

NN31545.0932

NOTA 932

november 1976

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

ONDERZOEK STREEKDORPEN EN LINTBEBOUWING GRONINGEN;

DEELSTUDIE VERKEERSAFWIKKELING

ir. Th. Michels

ing. Th.G.C. van der Heijden

Nota's van het Instituut zijn in principe interne communicatiemiddelen, dus geen officiële publikaties.

Hun inhoud varieert sterk en kan zowel betrekking hebben op een eenvoudige weergave van cijferreeksen, als op een concluderende discussie van onderzoeksresultaten. In de meeste gevallen zullen de conclusies echter van voorlopige aard zijn omdat het onderzoek nog niet is afgesloten.

Bepaalde nota's komen niet voor verspreiding buiten het Instituut in aanmerking

540784



Deze nota is tevens verschenen
als deelrapport no. 9 van het
onderzoek Streekdorpen en Lintbe-
bouwing in de provincie Groningen.

ONDERZOEK STREEKDORPEN EN LINTBEBOUWING IN DE PROVINCIE GRONINGEN

Het onderzoek is uitgevoerd door het Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding te Wageningen en het Planologisch Studiecentrum van de Rijksuniversiteit te Groningen, in opdracht van Gedeputeerde Staten van de provincie Groningen.

Dit rapport is één van de 14 deelrapporten waarin de resultaten van onderzoek zijn weergegeven.

Daarnaast is een eindrapport verschenen met een samenvatting van de onderzoeksresultaten, beleidsadviezen en ontwikkelingsmodellen voor de streekdorpen.

De volgende deelrapporten zijn verschenen:

1. ontstaangeschiedenis streekdorpen en lintbebouwing
2. inventarisatie topografische- en bevolkingskenmerken
3. ontwikkeling woningvoorraad
4. detailhandel en ambacht
5. sociaal-kulturele voorzieningen
6. bezit en gebruik onroerend goed
7. ruimtelijke aspecten van het woonklimaat
8. het fysiek woonklimaat
9. verkeersafwikkeling
10. het sociaal woonklimaat
11. ruimtelijk koopgedrag
12. bedrijfs-ekonomische kenmerken midden- en kleinbedrijf
15. groepsgesprekken
14. juridische instrumenten

I N H O U D

	blz.
SAMENVATTING	
1. INLEIDING	1
2. PROBLEEMSTELLING	2
3. TYPOLOGIE VAN DORPEN NAAR VERKEERSBEPALENDE FAKTOREN	4
3.1. Verkeersbepalende factoren	4
3.2. Analyse en indeling van bestaande dorpen	7
3.3. Te vergelijken bestaande en potentiële situaties	11
4. SCHEMATISCHE VERGELIJKING VAN VERKEERSAFWIKKELING IN DE ONDERSCHIEDEN SITUATIES	13
4.1. Werkwijze	13
4.2. Toepassing op de onderscheiden situaties	16
4.3. Conclusies	28
5. MOGELIJKHEDEN VAN EEN WISKUNDIG VERKEERSMODEL TER VERGELIJKING VAN DE ONDERSCHIEDEN SITUATIES	30
5.1. Modelformulering	30
5.2. Toetsing van het model aan waarnemingen	32
5.3. Conclusies met betrekking tot modelgebruik	33
6. LITERATUUR	34
BIJLAGEN	

SAMENVATTING

Voor een kwantitatieve vergelijking van het verkeerspatroon in streekdorpen met verschillende bebouwings- en wegenpatronen zijn de verkeersbepalende kenmerken van 96 Groningse streekdorpen verzameld en geanalyseerd. Een eenvoudige dorpentypologie op grond hiervan kon niet worden opgesteld.

Vervolgens is een geschematiseerde rekenmethode ontwikkeld ter beschrijving van het verkeersintensiteitsverloop (ritten/etmaal) en de verkeersprestatie (ritkm/etmaal) op de hoofdweg door een streekdorp, met als variabelen de externe ontsluiting, de kernomvang, de kernsituering, de lintomvang, de verdeling van woningen over het lint, en de lintlengte. Hieruit resulteren nomogrammen ter bepaling van het effect van elke van deze factoren op de verkeersprestatie ten behoeve van ruimtelijk beleid binnen de streekdorpen.

Tenslotte is aangegeven welke gegevens zouden moeten worden verzameld voor de toepassing van een complexer wiskundig model van ritproductie en -distributie in streekdorpen en lintbebouwing.

1. INLEIDING

Deze nota rapporteert over een deelstudie naar verkeersafwikkeling, deel uitmakend van de tweede fase van het Onderzoek Streekdorpen en Lintbebouwing in de provincie Groningen.

In de eerste, verkennende fase van dit onderzoek is ten aanzien van diverse aspecten de ontwikkeling en huidige situatie in 96 Groningse streekdorpen geïnterpreteerd. In de tweede fase vindt een aantal deelstudies naar onderscheiden aspecten plaats (o.a. distributieplanologisch onderzoek, sociaal-culturele voorzieningen, sociale relaties, verkeersafwikkeling, verkeersleefbaarheid, ruimtelijke aspecten van het woonklimaat, beleidsinstrumentarium).

Conclusies uit deze deelstudies zullen in de hieropvolgende slotfase van het onderzoek tezamen moeten dienen als aanknopingspunten voor een geïntegreerd beleid ten aanzien van streekdorpen en lintbebouwing, zoals dat door provincie en/of gemeenten zou kunnen worden gevoerd.

In de hierna beschreven deelstudie ligt de nadruk op kwantitatieve verschillen in verkeerspatroon tussen diverse typen streekdorpen. Enkele kwalitatieve aspecten van verkeersleefbaarheid (met name hinder voor bewoners en veiligheid voor kinderen) worden behandeld in een deelstudie betreffende de ruimtelijke aspecten van het woonklimaat (HEESTER, 1976). Combinatie van kwantitatieve en kwalitatieve aspecten in de genoemde slotfase zal pas een volledige beoordeling van alle aspecten van verkeer in de streekdorpen mogelijk maken.

2. PROBLEEMSTELLING

Als probleemstelling in deze deelstudie kunnen de volgende drie vragen worden geformuleerd:

1. Is de verkeersafwikkeling in een streekdorp in aard en omvang in belangrijke mate afhankelijk van de ruimtelijke structuur (wegen- en bebouwingspatroon) van het dorp?
2. Kan deze eventuele afhankelijkheid kwantitatief worden vastgesteld?
3. Kan op grond hiervan, voor diverse dorpstypen de ruimtelijke ontwikkeling worden aangewezen waarbij de verkeersprestatie (in voertuig km) minimaal is?

Aan deze vragen kan de volgende uitwerking worden gegeven als aanzet voor het in de volgende hoofdstukken beschreven onderzoek:

ad 1. Het verkeer in een dorp is, op grond van zijn herkomst en bestemming, te splitsen in drie groepen:

- doorgaand verkeer met herkomst en bestemming buiten het dorp,
- extern verkeer met of herkomst of bestemming binnen het dorp,
- intern verkeer met herkomst en bestemming binnen het dorp.

De enige invloed die de ruimtelijke structuur van een dorp op doorgaand verkeer kan hebben is gelegen in het wegennet; aanleg van een zogenaamde rondweg of parallelweg kan het doorgaande, bovenlokale verkeer buiten het dorp brengen. De produktie en attractie van bovenlokale verplaatsingen zijn buiten het dorp gelegen en derhalve onafhankelijk van het bebouwingspatroon van het dorp.

Waar de probleemstelling ten aanzien van doorgaand verkeer dus in principe triviaal is, spitst de vraag zich toe op het externe en het interne verkeer. De produktie en de ruimtelijke verdeling van verplaatsingen in deze twee groepen hangen ongetwijfeld af van de vorm van het wegennet en van de omvang en situering van bebouwing in het dorp. Nu komt echter de vraag naar voren, in welke gevallen deze afhankelijkheid zich nog zal manifesteren ten opzichte van een in veel dorpen aanzienlijke hoeveelheid doorgaand verkeer. Teneinde te kunnen beoordelen of de externe en interne verkeersafwikkeling in de Groningse situatie voldoende belangrijk is als vergelijkingscriterium voor de ruimtelijke structuur van de streekdorpen, zal

het nodig zijn van de 96 streekdorpen vast te stellen hoe de situatie met betrekking tot het doorgaand verkeer is en welke de overige verkeersbepalende factoren zijn. Op grond van een kwantitatieve indeling van de dorpen naar deze factoren zou dan wellicht een eenvoudige typologie zijn te maken waarmee duidelijk wordt, in welke dorpen de vraagstelling al of niet relevant is. De totstandkoming van zo'n typologie wordt beschreven in hoofdstuk 3.

Daarna moet dan worden nagegaan of de relevante dorpstypen die thans voorkomen ofwel in de toekomst kunnen ontstaan, belangrijke verschillen in verkeersafwikkeling kunnen vertonen. Dit gebeurt op een eenvoudige, sterk geschematiseerde wijze in hoofdstuk 4. ad 2. Vervolgens wordt gevraagd naar een rekenmethode, die de produktie van verplaatsingen, de distributie ervan over bestemmingen, het voertuiggebruik en de routekeuze zó genuanceerd beschrijft, dat de invloed van wegennet en bebouwingspatroon hierop zichtbaar wordt. Teneinde richtlijnen voor ruimtelijk beleid te kunnen opstellen welke binnen een groep dorpen van een bepaald type algemeen gelden, zal bij deze rekenregels moeten worden geabstraheerd van de specifieke situatie (met name de ruimtelijke situering ten opzichte van andere nederzettingen) van individuele dorpen. De rekenmethode zal dus verschillen in verkeersafwikkeling moeten kunnen aantonen tussen geschematiseerde (dus fictieve) representanten van elk der voorkomende dorpstypen.

Niettemin zal toetsing van de juistheid van de rekenmethode moeten plaatsvinden door de uitkomsten ervan te vergelijken met verkeerswaarnemingen in diverse Groningse streekdorpen van verschillende typen. In hoofdstuk 5 wordt een poging om tot zo'n methode te komen beschreven.

ad 3. Indien de verkeersprestatie (in voertuig km) in het dorp moet worden gehanteerd als vergelijkingscriterium, zal uit de rekenmethode in principe het verloop van de verkeersintensiteiten van intern en extern verkeer op alle relevante delen van het wegennet (doch in ieder geval op de hoofdweg) moeten resulteren. Aan de hand hiervan kunnen diverse dorpstypen en vooral ook ontwikkelingsvarianten worden vergeleken.

3. TYPOLOGIE VAN DORPEN NAAR VERKEERSBEPALENDE FAKTOREN

3.1. Verkeersbepalende factoren

Teneinde na te gaan in welke dorpen en in welke mate de ruimtelijke structuur (wegennet en bebouwingspatroon) bepalend kunnen zijn voor de verkeersafwikkeling is voor alle 96 dorpen uit het onderzoek de intensiteit van doorgaand verkeer op de hoofdweg geschat. Tevens is een aantal kenmerken vastgesteld van de ruimtelijke structuur, voorzover daarvan invloed op interne en externe verkeersafwikkeling mag worden verondersteld. De aldus onderscheiden factoren, hun definities, de wijze waarop ze per dorp zijn bepaald en de gekozen klasse-indelingen zijn de volgende (zie ook bijlage 1):

- **Doorgaande intensiteit**; dit is de jaar-etmaal-gemiddelde intensiteit (J.E.G.) in beide richtingen over de hoofdweg van verkeer met zowel herkomst als bestemming buiten het dorp, in motorvoertuigen per etmaal.

Deze is geschat op grond van intensiteitstellingen uit 1972 van PROVINCIALE WATERSTAAT GRONINGEN (1975), rekening houdend met de externe verkeersproductie van het betreffende dorp. Voor enkele dorpen waarvan geen tellingen beschikbaar zijn werd een eigen schatting uitgevoerd, mede op grond van de intensiteitskaart in de interimrapportage beleidsnota personenverkeer en vervoer (PROVINCIE GRONINGEN, 1975).

Gegeven deze procedure werd het verantwoord geacht, een indeling in vijf intensiteitsklassen te hanteren en de dorpen te groeperen rond vijf globale waarden ter indicatie van het intensiteitsniveau:

klassegrenzen J.E.G.doorg.:	globaal 'klasse midden'
< 250 mvt/etm	100 mvt/etm
250 - 750 "	500 "
750 - 2000 "	1000 "
2000 - 4000 "	3000 "
> 4000 "	5000 "

(N.B.: deze vijf globale waarden zijn dus geen rekenkundige klasse-middens; ze duiden alleen de orde van grootte aan).

- **E x t e r n e a a n s l u i t i n g e n**; dit zijn die wegaansluitingen van het dorp op het omringende wegennet welke in belangrijke mate gebruikt worden door extern verkeer. De situering ervan wordt dus sterk bepaald door de richtingen waarin het dorp (met woon-werkverkeer), winkelverkeer, schoolverkeer enz.) is georiënteerd op omliggende kernen. De routes naar wegen van hogere orde spelen daarbij uiteraard een rol.

Dit kenmerk is per dorp vastgesteld door combinatie van de eerdergenoemde intensiteitskaart, de topografische kaart en verkenning van de situatie ter plaatse.

Hierbij zijn drie klassen onderscheiden:

- . een aansluiting aan het uiteinde van het lint (e)
 - . een aansluiting centraal in het lint (m)
 - . twee aansluitingen, een aan elk uiteinde van het lint (2e).
- **A a n t a l w o n i n g e n (W_D)**; het aantal bewoonde woningen per dorp in 1971 is in de inventarisatiefase reeds vastgesteld (HEESTER en MICHELS, 1977). De dorpen zijn gegroepeerd rond zes globale waarden, behorende bij de volgende grootteklassen:

klassegrenzen W_D :	globaal 'klasse-midden'
< 150 woningen	100 woningen
150 - 250 "	200 "
250 - 350 "	300 "
350 - 600 "	500 "
600 - 900 "	750 "
> 900 "	1000 "

- **K e r n a a n d e e l (W_K/W_D)**; dit is het aantal bewoonde woningen in 1971 in de bebouwingskern achter het lint (W_K), uitgedrukt als fraktie van alle dorpswoningen (W_D).

Van de bebouwingskern is in de inventarisatiefase de bruto-oppervlakte in ha bepaald. HEIMANS (1973) geeft voor de bruto woningendichtheid in woongebieden met 40% vrijstaande en 60% eengezinsrijenhuizen als norm 15 woningen per ha. Met deze dichtheidsnorm is uit de kernoppervlakte het aantal kernwoningen afgeleid.

De dorpen zijn naar kernaandeel gegroepeerd rond vier globale waarden:

klassegrenzen W_K/W_D :	globaal 'klasse midden'
< 0,1	0
0,1 - 0,4	0,25
0,4 - 0,6	0,50
> 0,6	0,75

Een kernaandeel van 1,00 komt in streekdorpen per definitie niet voor.

- **K e r n s i t u e r i n g**; dit is de situering van de bebouwingskern ten opzichte van het bebouwingslint. Deze situering is in de inventarisatie afgeleid uit topografische kaarten en thans ter plaatse geverifieerd. Daarbij zijn twee klassen onderscheiden:

- . kern aan een uiteinde van het lint (e)
- . kern centraal in het lint (m)

- **L i n t a a n d e e l (W_L/W_D)**; dit is het aantal bewoonde woningen in 1971 in het bebouwingslint langs de hoofdweg, (W_L), uitgedrukt als fraktie van alle dorpswoningen. Deze is als volgt bepaald.

Het aantal dorpswoningen verminderd met het aantal kernwoningen is het aantal woningen aan hoofdweg (lint), dwarswegen en parallelwegen samen (zie voor deze begrippen HEESTER en MICHELS, 1977). Dit aantal gedeeld door de totale nettobebouwingslengte langs hoofd-, dwars- en parallelwegen van het dorp geeft een gemiddelde lineaire woningdichtheid. Deze lineaire dichtheid maal de netto bebouwingslengte langs de hoofdweg levert het aantal woningen in het lint langs de hoofdweg.

De dorpen zijn naar lintaandeel gegroepeerd in vier klassen:

klassegrenzen W_L/W_D :	globaal 'klasse midden'
< 0,4	0,25
0,4 - 0,6	0,50
0,6 - 0,9	0,75
> 0,9	1,00

Een lintaandeel van 0,00 komt in streekdorpen per definitie niet voor.

- **L i n t l e n g t e (1)**; dit is de brutobebouwingslengte van het dorp langs de hoofdweg omstreeks 1971. Deze lengte is in de inventarisatie bepaald op grond van topografische kaarten en waarnemingen ter plaatse. De dorpen zijn naar lintlengte gegroepeerd rond drie

globale waarden in de volgende lengteklassen:

klassegrenzen l:	globaal 'klasse midden'
1100 - 2500 m	1500 m
2600 - 4500 m	3500 m
> 4500 m	6000 m

Dorpen korter dan 1100 m zijn niet in het onderzoek opgenomen.

3.2. Analyse en indeling van bestaande dorpen

In bijlage 1 zijn voor de 96 Groningse streekdorpen uit het onderzoek de bovengenoemde 7 factoren samengevat. Op grond van het aantal klassen dat bij de 7 factoren in totaal is onderscheiden, bestaan in principe $5 \times 3 \times 6 \times 4 \times 2 \times 4 \times 3 = 8640$ mogelijke combinaties van klassen waartoe de dorpen zouden kunnen behoren. Een deel van deze combinaties valt echter af omdat ze per definitie niet kunnen voorkomen (bijv. lintaandeel + kernaandeel > 1 , en: indien kernaandeel = 0 is kernsituering niet van toepassing), maar desondanks resteren nog altijd 2430 reëel mogelijke combinaties.

Indien de 96 dorpen in deze indeling worden geplaatst, valt te verwachten dat ze nog sterk gespreid zijn: de 96 dorpen blijken verdeeld over 87 verschillende klassen. Hieruit kan dus niet een eenvoudige typologie worden afgeleid. Een nadere analyse van de kenmerken is noodzakelijk.

In hoeveel dorpen en in welke mate de dorpsomvang bepalend kan zijn voor de verkeersafwikkeling hangt vooral af van de combinatie van dorpsomvang en doorgaande verkeersintensiteit. Deze combinatie is samengevat in tabel 1.

De dorpen zijn vrij gelijkmatig over deze tabel gespreid; een duidelijk verband tussen beide kenmerken bestaat niet. In de dorpen linksonderin de tabel (veel woningen, weinig doorgaand verkeer) zal het effect van de ruimtelijke structuur het sterkst waarneembaar zijn; in de dorpen rechtsboven het minst. Dit vormt echter geen reden om deze laatste groep uit te sluiten van verdere vergelijking, omdat juist in de kleinere dorpen het lintaandeel in het algemeen hoog is, terwijl de overige factoren in deze groep (met name de lintlengte, externe aansluitingen en kernsituering) sterk gespreid zijn.

Tabel 1. Frekwentieverdeling van 96 dorpen naar doorgaande intensiteit en aantal woningen

Aantal woningen	Doorgaande intensiteit (mvt/etm.)					totaal
	100	500	1000	3000	5000	
100	5	8	11	1	1	26
200	11	5	6	5	1	28
300	3	5	10	1	-	19
500	6	2	4	3	-	15
750	-	1	2	3	-	6
1000	-	-	-	2	-	2
Totaal	25	21	33	15	2	96

De waarden van kernaandeel en lintaandeel in de dorpen worden getoond in fig. 1. In 25 dorpen overtreft het kernaandeel het lintaandeel. In 40 dorpen is het kernaandeel nul of zeer klein;

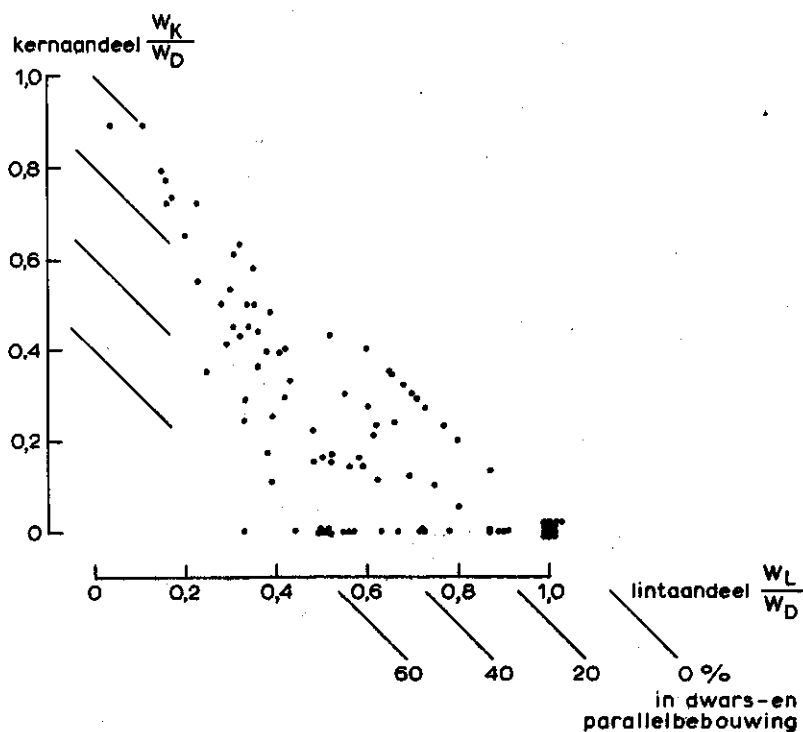


Fig. 1. Kernaandeel en lintaandeel in 96 streekdorpen

in slechts 13 dorpen is het lintaandeel = 1. (zuivere linten).
 Deze laatste 13 dorpen zijn alle kleiner dan 250 woningen.
 De figuur illustreert voorts nog dat in bijna de helft van de dorpen meer dan 20% van de woningen aan parallel- of dwarswegen staat (lintaandeel + kernaandeel < 0,8).

