SYMMETRIE EN WAARSCHIJNLIJKHEID

REDE

UITGESPROKEN BIJ DE AANVAARDING
VAN HET AMBT VAN HOOGLERAAR IN
DE WISKUNDE AAN DE LANDBOUW-
HOGESCHOOL
OP MAANDAG 30 OCTOBER 1950

DOOR

DR N. H. KUIPER

H. VEENMAN & ZONEN • WAGENINGEN

Mijne Heren Curatoren; Mijne Heren Hoogleraren; Mevrouw en Mijne Heren Lectoren en Docenten, Dames en Heren Wetenschappelijke Medewerkers, Dames en Heren Studenten, Dames en Heren,

Zeer geachte Toehoorders,

De wiskunde is voor velen een geheime wetenschap. Het is een begrip van zekere begrippen, dat niet dan met moeite verkregen wordt, ook al zijn alle bronnen, die er betrekking op hebben, gemakkelijk toegankelijk. Vandaar dat het een wiskundige doorgaans onmogelijk is om voor een publiek van niet ingewijden een rede over actuele onderwerpen uit zijn vak te houden. Wel kan hij trachten enige van de belangrijke wiskundige begrippen te benaderen met voorbeelden.

Dit wil ik thans doen aan de hand van de woorden *symmetrie* en *waarschijnlijkheid.*

Symmetrie heeft in de meest gebruikelijke betekenis van het woord betrekking op figuren. Letterlijk betekent sym-metrie *samen meten.* De werkelijke betekenis kan hiermee in verband gebracht worden.

Stelt U zich voor dat twee personen bij een vlakke figuur staan, en beide meten deze figuur op. Zij meten dus samen. Hierdoor is natuurlijk het begrip symmetrie nog niet vastgelegd. Om daartoe te komen moeten we in de eerste plaats de voorwaarde stellen dat de twee personen de figuur op verschillende manieren opmeten. Er wordt dus niet twee keer precies hetzelfde gedaan, maar U kunt zich bijvoorbeeld voorstellen dat persoon A vóór de vlakke figuur en persoon B achter de vlakke figuur, dus aan de andere kant, staat. De tweede voorwaarde ligt nu voor de hand:

de meetresultaten van beide personen moeten, ondanks de verschillende manieren van meten, gelijk zijn.

Wat betekent echter opmeten, en wat betekent gelijkheid van meetresultaten? Het opmeten of uitmeten van een figuur is het verzamelen van gegevens zodanig, dat die gegevens alle gewenste kennis over de figuur bepalen. Een theoretisch zeer bevredigende manier om een vlakke figuur op te meten, wordt dus gevonden door een tweede figuur te maken die er precies op past. Het opmeten van de eerste figuur bestaat dan in het precies passen van de tweede „meetfiguur" op de eerste. Persoon A die zo'n meting uitvoert, kan de meetfiguur met zich meedragen en aan ieder vertonen, die belang zou stellen in de oorsprònkelijke figuur. De „meetfiguur" is zijn meetresultaat. Dit meetresultaat bepaalt inderdaad alle gewenste kennis over de oorspronkelijke figuur. Persoon A reikt zijn meetfiguur nu over aan persoon B en deze meet de oorspronkelijke figuur op zijn beurt. Als B nu hetzelfde meetresultaat constateert als A, hoewel hij zijn meting op een andere wijze verricht, dan heet de oorspronkelijke figuur symmetrisch.

Doordat ik hier van de letterlijke betekenis van het woord symmetrie uitging, is mijn beschrijving van het begrip enigszins gewrongen en vaag geworden. Ik zal nu een beschrijving geven die, naar ik hoop, duidelijker is, en die tevens uitnodigt tot veralgemeningen.

Het uitgangspunt is een verzameling punten, namelijk de punten van het platte vlak, en verder een deelverzameling, namelijk de punten van de figuur F. In gedachte nemen we nu een tweede vlak, waarvan elk punt gehecht is aan een punt van het eerste vlak. Dit tweede vlak zal het bewegelijke vlak heten. Met de punten van de figuur F corresponderen de punten van net zo'n figuur F′ in het bewegelijke vlak. Bij het begin van onze beschouwing zijn het vaste vlak en het bewegelijke vlak feitelijk niet te onderscheiden. Het bewegelijke vlak kan echter *bewogen* worden. Wat is een beweging? Een beweging is het verwisselen van de punten van het bewegelijke vlak ten opzichte van het vaste vlak. We gebruiken het woord *verwisselen* om uit te drukken dat elk punt van het vaste vlak na afloop weer bezet is door een verplaatst punt. Zo'n verwisseling van punten heet in de wiskunde transformatie, bij een eindige puntverzameling ook wel permutatie. Niet elke willekeurige verwisseling van de punten is echter geoorloofd. Slechts transformaties uit een beperkte collectie worden geoorloofd verklaard en bewegingen geheten. Terzijde merk ik op dat ik spiegelingen ook tot de bewegingen zal rekenen.

