

HET BEPALEN VAN OVERSCHRIJDINGSKANSEN VOOR
RIVIERDIJKEN UIT AFVOEREN EN GEKORRELEERDE GOLFOPLOPEN

nota 32

dr.ir. D.H. Keuning en J. Kooyman

LABORATORIUM VOOR HYDRAULICA EN AFVOERHYDROLOGIE
LANDBOUWHOGESCHOOL

1. INLEIDING

De overschrijdingskansen voor rivierdijken worden uiteraard in belangrijke mate bepaald door de frekventies van optreden van hoge afvoeren (waterstanden). In Nederland spelen echter ook windeffekten een rol. Als de wind over het water strijkt ontstaan er golven. Indien de rivierwaterstand zo hoog is, dat de uiterwaarden onderlopen, kunnen de golven een golfoploop tegen de dijk veroorzaken.

Uit het gekombineerd optreden van hoge afvoeren en golfoplopen zijn overschrijdingskansen berekend voor een punt van de zuidelijke Waalbandijk stroomafwaarts van Nijmegen. Beide verschijnselen zijn opgevat als onderling onafhankelijke, stochastische processen. Uitgegaan is van gegeven overschrijdingsfrekventies van hoge afvoeren en van een historische reeks golfoplopen, zoals die op hadden kunnen treden als het water voldoende hoog had gestaan. Van deze golfoplopen is een stochastisch model gemaakt dat o.a. een periodieke component en persistentie bevat.

De berekeningen zijn uitgevoerd in nauw overleg met N.V. Grontmij te De Bilt. Deze instantie verstrekke eveneens de noodzakelijke gegevens, te weten: vorm en overschrijdingsfrekventies van de afvoergolven en een historische reeks golfoplopen. Voor de juistheid van deze gegevens dragen wij geen enkele verantwoordelijkheid. We zijn de Grontmij. voor haar medewerking zeer veel dank verschuldigd.

2. BASISGEGEVENS EN UITGANGSPUNTEN

2.1. Rivierwaterstanden

Hoge rivierwaterstanden in de Waal doen zich voornamelijk in het winterhalfjaar (1 november - 30 april) voor en worden veroorzaakt door grote afvoeren van de Rijn. Deze afvoeren manifesteren zich als een golfverschijnsel: een waarnemer in een vast punt langs de Waal ziet het water gedurende een aantal dagen stijgen en daarna weer dalen.

Uit afvoergegevens van de Rijn te Lobith over de periode 1910 t/m 1959 zijn o.a. overschrijdingsfrequenties voor de golftoppen bepaald. Deze zijn opgenomen in [1] en berusten voor een deel op extrapolatie. Via een Q-h relatie zijn de afvoeren omgezet in waterstanden te Nijmegen. Het niveau behorend bij de maatgevende afvoer van $18000 \text{ m}^3/\text{sec}$ ligt in het beschouwde punt 50 cm lager dan in Nijmegen; daarom zijn over de hele schaal de waterstanden te Nijmegen met 50 cm verlaagd om overschrijdingsfrequenties bij niveaus in het beschouwde punt te verkrijgen. We kunnen dan het gemiddelde aantal toppen per jaar hoger dan één of ander niveau aangeven. In tabel 1 zijn enkele van deze frequenties opgenomen, te beginnen met die behorend bij de waterstand waarboven golfoplopen kunnen ontstaan (zie par. 2.3.).

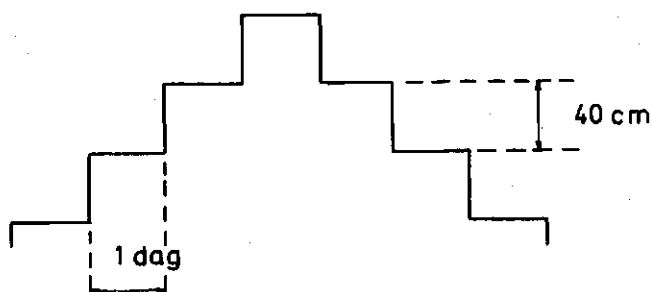
Tabel 1

Debiet te Lobith (m^3/sec)	Niveau in het beschouwde punt (m + N.A.P.)	Overschrijdingsfрекв. (aantal golftoppen per jaar)
8.200	12.20	0.25
8.800	12.40	0.17
9.600	12.60	0.11
10.500	12.80	0.061
11.400	13.00	0.035
12.300	13.20	0.020
13.300	13.40	0.010
14.400	13.60	0.0045
15.600	13.80	0.0019
16.800	14.00	0.0007
18.000	14.20	0.0003

Door de frekwenties behorend bij twee niveaus van elkaar af te trekken krijgen we de frekwentie van optreden van golven waarvan de toppen zich in de door de niveaus bepaalde intervallen bevinden. Golven met toppen tussen 12.20 en 12.60 m hebben een frekwentie van 0.14 (treden gemiddeld één maal per 7 jaar op).

De interessante golven (golven met toppen hoger dan 12.20 m) hebben een frekwentie van optreden van 0.25. Daar dit een lage frekwentie is, nemen we aan dat deze afvoergolven onafhankelijk van elkaar optreden en dat de tussenliggende perioden voldoende lang zijn om de dijk bij een mogelijke doorbraak tijdens het optreden van een afvoergolf te kunnen herstellen. Binnen het winterhalfjaar is de verdeling van de toppen over het tijdsinterval uniform verondersteld.

De vorm van de afvoergolf is geschematiseerd tot een trapjesfunctie (figuur 1), waarvan de "treden" per dag met 40 cm verspringen. Gedurende een etmaal wordt het niveau konstant verondersteld.



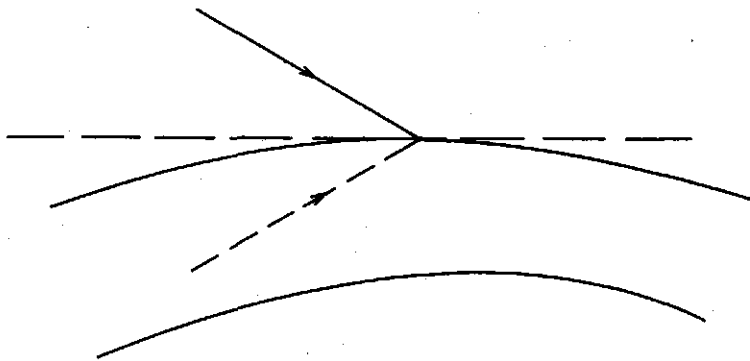
figuur 1

2.2. Golfoplopen tegen de dijk

Van de golfoplopen tegen de dijk in het beschouwde punt zijn geen gemeten waarden beschikbaar. Deze zijn berekend m.b.v. een deterministische formule, waarin windrichting en -sterkte, ruwheid van het talud van de dijk, de helling van het talud en strijklengte van de wind over het water voorkomen. Hierin zijn windsterkte en -richting stochastische grootheden; de andere genoemde grootheden worden als vast beschouwd. Dus de berekende golfoploop (beter gezegd het niveau dat nog door 2% van de golven wordt overschreden) is een stochastische variabele. Hiervan is ons een realisatie over

10 winterhalfjaren (1961 - 1970) ter beschikking gesteld. Deze is bepaald uit windgegevens van het vliegveld Deelen onder de veronderstelling dat steeds voldoende water boven de uiterwaarden stond opdat een golfoploop mogelijk was. Deze golfoplopen zijn per uur berekend; voor de verdere berekeningen is uitgegaan van de maximale golfoploop per etmaal.