Er kan geen verband worden geconstateerd tussen de situering van externe aansluitingen en de kernsituering (tabel 2); dorpen zonder kern of met de kern centraal in het lint hebben relatief evenveel één aansluiting aan het eind als dorpen met de kern aan het eind.

Tabel 2. Frekwentieverdeling van 96 streekdorpen naar externe aansluitingen en kernsituering

kernsituering	Externe aansluitingen			totaal
	één aan eind	één centraal	twee aan eind	
geen kern	9	2	29	40
kern aan eind	6	1	23	30
kern centraal	5	1	20	26
totaal	20	4	72	96

Een verband tussen de dorpsgrootte en de situering van externe aansluitingen wordt geïllustreerd door tabel 3.

Tabel 3. Frekwentieverdeling van 96 streekdorpen naar externe aansluitingen en aantal woningen

aantal woningen	Externe aansluitingen			totaal
	één aan eind	één centraal	twee aan eind	
100	9	2	15	26
200	8	2	18	28
300	-	-	19	19
500	3	-	12	15
750	-	-	6	6
1000	-	-	2	2
totaal	20	4	72	96

In de grotere dorpen komt de situatie met twee aansluitingen relatief meer voor dan die met één aansluiting (centraal of aan een uiteinde). Dit ligt voor de hand; een dorp heeft enerzijds in het verleden meer groeimogelijkheden gehad naarmate het vanuit meer richtingen bereikbaar was en anderzijds zal het eerder van meer zijden verkeer aantrekken naarmate het groter is.

Er kan geen verband worden geconstateerd tussen kernaandeel en kernsituering (zie tabel 4). Centraal gelegen kernen vormen geen aantoonbaar groter aandeel in de dorpsomvang dan aan het eind gelegen kernen.

Tabel 4. Frekwentieverdeling van 96 streekdorpen naar kernaandeel en kernsituering

kernsituering	Kernaandeel				totaal
	0	0,25	0,50	0,75	
geen kern	40	-	-	-	40
kern aan eind	-	15	10	1	26
kern centraal	-	17	8	5	30
totaal	40	32	18	6	96

Evenmin kan worden vastgesteld dat het kernaandeel verband houdt met de dorpsgrootte, zij het dat in dorpen kleiner dan 300 woningen de dorpen zonder kern bijna 6 x zo sterk zijn vertegenwoordigd (37 van de 65) als in dorpen groter dan 300 woningen (3 van de 31).

Samenvattend kan niet worden geconcludeerd dat de dorpen kunnen worden ingedeeld in een klein aantal groepen waarbinnen de kenmerken weinig verschillen. Een typologie als ingang voor vergelijking van de verkeersafwikkeling is dus vooraf niet te maken. Teneinde verschillen in interne en externe verkeersafwikkeling kwantitatief te onderzoeken lijkt het daarom opportuun, alle factoren (uiteraard behalve het doorgaande verkeer), te weten externe aansluitingen, aantal woningen, kernaandeel, kernsituering, lintaandeel en lintlengte, als onafhankelijke variabelen in de berekeningen in te voeren.

3.3. Te vergelijken bestaande en potentiële situaties

De ten aanzien van interne en externe verkeersafwikkeling te vergelijken situaties kunnen nu worden samengesteld door de genoemde factoren als volgt als onafhankelijke variabelen te introduceren:

- e x t e r n e a a n s l u i t i n g e n; de hierboven behandelde drie klassen van bestaande dorpen (één aan eind, één centraal, twee aan eind) dienen te worden gehandhaafd, zij het dat in de middelste klasse (één centraal) slechts vier dorpen voorkomen. Het is interessant deze aan te vullen met twee potentiële situaties, welke ontstaan door uitbreiding van de bestaande met één of twee aansluitingen: één centraal + één aan een eind, één centraal + twee aan de einden. Op deze wijze kan het effect van aanleg van een extra aansluiting in diverse bebouwingssituaties worden onderzocht.
- a a n t a l k e r n w o n i n g e n; dit aantal kan als numerieke variabele in de berekeningen worden betrokken. In de 96 dorpen varieert de kernomvang tussen 0 en circa 750 woningen.
- k e r n s i t u e r i n g; de twee hierboven behandelde klassen (kern aan eind, kern centraal) kunnen, naast de situatie zonder kern, worden gehandhaafd. Dit maakt het mogelijk, voor de dorpen zonder kern waar toekomstige kernvorming aan de orde is, het verschil tussen deze twee situeringen te overwegen.
- a a n t a l l i n t w o n i n g e n; dit aantal kan, evenals de kernomvang, als numerieke grootheid in de berekeningen worden behandeld. In de 96 dorpen varieert het aantal lintwoningen tussen circa 20 en circa 800 woningen.

Tabel 5. Te vergelijken bestaande en potentiële situaties

Externe aansluitingen	Verdeling van lintwoningen	Kernsituering		
		zonder kern	kern aan eind	kern centraal
één aan eind →	gelijkmatig			
	max. aan eind			
	max. in midden			
twee aan de einden ← →	gelijkmatig			
	max. aan eind			
	max. in midden			
één centraal ↓	gelijkmatig			
	max. aan eind			
	max. in midden			
één centraal + één aan eind ↓ →	gelijkmatig			
	max. aan eind			
	max. in midden			
één centraal + twee aan de einden ↓ ← →	gelijkmatig			
	max. aan eind			
	max. in midden			

- v e r d e l i n g v a n l i n t w o n i n g e n; hoewel nog niet in de analyse genoemd, is het verloop van de lineaire woningendichtheid langs het lint in de dorpen een sterk variërende faktor. Veel overgangsvormen tussen dorpen zonder en met kern bestaan in feite uit plaatselijke verhogingen van deze woningendichtheid. Dit beeld wordt veelal nog versterkt indien men, sterk vereenvoudigend, de woningen langs dwars- en parallelwegen ter plaatse van hun wegaansluiting geprojecteerd denkt op het lint. Daar verschillen in deze verdeling de verkeersafwikkeling kunnen beïnvloeden is het interessant, tenminste drie gevallen daarvan te onderscheiden:
 1. gelijkmatig verdeeld;
 2. oplopend van nul aan één eind tot maximaal aan het andere eind;
 3. oplopend van nul aan beide einden tot maximaal in het midden.Denken we aldus de woningen aan dwars- en parallelwegen hierin opgenomen, dan varieert in de 96 dorpen dit aantal 'lintwoningen' tussen circa 20 en circa 1000.
- l i n t l e n g t e; de lengte van het lint langs de hoofdweg kan als een numerieke grootheid worden behandeld. In de 96 dorpen varieert deze lengte tussen 1100 m en 7300 m.

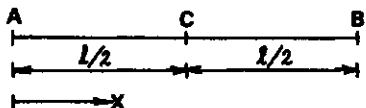
Resumerend toont tabel 5 de situaties met betrekking tot externe aansluitingen, verdeling van lintwoningen en kernsituering, welke voor vergelijking ten aanzien van verkeersafwikkeling in aanmerking komen, waarbij het aantal kernwoningen, het aantal lintwoningen en de lintlengte als numerieke variabelen kunnen worden gehanteerd.

4. SCHEMATISCHE VERGELIJKING VAN VERKEERSAFWIKKELING IN DE ONDERSCHIEDEN SITUATIES

4.1. W e r k w i j z e

Ter vergelijking van de verkeersintensiteit en de verkeersprestatie van extern en intern verkeer worden deze twee grootheden met de hierna beschreven methode schematisch benaderd als functie van de in 3.3. genoemde variabelen.

Daarbij worden de volgende symbolen en begrippen gehanteerd:

- | | | |
|---|--|------------------------|
| <p>l = lengte van het lint</p> <p>W_L = aantal woningen in het lint</p> <p>W_K = aantal woningen in de kern buiten het lint</p> <p>a = fractie extern verkeer via A</p> <p>b = " " " " B</p> <p>c = " " " " C</p> |  | <p>} a + b + c = 1</p> |
| <p>$q(x)$ = aantal lintwoningen per lengteeenheid als functie van x ($0 \leq x \leq 1$)</p> | | |
| <p>e = gemiddeld aantal aankomsten + vertrekken externe ritten per woning per etmaal</p> | | |
| <p>i = gemiddeld aantal aankomsten + vertrekken interne ritten per woning per etmaal</p> | | |
| <p>$E(x)$ = aantal externe ritten op punt x van het lint per etmaal</p> | | |
| <p>$I(x)$ = " interne " " " " " " " " " "</p> | | |
| <p>v^e = verkeersprestatie extern verkeer langs het lint per etmaal</p> | | |
| <p>v^i = " intern " " " " " " " "</p> | | |

De berekeningen zijn als volgt uitgevoerd. Voor elke situatie uit tabel 5 is het verloop van de externe verkeersintensiteit $E(x)$ over het lint bepaald als functie van x, l, W_L , W_K , a, b, c en e. Hierbij is aangenomen dat alle woningen het gemiddelde aantal e ritten per etmaal genereren, en dat deze ritten zich alle volgens de fracties a, b en c over de externe aansluitingen van het dorp verdelen, onafhankelijk van de afstand tot die aansluitingen. Daarbij zijn de lintwoningen W_L over het lint verdeeld gedacht volgens een continue functie $q(x)$ en de kernwoningen W_K in een punt (B of C) geconcentreerd gedacht.

Bij wijze van voorbeeld is in de situatie zonder kern met twee aansluitingen aan de einden ($a+b = 1$) $E(x)$ gelijk aan de tussen A en x gegenereerde externe ritten voorzover ze via B gaan + de tussen x en B gegenereerde externe ritten voorzover ze via A gaan:

$$E(x) = b \int_0^x eq(x)dx + a \int_x^1 eq(x)dx \quad (1)$$

Vervolgens is het verloop van de interne verkeersintensiteit $I(x)$ over het lint bepaald als functie van x , l , W_L , W_K , a , b , c en i . Aan alle woningen is hierbij de gemiddelde produktie + attractie i ritten per etmaal toegekend. Verder geldt weer dezelfde continue verdelingsfunctie $q(x)$ voor W_L en de puntvormige concentratie voor W_K . Aangenomen wordt dat de interne relaties van iedere woning zich over het dorp verdelen evenredig met de aantallen woningen, dus onafhankelijk van de afstand tussen herkomst en bestemming. Aldus wordt het aantal interne ritten dat het punt x passeert:

$$I(x) = \frac{W_{x,l}}{W_L + W_K} \int_0^x iq(x)dx = \frac{W_{0,x}}{W_L + W_K} \int_x^l iq(x)dx \quad (2)$$

Bij deze evenredige verdeling wordt tevens aangenomen dat de niet-woninggerichte ritten (naar werk, winkels, school e.d.) zich conformeren met de woninggerichte ritten, met andere woorden dat al deze bestemmingen dezelfde verdeling over het lint en de eventuele kern hebben als de woningen.

Voorts is de som van $E(x)$ en $I(x)$ bepaald.

Vervolgens is de verkeersprestatie (aantal ritten x afgelegde weg) op de hoofdweg langs het lint in voertuigkm bepaald voor beide verkeersgroepen. Deze luiden

$$\text{voor extern verkeer: } V^e = \int_0^l E(x)dx \quad (3)$$

$$\text{voor intern verkeer: } V^i = \int_0^l I(x)dx \quad (4)$$

Tevens is de som van V^e en V^i bepaald.

In eerste instantie lijkt de totale verkeersprestatie, $V^e + V^i$, als indicatie van de mate waarin de verkeersstroom het bebouwingslint belast een interessant criterium ter vergelijking van de diverse situaties. Ook de maximale totale intensiteit en de plaats waar deze optreedt op de hoofdweg kan in verband met verkeerstechnische maatregelen worden overwogen. Daarom wordt het verloop van $E(x)$,

$I(x)$ en $E(x) + I(x)$ voor elke situatie grafisch weergegeven.

(zie bijlage 2)

4.2. T o e p a s s i n g o p d e o n d e r s c h e i d e n s i t u a t i e s

Met behulp van de in 4.1. ingevoerde symbolen zijn de in tabel 5 onderscheiden situaties kwantitatief vertaald. Dit is samengevat in tabel 6.

In de eerste kolom van deze tabel neemt de complexiteit van de situaties van boven naar beneden toe en daarmee ook die van de af te leiden formules voor intensiteit en verkeersprestatie. Het laatste geval ($a+b+c=1$) is het meest algemene; de vier voorgaande zijn bijzondere gevallen van het laatste, zodat de formules voor deze eerste vier uit die voor het laatste geval zijn af te leiden, door nul te stellen van één of twee van de frakties a , b en c .

In de tweede kolom zijn voor de drie onderscheiden verdelingsvormen van lintwoningen lineaire functies ingevoerd. Hoewel in werkelijkheid de verdeling veelal meer parabolisch is (gelijkmatiger nabij het maximum, steiler nabij het eind) is een lineaire vorm gekozen, in de eerste plaats omdat door deze overdrijving eventuele verschillen duidelijker zijn te onderkennen, in de tweede plaats omdat door deze schematisering de af te leiden formules eenvoudiger te begrijpen en te hanteren zijn.

De combinaties van kernsituering, verdeling van lintwoningen en externe aansluitingen zijn zodanig gekozen, dat de bebouwingspatronen in dezelfde richting asymmetrisch zijn als de aansluitingssituaties; dit wil zeggen waar de lintwoningendichtheid in B maximaal is of de kern in B ligt, ligt in de eerste en vierde aansluitingssituatie ook de eindaansluiting in B. Het tegenovergestelde geval ligt niet voor de hand en is in de 96 Groningse streekdorpen ook niet aangetroffen.

In de volgorde van de nummering in tabel 6 zijn voor elke van de daar onderscheiden 45 situaties de in 4.1. genoemde formules alsmede hun grafische weergave afgeleid. Bijlage 2 (2.1 t/m 2.45) geeft hiervan een volledig overzicht. Het verloop van de intensiteiten is hierin geschetst voor de verhouding $W_L/W_K=4$, $i/e=3/2$ en, indien van toepassing, $b>a>c$.

Tabel 6. Te vergelijken situaties met hun variabelen

Externe aansluitingen	Verdeling van lintwoningen	Kernsituering		
		$W_K = 0$	$W_K \neq 0$ in B	$W_K \neq 0$ in C
$b = 1$ $a = c = 0$	$q(x) = \frac{W_L}{l}$ $q(x) = \frac{2W_L}{l^2} x$	1	2	3
		4	5	6
	$x \leq l/2 : q(x) = \frac{4W_L}{l^2} x$ $x \geq l/2 : q(x) = \frac{4W_L}{l^2} (l-x)$	7	8	9
		10	11	12
$a + b = 1$ $c = 0$	idem	13	14	15
		16	17	18
$c = 1$ $a = b = 0$	idem	19	20	21
		22	23	24
$b + c = 1$ $a = 0$	idem	25	26	27
		28	29	30
$a + b + c = 1$	idem	31	32	33
		34	35	36
		37	38	39
		40	41	42
		43	44	45

Bij vergelijking van de verkeersprestaties in de diverse situaties in bijlage 2 kan het volgende worden geconstateerd. (De gebruikte voet-indices van V verwijzen naar de nummering in tabel 6). Alle verkeersprestaties zijn lineair afhankelijk van de lintlengte l.

Wat betreft de externe verkeersprestatie blijkt in de situaties 1 t/m 9 (één aansluiting in B), dat:

$$V_3^e = V_9^e > V_1^e = V_2^e = V_7^e = V_8^e > V_4^e = V_5^e$$

$$\text{en: } V_3^e = V_9^e > V_6^e > V_4^e = V_5^e$$

d.w.z. de externe verkeersprestatie V^e wordt niet beïnvloed door de aanwezigheid van een kern in B. Dat is logisch; het gehele kernverkeer verlaat het dorp direkt via B en belast de hoofdweg in het lint niet. Verder leveren de symmetrische verdelingen 1, 2, 7 en 8 dezelfde ritprestatie, evenals 3 en 9. V^e blijkt groter naarmate het zwaartepunt van de woningen verder van de externe aansluiting aflight.

In de situaties 10 t/m 18 (twee aansluitingen aan de einden) blijkt dat:

$$V_{12}^e = V_{18}^e \quad \text{en} \quad V_{11}^e = V_{17}^e > V_{10}^e = V_{16}^e$$

De symmetrische lintverdelingen leveren paarsgewijze een gelijke V^e , ongeacht de kernsituering.

Indien B de belangrijkste aansluiting is, ($b > a$ oftewel $b > \frac{1}{2}$) is tevens $V_{12}^e = V_{18}^e > V_{11}^e = V_{17}^e$, dus bij kernsituering in B is de verkeersprestatie kleiner dan bij kernsituering in C.

Opmerkelijk is tenslotte, dat bij volledig symmetrische bebouwing (10, 12, 16, 18), V^e evengroot is als in het geval met één aansluiting in B, en onafhankelijk van de verhouding tussen a en b.

In de situaties 19 t/m 27 (één aansluiting in C) blijkt, analoog aan de eerste groep (één aansluiting in B), dat:

$$V_{20}^e = V_{23}^e > V_{19}^e = V_{21}^e = V_{22}^e = V_{24}^e > V_{25}^e = V_{27}^e$$

dit wil zeggen zonder kern en met de kern centraal ontstaat dezelfde verkeersprestatie, dus onafhankelijk van W_K .

Verder blijkt opnieuw, dat V^e kleiner is naarmate het zwaartepunt van de bebouwing dichterbij de aansluiting ligt.

In de situaties 28 t/m 36 (één aansluiting centraal + één aan het eind) blijkt, dat V^e met een kern in alle situaties groter is dan zonder kern. Indien de beide aansluitingen even belangrijk zijn ($b=c=1/2$), heeft de kernsituering geen effect op V^e ; indien $b \neq c$, dan is V^e kleiner naarmate de kern dichterbij de belangrijkste aansluiting ligt. Zonder kern is V^e het kleinst als de aansluiting in C de belangrijkste is; met kern is dit afhankelijk van de verhouding tussen W_K en W_L .

De interne verkeersprestatie is uiteraard onafhankelijk van de aansluitingssituatie en wordt alleen bepaald door het bebouwingspatroon. Er bestaan derhalve slechts negen verschillende situaties ten aanzien van lintverdeling en kernsituering.

In het algemeen blijkt, dat V^i groter is naarmate de bebouwing meer excentrisch ten opzichte van zijn zwaartepunt ligt (de onderlinge afstanden gemiddeld groter zijn). Zo is bijvoorbeeld:

$$V_2^i > V_3^i > V_1^i > V_4^i > V_7^i.$$

Het verloop van de totale verkeersprestatie $V^e + V^i$ voor de vijf aansluitingssituaties en de twee kernsitueringen bij variatie van W_K , W_L en l is geresumeerd in nomogrammen in de figuren 2 t/m 4, en wel in fig. 2 voor gelijkmatige verdeling van lintwoningen, in fig. 3 voor maximale woningdichtheid aan een eind van het lint, in fig. 4 voor maximale woningdichtheid in het midden van het lint.

