

CODEN: IBBRAH (19-78) 1- (1978)

INSTITUUT VOOR BODEMVRUCHTBAARHEID

RAPPORT 19-78

BEREKENINGEN OVER FOSFAATOPNAME DOOR EEN GEWAS IN AFHANKELIJKHEID VAN
BEWORTELINGSDICHTHEID EN FOSFAATRIJKDOM VAN DE GROND

With a summary:

*Calculations on P-uptake by crops in relation to rooting density and
P-status of the soil*

door

P. DE WILLIGEN en M. VAN NOORDWIJK

1978

Instituut voor Bodemvruchtbaarheid, Oosterweg 92, Haren (Gr.)

Inst. Bodemvruchtbaarheid, Rapp. 19-78 (1978) pp.

119558.

INHOUD

0. Lijst van gebruikte symbolen	3
1. Inleiding	5
2. Modelbeschrijving	8
2.1. Algemene opzet	8
2.2. Bespreking van de gebruikte aannames en beperkingen	10
2.2.1. Chemie van fosfaat in de bodem	10
2.2.2. Geometrie van het grond-wortelsysteem	19
2.2.3. Fysiologie van de opname	21
3. Wiskundige formulering en gebruikte oplossingstechniek	27
3.1. Transportvergelijking en randvoorwaarden	27
3.2. Oplossing in geval van lineaire adsorptie	28
3.3. Oplossing in geval van niet-lineaire adsorptie	31
4. Resultaten	34
4.1. Relatie bewortelingsdichtheid - P_w - opname	34
4.2. Karakterisering P-leverend vermogen afhankelijk van de bewortelingsdichtheid	35
5. Discussie	44
6. Samenvatting	47
7. Summary	49
8. Literatuur	51
9. Appendix I. Wiskundige oplossing bij lineaire adsorptie	55
10. Appendix II. Uitwerking van de algemene oplossing	57
11. Appendix III. Berekening van t_c bij gelijkmatige uitputting	61
12. Appendix IV. Programmatekst van het computermodel	63

0. LIJST VAN GEBRUIKTE SYMBOLEN EN GEBRUIKTE PARAMETERWAARDEN

symbool	betekenis	eenheid	aangenomen waarde
A	opnamesnelheid van het gewas	mg P cm ⁻² dag ⁻¹	4.4 10 ⁻³
A ₁ , A ₂	adsorptiemaxima Langmuirvergelijking	mg P cm ⁻³	} tabel 1
b ₁ , b ₂	parameters adsorptie-isotherm	ml mg ⁻¹	
C	fosfaatconcentratie (bodem) oplossing	mg P ml ⁻¹	
C ₁	grensconcentratie waarbij adsorptie-isotherm lineair te noemen is	mg P ml ⁻¹	
C _{lim}	grensconcentratie waarbij nog net voldoende opname mogelijk is	mg P ml ⁻¹	
C (i)	initiële (= begin) concentratie	mg P ml ⁻¹	
C _{Ro}	concentratie bij de wortelwand	mg P ml ⁻¹	
D'	diffusiecoëfficiënt fosfaat in grond	cm ² dag	0.4
D*	effectieve diffusiecoëfficiënt bij adsorptie	cm ² dag	
F	opname flux	mg cm ⁻² dag ⁻¹	
G	groeisnelheid gewas	g cm ⁻² dag ⁻¹	2 10 ⁻³
h	wortellengte = bouwvoordikte	cm	20
K	adsorptieconstante	ml cm ⁻³	
P	fosfaatgehalte plant	mg P g ⁻¹	2.2
P _A	gehalte geadsorbeerd fosfaat in bodem	mg P cm ⁻³	
P _M	gehalte mobiel fosfaat in bodem	mg P cm ⁻³	
P _M (i)	initiëel gehalte mobiel fosfaat	mg P cm ⁻³	
P _w	P-water getal	mg P ₂ O ₅ l ⁻¹	
r	afstand tot middelpunt van de wortel	cm	
R ₀	straal van de wortel	cm	0,025
R ₁	straal grondcilinder	cm	
x = r/R ₀	dimensieloze afstand		
t	tijd	dag	
t _c	toeleveringstijd, tijd gedurende welke opname in vereist tempo plaatsvindt	dag	

symbool	betekenis	eenheid	aangenomen waarde
$u=C/C(i)$	dimensieloze (relatieve) concentratie		
w	bewortelingsdichtheid	$\text{cm cm}^{-3} = \text{cm}^{-2}$	
α	opnameparameter	cm dag^{-1}	17
$\eta=h/R_0$	dimensieloze bouwvoordikte		
θ	vochtgehalte grond of extractieverhouding (verdunningsfactor)	ml cm^{-3}	0,4
$\rho=R_1/R_0$	dimensieloze straal grondcilinder		
τ	dimensieloze tijd		
ϕ	dimensieloze aanbod/vraag verhouding		

1. INLEIDING

Bij het bemestingsonderzoek heeft de praktijk veelal voorgelopen op de theorie. Bij het zoeken naar bepalingmethoden die een goede indruk geven van de "beschikbaarheid" van een nutriënt werden via "trial and error" (wat niet wil zeggen lukraak) extractieprocedures gezocht met een zo goed mogelijke voorspellende waarde. Via reeksen proefvelden en correlatieberekeningen kwam men dan tot bruikbare adviezen voor de praktijk. De theoretische achtergrond van dergelijke adviezen in termen van chemische en fysische processen in de bodem is in het algemeen slechts in kwalitatieve verklaringen bekend. Dat is zeer begrijpelijk; de reactie van een plant over een heel groeizeizoen wordt immers door zoveel processen bepaald, die ook weer op elkaar inwerken, dat een kwantitatieve verklaring op grond van die processen slechts na intensief en gericht onderzoek, en dan nog slechts met een ruime marge, mogelijk is. Dit wil natuurlijk niet zeggen dat theoretisch onderzoek voor de bemestingspraktijk zonder betekenis is. Ook zonder direct te streven naar een sluitende kwantitatieve verklaring kunnen bijvoorbeeld modelberekeningen of chemisch onderzoek aan eenvoudiger systemen inzicht verschaffen in de vraag waar correlaties gezocht zouden moeten worden en of men kan verwachten dat methodes, ontwikkeld voor Nederlandse omstandigheden, ook van nut kunnen zijn voor de beoordeling van andere, bijvoorbeeld tropische gronden.

In dit rapport wordt getracht bij te dragen aan het theoretisch inzicht in de fosfaatvoeding van het gewas via de grond. De meeste Nederlandse gronden bevatten een veelvoud van de hoeveelheid fosfaat die een gewas in een groeizeizoen onttrekt. Een deel van dit fosfaat is te sterk gebonden om beschikbaar te zijn voor de plant ("immobiel"), een deel is zwak gebonden aan de grond ("geadsorbeerd") en slechts een zeer klein deel is in oplossing aanwezig. De plant neemt uit die derde fractie op, maar is in een geheel groeizeizoen vooral afhankelijk van nalevering uit de tweede, geadsorbeerde fractie. Het karakteriseren van het fosfaatleverend vermogen van een grond komt dan ook neer op het meten van de som van de eerste en een deel van de tweede fractie. Echter voor het bepalen van vooral de tweede fractie is een scherper definiëren hiervan nodig en hier lopen de

diverse bepalingmethoden uiteen. In Nederland zijn achtereenvolgens gebruikt: een warmwater extractie ("P-getal"), een extractie met 1% citroenzuur ("P-citr."), een extractie met ammonia-lactaat-azijnzuur ("P-Al") en een verbeterde waterextractie ("P_w") (van der Paauw et al., 1971). In het buitenland is een groot aantal andere extractietechnieken in gebruik (Ansiaux, 1977) met als voornaamste 0,5 M NaHCO₃ volgens Olsen, 0,025 N HCl - 0,03 N NH₄F volgens Bray en P-CAL. De keus voor een extractievloeistof (water, "bodemplossing", zwak zuur) is vaak wel rationeel, maar de verdere uitwerking van de methode (bijvoorbeeld wat betreft volumeverhouding grond: vloeistof (1:10 voor P-getal, 1:60 voor P_w) en de interpretatie van de gevonden waarden berusten op louter empirie. In Nederland wordt momenteel P_w gebruikt voor bouwland, maar op grasland blijkt de oudere P-Al methode beter te voldoen.

Het blijkt mogelijk (zie 2.2.1.) P_w waardes bij benadering te berekenen uit adsorptieeigenschappen van de betreffende grond. Dit vormde het uitgangspunt voor berekeningen over de vraag "hoeveel wortels heeft een plant nodig voor fosfaatopname, in een grond van gegeven P-rijkdom?", nader te specificeren tot "welke bewortelingsdichtheid (lengte wortels per volume grond) is nodig om in het benodigde tempo voldoende fosfaat op te nemen bij gegeven P-rijkdom en bouwvoor dikte?". Deze vraag is ook om te draaien tot "hoe groot moet het fosfaatleverend vermogen van de grond zijn om aan de behoefte van een gewas met gegeven bewortelingsdichtheid te voldoen?". Het gaat om het samenspel van het aanbod in de grond, de behoefte van de plant en het opnemend vermogen van het wortelstelsel (fysiologisch en ruimtelijk).

Uitgaande van een aangenomen gewenste opname door het gewas en van een sterk vereenvoudigde beschrijving van de fosfaatchemie en het fosfaattransport in de grond, hebben we berekeningen gemaakt waarin bewortelingsdichtheid en het P-leverend vermogen van de grond als voornaamste variabelen werden ingevoerd. Tijdens het onderzoek bleek dat tevens meer inzicht ontstond in de manier waarop het fosfaat-leverend vermogen van een grond gekarakteriseerd kan worden, afhankelijk van de bewortelingsdichtheid.

In het volgende hoofdstuk zullen de bij ons model* gemaakte vooronderstellingen (simplificaties t.o.v. de werkelijkheid) uiteengezet worden. Hoofdstuk 3 behandelt vervolgens de wiskundige formulering van het model (de wiskundige vertaling van de vooronderstellingen) en de gebruikte oplossingstechniek. Dit hoofdstuk is zonder bezwaar over te slaan voor de hierin niet geïnteresseerde lezer. In hoofdstuk 4 en 5 komen we terug op de landbouwkundige vraagstelling die hierboven uiteengezet is.

* Bij het uitwerken van het model hebben we veel waardevolle discussies gehad met Dr. P.A.C. Raats, die vooral bij de analytische oplossing advies heeft gegeven en de gehele tekst van dit rapport kritisch heeft doorgenomen.

2. MODELBESCHRIJVING

2.1. algemene opzet

Elk model is per definitie een geschematiseerde, vereenvoudigde weergave van de werkelijkheid. Het gaat bij het opstellen van een model om hetzelfde als van Wijk (1963) gezegd heeft over de algemene mathematisch-fysische aanpak van problemen: "to isolate the essential characteristics of the problem and to abstract them from the less essential ones". De keuze tussen wel en niet essentiële karakteristieken blijft natuurlijk subjectief en daarom discutabel. Soms is het zelfs nodig nog rigoreuzere vereenvoudigingen aan te brengen dan eigenlijk toelaatbaar wordt geacht, om, bij gegeven oplossingstechniek, nog tot een oplossing te komen. Zo bleek het, bij het zoeken naar een analytische oplossing van het hier te behandelen transportprobleem, nodig uit te gaan van lineaire adsorptie, terwijl het voorstellen van binding van fosfaat in de grond als adsorptie op zichzelf al een vergaande simplificatie en lineariteit hiervan slechts een limietgeval is. Niettemin is het nuttig over een dergelijke analytische oplossing te beschikken, omdat deze kan dienen als referentie en controle van de numerieke oplossingsmethode, waarmee reëlere situaties kunnen worden nagerekend. Ook geeft een analytische oplossing inzicht in hoe de variabelen op elkaar inwerken. Dit is als referentie voor de reëlere situatie bruikbaar.

Als mineraal- en vochtvoorziening goed zijn, is straling beperkend voor de groei. Nadat eenmaal een gesloten gewasdek bereikt is, ligt de groeisnelheid van de meeste gewassen op een constant niveau (onder Nederlandse omstandigheden ca. $200 \text{ kg droge stof ha}^{-1} \text{ dag}^{-1}$, zie 2.2.3). Als we als landbouwkundig doel stellen het realiseren van deze, door licht bepaalde groeisnelheid, dan volgt uit het benodigde mineraalgehalte (hoeveelheid mineraal per eenheid droge stof) direct de benodigde opname door het gewas. Deze per dag benodigde mineraalopname staat centraal in onze berekeningen. De grootte die we hebben uitgerekend is nl. het aantal dagen (t_c) dat aan deze vraag voldaan kan worden door een combinatie van bewortelingsdichtheid en fosfaatrijksdom van de grond.

Zowel een hogere P-rijkdom van de grond als een sterker ontwikkeld wortelstelsel kunnen deze periode verlengen. Bij de berekening van de opname zijn we ervan uitgegaan dat alle wortels gelijkelijk opnemen (voor details en rechtvaardiging zie 2.2.3). Dit maakt het mogelijk te spreken over één, gemiddelde wortel met bijbehorende cilinder grond waaruit opname plaatsvindt. De opname per gewasoppervlak per dag wordt gedeeld door de lengte wortels per gewasoppervlak om de opnamebehoefte per wortel te krijgen. De opname vindt plaats uit de bodemoplossing direct rond de wortel en verlaagt de concentratie ter plaatse, waardoor diffusie gaat optreden van fosfaat uit aangrenzende bodemoplossing. Zodra de concentratie in oplossing daalt, komt er ter plaatse geadsorbeerd fosfaat in oplossing, tot een nieuwe evenwichtsconcentratie is bereikt. Op deze wijze kan de grond een tijdlang de plaatselijke uitputting rond de wortel compenseren, maar na zekere tijd (t_c) kan niet meer aan de opnamebehoefte van de wortel worden voldaan.

In grote lijnen is dit de opzet van het model, waarbij we ons tot dusver beperkt hebben tot de lineaire groeifase, nadat een gesloten gewasdek bereikt is. In de volgende paragrafen zullen we de gemaakte aannames in detail bespreken. Hierbij moet onderscheid gemaakt worden tussen structurele aannames, bijvoorbeeld "anorganisch fosfaat in de bodem is in drie fracties te onderscheiden: opgelost, geadsorbeerd en immobiel" en aangenomen getalwaarden voor grootheden en snelheden. Deze laatste zijn simpel te veranderen en te variëren, terwijl de gekozen modelstructuur veel wezenlijker is voor de gedachtengang. Het resultaat van de berekeningen wordt natuurlijk door beide soort aannames bepaald. Voor de lezer die niet gewend is aan het gebruik van modellen zal de lijst aannames lang lijken en zal toch de complexe werkelijkheid nog te ver geschematiseerd zijn. Men bedenke dat de model-benadering juist als voordeel heeft dat de in ander werk vaak impliciete veronderstellingen expliciet gesteld worden en dat het er ons om gaat met de voornaamste processen te beginnen en te zien of daarmee de essentiële kenmerken van het werkelijke systeem voorspeld kunnen worden. Complicerende factoren zullen er naderhand in gebracht moeten worden als er voldoende van bekend is en als blijkt dat zij de resultaten wezenlijk kunnen beïnvloeden.

2.2. Bespreking van de gebruikte aannames en beperkingen

De gebruikte symbolen en bij de berekeningen aangenomen parameter-waarden staan vermeld in hoofdstuk 0. De aannames zijn hieronder aangegeven door de letters A, B, en C, gevolgd door een cijfer.

2.2.1. *Chemie van fosfaat in de bodem*

(A1)- Het anorganisch fosfaat in de grond wordt verondersteld te bestaan uit drie fracties: fosfaat in oplossing (C), geadsorbeerd fosfaat (P_A) en immobiel fosfaat (Larsen, 1967; Barrow en Shaw, 1975). Het fosfaat in de bodemoplossing en het geadsorbeerde fosfaat vormen samen de mobiele fractie (P_M). Zoals in figuur 1 is aangegeven hebben we het organisch fosfaat geheel buiten beschouwing gelaten. Het verband tussen geadsorbeerd fosfaat en het fosfaat in de bodemoplossing kan worden weergegeven door een adsorptie-isotherm. Een voorbeeld hiervan vindt men in figuur 2. Het betreft hier een esgrond waar gedurende ca. 40 jaar een fosfaat-hoeveelheden proef werd gehouden met superfosfaat en stalmest. Uit de figuur blijkt dat de verschillende anorganische bemestingen de vorm van de isotherm niet beïnvloed hebben. Bij stalmestgiftten verandert de vorm van de isotherm wel, zoals ook door de Haan (1965) werd waargenomen. De adsorptie isotherm blijkt vaak met een tweetermige Langmuir-vergelijking beschreven te kunnen worden (de Haan, 1965; Holford en Mattingly, 1975 a en b). Deze vergelijking is van de vorm:

$$P_A = \frac{b_1 A_1 C}{1 + b_1 C} + \frac{b_2 A_2 C}{1 + b_2 C} \quad (1)$$

met P_A = geadsorbeerd fosfaat in mg P cm^{-3} grond

C = concentratie in mg P ml^{-1} bodemoplossing

b_1 en b_2 = parameters in ml mg^{-1}

A_1 en A_2 = adsorptiemaxima in mg cm^{-3}

In de Langmuir-vergelijking hebben de parameters een fysische betekenis (b = benodigde energie bij binding) en in de literatuur (Holford en Mattingly, 1975b) verbindt men dan ook soms conclusies over aard en mechanisme van de adsorptie aan het feit dat experimentele punten zich uitstekend laten vereffenen door een vergelijking als (1). Dit lijkt niet geheel gerechtvaardigd, men kan zich zelfs afvragen of er van adsorptie *sensu stricto* sprake is (van Riemsdijk, pers. comm. ; Veith & Sposito, 1977).