Er kunnen alleen golfoplopen tegen de dijk ontstaan als de wind over het water strijkt. Komt de wind vanaf het "land", dan is er geen golfoploop. Hierdoor bevat de reeks van historische golfoplopen een groot aantal nullen, die de reeks voor verdere analyse minder geschikt maken. Daarom zijn op ons verzoek, voor het geval de wind over de dijk komt, fictieve golfoplopen berekend. Deze zijn tot stand gekomen door de windrichting te spiegelen t.o.v. de raaklijn aan de dijk (figuur 2), voor deze richting de golfoploop te berekenen en deze van een min-teken te voorzien. Er is nu sprake van positieve golfoplopen, negatieve en golfoplopen gelijk aan nul. Deze laatste treden op bij windstil weer of als de wind langs de dijk strijkt. De reeks met negatieve golfoplopen wordt in het vervolg aangeduid als de uitgebreide reeks. Door negatieve waarden gelijk aan nul te maken krijgen we de realistische reeks.



figuur 2

2.3. Uitgangspunten voor de berekening

Er is sprake van een overschrijding (ramp) als het water (afvoergolf + golfoploop) de kruinhoogte van de dijk overschrijdt. We zijn slechts geïnteresseerd in het optreden van één ramp gedurende een afvoergolf. Aangenomen wordt dat enige tijd nodig is om de dijk bij overschrijding te herstellen, zodat het niet van belang is wat er na een dergelijke gebeurtenis plaatsvindt.

Om de overschrijdingskans behorend bij een zekere dijkhoogte in het beschouwde punt te kunnen bepalen, is een stochastisch model gemaakt voor de golfoplopen met een periodieke component, autokorrelatie, enz. De stochastische analyse wordt beschreven in het volgende hoofdstuk.

In hoofdstuk 4 worden de golfoplopen met de afvoergolven gekombineerd en wordt aangegeven hoe de overschrijdingsfrequenties zijn bepaald. Om de berekening niet te gekompliceerd te laten worden is het optreden van afvoergolven beperkt tot golven waarvan de toppen zekere, diskrete waarden aan kunnen nemen. Verder is verondersteld dat alleen golfoplopen kunnen ontstaan als de waterstand hoger is dan 12.20 m (niveau uiterwaarden plus ongeveer 50 cm). Het niveau van 12.20 m wordt in het vervolg als nulniveau of referentieniveau aangeduid.

Interessant zijn alleen die golven waarvan de toppen tussen het nulniveau en de kruinhoogte liggen. Golven die boven de dijk uitkomen geven een te verwaarlozen bijdrage in de overschrijdingskans. We hoeven dus slechts een eindig aantal afvoergolven te bekijken. Voor een gegeven golf wordt de overschrijdingskans t.g.v. de golfoploop berekend. Door de frequentie van optreden van de afvoergolf te vermenigvuldigen met deze kans krijgen we de overschrijdingsfrequentie behorend bij de betreffende golf. Sommatie van de frequenties van de golven met een top in het genoemde interval geeft ons de overschrijdingsfrequentie van de dijk. In dit rekenproces zullen ook de golfoplopen slechts diskrete waarden aan kunnen nemen.

3. ANALYSE VAN DE UITGEBREIDE REEKS GOLFOPLOPEN

3.1. Golfoplopen als een stochastisch verschijnsel

De gedefiniëerde golfoploop op iedere dag wordt beschouwd als een stochastische variabele: de waarde die aangenomen wordt (uitkomst) hangt van het toeval af. Een reeks golfoplopen over een zekere periode vormt een stochastisch proces. Zo'n reeks noteren we als \underline{x}_i , $i = 1, 2, \dots$. Een realisatie van een proces (een reeks uitkomsten) geven we aan met x_i , $i = 1 \dots N$. Een historische reeks is bijv. zo'n realisatie. In principe heeft een stochastisch proces oneindig veel realisaties. Er zijn oneindig veel mogelijke rijen uitkomsten aan te geven, die alle met dezelfde waarschijnlijkheid op kunnen treden.

Een stochastische variabele \underline{x}_i wordt beschreven door een kansverdeling of kansdichtheid. De kansverdeling $F_i(x)$ van \underline{x}_i is een monotoon niet-dalende functie, met $F_i(-\infty) = 0$ en $F_i(\infty) = 1$. $F_i(x)$ is gedefiniëerd als de kans dat \underline{x}_i een waarde $\leq x$ aanneemt,

$$F_i(x) = P\{\underline{x}_i \leq x\} \quad \dots\dots (3.1)$$

Een stochastische analyse is er op gericht de functies $F_i(x)$ voor iedere variabele \underline{x}_i te bepalen. Het is aannemelijk dat het jaar dat beschouwd wordt niet van invloed is op $F_i(x)$, d.w.z. dat de golfoplopen op een bepaalde dag van het jaar, bijv. 1 maart alle dezelfde kansverdeling bezitten ongeacht het jaar, waarin deze dag valt. Dus zijn er 181 functies $F_i(x)$ te konstrueren (een schrikkelidag "vergeten" we voor het gemak). Deze kansverdelingen worden bepaald uit de historische reeks golfoplopen.

We gaan daarbij als volgt te werk. Eerst wordt nagegaan of er gedurende het winterhalfjaar een significante verandering in de historische uitkomsten optreedt. Zo'n ieder jaar terugkerende trend noemen we een periodiciteit. Als deze aanwezig is wordt de reeks daarvoor zodanig gekorrigeerd dat verondersteld mag worden dat een stationaire reeks overblijft. Dit houdt in dat iedere dag dezelfde kansverdeling $F_i(x) = F(x)$ bezit.

Het kan zijn dat $F_i(x)$ nog beïnvloed wordt door voorafgaande uitkomsten, die dan als parameters in $F_i(x)$ optreden,

$$F_i(x) = F(x; x_{i-1} \dots\dots x_{i-k}) \quad \dots\dots (3.2)$$

waarin k geheel en ≥ 1 . Dit verschijnsel noemen we afhankelijkheid. We trachten de reeks ook voor afhankelijkheid te korrigeren opdat we een reeks onderling onafhankelijke en isomere (o.o.i.) residuen overhouden. Isomoor wil zeggen dat de uitkomsten als trekkingen uit één en dezelfde kansverdeling $F(x)$ opgevat mogen worden. Uit de historische o.o.i. residuen wordt dan de kansverdeling $F(x)$ bepaald. Voor verdere informatie over de gevolgde procedure wordt verwezen naar de literatuur ([2] - [5]).

3.2. Onderzoek naar en het verwijderen van periodiciteiten

De gegeven uitgebreide reeks golflopen wordt voorlopig als x_{ij} , $i = 1 \dots 10$, $j = 1 \dots 181$ genoteerd. De index i geeft de jaren aan en j de dagen binnen het jaar waarover de golflopen bepaald zijn. Om een periodiciteit op te sporen zijn uit x_{ij} de dagelijkse gemiddelden \bar{x}_j berekend,

$$\bar{x}_j = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_{ij}, \quad j = 1 \dots 181 \quad \dots\dots (3.3)$$

De gemiddelden zijn schattingen voor de verwachting $\mu_j(x)$ van x_{ij} .