Bij het tekenen van deze nomogrammen is aangenomen dat $e = 4$ ritten/woning.etmaal en $i = 6$ ritten/woning.etmaal. Deze waarden zijn voor dorpen groter dan 100 woningen (in Groningen 90 van de 96 dorpen) realistisch; in kleinere dorpen wordt in het algemeen e groter en i geringer naarmate het dorp kleiner is. In die gevallen is dus het aandeel van de externe verkeersprestatie in deze berekening onderschat.

Voorts is, voorzover van toepassing, uitgegaan van een gelijkmatige verdeling van het externe verkeer over de aanwezige aansluitingen (dus: $a = b = 1/2$, $b = c = 1/2$, $a = b = c = 1/3$).

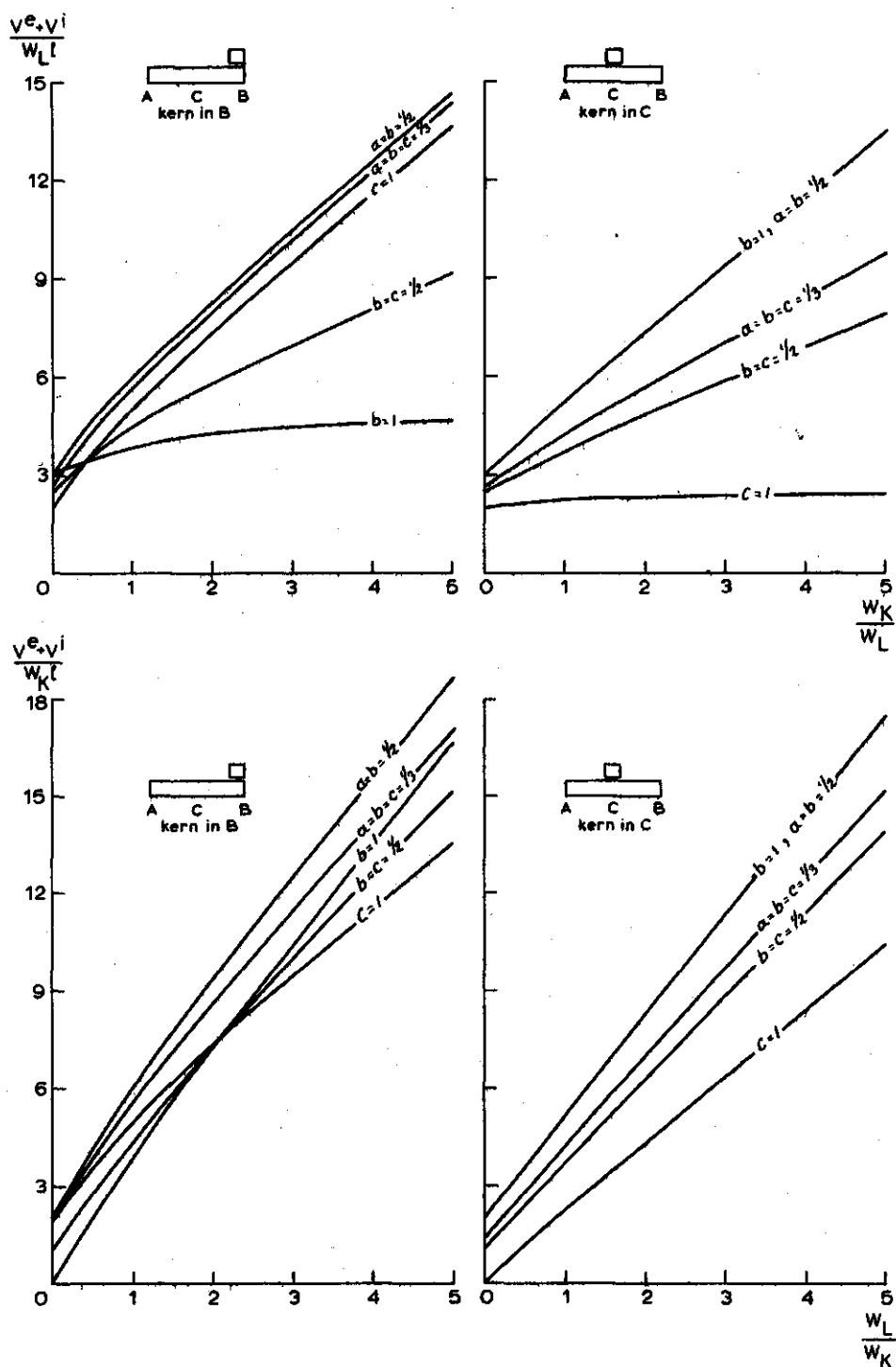


Fig. 2. Invloed van kernomvang (W_K), lintomvang (W_L) en lintlengte (l) op de verkeersprestatie ($V^e + V^i$) bij gelijkmatige verdeling van lintwoningen

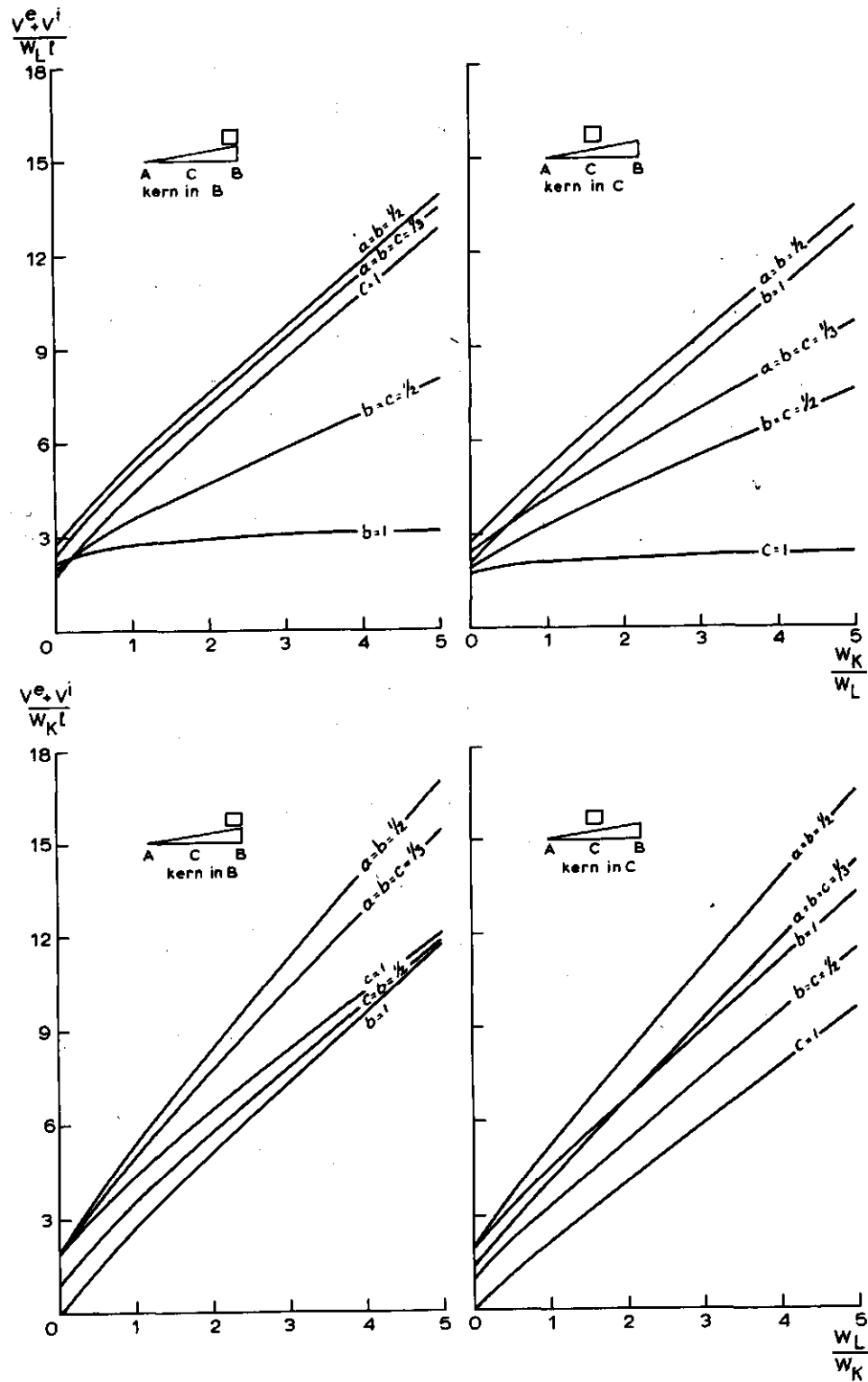


Fig. 3. Invloed van kernomvang (W_K), lintomvang (W_L) en lintlengte (l) op de verkeersprestatie ($V^e + V^i$) bij maximale woningdichtheid aan een eind van het lint

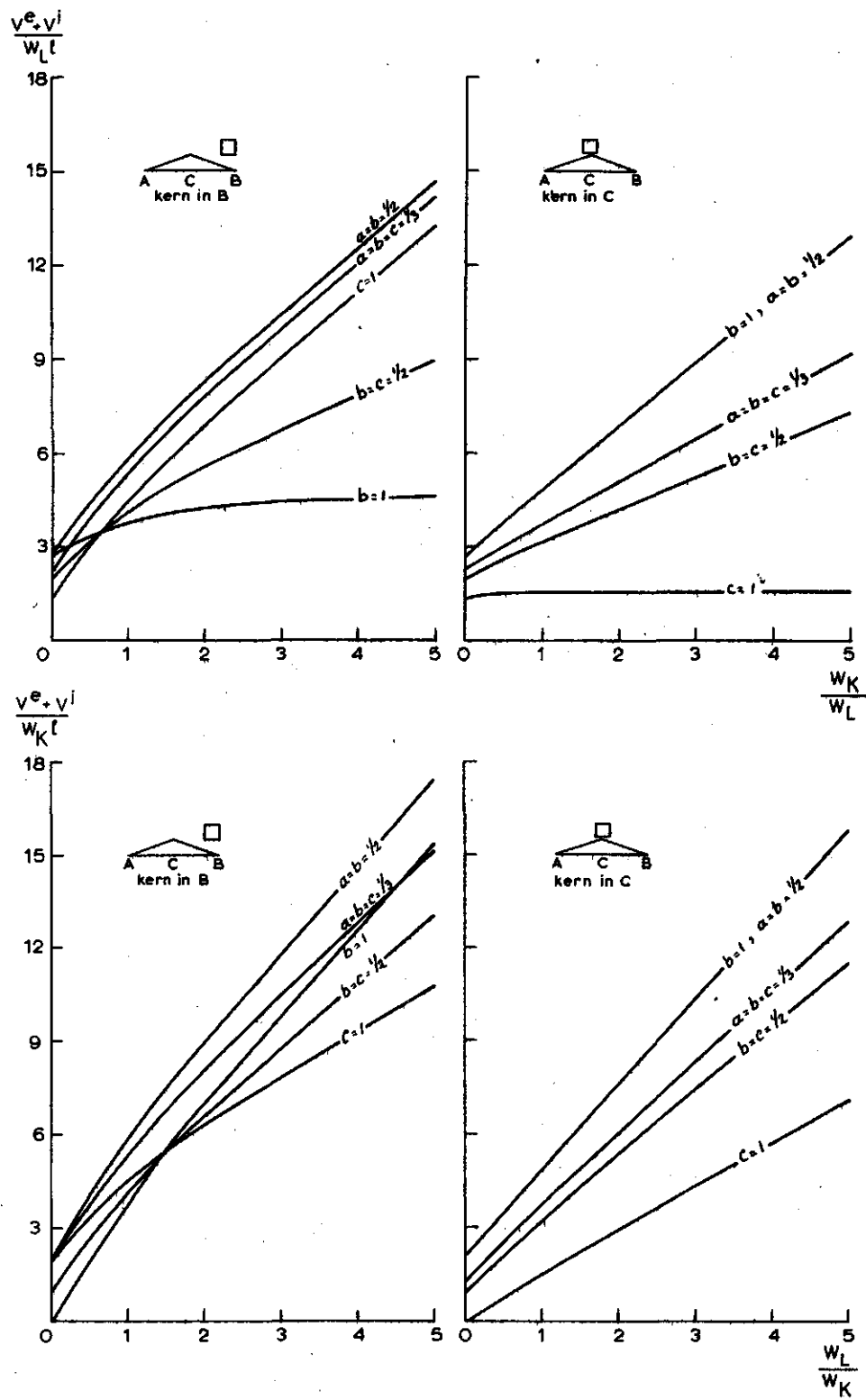


Fig. 4. Invloed van kernomvang (W_K), lintomvang (W_L) en lintlengte (l) op de verkeersprestatie ($v^e + v^i$) bij maximale woningdichtheid in het midden van het lint

De figuren moeten als volgt worden gelezen. In de bovenste reeks nomogrammen staat vertikaal de waarde $\frac{v^e + v^i}{W_L l}$ als functie van $\frac{W_K}{W_L}$. Door hier de schaal van beide assen te vermenigvuldigen met een bepaalde W_L -waarde leest men vertikaal de waarde $\frac{v^e + v^i}{l}$ af als functie van W_K bij die bepaalde W_L -waarde. Zodoende kan men dus het effect op de verkeersprestatie bestuderen van kernvergroting ten opzichte van ieder willekeurig aantal lintwoningen, en wel in het linker nomogram bij kernsituering aan het eind (in B) en rechts bij kernsituering centraal in het lint (in C).

Omgekeerd staat in de onderste reeks nomogrammen vertikaal de waarde $\frac{v^e + v^i}{W_K l}$ als functie van $\frac{W_L}{W_K}$. Door hier de schaal van beide assen te vermenigvuldigen met een bepaald aantal kernwoningen, W_K leest men $\frac{v^e + v^i}{l}$ af als functie van het aantal lintwoningen W_L bij die bepaalde W_K -waarde. Aldus wordt het effect zichtbaar van variatie van de lintomvang bij ieder willekeurige kernomvang.

De werkelijke verkeersprestatie in rit km/etmaal kan worden gevonden door de afgelezen waarde nog met de lintlengte l te vermenigvuldigen.

De samenhang tussen de bovenste en de onderste reeks figuren is deze, dat de variabelen op de x-as elkaars omgekeerde zijn; het traject $0 \leq \frac{W_K}{W_L} \leq 5$ valt dus bijna samen met $0,2 \leq \frac{W_L}{W_K} \leq \infty$. Waar dus bijvoorbeeld in fig. 2 (boven) drie curven elkaar snijden voor $\frac{W_K}{W_L} = 0,5$ treedt dit snijpunt in fig. 2 (onder) ook op voor $\frac{W_L}{W_K} = 2$. In feite kan dus met één van beide reeksen worden volstaan, maar worden beide gegeven teneinde aflezen en interpreteren te vergemakkelijken.

Tenslotte kan, wellicht ten overvloede, nog worden opgemerkt dat in de bovenste twee nomogrammen van iedere figuur de functie-waarden voor $\frac{W_K}{W_L} = 0$ per aansluitingssituatie links (kern in B) en rechts (kern in C) gelijk zijn. Dit laatste is logisch omdat voor $W_K = 0$ de kernsituering niet meer relevant is.

Een nadere analyse van de figuren 2 t/m 4 leert het volgende.

- De curve $a = b = \frac{1}{2}$ (twee aansluitingen aan de uiteinden) heeft in alle bebouwingsvormen de hoogste waarde en de grootste gevoeligheid voor variatie in W_K en W_L . Van alle aansluitingssituaties is deze dus steeds de ongunstigste.
- Voor de symmetrische bebouwingsgevallen (fig. 2 rechts, fig. 4 rechts) vallen de curven $b = 1$ en $a = b = \frac{1}{2}$ samen. Zelfs blijkt voor alle gevallen waarin $a + b = 1$ de verkeersprestatie hetzelfde (relatief ongunstige) verloop te hebben bij variërende verhouding tussen kern- en lintomvang. Het aandeel van de beide aansluitingen is daarop dus niet van invloed.
- De geringste gevoeligheid, maar niet steeds de laagste waarde vertonen de curven waarbij de enige aansluiting ter plaatse van de kern ligt: $b = 1$ met de kern in B en $c = 1$ met de kern in C. Deze curven zijn uiteraard ongevoelig voor de externe verkeersproductie van de kern en dus ook voor variatie van de kernomvang (bovenste reeks); het geringe verloop dat deze curven nog vertonen wordt dan ook alleen veroorzaakt door de interne verkeersrelaties tussen kern en lint.
- In alle overige aansluitingssituaties (dus niet die met één aansluiting ter plaatse van de kern) geeft bij alle bebouwingspatronen een kernsituering aan het eind een (tot 50%) hogere verkeersprestatie dan kernsituering in het midden. Dit is zowel toe te schrijven aan het interne verkeer (de gemiddelde afstand tussen de woningen is groter) als aan het externe verkeer (de gemiddelde afstand tussen de woningen en aansluitingen is groter). In deze gevallen valt dus een centrale ligging van de kern te verkiezen boven een excentrische.
- Indien de kern in B ligt, hebben de drie curven $b = 1$, $c = 1$ en $b = c = \frac{1}{2}$ een gemeenschappelijk snijpunt. Rechts van dit snijpunt (dit wil zeggen in de bovenste reeks voor grotere kernomvang W_K) is de verkeersprestatie het kleinst indien er één aansluiting bij de kern ligt; de curve $b = 1$ ligt daar namelijk het laagst. Links van dit snijpunt, dus bij kleinere W_K , ligt de curve $c = 1$ het laagst, dit wil zeggen één aansluiting centraal geeft de geringste

verkeersprestatie. Kennelijk domineert dan niet langer de ritproductie van de kern, maar gaat die van het lint in de totale verkeersprestatie zwaarder wegen. De situatie $b = c = \frac{1}{2}$ neemt steeds een tussenpositie in.

De ligging van deze snijpunten is afhankelijk van de verdeling van de lintwoningen: voor gelijkmatige verdeling (fig. 2) ligt het snijpunt bij $W_K = 0,5 W_L$, voor maximale dichtheid aan het eind (fig. 3) ligt het bij $W_K = 0,2 W_L$ en voor maximale dichtheid in het midden (fig. 4) ligt het bij $W_K = 0,7 W_L$.

Hoe kunnen deze resultaten nu bij de beleidsvoorbereiding worden betrokken? De figuren 2 t/m 4 tonen de invloed van de ruimtelijke structuur (wegen- en bebouwingspatroon) op de verkeersprestatie langs de lintbebouwing van het dorp. Indien men de confrontatie van de woonfunctie in het lint en de verkeersfunctie (uitgedrukt in verkeersprestatie langs het lint) als beoordelingscriterium kiest, vormen deze figuren dus een ingang voor de vergelijking van diverse ruimtelijke structuren.

De hierboven getrokken algemene conclusies zijn voor dat doel echter te globaal; bovendien betreffen zij extreme, sterk geschematiseerde situaties. Veel dorpen bevatten een menging van enkele van deze geschematiseerde situaties. Een genuanceerd beeld van perspectieven voor ruimtelijk beleid vereist derhalve een individuele benadering van een dorp met zijn specifieke ruimtelijke structuur. Daarbij is de exacte waarde van de verkeersprestatie minder interessant dan de orde van grootte waarin men deze door bepaalde maatregelen zou kunnen reduceren. Met behulp van de figuren 2 t/m 4 kan een goede indruk van deze reductie worden verkregen.

Om mogelijke ontwikkelingen en maatregelen in een bepaald dorp te onderzoeken kan de volgende, in fig. 5 schematisch geïllustreerde, procedure worden gevolgd.

Een vaststaand gegeven van een dorp is de verdeling van de lintwoningen; drie extreme vormen daarvan zijn respectievelijk onderscheiden in de figuren 2 t/m 4. Met name voor $\frac{W_K}{W_L} < 1$ (meer in lint dan in kern) veroorzaakt de verdeling over het lint belangrijke verschillen. Mengvormen van deze extremen leveren uiteraard tussenliggende waarden op.