Bij elke geoorloofde transformatie of beweging gaat de figuur F′ van het bewegelijke vlak over in een andere figuur. En als er nu een beweging bestaat, zodanig dat de nieuwe figuur geheel met de oude figuur F in het vaste vlak samenvalt, dan heet F symmetrisch.

Voorbeelden van symmetrische figuren zijn er natuurlijk te over. Een gelijkbenige ongelijkzijdige driehoek is symmetrisch. Er is precies één spiegeling die deze figuur doet overgaan in een figuur die met de oorspronkelijke samenvalt. Hoewel zij symmetrisch is, is de mate van symmetrie gering.

Een sterker voorbeeld is de gelijkzijdige driehoek. Behalve drie spiegelingen zijn er ook nog twee draaiingen om het middelpunt, namelijk over hoeken van 120° en 240°, ten opzichte waarvan de figuur symmetrisch is. U zult merken dat ik mij niet uitsluitend tot de spiegelsymmetrie beperk.

Op analoge wijze vindt men dat de regelmatige zeven-hoek symmetrisch is ten opzichte van dertien bewegingen, namelijk zeven spiegelingen en zes draaiingen, terwijl men bij de cirkel, of het punt, en ook bij de rechte lijn, een onbeperkt (oneindig) aantal verschillende bewegingen kan vinden die de figuur schijnbaar onberoerd laten. In plaats van onberoerd gebruikt men in de wiskunde het woord *invariant*.

Symmetrische figuren behagen niet alleen de wiskundige, die, gegeven zo'n figuur, zich direct gedrongen zal voelen alle bewegingen te zoeken ten opzichte waarvan de figuur invariant of symmetrisch is. Ook andere mensen kunnen dank zij symmetrie in een figuur aangenaam getroffen worden. Vaak is als ontwerp voor een tapijt of een ander kunstwerk een figuur gekozen met een grote mate van symmetrie. [1])

De gevoelens, meestal onbewust, die een mens kan krijgen bij het aanschouwen van een symmetrische figuur, hebben ook de aandacht gehad van personen die hun wil, ten goede of ten kwade, aan groepen mensen wilden meedelen of opleggen. Wat zou de macht van het hakenkruis geweest zijn, indien een van de haakjes naar de andere kant gestaan zou hebben?

Tot dusver heb ik mij beperkt tot symmetrieen ten opzichte van die geoorloofde verwisselingen van de punten van het platte vlak, die de bewegingen zijn. Het is echter zeer wel mogelijk om een andere groep van transformaties geoorloofd te noemen. Daarvan zal ik nu een voorbeeld geven.

Stelt U zich voor dat weer een bewegelijk vlak punt voor punt gehecht is aan een vast vlak, alles gelegen in de drie-dimensionale ruimte. Bij dit vaste vlak kunt U bijvoorbeeld denken aan de vloer van deze zaal. Bij het bewegelijke vlak kunt U denken aan een mat die op de vloer ligt. Het bewegelijke vlak wordt nu in deze aula door U bewogen tot in een door U te kiezen stand. Vervolgens kiest U een vaste richting niet evenwijdig aan het vaste of het bewogen vlak, en U projecteert alle punten van het bewogen vlak (de mat) langs die richting op het vaste vlak (de vloer). Of de mat de materiële verwezenlijking van deze projectie zal overleven, laat ik buiten beschouwing. Elk punt oorspronkelijk gehecht aan het vaste vlak, komt tenslotte terecht op een andere plaats van het vaste vlak (uitzonderingen daargelaten). We hebben daarmee een verwisseling van de punten gehecht aan het vaste vlak, geconstrueerd. Deze en dergelijke verwisselingen zullen we nu geoorloofd noemen. In de wiskunde heten ze *affiene transformaties*. De stellingen en eigenschappen die er betrekking op hebben vormen de affiene meetkunde, zoals de stellingen en eigenschappen die betrekking hebben op de Euclidische bewegingen, de Euclidische meetkunde vormen. Het is gemakkelijk in te zien dat affiene transformaties rechte lijnen in rechte lijnen overbrengen, ellipsen in ellipsen, maar een cirkel doorgaans niet in een cirkel doch in een ellips. Binnen het kader van de affiene meetkunde heeft het zin om te spreken van een rechte lijn en van een ellips, maar een cirkel kan binnen dit kader niet op passende wijze gedefinieerd worden. De cirkel die ik zojuist noemde, was ook niet gedefinieerd binnen dit kader, maar in het Euclidische vlak (de vloer) waar ik van uitging en dat ik gebruikte om van de affiene meetkunde een beeld voor U te ontwerpen.