Visueel was duidelijk dat de gemiddelden \bar{x}_j de neiging hadden in de loop van het winterhalfjaar op te lopen. Daarom is een verband tussen de \bar{x}_j 's in de vorm aan een polynoombenadering verondersteld,

$$\bar{x}_j \sim a_0 + a_1 j + a_2 j^2 + \dots \quad \dots\dots (3.4)$$

Het zo goed mogelijk schatten van de coëfficiënten a_k uit de 181 gemiddelden is een lineair regressieprobleem. De regressie is uitgevoerd met behulp van een op het rekencentrum beschikbare subroutine. Alleen a_0 en a_1 bleken significant van nul te verschillen. De resterende coëfficiënten waren absoluut genomen zo klein dat hun invloed niet van stochastische afwijkingen te onderscheiden waren. De periodiciteit bleek te schrijven te zijn in de vorm (uitgedrukt in cm)

$$f_j = -5 + \frac{55}{180} (j - 1) \quad \dots\dots (3.5)$$

Dus gemiddeld treden er in het voorjaar hogere golflopen op dan in het najaar.

De reeks x_{ij} is nu verminderd met f_j en de nieuwe reeks is als y_{ij} genoteerd,

$$y_{ij} = x_{ij} - f_j \quad \dots\dots (3.6)$$

Aangenomen mag worden dat de verwachtingen $\mu_j(y)$ van y_{ij} geen trend meer bevatten. Zo'n jaarlijkse trend kan nog wel aanwezig zijn in de standaarddeviatie. M.a.w. de schommelingen rond \bar{x}_j kunnen de tendens vertonen gedurende het halfjaar te veranderen.

Om dit na te kunnen gaan, is berekend

$$\bar{x}_j = \left\{ \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad j = 1 \dots 181 \quad \dots\dots (3.7)$$

wat een schatting voor de standaarddeviatie σ_j is. Deze reeks is eveneens op een periodiciteit onderzocht, maar die bleek niet aanwezig te zijn. M.a.w. de standaarddeviatie van de reeks (3.6) mag konstant worden verondersteld.

Daar verwachting en standaarddeviatie van (3.6) geen trend bevatten is aangenomen dat de reeks (3.6) een stationaire reeks is, m.a.w. dat de uitkomsten y_{ij} trekken uit één en dezelfde kansverdeling $F(x)$ zijn.

3.3. Onderzoek naar afhankelijkheid; een afhankelijkheidsmodel

Binnen de reeks kan afhankelijkheid optreden, ook al is de trend verwijderd. De laatste veronderstelling in de vorige paragraaf houdt onder meer in dat het afhankelijkheidsgedrag gedurende het winterhalfjaar niet verandert. De reeks is beschouwd als een aaneengesloten reeks uitkomsten y_i , $i = 1 \dots 1810$ en deze is op afhankelijkheid onderzocht.

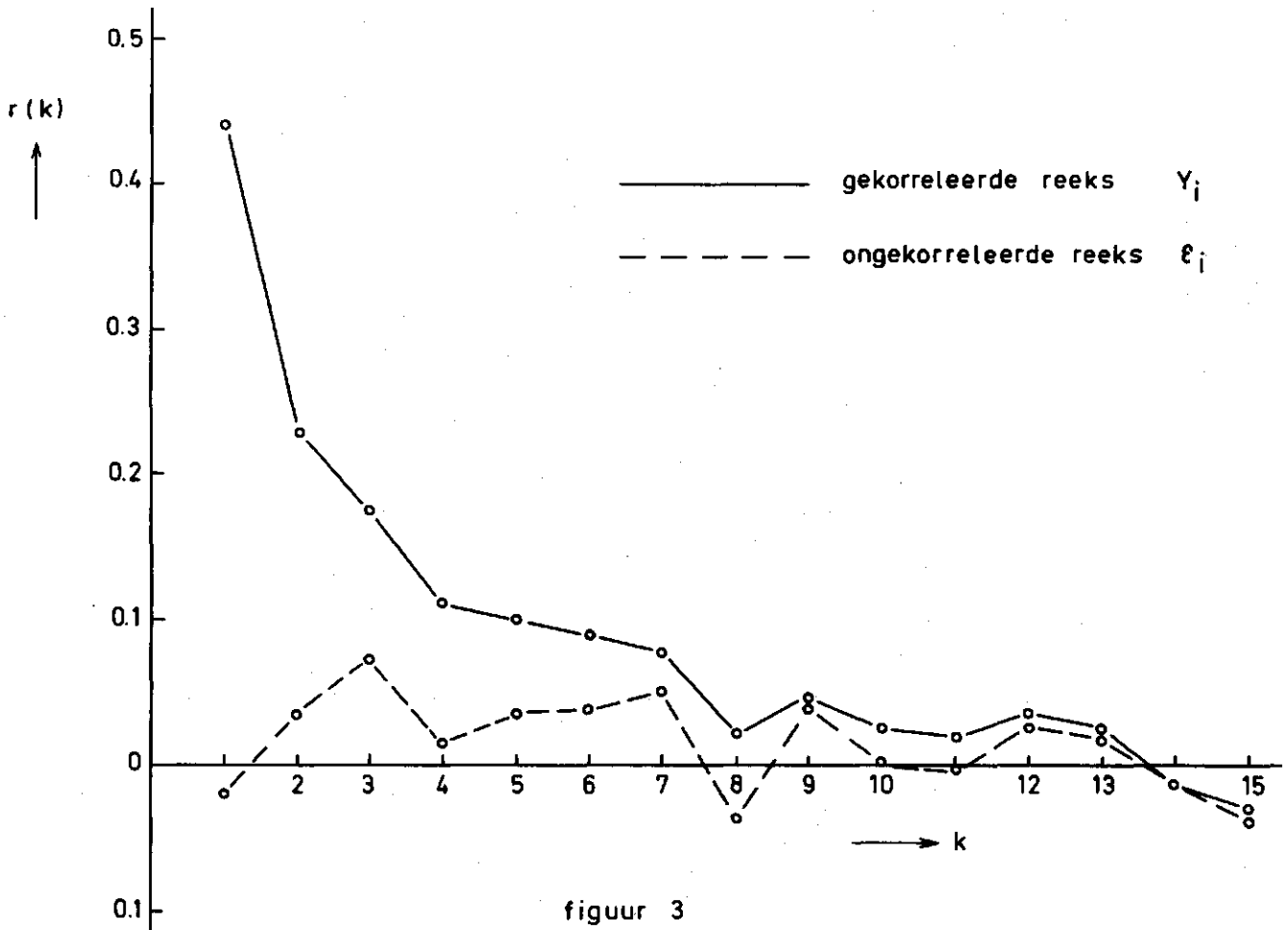
Daartoe is een aantal seriekorrelatiecoëfficiënten $r(k)$, $k = 1, 2 \dots$ berekend. Dit zijn benaderingen van de autokorrelatiecoëfficiënten en worden gegeven door

$$r(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} y_i y_{i+k} - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{i=1}^{N-k} y_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N-k} y_{i+k} \right)}{\left[\sum_{i=1}^{N-k} y_i^2 - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{i=1}^{N-k} y_i \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^{N-k} y_{i+k}^2 - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{i=1}^{N-k} y_{i+k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (3.8)$$

met $N = 1810$.