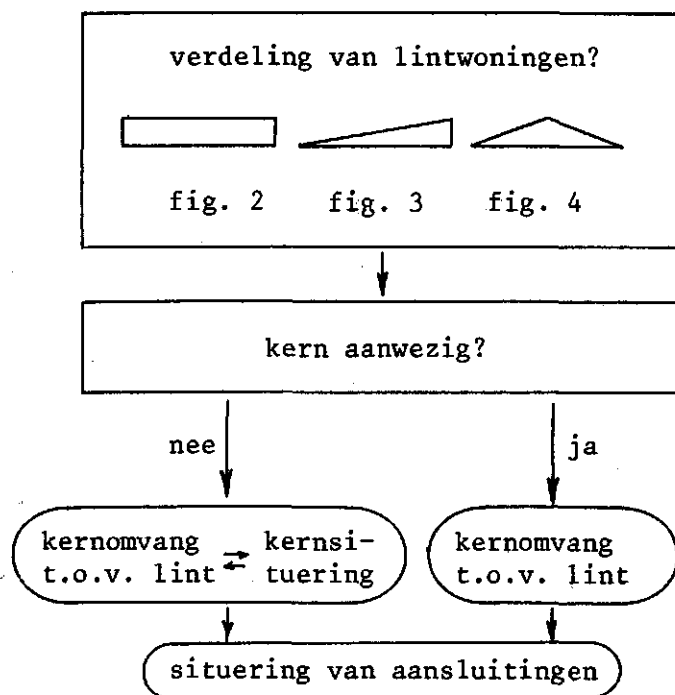


Fig. 5. Schematische voorstelling van de werkwijze bij vergelijking van ontwikkelingsmogelijkheden per dorp

De volgende vraag is nu, of al een bebouingskern aanwezig is. Ontbreekt deze (zuivere linten), dan bestaat nog de keuzevrijheid om een eventuele toename van de woningvoorraad in een nieuw te stichten kern op te nemen, danwel deze groei in het lint op te vangen (door verdichting of verlenging). Kiest men voor een kern, dan moet tegelijk de situering van de kern vastgesteld worden. Ten aanzien van het laatste is al in het algemeen opgemerkt dat uit oogpunt van verkeersprestatie (behalve indien één aansluiting bij de kern ligt) een centrale kernsituering te verkiezen valt boven een excentrische. In veel gevallen zal de plaatselijke situatie echter weinig vrijheid bieden voor de plaatskeuze van een kern en resteert slechts de vraag: maken we een kern en hoe groot? Variatie van kernomvang en kernsituering kunnen simultaan in de figuren worden afgelezen. Het alternatief, uitbreiding zonder kern, verhoogt de verkeersprestatie bij lint-

verdichting evenredig met W_L , bij lintverlenging evenredig met W_L^1 .

Is in een dorp reeds een kern aanwezig, dan is, vooropgesteld dat een tweede kern in dit dorptype niet moet worden overwogen, plaatskeuze niet meer aan de orde. Afhankelijk van de plaats van de kern kan dan in de figuren (links of rechts) de keuze tussen kerngroei en lintgroei (boven of onder) worden afgetast.

Een verkeerstechnische maatregel waarmee de verkeersprestatie tenslotte nog aanzienlijk kan worden beïnvloed is de eventuele verlegging van externe aansluitingen, met name naar wegen van hogere orde buiten het dorp. Hiervoor zijn de mogelijkheden tengevolge van plaatselijke omstandigheden echter veelal beperkt. Niettemin kan zulks in laatste instantie worden overwogen, evenwel pas nadat de voorgaande vragen (kernsituering en -omvang) zijn beantwoord, omdat bij deze vragen in het algemeen meer algemene (niet-ruimtelijke) belangen van het dorp aan de orde zijn dan bij verlegging van de ontsluiting. Ook hierbij geldt weer, dat tussenvormen van ontsluiting tussen de getekende curven liggende waarden van de verkeersprestatie opleveren.

Een voorbeeld van deze procedure is het volgende. Gesteld zij een streekdorp met 200 lintwoningen met maximale dichtheid aan het eind van het lint, 80 woningen in een kern aan hetzelfde eind van het lint, lintlengte 1,2 km en een externe aansluiting in het midden van het lint. De woningvoorraad zal in de toekomst met 50 woningen groeien.

We vergelijken de bestaande toestand (0) met twee alternatieven, 1: situering van de nieuwbouw in het lint gepaard met een lintverlenging tot 1,5 km, en 2: nieuwbouw in de kern. Vervolgens gaan we het effect na van wijziging in de ontsluiting van het dorp.

De verdeling van lintwoningen loopt in dichtheid op naar het eind, waar ook de kern ligt, dit wil zeggen dat in fig. 3 de twee linker nomogrammen moeten worden gehanteerd. De waarde van de verkeersprestatie $V^e + V^i$ wordt gevonden door, naar verkiezing in het bovenste of onderste nomogram de waarde van de curve $c = 1$ af te lezen en deze te vermenigvuldigen met de betreffende noemer (dus boven met W_L^1 , onder met W_K^1).

De diverse rekengrootheden zijn voor de drie gevallen samengevat in tabel 7. Bij situering van de 50 woningen in het lint blijkt de verkeersprestatie met circa 45% te groeien en bij situering in de kern met circa 22%.

Tabel 7. Voorbeeld van de rekenmethode ter vergelijking van nieuwbouw in lint en in kern

	W_L (won.)	W_K (won.)	l (km)	$\frac{W_K}{W_L}$	$\frac{W_L}{W_K}$	$W_L l$ (won. km)	$W_K l$ (won. km)	$V^e + V^i$ (ritkm/etmaal)
0. huidige toest.	200	80	1,2	0,40	2,50	240	96	710
1. groei in lint	250	80	1,5	0,32	3,13	375	120	1032
2. groei in kern	200	130	1,2	0,65	1,54	240	156	865

De verkeersprestatie kan daarentegen nog met circa 15% worden gereduceerd door een tweede gelijkwaardige aansluiting bij de kern te leggen (curve $b = c = \frac{1}{2}$), en zelfs met circa 30% indien de bestaande aansluiting ($c = 1$) geheel wordt vervangen door een nieuwe aan het eind ($b = 1$). De gevolgen hiervan voor het verloop van de verkeersintensiteit op de hoofdweg vindt men in bijlage 2, en wel in 2.23 voor de huidige toestand, in 2.32 voor $b = c = \frac{1}{2}$ en in 2.5 voor het geval $b = 1$. In het geval van twee aansluitingen wordt de bestaande intensiteitspiek iets afgevlakt en verdeeld over de rechterhelft van het dorp; in het tweede geval is deze maximale intensiteit verlegd naar het eind bij de kern. Dit laatste kan in verband met reeds bestaande congestie ter plaatse dermate nadelig zijn dat wordt gekozen voor de minder extreme situatie met twee aansluitingen ($b = c = \frac{1}{2}$).

4.3. C o n c l u s i e s

Met het uitgangspunt dat de verkeersprestatie op de hoofdweg langs het lint een bruikbare indicatie geeft van de confrontatie tussen woonfunctie en verkeersfunctie (wederzijdse hinder, ongevallenkans),

is de bovenstaande rekenmethode bruikbaar voor globale vergelijking van alternatieve bebouwings- en wegenpatronen.

De methode heeft uiteraard beperkingen; de exacte rekenuitkomsten mogen slechts worden gebruikt om de orde van grootte van verschillen aan te geven; verder is door de sterke schematisering de methode niet geldig voor bijzondere gevallen (dorpen kleiner dan 100 woningen, sterke concentraties van bedrijvigheid).

Voor een verkeerstechnische beoordeling van de wegcapaciteit vormt het intensiteitsverloop, zoals in bijlage 2 gegeven, een ingang. In verband met specifieke plaatselijke omstandigheden per dorp (dwarsprofielen, begroeiing, verkeerssamenstelling, knelpunten) kunnen geen algemene normen worden gesteld voor capaciteit en aanvaardbare intensiteit in de streekdorpen.

5. MOGELIJKHEDEN VAN EEN WISKUNDIG VERKEERSMODEL TER VERGELIJKING VAN DE ONDERSCHIEDEN SITUATIES

5.1. Model formulering

Toepassing van een complex wiskundig model voor de verkeersafwikkeling heeft alleen zin indien het een genuanceerder en realistischer uitkomst oplevert dan de voorgaande, grove schematisering. In de probleemstelling is dan ook geëist dat produktie, distributie, voertuiggebruik en routekeuze zó betrouwbaar worden berekend dat het intensiteitsverloop, opgesplitst in voertuigcategorieën, kan dienen voor de beantwoording van vragen ten aanzien van wegcapaciteit, verkeersveiligheid en scheiding van verkeerssoorten (agrarisch bedrijfsverkeer, fietsverkeer, snelverkeer).

Een dergelijk model zou, in zijn eenvoudigste vorm, als volgt kunnen worden geformuleerd:

- **z o n e r i n g**; de bebouwing in een te analyseren situatie wordt verdeeld in verkeerszones, die zo klein zijn dat het grootste deel van het verkeer de grenzen van deze zones overschrijdt. Alle zones komen voor als herkomstzone (index i) en als bestemmingszone (index j). Het aantal woningen in zone i is W_i .
- **r i t p r o d u k t i e**; stel dat de gemiddelde produktie per woning van externe + interne ritten samen ($e+i$) in alle dorpen gelijk is; de verhouding tussen e en i zal dan zeer waarschijnlijk verband houden met de dorpsgrootte: i wordt groter en e kleiner naarmate het dorp groter is. Uit gegevens, verzameld door SPLJK en MIDDELKOOP (1970) kon een dergelijk verband worden afgeleid voor zones kleiner dan 50 woningen, voor grotere zones niet.
- **r i t d i s t r i b u t i e**; daar de te vergelijken situaties fictieve voorbeelden zijn, kan de distributie van het externe verkeer (eW_i) per zone over zijn bestemmingen niet worden afgeleid

uit de ligging van en afstand tot omliggende kernen. Er kan slechts worden aangenomen dat de externe ritten afvloeien via de externe aansluitingen volgens de fracties a, b en c, zoals gebruikt in hoofdstuk 4.

Voor de interne ritdistributie is het volgende model denkbaar:

$$I_{ij}^n = \frac{i^n W_i A_j^n f^n(d_{ij})}{\sum_j A_j^n f^n(d_{ij})}$$

I_{ij}^n = aantal interne ritten tussen zones i en j voor verplaatsingsmotief n (n= woon-werk, winkelen, school, overig sociaal enz.)

i^n = interne ritproductie per woning voor ritmotief n
($\sum_n i^n = i$)

W_i = aantal woningen in zone i

A_j = maat voor de ritattraktie van zone j voor ritmotief n
(bijv. wonen-werk: A_j = aantal arbeidsplaatsen)

$f_{(d_{ij})}^n$ = faktor voor de afstandswaardering, dalend met de afstand d_{ij} tussen i en j bij ritmotief n.

Voor elk van de ritmotieven (n) moeten dus apart bekend zijn i^n , A_j^n en de vorm van $f_{(d_{ij})}^n$

- v o e r t u i g k e u z e; deze wordt in het algemeen afhankelijk van de ritlengte d_{ij} verondersteld. Voor extern verkeer kan deze afhankelijkheid echter niet worden gehanteerd, daar de afstanden tot de bestemmingen niet bekend zijn. Voor intern verkeer kan dit in principe wel. DE WAARD (1971) leidde uit wegen-enquêtes op 24 plattelandswegen een verband af tussen voertuig-samenstelling en ritlengte voor diverse ritmotieven. Of dit geldt voor de Groningse streekdorpen is niet zeker.
- r o u t e k e u z e vormt in de in hoofdstuk 3 onderscheiden situaties een triviaal probleem, omdat daarin alleen de hoofdweg voorkomt en geen keuzemogelijkheid bestaat.

Het is duidelijk, dat voor het rekenen met dit model een computer moet worden ingeschakeld. Een basisprogramma hiervoor is

beschikbaar (BOS, 1974, VAN RIJN, 1974), en behoeft slechts op enkele onderdelen te worden herzien.

5.2. Toetsing van het model aan waarnemingen

In 5.1. zijn de volgende vragen opgeworpen, die voor een toepassing van het model op de Groningse streekdorpen moeten worden beantwoord:

- hoe luidt het verband van e respectievelijk i met de dorpsgrootte?
- hoe moet i worden opgesplitst in i^n -waarden per ritmotief?
- hoe is de vorm van de functie $f^n(d_{ij})$ per ritmotief?
- hoe is de voertuigkeuze van het externe verkeer, waarvan de ritlengten onbekend zijn?
- hoe is de voertuigkeuze van het interne verkeer afhankelijk van de ritlengte d_{ij} ?

Uiteindelijke toetsing op toepasbaarheid van het model zal moeten bestaan uit confrontatie van de berekende intensiteit over de hoofdweg, gesplitst in voertuigsoorten, met waargenomen intensiteiten, en wel in diverse dorpsvormen.

Een daaraanvoorafgaande, globale toetsing zou kunnen plaatsvinden met behulp van gegevens verzameld door SPLJK (1967) in de streekdorpen Benschop en Polsbroek (Lopikerwaard) betreffende de bebouwing in zones van 200 m' en het verloop van $E(x)$ en $I(x)$ in ritten, over een totale lintlengte van circa 13 km.

Gegeven de bovenstaande, onbeantwoorde vragen bevat zelfs deze globale controle nog te veel onzekerheden. Voor alle ritmotieven samen zouden e en i , evenals de uitgangsfractionen a , b en c moeten worden aangenomen, en de attractiefactor A_j moeten worden vervangen door het aantal woningen W_j . Op grond van die aannames zou dan de vorm van $f(d_{ij})$ moeten worden afgeleid door aanpassing van de modeluitkomsten aan de genoemde intensiteitswaarnemingen. Deze procedure lijkt niet verantwoord, temeer daar vergelijking van de betrekkelijk lage intensiteiten in de streekdorpen een relatief grote nauwkeurigheid vereist.

5.3. Conclusies met betrekking tot modelgebruik

Op grond van de thans beschikbare informatie wordt het niet verantwoord geacht, het in 5.1. beschreven wiskundige model voor de verkeersafwikkeling toe te passen. Voor de vaststelling van parameters voor het interne verkeer moeten minstens de in 5.2. gestelde vragen kunnen worden beantwoord. Daartoe zouden door middel van een huisenquête in enkele streekdorpen gegevens moeten worden verzameld.

Nader bezien zou moeten worden of het aanbeveling verdient, ook het externe verkeer van de streekdorpen met een dergelijk model te behandelen, teneinde de samenhang van een dorp met het omliggende plattelandswegennet te analyseren. Dat zou in feite een verfijning inhouden van het provinciale verkeersmodel, zoals dat thans in opdracht van de Provincie Groningen wordt ontwikkeld in het kader van de Beleidsnota Personenverkeer en Vervoer (HOFSTRA, 1975). Het verdient de voorkeur, deze eventuele benadering van de streekdorpen in dit provinciale modelonderzoek in te passen.

6. LITERATUUR

- BOS, R.J., 1974. Een simulatiemodel voor recreatieverkeer Cultuur-
technisch Tijdschrift 14, 3
- CENTRAAL BUREAU VOOR DE STATISTIEK, 1975. 14e Algemene Volkstelling
1971, voorlopige uitkomsten per gemeente. 's-Gravenhage
- HEESTER, J., 1976. Streekdorpen en lintbebouwing in de provincie
Groningen. Deelrapport nr. 7. Ruimtelijke aspecten van het
woonklimaat. Nota ICW nr. 933, Wageningen
- HEESTER, J. en TH. MICHELS, 1977. Streekdorpen en lintbebouwing
in de provincie Groningen. Deelrapport nr. 2. Inventari-
satie topografische- en bevolkingskenmerken. Nota ICW nr.
1007, Wageningen
- HEIMANS, A., 1973. College Stedebouwkundige elementen (hb 44), deel
I. T.H. Delft Afd. Bouwkunde Delft
- HOFSTRA, P.H., 1975. Deelnota: Kwantitatief model, Beleidsnota
Personenverkeer en vervoer Provincie Groningen, Groningen
- PROVINCIE GRONINGEN, 1975. Interimrapportage Beleidsnota Personen-
verkeer en vervoer. Groningen
- PROVINCIALE WATERSTAAT GRONINGEN, 1975. Inventarisatie weggegevens
van de Beleidsnota Personenverkeer en vervoer. Groningen
- VAN RIJN, H.D.L., 1974. Modellen in de verkeerskunde. Cultuurtech-
nisch Tijdschrift, 14, 3
- SPIJK, P., 1967. Verkeersonderzoek in Benschop en Polsbroek.
I.C.W. Wageningen (niet gepubliceerd)
- _____ en L.J. MIDDELKOOP, 1970. Verkeer en nederzettingsvorm;
opzet en uitvoering van het onderzoek. Nota ICW nr. 564.
Wageningen
- DE WAARD, J., 1971. Analyse van het verkeer op 84 plattelandswegen.
Nota ICW nr. 634, Wageningen

Bijlage 1. Dorpskennmerken

Nr	Naam	JEG ^{doorg.} (mvt/etm)	Externe aansl.	Aantal dorps- woningen W_D	Kern- aandeel		Lint- aandeel W_L W_D	Lint- lengte l (m.)
					W_K	sit.		
2	Hornhuizen-Kruisw.	0	e	220	0,14	e	0,56	1300
6	Pieterburen	0	2e	145	0,10	m	0,75	1600
10	Wehe - den Hoorn	0	2e	260	0,58	e	0,35	1900
13	Den Andel	0	2e	190	0		0,33	1200
16	Uithuisermeeden	1000	2e	775	0,39	m	0,28	2200
18	Roodeschool	1000	2e	305	0,79	e	0,15	2000
20	Oude Schip	0	e	90	0		0,33	1100
21	Oostermil./Nijldijk	500	2e	125	0		1,00	1900
23	't Landt	500	2e	260	0,40	m	0,42	1400
24	Heerijp	500	2e	150	0	m	0,63	1200
27	Holwierde	1000	m	230	0,39	m	0,41	1200
30	Meedhuizen	0	2e	110	0		1,00	1300
33	Garnelw./Wind. de.	0	m	230	0		0,45	2700
34	Windum	0	e	130	0,23	e	0,62	1200
36	Westeremden	500	2e	135	0,89	m	0,11	1100
47	Noordhoorn	500	2e	325	0,65	m	0,20	1200
48	Adward	3000	e	425	0,53	m	0,30	1100
54	Niekerk	1000	2e	270	0,44	e	0,36	1100
56	Oldelkerk	1000	2e	125	0,24	e	0,66	2100
58	Putjegast - Dieren	500	2e	205	0,29	m	0,42	1300
59	Doornum	1000	2e	200	0,30	m	0,70	2100
60	Grooteqast	0	2e	570	0,45	m	0,34	2700
61	Sebaldeburen	1000	2e	95	0		1,00	1500
63	Opende	1000	2e	295	0,20	m	0,80	3800
65	Marum	3000	2e	840	0,89	e	0,04	2200
66	Nuis	1000	2e	220	0,27	e	0,60	1500
67	Niebert	1000	2e	145	0		1,00	2500
68	Boeraliker	1000	2e	95	0		0,58	1200
69	De Wilp	500	2e	315	0,29	m	0,33	1100
70	Jonkerw./Wilpsterw.	500	2e	120	0		0,72	5900
74	Hevenhuizen	1000	2e	295	0,25	m	0,39	1400

Bijlage 1 (vervolg)

Nr	Naam	JEG doorg. (mvt/etm)	Externe aansl.	Aantal dorps- woningen W_D	Kern- aandeel W_K W_D	Kern- sit.	Lint- aandeel W_L W_D	Lint- lengte 1 (m.)
75	Boerenstreek	1000	2e	80	0		1,00	1800
76	Haspel	1000	2e	100	0		1,00	3400
82	Engelbert	500	2e	185	0		0,55	2000
91	Noordlaren	500	2e	125	0,72	e	0,16	1200
93	Theeringe	0	e	150	0,40	m	0,60	1200
94	Garnerswolde	500	e	120	0		0,50	1100
95	Ten Post	1000	2e	265	0,45	e	0,31	1300
100	Siddaburen	3000	2e	725	0,41	e	0,29	2200
101	Hellum	3000	2e	180	0		0,72	1800
102	Schildwolde	3000	2e	510	0,15	m	0,52	2300
103	Slochteren/Kolkham	3000	2e	1000	0,05		0,80	7300
105	Borgweg	500	e	120	0		1,00	3300
106	Scharmer-Harlst.	500	2e	590	0,15	m	0,48	5000
109	Termonter/Termonter rijk	500	2e	250	0,72	e	0,23	1800
112	Nieuwolda/Westeind	0	e	420	0,50	m	0,34	3800
115	Nieuw Scheemda	1000	e	105	0		0,67	1200
116	Eersta - ruid	1000	2e	90	0		1,00	1300
117	Westerlee	1000	2e	350	0,13		0,87	3600
119	Noordbroek	1000	2e	540	0,50	m	0,35	2700
120	Uiterburen	1000	e	130	0,35	e	0,65	1500
122	Zuidbr./Heiligerl.	3000	2e	635	0,43	e	0,32	2100
125	Midwolda/Midp.	1000	2e	560	0		0,62	4100
126	Oostwold	1000	2e	370	0,36	m	0,36	1400
128	Kromme Elleboog	0	2e	175	0,17	e	0,52	2100
130	Einsterwolde	0	2e	445	0,61	e	0,31	1900
131	Weg n. Hardenberg	1000	2e	220	0,27	e	0,73	1800
133	Garnendijk	500	e	100	0		0,55	1100
135	Kortveel/Dudedijk	0	e	170	0,35	e	0,65	2100
136	Beerta	1000	2e	715	0,50	e	0,28	3400
137	Nieuw Beerta	1000	e	125	0,48	m	0,39	3200
138	Bellingwolde	500	2e	710	0,63	e	0,32	4400