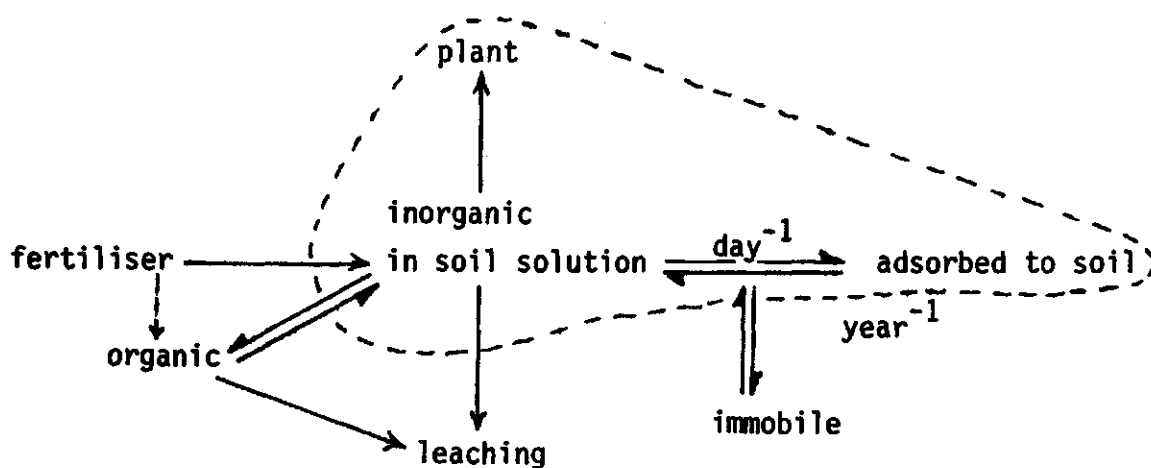


Fig. 1. Schematische voorstelling van de verdeling van fosfaat in de bodem over verschillende fracties. Slechts het gedeelte binnen de stippellijn is in dit model betrokken. Bij twee evenwichten is de orde van grootte van de reactiesnelheden aangegeven.

Fig. 1. Schematic representation of the fractions in which soil phosphorus occurs. Only the part within the broken line is considered in this model. For two equilibria the order of magnitude of the rate constants is given.

Voor de hier te bespreken berekeningen is dit niet belangrijk, het aangegeven verband is te beschouwen als louter empirisch verband tussen potentieel opneembaar fosfaat en fosfaat in oplossing. Aan het gebruik van de term adsorptie of geadsorbeerd fosfaat moet geen te grote betekenis worden gehecht.

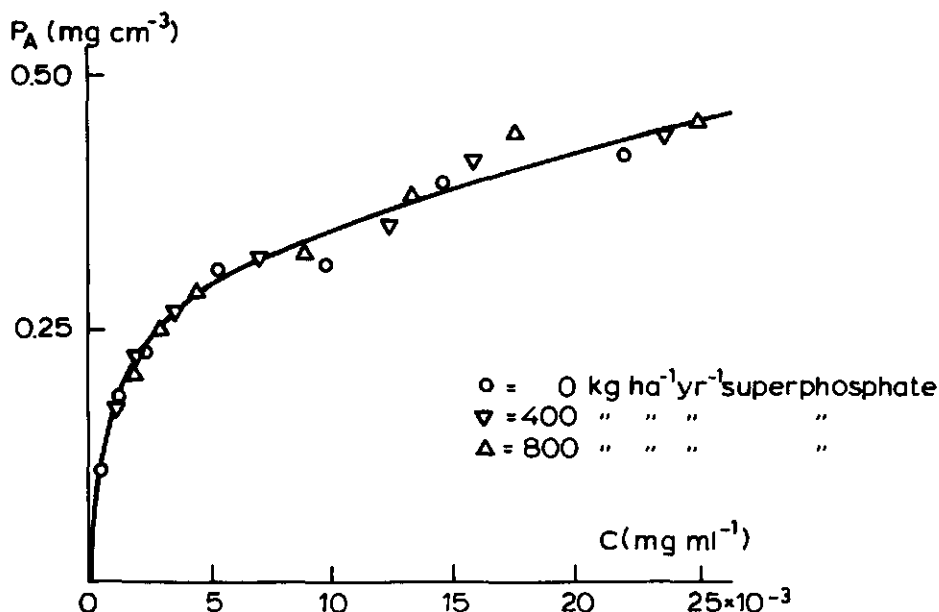


Fig. 2. Adsorptie-isotherm van een esgrond te Ruurlo waar gedurende 40 jaar een P-bemestingsproef heeft gelegen.

Fig. 2. Adsorption isotherm of a soil at Ruurlo after 40 years of different levels of P-fertilization.

De vorm van de adsorptie-isotherm hangt af van omstandigheden als pH en ionsterkte van de bodemoplossing (Danilo-Lopez en Burnham, 1974; Rajan en Fox, 1972), zie C5. Ten behoeve van deze berekeningen zijn van een vijftal gronden, waarvan uiteenlopend gedrag t.o.v. de fosfaat-binding te verwachten was, door Sissingh adsorptie-isothermen bepaald, volgens een voorschrift dat o.a. door Berding (1974) is gebruikt (1:5 extract, na 24 uur in 0,005 M CaCl₂). In figuur 3 zijn deze adsorptie-isothermen weergegeven, terwijl in tabel I de parameterwaarden voor deze 5 gronden vermeld staan. Uit vergelijking (1) blijkt dat bij lage concentratie - als de termen b_1C en b_2C verwaarloosd kunnen worden t.o.v. 1 - adsorptie met een lineaire functie van de concentratie beschreven kan worden:

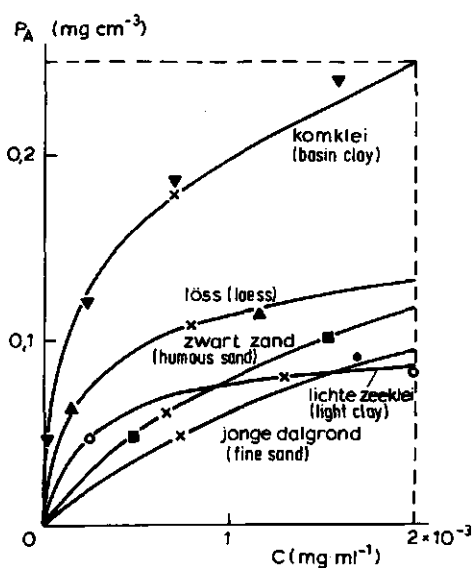
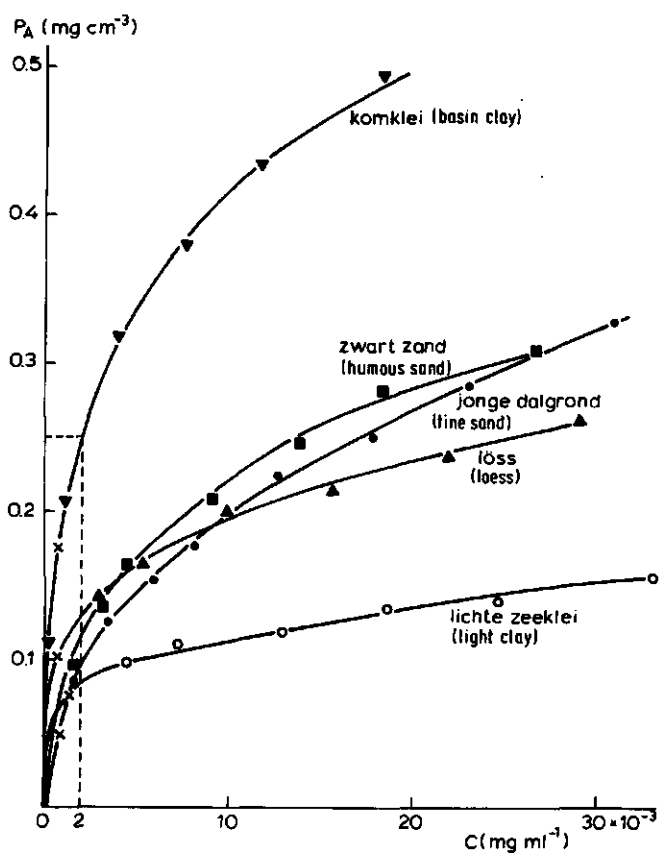


Fig. 3 A en B. Adsorptie-isothermen van vijf Nederlandse gronden. Met een kruis is $P_w = 50$ aangegeven. Het gebied binnen de onderbroken lijn is uitvergroet in 3B.

Fig. 3 A and B. Adsorption isotherms for five Dutch soils. The cross indicates $P_w = 50$.

$$P_A = (b_1 A_1 + b_2 A_2) C = KC \quad (2)$$

De adsorptieconstante K is in tabel I vermeld, evenals de grensconcentratie C_1 beneden welke de lineaire benadering redelijk is. C_1 is zo gekozen dat $b_1 C_1 = 0.05$, zodat voor lagere concentraties deze benadering een maximale afwijking in P_A geeft van 5% (omdat met b_2 steeds de kleinste van de twee betreffende parameters wordt aangeduid is $b_2 C$ dan zeker verwaarloosbaar t.o.v. 1). In de tabel is tevens het P_w getal berekend dat bij C_1 hoort. Nederlandse landbouwgronden zijn relatief fosfaatrijk. Ris en van Luit (1973) vermelden bijvoorbeeld dat in 1971 slechts 4,4% van het bouwland een P_w getal had lager dan 11 (gebaseerd op 42000 monsterpunten).

TABEL I. Parameters van de adsorptie-isotherm voor vijf gronden. Bij lage concentraties is de adsorptie-isotherm met een rechte lijn te benaderen met als hellingshoek $K = b_1 A_1 + b_2 A_2$. Aangegeven is de concentratie C_1 (en bijbehorende $P_{w,1}$ waarbij deze benadering een afwijking van 5% geeft. Voor lagere P_w is de lineaire benadering bruikbaar.

grond/soil type	b_1 ml mg^{-1}	b_2	A_1 mg P	A_2 cm^{-3}	K ml cm^{-3}	C_1 mg P ml $^{-1}$	$P_{w,1}$ mg P_2O_5 l $^{-1}$
1. Jonge dalgrond/ <i>light sand</i>	500	8,5	0,16	0,91	87	$1,0 \cdot 10^{-4}$	10
2. Zwart zand/ <i>humous sand</i>	820	35	0,15	0,37	130	$6,1 \cdot 10^{-5}$	7
3. Lichte zeeklei/ <i>light clay</i>	5000	20	0,087	0,18	430	$1,0 \cdot 10^{-5}$	2
4. Löss/loess	6600	44	0,12	0,26	800	$7,6 \cdot 10^{-5}$	< 2
5. Komklei/ <i>basin clay</i>	16000	130	0,15	0,49	2300	$3,1 \cdot 10^{-6}$	< 2

TABLE I. Parameters of the adsorption isotherm for five soils. For low concentrations the adsorption isotherm may be approximated linearly with angle $K = b_1 A_1 + b_2 A_2$. The concentration C_1 (and corresponding $P_{w,1}$) is given for which this approximation contains an error of 5%. For lower P_w the linear approximation may be used.

Uit de in tabel I gegeven waarden van $P_{w,1}$ blijkt dan ook dat normaliter rekening gehouden moet worden met het niet-lineair zijn van de adsorptie-isotherm.

In principe is het mogelijk het P_w getal te berekenen uit de parameters van de adsorptie-isotherm en de totale hoeveelheid mobiel fosfaat (bepaald m.b.v. anionenhars). Immers per definitie geldt:

$$P_M = P_A + \Theta C \quad (3)$$

met Θ = vochtgehalte van de grond of hoeveelheid vocht per eenheid grond bij de extractie ("extractieverhouding"). Uit (1) en (3) kunnen bij gegeven adsorptieparameters en bekend P_M , P_A en dus C als functie van Θ berekend worden. Het P_w getal wordt bepaald bij een extractieverhouding van 1:60 en opgegeven als mg P_2O_5 geëxtraheerd per 1 grond, zodat met de nodige correcties:

$$P_w = 1000 \times 60 \times (142/62) \times C_{60} \quad (4)$$

waarin C_{60} de concentratie is bij extractieverhouding 1:60. Bij lineaire adsorptie wordt het rekenen al heel eenvoudig, doordat (2) na invulling in (3) en (4) P_w als lineaire functie van de bekende P_M oplevert. Bij niet-lineaire adsorptie moet C eerst opgelost worden uit een derdegraadsvergelijking uit (1) en (3) met als parameters P_M , Θ en de adsorptieparameters. Het schatten van P_w uit de adsorptie-isotherm kan ook grafisch (fig. 3C).

Voor de genoemde gronden (inclusief de drie van fig. 2) staan in figuur 4 de berekende P_w getallen uitgezet tegen de gemeten waarden. Er blijkt een goede correlatie, hoewel de berekende waarden in het algemeen lager uitvallen dan de gemeten. Dit is waarschijnlijk toe te schrijven aan het feit dat adsorptie werd bepaald in 0,005 M $CaCl_2$, terwijl de P_w bepaling wordt gedaan met zuiver water. Het berekende P_w getal van de jonge dalgrond echter valt veel te hoog uit. Uit figuur 3B blijkt dat voor deze grond in het relevante (lage) traject van de adsorptie-isotherm slechts één meetpunt ligt, waardoor de schatting van de adsorptieparameters verkeerd kan zijn uitgevallen. Bij de ontwikkeling van de P_w methode is men uit praktische overwegingen van "bodemplossing" overstapt op water, nadat men merkte hiermee voor de praktijk even

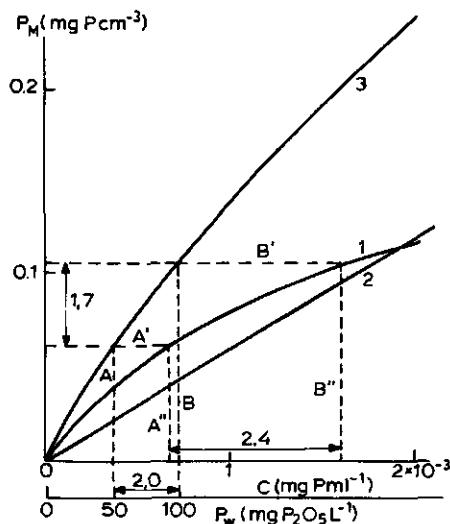


Fig. 3 C. Grafische weergave van het verband tussen de adsorptie-isotherm en de P_w -waarde. Lijn 1 is de adsorptie-isotherm van zwart zand uit fig. 3 B: $P_M = P_A + \theta C \approx P_A$. Lijn 2 geeft $y = 60C$, zodat lijn 1 en 2 opgeteld tot lijn 3, het verband aangeeft tussen concentratie en mobiel fosfaat tijdens de P_w bepaling in het 1:60 mengsel. De concentraties zijn nu via (4) in het P_w -getal om te zetten. Zo kan uit de adsorptie-isotherm en kennis van P_M het bijbehorende P_w -getal worden teruggelezen. Ook kan vanuit het P_w -getal de daarbij behorende concentratie in de grond worden teruggelezen via A, A' & A''. Uit vergelijking van de A lijnen bij P_w 50 en de B-lijnen bij P_w 100 blijkt dat een factor 2 verschil in P_w tot een lagere verschilfactor in P_M leidt (in dit geval 1,7) en een hogere in C (in dit geval 2,4) ten gevolge van de bolling van de adsorptie-isotherm.

Fig. 3 C. Graphical representation of the relation between adsorption-isotherm and P_w -value. Line 1 is the adsorption-isotherm of the humous sand in fig. 3 B: $P_M = P_A + \theta C \approx P_A$. Line 2 represents $y = 60C$, so adding this to line 1 gives line 3, the relation between concentration and total mobile phosphorus during the P_w -determination in the 1:60 mixture. Via formula (4) the concentration can be transformed into the P_w -value. So we can read back the P_w -value, when we know the adsorption-isotherm and P_M (for example line A' and then A). We can also determine the concentration in soil solution for a given P_w -value (line A, A' and A''). When we compare the lines A, A', A'' for $P_w = 50$ and B, B', B'' for $P_w = 100$, we see that a difference in P_w of a factor 2 comes down to a smaller difference in P_M (in this case a factor 1.7) and a larger difference in C (in this case a factor 2.4), due to the curvature of the adsorption-isotherm.

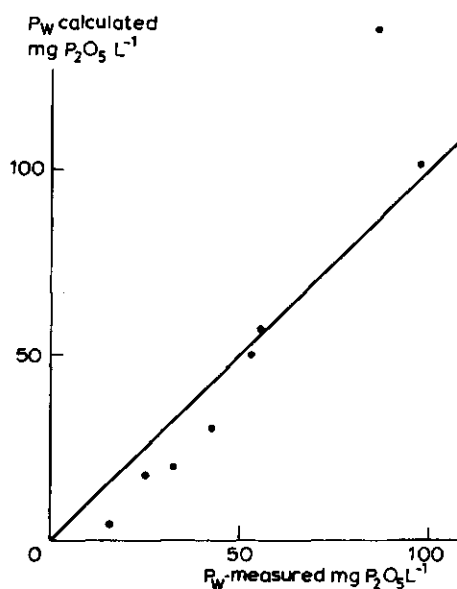


Fig. 4. Correlatie van uit adsorptie-isothermen berekend en feitelijk gemeten P_w -getal.

Fig. 4. Correlation of P_w value calculated from adsorption isotherms and actual measurements.

waardevolle correlaties te halen (van der Paauw et al., 1971). Ionensterkte beïnvloedt de adsorptie en daarmee het transport zodat voor deze berekeningen gekozen is voor de adsorptie-isotherm bepaald in CaCl_2 als nabootsing van de ionensterkte van de bodemoplossing. Uit het feit dat de adsorptie-isotherm het desorptiegedrag bij de P_w -bepaling redelijk voorspelt, blijkt dat hysteresis op deze gronden niet belangrijk is. In het vervolg zal het verschil tussen P_w -gemeten en P_w -berekend verwaarloosd worden.

Er kan nu berekend worden welke fractie van het potentieel beschikbare fosfaat (P_M) wordt gemeten door het P_w -getal. In fig. 5 is de verhouding P_w/P_M uitgezet (beide natuurlijk in dezelfde eenheden omgezet) tegen het P_w getal. Duidelijk is dat de geëxtraheerde fractie lager is naarmate de buffering hoger is, d.w.z. de adsorptie-isotherm gemiddeld steiler, vgl. Fig. 3.

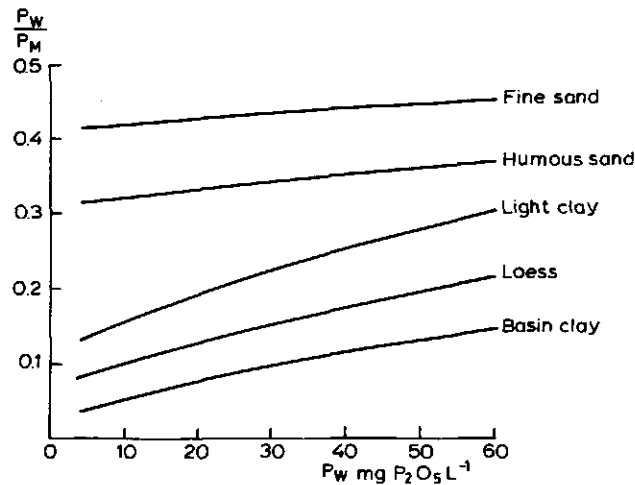


Fig. 5. Fractie van het mobiel fosfaat (P_M) dat bij de P_w bepaling (extractieverhouding 1:60) in oplossing komt, als functie van P_w .

Fig. 5. Fraction of mobile phosphorus (P_M) measured by P_w (water : soil) extract 60:1) as a function of P_w .