---

[1]) Vgl. A. Speiser. Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung. Hfdst. 6.

Elke beweging van het Euclidische vlak is ook geoorloofd volgens de nieuwe conventie. Het is een voorbeeld van een affiene transformatie. En daarom is elke figuur die symmetrisch is ten opzichte van de bewegingen, a fortiori symmetrisch ten opzichte van de affiene transformaties. Omgekeerd zijn er echter veel figuren in een Euclidisch vlak affien symmetrisch, maar niet Euclidisch symmetrisch. Een driehoek met drie ongelijke zijden is bijvoorbeeld affien-symmetrisch en wel ten opzichte van vijf verschillende affiene transformaties. D.w.z. er zijn vijf verschillende verwisselingen van plaats van de punten van het vlak, geoorloofd volgens de nieuwe conventie, die een willekeurig gekozen driehoek overbrengen in een driehoek die met de oorspronkelijke samenvalt. Hoewel in een Euclidisch vlak veel meer figuren affien-symmetrisch dan Euclidisch-symmetrisch zijn, is het toch ook weer niet moeilijk om een niet affien-symmetrische figuur te vinden. Een vierhoek is bijvoorbeeld in het algemeen al niet affien-symmetrisch.

Laten we echter nog veel meer transformaties toe door ze geoorloofd te noemen, dan kan de uitkomst anders worden. We kunnen bijvoorbeeld alle naar beide zijden continue of wel topologische transformaties van het platte vlak geoorloofd noemen. In dit geval is het moeilijk een figuur te vinden die niet symmetrisch is in de door mij aangegeven zin. Wiskundigen onder U zullen er misschien zelfs moeite mee hebben!

De veralgemening van het begrip symmetrie, die hierin bestaat dat andere puntverwisselingen dan de Euclidische bewegingen geoorloofd genoemd worden, heb ik U nu geïllustreerd. Op andere wijze kan het begrip symmetrie veralgemeend worden, door van het platte vlak of de Euclidische ruimte als de enig mogelijke puntverzameling van uitgang af te zien. Er zijn vele andere puntverzamelingen. Bijvoorbeeld kan de keuze zijn: een verzameling bestaande uit de punten van een cirkelomtrek, of eenvoudigweg uit 52 abstracte punten. In dit laatste geval kan het zijn dat we de punten in gedachten volgens een cirkelvormige keten geordend hebben en dat de geoorloofde verwisselingen van de punten die permutaties zijn welke deze orde niet verstoren. Een fraaie symmetrische figuur, symmetrisch ten opzichte van de nu geoorloofd verklaarde permutaties, bestaat dan bijvoorbeeld uit de punten met rangnummer 13, 26, 39, 52. Deze figuur is in zeven opzichten symmetrisch, zoals U zult kunnen nagaan.

