

NN31545.0733

NOTA 733

april 1973

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

HET GEBRUIK VAN DE NEGATIEF-EXPONENTIELE KANS-
VERDELING VOOR AFVOERGEGEVENS EN VOOR HET
BEPALEN VAN DE MAATGEVENDE AFVOER

DEEL II

TOEPASSING OP AFVOERGEGEVENS VAN DE
OUDER IJSSSEL TE DOESBURG

ir Ph.Th. Stol

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatie-
middelen, dus geen officiële publikaties.
Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een
eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende
discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen
de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek
nog niet is afgesloten.
Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut
in aanmerking



1789021

I N H O U D

	Blz.
1. INLEIDING	1
2. BASISGEGEVENS	1
3. HET EFFECTIEF AANTAL GEGEVENS	3
4. UITGEVOERDE BEREKENINGEN EN BETROUWBAARHEID	5
5. GRAFISCHE WEERGAVE KANSVERDELINGEN	7
6. SAMENVATTING BETROUWBAARHEIDSUITSPRAKEN	11
7. HET BENODIGD AANTAL GEGEVENS TER REALISERING VAN EEN GEWENSTE BETROUWBAARHEID	12
8. OVERSCHRIJDINGSKANSSEN VAN VOORWAARDELIJKE VERWACHTINGEN	16
9. TOEPASSING OP DE MAATGEVENDE AFVOER	17
10. BEREKENING VAN HET TE VERWACHTEN AANTAL OVERSCHRIJDINGEN	19
11. BETROUWBAARHEIDSGRENZEN VOOR AANTALLEN OVERSCHRIJDINGEN	20
12. COMBINATIE VAN DAGAFVOEREN EN WINTERTOPPEN VERDELINGEN	22
12.1. Theoretische beschouwing	24
12.2. Numerieke uitkomsten	29
12.3. Toepassing op de Oude IJssel	31
13. DIRECTE BEPALING VAN DE GEMIDDELDE OVERSCHRIJDINGSDUUR	32
14. HET GEBRUIK VAN HERHALINGSREEKSEN	34
15. DE KEUZE VAN HET AANTAL GEBEURTENISSEN	35
15.1. Aantal constant	35
15.2. Aantal stochastisch	36
15.3. Onderzoek bijzondere gevallen	38
16. SAMENVATTING EN CONCLUSIES	40
17. VERANTWOORDING	41
LITERATUUR	42

1. INLEIDING

In nota 724 (deel I over dit onderwerp) werden de theoretische achtergronden van de exponentiële kansverdeling behandeld. In deze nota zal nader worden ingegaan op de praktische toepassingen van deze verdeling.

Op verzoek van de Provinciale Waterstaat voor Gelderland werd hiervoor gebruik gemaakt van afvoergegevens van de Oude IJssel. Deze gegevens zullen nader worden geanalyseerd en in het volgende als voorbeeld van berekening dienen.

2. BASISGEGEVENS

De gebruikte gegevens hebben betrekking op de om 8.00 h vastgestelde afvoer van de Oude IJssel te Doesburg. De gegevens zijn uitgedrukt in m^3/sec en gelden als gemiddelde dagintensiteiten. Deze zullen met de naam 'afvoer' worden aangeduid.

De periode waarover de gegevens werden gebruikt bestreek de maanden oktober tot en met maart van de jaren 1964 tot en met 1967.

Het materiaal werd in twee groepen gegevens ingedeeld die genoemd werden

1. dagelijkse afvoeren en
2. wintertoppen

ad 1. De dagelijkse afvoeren bestonden uit de vastgestelde afvoeren zoals boven werd aangegeven.

ad 2. De wintertoppen werden door de Provinciale Waterstaat uit de dagelijkse afvoeren geselecteerd en als zodanig gedefinieerd. De keuze is enigermate subjectief. De selectieprocedure is niet vastomschreven wat consequenties heeft voor de verdere bewerking van de gegevens en interpretatie van de uitkomsten.

Een voorstelling van deze dagelijkse afvoeren en de hieruit geselecteerde wintertoppen staat, voor een willekeurig deel uit het materiaal, weergegeven in fig. 1, voor februari en maart 1966.

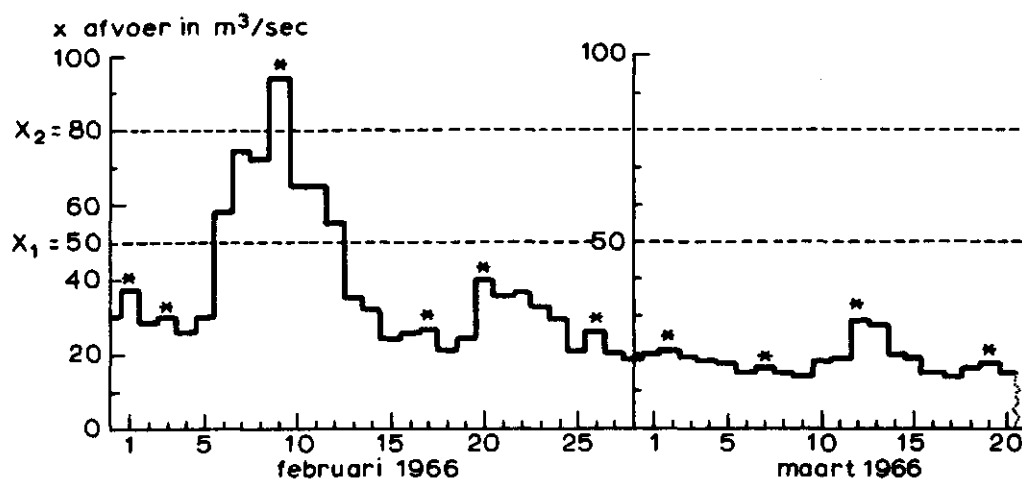


Fig. 1. Dagafvoeren van de Oude IJssel te Doesburg en daaruit geselecteerde wintertoppen (*) voor twee maanden

De figuur maakt de selectieprocedure plausibel doch tevens blijkt dat het begrip 'wintertoppen' op deze wijze niet eenduidig gedefinieerd is.

Het totaal aantal gegevens voor dagafvoeren en wintertoppen staat vermeld in tabel 1.

Tabel 1. Aantallen dagafvoeren en wintertoppen in de 6 maanden oktober tot en met maart voor drie jaren van onderzoek

Jaar	Dagafvoeren (d)	Wintertoppen (w)
1964 - 1965	182	31
1965 - 1966	182	38
1966 - 1967	182	37
Totaal	546	106
gemiddeld ($\bar{N}$)	182	35

Hoewel het eigenlijke materiaal van dit meetpunt loopt vanaf 1954 werd een beperkt aantal jaren geselecteerd om vergelijking met andere, minder lang opgemeten, meetpunten later mogelijk te maken.

3. HET EFFECTIEF AANTAL GEGEVENS

Zoals uit fig. 1 reeds blijkt, vertonen de gegevens een belangrijke onderlinge afhankelijkheid of autocorrelatie. Een duidelijk beeld hiervan wordt gegeven in het tweede interimrapport van de Werkgroep Afvloeiingsfactoren (1970 -23-). In dit rapport wordt de autocorrelatie van de waarnemingen gegeven bij verschuiving van 1, 2, ..., 10 dagen, voor het t o t a l e waarnemingsmateriaal dus de zomermaanden inbegrepen. Bij verschuiving van 1 dag bedraagt $r = 0.843$.

Het bijbehorend correlogram staat uitgezet in fig. 2.

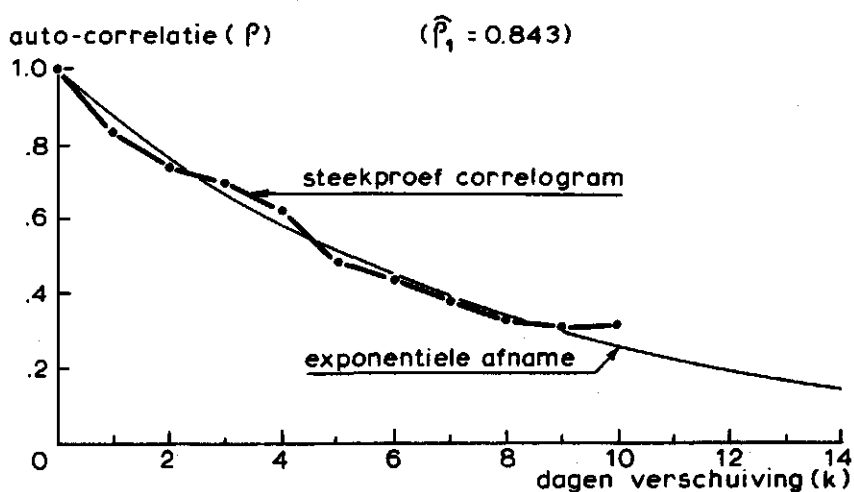


Fig. 2. Correlogram voor afvoeren van de Oude IJssel te Doesburg.
Daggegevens april 1954 tot en met maart 1969.

De figuur geeft aanwijzingen dat een exponentiële afname van de autocorrelatie niet onaannemelijk is zodat voor de afvoer x op tijdstip t het volgende model kan gelden

$$\underline{x}_t = \rho_1 \underline{x}_{t-1} + \underline{\varepsilon}_t \quad (3.1)$$

waarin de correlatie-coëfficiënt ρ_1 dus geschat wordt op 0.843 en $\underline{\varepsilon}$ een toevalsterm is. De eigenschappen van $\underline{\varepsilon}$ worden weergegeven door $E(\underline{\varepsilon}_t) = 0$ en $(\underline{\varepsilon}_p, \underline{\varepsilon}_q)$ ongecorreleerd voor $p \neq q$. Dit model is het Markov-I model waarvoor

$$\rho_k = \rho_1^k$$

waarin k het aantal dagen verschuiving voorstelt (KENDALL and STUART, deel 3 -405-).

Voor dit model geldt de formule waarmee het effectieve aantal gegevens kan worden berekend zoals besproken in deel I van deze nota, en wel

$$n' \approx n \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \quad (3.2)$$

Voor de hier behandelde gegevens werd niet opnieuw een correlogram bepaald. Voor de wintertoppen is dit trouwens niet goed mogelijk aangezien deze selectief en niet equidistant zijn wat de interpretatie van de uitkomsten bemoeilijkt. Aangenomen is dat de dagafvoeren in de winter wat minder gecorreleerd zijn dan in de zomer terwijl voor de wintertoppen het laagst gevonden correlatieniveau werd aangehouden. Hierbij is ervan uitgegaan dat de selectie de autocorrelatie verlaagt. De uitkomsten zijn dan

$$n'_d \approx 546 \frac{1 - 0.8}{1 + 0.8} = 60.7 \quad (\text{dagafvoeren})$$

$$n'_w \approx 106 \frac{1 - 0.3}{1 + 0.3} = 57.1 \quad (\text{wintertoppen})$$

Eenvoudigheidshalve is nu aangenomen dat $n'_d = n'_w = 60$.

4. UITGEVOERDE BEREKENINGEN EN BETROUWBAARHEID

De parameterwaarden kunnen worden geschat uit het totaal aantal gegevens. Betrouwbaarheden worden berekend met het effectieve aantal gegevens.

De resultaten verkregen met de in deel I behandelde formules staan weergegeven in tabel 2 en 3.

