2.1) a una distribución global de mediciones de magnetómetros en tierra y sobre satélites. El procedimiento de ajuste se realiza utilizando mediciones a diversos tiempos ya que el cambio temporal en el campo magnético intrínseco presenta variaciones de largo tiempo (variaciones seculares). El resultado de este trabajo es el International Geomagnetic Reference Field (IGRF), [Maus et.al., 2005; IAGA, 2010]. El termino dado por  $n = 1$  y  $m = 0$  da la aproximación del dipolo axial centrado

$$\Phi_m(r_g, \theta_g, \phi_g) = R_T \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^2 g_1^0 \cos \theta_g, \quad (2.2)$$

y la aproximación del dipolo inclinado esta dado por los 3 primeros términos de la serie ( $n = 1, m = 0, 1$ )

$$\Phi_m(r_g, \theta_g, \phi_g) = R_T \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^2 \left[ g_1^0 \cos \theta_g + (g_1^1 \cos \phi_g + h_1^1 \sin \phi_g) \sin \theta_g \right]. \quad (2.3)$$



**Figura 2.3** – Componentes y ángulos asociados con la representación del campo magnético de la Tierra. Figura extraída del Schunk [2000].

Los ángulos y componentes vectoriales que comúnmente se usan para representar el campo geomagnético se muestran en la Fig. (2.3). Las relaciones entre estas componentes están dadas por

$$H = (X^2 + Y^2)^{1/2}$$

$$F = (H^2 + Z^2)^{1/2}$$

$$X = H \cos D$$

$$Y = H \sin D$$

$$D = \tan^{-1}(Y / X)$$

$$I = \tan^{-1}(Z / H)$$

donde  $F$  es la intensidad total del campo geomagnético,  $H$  es la magnitud de la componente horizontal, y  $(X, Y, Z)$  son las componentes cartesianas de  $\mathbf{B}$  en las direcciones Norte, Este y vertical, respectivamente. El ángulo  $D$  es la declinación, que mide la deflexión entre el campo geomagnético y el polo geográfico. El ángulo  $I$  es la inclinación del campo magnético respecto de la horizontal. La magnitud del campo geomagnético sobre la superficie de la Tierra no es uniforme (Fig. 2.4). En general se observan valores bajos en regiones ecuatoriales y más altos en regiones polares, pero hay una región distintiva donde alcanza sus valores mínimos, que es la región conocida como Anomalía del Atlántico Sur. De la misma manera, los ángulos de declinación e inclinación no son uniformes sobre la superficie de la Tierra como se muestra en la Figura 1. Como es esperable la declinación toma los valores más grandes en las regiones cercanas a los polos magnéticos donde las líneas de campo son perpendiculares a la superficie.

A alturas ionosféricas, el campo magnético interno puede aproximarse razonablemente por un dipolo magnético inclinado (Fig. 2.5). Si  $M_E$  es el momento dipolar magnético en el centro de la Tierra ( $M_E \approx 7,9 \times 10^{15} \text{ T m}^3$ ) y se toma un sistema coordenado esférico  $(r, \theta, \phi)$  con el eje polar paralelo al eje dipolar (Fig. 2.6) el potencial magnético escalar esta dado por

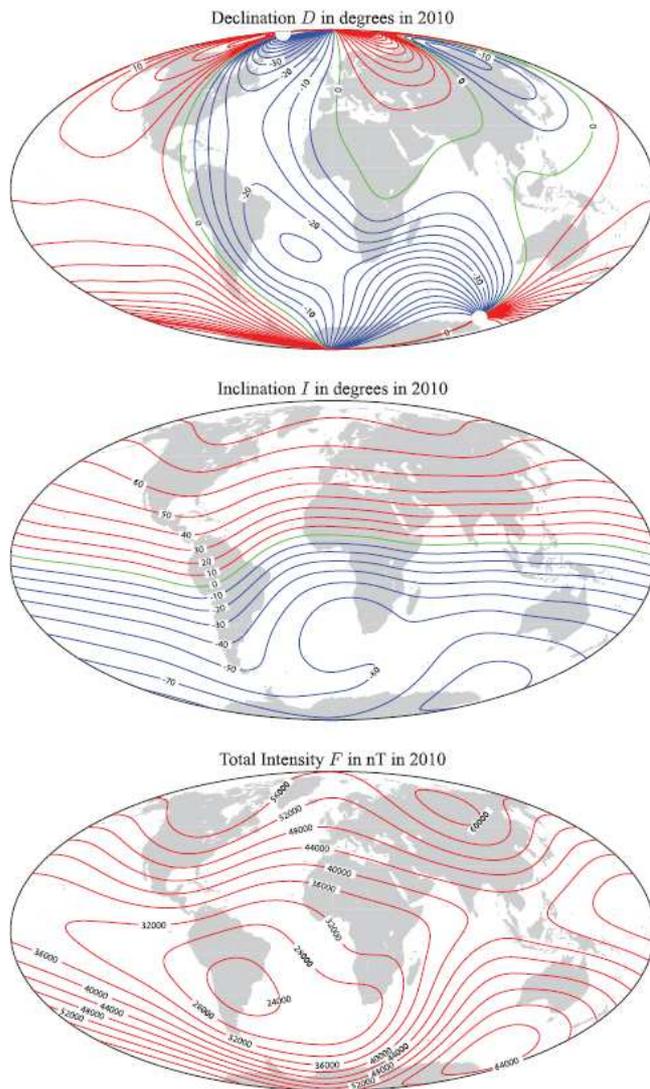
$$\Phi_m(r, \theta, \phi) = \frac{M_E \cos \theta}{r^2}. \quad (2.4)$$

El sistema coordenado esférico  $(r, \theta, \phi)$  se conoce como geomagnético. El campo magnético ( $\mathbf{B}$ ) se obtiene tomando el gradiente del potencial, de manera que se escribe como

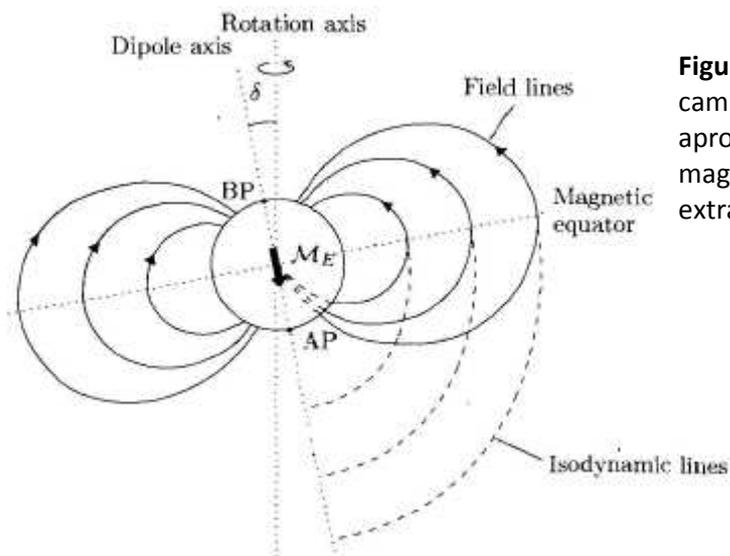
$$\mathbf{B} = -\nabla \Phi_m = \frac{2M_E \cos \theta}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{M_E \sin \theta}{r^3} \mathbf{e}_\theta, \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{e}_r$  y  $\mathbf{e}_\theta$  son vectores unitarios en las direcciones radial y polar respectivamente. La magnitud de este campo magnético dipolar puede expresarse a través de

$$B = \frac{M_E}{r^3} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}. \quad (2.6)$$



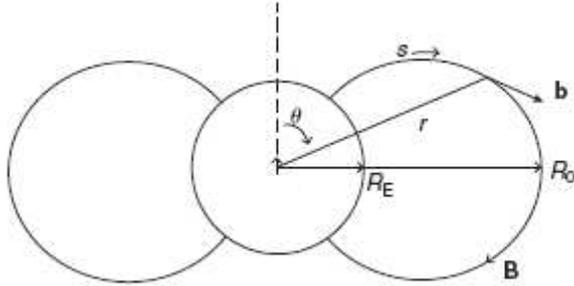
**Figura 2.4** – Mapas de declinación magnética  $D$  (arriba, unidades en grados), inclinación magnética  $I$  (medio, unidades en grados), e intensidad total del campo geomagnético  $F$  (abajo, unidades en nT) sobre la superficie de la Tierra para el año 2010 calculados usando el modelo IGRF 2010.0. Se utiliza la proyección de Mollweide, la línea cero esta en verde, la líneas de contorno positivas están en rojo y las negativas en azul [IAGA, 2010].



**Figura 2.5** – Representación del campo magnético de la Tierra aproximado por un dipolo magnético inclinado. Figura extraída del Pröls [2004].

Usualmente es conveniente expresar  $M_E$  en función de  $B_E$ , el campo magnético evaluado sobre la superficie de la Tierra ( $r = R_E$ ) en el ecuador ( $\theta = 90^\circ$ ) por lo que a través de la Ec. (2.6) se tiene  $M_E = B_E R_E^3$ . También es útil introducir el vector unitario a lo largo de  $\mathbf{B}$ , que está dado por

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}. \quad (2.7)$$



**Figura 2.6** – Geometría y parámetros asociados con una línea de campo magnético dipolar. Figura extraída del Schunk [2000].

La ecuación para las líneas de campo magnético dipolar puede obtenerse a partir de la expresión

$$\frac{r d\theta}{dr} = \frac{B_\theta}{B_r} = \frac{\tan\theta}{2}, \quad (2.8)$$

que relaciona un diferencial de longitud de arco en el sistema coordenado esférico con las componentes del campo geomagnético. La solución de la ecuación anterior es

$$r = R_0 \sin^2 \theta, \quad (2.9)$$

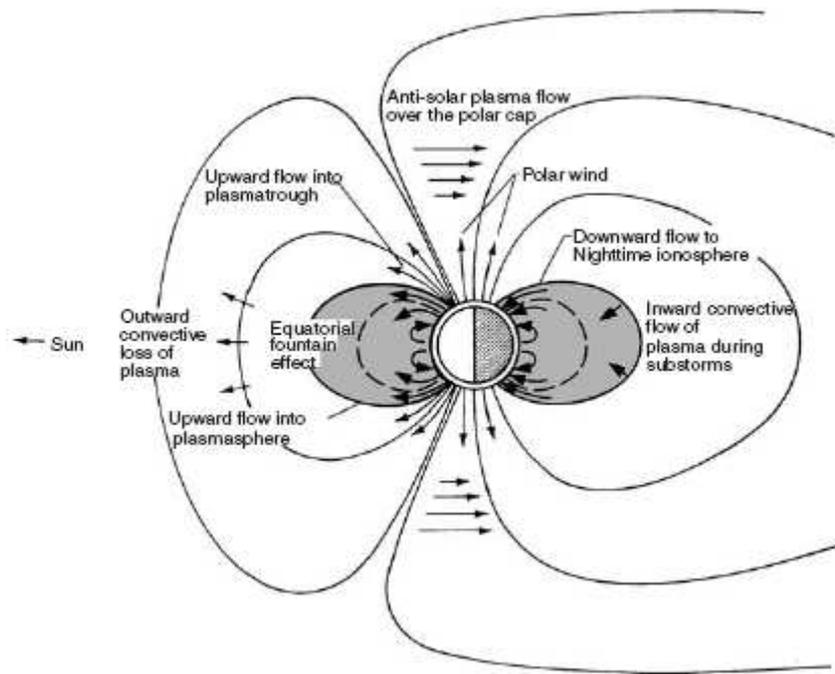
donde  $R_0$  es la distancia radial a la cual la línea de campo dipolar atraviesa el ecuador ( $\theta = 90^\circ$ ).

## 2.6 La Ionosfera

La *ionosfera* es la parte ionizada de la atmósfera superior. Se extiende desde aproximadamente desde los 60 hasta los 1000 Km. La principal fuente de plasma para la ionosfera es la fotoionización de moléculas neutras a través de la radiación solar EUV y de rayos X, aunque otros procesos de producción pueden dominar en ciertas regiones particulares. Los iones producidos experimentan reacciones químicas con los neutros, se recombinan con los electrones, se difunden hacia alturas mayores o menores, o son transportados por la acción de los vientos neutros. Estos procesos no ocurren de forma libre sino que están fuertemente influenciados por el campo magnético de La Tierra, que se comporta, como se vió en la sección 2.5, de manera dipolar a alturas ionosféricas (Fig. 2.7).

A latitudes altas, las líneas del campo geomagnético se extienden alejándose de la superficie. A lo largo de estas líneas de campo denominadas abiertas, los iones y electrones son capaces de escapar de la ionosfera en un proceso que se conoce como *viento polar*. Esta pérdida de plasma puede tener un efecto apreciable sobre la estructura de la densidad y de la temperatura. Además, el campo eléctrico de dínamo que es generado a través de la interacción entre el viento solar y la magnetósfera es

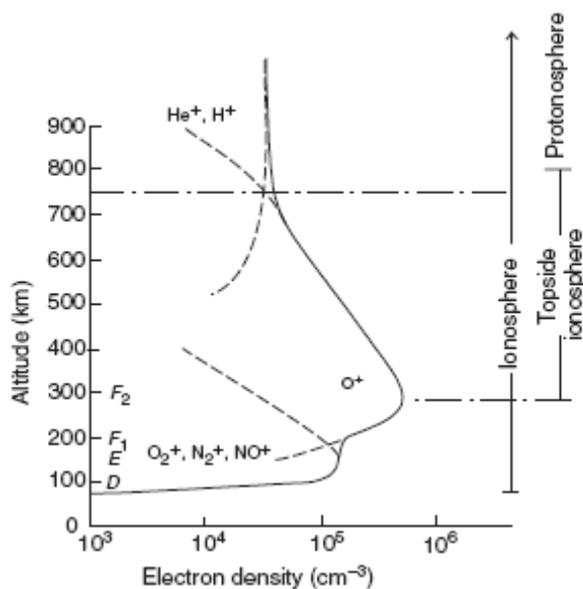
llevado a alturas ionosféricas y típicamente genera un patrón de flujo de plasma en la dirección opuesta al sol sobre el casquete polar y un flujo de retorno en la dirección ecuatorial sobre la región auroral. Este flujo horizontal es continuo y puede alcanzar velocidades de 4 km/s. Como resultado, el plasma de altas latitudes está sujeto a una amplia variedad de condiciones a medida que viaja a diferentes regiones, que incluyen el hemisferio iluminado por el Sol, la región auroral diurna, el casquete polar, la región auroral nocturna, y la región subauroral no iluminada. En la región auroral, el calentamiento y la ionización del plasma son producidos por la precipitación de electrones energéticos.



**Figura 2.7** – Diagrama esquemático que muestra el campo magnético de la Tierra y los regímenes de flujo de plasma en la ionosfera [Burch, 1977] adaptado del Schunk [2000].

A latitudes medias, el plasma ionosférico no es afectado en forma apreciable por los campos eléctricos magnetosféricos y tiende a co-rotar con la Tierra y fluye fácilmente a lo largo de las líneas de campo magnético. Una consecuencia de esto es que el plasma puede escapar de la parte superior de la ionosfera en un hemisferio, viajar a lo largo de las líneas de campo, para luego entrar en la ionosfera conjugada. Este flujo es la fuente de plasma de la plasmaesfera. Otra consecuencia de este movimiento de plasma a lo largo de las líneas de campo es que los vientos neutros son efectivos en transportar plasma a altas o bajas alturas. Del lado diurno, hay una componente del viento neutro que sopla desde el punto subsolar hacia los polos y conduce hacia abajo la ionización a lo largo de las líneas de campo. Del lado nocturno este viento meridional (norte-sur) sopla desde los polos hacia el ecuador y la ionización es llevada hacia arriba a lo largo de las líneas de campo. Estos procesos tienen un efecto importante sobre la densidad y la temperatura del plasma a latitudes medias.

A latitudes bajas, las líneas del campo geomagnético son prácticamente horizontales, lo que produce algunos efectos de transporte únicos. Primero, los vientos neutros meridionales pueden de manera muy efectiva inducir un flujo de plasma inter-hemisférico a lo largo de estas líneas de campo horizontales. Durante los solsticios, el viento del lado diurno sopla atravesando el ecuador desde el hemisferio de verano hacia el hemisferio de invierno. A medida que el plasma se eleva sobre el lado de verano del ecuador, se expande y se enfría, mientras que sobre el lado de invierno se comprime y se calienta a medida que desciende. Otro efecto interesante de transporte a latitudes bajas es el llamado *efecto fuente*. Durante el día en la ionosfera ecuatorial campos eléctricos con dirección Este asociados con corrientes ionosféricas inducidas por vientos neutros generan un movimiento ascendente de plasma. El plasma levantado de esta manera luego se difunde hacia abajo a lo largo de las líneas decampo magnético y alejándose del ecuador debido a la acción de la gravedad. La combinación del drift electromagnético y de la difusión produce un movimiento del plasma con un patrón de tipo fuente, y este movimiento actúa produciendo un aumento de la densidad de plasma a ambos lados del ecuador magnético, que se conocen como *Anomalía de Appleton* [Appleton, 1940].



**Figura 2.8** – Perfiles representativos de la densidad de iones para la ionosfera diurna a latitudes medias mostrando su estructura estratificada (capas D, E, F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>) [Banks et. al., 1976]. Figura extraída del Schunk [2000].

Aunque diferentes procesos físicos dominan en las distintas regiones latitudinales, la variación de la densidad de electrones con la altura muestra la misma estructura a todas las latitudes. Específicamente, el perfil de densidad de electrones exhibe una estructura de capas, con regiones distintivas D, E, F<sub>1</sub> y F<sub>2</sub> (Fig. 2.8). En las regiones D y E, los procesos químicos son los más importantes, dominan los iones moleculares, y las especies neutras más abundantes son N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, y O. Además, en la región D (60-100 km) hay iones positivos y negativos, nubes de iones de agua y reacciones químicas entre 3 cuerpos. Las nubes de iones dominan en la región D a alturas por debajo de los 85 km y

su formación ocurre a través de la hidratación de los iones  $NO^+$  y  $O_2^+$ . En la región E (100-150 km) las reacciones químicas básicas son menos complicadas que en la región D y los iones principales son el  $NO^+$ ,  $O_2^+$  y  $N_2^+$ . La densidad total de iones es del orden de  $10^5 \text{ cm}^{-3}$ . Por esta razón el plasma de la región E es un plasma débilmente ionizado y las colisiones entre las partículas no son importantes.

En la región  $F_1$  (150-250 km), los procesos de intercambio y transporte comienzan a tomar importancia y en la región  $F_2$  ocurre el máximo de ionización como resultado del balance entre los procesos de transporte y de pérdida. Las especies atómicas dominantes son el  $O^+$  y el  $O$ . El pico de densidad de iones en la región  $F_2$  ( $10^6 \text{ cm}^{-3}$ ) es aproximadamente 10 veces más grande que en la región E, mientras que la densidad de los neutros ( $10^8 \text{ cm}^{-3}$ ) es todavía dos órdenes de magnitud más grande que la densidad de los iones. El plasma en esta región está parcialmente ionizado, y las colisiones entre las diferentes partículas cargadas y las colisiones entre las partículas cargadas y los neutros deben ser tenidas en cuenta. La región tope de la ionosfera se define como la región que se encuentra por encima del pico de la región F, mientras que la protonoesfera es la región donde los iones atómicos más livianos ( $H^+$  y  $He^+$ ) dominan. Aunque los neutros aun superan a los iones en la protonoesfera, el plasma está efectivamente totalmente ionizado y solo las colisiones entre partículas cargadas deben ser tenidas en cuenta. Tanto en la región tope y en la protonoesfera dominan los procesos de transporte.

## 2.7 Absorción de la radiación solar

La radiación solar EUV y la precipitación de partículas son las dos principales fuentes de la energía que ingresa a la termósfera y a la ionosfera de la Tierra. Los fotones con longitudes de onda relativamente grande ( $> 900 \text{ \AA}$ ) generalmente causan disociación, mientras que longitudes de onda más cortas causan ionización. La distribución exacta de estos dos diferentes procesos dependerá de las secciones transversales relevantes y de las especies atmosféricas.

Para entender los principios básicos de la transferencia de energía entre la radiación solar y la termósfera es conveniente primero simplificar el problema haciendo las siguientes hipótesis: a) la radiación solar incidente es monocromática, b) la atmósfera consiste en una sola especie absorbente cuya densidad decrece exponencialmente con la altura con una altura de escala constante  $H$  y c) la atmósfera es plana y está estratificada horizontalmente. Sean ahora  $\sigma^0$  la sección transversal de absorción,  $I(s_\lambda)$  la intensidad del flujo de fotones solar [fotones/m<sup>2</sup> seg], y  $n(z)$  la densidad de la especie neutra, donde  $s_\lambda$  es la distancia recorrida a lo largo del camino de los fotones y  $z$  es la altura. A medida que la radiación penetra en la atmósfera es atenuada por la absorción. La disminución en la intensidad de radiación a medida que recorre una distancia  $ds_\lambda$  está dada por

$$dI(s_\lambda) = -I(s_\lambda)n(z)\sigma^0 ds_\lambda, \quad (2.10)$$

con la hipótesis de una atmósfera estratificada horizontalmente

$$dI(s_\lambda) = -dz \sec \chi, \quad (2.11)$$

donde  $\chi$  es la distancia cenital solar que se mide a partir de la vertical. Reemplazando, integrando desde  $z$  hasta  $\infty$  y llamando  $I_\infty$  a la intensidad del flujo de fotones solar sin atenuar en el tope de la atmósfera, se llega a

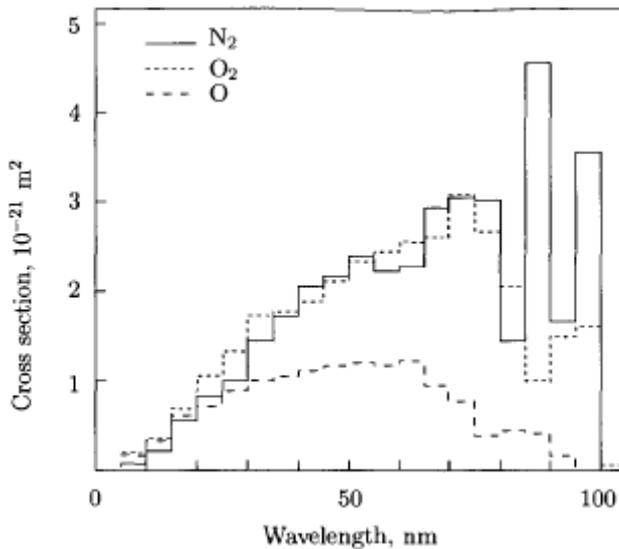
$$I(z) = I_\infty \exp \left[ - \int_z^\infty n(z) \sigma^a \sec \chi dz \right]. \quad (2.12)$$

Dado que bajo las suposiciones anteriores  $\chi$  y  $\sigma^a$  no varían con la altura y la densidad decrece en forma exponencial con la altura

$$n(z) = n(z_0) e^{-(z-z_0)/H} \quad (2.13)$$

siendo  $z_0$  una altura arbitraria de referencia. Luego la intensidad del flujo de fotones solar a una altura cualquiera puede escribirse como

$$I(z, \chi) = I_\infty \exp \left[ -H n(z) \sigma^a \sec \chi \right] \quad (2.14)$$



**Figura 2.9** – Secciones transversales de absorción para el nitrógeno molecular, el oxígeno molecular y el oxígeno atómico en el rango de radiación ultravioleta extrema. La ionización domina la absorción de la radiación solar en este rango de longitudes de onda [Torr et. al. 1979]. Figura extraída del Pröls [2004].

En realidad tanto la radiación como la sección transversal de absorción varían en función de la longitud de onda (Fig. 2.9). Por otro lado, la atmósfera esta compuesta por numerosas especies que presentan una variación diferente con la altura y finalmente no son planas. Tomando esto en consideración la Ec. (2.10) se modifica a una forma más general

$$dI(z, \lambda, \chi) = - \sum_s n_s(z) \sigma_s^a(\lambda) I(z, \lambda) ds_\lambda, \quad (2.15)$$

donde  $I(z, \chi)$  es la intensidad del flujo de fotones solar a una dada longitud de onda  $\lambda$ ;  $n_s(z)$  es la densidad de las especies neutra  $s$ ;  $\sigma_s^a(\lambda)$  es la sección transversal de absorción para la especie  $s$  dependiente de  $\lambda$ ; y  $ds_\lambda$  es el incremento de longitud de camino en la dirección del flujo. La integración de la Ec. (2.15) da la expresión para el flujo solar en función de la altura y de la longitud de onda

$$I(z, \lambda, \chi) = I_{\infty}(\lambda) \exp \left[ - \int_{\infty}^z \sum_s n_s(z) \sigma_s^a(\lambda) ds_{\lambda} \right]. \quad (2.16)$$

El argumento de la exponencial en la Ec. (2.16) se define como *profundidad óptica*, entonces

$$\tau(z, \lambda, \chi) \equiv \int_{\infty}^z \sum_s n_s(z) \sigma_s^a(\lambda) ds_{\lambda}, \quad (2.17)$$

luego

$$I(z, \lambda, \chi) = I_{\infty}(\lambda) \exp[-\tau(z, \lambda, \chi)]. \quad (2.18)$$

La evaluación detallada de la profundidad óptica requiere un conocimiento detallado de las densidades atmosféricas y de todas las secciones transversales de absorción relevantes. Una manera de aproximar la profundidad óptica es la utilización de la llamada función de Chapman  $Ch(z_0, \chi_0)$  que se define de la siguiente manera [Smith and Smith, 1972],

$$\int_{z_0}^{\infty} n_s(z) ds_{\lambda} = n_s(z_0) H_s(z_0) Ch(z_0, \chi_0), \quad (2.19)$$

donde  $H_s$  es la altura de escala del gas. Si llamamos  $T_s$  a la temperatura del gas,  $m_s$  la masa molecular,  $g$  el valor de la gravedad y  $k$  la constante de Boltzmann,  $H_s$  se define como

$$H_s(z) = \frac{kT_s(z)}{m_s g(z)}. \quad (2.20)$$

Gracias a la evolución de las computadoras, una evaluación exacta de la profundidad óptica es relativamente fácil, siempre y cuando este disponible la información de las secciones transversales de absorción y densidades en función de la altura y del ángulo cenital solar.

## **2.8 Producción de Ionización**

Varios procesos contribuyen a la producción de partículas cargadas. El principal proceso es la fotoionización de gases atmosféricos a través de la radiación solar EUV y de rayos X. Los procesos secundarios incluyen ionización a través de fotoelectrones y reacciones de intercambio de carga. Por ultimo, la precipitación de partículas energéticas cargadas juega un rol esencial en la producción de ionización a latitudes polares.

### **2.8.1 Fotoionización**

La fotoionización de los constituyentes del gas neutro de la atmósfera terrestre produce pares ion-electrón libres y es la principal fuente de ionización para la mayor parte de la ionosfera. La energía de los fotones ionizantes excede, en general, la energía umbral de ionización, luego el excedente de energía resulta en un aumento de la energía cinética del electrón o excitando al ion resultante. El proceso de fotoionización puede esquematizarse en forma sencilla de la siguiente manera,



donde  $X$  es una molécula o átomo neutro de la atmósfera superior,  $X^+$  es el ion molecular o atómico resultante y  $e$  el electrón. De particular importancia para la ionosfera es la fotoionización de los gases predominantes O, N<sub>2</sub> y O<sub>2</sub>



Antes de presentar una expresión rigurosa para la tasa de producción de pares ion-electrón, es instructivo derivar primero una expresión simple para la tasa de producción usando las tres hipótesis que se utilizaron para encontrar la expresión para  $I(z, \chi)$  dada por la Ec. (2.14). Si denotamos por  $\eta$  la probabilidad de absorción de un foton, que resulta en la producción de un par ion-electrón, entonces la tasa de producción, llamada a veces función de producción de Chapman  $P_c$ , puede escribirse

$$P_c(z, \chi) = I(z, \chi) \eta \sigma^a n(z) = I_\infty \eta \sigma^a n(z) e^{-Hn(z) \sigma^a \sec \chi}. \quad (2.23)$$

Esta ecuación para la producción sirve para ganar información sobre el proceso de producción. La Ec. (2.23) indica que la tasa de producción es proporcional al producto entre la intensidad del flujo de fotones solar de ionización, que aumenta con la altura, y la densidad del gas neutro, que decrece con la altura. La altura del pico de la tasa de producción puede obtenerse derivando la Ec. (2.23) e igualándola a cero; obteniendo

$$z_{\max} = z_0 + H \ln \left[ n(z_0) H \sigma^a \sec \chi \right], \quad (2.24)$$

donde  $z_0$  es una altura arbitraria de referencia. Este resultado muestra que  $z_{\max}$  se incrementa con el aumento del ángulo cenital solar. Sustituyendo la Ec. (2.24) en la Ec. (2.23) se obtiene la siguiente expresión para el máximo de producción

$$P_c(z_{\max}, \chi) = \frac{I_\infty \eta \cos \chi}{H \exp(1)}. \quad (2.25)$$

El pico de la tasa de producción se incrementa con la disminución del ángulo cenital solar y el máximo es cuando el Sol se encuentra sobre la vertical.

Un cálculo detallado y más realista de la tasa de producción de electrones como función de la altura, la energía y la distancia cenital solar es más complicado que la función de producción de Chapman dada por la Ec. (2.23). La energía inicial del fotoelectrón depende del estado final del ion y de la energía del fotón de ionización. Para calcular la distribución de energía del nuevo fotoelectrón es necesario conocer además de la sección transversal total de ionización, la sección transversal de ionización para cada estado iónico excitado (o la información equivalente a través de los radios de ramificación de los estados finales de los iones). El radio de ramificación multiplicado por la sección transversal de ionización total da la sección transversal de ionización de un dado estado. La expresión para la tasa de producción de electrones  $\mathcal{P}_e(E, \chi, z)$  puede escribirse

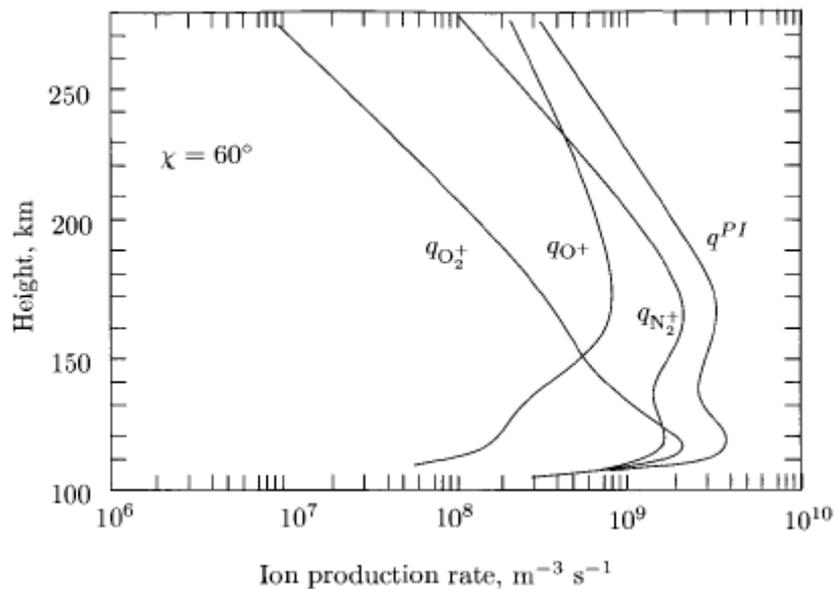
$$\mathcal{P}_e(E, \chi, z) = \sum_l \sum_s n_s(z) \int_0^{\lambda_{sl}} I_\infty(\lambda) \exp[-\tau(z, \lambda, \chi)] \sigma_s^i(\lambda) p_s(E_l, \lambda) d\lambda, \quad (2.26)$$

donde  $\sigma_s^i(\lambda)$  es la sección transversal de ionización total,  $p_s(E_l, \lambda)$  es el radio de ramificación para el estado final del ion con una energía de ionización  $E_l$ ,  $E = E_\lambda - E_l$ ,  $E_\lambda$  es la energía correspondiente a la longitud de onda  $\lambda$ ,  $\lambda_{sl}$  es la longitud de onda umbral de ionización para la especie neutra  $s$ . La suma se realiza sobre todas las especies neutras  $s$  y sobre todos los estados iónicos. Hay aplicaciones en donde solo se requiere la tasa de ionización para una especie iónica dada. Esta tasa total de fotoionización para la especie  $s$ ,  $\mathcal{P}_{ts}$  puede escribirse como

$$\mathcal{P}_{ts}(z, \chi) = n_s(z) \int_0^{\lambda_{sl}} I_\infty(\lambda) \exp[-\tau(z, \lambda, \chi)] \sigma_s^i(\lambda) d\lambda. \quad (2.27)$$

Para obtener la tasa total de ionización  $\mathcal{P}_t$  se suma sobre todas las especies  $s$

$$\mathcal{P}_t(z, \chi) = \sum_s \mathcal{P}_{ts}(z, \chi). \quad (2.28)$$

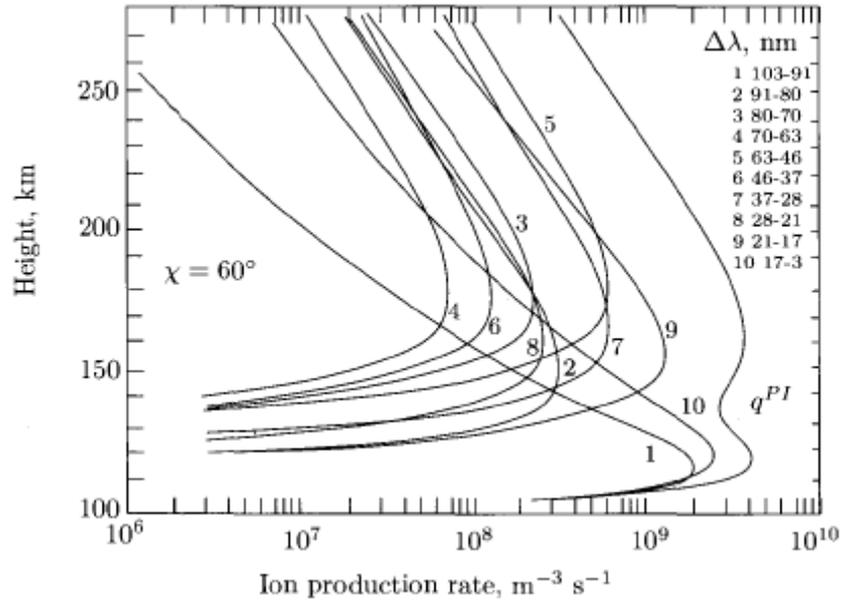


**Figura 2.10** – Perfiles representativos de la tasa de producción a partir de la fotoionización ( $q$ ) para los iones más significativos y su suma  $q^{PI}$  [Matuura, 1966]. Figura extraída del Pröls [2004].

La Fig. 2.10 muestra perfiles de tasas de ionización para 3 especies iónicas  $N_2^+$ ,  $O_2^+$  y  $O^+$ . Una característica que diferencia estos perfiles de la función de producción de Chapman con un solo máximo cerca de la altura de absorción para la radiación EUV, es un máximo adicional en la termosfera baja. Esto puede explicarse separando las tasas de producción de acuerdo a rangos en longitud de onda. La figura 2.11 muestra la tasa de producción total para 10 diferentes rangos de longitud de onda  $\Delta\lambda_i$

$$\mathcal{P}(z, \chi, \Delta\lambda_i) = \mathcal{P}_{N_2^+}(z, \chi, \Delta\lambda_i) + \mathcal{P}_{O_2^+}(z, \chi, \Delta\lambda_i) + \mathcal{P}_{O^+}(z, \chi, \Delta\lambda_i). \quad (2.29)$$

El máximo en la termósfera baja resulta de la absorción en los rangos de longitud de onda más cortos y más largos de la radiación EUV (intervalos 1 y 10). La mayor profundidad de penetración surge de las secciones transversales de absorción relativamente chicas para estos rangos de magnitud. Generalmente, la forma exacta de los perfiles de producción depende fuertemente del ángulo cenital solar y de la actividad solar.



**Figura 2.11** – Perfiles de la tasa de producción de iones para diferentes rangos de longitudes de onda [Matuura, 1966]. Figura extraída del Prölss [2004].

### 2.8.2 Procesos de ionización secundarios

Los fotoelectrones liberados como resultado de los procesos de ionización principales pueden alcanzar energías lo suficientemente altas como para ionizar partículas neutras por si solos. Por ejemplo, un fotón con una longitud de onda  $\lambda \approx 30,4$  nm puede producir un fotoelectrón a partir de un átomo de oxígeno con una energía cinética de aproximadamente 27 eV, que es más grande que la energía necesaria para ionizar gases atmosféricos. Otra posibilidad es que la energía de los fotoelectrones puede inducir a las partículas de gas neutro a emitir radiación EUV, disparando de esta manera eventos adicionales de fotoionización. Se estima que la tasa de ionización debida a estos procesos secundarios contribuye alrededor de un 20 % de la tasa de producción principal en la atmósfera superior. En la región E la tasa de producción secundaria puede ser tan grande como los procesos de fotoionización principales.

### 2.8.3 Intercambio de cargas

Las reacciones de intercambio de carga simple (no disociativas) tienen la forma general



Aunque se producen iones de la especie  $X^+$  a través de estas reacciones, se pierden iones de la especie  $Y^+$  de manera que la densidad total permanece igual. Ejemplos importantes para este tipo de procesos de producción son las reacciones (2) a (5) en la Tabla 4.3. Las reacciones (2) y (4) son una fuente importante de iones de  $O_2^+$  en la ionosfera baja, y la reacción (3) es la principal fuente de iones de  $H^+$  en la plasmaesfera. Un poco más complicadas son las reacciones de intercambio de carga que están acompañadas por disociación y formación de nuevas moléculas, como por ejemplo las reacciones (1), (6) y (7). Estas reacciones son la fuente principal de iones de  $NO^+$  en la parte baja de la ionosfera.

Para poder describir la efectividad del proceso de intercambio de carga, se define la constante de reacción  $k_{s,t}^{IC}$ . Usando la nomenclatura de la Ec. (2.30) la constante de reacción se define por la siguiente relación

$$\mathcal{P}_{X^+}^{IC} = k_{X,Y^+}^{IC} n_X n_{Y^+}. \quad (2.31)$$

La producción de iones  $X^+$  por unidad de volumen y de tiempo debida al intercambio de cargas,  $\mathcal{P}_{X^+}^{IC}$ , se asume proporcional a las densidades de las especies  $X$ ,  $Y^+$  mutuamente interactuantes. La correspondiente constante de proporcionalidad  $k_{s,t}^{IC}$  implícitamente contiene una dependencia con la temperatura como se muestra en la Tabla (2.1). Una interpretación desde la cinemática de los gases de la constante de reacción puede formularse de la siguiente manera. Cada reacción de intercambio de carga corresponde a una interacción o una colisión inelástica entre las partículas del gas. Considerando nuevamente la Ec. (2.30), una partícula del tipo  $X$  viajará un camino medio  $\ell_{X,Y^+}$  antes de sufrir una colisión con una partícula del tipo  $Y^+$ . El tiempo medio requerido para viajar esta distancia será entonces

$$\Delta t = \ell_{X,Y^+} / c_X = 1 / \nu_{X,Y^+}, \quad (2.32)$$

siendo  $c_X$  la velocidad térmica de la especie  $X$  (Cap 3.3), y  $\nu_{X,Y^+}$  la frecuencia de colisión entre las especies  $X$  e  $Y^+$ . De acuerdo a esto todas las  $n_X$  partículas en un volumen unitario se transformarían en iones  $X^+$  dentro del intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La tasa de producción correspondiente debe entonces estar dada por

$$\mathcal{P}_{X^+}^{IC} = n_X / \Delta t = n_X \nu_{X,Y^+} \quad (2.33)$$

Comparando esta relación con la Ec. (2.31), se llega a la siguiente interpretación desde el punto de vista de la cinemática de los gases para las constantes de reacción.

$$k_{s,t} = \nu_{s,t} / n_t. \quad (2.34)$$

(1)	$O^+ + N_2 \rightarrow NO^+ + N,$	
	$k_1 = 1,533 \times 10^{-18} - 5,92 \times 10^{-19} (T / 300) + 8,6 \times 10^{-20} (T / 300)^2;$	
	$300 \leq T \leq 1700 \text{ K}$	
	$k_1 = 2,73 \times 10^{-18} - 1,155 \times 10^{-18} (T / 300) + 1,483 \times 10^{-19} (T / 300)^2;$	
	$1700 \leq T \leq 6000 \text{ K}$	
(2)	$O^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + O,$	
	$k_2 = 2,82 \times 10^{-17} - 7,74 \times 10^{-18} (T / 300) + 1,073 \times 10^{-18} (T / 300)^2$	
	$-5,17 \times 10^{-20} (T / 300)^3 + 9,65 \times 10^{-22} (T / 300)^4;$	$300 \leq T \leq 6000 \text{ K}$
(3)	$O^+ + H \rightleftharpoons H^+ + O,$	$\bar{k}_3 = 2,5 \times 10^{-17} \sqrt{T_n}$
		$\bar{k}_3 = 2,2 \times 10^{-17} \sqrt{T_i}$
(4)	$N_2^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + N_2,$	$k_4 = 5 \times 10^{-17} (300 / T);$
(5)	$N_2^+ + O \rightarrow O^+ + N_2,$	$k_5 = 1 \times 10^{-17} (300 / T)^{0,23};$
		$T \leq 1500 \text{ K}$
(6)	$N_2^+ + O \rightarrow NO^+ + N,$	$k_6 = 1,4 \times 10^{-16} (300 / T)^{0,44};$
		$T \leq 1500 \text{ K}$
(7)	$N^+ + O_2 \rightarrow NO^+ + N,$	$k_7 = 2,6 \times 10^{-16};$
(8)	$N^+ + O_2 \rightarrow O_2^+ + N,$	$k_8 = 3,1 \times 10^{-16};$
(9)	$He^+ + N_2 \rightarrow N^+ + He + N,$	$k_9 = 9,6 \times 10^{-16};$
(10)	$He^+ + N_2 \rightarrow N_2^+ + He,$	$k_{10} = 6,4 \times 10^{-16};$
(11)	$He^+ + O_2 \rightarrow O^+ + He + O,$	$k_{11} = 1,1 \times 10^{-15};$
(12)	$N_2^+ + e \rightarrow N + N,$	$k_{12} = 1,8 \times 10^{-13} (300 / T_e)^{0,39};$
(13)	$O_2^+ + e \rightarrow O + O,$	$k_{13} = 1,6 \times 10^{-13} (300 / T_e)^{0,55};$
(14)	$NO^+ + e \rightarrow N + O,$	$k_{14} = 4,2 \times 10^{-13} (300 / T_e)^{0,85};$
(15)	$O^+ + e \rightarrow O^{(*)} + \text{foton},$	$k_{15} \cong 1,4 \times 10^{-18} (300 / T_e)^{0,5}$

**Tabla 2.1** – Reacciones químicas importantes en la ionosfera [Schunk, 1983]. Las constantes de reacción,  $k_i$ , están en ( $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ ),  $T \approx T_n$  para pequeñas velocidades de drift de los iones y  $T_i \approx T_n$ . Extraída del Pröls [2004].

#### 2.8.4 Precipitación de partículas

La atmósfera superior puede ser ionizada por partículas incidentes con alta energía, proceso que juega un rol importante a altas latitudes. Para electrones precipitantes este proceso puede representarse de la siguiente manera



donde el subíndice 'primario' denota al electrón precipitante y el subíndice 'secundario' al nuevo electrón generado. En contraste con los fotones, las partículas energéticas pueden inducir muchos eventos de ionización (los electrones aurales

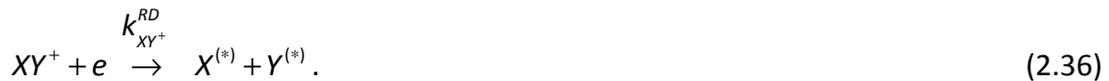
tienen energías que van de unos 100 hasta unos 1000 eV), de esta manera el cálculo del efecto total se vuelve más complicado.

## 2.9 Pérdida de ionización

Si solo se considera la producción de ionización, la densidad de iones real observada sería rápidamente superada en un periodo de tiempo muy corto. Sea por ejemplo la región E, donde la densidad que se observa es del orden de  $n(130 \text{ km}) \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$  y la producción es del orden de  $P(130 \text{ km}) \approx 3 \times 10^9 \text{ m}^{-3}\text{s}^{-1}$ . Con estos valores se obtiene que el tiempo requerido para generar la densidad de ionización observada es aproximadamente  $n/P \approx 30 \text{ s}$ . Entonces si no fuera por procesos de pérdida muy efectivos con constantes de tiempo muy cortas, la densidad de ionización en esta región crecería hasta alcanzar valores demasiado grandes y no realista en unos pocos minutos. A continuación se describen los procesos de pérdida y su dependencia con la altura.

### 2.9.1 Recombinación disociativa de Iones moleculares

El proceso de pérdida más importante para los iones es la llamada recombinación disociativa. Como lo implica el nombre, los iones moleculares involucrados en esta reacción se dividen en sus constituyentes,



Los asteriscos indican la posibilidad de estados excitados de los productos de la recombinación. Ejemplos de este tipo de recombinación son las reacciones de (12) a (14) en la Tabla (2.1). El número de iones perdidos en este proceso por unidad de volumen y de tiempo está dado por

$$\mathcal{L}_{XY^+}^{RD} = k_{XY^+}^{RD} n_{XY^+} n_e. \quad (2.37)$$

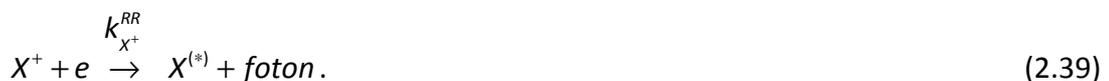
La letra  $\mathcal{L}$  en la Ec. (2.37) denota la tasa de pérdida, o sea, la pérdida de cargas por unidad de volumen y de tiempo. Como las dos partículas involucradas en el evento de recombinación disociativa son transformadas en dos partículas, no hay problemas con la conservación de momento y de energía. Las constantes de reacción asociadas son relativamente grandes. Por ejemplo, para las reacciones (12) a (14) listadas en la Tabla (2.1) se tiene que a temperaturas típicas

$$k_{N_2^+}^{RD} = k_{O_2^+}^{RD} = k_{NO^+}^{RD} \cong 10^{-13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad (2.38)$$

y este valor es mucho más grande que todas las demás constantes de reacción que se encuentran en la tabla.

### 2.9.2 Recombinación radiativa de Iones atómicos

El proceso de pérdida más obvio para los iones atómicos es la recombinación directa, donde el exceso de energía es enteramente o en parte irradiado

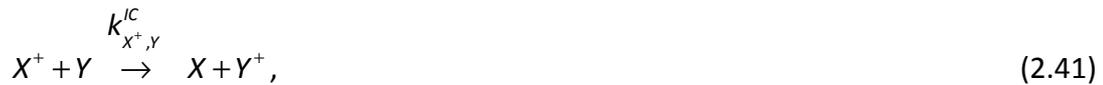


Como este tipo de reacción crea una partícula a partir de dos es relativamente raro que suceda. La conservación de la energía y del momento requiere un gasto exacto de energía de recombinación en estados excitados, pero esto solo es posible en cuantos precisos. La constante de tiempo de recombinación radiativa para la reacción (15) es relativamente pequeña

$$k_{O^+}^{RR} \cong 10^{-18} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (2.40)$$

### 2.9.3 Intercambio de cargas

En contraste a la recombinación radiativa, el intercambio de cargas es un proceso de pérdida muy importante. Los iones de una especie en particular se pierden, pero no hay un cambio en la densidad de ionización neta



donde  $X^+$  e  $Y$  pueden ser tanto moléculas o átomos. Particularmente importantes para la pérdida de oxígeno atómico son las reacciones (1) y (2), que para una temperatura  $T = 1000 \text{ K}$  las constantes son

$$k_{O^+,N_2}^{IC} \cong 5 \times 10^{-19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}, \quad k_{O^+,O_2}^{IC} \cong 125 \times 10^{-19} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (2.42)$$

Que no son valores muy grandes comparados con las constantes de recombinación radiativa. Sin embargo, comparando las tasas de pérdida asociadas a la parte baja de la región F, por debajo del pico, encontramos

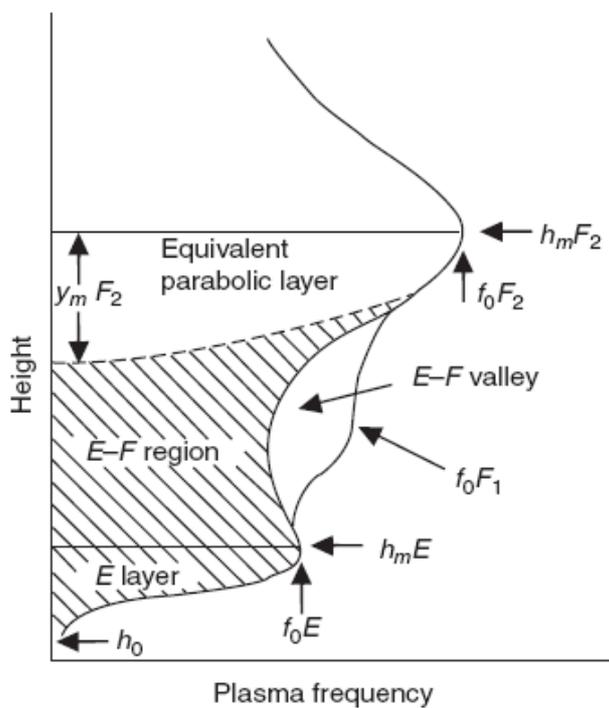
$$\mathcal{L}_{O^+}^{IC} = k_{O^+,N_2}^{IC} n_{O^+} n_{N_2} + k_{O^+,O_2}^{IC} n_{O^+} n_{O_2} \gg \mathcal{L}_{O^+}^{RR} = k_{O^+}^{RR} n_{O^+} n_e$$

Los valores de las densidades de los gases neutros  $N_2$  y  $O_2$  en esta región son mucho más grandes que la densidad de electrones. A una altura de 200 km, por ejemplo,  $n_{N_2}/n_e \cong 10^4$  y  $n_{O_2}/n_e \cong 700$ . Solo por encima del máximo de ionización las densidades de los constituyentes moleculares decrecen a valores que hace que las reacciones de intercambio de carga ya no importen. Ya que los procesos de pérdida debido al transporte son dominantes a estas alturas, la recombinación radiativa es relegada a un rol secundario en toda la ionosfera. Los iones moleculares  $NO^+$  y  $O_2^+$  creados por reacciones de intercambio del oxígeno atómico con  $N_2$  y  $O_2$  decaen rápidamente a través de la recombinación disociativa. Considerando la pérdida de ionización total en la parte baja de la región F se encuentra que está controlada en forma casi exclusiva por la eficiencia de las reacciones de intercambio de carga (1) y (2).

## 2.10 Capas ionosféricas

La ionosfera terrestre a todas las latitudes puede separarse en capas, a pesar del hecho de que diferentes procesos dominan a diferentes regiones latitudinales. Las capas (D, E,  $F_1$  y  $F_2$ ) se encuentran bien definidas durante el día y en regiones de latitudes medias. Las diferentes capas están generalmente caracterizadas por un máximo de densidad a una cierta altura y una disminución de la densidad con la altura a ambos lados del máximo. La primera capa en ser detectada fue la capa E, siguiendo las capas D y F. Típicamente, las capas E y F están caracterizadas por las frecuencias críticas ( $f_0E, f_0F_1, f_0F_2$ ), alturas del pico ( $h_mE, h_mF_1, h_mF_2$ ), y espesores medios ( $y_mE, y_mF_1$ ,

$y_m F_2$ ) como se muestra en la figura (2.12). La frecuencia crítica, es la frecuencia máxima que puede ser reflejada en la capa. Las ondas electromagnéticas con frecuencias mayores, transmitidas por debajo de la capa, la penetran y se propagan a alturas mayores. Cada frecuencia crítica se encuentra asociada a un pico de densidad ( $N_m E$ ,  $N_m F_1$ ,  $N_m F_2$ ) y a una altura del pico, que es la altura donde se encuentra el máximo de densidad. También es costumbre definir un espesor medio para cada capa, que se obtiene al ajustar una parábola al perfil de densidad de electrones en un rango de altura centrado en el máximo de densidad. Todas las capas están presentes durante el día, pero la capa  $F_1$  decae durante la noche y aparece un valle E-F distintivo que separa las capas E y  $F_2$ . Por simplicidad, a continuación las referencias a las diversas reacciones se harán de acuerdo a su numeración en la Tabla (2.1).



**Figura 2.12** – Diagrama esquemático del perfil de densidad de electrones mostrando las frecuencias críticas y las alturas del pico para las capas E,  $F_1$ ,  $F_2$ . La curva que contiene el valle E-F es un perfil nocturno y la curva que contiene al  $f_0 F_1$  es un perfil diurno [Bradley et. al. 1973]. Figura extraída del Schunk [2000].