Anderzijds is de fractie ook niet constant, maar hangt bij gegeven grond ook nog af van het P_w -getal.

(A2)- Naast de snelle adsorptiereacties, waarbij in het model is aangenomen dat er op elk moment evenwicht is, vinden er ook langzamere reacties plaats. Zowel mobilisatie als immobilisatie kan optreden.

(A3)- De snelheden hiervan zijn echter slecht bekend, maar binnen één groeiseizoen lijken deze factoren voorlopig te verwaarlozen. (Voor uitspoelingsberekeningen of uitspraken over een bemestingsbeleid op langere termijn zijn deze processen zeker niet te verwaarlozen.)

In de praktijk van het bemestingsonderzoek bestaat soms de indruk dat een verse bemesting meer effect heeft dan uit de verhoging van het P_w -getal te verwachten is. Er is onvoldoende bodemchemisch uitzicht in wat hier gebeurt om dit in het model op te nemen.

(A4)- Onze modelberekeningen gaan uit van een P_w waarde van de grond zonder verdere bemesting.

(A5)- We nemen tevens aan dat het fosfaat homogeen over de bouwvoor verdeeld is.

(A6)- De diffusiesnelheid van fosfaat in de grond wordt mede bepaald door de vochtigheid. In de hier gepresenteerde berekeningen is uitgegaan van een uniform

vochtgehalte van $0,4 \text{ ml cm}^{-3}$ voor alle gronden. Het zou misschien dichter bij de praktijk geweest zijn voor elke grond het vochtgehalte bij veldcapaciteit te nemen, maar dit hebben we niet gedaan om de effecten van de adsorptie-eigenschappen zelf beter te kunnen vergelijken.

(A7)- Bij de opname door de wortel is het transport van fosfaat als gevolg van opname van water (massastroming) buiten beschouwing gelaten. Doordat de concentraties in de bodemoplossing laag zijn, levert massastroming maar een kleine bijdrage aan het transport (Barber, 1962).

2.2.2. Geometrie van het grond- wortelsysteem

(B1)- Evenals in vrijwel alle micro-schaal wortelmodellen die tot nu toe in de literatuur zijn beschreven, is bij dit onderzoek de geometrie vereenvoudigd tot cilindrische symmetrie, dat wil zeggen dat er is aangenomen dat het wortelstelsel bestaat uit regelmatig verdeelde, onvertakte en evenwijdige assen. Dit betekent dat aan iedere wortel een cilinder grond wordt toegekend, waarvan de straal R_1 afhangt van de bewortelingsdichtheid w ($\text{cm wortels cm}^{-3}$ grond of aantal cm^{-2}), nl. $R_1 = (\pi w)^{-\frac{1}{2}}$ (5)

Zie figuur 6. Nye en Tinker (1977) spreken de verwachting uit dat resultaten voor parallel-wortelmodellen ook zullen opgaan voor niet parallelle systemen: "The complexities of dealing with groups of non-parallel roots seem very large in relation to the possible benefit which could be obtained". Van meer belang lijkt de beperking tot regelmatig verdeelde wortelstelsels. Onderzoek van Baldwin et al. (1972) heeft uitgewezen dat er niet veel verschil bestaat tussen opnamemogelijkheden van regelmatig en van toevallig verdeelde wortelstelsels, maar dat bij groepering van de wortels de opnamemogelijkheden snel teruglopen. In geaggregeerde gronden waar de wortels langs de aggregaten groeien en er niet doorheen, kan de wortelverdeling sterk afwijken van de hier aangenomen regelmatige verdeling. In dit geval zal de grond ook qua transporteigenschappen niet homogeen zijn, zodat deze situatie veel moeilijker te beschrijven is dan het simpele geval in ons model.

(B2)- In dit model wordt slechts uit één bodemlaag fosfaat opgenomen. Doordat ploegen in de akkerbouw het voornaamste transport van fosfaat in het profiel bepaalt, is de fosfaatrijkdom grotendeels tot de bouwvoor beperkt (hier op 20 cm gesteld).

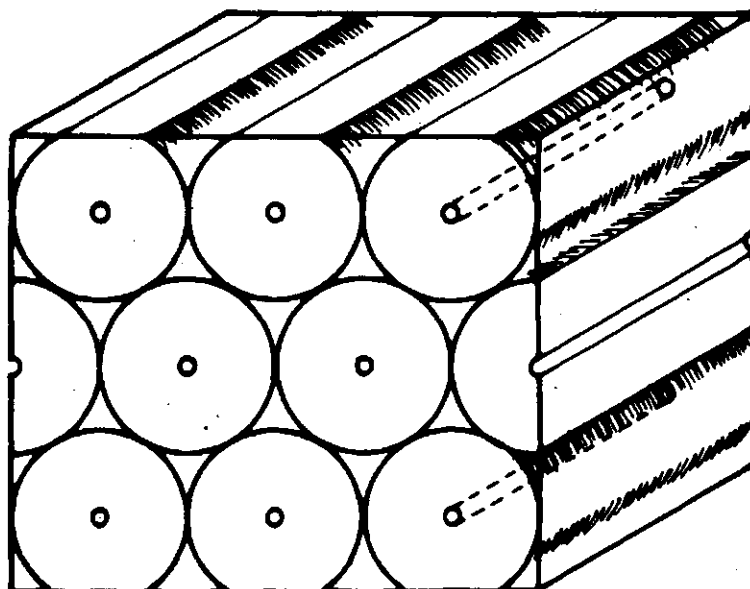


Fig. 6. Schematische voorstelling van wortels als regelmatig verdeelde, evenwijdige assen. Bewortelingsdichtheid w (lengte wortels per volume grond) is ook weer te geven als aantal snijpunten per oppervlak (loodrecht op de lengtes van de wortels). In het model is de resterende grond tussen de cilinders uitgesmeerd gedacht tot een extra schil rond elke cilinder.

Fig. 6. Schematic representation of roots as regularly distributed, parallel axes. Root density (length of roots per volume of soil) may also be represented by the number of intersections per surface area (perpendicular to root axis). In the model the soil between the cylinders is considered to be spread out as an outer layer of each cylinder.

Prummel en Sissingh (1976) vermelden bijvoorbeeld voor een esgrond een P_w -getal van de bouwvoor van 25 t.o.v. een waarde 5 voor de ondergrond. Het fosfaat in de ondergrond zou van belang kunnen zijn als de bouwvoor uitdroogt, maar dit hebben we buiten beschouwing gelaten.

(B3)- Een belangrijke beperking van onze berekeningen is dat we wortelharen en mycorrhiza buiten beschouwing hebben gelaten. Mycorrhiza kan een belangrijke rol spelen op arme gronden, ook in de gematigde klimaatzone (Black en Tinker, 1977), in het transport van fosfaat naar de wortel. In sommige gevallen zou ook de chemische ontsluiting van bodemfosfaat anders zijn (Moawad, 1979). Echter onder normale Nederlandse omstandigheden op P-rijke grond zijn weinig aanwijzingen bekend voor het belang van mycorrhiza, zodat we het hier buiten beschouwing hebben kunnen laten.

Het voorkomen van wortelharen is afhankelijk van plantesoort en omstandigheden, maar uit de literatuur is duidelijk dat wortelharen de opnamemogelijkheden sterk vergroten. Als eerste benadering is dit vaak te beschrijven als een vergroting van de straal van de wortel met de gemiddelde lengte van de wortelharen.

(B4)- Deze berekeningen zijn uitgevoerd met een wortelstraal van 0,025 cm en voor één serie met 0,010 cm. Aangenomen is dat alle wortels even dik zijn.

2.2.3. Fysiologie van de opname

In de fysiologische literatuur wordt erg veel aandacht besteed aan de relatie tussen de opnamesnelheid en concentratie rond de wortel. Voor de actieve opname (via "carriers") vindt men vaak een verzadigingskromme (Michaelis-Menten) van de vorm:

$$F = \frac{F_{\max} C_{Ro}}{K_M + C_{Ro}} \quad (6)$$

waarin F = opname per eenheid worteloppervlak per tijd, C_{Ro} = de concentratie rond de wortel en F_{\max} en K_M parameters.

Verreweg het meeste modelonderzoek naar ionenopname door de plantewortel, zowel theoretisch als experimenteel getoetst, is de laatste jaren verricht door Nye en medewerkers in Oxford. De meeste van hun resultaten worden besproken en samengevat in een onlangs verschenen boek (Nye en Tinker, 1977). In de beschouwingen van deze Oxford school wordt uitgegaan van een dergelijk verband tussen opnamesnelheid en concentratie aan de wortelwand. Dit wordt voorgesteld als:

$$F = \alpha C_{Ro} \quad (7)$$

met α als opnameparameter (cm dag^{-1}).

Vooraf in de eerste publikaties, bijvoorbeeld Nye (1966), werd α constant genomen, d.w.z. er werd evenredigheid verondersteld tussen opnamesnelheid en concentratie. Later (Baldwin and Nye, 1974) heeft men ook ingewikkelder verbanden, met name Michaelis-Menten opname, bij het onderzoek betrokken.

In de recentere fysiologische literatuur komt er steeds meer inzicht in deregulatie van de opnamesnelheid naar de behoefte van de plant. Op zichzelf is al lang bekend dat de interne concentratie in de plant de opname beïnvloedt. Niet voor niets werkte men voor opnameproeven met als "low-salt" geprepareerde wortels en korte opnameperioden. Concrete aanwijzingen voor regulatie van de opname komen uit proeven waarin "low-salt" en "high-salt" wortels worden vergeleken (zie bijvoorbeeld Marschner, 1974), uit proeven waarin slechts een deel van de wortels fosfaat kan opnemen en zo de opnamebehoefte per wortel groter wordt (Drew, 1976; de Jager, 1979) en uit proeven waar de opnamebehoefte per wortel wordt vergroot door een deel van de wortels af te knippen (Jungk en Barber, 1974, 1975; Edwards en Barber, 1976). In het Michaelis-Menten model voor opname per eenheid worteloppervlak, kan regulatie op drie niveaus plaatsvinden:

1. via de activiteit van de carriers; "fine control"; omgekeerd evenredig met K_M (Cartwright, 1972)
2. via de hoeveelheid actieve carriers per cel; "coarse control"; F_{max} (Jungk, 1974)
3. via de hoeveelheid worteloppervlak; lokaal uitgroeien van zijwortels in P-rijke zones bij P-deficiente planten (Goedewaagen, 1942; Drew, 1976; de Jager, 1979).

Over het precieze mechanisme van de regulatie bestaan niet veel ideeën. De simpelste beschrijving, remming van de opname door de interne concentratie in het cortex-plasma die zelf via floëmeterugvoer afhankelijk is van de gehalten in de spruit, lijkt voorlopig de voorkeur te genieten (de Jager, 1979). Voor een gedetailleerde modelbeschrijving van dit regulatiemechanisme zijn er te weinig basisgegevens.

(C1)- Daarom hebben we het probleem sterk vereenvoudigd door te stellen dat de opname geheel bepaald wordt door de behoefte van de plant, als de toelevering vanuit de bodem dit toelaat.

De behoefte van de plant wordt bepaald door groeisnelheid en benodigd mineraalgehalte. Als groeisnelheid hebben we de $G = 200 \text{ kg ha}^{-1} \text{ dag}^{-1}$ genomen die volgens Sibma (1968) in de lineaire groeifase bij gesloten gewasdek door veel gewassen gerealiseerd kan worden (figuur 7). Het fosfaatgehalte is constant verondersteld op $P = 2,2 \text{ mg P g}^{-1}$ droge stof ($= 0,5\% \text{ P}_2\text{O}_5$). De opnamebehoefte is dan:

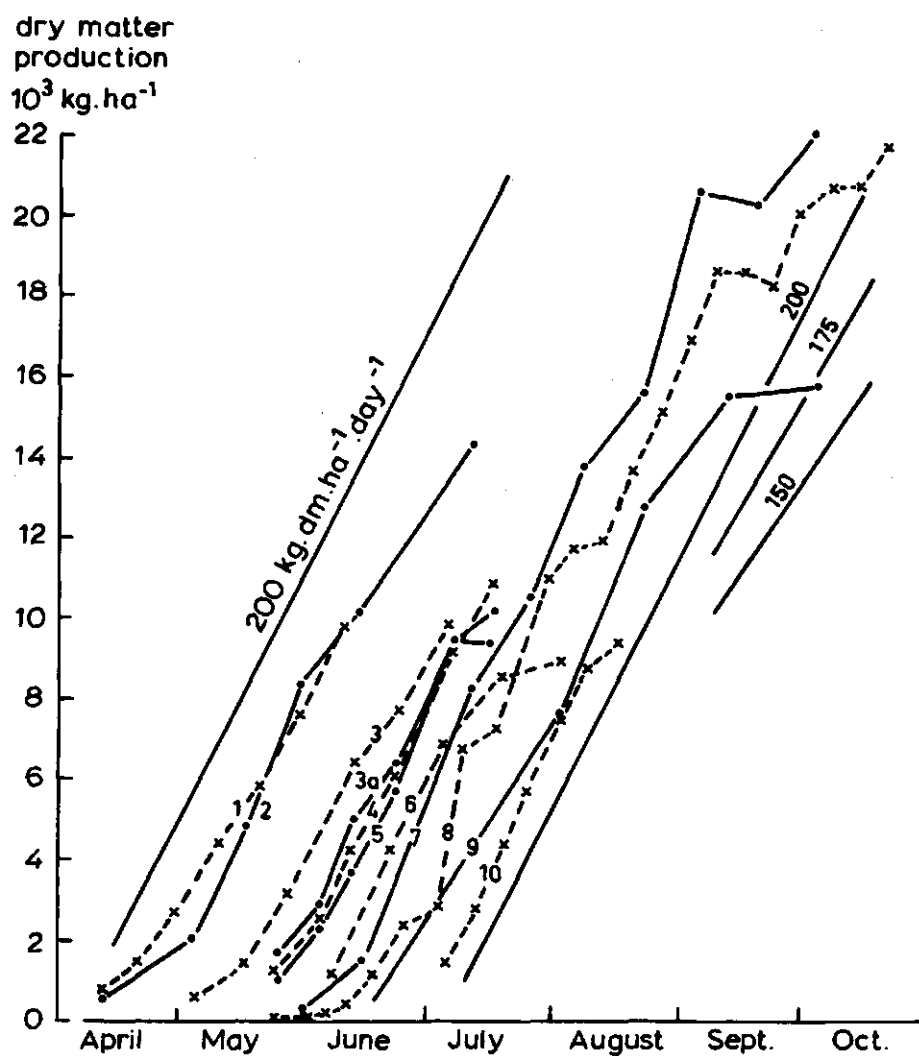


Fig. 7. Groeisnelheid van diverse gewassen in Nederland, volgens Sibma (1968).

Fig. 7. Growth rates of agricultural crops in the Netherlands according to Sibma (1968).

$$A = P \cdot G = 0,44 \text{ kg P ha}^{-1} \text{ dag}^{-1} = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ mg P cm}^{-2} \text{ dag}^{-1} \quad (8)$$

Iedere h cm wortel moet dan $\pi R_1^2 A$ mg P per dag opnemen.

(C2)- Deze aanname van een constant P-gehalte, die verder gaat dan de aanname van opnameregulatie, is niet geheel juist. De P-opname in het groeiseizoen loopt enigszins voor op de droge-stofproduktie, zij het minder dan de N- en K-opname (figuur 8).

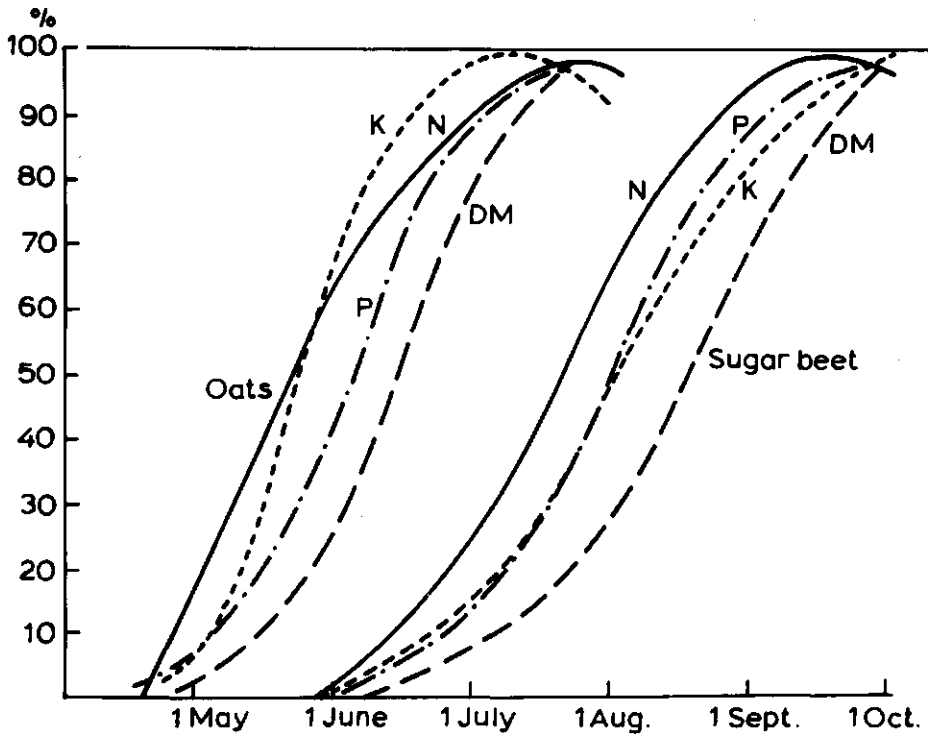


Fig. 8. Verloop van droge-stofproduktie en van de N-, P- en K-opname door haver en suikerbiet gedurende de groei in procenten van het maximum (van Itallie, 1938).

Fig. 8. Time course of production of dry matter and cumulative uptake of N, P and K as percentage of the maximum (van Itallie, 1938).

De P-gehaltenes in de droge stof kunnen van jonge tot oude plant een factor 2 dalen maar tijdens de lineaire groeifase is de dagelijkse opname toch nagenoeg in overeenstemming met de dagelijkse groei.

Het vóórkomen van "luxe-consumptie" boven het benodigd mineraalgehalte geeft aan dat de regulatie van de opname niet zo sterk is als wij veronderstellen, maar het gaat hierbij, zeker voor P, om betrekkelijk kleine hoeveelheden. Een andere rechtvaardiging voor onze aanname is, dat we vooral geïnteresseerd zijn in situaties waarin het kritisch gehalte net onderhouden kan worden en niet in de situatie met zeer ruim aanbod.