Bijlage 1 (vervolg)

Nr	Naam	JEG doorg. (mvt/etm)	Externe aansl.	Aantal dorps- woningen W_D	Kern- aandeel W_K W_D	Kern- sit.	Lint- aandeel W_L W_D	Lint- lengte l (m.)
139	Vriescheloo	500	2e	280	0,43	e	0,52	4300
140	Wedderheide	1000	2e	110	0		1,00	1300
141	Veelerveen	0	2e	215	0		0,44	2200
142	Bovenstreek	500	e	275	0,11	m	0,39	4300
143	Blijham	0	2e	495	0,55	m	0,23	1500
144	Morige	0	e	185	0		0,50	1200
146	Wedde	3000	2e	205	0,29	e	0,71	1500
149	Nieuwe Pelikaanhd.	500	2e	245	0		1,00	3700
151	Meeden	1000	2e	430	0,14	e	0,59	2600
157	Westerbroek	500	e	125	0		0,69	1100
158	Kroonswolde - Wolfb.	3000	2e	235	0		1,00	4600
160	Kiel - Windeveen	0	2e	290	0		0,90	5900
164	Achterdiep	0	2e	390	0		0,56	3400
166	Borgercompagnie	0	2e	195	0		1,00	6000
168	Ommelanderswijk	0	2e	375	0		0,78	3600
169	Wuidwending	0	e	220	0		0,91	3500
171	Boven-Wildervanck	0	2e	535	0		0,50	2900
172	Bareveld	5000	m	140	0,32	e	0,68	1600
174	Nieuwediep	3000	2e	165	0		0,57	2300
175	Stadskanaal	3000	2e	1055	0,17	e	0,38	4300
177	Tange - Alteveer	1000	2e	360	0,33	e	0,43	3000
178	Onstwedde	3000	2e	565	0,35	m	0,25	1500
179	Vledderveen	0	m	86	0		0,73	2900
180	Mussel	1000	2e	205	0		0,90	4500
186	Vlaagtwedde	500	2e	550	0,22	m	0,48	2200
187	Stalenb. + Weite	1000	2e	125	0		0,87	4000
188	Boertange	0	e	200	0,23	e	0,77	1700
195	Sellingen	1000	2e	290	0,21	m	0,61	1300
198	Jipsingb. mussel	5000	2e	185	0,16	e	0,50	1300
199	Ter Apellkanaal	3000	2e	285	0		0,51	3900
200	Munnekeem-Barrfl.	1000	2e	310	0,77	e	0,16	2800

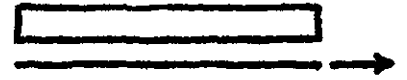
Bijlage 1 (vervolg)

Nr.	Naam	JEG ^{doorg.} (mvt/etm)	Externe aansl.	Aantal dorps- woningen W_D	Kern- aandeel W_K W_D	Kern- sit.	Lint- aandeel W_L W_D	Lint- lengte l (m.)
201	Weerdingermond	3000	e	210	0		0,52	2200
204	Knippslaan	3000	2e	105	0		1,00	1400
205	Wagenborgen	1000	e	490	0,73	e	0,17	2300

$$b=1 \quad a=c=0$$

$$W_k=0$$

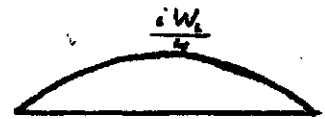
$$q(x) = \frac{w_l}{l}$$



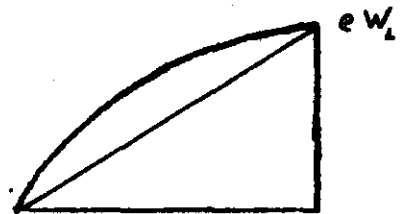
$$E(x) = \frac{e W_l}{l} x$$



$$I(x) = \frac{i W_l}{l^2} x (l-x)$$



$$E(x) + I(x) = \frac{(e+i) W_l}{l} x - \frac{i W_l}{l^2} x^2$$



$$e \geq i : \{E(x) + I(x)\}_{\max} = e W_l \text{ voor } x=l$$

$$e \leq i : \{E(x) + I(x)\}_{\max} = \frac{(e+i)^2 W_l}{4i} \text{ voor } x = \frac{e+i}{2i} l$$

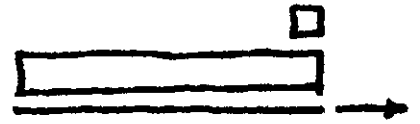
$$V^e = \frac{e W_l l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_l l}{6}$$

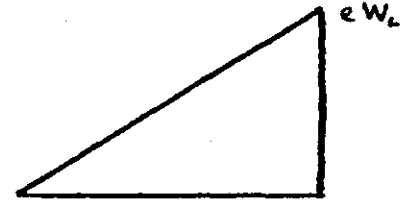
$$V^e + V^i = \frac{(3e+i) W_l l}{6}$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad q(x) = \frac{W_i}{l}$$

W_k in B



$$E(x) = \frac{e W_L}{l} x$$



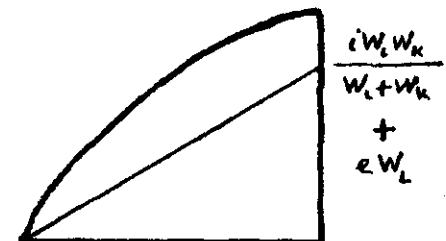
$$I(x) = \frac{i W_i (W_i + W_k) l x - i W_i^2 x^2}{(W_i + W_k) l^2}$$

$$W_k \geq W_L: I(x)_{\max} = \frac{i W_i W_k}{W_i + W_k} \text{ voor } x = l$$

$$W_k \leq W_L: I(x)_{\max} = \frac{i (W_i + W_k)}{4} \text{ voor } x = \frac{W_i + W_k}{2 W_L} l$$



$$E(x) + I(x) = \frac{(e+i) W_L (W_i + W_k) l x - i W_i^2 x^2}{(W_i + W_k) l^2}$$



$$(e+i)(W_i + W_k) \geq 2 i W_L: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = e W_L + \frac{i W_i W_k}{W_i + W_k} \text{ voor } x = l$$

$$(e+i)(W_i + W_k) \leq 2 i W_L: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = \frac{(e+i)^2 (W_i + W_k)}{4 l} \text{ voor } x = \frac{(e+i)(W_i + W_k)}{2 i W_L} l$$

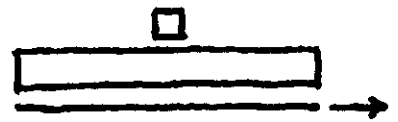
$$V^e = \frac{e W_L l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_L (W_i + 3 W_k) l}{6 (W_i + W_k)}$$

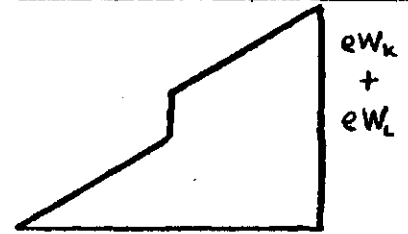
$$V^e + V^i = \frac{(3e+i) W_L^2 + 3(e+i) W_i W_k}{6 (W_i + W_k)} l$$

$$b=1 \quad a=c=0 \\ W_k \text{ in } C$$

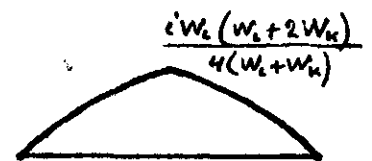
$$q(x) = \frac{W_l}{l}$$



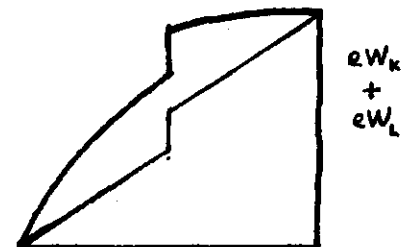
$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = \frac{e W_l}{l} x \\ x \geq l/2 & E(x) = e W_k + \frac{e W_l}{l} x \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{i W_l (W_l + W_k) l x - i W_l^2 x^2}{(W_l + W_k) l^2} \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{i W_l W_k l^2 + i W_l (W_l - W_k) l x - i W_l^2 x^2}{(W_l + W_k) l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{(e+i) W_l (W_l + W_k) l x - i W_l^2 x^2}{(W_l + W_k) l^2} \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{i W_l W_k l^2 + W_l [(e+i) W_l + (e-i) W_k] l x - i W_l^2 x^2}{(W_l + W_k) l^2} \end{cases}$$



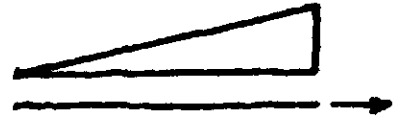
$$V^e = \frac{e (W_l + W_k) l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_k (2 W_l + 3 W_k) l}{12 (W_l + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{2(3e+i) W_l^2 + 3(4e+i) W_l W_k + 6e W_k^2}{12 (W_l + W_k)} \cdot l$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad q(x) = \frac{2W_L}{l^2} \cdot x$$

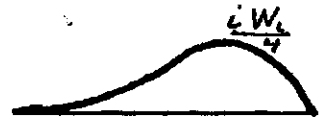
$$W_L = 0$$



$$E(x) = \frac{eW_L}{l^2} x^2$$



$$I(x) = \frac{iW_L}{l^4} x^2(l^2 - x^2)$$



$$E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_L l^2 x^2 - iW_L x^4}{l^4}$$



$$e \geq i: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = eW_L \quad \text{voor} \quad x=l$$

$$e \leq i: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = \frac{(e+i)^2 W_L}{4i} \quad \text{voor} \quad x = l \sqrt{\frac{e+i}{2i}}$$

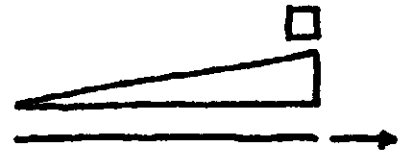
$$V^e = \frac{eW_L l}{3}$$

$$V^i = \frac{2iW_L l}{15}$$

$$V^e + V^i = \frac{(5e + 2i)W_L l}{15}$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad q(x) = \frac{2W_k}{l^2} x$$

W_k in B



$$E(x) = \frac{eW_k}{l^2} x^2$$



$$I(x) = \frac{iW_k^2 x^3(l^2 - x^2) + iW_k W_k l^2 x^2}{(W_k + W_k) l^2}$$



$$W_k \geq W_l: I(x)_{\max} = \frac{iW_k W_k}{W_k + W_k} \text{ voor } x = l$$

$$W_k \leq W_l: I(x)_{\max} = \frac{i(W_k + 3W_k)}{4} \text{ voor } x = l \sqrt{\frac{W_l + W_k}{2W_k}}$$



$$E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_k(W_k + W_k)l^2 x^2 - iW_k^2 x^4}{(W_k + W_k)l^2}$$

$$(e+i)(W_k + W_k) \geq 2iW_k: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = eW_k + \frac{iW_k W_k}{W_k + W_k} \text{ voor } x = l$$

$$(e+i)(W_k + W_k) \leq 2iW_k: \{E(x) + I(x)\}_{\max} = \frac{(e+i)^2(W_k + W_k)}{4i} \text{ voor } x = l \sqrt{\frac{(e+i)(W_k + W_k)}{2iW_k}}$$

$$V^e = \frac{eW_k l}{3}$$

$$V^i = \frac{iW_k(2W_k + 5W_k)l}{15(W_k + W_k)}$$

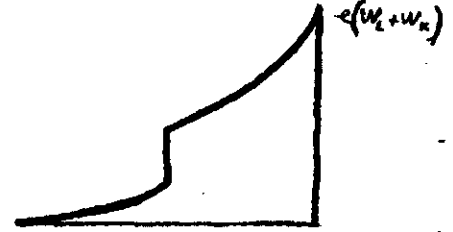
$$V^e + V^i = \frac{(5e+2i)W_k^2 + 5(e+i)W_k W_k}{15(W_k + W_k)} l$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad \gamma(x) = \frac{2W_c}{l^2} x$$

W_k in C



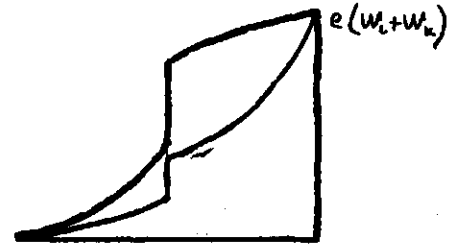
$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = \frac{eW_c}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 & E(x) = eW_k + \frac{eW_c}{l^2} x^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{iW_c^2 x^2(l^2 - x^2) + iW_c W_k l^2 x^2}{(W_c + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{iW_c^2 x^2(l^2 - x^2) + iW_c W_k l^2(l^2 - x^2)}{(W_c + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_c(W_c+W_k)l^2 x^2 - iW_c^2 x^4}{(W_c+W_k)l^4} \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_c(W_c+W_k)l^2 x^2 - iW_c^2 x^4}{(W_c+W_k)l^4} + eW_k + \frac{iW_c W_k}{W_c+W_k} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{e(2W_c + 3W_k)l}{6}$$

$$V^i = \frac{iW_c(8W_c + 15W_k)l}{60(W_c + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{4(5e + 2i)W_c^2 + 5(10e + 5i)W_c W_k + 30eW_k^2}{60(W_c + W_k)} \cdot l$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & q(x) = \frac{4W_c}{l^2} x \\ x \geq l/2 & q(x) = \frac{4W_c}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

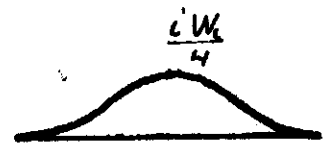
$$W_n = 0$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = \frac{2eW_c}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 & E(x) = \frac{eW_c}{2} + \frac{4eW_c}{l^2} \left(lx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}l^2 \right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{2iW_c}{l^4} x^2 (l^2 - 2x^2) \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{2iW_c}{l^4} (l-x)^2 (4lx - 2x^2 - l^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_c l^2 x^2 - 4iW_c x^4}{l^4} \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{(2i-e)W_c l^4 + 4(e+3i)W_c l^3 x - 2(e+5i)W_c l^2 x^2 + 16iW_c l x^3}{l^4} - \frac{4iW_c x^4}{l^4} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{eW_c l}{2}$$

$$V^i = \frac{7iW_c l}{60}$$

$$V^e + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c l}{60}$$

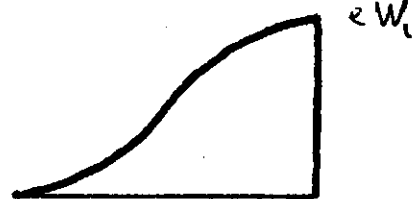
$$b=1 \quad a=c=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} x \\ x \geq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

W_k in B



$$x \leq l/2 \quad E(x) = \frac{2eW_c}{l^2} x^3$$

$$x \geq l/2 \quad E(x) = \frac{2W_c}{l} + \frac{4eW_c}{l^2} \left(lx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}l^2 \right)$$



$$x \leq l/2 \quad I(x) = \frac{2iW_c [(W_c+W_k)l^2x^3 - 2W_c x^4]}{(W_c+W_k)l^4}$$

$$x \geq l/2 \quad I(x) = \frac{iW_c [(12W_c+4W_k)l^3x - (22W_c+2W_k)l^2x^2]}{(W_c+W_k)l^4} + \frac{iW_c [16W_c l x^3 - 4W_c x^4 - (2W_c+W_k)l^4]}{(W_c+W_k)l^4}$$



$$x \leq l/2 \quad E(x)+I(x) = \frac{2(e+i)W_c(W_c+W_k)l^2x^3 - 4iW_c^2x^4}{(W_c+W_k)l^4}$$

$$x \geq l/2 \quad E(x)+I(x) = \frac{eW_c(W_c+W_k)(4l^3x - 2l^2x^2 - l^4)}{(W_c+W_k)l^4} +$$

$$+ \frac{iW_c [(12W_c+4W_k)l^3x - (22W_c+2W_k)l^2x^2 + 16W_c l x^3 - 4W_c x^4 - (2W_c+W_k)l^4]}{(W_c+W_k)l^4}$$



$$V^e = \frac{eW_c l}{2}$$

$$V^i = \frac{iW_c (7W_c + 2.85W_k) l}{60(W_c+W_k)}$$

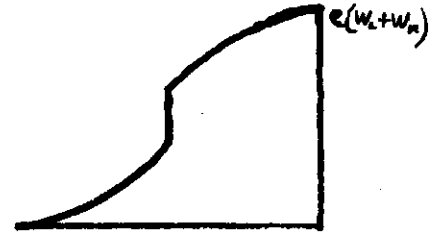
$$V^e + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c^2 + (30e + 2.85i)W_cW_k}{60(W_c+W_k)}$$

$$b=1 \quad a=c=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{4W_c}{l^2} x \\ f(x) = \frac{4W_c}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

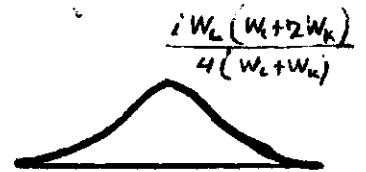
$$W_k \ln L$$



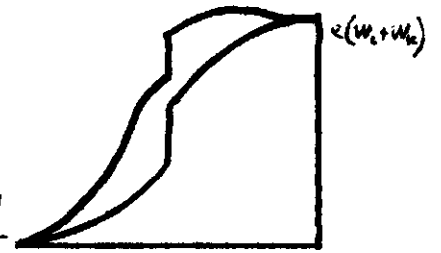
$$\begin{cases} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{cases} \quad \begin{cases} E(x) = \frac{2eW_c}{l^2} x^2 \\ E(x) = \frac{e(2W_k + W_c)}{2} + \frac{4eW_c}{l^2} \left(lx - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}l^2 \right) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{cases} \quad \begin{cases} I(x) = \frac{2iW_c [(W_c + W_k) l^2 x^2 - 2W_c x^4]}{(W_c + W_k) l^4} \\ I(x) = \frac{2iW_c [(W_c + W_k) l^2 (l-x)^2 - 2W_c (l-x)^4]}{(W_c + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{cases} \quad \begin{cases} E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_c(W_c + W_k)(l^2 x^2 - 2iW_c x^4)}{(W_c + W_k) l^4} \\ E(x) + I(x) = \frac{e[4W_c(W_c + W_k)lx - 2W_c(W_c + W_k)l^2 x^2 - (W_c^2 - W_k^2)l^4]}{(W_c + W_k) l^4} \\ \quad + \frac{2iW_c[(W_c + W_k)l^2(l-x)^2 - 2W_c(l-x)^4]}{(W_c + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{e(W_c + W_k)l}{2}$$

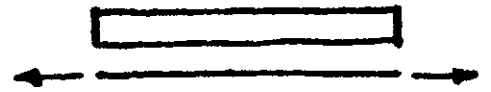
$$V^i = \frac{iW_c(7W_c + 10W_k)l}{60(W_c + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c^2 + (60e + 10i)W_cW_k + 30eW_k^2}{60(W_c + W_k)}$$

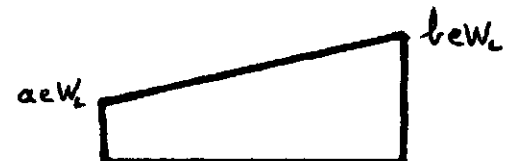
$$\alpha + b = 1 \quad c = 0$$

$$W_k = 0$$

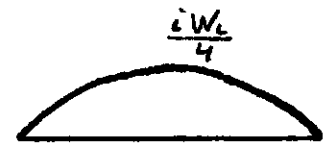
$$q(x) = \frac{W_0}{l}$$



$$E(x) = \frac{b e W_0}{l} x + \frac{a e W_0}{l} (l - x)$$



$$I(x) = \frac{i W_0}{l^2} x (l - x)$$



$$E(x) + I(x) = \frac{a e W_0 l^2 + (b e - a e + i) W_0 l x - i W_0 x^2}{l^2}$$



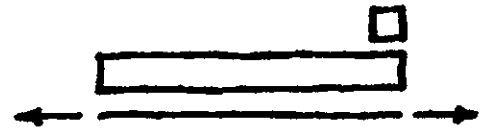
$$V^e = \frac{e W_0 l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_0 l}{6}$$