Los iones dominantes en la región E son  $NO^+$ ,  $O_2^+$  y en menor medida  $N_2^+$  y las constantes químicas temporales son lo suficientemente chicas de manera que pueden despreciarse los procesos de transporte de plasma. Aunque hay un gran número de especies iónicas secundarias, los iones dominantes pueden describirse por unos pocos procesos fotoquímicos. Los procesos principales incluyen fotoionización de las especies neutras  $O$ ,  $O_2$  y  $N_2$ ; reacciones ion-molécula, y recombinaciones ion-electrón. El rol predominante que tiene el  $NO^+$  en la capa E puede atribuirse a la producción muy efectiva de esta especie por las reacciones de intercambio de carga (1), (6) y (7). La fotoionización directa no es muy importante ya que la especie  $NO$  neutra existe solo en concentraciones de traza en la termosfera baja. La ausencia de iones de  $N_2^+$  en la capa E, a pesar de su importante producción por fotoionización, ocurre porque la pérdida de esta especie a través de reacciones de intercambio de cargas (4)-(6) son mucho más grandes que las de los iones  $O_2^+$  y  $NO^+$  a través de la recombinación

disociativa. La falta de  $O^+$  en la capa E puede explicarse por la baja producción de esta especie en esta región (Fig. 2.11).

La región F usualmente se divide en tres subregiones. La región más baja donde domina la fotoquímica se denomina  $F_1$ . La región donde hay una transición de predominio de procesos químicos a difusivos se denomina región  $F_2$ , y la región más alta donde domina la difusión, se denomina región tope de la ionosfera. En la región  $F_1$ , la fotoquímica es sencilla porque domina el ion  $O^+$ . Los procesos importantes son la fotoionización del oxígeno atómico neutro y la pérdida por las reacciones (1) y (2) con el  $N_2$  y el  $O_2$ . La baja densidad de  $O_2^+$  y  $NO^+$  en la región F, por otro lado, es una consecuencia de la disminución de la producción de estas especies a través de las reacciones (1), (6) y (7), y de la fotoionización. Otro factor es el aumento de la tasa de pérdida debida al aumento en la densidad de electrones. Los procesos de transporte toman importancia en las regiones  $F_2$  y la parte alta de la región F, incluyendo difusión ambipolar, drifts inducidos por los vientos a lo largo de  $\mathbf{B}$  y drifts electrodinámicos perpendiculares a  $\mathbf{B}$ .

La variación espacial y temporal de la densidad de los iones y los electrones está gobernada por la ecuación de continuidad que es una ecuación de balance de densidad y cuya derivación se vera en el Cap. 3. La ecuación de continuidad puede escribirse

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = \mathcal{P} - \mathcal{L} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s), \quad (2.43)$$

que establece que la variación en el tiempo de la densidad se debe a la ganancia por producción, a la pérdida por procesos de destrucción y a la ganancia/pérdida por procesos de transporte. En la región  $F_1$  durante el día a latitudes medias, el transporte no es un proceso importante y presenta variaciones temporales muy lentas. Bajo estas condiciones la densidad de los iones  $O^+$  (o de los electrones) puede determinarse solo considerando los términos de producción (fotoionización) y pérdida (intercambio de carga). Luego la ecuación de continuidad para esta región puede escribirse

$$\mathcal{P}_s(O^+) = \mathcal{L}_{O^+} = k_{O^+N_2}^{IC} n_{O^+} n_{N_2} + k_{O^+O_2}^{IC} n_{O^+} n_{O_2}. \quad (2.44)$$

Luego, la densidad del  $O^+$  esta dada por:

$$n_{O^+} = \frac{\mathcal{P}_{ts}(O^+)}{k_{O^+N_2}^{IC} n_{N_2} + k_{O^+O_2}^{IC} n_{O_2}}. \quad (2.45)$$

Los valores de las constantes químicas están dadas en la tabla 2.1 y  $\mathcal{P}_s$  esta dado por la Ec. (2.27). La Ec. (2.45) es la expresión de *equilibrio químico* para el  $O^+$ . Cuando domina el equilibrio químico, la densidad del  $O^+$  aumenta exponencialmente con la altura. Esto ocurre porque la tasa de fotoionización del  $O^+$ ,  $\mathcal{P}_{ts}(O^+)$ , es directamente proporcional a la densidad del oxígeno atómico, que decrece exponencialmente con la altura, pero a una velocidad mas baja que la disminución que presentan las densidades del  $O_2$  y del  $N_2$ . El resultado neto es que la densidad del  $O^+$  aumenta exponencialmente con la altura. Por otro lado, en la parte superior de la región F domina la difusión (procesos de transporte) y la densidad del  $O^+$ , en general, sigue un perfil de equilibrio difusivo. Por lo tanto, la densidad del  $O^+$  decrece exponencialmente con la altura a una tasa gobernada por el gradiente de temperatura del plasma y la altura de escala. El

máximo de densidad en la región F ocurre aproximadamente donde los procesos de difusión y químicos son de igual importancia.

Las partículas cargadas están restringidas a moverse a lo largo de **B** a alturas de la región F. Como consecuencia, los vientos neutros con dirección polar inducen un drift de plasma descendente, mientras que los vientos con dirección ecuatorial inducen un drift de plasma ascendente. De la misma manera, los campos eléctricos con dirección Oeste inducen un drift de plasma descendente y los campos eléctricos con dirección Este inducen un drift de plasma ascendente. El drift de plasma ascendente hace que la capa F se mueva a alturas mayores donde la tasa de pérdida del  $O^+$  es menor y entonces tanto  $N_m F_2$  y  $h_m F_2$  aumentan. Lo inverso ocurre para el drift de plasma descendente.

La fotoionización no ocurre de noche, y por lo tanto decae la densidad ionosférica. La región E que esta poblada por los iones moleculares  $NO^+$ ,  $N_2^+$  y  $O_2^+$ , decae rápidamente debido a la rápidas tasas de recombinación disociativa. La densidad del  $O^+$  en la región F decae exponencialmente con el tiempo y la constante de tiempo para el decaimiento exponencial es aproximadamente igual a la inversa de la frecuencia de pérdida del  $O^+$  a la altura del pico de la región F. Este hecho puede deducirse considerando la ecuación de continuidad para el  $O^+$ . Durante la noche, la fotoionización está ausente y cerca del pico la variación con la altura es chica ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ), consecuentemente la ecuación se reduce a

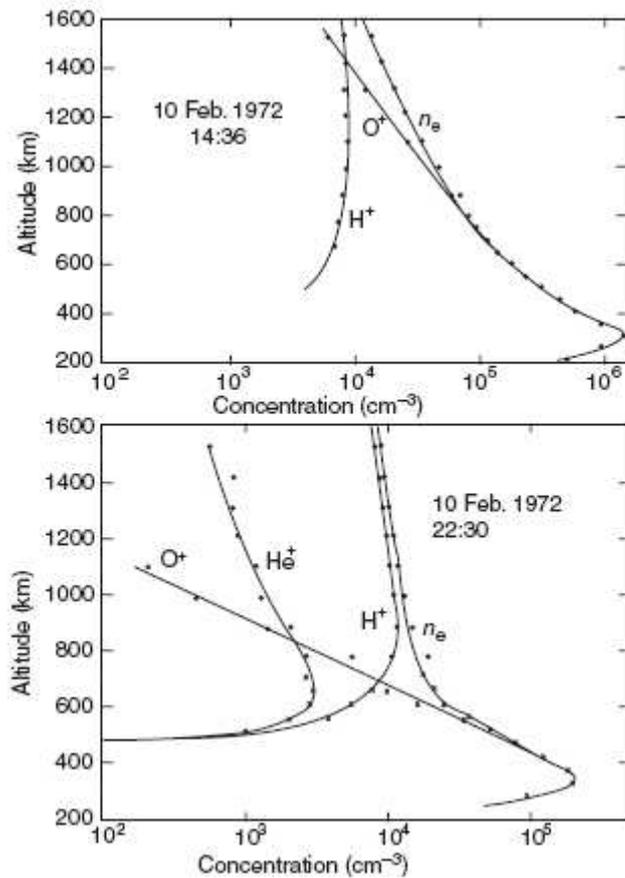
$$\partial n / \partial t = -k_\delta n, \quad (2.46)$$

donde  $k_\delta = [k_{O^+N_2}^{IC} n_{N_2} + k_{O^+O_2}^{IC} n_{O_2}]$  es la frecuencia de perdida del  $O^+$  evaluada a la altura del pico,  $h_m F_2$ . Sin embargo, durante la noche existen otras fuentes adicionales de ionización aparte de la fotoionización directa. Específicamente la región E nocturna es mantenida por la producción debida a la luz estelar y la radiación solar resonante dispersada (H Lyman  $\alpha$  y  $\beta$ ) La región F nocturna es parcialmente mantenida por un flujo de ionización descendente que proviene de la magnetósfera. Además, el flujo de la atmósfera neutra es alrededor de toda la Tierra desde el punto subsolar del lado diurno hacia el lado nocturno. Luego, del lado nocturno, el viento neutro meridional generalmente es hacia el ecuador. Este viento ecuatorial induce un drift de plasma ascendente que levanta la capa F, y de esta manera disminuye su decaimiento.

La región D, que se extiende desde los 60 hasta los 100 km, se dejó para lo último porque es la capa más difícil de observar y de modelar. Al igual que la región E, la región D está controlada por procesos químicos y las especies dominantes son los iones y neutros moleculares. Sin embargo, a diferencia de la región E, la región D está compuesta por iones positivos y negativos, y cluster de iones de agua; además, las reacciones químicas entre tres cuerpos son importantes. Los cluster dominan la región D a alturas por debajo de los 85 km y son formados por hidratación de los iones primarios  $NO^+$  y  $O_2^+$ . Por otro lado, además de las especies neutras usuales que se encuentran en la región E y la parte baja de la región F ( $N_2$ ,  $O_2$ ,  $O$ ,  $N$ ) deben tenerse en cuenta muchas especies neutras menores ( $NO$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$ ,  $O_3$ ,  $OH$ ,  $NO_2$ ,  $HO_2$ ). El  $NO$ , en particular, tiene un rol crucial en la química de la región D puede ser ionizado por la radiación Lyman  $\alpha$ . Desafortunadamente, las densidades de estas especies neutras menores y muchas de sus reacciones químicas no son bien conocidas.

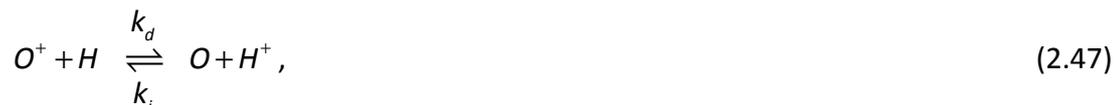
## 2.11 Tope de la ionosfera y la Plasmaesfera

El plasma que rodea a la Tierra está conformado por la región denominada tope de la ionosfera y la protonoesfera. El tope de la ionosfera está definido como la región por encima del pico de la capa  $F_2$  ( $h_m F_2$ ) donde el  $O^+$  es el ion dominante, se extiende desde los 600 hasta los 1500 km en latitudes medias. La región por encima, donde el  $H^+$  es el dominante, es llamada protonoesfera. La Fig. 2.13 muestra un perfil típico de densidad de iones en el tope y la protonoesfera, medida por el radar de dispersión incoherente del Observatorio de Arecibo, Puerto Rico.



**Figura 2.13** – Perfiles de la composición de iones en función de la altura para la ionosfera nocturna (panel superior) y la diurna (panel inferior). Los perfiles fueron realizados con mediciones del radar del observatorio de Arecibo, Puerto Rico [Hagen et al., 1974]. Figura extraída del Schunk [2000].

Los iones  $H^+$  a alturas bajas están en equilibrio químico con el  $O^+$  y su densidad está controlada por reacciones de intercambio de carga



donde  $k_d$  y  $k_i$  son las reacciones de intercambio (ver Tabla 2.1). A estas alturas, la densidad de  $H^+$  puede obtenerse igualando los términos de producción y pérdida del  $H^+$ , obteniéndose

$$n_{H^+} = 1,13 \frac{n_{O^+} n_H}{n_O}$$

donde se asume que las temperatura son comparables y relativamente altas de manera que  $k_d/k_i \approx 1,13$ . Cuando reina el equilibrio químico, la densidad del  $H^+$  aumenta exponencialmente con la altura, porque las densidades del  $O^+$  y del  $H$  decrecen exponencialmente pero en forma mas lenta que la densidad del  $O$ . A cierta altura el equilibrio difusivo comienza a tener importancia y esto ocurre cuando el  $H^+$  continua siendo una especie menor. Sin embargo, la densidad del  $H^+$  continua aumentando con la altura a una tasa casi igual a la presenta bajo el equilibrio químico. Cuando la densidad del  $H^+$  se hace más grande que la densidad del  $O^+$ , comienza a decrecer exponencialmente con la altura. El predominio de  $H^+$  explica porque el  $He^+$  tiene un rol secundario en la ionosfera terrestre. Esta última especie es producida principalmente por fotoionización que es un proceso lento frente al intercambio de carga (3). Además las reacciones (9)-(11) son un proceso de pérdida efectivo para este especie.

Cuando el equilibrio difusivo controla la estructura de la densidad del tope de la ionosfera, la difusión térmica puede ser un proceso importante. La difusión térmica surge como resultado del efecto que tiene el flujo de calor sobre el balance del momento cuando gases diferentes colisionan. Es un proceso particularmente fuerte en gases totalmente ionizados que presentan gradientes de temperatura de iones y/o electrones sustanciales. En un plasma compuesto por  $O^+$ ,  $H^+$  y electrones, la difusión térmica actúa conduciendo los iones pesados y livianos en direcciones opuestas. Los iones pesados son llevados a regiones mas calientes, i.e., a mayores alturas. La difusión térmica actúa incrementando la densidad del  $O^+$  en alturas mayores y disminuyendo la densidad del  $H^+$ , y esto puede dar como resultado un cambio sustancial en la altura de transición de  $O^+/H^+$ .

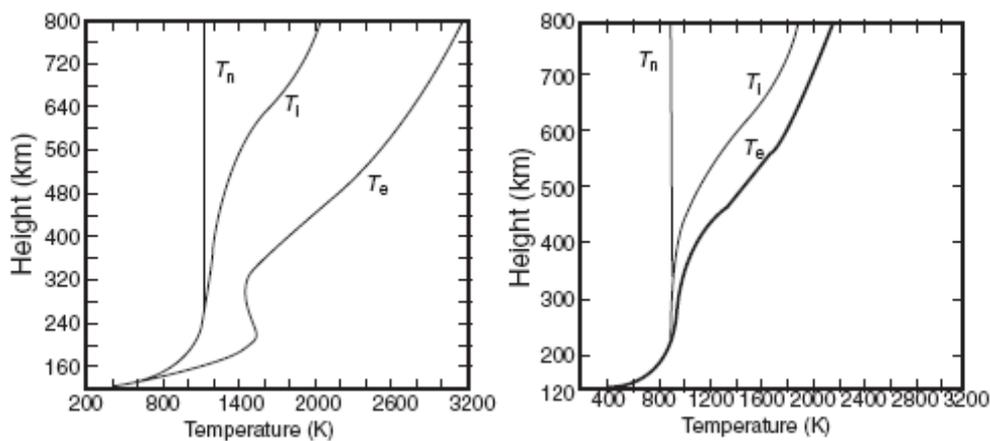
Cuando la ionosfera y la plasmaesfera están en equilibrio, prevalece el equilibrio difusivo y existe un flujo de ionización entre las dos regiones. El flujo es ascendente desde la ionosfera durante el día, cuando la densidad del  $O^+$  es relativamente alta, y descendente durante la noche, cuando decae la densidad del  $O^+$ . El flujo descendente de  $H^+$  mediante reacciones de intercambio de carga con el  $O$  produce  $O^+$ , y este proceso ayuda a mantener la región F nocturna. Una situación diferente ocurre durante los solsticios, cuando el flujo puede ser inter-hemisférico. En este caso, el flujo es ascendente y sale de la región tope de la ionosfera durante el día y la noche en el hemisferio de verano. En el hemisferio de invierno, el flujo es ascendente durante el día y descendente durante la noche. La dirección del flujo determina si el flujo es una fuente o un sumidero para la ionosfera.

## **2.12 Estructura térmica de la ionosfera**

Los fotoelectrones proveen la principal fuente de energía a todas latitudes, pero los electrones aurales precipitantes son una fuente adicional de energía importante a latitudes altas. La energía de los fotoelectrones es transferida a los electrones ionosféricos por procesos directos e indirectos. Los fotoelectrones de baja energía ( $\leq 2$  eV) transfieren energía en forma directa a través de colisiones de Coulomb en una región cercana a la que son creados. Esto lleva a un calentamiento del gas de electrones, con una tasa de calentamiento alcanzando su máximo entre los 150 a 300 km de altura dependiendo de las condiciones geofísicas. Sin embargo los

fotoelectrones más energéticos pueden calentar a los electrones ionosféricos de una manera indirecta.

Típicamente la temperatura de los electrones en la ionosfera responde rápidamente (unos pocos segundos) a los cambios, por lo tanto, la temperatura de los electrones se encuentra generalmente en un estado cuasi-estacionario. Además, a bajas alturas, la conducción térmica no es un proceso importante porque la atmósfera neutra es efectiva al inhibir los flujos de calor. Bajo estas circunstancias, la temperatura de los electrones está determinada por un balance entre los procesos de recalentamiento y enfriamiento local. La altura por debajo de la cual prevalece el equilibrio térmico varía entre los 150 y los 350 km, dependiendo de la hora local, la estación, y el ciclo solar. Por otro lado, el balance térmico de los electrones a mayores alturas esta gobernado por la conducción térmica.



**Figura 2.14** – Perfiles de la temperatura de los iones, los electrones y los neutros para la ionosfera sobre Millstone Hill los días 23-24 de marzo de 1970. El panel izquierdo corresponde a las 14:22 HL y el panel derecho a las 02:22 HL [Roble, 1975]. Figura extraída del Schunk [2000].

El comportamiento básico de la temperatura de los electrones en la ionosfera se refleja en la Fig. (2.14), donde se muestran perfiles de  $T_e$  para horas locales representativas del día y de la noche. Para condiciones diurnas, el calentamiento debido a los fotoelectrones y el enfriamiento del oxígeno dominan el balance térmico de los electrones por debajo de los 300 km, y el pico de  $T_e$  está asociado con el pico en la tasa de calentamiento debido a los fotoelectrones. Por encima de los 300 km, el perfil de  $T_e$  está dominado por la conducción térmica. El gradiente en  $T_e$  se debe al flujo de calor descendente en el borde superior (800 km). Durante la noche, la fuente de calor de los electrones está ausente, y  $T_e = T_n$  a bajas alturas debido al fuerte acoplamiento entre los electrones y los neutros a través de las colisiones. Por encima de los 250 km, domina la conducción térmica es el proceso dominante y  $T_e$  aumenta con la altura en respuesta al flujo de calor descendente a aproximadamente los 800 km. Este flujo de calor descendente resulta de energía almacenada a mayores alturas durante el día o por efectos de interacciones onda-partícula a alturas mayores.

El balance de energía para los iones es más sencillo ya que las variaciones temporales, la advección, la expansión adiabática y la conducción térmica no son muy importantes a latitudes medias. Típicamente, la conducción térmica sólo importa por

encima de los 700 km para los iones. De esta manera, el balance de energía de los iones está gobernado por el acoplamiento entre los electrones calientes y los neutros fríos a través de las colisiones. A bajas alturas, domina el acoplamiento con los neutros y  $T_i = T_n$  durante el día y la noche. A medida que aumenta la altura, el acoplamiento con los electrones es cada vez más importante y  $T_i$  aumenta. Sin embargo el acoplamiento entre los electrones y los iones nunca es total, y entonces,  $T_i$  no alcanza el equilibrio térmico con  $T_e$ .

## **2.13 Variaciones sistemáticas en la ionosfera**

### **2.13.1 Variaciones diurnas**

La ionosfera experimenta una marcada variación diurna a medida que la Tierra rota y es iluminada por el Sol. Los procesos físicos que controlan la variación de la densidad de electrones cambian con el tiempo local y la altura. Al amanecer, la densidad de electrones comienza a incrementarse rápidamente debido a la fotoionización. A continuación la densidad de electrones presenta un aumento suave a lo largo del día, y luego decae al atardecer a medida que la fuente de fotoionización desaparece. La ionización por debajo del pico de la región F está bajo un fuerte control solar, alcanzando su máximo cerca del mediodía, cuando el ángulo cenital solar es mínimo, y va decreciendo simétricamente alejándose del mediodía. Este comportamiento resulta del hecho de que la fotoquímica domina a alturas por debajo del pico de la región F y las constantes de tiempo químicas son chicas. La densidad de electrones por encima del pico de la región F está influenciada por otros procesos, incluyendo difusión, flujos inter-hemisféricos, y vientos neutros. De esta manera, el perfil de densidad de electrones a alturas por encima del pico de la región F, no presenta una fuerte dependencia con el ángulo cenital solar, y el máximo de ionización ocurre en la tarde cerca del momento en que la temperatura exosférica de los neutros alcanza su máximo. Durante la noche, los procesos de transporte de plasma controlan el decaimiento de la ionización. Sin embargo, la altura del pico de la región F está principalmente determinada por los vientos meridionales neutros, que inducen un flujo de plasma a lo largo de las líneas de campo geomagnético inclinadas. Es ascendente durante la noche y descendente durante el día.

Los electrones son calentados por los fotoelectrones que son generados en el proceso de fotoionización y por el flujo descendente de calor que proviene de la magnetósfera. Además de los procesos anteriores, la temperatura de los electrones está también influenciada por las colisiones elásticas e inelásticas de los electrones con los iones y los neutros. Para una tasa de calentamiento de electrones dada, la temperatura de los electrones está inversamente relacionada con la densidad de los electrones. Hecho que ayuda a explicar la variación diurna que presenta la temperatura de los electrones,  $T_e$ . Al amanecer  $T_e$  aumenta rápidamente debido al calentamiento de los fotoelectrones. La tasa de calentamiento debida a los fotoelectrones no varía en forma apreciable durante horas tempranas de la mañana, pero la densidad de electrones continúa aumentando. A medida que la densidad de electrones aumenta, la temperatura de los electrones disminuye, debido al aumento de la capacidad calorífica del gas de electrones y del fuerte acoplamiento con los iones relativamente fríos. A continuación se mantiene prácticamente constante, y luego decrece al atardecer cuando la fuente de los fotoelectrones desaparece. Sin embargo

$T_e$  toma valores superiores a  $T_n$  debido al flujo de energía que proviene de la plasmasfera, que produce un gradiente positivo en la temperatura de los electrones nocturna por encima de los 200 km.

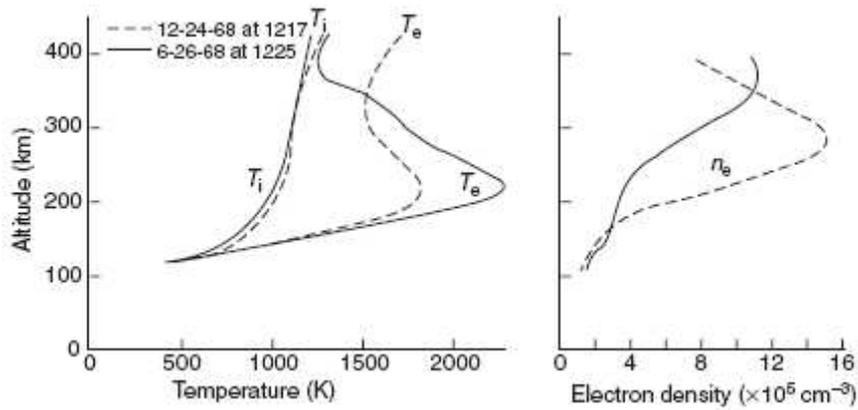
La variación diurna de la temperatura de los iones es más directa que la variación de la densidad y temperatura de los electrones. Por debajo de los 400 km, la temperatura de los iones básicamente sigue a la temperatura de los neutros, y su variación diurna determina la variación diurna de  $T_i$ . Por encima de los 400 km,  $T_i$  aumenta con la altura, debido principalmente al acoplamiento térmico con los electrones más calientes, aunque hay un pequeño flujo de calor descendente desde la magnetósfera. A pesar de los procesos anteriores, la variación diurna de  $T_i$  esta controlada por la variación diurna de  $T_e$  por encima de los 400 km.

### **2.13.2 Variaciones estacionales**

La ionosfera exhibe fuertes variaciones estacionales y con el ciclo solar debido a que la principal fuente de ionización y de energía para la ionosfera es la fotoionización. Por esto, cuando el ángulo cenital solar o el flujo de radiación presentan cambios, la ionosfera cambiara con ellos.

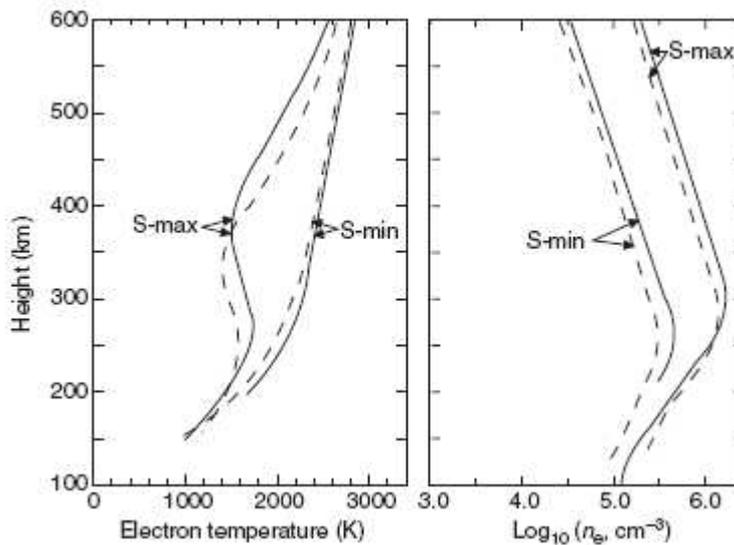
La variación estacional de la ionosfera está relacionada con el cambio en el ángulo cenital solar, mientras que su variación con el ciclo solar está relacionada con cambios en el flujo de radiación solar EUV y de rayos X. Las variaciones ionosféricas no son siempre simples debido a que está acoplada con la termósfera, la cual también sufre variaciones estacionales y con el ciclo solar. Por ejemplo, la figura 2.15 muestra la variación estacional de la ionosfera diurna a latitudes medias. La característica importante que se observa en la figura es que  $N_mF_2$  en invierno es mayor que  $N_mF_2$  en verano a pesar del hecho de que el ángulo cenital solar es más chico en verano. Este fenómeno, es llamado *anomalía estacional*.

Específicamente, la circulación de verano a invierno de los vientos neutros resulta en un incremento en la tasa  $O/N_2$  en el hemisferio de invierno y en una disminución en el hemisferio de verano. El aumento de la densidad de  $O$  y la disminución de la densidad de  $N_2$  en invierno actúan incrementando la densidad del  $O^+$ , debido al incremento relativo en la tasa de producción y disminución en la tasa de pérdida. Este efecto es más que suficiente para compensar la tendencia de la disminución de la densidad del  $O^+$  debido a ángulos cenitales solares más grandes. El resultado neto es que la densidad del  $O^+$  en invierno es mayor que en verano a alturas de la región  $F$ . A su vez, el valor mayor de la densidad de electrones en verano resulta en temperatura de electrones más baja (Fig. 2.15).



**Figura 2.15** – Perfiles de  $T_e$ ,  $T_i$  y  $n_e$  para el verano (línea continua) y para el invierno (línea punteada) medidos usando el radar de dispersión incoherente de Arecibo durante el día [Swartz et. al., 1973]. Figura extraída del Schunk [2000].

También se encuentran las denominadas *anomalías anual y semianual* [Fuller-Rowell, 1998; Rishbeth, 1998, 2000; Li and Yu, 2003; Mendillo et al., 2005; Azpilicueta et al., 2010a; Azpilicueta et al., 2010b]. La anomalía anual (también llamada la asimetría anual), está descrita por valores de  $f_0F_2$  más grandes durante el solsticio de diciembre respecto del solsticio de junio. Esto se manifiesta sobre la densidad de electrones observándose que los valores en diciembre son un 20 % mayor respecto de junio. La variación de la distancia Sol-Tierra solo puede explicar un 6% de esta diferencia. La anomalía semianual produce valores de mayores  $f_0F_2$  en los equinoccios que en los solsticios.



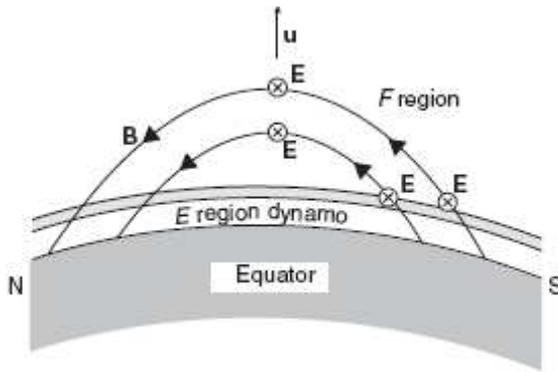
**Figura 2.16** – Perfiles de densidad y de temperatura para los electrones para la ionosfera diurna a latitudes medias durante un equinocción en condiciones de actividad solar mínima y máxima. Las curvas continuas corresponden a mediciones del radar de dispersión incoherente de Millstone Hill y las curvas discontinuas son calculadas [Roble, 1976]. Figura extraída del Schunk [2000].

### **2.13.3 Variaciones con el ciclo solar**

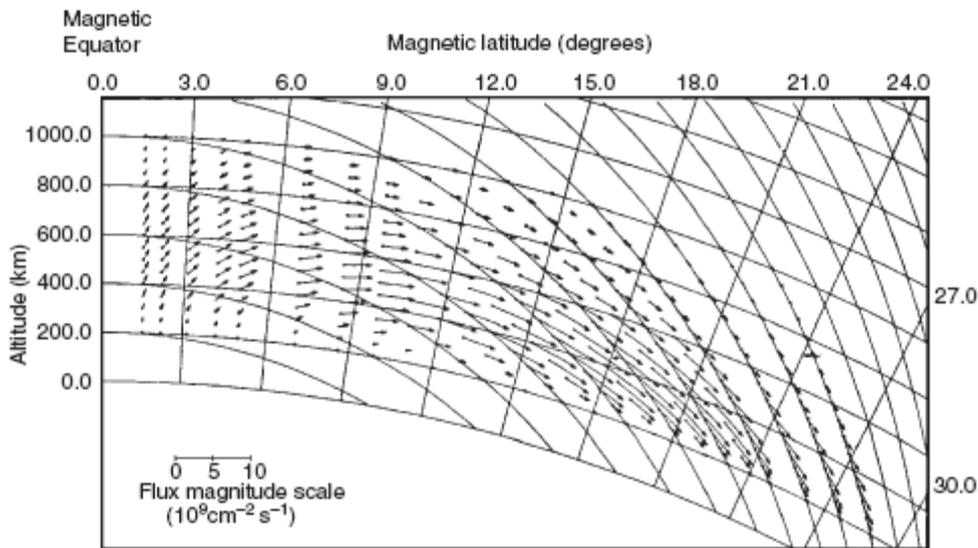
La variación con el ciclo solar de la densidad y la temperatura de los electrones se muestra en la Fig. 2.16 para la ionosfera diurna a latitudes medias durante los equinoccios. En los máximos solares, el flujo de radiación solar EUV es mayor que el correspondiente a los mínimos solares, condición que lleva a densidades de electrones más grandes y temperaturas de los mismos más bajas. Los valores de densidad de electrones más elevados durante los máximos solares son simplemente el resultado de un aumento en la producción, mientras que las temperaturas de electrones más bajas son el resultado de la relación inversa entre la densidad y la temperatura. El perfil de  $T_e$  presenta un pico pronunciado aproximadamente a los 250 km de altura durante máximos solares, mientras que  $T_e$  aumenta monótonamente con la altura durante los mínimos solares. El pico de  $T_e$  en los máximos solares es una consecuencia de la alta densidad de electrones, que lleva a un predominio del acoplamiento ion-electrón sobre la conducción térmica a alturas entre los 250 y los 400 km de altura. El acoplamiento de los electrones con los iones más fríos causa una disminución de  $T_e$  en este rango de alturas. Por encima de los 400 km, la conducción térmica domina y la  $T_e$  aumenta con la altura en respuesta a un flujo de calor que desciende desde la magnetósfera.

### **2.14 Región F ecuatorial**

Además de variaciones temporales, la ionosfera presenta también variaciones espaciales, que se manifiestan como diferencias considerables entre las condiciones ionosféricas a latitudes bajas, medias y altas. A latitudes bajas, los campos eléctricos generados en la región E ecuatorial por los vientos termosféricos son transmitidos a lo largo de las líneas de campo magnético hacia alturas de la región F debido a la alta conductividad en la dirección de las líneas (Fig. 2.17). Durante el día, los campos eléctricos de dínamo tienen dirección este, lo que causa un drift de plasma  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ascendente, mientras que lo inverso ocurre de noche. El plasma que es levantado durante el día se eleva hasta a grandes alturas de la región F (aproximadamente 700 km), donde el plasma fluye hacia latitudes más grandes por difusión bajo las fuerzas del gradiente de presión y de la gravedad haciendo que el plasma descienda a lo largo de las líneas de campo a latitudes fuera del ecuador magnético, produciendo la acumulación de grandes densidades (crestas de ionización) a latitudes alrededor de los 15°-18° de latitud a ambos lados del ecuador magnético donde una depresión de ionización es creada. La combinación del drift electromagnético con la difusión produce un movimiento de plasma con un patrón de tipo fuente (Fig. 2.18). La estructura latitudinal resultante se caracteriza por dos máximos de densidad e ionización a bajas latitudes y un mínimo centrado en el ecuador magnético, que es conocida como *Anomalía Ecuatorial de Ionización (EIA)*, o como *Anomalía de Appleton*.



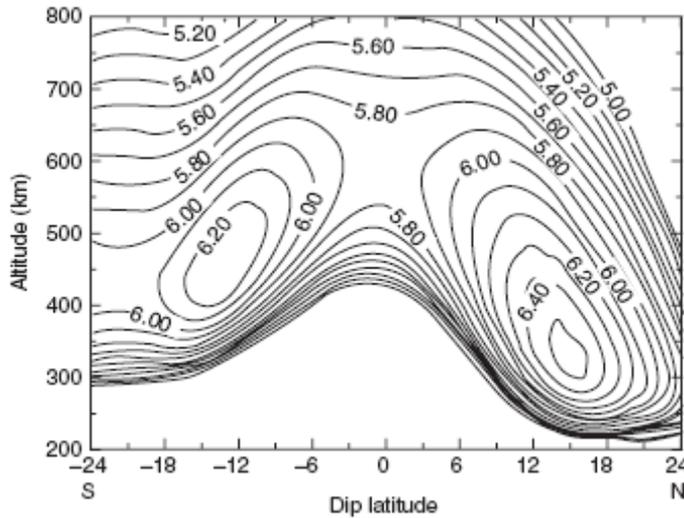
**Figura 2.17** – Los vientos termosféricos en la región E ecuatorial generan campos eléctricos a medida que los iones son arrastrados a través de **B**. Estos campos de dínamo son arrastrados a través de las líneas de campo magnético hacia la región F. Figura extraída del Schunk [2000].



**Figura 2.18** – Patrón del drift del plasma a latitudes bajas debido a la acción combinada del drift ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  cerca del ecuador magnético y una difusión descendente a lo largo de **B** [Hanson & Moffet, 1966]. Figura extraída del Schunk [2000].

Los dos principales factores que influyen en la morfología de las crestas de la anomalía son el drift ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  y los vientos termosféricos meridionales. Un fuerte drift ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  hace que el plasma se mueva a mayores alturas y se difunda hacia abajo a mayores latitudes, afectando la separación de las crestas de la anomalía. Por otro lado, los vientos termosféricos neutros determinan la asimetría entre las crestas norte y sur de la anomalía ecuatorial. La Fig. 2.19 muestra la Anomalía de Appleton, calculada con un modelo numérico para condiciones del solsticio de diciembre [Anderson & Roble, 1981]. La figura muestra las condiciones para las 20:00 de hora local, que es cuando el drift ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  lleve la capa F a 600 km en el ecuador magnético. La asimetría en los picos es resultado de los vientos neutros meridionales que soplan desde el hemisferio sur (verano) hacia el hemisferio norte (invierno). Estos vientos actúan transportando el plasma hacia arriba por las líneas de campo en el hemisferio sur y hacia abajo en el hemisferio norte. Cuatro horas más tarde el drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  es descendente y la altura de la capa F sobre el ecuador magnético baja a 400 km, y las crestas de ionización se acercan al ecuador magnético. La asimetría también decrece porque la cresta norte, que se encuentra a una altura

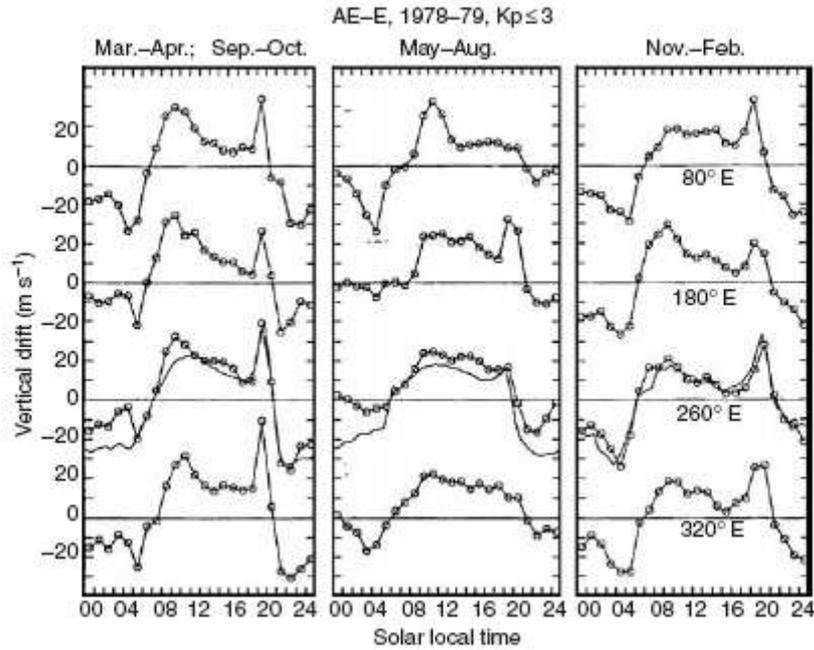
menor, decae a una tasa mayor que la cresta sur [Abdu et. al., 2006; Maus et. al., 2007].



**Figura 2.19** – Curvas de nivel de densidad de electrones ( $\log_{10} n_e$ ) como función de la altura y la latitud geomagnética a las 2000 HL para condiciones del solsticio de diciembre [Anderson & Roble, 1981]. Figura extraída del Schunk [2000].

Como los drifts de plasma verticales inducidos por los campos eléctricos de dínamo tienen un pronunciado efecto sobre la ionosfera a latitudes bajas, se han dedicado grandes esfuerzos para obtener modelos para estas componentes del drift. Uno de los modelos empíricos más completo de los drifts de plasma verticales (campos eléctricos zonales) está basado en las mediciones del satélite Atmosphere Explorer E [Fejer et. al., 1995]. Este modelo incluye dependencias diarias, estacionales, con el ciclo solar y longitudinales. La Fig. (2.10) muestra los drifts verticales de plasma como función de la hora local (HL) en cuatro sectores longitudinales y tres periodos estacionales.

El patrón diario de la velocidad del drift vertical ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  tiene una variación en tiempo que alcanza el pico de velocidad diario ( $\sim 20$  m/s) alrededor de las 11:00 HL, luego de este pico decrece a un mínimo de  $\sim 10$  m/s alrededor de las 16:00 HL. A continuación, se incrementa repentinamente hasta un máximo nocturno de  $\sim 40-50$  m/s después de la puesta del sol (alrededor de las 19:00 HL). Este evento es llamado *aumento pre-inversión* o PRE (del ingles prereversal enhancement). Siguiendo este incremento la velocidad disminuye hasta alcanzar los 0 m/s (19:50 HL) donde invierte su dirección (hacia abajo) alcanzando un máximo negativo de 30-40 m/s alrededor de las 21:00 HL. Finalmente la velocidad de corrimiento hacia abajo  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  se incrementa hasta alcanzar los 0 m/s e invierte su dirección apuntando hacia arriba alrededor del amanecer local. Este típico patrón de 24 hs puede ser modificado en gran parte por variaciones estacionales o del ciclo solar. Mientras que la variación diaria es menos afectada por los cambios estacionales y por la actividad solar, las velocidades nocturnas presentan fuertes cambios. El aumento pre-inversión de la velocidad de drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  del plasma es más obvio durante las estaciones de verano y los equinoccios con un número bajo de manchas solares y durante todas las estaciones con un alto número de éstas.



**Figura 2.20** – Patrón del drift del plasma a latitudes bajas debido a la acción combinada del drift ascendente  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  cerca del ecuador magnético y una difusión descendente a lo largo de  $\mathbf{B}$  [Fejer et. al., 1995]. Figura extraída del Schunk [2000].

### 2.15 Generación de campos eléctricos en la ionosfera

En los capítulos anteriores se vio que los campos eléctricos juegan un rol importante en el comportamiento que presenta la ionosfera pero no se describió como se generan. Diversas fuerzas actúan sobre el plasma ionosférico, como los gradientes de presión la gravedad, el campo magnético y el arrastre debido a los vientos atmosféricos. Los campos eléctricos surgen como resultado de la forma en que los iones y los electrones responden a estas fuerzas. De la generación de corrientes eléctricas internas surgen campos eléctricos de polarización debido a la necesidad de que la corriente neta tenga divergencia nula. Esta condición se expresa de manera cuantitativa a través de la ecuación de la divergencia de la densidad de corriente

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho_c / \partial t \quad (2.48)$$

Cualquier densidad de carga,  $\rho_c$ , debe crear campos eléctricos mediante la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c / \epsilon_0 \quad (2.49)$$

Al mismo tiempo, cualquier fuerza que produzca un movimiento relativo entre los iones y los electrones generara una corriente  $\mathbf{J} = n_e(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ . La componente de  $\mathbf{J}$  que está asociada con la diferencia entre las velocidades de los electrones y los iones tiene una divergencia finita. Sin embargo, esta divergencia crea una densidad de carga a través de la Ec. (2.48), que de acuerdo a la Ec. (2.49), genera un campo eléctrico que fuerza a que la divergencia sea cero. En otras palabras, si las fuerzas que actúan sobre el fluido

de iones y electrones crean una divergencia en  $\mathbf{J}$ , rápidamente se genera un campo eléctrico que modifica las velocidades del fluido de manera que nuevamente  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ .

Un campo eléctrico de 10 mV/m, que es grande para estándares de latitudes ecuatoriales y medias, y asumiendo una escala de longitud de 1 km, de la Ec. (2.49) se tiene  $\rho_c = 8,85 \times 10^{-17} \text{ C/m}^3$ , que lleva a un exceso de iones o electrones de unos pocos miles por metro cúbico comparado con el total de al menos  $10^9 \text{ m}^{-3}$ . La escala temporal para la generación de tal densidad de carga puede estimarse de las Ecs. (2.48) y (2.49)

$$\tau \sim \rho_c / \nabla \cdot \mathbf{J} = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} / \nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (2.50)$$

Si se asume que la conductividad es uniforme e isotrópica, de la ley de Ohm  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ , luego

$$\tau \sim \rho_c / \sigma, \quad (2.51)$$

donde para la componente de  $\sigma$  de menor valor en la ionosfera, se encuentra el mayor valor para  $\tau = 10^{-6} \text{ s}$ . Por esto se puede asegurar que los campos eléctricos se generan de manera muy rápida como respuesta a una divergencia de  $\mathbf{J}$ . Las divergencias de este tipo aparecen cada vez que haya fuerzas que varíen espacialmente o cuando la conductividad cambie en el espacio.

Cuando un campo eléctrico es creado a partir de la acción de un viento, el proceso es llamado dínamo en analogía al generador de corriente eléctrica en el cual un conductor es movido a través de un campo magnético y se transforma energía mecánica en energía eléctrica. En este caso, o en cualquier caso en donde se crea energía eléctrica, la cantidad  $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) < 0$ , y además las fuerzas eléctricas deben actuar oponiéndose a la fuente que origina la separación de cargas. Cuando los campos eléctricos son aplicados a partir de una fuente externa, como lo que ocurre a altas latitudes debido a la interacción viento solar – magnetósfera, usualmente es el caso donde  $(\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) > 0$  en la ionosfera. En este caso la energía eléctrica es convertida en mecánica y es liberado en forma de calor en la ionosfera.

Los campos eléctricos a latitudes bajas y medias son generados casi en su totalidad por los dínamos de las regiones E y F producidos por los vientos neutros del sistema acoplado ionosfera-termósfera [Rishbeth, 1971, 1981], con la excepción de campos eléctricos que penetran en regiones de altas latitudes durante tormentas magnéticas [Fejer & Scherliess, 1997]. La corriente debida a la acción del viento neutro con velocidad  $\mathbf{u}_n$  esta dada por

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{u}_n \times \mathbf{B}). \quad (2.52)$$

Si esta corriente no tiene divergencia nula, se crean campos eléctricos para reducir la corriente total, que queda expresada como:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{u}_n \times \mathbf{B} + \mathbf{E}), \quad (2.53)$$

donde el segundo término representa a los campos eléctricos de polarización, que se producen en toda la región como respuesta al requerimiento de que la corriente, generada por las diversas fuerzas que actúan sobre las cargas, tengan divergencia nula. Dada una distribución de conductividades ionosféricas y vientos neutros es posible calcular los campos eléctricos de polarización resultantes, imponiendo que la corriente

total tenga divergencia nula y el potencial eléctrico sea especificado en los bordes de la región.

## Capítulo 3: Ecuaciones de Transporte

### 3.1 Introducción

Diversos enfoques matemáticos han sido usados para modelar las diversas condiciones que presentan los flujos ionosféricos. Usualmente el estudio cuantitativo de las diferentes situaciones de flujo que se encuentran en la ionosfera comienza a través del uso de ecuaciones de conservación que describen la evolución espacial y temporal de la concentración, velocidad y temperatura de las diferentes especies que se encuentran en el plasma. Schunk [1977] presentó un sistema general de ecuaciones de transporte para flujos de gases neutros y plasmas. Este sistema de ecuaciones, que se derivó usando la formulación de Grad [1958] y los términos de colisión de Burgers [1969], tiene la ventaja de permitir a las diferentes especies tener velocidades y temperaturas separadas. Al abordar este tipo de problemas, es común realizar un gran número de aproximaciones e hipótesis para simplificar las ecuaciones de transporte previamente a su aplicación, por lo que es instructivo analizar la derivación del conjunto de las ecuaciones de transporte para establecer sus ventajas y limitaciones intrínsecas de la aproximación. Lo desarrollado en este Capítulo está basado en el libro de Shunck [2000] que contiene el tratamiento completo de los temas que se verán a continuación.

### 3.2 Ecuación de Boltzmann

La ecuación de Boltzmann es solo el punto de partida para la derivación de los diferentes conjuntos de ecuaciones de transporte. En el desarrollo de Boltzmann no se está interesado en el movimiento de las partículas individuales del gas, sino en la distribución de estas en el espacio. Cada especie de la mezcla que componen al gas es descrita por una función distribución individual  $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t)$ , donde  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}_s$  y  $t$  son variables independientes. La función de distribución corresponde al número de partículas de la especie  $s$  que, en el tiempo  $t$ , se encuentra en un elemento de volumen  $d^3r$  entorno a  $\mathbf{r}$  y simultáneamente tienen velocidades dentro de un elemento de volumen  $d^3v_s$  en el espacio de velocidades entorno a  $\mathbf{v}_s$ . Alternativamente  $f_s$  puede verse como la densidad de probabilidad en el espacio de fase  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s)$ . La evolución de  $f_s$  está determinada por el flujo de partículas en el espacio  $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s)$  bajo la influencia de fuerzas externas y el efecto neto de colisiones. La tasa de cambio de  $f_s$  debida a una variación explícita en el tiempo y un flujo en el espacio está dada por

$$\frac{df_s}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_s(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_s + \Delta \mathbf{v}_s, t + \Delta t) - f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t)}{\Delta t}. \quad (3.1)$$

Como  $\Delta t$  es una cantidad pequeña  $f_s(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}, \mathbf{v}_s + \Delta \mathbf{v}_s, t + \Delta t)$  puede expandirse mediante un desarrollo de Taylor y tomando el limite  $\Delta t \rightarrow 0$  se llega a

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla f_s + \mathbf{a}_s \cdot \nabla_v f_s, \quad (3.2)$$

donde  $\nabla$  es el operador gradiente,  $\nabla_v$  es un operador gradiente similar en el espacio de velocidades y los términos de orden mayor en el desarrollo de Taylor se han despreciado. Además,

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} \rightarrow \mathbf{v}_s, \quad (3.3)$$

$$\frac{\Delta \mathbf{v}_s}{\Delta t} \rightarrow \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \rightarrow \mathbf{a}_s, \quad (3.4)$$

donde  $\mathbf{a}_s$  es la aceleración de las partículas (fuerza/masa). Si las colisiones no son importantes, entonces  $df_s/dt = 0$  y la ecuación resultante se conoce como la *ecuación de Vlasov*. Por el contrario, si no se pueden despreciar las colisiones  $df_s/dt \neq 0$ . Esto ocurre porque las colisiones actúan cambiando instantáneamente la velocidad de la partícula. Las partículas aparecen y desaparecen de regiones del espacio de velocidades y por consiguiente corresponden a términos de producción y pérdida de  $f_s$ . Si  $\delta f_s/\delta t$  representa el efecto de las colisiones, la ecuación que describe la evolución de  $f_s$  se transforma

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla f_s + \mathbf{a}_s \cdot \nabla_v f_s = \frac{\delta f_s}{\delta t}, \quad (3.5)$$

que se conoce como la **ecuación de Boltzmann**. Para colisiones elásticas binarias entre partículas, el operador apropiado es la *integral de colisiones de Boltzmann*

$$\frac{\delta f_s}{\delta t} = \iint g_{st} \sigma(g_{st}, \theta) (f'_s f'_t - f_s f_t) d^3 v_s d\Omega \quad (3.6)$$

donde,

$d^3 v_t$  = elemento de volumen en el espacio de velocidades para la especie  $t$ ,

$g_{st} = |\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_t|$  velocidad relativa entre las especies  $s$  y  $t$  que colisionan entre sí,

$d\Omega$  = elemento de ángulo sólido respecto del centro de masa de las partículas que colisionan,

$\theta$  = ángulo de dispersión respecto del centro de masa,

$\sigma_{st}(g_{st}, \theta)$  = sección transversal de dispersión, definida como el numero de partículas dispersadas por ángulo sólido  $d\Omega$ , por unidad de tiempo, dividido por la intensidad incidente,

$f'_s f'_t = f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_s, t) f_t(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_t, t)$ , donde lo primado indica que las funciones de distribución son evaluadas con las velocidades de las partículas posteriores a la colisión.

En la Ec. (3.6) el primer término entre paréntesis corresponde a las partículas dispersadas en una dada región del espacio de velocidades (término de producción) y el segundo corresponde a las partículas dispersadas fuera de la misma región (término de pérdida).

La integral de colisión de Boltzmann puede ser aplicada a autocolisiones ( $t = s$ ), a colisiones entre partículas distintas, a Colisiones de Coulomb, a colisiones elásticas entre iones y electrones, y a colisiones entre diferentes especies neutras. También, puede aplicarse a interacciones de intercambio de carga entre un ión y su par neutro debido a que el proceso de intercambio de carga es pseudo elástico.

### 3.3 Momentos de la función de distribución

La situación ideal sería resolver la ecuación de Boltzmann para cada una de las especies en la mezcla de gas y obtener de esta forma las funciones de distribución de velocidad individuales, pero ésto puede lograrse sólo en situaciones relativamente simples. Como consecuencia se esta generalmente limitado a obtener información sobre un número limitado de momentos de velocidad de bajo orden de la función de distribución de las especies. Por ejemplo, como  $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t)$  representa el número de partículas que en el tiempo  $t$  se encuentran en un elemento de volumen  $d^3r$  entorno a  $\mathbf{r}$  y simultáneamente tiene velocidades en un elemento de volumen  $d^3v_s$  entorno a  $\mathbf{v}_s$ , al integrar sobre todas las velocidades se obtiene el número de partículas en el elemento de volumen  $d^3r$  al tiempo  $t$ , que es la densidad numérica o concentración,  $n_s(\mathbf{r}, t)$

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d^3v_s . \quad (3.7)$$

De la misma manera, la velocidad promedio o drift de una especie,  $\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)$ , puede obtenerse integrando el producto  $\mathbf{v}_s f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t)$  sobre todas las velocidades y luego dividiendo por la concentración,

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v}_s f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d^3v_s}{\int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d^3v_s} . \quad (3.8)$$

Este procedimiento puede continuarse de manera que si  $\xi_s(\mathbf{v}_s)$  es una función de  $\mathbf{v}_s$  de las partículas de la especie  $s$ , el promedio de  $\xi_s(\mathbf{v}_s)$  en la posición  $\mathbf{r}$  al tiempo  $t$  está dado por

$$\langle \xi_s(\mathbf{v}_s) \rangle = \frac{1}{n_s} \int \xi_s(\mathbf{v}_s) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d^3v_s . \quad (3.9)$$

El procedimiento de multiplicar la función de distribución de las especies por una potencia o producto de la velocidad y luego integrar sobre todas las velocidades se conoce como tomar los **momentos de la velocidad**. Sin embargo, la definición de todos los momentos de velocidad de orden mayor no es única. Por ejemplo, la temperatura es una medición de la dispersión respecto a una velocidad promedio, y esta velocidad promedio debe elegirse antes de que pueda definirse la temperatura. De la misma manera, todos los momentos de velocidad de mayor orden de  $f_s$  deben ser definidos respecto a una velocidad promedio. Una forma es definir los momento de velocidad de la función de distribución respecto de la velocidad promedio de la mezcla de gas [Chapman et. al., 1970]

$$\mathbf{u} = \sum n_s m_s \mathbf{u}_s / \sum n_s m_s . \quad (3.10)$$

Esta definición es apropiada para gases que presentan un gran número de colisiones, en donde las velocidades de drift y las temperaturas individuales no difieren significativamente de la velocidad de drift y la temperatura promedio de la mezcla de gas.