Van de begrippen symmetrie en invariantie stap ik nu tijdelijk over op een ander wiskundig begrip, *de functie*, om vandaar tot de waarschijnlijkheidstheorie te komen. Een functie is een toevoeging van een getal (vaak genaamd y) aan elk ding (genaamd x) uit een gegeven collectie dingen. Die collectie dingen heet het definitiegebied van de functie en kan bijvoorbeeld bestaan uit alle reëele getallen. Dan is de functie van de soort die U het beste kent en welke U zich pleegt voor te stellen bij het symbool $y = f(x)$. De dingen kunnen ook geordende getallenparen zijn. De functie bepaalt dan een getal bij elk getallenpaar $x = (\lambda, \mu)$. Vinden we het te vermoeiend om een geordend getallenpaar, zoals (λ, μ), als één ding te beschouwen dan spreken we van een functie van twee veranderlijken, daarmee dit voorbeeld in zekere zin tot het vorige terugbrengend. Terzijde merk ik op, dat deze handelwijze om de genoemde reden door wiskundigen verwerpelijk wordt geacht. De ontwikkeling van de wiskunde toch is juist voor een groot deel te danken aan de abstraherende arbeid, waarbij telkens weer een complex van begrippen als één begrip gedacht wordt. De abstraherende arbeid bestaat vooral hierin, dat de eigenschappen van de diverse begrippen van het eerst gegeven complex in de juiste mate op de achtergrond van het bewustzijn geplaatst worden, waar zij niet storen bij het verder denken, maar zó, dat zij wel op elk gewenst moment ten bewustzijn gevoerd kunnen worden.

Het volgende nog moeilijker voorbeeld van een functie, is dat, waarbij de dingen intervallen op een rechte lijn of een cirkel zijn. Aan elk interval wordt dus een getal toegevoegd. Eén voorbeeld daarvan is U zeker bekend, namelijk wanneer aan elk interval op een rechte lijn het getal toegevoegd wordt dat de lengte van het interval in cms aangeeft.

In de waarschijnlijkheidsrekening is het belangrijke voorbeeld van een functie een functie van deze laatste soort, namelijk de functie genaamd *waarschijnlijkheidsverdeling* of *kansverdeling* of *kans*.

De waarschijnlijkheidsrekening, waar ik thans over zal spreken, is enerzijds een onderdeel van de zuivere wiskunde, anderzijds een onderdeel van de natuurwetenschappen, waartoe ik de toegepaste wiskunde ook reken (die heus niet ònzuiver behoeft te zijn).

Waarschijnlijkheidsrekening als onderdeel van de zuivere wiskunde bestaat in zekere zin pas sinds KOLMOGOROFF in 1933 als punt van uitgang een kort en bondig geformuleerd stelsel axioma's publiceerde. Sindsdien kan men het onderscheid tussen waarschijnlijkheidstheorie als zuivere wiskunde en waarschijnlijkheidstheorie als natuurwetenschap even goed begrijpen als het overeenkomstige onderscheid voor meetkunde. Waarschijnlijkheidstheorie en meetkunde als zuivere wiskunde zijn theorieën, die principieel niet aan de practijk getoetst kunnen worden. De axioma's zijn uitspraken, waar zekere niet nader gedefinieerde woorden of andere symbolen in voorkomen. Men leidt hieruit andere uitspraken over die symbolen af: de stellingen. Ten opzichte van en binnen het kader van de gebruikelijke of gebruikte logica en de gegeven axioma's zijn die stellingen juist.

Waarschijnlijkheidstheorie en meetkunde als natuurwetenschap zijn theorieën die slechts zin hebben voor zover ze aan de practijk getoetst geworden en bevestigd zijn. De niet nader gedefinieerde woorden in de zuiver wiskundige theorie krijgen in de natuurwetenschap een welgedefinieerde betekenis. De axioma's in de zuiver wiskundige theorie corresponderen met hypotheses in de natuurwetenschap. De stellingen corresponderen met natuurwetten. De natuurwetten worden getoetst aan de natuur. Wordt de natuurwet bij een experiment in overeenstemming met de natuur bevonden dan wordt het vertrouwen in de hypothese gesterkt. Is de natuur niet in overeenstemming met de natuurwet, dan wordt dit vertrouwen geschokt en vervalt de hypothese en daarmee de theorie.

Ik behoef U niet te vertellen dat de hypotheses van de Euclidische meetkunde als natuurwetenschap zo vaak bevestigd waren, dat een diep geloof in deze hypotheses ontstond, een geloof dat zelfs philosophen in de vorm van a priori kennis benaderden. Maar dit geloof bleek misplaatst en hoe duidelijker dit werd, des te duidelijker werd het onderscheid tussen meetkunde als zuivere wiskunde en als natuurwetenschap. Teneinde Uw gemoedsrust niet te verstoren, merk ik op, dat de afwijkingen van de Euclidische meetkunde in het dagelijks leven tot dusver te verwaarlozen zijn.