Voor een onafhankelijk proces moet $r(k)$ in de buurt van nul liggen. Bij benadering is $r(k)$ normaal verdeeld met verwachting N^{-1} en standaarddeviatie $N^{-\frac{1}{2}}$. Het 95% betrouwbaarheidsinterval heeft dus als kritieke punten $-2N^{-\frac{1}{2}}$ en $2N^{-\frac{1}{2}}$ als we N^{-1} verwaarlozen t.o.v. $N^{-\frac{1}{2}}$.

In figuur 3 is o.a. het korrelogram voor het gekorreleerde proces y_i gegeven. We zien dat de eerste korrelatiecoëfficiënten duidelijk van nul verschillen ($2 N^{-1/2} \approx 0.05$); m.a.w. de reeks afhankelijk.



Getracht is de afhankelijkheid te beschrijven door middel van een eerste orde Markov model,

$$y_1 = \epsilon_1 \quad \text{..... (3.9.a)}$$

$$y_i = \rho y_{i-1} + \epsilon_i, \quad i = 2 \dots N \quad \text{..... (3.9.b)}$$

met $\rho = r(1) = 0.44$. Indien dit model een korrekte beschrijving geeft zullen de seriekorrelatiecoëfficiënten van de residuen ϵ_i klein moeten zijn. In figuur 3 zijn eveneens de korrelatiecoëfficiënten van ϵ_i aangegeven. Deze blijken inderdaad vlak bij nul te liggen. Slechts één coëfficiënt ($k=3$)

ligt buiten het 95% betrouwbaarheidsinterval. Op grond van deze berekende coëfficiënten is aangenomen dat het Markov model (3.9) korrekt is en dat de residuen ε_n o.o.i. zijn.

3.4. De verdelingsfunctie van de residuen

De residuen ε_i zijn op de gebruikelijke wijze uitgezet op normaal waarschijnlijkheidspapier (figuur 4). Dit leverde geen rechte lijn op. De punten weken echter niet veel af van een rechte, zodat met een eenvoudige transformatie de verdeling van de residuen tot een normale verdeling over te voeren was.

Na toepassing van de transformatie

$$\eta_i = (\varepsilon_i - a)^{1/b}, \quad \varepsilon_i \geq a, \quad \dots\dots (3.10.a)$$

$$\eta_i = -(-\varepsilon_i + a)^{1/b}, \quad \varepsilon_i < a, \quad \dots\dots (3.10.b)$$

bleek de η -reeks voor $a = 10$ en $b = 1.45$ wel door een normale verdeling te beschrijven te zijn (figuur 5). Uitgezet op normaal waarschijnlijkheidspapier kregen we een rechte. Uit de figuur valt af te lezen dat voor deze verdeling geldt $\mu = -3$ en $\sigma = 17$.

We zijn nu in staat de kansverdeling $F(\xi)$ voor de residuen ε_i voor iedere ξ te berekenen. Met behulp van (3.10) vinden we voor $\xi > a$

$$F(\xi) = P\{\varepsilon_i \leq \xi\} = P\{\eta_i \leq (\xi - a)^{1/b}\} = P\{\chi \leq \frac{(\xi - a)^{1/b} - \mu}{\sigma}\} \quad \dots\dots (3.11)$$

Hierin is χ de variabele met een standaardnormale verdeling. Voor de berekening van $P\{\chi \leq x\}$ is een subroutine beschikbaar, zodat $F(\xi)$ numeriek te bepalen is. Voor $\xi < a$ krijgen we een analoge uitdrukking.

Het uiteindelijke model voor de golfoplopen ziet er nu als volgt uit. Geven we de golfoplopen binnen een winterhalfjaar aan met x_j (x_j mag zowel positief als negatief zijn), dan geldt