Otra posibilidad es definir las propiedades de transporte de una especie dada respecto de la velocidad de drift promedio de esa especie,  $\mathbf{u}_s$  [Grad, 1949]. Esta definición es más apropiada para atmósferas e ionosferas planetarias, donde pueden darse diferencias grandes entre los drifts de las especies que interactúan. Se define la velocidad térmica o aleatoria en función de la velocidad de drift promedio de una especie como

$$\mathbf{c}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s. \quad (3.11)$$

A esta altura es necesario decidir que momentos de velocidad son necesarios más allá de los primeros dos momentos  $n_s$  y  $\mathbf{u}_s$ . En general, esto dependerá que tan lejos se encuentra el flujo del equilibrio. Para la mayoría de las aplicaciones, los siguientes momentos son suficientes:

**Temperatura:**

$$\frac{3}{2}kT_s = \frac{1}{2}m_s \langle c_s^2 \rangle = \frac{m_s}{2n_s} \int f_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)^2 d^3v_s, \quad (3.12)$$

**Vector flujo de calor:**

$$\mathbf{q}_s = \frac{1}{2}n_s m_s \langle c_s^2 \mathbf{c}_s \rangle = \frac{m_s}{2} \int f_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)^2 (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3v_s, \quad (3.13)$$

**Tensor de presión:**

$$\mathbf{P}_s = n_s m_s \langle \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \rangle = m_s \int f_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3v_s, \quad (3.14)$$

**Tensor flujo de calor:**

$$\mathbf{Q}_s = n_s m_s \langle \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \rangle = m_s \int f_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3v_s \quad (3.15)$$

donde  $k$  es la constante de Boltzmann. El tensor de presión  $\mathbf{P}_s$  es un tensor de segundo orden y el tensor de flujo de calor  $\mathbf{Q}_s$  es un tensor de tercer orden. Si se realiza una suma sobre los elementos diagonales del tensor de presión Ec. (3.14) se obtiene,

$$\sum_{\alpha=1}^3 (P_s)_{\alpha\alpha} = m_s \int f_s(\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s)^2 d^3v_s = 3p_s, \quad (3.16)$$

donde la segunda expresión sigue la Ec. (3.12) y  $p_s = n_s k T_s$  es la presión parcial del gas. Cuando las colisiones son importantes, los elementos diagonales del tensor de presión son los más importantes y generalmente son iguales. Como consecuencia, es conveniente remover estos elementos diagonales del tensor y considerarlos en forma separada, por lo que se logra definiendo un tensor adicional, el tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\tau}_s$ .

$$\boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{P}_s - \rho_s \mathbf{I}, \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la unidad diádica (elementos diagonales igual a uno). En notación de índice, se escribe  $\delta_{\alpha\beta}$ . El tensor de tensiones es una medida de cuánto se desvía el gas de un carácter isotrópico. A medida que las colisiones se tornan más importantes, el gas se comporta de manera más isotrópica y el tensor de tensiones se vuelve despreciable.

### 3.4 Ecuaciones de transporte generales

Las ecuaciones de transporte que describen la evolución temporal y espacial de los momentos de velocidad físicamente significantes ( $n_s, \mathbf{u}_s, T_s, \mathbf{P}_s, \mathbf{q}_s$ ) pueden obtenerse multiplicando la ecuación de Boltzmann Ec. (3.5), por la función apropiada y luego integrando sobre el espacio de velocidades. Sin embargo, antes de comenzar con este procedimiento, es conveniente expresar la ecuación de Boltzmann de una manera diferente. Como  $\mathbf{r}, \mathbf{v}$  y  $t$  son variables independientes

$$\nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) = \mathbf{v}_s \cdot \nabla f_s + f_s (\nabla \cdot \mathbf{v}_s) = \mathbf{v}_s \cdot \nabla f_s, \quad (3.18)$$

$$\nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) = \mathbf{a}_s \cdot \nabla_v f_s + f_s (\nabla_v \cdot \mathbf{a}_s) = \mathbf{a}_s \cdot \nabla_v f_s, \quad (3.19)$$

porque  $\nabla_v \cdot \mathbf{a}_s = 0$  para los procesos relevantes a atmósferas e ionosferas planetarias. Entonces la ecuación de Boltzmann (3.5) puede reescribirse como

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) + \nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) = \frac{\delta f_s}{\delta t}. \quad (3.20)$$

A continuación se obtendrán las ecuaciones de transporte a partir de la Ec. (3.20). Las ecuaciones de transporte resultantes se encuentran en lo que se denomina su forma conservativa. La ecuación que describe la evolución de la densidad de las especies se obtiene integrando la Ec. (3.20) sobre el espacio de las velocidades

$$\int \left[ \frac{\partial f_s}{\partial t} + \nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) + \nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) \right] d^3 v_s = \int \frac{\delta f_s}{\delta t} d^3 v_s, \quad (3.21)$$

donde

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} d^3 v_s = \frac{\partial}{\partial t} \int f_s d^3 v_s = \frac{\partial n_s}{\partial t}, \quad (3.22)$$

$$\int \nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) d^3 v_s = \nabla \cdot \int f_s \mathbf{v}_s d^3 v_s = \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s), \quad (3.23)$$

$$\int \nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) d^3 v_s = \int (f_s \mathbf{a}_s) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_v dA_v = 0, \quad (3.24)$$

$$\int \frac{\delta f_s}{\delta t} d^3 v_s \equiv \frac{\delta n_s}{\delta t}. \quad (3.25)$$

En la Ec. (3.24) se aplica el teorema de la divergencia de manera que la integral de volumen sobre el espacio de las velocidades se transforma en una integral de superficie en infinito, donde  $dA_v$  es el elemento de superficie y  $\hat{\mathbf{n}}_v$  es el vector unitario normal a la superficie. Como no hay partículas con velocidades infinitas,  $f_s$  y la integral de superficie en la Ec. (3.24) tienden a cero a medida que  $v_s$  tiende a infinito. Sustituyendo las Ecs. (3.22)-(3.25) en la Ec. (3.21) se obtiene la **ecuación de continuidad**

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = \frac{\delta n_s}{\delta t}. \quad (3.26)$$

La ecuación que describe la evolución de la velocidad de las especies se obtiene al multiplicar la ecuación de Boltzmann por  $m_s \mathbf{c}_s$  y luego integrando sobre el espacio de velocidades

$$m_s \int \left[ \mathbf{c}_s \frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{c}_s \nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) + \mathbf{c}_s \nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) \right] d^3 v_s = m_s \int \mathbf{c}_s \frac{\delta f_s}{\delta t} d^3 v_s, \quad (3.27)$$

donde los diferentes términos pueden integrarse obteniendo los siguientes resultados

$$m_s \int \frac{\partial f_s}{\partial t} (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3 v_s = n_s m_s \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t}, \quad (3.28)$$

$$m_s \int \nabla \cdot (f_s \mathbf{v}_s) (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3 v_s = \nabla \cdot \mathbf{P}_s + n_s m_s (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s, \quad (3.29)$$

$$m_s \int \nabla_v \cdot (f_s \mathbf{a}_s) (\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s) d^3 v_s = -n_s m_s \langle \mathbf{a}_s \rangle, \quad (3.30)$$

$$m_s \int \mathbf{c}_s \frac{\delta f_s}{\delta t} d^3 v_s \equiv \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t}. \quad (3.31)$$

En la evaluación de la integrales en las Ecs (3.28)-(3.31) se utilizó la identidad vectorial que involucra la divergencia de un escalar multiplicado por un vector, el teorema de la divergencia que convierte integrales de volumen en integrales de superficie y las definiciones de las propiedades de transporte (Ecs. (3.7), (3.8) y (3.14)). Considerando ésto y reemplazando las Ecs. (3.28)-(3.31) en la Ec. (3.27) se obtiene la **ecuación de movimiento**

$$n_s m_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_s - n_s m_s \mathbf{G} - n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) = \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t}, \quad (3.32)$$

donde  $\mathbf{G}$  es la aceleración debida a la gravedad,  $\mathbf{E}$  es el campo eléctrico,  $\mathbf{B}$  es el campo magnético,  $e_s$  es la carga,  $m_s$  es la masa de la especie, y  $D_s/Dt$  es la derivada convectiva

$$\frac{D_s}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_s \cdot \nabla. \quad (3.33)$$

De manera similar, las ecuaciones para la energía el tensor de presión, y el flujo de calor se obtienen multiplicando la ecuación de Boltzmann (3.20) por  $\frac{1}{2} m_s c_s^2$ ,  $m_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$ , y  $\frac{1}{2} m_s c_s^2 \mathbf{c}_s$  respectivamente, y luego integrando sobre el espacio de velocidades. Luego

de una considerable cantidad de álgebra estas ecuaciones pueden expresarse de la siguiente manera

**Ecuación de Energía:**

$$\frac{D_s}{Dt} \left( \frac{3}{2} \rho_s \right) + \frac{3}{2} \rho_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \mathbf{P}_s : \nabla \mathbf{u}_s = \frac{\delta E_s}{\delta t}. \quad (3.34)$$

**Ecuación del tensor de presión:**

$$\begin{aligned} \frac{D_s \mathbf{P}_s}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{Q}_s + \mathbf{P}_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \frac{e_s}{m_s} (\mathbf{B} \times \mathbf{P} - \mathbf{P}_s \times \mathbf{B}) \\ + \mathbf{P}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s + (\mathbf{P}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s)^T = \frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

**Ecuación de flujo de calor:**

$$\begin{aligned} \frac{D_s \mathbf{q}_s}{Dt} + \mathbf{q}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s + \mathbf{q}_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \mathbf{Q}_s : \nabla \mathbf{u}_s + \nabla \cdot \mu_s \\ + \left[ \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} - \mathbf{G} - \frac{e_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) \right] \\ \cdot \left( \boldsymbol{\tau}_s + \frac{5}{2} \rho_s \mathbf{I} \right) - \frac{e_s}{m_s} \mathbf{q}_s \times \mathbf{B} = \frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

donde

$$\frac{\delta E_s}{\delta t} \equiv \frac{m_s}{2} \int \frac{\delta f_s}{\delta t} c_s^2 d^3 v_s, \quad (3.37)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t} \equiv m_s \int \frac{\delta f_s}{\delta t} \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s d^3 v_s, \quad (3.38)$$

$$\frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t} \equiv \frac{m_s}{2} \int \frac{\delta f_s}{\delta t} c_s^2 \mathbf{c}_s d^3 v_s. \quad (3.39)$$

En las Ecs. (3.34)-(3.36), el transpuesto de un tensor  $\mathbf{A} = A_{\alpha\beta}$  se denota por  $\mathbf{A}^T = A_{\beta\alpha}$  y la operación  $\mathbf{Q}_s : \nabla \mathbf{u}_s = \sum_{\theta} \sum_{\gamma} (Q_s)_{\alpha\theta\gamma} (\partial u_{s\theta} / \partial x_{\gamma})$  corresponde al doble producto entre los 2 tensores  $\mathbf{Q}_s$  y  $\nabla \mathbf{u}_s$ .

En este punto es importante remarcar algunos aspectos de las ecuaciones generales de transporte. El primero es que el conjunto de ecuaciones puede incrementarse a un tamaño arbitrario tomando momentos de velocidad adicionales. Por ejemplo, si la ecuación de Boltzmann es multiplicada por  $m_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$  e integrada sobre el espacio de velocidades, se obtiene una ecuación que describe la evolución del tensor de flujo de calor  $\mathbf{Q}_s$ . El segundo aspecto es que las ecuaciones de transporte generales no

constituyen un sistema cerrado ya que la ecuación que gobierna el momento de orden  $\ell$  contiene momentos de orden  $\ell + 1$ . Esto es, la ecuación de continuidad describe la evolución de la densidad, pero también contiene la velocidad de drift. Por último, debe notarse que los términos debidos a las colisiones que aparecen del lado derecho de las ecuaciones de transporte pueden ser evaluados en forma rigurosa solo para un único potencial de interacción entre las partículas que colisionan. Para potenciales de interacción generales, es necesario conocer la función de distribución de las partículas para poder evaluar los términos de colisión. Por lo tanto, para obtener un sistema de ecuaciones que pueda usarse, es necesaria una expresión aproximada para la función de distribución de velocidad de manera que el sistema de ecuaciones sea cerrado y puedan ser evaluados los términos de colisión.

### 3.5 Distribución de velocidad Maxwelliana

Una función de distribución relativamente simple prevalece cuando dominan las colisiones. Bajo estas condiciones las funciones de distribución de las especies tienden a una función de distribución Maxwelliana. Si las diferentes especies que componen la mezcla de gas poseen drifts relativos, pero las colisiones entre partículas similares son significantes, luego  $f_s$  tiende a una distribución Maxwelliana local

$$f_s^M(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) = n_s(\mathbf{r}, t) \left( \frac{m_s}{2\pi kT_s(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \exp \left\{ -m_s [\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t)]^2 / 2kT_s(\mathbf{r}, t) \right\}. \quad (3.40)$$

Para el caso donde dominan las colisiones,  $f_s$  toma esta forma en todas las posiciones del espacio y en todo tiempo, es por esto que se llama distribución Maxwelliana local. Notar que la Maxwelliana depende solo de los momentos de densidad, de velocidad de drift y de temperatura. Es fácil demostrar que esta distribución es consistente con las definiciones generales para la densidad, velocidad de drift y temperatura (Ecs. (3.7), (3.8) y (3.12)). El pico de la distribución ocurre en  $\mathbf{v}_s = \mathbf{u}_s$ . La distribución es simétrica respecto del pico y decae exponencialmente en todas las direcciones. La distribución decrece con un factor de "e" cuando  $|\mathbf{v}_s - \mathbf{u}_s| = (2kT_s/m_s)^{1/2}$ , por lo que el ancho de la Maxwelliana está determinado por la temperatura y la masa.

### 3.6 Cerrando el sistema de ecuaciones de transporte

Como se mencionó en la sección anterior, es necesario tener una expresión para  $f_s$  para poder cerrar el sistema general de ecuaciones de transporte. Una técnica matemática estándar para obtener expresiones aproximadas para las funciones de distribución de las especies es escribir a  $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}_s, t)$  como serie ortogonal completa de la forma

$$f_s(\mathbf{r}, \mathbf{c}_s, t) = f_{s0}(\mathbf{r}, \mathbf{c}_s, t) \sum_{\alpha} a_{\alpha}(\mathbf{r}, t) M_{\alpha}(\mathbf{c}_s), \quad (3.41)$$

donde  $f_{s0}$  es la función de distribución de orden cero,  $M_{\alpha}$  representa un conjunto completo de polinomios ortogonales,  $a_{\alpha}$  representa los coeficientes del desarrollo desconocidos, y el subíndice  $\alpha$  se utiliza para indicar que la suma se realiza

generalmente sobre más de una coordenada. La distribución de orden cero y el conjunto de polinomios ortogonales son elegidos de manera que la serie converja rápidamente. Si las colisiones son importantes, la función de distribución es aproximadamente Maxwelliana en todo el espacio y el tiempo. Consecuentemente, se toma como orden cero de la serie una distribución Maxwelliana local,  $f_{s0} = f_s^M$ .

Con la Maxwelliana local como la función de orden cero y con un sistema coordenado cartesiano, los polinomios ortogonales asociados son los tensores de Hermite. Los coeficientes de la serie son también tensores de todo orden. Por conveniencia, sin embargo, los coeficientes se pueden expresar en términos de momentos físicos significantes de la función de distribución ( $n_s, \mathbf{u}_s, T_s, \mathbf{P}_s, \mathbf{q}_s$ ) tomando los momentos de velocidad apropiados de la serie (Ec. (3.41)). Para cerrar el sistema, la serie en primer lugar es truncada igualando a cero los coeficientes de la expansión de mayor orden. Solo se retienen las ecuaciones de transporte que se relacionan con los momentos de velocidad que contiene la serie truncada. Si embargo, la ecuación de transporte para el momento de orden  $\ell$  contiene el momento de orden  $\ell + 1$ . Estos momentos de orden mayor en las ecuaciones de transporte no se igualan a cero, sino que se expresan en función de momentos de orden menor con la ayuda de la serie truncada, lo que da como resultado un sistema cerrado de ecuaciones. Para atmósferas e ionosferas planetarias, la serie que incluye el tensor de tensión y el vector de flujo de calor es particularmente útil. Es la llamada *aproximación de 13 momentos*, en la cual  $f_s$  toma la forma

$$f_s = f_{s0} \left[ 1 + \frac{m_s}{2kT_s \rho_s} \boldsymbol{\tau}_s : \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s - \left( 1 - \frac{m_s c_s^2}{5kT_s} \right) \frac{m_s}{kT_s \rho_s} \mathbf{q}_s \cdot \mathbf{c}_s \right], \quad (3.42)$$

donde  $f_{s0}$  está dado por la Ec.(3.40). El nombre aproximación de los 13 momentos proviene del hecho de que cada especie de la mezcla de gas está descrito por 13 parámetros ( $n_s = 1, \mathbf{u}_s = 3, T_s = 1, \mathbf{q}_s = 3, \boldsymbol{\tau}_s = 5$ ), en donde solo 5 de los 9 elementos del tensor de tensión son incógnita, ya que es simétrico ( $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ ) y tiene traza nula.

Puede demostrarse que multiplicando la expresión de  $f_s$  dada por la Ec. (3.42), respectivamente por  $1, \mathbf{c}_s, \frac{1}{2} m_s c_s^2, m_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$  y  $\frac{1}{2} m_s c_s^2 \mathbf{c}_s$  e integrando luego sobre el espacio de velocidades, se obtiene la densidad, la velocidad de drift, la temperatura, el tensor de tensión y el vector flujo de calor. Sin embargo, las ecuaciones de transporte (3.35) y (3.36) contienen a los momentos ( $\boldsymbol{\mu}_s, \mathbf{Q}_s$ ) que son de orden mayor que los que se encuentran en la aproximación de los 13 momentos. Estos momentos de mayor orden pueden ahora expresarse en función de los 13 momentos de orden menor con la ayuda de la serie truncada. Específicamente, al multiplicar la Ec. (3.42) por  $\frac{1}{2} m_s c_s^2 \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$  y  $m_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s \mathbf{c}_s$  respectivamente e integrando sobre las velocidades, se obtiene

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{5}{2} \frac{kT_s}{m_s} \left( \rho_s \mathbf{1} + \frac{7}{5} \boldsymbol{\tau}_s \right), \quad (3.43)$$

$$(\mathbf{Q}_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{2}{5} \left[ (q_s)_\alpha \delta_{\beta\gamma} + (q_s)_\beta \delta_{\alpha\gamma} + (q_s)_\gamma \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (3.44)$$

Usando ahora estas ecuaciones y es posible calcular los términos necesarios para cerrar el sistema de ecuaciones

$$\nabla \cdot \mathbf{Q}_s = \frac{2}{5} \left[ \nabla \mathbf{q}_s + (\nabla \mathbf{q}_s)^T + (\nabla \cdot \mathbf{q}_s) \mathbf{I} \right], \quad (3.45)$$

$$\mathbf{Q}_s : \nabla \mathbf{u}_s = \frac{2}{5} \left[ \mathbf{q}_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \nabla \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s \right], \quad (3.46)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mu}_s = \frac{5}{2} \frac{k}{m_s} \left[ \nabla (\tau_s \rho_s) + \frac{7}{5} \nabla \cdot (\tau_s \boldsymbol{\tau}_s) \right]. \quad (3.47)$$

### 3.7 Ecuaciones de transporte de 13 momentos

Reemplazando las expresiones dadas por las Ecs. (3.45), (3.46) y (3.47) en las Ecs. (3.35) y (3.36) y junto con las Ecs. (3.26), (3.32) y (3.34) se obtiene el sistema cerrado de ecuaciones de transporte en la aproximación de los 13 momentos. Para futuras referencias es conveniente enumerarlas juntas en un lugar. Sin embargo, generalmente resulta más útil una ecuación que describa la evolución del tensor de tensión  $\boldsymbol{\tau}_s$  en lugar de una ecuación para el tensor de presión  $\mathbf{P}_s$ . Esto se logra con la ayuda de la ecuación de energía (3.34) y de la relación  $\mathbf{P}_s = \boldsymbol{\tau}_s + p_s \mathbf{I}$ . De la misma manera resulta conveniente simplificar la ecuación para el flujo de calor con la ayuda de la ecuación de movimiento. El sistema cerrado de ecuaciones de transporte resultante en la aproximación de los 13 momentos se escribe como

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = \frac{\delta n_s}{\delta t}, \quad (3.48)$$

$$n_s m_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{P}_s - n_s m_s \mathbf{G} - n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) = \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t}, \quad (3.49)$$

$$\frac{D_s}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_s \right) + \frac{3}{2} p_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \mathbf{P}_s : \nabla \mathbf{u}_s = \frac{\delta E_s}{\delta t}, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_s \boldsymbol{\tau}_s}{Dt} + \boldsymbol{\tau}_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \frac{e_s}{m_s} (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau}_s \times \mathbf{B}) \\ + p_s \left[ \nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) \mathbf{I} \right] \\ + \frac{2}{5} \left[ \nabla \mathbf{q}_s + (\nabla \mathbf{q}_s)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{q}_s) \mathbf{I} \right] \\ + \left[ \boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{u}_s + (\boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{u}_s)^T + \frac{2}{3} (\boldsymbol{\tau}_s : \mathbf{u}_s) \mathbf{I} \right] = \frac{\delta \boldsymbol{\tau}_s}{\delta t}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{D_s \mathbf{q}_s}{Dt} + \frac{7}{5} \mathbf{q}_s \cdot \nabla \mathbf{u}_s + \frac{7}{5} \mathbf{q}_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \frac{2}{5} \nabla \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{q}_s \\
& + \frac{5 k \rho_s}{2 m_s} \nabla T_s + \frac{1}{\rho_s} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s) \cdot (\rho_s \mathbf{I} - \boldsymbol{\tau}_s) \\
& + \left( \frac{7 k}{2 m_s} \nabla T_s - \frac{1}{\rho_s} \nabla p_s \right) \cdot \boldsymbol{\tau}_s - \frac{e_s}{m_s} \mathbf{q}_s \times \mathbf{B} = \frac{\delta \mathbf{q}'_s}{\delta t},
\end{aligned} \tag{3.52}$$

donde

$$\frac{\delta \boldsymbol{\tau}_s}{\delta t} = \frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t} - \frac{2}{3} \frac{\delta T_s}{\delta t} \mathbf{I}, \tag{3.53}$$

$$\frac{\delta \mathbf{q}'_s}{\delta t} = \frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} \cdot \left( \boldsymbol{\tau}_s + \frac{5}{2} \rho_s \mathbf{I} \right), \tag{3.54}$$

y  $\rho_s = n_s m_s$  es la densidad de masa.

El sistema de ecuaciones de los 13 momentos puede utilizarse para describir un amplio rango de flujos de gases neutros y de plasmas, siempre que las distribuciones de velocidad de las especies no se aparten demasiado de una Maxwelliana. Se puede aplicar a flujos dominados por colisiones, sin colisiones y sobre una transición continua entre estos regimenes. También puede aplicarse a flujos subsónicos, transónicos y supersónicos como también a flujos químicamente reactivos. En el caso de flujo dominado por colisiones, el sistema de ecuaciones de los 13 momentos se reduce a las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes.

La anisotropía en la temperatura ocurre típicamente en un plasma cuando las colisiones son infrecuentes y cuando hay una dirección preferencial, que puede resultar de la presencia de un fuerte campo magnético, un fuerte campo eléctrico, o un gradiente de presión importante. La difusión térmica de las partículas a lo largo de la dirección preferencial puede ser diferente a la perpendicular a ésta, lo que lleva luego a temperaturas diferentes en las direcciones paralela y perpendicular.

La aplicación rigurosa de la aproximación de los 13 momentos de las ecuaciones de transporte para un plasma requiere un tratamiento bastante complicado, por lo que usualmente se utiliza un sistema de ecuaciones significativamente simplificado para estudiar el comportamiento del plasma ionosférico.

### **3.8 Aproximación de los 5 momentos**

En la aproximación de los 5 momentos, la distribución de velocidad de las especies se asume que está adecuadamente representada por una Maxwelliana (Ec. (3.40)). En este nivel de aproximación los momentos de tensión, flujo de calor y de orden mayor son despreciados, y cada especie en el gas está representada sólo por la densidad, la velocidad y la temperatura. Como la velocidad tiene tres componentes hay en total 5 parámetros que describen la evolución de cada especie. La evolución temporal y espacial de estos 5 parámetros está gobernada por las ecuaciones de continuidad, movimiento y energía (Ecs. (3.48)-(3.50)). La reducción del sistema de ecuaciones de

transporte se obtiene al usar la distribución de velocidad Maxwelliana para expresar los momentos de mayor orden en términos de los momentos de menor orden ( $n_s, \mathbf{u}_s, T_s$ ). Este procedimiento lleva a que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_s &= \boldsymbol{\tau}_s = 0, \\ \mathbf{P}_s &= (n_s k T_s) \mathbf{I} = p_s \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Es importante notar que en la aproximación de los 5 momentos, no se incluye el flujo de calor y el tensor de tensión es diagonal e isotrópico (i.e., los tres elementos diagonales son iguales). De esta manera usando las ecuaciones de continuidad, momento y energía (Ecs. (3.48)-(3.50)) y adoptando la condición de clausura (3.55) el sistema de ecuaciones de transporte para la aproximación de los 5 momentos toma la forma

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = \frac{\delta n_s}{\delta t}, \quad (3.56)$$

$$n_s m_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} + \nabla p_s - n_s m_s \mathbf{G} - n_s e_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) = \frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t}, \quad (3.57)$$

$$\frac{D_s}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_s \right) + \frac{3}{2} p_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) = \frac{\delta E_s}{\delta t}. \quad (3.58)$$

La aproximación de los 5 momentos presenta limitaciones significativas. Por ejemplo, no considera procesos que producen presiones anisotrópicas, difusión térmica y conducción térmica, ya que el flujo de calor y la tensión no son consideradas a este nivel de aproximación.

### 3.9 Términos de colisión para distribuciones de velocidad Maxwellianas

Para poder evaluar los términos de colisión para procesos generales (Ec. (3.6)) es necesario tener una expresión aproximada para las funciones de distribución de las especies. El caso más simple consiste en considerar que cada especie en el gas puede ser descrita por una distribución Maxwelliana (Ec. (3.40)). Lo que deriva en la aproximación de los 5 momentos en donde cada especie en el gas está caracterizada por 5 parámetros ( $n_s = 1, \mathbf{u}_s = 3, T_s = 1$ ). Para distribuciones de velocidad Maxwellianas es posible derivar términos de colisión validos para diferencias de velocidad y temperatura arbitrarias entre las especies del gas. Sin embargo, aún bajo esta simplificación el cálculo es laborioso [Schunk, 1977; Schunk, 2000]. Por esta razón a continuación sólo se presentan los términos de colisión generales para casos especiales que son de importancia para este trabajo. Las expresiones generales para los términos de colisión de la aproximación de los 5 momentos pueden resumirse de la siguiente manera

$$\frac{\delta n_s}{\delta t} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} = \sum_t n_s m_s v_{st} (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_s) \Phi_{st}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta t} = \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} \left[ 3k(T_t - T_s) \Psi_{st} + m_t (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t)^2 \Phi_{st} \right], \quad (3.61)$$

donde  $v_{st}$  es la frecuencia de colisión y donde  $\Psi_{st}$  y  $\Phi_{st}$  son factores de corrección dependientes de la velocidad y son diferentes para los distintos procesos de colisión. Los factores de corrección para la ionosfera conciernen colisiones de Coulomb, colisiones de esfera dura y colisiones ión-neutro elásticas (molécula de Maxwell). En el último caso  $\Psi_{st} = 1$  y  $\Phi_{st} = 1$ .

Para la mayoría de las ionosferas planetarias la hipótesis de que cada especie en el gas puede describirse por distribuciones Maxwellianas individuales no resulta adecuada. El inconveniente que presenta esta suposición es que no tiene en cuenta procesos de tensión viscosa y de flujo de calor. La aproximación que incluye a la tensión y al flujo de calor es la función de distribución de los 13 momentos (Ec. (3.42)). A este nivel de aproximación, los términos de colisión para potenciales de interacción arbitrarios han sido derivados sólo para flujos de velocidades relativas bajas, donde las diferencias entre las velocidades de las especies son pequeñas en comparación con las velocidades térmicas de las especies. En este límite, los términos de colisión han sido derivados para pequeñas y grandes diferencias de temperatura entre las especies interactuantes. Los primeros se conocen como términos de colisión "lineales" de Burgers y los últimos como términos de colisión "semilineales" de Burgers [Burgers, 1969]. Los términos de colisión lineales pueden escribirse de la siguiente forma [Schunk, 1977]

$$\frac{\delta n_s}{\delta t} = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} = - \sum_t n_s m_s v_{st} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) + \sum_t v_{st} \frac{z_{st} \mu_{st}}{k T_{st}} \left[ \mathbf{q}_s - \frac{\rho_s}{\rho_t} \mathbf{q}_t \right], \quad (3.63)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta t} = - \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} 3k(T_s - T_t), \quad (3.64)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t} = - \sum_t \frac{2m_s v_{st}}{m_s + m_t} \left[ \mathbf{P}_s - \frac{n_s}{n_t} \mathbf{P}_t + \frac{3}{10} z_{st}'' \frac{m_t}{m_s} \left( \boldsymbol{\tau}_s + \frac{\rho_s}{\rho_t} \boldsymbol{\tau}_t \right) \right] - \frac{3}{5} z_{ss}'' v_{ss} \boldsymbol{\tau}_s, \quad (3.65)$$

$$\frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t} = - \sum_t v_{st} \left[ D_{st}^{(1)} \mathbf{q}_s - D_{st}^{(4)} \frac{\rho_s}{\rho_t} \mathbf{q}_t + \frac{5}{2} \rho_s (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) \left( 1 - \frac{m_t z_{st}}{m_s + m_t} \right) \right] - \frac{2}{5} z_{ss}'' v_{ss} \mathbf{q}_s, \quad (3.66)$$

donde

$$D_{st}^{(1)} = \frac{1}{(m_s + m_t)^2} \left[ 3m_s^2 - \frac{5}{2} m_t (m_s + m_t) z_{st} + m_t^2 z_{st}' + \frac{4}{5} m_s m_t z_{st}'' \right], \quad (3.67)$$

$$D_{st}^{(4)} = \frac{1}{(m_s + m_t)^2} \left[ 3m_t^2 - \frac{5}{2} m_t (m_s + m_t) z_{st} + m_t^2 z_{st}' - \frac{4}{5} m_t^2 z_{st}'' \right], \quad (3.68)$$

y donde  $\rho_s = n_s m_s$  es la densidad de masa,  $\mu_{st} = m_s m_t / (m_s + m_t)$  es la masa reducida, y  $T_{st} = (m_s T_s + m_t T_t) / (m_s + m_t)$  es la temperatura reducida. Las cantidades  $z_{st}$ ,  $z_{st}'$  y  $z_{st}''$  son

números que son diferentes para distintas combinaciones de especies  $s$  y  $t$  [Schunk, 2000]. Los términos de colisión semilineales correspondientes a la ecuación de continuidad, momento y energía son iguales al caso lineal, mientras que los términos para la ecuación de la tensión y del flujo de calor toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t} = & \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} 2k(T_t - T_s) \mathbf{I} - \sum_t \frac{2m_s v_{st} T_t}{m_s + m_t T_s} \left( \boldsymbol{\tau}_s - \frac{n_s T_s}{n_t T_t} \boldsymbol{\tau}_t \right) \\ & - \sum_t \frac{v_{st}}{m_s + m_t} \left[ \frac{3}{5} m_t z_{st}'' - 2\mu_{st} (1 - z_{st}) \frac{(T_t - T_s)}{T_{st}} \right] \left( \boldsymbol{\tau}_s + \frac{\rho_s}{\rho_t} \boldsymbol{\tau}_t \right), \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t} = & \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} (\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_s) \left\{ \frac{5}{2} k T_s \left[ \frac{T_t}{T_{st}} + \frac{m_t T_{st}}{m_s T_s} (1 - z_{st}) \right] - k(T_t - T_s) \gamma_{st} \right\} \\ & - \sum_t \frac{v_{st}}{m_s + m_t} \mathbf{q}_s \left[ \frac{3m_s^2}{(m_s + m_t)^2} \frac{T_t^2}{T_{st}^2} + B_{st}^{(3)} \left( z_{st}' - \frac{5}{2} z_{st} \right) - B_{st}^{(1)} \right. \\ & \left. + \frac{m_s m_t}{(m_s + m_t)^2} \frac{T_t}{T_{st}} \left( \frac{4}{5} z_{st}'' - \frac{5}{2} \frac{T_s}{T_{st}} z_{st} \right) \right] \\ & - \sum_t \frac{v_{st}}{m_s + m_t} \frac{\rho_s}{\rho_t} \mathbf{q}_t \left[ \frac{3m_t^2}{(m_s + m_t)^2} \frac{T_s^2}{T_{st}^2} + B_{st}^{(3)} \left( z_{st}' - \frac{5}{2} z_{st} \right) + B_{st}^{(2)} \right. \\ & \left. - \frac{m_s m_t}{(m_s + m_t)^2} \frac{T_s}{T_{st}} \left( \frac{4}{5} \frac{m_t}{m_s} z_{st}'' + \frac{5}{2} \frac{T_t}{T_{st}} z_{st} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde

$$\gamma_{st} = \frac{m_t}{m_s + m_t} \left[ 2z_{st}'' - 5 \frac{T_s}{T_{st}} - \frac{15}{2} \frac{m_s (1 - z_{st}) (T_t - T_s)}{m_s + m_t T_{st}} \right], \quad (3.71)$$

$$B_{st}^{(1)} = \frac{m_t \mu_{st}}{(m_s + m_t)^2} \frac{(T_t - T_s)}{T_{st}} \left[ \frac{4}{5} z_{st}''' - 2z_{st}'' + \frac{m_s T_t}{m_t T_{st}} (6 - 11z_{st}) \right], \quad (3.72)$$

$$B_{st}^{(2)} = \frac{m_t \mu_{st}}{(m_s + m_t)^2} \frac{(T_t - T_s)}{T_{st}} \left[ -\frac{4}{5} z_{st}''' + 2z_{st}'' + \frac{T_t}{T_{st}} (6 - 11z_{st}) \right], \quad (3.73)$$

$$B_{st}^{(3)} = \frac{m_t^2}{(m_s + m_t)^2} \left[ 1 + \frac{3m_s^2}{(m_s + m_t)^2} \frac{(T_t - T_s)^2}{T_{st}^2} \right]. \quad (3.74)$$

El primado sobre la suma indica que se incluye el caso  $t = s$ . Al igual que antes  $v_{st}$  es la frecuencia de colisión,  $T_{st}$  es la temperatura reducida,  $\mu_{st}$  es la masa reducida, y  $z_{st}$ ,  $z_{st}'$ ,  $z_{st}''$  y  $z_{st}'''$  son números que son diferentes para distintas combinaciones de especies  $s$  y  $t$ .

### 3.10 Ecuaciones de Euler y de Navier-Stokes

En el límite de un gas dominado por colisiones el sistema de ecuaciones de los 13 momentos contiene a las ecuaciones de Euler y a las de Navier-Stokes y describe apropiadamente la difusión térmica y a los procesos de transporte termoeléctricos. En el límite opuesto de un gas libre de colisiones se derivan las ecuaciones de Chew-Goldberger-Low [Chew et al., 1956].

Las ecuaciones de hidrodinámica de Euler y Navier-Stokes pueden obtenerse a partir del sistema de ecuaciones de los 13 momentos usando un esquema de una simple perturbación. Para ello la frecuencia de colisión relevante se asume lo suficientemente grande para que la función de distribución de las especies sea parecida a una Maxwelliana. En este límite dominado por colisiones,  $\tau_s$  y  $\mathbf{q}_s$  son pequeños (del orden de  $1/\nu$ ) comparados con  $n_s$ ,  $\mathbf{u}_s$  y  $T_s$  (del orden de 1). En el orden menor, la tensión y el flujo de calor pueden despreciarse, y las ecuaciones de continuidad, de momento y de energía en la aproximación de los 13 momentos se reducen a

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.75)$$

$$n_s m_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} + \nabla p_s - n_s m_s \mathbf{G} = 0, \quad (3.76)$$

$$\frac{D_s}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_s \right) + \frac{5}{2} p_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.77)$$

donde por simplicidad se supuso que el gas está compuesto por una sola especie neutra. Las expresiones anteriores corresponden a las ecuaciones de Euler de la hidrodinámica.

El próximo orden en el esquema de perturbación,  $\tau_s$  y  $\mathbf{q}_s$  son expresados en función  $n_s$ ,  $\mathbf{u}_s$  y  $T_s$ . Es conveniente simplificar los términos de colisión, para lo cual se supone que al calcular los términos de colisión para la especie  $s$  del gas, las demás especies del gas (es decir las especies  $t \neq s$ ) tienen funciones de distribución Maxwellianas. De esta manera  $\tau_t = 0$  y  $\mathbf{q}_t = 0$  y los términos de colisión lineales (Ecs. (3.63)-(3.66)) toman la forma

$$\frac{\delta \mathbf{M}_s}{\delta t} = - \sum_t n_s m_s v_{st} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) + \sum_t v_{st} \frac{z_{st} \mu_{st}}{k T_{st}} \mathbf{q}_s, \quad (3.78)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta t} = - \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} 3k (T_s - T_t), \quad (3.79)$$

$$\frac{\delta \mathbf{P}_s}{\delta t} = - \sum_t \frac{2m_s n_s v_{st}}{m_s + m_t} k (T_s - T_t) \mathbf{I} - v_{sa} \tau_s, \quad (3.80)$$

$$\frac{\delta \mathbf{q}_s}{\delta t} = - \frac{5}{2} p_s \sum_t v_{st} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) \left( 1 - \frac{m_t z_{st}}{m_s + m_t} \right) - v_{sb} \mathbf{q}_s, \quad (3.81)$$

donde

$$v_{sa} = \frac{3}{5} v_{ss} z_{ss}'' + \sum_t \frac{2m_s v_{st}}{m_s + m_t} \left( 1 + \frac{3}{10} z_{st}'' \frac{m_t}{m_s} \right), \quad (3.82)$$

$$v_{sb} = \frac{2}{5} v_{ss} z_{ss}'' + \sum_t v_{st} D_{st}^{(1)}. \quad (3.83)$$

Para expresar  $\boldsymbol{\tau}_s$  y  $\mathbf{q}_s$  en función de  $n_s$ ,  $T_s$  y  $\mathbf{u}_s$  se utilizan de las Ecs. (3.51), (3.53), (3.79) y (3.80) para el tensor de tensiones y las Ecs. (3.52), (3.54), (3.78) y (3.81) para el flujo de calor. Se asume que los términos que contienen  $v_{\boldsymbol{\tau}_s}$ ,  $v_{\mathbf{q}_s}$ ,  $\omega_s \boldsymbol{\tau}_s$  y  $\omega_s \mathbf{q}_s$  son del mismo orden que los términos que contienen los momentos de menor orden  $n_s$ ,  $T_s$  y  $\mathbf{u}_s$ , mientras que los otros términos que contienen a  $\mathbf{q}_s$  y a  $\boldsymbol{\tau}_s$  son del orden de  $1/v$  y de esta forma pueden despreciarse. Cuando solo se retienen los términos de orden 1, las ecuaciones para el tensor de tensiones y para el flujo de calor en la aproximación de los 13 momentos se transforman en

$$\boldsymbol{\tau}_s + \frac{\omega_s}{v_{sa}} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau}_s \times \mathbf{b}) = -\eta_s \left[ \nabla \mathbf{u}_s + (\nabla \mathbf{u}_s)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) \mathbf{I} \right], \quad (3.84)$$

$$\mathbf{q}_s - \frac{\omega_s}{v_{sc}} \mathbf{q}_s \times \mathbf{b} = -\lambda_s \nabla T_s + \frac{5}{2} \frac{\rho_s}{v_{sc}} \sum_t v_{st} \frac{z_{st} m_t}{m_t + m_s} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t), \quad (3.85)$$

donde los coeficientes de viscosidad  $\eta_s$  y conductividad térmica  $\lambda_s$  están dados por

$$\eta_s = \rho_s / v_{sa}, \quad (3.86)$$

$$\lambda_s = (5/2)(k\rho_s / m_s v_{sc}), \quad (3.87)$$

y donde

$$v_{sc} = v_{sb} + \frac{5}{2} \sum_t v_{st} z_{st} \frac{\mu_{st} T_s}{m_s T_{st}}, \quad (3.88)$$

$$\omega_s = e_s B / m_s, \quad (3.89)$$

siendo  $\omega_s$  la girofrecuencia, que consiste en la frecuencia a la cual una partícula cargada rota entorno a las líneas de campo. De esta manera el sistema cerrado de ecuaciones de Navier-Stokes para la mezcla gas está conformado por las ecuaciones del tensor de tensiones (3.84) y del flujo de calor (3.85) y las siguientes ecuaciones de continuidad, momento y energía:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (3.90)$$

$$\rho_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} + \nabla \rho_s - \rho_s \mathbf{G} - n_s e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_s = - \sum_t \rho_s v_{st} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t) + \sum_t v_{st} \frac{z_{st} \mu_{st}}{k T_{st}} \mathbf{q}_s, \quad (3.91)$$

$$\frac{D_s}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_s \right) + \frac{5}{2} p_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot \mathbf{q}_s + \boldsymbol{\tau}_s : \nabla \mathbf{u}_e = - \sum_t \frac{n_s m_s v_{st}}{m_s + m_t} 3k(T_s - T_t). \quad (3.92)$$

La diferencia entre el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes y el sistema completo de ecuaciones de la aproximación de los 13 momentos es que en el segundo caso,  $\boldsymbol{\tau}_s$  y  $\mathbf{q}_s$  se consideran momentos independientes junto con  $n_s$ ,  $\mathbf{u}_s$  y  $T_s$ , mientras que en el caso de Navier-Stokes  $\boldsymbol{\tau}_s$  y  $\mathbf{q}_s$  son expresados en función de los momentos fundamentales  $n_s$ ,  $\mathbf{u}_s$  y  $T_s$  y sus derivadas primeras. Para el caso de los electrones las expresiones para el tensor de tensión y el flujo de calor toman la forma

$$\boldsymbol{\tau}_e - \frac{5\omega_e}{6\nu_{ea}} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\tau}_e - \boldsymbol{\tau}_e \times \mathbf{b}) = -\eta_e \left[ \nabla \mathbf{u}_e + (\nabla \mathbf{u}_e)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}_e) \mathbf{I} \right], \quad (3.93)$$

$$\mathbf{q}_e + \frac{5\omega_e}{4\nu_{ec}} \mathbf{q}_e \times \mathbf{b} = -\lambda_e \nabla T_e + \frac{15}{8} \frac{p_e}{\nu_{ec}} \sum_i \nu_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) + \frac{25}{8} \frac{p_e}{\nu_{ec}} \sum_n \nu_{en} z_{en} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n). \quad (3.94)$$

De las expresiones anteriores es importante notar que la tensión surge de la divergencia de las velocidades, y que cuando  $\mathbf{B} = 0$ , el tensor de tensiones toma la forma clásica de Navier-Stokes. Además, la ecuación (3.94) indica que el flujo de calor a lo largo de  $\mathbf{B}$  es  $\mathbf{q}_e \sim -\lambda_e \nabla T_e$ , como se espera, pero tiene términos adicionales proporcionales a  $(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$  y  $(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n)$ . Esto indica que el flujo de calor de los electrones en parte es inducido por un drift relativo entre los electrones y las demás especies, que se conoce como efecto termoeléctrico. Las expresiones para el tensor de tensiones y para el flujo de calor de los iones pueden derivarse de manera análoga a la de los electrones, y las ecuaciones resultantes son también similares [Schunk, 1975].

### 3.11 Aplicación a la ionosfera terrestre

La ionosfera terrestre es un plasma parcialmente ionizado, esto es, un gas compuesto por elementos ionizados y electrones libres inmerso en un gas neutro. De lo visto anteriormente para estudiar el comportamiento de un plasma sería necesario plantear y resolver el sistema de ecuaciones de transporte bajo la aproximación de los 13 momentos. El problema es que la aplicación rigurosa de la aproximación de los 13 momentos requiere un tratamiento extremadamente complejo.

El comportamiento del flujo del plasma ionosférico terrestre es usualmente caracterizado a través de la densidad, la velocidad y la temperatura de los electrones e iones, por lo que un enfoque más simple consiste en utilizar el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes. De esta manera sólo es necesario resolver las ecuaciones de continuidad, de momento y de energía. La ventaja de utilizar las ecuaciones de Navier-Stokes derivadas a partir de las ecuaciones de transporte es que se pueden aplicar en forma separada para cada especie del plasma. En el caso de la ionosfera terrestre se formulan hipótesis adicionales para simplificar el sistema de ecuaciones y se deben agregar algunos términos del lado derecho de las ecuaciones para tener en cuenta efectos externos que no fueron considerados. La ecuación de continuidad (3.90) para los electrones e iones del plasma ionosférico se escribe como

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \mathcal{P}_i - n_i \mathcal{L}_i, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = \mathcal{P}_e - n_e \mathcal{L}_e, \quad (3.96)$$

donde se agregan del lado derecho los términos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{L}$  tienen en cuenta la producción y la pérdida de electrones o iones, respectivamente. Los valores de los términos de producción y pérdida pueden calcularse teniendo en cuenta los procesos de fotoionización, intercambio de cargas, y recombinación radiativa y química. Los subíndices  $i$  y  $e$  corresponden a los iones y electrones respectivamente. En general la tensión es chica para el plasma terrestre por lo que el término  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  puede despreciarse. Por lo tanto la ecuación para el momento (3.91) para los electrones e iones se reescribe

$$\rho_i \frac{D_i \mathbf{u}_i}{Dt} + \nabla p_i - \rho_i \mathbf{G} - n_i e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) = -\rho_i \nu_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) - \sum_j \rho_i \nu_{ij} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \quad (3.97)$$

$$\rho_e \frac{D_e \mathbf{u}_e}{Dt} + \nabla p_e - \rho_e \mathbf{G} + n_e e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) = -\rho_e \nu_{en} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n) - \sum_j \rho_e \nu_{ej} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_j), \quad (3.98)$$

donde para el término de colisión, Ec. (3.78), se desprecia la contribución debida al flujo de calor, el subíndice  $n$  corresponde a los neutros y la sumatoria se realiza sobre los distintos iones  $j$  que contenga el plasma. La ecuación que gobierna el balance de energía (3.92) para los iones y los electrones al despreciar el término debido a la tensión,  $\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u}$ , se reescribe como:

$$\begin{aligned} \frac{D_e}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_e \right) + \frac{5}{2} p_e (\nabla \cdot \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = & -\frac{n_e m_e}{m_n} \nu_{en} 3k(T_e - T_n) \\ & - \sum_j \frac{n_e m_e}{m_j} \nu_{ej} 3k(T_e - T_j) + Q_{ph}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_i}{Dt} \left( \frac{3}{2} p_i \right) + \frac{5}{2} p_i (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot \mathbf{q}_i = & -n_i \nu_{ie} 3k(T_i - T_e) \\ & - \sum_j \frac{n_i m_i}{m_j + m_i} \nu_{ij} 3k(T_i - T_j) - \frac{n_i m_i}{m_n + m_i} \nu_{in} 3k(T_i - T_n) + F_{in}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

en donde el término  $Q_{ph}$  en la Ec. (3.99) tiene en cuenta el calentamiento debido a los fotoelectrones y el término  $F_{in}$  en la Ec. (3.100) tiene en cuenta el calentamiento friccional debido al movimiento relativo entre los iones y los neutros. Este término surge de suponer interacciones moleculares Maxwellianas entre los iones y los neutros, en donde el potencial de interacción varía inversamente proporcional a la cuarta potencia de la separación entre partículas. El término de colisión debido a la interacción ion-neutro toma la forma [Schunk, 1975],

$$\frac{\delta E_i}{\delta t} = -\frac{n_i m_i \nu_{in}}{m_i + m_n} \left[ 3k(T_i - T_n) - m_n (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n)^2 \right] = -\frac{n_i m_i}{m_n + m_i} \nu_{in} 3k(T_i - T_n) + F_{in}. \quad (3.101)$$

Para poder cerrar el sistema falta una ecuación para el flujo de calor que lo exprese en función de  $n$ ,  $T$  y  $\mathbf{u}$ . Para esto se considera que el flujo de calor se debe principalmente a la conducción térmica y se produce a lo largo de las líneas de campo despreciando el gradiente de temperatura en la dirección perpendicular. La ecuación para el flujo de calor (3.94) se escribe de la siguiente forma para los electrones e iones del plasma terrestre

$$\mathbf{q}_e = -\lambda_e \nabla T_e, \quad (3.102)$$

$$\mathbf{q}_i = -\lambda_i \nabla T_i, \quad (3.103)$$

Finalmente, las ecuaciones de conservación de energía pueden expresarse en función de la temperatura utilizando la ecuación de estado para un gas ideal  $p = nkT$ , la expresión para la derivada convectiva (Ec. (3.33)) y la ecuación de continuidad libre de fuentes (3.90), obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_e k \frac{\partial T_e}{\partial t} + \frac{3}{2} n_e k (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) T_e + n_e k T_e (\nabla \cdot \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot \mathbf{q}_e = -\frac{n_e m_e}{m_n} v_{en} 3k (T_e - T_n) \\ - \sum_j \frac{n_e m_e}{m_j} v_{ej} 3k (T_e - T_j) + Q_{ph}, \end{aligned} \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} n_i k \frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{3}{2} n_i k (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) T_i + n_i k T_i (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot \mathbf{q}_i = -n_i v_{ie} 3k (T_i - T_e) \\ - \sum_j \frac{n_i m_i}{m_j + m_i} v_{ij} 3k (T_i - T_j) - \frac{n_i m_i}{m_n + m_i} v_{in} 3k (T_i - T_n) + F_{in}, \end{aligned} \quad (3.105)$$

donde el segundo término del lado izquierdo tiene en cuenta el movimiento por advección, el tercer término representa el calentamiento o enfriamiento por expansión adiabática debido al movimiento por advección, el cuarto termino es la divergencia del vector de flujo de calor  $\mathbf{q}$  y los términos en el lado derecho representan los calentamientos debido a colisiones y a fuentes externas.

## **Capítulo 4: Modelado numérico – Método de Volúmenes Finitos**

### **4.1 Introducción**

En la primer parte de esta capitulo se da una descripción general de la diferentes partes que conforman el modelado numérico y se presentan los diferentes métodos numéricos utilizados en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales. La segunda parte describe el Método de Volúmenes Finitos, que es el esquema que fue adoptado para resolver el sistema de ecuaciones. Las referencias bibliográficas principales utilizadas para este Capítulo son los libros de Eymard [2000] y de Ferziger & Peric [2002].

### **4.2 Componentes del Modelado Numérico**

#### **4.2.1 Modelo Matemático**

El punto de partida de cualquier método numérico es el modelo matemático, esto es, el conjunto de ecuaciones diferenciales y las condiciones de borde que describen el problema que se desea estudiar. Generalmente, el modelo matemático incluye simplificaciones de las leyes fundamentales que rigen el problema. El método de resolución se diseña en función del conjunto de ecuaciones a resolver. Tratar de producir un método de resolución general, por ejemplo uno que sea aplicable a todo tipo de flujos, es impractico, sino imposible.

#### **4.2.2 Método Numérico**

Luego de ser elegido el modelo matemático, se debe elegir un método de discretización adecuado, es decir, un método que aproxime las ecuaciones diferenciales por un sistema algebraico de ecuaciones de las variables del problema en algún conjunto discreto de puntos en el espacio y en el tiempo. Existen muchos métodos pero los más importantes son: el método de diferencias finitas, el método de volúmenes finitos y el método de elementos finitos. Existen otros métodos como los esquemas espectrales pero su uso está limitado a problemas especiales. En las siguientes secciones se dará una pequeña descripción de estos métodos, pero se focalizará en el método de volúmenes finitos.

#### **4.2.3 Sistema coordinado**

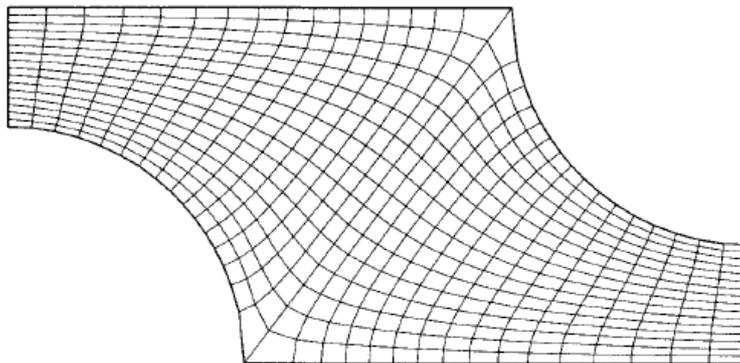
El conjunto de ecuaciones a resolver puede escribirse de muchas formas dependiendo del sistema coordinado utilizado. Por ejemplo pueden elegirse los sistemas coordinados cartesiano, esférico, cilíndrico, curvilíneo ortogonal o curvilíneo no ortogonal, los cuales puede estar fijos o en movimiento. La elección depende del problema a resolver y pueden influenciar el método de discretización y el tipo de grilla a utilizar. En el estudio de la dinámica del plasma ionosférico terrestre se utiliza generalmente un sistema coordinado ortogonal relacionado con el campo magnético de la Tierra, que se conoce como sistema coordinado dipolar y su descripción se verá mas adelante (Sección 5.4).