(C3)- Voor alle wortels wordt, onafhankelijk van leeftijd of positie, eenzelfde opname per lengte-eenheid aangenomen. Recent fysiologisch onderzoek ondersteunt deze aanname wat betreft P, als eerste benadering (Clarkson et al., 1977) (ook de straal is uniform, zie B4).

Indien mogelijk neemt de plant op naar behoefte. Of dit mogelijk is wordt enerzijds bepaald door de opnamemogelijkheden van de wortel, anderzijds door het leverend vermogen van de grond die de concentratie aan de wortelwand op peil moet houden. Naar ons idee geeft de Michaelis-Menten-relatie de mogelijkheden aan van het wortelstelsel, maar wordt daarvan door regulatie slechts dat deel gerealiseerd dat nodig is.

(C4)- Figuur 9 toont op welke manier de kritische concentratie waarbij nog net voldoende opname mogelijk is, bepaald wordt door de opnamebehoefte per wortel. In de berekeningen is een rechte lijn als grens aangehouden met als hellingshoek $\alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm s}^{-1} = 17 \text{ cm dag}^{-1}$ (Nye, 1977). Iedere (h cm) wortel moet zorgen voor een opname van $\pi R_1^2 A \text{ mg dag}^{-1}$. De opname per worteloppervlak is $F = \alpha C_{R_0}$ en het worteloppervlak per wortel $2\pi R_0 h$. Dit betekent dat de concentratie aan het worteloppervlak minstens gelijk moet zijn aan:

$$C_{\text{lim}} = \frac{R_1^2 A}{2R_0 h \alpha} \quad (9)$$

De maximale opnamesnelheid per wortel F_{max} (ca. $10^{-12} \text{ Mol cm}^{-2} \text{ s}^{-1} = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ mg P cm}^{-2} \text{ dag}^{-1}$, Nye en Tinker, 1977) bepaalt de minimaal benodigde bewortelingsdichtheid: de opnamebehoefte is volgens (8) $A = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ mg P cm}^{-2} \text{ dag}^{-1}$. Dit betekent dat $1,6 \text{ cm}^2$ worteloppervlak nodig is per cm^2 bodemoppervlak, wat bij een wortelstraal van 0,025 cm en een bouwvoor van 20 cm overeenkomt met 0,5 cm wortel per cm^3 bouwvoor.

(C5)- Als verdere aanname geldt nog, dat geen rekening gehouden is met eventuele veranderingen in pH of ionensterkte in de rhizosfeer. Deze zouden de adsorptie-isotherm aanzienlijk kunnen beïnvloeden.

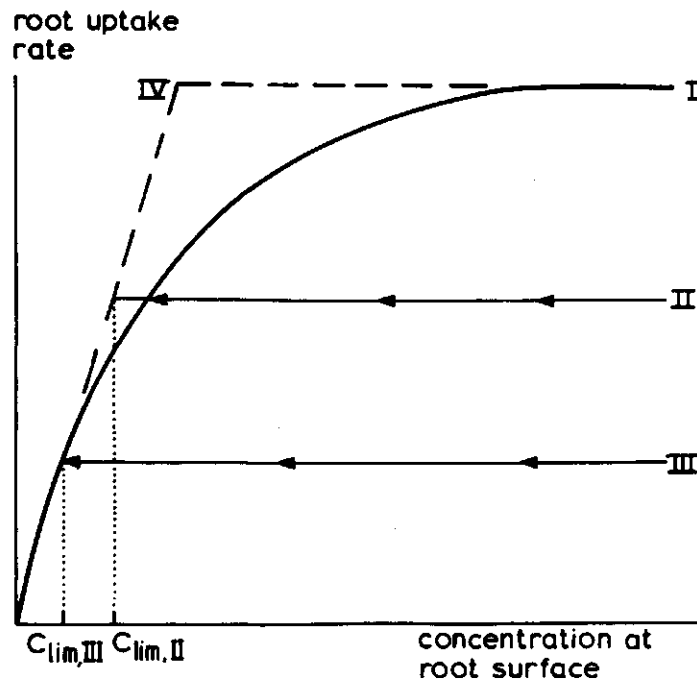


Fig. 9. Opname per eenheid wortel als functie van de concentratie aan het worteloppervlak (C_{RO}). Lijn I geeft de Michaelis-Menten relatie aan zoals die in kortdurende fysiologische proeven gevonden wordt. Lijn II geeft aan dat in ons model de opname onafhankelijk is van de buitenconcentratie, zolang dat mogelijk is. In geval van lijn III is de hoeveelheid wortels dubbel zo groot als bij lijn II en daardoor de opname per eenheid wortel half zo groot. Deze opname kan tot een lagere concentratie C_{lim} worden volgehouden. Bij de berekeningen hebben we de onderbroken lijn IV aangehouden als grens i.p.v. lijn I.

Fig. 9. Absorption per unit root as a function of the root surface (C_{RO}). Line I represents the Michaelis-Menten relation found in short-term physiological experiments. Line II shows that in our model absorption is taken to be independent of concentration as long as possible. In the case of line III the root density is twice as high and so the adsorption rate per root may be half the value of line II. This lower adsorption rate may be sustained till a lower concentration C_{lim} is reached. In the calculations the broken line IV was used as the boundary instead of line I.

3. WISKUNDIGE FORMULERING EN GEBRUIKTE OPLOSSINGSTECHNIEK

3.1. De transportvergelijking en randvoorwaarden

Een groot deel van de aannames is nodig om te kunnen rekenen met één gemiddelde wortel puttend uit een cilinder grond (A5, B1, B2, B4, C3), waardoor de wiskundige formulering betrekkelijk eenvoudig wordt. Omdat alleen rekening gehouden wordt met diffusie in radiale richting, resulteert de wet van Fick gecombineerd met de massabalans voor mobiel fosfaat (voor afleiding zie Nye en Tinker, 1977) in:

$$\frac{\delta P_M}{\delta t} = \frac{D'}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left[r \frac{\delta C}{\delta r} \right] \quad (10)$$

waarin de D' de diffusiecoëfficiënt in de bodemoplossing is, gecorrigeerd voor het vochtgehalte van de grond en de tortuositeit (kronkeligheid van de transportbaan). Differentiatie van vgl. (3) naar de tijd geeft:

$$\frac{\delta P_M}{\delta t} = \frac{\delta P_A}{\delta t} + \frac{\delta C}{\delta t} \quad (11)$$

bij constant vochtgehalte (A6). Als de adsorptie-isotherm wordt weergegeven als $P_A = f(C)$, dan:

$$\frac{\delta P_A}{\delta t} = \frac{dP_A}{dC} \frac{\delta C}{\delta t} = f'(C) \frac{\delta C}{\delta t} \quad (12)$$

waarin $f'(C)$ de helling van de adsorptie-isotherm is bij gegeven C . Bij lineaire adsorptie heeft $f'(C)$ een constante waarde K . Invullen van (11) en (12) in (10) geeft:

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{D^*}{r} \frac{\delta}{\delta r} \left[r \frac{\delta C}{\delta r} \right] \quad (13)$$

met $D^* = D' / (\theta + f'(C))$.

Als de bewortelingsdichtheid $w \text{ cm}^{-2}$ bedraagt, dan is de straal R_1 van de bodemcilinder waar de wortel uit put volgens vgl. (5) gelijk aan $(\pi w)^{-\frac{1}{2}}$. Volgens vgl. (8) moet de opname per wortel $A \pi R_1^2$ bedragen en deze moet passeren door een worteloppervlak $2 \pi h R_0$.

Aan de wortelwand moet dan ook gelden:

$$2 \pi h R_0 D' \frac{\delta C}{\delta r} = \pi R_1^2 A \quad \text{of} \quad \frac{\delta C}{\delta r} \Big|_{r=R_0} = \frac{R_1^2 A}{2hR_0 D'} \quad (14)$$

Als tweede randvoorwaarde geldt dat over de rand van de bij de wortel behorende bodemcilinder geen transport optreedt

$$\frac{\delta C}{\delta r} \Big|_{r=R_1} = 0 \quad (15)$$

Voor een oplossing, analytisch dan wel numeriek, is naast de randvoorwaarden, informatie nodig over de uitgangstoestand. Hier is steeds uitgegaan van een uniforme begintoestand, d.w.z. P_M heeft op $t=0$ overal in de grondcilinder dezelfde waarde $P_M(i)$, wat ermee overeenkomt dat C initiëel overal de waarde $C(i)$ heeft:

$$t = 0, P_M = P_M(i) \quad (16)$$

Vergelijking (13) met de randvoorwaarden (14) en (15) en beginvoorwaarde (16) vormen het stelsel waarvan de oplossing gezocht wordt. We zijn er vooral in geïnteresseerd hoe lang het op deze wijze beschreven transport de concentratie aan de wortelwand boven de in (9) genoemde limiterende concentratie kan houden.

3.2. Oplossing in geval van lineaire adsorptie

In die gevallen waarin de adsorptie-isotherm met een recht lijn te benaderen is, is $P_A = f(C) = K C$ (2) en dus $D^* = D' / (\theta + K)$.

Vergelijking (13) is dan een partiële lineaire differentiaalvergelijking. Voor de oplossing hiervan is het handig variabelen en parameters te combineren tot dimensieloze groepen (Min-Shing Lih, 1975). Hier zijn de volgende groepen gebruikt:

dimensieloze straal grondcilinder	$\rho = R_1 / R_0$
" afstand	$x = r / R_0$
" concentratie	$u = C / C(i)$
" bouwvoor dikte	$\eta = h / R_0$
" aanbod/vraag verhouding	$\phi = D^* P_M(i) / (A R_0)$
" tijd	$\tau = D^* t / R_0^2$

Deze groepering vereenvoudigt de notatie aanzienlijk en laat tegelijk zien hoe de verschillende variabelen in onderlinge verhouding het eindresultaat bepalen. Via Laplace-transformatie bleek het mogelijk een analytische oplossing te vinden, zoals uiteengezet is in Appendix I:

$$u = 1 + \frac{\rho^2}{2\eta\phi} \left[\frac{2\tau}{1-\rho^2} + \frac{x^2-\rho^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{\rho^2}{1-\rho^2} \ln\left(\frac{\rho}{x}\right) - \frac{\rho^2}{(1-\rho^2)^2} \ln\rho - \frac{\rho^2+1}{4(1-\rho^2)} + \right. \\ \left. -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n^2 \tau}}{\alpha_n} \frac{J_1^2(\rho\alpha_n) \{J_0(x\alpha_n) Y_1(\alpha_n) - Y_0(x\alpha_n) J_1(\alpha_n)\}}{J_1^2(\alpha_n) - J_1^2(\rho\alpha_n)} \right] \quad (17)$$

Hierin zijn J_0 , Y_0 , J_1 en Y_1 Besselfuncties van de eerste (J) resp. tweede (Y) soort en nulde resp. eerste orde. De α_n zijn de wortels van:

$$J_1(\alpha) Y_1(\rho\alpha) - J_1(\rho\alpha) Y_1(\alpha) = 0$$

Ook het uitrekenen van concrete getalwaarden met deze analytische oplossing vraagt speciale technieken, zoals in Appendix II uiteengezet wordt. Uit de vgl. (17) is te zien dat in sommige gevallen, d.w.z. bij bepaalde parameterwaarden de oplossing aanzienlijk vereenvoudigt. De termen achter het somteken, waarin de tijd alleen voorkomt in een exponent van een negatief getal, worden na zekere tijd verwaarloosbaar t.o.v. het eerste gedeelte. De oplossing kan in dat geval goed benaderd worden door dit eerste gedeelte waarin de (dimensieloze) tijd alleen maar lineair voorkomt. In dit geval:

$$\frac{\delta u}{\delta \tau} = \frac{\rho^2}{\eta \phi (1-\rho^2)} = \text{constant}$$

Als deze zogenaamde "gelijkmatige uitputting" ("steady-rate") wordt bereikt, verandert het concentratieprofiel in de tijd niet van vorm, alleen maar van niveau. De concentratie en de hoeveelheid mobiel fosfaat dalen dan op elke afstand van de wortel en in ieder tijdstap even snel.

Figuur 10 geeft een voorbeeld van de ontwikkeling van een dergelijke situatie.

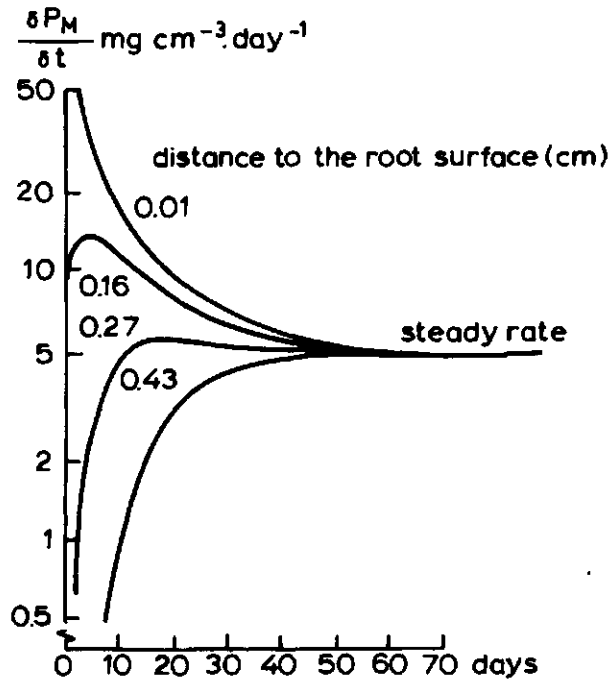


Fig. 10. Ontwikkeling van de gelijkmatige uitputtingssituatie ("steady-rate"). De snelheid waarmee fosfaat onttrokken wordt uit iedere volume grond ($\delta P_M / \delta t$) convergeert naar één waarde, onafhankelijk van de positie ten opzichte van de wortel. Resultaat van berekening met simulatiemodel (zie 3.3.).
 Fig. 10. The development of the steady rate situation. The depletion rate of soil phosphorus ($\delta P_M / \delta t$) converges to a single value, independent of the distance to the root. Results of the simulation model described in 3.3 for linear adsorption.

Deze figuur toont de absolute waarde van de afname van het mobiele fosfaat in de tijd, op verschillende afstanden van de wortelwand. Na zekere tijd bereiken alle curven dezelfde constante waarde. Op dat moment is de "gelijkmatige uitputting" bereikt, hetgeen het rekenen zeer vergemakkelijkt. Tabel II geeft de waarden van τ waarna sprake is van gelijkmatige uitputting. Wiskundig kan een dergelijke situatie bereikt worden bij negatieve concentratie aan de wortelwand, hetgeen fysisch natuurlijk niet acceptabel is.

TABEL II. Waarde van τ (τ_s) waarvoor gelijkmatige uitputting bereikt wordt en maximumwaarde van $\eta\phi$ waarbij dit nog optreedt voor $C_{R_0} = 0$, in afhankelijkheid van wortelingsdichtheid w .

w (cm^{-2})	ρ	τ_s	$\eta\phi$
0,5	32	378	3200
1	23	187	1500
2	16	92	610
3	13	60	380
5	10	35	200

TABLE II. Value of τ (τ_s) for which steady rate is reached and maximum value of $\eta\phi$ at which this occurs before $C_{R_0} = 0$, depending on root density w .

In de tabel is daarom tevens opgenomen de maximale waarde van $\eta\phi$ waarvoor nog net gelijkmatige uitputting bereikt kan worden voor de concentratie aan de wortelwand 0 is. Voor afleiding en berekening raadplege men Appendix II.

Als gelijkmatige uitputting bereikt wordt, dan is t_c direct te formuleren als:

$$t_c = \frac{h}{A} \left(\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2} \right) \left(P_M(i) - K C_{lim} \right) + \frac{R_1^2}{2D^*} \left(\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \right) \left[-\ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{3}{4} + \frac{R_0^4}{4R_1^4} - \frac{R_0^2}{R_1^2} \right] \quad (18)$$

Voor de afleiding hiervan, zie Appendix III.

3.3. Oplossing in geval van niet-lineaire adsorptie

Zoals in 2.2.1. is getoond, is in het normale traject van het P_w getal (19 tot 50) geen sprake van lineaire adsorptie. De schijnbare diffusiecoëfficiënt D^* in vergelijking (13) is dan een functie van de concentratie. De differentiaalvergelijking is niet meer lineair en daardoor waarschijnlijk analytisch (nog) niet op te lossen.

Daarom is een computerprogramma geschreven waarmee het probleem opgelost kan worden. Het programma is grotendeels opgezet overeenkomstig de Wit en van Keulen (1972), zodat voor details naar hun boek verwezen kan worden. De programma tekst is als appendix IV bijgevoegd. De grondcilinder rondom de wortel wordt verdeeld in een aantal schillen (zie figuur 11).

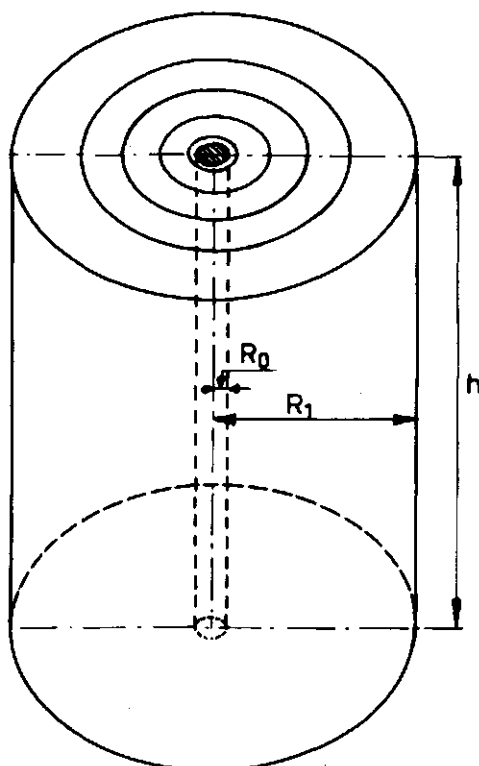


Fig. 11. Schematische voorstelling van wortel (straal R_0 en lengte h) en grondcilinder (straal R_1), opgedeeld in schillen voor het simulatiemodel.
 Fig. 11. Schematic representation of a root (radius R_0 and length h) and soil cylinder (radius R_1), divided into layers for the computer simulation.

De dikte van deze schillen (Δx_i), is niet constant gekozen, maar neemt meetkundig toe vanaf de wortelwand. Omdat de grootste gradiënten optreden dichtbij de wortel moet daar de schildikte het kleinste zijn. De concentratie op de wortelwand is door extrapolatie uit de concentratie in de eerste 4 schillen bepaald (zie app. IV). Bij numerieke integratie wordt uiteraard gerekend met een eindige tijdstap Δt . De stabiliteitseis voor de tijdstap wordt gegeven door de ongelijkheid $D^* \Delta t / (2\Delta x^2) < 1$ (Richtmyer en Morton, 1956).