$$x_j = y_j + f_j, \quad j = 1 \dots 181 \quad \dots\dots (3.12)$$

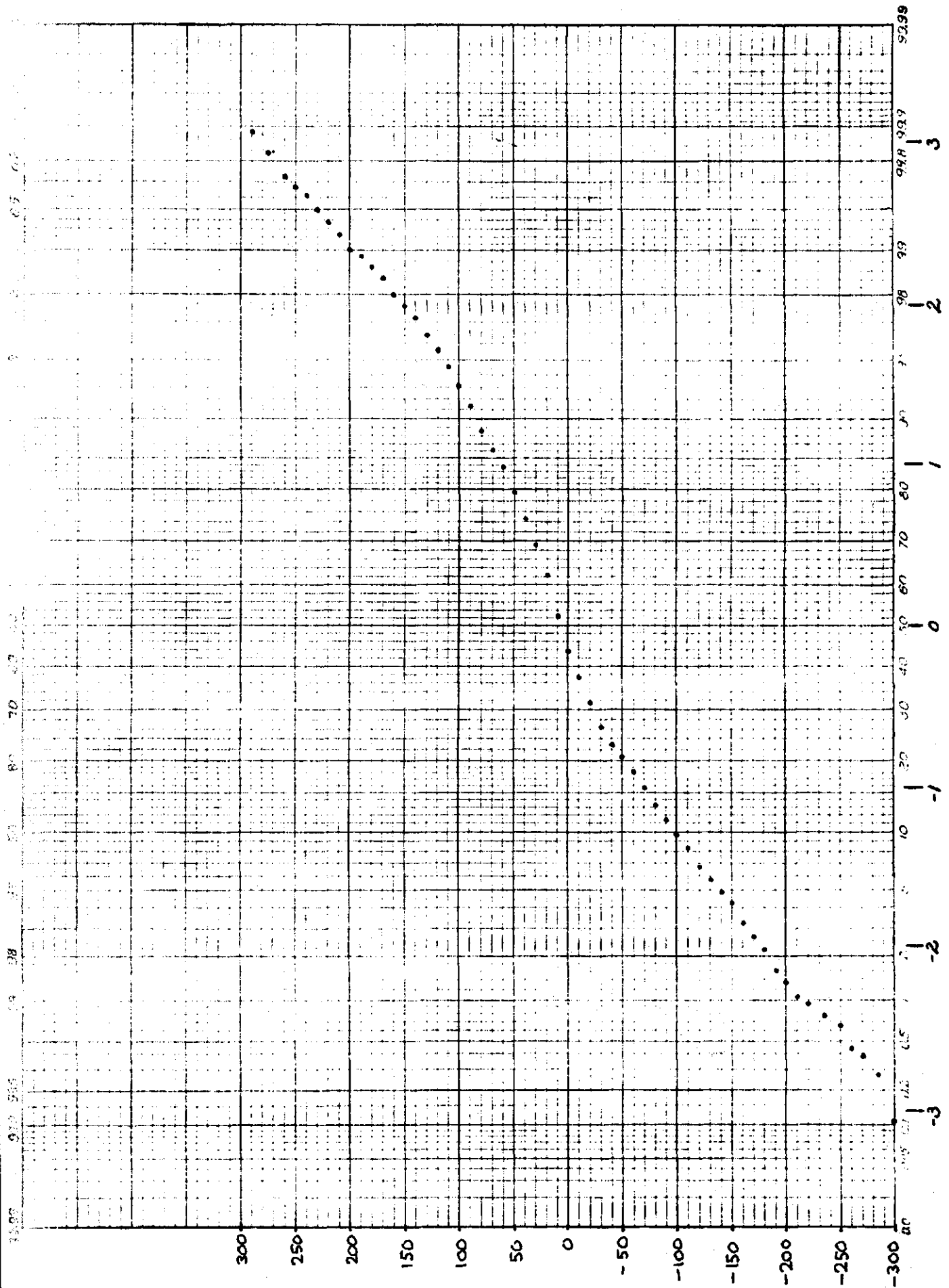


Fig. 4

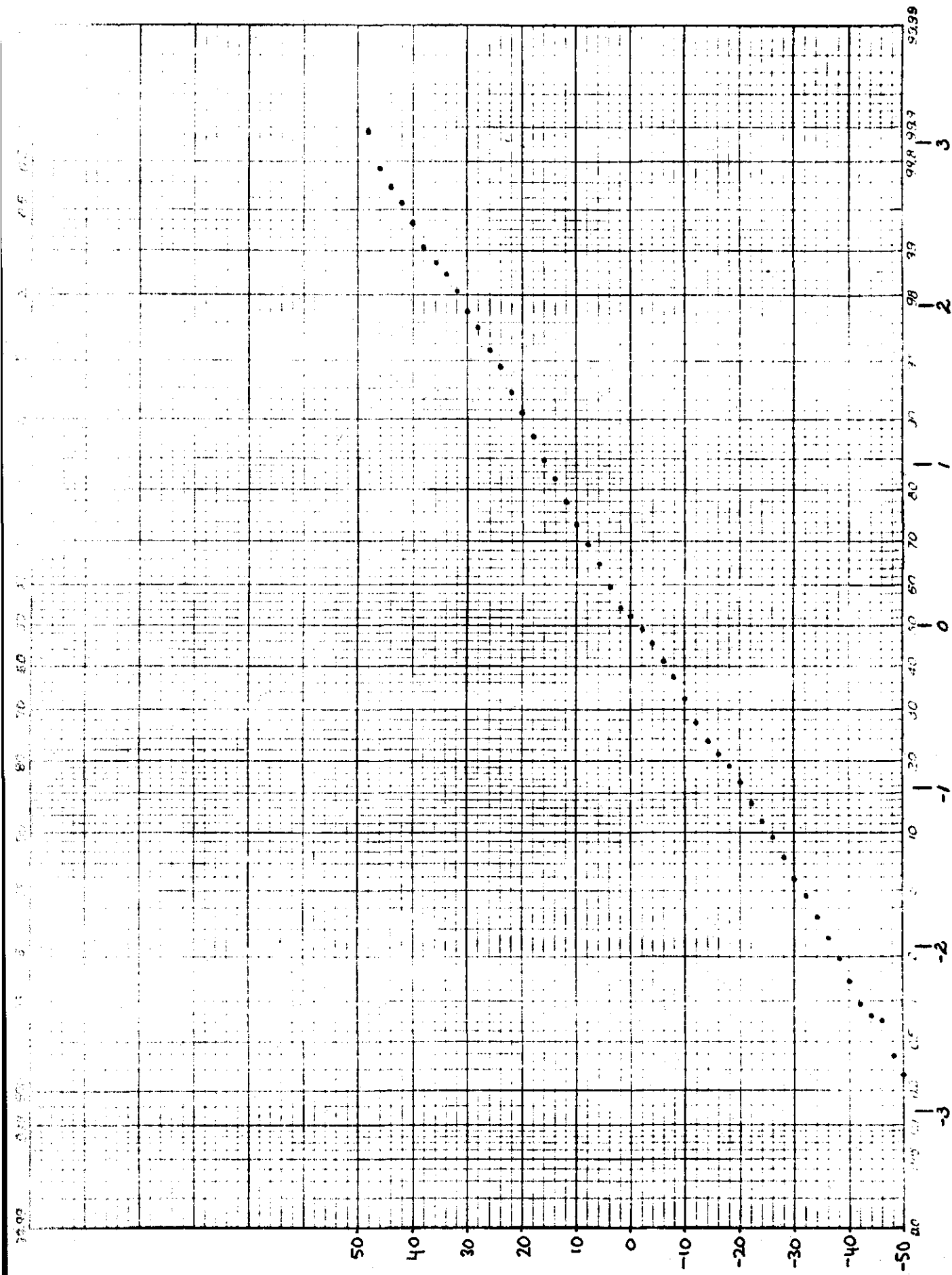


Fig. 5

met

$$y_j = y_{j-1} + \epsilon_j \quad \dots\dots (3.13)$$

De reeks f_j wordt gegeven door (3.5).

4. HET BEREKENEN VAN Overschrijdingsfrequenties

4.1. Diskretisatie van afvoergolven en golflopen

Het niveau van 12.20 m waarboven golflopen kunnen ontstaan, geldt als referentieniveau (nulniveau) van de berekening. We beschouwen alleen golven die boven het nulniveau uitkomen.

De golftoppen kunnen in principe alle mogelijke hoogten aannemen. Om rekentechnische redenen beperken we hier de niveaus, die door golftoppen kunnen worden aangenomen, tot een diskreet aantal met onderlinge verschillen van 40 cm. Geven we de tophoogten aan met h_a , dan zijn de mogelijke waarden voor h_a (uitgedrukt in cm),

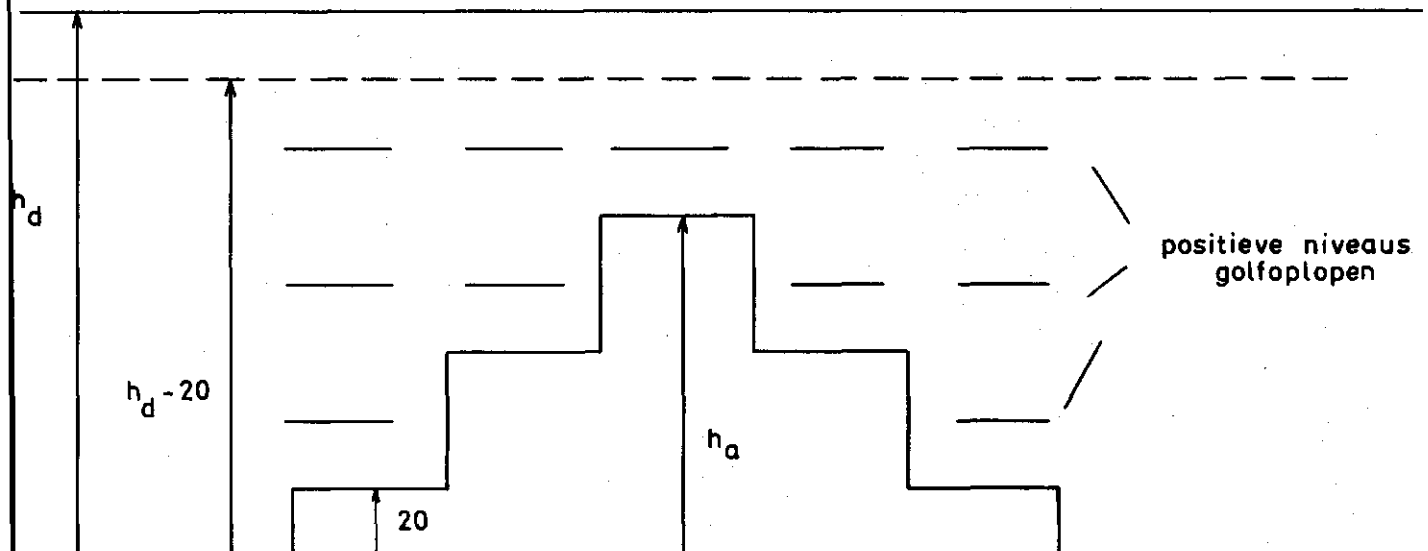
$$h_a = 20, 60, 100, \dots \quad \dots\dots (4.1)$$

Aan een afvoergolf met tophoogte h_a wordt een frekwentie toebedeeld die gelijk is aan de frekwentie van optreden van golven met toppen tussen $h_a - 20$ en $h_a + 20$. Dus de golf met hoogte h_a wordt representatief geacht voor alle golven uit het genoemde interval.