Ik behoef U ook niet te vertellen dat de hypotheses van de elementaire waarschijnlijkheidstheorie thans zo vaak bevestigd geworden zijn dat in elk geval dat de theorie schijnt te logenstraffen, de fout gezocht wordt niet in de hypotheses van de waarschijnlijkheidstheorie maar ergens anders, waar dan ook. In de practijk mag men dan ook geen schade verwachten indien de begrippen axioma en hypothese hier verward worden.

Na de axiomatische opbouw van de meetkunde in moderne vorm ontstond echter een algemene behoefte aan een betere fundering van alle delen van de wiskunde. In het bijzonder werd de tijd rijp voor een axiomatische ontwikkeling van de waarschijnlijkheidsrekening. In die waarschijnlijkheidstheorie beschouwt men een puntverzameling en ook deelverzamelingen daarvan. Zo'n deelverzameling is per definitie een gebeurtenis. In de verzameling van 52 abstracte punten, waaraan we bijvoorbeeld de namen „schoppen aas" e.d. geven, is de deelverzameling, bestaande uit de dertien punten met voornaam „schoppen" een gebeurtenis. Een waarschijnlijkheidsverdeling of kansverdeling is een functie, die aan elke in zekere zin redelijke deelverzameling, dat is aan elke gebeurtenis, een getal tussen 0 en 1 toevoegt en welke functie nog aan andere eisen moet voldoen, waarop ik thans niet inga. Hiermee zijn de eerste grondbegrippen in de zuiver wiskundige waarschijnlijkheidstheorie vastgelegd. In de natuurwetenschappelijke theorie wordt vervolgens een verband gelegd tussen echte gebeurtenissen en gebeurtenissen van de bovengenoemde soort. Een hypothetische kansverdeling zal bevredigend genoemd worden, indien het getal (de kans), dat deze aan een gebeurtenis toevoegt, bijna gelijk is aan de relatieve frequentie van het gebeuren van de gebeurtenis bij herhaalde experimenten.

Nadat ik symmetrie en invariantie besproken heb, en vervolgens enige opmerkingen over waarschijnlijkheidstheorie gemaakt heb, zal ik U thans laten zien, dat in de waarschijnlijkheidstheorie ook van symmetrie en invariantie sprake kan zijn. Ik moet daartoe de begrippen symmetrie en invariantie ook met betrekking tot functies vastleggen. Een functie, die aan punten of zekere collecties punten uit een puntverzameling getalwaarden toekent, zal symmetrisch heten, indien er geoorloofd verklaarde puntverwisselingen in het definitiegebied zijn, welke ieder punt of collectie punten overbrengt in een punt of collectie met dezelfde functie-waarde.

Voorbeelden zijn er vele. Allereerst noem ik de functies van één veranderlijke (x). De geoorloofde verwisseling van punten x (dat zijn dus getallen in dit geval) kan die zijn, welke elk getal in het tegengestelde getal doet overgaan. Functies symmetrisch (invariant) ten opzichte van deze verwisseling hebben een aparte naam. Zij heten *even functies*. Zo'n functie $f(x)$ heeft dus de eigenschap: $f(x) = f(-x)$. De geoorloofde verwisseling van punten kan ook die zijn, waarbij een getal x overgaat in een getal a groter, dus in $x + a$ (a constant). Functies invariant tegen zo'n verwisseling heten *periodieke functies*. Die functies hebben de eigenschap $f(x + a) = f(x)$.

Is de functie er een van twee veranderlijken, dan kan de geoorloofde verwisseling die zijn, welke in het vlak van coördinaten voorgesteld wordt door de spiegeling ten opzichte van de diagonaal van het eerste kwadrant bepaald door de coördinaatassen. Functies symmetrisch ten opzichte van deze puntverwisseling hebben de naam „*symmetrische functie van twee veranderlijken*" ($f(x,y) = f(y,x)$).

Thans kom ik terug op het reeds eerder genoemde voorbeeld van 52 abstracte punten. De geoorloofde permutaties zullen alle permutaties van de 52 punten zijn. Gevraagd wordt een functie die symmetrisch of invariant is ten opzichte van alle permutaties. Het is duidelijk dat zo'n functie aan elk van de 52 punten dezelfde functiewaarde moet toekennen.