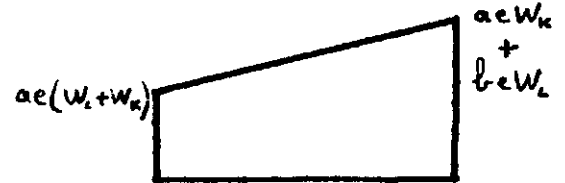
$$V^e + V^i = \frac{(3e + i) W_0 l}{6}$$

$$a+b=1 \quad c=0 \quad \gamma(x) = \frac{W_0}{l}$$

W_k in B



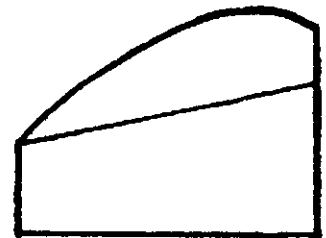
$$E(x) = a e W_k + \frac{b e W_0}{l} x + \frac{a e W_0}{l} (l-x)$$



$$I(x) = \frac{i W_0 (W_0 + W_k) l x - i W_0^2 x^2}{(W_0 + W_k) l^2}$$



$$E(x) + I(x) = \frac{a e (W_0 + W_k)^2 l^2 + (b e - a e + i) W_0 (W_0 + W_k) l x - i W_0^2 x^2}{(W_0 + W_k) l^2}$$



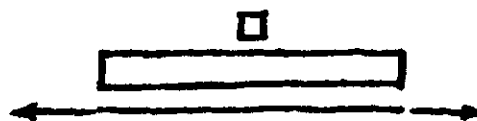
$$V^e = \frac{e (W_0 + 2 a W_k) l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_0^2 l + 3 i W_0 W_k l}{6 (W_0 + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(3 e + i) W_0^2 + 3(e + a e + i) W_0 W_k + 6 a e W_k^2}{6 (W_0 + W_k)} \cdot l$$

$$\alpha + b = 1 \quad c = 0 \quad q(x) = \frac{W_c}{l}$$

$W_k \text{ in } C$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad E(x) = a e W_k + \frac{b e W_k}{l} x + \frac{a e W_c}{l} (l-x)$$

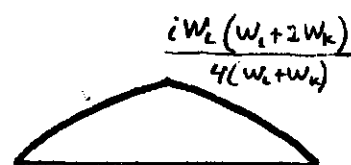
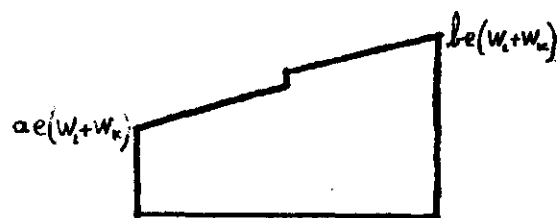
$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad E(x) = b e W_k + \frac{b e W_k}{l} x + \frac{a e W_c}{l} (l-x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad I(x) = \frac{i W_c (W_c + W_k) l x - i W_c^2 x^2}{(W_c + W_k) l^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad I(x) = \frac{i W_c W_k x^2 + i W_c (W_c - W_k) l x - i W_c^2 x^2}{(W_c + W_k) l^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad E(x) + I(x) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 \\ x \geq l/2 \end{array} \right. \quad E(x) + I(x) =$$



$$V^e = \frac{e (W_c + W_k) l}{2}$$

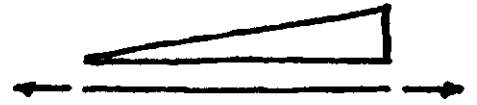
$$V^i = \frac{i W_c (2 W_c + 3 W_k) l}{12 (W_c + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(6e + 2i) W_c^2 + (12e + 3i) W_c W_k + 6e W_k^2}{12 (W_c + W_k)} \cdot l$$

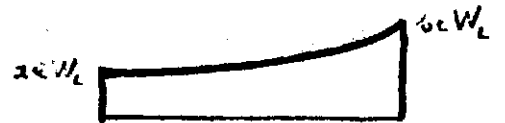
$$a+b=1 \quad c=0$$

$$W_k = 0$$

$$f(x) = \frac{2}{l} \frac{l}{l} x$$



$$E(x) = axW_l + \frac{(1-2a)cW_l}{l^2} x^2$$



$$I(x) = \frac{cW_l}{l^4} x^2 (l^2 - x^2)$$



$$E(x) + I(x) = \frac{axW_l l^4 + (c-2ac+ci)W_l l^2 x^2 - c^2/4 x^4}{l^4}$$



$$j^e = \frac{a+1}{3} cW_l l$$

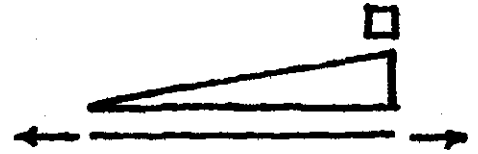
$$j^i = \frac{2cW_l l}{15}$$

$$j_{+i} = \frac{(5a+5c+2i) \cdot c l}{15}$$

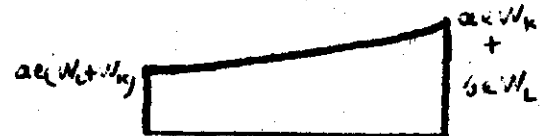
$$a+b=1 \quad c=c$$

$$W_k \text{ in } K$$

$$y(x) = \frac{2}{l^2} \frac{1}{2} x$$



$$E(x) = ac(W_t + W_k) + \frac{(1-2a)eW_L}{l^2} x^2$$



$$I(x) = \frac{iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_t W_k l^2 x^2}{(W_t + W_k) l^4}$$



$$E(x) + I(x) = ac(W_t + W_k) + \frac{(1-2a)eW_L(W_t + W_k)l^2 x^2 + iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_t W_k l^2 x^2}{(W_t + W_k) l^4}$$



$$V^k = \frac{[(1+a)eW_L + 5aeW_k] l}{3}$$

$$V^i = \frac{iW_L(2W_L + 5W_k) l}{15(W_t + W_k)}$$

$$V^k + V^i = \frac{(5ae + 5e + 2i)W_L^2 + (2ae + 5e + 5i)W_L W_k + 15aeW_k^2}{15(W_t + W_k)}$$

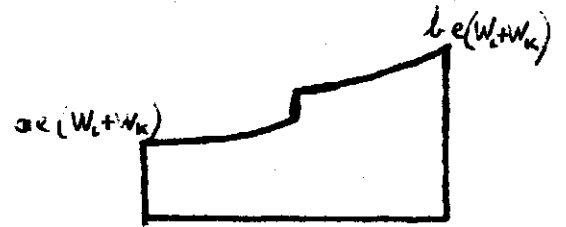
$$a+b=1 \quad c=0$$

$$W_k \text{ in } C$$

$$z_f(x) = \frac{2W_k}{l^2} x$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = ae(W_i + W_k) + \frac{(1-2a)eW_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 & E(x) = e(aW_i + bW_k) + \frac{(1-2a)eW_k}{l^2} x^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{iW_i x_i^2 (l^2 - x^2) + iW_i W_k l^2 x^2}{(W_i + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{iW_i^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_i W_k (l^2 (l^2 - x^2))}{(W_i + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \end{cases}$$



$$V^e = \frac{2(a+1)eW_k l + 3eW_k l}{6}$$

$$V^i = \frac{iW_k (8W_i + 15W_k) l}{60(W_i + W_k)}$$

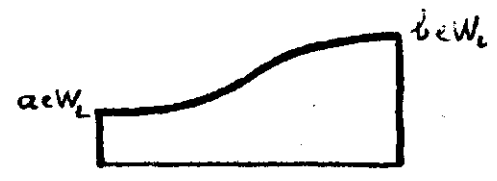
$$V + V^i = \frac{(20ae + 20e + 8i)W_k^2 + (20ae + 50e + 15i)W_i W_k + 30eW_k^2}{60(W_i + W_k)} \cdot l$$

$$a + b = 1, \quad c = 0, \quad W_k = 0$$

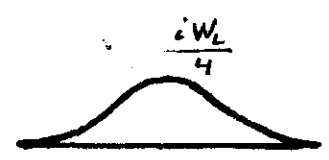
$$\begin{cases} x \leq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} x \\ x \geq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



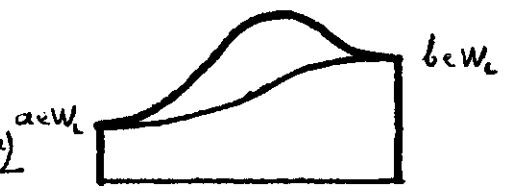
$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = axW_c + \frac{2(1-2a)eW_c}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 & E(x) = xW_c + \frac{(1-2a)eW_c(4lx - 2x^2 - l^2)}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{2eW_c}{l^4} x^2 (l^2 - 2x^2) \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{2eW_c}{l^4} (l-x)^2 (4lx - 2x^2 - l^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = axW_c + \frac{2(1-2a+2i)W_c(l^2x^2 - 4iW_c x^4)}{l^4} \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = axW_c + \frac{2[(1-2a)e + 2i(l-x)^2]W_c(4lx - 2x^2 - l^2)}{l^4} \end{cases}$$



$$V^c = \frac{eW_c l}{2}$$

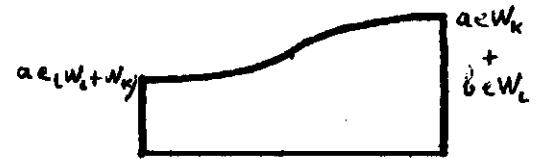
$$V^i = \frac{7eW_c l}{60}$$

$$V^c + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c l}{60}$$

$$\begin{aligned}
 a+b=1 \quad c=0 \\
 W_k \ln B
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{cases}
 x \leq l/2 & \gamma(x) = \frac{4W_k}{l^2} x \\
 x \geq l/2 & \gamma(x) = \frac{4W_k}{l^2} (l-x)
 \end{cases}$$



$$\begin{cases}
 x \leq l/2 & E(x) = a e (W_c + W_k) + \frac{2(1-2a) e W_k x^2}{l^2} \\
 x \geq l/2 & E(x) = a e (W_c + W_k) + \frac{(1-2a) e W_k (4lx - 2x^2 - l^2)}{l^2}
 \end{cases}$$



$$\begin{cases}
 x \leq l/2 & I(x) = \frac{2i W_k [(W_c + W_k) l^2 x^2 - 2 W_k x^3]}{(W_c + W_k) l^3} \\
 x \geq l/2 & I(x) = \frac{i W_k [(2W_c + 4W_k) l^2 x - (2W_c + 2W_k) l x^2 + 10 W_k (x^3 - 4 W_k x^2 - (2W_c + W_k) l^2)]}{(W_c + W_k) l^3}
 \end{cases}$$



$$\begin{cases}
 x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \\
 x \geq l/2 & E(x) + I(x) =
 \end{cases}$$



$$V^c = \frac{e(W_c + 2.2W_k)l}{2}$$

$$V^i = \frac{iW_k(7W_c + 2.85W_k)l^2}{60(W_c + W_k)}$$

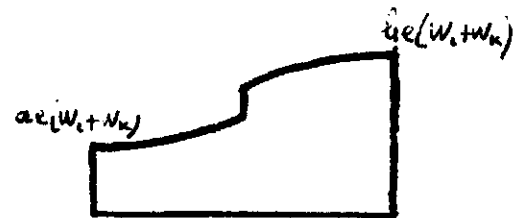
$$V^c + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c^2 + (60.2e + 30i + 2.85i)W_cW_k + (60.2e + 2.85i)W_k^2}{60(W_c + W_k)} \cdot l$$

$$a+b=1 \quad c=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} x \\ x \geq l/2 & f(x) = \frac{4W_c}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

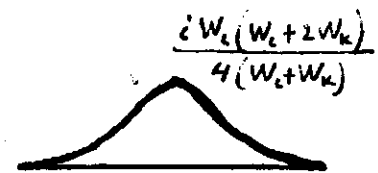
$$W_k \text{ in } C$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) = a e (W_c + W_k) + \frac{2(1-2a) e W_c x^2}{l^2} \\ x \geq l/2 & E(x) = e (a W_c + b W_k) + \frac{(1-2a) e W_c (4lx - 2x^2 - l^2)}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & I(x) = \frac{2i W_c [(W_c + W_k) l^2 x^2 - 2W_c x^3]}{(W_c + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 & I(x) = \frac{2i W_c [(W_c + W_k) l^2 (l-x)^2 - 2W_c (l-x)^3]}{(W_c + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \end{cases}$$



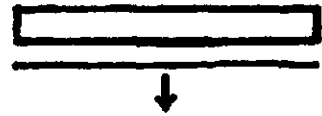
$$V^e = \frac{e(W_c + W_k)l}{2}$$

$$V^i = \frac{i W_c (7W_c + 10W_k)l}{60(W_c + W_k)}$$

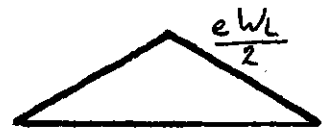
$$V^e + V^i = \frac{(30e + 7i)W_c^2 + (60e + 10i)W_c W_k + 30e W_k^2}{60(W_c + W_k)}$$

$$c=1 \quad a=b=0 \quad q(x) = \frac{w_L}{l}$$

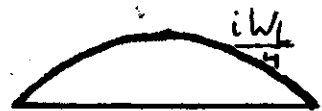
$$w_k=0$$



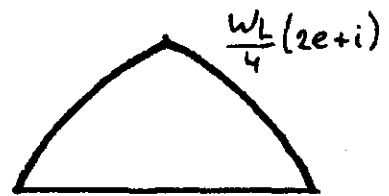
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{e w_L}{l} x \\ x \geq l/2 : E(x) = \frac{e w_L}{l} (l-x) \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{i w_L}{l^2} x(l-x)$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(e+i)w_L l x - i w_L x^2}{l^2} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{e w_L l^2 - (e-i)w_L l x - i w_L x^2}{l^2} \end{cases}$$



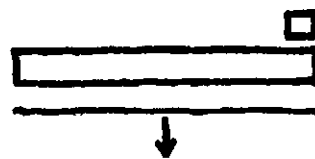
$$V^e = \frac{e w_L l}{4}$$

$$V^i = \frac{i w_L l}{6}$$

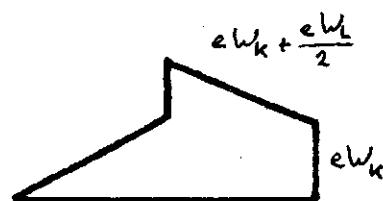
$$V^e + V^i = \frac{(3e+2i)w_L l}{12}$$

$$c=1 \quad a=b=0 \quad q(x) = \frac{w_L}{l}$$

$$w_k \text{ in } B$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) = \frac{e w_L}{l} x \\ x \geq l/2: E(x) = e w_k + \frac{e w_L}{l} (l-x) \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{i w_L (w_L + w_k) l x - i w_L^2 x^2}{(w_L + w_k) l^2}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) + I(x) = \frac{(e+i) w_L (w_L + w_k) l x - i w_L^2 x^2}{(w_L + w_k) l^2} \\ x \geq l/2: E(x) + I(x) = \frac{e(w_L + w_k)^2 l^2 - (e-i) w_L (w_L + w_k) l x - i w_L^2 x^2}{(w_L + w_k) l^2} \end{cases}$$



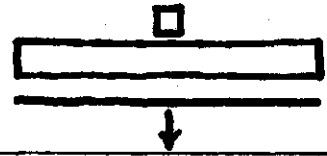
$$V^e = \frac{e(w_L + 2w_k)l}{4}$$

$$V^i = \frac{i w_L (w_L + 3w_k)l}{6(w_L + w_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(3e+2i)w_L^2 + (9e+6i)w_L w_k + 6e w_k^2}{12(w_L + w_k)} \cdot l$$

$$c=1 \quad a=b=0 \quad q(x) = \frac{W_L}{l}$$

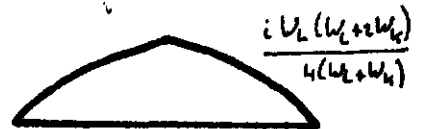
W_k in C



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2: E(x) = \frac{eW_L}{l} x \\ x \geq l/2: E(x) = \frac{eW_L}{l} (l-x) \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2: I(x) = \frac{iW_L(W_L+W_k)lx - iW_L^2 x^2}{(W_L+W_k)l^2} \\ x \geq l/2: I(x) = \frac{iW_L W_k l^2 + iW_L(W_L-W_k)lx - iW_L^2 x^2}{(W_L+W_k)l^2} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2: E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_L(W_L+W_k)lx - iW_L^2 x^2}{(W_L+W_k)l^2} \\ x \geq l/2: E(x) + I(x) = \frac{W_L(eW_L + eW_k + iW_k)(l^2 - lx) + iW_L^2(lx - x^2)}{(W_L+W_k)l^2} \end{array} \right.$$



$$V^e = \frac{eW_L l}{4}$$

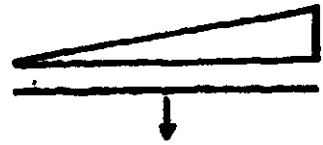
$$V^i = \frac{iW_L(2W_L + 3W_k)l}{12(W_L + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(3e+2i)W_L^2 + 3(e+i)W_L W_k}{12(W_L + W_k)} \cdot l$$

$$c=1 \quad a=b=0$$

$$W_k = 0$$

$$q(x) = \frac{2W_l}{l^2} x$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{eW_l}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: & E(x) = \frac{eW_l}{l^2} (l^2 - x^2) \end{cases}$$

$$I(x) = \frac{iW_l}{l^4} x^2 (l^2 - x^2)$$

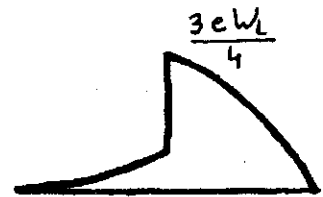
$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_l l^2 x^2 - iW_l x^4}{l^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{eW_l l^4 - (e-i)W_l l^2 x^2 - iW_l x^4}{l^4} \end{cases}$$

$$V^e = \frac{eW_l l}{4}$$

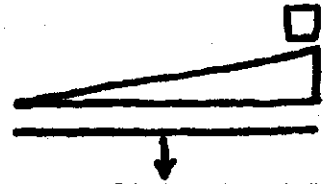
$$V^i = \frac{iW_l l}{15}$$

$$V^e + V^i = \frac{(15e + 4i)W_l l}{60}$$



$$c=1 \quad a=b=0 \quad q(x) = \frac{2W_1}{l^2} x$$

W_k in B



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{eW_1}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: & E(x) = eW_k + \frac{eW_1}{l^2} (l-x)^2 \end{cases}$$

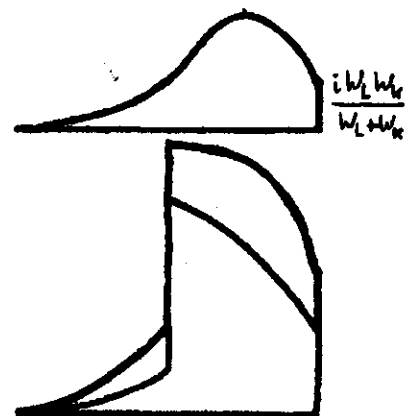
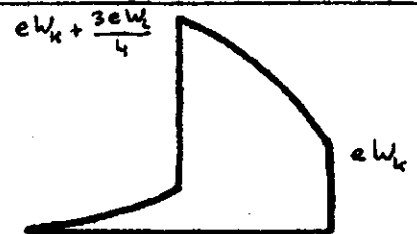
$$I(x) = \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 x^2}{(W_1 + W_k) l^4}$$