In verband met de keuze (4.1) en de vorm van de afvoergolf, neemt een afvoergolf niveaus w_k aan die 40 cm verschillen (figuur 6)

$$w_k = (k - \frac{1}{2}) \cdot 20, \quad k = 1, 2, \dots \quad \dots\dots (4.2)$$

In de figuur neemt de afvoergolf achtereenvolgens de niveaus 20, 60, 100, 60, 20 cm aan.



figuur 6

Om een juiste aansluiting te krijgen bij de gekozen niveaus voor afvoergolven zijn overschrijdingskansen berekend voor dijken waarvan de kruinhoogten (t.o.v. het nulniveau) een geheel aantal malen keer 40 cm bedragen,

$$h_d = m \cdot 40, \quad m = 5, 6 \dots 10 \quad \dots\dots (4.3)$$

Dus de laagste dijk die beschouwd is heeft een hoogte van 200 cm en de hoogste van 400 cm.

Er zijn bij een dergelijke dijkhoogte m afvoergolven waarvan de top beneden de kruinhoogte blijft en die gekombineerd met een golfoploop een overschrijding kunnen geven. De afvoergolven die boven de dijk uitkomen hoeven we niet te beschouwen, daar blijkt dat deze een te verwaarlozen bijdrage tot de overschrijdingskans geven.

We stappen eveneens over op gediskretiseerde uitkomsten voor de gekorreleerde golfoplopen

$$y_j = x_j - f_j \quad \dots\dots (4.4)$$

De niveaus die y_j aan kan nemen, noemen we v_k . Omdat de niveaus van de afvoergolven per dag met 40 cm verspringen, hebben we in eerste instantie de verschillen $v_k - v_{k-1}$ ook gelijk aan 40 cm gesteld,

$$v_k = (k - \frac{1}{2})40, \quad \dots\dots (4.5)$$

waarbij k de waarden $-9 \dots 10$ doorloopt. Dus het laagste niveau is -380 cm en het hoogste $+380$ cm.

Treedt gedurende een aantal dagen een afvoergolf op, dan vindt op de n^{de} dag van overschrijding van het nulniveau een overschrijding van de dijk plaats als er niveaus w_k en v_1 worden aangenomen zó, dat

$$w_k + v_1 > h_d - 20 \quad \dots\dots (4.6)$$

Door de keuze van de niveaus is $w_k + v_1$ altijd een geheel aantal malen keer 40 cm, zodat er geen twijfel mogelijk is of er sprake is van overschrijding of niet; $w_k + v_1 = h_d - 20$ kan niet voorkomen.

4.2. Combinatie van golfoplopen en afvoergolven

Bij een door (4.3) gegeven dijkhoogte treden m afvoergolven op die een overschrijding van de dijk kunnen veroorzaken. We berekenen voor iedere, dergelijke golf de overschrijdingskans. Is deze gelijk aan Q_i , $i = 1 \dots m$ en bezit een afvoergolf i een frekwentie van optreden die gelijk is aan R_i , dan wordt de totale overschrijdingsfrekwentie van de dijk gelijk gesteld aan

$$\sum_{i=1}^m Q_i R_i \quad \dots\dots (4.7)$$

Hierbij is verondersteld dat golfoploop en afvoergolven onderling onafhankelijke processen zijn. Verder zijn we alleen geïnteresseerd in het optreden van één overschrijding per afvoergolf. Het gaat dus om de kans op overschrijding op een zekere dag als op de voorafgaande dagen van golfoptreden geen overschrijding heeft plaatsgevonden.

We bespreken nu verder het berekenen van de kansen Q_i . Op de eerste dag van golfoptreden is het niveau van de afvoergolf 20 cm. Er vindt nog juist geen overschrijding plaats als het niveau van y_1 , de gekorreleerde golfoploop op de eerste dag, gelijk is aan v_{m-1} ; voor $y_1 = v_k$ met $k \geq m$ vindt er wel een overschrijding plaats.

Noteren we de kans dat op de eerste dag een niveau v_k wordt aangenomen als $p_k^{(1)}$, dan is de kans op dijkoverschrijding op de eerste dag

$$\sum_{k=m}^{10} p_k^{(1)} = 1 - \sum_{k=-9}^{m-1} p_k^{(1)} \quad \dots\dots (4.8)$$

M.a.w. voor een golf, die maar één dag boven het referentieniveau uitkomt ($i=1$) vinden we

$$Q_1 = 1 - \sum_{k=-9}^{m-1} p_k^{(1)} \quad \dots\dots (4.9)$$

Op het berekenen van de kansen $p_k^{(1)}$ komen we in de volgende paragraaf terug.

Treedt de afvoergolf meer dan één dag op dan zullen we ook de overschrijdingskansen op de andere dagen moeten berekenen. Daarbij moet steeds de voorwaarde vervuld zijn dat op de verafgaande dagen geen overschrijding

plaatsvindt. Voor het berekenen van de overschrijdingskans op de tweede dag van optreden gaan we er dus van uit dat op de eerste dag de golfoploop één der niveaus v_k , $k = -9 \dots m-1$, aanneemt.

We noemen de kans dat op de n^{de} dag een niveau v_1 wordt aangenomen onder de voorwaarde dat op de $(n-1)^{\text{ste}}$ dag de golfoploop een niveau v_k aanneemt, p_{1k} . Zoals we in paragraaf 4.3. zullen zien hangt deze kans alléén van l en k af en niet van andere grootheden. De kans dat op de n^{de} dag een niveau v_1 , $l = -9 \dots 10$, wordt aangenomen, moet gelijk zijn aan 1, dus

$$\sum_{l=-9}^{10} p_{1k} = 1 \quad \dots\dots (4.10)$$

voor iedere k .

De getallen p_{1k} vormen de matrix van overgangswaarschijnlijkheden. In formule

$$p_{1k} = P\{y_n = v_1 / y_{n-1} = v_k\} \quad \dots\dots (4.11)$$

Daar

$$p_1^{(2)} = P\{y_2 = v_1\} = \sum_{k=-9}^{m-1} P\{y_2 = v_1 / y_1 = v_k\} \cdot$$

$$P\{y_1 = v_k\} \quad \dots\dots (4.12)$$

vinden we met behulp van (4.11)

$$p_1^{(2)} = \sum_{k=-9}^{m-1} p_{1k} p_k^{(1)} \quad \dots\dots (4.13)$$

We krijgen als overschrijdingskans op de tweede dag (het niveau van de afvoergolf is 40 cm hoger geworden)

$$\sum_{l=m-1}^{10} p_l^{(2)} = \sum_{l=m-1}^{10} \sum_{k=-9}^{m-1} p_{lk} p_k^{(1)} \quad \dots\dots (4.14)$$

Door de sommatievolgorde te verwisselen en gebruik te maken van (4.10) gaat (4.14) over in

$$\sum_{k=-9}^{m-1} (1 - \sum_{l=-9}^{m-2} p_{1k}^{(1)}) p_k^{(1)} = \sum_{k=-9}^{m-1} p_k^{(1)} - \sum_{l=-9}^{m-2} \sum_{k=-9}^{m-1} p_{1k}^{(1)} p_k^{(1)} =$$

$$\sum_{k=-9}^{m-1} p_k^{(1)} - \sum_{l=-9}^{m-2} p_1^{(2)} \quad \dots\dots (4.15)$$

Door (4.9) en (4.15) bij elkaar op te tellen krijgen we de overschrijdingskans t.e.m. de tweede dag,

$$1 - \sum_{l=-9}^{m-2} p_1^{(2)} \quad \dots\dots (4.16)$$

Dit is 1 min de kans op een niveau dat geen dijkoverschrijding geeft.