In tabel 2 worden de uitkomsten gegeven van de parameterschattingen. De M.L. en de zuivere schatter zijn van dezelfde orde van grootte wat met deze grote aantallen gegevens te verwachten was. De schatter voor $\lambda = 1/s$ geeft in beide gevallen een wat afwijkende doch goed met de andere schattingen overeenkomende waarde. Wel valt op dat voor de wintertoppen de gemiddelde afvoer belangrijk groter is dan van de dagafvoeren, resulterend in een lagere waarde van λ , zodat $\lambda_w < \lambda_d$.

Tabel 2. Uitkomsten van berekeningen met afvoeren van de Oude IJssel te Doesburg
oktober tot en met maart 1964-1967

Schattingen parameterwaarden			
Berekende grootheid	Formule uit deel I	Dagafvoeren (d)	Wintertoppen (w)
n		546	106
$\sum x_i$		11050.06	2965.62
$\bar{x}$		20.238	27.978
$\hat{\lambda}$ (M.L.)	(7.3)	0.049412	0.035743
$\bar{\lambda}$ (zuiver)	(8.4)	0.049321	0.035406
s^2 (zuiver)		437.89	747.73
s		20.926	27.345
1/s	(7.2)	0.04779	0.03657
$P(\underline{x} \geq 1/\lambda)$	(5.2)	0.3679	0.3679

Voor de kansverdeling kan dus worden geschreven

$$P(\underline{x}_d \geq x) = e^{-0.0494 x} \quad (4.1)$$

$$P(\underline{x}_w \geq x) = e^{-0.0357 x}$$

In tabel 3 staan de berekeningen uitgevoerd die leiden tot de constructie van betrouwbaarheidsintervallen.

Tabel 3. Uitkomsten van berekeningen met afvoeren van de Oude IJssel te Doesburg
oktober tot en met maart 1964-1967

Berekening betrouwbaarheidsintervallen			
Berekende grootheid	Formule uit deel I	Dagafvoeren (d)	Wintertoppen (w)
n'	§ 15	60	60
$\sqrt{n'}$		7.746	7.746
$\hat{\lambda}_w$	(7.3)	0.0357	-
$\hat{\lambda}(1 - 1.96/\sqrt{n'})$	(10.2)	0.0369	0.0267
$1/s$	(7.2)	0.0478	-
$\hat{\lambda}$	(7.3)	0.0494	0.0357
$1/s$	(7.2)	-	0.0366
$\hat{\lambda}(1 + 1.96/\sqrt{n'})$	(10.2)	0.0619	0.0447
$\hat{\lambda}_d$	(7.3)	-	0.0494
x voor P = 100 %	(3.7)	0	0
x voor P = 1 % bij			
λ = ondergrens	(3.7)	124.80	172.47
λ = gemiddeld	(3.7)	93.22	128.99
λ = bovengrens	(3.7)	74.39	103.02
K.S.-toets			
D (95 %)	(11.5)	0.175	0.175
d (95 %)	(11.6)	0.248	0.248

Uit tabel 3 valt op te maken dat zowel voor dagafvoeren als voor wintertoppen de bewering dat λ , gevonden uit $1/s$, ook een schatting is van de populatie parameter niet behoeft te worden verworpen. In beide gevallen ligt deze waarde in de berekende betrouwbaarheidsintervallen dus

$$\hat{\lambda}(1 - 1.96/\sqrt{n'}) < \frac{1}{s} < \hat{\lambda}(1 + 1.96/\sqrt{n'})$$

Dit betekent dat aan deze eigenschap van de exponentiële verdeling, namelijk verwachting en standaardafwijking gelijk, is voldaan.

Het betrouwbaarheidsinterval, berekend voor een niet verder gemotiveerde overigens conventionele waarde van 5 % sluit niet de schatting van λ voor de andere in, namelijk

$$\hat{\lambda}_w < \hat{\lambda}_d(1 - 1.96/\sqrt{n'_d})$$

en

$$\hat{\lambda}_w(1 + 1.96/\sqrt{n'_w}) < \hat{\lambda}_d$$

De volgende conclusies kunnen worden getrokken.

De kansverdeling van de dagafvoeren en van de wintertoppen kan passend met een exponentiële verdeling worden beschreven. De kansverdeling voor de wintertoppen behoort wel tot hetzelfde type maar heeft een significant andere parameterwaarde.

In deel I is toegelicht dat de voorwaardelijke exponentiële verdeling dezelfde parameterwaarde heeft als de absolute exponentiële verdeling waar hij van afgeleid is. Dit betekent dus dat niet de wintertoppen globaal de toppen boven een niveau x_0 voorstellen, maar dat door de toegepaste selectie een keuze is gedaan uit een deelpopulatie van de dagafvoeren welke specifieke eigenschappen blijkt te bezitten

5. GRAFISCHE WEERGAVE KANSVERDELINGEN

In de fig. 3 en 4 staan de voorgaande resultaten grafisch weergegeven.

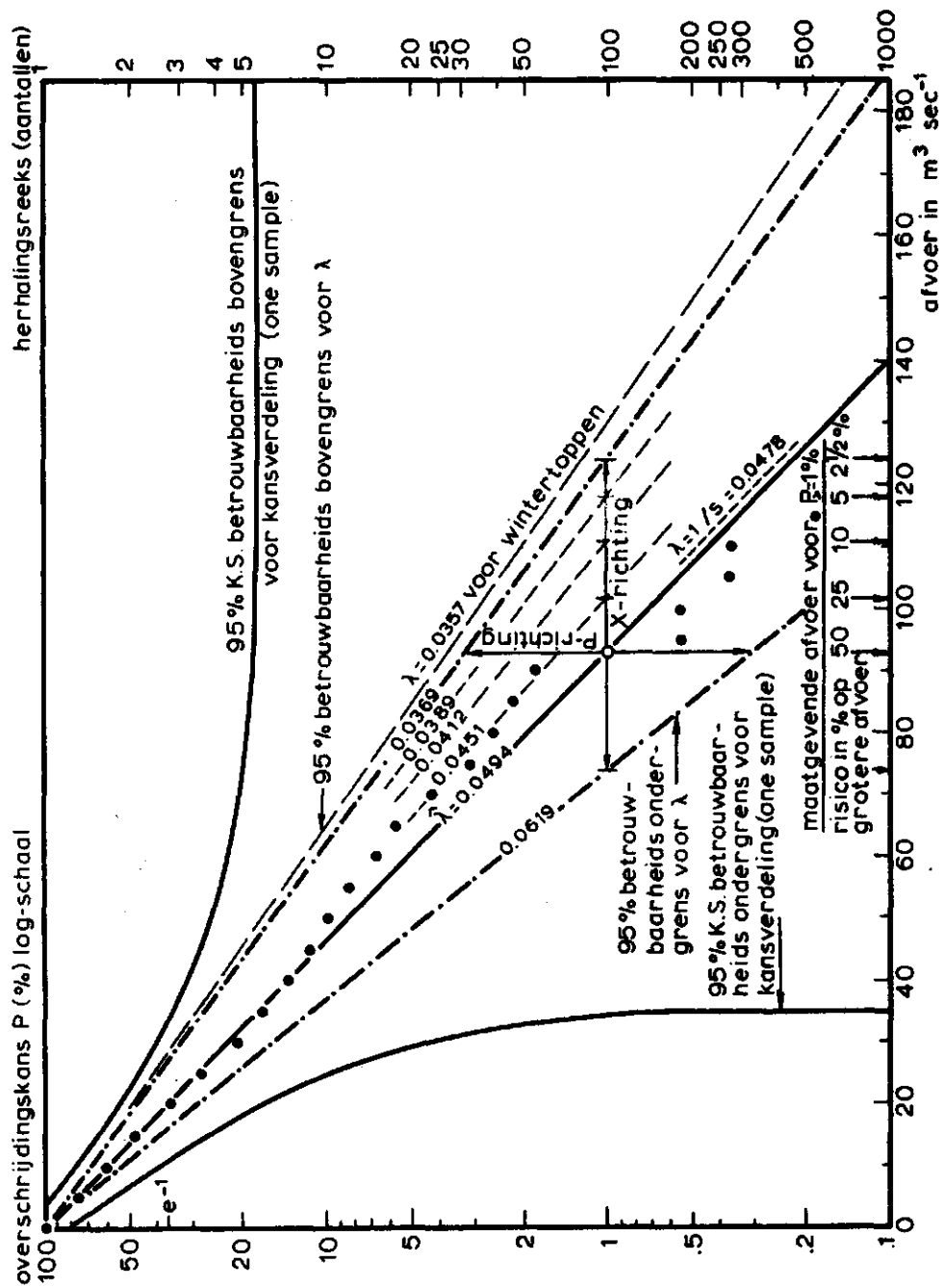


Fig. 3. Afvoerfrequentie Oude IJssel te Doesburg

Dagelijkse gegevens (n = 546)

Effectief aantal gegevens $n' = 60$

oktober tot en met maart, 1964 - 1967

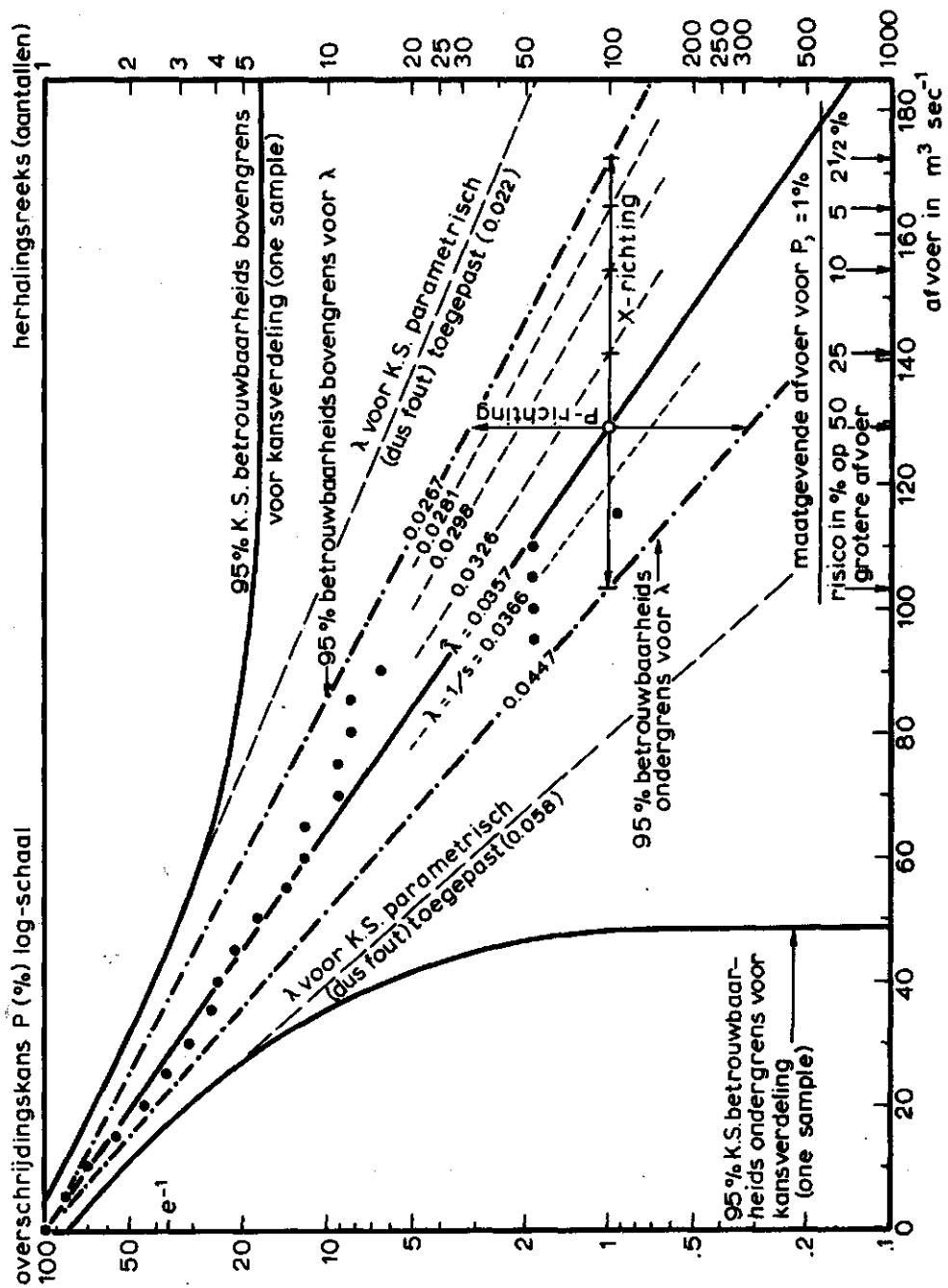


Fig. 4. Afvoerfrequentie Oude IJssel te Doesburg.