$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_1(W_1+W_k)l^2 x^2 - iW_1^2 x^4}{(W_1+W_k)l^4} \\ x \geq l/2: & E(x) + I(x) = eW_k + \frac{eW_1}{l^2} (l-x)^2 + \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 x^2}{(W_1+W_k)l^4} \end{cases}$$

$$V^c = \frac{e(W_1 + 2W_k)l}{4}$$

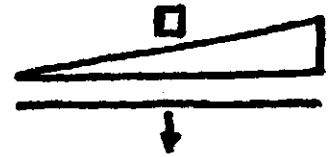
$$V^i = \frac{iW_1(2W_1 + 5W_k)l}{15(W_1 + W_k)}$$

$$V^c + V^i = \frac{(15e+8i)W_1^2 + 5(9e+4i)W_1W_k + 30eW_k^2}{60(W_1 + W_k)} \cdot l$$



$$c=1 \quad a=b=0 \quad q(x) = \frac{2W_1}{l^2} x$$

W_k in C



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_1}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = \frac{eW_1}{l^2} (l^2 - x^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_1}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = \frac{eW_1}{l^2} (l^2 - x^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : I(x) = \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 x^2}{(W_1 + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 (l^2 - x^2)}{(W_1 + W_k) l^4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : I(x) = \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 x^2}{(W_1 + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{iW_1^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_1 W_k l^2 (l^2 - x^2)}{(W_1 + W_k) l^4} \end{array} \right.$$

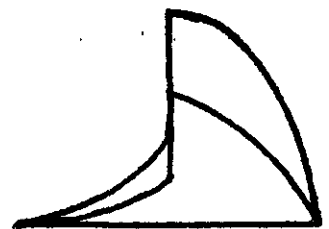
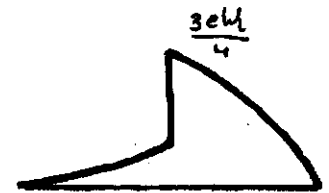
$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_1(W_1 + W_k)l^2 x^2 - iW_1^2 x^4}{(W_1 + W_k)l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{W_1[eW_1 l^2 + (e+i)W_k l^2 + iW_1 x^2](l^2 - x^2)}{(W_1 + W_k)l^4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_1(W_1 + W_k)l^2 x^2 - iW_1^2 x^4}{(W_1 + W_k)l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{W_1[eW_1 l^2 + (e+i)W_k l^2 + iW_1 x^2](l^2 - x^2)}{(W_1 + W_k)l^4} \end{array} \right.$$

$$V^e = \frac{eW_1 l}{4}$$

$$V^i = \frac{iW_1(8W_1 + 15W_k)l}{60(W_1 + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(15e+8i)W_1^2 + 15(e+i)W_1W_k}{60(W_1 + W_k)} \cdot l$$

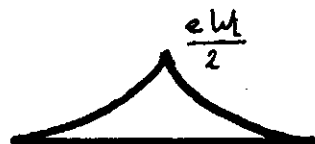


$$c=1 \quad a=b=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 : q(x) = \frac{4W_0}{l^2} x \\ x \geq l/2 : q(x) = \frac{4W_0}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

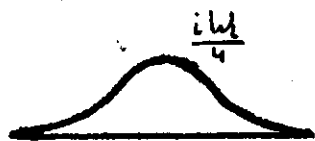
$$W_k=0$$



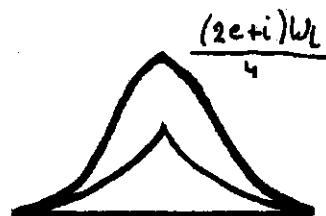
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{2eW_0}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = \frac{2eW_0}{l^2} (l-x)^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{2iW_0}{l^4} x^2(l^2 - 2x^2) \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{2iW_0}{l^4} (l-x)^2(4lx - 2x^2 - l^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_0 l^2 x^2 - 4iW_0 x^4}{l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{2W_0 [(e-i)l^2 + 8ilx - 2ix^2](l-x)^2}{l^4} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{eW_0 l}{6}$$

$$V^i = \frac{7iW_0 l}{60}$$

$$V^e + V^i = \frac{(10e + 7i)W_0 l}{60}$$

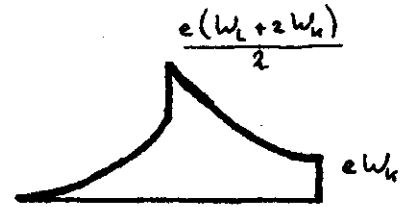
$$c=1 \quad a=b=0$$

$$w_k \text{ in } B$$

$$\begin{cases} x \leq l/2 : & q(x) = \frac{4w_l}{l^2} x \\ x \geq l/2 : & q(x) = \frac{4w_l}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : & E(x) = \frac{2ew_l}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : & E(x) = ew_k + \frac{2ew_l}{l^2} (l-x)^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : & I(x) = \frac{2iw_l[(w_l + w_k)l^2 x^2 - 2w_l x^4]}{(w_l + w_k)l^4} \\ x \geq l/2 : & I(x) = \frac{iw_l[(12w_l + 4w_k)l^3 x - (22w_l + 2w_k)l^2 x^2 + 16w_l l x^3 - 4w_l x^4 - (2w_l + w_k)l^4]}{(w_l + w_k)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)w_l(w_l + w_k)l^2 x^2 - 4iw_l^2 x^4}{(w_l + w_k)l^4} \\ x \geq l/2 : & E(x) + I(x) = ew_k + \frac{2ew_l}{l^2} (l-x)^2 + \frac{iw_l[(12w_l + 4w_k)l^3 x - (22w_l + 2w_k)l^2 x^2 + 16w_l l x^3 - 4w_l x^4 - (2w_l + w_k)l^4]}{(w_l + w_k)l^4} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{e(w_l + 3w_k)l}{6}$$

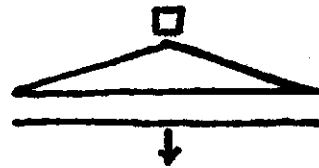
$$V^i = \frac{iw_l(7w_l + 205w_k)l}{60(w_l + w_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{w_l^2(10e + 7i) + w_l w_k(40e + 205i) + 30ew_k^2}{60(w_l + w_k)} \cdot l$$

$$c=1 \quad a=b=0$$

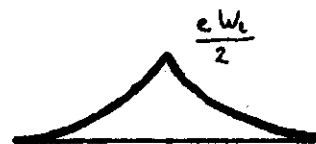
W_k in C

$$\begin{cases} x \leq l/2: & q(x) = \frac{4W_k}{l^2} x \\ x \geq l/2: & q(x) = \frac{4W_k}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



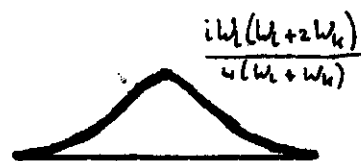
$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{2eW_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: & E(x) = \frac{2eW_k}{l^2} (l-x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{2eW_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: & E(x) = \frac{2eW_k}{l^2} (l-x)^2 \end{cases}$$



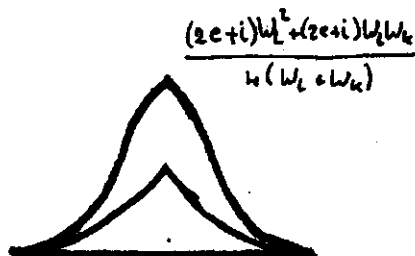
$$\begin{cases} x \leq l/2: & I(x) = \frac{2iW_k[(W_k+W_k)l^2x^2 - 2W_kx^4]}{(W_k+W_k)l^4} \\ x \geq l/2: & I(x) = \frac{2iW_k[(W_k+W_k)l^2(l-x)^2 - 2W_k(l-x)^4]}{(W_k+W_k)l^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq l/2: & I(x) = \frac{2iW_k[(W_k+W_k)l^2x^2 - 2W_kx^4]}{(W_k+W_k)l^4} \\ x \geq l/2: & I(x) = \frac{2iW_k[(W_k+W_k)l^2(l-x)^2 - 2W_k(l-x)^4]}{(W_k+W_k)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_k(W_k+W_k)l^2x^2 - 2iW_k^2x^4}{(W_k+W_k)l^4} \\ x \geq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_k(W_k+W_k)l^2(l-x)^2 - 4iW_k^2(l-x)^4}{(W_k+W_k)l^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_k(W_k+W_k)l^2x^2 - 2iW_k^2x^4}{(W_k+W_k)l^4} \\ x \geq l/2: & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_k(W_k+W_k)l^2(l-x)^2 - 4iW_k^2(l-x)^4}{(W_k+W_k)l^4} \end{cases}$$



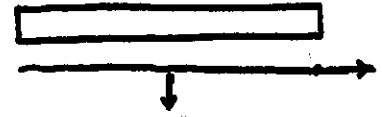
$$V^e = \frac{eW_k l}{6}$$

$$V^i = \frac{iW_k(7W_k + 10W_k)l}{60(W_k + W_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(10+7i)W_k^2 + 10(e+i)W_kW_k}{60(W_k + W_k)} \cdot l$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{wl}{l}$$

$$W_k = 0$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{ewl}{l} x \\ x \geq l/2: & E(x) = cel + \frac{(2b-1)ewl}{l} x \end{cases}$$

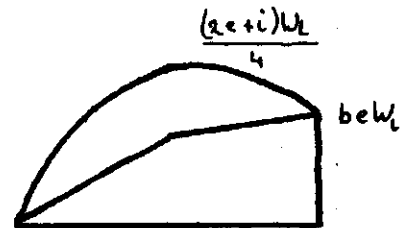
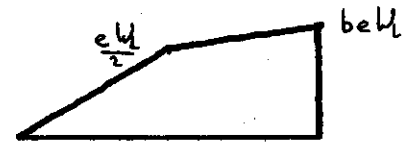
$$I(x) = \frac{iwl}{l^2} x(l-x)$$

$$\begin{cases} x \leq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{(e+i)wl^2x - iwlx^2}{l^2} \\ x \geq l/2 & E(x) + I(x) = \frac{cel^2 + (2be - e + i)wl^2x - iwlx^2}{l^2} \end{cases}$$

$$V^e = \frac{(b+i)ewl}{4}$$

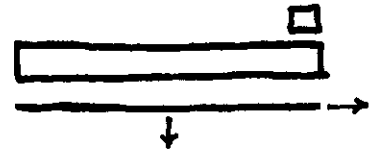
$$V^i = \frac{iwl}{6}$$

$$V^e + V^i = \frac{(3be + 3e + 2i)wl}{12}$$

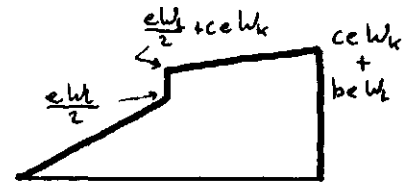


$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{W_1}{l}$$

W_k in B



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{cW_1}{l} x \\ x \geq l/2 : E(x) = ce(W_1+W_k) + \frac{(2b-1)W_1}{l} x \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iW_1(W_1+W_k)lx - iW_1^2x^2}{(W_1+W_k)l^2}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x)+I(x) = \frac{(c+i)W_1(W_1+W_k)lx - iW_1^2x^2}{(W_1+W_k)l^2} \\ x \geq l/2 : E(x)+I(x) = \frac{ce(W_1+W_k)l^2 + (2b+c+i)W_1(W_1+W_k)lx - iW_1^2x^2}{(W_1+W_k)l^2} \end{cases}$$



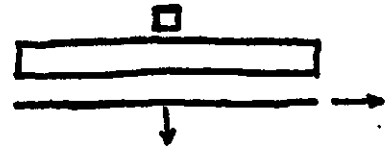
$$V^c = \frac{(1+b)W_1l + 2ceW_kl}{4}$$

$$V^i = \frac{iW_1(W_1+3W_k)l}{6(W_1+W_k)}$$

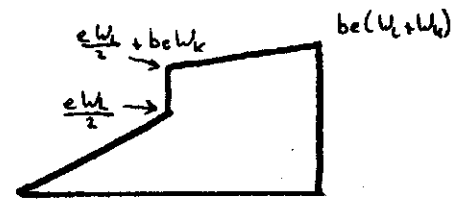
$$V^c + V^i = \frac{(3c+3b+c+2i)W_1^2 + 3(2c+ce+2i)W_1W_k + 6ceW_k^2}{12(W_1+W_k)} \cdot l$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{W_k}{l}$$

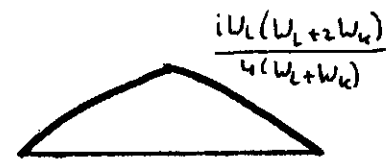
W_k in C



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_k}{l} x \\ x \geq l/2 : E(x) = ceW_k + beW_k + \frac{(2b-1)eW_k}{l} x \end{cases}$$

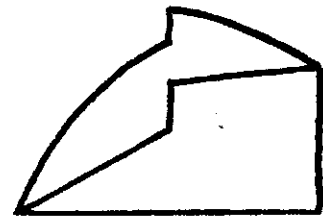


$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{iW_k(W_k + W_k)lx - iW_k^2 x^2}{(W_k + W_k)l^2} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{iW_k W_k l^2 + iW_k(W_k - W_k)lx - iW_k^2 x^2}{(W_k + W_k)l^2} \end{cases}$$



$$x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_k(W_k + W_k)lx - iW_k^2 x^2}{(W_k + W_k)l^2}$$

$$x \geq l/2 : E(x) + I(x) = ceW_k + beW_k + \frac{(2b-1)eW_k}{l} x + \frac{iW_k W_k l^2 + iW_k(W_k - W_k)lx - iW_k^2 x^2}{(W_k + W_k)l^2}$$



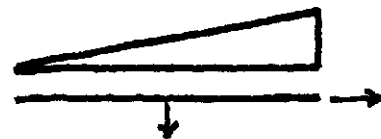
$$V^e = \frac{(b+1)eW_k l + 2beW_k l}{4}$$

$$V^i = \frac{iW_k(2W_k + 3W_k)l}{12(W_k + W_k)}$$

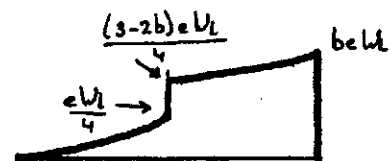
$$V^e + V^i = \frac{W_k^2 [(b+1)e + \frac{3}{2}i] + 2beW_k^2 + W_k W_k (3be + e + i)}{4(W_k + W_k)} \cdot l$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{2W_1}{l^2} x$$

$$W_k = 0$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_1}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = ceW_1 + \frac{(2b-1)eW_1}{l^2} x^2 \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iW_1}{l^4} x^2 (l^2 - x^2)$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(e+i)W_1 l^2 x^2 - iW_1 x^4}{l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{ceW_1 l^4 + (2be - e + i)W_1 l^2 x^2 - iW_1 x^4}{l^4} \end{cases}$$



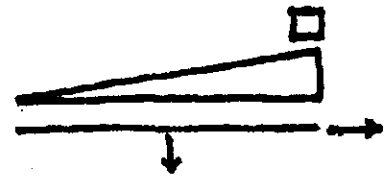
$$V_e = \frac{(b+s)eW_1 l}{12}$$

$$V_i = \frac{2iW_1 l}{15}$$

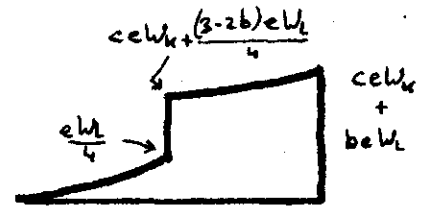
$$V_e + V_i = \frac{(sbe + ise + 0i)W_1 l}{60}$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{2W_L}{l^2} x$$

W_K in B



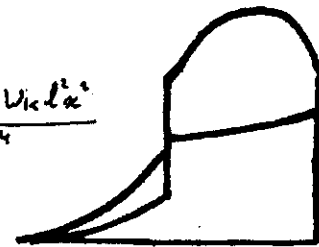
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_L}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = ce(W_L + W_K) + \frac{(2b-1)eW_L x^2}{l^2} \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iW_L^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_L W_K l^2 x^2}{(W_L + W_K) l^4}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{eW_L x^2}{l^2} + \frac{iW_L^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_L W_K l^2 x^2}{(W_L + W_K) l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = ce(W_L + W_K) + \frac{(2b-1)eW_L x^2}{l^2} + \frac{iW_L^2 x^2 (l^2 - x^2) + iW_L W_K l^2 x^2}{(W_L + W_K) l^4} \end{cases}$$



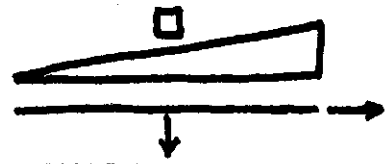
$$V^e = \frac{(4-c)eW_L l}{12} + \frac{ceW_K l}{2}$$

$$V^i = \frac{iW_L (2W_L + 5W_K) l}{15(W_L + W_K)}$$

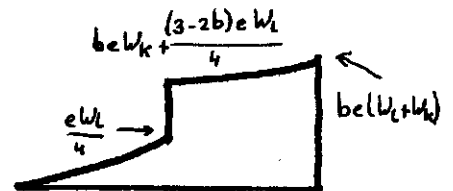
$$V^e + V^i = \frac{(5bc + 15e + 0i)W_L^2 - 5(5bc - ge - 4i)W_L W_K + 30ceW_K^2}{60(W_L + W_K)} \cdot l$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad q(x) = \frac{2W_L}{l^2} x$$

W_k in C



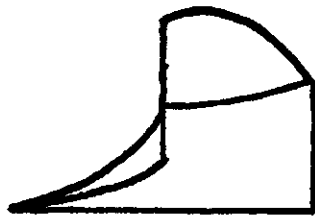
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{eW_L}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = ceW_L + beW_k + \frac{(2b-1)eW_L}{l^2} x^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_L W_k l^2 x^2}{(W_L + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_L W_k l^2 (l^2 - x^2)}{(W_L + W_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{eW_L x^2}{l^2} + \frac{iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_L W_k l^2 x^2}{(W_L + W_k) l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = ceW_L + beW_k + \frac{(2b-1)eW_L x^2}{l^2} + \frac{iW_L^2 x^3 (l^2 - x^2) + iW_L W_k l^2 (l^2 - x^2)}{(W_L + W_k) l^4} \end{cases}$$

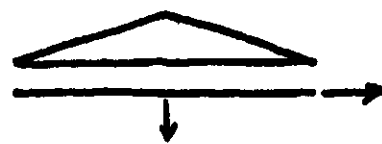


$$V^e = \frac{(b+3)eW_L l + 6beW_k l}{12}$$

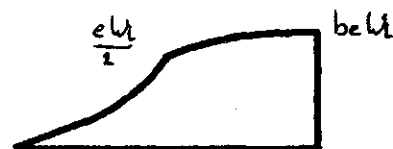
$$V_i = \frac{iW_L (8W_L + 15W_k) l}{60(W_L + W_k)}$$

$$V^e + V_i = \frac{(5be + 15e + 8i)W_L^2 + 5(7be + 3e + 3i)W_L W_k + 30beW_k^2}{60(W_L + W_k)} \cdot l$$

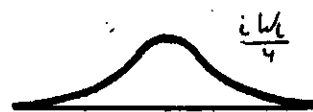
$$b+c=1 \quad a=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & q(x) = \frac{4W_k}{l^2} x \\ x \geq l/2 & q(x) = \frac{4W_k}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



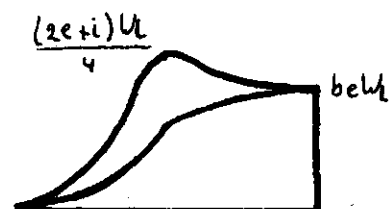
$$\begin{cases} x \leq l/2 : & E(x) = \frac{2eW_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : & E(x) = \frac{eW_k [(2-3b)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : & I(x) = \frac{2iW_k}{l^4} x^2 (l^2 - 2x^2) \\ x \geq l/2 : & I(x) = \frac{2iW_k (l-x)^2 (4lx - 2x^2 - l^2)}{l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : & E(x) + I(x) = \frac{2(e+i)W_k l^2 x^2 - 4iW_k x^4}{l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq l/2 : & E(x) + I(x) = \frac{eW_k [(2-3b)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^4} + \frac{2iW_k (l-x)^2 (4lx - 2x^2 - l^2)}{l^4} \end{cases}$$