Komen van de afvoergolf 3 niveaus boven het nulniveau uit ($i=2$), dan geven op de laatste dag $m-1$ niveaus van de golfoploop g een overschrijding. We vinden dan op dezelfde wijze als boven is beschreven dat de overschrijdingskans voor deze afvoergolf gelijk is aan

$$Q_2 = 1 - \sum_{l=-9}^{m-1} p_1^{(3)} \quad \dots\dots (4.17)$$

waarin

$$p_1^{(3)} = \sum_{k=-9}^{m-2} p_{1k}^{(2)} p_k^{(2)} \quad \dots\dots (4.18)$$

De afvoergolf voor $i = 3$ bevat 5 niveaus. Uit de kansen $p_1^{(3)}$ voor niveaus op de derde dag berekenen we kansen $p_1^{(4)}$ volgens

$$p_1^{(4)} = \sum_{k=-9}^{m-3} p_{1k}^{(3)} p_k^{(3)} \quad \dots\dots (4.19)$$

en vervolgens kansen $p_1^{(5)}$,

$$p_1^{(5)} = \sum_{k=-9}^{m-2} p_{1k}^{(4)} p_k^{(4)} \quad \dots\dots (4.20)$$

De overschrijdingskans Q_3 bedraagt dan

$$Q_3 = 1 - \sum_{l=-9}^{m-1} p_1^{(5)} \quad \dots\dots (4.21)$$

In het algemeen geldt dat voor de i^{de} afvoergolf, waarvan $2i-1$ niveaus boven het nulniveau uitkomen, de overschrijdingskans gegeven wordt door

$$Q_i = 1 - \sum_{l=-9}^{m-1} p_1^{(2i-1)} \quad \dots\dots (4.22)$$

waarbij $p_1^{(n)}$ uit $p_k^{(n-1)}$ wordt berekend d.m.v. een matrixvermenigvuldiging.

4.3. Kansen en overgangswaarschijnlijkheden voor de niveaus van golfoplopen

De kans dat de golfoploop op de n^{de} dag gedurende het optreden van een afvoergolf een niveau v_k aanneemt, wordt als volgt gedefiniëerd

$$p_{-9}^{(n)} = F_n(-360), \quad \dots\dots (4.23.a)$$

$$p_k^{(n)} = F_n(v_k + 20) - F_n(v_k - 20), \quad k=-9..8 \quad \dots\dots (4.23.b)$$

$$p_{10}^{(n)} = 1 - F_n(360) \quad \dots\dots (4.23.c)$$

Hierin stelt F_n de kansverdeling van de niet-gediskretiseerde golfoplopen op de n^{de} dag voor.

Uit (3.13) volgt

$$P\{y_n \leq y / y_{n-1} = v_k\} = P\{\varepsilon_n \leq y - 0.44 v_k\} = F(y - 0.44 v_k), \quad \dots\dots (4.24)$$

waarin F de bekende kansverdeling van de residuen ε_n voorstelt. Uit (4.11), (4.23) en (4.24) volgt nu

$$p_{1k} = F(-360 - 0.44 v_k), \quad l = -9 \quad \dots\dots (4.25.a)$$

$$p_{1k} = F(v_1 - 0.44 v_k + 20) - F(v_1 - 0.44 v_k - 20),$$

$$1 = -8 \dots 9, \quad (4.25.b)$$

$$p_{1k} = 1 - F(360 - 0.44 v_k), \quad 1 = 10 \quad \dots\dots (4.25.c)$$

Indien $p_k^{(1)}$ te berekenen is, zijn de andere kansen $p_k^{(n)}$, $n = 2, 3 \dots$ te bepalen en ook de overschrijdingskansen Q_i , $i = 1 - m$. De kansen $p_k^{(1)}$ definiëren we als de stationaire kansen op de niveaus v_k , zoals die volgen uit het stochastische model voor de golfoplopen. M.a.w. we nemen voor F_1 in (4.23) de stationaire verdeling van de gekorreleerde golfoplopen.

We kunnen $p_k^{(1)}$ op twee manieren berekenen. De ene methode houdt in dat we herhaaldelijk de matrixvermenigvuldiging

$$\bar{p}_1^{(n)} = \sum_{k=-9}^{10} p_{1k} \bar{p}_k^{(n-1)} \quad \dots\dots (4.26)$$

toepassen met

$$\bar{p}_{-9}^{(1)} = F(-360), \quad \dots\dots (4.27.a)$$

$$\bar{p}_k^{(1)} = F(v_k + 20) - F(v_k - 20), \quad k = -8 \dots 9 \quad \dots\dots (4.27.b)$$

$$\bar{p}_{10}^{(1)} = 1 - F(360) \quad \dots\dots (4.27.c)$$

De kansen $\bar{p}_1^{(n)}$ naderen dan tot limietwaarden, die de kansen $p_1^{(1)}$ representeren (eigenschap Markov model).

Deze limietwaarden zijn ook oplossingen van het (afhankelijk) stelsel vergelijkingen

$$\sum_{k=-9}^{10} (p_{1k} - \delta_{1k}) p_k^{(1)} = 0, \quad 1 = -9 \dots 10 \quad \dots\dots (4.28.a)$$

$$\sum_{k=-9}^{10} p_k^{(1)} = 1 \quad \dots\dots (4.28.b)$$

Hierin is δ_{1k} de Kronecker- δ ,

$$\delta_{lk} = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ 1, & l = k \end{cases} \dots\dots (4.29)$$

Van deze twee mogelijkheden voor het berekenen van $p_k^{(1)}$ is de eerste gekozen; na 5 maal vermenigvuldigen bleken er geen noemenswaardige veranderingen in $p_k^{(1)}$ meer op te treden.

4.4. De resultaten

In deze paragraaf geven we enige resultaten, zoals die op de hiervoor beschreven wijze zijn verkregen. In de volgende tabel staan de overschrijdingskansen Q_i voor de afvoergolven vermeld; met i geven we het nummer van de afvoergolf aan en met m de dijkhoogte (m.40)

Tabel 2

$i \backslash m$	5	6	7	8	9	10
1	0.0207	0.0089	0.0037	0.0015	0.0005	0.0002
2	0.0906	0.0423	0.0188	0.0080	0.0033	0.0013
3	0.2532	0.1297	0.0617	0.0276	0.0118	0.0048
4	0.4483	0.2504	0.1275	0.0603	0.0269	0.0114
5	0.7118	0.4459	0.2484	0.1262	0.0595	0.0265
6		0.7104	0.4444	0.2472	0.1245	0.0591
7			0.7095	0.4434	0.2465	0.1251
8				0.7090	0.4429	0.2462
9					0.7087	0.4426
10						0.7086

Tabel 3 geeft de overschrijdingsfrequentie $\times 10^{-5}$ per afvoergolf en de totale overschrijdingsfrequentie $\sum_i Q_i R_i$ voor de ingestelde dijkhoogte (blz. 23).