#### 4.2.4 Grilla Numérica

La ubicación en donde las variables discretizadas son evaluadas está definida por una grilla o malla numérica que esencialmente es una representación discreta del dominio geométrico sobre el cual el problema es resuelto. Divide el dominio de la solución en un número finito de subdominios (volúmenes de control, elementos, etc.). A continuación se describirán algunas de las opciones disponibles.

Las grillas *regulares* o *estructuradas* consisten en familias de líneas de grilla con la propiedad de que los miembros de una familia no se cruzan entre ellas y cruzan a cada miembro de las demás familias solo una vez. Esto permite que las líneas de un conjunto dado sean numeradas de manera consecutiva. La posición de un punto de la grilla (o volumen de control) dentro del dominio está identificado en forma unívoca por un conjunto de dos (2D) o tres (3D) índices, por ejemplo,  $(i,j,k)$ .

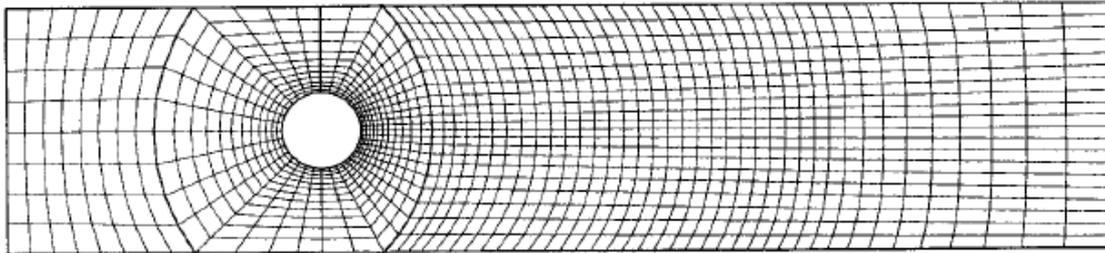
Este tipo de grilla presenta la estructura más simple, ya que es equivalente de manera lógica a una grilla cartesiana. Cada punto tiene 4 y 6 vecinos en dos y tres dimensiones respectivamente; uno de los índices de cada vecino del punto P (índices  $i,j,k$ ) difieren en  $\pm 1$  de los índices correspondientes a P. Un ejemplo de una grilla estructurada en 2D se muestra en la Fig. (4.1). La conectividad entre vecinos simplifica la programación y la matriz del sistema algebraico de ecuaciones tiene una estructura regular, que puede ser explotada al momento de su resolución a partir de técnicas adecuadas. La desventaja de las grillas estructuradas es que sólo pueden ser usadas para dominios de solución geoméricamente simples. Otra desventaja es que puede resultar difícil controlar la distribución de los puntos de la grilla: la concentración de puntos en una región por razones de precisión produce espaciamiento innecesariamente chico en otras partes del dominio de la solución y de esta manera malgasta recursos.



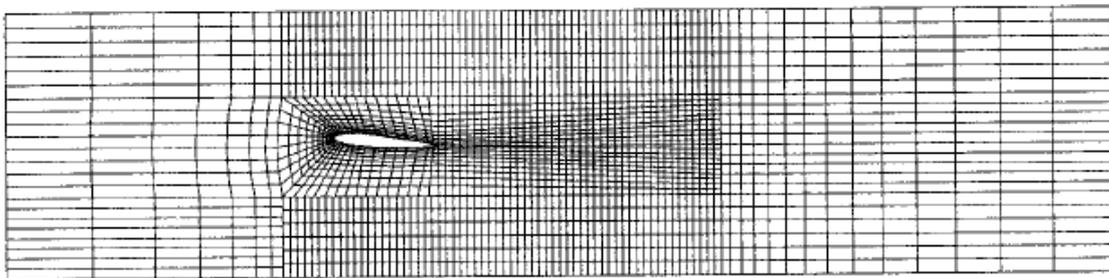
**Figura 4.1** – Ejemplo de una grilla 2D estructurada y no ortogonal. Figura extraída del [Fergizer & Peric, 2002]

Las llamadas grillas *estructuradas en bloques* presentan dos (o más) niveles de subdivisión del dominio de la solución. En el nivel más grueso de la subdivisión, se encuentran bloques que consisten en segmentos relativamente grandes del dominio; su estructura puede ser irregular y pueden o no solaparse. En el nivel más fino (dentro de cada bloque) se define una grilla estructurada. Se requiere un tratamiento especial en las interfaces de los bloques. La Fig. (4.2) muestra una grilla estructurada en bloque con interfaces concordantes conteniendo 3 bloques. La Fig. (4.3) muestra una grilla

estructurada en bloque con interfaces no concordantes, que consiste en 5 bloques con grillas de diferente finura. Este tipo de grilla es más flexible que el anterior, ya que permite utilizar grillas mas finas en regiones donde se requiere mayor resolución.



**Figura 4.2** – Ejemplo de una grilla 2D estructurada en bloques con interfaces concordantes. Figura extraída del [Fergizer & Peric, 2002]

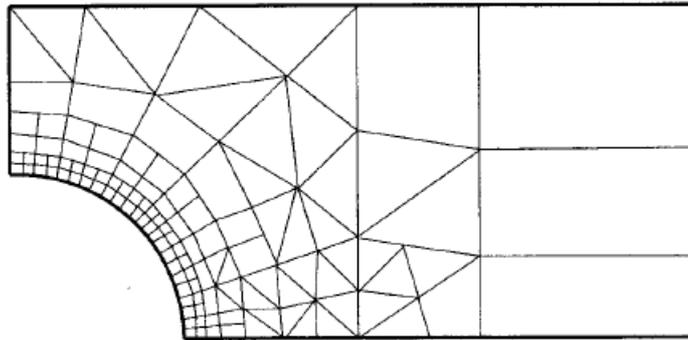


**Figura 4.3** – Ejemplo de una grilla 2D estructurada en bloques con interfaces no concordantes. Figura extraída del [Fergizer & Peric, 2002]

Las grillas *desestructuradas* se utilizan para geometrías complejas y son las más flexibles ya que pueden ajustar cualquier tipo de dominio de solución. En principio, pueden ser usadas con cualquier esquema de discretización, pero se adaptan mejor con los métodos de volúmenes finitos y elementos finitos. Los volúmenes de control o los elementos pueden tener cualquier forma, no hay restricciones sobre el número de nodos o elementos vecinos. En la práctica, las grillas más usadas en 2D son las hechas con triángulos o cuadriláteros, y en 3D con tetraedros o hexaedros.

Si se desea, las grillas pueden hacerse ortogonales, y pueden ser refinadas localmente de forma sencilla. La ventaja de la flexibilidad es compensada por la desventaja de la estructura de los datos. Las ubicaciones de los nodos y las conectividades con los vecinos deben ser especificadas explícitamente. La matriz del sistema algebraico de ecuaciones ya no tiene una estructura diagonal y regular, y el ancho de banda de la matriz se reduce reordenando los puntos.

Las grillas desestructuradas son usualmente utilizadas con el método de elementos finitos, pero cada vez es más común usarlas con el método de los volúmenes finitos. Los códigos para grillas desestructuradas son más flexibles, no necesitan cambiar cuando la grilla es refinada localmente o cuando elementos o volúmenes de control de distintas formas son usados. Un ejemplo de una grilla desestructurada se muestra en la Fig. (4.4).



**Figura 4.4** – Ejemplo de una grilla 2D desestructurada.  
Figura extraída del [Fergizer & Peric, 2002]

### **4.3 Propiedades de los Métodos de resolución numérica**

El método de resolución numérico debe tener ciertas propiedades para que pueda ser aplicado. A continuación se presentan de manera resumida las propiedades más importantes.

#### **Consistencia**

La discretización debe aproximarse a la solución exacta a medida que el espaciamiento de la grilla tiende a cero. La diferencia entre la ecuación discretizada y la exacta se conoce como error de truncamiento y usualmente se estima reemplazando todos los valores nodales en la aproximación discreta por una expansión en series de Taylor entorno a un punto. Como resultado se recupera la ecuación original sumada a un resto, que representa el error de truncamiento. Para que el método sea consistente, el error de truncamiento debe tender a cero a medida que  $\Delta t \rightarrow 0$  y/o  $\Delta x_i \rightarrow 0$ . El error de truncamiento es usualmente proporcional a potencias del espaciamiento de la grilla  $\Delta x_i$  y/o del paso temporal  $\Delta t$ . Si el término más importante es proporcional a  $(\Delta x_i)^r$  o  $(\Delta t)^r$  se dice que la aproximación es de orden  $r$  ( $r > 0$ ). Idealmente todos los términos deben discretizarse con aproximaciones del mismo orden; sin embargo, algunos términos pueden dominar sobre la ecuación y puede ser razonable tratarlos con mayor precisión que los otros.

Es importante mencionar que, aún cuando las aproximaciones sean consistentes, no implica necesariamente que la solución del sistema de ecuaciones discretizado será la solución exacta de la ecuación diferencial en el límite de intervalos de tamaños pequeños. Para que esto suceda, el método debe ser estable.

#### **Estabilidad**

Se dice que un método de resolución numérica es estable si no magnifica los errores que aparecen en el proceso de la resolución numérica. Para problemas temporales, la estabilidad garantiza que el método produce una solución acotada siempre que la solución exacta de la ecuación esté acotada. Para métodos iterativos, un método estable es aquel que no diverge. La estabilidad puede ser difícil de investigar, especialmente cuando están presentes condiciones de contorno o no linealidades. Por esta razón, es común investigar la estabilidad de un método para problemas lineales con coeficientes constantes y sin condiciones de borde. La experiencia muestra que los

resultados obtenidos de esta forma pueden aplicarse a problemas más complejos pero hay excepciones.

El método más utilizado para estudiar la estabilidad de los esquemas numéricos es el método de Von Neumann. Sin embargo, cuando se resuelven sistemas de ecuaciones no lineales, acopladas y con condiciones de borde complicadas, hay pocos resultados acerca de la estabilidad por lo que sólo queda confiar en la experiencia y en la intuición. Muchos esquemas requieren que el intervalo temporal sea menor que cierto límite, tema que será abordado más adelante.

### ***Convergencia***

Un método numérico se dice que es convergente si la solución de la ecuación discretizada tiende a la solución exacta de la ecuación diferencial a medida que el espaciamiento tiende a cero. Para problemas lineales con valores iniciales, el teorema de equivalencia de Lax [Richtmayer y Morton, 1967] establece que “dado un problema lineal con valores iniciales correctamente planteado y una aproximación de diferencias finitas aplicada, las condiciones de consistencia y estabilidad son las condiciones necesarias y suficientes para la convergencia”. Un esquema consistente es inútil si el método de resolución no converge.

Para problemas no lineales que estén influenciados fuertemente por las condiciones de borde, la estabilidad y la convergencia de un método son difíciles de demostrar. Por lo tanto la convergencia es usualmente chequeada usando experimentos numéricos, es decir, se repite el cálculo sobre una serie de grillas sucesivamente refinadas. Si el método es estable y si todas las aproximaciones utilizadas en el proceso de discretización son consistentes, usualmente se encuentra que el método converge a una solución independiente de la grilla. Para grillas de tamaño suficientemente pequeño, la tasa de convergencia está controlada por la componente de menor orden del error de truncamiento, y esto permite estimar el error en la solución.

### ***Conservación***

Como las ecuaciones que se van a resolver involucran leyes de conservación, el esquema numérico debería también cumplir con estas leyes, a nivel tanto local como global. Esto implica que, en estado estacionario y ante la ausencia de fuentes, la cantidad de la variable conservada que deja el volumen cerrado debe ser igual a la que entra. Si se utilizan la forma conservativa de la ecuación y el método de los volúmenes finitos, lo anterior está garantizado para cada volumen de control individual y para el dominio de la solución como un todo. Otros métodos de discretización pueden hacerse conservativos si se tiene cuidado en la elección de las aproximaciones.

El tratamiento de los términos fuente debe ser consistente de manera que la fuente total en el dominio sea igual al flujo neto de la cantidad conservada a través de los bordes. Esto es una propiedad importante del método de resolución, ya que impone una restricción sobre el error de la solución. Aunque se asegure la conservación de la masa, el momento y la energía, el error puede distribuirse de manera no apropiada sobre estas cantidades en el dominio de la solución. Los esquemas no conservativos pueden producir fuentes o sumideros artificiales, cambiando el balance tanto local como globalmente. Por otro lado, los esquemas no conservativos pueden ser consistentes y estables y llevar a soluciones correctas en el límite de grillas muy finas.

Los errores debidos a la no conservación en la mayoría de los casos son apreciables sobre grillas relativamente gruesas. El problema es determinar sobre qué grillas el error es lo suficientemente chico. Por esta razón se prefieren los esquemas conservativos.

### **Precisión**

Las soluciones numéricas son sólo soluciones aproximadas. Además de los errores que pueden ser introducidos en el curso del desarrollo del algoritmo, en el desarrollo del programa o en la imposición de las condiciones de contorno, las soluciones numéricas siempre incluyen los siguientes tres errores sistemáticos

- Errores de modelado, que se definen como la diferencia entre la solución al problema real y la solución exacta del modelo matemático.
- Errores de discretización, que se definen como la diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial y la solución exacta del sistema algebraico de ecuaciones que se obtiene al discretizar la ecuación diferencial.
- Errores de iteración, que se define como la diferencia entre la solución exacta y la solución que se obtiene luego de cada iteración del sistema algebraico de ecuaciones.

Es importante tener conocimiento de la existencia de estos errores, y aun más, tratar de distinguir uno de otro. Algunos errores pueden cancelarse entre sí, de manera que algunas veces una solución obtenida sobre una grilla gruesa puede ser mejor que una solución sobre una grilla más fina, que, por definición debería dar mejor.

Los errores de modelado dependen de las hipótesis hechas al derivar las ecuaciones de transporte para las variables del problema. Otros errores son introducidos al simplificar la geometría del dominio de la solución, al simplificar las condiciones de borde, etc. Estos errores no se conocen a priori; solo pueden ser evaluados al comparar las soluciones en donde los errores de discretización y de convergencia son despreciables con datos experimentales o con datos obtenidos de modelos más precisos. Es esencial controlar y estimar los errores de convergencia y discretización antes que el modelo del fenómeno físico pueda ser juzgado. Los errores de discretización disminuyen a medida que se refina la grilla, y el orden de la aproximación es una medida de la precisión. Sin embargo, sobre una grilla dada, métodos del mismo orden pueden producir errores que pueden diferir hasta tanto como 1 orden de magnitud. Esto es porque el orden solo indica la tasa a la cual estos errores disminuyen a medida que el espaciado de la grilla disminuye.

## **4.4 Métodos Numéricos**

Existen dos clases principales de métodos para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP's): analíticos y numéricos. Los métodos analíticos están restringidos a problemas relativamente simples y no pueden aplicarse a un caso general. Esto es debido, en particular, al hecho de que en algunos casos es imposible expresar en forma analítica la distribución de las variables de campo (en esta Tesis densidad  $n$ , temperatura  $T$ , velocidad  $\mathbf{u}$ , etc.) en función del tiempo y del espacio. Los métodos analíticos son útiles, bajo ciertas suposiciones que simplifican el problema, para el

entendimiento general de procesos de la dinámica de fluidos, electrodinámicos, termodinámicos, etc. Las soluciones analíticas son usualmente utilizadas como referencia en los códigos numéricos.

Los métodos numéricos para resolver EDP's son universales y pueden aplicarse a distribuciones de variables de campo continuas y discontinuas. Los siguientes grupos de métodos numéricos son los usualmente utilizados: métodos de diferencias finitas (MDF), métodos de volúmenes finitos (MVF), métodos de elementos finitos (MEF) y los métodos espectrales.

#### **4.4.1 Método de diferencias finitas (MDF)**

Este es el método más antiguo para soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales, se cree que el que lo presento fue Euler en el siglo XVIII. Además es el método más simple de utilizar en el caso de geometrías sencillas.

El punto de partida es la ecuación en su forma diferencial. El dominio de la solución se discretiza mediante un grilla y en cada punto de la grilla la ecuación diferencial es aproximada al reemplazar las derivadas parciales por aproximaciones en términos de diferencias finitas. Las diferencias finitas son expresiones matemáticas lineales que se utilizan para representar derivadas hasta un cierto nivel de precisión. El resultado es una ecuación algebraica por nodo de la grilla, en la cual la variable evaluada en el nodo y en un cierto número de nodos vecinos aparecen como incógnitas.

En principio el método de diferencias finitas (MDF) puede aplicarse sobre cualquier tipo de grilla. Sin embargo la mayoría de las veces el MDF se aplica sobre grillas estructuradas. Se utilizan series de Taylor o ajuste de polinomios para obtener aproximaciones de las derivadas de primer y segundo orden de las variables respecto de las coordenadas. Entre los métodos de diferencia finitas más utilizados se encuentran el método de Lax–Friedrichs y el método de Lax–Wendroff.

Sobre grillas estructuradas, el MDF es simple, efectivo y es particularmente sencillo obtener esquemas de alto orden sobre grillas regulares. La desventaja del MDF es la restricción a geometrías simples, lo que hace impráctico para flujos complejos. Para más información sobre el método de diferencias finitas ver los libros de Richtmyer y Morton [1967] y LeVeque [2007].

#### **4.4.2 Método de volúmenes finitos (MVF)**

El MVF utiliza la forma integral de la ecuación como punto de partida. El dominio de solución es subdividido en un número finito de volúmenes de control (VC's) contiguos, y la ecuación es aplicada sobre cada VC. En el centroide de cada VC yace el nodo computacional en el cual los valores de la variable son calculados. Se utiliza la interpolación para expresar los valores de la variable en la superficie del VC en términos de los valores nodales (en el centro del VC). Las integrales de volumen y superficie son aproximadas utilizando formulas de cuadratura adecuadas. Como resultado, se obtiene una ecuación algebraica para cada VC, en la cual aparecen un cierto número de valores nodales vecinos.

El MVF puede acomodarse a cualquier tipo de grilla, de manera que resulte adecuado para geometrías complejas. La grilla define sólo los bordes de los volúmenes de control y no es necesario que estén relacionados con el sistema coordenado. El

método es conservativo por construcción, siempre y cuando las integrales de superficie sean las mismas para los VCs que comparten fronteras.

El enfoque del MVF es más simple de entender y de programar, todos los términos que necesitan ser aproximados tienen un significado físico. La desventaja respecto del MDF es que los esquemas de orden mayor son difíciles de desarrollar en 3D. Esto se debe al hecho que la aproximación de volúmenes finitos requiere 3 niveles de aproximación: interpolación, diferenciación e integración. Para más información sobre el método de volúmenes finitos ver los libros de Eymard et. al. [2000] LeVeque [2002] o Ferziger y Peric [2002]. En la Sección 4.6 se dará una descripción más detallada del MVF.

#### **4.4.3 Método de elementos finitos (MEF)**

El MEF es similar al MVF en muchos aspectos. El dominio está subdividido en un conjunto de volúmenes discretos o elementos finitos que generalmente son no estructurados; los más usados en 2D son triángulos o cuadriláteros, mientras que en 3D son tetraedros o hexaedros. La característica distintiva de los MEF es que las ecuaciones son multiplicadas por una función de peso antes de ser integradas sobre todo el dominio. En el más simple de los MEF, la solución es aproximada por una función de forma lineal dentro de cada elemento de manera que se garantice la continuidad de la solución a través de los bordes de los elementos. Tal función puede construirse a partir de los valores en los extremos de los elementos. Esta aproximación es luego sustituida dentro de la integral pesada y las ecuaciones a resolver son obtenidas al requerir que la derivada de la integral respecto de cada valor nodal debe ser cero; que equivale a elegir la mejor solución dentro del conjunto de soluciones posibles (la que tiene el residuo mínimo). El resultado es un conjunto algebraico de ecuaciones no lineales.

Una ventaja importante del MEF es la habilidad de tratar con geometrías arbitrarias. Las grillas se refinan de manera sencilla, simplemente subdividiendo cada elemento. Los MEF son relativamente fáciles de analizar matemáticamente y puede demostrarse que tiene propiedades óptimas para cierto tipo de ecuaciones. El principal inconveniente, que es compartido por cualquier método que use grillas no estructuradas, es que las matrices de las ecuaciones linealizadas no se encuentran tan bien estructuradas como aquellas para grillas regulares haciendo más difícil encontrar métodos de resolución eficientes. Para más detalles sobre el MEF aplicado a dinámica de fluidos ver los libros de Zinkiewicz [1977], Chung [1978], Baker [1983], Girault y Raviart [1986] o Fletcher [1981].

#### **4.4.4 Métodos espectrales**

Los métodos espectrales son técnicas utilizadas para resolver numéricamente cierto tipo de ecuaciones diferenciales, involucrando generalmente la transformada rápida de Fourier. En los métodos espectrales, las derivadas espaciales son evaluadas con la ayuda de una serie de Fourier o una de sus generalizaciones. La idea es escribir la solución de la ecuación diferencial como una suma de ciertas funciones básicas, por ejemplo como una serie de Fourier que es la suma de sinusoides y luego escoger los coeficientes de la suma de manera de satisfacer la ecuación diferencial lo mejor posible. Los métodos espectrales y los MEF están estrechamente relacionados y se

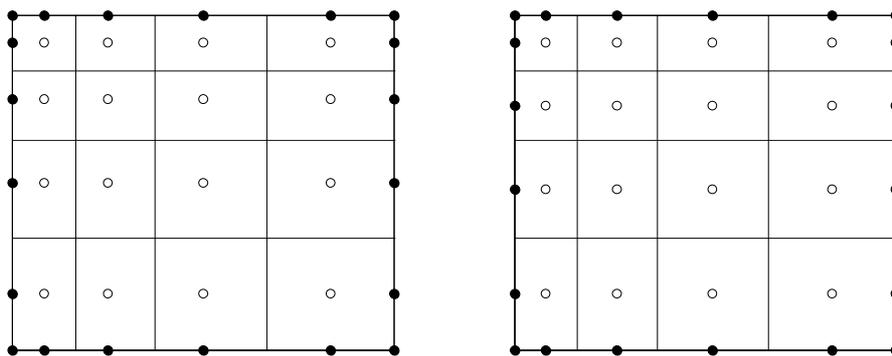
construyen sobre la misma idea; la principal diferencia entre estos es que en los métodos espectrales se utilizan funciones básicas que son no nulas sobre todo el dominio mientras que en MEF las funciones básicas son no nulas solo en un pequeño subdominio (sobre el elemento). Esto es, el método espectral toma un enfoque global mientras que el MEF toma un enfoque local. Al aplicar el método espectral a una EDP dependiente del tiempo, la solución típicamente se escribe como una suma de funciones con coeficientes que dependen del tiempo, que al sustituirse en la EDP se llega a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) sobre los coeficientes que puede resolverse utilizando cualquier método numérico de resolución de EDOs. Para una descripción más completa de los métodos espectrales ver Canuto et. al. [1987], Bernardi y Maday [1997].

#### 4.5 Método de volúmenes finitos

El MVF utiliza la forma integral de la ecuación como punto de partida. El dominio de solución es subdividido en un número finito de volúmenes de control (VC's) contiguos, y la ecuación es aplicada sobre cada VC. Para comenzar a describir el MVF se considerará la ecuación de conservación genérica para la cantidad  $\varphi$ .

$$\int_s \rho \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_s \lambda \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Omega} q_{\varphi} d\Omega \quad (4.1)$$

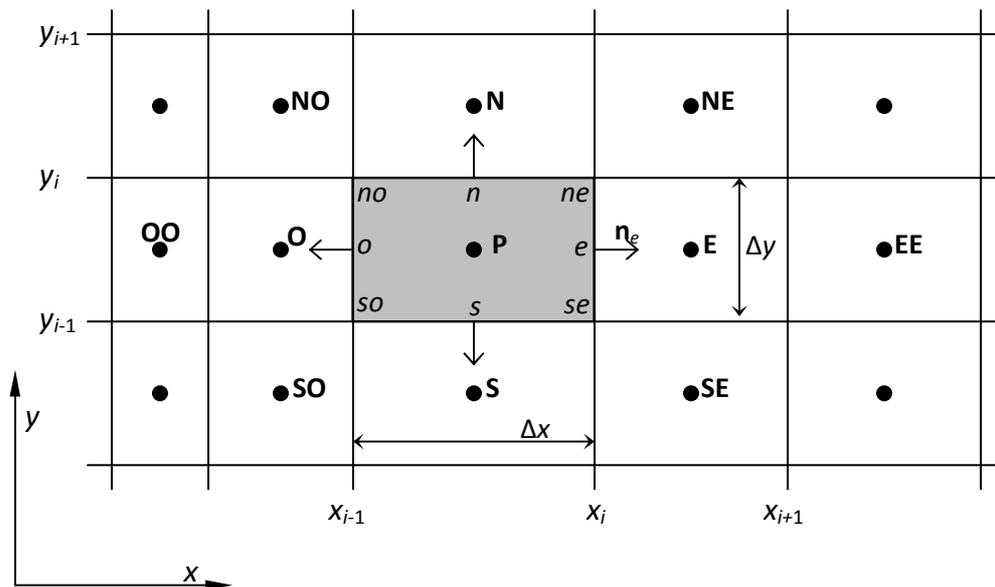
El dominio de la solución se subdivide en un número finito de volumen de control pequeños (VC) por una grilla que, en contraste con el MDF, define los contornos de los VC, no los nodos computacionales. Por simplicidad se vera el método usando una grilla cartesiana, las geometrías complicadas se verán mas adelante (Sección 4.5.5). Lo usual es definir los VC con una grilla adecuada y se asignan los nodos computacionales al centro de cada VC. Para grillas estructuradas se puede definir primero las ubicaciones de los nodos y construir los VC entorno a estos, de manera que las caras de los VC yacen a mitad de camino entre los nodos (Fig. 4.1), sobre los cuales se aplican las condiciones de contorno que se muestran como círculos rellenos en esta figura.



**Figura 4.1** – Tipos de grilla en MVF, nodos centrados en los VC (derecha) y caras de los VC centradas entre los nodos. Figura adaptada del [Fergizer & Peric, 2002]

La ventaja del primer esquema es que el valor nodal representa el valor promedio sobre el volumen del VC con mayor precisión (segundo orden) con respecto al segundo esquema, ya que el nodo está ubicado en el centroide del VC. La ventaja del segundo

esquema es que las aproximaciones a las derivadas en las caras de los VC son más precisas cuando las caras se encuentran a la mitad de camino entre los dos nodos.



**Figura 4.2** – Esquema de un volumen de control típico en una grilla cartesiana 2D. Figura adaptada del [Fergizer & Peric, 2002]

Los principios de discretización son los mismos para todas las variantes, solo se tiene que tener en cuenta la relación entre las diversas ubicaciones dentro de la integral de volumen. La ecuación de conservación integral, Ec. (4.1), se aplica a cada VC, como también al dominio de solución como un todo. Si se suman las ecuaciones para todos los VC, se obtiene la ecuación de conservación global, ya que las integrales de superficie sobre las caras de los VC internos se cancelan. Luego la conservación global se construye dentro del método y esto provee una de sus principales ventajas. Para obtener una ecuación algebraica para un VC particular, las integrales de volumen y superficie deben ser aproximadas por algún esquema de integración numérica. Dependiendo del esquema utilizado, las ecuaciones resultantes pueden ser o no iguales a las obtenidas con el MDF.

#### 4.5.1 Aproximación a las integrales de superficie

En la Fig. (4.2) se muestran volúmenes de control cartesianos típicos en 2D, junto con la notación que se utilizara a continuación. La superficie del VC consiste en 4 caras, denotadas por las letras minúsculas (e,o,n,s) correspondientes a su ubicación cardinal respecto al nodo central P. El caso 2D puede verse como un caso especial del 3D en donde las variables dependientes son independientes de la dirección z. A continuación se tratará con grillas 2D, pero la extensión a problemas 3D es sencilla. El flujo neto que atraviesa el contorno del VC es la suma de las integrales sobre las caras del VC

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS, \quad (4.2)$$

donde  $f$  es la componente del vector de flujo en la dirección normal a la cara del VC. Para mantener la conservación, es importante que los VC no se solapen entre sí; cada cara debe ser única a los dos VC que se encuentran uno al lado del otro. A continuación sólo se considera una cara del VC, la etiquetada con la letra  $e$  en la Fig. 4.2; y expresiones análogas pueden ser derivadas para las demás caras realizando la sustitución de índices apropiada.

Para calcular la integral de superficie (4.2) en forma exacta, es necesario conocer el integrando  $f$  sobre toda la superficie  $S_e$  de la cara  $e$ . Esta información no está disponible, ya que sólo son calculados los valores en los nodos de manera que es necesario introducir una aproximación. La mejor forma de realizar esto es usando dos niveles de aproximación: i) la integral es aproximada en términos de los valores de la variable en uno a más puntos sobre la cara de la celda y ii) los valores en las caras de la celda son aproximados en términos de los valores nodales (centro del VC).

La aproximación más sencilla de la integral es la regla del punto medio, donde la integral es aproximada por el producto entre el integrando evaluado en el centro de la cara de la celda (que a su vez es una aproximación del valor promedio sobre la cara) y el área de la celda

$$F_e = \int_{S_e} f dS = \bar{f}_e S_e \approx f_e S_e. \quad (4.3)$$

Esta aproximación de la integral (suponiendo que el valor de  $f$  en el punto  $e$  es conocido) es de segundo orden. Como el valor de  $f$  en el centro de la cara no es conocido, se obtiene mediante interpolación. Para preservar el segundo orden de la aproximación de la regla del punto medio, el valor de  $f$  tiene que ser calculado con al menos una precisión de segundo orden. Se verán algunas aproximaciones mas adelante. Otra aproximación de segundo orden de la integral de superficie 2D es la regla del trapecoide, que lleva a

$$F_e = \int_{S_e} f dS \approx \frac{S_e}{2} (f_{ne} + f_{se}). \quad (4.4)$$

En este caso los valores del flujo se calculan en las esquinas del VC. Para aproximaciones de mayor orden de las integrales de superficie (por ejemplo, usando la regla de Simpson), el flujo debe ser evaluado en más de dos puntos.

#### **4.5.2 Aproximación a las integrales de volumen**

Algunos términos en las ecuaciones de transporte requieren integrar sobre el volumen del VC. La aproximación más sencilla de segundo orden es reemplazar la integral de volumen por el producto entre el valor medio del integrando y el volumen del VC y aproximar el primero por el valor en el centro del VC.

$$Q_p = \int_{\Omega} q d\Omega = \bar{q} \Delta\Omega \approx q_p \Delta\Omega, \quad (4.5)$$

donde  $q_p$  representa en valor de  $q$  en el centro del VC. Esta cantidad es calculada fácilmente, ya que como todas las variables se conocen en el nodo  $P$ , por lo que no es

necesario realizar una interpolación. La aproximación anterior es exacta si  $q$  es constante o varía linealmente dentro del VC; caso contrario, contiene un error de segundo orden.

Una aproximación de mayor orden requiere valores de  $q$  en más puntos que solo en el centro. Los valores tienen que ser obtenidos interpolando valores nodales. En 2D la integral de superficie se convierte en una integral de área. Una aproximación de cuarto orden puede obtenerse usando una función bi-cuadrática

$$q(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2. \quad (4.6)$$

Los 9 coeficientes se obtienen ajustando la función a los valores de  $q$  en nueve puntos ('no', 'o', 'so', 'n', 'p', 's', 'se', 'ne', 'e', ver Fig. 4.2). En 2D la integración da (para grillas cartesianas)

$$Q_p = \int_{\Omega} q d\Omega = \Delta x \Delta y \left[ a_0 + \frac{a_3}{12} (\Delta x)^2 + \frac{a_4}{12} (\Delta y)^2 + \frac{a_8}{144} (\Delta x)^2 (\Delta y)^2 \right]. \quad (4.7)$$

Sólo se necesita determinar 4 coeficientes pero éstos dependen de los valores de  $q$  en las 9 posiciones mencionadas antes. Sobre una grilla cartesiana uniforme

$$Q_p = \frac{\Delta x \Delta y}{36} (16q_p + 4q_s + 4q_e + 4q_n + 4q_o + q_{se} + q_{so} + q_{ne} + q_{no}). \quad (4.8)$$

Como sólo el valor de  $P$  está disponible, se debe utilizar la interpolación para obtener  $q$  en los demás puntos.

### 4.5.3 Diferenciación e interpolación

La aproximación a las integrales requiere los valores de las variables en puntos distintos a los nodos computacionales. El integrando, denotado anteriormente por  $f$ , involucra el producto de varias variables y/o gradientes de variables; por ejemplo para un flujo convectivo  $f^c = (\rho \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$  y para el flujo difusivo  $f^d = (\lambda \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$ . Para calcular los flujos difusivos y convectivos se necesitan los valores de las variables y sus gradientes en uno o más puntos del contorno del VC. Las integrales de volumen y los términos fuente pueden también requerir estos valores. Numerosas posibilidades están disponibles y a continuación se verán algunas de las más comunes. En particular, se verá cómo aproximar estos flujos sobre una cara particular.

#### Esquema de diferenciación de upwind

Aproximar  $\phi_e$  por su valor en el nodo que se encuentra en la dirección en contra de la corriente respecto de  $e$  es equivalente a utilizar una aproximación de diferencias adelantada o atrasadas de la primera derivada (dependiendo de la dirección del flujo). De aquí el nombre esquema de diferenciación upwind (DU), en inglés "contracorriente", para este tipo de aproximación. En el esquema DU,  $\phi_e$  es aproximado por

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_p & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0 \\ \varphi_E & \text{si } (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

La aproximación anterior nunca da soluciones oscilatorias, pero lo logra al costo de introducir difusión numérica. Un desarrollo de Taylor entorno a P (para una grilla cartesiana y  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e > 0$ ) da

$$\varphi_e = \varphi_p + (x_e - x_p) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_p + \frac{(x_e - x_p)^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_p + H, \quad (4.10)$$

donde  $H$  denota términos de orden mayor. La aproximación DU retiene solo el primer término del lado derecho, de manera que es un esquema de primer orden. Contiene un error de truncamiento difusivo, ya que se asemeja a un flujo difusivo

$$f_e^d = \lambda_e \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e. \quad (4.11)$$

El coeficiente de difusión numérica está dado por  $\lambda_e^{num} = (\rho u)_e \Delta x / 2$ . Esta difusión numérica es magnificada en problemas multidimensionales si el flujo es oblicuo a la grilla; el error de truncamiento produce difusión en la dirección normal al flujo como también en la dirección del flujo.

#### Esquema de diferencias centradas

Una aproximación para los valores en el centro de la cara del VC es realizar una interpolación lineal entre los dos nodos más cercanos. En el punto  $e$  sobre una grilla cartesiana se tiene

$$\varphi_e = \varphi_E \delta_e + \varphi_p (1 - \delta_e), \quad (4.12)$$

donde el factor de interpolación se define como:

$$\delta_e = \frac{x_e - x_p}{x_E - x_p}. \quad (4.13)$$

La Ec. (4.12) es de segundo orden como puede demostrarse usando un desarrollo de Taylor de  $\varphi_E$  entorno a  $\varphi_p$  para eliminar la derivada primera en la Ec. (4.10). El resultado es

$$\varphi_e = \varphi_E \delta_e + \varphi_p (1 - \delta_e) - \frac{(x_e - x_p)(x_e - x_E)}{2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_p + H. \quad (4.14)$$

El error de truncamiento resultante es proporcional al cuadrado del espaciamiento de la grilla, sobre grillas uniformes o no uniformes. A diferencia con el esquema DU, este esquema puede producir soluciones oscilatorias. Es el esquema de segundo orden más simple y se corresponde con la aproximación de diferencias centradas en MDF y

de aquí su nombre esquema de diferencias centradas (DC). La hipótesis de una variación lineal entre los nodos E y P ofrece también la aproximación más simple para el gradiente, que se necesita para la evaluación de los flujos

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_e \approx \frac{\varphi_E - \varphi_P}{x_E - x_P}. \quad (4.15)$$

Cuando la ubicación de  $e$  está en el medio entre E y P (por ejemplo para una grilla uniforme), la aproximación es de segundo orden. En el caso de grillas no uniformes la aproximación ya no es de segundo orden, pero si se refina la grilla el error puede ser similar al de una aproximación de segundo orden. Existen aproximaciones de mayor orden, por ejemplo el método QUICK (Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics) propuesto por Leonard [1979] que no serán descritas aquí.

#### **4.5.4 Métodos para problemas no estacionarios (discretización temporal)**

En el modelado de flujos no estacionarios, se tiene que considerar una cuarta coordenada: el tiempo y que al igual que las coordenadas espaciales, debe ser discretizada. Se puede considerar la grilla “temporal”, tanto en el esquema de diferencias finitas, como puntos discretos en el tiempo, o, desde el punto de visto de volúmenes finitos como “volúmenes temporales”. La principal diferencia entre las coordenadas temporal y espacial yace en la dirección de influencia: mientras que una fuerza en cualquier ubicación espacial puede influir el flujo en cualquier otra parte, la acción de una fuerza en un dado instante solo afectará el flujo en el futuro. Por lo que los flujos no estacionarios son parabólicos en el tiempo, lo que implica que no pueden imponerse condiciones sobre la solución en ningún tiempo posterior al inicio del calculo, excepto en los bordes. Los métodos utilizados son similares a los aplicados a los problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias.

#### **Aplicación a la ecuación de transporte genérica**

Anteriormente se discutió la discretización espacial de los diferentes términos de la ecuación de transporte para problemas estacionarios. Estos términos pueden ser tratados de la misma manera para flujos no estacionarios, definiendo a que tiempo los flujos y las fuentes deben ser evaluadas. La ecuación de conservación en su forma diferencial puede escribirse:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho\varphi\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\lambda\nabla\varphi) + q_\varphi. \quad (4.16)$$

A la derecha se colocan los términos convectivo, difusivo y fuente. Como estos términos son incógnitas debe utilizarse alguna de las aproximaciones presentadas anteriormente. Si se utiliza un método explícito para la integración temporal, los términos deben ser evaluados sólo en tiempos en donde ya se conoce la solución, de manera que puedan ser calculados. Para métodos implícitos, el lado derecho discretizado de la ecuación anterior es requerido en el tiempo siguiente donde la solución no es conocida. Por lo tanto, debe resolverse un sistema algebraico de ecuaciones.

## Método explícito de Euler

El método más simple es el Euler explícito en el cual los flujos y las fuentes son evaluados utilizando valores conocidos al tiempo  $t_n$ . En la ecuación para el VC o el punto de la grilla, la única incógnita al tiempo  $t_{n+1}$  es el valor en el nodo; todos los valores vecinos son evaluados en el tiempo anterior. De esta manera puede calcularse explícitamente el nuevo valor de la incógnita en cada nodo. Para estudiar las propiedades del método de Euler explícito, resulta más sencillo partir de la versión 1D de la Ec. (4.16), con velocidad constante, propiedades del fluido constantes y sin fuentes

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -v \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (4.17)$$

Esta ecuación, comúnmente utilizada en la literatura como una ecuación modelo para las ecuaciones de Navier-Stokes, asume que el balance importante es entre la advección y la difusión, un balance que raramente ocurre en flujos reales. Por esta razón, debe extenderse con cuidado las propiedades de esta ecuación a las ecuaciones de Navier-Stokes. Aun a pesar de esto, se pueden sacar conclusiones importantes al analizar la Ec. (4.17).

Si se asume que las derivadas espaciales son aproximadas utilizando diferencias centradas y que la grilla es uniforme en la dirección  $x$ . Se obtienen las mismas ecuaciones algebraicas para discretizaciones por el MVF y por el MDF. El valor de la variable en el próximo tiempo es

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \left[ -v \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \Delta t, \quad (4.18)$$

que puede reescribirse como

$$\varphi_i^{n+1} = (1 - 2d) \varphi_i^n + (d - c/2) \varphi_{i+1}^n + (d + c/2) \varphi_{i-1}^n, \quad (4.19)$$

donde se introducen los parámetros adimensionales

$$d = \frac{\lambda \Delta t}{\rho (\Delta x)^2}; \quad c = \frac{v \Delta t}{\Delta x}. \quad (4.20)$$

El parámetro  $d$  es la razón entre el intervalo temporal  $\Delta t$  y el tiempo de difusión característico  $\rho (\Delta x)^2 / \lambda$ , que es aproximadamente el tiempo requerido para que una perturbación sea transmitida una distancia  $\Delta x$  por difusión. La segunda cantidad ( $c$ ) es la razón entre el intervalo temporal  $\Delta t$  y el tiempo característico de convección,  $v / \Delta x$ , que es el tiempo requerido para que una perturbación sea convectada una distancia  $\Delta x$ . Esta tasa es llamada **número de Courant** y es uno de los parámetros claves en el modelado numérico de la dinámica de fluidos.

Si  $\varphi$  fuera la temperatura, la Ec. (4.19) necesitaría satisfacer varias condiciones. Por virtud de la difusión, un incremento en la temperatura en cualquiera de los tres puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$  y  $x_{i+1}$  en un tiempo anterior debería incrementar la temperatura en el punto  $x_i$  en el próximo tiempo. Lo mismo puede decirse de los puntos  $x_{i-1}$  y  $x_i$  con respecto a la convección, suponiendo  $v > 0$ . Si  $\varphi$  representa la concentración de una sustancia, esta no puede ser negativa.

La posibilidad de que algunos de los coeficientes de  $\varphi_i^n$  y  $\varphi_i^{n+1}$  en la Ec. (4.19) puedan volverse negativos puede causar problemas y demanda un análisis más detallado. Una manera sencilla de realizar este análisis fue desarrollado por von Neumann y por éste el método lleva su nombre. El planteo que las condiciones de borde rara vez son la causa de problemas (salvo algunas excepciones) razón por la cual pueden ignorarse y el análisis se simplifica. Este método es popular y simple de aplicar, pero tiene limitaciones: es válido solamente para operadores lineales, coeficientes constantes y problemas periódicos. A pesar de esto, este método de análisis es esencialmente aplicable a los métodos vistos hasta aquí y será descrito en forma general; para más detalle ver el libro de Strikwerda [2004]. La idea esencial del método puede verse de la siguiente manera. El conjunto de Ecs. (4.19) puede escribirse de manera matricial

$$\boldsymbol{\varphi}^{n+1} = A \boldsymbol{\varphi}^n, \quad (4.21)$$

donde los elementos de la matriz tridiagonal  $A$  se pueden derivar al inspeccionar la Ec. (4.19), Esta ecuación da la solución en el nuevo paso temporal en términos de la solución en el tiempo previo. La solución en  $t_{n+1}$  puede entonces obtenerse por la multiplicación repetitiva de la solución inicial  $\varphi_0$  por la matriz  $A$ . Dado esto, una condición a analizar es si las diferencias entre dos soluciones en pasos temporales sucesivos (para condiciones de bordes invariantes) medidas de alguna manera, aumentan, disminuyen o permanecen igual a medida que  $n$  aumenta. Una forma de medir estas diferencias es a través de la norma

$$\varepsilon = \|\boldsymbol{\varphi}^{n+1} - \boldsymbol{\varphi}^n\| = \sqrt{\sum_i (\varphi_i^{n+1} - \varphi_i^n)^2}. \quad (4.22)$$

La ecuación diferencial requiere que esta cantidad decrezca con el tiempo a través de la acción de la disipación. Eventualmente, se obtendrá una solución de estado estacionario si las condiciones de borde no varían. Naturalmente, si que quiere que el método numérico preserve esta propiedad de la ecuación exacta. Este tema está relacionado con los autovalores de la matriz  $A$ . Si algunos de estos son mayores que 1, se puede demostrar que  $\varepsilon$  crecerá con  $n$ , mientras que si todos los autovalores son menores que 1,  $\varepsilon$  decaerá. Generalmente el cálculo de los autovalores de una matriz es una tarea difícil, pero como en este caso cada diagonal de la matriz es constante, los autovalores son fáciles de encontrar. Pueden ser representados en términos de senos y cosenos pero es más simple utilizar la forma compleja exponencial:

$$\varphi_j^n = \sigma^n e^{i\alpha_j n}, \quad (4.23)$$

donde ahora  $i = (-1)^{1/2}$  y es  $\alpha$  un número de onda que puede elegirse de forma arbitraria. Si la Ec. (4.23) es sustituida en la Ec. (4.19), el término complejo  $e^{i\alpha j}$  es común a cada término y puede ser removido y se obtiene una expresión explícita para el autovalor  $\sigma$ :

$$\sigma = 1 + 2d(\cos \alpha - 1) + i2c \sin \alpha . \quad (4.24)$$

Lo que importa de esta cantidad es su magnitud, que como se trata de un número complejo está dada por

$$\sigma^2 = [1 + 2d(\cos \alpha - 1)]^2 + 4c^2 \sin^2 \alpha . \quad (4.25)$$

Se desea determinar las condiciones para que  $\sigma^2$  sea menor que la unidad. Como hay dos parámetros independientes en la expresión de  $\sigma$ , es más sencillo considerar primero casos especiales. Cuando no hay difusión ( $d = 0$ ),  $\sigma > 1$  para cualquier  $\alpha$  y este método es inestable para cualquier valor de  $c$ , el método es incondicionalmente inestable, por lo que resulta inútil. Por otro lado cuando no hay convección ( $c = 0$ ),  $\sigma$  es máximo cuando  $\cos \alpha = -1$  por lo que el método es estable si  $d < 1/2$ , esto es, es condicionalmente estable. El requerimiento que los coeficiente de todos los valores nodales anteriores sean positivos lleva a una conclusión similar:  $d < 0.5$  y  $c > 2d$ . La primera condición lleva a una restricción sobre  $\Delta t$

$$\Delta t < \frac{\rho(\Delta x)^2}{2\lambda} . \quad (4.26)$$

La segunda condición no impone una restricción sobre el paso temporal, pero da una relación entre los coeficientes de difusión y convección:

$$Pe_{\text{celda}} = \frac{\rho v \Delta x}{\lambda} < 2 . \quad (4.27)$$

La ecuación anterior implica que el número de Peclet de la celda debe ser menor que 2. Esto es una condición suficiente (pero no necesaria) para que la solución esté acotada si se utiliza un esquema de DC para el flujo convectivo. Como el método es combinación de Euler explícito en el tiempo y DC para las derivadas espaciales, es de primer orden en el tiempo y de segundo orden en el espacio. El requerimiento de que  $d < 0.5$  implica que, cada vez que la malla espacial es reducida a la mitad, el paso temporal debe ser reducido por un factor de 4, lo que torna al esquema inadecuado para problemas que no requieran una alta resolución temporal, como por ejemplo soluciones alcanzando el estado estacionario.

El problema de la inestabilidad en conexión con la condición de la Ec. (4.27) fue analizado y documentado en los años de 1920 por Courant y Friedrichs y sugirieron una solución que es utilizada hasta hoy. Notaron que, para problemas dominados por convección, es posible que los coeficientes de  $\varphi_{i+1}^n$  en la Ec. (4.19) sean negativos y sugirieron que el problema podía ser resuelto usando un esquema de diferencias upwind (Sección 4.5.3). En lugar de evaluar el término convectivo utilizando una

aproximación de DC como se hizo antes, se utiliza un esquema de DU. Luego se obtiene en lugar de la Ec. (4.18), la siguiente ecuación (suponiendo  $v > 0$ )

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \left[ -v \frac{\varphi_i^n - \varphi_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \Delta t, \quad (4.28)$$

que arroja, en lugar de la Ec. (4.19),

$$\varphi_i^{n+1} = (1 - 2d - c)\varphi_i^n + d\varphi_{i+1}^n + (d + c)\varphi_{i-1}^n. \quad (4.29)$$

Como los coeficientes de los nodos vecinos son siempre positivos, no pueden contribuir a la generación de inestabilidades. Sin embargo, el coeficiente de  $\varphi_i^n$  puede ser negativo, creando un potencial problema. Para que este coeficiente sea positivo, el paso temporal debe satisfacer la siguiente condición

$$\Delta t < \frac{1}{\frac{2\lambda}{\rho(\Delta x)^2} + \frac{v}{\Delta x}}. \quad (4.30)$$

Cuando la convección es despreciable, la restricción para el paso temporal requerida para la estabilidad se reduce a la Ec. (4.26). Para el caso de difusión despreciable, el criterio a satisfacer es

$$c < 1 \quad \text{o} \quad \Delta t < \frac{\Delta x}{v}, \quad (4.31)$$

lo que implica que el numero de Courant debe ser menor que la unidad.

Si se aplica el análisis de estabilidad von Neumann a este problema; se encuentra que está en acuerdo con las conclusiones antes mencionadas. Entonces a diferencia del método de diferencias centradas, la aproximación de upwind provee estabilidad que, combinada con el hecho de ser un método fácil de aplicar, lo hizo muy popular durante muchos años, y aún hoy en día es utilizado. Cuando están presentes la convección y la difusión, el criterio de estabilidad es más complicado. En lugar de trabajar con esta complejidad, en general se requiere que cada criterio individual sea satisfecho, que resulta una condición más restrictiva pero segura. El método tiene un primer orden tanto en la aproximación espacial como temporal y requiere pequeños tamaños en los pasos, de las dos variables para mantener pequeños los errores.

La restricción de Courant simplemente establece que el método numérico debe usarse de manera que la información pueda propagarse a la velocidad física correcta. Restringe a la información a no propagarse más de una celda de grilla en un paso temporal. Esto también se conoce como la condición de CFL nombrado en honor a Courant, Friedrichs y Levy. Ellos escribieron uno de los primeros trabajos sobre el método de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales [Courant et. al, 1928], del cual existe la traducción al inglés [Courant et. al, 1967]. Utilizaron el MDF como una herramienta analítica para probar la existencia de la solución de ciertas EDP.

La idea fue definir una secuencia de soluciones aproximadas (a través de ecuaciones en diferencias finitas), probar que estas convergen a medida que se refina la grilla, y luego mostrar que la función en el límite debe satisfacer la EDP, dando así la existencia de la solución. En el curso de demostrar la convergencia de esta secuencia (que es lo que interesa numéricamente) se encontró la condición necesaria de estabilidad antes descrita para todo método numérico.

### Método implícito de Euler

Si la estabilidad es un requerimiento primordial el método implícito es el indicado. Aplicando a la ecuación de transporte genérica (4.17) la aproximación de DC para las derivadas espaciales se obtiene:

$$\varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \left[ -v \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - 2\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] \Delta t, \quad (4.32)$$

y reacomodando los términos se llega a:

$$(1 + 2d)\varphi_i^{n+1} + (c/2 - d)\varphi_{i+1}^{n+1} + (-c/2 - d)\varphi_{i-1}^{n+1} = \varphi_i^n. \quad (4.33)$$

En este método, todos los términos de flujo y fuentes son evaluados en función de los valores de las variables incógnitas en el tiempo próximo. El resultado es un sistema de ecuaciones algebraicas que puede ser escrito como:

$$A_p \varphi_i^{n+1} + A_E \varphi_{i+1}^{n+1} + A_O \varphi_{i-1}^{n+1} = Q_p, \quad (4.34)$$

donde

$$A_E = \frac{\rho v}{2\Delta x} - \frac{\lambda}{(\Delta x)^2}; \quad A_O = -\frac{\rho v}{2\Delta x} - \frac{\lambda}{(\Delta x)^2}; \quad (4.35)$$

$$A_p = -(A_E + A_O) + \frac{\rho}{\Delta t}; \quad Q_p = \frac{\rho}{\Delta t} \varphi_i^n.$$

El uso del método implícito permite que puedan ser tomados grandes pasos temporales, propiedad que resulta particularmente útil para ser aplicado a flujos transitorios lentos o estacionarios. Cuando se usan diferencias centradas sobre grillas gruesas (si el número de Peclet es muy grande en regiones donde los gradientes de las variables presentan fuertes cambios) pueden surgir problemas, produciéndose soluciones oscilatorias pero el esquema se mantiene estable.

El defecto de este método es que el error de truncamiento es de primer orden en el tiempo y la necesidad de resolver un sistema grande de ecuaciones acopladas en cada paso temporal. También requiere mucho más almacenamiento en memoria que el esquema explícito, ya que la matriz de coeficientes  $A$  y el vector fuente deben ser almacenados. La ventaja es la posibilidad de utilizar un paso temporal grande, que puede dar como resultado un procedimiento más eficiente a pesar de las limitaciones.