Wordt aan een dergelijke eis niet voldaan, dan gaan tijdens het rekenproces kunstmatige schommelingen in de concentraties optreden, die zich gedurig versterken. Om nu in elk geval aan de stabiliteitseis te voldoen wordt in het programma Δt berekend als $\Delta t = 0,3 \Delta x_1^2 / D_n^*$, waarin Δx_1 de dikte van de eerste en dus dunste schil en D_n de schijnbare diffusiecoëfficiënt in de laatste schil. (Daar is de concentratie altijd het grootst, $f'(C)$ dus het kleinst en daarom D^* maximaal).

Met het computerprogramma is ook een berekening gemaakt voor lineaire adsorptie; dit om de numerieke resultaten te controleren met de exacte analytische oplossing. Het verschil tussen beide blijkt binnen acceptabele grenzen te liggen (figuur 12).

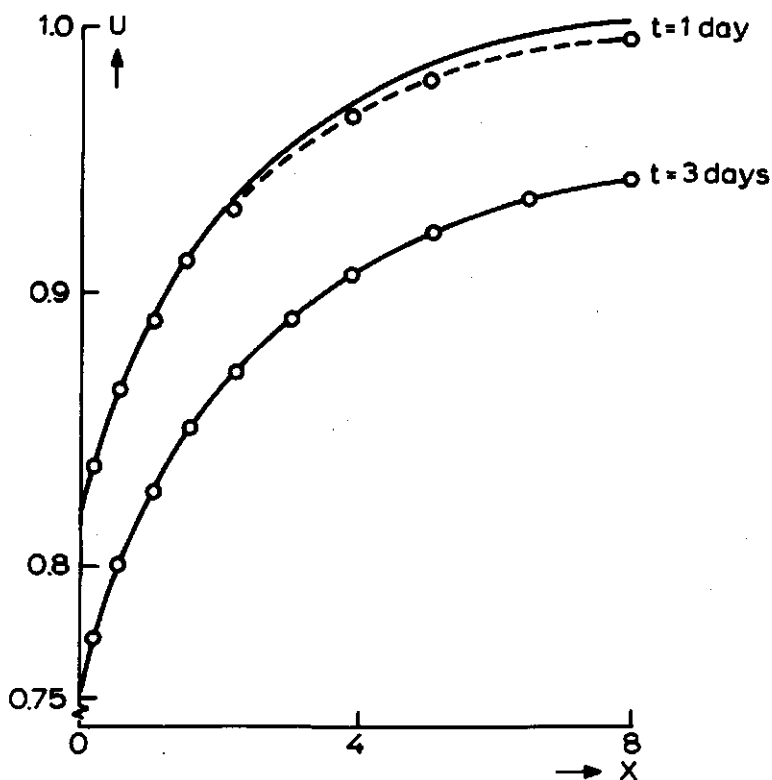


Fig. 12. Vergelijking van de oplossing volgens het simulatiemodel (—) met de analytische oplossing (---0---).

Fig. 12. Comparison of the solution of the computer simulation (—) and the corresponding analytical solution (---0---).

RESULTATEN

4.1. relatie bewortelingsdichtheid - P_w - opname

In het algemeen zijn we er bij de berekeningen in geval van niet-lineaire adsorptie van uitgegaan situaties te vergelijken waarbij het P_w -getal gelijk was, omdat de praktijk dat ook als maat hanteert. In de figuren 13A t/m E wordt voor de gronden uit tabel I de toeleveringstijd t_c weergegeven als functie van het P_w -getal, bij verschillende bewortelingsdichtheid.

Hierin is ook de "maximale toeleveringstijd" $t_{c,max}$ getekend, dat is de tijd gedurende welke de grond de vereiste hoeveelheid kan leveren als alle mobiele fosfaat in het vereiste tempo beschikbaar zou zijn. In formule:

$t_{c,max} = h P_M(i) / A$. Deze $t_{c,max}$ zou gerealiseerd kunnen worden bij een oneindig hoge bewortelingsdichtheid, bij $C_{lim} = 0$ (zie (9) bij $R_1 \rightarrow 0$). Deze $t_{c,max}$ is dus evenredig met $P_M(i)$ en uit de kromming in de figuur blijkt dus nogmaals het niet-lineaire karakter van de adsorptie-isotherm.

Naarmate de gemiddelde buffering groter is, is $t_{c,max}$ groter en de bij gegeven bewortelingsdichtheid gerealiseerde t_c relatief kleiner, maar absoluut vaak groter. De dalgrond (figuur 13A) kan bij een bewortelingsdichtheid van 5 cm^{-2} en een P_w -getal van 30 ca 82% van het maximaal mogelijke leveren, de lichte zeeklei (figuur 13C) in een overeenkomstige situatie slechts 68%; absoluut zijn de gerealiseerde tijden resp. 114 en 184 dagen.

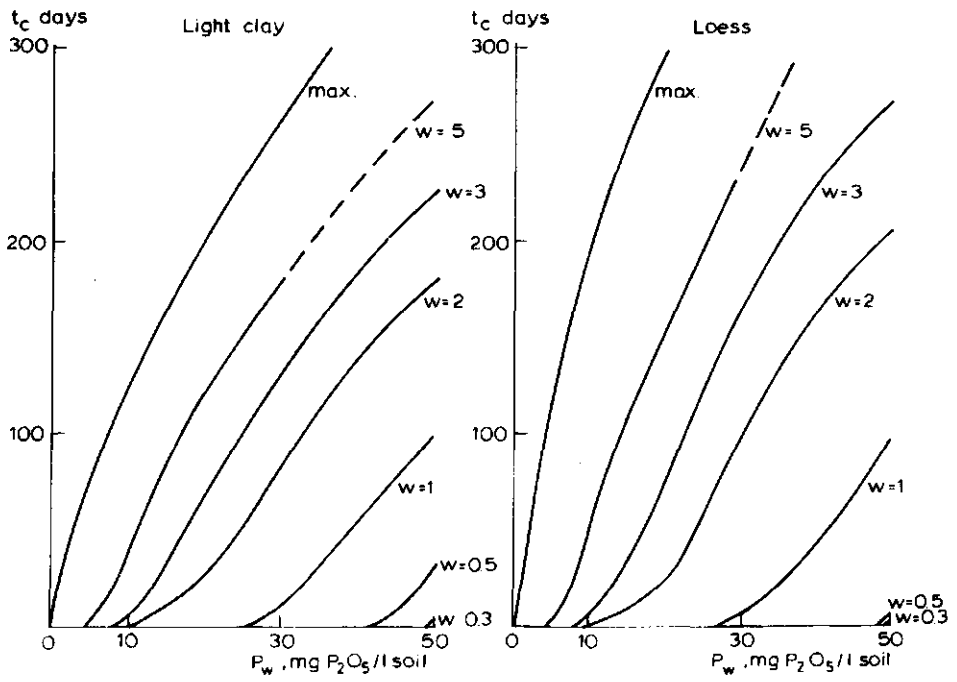
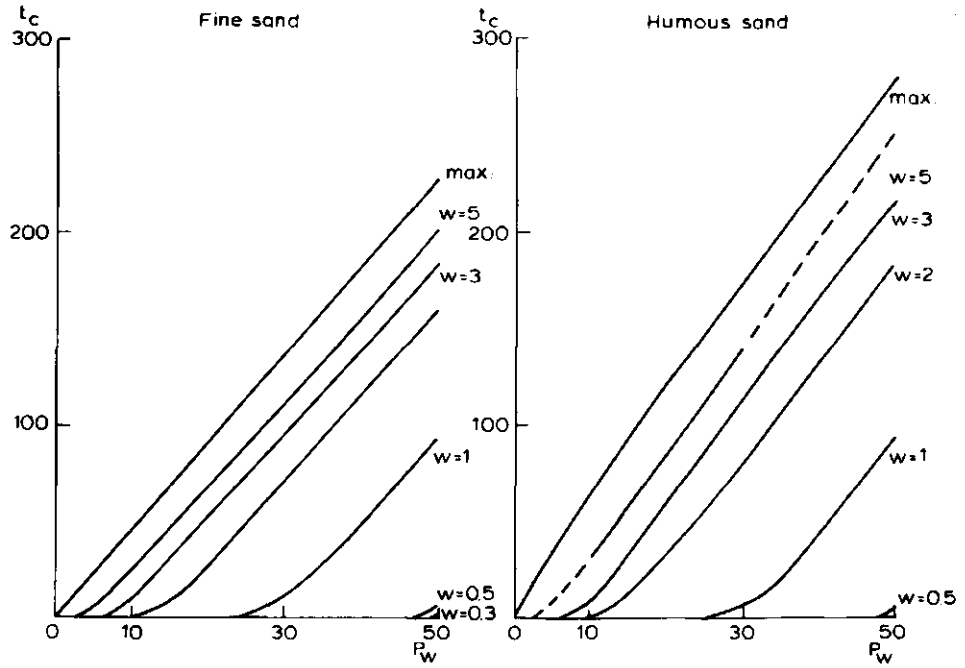
In figuur 14 zijn alle resultaten samengevat, nu echter is t_c uitgezet als functie van de bewortelingsdichtheid. Duidelijk blijkt uit deze figuur dat een bepaalde t_c bereikt kan worden met verschillende combinaties van bewortelingsdichtheid en P_w -getal. Zo zou een landbouwkundige topproductie van 100 dagen de groeisnelheid van $200 \text{ kg ha}^{-1} \text{ dag}^{-1}$ bereikt kunnen worden bij een P_w 50 en $w = 1 \text{ cm}^{-2}$, bij P_w 30 en $w = 2 \text{ à } 3$ en bij een P_w 10 wel op zwaar bufferende grond bij hoge bewortelingsdichtheid, maar niet op een zwak bufferende grond. Het is duidelijk dat de curven meer divergeren naarmate de bewortelingsdichtheid toeneemt.

Bij de meeste berekeningen is uitgegaan van een wortelstraal van 0,025 cm. Figuur 15 toont berekeningen voor een enkel geval met $R_0 = 0,010$ cm. Langs de abscis zijn twee verschillende grootheden uitgezet: bewortelingsdichtheid en hoeveelheid biomassa. Bij gelijke bewortelingsdichtheid zijn dunnere wortels ongunstiger (omgekeerd dus: wortelharen gunstiger). Bij gelijke hoeveelheid biomassa echter is bij een kleinere wortelstraal de wortellengte zoveel groter (dit verloopt met de kwadraat van de wortelstraal), dat dit het op zichzelf ongunstige effect van dunnere wortels meer dan compenseert. In geval van tekortschietend fosfaataanbod zou een plant de ter beschikking staande biomassa dus beter kunnen investeren in een groot aantal dunne dan in een klein aantal dikke wortels (uit de analytische oplossing is dit algemeen te bewijzen). Dit natuurlijk onder de veronderstelling dat fysiologische opname- en transportmogelijkheden (α) gelijk en de verdeling van de wortels homogeen blijven.

4.2. Karakterisering van het P-leverend vermogen afhankelijk van de bewortelingsdichtheid

In figuur 14 blijkt dat verschillende gronden bij gelijk P_w soms wel op één lijn zitten, maar soms ook niet. Vooral bij hogere bewortelingsdichtheden suggereert deze figuur dat een gelijk P_w nog geen gelijke opnamemogelijkheden aangeeft. Dit brengt ons op de vraag hoe het P-leverend vermogen van de grond te karakteriseren is, afhankelijk van het bufferend vermogen. We kunnen dit voor een deel zien bij de berekeningen met een lineaire adsorptie, d.w.z. constante buffercapaciteit.

In figuur 16 is de toeleveringstijd t_c , uit de analytische oplossing berekend, gegeven als functie van bewortelingsdichtheid en adsorptieconstante K , bij gelijke hoeveelheid mobiel fosfaat (P_M). In dit geval blijkt de situatie duidelijk ongunstiger naarmate de buffering groter is. In figuur 17 staat opnieuw t_c uitgezet tegen w , maar nu bij gelijk P_w getal. Grotere buffering is nu ongunstig bij lage bewortelingsdichtheid, maar veel gunstiger bij hoge (de curven voor $K = 100$ en $K = 300$ bijvoorbeeld snijden elkaar bij $W = 2,2$). Dit omdat bij gelijke P_w -getal een hogere buffering ook een grotere hoeveelheid mobiel fosfaat betekent. De eis van gelijk P_w bij verschillende buffering overcompenseert dus, althans bij hoge bewortelingsdichtheid, de ongunstige invloed van sterke adsorptie op het transport.



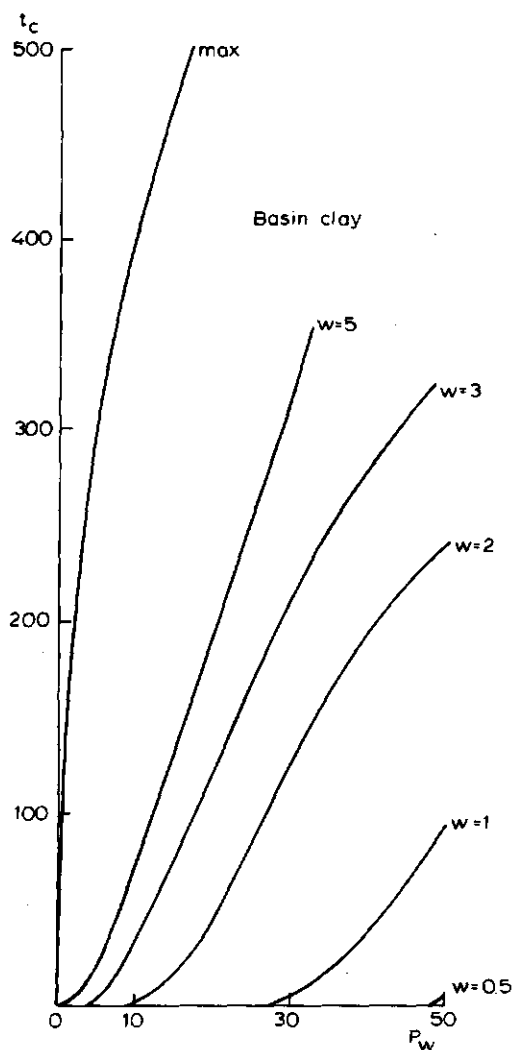


Fig. 13 A t/m E. Toeleveringstijd (t_c) van de verschillende gronden als functie van de P_w en bewortelingsdichtheid (w). Bij de berekening gebruikte parameters staan in hoofdstuk 0.

Fig. 13 A-E. Uptake time (t_c) of different soils as a function of P_w and root density (w). Parameters used are listed in chapter 0.

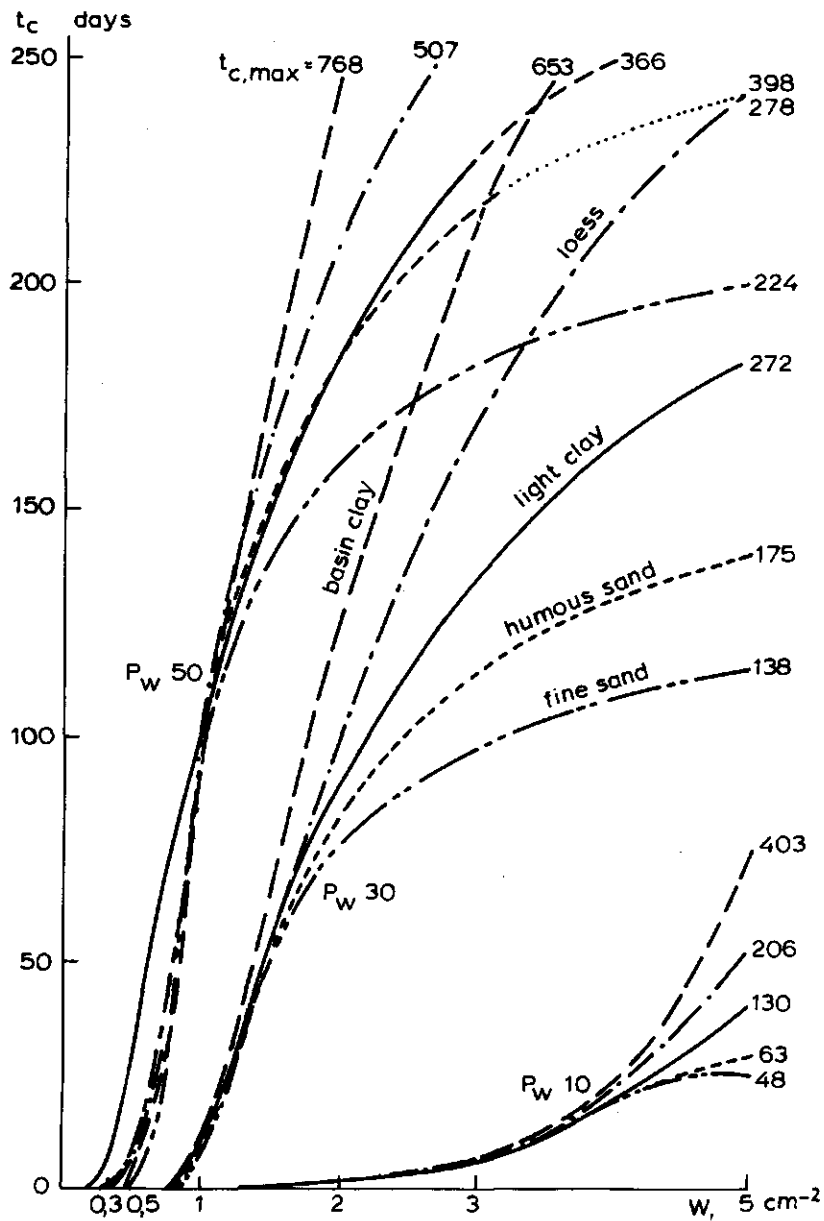


Fig. 14. Toeleveringstijd t_c als functie van de bewortelingsdichtheid (w) voor verschillende gronden bij drie P_w niveaus. De getallen bij het eind van de curven geven $t_{c,max}$ aan.

Fig 14. Uptake time (t_c) as a function of root density (w) on different soils at three levels of P_w . The numbers at the end of each curve indicate $t_{c,max}$.