Zijn de 52 punten die van een puntverzameling in de waarschijnlijkheidsrekening, dan zijn er zeer veel kansverdelingen gedefinieerd op alle deelverzamelingen van de 52 punten, die aan alle axioma's van Kolmogoroff voldoen. Maar wanneer we aan de kansverdeling de zo juist genoemde eis van invariantie ten opzichte van alle permutaties opleggen, dan blijft slechts één mogelijkheid, namelijk die waarbij aan elk punt de getalwaarde 1/52 toegevoegd is.

Neemt men de invariantie-eis als hypothese aan bij trekkingen uit een spel kaarten, dan blijkt de kans op trekking van een bepaalde kaart, welke ook, 1/52 te zijn. De kansen om verschillende kaarten te trekken zijn dus even groot. Deze gevolgtrekking van de invariantie-hypothese werd door *Laplace* als uitgangspunt genomen voor dit en andere gevallen.

Ik wil tenslotte nog een ander soortgelijk, maar continu, voorbeeld behandelen, namelijk de *paradox van Bertrand*. Eerst zal ik de vraag, zoals die geluid heeft, zuiver wiskundig stellen: Hoe is de kansverdeling van de koorden van een cirkel in een Euclidisch vlak? Deze vraag heeft aldus gesteld geen zin. Men kan er oneindig veel antwoorden op geven, die alle even goed zijn. Men kan dus oneindig veel kansverdelingen bedenken die aan de axioma's van KOLMOGOROFF voldoen. Nu nodigt men U echter uit plausibele symmetrie-eisen voor te stellen, zodat het aantal mogelijkheden beperkt wordt, eventueel tot één antwoord. We kunnen dan bijvoorbeeld als volgt redeneren:

Een koorde is bepaald door zijn eindpunten. Aan de kansverdeling van punten op de cirkelomtrek stellen we de eis van invariantie tegen draaiingen van de cirkel om zijn middelpunt. De kansverdeling van puntenparen op de cirkelomtrek, en dus van koorden volgt hieruit. Deze wiskundige theorie genomen als hypothese, kan door het experiment bevestigd worden, als we tenminste het goede experiment erbij kiezen. Zo'n experiment is het volgende: Men laat tweemaal een knikker met grote beginsnelheid in een cirkelvormig horizontaal gesteld gootje rollen, en bepaalt de koorde die de twee eindstanden van de knikker verbindt. In plaats van een knikker kan men ook het uiteinde van een draaibare wijzer nemen. Herhaling van dit experiment levert een relatieve frequentie-verdeling, die overeenstemt met de op grond van de invariantie-hypothese theoretisch afgeleide kansverdeling.

We kunnen echter ook op een andere manier redeneren en een andere kansverdeling krijgen die ook door een experiment, een ander experiment, bevestigd kan worden. De kansverdelingen die we zo vinden zijn dus niet gelijk.

En de paradox van Bertrand was: hoe is dat mogelijk? Men had dus het onjuiste gevoel dat er een ideale kansverdeling van de koorden van een cirkel moest zijn. De wijze waarop ik U deze paradox thans opgediend heb, was zodanig dat het paradoxale niet de gelegenheid kreeg om tot zijn recht te komen. De waarschijnlijkheidsrekening geeft de paradox van BERTRAND thans geen schijn van kans meer. Deze paradox is het uiteindelijke pad van vele paradoxen gegaan: zij is als paradox gestorven, en het kost zelfs moeite om zich in de gedachtensfeer te verplaatsen, waarin deze paradox eertijds leefde.

Zeer gewaardeerde toehoorders,

Aan het einde van mijn rede gekomen, zij het mij vergund mijn eerbiedige dank te betuigen aan Hare Majesteit de Koningin voor mijn benoeming tot Hoogleraar.

Mijne Heren Curatoren,

Op Uw voordracht werd ik tot dit ambt benoemd. Voor het vertrouwen dat U mij hiermee geschonken heeft zeg ik U dank. Ik hoop het tot Uw en aller voldoening met mijn werk te beantwoorden.

De taak van de hoogleraar in de wiskunde aan de Landbouwhogeschool acht ik veelzijdig. Een zijde daarvan is het onderwijs, dat gericht moet zijn op de training van het kritisch vermogen van de studenten, en op het doen ontwikkelen van al die wiskundige begrippen welke de landbouwkundige ingenieur in de voor hem liggende dertig jaren eventueel nodig zal kunnen hebben. Er kan vastgesteld worden dat de behoefte aan wiskundig meer begaafde en geschoolde landbouwkundigen groeit; in het bijzonder denk ik hierbij aan landbouwkundigen met een intensieve speciale opleiding in wiskunde en statistiek.