Geselecteerde wintertoppen (n = 106)

Effectief aantal gegevens n' = 60

oktober tot en met maart, 1964 - 1967

De gegevens zijn uitgezet op half-logaritmisch papier. Door het grote aantal gegevens zijn alleen afvoeren die een veelvoud van $5 \text{ m}^3/\text{sec}$ bedragen uitgezet. Als plotting position voor de empirische frequenties is gebruikt de verwachtingswaarde

$$\frac{i}{n+1} \quad i = 1, \dots, n$$

Zowel de betrouwbaarheidsintervallen voor λ als voor de gehele cumulatieve kansverdeling volgens de K.S. (Kolmogorov-Smirnov)-toets staan ingetekend.

De K.S.-betrouwbaarheidsintervallen zijn uitgezet ten opzichte van de aangepaste exponentiële kansverdeling. De afstand tussen de waarnemingen en de curve, gemeten in de richting van de kansschaal is overal $\leq |D|$ zodat een verdeling van dit type niet verworpen behoeft te worden, tegen het alternatief dat een andere verdeling zou gelden.

Het valt op dat in fig. 3 de parametercurve voor de wintertoppen wel buiten het betrouwbaarheidsgebied voor λ valt (zie ook tabel 3) maar binnen het gebied van de K.S.-toets. Dit verschil berust erop dat de K.S.-toets parametervrij is en toetst tegen elke andere alternatieve verdeling. De toets op λ toetst de parameterwaarde gegeven de verdeling, en is voor dit geval dus scherper of zoals gezegd wordt meer onderscheidend.

In fig. 4 staan nog de raaklijnen aan de K.S.-grenzen ingetekend. Men zou kunnen redeneren dat - aangezien de exponentiële verdeling zich als een rechte manifesteert - op deze wijze een betrouwbaarheidsinterval voor de kansverdeling wordt verkregen afgeleid uit de K.S.-toets. Nu wordt de K.S.-toets echter parametrisch gehanteerd en is niet bekend met welke betrouwbaarheidskansen de raaklijnen moeten worden becijferd. Deze toepassing leidt dus niet tot een resultaat omdat het beslissingscriterium nu niet meer gedefinieerd is.

In de figuren staat aangegeven hoe de betrouwbaarheidsintervallen voor λ tevens gebruikt mogen worden (zie pijlen kruis).

Bij een gegeven afvoer kunnen de bijbehorende overschrijdingskansen die aannemelijk zijn in de p-richting worden afgelezen. Bij een

gegeven overschrijdingskans kunnen de aannemelijke waarden van de afvoer worden afgelezen in de x -richting.

Voorbeelden

Een afvoerhoeveelheid van $x = 100 \text{ m}^3/\text{sec}$ voor dagafvoeren bijvoorbeeld (fig. 3) heeft een geschatte overschrijdingskans van 0.7 %. Beweerd kan worden dat de werkelijke kans zal liggen tussen 0.2 % en 2.4 %. Deze bewering heeft een kans van 5 % om fout te zijn.

Een overschrijdingskans van 2 % komt overeen met een geschatte maatgevende afvoer van $x = 79 \text{ m}^3/\text{sec}$. Beweerd kan worden dat de werkelijke maatgevende afvoer zal liggen tussen $62 \text{ m}^3/\text{sec}$ en $105 \text{ m}^3/\text{sec}$. Ook deze bewering wordt gedaan met een risico van 5 % dat een nog kleinere, respectievelijk nog grotere waarde van de afvoer gezien de steekproeffluctuaties, de bijbehorende kritieke waarde is.

6. SAMENVATTING BETROUWBAARHEIDSUITSPRAKEN

Uit het voorgaande kunnen een aantal conclusies worden getrokken. Er wordt op gewezen dat uitspraken aan de hand van betrouwbaarheidsintervallen geen bewijzen zijn. Wordt een nul-hypothese niet verworpen dan wil dat zeggen dat het tegendeel niet is aangetoond. Het resultaat is dan aannemelijk. Toch blijft er een kans, het risico, dat de gedane uitspraak niet waar is.

Op deze basis kan nu worden geconcludeerd dat zowel voor de dagafvoeren als voor de wintertoppen de exponentiële kansverdeling kan worden gebruikt. De experimentele uitkomsten sluiten nauw aan aan de aangepaste verdeling, bovendien maakt ook het gelijk zijn in de steekproef van gemiddelde en standaardafwijking de keuze aannemelijk.

Hoewel dus beide populaties tot hetzelfde type verdelingen behoort, is het onderlinge verschil in parameterwaarde significant. Was voor de wintertoppen de voorwaardelijke kansverdeling gebruikt, dan zou dezelfde waarde voor λ hebben moeten gelden. Nu dat niet het geval is moet de conclusie luiden dat een bijzondere selectie tot stand is gekomen die heeft geleid tot een steekproef van wintertoppen met specifieke eigenschappen.

7. HET BENODIGD AANTAL GEGEVENS TER REALISERING VAN EEN GEWENSTE BETROUWBAARHEID

De formules die betrekking hebben op het berekenen van het benodigd aantal gegevens ter realisering van een gewenste betrouwbaarheid worden hieronder nog eens weergegeven. De eerste formule geeft steeds de berekening van het aantal effectieve gegevens n uit een intervalbreedte I , de tweede formule geeft de inverse bewerking.

Voor parameter λ

$$n \geq \left(\frac{2T\lambda}{I_\lambda} \right)^2 \quad (7.1)$$

$$I_\lambda \geq \lambda \frac{2T}{\sqrt{n}} \quad (7.2)$$

Voor de maatgevende afvoer x

$$n \geq T^2 e^{2 \operatorname{arsinh}(x/I_x)} \quad (7.3)$$

$$I_x \geq \frac{2T\sqrt{n}}{n - T^2} x \quad (7.4)$$

Voor de overschrijdingskans p

$$n \geq \frac{(T \ln p)^2}{\left(\operatorname{arsinh} \frac{1}{2} I_p/p \right)^2} \quad (7.5)$$

$$I_p \geq |2 p \sinh(T \ln p/\sqrt{n})| \quad (7.6)$$

Voor het werkelijk aantal gegevens n_w

$$n_w = n \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \quad (7.7)$$

terwijl tenslotte het verband tussen overschrijdingskans p en afvoer x wordt weergegeven door

$$p = e^{-\lambda x}$$

Nadat voor één van de grootheden λ , x of p een betrouwbaarheidsinterval is vastgesteld, kan met de daarvoor geldende formule het aantal benodigde (effectieve) gegevens worden uitgerekend. Eventueel kunnen de overige formules worden gebruikt voor het berekenen van bij de overige twee grootheden behorende intervalbreedten.

Teneinde een indruk te geven van de orde van grootte zullen een aantal voorbeelden worden gegeven. Hierbij wordt aangenomen dat we, voor wintertoppen, geïnteresseerd zijn in een afvoerniveau met overschrijdingskans $p = 0.01$ zodat de relatie is (tabel 3)

$$\lambda = 0.0357 \quad \text{met} \quad p = 0.01 \quad \text{en} \quad x = 129 \text{ m}^3/\text{sec}$$

We kiezen $\alpha = 5 \%$ zodat $T = 1.96$ en vermelden nog dat $r = 0.30$ (§ 3).

Vaak wordt de vraag gesteld een uitkomst tot op 10 % nauwkeurig (bedoeld wordt 'betrouwbaar') te bepalen. Uitgaande hiervan zijn eisen f_i aangenomen van $f_1 = 0.10$, $f_2 = 0.20$, $f_3 = 0.25$ en $f_4 = 0.30$, plus min (+) de gekozen waarde.

De resultaten zijn samengevat in een aantal tabellen.

Het eerste deel van tabel 4 werd berekend met respectievelijk de formules (7.1), (7.3) en (7.5). Op basis van de aangenomen correlatie tussen wintertoppen groot $\hat{\rho} = 0.30$ volgt de berekening van het werkelijk aantal waar te nemen gebeurtenissen met behulp van (7.7). Op grond van het feit dat er gemiddeld per 5.2 gegevens een winter-top voorkomt en het winterhalfjaar 182 gegevens bevat (tabel 1) werd het laatste deel van de tabel berekend waarin aangegeven is hoe groot het aantal jaren minstens gekozen moet worden om aan de nauwkeurigheidseisen f te voldoen.

Het valt op dat de eisen voor λ en x parallel lopen. Dit is ook uit de grafische weergave onmiddellijk duidelijk (fig. 3 en 4). Gelijke verhoudingen worden op log-schaal namelijk weergegeven door evenwijdige lijnen. De divergerende lijnen voor betrouwbaarheidsintervallen in fig. 4 - voor wintertoppen - geven aan dat er voor p een maximale waarde te vinden moet zijn waarbij nog aan de eis f is voldaan bij het beschikbare aantal van 60 gegevens. Deze waarden zijn

Tabel 4. Berekening van het minimum aantal gegevens respectievelijk jaren benodigd voor het realiseren van een gegeven eis f in %, toegepast op wintertoppen (n afgerond op tientallen)

Combinatie $\lambda = 0.0357$ $x = 129 \text{ m}^3/\text{sec}$ $p = 0.01$	Minimum aantal effectieve wintertoppen (n) voor het realiseren van verschillende waarden van f			
	$\pm 10 \%$	$\pm 20 \%$	$\pm 25 \%$	$\pm 30 \%$
λ	380	100	60	40
x	390	100	70	50
p	8 170	2060	1330	930
λ x p	Minimum aantal waar te nemen wintertoppen (n_w) voor het realiseren van verschillende waarden van f			
λ	710	180	110	80
x	730	190	130	90
p	15 200	3840	2470	1730
λ x p	Minimum aantal jaren van waarneming voor het realiseren van de eis f			
λ	20	5	3	2
x	21	6	4	3
p	434	110	71	50
Maximale waarde voor p waarbij met 60 gegevens nog aan eis f is voldaan (afgerond)	0.60	0.35	0.30	0.22

zijn onderaan in tabel 4 toegevoegd.