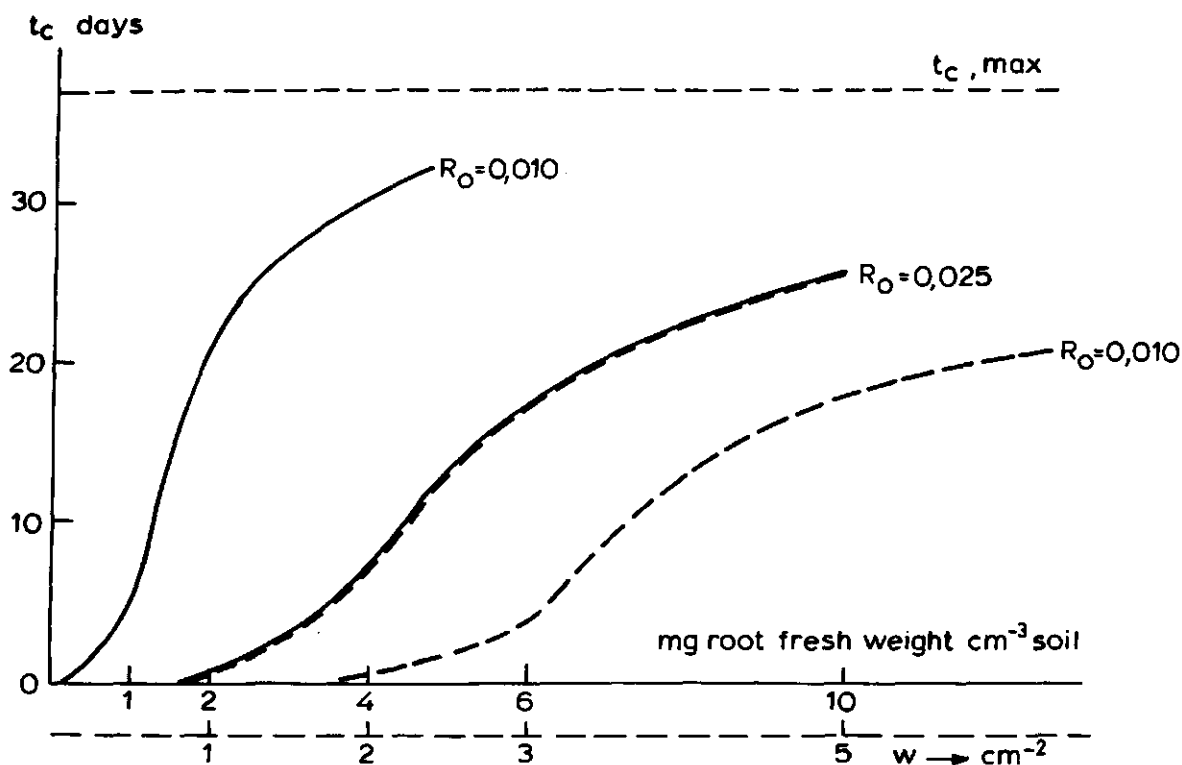


Fig. 15. Toeleveringstijd t_c als functie van biomassa (bovenste schaal —) of bewortelingsdichtheid (w , onderste schaal ----) bij twee waarden van de wortelstraal R_0 . Berekend voor een P-arme jonge dalgrond.

Fig. 15. Uptake time (t_c) as a function of root biomass (upper scale —) or root density (w , lower scale ----) for two values of root radius R_0 . Calculated for a P-deficient fine sand.

Hier blijkt ook weer de grote invloed van de bewortelingsdichtheid op de opnamemogelijkheden. Hoe groter de bewortelingsdichtheid hoe groter deel van de maximaal beschikbare hoeveelheid P_M kan worden opgenomen voordat de aanvoer ontoereikend wordt. Dit betekent dat men kan verwachten dat naarmate een gewas een hogere bewortelingsdichtheid heeft (door soort gewas of plaatselijke omstandigheden) een hogere extractieverhouding water/grond

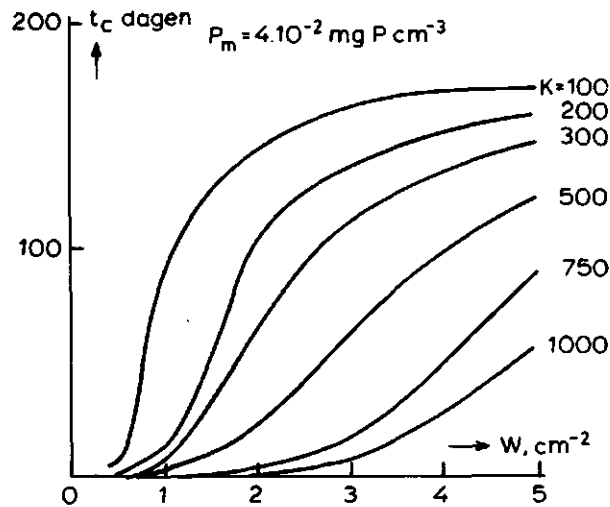


Fig. 16. Toeleveringstijd (t_c) als functie van bewortelingsdichtheid (w) bij gelijk P_M van de grond en verschillende buffering (K , getallen bij de curves), berekend uit de analytische oplossing. Zie appendix II voor berekeningswijze.

Fig. 16. Uptake time (t_c) as a function of root density (w) at the same value of P_M and different buffering capacities of the soil (K , numbers on the curves). Calculated from the analytical solution.

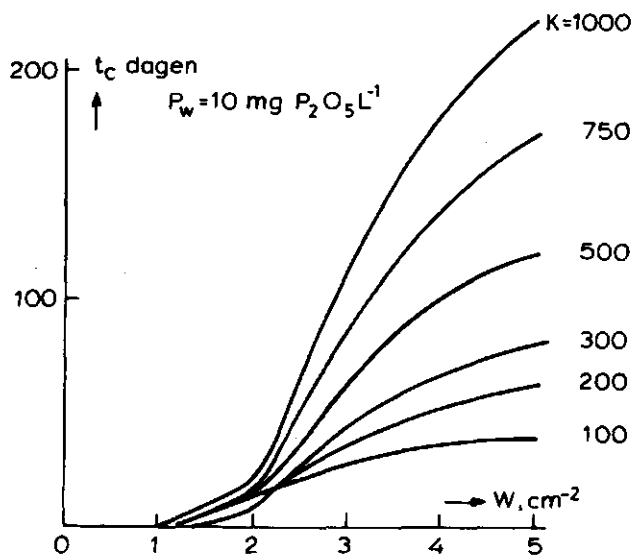


Fig. 17. Gelijk aan figuur 16, maar nu bij gelijke P_w van de grond.

Fig. 17. The same as figure 16, but now at constant P_w of the soil.

- waarmee een groter deel van het mobiel fosfaat wordt geëxtraheerd - betere resultaten op zal leveren voor de karakterisering van de fosfaat-toestand. De ruimere extractieverhouding zal vooral op de zwaar bufferende gronden meer fosfaat in oplossing brengen, overeenkomstig de opnamemogelijkheden van een gewas met sterkere wortelontwikkeling. Als uitersten bij de extractie kan enerzijds gelden de concentratie in bodemoplossing (C , bij het heersende vochtgehalte, in dit geval $\Theta = 0,4$) en anderzijds de totale hoeveelheid mobiel fosfaat (P_M , bij oneindig grote extractieverhouding).

Uit de afstand tussen de lijnen in figuur 18A t/m C blijkt dat bij een bewortelingsdichtheid van 2cm^{-2} $C(i)$ noch $P_M(i)$ een goede voorspelling van t_c mogelijk maken, terwijl daarentegen de P_w waarden op de verschillende gronden een vergelijkbare betekenis hebben. We hebben deze beschouwing uitgebreid door varianten op de P_w -extractie na te rekenen bij variërende extractieverhouding Θ en deze te correleren met de door simulatie gevonden t_c . Met de parameters van de adsorptie-isotherm is uit te rekenen hoeveel fosfaat geëxtraheerd kan worden bij oplopende extractieverhouding. Deze waarden zijn gecorreleerd aan de gevonden t_c waarden bij bepaalde bewortelingsdichtheid, met 15 punten per correlatieberekening (5 gronden x 3 P-niveaus). Figuur 19 geeft het percentage door geëxtraheerd fosfaat verklaarde variantie in toeleveringstijd (=kwadraat van de correlatiecoëfficiënt) als functie van de extractieverhouding bij verschillende bewortelingsdichtheid. Bij $w = 1\text{cm}^{-2}$ wordt de grootste correlatie gevonden bij een extractieverhouding van 60, zoals bij P_w gebruikelijk, bij hogere bewortelingsdichtheden verschuift het maximum naar ruimere extractieverhoudingen. In de figuur is tevens opgenomen een curve zoals die berekend kon worden uit gegevens van Holford en Mattingly (1975b, 1976). Deze hebben van 24 gronden fosfaat-adsorptie-isothermen bepaald en de parameters b_1 , b_2 , A_1 en A_2 (in onze notatie) berekend. Ook werd met deze gronden een potproef gedaan met Engels raaigras als proefgewas. De curve in figuur 19 geeft het verloop weer van het percentage variantie in gemeten fosfaatopname door het gewas dat verklaard kan worden met, door ons berekend, geëxtraheerd fosfaat in afhankelijkheid van de extractieverhouding.

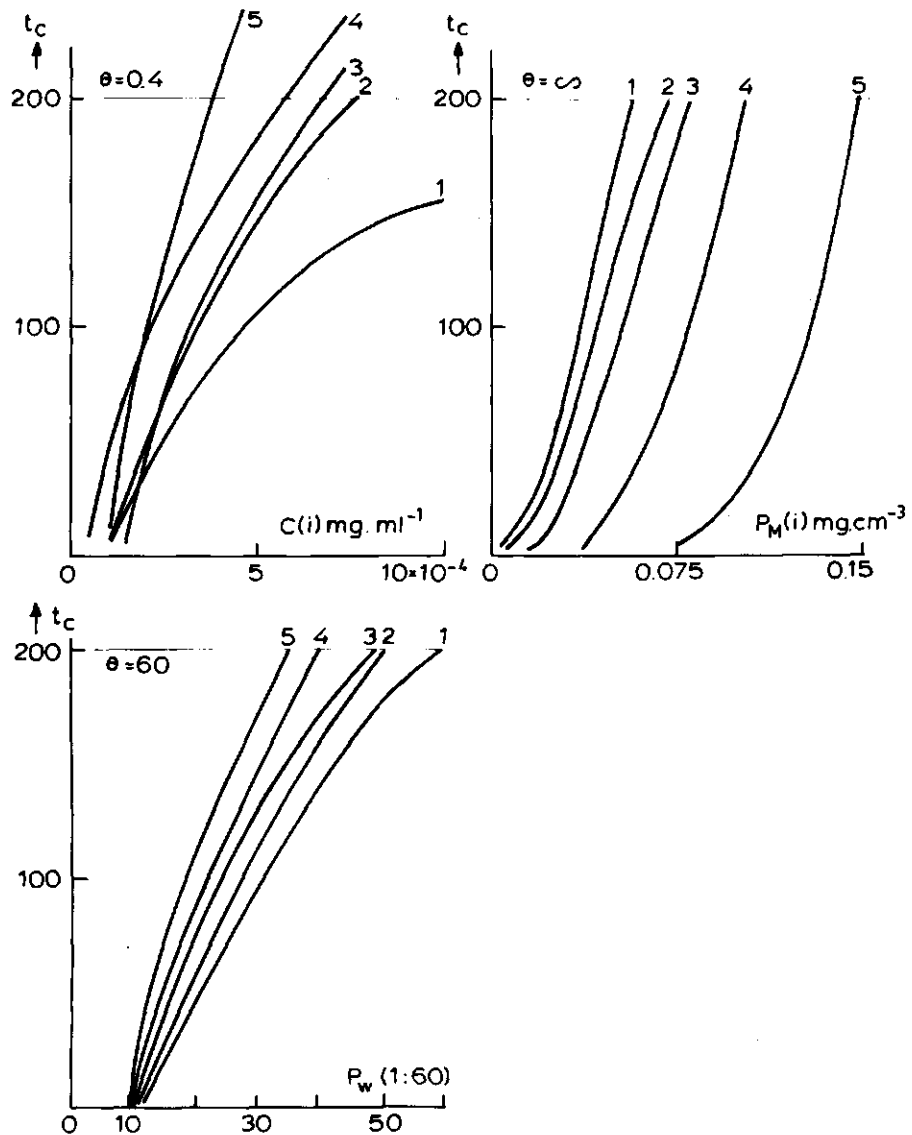


Fig. 18 A t/m C. Toeleveringstijd (t_c) als functie van de concentratie van de bodemoplossing ($C(i)$, fig. A), gehalte aan mobiel fosfaat ($P_M(i)$, fig. B) of P_w -getal (fig. C) bij bewortelingsdichtheid $w = 2 \text{ cm}^{-2}$ en 5 gronden (nummering als in tabel I).

Fig. 18 A-C. Uptake time (t_c) as a function of concentration in soil solution ($C(i)$, fig. A), content of mobile phosphorus (P_M , fig. B) or P_w (fig. C) at root density $w = 2 \text{ cm}^{-2}$ on 5 soils (the numbers correspond with table I).

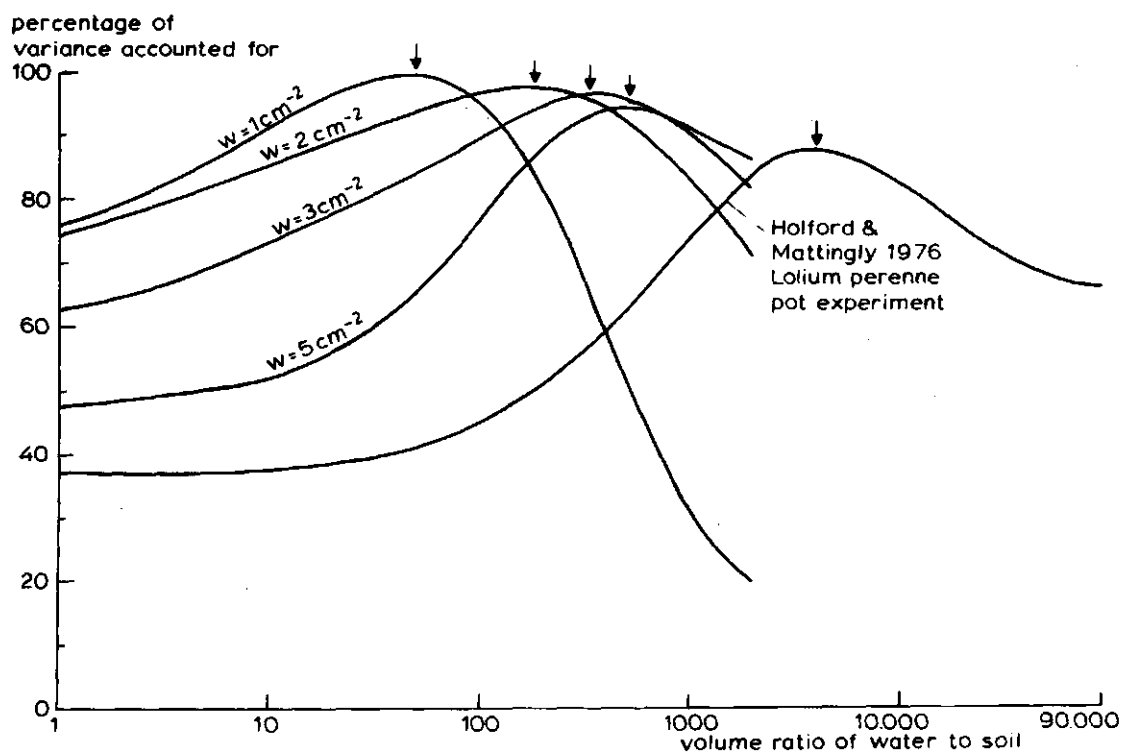


Fig. 19. Percentage van de variantie in t_c op verschillende gronden, verklaard door varianten van P_w bij verschillende extractieverhouding, zie verder de tekst.

Fig. 19. Percentage of the variance in t_c in different soils accounted for by variants of P_w with different volume ratios of water to soil.

Het verloop heeft dezelfde vorm als de andere curven, het maximum (dat hoger is dan met de door Holford en Mattingly zelf voorgestelde beschikbaarheidsmaat te bereiken is) ligt echter nog verder naar rechts. Volgens mondelinge mededeling van Mattingly (1978) is de bewortelingsdichtheid in deze proeven zeker boven de 10cm^{-2} geweest, zodat de lijn mooi in de serie past.

5. DISCUSSIE

De uitkomsten van de berekeningen tonen dat de bewortelingsdichtheden zoals die in de akkerbouw voorkomen ($1 \text{ à } 5 \text{ cm}^{-2}$) qua orde van grootte overeenkomen met wat bij normale P_w waarden (10 tot 50) nodig zou zijn voor fosfaatopname (gewenste t_c 50 tot 100 dagen). Wel dient men zich te realiseren dat bij de berekeningen voor zoveel parameters geschatte waarden zijn ingevuld die tientallen procenten kunnen afwijken van feitelijke waarden in een concrete situatie, dat de berekeningen alleen een orde van grootte kunnen aangeven.

Eén van de resultaten van de berekeningen was het aangeven van het verband tussen bewortelingsdichtheid en benodigd P_w van de grond. Dit zouden we graag toetsen aan praktijkgegevens. Uit bemestingsproeven blijkt een afnemende opbrengstreactie op fosfaat in de volgorde: stamslaboon, tuinboon, spinazie, doperwt, aardappel, spruitkool, suikerbiet, koolzaad (ten dele ongepubliceerde gegevens van Prummel). Granen zouden rond de suikerbiet te plaatsen zijn in deze reeks, m.u.v. gerst die dicht bij de aardappel staat. Helaas ontbreken tot nu toe gegevens over bewortelingsdichtheid in de bouwvoor van deze reeks gewassen, op de hier gewenste lengtebasis. De oude gegevens op gewichtsbasis zullen eerst omgerekend moeten worden, voor zo ver mogelijk. Kwalitatief lijkt in ieder geval de reeks bonen, aardappel, granen een oplopende bewortelingsdichtheid te hebben. Bij deze vergelijking zullen P-gehalte en groeisnelheid een rol moeten spelen, terwijl voor het bemestingsadvies ook economische verhoudingen meespelen. Maar mogelijk kan toch bewortelingsdichtheid een rol gaan spelen bij het voorspellen van P-reacties van nieuwe gewassen.

De resultaten zoals weergegeven in figuur 19 suggereren dat niet alleen de interpretatie van de P-status afhankelijk is van de bewortelingsdichtheid, maar ook dat de optimale manier van karakteriseren van de P-status van deze grootheid afhangt. Als we er voorlopig van uitgaan dat de door ons gebruikte t_c een maat voor de feitelijke opbrengst kan zijn, dan blijkt de 1:60 verhouding die voor P_w -getal gebruikt wordt de beste keus bij een bewortelingsdichtheid van 1 cm^{-2} .