## Método de Crank-Nicolson

La precisión de segundo orden del método de la regla del trapecioide y su relativa simplicidad sugiere su aplicación a las ecuaciones diferenciales parciales cuando es necesario mayor precisión en el tiempo. Esto se conoce como el método de Crank-Nicolson. En particular si es aplicado a la ecuación de transporte genérica 1D con discretización de DC sobre las derivadas espaciales se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_i^{n+1} = \varphi_i^n + \frac{\Delta t}{2} \left[ -v \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - \varphi_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\varphi_{i+1}^{n+1} - 2\varphi_i^{n+1} + \varphi_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right] + \\ \frac{\Delta t}{2} \left[ -v \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

El esquema es implícito; la contribución de los flujos y las fuentes en el nuevo tiempo da un sistema de ecuaciones acoplado similar al del esquema de Euler implícito. La ecuación anterior puede escribirse

$$A_p \varphi_i^{n+1} + A_E \varphi_{i+1}^{n+1} + A_O \varphi_{i-1}^{n+1} = Q_i^t, \quad (4.37)$$

donde

$$\begin{aligned} A_E &= \frac{\rho v}{4\Delta x} - \frac{\lambda}{2(\Delta x)^2}; \quad A_O = -\frac{\rho v}{4\Delta x} - \frac{\lambda}{2(\Delta x)^2}; \\ A_p &= \frac{\rho}{\Delta t} - (A_E + A_O); \\ Q_i^t &= \left( A_E + A_O + \frac{\rho}{\Delta t} \right) \varphi_i^n - A_E \varphi_{i+1}^n - A_O \varphi_{i-1}^n. \end{aligned} \quad (4.38)$$

El término  $Q_i^t$  representa un término fuente adicional, que contiene la contribución del tiempo anterior. La ecuación puede también contener un término fuente dependiente de la nueva solución, de manera que los términos deben ser almacenados de forma separada.

El esquema no requiere mucho más esfuerzo computacional por paso que el esquema de Euler implícito de primer orden. Aplicando el análisis de estabilidad de von Neumann se observa que el esquema es incondicionalmente estable, pero soluciones oscilatorias (y aun inestabilidades) son posibles para pasos temporales grandes. Esto puede ser atribuido a la posibilidad de que el coeficiente  $\varphi_i^{n+1}$  se vuelva negativo para  $\Delta t$  grandes, pero se garantiza que es positivo si  $\Delta t < \rho(\Delta x)^2/\lambda$ , que es el doble del máximo paso permitido para el método explícito. En la práctica, pasos temporales mucho más grandes pueden ser usados sin producir oscilaciones.

Los esquemas descritos anteriormente son algunos de los más utilizados. Existen métodos de mayor orden como los métodos de Runge-Kutta de tercer y cuarto orden o el método de Adam. Usualmente, la discretización en el tiempo de mayor orden se utiliza cuando la discretización espacial es también de orden alto, que es el caso

cuando el dominio de solución tiene forma regular de manera que resulta fácil aplicar los métodos de mayor orden en el espacio.

#### **4.5.5 Geometrías complejas**

Muchos flujos involucran geometrías complejas que no pueden representarse adecuadamente con grillas cartesianas. Aunque los principios de discretización descritos anteriormente pueden utilizarse, requieren varias modificaciones. Las propiedades del algoritmo de la resolución dependen de la elección de la grilla y del arreglo de las variables sobre la grilla.

Cuando la geometría es regular, la elección de la grilla es simple y las líneas de la grilla usualmente siguen las direcciones de las coordenadas. En geometrías complicadas, la elección de la grilla no es trivial y la grilla está sujeta a restricciones impuestas por el método de discretización. Si el algoritmo está diseñado para grillas curvilíneas ortogonales, no se pueden utilizar grillas no ortogonales; si se requiere que los VC sean cuadriláteros o hexaedros, no pueden usarse grillas que consisten en triángulos y tetraedros, etc. Cuando la geometría es compleja y las restricciones no pueden ser cumplidas, se deben buscar soluciones de compromiso.

Grillas no ortogonales que ajusten los bordes son en general las utilizadas para calcular flujos en geometrías complejas. Pueden ser estructuradas, estructuradas en bloques o desestructuradas. La ventaja de estas grillas es que pueden adaptarse a cualquier geometría. Como las líneas de grilla siguen los bordes, las condiciones de borde son fáciles de implementar. La grilla también puede adaptarse al flujo, esto es, un conjunto de las líneas de grilla puede elegirse de manera que siga las líneas de corriente (lo que aumenta la exactitud) y el espaciamiento puede hacerse más chico en regiones en donde las variables presenten fuertes variaciones.

Las grillas no ortogonales también tienen desventajas. Las ecuaciones transformadas contienen más términos incrementando de esta manera la dificultad de la programación y el costo de resolver las ecuaciones. Además, la no ortogonalidad de la grilla puede causar soluciones no físicas y el arreglo de las variables sobre la grilla afecta la precisión y la eficiencia del algoritmo.

Aunque la necesidad demande que la grilla sea no ortogonal, es importante hacerla lo más ortogonal posible. En el MVF la ortogonalidad de las líneas de la grilla en los vértices de los VC no es importante, lo que importa es el ángulo entre el vector normal de la cara de la celda y la línea que conecta los centros de los VC a cada lado de la cara.

La topología de las grillas también es importante. Si se utilizan la aproximación integral del punto medio, la interpolación lineal y las diferencias centradas para discretizar las ecuaciones, la precisión será mayor si los VC son cuadriláteros en 2D o hexaedros en 3D, que si son triángulos o tetraedros respectivamente. La razón de esto es que los errores que se cometen en las caras de celdas opuestas al discretizar los términos difusivos se cancelan parcialmente (si las caras son paralelas y las áreas iguales se cancelan totalmente) sobre VC cuadriláteros o hexaedros. Para obtener la misma precisión sobre triángulos o hexaedros, se deben usar aproximaciones de diferencias y una interpolación más sofisticadas.

La precisión se puede mejorar si uno de los conjuntos de las líneas de la grilla sigue las líneas de corriente del flujo, especialmente para los términos convectivos. Esto no

se logra si se usan triángulos y hexaedros, pero es posible si se trabaja con cuadriláteros y hexaedros.

Los principios de la discretización de volúmenes finitos que fueron descritos en las secciones anteriores, son independientes del tipo de grilla utilizada, sin embargo, hay nuevas características que las grillas no ortogonales o desestructuradas traen con ellas. A continuación se analiza el MVF aplicado a la ecuación de conservación genérica, Ec. (4.16), para el caso de una grilla estructurada no ortogonal (Fig. 4.3). La Ec. (4.16) en su forma integral, despreciando el término difusivo se escribe como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \varphi d\Omega + \int_S \rho \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} q_{\varphi} d\Omega . \quad (4.39)$$

Se utilizará la regla del punto medio para aproximar las integrales de superficie y de volumen. Primero se examinará el cálculo de los flujos de masa. Solo se considerará el lado este del VC 2D que se muestra en la Fig. 4.3, el tratamiento es análogo para las demás caras solo es necesario cambiar los índices. El VC puede tener cualquier número de caras, el análisis no está restringido a VC cuadrilaterales como el que se ve en la Fig. (4.3). La aproximación de la regla del punto medio del flujo de masa lleva a la expresión

$$\dot{m}_e = \int_{S_e} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \approx (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_e S_e . \quad (4.40)$$

El vector normal unitario a la cara  $e$  está definido por

$$\mathbf{n}_e S_e = S_e^j \mathbf{i}_j = (y_{ne} - y_{se}) \mathbf{i}_x - (x_{ne} - x_{se}) \mathbf{i}_y , \quad (4.41)$$

y el área de la superficie  $S_e$  es

$$S_e = \sqrt{(S_e^x)^2 + (S_e^y)^2} . \quad (4.42)$$

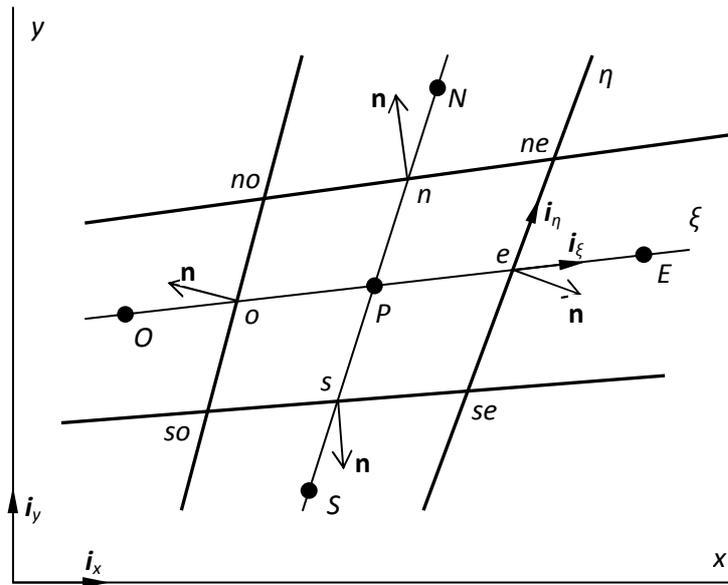
Con estas definiciones la expresión para el flujo de masa se transforma en

$$\dot{m}_e = \rho_e (S^x v_x + S^y v_y)_e . \quad (4.43)$$

La diferencia entre una grilla cartesiana y una no ortogonal es que, en último caso, el vector normal tiene componentes en más de una dirección cartesiana y todas las componentes de la velocidad contribuyen al flujo de masa. Cada componente cartesiana de la velocidad es multiplicada por la componente correspondiente de vector de superficie (proyección de la cara de la celda sobre un plano en coordenadas cartesianas). El flujo convectivo de cualquier cantidad transportada puede escribirse como

$$F_e^c = \int_{S_e} \rho \varphi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \approx \dot{m}_e \varphi_e , \quad (4.44)$$

donde  $\varphi_e$  es el valor de  $\varphi$  en el centro de la cara de la celda. La aproximación más simple de segundo orden se obtiene a través de interpolación lineal entre los dos nodos a cada lado de la cara. En grillas estructuradas no ortogonales pueden usarse técnicas de interpolación e integración de mayor orden para aproximar los flujos convectivos. Sin embargo, si la grilla es desestructurada e involucra VC con un número arbitrario de caras, el uso de la interpolación lineal y la regla del punto medio ofrecen el compromiso entre precisión, generalidad y simplicidad.



**Figura 4.3** - Esquema de un volumen de control típico 2D.  
Figura adaptada del [Fergizer & Peric, 2002]

Para aproximar las integrales de volumen en la Ec. (4.39) se utiliza la regla del punto medio, que consiste en reemplazar la integral de volumen por el producto entre el valor del integrando evaluado en el centro del VC y el volumen del VC. Por ejemplo, para el término fuente en la Ec. (4.39)

$$Q_p^\varphi = \int_{\Omega} q_\varphi d\Omega \approx q_{\varphi,p} \Delta\Omega. \quad (4.45)$$

La aproximación anterior es independiente de la forma del VC, pero el cálculo del volumen del VC depende de la forma. Como el caso analizado trata con una grilla estructurada y el VC consiste en un cuadrilátero, el cálculo de  $\Delta\Omega$  es sencillo. Se utiliza el producto vectorial entre las dos diagonales del VC

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \frac{1}{2} [(\mathbf{r}_{ne} - \mathbf{r}_{sw}) \times (\mathbf{r}_{nw} - \mathbf{r}_{se})] = \\ &= \frac{1}{2} [(x_{ne} - x_{sw})(y_{nw} - y_{se}) - (y_{ne} - y_{sw})(x_{nw} - x_{se})], \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde  $\mathbf{r}_{ne}$  es el vector posición del punto  $ne$  (ver Fig. 4.3). La razón por la cual se analizó el MVF aplicado a una ecuación de conservación del tipo la Ec. (4.39) para grillas estructuradas no ortogonales, es que éste es el tipo de problema que se encarará más adelante en la Sección 5.7.

## Capítulo 5: Metodología

### 5.1 Introducción

En este Capítulo se resume el trabajo realizado en el marco de esta Tesis. El objetivo de este trabajo es caracterizar el comportamiento del plasma ionosférico en términos de la variabilidad espacial y temporal de la densidad de los electrones y de 7 especies ionizadas. Con este propósito, se comienza por plantear las leyes fundamentales que rigen el problema el cual conforma un sistema de ecuaciones acoplado no lineal. Para resolver el sistema se introducen una serie de simplificaciones que permiten obtener un modelo matemático apropiado para representar a la ionosfera. Finalmente se presenta el método de armado de una grilla adaptada al sistema coordenado, la aplicación del método de volúmenes finitos (MVF) al sistema de ecuaciones, la resolución del sistema de ecuaciones resultante y una descripción de los modelos empíricos para determinar las variables de entrada.

### 5.2 Sistema de ecuaciones para la ionosfera a latitudes bajas y medias

En el Capítulo 3 se presentó un sistema general de ecuaciones de transporte para flujos de gases neutros y plasmas. En esta sección se verán las ecuaciones de transporte aplicadas a la ionosfera y las simplificaciones que se realizan para poder resolverlas. Como cualquier fluido el plasma ionosférico puede caracterizarse a través de parámetros tales como densidad, velocidad y temperatura. Como ya se vio en el Capítulo 3 las ecuaciones que describen las densidades, velocidades y temperaturas son las ecuaciones de continuidad, de movimiento y de balance de energía. Estas ecuaciones conforman un sistema de ecuaciones diferenciales acoplado al que debe incorporarse las ecuaciones de la electrodinámica debido a la presencia de partículas cargadas.

#### 5.2.1 Ecuación de continuidad

La distribución de densidad numérica o concentración (a continuación nos referiremos solo por densidad pero conviene recordar que no se trata de la densidad de masa) para cada especie ionizada y para los electrones debe satisfacer la ecuación de continuidad (plantea la conservación de masa). De lo visto en el capítulo 3 para el caso ionosférico esta puede escribirse como

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = \mathcal{P}_s - n_s \mathcal{L}_s, \quad (5.1)$$

donde el subíndice  $s = e, i$ ;  $e$  para los electrones  $i$  para los iones;  $n$  es la densidad,  $\mathbf{u}$  es la velocidad,  $\mathcal{P}$  es el término que representa la producción y  $\mathcal{L}$  es el término que representa la pérdida. Los términos de producción y pérdida pueden calcularse mediante modelos que tienen en cuenta los procesos de fotoionización, recombinación radiativa y químicos, los que se verán más adelante (Sección 5.3).

### 5.2.2 Ecuación de movimiento

Para poder resolver la Ec. (5.1) se debe conocer la velocidad  $\mathbf{u}$ , por lo cual es necesario plantear una ecuación para ésta. La ecuación que regula el comportamiento de  $\mathbf{u}$  es denominada ecuación de movimiento que para el caso de la ionosfera terrestre puede escribirse (ver Capítulo 4)

$$\rho_s \frac{D_s \mathbf{u}_s}{Dt} = -\nabla p_s + \rho_s \mathbf{G} \pm n_s e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \sum_j \rho_s \nu_{sj} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_j), \quad (5.2)$$

donde al igual que antes  $s = e, i$ ; la suma sobre  $j$  es sobre los electrones, neutros e iones y  $\rho_s = n_s m_s$  es la densidad de masa. El primer término del lado izquierdo que contiene a la derivada convectiva representa al término de inercia. Del lado derecho de la ecuación se encuentran las diferentes fuerzas por unidad de volumen que actúan sobre las cargas; donde el primer término representa a la fuerza de presión ejercida por el gas siendo  $p$  la presión, el segundo a la fuerza debida a la acción de la gravedad  $\mathbf{G}$ , el tercer término se debe a la presencia de campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  en la ionosfera (fuerza de Lorentz) y el último término representa a las fuerzas generadas por colisiones, siendo  $\nu_{sj}$  la frecuencia de colisión entre la especie  $s$  y la especie  $j$ . El término de inercia contiene la derivada convectiva, la cual está dada por  $D/Dt = \partial/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$  donde el primer término representa la variación de la velocidad en un punto fijo del espacio (derivada local) y el segundo término representa la variación debida al movimiento (convección). Reemplazando esta expresión en la Ec. (5.2) se obtiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s = -\frac{1}{m_s n_s} \nabla p_s + \mathbf{G} \pm \frac{e}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \sum_j \nu_{sj} (\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_j). \quad (5.3)$$

Para determinar la presión  $p$  se hace la aproximación del gas ideal  $p = nk_B T$ , donde  $T$  es la temperatura y  $k_B$  la constante de Boltzmann. Luego como la presión queda expresada en función de la densidad y de la temperatura, es necesario plantear una ecuación para la temperatura.

### 5.2.3 Ecuación para la Temperatura

Si se desprecian reacciones químicas y calentamiento debido a viscosidad del gas de iones, la ecuación de conservación de energía para especies ionizadas que conforman el plasma de la ionosfera puede escribirse como (ver Capítulo 3):

$$\frac{3}{2} n_s k_B \frac{\partial T_s}{\partial t} + \frac{3}{2} n_s k_B (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) T_s + n_s k_B T_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (-\lambda_s \nabla T_s) = \sum_k F_{ks}, \quad (5.4)$$

donde el segundo término del lado izquierdo tiene en cuenta el movimiento por advección, el tercer término representa el calentamiento o enfriamiento por expansión adiabática debido al movimiento por advección, el cuarto término representa al flujo de calor debido a conducción y la suma de términos en el lado derecho representan los calentamientos debido a colisiones y a fuentes externas. Haciendo un poco de algebra la Ec. (5.4) se reescribe

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_s T_s) + \frac{2}{3} \frac{1}{n_s k_B} \nabla \cdot (-\lambda_s \nabla T_s) = \frac{2}{3} \frac{1}{n_s k_B} \sum_k F_{ks} + \frac{1}{3} T_s (\nabla \cdot \mathbf{u}_s). \quad (5.5)$$

Esta ecuación tiene la forma de una ley de conservación escalar con términos de transporte y difusión del lado izquierdo, y términos fuente del lado derecho y un término del tipo reactivo. Finalmente las ecuaciones para la temperatura de los iones y los electrones están dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_i T_i) + \frac{2}{3} \frac{1}{n_i k_B} \nabla \cdot (-\lambda_i \nabla T_i) = & \frac{1}{3} T_i (\nabla \cdot \mathbf{u}_i) - 2\nu_{ie} (T_i - T_e) \\ & - \sum_j \frac{2m_i}{m_j + m_i} \nu_{ij} (T_i - T_j) \\ & - \sum_n \frac{2m_i}{m_n + m_i} \nu_{in} (T_i - T_n) \\ & + \sum_n \frac{2}{3k_B} \frac{m_i m_n}{m_n + m_i} \nu_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n)^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_e T_e) + \frac{2}{3} \frac{1}{n_e k_B} \nabla \cdot (-\lambda_e \nabla T_e) = & \frac{1}{3} T_e (\nabla \cdot \mathbf{u}_e) - 2 \sum_n \frac{m_e}{m_n} \nu_{en} (T_e - T_n) \\ & - 2 \sum_j \frac{m_e}{m_j} \nu_{ej} (T_e - T_j) + \frac{2}{3} \frac{1}{n_e k_B} Q_{foto} \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $Q_{foto}$ , es el término de calentamiento debido a los fotoelectrones,  $\lambda_e$  y  $\lambda_i$  son las conductividades térmicas para los electrones y los iones respectivamente,  $\nu_{en}$  la frecuencia de colisión entre los electrones y los neutros,  $\nu_{in}$  la frecuencia de colisión entre la especie ionizada  $i$  y los neutros,  $\nu_{ie}$  la frecuencia de colisión entre la especie ionizada  $i$  y los electrones, y  $\nu_{ij}$  la frecuencia de colisión entre la especie ionizada  $i$  y la especie ionizada  $j$ .

#### 5.2.4 Ecuaciones de Maxwell

Como se trabaja con campos eléctricos y magnéticos, deben considerarse las ecuaciones electrodinámicas de Maxwell. En su forma completa están dadas por

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c / \epsilon_0, \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t), \quad (5.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.11)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío,  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío,  $\rho_c$  es la densidad de carga ( $\rho_c = \sum_j n_j q_j$ ),  $\mathbf{J}$  es la densidad de corriente ( $\mathbf{J} = \sum_j n_j q_j \mathbf{u}_j$ ) y  $q_j$  es la carga de la especie ionizada  $j$ . Para completar el debe agregarse el principio de conservación de la carga

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_c dV = - \iint_{\Sigma} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (5.12)$$

Esta ecuación establece que el aumento o la disminución de la carga dentro de un volumen  $V$  está determinado por la corriente de conducción eléctrica neta a través de su superficie  $\Sigma$ . Vale la pena notar la semejanza con la ecuación de continuidad para la conservación de masa. En su forma diferencial la Ec. (5.12) puede escribirse como:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \partial \rho_c / \partial t. \quad (5.13)$$

Los procesos de producción y recombinación no afectan esta ecuación porque la carga neta no cambia en ninguno de estos dos procesos. En la ionosfera la corriente de conducción es más grande que la corriente de desplazamiento  $\epsilon_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$  para las frecuencias que conciernen a los procesos que se estudiarán, por lo que la corriente de desplazamiento es despreciada. Además, como los mayores cambios en el campo magnético a alturas ionosféricas son del orden de  $\delta \mathbf{B} / \mathbf{B}$ , se considera a la Ec. (5.10) como solo una ecuación de diagnóstico. Esto es, dada una corriente  $\mathbf{J}$ , podemos encontrar  $\delta \mathbf{B}$ , la perturbación del campo geomagnético a partir de (5.10), pero el  $\mathbf{B}$  que se usa en el resto de las ecuaciones dinámicas es el campo magnético de la Tierra, por lo que se considera  $\delta \mathbf{B} / \mathbf{B} = 0$ . Esta aproximación descarta la generación de campos eléctricos de inducción a partir de cambios en el campo magnético. Si se considera la propagación de ondas electromagnéticas como las ondas de Alfvén, se deben incluir tanto las fluctuaciones de campos magnético y eléctrico. Con estas consideraciones el conjunto de ecuaciones (5.8) a (5.11) junto con la Ec. (5.13) toma la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c / \epsilon_0, \quad (5.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (5.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho_c / \partial t. \quad (5.18)$$

La Ec. (5.14) muestra que el campo eléctrico es derivable a partir de una función potencial  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  a través de  $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$ . Finalmente, una simplificación más es posible, en un medio ionizado, diferencias de cargas muy pequeñas crean grandes campos eléctricos. Entonces, un plasma debe exhibir una neutralidad de carga casi perfecta. Esto implica

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial \rho_c / \partial t \cong 0. \quad (5.19)$$

Esto es, la divergencia de una corriente eléctrica en cualquier escala de tiempo macroscópica debe ser cero. En la mayoría de los casos se utiliza  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  para calcular los campos eléctricos, en lugar de la Ec. (5.15). La ecuación de Poisson, es decir la Ec. (5.15), sigue siendo válida, pero no es muy útil, ya que la diferencia de carga asociada con los campos eléctricos de importancia geofísica son muy pequeños.

### 5.2.5 Sistema de ecuaciones simplificado

Las ecuaciones de conservación para la densidad, momento y energía son más complejas de lo que aparentan. Son no lineales y están acopladas, lo que las hace difíciles de resolver. Es difícil probar a través de las herramientas matemáticas que existe una solución única para condiciones de borde particulares. Además, debido a la presencia de campos eléctricos y magnéticos, deben incluirse las ecuaciones de la electrodinámica. Por estas razones, la resolución del sistema formado por las Ecs. (5.1), (5.3), (5.6), (5.7), (5.14), (5.16), (5.17) y (5.19) es una tarea extremadamente compleja y algunas veces innecesaria ya que muchos términos tienen un aporte de segundo orden y sirven para describir procesos a escala local. El parámetro más relevante a la hora de estudiar a la ionosfera es la densidad de electrones, cuya presencia se debe a la ionización de alguna componente de la atmósfera neutra. En principio para determinar la densidad de electrones es necesario resolver la Ec. (5.1), una vez conocidos los términos de producción y de pérdida. Pero como en el caso del plasma ionosférico puede plantearse la neutralidad de carga, la densidad de electrones puede determinarse en función de las densidades de las especies ionizadas de acuerdo a la siguiente relación

$$n_e = \sum_i n_i. \quad (5.20)$$

De esta manera al resolver la ecuación de continuidad para las distintas especies ionizadas se obtiene la densidad de los electrones de manera indirecta. Este procedimiento permite un mejor entendimiento de los distintos procesos físicos y químicos que suceden en las distintas regiones de la ionosfera. Para esta Tesis se trabajó con 7 especies ionizadas,  $NO^+$ ,  $N_2^+$  y  $O_2^+$  para modelar la región E y la parte Baja de la región F, el  $O^+$  y el  $N^+$  para modelar la región F y el  $He^+$  y el  $H^+$  para modelar la región por encima de la capa F. De acuerdo a la sección 5.2.1 la densidad de los iones está controlada por la ecuación,

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \mathcal{P}_i - n_i \mathcal{L}_i. \quad (5.21)$$

Al analizar esta ecuación se ve que la densidad de iones para un cierto tiempo y en un punto dado del espacio está controlada por tres fenómenos físicos, la producción de iones, la pérdida de iones y el transporte. La principal fuente de ionización y la razón por la cual existen partículas cargadas en la ionosfera es la fotoionización, mediante la cual la radiación solar incide sobre los elementos neutros de la atmósfera produciendo pares electrón-ion. Una vez producidos los iones estos interactúan con los demás electrones y neutros a través de reacciones químicas, que dependiendo de la reacción se crean o se pierden iones variando la densidad. Finalmente el transporte es el responsable de redistribuir a los iones alterando también la distribución de la densidad. El objetivo de esta Tesis es modelar este comportamiento por lo que es necesario resolver la Ec. (5.21) para las 7 especies ionizadas mencionadas antes. Debido a que las distintas especies interactúan entre si es necesario resolverlas simultáneamente.

Para poder calcular las constantes de las reacciones químicas que determinan los procesos de producción y pérdida es necesario conocer las temperaturas de los electrones ( $T_e$ ) e iones ( $T_i$ ), pero el comportamiento de estas no está dominado por la temperatura sino por la densidad. Por esta razón se utilizará un modelo empírico para determinar  $T_e$  mientras que para la temperatura de los iones se harán una serie de hipótesis para simplificar su cálculo y obtener de manera aproximada los valores de  $T_i$ .

El balance térmico para los iones puede simplificarse ya que las variaciones temporales, la advección, la conducción térmica y la expansión adiabática no son los procesos más importantes. Luego el balance de energía para los iones está simplemente gobernado por el acoplamiento a través de las colisiones con los electrones y las especies neutras [Schunk, 2000]. Bajo estas hipótesis la Ec. (5.6) se reduce a

$$0 = -2v_{ie}(T_i - T_e) - \sum_n \frac{2m_i}{m_n + m_i} v_{in}(T_i - T_n) + \sum_n \frac{2}{3k_B} \frac{m_i m_n}{m_n + m_i} v_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n)^2. \quad (5.22)$$

A partir de esta ecuación se puede obtener una expresión analítica para calcular  $T_i$

$$T_i = \frac{v_{ie}}{v^*} T_e + \frac{1}{v^*} \sum_n \frac{\mu_{in}}{m_n} v_{in} T_n + \frac{1}{3k_B} \frac{1}{v^*} \sum_n \mu_{in} v_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n)^2 \quad (5.23)$$

donde

$$v^* = v_{ie} + \sum_n (\mu_{in} / m_n) v_{in}, \quad (5.24)$$

$$\mu_{in} = \frac{m_i m_n}{m_i + m_n}. \quad (5.25)$$

Por otra parte, para poder incluir el transporte es necesario conocer las velocidades para cada especie ionizada que conforman al plasma ionosférico. Si no se consideran fenómenos de ondas ( $\partial \mathbf{u} / \partial t \rightarrow 0$ ) y se asume flujo subsónico ( $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \rightarrow 0$ ) puede despreciarse el término de inercia en la Ec. (5.3). Bajo esta hipótesis, que se conoce como la aproximación difusiva [Schunk, 2000], la ecuación de movimiento para los electrones y para los iones toma la forma

$$0 = -\frac{1}{m_i n_i} \nabla p_i + \mathbf{G} + \frac{e}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \sum_n v_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n) - \sum_j v_{ij} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j), \quad (5.26)$$

$$0 = -\frac{1}{m_e n_e} \nabla p_e + \mathbf{G} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \sum_n v_{en} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n) - \sum_j v_{ej} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_j). \quad (5.27)$$

Debido a la presencia del campo magnético de la Tierra (CMT) en la ionosfera los movimientos del plasma en las direcciones paralela y perpendicular a las líneas del CMT están débilmente acoplados. Por esta razón, resulta conveniente resolver el sistema de ecuaciones considerando la geometría del CMT y descomponer el movimiento en estas dos direcciones. Luego la velocidad de los electrones y los iones puede escribirse

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e^{\parallel} + \mathbf{u}_e^{\perp}, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^{\parallel} + \mathbf{u}_i^{\perp}, \quad (5.28)$$

siendo  $\mathbf{u}^{\perp}$  la componente de la velocidad perpendicular a las líneas de campo magnético y  $\mathbf{u}^{\parallel}$  la componente de la velocidad paralela a las líneas de campo magnético. Como el término dominante en el movimiento perpendicular al campo es la fuerza de Lorentz, pueden despreciarse los demás términos. Luego, a partir de las Ecs. (5.26) y (5.27) la ecuación de movimiento en la dirección perpendicular al campo para los iones y los electrones se reduce a

$$0 = \frac{e}{m_i} (\mathbf{E}^{\perp} + \mathbf{u}_i^{\perp} \times \mathbf{B}), \quad (5.29)$$

$$0 = \frac{e}{m_e} (\mathbf{E}^{\perp} + \mathbf{u}_e^{\perp} \times \mathbf{B}). \quad (5.30)$$

Despejando la velocidad de ambas ecuaciones se llega a que la componente de la velocidad perpendicular al campo es la misma para los iones y los electrones y solo depende de la interacción entre el campo magnético y los campos eléctricos perpendiculares a este. Esta velocidad es usualmente llamada drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  y está dada por

$$\mathbf{u}^{\perp} = \mathbf{u}_i^{\perp} = \mathbf{u}_e^{\perp} = \frac{\mathbf{E}^{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (5.31)$$

En lugar de recurrir a las ecuaciones de la electrodinámica (5.14) y (5.19) para tratar de determinar los campos eléctricos de polarización responsables de generar este drift en esta Tesis se utilizó un modelo empírico del cual se obtienen los valores en el ecuador magnético.

Para el movimiento a lo largo de las líneas de campo las Ecs. (5.26) y (5.27) se pueden reescribir como:

$$\nabla^{\parallel} p_i - m_i n_i \mathbf{G}^{\parallel} - n_i e \mathbf{E}^{\parallel} = -m_i n_i v_{in} (\mathbf{u}_i^{\parallel} - \mathbf{u}_n^{\parallel}) - m_i n_i \sum_j v_{ij} (\mathbf{u}_i^{\parallel} - \mathbf{u}_j^{\parallel}), \quad (5.32)$$

$$\nabla^{\parallel} p_e - m_e n_e \mathbf{G}^{\parallel} + n_e e \mathbf{E}^{\parallel} = -m_e n_e v_{en} (\mathbf{u}_e^{\parallel} - \mathbf{u}_n^{\parallel}) - m_e n_e \sum_j v_{ej} (\mathbf{u}_e^{\parallel} - \mathbf{u}_j^{\parallel}). \quad (5.33)$$

El campo  $\mathbf{E}^{\parallel}$  de polarización se desarrolla como respuesta a la pequeña separación de carga que se produce entre los electrones y los iones. El movimiento de los electrones es el causante de la creación de este campo, por lo que puede obtenerse de la ecuación de movimiento para los electrones. Como  $m_e$  es muy pequeña, se pueden despreciar los términos que la contienen en la Ec. (5.33) obteniéndose la siguiente expresión para el campo electrostático de polarización

$$e \mathbf{E}^{\parallel} = -\frac{1}{n_e} \nabla^{\parallel} p_e. \quad (5.34)$$

La expresión anterior es válida sin importar el número de especies iónicas en el plasma ya que, como la masa de electrones es muy pequeña, el término de colisión entre los electrones y los iones se desprecia. Reemplazando (5.34) en (5.32), la ecuación de movimiento para los iones en la dirección de las líneas de campo puede escribirse,

$$0 = -\frac{1}{m_i n_i} \nabla^{\parallel} (p_i + p_e) + \mathbf{G}^{\parallel} - \nu_{in} (\mathbf{u}_i^{\parallel} - \mathbf{u}_n^{\parallel}) - \sum_j \nu_{ij} (\mathbf{u}_i^{\parallel} - \mathbf{u}_j^{\parallel}). \quad (5.35)$$

El problema de utilizar esta aproximación es que es solo válida para cierto rango de alturas y por fuera se obtienen valores de velocidad demasiado grandes, lo que lleva a inestabilidades en el método de resolución. Por esta razón solo se considera el transporte debido el drift ExB y se analizara en la parte de resultados que efectos produce el no incorporar este término.

En resumen, el modelo matemático para la ionosfera se reduce a resolver la ecuación de continuidad para 7 especies ionizadas, bajo las hipótesis de: i) neutralidad de carga, ii) el flujo es subsónico y debido sólo al drift ExB, iii) el balance de energía para los iones esta gobernado por el acoplamiento a través de las colisiones con los electrones y las especies neutras, quedando determinado por las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \mathcal{P}_i - n_i \mathcal{L}_i \quad i = O_2^+, N_2^+, NO^+, O^+, N^+, He^+, H^+ \\ n_e = \sum_i n_i \\ \mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{E}^{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2} \\ T_i = \frac{\nu_{ie}}{\nu^*} T_e + \frac{1}{\nu^*} \sum_n \frac{\mu_{in}}{m_n} \nu_{in} T_n + \frac{1}{3k_B} \frac{1}{\nu^*} \sum_n \mu_{in} \nu_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n)^2 \end{array} \right. \quad (5.36)$$

Para poder resolver este sistema se necesitan modelos para la producción y la pérdida de Ionización (Sección 5.3), para intensidad de la radiación solar (Sección 5.9.1), para las densidades de las especies neutras y las velocidades de los vientos termosféricos (Sección 5.9.2), para las velocidades de los drift ExB (Sección 5.9.3), para el campo geomagnético (Sección 5.9.4), para la temperatura de los electrones (Sección 5.9.5) y para las constantes de las reacciones químicas y las frecuencias de colisión (Apéndice B).

### 5.3 Modelos para la Producción y la Pérdida de Ionización

Los valores de los términos de producción y pérdida de Ionización en la Ec. (5.21) fueron calculados mediante modelos que tienen en cuenta procesos de fotoionización y químicos, los cuales se describen a continuación.

#### 5.3.1 Fotoionización

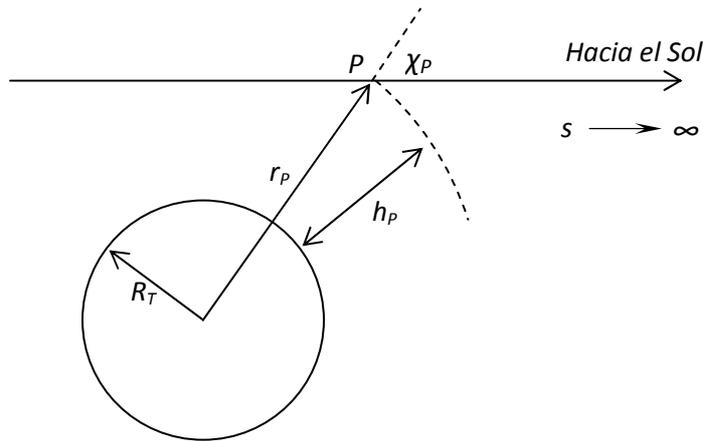
La fotoionización diurna se calcula para las especies ionizadas  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $O$ ,  $N$ , y  $He$ , siguiendo lo visto en Cap. 2, de acuerdo a

$$\mathcal{P}_s^{foto}(z) = n_s(z) \int_0^{\lambda_{si}} I_\infty(\lambda) \sigma_s^i(\lambda) \exp \left[ - \sum_t \sigma_t^a(\lambda) \int_\infty^z n_t(z) ds_\lambda \right] d\lambda, \quad (5.37)$$

donde  $\mathcal{P}_s^{foto}$  [ $\text{cm}^{-3}\text{s}^{-1}$ ] es la tasa de fotoionización de la  $s$ -ésima especie neutra a la altura  $z$ ,  $n_{s,t}(z)$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] son las densidades de las especies neutras  $s,t$  a la altura  $z$ ,  $I_\infty(\lambda)$  [fotones/ $\text{cm}^2\text{s}$ ], es el flujo de radiación solar incidente a la longitud de onda  $\lambda$ ,  $\sigma_s^i(\lambda)$  [ $\text{cm}^2$ ] es la sección transversal de fotoionización de la especie  $s$  para la longitud de onda  $\lambda$  y  $\sigma_t^a(\lambda)$  [ $\text{cm}^2$ ] es la sección transversal de absorción de la especie  $t$  para la longitud de onda  $\lambda$ . Los valores de  $I_\infty(\lambda)$  son calculados con el modelo EUVAC [Richards et. al., 1994], del cual se obtienen valores de radiación solar en 37 intervalos de longitud de onda cubriendo el rango de 5 a 105 nm (Sección 5.9.1). Por esta razón la primera integral en la ecuación anterior se convierte en una sumatoria

$$\mathcal{P}_s^{foto}(z) = n_s(z) \sum_{l=1}^{37} I_\infty(\lambda_l) \sigma_s^i(\lambda_l) \exp \left[ - \sum_t \sigma_t^a(\lambda_l) \int_\infty^z n_t(z) ds \right]. \quad (5.38)$$

Las tablas con los valores de  $\sigma^a(\lambda_l)$  y  $\sigma^i(\lambda_l)$  para estos intervalos de longitud de onda  $\lambda_l$  se muestran Apéndice A.



**Figura 5.1**– Geometría del modelo de fotoionización para  $\chi_P \leq 90^\circ$ .  $R_T$  es el radio de la Tierra  $r_P$  es la distancia geocéntrica del punto P.

La integral  $\int n(z) ds$  (contenido columnar) dentro de la exponencial debe evaluarse a lo largo del camino que recorre la luz desde el Sol hasta el punto ubicado en la altura  $z$ . Este rayo está definido por la distancia cenital solar  $\chi$ , es decir, el ángulo que forma el rayo con la vertical en el punto  $z$ . En lugar de integrarla numéricamente, se aproxima la integral utilizando una función de Chapman [Smith & Smith, 1972]. De acuerdo a Chapman [1931] el contenido columnar de un constituyente atmosférico distribuido exponencialmente a lo largo de la columna que se extiende desde el punto de observación P hasta el Sol puede aproximarse por

$$\int_{s_p}^{\infty} n_n(s) ds = n_p H \text{ch}(X_p, \chi_p), \quad (5.39)$$

asumiendo que

$$n_n = n_0 \exp(-h / H), \quad (5.40)$$

donde  $h$  es la altura ( $h = h_p$  en el punto P),  $H$  es la altura de escala,  $n_n$  es la densidad de la especie neutra de interés ( $n_n = n_0$  en  $h = 0$ ),  $n_p$  es la densidad en el punto P,  $r_p$  es la distancia radial al punto P,  $s$  es la distancia medida de forma positiva en dirección al Sol ( $s = s_p$  en el punto P),  $\chi_p$  es el ángulo cenital solar en P y  $X_p = r_p/H$ . La forma de la función  $ch(X_p, \chi_p)$  depende del valor que toma  $\chi_p$  en P. Para  $\chi_p \leq 90^\circ$ , ver Fig. 5.1, la función de Chapman toma la forma

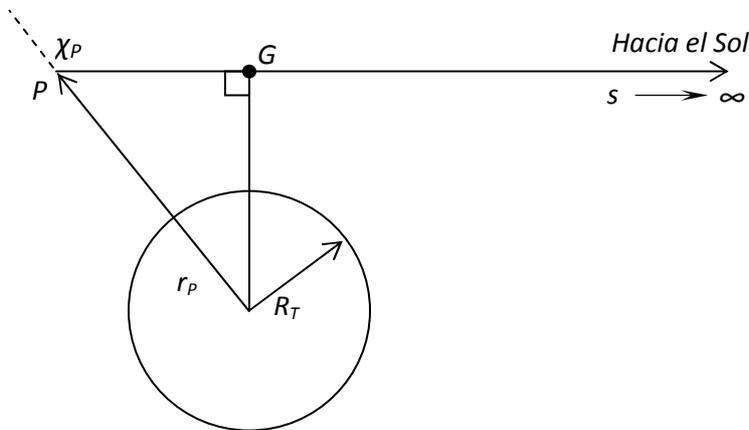
$$ch(X_p, \chi_p) \approx [(\pi / 2) X_p]^{1/2} \exp(y^2) [1 - \text{erf}(y)], \quad (5.41)$$

donde

$$y = (X_p / 2)^{1/2} |\cos \chi_p|, \quad (5.42)$$

y erf es la función error. Luego para  $\chi_p \leq 90^\circ$

$$\int_{s_p}^{\infty} n_n(s) ds \approx n_p H_p [(\pi / 2) X_p]^{1/2} \exp(y^2) [1 - \text{erf}(y)]. \quad (5.43)$$



**Figura 5.2** – Geometría del modelo de fotoionización para  $\chi_p > 90^\circ$ .  $R_T$  es el radio de la Tierra  $r_p$  es la distancia geocéntrica del punto P.

Para  $\chi_p > 90^\circ$ , asumiendo una atmósfera simétrica, la aproximación para el contenido columnar toma la forma

$$\int_{s_p}^{\infty} n_n(s) ds \approx [(\pi / 2) X_G]^{1/2} H_G \{2n_G - n_p \exp(y^2) [1 - \text{erf}(y)]\}, \quad (5.44)$$

donde el subíndice G indica que las cantidades son evaluadas en el punto sobre el camino donde  $\chi = 90^\circ$  (Fig. 5.2).

### 5.3.2 Producción y pérdida por reacciones químicas

El segundo proceso a tener en cuenta para la producción de iones es el relacionado con las reacciones químicas en donde se producen intercambio de cargas. Estas reacciones producen iones de una especie a costa de perder iones de otra especie, de manera que la densidad total de iones permanece igual. La efectividad del proceso de intercambio se describe mediante la constante de reacción  $k^{IC}$  que varía según las especies interactuantes y contiene implícitamente una dependencia con la temperatura. Para la producción de  $O_2^+$  se consideran sólo los procesos de intercambio entre el  $O^+$ , el  $N_2^+$  y el  $N^+$  con el  $O_2$ ; para la producción del  $N_2^+$  se considera el intercambio entre el  $He^+$  y el  $N_2$ ; para la producción del  $O^+$  se considera el intercambio entre el  $N_2^+$  y el  $H^+$  con el  $O$ , y entre el  $He^+$  y el  $O_2$ ; para la producción del  $N^+$  se considera el intercambio entre el  $He^+$  y el  $N_2$ ; para la producción del  $H^+$  se considera el intercambio entre el  $O^+$  y el  $H$ ; y finalmente para la producción del  $NO^+$  se consideran los procesos de intercambio entre el  $O_2^+$  y el  $O^+$  con el  $N_2$ , entre el  $N_2^+$  y el  $O$ , entre el  $N^+$  y el  $O_2$ , entre el  $O_2^+$  y el  $N$ , y entre  $O_2^+$  y el  $He$ . De acuerdo a lo anterior puede escribirse

$$\mathcal{P}^{IC}(O_2^+) = k_2^{IC} n_i(O^+) n_n(O_2) + k_5^{IC} n_i(N_2^+) n_n(O_2) + k_9^{IC} n_i(N^+) n_n(O_2), \quad (5.45)$$

$$\mathcal{P}^{IC}(N_2^+) = k_{11}^{IC} n_i(He^+) n_n(N_2), \quad (5.46)$$

$$\mathcal{P}^{IC}(O^+) = k_4^{IC} n_i(H^+) n_n(O) + k_{12}^{IC} n_i(He^+) n_n(O_2) + k_6^{IC} n_i(N_2^+) n_n(O), \quad (5.47)$$

$$\mathcal{P}^{IC}(N^+) = k_{10}^{IC} n_i(He^+) n_n(N_2), \quad (5.48)$$

$$\mathcal{P}^{IC}(H^+) = k_3^{IC} n_i(O^+) n_n(H), \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{IC}(NO^+) = & k_1^{IC} n_i(O^+) n_n(N_2) + k_7^{IC} n_i(N_2^+) n_n(O) + k_8^{IC} n_i(N^+) n_n(O_2) \\ & + k_{13}^{IC} n_i(O_2^+) n_n(N) + k_{14}^{IC} n_i(O_2^+) n_n(NO) + k_{15}^{IC} n_i(O_2^+) n_n(N_2) \end{aligned} \quad (5.50)$$

donde  $\mathcal{P}^{IC}$  es la tasa de ionización en  $m^{-3}s^{-1}$ ,  $n_i$  la densidad de los iones en  $m^{-3}$ ,  $n_n$  la densidad de los neutros en  $m^{-3}$  y  $k^{IC}$  la constante de reacción en  $m^3/s$ .

La tasa a la cual se pierden iones es proporcional a la cantidad de iones existentes, es decir que, para la especie iónica  $i$  puede escribirse como  $n_i \mathcal{L}_i$  siendo  $\mathcal{L}_i$  la frecuencia de pérdida. Las reacciones químicas responsables de la pérdida de iones son el intercambio de cargas, la recombinación disociativa en el caso de los iones moleculares y la recombinación radiativa en el caso de los iones atómicos. Las frecuencias de pérdida utilizadas en esta Tesis son calculadas de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(O_2^+) = k_{13}^{IC} n_n(N) + k_{14}^{IC} n_n(NO) + k_{15}^{IC} n_n(N_2) + k_2^{re} n_e, \quad (5.51)$$

$$\mathcal{L}(N_2^+) = k_5^{IC} n_n(O_2) + k_6^{IC} n_n(O) + k_7^{IC} n_n(O) + k_1^{re} n_e, \quad (5.52)$$

$$\mathcal{L}(O^+) = k_1^{IC} n_n(N_2) + k_2^{IC} n_n(O_2) + k_3^{IC} n_n(H) + k_4^{re} n_e, \quad (5.53)$$

$$\mathcal{L}(N^+) = k_8^{IC} n_n(O_2) + k_9^{IC} n_n(O_2) + k_7^{re} n_e, \quad (5.54)$$

$$\mathcal{L}(He^+) = k_{10}^{IC} n_n(N_2) + k_{11}^{IC} n_n(N_2) + k_{12}^{IC} n_n(O_2) + k_6^{re} n_e, \quad (5.55)$$

$$\mathcal{L}(H^+) = k_4^{IC} n_n(O) + k_5^{re} n_e, \quad (5.56)$$

$$\mathcal{L}(NO^+) = k_3^{re} n_e, \quad (5.57)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la frecuencia de pérdida de ionización en  $s^{-1}$ ,  $n_n$  la densidad de neutros en  $m^{-3}$ , y  $k^{IC}$  y  $k^{re}$  las constantes de reacción de intercambio y recombinación respectivamente, en  $m^3/s$ . Las expresiones para  $k^{IC}$  y  $k^{re}$  se encuentran en el Apéndice B.

#### 5.4 Sistema coordenado dipolar

En el estudio de la dinámica del plasma ionosférico terrestre se suele utilizar un sistema coordenado ortogonal relacionado con el CMT, denominado sistema coordenado dipolar cuya ventaja es que incorpora la geometría del CMT. El análisis que se presenta a continuación sigue a lo presentado por Bailey & Balan [1996], Millward et al. [1996] y Huba et al. [2000].

Para latitudes medias y bajas el CMT puede ser representado por un dipolo. En la aproximación más sencilla, de un dipolo axial centrado, los ejes coordenados geográfico y magnético coinciden. Una representación más precisa del campo magnético de la Tierra se obtiene inclinando el dipolo. Una pregunta válida es porque utilizar una aproximación dipolar para el campo magnético, en lugar del IGRF, cuando el último contiene importantes anomalías en donde el campo difiere marcadamente de una estructura dipolar. La razón para usar la configuración dipolar es que el modelo puede describirse mediante un sistema coordenado simple, lo que resulta imposible si se utiliza el campo dado por el IGRF.

El sistema coordenado dipolar esta definido por las coordenadas  $(p, q, \varphi)$ , siendo  $q$  la coordenada a lo largo de la línea de campo,  $p$  la coordenada perpendicular a la líneas (es constante a lo largo de la línea) y  $\varphi$  la coordenada perpendicular a  $p$  y  $q$  en la dirección azimutal. Este sistema esta definido por

$$\begin{aligned} p &= \frac{r}{R_T} \frac{1}{\sin^2(\vartheta)} \\ q &= \left( \frac{R_T}{r} \right)^2 \cos(\vartheta) \\ \varphi &= \varphi \end{aligned} \quad (5.58)$$

siendo  $R_T$  el radio de la Tierra y  $(r, \vartheta, \varphi)$  las coordenadas esféricas geomagnéticas que se definen a partir la aproximación dipolar utilizada para el CMT. Debido a que los movimientos del plasma en las direcciones paralela y perpendicular al campo magnético están débilmente acoplados, trabajar con este sistema coordenado simplifica la resolución las ecuaciones que gobiernan la dinámica del plasma. La transformación inversa requiere resolver la siguiente ecuación

$$q^2 \left( \frac{r}{R_T} \right)^4 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{r}{R_T} \right) - 1 = 0 \quad (5.59)$$

La regla de descartes de los signos establece que esta ecuación tiene una sola raíz real positiva y como la ecuación es de cuarto orden tiene una representación algebraica. Siguiendo a Swisdak [2006], la solución debe expresarse en una forma computacionalmente estable para que sea útil en el modelado numérico. Para esto se definen las cantidades auxiliares

$$\alpha = \frac{256}{27} q^2 \rho^4 \quad \beta = (1 + \sqrt{1 + \alpha})^{2/3} \quad \gamma = \sqrt[3]{\alpha} \quad (5.60)$$

y

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\beta^2 + \beta\gamma + \gamma^2}{\beta} \right)^{3/2} \quad (5.61)$$

Luego la raíz positiva de la Ec. (5.59) está dada por

$$\frac{r}{R_T} = \frac{4\mu}{(1 + \mu)(1 + \sqrt{2\mu - 1})} \rho \quad (5.62)$$

Como  $\mu \geq 1$  se elimina la posibilidad de una cancelación entre términos. Para completar la transformación inversa se utiliza

$$\vartheta = \arcsin \left( \sqrt{\frac{r}{R_T \rho}} \right) \quad (5.63)$$

donde el arcsin cubre el rango entre  $[0, \pi]$ . Las expresiones de los vectores unitarios para los sistemas de coordenadas dipolar y geomagnético son

$$\mathbf{e}_q = -\frac{2\cos\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_r - \frac{\sin\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_\vartheta \quad \mathbf{e}_\rho = \frac{\sin\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_r - \frac{2\cos\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_\vartheta \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \quad (5.64)$$

$$\mathbf{e}_r = -\frac{2\cos\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_q + \frac{\sin\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{e}_\vartheta = -\frac{\sin\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_q - \frac{2\cos\vartheta}{\delta} \mathbf{e}_\rho \quad \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \quad (5.65)$$

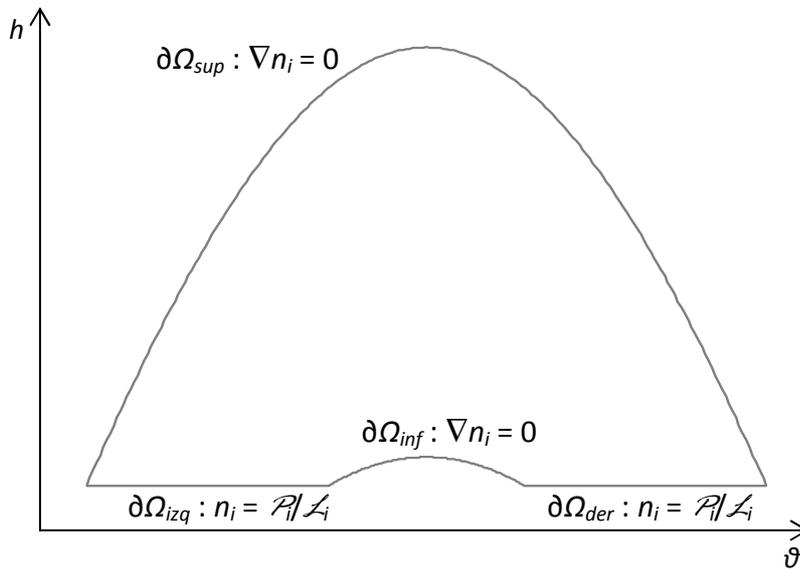
donde  $\delta = (1 + 3\cos^2(\vartheta))^{1/2}$ . Otra forma de expresar la transformación entre sistemas es utilizar la inclinación magnética  $I$  que para el caso de un dipolo (ver Sección 2.5) está relacionado con  $\vartheta$  de acuerdo a

$$\begin{aligned}
\tan(l) &= 2 / \tan(\vartheta) \\
\cos(l) &= \sin(\vartheta) / \delta \\
\sin(l) &= 2 \cos(\vartheta) / \delta
\end{aligned}
\tag{5.66}$$

Por último la expresión para la divergencia en el sistema dipolar toma la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{R_T^2 \delta^2}{r^6} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{r^3}{\delta} A_q \right) + \frac{\delta^2}{R_T r^4 \sin^4 \vartheta} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{r^4 \sin \vartheta}{\delta} A_p \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}
\tag{5.67}$$

La transformación entre las coordenadas geográficas y geomagnéticas se muestra en el Apéndice C.



**Figura 5.3** – Esquema del dominio espacial donde se resuelven las ecuaciones con las condiciones de borde.

### 5.5 Dominio espacial y condiciones de borde

La ventaja de utilizar el sistema dipolar es que las componentes dinámicas debidas al campo magnético se desacoplan naturalmente si se consideran movimientos perpendicular y paralelo al campo. Se reduce el sistema de ecuaciones a 2 dimensiones al suponer que la dinámica está restringida al plano magnético  $\varphi$  constante, asumiendo  $u_\varphi = 0$  y  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Bajo esta hipótesis las componentes en la dirección paralela a las líneas de campo están la dirección de  $\mathbf{e}_q$  y las perpendiculares en la dirección  $\mathbf{e}_q$ .