Met het hier gebruikte materiaal ($n = 60$) viel dus een betrouwbaarheid te bereiken voor λ en x van plus of min 25 %. Wil men de eis stellen dat deze waarde tot 10 % moet worden teruggebracht, dan zal een analyse van gegevens over 20 jaar moeten worden uitgevoerd, overeenkomend met het verzamelen van ruim 700 gegevens.

Met het gebruikte materiaal wordt voor $p \geq 0.30$ aan de eis $f = 0.25$ voldaan.

Uit dit overzicht blijkt dat men over het algemeen voorzichtig

moet zijn met het formuleren van eisen van nauwkeurigheid voor lage overschrijdingskansen. Op het niveau van $p = 0.01$ moet reeds rekening worden gehouden met de beschikbaarheid van meer dan 100 jaar aan gegevens om aan niet te strenge eisen te kunnen voldoen (tabel 4).

Vervolgens werd nagegaan welke betrouwbaarheidsintervallen voor de overige twee grootheden verwacht kunnen worden wanneer er één gekozen is. Dit is gedaan in tabel 5.

Uit deze tabel volgt dat bij een eis $f = 10\%$ voor λ en x , de overschrijdingskans $p = 0.01$ een intervalbreedte heeft overeenkomend met plus en min 48 respectievelijk 47 % van dit kansniveau.

Tabel 5. Berekening van te verwachten minimale intervalbreedten I bij een gegeven eis f in %. Intervallen symmetrisch rond de gekozen waarde $\lambda = 0.0357$, $x = 129 \text{ m}^3/\text{sec}$ en $p = 0.01$

Eis $f = 10\%$ overeenkomend met	Berekende minimale breedten			Bij berekende I behorende f		
	I_λ	I_x	I_p	f_λ	f_x	f_p
$I_\lambda = 2f\lambda = 0.00714$	-	26.1	0.010	-	0.10	0.48
$I_\lambda^x = 2fx = 25.8$	0.00707	-	0.009	0.10	-	0.47
$I_p^x = 2fp = 0.002$	0.00155	5.6	-	0.02	0.02	-
eis $f = 20\%$						
$I_\lambda = 0.01428$	-	53.7	0.021	-	0.21	1.06
$I_\lambda^x = 51.6$	0.01375	-	0.020	0.19	-	1.01
$I_p^x = 0.004$	0.00308	11.2	-	0.04	0.04	-
eis $f = 25\%$						
$I_\lambda = 0.01785$	-	68.8	0.02846	-	0.27	1.42
$I_\lambda^x = 64.5$	0.01686	-	0.02628	0.24	-	1.31
$I_p^x = 0.005$	0.00384	13.9	-	0.05	0.05	-
eis $f = 30\%$						
$I_\lambda = 0.02142$	-	85.1	0.03730	-	0.33	1.86
$I_\lambda^x = 77.4$	0.01978	-	0.03301	0.28	-	1.65
$I_p^x = 0.006$	0.00459	16.6	-	0.06	0.06	-

8. OVERSCHRIJDINGSKANSEN VAN VOORWAARDELIJKE VERWACHTINGEN

Gevraagd kan worden naar wat aan afvoeren verwacht kan worden boven een bepaald niveau. In deel I (§ 6) werd aangetoond dat deze voorwaardelijke verwachting gelijk is aan de absolute verwachting boven het gekozen niveau. Tenslotte kan van deze hoeveelheid weer de overschrijdingskans worden bepaald.

Dit is uitgevoerd voor met $20 \text{ m}^3/\text{sec}$ oplopende niveaus, in tabel 6.

Tabel 6. Berekening van voorwaardelijke verwachtingen en hun absolute overschrijdingskans

Ondergrens x_0	Dagafvoeren		Wintertoppen	
	$x_0 + \frac{1}{\lambda}$ ¹⁾	$P(\underline{x} \geq x_0 + \frac{1}{\lambda}) \%$	$x_0 + \frac{1}{\lambda}$ ¹⁾	$P(\underline{x} \geq x_0 + \frac{1}{\lambda}) \%$
60	80.2	1.91	88.0	4.40
80	100.2	0.71	108.0	2.17
100	120.2	0.26	128.0	1.07
120	140.2	0.10	148.0	0.53
140	160.2	0.04	168.0	0.26
160	180.2	0.01	188.0	0.13
180	200.2	0.00	208.0	0.06
200	220.2	0.00	228.0	0.03
1) $1/\lambda$	20.2		28.0	
formules uit deel I	(6.2)	(6.3)	(6.2)	(6.3)

Uit deze tabel blijkt bijvoorbeeld bij een criterium voor de wintertoppen gelijk aan een afvoerhoeveelheid van $100 \text{ m}^3/\text{sec}$, dat de gemiddeld te verwachten hoeveelheid die dit bedrag overschrijdt $128 \text{ m}^3/\text{sec}$ zal bedragen. De gewone (absolute) overschrijdingskans van dit aantal bedraagt ruim 1 %. De conclusie luidt dus: de gemiddelde afvoer van de wintertoppen boven $100 \text{ m}^3/\text{sec}$ kan op $128 \text{ m}^3/\text{sec}$ worden gesteld; van alle wintertoppen zal een aantal van 1 % hogere waarden geven.

9. TOEPASSING OP DE MAATGEVENDE AFVOER

De berekening van betrouwbaarheidsintervallen voor λ kan als volgt een verdere toepassing vinden bij het vaststellen van de maatgevende afvoer.

Stel dat een plan gebaseerd moet worden op een afvoeroverschrijding die men hoogstens 1 x op 100 gevallen wil toelaten. Men stelt dus de overschrijdingskans $P_{>} \leq 0.01$ en vraagt naar de bijbehorende maatgevende afvoer.

Bij gebruik van de gemiddelde waarde $\hat{\lambda}$ is de kans 50 % dat men een hogere maatgevende afvoer had moeten toepassen. Wil men dit risico verkleinen, dan zal niet met $\hat{\lambda}$ maar met een andere aannemelijke waarde gewerkt moeten worden.

Voor de wintertoppen staan maatgevende afvoeren berekend in tabel 7 bij verschillende waarden van het te aanvaarden risico. In de fig. 3 en 4 staan de exponentiële kansverdelingen voor verschillende waarden van het aanvaarde risico ingetekend.

Uit deze tabel kan het volgende worden afgelezen (vergelijk met fig. 4).

Een plan voor waterafvoer kan gebaseerd worden op een overschrijdingskans $P_{>} \leq 0.01$. De maatgevende afvoer bij de gemiddelde waarde van bedraagt dan $129 \text{ m}^3/\text{sec}$. Gezien de steekproeffluctuaties heeft deze waarde een kans (risico) van 50 % om te laag uit te vallen. Wil men nu zijn risico verlagen dan zal een hogere afvoer moeten worden gekozen als maatgevend, bijvoorbeeld $155 \text{ m}^3/\text{sec}$. Het risico is nu teruggebracht tot 10 %. Andere waarden staan in tabel 7 gegeven of kunnen met de in tabel 7 vermelde formules worden uitgerekend.

De aldus vastgestelde maatgevende afvoeren hebben een overschrijdingskans $P_{>}$. Dit betekent dat op een nieuwe reeks waarnemingen ter lengte $\frac{1}{P_{>}}$ er gemiddeld één waarneming zal zijn die maatgevende afvoer overschrijdt. Dit betekent dat in zulk een nieuwe reeks waarnemingen er mogelijk 1, 2, ..., $\frac{1}{P_{>}}$ overschrijdingen kunnen optreden, maar gemiddeld is dit aantal 1. Gaat men ervan uit dat niet het gemiddelde maar het aantal overschrijdingen zelf

Tabel 7. Berekening van maatgevende afvoeren die met een kans $P_{\gamma} \leq 0.01$ overschreden mogen worden

Wintertoppen						
Berekende grootheid	Formule nr (deel I)	Risico α (%) dat de maatgevende afvoer te laag (te hoog) is gekozen				
		50	25	10	5	2½
T_{α} -waarde	normale verdeling	0	0.67	1.28	1.64	1.96
$T_{\alpha} / \sqrt{n'_w} (n' = 60)$		0	.0865	.165	.212	.253
Toepassing op afvoer						
$\hat{\lambda}_w (1 - T_{\alpha} / \sqrt{n'_w}) = \lambda_{\alpha}$	(10.1) éénzijdig	.0357	.0326	.0298	.0281	.0267
maatgevende afvoer $\frac{4.605}{\lambda_{\alpha}}$	(3.7)	129	141	155	164	172
Toepassing op aanvoer						
$\hat{\lambda}_w (1 + T_{\alpha} / \sqrt{n'_w}) = \lambda_{\alpha}$	(10.1) éénzijdig	.0357	.0388	.0416	.0433	.0447
maatgevende aanvoer $\frac{4.605}{\lambda_{\alpha}}$	(3.7)	129	119	111	106	103

niet meer dan 1 mag bedragen dan zal in dit geval van een kleinere overschrijdingskans moeten worden uitgegaan. Het bepalen hiervan kan plaatsvinden met tabellen gegeven door STOL (1972).

Er wordt hierbij herinnerd aan het feit dat bij een criterium waarbij een g e m i d d e l d aantal van 1 overschrijding wordt toegestaan de kans ruim 63 % is dat het werkelijk aantal binnen de herhalingsreeks 1 of meer is (indien de herhalingsreeks niet te klein wordt gekozen).

Voor het geval een maatgevende aanvoer voor wateraanvoerplannen moet worden vastgesteld zal men moeten weten op welke aanvoer men minstens kan rekenen en men zal een aanvoer kiezen die slechts met

met een kleine kans niet bereikt wordt. Men blijft hierbij aan de veilige kant door nu met de bovengrens van een betrouwbaarheidsinterval voor λ te werken en dus een ondergrens voor de rivierafvoer x . Op eenzelfde wijze als boven gedaan is kan een maatgevende afvoer bij van tevoren aangegeven risicopercentsages worden bepaald.

In tabel 7 worden in de laatste regels voorbeelden gegeven.

10. BEREKENING VAN HET TE VERWACHTEN AANTAL OVERSCHRIJDINGEN

De behandelde kansverdeling geeft aan welke fractie (resp. welk percentage) van het eerstvolgende te verzamelen gegeven een overschrijding te zien zal geven.

Voor slechts 1 eerstvolgend gegeven spreekt men over de kans, aangezien na realisatie alleen kan blijken dat dit gegeven wel of niet een overschrijding heeft veroorzaakt. Voor de eerstvolgende 100 gegevens is het aantal klaarblijkelijk 100 $P_{>}$ en voor N nieuwe gegevens $NP_{>}$.

Deze uitdrukking is de verwachtingswaarde van de binomiale verdeling. Is namelijk de overschrijdingskans bij een gekozen kansniveau $P_{>} = p_i$ dan is de kans dat in de eerstvolgende N waarnemingen k overschrijdingen zullen optreden gelijk aan

$$P(\underline{k} = k) = \binom{N}{k} p_i^k (1 - p_i)^{N-k} \quad (10.1)$$

De verwachtingswaarde van deze verdeling is Np_i zodat ook $NP_{>}$ een gemiddelde over een aantal uitkomsten is.

Het bovenstaande kan worden toegepast op de afvoergegevens van de Oude IJssel.