Bij de ontwikkeling van de P_w -methode destijds zijn verschillende extractieverhoudingen vergeleken met P-opname door jonge aardappelplanten in kortdurende potproeven. Verruiming van de extractieverhouding van 1:10 zoals bij P-getal tot 1:60 verbeterde de correlatie, daarboven (tot 1:100) had weinig effect meer (Van der Paauw et al., 1971). Van de bewuste potproefserie zijn geen bewortelingsdichtheden bekend, maar bij overeenkomstige proeven zijn bewortelingsdichtheden rond de 1 cm^{-2} gevonden (ongepubliceerde eigen gegevens). Volgens figuur 19 zal de op deze wijze geoptimaliseerde extractieprocedure erg afhankelijk zijn van de bewortelingsdichtheid in de gekozen potproef. Als we $w = 1 \text{ à } 5 \text{ cm}^{-2}$ voorlopig aanhouden als bewortelingsdichtheden in de praktijk van de akkerbouw, dan is de 1:60 geen slechte keus: de correlaties voor de zwakwortelende, P-behoefte gewassen in het bouwplan moeten de doorslag geven en deze worden snel slechter bij stijgende extractieverhouding. Voor bonen en dergelijke gewassen in de akkerbouwmatige groenteteelt, met waarschijnlijk geringere beworteling dan aardappel, zou eventueel een aanpassing naar lagere extractieverhouding gezocht kunnen worden, als blijkt dat bij gelijk P_w de zwakst bufferende gronden de kleinste P-reactie geven.

Reeds lang bestaat de vraag waarom op grasland met zijn dichte zode P_{AL} beter voldoet dan P_w . Door van der Paauw is indertijd al een, niet gepubliceerde, proef genomen waarbij bewortelingsdichtheid van aardappel en mosterd werd gemanipuleerd middels de potgrootte. Bij stijgende bewortelingsdichtheid (al werd in de proef lang geen graslandbeworteling bereikt), daalde de correlatie met P_w en steeg ze bij P_{AL} . Volgens figuur 19 hoeft dit niet een verschil te zijn in chemische ontsluiting. De grotere fysische ontsluiting bij hoge bewortelingsdichtheid, die ervoor zorgt dat ook op zware gronden een groot deel van het geadsorbeerde fosfaat ("chemisch beschikbaar") ook werkelijk in het vereiste tempo bij de plant kan komen ("fysisch beschikbaar"), maakt dat de extractieprocedure een groter deel van het geadsorbeerde P moet meten. Dit kan met water door een ruimere extractieverhouding te kiezen (al kleven aan extractieverhoudingen boven 1:100 praktische bezwaren) of met een sterker extractiemiddel (met het gevaar ook chemisch niet beschikbare fracties mee te nemen). Op grond van berekeningen zoals hier gepresenteerd kan de uitwerking van een extractietechniek een rationele, fysische basis krijgen, naast de chemische overwegingen die de keus van het extractiemiddel bepalen.

De grasland- P_w kwestie hoeft geen probleem te zijn van "wel of niet met water" maar een vraag van "op welke manier met water?".

Zoals gesteld in 2.2.3. is veel modelonderzoek over P-opname verricht door Nye en medewerkers in Oxford. Vergeleken met hun benadering hebben wij voor een grovere, meer landbouwkundige aanpak gekozen. De antwoorden zijn dienovereenkomstig. Een groot verschil tussen de modellen zit in de beschrijving van de regulatie van de opname. Ook in de recentere modellen van de Oxfordgroep (Nye et al., 1975 Brewster et al., 1975 a en b) tracht men hiermee rekening te houden door α afhankelijk te maken van de gehalten in de plant. Toch blijft dit o.i. een gebrekkige beschrijving. Een verbetering zou moeten komen van het beter aansluiten bij de ideeën over het mechanisme van de regulatie in de gehele plant. De modellen van de Oxfordgroep zijn zo gedetailleerd dat ze geschikt zijn om concrete proeven na te rekenen. Ons model is daarvoor te grof en zullen we moeten uitwerken in die richting. Ten opzichte van de huidige opzet zal dat echter een groot aantal nieuwe aannames vergen.

Twee punten vergen extra aandacht bij het verbeteren van het model: wat gebeurt er voor de huidige berekeningen starten en wat gebeurt er nadat ze gestopt zijn. Zoals o.a. uit figuur 8 blijkt, vindt een relatief grote P-opname plaats in de jonge plant, voor het gesloten gewasstadium is bereikt. Voor een beschrijving van deze fase zal het model dynamisch gemaakt moeten worden wat betreft de bewortelingsdichtheid, dus wortelgroei moeten opnemen. Als de huidige berekeningen stoppen op t_c , voldoet de P-opname niet meer aan de vraag op dat moment. Dat betekent dat de groeisnelheid zal dalen of dat de plant extra wortels maakt (of de wortelmorfologie aanpast) en zo de opnamemogelijkheden vergroot. Dit laatste is een algemene reactie van planten, dat ze een groter deel van de groei in het wortelstelsel investeren naarmate de opname van water of een nutriënt meer beperkend wordt voor de totale groei (Brouwer, 1963). Ook dit kan ten koste gaan van de bovengrondse groei. Door dit soort terugkoppelingen zullen de verschillen in fosfaatopname en opbrengst bij verschillend P_w -getal kleiner zijn dan de hier weergegeven resultaten suggereren. Het ligt in de bedoeling dit soort effecten in de toekomst middels een uitgebreid simulatiemodel te onderzoeken. Wat betreft de aannames genoemd in 2.2.1. en 2.2.2. zal in eerste instantie de waterhuishouding aandacht krijgen, al moeten we in de gaten houden dat ook de bodemchemische beschrijving vele onzekerheden kent.

6. SAMENVATTING

Middels modelberekeningen is de relatie onderzocht tussen P-toestand van de grond en benodigde bewortelingsintensiteit voor optimale gewasgroei. Licht zal uiteindelijk de gewasgroei beperken als water- en nutriëntvoorziening goed zijn en in deze berekeningen zijn we van een aldus geformuleerde P-behoefte van het gewas uitgegaan. Dit betekent dat we uitgaan van een volledige regulatie van de opname volgens de behoefte van de plant. Dit is het voornaamste verschil met de modellen van de Oxfordgroep die uitgaan van een opname die geheel door uitwendige omstandigheden wordt bepaald.

De voornaamste variabelen in het model zijn bewortelingsdichtheid (wortellengte per volume grond) en de P-adsorptie-eigenschappen van de grond (bepaald voor 5 landbouwgronden). Voor de wortels wordt een regelmatige verdeling en uniforme dikte en lengte aangehouden. Het P_w -getal waarop de bemestingsadviezen voor bouwland zijn gebaseerd kan uit de adsorptieparameters worden berekend. Zo kan de bewortelingsdichtheid berekend worden voor optimale gewasgroei afhankelijk van het P-leverend vermogen van de grond.

In het model wordt de tijd berekend gedurende welke de toelevering naar het worteloppervlak het vereiste opnametempo kan bijhouden (t_c). Na t_c wordt de fosfaatvoorziening ontoereikend. Tot dusver is alleen de lineaire groeifase van een gesloten gewasdek bij constant P-gehalte bekeken. Voor speciale gevallen met een lineaire adsorptie-isotherm, is een analytische oplossing voor het optredende concentratieprofiel gevonden (een complex van Bessel-functies). Na het opbouwen van een concentratiegradiënt, convergeert het transport naar een proces van "gelijkmatige uitputting" ("steady rate") waarbij uit iedere afstand van de wortel een gelijke constante hoeveelheid geleverd wordt. In gevallen waarin de adsorptie-isotherm niet met een rechte lijn benaderd kan worden, zoals in de meeste landbouwgronden, moeten we toevlucht nemen tot een computersimulatie.

De resultaten tonen dat de bewortelingsdichtheid bij een P-leverende bouwvoor van 20 cm bij normale P_w van de orde van 1 wortel cm^{-2} moet zijn.

Dunnere wortels zijn op lengtebasis minder efficiënt, maar op gewichtsbasis veel efficiënter. Hoe hoger de bewortelingsdichtheid is, hoe hoger de volumeverhouding water/grond moet zijn bij de extractie om het P-opnemend vermogen van een gewas op verschillende gronden te verklaren. De resultaten geven een mogelijke verklaring voor het feit dat P_w op bouwland wel, maar op grasland (bij veel hogere worteldichtheid) geen landbouwkundig voorstellende waarde heeft.

7. SUMMARY

The model we have used is based on the situation that in agriculture - under conditions of adequate fertilization - factors other than phosphorus supply will be growth limiting. Under these conditions the P-demand of the crop is closely linked to its increase in biomass. The length of time the soil-root system can satisfy this demand is our main interest. Thus one of our assumptions is that plant requirement completely regulates nutrient uptake rate. This is the main difference from the models of the Oxford school, which assume uptake by the root to be at the maximum rate possible under the existing soil conditions.

The main variables in our model are root density (root length per unit volume of soil) and the P-adsorption characteristics of the soil (determined for 5 Dutch agricultural soils). The roots are considered to have a homogeneous distribution and to be of constant length. The P-water value, on which fertilizer recommendations for arable land are based in the Netherlands, can be calculated with the adsorption parameters. Thus the root density required for normal crop growth can be related to the P-status of the soil, and the P-water value can be evaluated as a measure of the supplying power of the soil, for different soils.

Our models calculate the time needed for the concentration at the root surface to become insufficient for the required uptake rate (t_c). After this time t_c , the phosphorus supply would become growth limiting. So far only linear crop growth and constant P-content of the dry matter have been assumed. For a linear approximation of the adsorption isotherm, an analytical solution for t_c and for the concentration gradients could be found (a complex of Bessel-functions). After an initial build-up of a concentration gradient, the transport to the root approaches a steady rate process, with the same decrease in concentration at every distance from the root. In cases where the linear approximation is not appropriate (as in most agricultural situations) we have to rely on a computer simulation. Results show that the root density in the case of a phosphorus-supplying soil layer of 20 cm ("normal" P level) should be of the order of 1 root cm^{-2} for good crop growth. Given a certain biomass of roots per unit volume

of soil, a smaller root diameter and consequently a higher root density increases the possibilities of uptake in spite of the steeper gradients required.

The value of the P_w -method for indicating uptake potential on different soils was found to be dependent on root density. The higher the root density is, the higher the volume ratio between soil and extracting solution (water) should be to predict uptake possibilities on different soils. The results give an indication why the P_w -method gives much better predictions for arable crops than for grassland, with its much higher root density.

8. LITERATUUR

- Abramowitz, M. and Stegun, I., 1970. Handbook of mathematical functions. New York, Dover Publications.
- Ansiaux, J.R., 1977. The level of soil phosphorus status. Phosphorus in Agriculture No. 70: 1-10.
- Baldwin, J.P. and Nye, P.H., 1974. A model to calculate the uptake by a developing root hair system of solutes with concentration variable coefficients. Plant Soil 40: 703-706.
- Baldwin, J.P., Tinker P.B. and Nye, P.H., 1972. Uptake of solutes by multiple root systems from soil. II. The theoretical effects of rooting density and pattern on uptake of nutrients from soil. Plant Soil 36: 693-708.
- Barber, S.A., 1962. A diffusion and mass-flow concept of soil nutrient availability. Soil Sci. 93: 39-49.
- Barrow, N.J. and Shaw, T.C., 1975. The slow reactions between soil and anions. 2. Effect of time and temperature on the decrease in phosphate in soil solution. Soil Sci. 119: 167-177.
- Berding, G., 1974. Unpublished doctoral thesis. Wageningen.
- Black, R.L.B. and Tinker, P.B., 1977. Interaction between effects of vesicular-arbuscular mycorrhiza and fertiliser phosphorus on yield of potatoes in the field. Nature 267: 510-511.
- Brewster, J.L., Bhat, K.K.S. and Nye, P.H., 1975a. The possibility of predicting solute uptake and plant growth response from independently measured soil and plant characteristics. II. The growth and uptake of onions in solutions of constant phosphate concentration. Plant Soil 42: 171-195.
- Brewster, J.L., Bhat, K.K.S. and Nye, P.H., 1975b. The possibility of predicting solute uptake and plant growth response from independently measured soil and plant characteristics. III. The growth and uptake of onions in a soil fertilized to different initial levels of phosphate and comparison of the results with model predictions. Plant Soil 42: 197-226.

- Brouwer, R., 1963. Some aspects of the equilibrium between overground and underground plant parts. *Jaarb. Inst. Biol. Scheikd. Onderz. Landbouwgewassen*: 31-39.
- Clarkson, D.F., Sanderson, J. and Scattergood, Ch.B., 1977. The modification of phosphate transport in roots of barley by phosphorus deficiency. *Annu. Rep., Letcombe Lab.*
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., 1959. *Conduction of heat in solids*. Second Edn. Clarendon Press Oxford.
- Cartwright, B., 1972. The effect of phosphate deficiency on the kinetics of phosphate adsorption by sterile excised barley roots and some factors affecting the ion uptake efficiency of roots. *Commun. Soil Sci. Plant Anal.* 3: 313-322.
- Churchill, R.V., Brown, J.W. and Verhey, R.F., 1974. *Complex variables and applications*. Kogakusha, McGraw-Hill.
- Danilo-Lopez, Hernando and Burnham, C.P., 1974. The effect of pH on phosphate adsorption in soils. *J. Soil Sci.* 25: 207-217.
- Drew, M.C., 1976. The effect of the supply of mineral nutrients on root morphology, nutrient uptake, and shoot growth in cereals. *Annu. Rep. Letcombe Lab.*: 63-73.
- Edwards, J. and Barber, S.A., 1976. Phosphorus uptake rate of soybean roots as influenced by plant age, root trimming and solution P-concentration. *Agron. J.* 68: 973-975.
- Forsythe, G.E., Malcolm, M.A. and Moler, C.B., 1977. *Computer methods for mathematical computations*. Prentice Hall, Englewoods Cliff.
- Goedewaagen, M.A.J., 1942. *Het wortelstelsel der landbouwgewassen*. Rijkslandbouwproefstation en Bodemkundig Instituut, Groningen.
- Haan, F.A.M. de, 1965. *The interaction of certain inorganic anions with clays and soils*. Dissertatie, Wageningen.
- Holford, I.C.R. and Mattingly, G.E.C., 1975a. A model for the behaviour of labile phosphate in soil. *Plant Soil* 44: 219-229.
- Holford, I.C.R. and Mattingly, G.E.C., 1975b. The high- and low-energy phosphate adsorbing surfaces in calcareous soils. *J. Soil Sci.* 26: 407-416.
- Holford, I.C.R. and Mattingly, G.E.C., 1976. Phosphate adsorption and plant availability of phosphate. *Plant Soil* 44: 377-389.
- Itallie, Th. B. van, 1938. *De chemische samenstelling van gewassen in verband met landbouwkundige vraagstukken*. Rijkslandbouwproefstation Akker en weidebouw, Groningen.

- Jager, A. de, 1979. Localized stimulation of root growth and phosphate uptake in *Zea mays* L., resulting from restricted phosphate supply. In: T.L. Harley and R. Scott Russell (eds.), *The soil root interface*. Academic Press. In press.
- Jungk, A., 1974. Phosphate uptake characteristics of intact root systems in nutrient solution, as affected by plant species, age, and P-supply. *Proc. Int. Colloq. Plant Anal. Fert. Probl.* 1: 185-196.
- Jungk, A. and Barber, S.A., 1974. Phosphate uptake rate of corn roots as related to the proportion of the roots exposed to phosphate. *Agron. J.* 66: 554-557.
- Jungk, A. and Barber, S. A., 1975. Plant age and phosphorus uptake characteristics of trimmed and untrimmed corn root systems. *Plant Soil* 42: 227-239.
- Larsen, S., 1967. Soil phosphorus. *Adv. Agron.* 19: 151-210.
- Marshner, H., 1974. Mechanisms of regulation of mineral nutrition in higher plants. In: R.L. Bielecki, A.R. Ferguson and M.M. Cresswell, (eds.), *Mechanisms of regulation of plant growth*. Bull. 12: 99-109. Royal Soc. New Zealand, Wellington.
- Min-Shing Lih, M., 1975. *Transport phenomena in medicine and biology*. John Wiley, New York.
- Moawad, M., 1979. Ecophysiology of VA-Mycorrhiza in the tropics. In: J.L. Harley and R. Scott Russell, (eds.), *The Soil root interface*. Academic Press. Inpress.
- Nye, P.H., 1966. The effect of nutrient intensity and buffering power of a soil, and the absorbing power, size and root-hairs of a root, on nutrient absorption by diffusion. *Plant Soil* 25: 81-105.
- Nye, P.H., Brewster, J.L. and Bhat, K.K.S., 1975. The possibility of predicting solute uptake and plant growth response from independently measured soil and plant characteristics. I. The theoretical basis of the experiments. *Plant Soil* 42: 161-170.
- Nye, P.H., 1977. The rate limiting step in plant nutrient adsorption from soil. *Soil Sci.* 123: 292-297.
- Nye, P.H. and Tinker, P.B., 1977. *Solute movement in the soil-root system*. Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- Paauw, F. van der, 1971. An effective water extraction method for the determination of plant-available soil phosphorus. *Plant Soil* 34: 467-481.

- Paauw, F. van der, Sissingh, H.A. en Ris, J., 1971. Een verbeterde methode van fosfaatextractie van grond met water: het Pw-getal. Versl. Landbouwk. Onderz. no. 749.
- Frummel, J.P. en Sissingh, H.A., 1976. Transport en accumulatie van fosfaat in de grond. Inst. Bodemvruchtbaarheid, Rapp. 4-76.
- Rajan, S.S.S. and Fox, R.L., 1972. Phosphate adsorption by soils. I. Influence of time and ionic environment on phosphate adsorption. Commun. Soil Sci. Plant Anal. 3: 493-504.
- Richtmyer, R.D. and Morton, K.W., 1956. Difference methods for initial value problems. John Wiley, New York.
- Ris, J. en Luit, B.J. van, 1973. The establishment of fertilizer recommendations on the basis of soil tests. Inst. Bodemvruchtbaarheid.
- Sibma, L., 1968. Growth of closed green crop surfaces in the Netherlands. Neth. J. Agr. Sci. 16: 211-216.
- Spiegel, M., 1965. Laplace transforms. Schaum outline series. McGraw-Hill, New York.
- Veith, J.A. and Sposito, G., 1977. On the use of the Langmuir equation in the interpretation of "Adsorption" phenomena. Soil Sci. Soc. Am. J. 41: 697-702.
- Wit, C.T. de and Keulen, H. van, 1972. Simulation of transport processes in soils. Simulation Monographs. Centre for Agricultural Publishing and Documentation, Wageningen.
- Wijk, W.R. van, (ed.), 1963. Physics of plant environment. North Holland Publishing Company, Amsterdam.