Een tweede zijde van mijn taak is mijn oriëntering in het probleem van de wiskundige verwerking van de vele getallen, die dagelijks bij landbouwkundige instituten van de Landbouwhogeschool en elders ontstaan. Hier is onmisbaar een voortdurend kritisch onderzoek van doelstelling en gebruikte methode, wil men de verdrinkingsdood ontgaan. Tevens is begrip van en ontwikkeling van nieuwe methoden noodzakelijk. Het aantal mensen dat in deze richting werkt is klein. Het aantal mensen dat in deze richting thans oorspronkelijk werk kan verrichten ook. Ik hoop met medewerking van alle betrokkenen meer belangstelling voor dit terrein te kunnen wekken.

Een derde aspect van mijn taak, het beoefenen en dienen van de wiskunde, zal mij steeds voldoende aantrekken.

Mijne Heren Hoogleraren, Leden van de Senaat van de Landbouwhogeschool,

U zeg ik dank voor het advies dat tot mijn benoeming leidde, en voor de hartelijke wijze waarop gij mij in Uw midden opgenomen hebt.

Dames en Heren Lectoren, Docenten, Wetenschappelijke Medewerkers, Ambtenaren, Beambten,

Ook de eerste kennismaking met U heb ik tot dusver bijzonder gewaardeerd.

Hooggeleerde Van Uven,

Gij hebt het wiskunde-onderwijs aan de Landbouwhogeschool uit niets opgebouwd, en gij zijt er in geslaagd dit onderwijs op een hoog niveau te brengen, en daarmee een grote invloed uit te oefenen. Ook aan wetenschappelijk werk hebt gij U met succes gewijd. Ik dank U voor de vele gesprekken die U mij toestond, en waarin ik de gang van zaken, zoals die onder Uw leiding was, leerde kennen. Ik dank U voor de hartelijkheid en grote bereidwilligheid waarmee Gij mij tegemoetgetreden zijt en ook voor de nadruk waarmee Gij mij herhaaldelijk aangeraden hebt mijn eigen weg in de materie te zoeken. Dit zal ik doen en ik hoop daarmee een U waardig opvolger te worden.

Hooggeleerde Van der Woude,

Van de velen die mij geïnspireerd hebben voor de wiskunde zijt gij de belangrijkste. Nog steeds wanneer ik U bezoek, wordt mijn enthousiasme door U aangewakkerd, misschien zonder dat gij U ervan bewust zijt. Ik kan U daarvoor niet dankbaar genoeg zijn.

The Institute for Advanced Study te Princeton, New Yersey, in de Verenigde Staten,

Heeft mij de gelegenheid geschonken mij na mijn universitaire studie twee jaren volkomen ongestoord aan de wiskunde te wijden. Deze jaren zijn voor mij van zeer grote waarde geweest. Ik acht dit het juiste moment om daar nogmaals mijn dank voor uit te spreken. Die dank geldt in het bijzonder Professor OSWALD VEBLEN.

Mijne Heren Hoogleraren en Instructeurs bij de afdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool,

De korte periode, waarin ik met U samenwerkte, is voor mij prettig en leerzaam geweest. Ik heb enige vrienden onder U hervonden en gevonden, en hoop deze in de toekomst te behouden.

Dames en Heren Wiskundigen,

De band die ons bindt is de Wiskunde. Ik hoop het contact met U te behouden en te verstevigen, persoonlijk zowel als door middel van Het Wiskundig Genootschap en het Mathematisch Centrum.

Dames en Heren Studenten,

Wiskunde wordt lang niet door iedereen bemind. Voor velen betekent het een voortdurende onaangename worsteling. Velen denken bij wiskunde aan examens en zij vrezen het selectief vermogen daarvan.

In mijn colleges hoop ik U met een ander aspect van de wiskunde te doen kennismaken. Ik hoop U herhaaldelijk de sensatie van het begrijpen te doen beleven. Deze sensatie acht ik de beste basis voor Uw studie, zelfs al wenst U de wiskunde slechts te beoefenen omdat het vak verplicht of nuttig om zijn toepassingen is.

Uw medewerking zal ik op prijs stellen.

Ik heb gezegd.