Hiertoe definieren we (zie tabel 1) voor winters

voor dagafvoeren $N_d = \bar{N}_d = 182$ (wintergemiddelde)

voor wintertoppen $\bar{N}_w = 35$ (wintergemiddelde)

Aantallen te verwachten overschrijdingen bij deze aantallen worden nu gegeven door

$$E(\underline{k}|N_d) = N_d p_i \quad (10.2)$$

$$E(\underline{k}|\bar{N}_w) = \bar{N}_w p_i \quad (10.3)$$

voor elk kansniveau p_i . Met behulp van (3.4 deel I) wordt dit, voor dagafvoeren bijvoorbeeld

$$E(\underline{k}|N_d) = N_d e^{-\lambda_d x} \quad (10.4)$$

en met (3.5 deel I)

$$\log E(\underline{k}|N_d) = \log N_d - (0.4343) \lambda_d x$$

Dit betekent dat op half-logaritmisch papier de curve die het verband geeft tussen $E(\underline{k})$ en p_i uit (10.2) kan worden verkregen uit de rechte van de kansverdeling door deze over een afstand $\log N_d$ te verschuiven zoals in fig. 5 is gedaan.

Uit deze figuur leest men bijvoorbeeld af dat verwacht kan worden dat een afvoerhoeveelheid van $100 \text{ m}^3/\text{sec}$ gemiddeld 1 x per winter zal worden overschreden. De werkelijke aantallen bleken te zijn: 1964/'65 = 0, 1965/'66 = 2, 1966/'67 = 1. (Hetgeen inderdaad maar overigens toevallig precies het gemiddelde 1 oplevert).

11. BETROUWBAARHEIDSGRENZEN VOOR AANTALLEN OVERSCHRIJDINGEN

De betrekking (10.2) respectievelijk (10.3) kan toegepast worden op (10.5 deel I). Er ontstaat in algemene vorm:

$$N e^{-\hat{\lambda}(1+1.96/\sqrt{n}) x} < N p < N e^{-\hat{\lambda}(1-1.96/\sqrt{n}) x}$$

Noemen we $E(\underline{k}|N_d) = \mu(k_d)$ dan wordt dit weer algemeen geschreven

$$N e^{-\hat{\lambda}(1+1.96/\sqrt{n}) x} < \mu(k_d) < N e^{-\hat{\lambda}(1-1.96/\sqrt{n}) x}$$

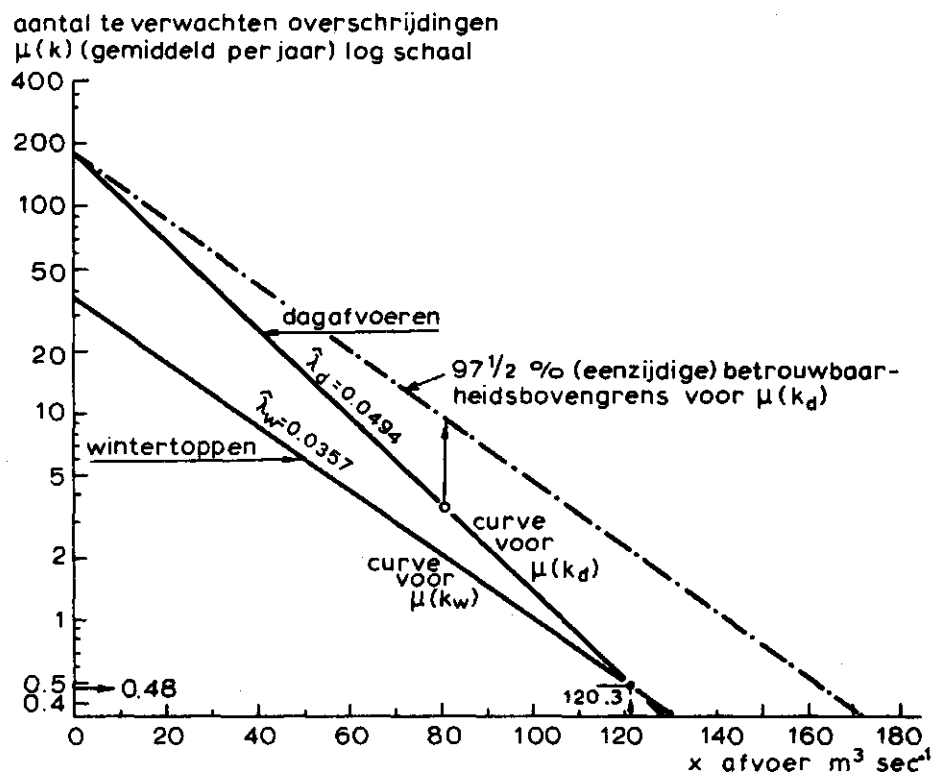


Fig. 5. Absolute afvoerfrequenties voor dagafvoeren en wintertoppen
 voor de Oude IJssel te Doesburg
 oktober tot en met maart, 1964-1967
 Gemiddeld aantal gegevens per seizoen

$$\bar{N}_d = 182 \quad \text{en} \quad \bar{N}_w = 35$$

met $n = n'$ het effectieve aantal gegevens. Hiermede is een 95% betrouwbaarheidsinterval voor $\mu(k_d)$ verkregen. Samengevat hebben we dus, voor bijvoorbeeld dagafvoeren, verdelingscurve

$$\log \mu(k_d) = \log N_d - (0.4343) \lambda_d x$$

bovengrens

$$\log \mu(k_d) < \log N_d - (0.4343) \hat{\lambda}_d (1 - 1.96/\sqrt{n_d}) x \quad (11.1)$$

waaruit volgt dat de betrouwbaarheidscurven over dezelfde afstand $\log N_d$ verschoven moeten worden als de verdelingscurve. Dit is gedaan in fig. 5, waarbij de bovengrens nu éénzijdig is genomen en dus een overschrijdingskans $\alpha = 2\frac{1}{2} \%$ heeft.

Een afvoer van $80 \text{ m}^3/\text{sec}$ zal gemiddeld ruim 3 x per winter overschreden worden. Echter kan worden beweerd dat dit gemiddelde hoogstens 9 zal bedragen.

Deze uitspraak wordt gedaan met een risico van $2\frac{1}{2} \%$ dat dit gemiddelde aantal groter zal zijn.

Door (11.1) op te lossen naar x komt er achtereenvolgens

$$\frac{\log \mu(k_d) - \log N_d}{(0.4343) \hat{\lambda}_d (1 - 1.96/\sqrt{n_d})} < -x$$

zodat

$$x < \frac{-\ln \frac{1}{N_d} \mu(k_d)}{\hat{\lambda}_d (1 - 1.96/\sqrt{n_d})}$$

overeenkomstig (10.7 deel I). Na delen van $\mu(k_d)$ door N_d mag de betrouwbaarheidscurve in fig. 5 ook 'horizontaal' worden toegepast. Dit betekent echter een toepassing volgens fig. 4, een gebruik van de curve dat reeds is toegelicht (zie par. 6).

12. COMBINATIE VAN DAGAFVOEREN EN WINTERTOPPEN VERDELINGEN

In de praktijk wordt van beide kansverdelingen gebruik gemaakt om uit de onderlinge samenhang conclusies te trekken. (WERKGROEP AFVLOEIINGSFACTOREN, 1970 fig. 6, 7 en fig. 24).

Hier zal nagegaan worden wat de theoretische aspecten van deze procedure is.

In de eerste plaats wordt opgemerkt dat de kansverdeling voor dagafvoeren en wintertoppen een verschillende waarde van λ hebben. Beide curven snijden elkaar in het punt (0, 1) (fig. 3 en 4). Na

herleiding op het gemiddeld aantal gegevens per seizoen zal de curve voor dagafvoeren meer verschuiven dan de curve voor wintertoppen en er ontstaat een snijpunt. De coördinaten van dit snijpunt worden gevonden uit de volgende relaties (zie 10.4):

$$\mu_d(x) = N_d e^{-\lambda_d x}$$

$$\mu_w(x) = \bar{N}_w e^{-\lambda_w x}$$

Op half-logarithmisch papier staat nu dus $\log \mu$ op de verticale as uitgezet en de rechte die wordt verkregen geeft nu dus de meetkundige plaats van punten die de verwachtingswaarde zijn bij een gegeven overschrijdingsniveau x .

Het snijpunt volgt uit gelijkstellen van deze vergelijkingen en wel

$$x = \frac{\ln(N_d/\bar{N}_w)}{\lambda_d - \lambda_w} \quad (12.1)$$

met

$$\mu = \exp\left(\frac{\lambda_d \ln \bar{N}_w - \lambda_w \ln N_d}{\lambda_d - \lambda_w}\right) \quad (12.2)$$

Uitgerekend voor het hier besproken voorbeeld wordt dit:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\ln(182/35)}{.0494 - .0357} = 120.3, \quad \mu = \exp\left(\frac{.0494 \ln 35 - .0357 \ln 182}{.0494 - .0357}\right) \\ &= \exp(-0.742) \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

(zie fig. 5).

De vergelijkingen (12.1) en (12.2) kunnen worden gebruikt om twee punten van beide curven te berekenen, deze zijn dus respectievelijk

dagafvoeren (0 , 82) en (120.3 , 0.48)
 wintertoppen (0 , 35) en (120.3 , 0.48)

waarmede beide lijnen kunnen worden ingetekend.

De procedure die nu in de praktijk wordt gevolgd verloopt als volgt.

Bij een bepaalde waarde van de afvoer, zeg x_i , wordt van de lijnen in fig. 5 de bijbehorende aantallen overschrijdingen afgelezen en men stelt nu vervolgens

$$\bar{D}(x_i) = \frac{f_d(x_i)}{f_w(x_i)} \cdot 24 \quad (12.3)$$

waarin per definitie

$\bar{D}$ de gemiddelde overschrijdingsduur van wintertoppen in uren boven het niveau x_i

f_d absolute frequentie van dagafvoeren

f_w absolute frequentie van wintertoppen

x_i gekozen afvoerniveau

12.1. Theoretische beschouwing

De hier geschetste procedure (12.3) is niet zonder meer evident. Verschillende aannamen moeten worden gedaan om tot dit resultaat te komen zoals uit de volgende beschouwing blijkt.

- . De waarde van $\bar{D}$ uit (12.3) betekent een verhouding tussen absolute frequenties. In feite wordt met (12.3) aangegeven dat bij een afvoerniveau x_i een aantal overschrijdingen van dagafvoeren ter grootte f_d kan worden verwacht en een aantal overschrijdingen van wintertoppen ter grootte f_w . Deze aantallen komen in een verhouding $f_d : f_w$ voor.
- . Echter de wintertoppen vormen steeds een deelpopulatie van de dagafvoeren wat aanleiding geeft tot de uitspraak dat van f_d dagafvoeren $\geq x_i$ een aantal f_w als wintertop geregistreerd zal worden.

- . Vervolgens beroept men zich op de autocorrelatie in de afvoerreeks en neemt aan dat een aantal dagafvoeren gerangschikt zal zijn rond de wintertoppen zodat men tot een uitspraak komt dat, gemiddeld, *g e d u r e n d e* het optreden van f_d/f_w dagafvoeren er één wintertop zal optreden.
- . Tenslotte wordt overgegaan op de bewering dat de gemiddelde *d u u r* van een wintertop $(f_d/f_w) \times 24$ uur zal bedragen.