Luego el dominio espacial  $\Omega$  en donde se resolverá el sistema de ecuaciones se define en el sistema dipolar. Está determinado por un plano a longitud magnética constante delimitado por cuatro bordes llamados  $\partial\Omega_{inf}$  (inferior),  $\partial\Omega_{sup}$  (superior),  $\partial\Omega_{der}$  (derecho) y  $\partial\Omega_{izq}$  (izquierdo) (Fig. 5.3). Los bordes derecho e izquierdo conforman la base del dominio que se ubica a los 90 km de altura, en donde se ubica el límite

inferior de la región E. El borde inferior esta determinado por la línea de campo con un ápice a los 200 km, altura a la cual la línea de campo dipolar atraviesa el ecuador ( $\vartheta = \pi/2$ ). De esta manera, de acuerdo a la Ec. (5.58) se determina el valor mínimo para la coordenada  $\rho$ ,  $\rho_{min} = r_{min}/R_T$ , con  $r_{min} = R_T + 200$ . El borde superior está determinado por la línea de campo con un ápice a 2.5 radios terrestres de altura determinando el valor máximo de la coordenada  $\rho$ ,  $\rho_{max} = r_{max}/R_T$ ,  $r_{max} = 3.5R_T$ . La elección de este dominio evita la imposición de condiciones de borde, que se utilizan generalmente, a los 1000 km (limite superior para la ionosfera) de altura sobre las densidades que usualmente no son consistentes con el estado real de la ionosfera.

Para poder resolver el sistema de Ec. (5.36) se necesitan imponer condiciones de borde sobre las densidades. Se asume la condición de equilibrio fotoquímico,  $n_i = \mathcal{P}_i/\mathcal{L}_i$ , a alturas de la base y de gradiente cero,  $\nabla n_i = 0$ , en los bordes inferior y superior. De esta manera, el problema en forma diferencial para la ecuación de continuidad en el sistema (5.36) queda determinado por

$$\begin{cases} \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = \mathcal{P}_i - n_i \mathcal{L}_i & \text{en } \Omega \quad i = NO^+, O_2^+, N_2^+, O^+, N^+, He^+, H^+ \\ n_i = \mathcal{P}_i / \mathcal{L}_i & (\rho, q) \in \partial\Omega_{izq} \cup \partial\Omega_{der} \\ \nabla n_i = 0 & (\rho, q) \in \partial\Omega_{inf} \cup \partial\Omega_{sup} \end{cases} \quad (5.68)$$

## 5.6 Discretización del dominio espacial

El siguiente punto importante para resolver el sistema de ecuaciones (5.68) es la discretización del dominio espacial. El procedimiento consiste en primero determinar el valor de la coordenada  $\rho$  para la línea de campo que alcanza la mayor altura ( $\rho_{max}$ ) y para la línea de campo que alcanza la menor altura ( $\rho_{min}$ ) durante el cálculo y distribuir la cantidad de líneas de campo exponencialmente de manera de tener una mejor resolución a alturas de la ionosfera [Huba et. al., 2000] lo que se logra haciendo

$$\rho_j = \rho_{min} + \Delta_\rho (\rho_{max} - \rho_{min}), \quad (5.69)$$

donde  $\rho_{min} = r_{min}/R_T$ ,  $\rho_{max} = r_{max}/R_T$  y  $\Delta_\rho$  el incremento exponencial en  $\rho$  dado por

$$\Delta_\rho = \frac{\sinh\left[\gamma_\rho(j-1)/(N_\rho-1)\right]}{\sinh(\gamma_\rho)}, \quad (5.70)$$

donde  $\gamma_\rho$  es el coeficiente que determina la variación de  $\Delta_\rho$  y  $j = 1, N_\rho$ , siendo  $N_\rho$  el número de líneas de campo. Una vez fijada la distribución de líneas, se determina la distribución de nodos a lo largo de cada línea. Primero hay que determinar los valores de  $q$  en los extremos norte y sur de cada línea de campo. La base de las líneas de campo en este modelo son los 90 km, luego, para encontrar los valores de  $q$  correspondientes en los dos extremos se necesita encontrar las coordenadas geomagnéticas equivalentes. Se comienza definiendo la longitud magnética  $\varphi$  y el

valor de  $p$  para la línea. Luego se determinan los valores de las coordenadas magnéticas remanentes  $r$  y  $\vartheta$  de los puntos de la base a partir de las expresiones (5.58)

Una vez calculados los valores de  $q$  en ambos extremos de las líneas, el próximo paso es determinar la distribución de nodos sobre cada línea. Si se utiliza un espaciamiento constante entre los nodos, se obtiene la misma resolución en toda la grilla y para tener una buena resolución a alturas ionosféricas implica tomar una gran cantidad de nodos. Lo que se desea es tener una mayor densidad de nodos cerca de los extremos de las líneas de campo (en la ionosfera) y una menor densidad cerca del ápice (plasmaesfera). Para determinar la distribución exponencial de nodos a lo largo de la línea se define una variable  $x$  dada por [Millward et al., 1996]

$$x = \frac{\sinh(\gamma_q q)}{\sinh(\gamma_q q_{\max})}, \quad (5.71)$$

que luego permite definir los nodos a lo largo de cada línea usando

$$x_i = x_{i-1} + c, \quad (5.72)$$

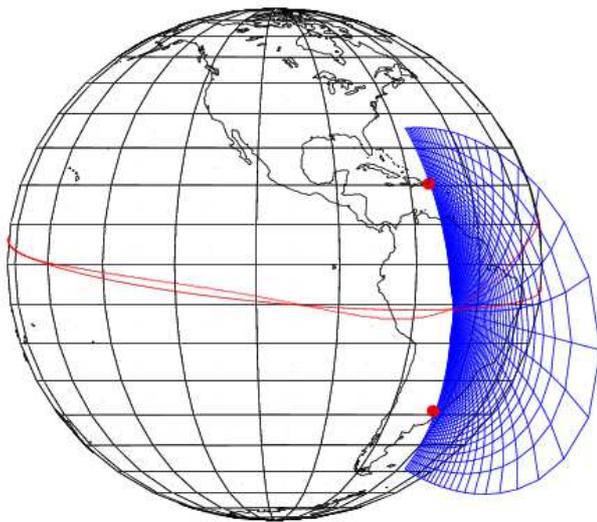
donde  $c$  es un incremento constante,  $\gamma_q$  es una constante y  $q_{\max}$  es el valor de  $q$  en el extremo cada línea. En estos puntos, la variable  $x$  toma valores de  $+1$  y  $-1$  (en el hemisferio norte y sur respectivamente) y cero en el centro de la línea (donde  $q = 0$ ). Si se requiere tener  $N_q$  sobre cada línea en total, con  $(N_q - 1)/2$  puntos en cada hemisferio (y uno en el centro) luego

$$c = \frac{2}{N_q - 1}. \quad (5.73)$$

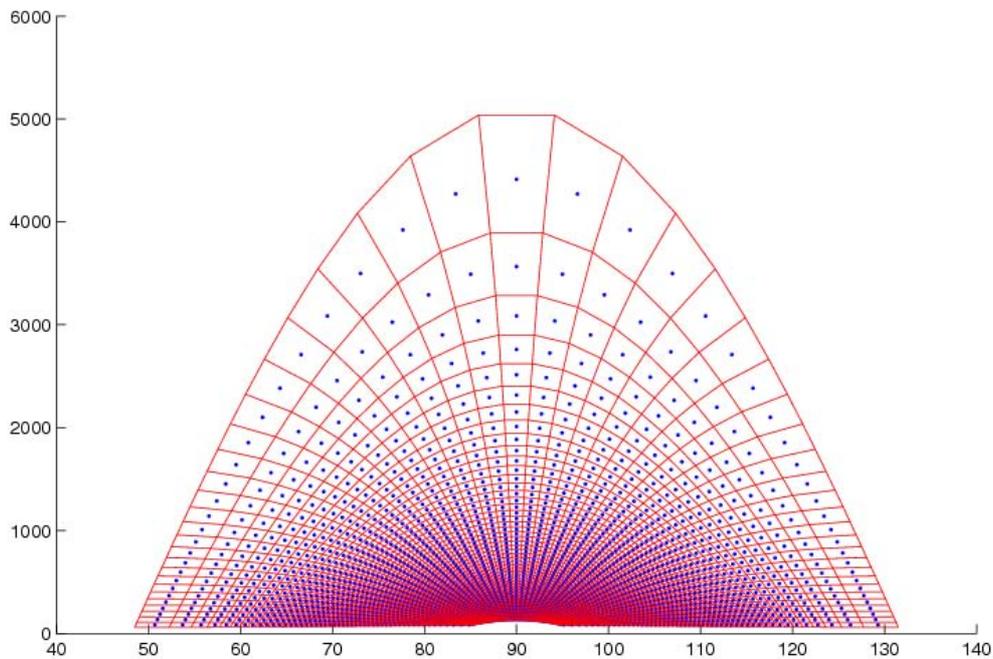
De esta manera se calcula la distribución de nodos sobre cada línea. Trabajando con la Ec. (5.71) se llega a:

$$q_{ji} = \ln \left\{ x_{ji} \sinh(\gamma_q q_{\max}^j) + \left[ 1 + x_{ji}^2 \sinh^2(\gamma_q q_{\max}^j) \right]^{1/2} \right\} \frac{1}{\gamma_q}. \quad (5.74)$$

La constante  $\gamma_q$  controla la distribución, donde valores de  $\gamma_q$  grandes dan una mayor densidad de puntos a menores alturas. Una vez determinados los pares  $(p_j, q_{ji})$  se obtienen las coordenadas de los nodos  $(r_{ji}, \vartheta_{ji}, \phi_{ji})$  con  $j = 1, N_p$  y  $i = 1, N_q$ . De esta manera se construye la grilla con nodos  $N_q \times N_p$  y entorno a éstos se construyen los volúmenes de control (VC), que consisten en cuadriláteros. Como resultado se obtiene una grilla estructurada no ortogonal, la cual se ilustra en las Figs. (5.4) y (5.5).



**Figura 5.4** – Representación en 3D de la grilla numérica. En este ejemplo se tomo  $N_q = 101$ ,  $N_\theta = 50$ ,  $\gamma_q = 5$  y  $\gamma_p = 3$ .



**Figura 5.5** – Representación en 2D de la grilla numérica. En este ejemplo se tomo  $N_q = 101$ ,  $N_\theta = 50$ ,  $\gamma_q = 5$  y  $\gamma_p = 3$ .

La elección de esta grilla se basa en que la precisión del método numérico mejora si uno de los conjuntos de las líneas de la grilla sigue las líneas de corriente del flujo, especialmente para los términos convectivos. Esto no se logra si se trabaja con grillas estructuradas en los sistemas cartesianos o esféricos.

### 5.7 Resolución numérica

Dado que el sistema (5.68) consiste en ecuaciones derivadas parciales es necesario utilizar un método numérico para su resolución. La ecuación de continuidad tiene la estructura de lo que se conoce como ley de conservación, para la cual el MVF es el indicado [LeVeque, 2002; Ferziger y Peric, 2002]. Por otro lado, el MVF presenta la

ventaja de que evita trabajar con la expresión de la divergencia en el sistema dipolar, Ec. (5.68). De acuerdo a lo visto en el capítulo 4 el MVF implica integrar la ecuación sobre cada VC,  $\Omega_{ji}$ , que conforman el dominio espacial discretizado. Es importante que hasta aquí, el subíndice  $i$  que indicaba la especie ionizada se suprime y ahora se utiliza para indicar la discretización de la coordenada  $q$  mientras que el subíndice  $j$  indica la discretización de la coordenada  $p$ . Bajo las consideraciones anteriores

$$\int_{\Omega_{ji}} \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_{ji}} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Omega_{ji}} \mathcal{P} - n\mathcal{L} d\Omega. \quad (5.75)$$

Luego, aplicando el teorema de Gauss de la divergencia la ecuación anterior toma la forma

$$\int_{\Omega_{ji}} \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_{ji}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_{\Omega_{ji}} \mathcal{P} - n\mathcal{L} d\Omega, \quad (5.76)$$

donde  $\partial\Omega_{ji}$  es la frontera de  $\Omega_{ji}$  y  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria exterior a  $\partial\Omega_{ji}$ . Si escribimos  $\partial\Omega_{ji} = \Gamma_{j-1/2 i} + \Gamma_{j+1/2 i} + \Gamma_{j i+1/2} + \Gamma_{j i-1/2}$ , siendo  $\Gamma_{j i+1/2}$  la cara del VC que separa los nodos (Fig. 5.6), la integral de línea puede escribirse

$$\int_{\partial\Omega_{ji}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega = \int_{\Gamma_{j-1/2 i}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Gamma_{j+1/2 i}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Gamma_{j i+1/2}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega + \int_{\Gamma_{j i-1/2}} (n\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} d\Omega \quad (5.77)$$

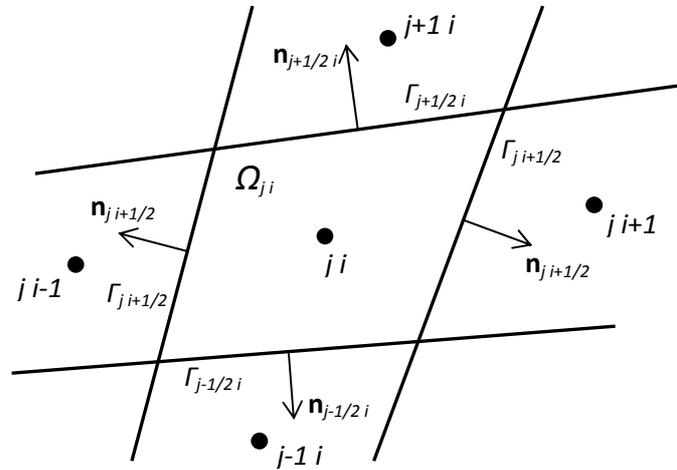


Figura 5.6 - Esquema del volumen de control.

Por otro lado aplicando la regla del punto medio para aproximar las integrales de superficie y de línea en la Ec. (5.76)

$$\int_{\Omega_{ji}} \frac{\partial n}{\partial t} d\Omega = \left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{ji} \Omega_{ji}, \quad (5.78)$$

$$\int_{\Omega_{ji}} \mathcal{P} - n\mathcal{L} d\Omega = (\mathcal{P}_{ji} - n_{ji}\mathcal{L}_{ji}) \Omega_{ji}, \quad (5.79)$$

$$\int_{\Gamma_{j+1/2,i}} (\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n} d\Omega = [(\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n}]_{j+1/2,i} \Gamma_{j+1/2,i} = F_{j+1/2,i} \Gamma_{j+1/2,i}, \quad (5.80)$$

donde  $F_{j+1/2,i}$  es el flujo numérico a través de la cara  $(j+1/2,i)$  cuya longitud es  $\Gamma_{j+1/2,i}$ . Se utiliza el esquema de upwind para el cálculo de los flujos convectivos (Sección 4.6.5)

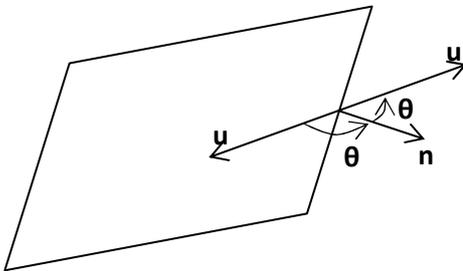
$$\begin{aligned} F_{j+1/2,i} &= [(\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n}]_{j+1/2,i} = n_{j+1,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j+1/2,i}^{in} + n_{j,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j+1/2,i}^{out} \\ F_{j-1/2,i} &= [(\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n}]_{j-1/2,i} = n_{j-1,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j-1/2,i}^{in} + n_{j,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j-1/2,i}^{out} \\ F_{j,i+1/2} &= [(\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n}]_{j,i+1/2} = n_{j,i+1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j,i+1/2}^{in} + n_{j,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j,i+1/2}^{out} \\ F_{j,i-1/2} &= [(\mathbf{nu}) \cdot \mathbf{n}]_{j,i-1/2} = n_{j,i-1} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j,i-1/2}^{in} + n_{j,i} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j,i-1/2}^{out} \end{aligned} \quad (5.81)$$

donde

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^{in} = \min\{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), 0\} = \begin{cases} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) < 0 \\ 0 & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \geq 0 \end{cases} \quad (5.82)$$

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^{out} = \max\{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \leq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} & \text{si } (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0 \end{cases} \quad (5.83)$$

Los supraíndices *in* y *out* indican que el flujo es entrante o saliente al VC respectivamente.



$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = |\mathbf{u}| |\mathbf{n}| \cos \theta = \begin{cases} > 0 & \text{si } 0 < \theta < \pi/2 \\ \leq 0 & \text{si } \pi/2 \leq \theta < \pi \end{cases}$$

La derivada temporal en la Ec. (5.78) se discretiza de acuerdo

$$\left( \frac{\partial n}{\partial t} \right)_{ji} = \frac{n_{ji}^{t+\Delta t} - n_{ji}^t}{\Delta t} \quad (5.84)$$

Para poder evaluar los flujos se determina el valor  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$  sobre las caras del VC, igualando el valor de  $\mathbf{u}$  sobre la cara al promedio de los valores de  $\mathbf{u}$  sobre los nodos vecinos que comparten la cara. Esto es

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})_{j+1/2,i} = \mathbf{u}_{j+1/2,i} \cdot \mathbf{n}_{j+1/2,i} \quad \text{con} \quad \mathbf{u}_{j+1/2,i} = \frac{\mathbf{u}_{j+1,i} + \mathbf{u}_{j,i}}{2}. \quad (5.85)$$

Con respecto a la resolución temporal el término advectivo es evaluado de forma explícita, esto es en el tiempo  $t$ , mientras que los términos que contienen las fuentes son evaluados en el tiempo  $t+\Delta t$  para obtener estabilidad. De esta manera la ecuación de continuidad discretizada toma la forma

$$\begin{aligned}
& \frac{n_{ji}^{t+\Delta t} - n_{ji}^t}{\Delta t} \Omega_{ji} + \left[ n_{j+1i}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{j+1/2i}^t + n_{ji}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{j+1/2i}^t \right] \\
& + \left[ n_{j-1i}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{j-1/2i}^t + n_{ji}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{j-1/2i}^t \right] \\
& + \left[ n_{ji+1}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{ji+1/2}^t + n_{ji}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{ji+1/2}^t \right] \\
& + \left[ n_{ji-1}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{ji-1/2}^t + n_{ji}^t \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{ji-1/2}^t \right] = \left( \mathcal{P}_{ji} - n_{ji}^{t+\Delta t} \mathcal{L}_{ji} \right) \Omega_{ji}
\end{aligned} \tag{5.86}$$

donde  $\mathbf{S} = \Gamma \mathbf{n}$  es el vector exterior a la cara  $\Gamma$  de manera que  $\mathbf{S} \cdot \Gamma = 0$ . Reescribiendo la Ec. (5.86) se llega

$$n_{ji}^{t+\Delta t} = A_1 n_{j-1i}^t + A_2 n_{ji-1}^t + A_3 n_{ji}^t + A_4 n_{ji+1}^t + A_5 n_{j+1i}^t + B \tag{5.87}$$

donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-\Delta t}{\Omega_{ji}(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})} \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{j-1/2i}^t \\
A_2 &= \frac{-\Delta t}{\Omega_{ji}(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})} \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{ji-1/2}^t \\
A_3 &= \frac{1}{(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})} \left\{ 1 - \frac{\Delta t}{\Omega_{ji}} \left( \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{j-1/2i}^t + \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{ji-1/2}^t + \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{ji+1/2}^t + \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{out} \right]_{j+1/2i}^t \right) \right\} \\
A_4 &= \frac{-\Delta t}{\Omega_{ji}(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})} \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{ji+1/2}^t \\
A_5 &= \frac{-\Delta t}{\Omega_{ji}(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})} \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{S})^{in} \right]_{j+1/2i}^t \\
B &= \frac{\Delta t \mathcal{P}_{ji}}{(1+\Delta t \mathcal{L}_{ji})}
\end{aligned}$$

Luego a partir de la Ec. (5.87) se calcula la evolución espacial y temporal de las densidades de las distintas especies ionosféricas. Debido a que en la resolución esta involucrado el método explícito, para que la solución sea numéricamente estable, el intervalo de tiempo  $\Delta t$  debe satisfacer la condición de Courant-Lewy-Friedrics 2D [Song, 2008]

$$\Delta t < \min\{\Delta t_{ji}\} = \min\left\{\frac{\sin(\xi_{ji})\sqrt{(\Gamma_{j-1/2i})^2 + (\Gamma_{ji-1/2})^2}}{(c_s)_{ji} + |\mathbf{u}_{ji}|}\right\}, \quad (5.88)$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido  $c_s = (\gamma p / \rho_n)^{1/2}$ . El factor  $\sin(\xi_{ji})$  aparece porque los VC son cuadriláteros no rectangulares siendo el ángulo  $\xi_{ji}$  tal que

$$\cos(\xi_{ji}) = \frac{\Gamma_{j-1/2i} \cdot \Gamma_{ji-1/2}}{\Gamma_{j-1/2i} \Gamma_{ji-1/2}}. \quad (5.89)$$

Por último, es necesario implementar las condiciones de borde. La condición de equilibrio fotoquímico en la base se expresa a través de

$$\begin{cases} n_{j1} = \mathcal{P}_{j1} / \mathcal{L}_{j1} \\ n_{jN_q} = \mathcal{P}_{jN_q} / \mathcal{L}_{jN_q} \end{cases} \quad j = 1, N_p \quad (5.90)$$

Para imponer la condición de gradiente cero se utilizan "celdas fantasma", es decir, se extiende el dominio incluyendo celdas adicionales, las cuales cumplen

$$\begin{cases} n_{0i} = n_{1i} \\ n_{N_p+1i} = n_{N_p i} \end{cases} \quad i = 2, N_q \quad (5.91)$$

## 5.8 Esquema general de simulación

Una parte importante de esta Tesis fue el desarrollo de un código computacional en lenguaje Fortran para resolver el sistema de ecuaciones. La estructura del algoritmo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Se fijan las condiciones bajo las cuales se hará la simulación (actividad solar, actividad magnética, día del año, etc.) y la geometría involucrada en el problema (longitud magnética, cantidad de nodos, alturas máximas y mínimas de los ápices, base de la grilla, etc.) y en función de esto se construye la grilla de acuerdo a lo explicado en la Sección 5.6.
2. Se asigna un valor inicial a las densidades para comenzar la simulación. Se plantea la condición de equilibrio fotoquímico comenzando a horas del amanecer

$$n_{ji}^{t_0} = \frac{\mathcal{P}_{ji}^{t_0}}{\mathcal{L}_{ji}^{t_0}}$$

3. Se determina el paso temporal de acuerdo a la condición (5.88).
4. Se calculan para el tiempo  $t$  todos los valores de entrada, estos son las temperaturas, los drifts, las densidades neutras, las componentes de los

vientos, los términos de producción y de pérdida, las frecuencias de colisión, las constantes de reacción, etc.

5. Se resuelve el sistema de ecuaciones (5.87) para las 7 especies ionizadas en forma simultánea obteniéndose las densidades en el tiempo  $t+\Delta t$  y se vuelve al paso 3.

La iteración entre los pasos 3 a 5 se realiza durante un intervalo de 48 horas y se toman las últimas 24 horas de la simulación como los valores para las densidades.

## **5.9 Valores de entradas**

En la Sección 5.3 se describieron los modelos utilizados para la fotoionización y la producción y pérdida de ionización a través de reacciones químicas. En esta sección se da una breve descripción de los modelos de entrada restantes utilizados en la resolución del sistema (5.87).

### **5.9.1 Modelo para la Intensidad de radiación solar EUV**

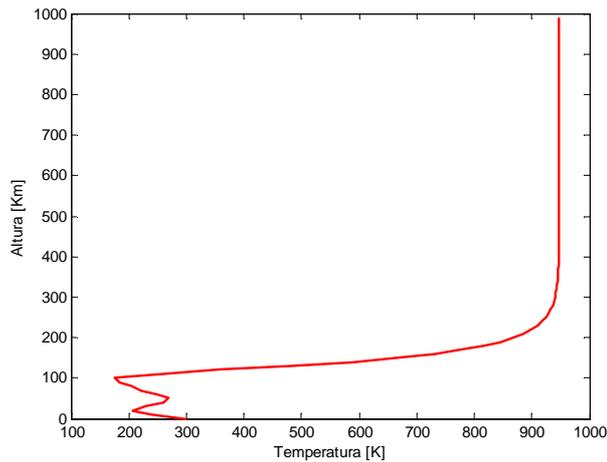
La radiación solar en el rango EUV y de rayos X excita, disocia e ioniza los constituyentes neutros de la atmósfera superior. Existe un gran número de modelos de radiación solar EUV y uno de estos es el llamado EUVAC solar flux modela [Richards et. al., 1994]. Utiliza sólo 37 intervalos de longitud de onda cubriendo el rango de 5 a 105 nm y sus parámetros básicos están dados en la tabla que se encuentra en el Apéndice A. En el EUVAC la variación de la actividad solar es tomada en cuenta a través del factor

$$P = (F_{10.7+} + \langle F_{10.7} \rangle) / 2, \quad (5.92)$$

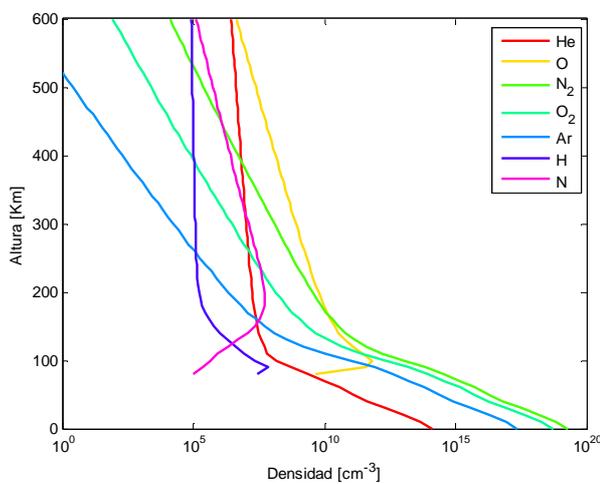
que se utiliza para escalar el flujo solar correspondiente a un intervalo de longitud de onda,  $I_i$ , para diferentes niveles de actividad solar según la expresión

$$I_i = F_{74113_i} [1 + A_i(P - 80)]. \quad (5.93)$$

En estas ecuaciones el  $F_{74113_i}$  es el flujo de referencia modificado,  $A_i$  es el factor de escala para cada intervalo,  $F_{10.7}$  es el 10.7 cm radio del flujo solar en  $\text{W Hz}^{-1} \text{m}^{-2}$  multiplicado por  $10^{22}$ ; y  $\langle F_{10.7} \rangle$  es el flujo promediado durante 81 días.



**Figura 5.7**– perfiles de temperatura (arriba) y de densidad (abajo) calculados con el modelo NRLMSISE-00 para el día 21/3 a las 12:00 TU sobre el ecuador geográfico a los 57° O de longitud, considerando F10.7=90 y Ap =4.

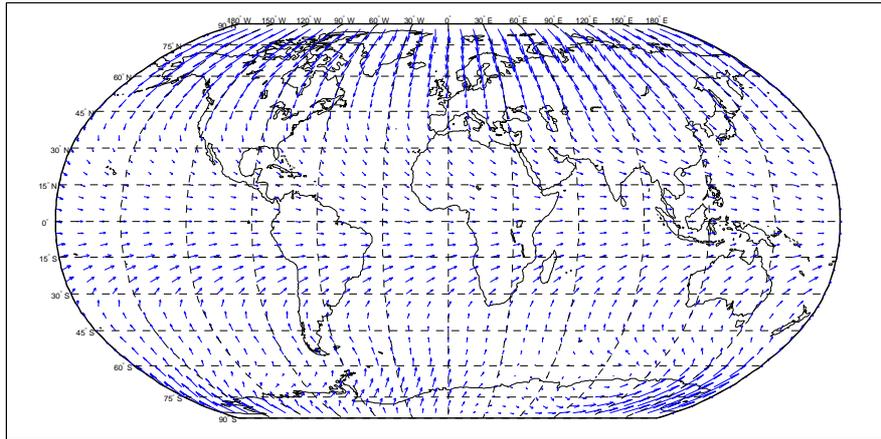


### 5.9.2 Modelo para la Atmósfera neutra

La temperatura de la atmósfera neutra y las densidades de las especies neutras que la conforman son tomadas del modelo empírico global NRLMSISE-00 [Picone et al., 2002] que consiste en una mejora del modelo MSISE-90 [Hedin, 1991]. Este modelo describe la temperatura y las densidades neutras de la atmósfera desde la superficie hasta la exobase. Se basa en la recopilación de datos provenientes de varios espectrómetros de masa en cohetes y satélites, y radares de dispersión incoherentes ubicados por toda la Tierra y permite obtener la temperatura y las densidades de las especies *He*, *O*, *N<sub>2</sub>*, *O<sub>2</sub>*, *Ar*, *H* y *N* en función del día del año, tiempo universal (TU), altura, latitud, longitud, actividad solar (F10.7) y la actividad magnética (índice Ap). La Fig. (5.7) muestra un ejemplo de un perfil de densidades y de temperatura calculados con el NRLMSISE-00.

La especie *NO* neutra no está incluida en el modelo NRLMSISE-00, de manera que su densidad  $n(NO)$  es calculada a partir de la relación empírica [Mitra, 1968; Bailey et al., 1997]

$$n(NO) = 0.4 \exp\left(\frac{-3700}{T_n}\right) n(O_2) + 5 \times 10^{-7} n(O). \quad (5.94)$$



**Figura 5.8** – campo de vientos neutros a una altura de 300 km calculados con el modelo HWM-93 para el día 21/3 a las 12:00 TU y  $A_p = 4$ .

Para modelar los vientos termosféricos globales se utiliza el HWM-93 [Hedin et al., 1996], que es un modelo empírico para los vientos neutros de la atmósfera superior. Está basado en datos obtenidos de los satélites AE-E (Atmospheric Explorer-E) y DE-2 (Dynamics Explorer 2) y utiliza un conjunto limitado de armónicos esféricos para describir los vientos meridionales y zonales. La primera edición de este modelo, que se dio a conocer en 1987, HWM-87 [Hedin et al., 1987], modelaba los vientos por encima de los 220 km de altura. Con la inclusión de datos de radares de dispersión incoherente y de interferómetros ópticos de Fabry-Perot, el HWM-90 [Hedin et al., 1991] se extendió hasta los 110 km y utilizando datos de radares MF para la detección de meteoros, el HWM-93 modela desde la superficie terrestre. El modelo es sensible a variaciones del ciclo solar, pero da cambios pequeños y no siempre están claramente delineados por los datos actuales. También incluye variaciones con la actividad magnética, a través del índice  $A_p$ . El HWM-93 reproduce bien los datos a latitudes medias y bajas. La salida son los vientos meridional y zonal en m/s para una dada latitud, longitud, altura, tiempo e índice  $A_p$ . La Fig. (5.8) muestra un ejemplo del campo de vientos neutros modelados por el HWM-93.

### 5.9.3 Modelo para el Drift $E \times B$

Los campos eléctricos de dínamo, generados a través de la acción de los vientos termosféricos, son extremadamente importantes en la dinámica del plasma ionosférico, determinando la distribución de la densidad de electrones en zonas ecuatoriales. Esto se ve en el hecho que son los responsables de generar el drift perpendicular al campo magnético  $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ , que es uno de los parámetros necesario modelar para poder describir la dinámica de los iones y electrones. Para esta Tesis la componente  $\mathbf{v}^\perp$  se obtiene a partir del modelo empírico propuesto por Fejer y Scherliess [Scherliess & Fejer, 1999] que consiste en un modelo global del drift vertical en la región F ecuatorial. El modelo describe la variación del drift vertical en el ecuador a alturas de la región F,  $v_{Ec}^\perp$ , en función del tiempo, la longitud y la actividad solar. La variación con la latitud se introduce considerando la siguiente expresión para un

campo magnético dipolar, bajo la suposición de que las líneas de campo son equipotenciales

$$v^\perp = v_{Ec}^\perp \frac{\text{sen}^3 \vartheta}{\sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}}, \quad (5.95)$$

donde  $v_{Ec}^\perp$  es el valor del drift en el ecuador magnético a una altura aproximada de 300 km y  $\vartheta$  es la colatitud magnética siguiendo a Millward et. al., 1996.

#### 5.9.4 Modelo para el Campo geomagnético

El CMT se utiliza para obtener los parámetros para construir el sistema coordenado dipolar. Como se vio en el Capítulo 2 la representación más precisa del CMT es la que se obtiene cuando el potencial escalar magnético es expandido en una serie de armónicos esféricos. Los coeficientes de este desarrollo han sido recolectados desde 1945 y compilados en el International Geomagnetic Reference Field (IGRF) [IAGA, 2010] que es publicado por la Asociación Internacional de Geomagnetismo y Aeronomía (Tabla 6.1). Para una descripción completa del campo magnético dipolar centrado e inclinado se necesitan sólo los 3 primeros coeficientes de la serie ( $g_1^0, g_1^1, h_1^1$ ), mientras que para el dipolo excéntrico se necesitan los primeros ocho ( $g_1^0, g_1^1, g_2^0, g_2^1, g_2^2, h_1^1, h_2^1, h_2^2$ ), esto es, se trunca la expansión en el orden 2.

$g/h$	Grado $n$	Orden $m$	DGRF 1995.0	DGRF 2000.0	DGRF 2005.0	IGRF 2010.0	VS 2010-15
$g$	1	0	-29692	-29619.4	-29556.6	-29496.5	11.4
$g$	1	1	-1784	-1728.2	-1669.05	1585.9	16.7
$h$	1	1	5306	5186.1	5077.99	4945.1	-28.8
$g$	2	0	-2200	-2267.7	-2337.24	-2396.6	-11.3
$g$	2	1	3070	3068.4	3047.69	3023.0	-3.9
$h$	2	1	-2366	-2481.6	-2594.5	-2707.7	-23.0
$g$	2	2	1681	1670.9	1657.76	1668.6	2.7
$h$	2	2	-413	-458	-515.43	-575.4	-12.9

**Tabla 6.1** - Coeficientes de Gauss (nT) del IGRF [IAGA, 2010].

Para el dipolo centrado se tiene que el potencial magnético esta dado por

$$\Phi_m = R_T \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^2 \left[ g_1^0 \cos \vartheta_g + (g_1^1 \cos \varphi_g + h_1^1 \sin \varphi_g) \sin \vartheta_g \right]. \quad (5.96)$$

En términos de las coordenadas geomagnéticas el potencial escalar para un dipolo se escribe

$$\Phi_m = -R_T B_0 \left( \frac{R_T}{r_g} \right)^2 \cos \vartheta_d, \quad (5.97)$$

donde  $B_0$  se define a través del momento magnético  $M_E$ ,  $B_0 = \mu_0 M_E / (4\pi R_T^3)$ . Utilizando la transformación que se muestra en el Apéndice C, puede escribirse

$$\Phi_m = -B_0 \frac{R_T^3}{r_g^2} \left[ \cos(\vartheta_g) \cos(\vartheta_N) + \sin(\vartheta_g) \sin(\vartheta_N) (\cos(\varphi_N) \cos(\varphi_g) + \sin(\varphi_N) \sin(\varphi_g)) \right] \quad (5.98)$$

Igualando las Ecs. (5.96) y (5.98) se tiene

$$\begin{cases} B_0 = \sqrt{(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2} \\ \cos(\vartheta_N) = -g_1^0 / B_0 \\ \tan(\varphi_N) = h_1^1 / g_1^1 \end{cases} \quad (5.99)$$

donde  $\varphi_N$  y  $\vartheta_N$  son la longitud y la colatitud geográficas del polo norte magnético. Una vez calculados  $\varphi_N$  y  $\vartheta_N$  se obtiene la orientación del eje dipolar necesaria para la construcción del sistema coordenado dipolar.

### 5.9.5 Modelo para la temperatura de los electrones

El último parámetro de entrada que falta es la temperatura de los electrones ( $T_e$ ). Para latitudes bajas y medias ésta es controlada principalmente por tres procesos: el calentamiento de electrones por fotoelectrones, el enfriamiento de electrones debido a la transferencia de calor hacia los iones y neutros mas fríos y el transporte de calor por conducción térmica dentro del gas de electrones [Schunk, 2000]. Para alturas bajas la temperatura de los electrones está determinada principalmente por el balance térmico entre los procesos de calentamiento y enfriamiento. El equilibrio térmico se alcanza por debajo de alturas que varían entre los 150 y 350 km de altura, dependiendo de la hora local, la estación del año y el ciclo solar. A alturas superiores el balance térmico de los electrones esta dominado por la conducción térmica.

En el marco de esta Tesis la temperatura de los electrones entre los 200 y 400 km de altura se calcula en función de la densidad de electrones  $n_e$  y la altura  $h$  utilizando el modelo empírico de Brace y Theis [1978]. De acuerdo a éste,  $T_e$  puede obtenerse a partir de la siguiente expresión

$$T_e = p_1 + (p_2 h + p_3) \exp(p_4 h + p_5 n_e + p_6 h n_e), \quad (5.100)$$

donde  $T_e$  está en K,  $n_e$  esta en  $\text{cm}^{-3}$  y  $h$  en km.

Por encima de los 400 km se asume que la conducción térmica a lo largo de las líneas de campo es el proceso más importante en el balance de temperatura, por lo que  $T_e$  se puede obtener simplificando la ecuación de balance de energía para los electrones [Shunck, 2000]

$$\frac{d}{dz} \left( \lambda_e \frac{dT_e}{dz} \right) = 0, \quad (5.101)$$

siendo  $z$  la coordenada vertical y  $\lambda_e = 7.7 \times 10^5 T_e^{5/2}$  en  $\text{eV cm}^{-1} \text{s}^{-1} \text{K}^{-1}$ . Integrando la Ec. (5.101) se obtiene una expresión analítica para  $T_e$  en función de  $z$  para la región en donde domina la conducción

$$T_e = \left[ T_{e0} - \frac{7}{2} \left( \frac{\phi_e}{7.7 \times 10^5} \right) (z - z_0) \right]^{2/7}, \quad (5.102)$$

donde  $T_{e0}$  es la temperatura de los electrones (en K) en la base de la región dominada por conducción,  $\phi_e$  es el flujo de calor en  $\text{eV cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  en esta región (que es constante de acuerdo a la Ec. (5.101) ) y  $z_0$  la altura en cm a la que se encuentra la base, que en este caso  $z_0 = 400 \text{ km}$ . La Ec. (5.102) muestra que si el flujo de calor es descendente ( $\phi_e < 0$ ), la temperatura aumenta con la altura. Los valores de  $\phi_e$  se calculan siguiendo el trabajo de Pandey et. al. [2004], en donde se propone la siguiente relación entre  $\phi_e$  y  $n_e$  que depende de la actividad solar:

$$\begin{cases} \phi_e = (4.207 \times 10^9) / (e^{0.313 \times n_e \times 10^{-5}}) & \text{actividad solar baja} \\ \phi_e = (8.525 \times 10^9) / (e^{0.207 \times n_e \times 10^{-5}}) & \text{actividad solar alta} \end{cases} \quad (5.103)$$

donde  $\phi_e$  está en  $\text{eV cm}^{-2} \text{s}^{-1}$  y  $n_e$  en  $\text{cm}^{-3}$ .

Para alturas menores que 200 km  $T_e$  se calcula con un polinomio de segundo grado [Taïeb, 1996] cuyos coeficientes se determinan asumiendo que  $T_e = T_n$  y  $dT_e/dz = dT_n/dz$  en la base de la grilla y que  $T_e$  a los 200 km coincide con el valor dado por el modelo empírico.

A lo largo de este capítulo se describió la secuencia metodológica que permitió el desarrollo del modelo que dio origen a la elaboración de esta Tesis. A continuación se describirán y analizarán los resultados obtenidos a través de simulaciones realizadas con el modelo.

## Capítulo 6: Resultados y Conclusiones

### 6.1 Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante simulación numérica considerando 8 escenarios representativos. El análisis de estos escenarios permitió evaluar la capacidad del modelo desarrollado para reproducir la fenomenología característica de la ionosfera. Los 8 escenarios corresponden a los solsticios (21 de junio y 21 de diciembre) y los equinoccios (21 de marzo y 22 de septiembre), bajo condiciones de actividad solar alta ( $F_{10.7} = 170$ ) y baja ( $F_{10.7} = 70$ ). La elección de estos escenarios se basa en que son los canónicos a la hora de estudiar el comportamiento de la ionosfera.

En todos los casos el dominio de simulación correspondió al plano de longitud magnética de La Plata, con una base a los 90 km de altura, y cuyos ápices inferior y superior se encuentran ubicados a 200 km y 2.5 radios terrestres de altura sobre el ecuador magnético, respectivamente. De esta manera se obtuvo una cobertura para la ionosfera (90 a 1000 km) entre los 40 y los 140 grados de colatitud magnética. La discretización del dominio se realizó utilizando una grilla de 100 x 100 nodos mediante el procedimiento descrito en la Sección 5.6, obteniendo para la región de la ionosfera una resolución espacial de entre 10 y 40 km. En todos los casos las simulaciones abarcaron un período de 48 horas, comenzando cerca del amanecer (07:00 hora de local) con un paso temporal que varía entre los 4 y 5 segundos, lo que satisface el criterio de Courant (Sección 4.5.4).

### 6.2 Análisis de perfiles de densidad

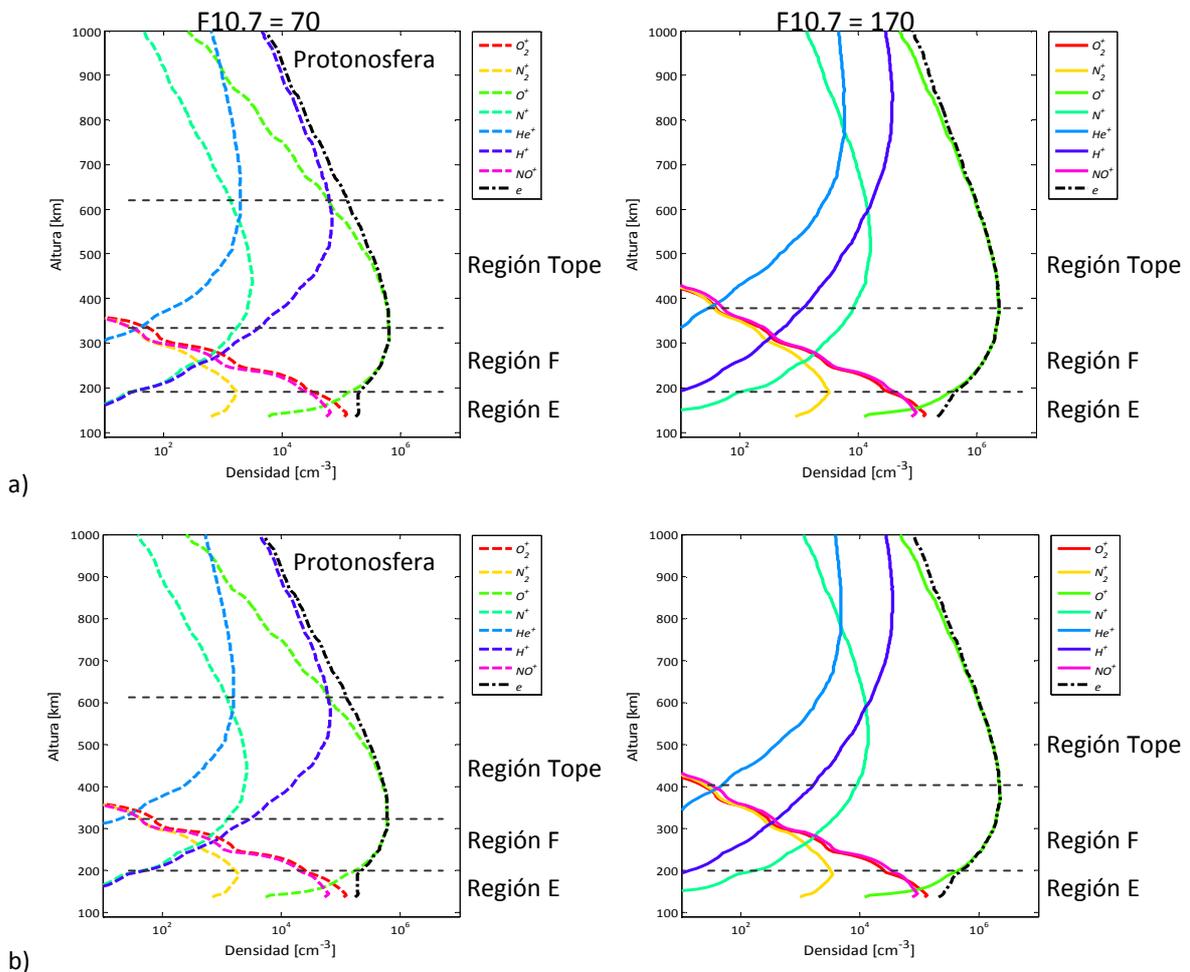
#### Actividad diurna

Las Figs. (6.1) y (6.2) muestran los perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante el mediodía, a una colatitud magnética de  $50^\circ$ , y para actividad solar baja (panel izquierdo) y alta (panel derecho). En la Fig. (6.1) se muestran los perfiles para el equinoccio de marzo (a) y para el equinoccio de septiembre (b), y en la Fig. (6.2) se muestran los perfiles para el solsticio de junio (a) y para el solsticio de diciembre (b).

Como puede observarse en las figuras el modelo desarrollado logra reproducir la estratificación vertical de la ionosfera. Una región E aparece entre los 100-200 km de altura donde los iones dominantes son el  $NO^+$ ,  $O_2^+$  y en menor medida  $N_2^+$ , dando como resultado una densidad de electrones del orden de  $10^5 \text{ cm}^{-3}$ , variando con la actividad solar. Estas densidades resultan de los procesos de fotoionización de las especies neutras  $O$ ,  $O_2$  y  $N_2$ ; reacciones ion-molécula, y recombinaciones ion-electrón incluidos en el modelo. El rol predominante que tiene el  $NO^+$  en la capa E es consecuencia de haber considerado en el modelo la producción de esta especie a través de las reacciones de intercambio de carga como se describe en Cap. 5. La ausencia de iones de  $N_2^+$  en la capa E, a pesar de su importante producción por fotoionización, ocurre porque la pérdida de esta especie a través de las reacciones de

intercambio de carga son mucho más grandes que las pérdidas de los iones  $O_2^+$  y  $NO^+$  a través de la recombinación disociativa, también presentado en el Cap. 5.

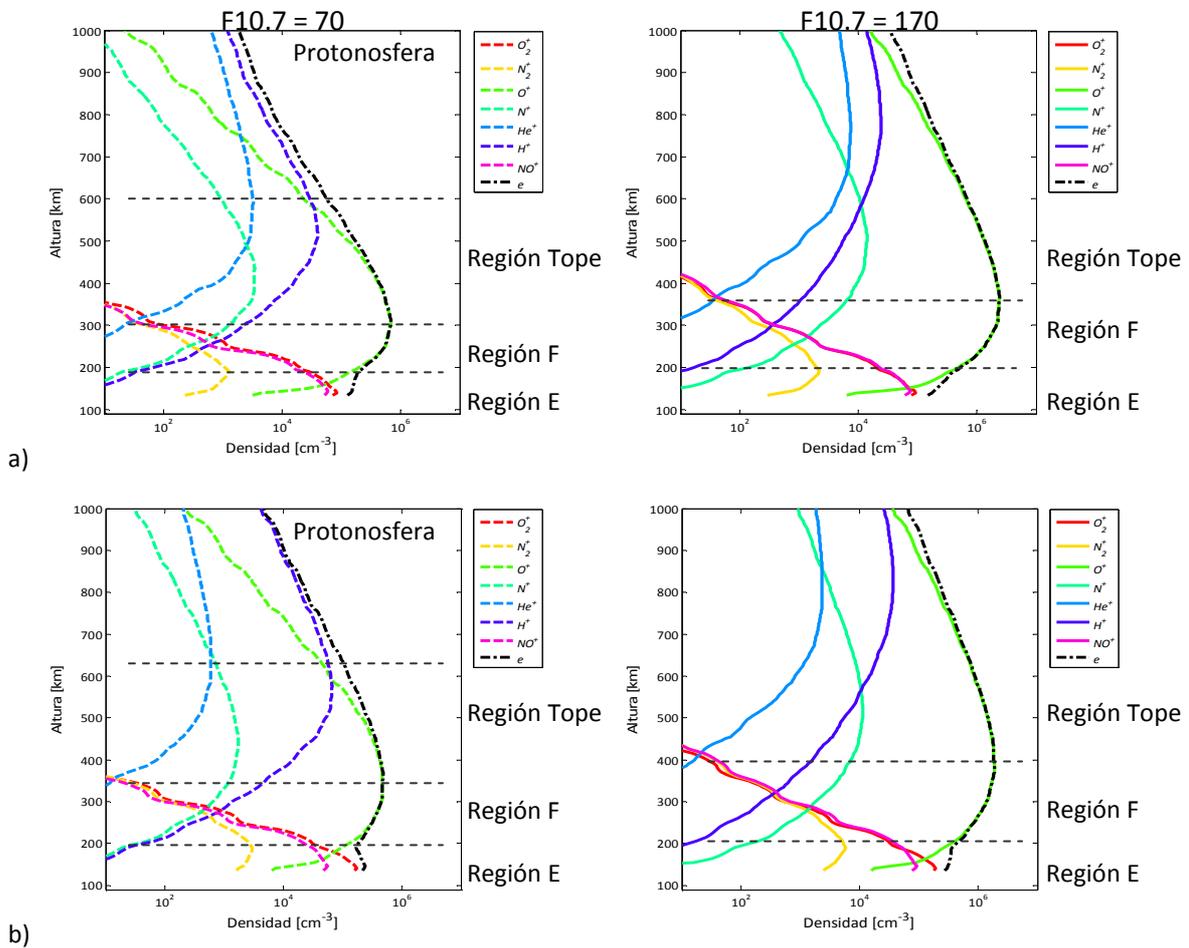
Por encima el modelo reproduce una región F, entre los 200 km y el pico de densidad de electrones, donde el ion dominante es el  $O^+$  y en menor medida el  $N^+$  con un pico de densidad de electrones del orden  $10^6 \text{ cm}^{-3}$ , dependiendo de la actividad solar. En su parte inferior la densidad del  $O^+$  es controlada por la relación entre los procesos de producción por fotoionización del  $O$  y de pérdida por las reacciones con el  $N_2$  y el  $O_2$  incluidos en el modelo. El aumento exponencial de la densidad del  $O^+$  en esta región se debe a que la tasa de fotoionización del  $O^+$  es directamente proporcional a la densidad del oxígeno atómico, que decrece exponencialmente con la altura, pero a una velocidad más baja que la disminución que presentan las densidades del  $O_2$  y del  $N_2$ . La ausencia de  $O_2^+$  y  $NO^+$  en la región F, se debe a tres factores, i) como consecuencia de la disminución de la producción de estas especies a través de las reacciones de intercambio con el  $O^+$  y el  $O$ , ii) a la disminución de su producción por fotoionización y iii) al aumento de la tasa de pérdida por recombinación disociativa debida al aumento en la densidad de electrones. Todos estos efectos fotoquímicos incluidos en el modelo fueron presentados en la Sección (5.3).



**Figura 6.1** - Perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante el mediodía (12:00 hora local) del 21 de marzo (a) y del 22 de septiembre (b), a una colatitud magnética de  $50^\circ$ . Los gráficos de la izquierda corresponden a baja actividad solar y los de la derecha corresponden a alta actividad.

Por encima de la región F se modela la región del tope de la ionosfera, comprendida entre el pico de densidad y la altura de transición entre el  $O^+$  y el  $H^+$ . En esta región el ion dominante es el  $O^+$  y en menor medida el  $H^+$  y  $He^+$ . El  $O^+$  decrece exponencialmente con la altura, mientras que la densidad del  $H^+$  aumenta exponencialmente con la altura, debido a la reacción de intercambio de carga entre el  $O^+$  y el  $H$ , que elimina  $O^+$  y genera  $H^+$ .

Por encima de la altura de transición (protonosfera) dominan los iones atómicos más livianos  $H^+$  y  $He^+$ . En esta región la densidad del  $H^+$  se hace más grande que la densidad del  $O^+$ . Respecto a su comportamiento se observa que la densidad de  $H^+$  comienza a decaer exponencialmente con la altura pero a una tasa menor que la del  $O^+$ . Para actividad solar baja, la altura de transición se ubica aproximadamente a los 600 km (Fig. 6.1 a 6.4, panel de la izquierda), mientras que para actividad solar alta el predominio del  $O^+$  se extiende hasta aproximadamente los 1000 km (Fig. 6.1 a 6.4, panel de la derecha).