We zien dat de belangrijkste bijdragen tot de overschrijdingsfrequenties geleverd worden door de afvoergolven 2, 3 en 4, die maximaal resp. 60, 100 en 140 cm boven het referentieniveau uitkomen. Samen zijn ze goed voor ongeveer 80% van de totale frequentie.

Tabel 3

$i \backslash m$	5	6	7	8	9	10
1	290	125	52	21	8	3
2	680	318	141	60	25	10
3	633	324	154	69	29	12
4	363	203	103	49	22	9
5	114	71	40	20	9	4
6		18	11	6	3	2
7			3	2	1	-
8				-	-	-
9					-	-
10						-
overschr. frekw. per jaar	2080	1059	504	227	98	40

Om de nauwkeurigheid van de diskretisatie van golfoplopen en toppen van van golfafvoeren te kunnen bepalen is een aantal extra berekeningen gemaakt. In de eerste plaats is een groter aantal niveaus voor de golfoplopen beschouwd ($v_k = (k - \frac{1}{2}) \cdot 40$ met $k = -10 \dots 11$). Deze toevoeging van twee niveaus gaf geen verandering in de kansen en frekwenties.

Verder zijn de verschillen tussen de niveaus van zowel de golfoplopen als de toppen van de afvoergolven gehalveerd en is voor f_j genomen

$$f_j = \begin{cases} 10, & j \leq 90 \\ 30, & j > 90 \end{cases} \quad \dots\dots (4.30)$$

Ook hiervan waren de gevolgen niet rampzalig in die zin dat er weinig verandering optrad. Dit blijkt uit tabel 4 (blz. 24), waarin de overschrijdingsfrekwenties voor intervallen van 40 cm en 20 cm naast elkaar zijn gezet.

Wel van invloed is de keuze van het referentieniveau. De gevolgen van het variëren van dit niveau op de overschrijdingskansen komt tot uitdrukking in tabel 5 (blz. 24).

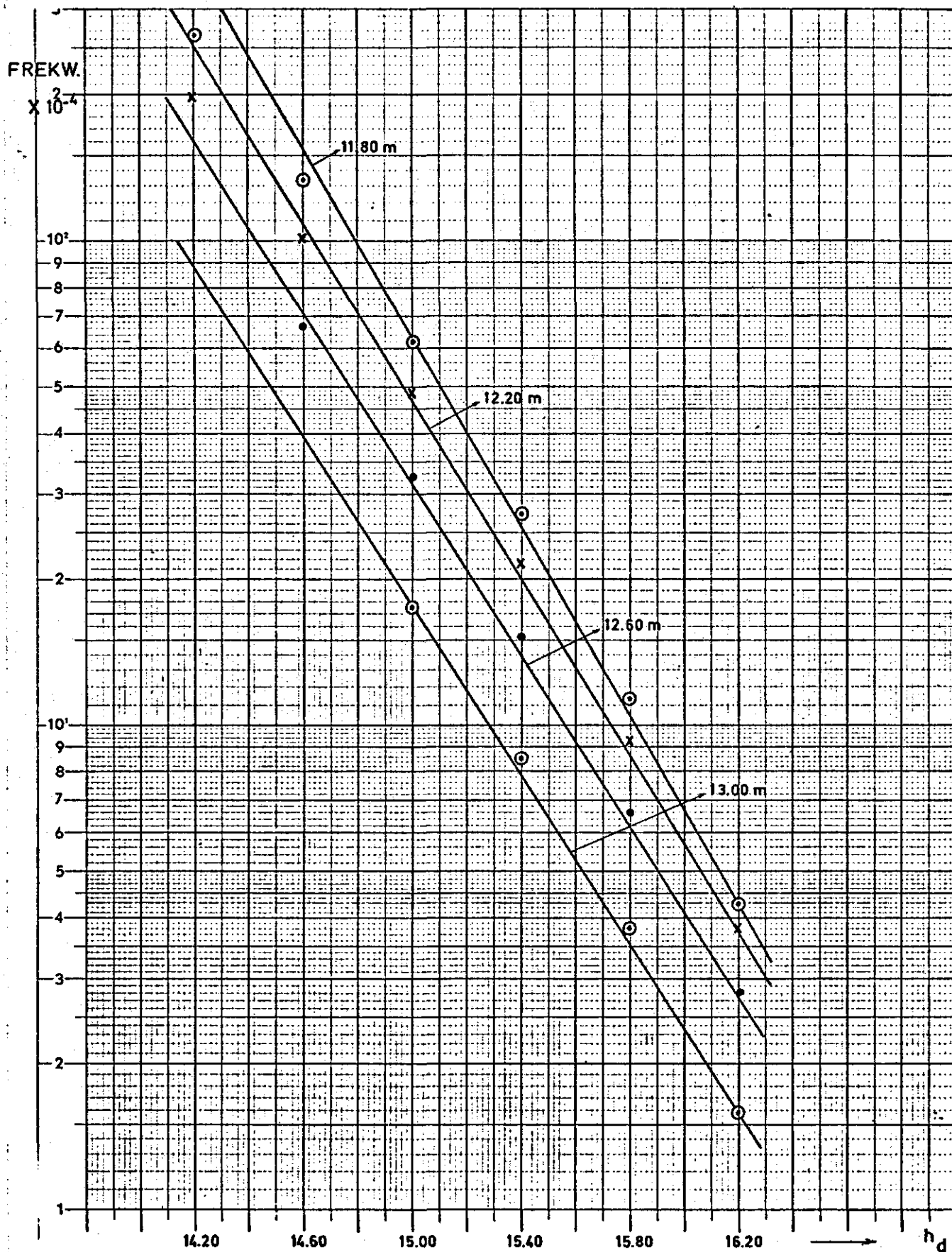
Tabel 4

m	interv. 40 cm	interv. 20 cm
5	0.02080	0.01989
6	0.01059	0.01012
7	0.00504	0.00480
8	0.00227	0.00216
9	0.00098	0.00093
10	0.00040	0.00038

Tabel 5

Kruinhoogte	Referentieniveau in meters			
	11.80	12.20	12.60	13.00
14.20	0.02663	0.01989		
14.60	0.01320	0.01012	0.00666	
15.00	0.00613	0.00480	0.00324	0.00174
15.40	0.00270	0.00216	0.00150	0.00085
15.80	0.00114	0.00093	0.00066	0.00038
16.20	0.00043	0.00038	0.00028	0.00016

In figuur 7 zijn deze frekwenties nog eens uitgezet op half-logarithmisch papier. Getracht is ze door een rechte lijn te benaderen.



Figur 7



REFERENTIES

1. 10-Jarig overzicht Rijkswaterstaat 1951 - 1960.
2. M.B. Fiering, B.B. Jackson, Synthetic Streamflows, American Geophysical Union, Washington, 1971.
3. N.A. Kartvelishvili, Theory of Stochastic Processes in Hydrology and River Runoff Regulation, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1969.
4. R.T. Clarke, Mathematical Models in Hydrology, Irrigation and Drainage Paper no. 19, F.A.O., Rome 1973.
5. V. Yevjevich, Stochastic Processes in Hydrology, Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado 1972.