In deze procedure wordt geen gebruik gemaakt van het stochastisch karakter van de betrokken grootheid zodat het resultaat beperkt in zijn formulering is.

Het ontbreken van een definitie van de overschrijdingsduur (SNIJDELAAR, 1966 -20-) maakt het verder moeilijk deze grootheid operationeel te benaderen. De volgende definitie is bedoeld in deze lacune te voorzien en een analyse mogelijk te maken.

Definitie

$\underline{D}(x)$ = overschrijdingsduur boven afvoerniveau x uitgedrukt als de verhouding tussen het totaal aantal dagafvoeren $\underline{k}_d$ dat $> x$ en het aantal wintertoppen $\underline{k}_w$ dat $> x$, waarin $\underline{k}_d$ en $\underline{k}_w$ beide in hetzelfde tijdvak (= winterhalfjaar) worden genomen.

Uitgaande van de exponentiële kansverdelingen volgt nu voor de overschrijdingskans van x_i voor

$$\text{dagafvoeren} \quad P(\underline{x} > x_i) = e^{-\lambda_d x}$$

$$\text{wintertoppen} \quad P(\underline{x} > x_i) = e^{-\lambda_w x}$$

Beschouwt men respectievelijk N_d en $\bar{N}_w$ gevallen per seizoen, dan wordt gevonden voor het gemiddeld aantal overschrijdingen $\underline{k}$

$$\mu(k_d) = E(\underline{k}_d) = N_d e^{-\lambda_d x} \quad (\text{zie 10.4})$$

en

$$\mu(k_w) = E(\underline{k}_w) = \bar{N}_w e^{-\lambda_w x} \quad (12.4)$$

Wil men weten welke verhouding tussen beide verwacht kan worden, dan moet worden berekend

$$E(\underline{D}(x_i)) = E\left(\frac{k_d}{k_w}\right) \quad (12.5)$$

In deze terminologie moet voor (12.3) volgens de 'oude' procedure worden geschreven

$$\bar{D}(x_i) = \frac{E(k_d)}{E(k_w)} \quad (\text{dagen}) \quad (12.6)$$

Aangezien de verwachtingswaarde van een functie niet gelijk is aan de functie van de verwachtingswaarde blijkt dat

$$E(\underline{D}) \neq \bar{D}$$

Bij onafhankelijkheid tussen dagafvoeren en wintertoppen kan worden geschreven

$$E\left(\frac{k_d}{k_w}\right) = E(\underline{k}_d) \cdot E\left(\frac{1}{k_w}\right) \quad (12.7)$$

De oplossing van de eerste factor uit (12.7) luidt (zie 12.4)

$$E(\underline{k}_d) = N_d e^{-\lambda_d x_i}$$

Nu leiden we in algemene termen af $E(1/k)$ indien k binomiaal verdeeld is. Eerst merken we op dat voor $k = 0$ de uitkomst niet meer eindig (en dus onbruikbaar is) is zodat berekend zal worden

$E(1/(k+1))$. Voor grote waarden van k is het verschil overigens niet groot. Er komt nu

$$E\left(\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

dit kan herleid worden tot

$$\frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k}$$

We gaan nu over op

$$K = k + 1 \quad \text{zodat} \quad k = K - 1$$

$$N = n + 1 \quad \text{zodat} \quad n = N - 1$$

hieruit volgt nu achtereenvolgens

$$n - k = N - 1 - (K - 1) = N - K$$

$$k = 0 \quad \text{impliceert} \quad K = 1$$

$$k = n \quad \text{impliceert} \quad K = n + 1 \quad \text{dus} \quad K = N$$

Nu wordt geschreven

$$E\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \sum_{K=1}^N \frac{N!}{K!(N-K)!} p^K (1-p)^{N-K}$$

de vorm onder het somteken wordt als volgt herleid

$$\begin{aligned} \sum_{K=1}^N \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} &= \sum_{K=0}^N \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} - (1-p)^N \\ &= (p + (1-p))^N - (1-p)^N \\ &= 1 - (1-p)^N \end{aligned}$$

zodat gevonden wordt

$$E\left(\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{(n+1)p} \{1 - (1-p)^{n+1}\}$$

en tenslotte

$$E\left(\frac{1}{\bar{k}_w + 1}\right) = \frac{1}{(\bar{N}_w + 1) e^{-\lambda_w x_i}} \left\{ 1 - (1 - e^{-\lambda_w x_i})^{\bar{N}_w + 1} \right\}$$

Worden de beide factoren uit (11.7) weer samengevoegd dan ontstaat, voor alle x

$$E\left(\frac{k_d}{\bar{k}_w + 1}\right) = \frac{N_d e^{-\lambda_d x}}{(\bar{N}_w + 1) e^{-\lambda_w x}} \left\{ 1 - (1 - e^{-\lambda_w x})^{\bar{N}_w + 1} \right\} \quad (12.8)$$

Deze vorm zal in twee stappen vereenvoudigd worden, allereerst door op te merken dat N_d groot zal zijn ten opzichte van $\bar{N}_w$ waardoor er komt voor (12.5)

$$E_1(\underline{D}(x)) = \mu_1(D) = \frac{N_d e^{-\lambda_d x}}{\bar{N}_w e^{-\lambda_w x}} \left\{ 1 - (1 - e^{-\lambda_w x})^{\bar{N}_w} \right\} \quad (12.9)$$

Voor $x \rightarrow 0$ heeft deze formule het voordeel aan te sluiten aan het triviale geval van (12.3).

Indien na toetsing blijkt dat $\lambda_d = \lambda_w$ volgt tenslotte hieruit nog

$$E_2(\underline{D}(x)) = \mu_2(D) = \frac{N_d}{\bar{N}_w} \left\{ 1 - (1 - e^{-\lambda_w x})^{\bar{N}_w} \right\} \quad (12.10)$$

Het verschil met de tot nu toe in de praktijk gebezigde procedure wordt gepresenteerd door de vorm tussen accoladen.

12.2. Numerieke uitkomsten

De vergelijking (12.10) heeft twee triviale uitkomsten. Neem $x = 0$, dan volgt

$$E(\underline{D}(0)) = \frac{N_d}{\bar{N}_w} \quad (12.11)$$

Deze oplossing is plausibel. Het totaal aantal van alle dagafvoeren (overschrijdingsniveau $x = 0$) is 182 per jaar. Gemiddeld blijken er per jaar 35 (dagen met) wintertoppen voor te komen (tabel 1) zodat, afgezien van complicaties aan de eindpunten van het beschouwde seizoen, eenvoudig kan worden geschreven

$$E(\underline{D}(0)) = \frac{182}{35} = 5.2 \text{ dagen} = 124.8 \text{ uur}$$

Voor $x \rightarrow \infty$ wordt de uitkomst

$$E(\underline{D}(\infty)) = \frac{N_d}{\bar{N}_w} (1 - 1^{\bar{N}_w}) = 0 \text{ uur}$$

Ook deze uitkomst is plausibel. Naarmate x en dus het afvoerniveau hoger wordt gekozen zal de overschrijding korter duren. Zie bijvoorbeeld in fig. 1 (hoewel dat geen bewijskracht heeft) de niveaus $x_1 = 50$ en $x_2 = 80$. Door steeds hogere niveaus te beschouwen zal de gemiddelde overschrijdingsduur naar 0 reduceren. Deze uitkomst wordt met de tot nu toe gebruikte procedure niet verkregen.

Vaak blijken de lijnen die de kansverdelingen weergeven (fig. 5) evenwijdig te lopen (zie schetsen fig. 6), wat betekent dat beide verdelingen dezelfde parameterwaarde hebben (SNIJDELAAR, 1966 -20-). Het evenwijdig zijn op log.schalen betekent een constante verhouding $\mu(k_d)/\mu(k_w)$.

Hieruit wordt dan de conclusie getrokken dat de gemiddelde duur van een top boven het niveau x , dus de gemiddelde overschrijdingsduur constant is bij toenemende waarden van x en dus bij afnemende waarden van de overschrijdingskans p_x .

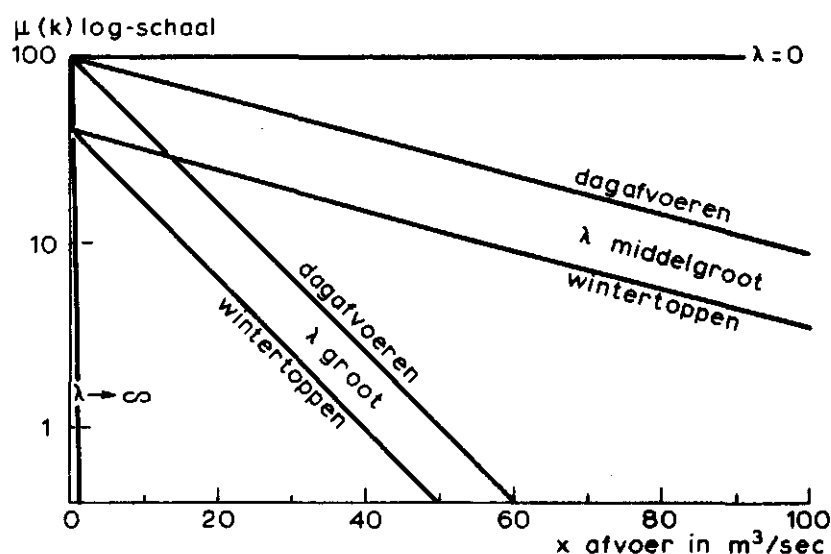


Fig. 6. Schets voor enkele bijzondere gevallen van de kansverdeling voor dagafvoeren en wintertoppen

Hydrologisch gezien is deze uitkomst alleen plausibel voor zeer snel reagerende gebieden met zeer hoge toppen, waarvan de overschrijdingskans onafhankelijk is van x en dus $\lambda \rightarrow 0$ (fig. 6). Vergelijking (12.9) gaat dan weer over in (11).

Afgezien van dit limiet geval biedt de hier afgeleide formule (12.9) respectievelijk (12.10) mogelijkheden tot verdere nuancering van uitkomsten.

De formule voor $\mu(D)$, gegeven in (12.10) brengt tot uitdrukking dat voor hogere overschrijdingsniveaus de gemiddelde duur van de overschrijding per winterhalfjaar afneemt.

Bovendien brengt (12.10) het specifieke van de kansverdeling in rekening. Zijn weer beide verdelingen voor dagafvoeren en wintertoppen evenwijdig, dan zal indien λ groot is de curve steil lopen wat betekent dat de overschrijdingskans van grote hoeveelheden gering is. Grote hoeveelheden komen dan dus zelden voor. Uit (12.10) volgt nu dat voor middel-grote waarden van x , gecombineerd met λ groot, de gemiddelde overschrijdingsduur sneller naar 0 convergeert dan indien λ klein is.

In dit laatste geval namelijk zijn de overschrijdingskansen groter, grote afvoeren komen vaker voor en de gemiddelde overschrijdingsduur convergeert minder snel naar 0. Deze complicaties worden niet verklaard met de in de praktijk gebruikelijke procedure (12.3) waarbij voor beide gevallen dezelfde uitkomst wordt verkregen.

12.3. Toepassing op de Oude IJssel

Nagegaan werd wat de numerieke uitkomsten zijn van toepassing van de gebruikte gegevens van de Oude IJssel op de afgeleide formules. De uitkomsten worden gegeven in tabel 8.