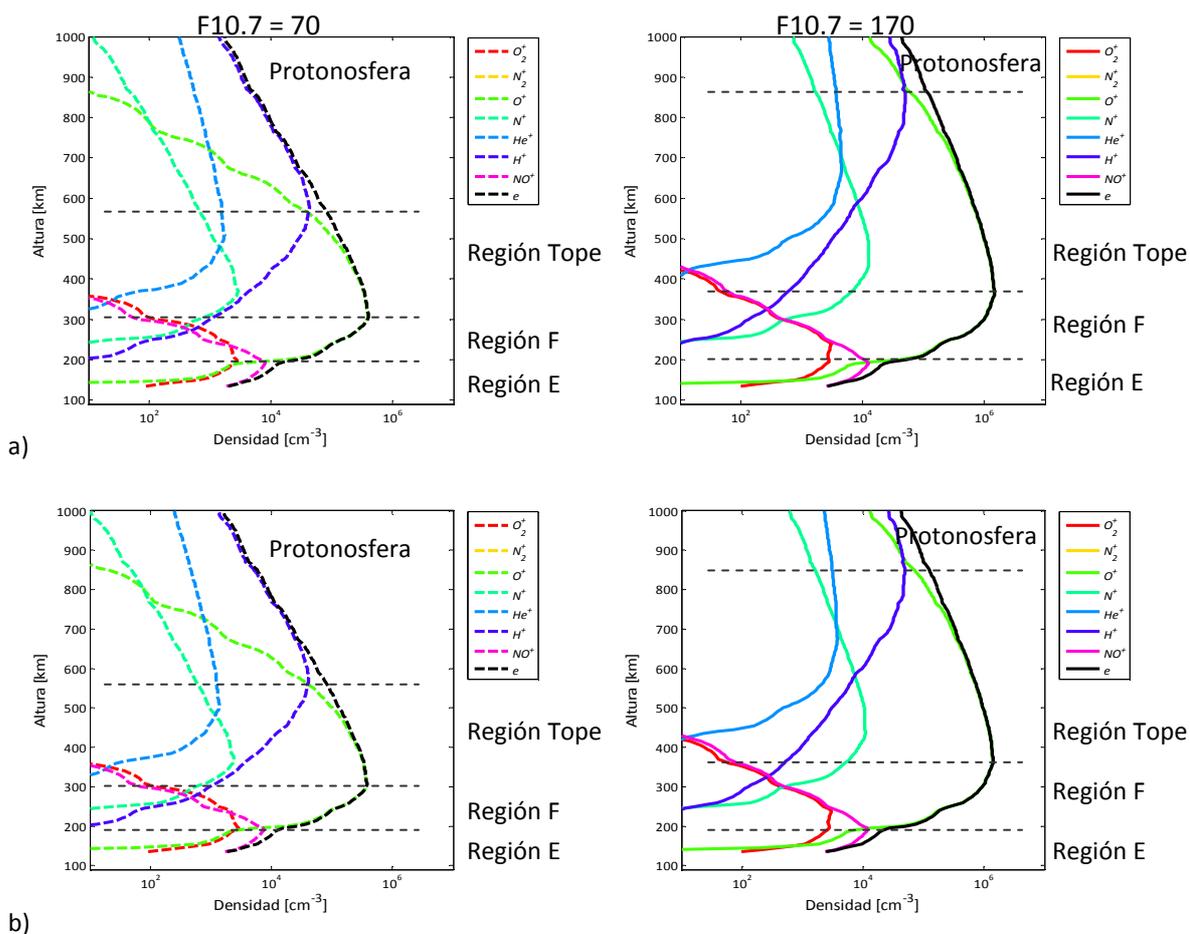


**Figura 6.2** - Perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante el mediodía (12:00 hora local) del 21 de Junio (a) y del 21 de diciembre (b), a una colatitud magnética de 50°. Los gráficos de la izquierda corresponden a baja actividad solar y los de la derecha corresponden a alta actividad.

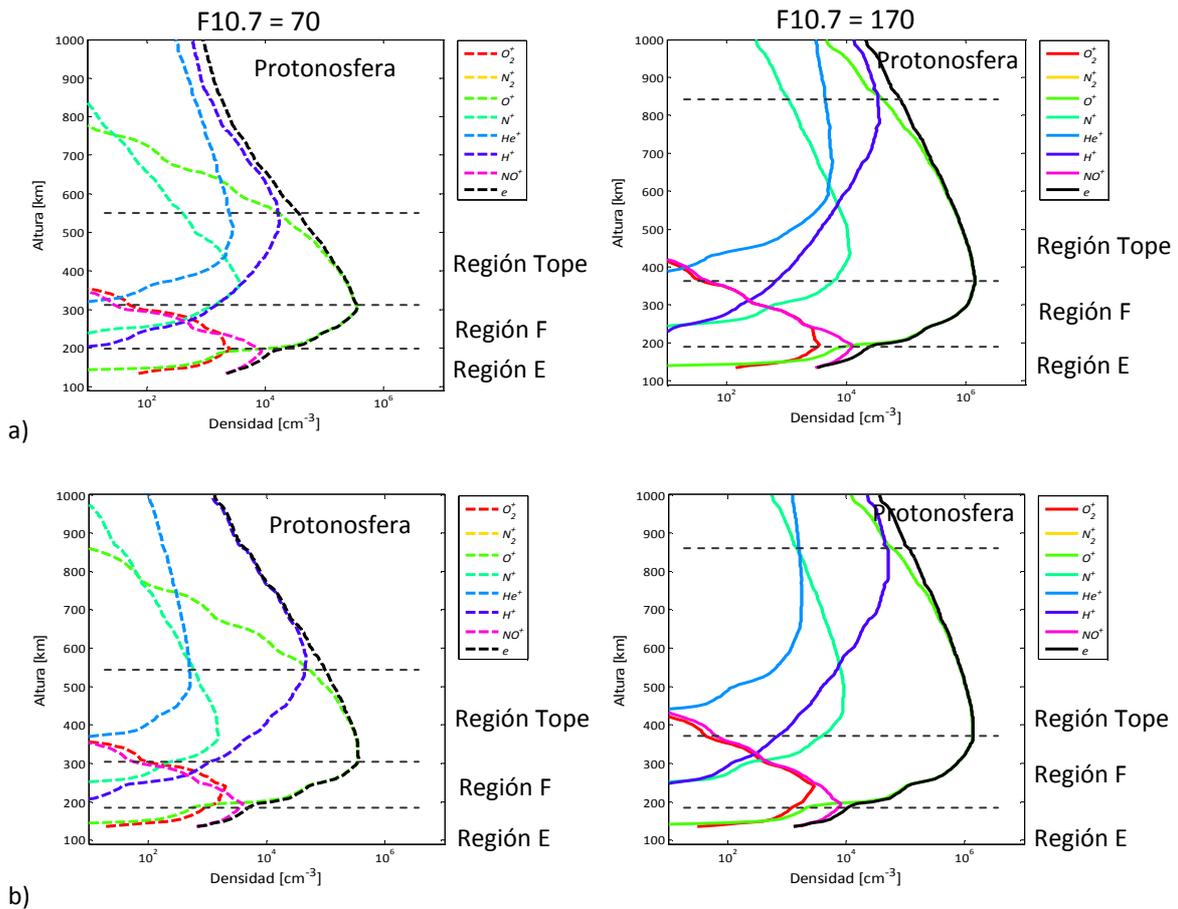
## Actividad nocturna

Las Figs. (6.3) y (6.4) muestran los perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante la noche, a una colatitud magnética de  $50^\circ$ , y para actividad solar baja (panel de la izquierda) y alta (panel de la derecha). En la Fig. (6.3) se muestran los perfiles para el equinoccio de marzo (a) y para el equinoccio de septiembre (b), y en la Fig. (6.4) se muestran los perfiles para el solsticio de junio (a) y para el solsticio de diciembre (b).

Comparando con los perfiles de las Figs. (6.1) y (6.2) se observa una disminución en las densidades de todas las especies, a todas las alturas, independientemente del día del año y de la actividad solar. Debido a que durante la noche no ocurre la fotoionización la densidad de electrones e iones en toda la ionosfera decae. En la parte baja de la ionosfera, que estaba poblada por los iones moleculares  $NO^+$ ,  $N_2^+$  y  $O_2^+$ , la densidad de estas especies disminuye considerablemente debido a que las tasas de recombinación disociativa con los electrones son altas. También se observa que la densidad del  $O^+$  decae con el tiempo pero a una tasa mucho menor. Esto se debe a que las tasas de pérdida por recombinación con los electrones son lentas y sigue la producción por intercambio de carga con el  $H$ . El mismo comportamiento se observa para las especies  $He^+$  y  $H^+$  en la parte más alta de la ionosfera.



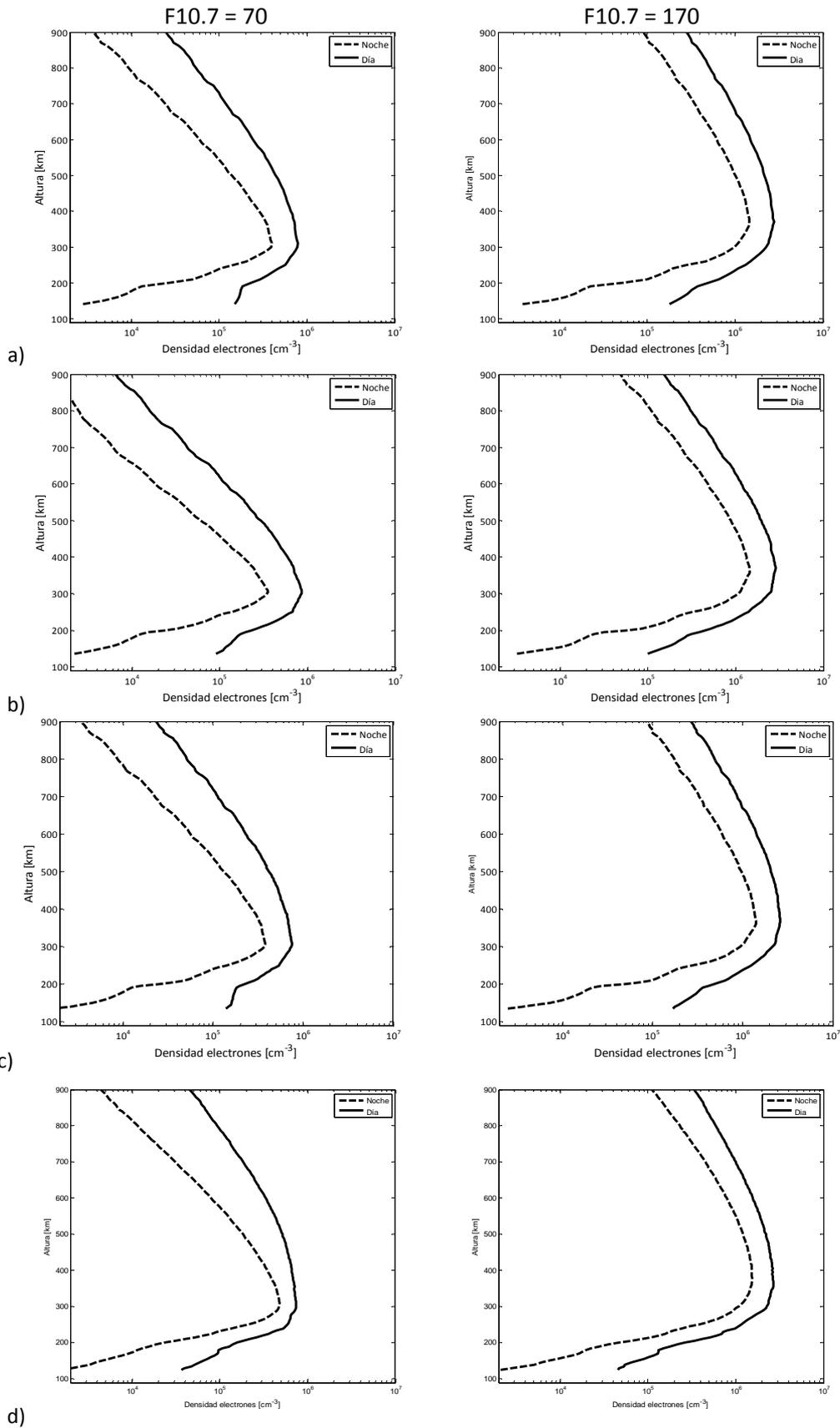
**Figura 6.3** - Perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante la noche (03:00 hora local) del 21 de marzo (a) y del 22 de septiembre (b), a una colatitud magnética de  $50^\circ$ . Los gráficos de la izquierda corresponden a baja actividad solar y los de la derecha corresponden a alta actividad.



**Figura 6.4** - Perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $N_2^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ ,  $N^+$ ,  $He^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante la noche (03:00 hora local) del 21 de junio (a) del 21 de diciembre (b), a una colatitud magnética de  $50^\circ$ . Los gráficos de la izquierda corresponden a baja actividad solar y los de la derecha corresponden a alta actividad.

A través del comportamiento de la densidad de electrones se puede observar más claramente el contraste que presenta, entre el día y la noche, la estructura vertical de la ionosfera. La Fig. (6.5) muestran los perfiles de densidad de los electrones ( $e$ ) durante la noche (línea punteada) y durante el día (línea continua), a una colatitud magnética de  $50^\circ$ , y para actividad solar baja (panel izquierdo) y alta (panel derecho). La Fig. (6.5a) corresponde al equinoccio de marzo, la Fig. (6.5b) al solsticio de junio, la Fig. (6.5c) al equinoccio de septiembre y la Fig. (6.5d) al solsticio de diciembre.

Durante las horas del día el modelo reproduce una ionosfera con tres regiones bien definidas por la densidad de electrones. Una región E en la parte inferior con un máximo en la densidad de electrones del orden de  $10^5 \text{ cm}^{-3}$ . Una región F por encima con un máximo en la densidad del orden de  $10^6 \text{ cm}^{-3}$  y la región del tope en donde la densidad de electrones decae exponencialmente con la altura. Durante la noche la densidad de electrones disminuye en todas las capas de la ionosfera siendo la disminución en la región de la capa E la más notoria. Para mejorar el comportamiento durante la noche la próxima etapa en el desarrollo de este modelo incorporará fuentes adicionales de ionización.

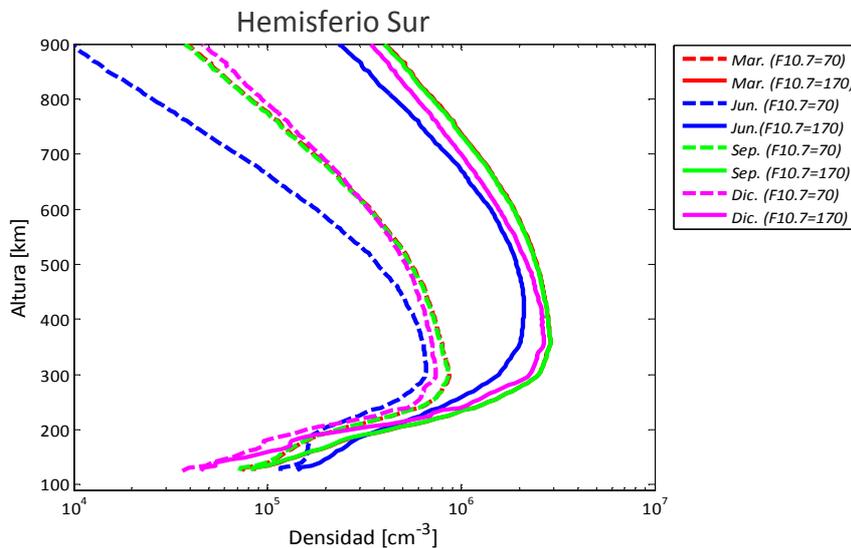


**Figura 6.5** - Perfiles de densidad de electrones ( $e$ ) a las 03:00 hora local (línea punteada) y a las 15:00 hora local (línea continua) para el 21 de marzo (a), para el 21 de junio (b), para el 22 de septiembre (c) y para el 21 de diciembre (d), a una colatitud magnética de  $50^\circ$ . El gráfico de la izquierda corresponde a baja actividad solar y el de la derecha corresponde a alta actividad.

### Variación estacional y con el ciclo solar

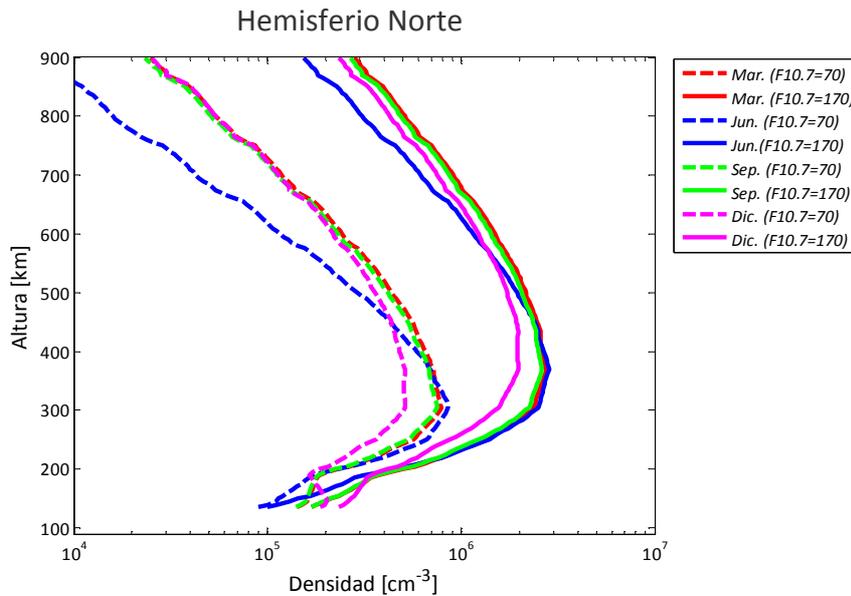
Las Figs. (6.6) y (6.7) muestran los perfiles de densidad de los electrones ( $e$ ) durante el día (15:00 hora local) a una colatitud magnética de  $130^\circ$  y a una colatitud magnética de  $50^\circ$ , respectivamente. Los perfiles corresponden a los equinoccios de marzo (rojo) y septiembre (verde), y a los solsticios de junio (azul) y diciembre (magenta). Las líneas punteadas indican baja actividad solar y las líneas continuas indican alta actividad solar.

De estos gráficos se puede concluir que el modelo reproduce la variación que tiene la densidad de electrones respecto de la actividad solar. En actividad solar alta, cuando el flujo de radiación solar EUV es mayor que el correspondiente a la actividad baja, se obtienen a partir del modelo densidades de electrones mayores y aumentos en la altura del máximo de densidad. Para actividad solar baja, el máximo de densidad de electrones alcanza valores inferiores a  $10^6 \text{ cm}^{-3}$  a una altura de aproximadamente 300 km, mientras que para actividad solar alta, el máximo de densidad de electrones alcanza valores superiores a  $10^6 \text{ cm}^{-3}$  a una altura entre los 350 y 400 km dependiendo de la estación del año.



**Figura 6.6** - Perfiles de densidad de los electrones ( $e$ ) durante el día (15:00 hora local) a una colatitud magnética de  $130^\circ$  para los dos solsticios y los dos equinoccios. Las líneas punteadas corresponden a baja actividad solar y las líneas continuas corresponden a alta actividad.

Con respecto a la variación estacional el modelo se comporta de acuerdo a la simetría (equinoccios) y a la asimetría (solsticios) que presenta la radiación solar. Por lo tanto en el hemisferio Sur se obtienen perfiles de densidad de electrones similares para los equinoccios de marzo y septiembre, mientras que en el solsticio de junio la densidad de electrones es menor que en el solsticio de diciembre (Fig. 6.6). Para el hemisferio Norte se obtienen perfiles de densidad de electrones similares para los equinoccios de marzo y septiembre, mientras que en el solsticio de junio la densidad de electrones es mayor que en el solsticio de diciembre (Fig. 6.7).



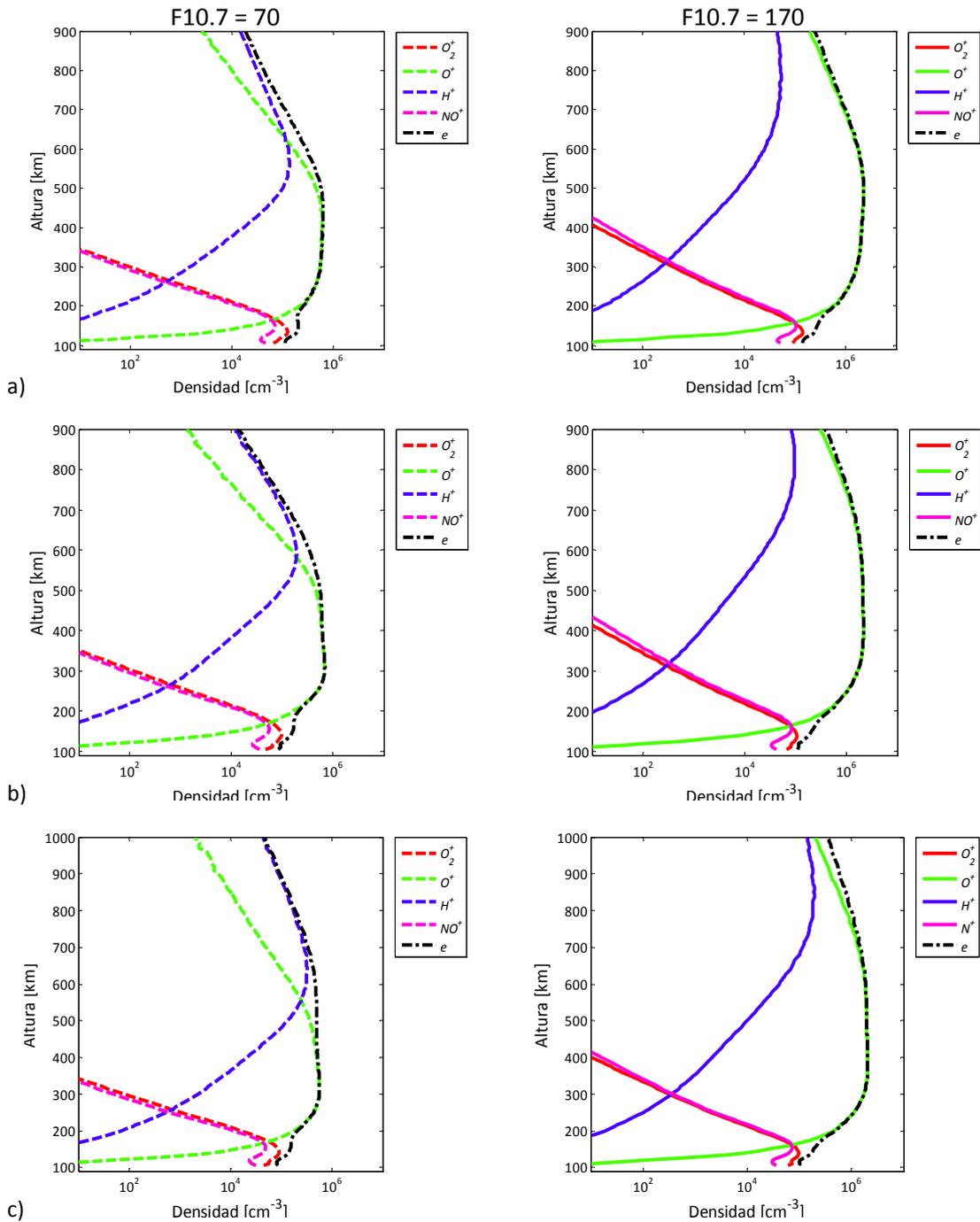
**Figura 6.7** - Perfiles de densidad de los electrones ( $e$ ) durante el día (15:00 hora local) a una colatitud magnética de  $50^\circ$  para los dos solsticios y los dos equinoccios. Las líneas punteadas corresponden a baja actividad solar y las líneas continuas corresponden a alta actividad.

### ***Ecuador geomagnético***

Las Fig. (6.8) muestra los perfiles de densidad de las especies ionizadas dominantes ( $NO^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$ , y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) durante la el día sobre el ecuador magnético (colatitud magnética de  $90^\circ$ ) para el equinoccio de marzo (a), el solsticio de junio (b) y el solsticio de diciembre (c). Los paneles de la izquierda corresponden a actividad solar baja y los de la derecha a actividad solar alta.

Al igual que en los casos analizados antes, el modelo reproduce para lo zona del ecuador magnético una ionosfera con tres zonas bien definidas. Una región E dominada por los iones  $NO^+$ ,  $O_2^+$ , por encima una región F controlada por el  $O^+$  y la región superior donde domina el  $H^+$ . Las densidades al igual que antes aumentan con la actividad solar. Al compararse las Figs. (6.1) y (6.2) con la Fig. (6.8) se observa que el modelo logra reproducir la disminución del pico de densidad de la región F, que sucede a estas latitudes durante horas del día, gracias a haber incluido el transporte debido al drift ExB.

Los resultados de las simulaciones, como se ve en los gráficos de la Fig. (6.8), muestran un exceso de densidad en la zona del ecuador magnético entre los 300 y 500 km de altura para actividad solar baja y entre los 400 y 600 km para actividad alta, conducta que será analizada en la próxima sección.



**Figura 6.8** - Perfiles de densidad de las especies ionizadas ( $NO^+$ ,  $O_2^+$ ,  $O^+$  y  $H^+$ ) y de los electrones ( $e$ ) a las 15:00 hora local para el 21 de marzo (a), para el 21 de junio (b) y para el 21 de diciembre (c) sobre el ecuador magnético (colatitud magnética de  $90^\circ$ ). El gráfico de la izquierda corresponde a baja actividad solar y el la de la derecha corresponde a alta actividad.

### 6.3 Cortes latitudinales

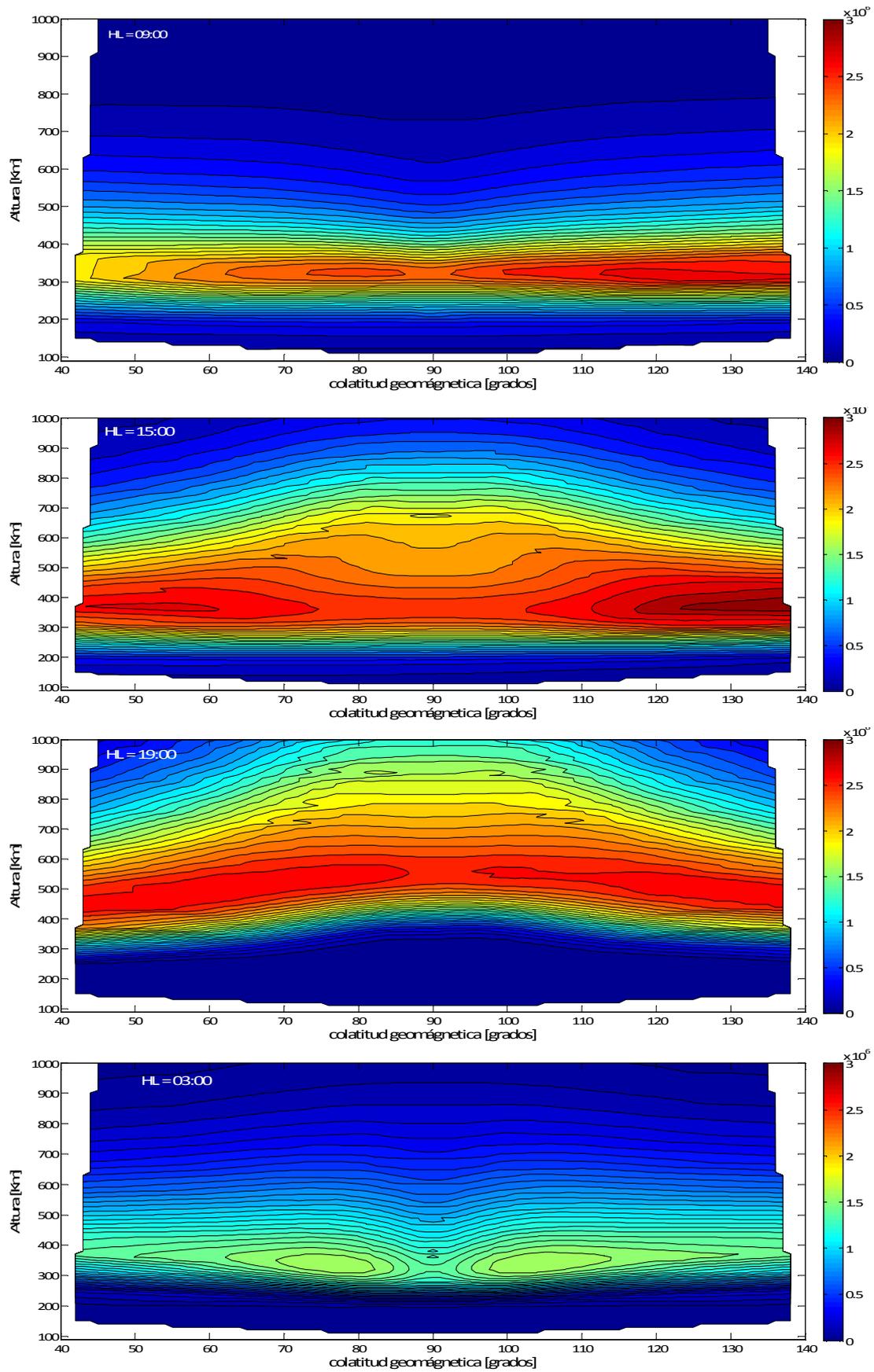
Además de modelar las variaciones temporales y verticales que presenta la ionosfera, también se logra representar variaciones latitudinales en la ionosfera. Las Figs. (6.9) a (6.12) muestran la densidad de electrones graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local durante actividad solar alta para los solsticios y los equinoccios. Debido a que las estructuras que caracterizan la distribución latitudinal de la densidad de electrones se visualizan mejor

en los casos de actividad solar alta, se optó por analizar los gráficos correspondientes a estas situaciones, siendo análogo el análisis para actividad baja. Las Figs. (6.13) a (6.15) muestran la densidad de electrones graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local durante actividad solar baja para el equinoccio de marzo, y los solsticios de junio y de diciembre.

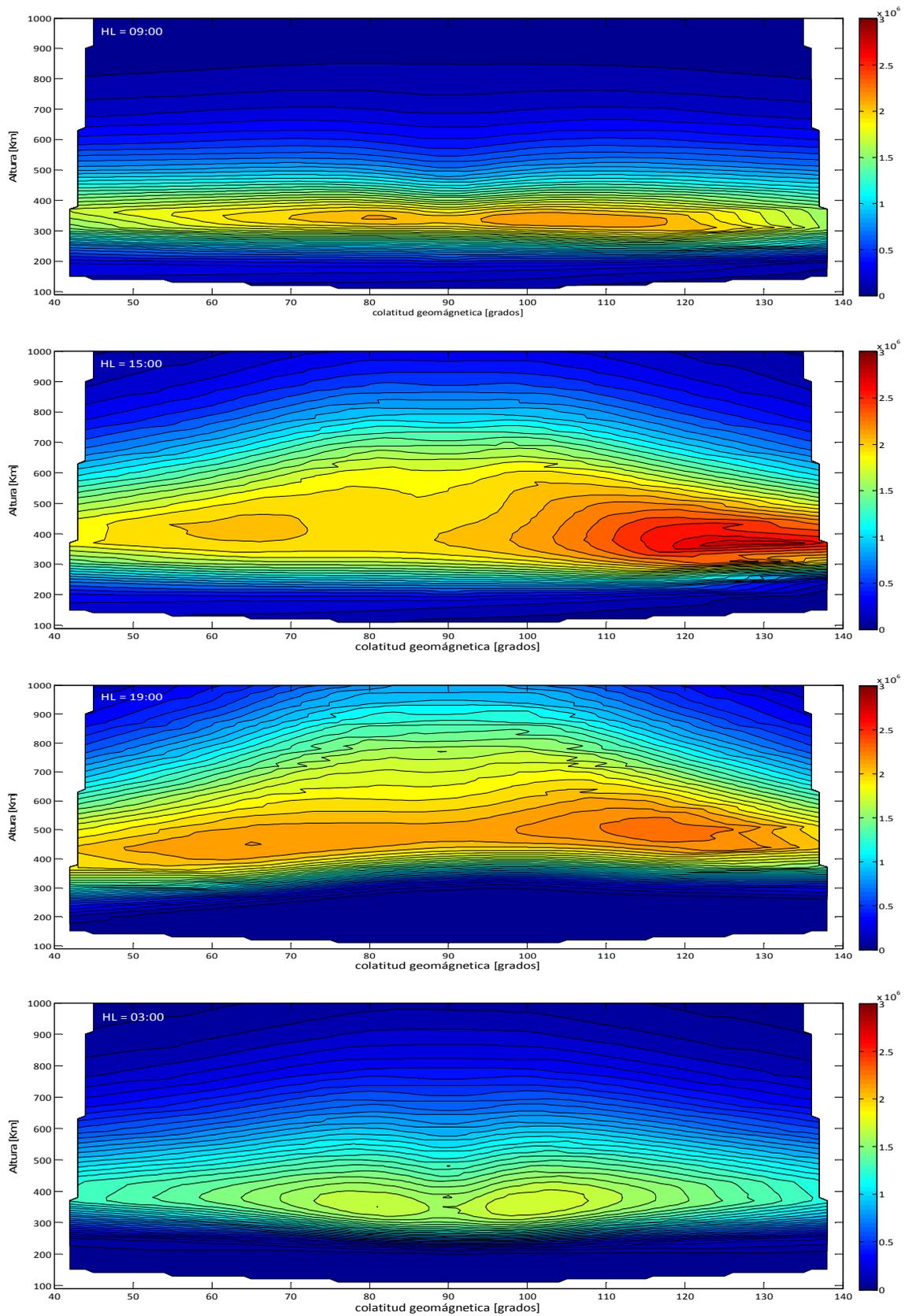
En la ionosfera a latitudes ecuatoriales, los procesos de transporte ocasionados por los campos eléctricos inducidos por los vientos termosféricos redistribuyen los electrones alterando su densidad a estas latitudes. Durante el día, el drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  causa un movimiento ascendente del gas de electrones, mientras que lo inverso ocurre de noche. El plasma que es levantado durante el día se eleva hasta a grandes alturas de la región F (esta altura depende de la época del año y de la radiación solar), formándose así la Anomalía de Appleton, una estructura latitudinal caracterizada por dos máximos de densidad e ionización a bajas latitudes y un mínimo centrado en el ecuador magnético. El principal factor que influencia la morfología de las crestas de la anomalía es el drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

La Fig. (6.9) muestra la evolución de la ionosfera en la región modelada. Durante la mañana comienza a desarrollarse una zona de intensa ionización entre los 200 y 400 km de altura (09:00 hora local) y comienza a actuar el transporte debido al drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  (Fig. 6.16). Llegada la media tarde (15:00 hora local) como consecuencia del transporte se forman crestas de máxima densidad de electrones a los costados del Ecuador magnético, y disminuye el pico de la densidad en el ecuador magnético debido a que los electrones son transportados fuera de esta zona. Como resultado se observa una estructura similar a la Anomalía de Appleton. Al atardecer (19:00 hora local) se observa la misma estructura, pero los picos de densidad se encuentran a alturas mayores, siendo este efecto más apreciable en el Ecuador magnético donde el pico alcanza los 500 km de altura aproximadamente. Esto es una consecuencia del hecho que durante estas horas los drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ascendentes toman su valor máximo (Fig. 6.16). Pasado el atardecer los drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  son descendentes, comenzando a transportar a los electrones hacia alturas menores y hacia la región del ecuador magnético. Una vez llegada la noche (03:00 hora local) la densidad de electrones cae sustancialmente y el pico de densidad vuelve a estar a alturas de entre los 300 y 350 km. Este comportamiento también se repite en los gráficos que se muestran en las Figs. 6.10 a 6.12 con la excepción de que para los solsticios se observa un marcado contraste en los picos de ionización a las 15:00 hora local debidos a la variación estacional que presenta la densidad de electrones antes descrita.

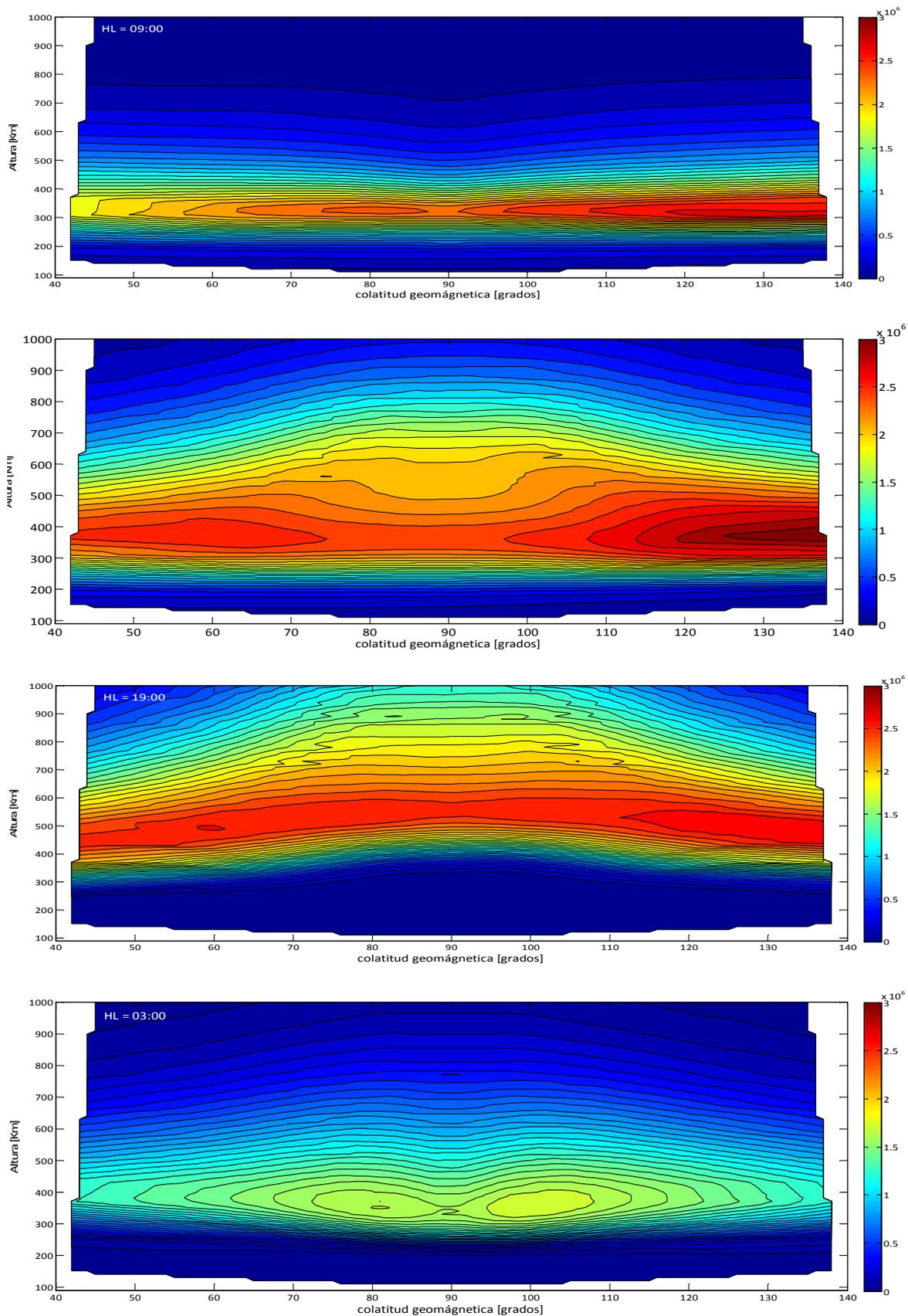
Como se mencionó previamente, se observó un exceso de densidad en la zona del ecuador magnético entre los 300 y 500 km de altura para actividad solar baja y entre los 400 y 600 km para actividad alta (Fig. 6.8). Esta conducta del modelo podría atribuirse a no haber incluido la advección a lo largo de las líneas de campo limitando la reproducción exacta de la Anomalía de Appleton. Los gradientes de presión a esas alturas podrían ocasionar que el plasma descienda a lo largo de las líneas de campo vaciando aún más la zona del valle, llevando mas plasma a la región de las crestas. En la próxima versión del modelo se incluirá el transporte a lo largo de las líneas de campo al resolver la ecuación de movimiento en esta dirección.



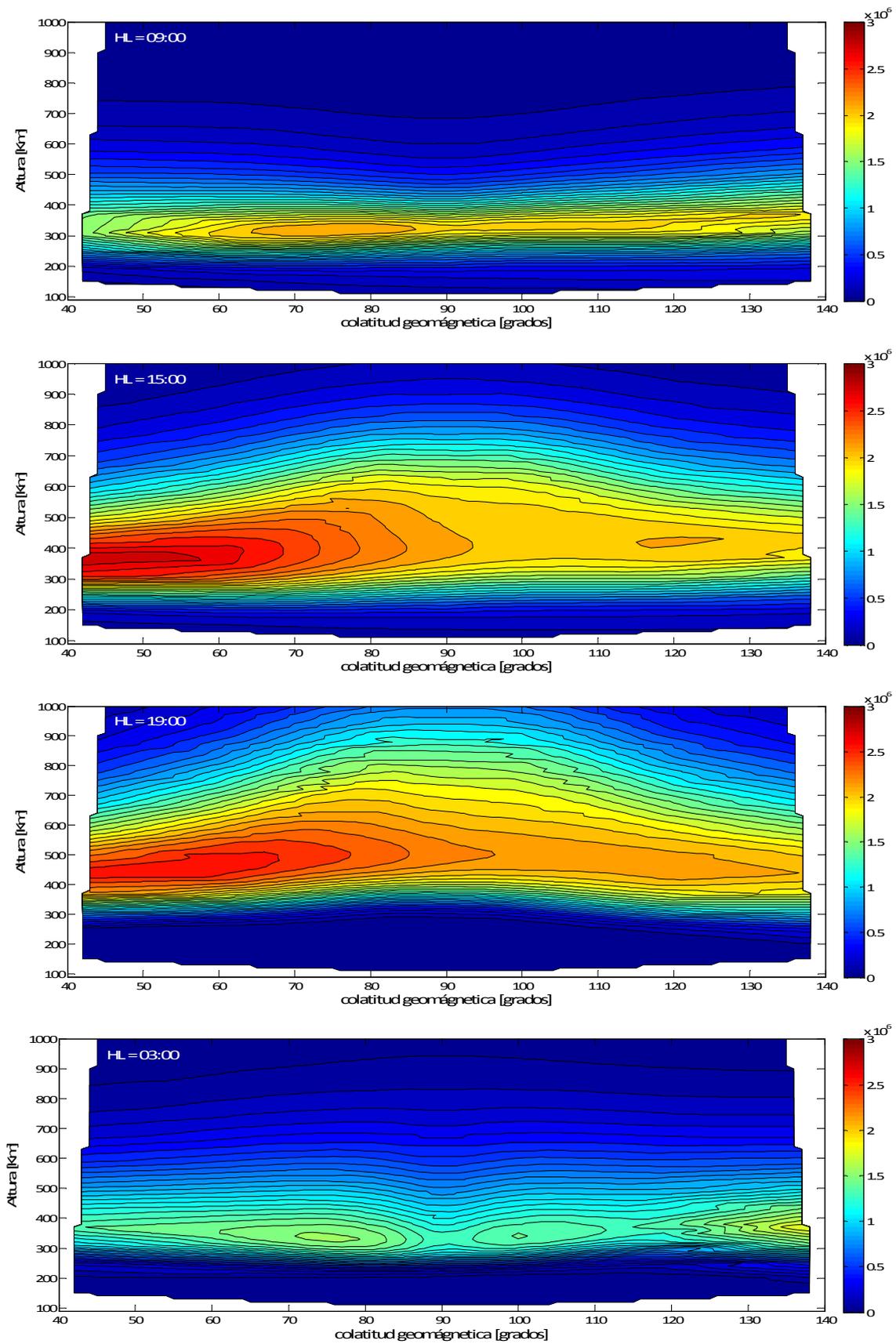
**Figura 6.9** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el equinoccio de marzo durante actividad solar alta.



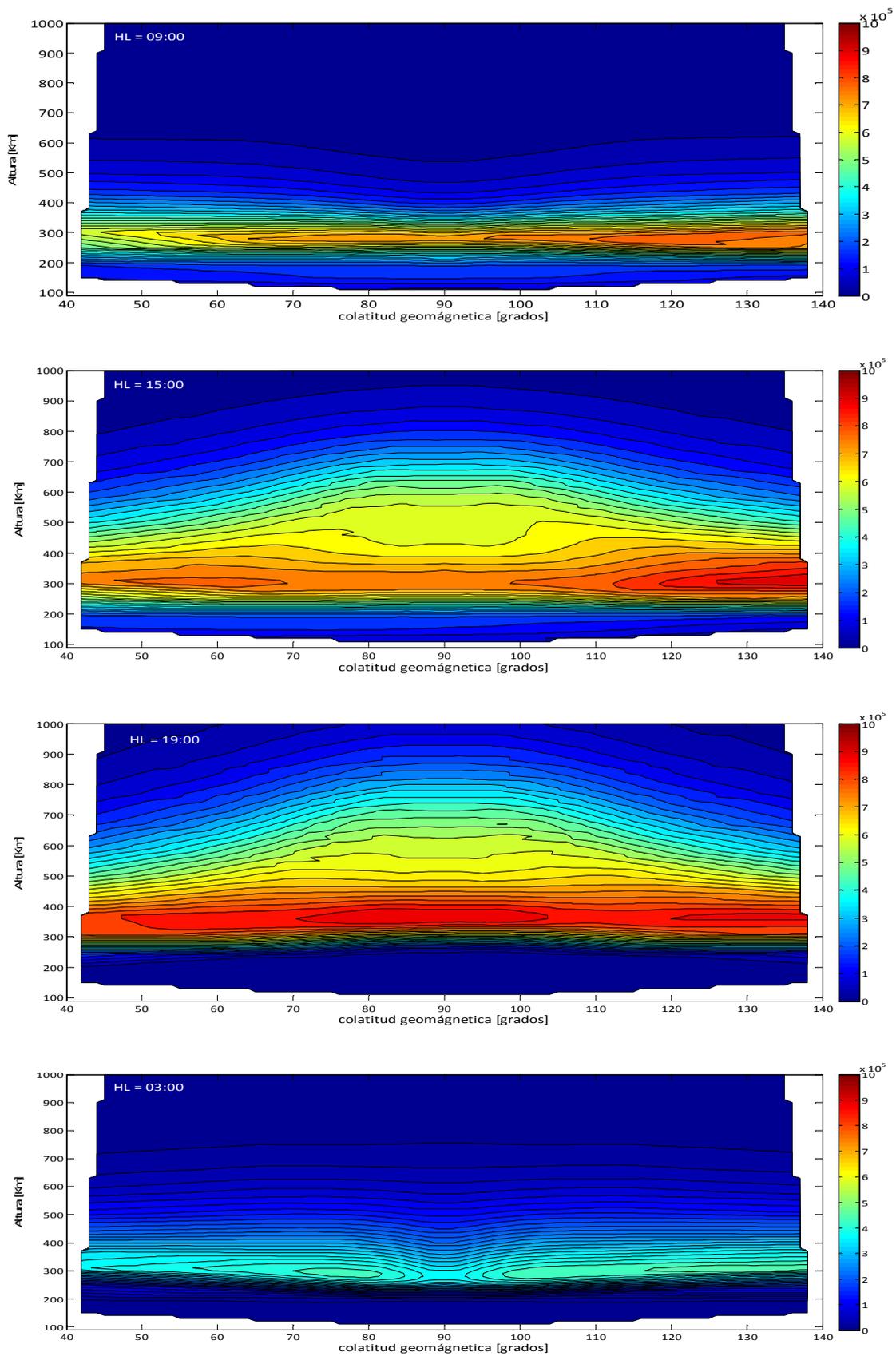
**Figura 6.10** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el solsticio de diciembre durante actividad solar alta.



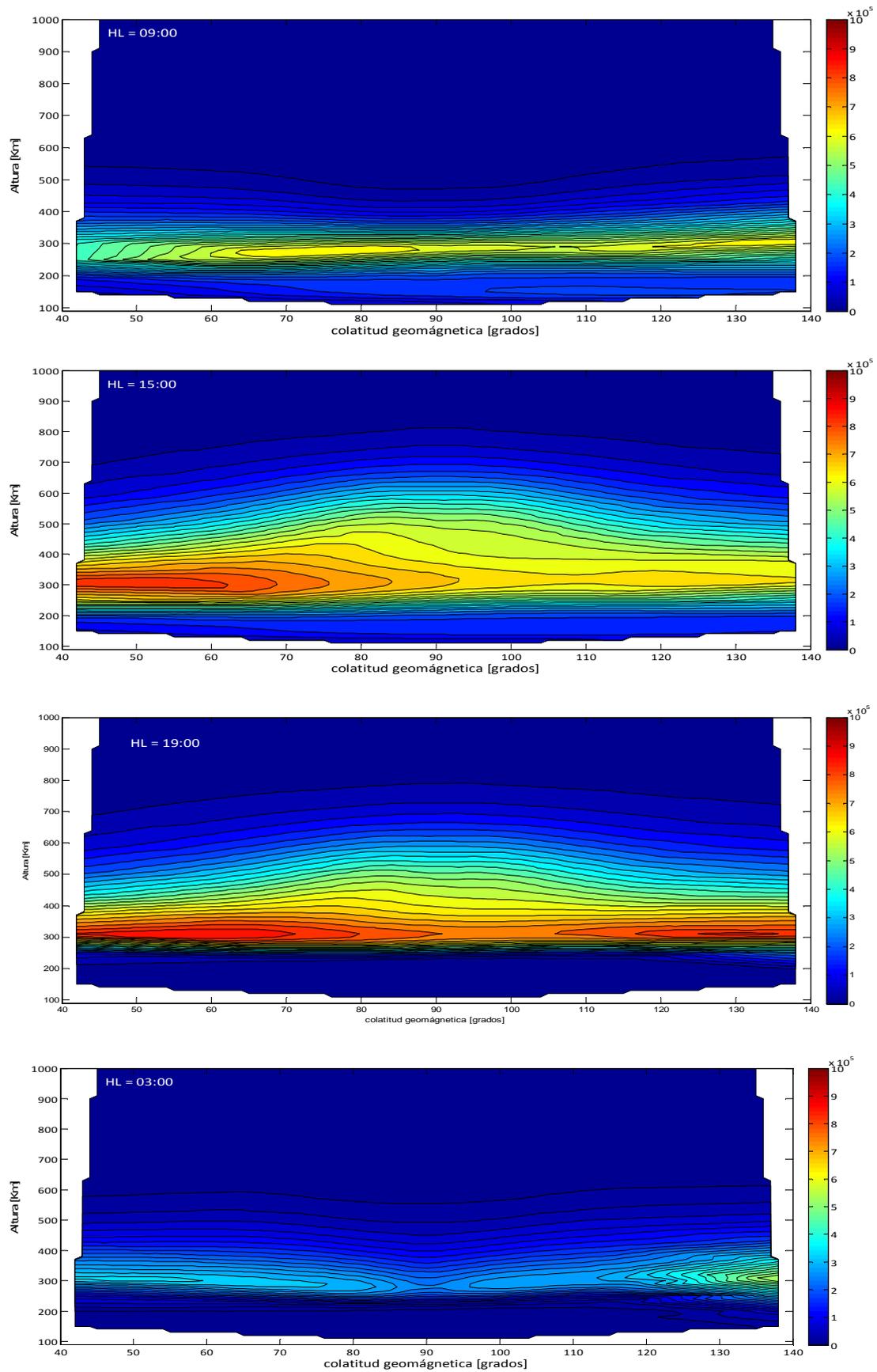
**Figura 6.11** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el equinoccio de septiembre durante actividad solar alta.



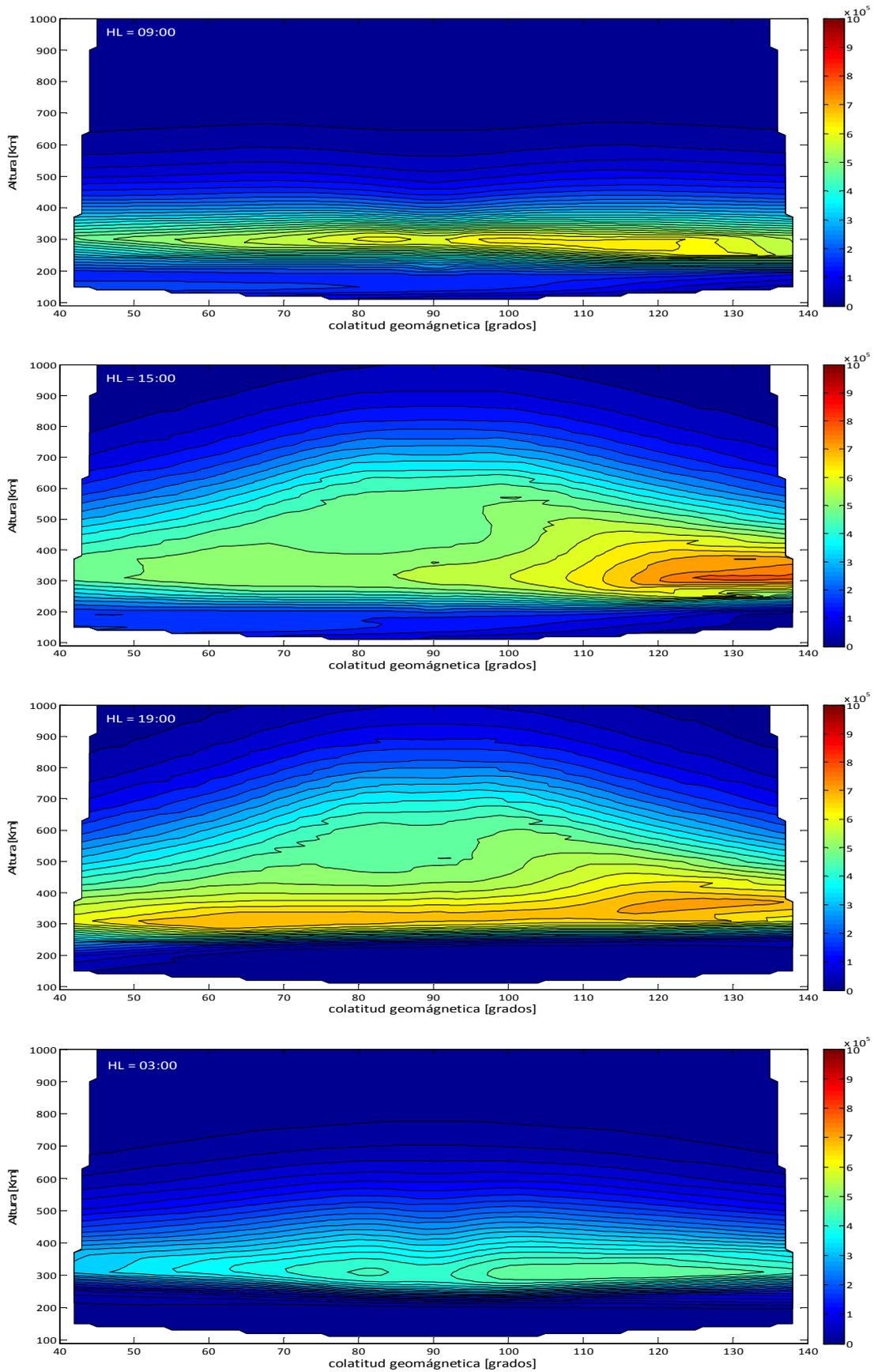
**Figura 6.12** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el solsticio de junio durante actividad solar alta.