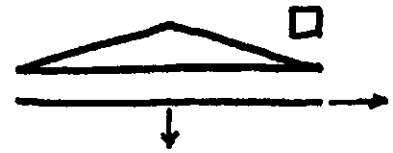
$$V^e = \frac{(3-2c)eW_k l}{6}$$

$$V^i = \frac{7iW_k l}{60}$$

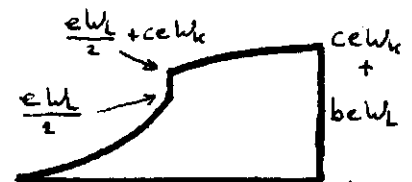
$$V^e + V^i = \frac{(30e - 20ce + 7i)W_k \cdot l}{60}$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & q(x) = \frac{4wl}{l^2} x \\ x \geq l/2 & q(x) = \frac{4wl}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

w_k in B



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) = \frac{2ew_l}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: & E(x) = cew_k + \frac{ew_l[(2-3b)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: & I(x) = \frac{2iwl_l[(w_l+w_k)l^2x^2 - 2w_lx^3]}{(w_l+w_k)l^4} \\ x \geq l/2: & I(x) = \frac{iwl_l[(12w_l+4w_k)lx^3 - (22w_l+2w_k)l^2x^2 + 16w_llx^3 - 4w_lx^4 - 2(w_l+w_k)l^4]}{(w_l+w_k)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: & E(x) + I(x) = \\ x \geq l/2: & E(x) + I(x) = \end{cases}$$



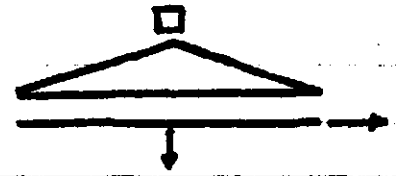
$$V^e = \frac{(3-2c)ew_l + 3cew_k}{6} \cdot l$$

$$V^i = \frac{iw_l(7w_l + 285w_k)}{60(w_l + w_k)} \cdot l$$

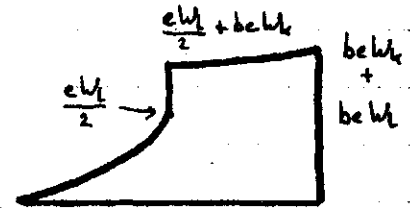
$$V^e + V^i = \frac{w_l^2(30c - 20cc + 7i) + w_l w_k(10cc + 30c + 285i) + 30cew_k^2}{60(w_l + w_k)} \cdot l$$

$$b+c=1 \quad a=0 \quad \begin{cases} x \leq l/2 & q(x) = \frac{4W_L}{l^2} x \\ x \geq l/2 & q(x) = \frac{4W_L}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

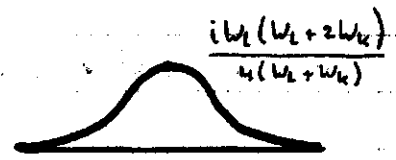
W_K in C



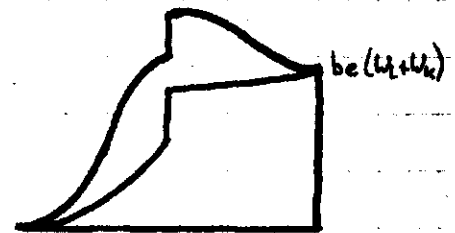
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = \frac{2eW_L}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = beW_K + \frac{eW_L[(2-3b)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{2iW_L[(W_L+W_K)l^2x^3 - 2W_Lx^4]}{(W_L+W_K)l^4} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{2iW_L[(W_L+W_K)l^2(l-x)^3 - 2W_L(l-x)^4]}{(W_L+W_K)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \end{cases}$$



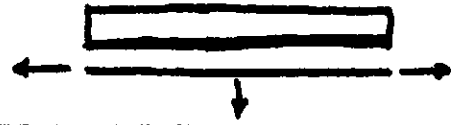
$$V^e = \frac{(1+2b)eW_L + 3beW_K}{6} \cdot l$$

$$V^i = \frac{iW_L(7W_L + 10W_K)}{60(W_L + W_K)} \cdot l$$

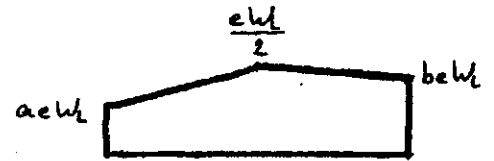
$$V^e + V^i = \frac{(10e - 20be + 7i)W_L^2 + 10(e + 5be + i)W_LW_K + 30beW_K^2}{60(W_L + W_K)} \cdot l$$

$$a+b+c=1 \quad q(x) = \frac{wl}{l}$$

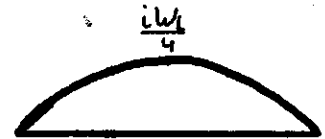
$$w_k = 0$$



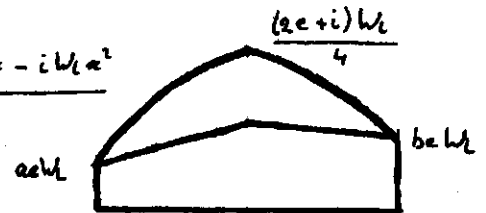
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = aewl + \frac{(1-2a)ewl}{l} x \\ x \geq l/2 : E(x) = (1-b)ewl + \frac{(2b-1)ewl}{l} x \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iwl}{l^2} x(l-x)$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{aewl^2 + (e-2ae+i)wlx - iwlx^2}{l^2} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(1-b)ewl^2 + (2be-e+i)wlx - iwlx^2}{l^2} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{(2-c)ewl}{4}$$

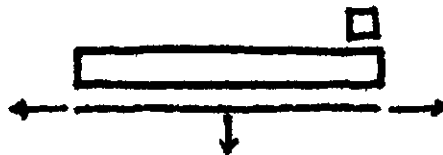
$$V^i = \frac{iwl}{6}$$

$$V^e + V^i = \frac{(6e-3ce+2i)wl}{12}$$

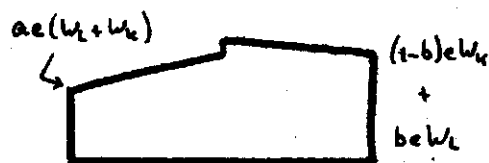
$$a+b+c=1$$

$$w_k \text{ in } B$$

$$q(x) = \frac{w_l}{l}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{l}{2} : E(x) = ae(w_l + w_k) + \frac{(1-2a)ew_l}{l} x \\ x \geq \frac{l}{2} : E(x) = (1-b)e(w_l + w_k) + \frac{(2b-1)ew_l}{l} x \end{array} \right.$$



$$I(x) = \frac{i w_l (w_l + w_k) l x - i w_l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^2}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq \frac{l}{2} : E(x) + I(x) = \frac{ae(w_l + w_k)^2 l^2 + (e - 2ae + i) w_l (w_l + w_k) l x - i w_l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^2} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq \frac{l}{2} : E(x) + I(x) = \frac{(1-b)e(w_l + w_k)^2 l^2 + (2be + e + i) w_l (w_l + w_k) l x - i w_l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^2} \end{array} \right.$$

$$V^e = \frac{(2-c)ew_l l + 2(2a+c)ew_k l}{4}$$

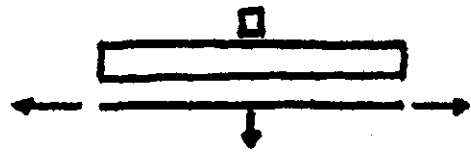
$$V^i = \frac{i w_l (w_l + 3w_k) l}{6(w_l + w_k)}$$

$$V^e + V^i = \frac{(6e - 3ce + 2i)w_l^2 + 3(2e + 4ae + ce + 2i)w_l w_k + 6(2ae + ce)w_k^2}{12(w_l + w_k)} \cdot l$$

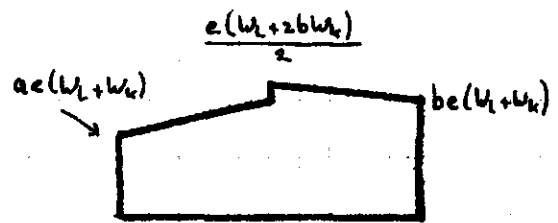
$$a+b+c=1$$

W_k in C

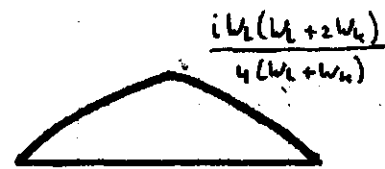
$$q(x) = \frac{W_l}{l}$$



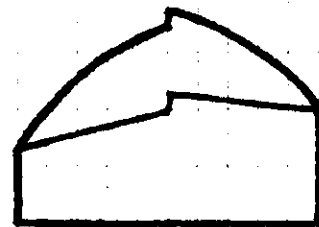
$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) = ae(W_l + W_k) + \frac{(1-2a)eW_l}{l}x \\ x \geq l/2: E(x) = (1-b)eW_l + beW_k + \frac{(2b-1)eW_l}{l}x \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: I(x) = \frac{iW_l(W_l + W_k)lx - iW_l^2x^2}{(W_l + W_k)l^2} \\ x \geq l/2: I(x) = \frac{iW_lW_kl^2 + iW_l(W_l - W_k)lx - iW_l^2x^2}{(W_l + W_k)l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) + I(x) = ae(W_l + W_k) + \frac{(1-2a)eW_l}{l}x + \frac{iW_l(W_l + W_k)lx - iW_l^2x^2}{(W_l + W_k)l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq l/2: E(x) + I(x) = (1-b)eW_l + beW_k + \frac{(2b-1)eW_l}{l}x + \frac{iW_lW_kl^2 + iW_l(W_l - W_k)lx - iW_l^2x^2}{(W_l + W_k)l^2} \end{cases}$$

$$V^e = \frac{(2-c)eW_ld + (2-2c)eW_kl}{4}$$

$$V^i = \frac{iW_l(2W_l + 3W_k)l}{12(W_l + W_k)}$$

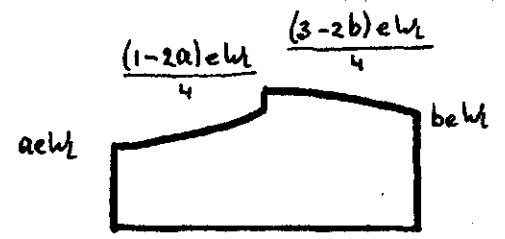
$$V^e + V^i = \frac{W_l^2 [(2-c)e + \frac{3}{2}i] + (2-2c)eW_k^2 + W_lW_k(4e - 3ce + i)}{4(W_l + W_k)} \cdot l$$

$a+b+c=1$
 $w_k=0$

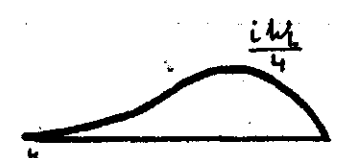
$q(x) = \frac{2w_k}{l^2} x$



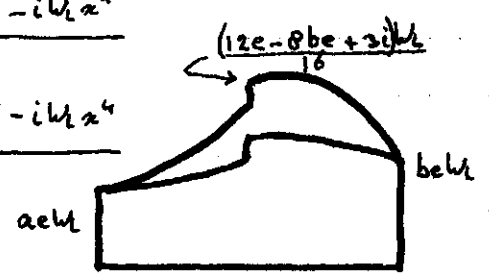
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = aew_k + \frac{(1-2a)ew_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = (1-b)ew_k + \frac{(2b-1)ew_k}{l^2} x^2 \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iw_k}{l^4} x^2 (l^2 - x^2)$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{aew_k l^4 + (c-2ac+i)w_k l^2 x^2 - iw_k x^4}{l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \frac{(1-b)ew_k l^4 + (2be-c+i)w_k l^2 x^2 - iw_k x^4}{l^4} \end{cases}$$



$$V^e = \frac{(5a+b+3)ew_k l}{12}$$

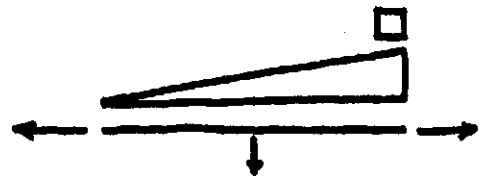
$$V^i = \frac{2iw_k l}{15}$$

$$V^e + V^i = \frac{(25ac + 8be + 15e + 8i)w_k l}{60}$$

$$a+b+c=1$$

w_k in B

$$q(x) = \frac{2w_l}{l^2} x$$



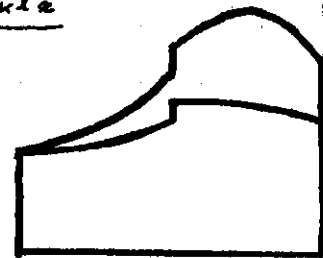
$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) = ae(w_l + w_k) + \frac{(1-2a)ew_l}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: E(x) = (1-b)e(w_l + w_k) + \frac{(2b-1)ew_l x^2}{l^2} \end{cases}$$



$$I(x) = \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^4}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) + I(x) = ae(w_l + w_k) + \frac{(1-2a)ew_l x^2}{l^2} + \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \geq l/2: E(x) + I(x) = (1-b)e(w_l + w_k) + \frac{(2b-1)ew_l x^2}{l^2} + \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^4} \end{cases}$$

$$V_e = \frac{(5a+b+3)ew_l l}{12} + \frac{(a-b+1)ew_k l}{2}$$

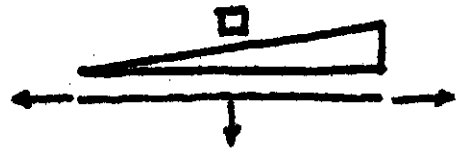
$$V_i = \frac{iw_l(2w_l + 5w_k)l}{15(w_l + w_k)}$$

$$V_e + V_i = \frac{(25ae + 5be + 15e + 8i)w_l^2 + 5(11ae - 5be + 9e + 4i)w_l w_k + 30e(a-b+1)w_k^2}{60(w_l + w_k)} \cdot l$$

$$a+b+c=1$$

w_k in C

$$q(x) = \frac{2w_k}{l^2} x$$



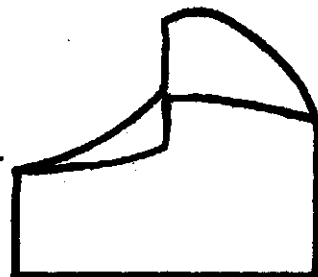
$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) = ac(w_l + w_k) + \frac{(1-2a)ew_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2: E(x) = (1-b)ew_k + bw_k + \frac{(2b-1)ew_k x^2}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: I(x) = \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^4} \\ x \geq l/2: I(x) = \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 (l^2 - x^2)}{(w_l + w_k) l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2: E(x) + I(x) = ac(w_l + w_k) + \frac{(1-2a)ew_k x^2}{l^2} + \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 x^2}{(w_l + w_k) l^4} \\ x \geq l/2: E(x) + I(x) = (1-b)ew_k + bw_k + \frac{(2b-1)ew_k x^2}{l^2} + \frac{iw_l^2 x^3 (l^2 - x^2) + iw_l w_k l^2 (l^2 - x^2)}{(w_l + w_k) l^4} \end{cases}$$



$$V_e = \frac{(5a+b+3)ew_k l + 6(a+b)ew_k l}{12}$$

$$V_i = \frac{iw_l(8w_l + 15w_k)l}{60(w_l + w_k)}$$

$$V_e + V_i = \frac{(25ae + 5be + 15e + 0i)w_l^2 + 5(11ae + 7be + 3e + 3i)w_l w_k + 30(a+b)ew_k^2}{60(w_l + w_k)} \cdot l$$

$$a+b+c=1$$

$$w_k=0$$

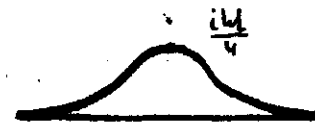
$$\begin{cases} x \leq l/2 : q(x) = \frac{4wl}{l^2} x \\ x \geq l/2 : q(x) = \frac{4wl}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



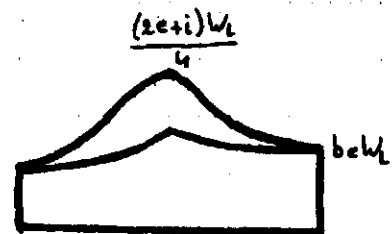
$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = aew_l + \frac{2(1-2a)ew_l}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = aew_l + \frac{ew_l[(1-2b+c)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{2ilwl}{l^4} x^2(l^2 - 2x^2) \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{2ilwl}{l^4} (l-x)^2(4lx - 2x^2 - l^2) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = aew_l + \frac{2(e-2ac+i)wl^2x^2 - 4ilwlx^4}{l^4} \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = aew_l + \frac{ew_l[(1-2b+c)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} + \frac{2ilwl}{l^4} (l-x)^2(4lx - 2x^2 - l^2) \end{cases}$$



$$V^e = \frac{(3-2c)ew_l l}{6}$$

$$V^i = \frac{7ilwl}{60}$$

$$V^e, V^i = \frac{(30e-20ce+7i)wl l}{60}$$

$$a+b+c=1$$

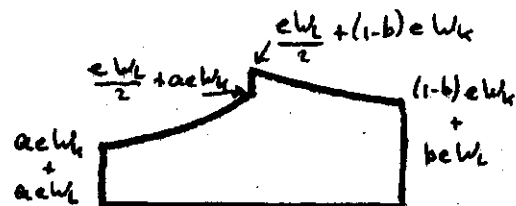
$$W_K \text{ in } B$$

$$\begin{cases} x \leq l/2 : q(x) = \frac{4W_L}{l^2} x \\ x \geq l/2 : q(x) = \frac{4W_L}{l^2} (l-x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = ae(W_L + W_K) + \frac{2(1-2a)eW_L}{l^2} x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq l/2 : E(x) = aeW_L + (1-b)eW_K + \frac{eW_L[(1-2b+c)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{2iW_L[(W_L + W_K)l^2 x^2 - 2W_L x^4]}{(W_L + W_K)l^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq l/2 : I(x) = \frac{iW_L[(12W_L + 4W_K)l^2 x - (22W_L + 2W_K)l^2 x^2 + 16W_L l x^3 - 4W_L x^4 - (2W_L + W_K)l^4]}{(W_L + W_K)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \end{cases}$$



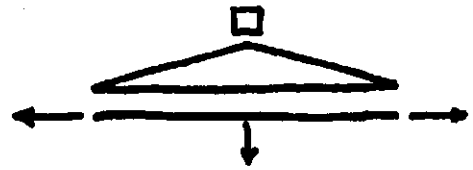
$$V^e = \frac{(3-2c)eW_L + 3(2a+c)eW_K}{6} \cdot l$$

$$V^i = \frac{iW_L(7W_L + 28W_K)l}{60(W_L + W_K)}$$

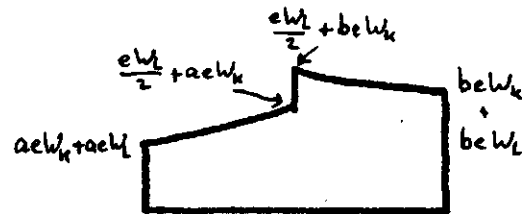
$$V^e + V^i = \frac{W_L^2(30e - 20ce + 7i) + W_L W_K(30e + 10ce + 28fi + 60ae) + 30eW_K^2(2a+c)}{60(W_L + W_K)} \cdot l$$

$$a+b+c=1 \quad \begin{cases} x \leq l/2 : q(x) = \frac{4W_k}{l^2} x \\ x \geq l/2 : q(x) = \frac{4W_k}{l^2} (l-x) \end{cases}$$

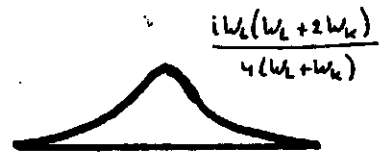
$W_k \text{ in } C$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) = ac(W_1 + W_k) + \frac{2(1-2a)eW_k}{l^2} x^2 \\ x \geq l/2 : E(x) = e(aW_1 + bW_k) + \frac{eW_k[(1-2b+c)l^2 + 4(2b-1)lx + 2(1-2b)x^2]}{l^2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : I(x) = \frac{2iW_k[(W_1 + W_k)l^2 x^2 - 2W_k x^4]}{(W_1 + W_k)l^4} \\ x \geq l/2 : I(x) = \frac{2iW_k[(W_1 + W_k)l^2(l-x)^2 - 2W_k(l-x)^4]}{(W_1 + W_k)l^4} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \leq l/2 : E(x) + I(x) = \\ x \geq l/2 : E(x) + I(x) = \end{cases}$$



$$V_i^e = \frac{(3-2c)eW_k + 3(1-c)eW_k}{6} \cdot l$$

$$V_i^i = \frac{iW_k(7W_1 + 10W_k)l}{60(W_1 + W_k)}$$

$$V_i^e + V_i^i = \frac{(30e - 20ce + 7i)W_k^2 + 10(6e - 5ce + i)W_1W_k + 30(e - ce)W_k^2}{60(W_1 + W_k)} \cdot l$$