De in de praktijk tot nu toe gebruikelijke procedure is aangegeven onder het hoofd 'uit curven'. Tot een maatgevende afvoer groot $70 \text{ m}^3/\text{sec}$ komen de eerste drie kolommen goed met elkaar overeen. Daarna convergeren de theoretische waarden sterk naar 0, als gevolg van het minder frequent, zelfs zelden, voorkomen van wintertoppen van grotere waarden.

Dit doet zich nog sterker voor in gevallen waarin wintertoppen en dagafvoeren exponentieel verdeeld zijn met parameterwaarde $\lambda_w = \lambda_d$. Deze situatie is hier aangenomen te bestaan ter vergelijking van de uitkomsten. De in de praktijk gevolgde methode geeft een constante overschrijdingsduur voor alle waarden van x . Met formule (12.10) daalt de overschrijdingsduur eerst langzaam en vanaf $x = 80$ pas merkbaar. Voor zeer hoge afvoeren daalt de te verwachten overschrijdingsduur tot 0.14 dag of ruim 3 uur tegen 5 dagen afgeleid uit de curven alleen.

Tabel 8 wordt toegelicht met fig. 7 waarin de belangrijkste relaties zijn weergegeven.

Tabel 8. De gemiddelde overschrijdingsduur van wintertoppen in dagen boven de maatgevende afvoer x in m^3/sec met verschillende formules berekend (zie ook fig. 7)

Afvoer x	$\lambda_d \neq \lambda_w$			$\lambda_d = \lambda_w$	
	uit curven $\bar{D}$ (12.3)	$E(\underline{D})$ (12.8)	benadering 1 N+1 wordt N (12.9)	$E(\underline{D})$ met benadering 2 (12.10)	$\bar{D}$ uit curven (12.3)
0	5.2	5.1	5.2	5.2	5.2
10	4.5	4.4	4.5	5.2	5.2
20	4.0	3.8	4.0	5.2	5.2
30	3.4	3.4	3.4	5.2	5.2
40	3.0	2.9	3.0	5.2	5.2
50	2.6	2.6	2.6	5.2	5.2
60	2.3	2.2	2.3	5.1	5.2
70	2.0	1.9	1.9	4.9	5.2
80	1.7	1.5	1.5	4.5	5.2
90	1.5	1.1	1.2	4.0	5.2
100	1.3	0.82	0.83	3.3	5.2
110	1.2	0.57	0.58	2.6	5.2
120	1.0	0.38	0.39	2.0	5.2
130	0.88	0.25	0.25	1.5	5.2
140	0.76	0.16	0.16	1.1	5.2
150	0.67	0.10	0.10	0.79	5.2
160	0.58	0.064	0.064	0.57	5.2
170	0.51	0.039	0.039	0.41	5.2
180	0.44	0.024	0.024	0.29	5.2
190	0.39	0.015	0.015	0.20	5.2
200	0.34	0.009	0.009	0.14	5.2

13. DIRECTE BEPALING VAN DE GEMIDDELDE OVERSCHRIJDINGSDUUR

Met behulp van het basismateriaal kan een meer volledige analyse van de overschrijdingscurven D worden gemaakt. Aangezien $\underline{D}$ een stochastische grootheid is kan een empirische frequentieverdeling worden vervaardigd voor verschillende overschrijdingsniveaus. Een mogelijkheid hiertoe is aangegeven in fig. 8.

gemiddelde overschrijdingsduur
in dagen (wintertoppen)

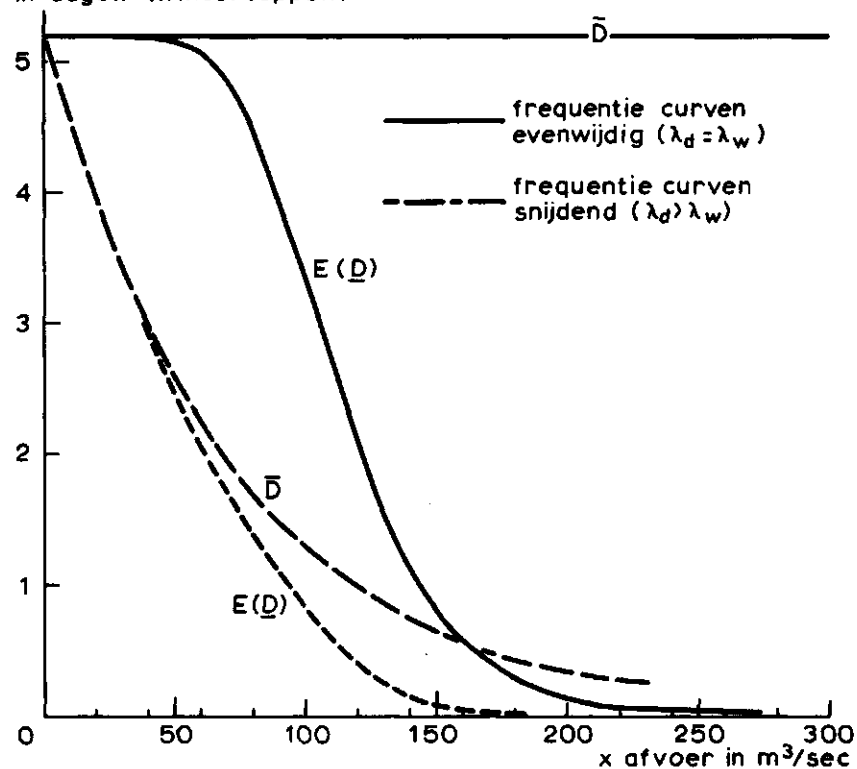


Fig. 7. Illustratie van tabel 8

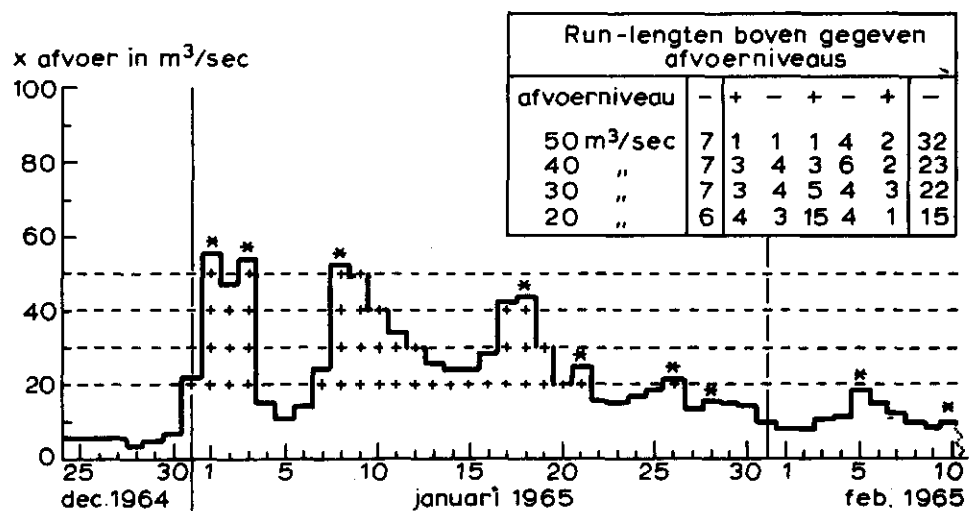


Fig. 8. Dagafvoeren van de Oude IJssel te Doesburg geanalyseerd naar run-lengten voor verschillende overschrijdingsniveaus (*: wintertoppen)

Men kan bij verschillende overschrijdingsniveaus de waarden van D_i bepalen door uit te gaan van runs dat de afvoer beneden het gekozen niveau was en van runs dat de afvoer boven het gekozen niveau was (resp. - en + in fig. 8). Men verkrijgt dan rechtstreeks inzicht in de waarden die de overschrijdingsduur kan aannemen en van de kansverdeling hiervan.

14. HET GEBRUIK VAN HERHALINGSREEKSEN

Over frequenties van weerkeren van hydrologische gebeurtenissen is in het kader van dit onderzoek gepubliceerd door STOL (1972).

Volledigheidshalve volgen hier nog enkele korte opmerkingen.

De herhalingsreeks $T_>$ wordt gedefinieerd als

$$T_> = \frac{1}{1 - P_<} = \frac{1}{P_>} \quad (14.1)$$

De d e f i n i t i e luidt: de herhalingsreeks voor de gebeurtenis G is het aantal onafhankelijke waarnemingen dat juist zo groot is dat daarin, gemiddeld, éénmaal de gebeurtenis G voorkomt.

Het verband tussen herhalingsreeksen en overschrijdingskansen is op de verticale schalen van fig. 3 en 4 tot uitdrukking gebracht.

Een andere keuze van het aantal in beschouwing te nemen nieuwe gebeurtenissen kan gebaseerd zijn op de mogelijk van belang zijnde periode-lengte. Bijvoorbeeld op 30 dagen voor maanden, 92 dagen voor een kwartaal, of zoals hier gebruikt is 182 dagen voor een half jaar. De herhalingsreeks in eenheden van 182 gebeurtenissen krijgt hiermede dan de interpretatie van aantallen per seizoen of winter, en aangezien er maar 1 winter in een jaar voorkomt tevens van aantallen per jaar.

Op basis hiervan kunnen verdere berekeningen worden uitgevoerd (STOL, 1972).

Hier blijkt tevens uit dat voor de wintertoppen beschouwingen over het weerkeren van hydrologische gebeurtenissen op deze wijze minder exact kunnen worden uitgevoerd. Er kunnen namelijk geen vaste

dagen aangewezen worden die tot de herhalingsreeks kunnen worden gerekend. Dit blijkt ook uit het aantal gekozen waarnemingen. Voor dagafvoeren is dit een constant aantal, namelijk de lengte van het winterhalfjaar (tabel 1).

Voor wintertoppen is dit aantal niet vast. Tot nu toe is dit aantal constant gekozen op de gemiddelde waarde van 35. Maar in feite is het een stochastische grootte.

Het is duidelijk dat voor N_d en N_w op zichzelf ook onderling geheel andere waarden kunnen worden gebruikt en dat de in par. 11 besproken betrouwbaarheidsgrenzen ook hierop kunnen worden toegepast. Toch zal men steeds N_w als een functie - of als een gevolg - van N_d opvatten en N_d als uitgangsgegeven gebruiken.

Wat de herhalingsreeksen betreft kan nog worden verwezen naar uitkomsten verkregen door LLOYD (1970). Voor een Markov I model bleek de verwachting van $T_>$ zich door de autocorrelatie niet te wijzigen. De variantie echter wordt

$$\sigma_{T_>}^2 = \frac{1-p}{p^2} \left(\frac{1+p}{1-p} \right)$$

15. DE KEUZE VAN HET AANTAL GEBEURTENISSEN

15.1. Aantal constant

Tot nu toe zijn de aantallen gebeurtenissen (dagen met afvoer) constant gekozen volgens gemiddelde waarde per seizoen (winter) en wel $N_d = 182$ en $\bar{N}_w = 35$.

Dit betekent dat voor de herhalingsreeks voor wintertoppen eveneens een gemiddelde wordt gevonden, waarbij informatie over de spreiding verloren gaat.

Nu zal worden nagegaan tot welke uitkomsten een stochastisch opgevatte N_w voert.