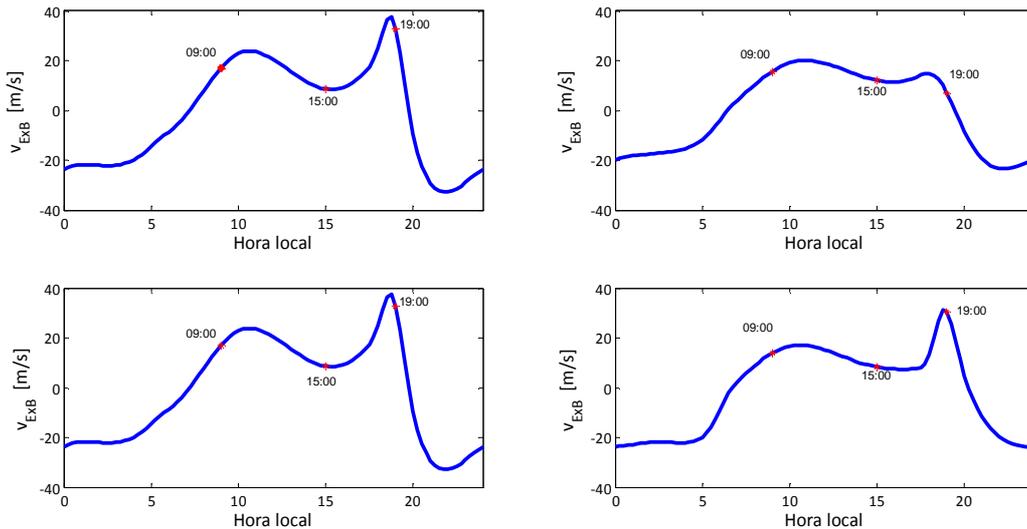
**Figura 6.13** - Densidad de electrones [cm<sup>-3</sup>] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el equinoccio de marzo durante actividad solar baja.



**Figura 6.14** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el solsticio de junio durante actividad solar baja.



**Figura 6.15** - Densidad de electrones [ $\text{cm}^{-3}$ ] graficada en función de la altura y de la colatitud a las 09:00, 15:00, 19:00 y 03:00 de hora local para el solsticio de diciembre durante actividad solar baja.



**Figura 6.16** - Velocidades del drift ExB vertical en función de la hora local sobre el ecuador magnético utilizadas en el modelo y calculadas con el modelo de Fejer y Scherliess [Scherliess & Fejer, 1999] a alturas de la región F. El panel superior izquierdo corresponde al equinoccio de marzo, el panel superior derecho corresponde al solsticio de junio, el panel inferior izquierdo corresponde al equinoccio de septiembre y el panel inferior derecho corresponde al solsticio de diciembre.

## 6.4 Conclusiones

Como ya se planteó en la Introducción, el objetivo de esta tesis fue el desarrollo de un modelo ionosférico local (a futuro global) basado en principios físicos fundamentales. El propósito es disponer de un programa abierto cuyo código fuente pueda ser modificado o extendido y por sobre todo comenzar a adquirir la experiencia que sólo alcanzan los desarrolladores de los modelos y para lo cual no existe ningún 'manual para el usuario'.

Los resultados obtenidos con esta nueva versión del LPIM muestran que el modelo permite reproducir el comportamiento que presenta la ionosfera resolviendo satisfactoriamente el sistema de ecuaciones que la regulan, obteniéndose como resultado la evolución temporal y espacial de las densidades para 7 especies ionizadas y para los electrones sin la necesidad de alimentarlas con mediciones.

Durante las horas del día el modelo reproduce una ionosfera estratificada verticalmente, donde la densidad de electrones está controlada por distintos iones dependiendo de la región. Los iones dominantes en la región E son  $NO^+$ ,  $O_2^+$  y en menor medida  $N_2^+$ , donde la densidad de electrones es del orden de  $10^5 \text{ cm}^{-3}$ . Los procesos principales modelados incluyen la fotoionización de las especies neutras  $O$ ,  $O_2$  y  $N_2$ ; reacciones ion-molécula, y recombinaciones ion-electrón. El rol predominante que tiene el  $NO^+$  en la capa E se modeló a través de su producción por reacciones de intercambio de carga. La ausencia de iones de  $N_2^+$  en la capa E, a pesar de su importante producción por fotoionización, ocurre porque la pérdida de esta especie a través de las reacciones de intercambio de carga son mucho más grandes que las pérdidas de los iones  $O_2^+$  y  $NO^+$  a través de la recombinación disociativa.

En la región F el ion dominante es el  $O^+$  y en menor medida el  $N^+$  con un pico de densidad de electrones del orden  $10^6 \text{ cm}^{-3}$  (aproximadamente 10 veces mas grande que en la región E). En su parte inferior la densidad del  $O^+$  es controlada por la relación entre los procesos de producción por fotoionización del  $O$  y de pérdida por las

reacciones con el  $N_2$  y el  $O_2$  incluidos en el modelo. El  $O^+$  presenta un aumento exponencial de la densidad. La ausencia de  $O_2^+$  y  $NO^+$  en la región F, se debe a una combinación de factores, que incluyen menor producción y mayor pérdida.

Por encima de la región F se modela la región del tope de la ionosfera, dominada por el  $O^+$  y en menor medida el  $H^+$  y  $He^+$ . Mientras que el  $O^+$  decrece exponencialmente con la altura, el  $H^+$  aumenta. A partir de la altura de transición entre el  $O^+$  y el  $H^+$  dominan los iones atómicos más livianos  $H^+$  y  $He^+$ . En esta región la densidad del  $H^+$  se hace más grande que la densidad del  $O^+$ .

Durante la noche, el modelo muestra una fuerte disminución en la densidad de electrones en la región E como consecuencia de la pérdida de los iones  $NO^+$ ,  $N_2^+$  y  $O_2^+$  a través de la recombinación disociativa con los electrones. La densidad del  $O^+$  en la región F decae exponencialmente con el tiempo pero a una tasa mucho menor manteniéndose durante la noche. El mismo comportamiento se modela para las especies  $He^+$  y  $H^+$  en la parte más alta de la ionosfera.

Respecto a la variación con el ciclo solar, el modelo reproduce correctamente el comportamiento de la ionosfera ante estas variaciones. En actividad solar alta se obtienen densidades de electrones más grandes y aumentos en la altura del máximo de densidad con respecto a las densidades en actividad solar baja. El modelo también es capaz de predecir la variabilidad estacional que presenta la ionosfera. Se obtienen densidades de electrones similares para los equinoccios mientras que para los solsticios se reproducen las asimetrías que presenta la densidad de electrones entre los hemisferios.

Además de modelar las variaciones temporales y verticales que presenta la ionosfera, también se logra representar las diferencias entre las condiciones ionosféricas a diferentes latitudes. En la ionosfera a latitudes ecuatoriales, el modelo es capaz de reproducir los procesos de transporte ocasionados por el drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  alterando la densidad de los electrones a estas latitudes. Durante el día, se produce un movimiento ascendente del plasma elevándolo hasta grandes alturas de la región F. Se forma una estructura latitudinal caracterizada por dos máximos de densidad a los costados del ecuador magnético y una disminución en la densidad de electrones sobre el ecuador magnético. El proceso inverso ocurre durante la noche cuando los drift  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  son descendentes transportando a los electrones a alturas menores y hacia el ecuador magnético.

Finalmente con respecto a la aplicación del Método de Volúmenes Finitos con el esquema de upwind, el método numérico resulta ser estable, simple y flexible. Como se resuelve de manera explícita el algoritmo presenta la ventaja de que no es necesario invertir matrices reduciendo el tiempo computacional y se obtiene un algoritmo sencillo, fácil para modificar y agregar más términos. La desventaja es que se necesitan tiempos relativamente pequeños para mantener la estabilidad y que la solución converja, esto es, para una resolución espacial entre los 10 y 40 km a alturas ionosféricas (grilla de 100x100) se necesitan pasos temporales de 4 a 5 seg, y para una resolución espacial entre los 5 y 20 km (grilla de 200x200) se necesitan pasos temporales de 2 a 3 seg.

## 6.5 Resumen

Sobre el final del Cap. 1 se mencionó que el planteo puramente físico (y su resolución numérica) es la característica distintiva del desarrollo abordado en esta tesis respecto de las versiones anteriores del LPIM. La aproximación física al problema del modelo del plasma ionosférico significó un gran desafío que involucró el estudio de diferentes tipos de problemas y el análisis de sus posibles soluciones. A lo largo de este documento y coincidiendo aproximadamente con el contenido de cada capítulo, se fueron desarrollando los elementos constitutivos de esta tesis que se mencionan a continuación:

- El planteo de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento que presenta el plasma ionosférico, compuesto por electrones y especies ionizadas (Secciones 5.2.1 a 5.2.3), a las que se incluyen la interacción con la radiación solar ionizante (Sección 5.3.1), los procesos de producción y pérdida de iones y electrones (Sección 5.3.2) en un medio donde existen campos eléctricos y magnéticos (Sección 5.2.4).
- La reducción o simplificación de las ecuaciones para la obtención del modelo matemático que caracteriza la variabilidad espacial y temporal de la densidad de los electrones y de 7 especies ionizadas (Sección 5.2.5).
- La definición de un sistema de coordenadas apropiado, asociado con el campo magnético de la Tierra, para reducir el problema a 2D y desacoplar los movimientos del plasma (Sección 5.4).
- La construcción de una grilla estructurada no ortogonal que preserva la geometría asociada al flujo del plasma ionosférico (Sección 5.6). De esta manera, se mejora la precisión del método de resolución numérico, ya que uno de los conjuntos de las líneas de la grilla sigue las líneas de corriente del flujo para los términos convectivos.
- La elección e implementación del Método de Volúmenes Finitos para la resolución del sistema de ecuaciones resultante de los puntos anteriores (Sección 5.7).
- La implementación de los modelos empíricos para intensidad de la radiación solar (Sección 5.9.1), para las densidades de las especies neutras y las velocidades de los vientos termosféricos (Sección 5.9.2), para las velocidades de los drift ExB (Sección 5.9.3), para el campo geomagnético (Sección 5.9.4), para la temperatura de los electrones (Sección 5.9.5) y para las constantes de las reacciones químicas y las frecuencias de colisión (Apéndice B). Todos éstos se encuentran disponibles en la literatura especializada y forman parte de las variables de entrada.

Cada uno de los puntos anteriores tiene su complejidad intrínseca que fue objeto de análisis, al mismo tiempo que debió tenerse en cuenta consideraciones generales para que cada parte se acoplara de forma armónica con las demás. Es importante mencionar que cada punto debió implementarse y verificarse en módulos de código Fortran. La combinación de todos estos módulos Fortran dieron lugar al código maestro de esta nueva versión del LPIM.

Los resultados presentados en las secciones anteriores son altamente satisfactorios, ya que demuestran que tanto la formulación física desarrollada como su implementación en el código del nuevo modelo es capaz de reproducir las estructuras espaciales y la evolución temporal de la distribución del plasma ionosférico (iones y electrones) que se sabe suceden en la ionosfera como se describió en detalle en el Cap. 2.

### **6.6 Trabajos a futuro**

Se utilizará el modelo ionosférico desarrollado en esta tesis para el aprovechamiento integral del proyecto AIRE (Argentina Ionospheric Radar Experimental Station), a través del cual se instalará en la Argentina un radar de dispersión incoherente en el punto conjugado magnético del observatorio de Arecibo, Puerto Rico. El modelo servirá de base para el diseño y el análisis de los primeros experimentos conjugados entre el radar de dispersión incoherente en Arecibo y el radar que se instalará en Chascomus, Argentina.

Desde un punto de vista específico en el futuro cercano el modelo incorporará la resolución de las leyes de conservación del momento y de balance de energía para poder estudiar el comportamiento de los campos de velocidades y la temperatura en la ionosfera sin la necesidad de recurrir a modelos empíricos aumentando así la independencia y autoconsistencia. La inclusión de estas leyes también permitirá reducir algunas de las limitaciones que presenta el modelo actualmente. Para mejorar el comportamiento durante la noche se incorporarán modelos para la producción de ionización nocturna.

El tiempo necesario para realizar las simulaciones aumenta de manera exponencial al aumentar la resolución espacial (y por lo tanto disminuye la temporal). Esto es, una simulación de 48 hs con una grilla de 100x100 requiere un tiempo computacional de unas 12 horas mientras que si se quiere aumentar la resolución resolviendo para una grilla de 200x200 el tiempo computacional es de aproximadamente 72 horas. Por esta razón se utilizarán métodos para paralelizar el código de manera de reducir sustancialmente los tiempos computacionales.



## Apéndice A

Intervalo	Long. de onda (Å)	$F74113_i^*$	$A_i$
1†	50-100	1.200	$1.0017 \times 10^{-2}$
2	100-150	0.450	$7.1250 \times 10^{-3}$
3†	150-200	4.800	$1.3375 \times 10^{-2}$
4†	200-250	3.100	$1.9450 \times 10^{-2}$
5	256.32	0.460	$2.7750 \times 10^{-3}$
6†	284.15	0.210	$1.3768 \times 10^{-1}$
7†	250-300	1.679	$2.6467 \times 10^{-2}$
8†	303.31	0.800	$2.5000 \times 10^{-2}$
9	303.78	6.900	$3.3333 \times 10^{-3}$
10†	300-350	0.965	$2.2450 \times 10^{-2}$
11†	368.07	0.650	$6.5917 \times 10^{-3}$
12†	350-400	0.314	$3.6542 \times 10^{-2}$
13†	400-450	0.383	$7.4083 \times 10^{-3}$
14†	465.22	0.290	$7.4917 \times 10^{-3}$
15†	450-500	0.285	$2.0225 \times 10^{-2}$
16	500-550	0.452	$8.7583 \times 10^{-3}$
17	554.37	0.720	$3.2667 \times 10^{-3}$
18	584.33	1.270	$5.1583 \times 10^{-3}$
19	550-600	0.357	$3.6583 \times 10^{-3}$
20†	609.76	0.530	$1.6175 \times 10^{-2}$
21	629.73	1.590	$3.3250 \times 10^{-3}$
22	600-650	0.342	$1.1800 \times 10^{-2}$
23	650-700	0.230	$4.2667 \times 10^{-3}$
24	703.36	0.360	$3.0417 \times 10^{-3}$
25	700-750	0.141	$4.7500 \times 10^{-3}$
26	765.15	0.170	$3.8500 \times 10^{-3}$
27†	770.41	0.260	$1.2808 \times 10^{-2}$
28	789.36	0.702	$3.2750 \times 10^{-3}$
29	750-800	0.758	$4.7667 \times 10^{-3}$
30	800-850	1.625	$4.8167 \times 10^{-3}$
31	850-900	3.537	$5.6750 \times 10^{-3}$
32	900-950	3.000	$4.9833 \times 10^{-3}$
33	977.02	4.400	$3.9417 \times 10^{-3}$
34	950-1000	1.475	$4.4167 \times 10^{-3}$
35	1025.72	3.500	$5.1833 \times 10^{-3}$
36	1031.91	2.100	$5.2833 \times 10^{-3}$
37	1000-1050	2.467	$4.3750 \times 10^{-3}$

**Tabla A.1**– Parámetros para el modelo EUVAC [Richards et. al., 1994]. \* Multiplicar los flujos de referencia  $F74113_i$  por  $10^9$  para que estén en fotones  $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ .

† Intervalos dominados por flujos coronales.

Intervalo	$\lambda$ (Å)	O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	O	N	He	H
1†	50-100	1.316	0.720	0.730	0.331	0.144	0.002
2	100-150	3.806	2.261	1.839	0.996	0.478	0.017
3†	150-200	7.509	4.958	3.732	2.490	1.157	0.048
4†	200-250	10.900	8.392	5.202	3.946	1.601	0.101
5	256.32	13.370	10.210	6.050	4.784	2.121	0.140
6†	284.15	15.790	10.900	7.080	5.725	2.595	0.191
7†	250-300	14.387	10.493	6.461	5.244	2.320	0.168
8†	303.31	16.800	11.670	7.680	6.399	2.953	0.232
9	303.78	16.810	11.700	7.700	6.413	2.962	0.233
10†	300-350	17.438	13.857	8.693	7.298	3.544	0.308
11†	368.07	18.320	16.910	9.840	8.302	4.267	0.415
12†	350-400	18.118	16.395	9.687	8.150	4.142	0.398
13†	400-450	20.310	21.675	11.496	9.556	5.447	0.616
14†	465.22	21.910	23.160	11.930	10.578	6.563	0.839
15†	450-500	23.101	23.471	12.127	11.016	7.208	0.974
16	500-550	24.606	24.501	12.059	11.503	0.958	1.199
17	554.37	26.040	24.130	12.590	11.772	0.000	1.419
18	584.33	22.720	22.400	13.090	11.778	0.000	1.662
19	550-600	26.610	22.878	13.024	11.758	0.000	1.620
20†	609.76	28.070	22.790	13.400	11.798	0.000	1.888
21	629.73	32.060	23.370	13.400	11.212	0.000	2.079
22	600-650	26.017	23.339	13.365	11.951	0.000	2.076
23	650-700	21.919	31.755	17.245	12.423	0.000	2.641
24	703.36	27.440	26.540	11.460	13.265	0.000	2.897
25	700-750	28.535	24.662	10.736	12.098	0.000	3.173
26	765.15	20.800	120.490	4.000	11.323	0.000	3.730
27†	770.41	18.910	14.180	3.980	11.244	0.000	3.807
28	789.36	26.668	16.487	3.749	10.961	0.000	4.093
29	750-800	22.145	33.578	5.091	11.171	0.000	3.868
30	800-850	16.631	16.992	3.498	10.294	0.000	4.784
31	850-900	8.562	20.249	4.554	0.211	0.000	5.670
32	900-950	12.817	9.680	1.315	0.000	0.000	3.469
33	977.02	18.730	2.240	0.000	0.000	0.000	0.000
34	950-1000	21.108	50.988	0.000	0.000	0.000	0.000
35	1025.72	1.630	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
36	1031.91	1.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
37	1000-1050	1.346	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

**Tabla A.2** – Secciones transversales de absorción. Para pasar los valores a  $\text{cm}^2$  hay que multiplicarlos por  $10^{-18}$ . † Intervalos dominados por flujos coronales. Extraída del Schunk [2000].

Intervalo	$\lambda$ (Å)	O <sub>2</sub> <sup>+</sup>	N <sub>2</sub> <sup>+</sup>	O <sup>+</sup>	N <sup>+</sup>	He <sup>+</sup>	H <sup>+</sup>
1†	50-100	1.316	0.720	0.642	0.286	0.144	0.002
2	100-150	3.806	2.261	1.653	0.878	0.478	0.017
3†	150-200	7.509	4.958	3.517	2.300	1.157	0.048
4†	200-250	10.900	8.392	5.092	3.778	1.601	0.101
5	256.32	13.370	10.210	6.050	4.787	2.121	0.140
6†	284.15	15.790	10.900	7.080	5.725	2.595	0.191
7†	250-300	14.387	10.493	6.461	5.192	2.320	0.168
8†	303.31	16.800	11.670	7.680	6.399	2.953	0.232
9	303.78	16.810	11.700	7.700	6.413	2.962	0.233
10†	300-350	17.438	13.857	8.693	7.298	3.544	0.308
11†	368.07	18.320	16.910	9.840	8.302	4.267	0.415
12†	350-400	18.118	16.395	9.687	8.150	4.142	0.398
13†	400-450	20.310	21.675	11.496	9.556	5.447	0.616
14†	465.22	21.910	23.160	11.930	10.578	6.563	0.839
15†	450-500	23.101	23.471	12.127	11.016	7.208	0.974
16	500-550	24.606	24.501	12.059	11.503	0.958	1.199
17	554.37	26.040	24.130	12.590	11.772	0.000	1.419
18	584.33	22.720	22.400	13.090	11.778	0.000	1.662
19	550-600	26.610	22.787	13.024	11.758	0.000	1.620
20†	609.76	26.390	22.790	13.400	11.798	0.000	1.888
21	629.73	31.100	23.370	13.400	11.212	0.000	2.079
22	600-650	24.937	23.339	13.365	11.951	0.000	2.076
23	650-700	21.306	29.235	17.245	12.423	0.000	2.641
24	703.36	23.750	25.480	11.460	13.265	0.000	2.897
25	700-750	23.805	15.060	10.736	12.098	0.000	3.173
26	765.15	11.720	65.800	4.000	11.323	0.000	3.730
27†	770.41	8.470	8.500	3.890	11.244	0.000	3.807
28	789.36	10.191	8.860	3.749	10.961	0.000	4.093
29	750-800	10.597	14.274	5.091	11.171	0.000	3.868
30	800-850	6.413	0.000	3.498	10.294	0.000	4.784
31	850-900	5.494	0.000	4.554	0.211	0.000	5.670
32	900-950	9.374	0.000	1.315	0.000	0.000	3.469
33	977.02	15.540	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
34	950-1000	13.940	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
35	1025.72	1.050	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
36	1031.91	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
37	1000-1050	0.259	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

**Tabla A.3** – Secciones transversales de ionización. Para pasar los valores a cm<sup>2</sup> hay que multiplicarlos por 10<sup>-18</sup>. † Intervalos dominados por flujos coronales. Extraída del Schunk [2000].



- $H^+ + e \rightarrow H + \text{foton} : k_5^{re} = 4.43 \times 10^{-18} T_e^{-0.7}$
- $He^+ + e \rightarrow He + \text{foton} : k_6^{re} = 4.43 \times 10^{-18} T_e^{-0.7}$
- $N^+ + e \rightarrow N + \text{foton} : k_7^{re} = 4.43 \times 10^{-18} T_e^{-0.7}$

Las constantes de reacción están en  $m^3/s$  y las temperaturas en K. Las constantes de  $k_1^{lc}$  a  $k_{12}^{lc}$  y las constantes de  $k_1^{re}$  a  $k_4^{re}$  fueron extraídas del Prolss [2004], mientras que las constantes de  $k_{13}^{lc}$  a  $k_{15}^{lc}$  y las constante de  $k_5^{re}$  a  $k_7^{re}$  fueron tomadas del trabajo de Huba et. al. [2000].

Las frecuencias de colisión para la transferencia de momento entre las especies neutras e iónicas,  $\nu_{in}$ , utilizadas en este trabajo están dadas por [Bailey & Balan, 1996]:

$$O^+ : \begin{cases} \nu_{O^+O} = 4.45 \times 10^{-17} n(O) T^{1/2} [1.04 - 0.067 \log_{10}(T)]^2, & T = [T(O^+) + T_n] / 2 \\ \nu_{O^+O_2} = 6.64 \times 10^{-16} n(O_2) \\ \nu_{O^+N_2} = 6.82 \times 10^{-16} n(N_2) \end{cases}$$

$$H^+ : \begin{cases} \nu_{H^+O} = 6.61 \times 10^{-17} n(O) T^{1/2} [1 - 0.047 \log_{10}(T)]^2, & T = T(H^+) \\ \nu_{H^+O_2} = 3.20 \times 10^{-15} n(O_2) \\ \nu_{H^+N_2} = 3.36 \times 10^{-15} n(N_2) \end{cases}$$

$$He^+ : \begin{cases} \nu_{He^+O} = 1.01 \times 10^{-15} n(O) \\ \nu_{He^+O_2} = 1.53 \times 10^{-15} n(O_2) \\ \nu_{He^+N_2} = 1.60 \times 10^{-15} n(N_2) \end{cases}$$

$$N_2^+ : \begin{cases} \nu_{N_2^+O} = 2.58 \times 10^{-16} n(O) \\ \nu_{N_2^+O_2} = 4.49 \times 10^{-16} n(O_2) \\ \nu_{N_2^+N_2} = 5.14 \times 10^{-17} n(N_2) T^{1/2} [1 - 0.069 \log_{10}(T)]^2, & T = [T(N_2^+) + T_n] / 2 \end{cases}$$

$$O_2^+ : \begin{cases} \nu_{O_2^+O} = 2.31 \times 10^{-16} n(O) \\ \nu_{O_2^+O_2} = 2.59 \times 10^{-17} n(O_2) T^{1/2} [1 - 0.073 \log_{10}(T)]^2, & T = [T(O_2^+) + T_n] / 2 \\ \nu_{O_2^+N_2} = 4.13 \times 10^{-16} n(N_2) \end{cases}$$

$$NO_2^+ : \begin{cases} \nu_{NO_2^+O} = 2.44 \times 10^{-16} n(O) \\ \nu_{NO_2^+O_2} = 4.27 \times 10^{-16} n(O_2) \\ \nu_{NO_2^+N_2} = 4.34 \times 10^{-16} n(N_2) \end{cases}$$

donde las frecuencias están en  $s^{-1}$ , las densidades en  $m^{-3}$  y las temperaturas en Kelvin. Para complementar las frecuencias de colisión con las especies neutras faltantes ( $N$ ,  $H$ ,  $He$  y  $NO$ ) y las frecuencias para el  $N^+$ , siguiendo a Huba et. al. [2000], se utiliza la siguiente formula [Banks & Kockarts, 1973]

$$v_{in} = 2.69 \times 10^{-9} \frac{m_n}{m_i + m_n} n_n \frac{\alpha_0}{\mu_A^{1/2}}$$

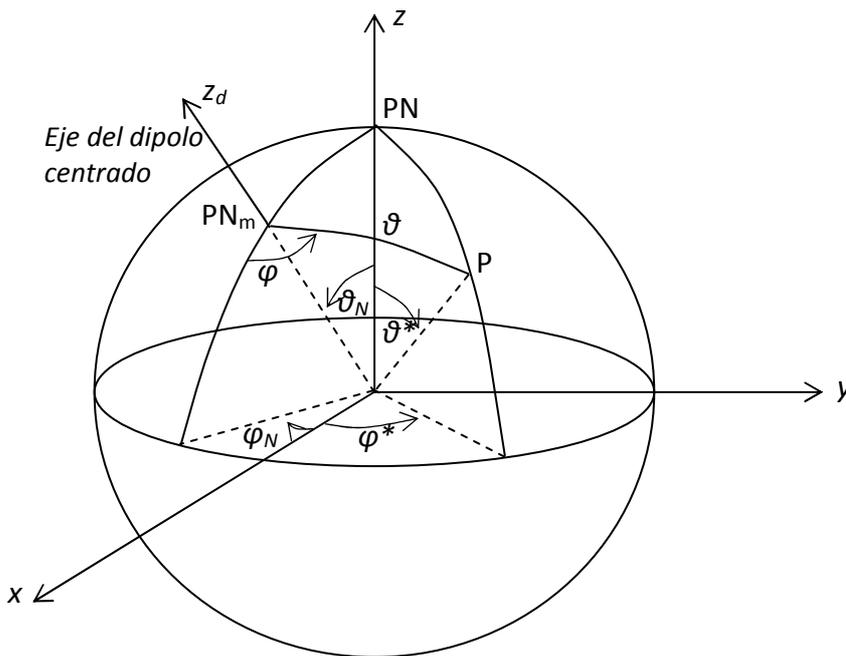
donde  $v_{in}$  esta en  $s^{-1}$ ,  $m$  en kg,  $n_n$  en  $cm^{-3}$  y  $\mu_A = (A_i A_n) / (A_i + A_n)$  siendo  $A$  la masa de las especies en amu. La frecuencia de colisión entre los iones y los electrones se calcula de acuerdo a [Taïeb, 1996]

$$v_{ie} = 1.73 \times 10^{-3} \left( \frac{1000}{T_e} \right)^{3/2} n_e$$

con  $v_{ie}$  en  $s^{-1}$ ,  $T_e$  en K y  $n_e$  en  $cm^{-3}$ .

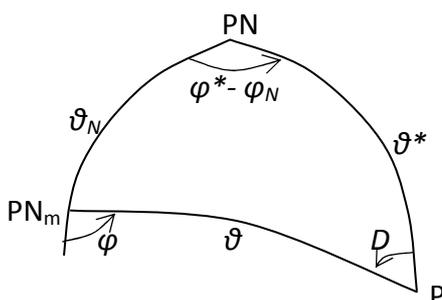
## Apéndice C

Las coordenadas geográficas y geomagnéticas son descriptas mediante el uso de coordenadas esféricas ( $r, \vartheta, \varphi$ ). El sistema coordenado geográfico tiene su origen en el centro físico de la Tierra. La coordenada radial ( $r^*$ ) esta dada por la distancia entre un punto dado y el centro de la Tierra. la colatitud geográfica ( $\vartheta^*$ ) es el ángulo formado entre el vector radial y el eje de rotación de la Tierra. Medida en grados,  $\vartheta^*$  es igual a cero en el polo norte,  $90^\circ$  en el ecuador y  $180^\circ$  en el polo sur. La longitud geográfica ( $\varphi^*$ ) se mide en forma relativa a un origen asumido sobre el meridiano de Greenwich, tomando valores positivos hacia el este de Greenwich.



**Figura C.1** – Geometría de los sistemas coordenados geográfico y geomagnético relativos al sistema cartesiano ( $x, y, z$ ). El eje del dipolo cruza la superficie de la Tierra en el punto  $PN_m$ . El punto  $P$  es un punto cualquiera.

Para las coordenadas geomagnéticas se utiliza un sistema equivalente basado en un dipolo magnético centrado e inclinado que tiene un centro coincidente con el centro de la tierra y un eje que pasa por los polos magnéticos norte y sur. A partir de esto se definen las coordenadas geomagnéticas radial ( $r$ ) y de colatitud ( $\vartheta$ ) al igual que antes. La longitud geomagnética ( $\varphi$ ) debe definirse relativa a un meridiano que denote el cero, el cual se define por el plano que contiene al eje de rotación y al eje del dipolo. Una vez definidos los dos sistemas se puede encontrar la transformación entre estos, consistente en una rotación para hacer coincidir ambos ejes. Por definición  $r^* = r$ , entonces falta encontrar las relaciones entre  $(\vartheta^*, \varphi^*)$  y  $(\vartheta, \varphi)$ .



**Figura C.2** – Triángulo esférico sobre la superficie utilizado para encontrar la transformación entre coordenadas geográficas y geomagnéticas.

La transformación entre las coordenadas geográficas y geomagnéticas se encuentra al considerar el triángulo esférico formado por el polo norte geográfico PN, el polo norte geomagnético PN<sub>m</sub> y un punto cualquiera P, todos sobre la superficie de la Tierra. Esta situación se ilustra en las Figs. (C.1) y (C.2). Utilizando la regla del coseno para triángulos esféricos se tiene

$$\frac{\sin(\vartheta^*)}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{\sin(\vartheta_N)}{\sin(D)} = \frac{\sin(\vartheta)}{\sin(\varphi^* - \varphi_N)} \quad (C.1)$$

donde  $\varphi_N$  y  $\vartheta_N$  son la longitud y la colatitud geográficas del polo norte magnético. De la regla del coseno se obtiene

$$\begin{aligned} \cos(\vartheta^*) &= \cos(\vartheta_N)\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta_N)\sin(\vartheta)\cos(\pi - \varphi) \\ \cos(\vartheta_N) &= \cos(\vartheta^*)\cos(\vartheta) + \sin(\vartheta^*)\sin(\vartheta)\cos(D) \\ \cos(\vartheta) &= \cos(\vartheta^*)\cos(\vartheta_N) + \sin(\vartheta^*)\sin(\vartheta_N)\cos(\varphi^* - \varphi_N) \end{aligned} \quad (C.2)$$

A partir de las Ecs. (C.1) y (C.2) se encuentra la transformación  $(r, \vartheta^*, \varphi^*) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta &= \cos^{-1} [\cos(\vartheta^*)\cos(\vartheta_N) + \sin(\vartheta^*)\sin(\vartheta_N)\cos(\varphi^* - \varphi_N)] \\ \cos(\varphi) &= -\cos(\pi - \varphi) = \frac{\cos(\vartheta_N)\cos(\vartheta) - \cos(\vartheta^*)}{\sin(\vartheta_N)\sin(\vartheta)} \\ \sin(\varphi) &= \sin(\pi - \varphi) = \frac{\sin(\vartheta^*)\sin(\varphi^* - \varphi_N)}{\sin(\vartheta)} \\ \varphi &= \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right] \end{aligned} \right. \quad (C.3)$$

Las dos ecuaciones para  $\varphi$  evitan la ambigüedad en el ángulo que ocurre cuando la inversa del seno o del coseno es evaluada en el rango entre  $-\pi$  y  $\pi$ . La transformación inversa  $(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow (r, \vartheta^*, \varphi^*)$  está dada por

$$\left\{ \begin{aligned} \vartheta^* &= \cos^{-1} [\cos(\vartheta_N)\cos(\vartheta) - \sin(\vartheta_N)\sin(\vartheta)\cos(\varphi)] \\ \cos(\varphi^* - \varphi_N) &= \frac{\cos(\vartheta) - \cos(\vartheta^*)\cos(\vartheta_N)}{\sin(\vartheta^*)\sin(\vartheta_N)} \\ \sin(\varphi^* - \varphi_N) &= \frac{\sin(\vartheta)\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta^*)} \\ \varphi^* &= \varphi_N + \tan^{-1} \left[ \frac{\sin(\varphi^* - \varphi_N)}{\cos(\varphi^* - \varphi_N)} \right] \end{aligned} \right. \quad (C.4)$$

La transformación entre los vectores unitarios  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi) \leftrightarrow (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{\vartheta^*}, \mathbf{e}_{\varphi^*})$  está dada por el ángulo  $D$  que es la declinación magnética

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\vartheta &= -\cos(D) \mathbf{e}_{\vartheta^*} + \sin(D) \mathbf{e}_{\varphi^*} & \mathbf{e}_\varphi &= \sin(D) \mathbf{e}_{\vartheta^*} + \cos(D) \mathbf{e}_{\varphi^*} \\
\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_{\vartheta^*} &= \cos(D) \mathbf{e}_\vartheta + \sin(D) \mathbf{e}_\varphi & \mathbf{e}_{\varphi^*} &= -\sin(D) \mathbf{e}_\vartheta + \cos(D) \mathbf{e}_\varphi
\end{aligned}
\tag{C.5}$$

Siendo  $D > 0$  si  $\varphi_d < 0$  y  $D < 0$  si  $\varphi_d > 0$ .



## Referencias

- Abdu, M.A., K. N. Iyer, R.T. de Madeiros, I. S. Batista, and J. H.A. Sobral, Thermospheric meridional wind control of equatorial spread F and evening prereversal electric field, *Geophys. Res. Lett.*, **33**, L07106, doi:10.1029/2005GL024835, 2006.
- Anderson, D. N., and R.G. Roble, Neutral wind effects on the equatorial *F*-region ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **43**, 835, 1981.
- Azpilicueta, F., Brunini, C., Radicella, S. M. Global ionospheric maps from GPS observations using modip latitude. *Advances in Space research*, Elsevier, (38) 11, 2324-2331, 2005.
- Azpilicueta, F. Modelos ionosféricos globales derivados de observaciones GPS y altimetría satelital, Tesis Doctoral, FCAG, UNLP, Noviembre de 2006.
- Azpilicueta, F., Brunini, C. Analysis of the bias between TOPEX and GPS vTEC determinations, *Journal of Geodesy*, DOI 10.1007/s00190-008-0244-7, 2008.
- Azpilicueta, F., Brunini, C. Vertical TEC in the Equatorial Anomaly Region from Satellite Altimetry, *Advances in Space Research*, Elsevier, 42, 745-752, doi 10.1016/j.asr.2007.12.016, 2008.
- Azpilicueta, F., Brunini, C. Residual Analysis of Global Ionospheric Maps Using Modip Latitude. En: H. Drewes (ed.), *Geodetic Reference Frames*, International Association of Geodesy Symposia 134, DOI 10.1007/978-3-642-00860-3\_25, pp. 311-316, 2009.
- Azpilicueta F., C. Brunini. 'A new concept regarding the cause of ionosphere semiannual and annual anomalies', *Journal of Geophysical Research*, DOI:10.1029/2010JA015977, 2010a.
- Azpilicueta F., C. Brunini, S. M. Radicella. 'Semi-annual Anomaly and Annual Asymmetry on TOPEX TEC during a full Solar cycle', *Proceedings of the International Association of Geodesy Scientific Assembly 2009*, 2010b.
- Bailey G.J., and N. Balan, A low-latitude ionosphere plasmasphere model, in *STEP: Handbook of Ionospheric Models*, edited by R.W. Schunk, p. 173, Utah State Univ., Logan, Utah, 1996.
- Bailey, G. J., N. Balan, and Y. Z. Su, The Sheffield University plasmasphere-ionosphere model - a review, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 59, 1541,1997.
- Baker, A.J., *Finite elements computational fluids mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1983.
- Banks, P. M., R.W. Schunk, and W. J. Raitt, The topside ionosphere: a region of dynamic transition, *Annl. Rev. Earth Planet. Sci.*, **4**, 381, 1976.
- Bernardi, C., Maday, Y.,(1997) *Spectral Methods*, *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. V, p. 209-485. Editors: P.G. Ciarlet and J.L. Lions.
- Bilitza, D., L. A. McKinnell, B. Reinisch, T. Fuller-Rowell, The international reference ionosphere today and in the future, *J Geod.*, 85, 909–920, DOI 10.1007/s00190-010-0427-x, 2011.
- Brace, L.H., Theis, R.F. An empirical model of the inter-relationship of electron temperature and density in the daytime thermosphere at solar minimum. *Geophys. Res. Lett.* 5, 275–278, 1978.
- Bradley, P. A., and J. R. Dudeney, A simple model of the vertical distribution of the electron concentration in the ionosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **35**, 2131, 1973.
- Brunini, C. Global ionospheric models based on GPS observations, Tesis Doctoral, FCAG, UNLP, diciembre de 1998.
- Brunini, C., Meza, A. y Gende, M. Utilización de mediciones GPS para el análisis de la ionosfera: Aplicaciones geodésicas y geofísicas. En A. Introcaso (ed.), *Contribuciones a la Geodesia en la Argentina de fines del siglo XX*, homenaje a Oscar Parachu, ISBN 950-673-201-9, pp. 187-213,

UNR Editora, 1999.

Brunini, C., Azpilicueta, F. Accuracy assessment of the GPS-based slant total electron content (sTEC) Journal of Geodesy, doi 10.1007/s00190-008-0296-8, 2009.

Brunini, C., Azpilicueta F. GPS slant total electron content accuracy using the single layer model under different geomagnetic regions and ionospheric conditions, Journal of Geodesy, 84, 293-304, doi 10.1007/s00190-010-0367-5, 2010.

Brunini, C., Camilion, E., Azpilicueta, F. Simulation study of the influence of the ionospheric layer height in the thin layer ionospheric model, Journal of Geodesy, doi 10.1007/s00190-011-0470-2, 2011.

Brunini, C., Azpilicueta, F., Gende, M., Aragón-Ángel, A., Hernández-Pajares, M, Juan, J. M., Sanz, J. Toward a SIRGAS service for mapping the ionosphere's electron density distribution. En: S. Kenyon et al. (eds.), Geodesy for Planet Earth, International Association of Geodesy Symposia 136, doi 10.1007/978-3-642-20338-1\_94, pp. 753-760, 2011a.

Brunini, C., Azpilicueta, F., Gende, M., Camilion, E., Aragón Ángel, A., Hernandez-Pajares, M., Juan, M., Sanz, J., Salazar, D. Ground- and space-based GPS data ingestion into the NeQuick model, Journal of Geodesy, doi 10.1007/s00190-011-0452-4, 2011b.

Brunini, C., Azpilicueta, F., Gende, M., Camilion, E., Gularte, E. Improving SIRGAS ionospheric model, International Association of Geodesy Symposia vol. 138, pp. 245-250, en prensa (2013).

Brunini, C., Conte, J. F., Azpilicueta, F., Bilitza, D. A different method to update monthly median hmF2 values. Advances in Space Research (2013).

Brunini, C., Azpilicueta, F., Nava, B., Gularte, E. Global maps of montly-mean values of the ionospheric F2-peak parameters derived from COSMIC / FORMOSAT-3, Jornal of Geodesy, en prensa (2013b).

Burch, J. L., The magnetosphere, in *The Upper Atmosphere and Magnetosphere*, 42, National Research Council, Washington, DC: National Academy Press, 1977.

Burgers, *Flow Equations for Composite Gases*, New York: Academic, 1969.

Canuto, C. Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A., Spectral Methods in fluid mechanics. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

Chapman, S., The absorption and dissociative or ionizing effects of monochromatic radiation in an atmosphere on a rotating Earth, 2, Grazing incidence, Proc. Phys. Soc. London, 43, 483, 1931.

Chapman, S., and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, New York: Cambridge University Press, 1970.

Chew, G. F., M. L. Goldberger, and F. E. Low, The Boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisons, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 236, 112-118, 1956.

Chung, T.J., Finite elements analysis in fluids dynamics, McGraw-Hill, New York, 1978.

Ciraolo, L., Azpilicueta, F., Brunini, C., Meza, A., Radicela, S. M. Calibration errors on experimen-tal slant total electron content determined with GPS. Journal of Geodesy, Springer, (81) 2, 111-120, doi 10.1007/s00190-006-0093-1, 2007.

Conte, J. F., Azpilicueta, F., Brunini, C. Accuracy assessment of the GPS-TEC calibration constants by means of a simulation technique, Journal of Geodesy doi 10.1007/s00190-011-0477-8, 2011.

- Courant, R., K. O. Friedrichs, and H. Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, 100, pp. 32–74, 1928.
- Courant, R., K. O. Friedrichs, and H. Lewy, On the partial difference equations of mathematical physics, *IBM J.*, 11, pp. 215–234, 1967.
- Dent, Z. C., I. R. Mann, J. Goldstein, F.W. Menk, and L.G. Ozeke, Plasmaspheric depletion, refilling, and plasmopause dynamics: a coordinated ground-based and IMAGE satellite study, *J. Geophys. Res.*, 111, A03205, doi:10.1029/2005JA011046, 2006.
- Eymard, R., Gallouët, T., Herbin, R. (2000) The finite volume method Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, 2000, p. 713-1020. Editors: P.G. Ciarlet and J.L. Lions.
- Fejer, B.G., E. R. de Paula, R.A. Heelis, and W. B. Hanson, Global equatorial ionospheric vertical plasma drifts measured by the AE-E satellite, *J. Geophys. Res.*, **100**, 5769, 1995.
- Fejer B. G., and L. Scherliess, Empirical models of storm time equatorial zonal electric fields, *J. Geophys. Res.*, 102, 24,047-24,056, 1997
- Ferziger, J.H., Peric. M., Computational Methods for Fluid Dynamics, 3<sup>a</sup> Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- Fletcher, C.A.J., Computational techniques for fluids dynamics, vol. I, Springer, Berlin, 1991.
- Fraser-Smith, A. C., Centered and eccentric geomagnetic dipoles and their poles, 1600–1985, *Rev. Geophys.*, **25**, 1, 1987.
- Fuller-Rowell, T. J. (1998), The “thermospheric spoon”: A mechanism for the semiannual density variation, *J. Geophys. Res.*, 103(A3), 3951–3956.
- Gende, M. A. Modelos ionosféricos derivados de observaciones GPS: investigaciones científicas y aplicaciones geodésicas, Tesis Doctoral, FCAG, UNLP, abril de 2002.
- Girault, V., Raviart, P.A., Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer, Berlin, 1986.
- Grad, H., On the kinetic theory of rarefied gases, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2**, 331, 1949.
- Gularte Scarone, A. E. Modelo de densidad electrónica basado en observaciones GNSS, Tesis Doctoral, FCAG, UNLP, junio de 2008.
- Hagen, J. B., and P. Hsu, The structure of the protonosphere above Arecibo, *J. Geophys. Res.*, **79**, 4269, 1974.
- Hanson, W. B., and R. J. Moffett, Ionization transport effects in the equatorial F region, *J. Geophys. Res.*, **71**, 5559, 1966.
- Hedin, A. E., J. Salah, J. Evans, *et al.*, A global thermospheric model based on mass spectrometer and incoherent scatter data, MSIS, *J. Geophys. Res.*, **82**, 2139, 1977.
- Hedin, A. E., N. W. Spencer, and T. L. Killeen, Empirical Global Model of Upper Thermosphere Winds Based on Atmosphere and Dynamics Explorer Satellite Data, *J. Geophys. Res.* 93, 9959-9978, 1988.
- Hedin, A. E., Extension of the MSIS Thermosphere Model into the Middle and Lower Atmosphere, *J. Geophys. Res.*, 96(A2), 1159–1172, doi:10.1029/90JA02125, 1991.
- Hedin, A. E., Revised Global Model of Thermosphere Winds Using Satellite and Ground-Based Observations, *J. Geophys. Res.* 96, 7657-7688, 1991.
- Hedin, A.E., E.L. Fleming, A.H. Manson, F.J. Schmidlin, S.K. Avery, R.R. Clark, S.J. Franke, G.J. Fraser, T. Tsuda, F. Vial and R.A. Vincent, Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.* 58, 1421-1447, 1996.

Huba, J.D., G. Joyce, J.A. Feder, Sami2 is Another Model of the Ionosphere (SAMI2): A new low latitude ionosphere model, *J. Geophys. Res.*, 105, p. 23035, 2000.

International Association of Geomagnetism and Aeronomy (IAGA), Working Group V-MOD. Participating members, Finlay, C. C., Maus, S., Beggan, C. D., Bondar, T. N., Chambodut, A., Chernova, T. A., Chulliat, A., Golovkov, V. P., Hamilton, B., Hamoudi, M., Holme, R., Hulot, G., Kuang, W., Langlais, B., Lesur, V., Lowes, F. J., Lüher, H., Macmillan, S., Manda, M., McLean, S., Manoj, C., Menvielle, M., Michaelis, I., Olsen, N., Rauberg, J., Rother, M., Sabaka, T. J., Tangborn, A., Tøffner-Clausen, L., Thébaud, E., Thomson, A. W. P., Wardinski, I., Wei, Z. and Zvereva, T. I. (2010), International Geomagnetic Reference Field: the eleventh generation. *Geophysical Journal International*, 183: 1216–1230. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04804.x

Kelley, M.C., *The Earth's Ionosphere, Volume 96, Second Edition: Plasma Physics & Electrodynamics (International Geophysics)*, 2009.

Leonard, B.P., A stable and accurate convection modeling procedure based on quadratic stream interpolation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 19,59-98,1979.

LeVeque, R., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.

LeVeque, Randall, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2007.

Li, X., and T. Yu, Annual and semi-annual variations of the observed foF2 in a high solar activity year, *Terr. Atmos. Oceanic Sci.*, 14(1), 41–62, 2003.

Matuura, N., Reaction rates in the F region, *Rept. Ionosph. Space. Res. Japan*, 21,289,1966.

Maus S., S. Macmillan, T. Chernova, S. Choi, D. Dater, V. Golovkov, V. Lesur, F. Lowes, H. Lüher, W. Mai, S. McLean, N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson, T. Zvereva, The 10<sup>th</sup> generation international geomagnetic reference field, *Phys. Earth Planet. Int.*, 151, 320, 2005.

Mendillo, M., C. Huang, X. Pi, H. Rishbeth, and R. Meier (2005), The global ionospheric asymmetry in total electron content, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, 67, 1377–1387.

Meza, A. Three dimensional ionospheric models from earth and space based GPS observations, Tesis Doctoral, FCAG, UNLP, diciembre de 1999.

Millward, G.H., R.J. Moffett, W. Quegan, and T.J. Fuller-Rowell, A Coupled Thermospheric-Ionospheric-Plasmasphere Model (CTIP), in *STEP: Handbook of Ionospheric Models*, edited by R.W. Schunk, p. 173, Utah State Univ., Logan, Utah, 1996.

Mitra A. P. A review of D-region processes in non-polar latitudes, *J. Atmos. Terr. Phys*, 30, 1065-1114, 1968.

Pandey, V.K., N.K. Sethi, K.K. Mahajan, Topside electron temperature models for low and high solar activity, *Adv. Space Res.*, 33, 959–962, 2004.

Picone, J. M., A. E. Hedin, D. P. Drob, and A. C. Aikin, NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues, *J. Geophys. Res.*, 107, 1468, doi:10.1029/2002JA009430, 2002.

Pross, G. W., *Physics of the Earth's space environment, An introduction*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

Richards, P.G., J.A. Fennelly, and D.G. Torr, EUVAC: a solar EUV flux model for aeronomic calculations, *J. Geophys. Res.*, 99, 8981, 1994.

Richtmyer, R.D., Morton, K.W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2<sup>nd</sup> Ed., John Wiley & Sons, Inc., 1967.

- Rishbeth, H., Polarization fields produced by winds in the equatorial F-region, *Planet. Space Sci.*, **19**, 357-369, 1971. Rishbeth, H., The F-region dynamo, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **43**, 387-392, 1981.
- Rishbeth, H., How the thermospheric circulation affects the ionospheric F2 layer, *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.*, **59**, 1385–1402, 1998.
- Roble, R.G., The calculated and observed diurnal variation of the ionosphere over Millstone Hill on March 23–24, 1970, *Planet. Space Sci.*, **23**, 1017, 1975.
- Roble, R.G., Solar EUV flux variation during a solar cycle as derived from ionospheric modeling considerations, *J. Geophys. Res.*, **81**, 265, 1976.
- Scherliess, L., and B. G. Fejer, Radar and satellite global equatorial F region vertical drift model, *J. Geophys. Res.*, **104**(A4), 6829–6842, doi: 10.1029/1999JA900025, 1999.
- Smith, F. L., and C. Smith, Numerical evaluation of Chapman's grazing incidence integral  $Ch(\chi, x)$ , *J. Geophys. Res.*, **77**, 3592, 1972.
- Schunk, R. W., Mathematical structure of transport equations for multispecies flows, *Rev. Geophys. Space Phys.*, **15**, 429-445, 1977.
- Schunk, R.W., Transport equations for aeronomy, *Planet. Space Sci.*, **23**, 437, 1975.
- Schunk, R.W., The terrestrial Ionosphere, in *Solar-Terrestrial Physics* (R.L. Carovillano y J.M. Forbes, eds.), 609, Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1983.
- Schunk, R.W. and A. F. Nagy, *Ionospheres - Physics, Plasma Physics, and Chemistry* 2do Ed, Cambridge University Press, 2000.
- Song, W., Modelling of Electromagnetic Bandgap Structures using an Alternating Direction Implicit (ADI)/Conformal Finite-Difference Time-Domain Method, Phd Thesis, Queen Mary University, Londres, Inglaterra, febrero de 2008.
- Strikwerda, J.C., *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, 2ª Ed Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2004.
- Swartz, W. E., and J. S. Nisbet, Incompatibility of solar EUV fluxes and incoherent scatter measurements at Arecibo, *J. Geophys. Res.*, **78**, 5640, 1973.
- Swisdak, Notes on the Dipole Coordinate System, 2006.  
<http://arxiv.org/pdf/physics/0408133.pdf>
- Taïeb, C., Mid-latitude Ionospheric Model, in *STEP: Handbook of Ionospheric Models*, edited by R.W. Schunk, p. 39, Utah State Univ., Logan, Utah, 1996.
- Torr, M.R., D.G. Torr, R.A. Ong and H.E. Hinteregger, Ionization frecuencias for major thermospheric constituents as a function of solar cycle 21, *Geophys. Res. Lett.*, **6**, 771, 1979.
- Tsurutani, B.T., X.Y. Zhou, V.M. Vasylunas, G. Haerendel, J.K. Arballo and G.S. Lakhina, Interplanetary shocks, magnetopause boundary layers, and dayside auroras: the importance of a very small magnetospheric region, *Surveys Geophys.*, **22**, 101-130, 2001.
- Van Allen, J.A., Charged particles in the magnetosphere, *Rev. Geophys.*, **7**, 233-255, 1969.
- Wendt, J.F., *Computational Fluid Dynamics: An Introduction*, 3ª Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- Zienkiewicz, O.C., *The finite element method*, McGraw-Hill, New York, 1977.