15.2. Aantal stochastisch

We definiëren

voor dagafvoeren $N = N_d$ constant

voor wintertoppen $n = \underline{N}_w$ stochastisch

en kiezen ter gedachtenbepaling $N = N_d = 182$ zoals eerder is gedaan.

De kans dat een dagafvoer tevens een wintertop is wordt gesteld op P_w , zodat de kans dat er n wintertoppen per winter voorkomen gegeven wordt door

$$P(\underline{n} = n) = \binom{N}{n} P_w^n (1 - P_w)^{N-n} \quad (15.1)$$

Wordt nu uitgegaan van een maatgevende afvoer x_0 met een overschrijdingskans p , dan is de kans dat k wintertoppen de maatgevende afvoer overschrijden

$$P(\underline{k} = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (15.2)$$

We onderstellen nu dat in (15.2) de constante n stochastisch is met kansverdeling gegeven in (15.1). Wordt (15.2) hiernaar geconditioneerd dan wordt de kans op $\underline{k} = k$ overschrijdingen gegeven door

$$P(\underline{k} = k \mid \underline{n}) = \sum_{n=0}^N \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \binom{N}{n} P_w^n (1 - P_w)^{N-n}$$

in welke vorm men de structuur van een verwachtingswaarde van de functie (15.2) (FELLER, 1966 -52-) herkent.

Door gebruik te maken van de eigenschappen van de binomiale verdeling kan deze vorm vereenvoudigd worden.

We gaan over op de kans dat er *m i n s t e n s* één overschrijding optreedt. Deze luidt

$$P(1 \leq k \leq n | \underline{n}) = \quad (15.3)$$

$$\sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^n \left\{ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right\} \binom{N}{n} P_w^n (1-P_w)^{N-n}$$

De kans op minstens één overschrijding is gelijk aan $1 - P(\underline{k} = 0)$ zodat

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - (1-p)^n$$

waardoor er komt voor (15.3)

$$= \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} P_w^n (1-P_w)^{N-n} - \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} (1-p)^n P_w^n (1-P_w)^{N-n}$$

waarvoor geschreven kan worden

$$1 - \{(1-p) P_w + (1-P_w)\}^N \\ = 1 - (1 - p P_w)^N$$

hetgeen de kans voorstelt op minstens één overschrijding. De kans op géén overschrijding is dan $(1 - p P_w)^N$, zodat uiteindelijk geschreven kan worden met $N = N_d$

$$P(\underline{k} = k | \underline{n}) = \binom{N_d}{k} (p P_w)^k (1 - p P_w)^{N_d - k} \quad (15.4)$$

Toepassing van (4.1) geeft

$$P(\underline{k} = k | \underline{n}) = \binom{N_d}{k} (e^{-\lambda_w x} P_w)^k (1 - e^{-\lambda_w x} P_w)^{N_d - k}$$

Een zuivere M.L. schatter voor P_w wordt verkregen met (zie tabel 1)

$$\hat{p}_w = \frac{N_{w1} + N_{w2} + N_{w3}}{N_{d1} + N_{d2} + N_{d3}} = \frac{106}{546} = 0.194$$

$$= \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}_d} = \frac{35.33}{182} = 0.194$$

Aangezien N_d over de winters constant is, wordt weer geschreven

$$\hat{p}_w = \frac{\bar{N}_w}{N_d}$$

De kans dat een maatgevende afvoer ter grootte x door wintertoppen k -maal zal worden overschreden, luidt dus

$$P(\underline{k} = k | \underline{n}) = \binom{N_d}{k} \left(\frac{\bar{N}_w e^{-\lambda_w x}}{N_d} \right)^k \left(1 - \frac{\bar{N}_w e^{-\lambda_w x}}{N_d} \right)^{N_d - k} \quad (15.5)$$

15.3. Onderzoek bijzondere gevallen

Teneinde formule (15.5) te kunnen beoordelen zullen enkele triviale waarden worden ingevuld.

$x = 0$ De verdeling gaat over in (15.1) en geeft dus de kansverdeling van het aantal wintertoppen dat $x = 0$ overschrijdt en dus van de kansverdeling van wintertoppen uit alle N_d dagafvoeren.

$x = \infty$ Het aantal wintertoppen dat dit niveau overschrijdt bedraagt 0.

$\bar{N}_w = N_d = n$ De verdeling gaat over in (15.2) en geeft de kansverdeling dat van n wintertoppen een aantal k de maatgevende afvoer overschrijdt.

$E(k(x))$ Deze is gelijk aan $N_d \frac{\bar{N}_w e^{-\lambda_w x}}{N_d}$ en luidt

dus $\bar{N}_w e^{-\lambda_w x}$

Bijzondere gevallen voor wat aan aantallen overschrijdingen van verschillende waarden voor de maatgevende afvoer gemiddeld verwacht kan worden zijn:

$$E(k(0)) = \bar{N}_w \quad (\text{het jaargemiddelde})$$

$$E(k(\infty)) = 0$$

$$E(k(\frac{1}{\lambda})) = 0,37 \bar{N}_w$$

Voor de herhalingsreeks $T_>$ voor dagafvoeren die tevens wintertop zijn $> x$, geldt tenslotte, zie (14.1)

$$T_>(x) = \frac{N_d}{\bar{N}_w} e^{-\lambda_w x}$$

Voor $x = 0$ wordt gevonden $T_> = \frac{N_d}{\bar{N}_w}$. Dit is de lengte van een reeks waarin gemiddeld één overschrijding voorkomt. Aangezien $x = 0$ betekent dit dat alle wintertoppen worden meegerekend zodat hiermede tevens de gemiddelde overschrijdingsduur boven $x = 0$ wordt gegeven. Deze uitkomst is exact gelijk aan (12.11) en heeft ook dezelfde betekenis.

Voor $x > 0$ verliest $T_>$ de betekenis van een gemiddelde duur. Namelijk $T_>$ geeft de lengte van een reeks zodanig dat daarin gemiddeld één overschrijding van x voorkomt, zodat $T_>$ de betekenis heeft van een wachttijd $t_o t$ en niet van een duur van overschrijding. Deze laatste wordt gevonden door een reductie-term op $T_>$ toe te passen. Uit (12.9) volgt namelijk

$$E(D(x)) = T_d e^{-\lambda_d x} \{1 - (1 - e^{-\lambda_w x})^{\bar{N}_w}\}$$

waarmede tevens het verband met de afleidingen in par. 12 is gelegd.

Tot slot wordt nog opgemerkt dat (15.4) ook intuïtief duidelijk is. Is namelijk P de kans op de gebeurtenis dat een dagafvoer tevens wintertop is en p de kans op de gebeurtenis dat een wintertop de maatgevende afvoer overschrijdt, dan is de combinatie van deze gebeurtenissen, namelijk een dagafvoer is wintertop en overschrijdt de maatgevende afvoer, gegeven door het produkt van de kansen pP .

16. SAMENVATTING EN CONCLUSIES

In deel I van deze nota werden de theoretische achtergronden van de exponentiële kansverdeling besproken, in deel II werd de theorie toegepast op afvoergegevens van de Oude IJssel te Doesburg.

Boven wat gewoonlijk aan theorie wordt toegepast werd hier aangegeven hoe gebruik kan worden gemaakt van (de)

- . Toets van Kolmogorov-Smirnov voor het toetsen of de steekproef adequaat met de exponentiële verdeling kan worden beschreven.
- . Kritieke gebieden voor λ om te toetsen of twee verschillende schatters voor λ gelijke resultaten opleverde, waarvan een positief resultaat pleit voor het gebruik van de exponentiële verdeling.
- . Idem voor het toetsen van verschil in parameterwaarden tussen de verdeling voor dagafvoeren respectievelijk die voor wintertoppen.
- . Betrouwbaarheidsintervallen voor λ , p en x voor het bepalen van maatgevende afvoeren bij vooraf bepaalde aanvaardbare risico-percentages.

In de praktijk worden vaak uit de kansverdelingen conclusies afgeleid met betrekking tot de overschrijdingsduur D van gegeven afvoerhoeveelheden. In par. 12.1 werd hiervoor een definitie gegeven en

werd een formule voor de verwachtingswaarde van D afgeleid, die rekening houdt met

- . de vorm (λ -waarde) van de kansverdeling
- . het naar 0 convergeren van de overschrijdingsduur bij toenemende waarden van de maatgevende afvoer

In de praktijk wordt met een gemiddeld aantal wintertoppen per jaar gewerkt. Het werkelijk aantal is niet constant maar stochastisch. Onder aanname van een binomiale verdeling werd een formule voor de herhalingsreeks afgeleid die de herhalingsreeks T_{λ} geeft voor dagafvoeren die tevens wintertop zijn en de maatgevende afvoer overschrijden. Deze herhalingsreeksen zijn ruim 5 x zolang als die voor wintertoppen alleen wat overeenkomt met het feit dat gemiddeld 1 winter uit 5 dagafvoeren blijkt te zijn gekozen. Aangezien wintertoppen in de tijd niet voorspelbaar optredende gebeurtenissen zijn is omrekening naar herhalings-t i j d e n niet goed uitvoerbaar.

De gevonden formule voor T_{λ} bleek weer samen te hangen met de uitdrukking voor $E(D)$.

Het in de praktijk doorgevoerde onderscheid tussen dagafvoeren en wintertoppen heeft nog een consequentie die hier niet expliciet aan de orde is gesteld. Door de selectie van wintertoppen zijn er veel dagafvoeren die groter zijn dan een wintertop maar niet in de verdeling van wintertoppen voorkomen. De term wintertop betekent dus geenszins dat dit de meest extreem voorkomende gebeurtenissen betreft. Wel kan indirect uit de onderlinge relatie een overschrijdingsduur worden afgeleid (par. 12), maar als het de bedoeling is hierover geïnformeerd te worden verdient een directe aanpak zoals geschetst in par. 13 de voorkeur.

17. VERANTWOORDING

Het in deel I en II behandelde werd door de Provinciale Waterstaat van Gelderland als probleem gesteld. De auteur dankt ir H.J. Colenbrander en H.J. Brinkhof van deze dienst voor het ter beschikking stellen van de gegevens en voor de verduidelijkende discussies die aan de totstandkoming van deze nota's vooraf gingen.

LITERATUUR

- FELLER, W., 1966. An introduction to probability theory and its applications. Vol. II Wiley, New York.
- KENDALL, M.G. and A. STUART, 1966. The advanced theory of statistics. Vol. 3. Design and analysis, and time-series. Griffin. London.
- LLOYD, E.H., 1970. Return periods in the presence of persistence. J. of Hydrology 10, pp. 291-298.
- SNIJDELAAR, M., 1966. Onderzoek naar de frequenties van afvoeren in het stroomgebied van de Dinkel. 's-Gravenhage, Rijkswaterstaat-Dienst voor de Waterhuishouding.
- STOL, Ph.Th., 1972. Een beschouwing over de frequentie van weerkeren van hydrologische gebeurtenissen. Cult. Techn. Tijdschrift, Jaargang 11 nr 4, pp. 168-185.
- 1973. Het gebruik van de negatief-exponentiële kansverdeling voor afvoergegevens en voor het bepalen van de maatgevende afvoer. Deel I - Theoretische achtergronden. ICW nota 724.
- WERKGROEP AFVLOEIINGSFACTOREN, 1970. Tweede Interimrapport. Studiering voor Cultuurtechniek, Kon. Gen. Landb. Wet.