APPENDIX I. Wiskundige oplossing bij lineaire adsorptie

Met de transformaties die in het begin van 3.2. zijn aangegeven veranderen de vergelijkingen (13), (14), (15) en (16) in resp.:

$$\frac{\delta u}{\delta \tau} = \frac{1}{x} \frac{\delta}{\delta x} \left[x \frac{\delta u}{\delta x} \right] \quad (\text{A1-1})$$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_{x=1} = \frac{e^2}{2\eta\phi} \quad (\text{A1-2})$$

$$\left. \frac{\delta u}{\delta x} \right|_{x=\rho} = 0 \quad (\text{A1-3})$$

$$u=1, \quad \tau=0 \quad (\text{A1-4})$$

De oplossing van dit stelsel wordt gevonden via de Laplace-transformatie (Spiegel, 1965). Als de Laplace-transformatie van u voorgesteld wordt door \bar{u} , of $L(u) = \bar{u}$, en de Laplace-parameter wordt weergegeven door s , transformeert de partiële differentiaalvergelijking (A1-1) met de beginvoorwaarde (A1-4) in de gewone differentiaalvergelijking:

$$s \cdot \bar{u} - 1 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \cdot \frac{d\bar{u}}{dx} \quad (\text{A1-5})$$

en de randvoorwaarden (A1-2) en (A1-3) in resp.:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = \frac{Q}{s}, \quad \text{voor } x=1 \quad (\text{A1-6})$$

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=\rho} = 0, \quad \text{voor } x=\rho \quad (\text{A1-7})$$

In (A1-6) is $Q = \frac{\rho^2}{2\eta\phi}$

De algemene oplossing van (A1-5) is:

$$\bar{u}(s) = C_1 I_0(x/s) + C_2 K_0(x/s) + 1/s \quad (\text{A1-8})$$

Hierin betekenen I en K resp. gemodificeerde Besselfuncties van eerste en tweede soort, terwijl de indexen 0 en 1 de nulde resp. eerste orde aanduiden. De integratieconstanten C_1 en C_2 worden gevonden door (A1-8) te

substitueren in (A1-6) en (A1-7) en op te lossen.

$$C_1 = \frac{Q \cdot K_1(\rho\sqrt{s})}{s\sqrt{s}(K_1(\rho\sqrt{s}) \cdot I_1(\sqrt{s}) - K_1(\sqrt{s}) \cdot I_1(\rho\sqrt{s}))}$$

en $C_2 = C_1 \frac{I_1(\rho\sqrt{s})}{K_1(\rho\sqrt{s})}$

De uiteindelijke oplossing wordt:

$$\bar{u} = \frac{1}{s} + \frac{Q}{s\sqrt{s}} \left[\frac{K_1(\rho\sqrt{s})I_0(x\sqrt{s}) + I_1(\rho\sqrt{s})K_0(x\sqrt{s})}{K_1(\rho\sqrt{s})I_1(\sqrt{s}) - I_1(\rho\sqrt{s})K_1(\sqrt{s})} \right] \quad (A1-9)$$

Door linker- en rechterlid van (A1-9) terug te transformeren wordt de oplossing van het oorspronkelijke probleem verkregen. Deze terugtransformatie kan via de complexe-inversiestelling (Spiegel, 1965) en levert:

$$u = 1 + \frac{Q}{2\pi i} \int \frac{e^{s\tau}}{s\sqrt{s}} \frac{K_1(\rho\sqrt{s})I_0(x\sqrt{s}) + I_1(\rho\sqrt{s})K_0(x\sqrt{s})}{K_1(\rho\sqrt{s})I_1(\sqrt{s}) - I_1(\rho\sqrt{s})K_1(\sqrt{s})} \quad (A1-10)$$

De waarde van de integraal kan volgens een stelling uit de complexe analyse (zie bijv. Churchill et al., 1972), worden gegeven door de som van de residuen op de singuliere punten (punten waar de integrand "niet bestaat", in dit geval die waarden van s waarvoor de noemer van (A1-10) nul wordt) van de integrand. Afgeleid *) kan worden dat het residu voor $s=0$ is:

$$\frac{\tau a_1 + a_2 - \frac{a_1 b_2}{b_1}}{b}$$

$$\text{met } a_1 = \frac{1}{\rho}, \quad a_2 = \frac{1}{4\rho} (\rho^2 + x^2) + \frac{\rho}{2} \left\{ \ln\left(\frac{x}{\rho}\right) - 1 \right\}$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} - \rho \right), \quad b_2 = \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1}{8} + \frac{\rho^2}{u} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{c^2}{8} \right) + \frac{\rho}{u} \ln \rho$$

De som van de residuen waarvoor:

$$K_1(\rho\sqrt{s}) \cdot I_1(\sqrt{s}) - I_1(\rho\sqrt{s}) \cdot K_1(\sqrt{s}) = 0$$

volgt uit Carslaw & Jaeger (1959, blz. 332 t/m 334)

Na herschrijven en uitwerken volgt dan de oplossing zoals gegeven door vergelijking (17).

*) Dank is verschuldigd aan drs. N.M. Temme (Mathematisch Centrum Amsterdam) die een en ander heeft afgeleid.

APPENDIX II. Uitwerking van de algemene oplossing

De - oneindig vele - wortels van vergelijking:

$$J_1(\alpha)Y_1(\rho\alpha) - J_1(\rho\alpha)Y_1(\alpha) = 0$$

zijn alle reëel en positief toenemend (Abramowitz en Stegun, 1970). Deze kunnen als volgt berekend worden. Als eerste schatting voor de n-de wortel wordt gebruikt: $(\alpha_n)_0 = n\pi/(\rho-1)$, een benadering gegeven door Abramowitz en Stegun (op. cit). Vervolgens wordt via een Newton-Raphson Iteratie (Forsythe et al., 1977), steeds betere schattingen verkregen. Zodra twee opeenvolgende schattingen relatief minder dan $10^{-3}\%$ verschillen wordt de iteratie als beëindigd beschouwd. Met de gevonden wortel wordt dan (bij bepaalde waarde van τ en x), de n-de term van de somreeks uit vergelijking (17) berekend en opgeteld bij de som van de eerder berekende termen. De somreeks bestaat theoretisch uit oneindig veel termen; de berekening wordt stopgezet als een term in absolute zin minder dan 0,1% bijdraagt aan de tot dan berekende som. Dit houdt in dat verondersteld is dat de termen van de somreeks in absolute waarde afnemen bij toenemende n. Dat blijkt het geval, althans voor $x=1$, dus aan de wortelwand, waar de hier gepresenteerde resultaten betrekking op hebben. Figuur A-II-1 geeft een voorbeeld van de afname van de termen.

Als steady-rate bereikt wordt geldt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\rho^2}{\eta\phi} \frac{1}{1-\rho^2} \quad (\text{AII-1})$$

Voordat dit het geval is geldt (op de wortelwand waar $x=1$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\rho^2}{\eta\phi} \frac{1}{1-\rho^2} + \frac{\rho^2\pi}{\eta\phi} \sum \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2\tau} C(\rho, \alpha_n) \quad (\text{AII-2})$$

met

$$C(\rho, \alpha_n) = J_1^2(\rho\alpha_n) \left[\frac{J_0(\alpha_n)Y_1(\alpha_n) - Y_0(\alpha_n)J_1(\alpha_n)}{\alpha_n [J_1^2(\alpha_n) - J_1^2(\rho\alpha_n)]} \right]$$

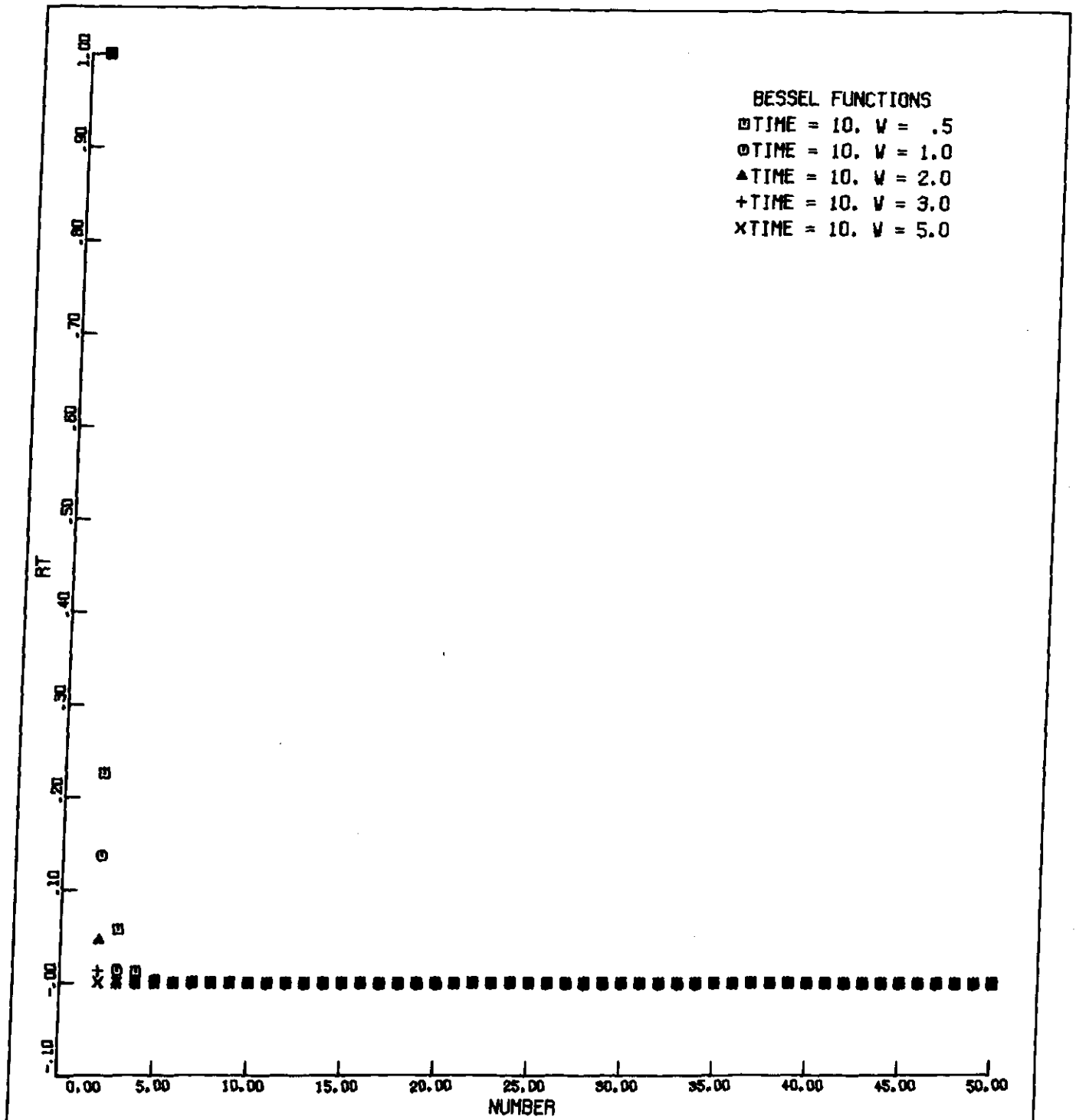


Fig. AII-1. De eerste 50 termen uit vergelijking AII-2 - uitgedrukt als fractie van de eerste sterm - als functie van hun rangnummer.

Fig. AII-1. The first 50 terms of equation A-II-2 - given as a function of the first term - as a function of their rank number.

Als criterium voor bereiken van steady-rate wordt nu genomen dat tijdstip

- aangeduid met τ_s - waarvoor geldt:

$$\left\{ \pi \sum \alpha_n^2 e^{-\alpha_n^2 \tau_s} | C(\rho, \alpha_n) | \right\} / | m | \leq \epsilon = 0.05$$

met $m = \frac{1}{1-\rho^2}$

Als nu in eerste instantie aangenomen wordt dat de som dan voldoende benaderd wordt door de eerste term, *) dan kan τ_s berekend worden als:

$$\tau_s = \frac{1}{\alpha_1^2} \left[\ln \left\{ \pi \alpha_1^2 | C(\rho, \alpha_1) | \right\} - \ln (\epsilon | m |) \right] \quad (\text{AII-3})$$

Na berekening van τ_s kan gecontroleerd worden of de somreeks goed benaderd is door de eerste term. Hier is dat gedaan door de tweede term ook uit te rekenen en het quotient van eerste en tweede term (Q) te bepalen. In onderstaande tabel vindt men dit quotient als functie van de worteldichtheid; duidelijk is dat de gebruikte benadering zeer redelijk is.

TABEL AII-1. Worteldichtheid en quotient van eerste en tweede term uit somreeks Bessel-functies (zie verg. (17)).

W	Q
0.5	1.2×10^{-6}
1.0	1.1
2.0	1.0
3.0	9.3×10^{-7}
5.0	8.2

De vraag is nu aan welke voorwaarden de parameters ρ, η en ϕ moeten voldoen wil steady-rate bereikt kunnen worden vóórdat de concentratie aan de wortelwand nul of negatief geworden is. Als vergelijking (17) voor het gemak geschreven wordt als (voor $x=1$):

$$u = 1 + \frac{\rho^2}{n\phi} F(\tau, \rho)$$

*) De hier gepresenteerde benadering is de uitwerking van een idee van Dr. P.A.C. Raats.

dan moet als $\tau = \tau_s$ $u \geq 0$ of: $1 + \frac{\rho^2}{\eta\phi} F(\tau_s, \rho) \geq 0$

Daaruit volgt: $\eta \phi \geq -\rho^2 F(\tau_s, \rho)$.

Deze grenswaarde van $\eta \phi$ vindt men in tabel II.

APPENDIX III. Berekeningen van t_c bij gelijkmatige uitputting

In geval de gelijkmatige uitputting bereikt wordt vóór t_c , is t_c expliciet te formuleren. Het concentratieprofiel bij gelijkmatige uitputting is beschreven in het eerste deel van (17) op p. 29. Omgezet in de oorspronkelijke parameters is dit:

$$\frac{P_M}{P_M(i)} = \frac{C}{C(i)} = 1 - \frac{A R_1^2}{2hD^* P_M(i) (R_1^2 - R_0^2)} \left[2D^* t + \frac{2r^{2-3} R_1^2 - R_0^2}{4} + R_1^2 \ln \frac{R_1}{r} + \frac{R_1^2 R_0^2}{(R_1^2 - R_0^2)} \ln \frac{R_1}{R_0} \right] \quad (A3.1)$$

Op t_c is P_M gelijk aan $P_{Mlim} = KC_{lim}$

$$P_M(r, t_c) - P_M(R_0, t_c) = \frac{AR_1^2}{2hD^* (R_1^2 - R_0^2)} \left[\frac{r^2 - R_0^2}{2} - R_1^2 \ln \frac{r}{R_0} \right] \quad (A3.2)$$

Op t_c resteert in de cilinder de volgende hoeveelheid fosfaat:

$$\int_{r=R_0}^{R_1} 2\pi hr P_M(r, t_c) dr = \frac{\pi AR_1^2}{2D^* (R_1^2 - R_0^2)} \int_{r=R_0}^{R_1} (R_0^2 r - r^3 + 2R_1^2 r \ln r - 2R_1^2 r \ln R_0) dr + 2\pi h P_{Mlim} \int_{r=R_0}^{R_1} r dr = \frac{\pi AR_1^4}{2D^*} \left(\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \right) \left(\ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{3}{4} + \frac{R_0^2}{R_1^2} - \frac{R_0^4}{4R_1^4} \right) +$$

$$\pi h (R_1^2 - R_0^2) P_{Mlim} \quad (A3.3)$$

Op t_c was in de cilinder aanwezig $\pi h (R_1^2 - R_0^2) P_M(i)$ en het dagelijks verbruik bedraagt πAR_1^2 . De verdwenen hoeveelheid fosfaat (begin-eindgehalte) gedeeld door het dagelijks verbruik levert de tijd t_c op:

$$t_c = \frac{h}{A} \left(\frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2} \right) \left(P_{M(i)} - P_{M,lim} \right) + \frac{R_1^2}{2D^*} \left(\frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \right) \left[- \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{3}{4} + \frac{R_0^4}{4R_1^4} - \frac{R_0^2}{R_1^2} \right] \quad (A3.4)$$

Dit is ook af te leiden in de dimensieloze groepen en levert dan:

$$\tau_c = \phi^* \eta \left(\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \right) + \left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - 1} \right) \left\{ - \frac{\rho^2}{2} \ln \rho + \frac{3\rho^2}{8} + \frac{1}{8\rho^2} - \frac{1}{2} \right\} \quad (A3.5)$$

waarbij ϕ^* van ϕ verschilt doordat van $P_M(i)$ de resterende $P_{M,lim}$ is afgetrokken.

De factor $(R_1^2 - R_0^2)/R^2$ of $\frac{\rho^2 - 1}{2}$ is een correctiefactor die ontstaat doordat het wortelvolumen in de aanvang geen fosfaat bevat, maar de opname wel over het hele bodemoppervlak berekend wordt. Voor redelijke worteldichtheden is deze factor nagenoeg 1. Ook de laatste twee termen uit (A3.4) en (A3.5) zijn in de praktijk verwaarloosbaar.

De gehele afleiding kan veel eenvoudiger door (A3.1) te schrijven voor $t=t_c$, $r=R_0$ en $C=C_{lim}$. Uit deze formule is dan direct t_c op te lossen (A3.4).

APPENDIX IV. Programmatekst van het gebruikte computermodel

Hieronder vindt men een afdruk van het computerprogramma, dat geschreven is in DSLH, een door het Rekencentrum van de Landbouwhogeschool aangepaste versie van de Simulatietaal DSL. Door ruim gebruik van commentaarregels (regels die beginnen met een *) zou het programma voor zichzelf moeten spreken. Niettemin verdienen een aantal regels een nader commentaar.

Met de in de regels 560 t/m 630 gedefiniëerde subroutine, wordt de concentratie aan het worteloppervlak door extrapolatie uit de concentraties van de vier eerste compartimenten berekend. Als onafhankelijke ("x") is hierbij niet gekozen de radiale afstand van het wortelmiddelpunt, maar voor de logaritme hiervan. Deze wordt voor de vier compartimenten berekend in de regels 1380 en 1390. Dit omdat - door trial and error - gebleken was dat dan extrapolatie de beste resultaten gaf. De hele procedure is getest m.b.v. de analytische oplossing.

De in de regels 2480 en 2490 opgegeven voorwaarde tot afsluiting van de berekening houdt in dat de berekeningen worden stopgezet zodra de variabele $TEST \geq 0$, d.w.z. zodra de concentratie aan de wortelwand (CO) gelijk is aan de limietconcentratie CLIM.

Het programma, zoals hier weergegeven, is van toepassing op een bepaalde grond, in dit geval de jonge dalgrond bij bepaalde bewortelingsdichtheid. Wil men, onder overigens gelijke omstandigheden, berekeningen doen voor een andere grond, dan dienen de parameters van regel 400, de initiële toestand (regel 870) de Pw-tabel (regel 440 t/m 500) en natuurlijk het TITLE-statement van regel 140 vervangen te worden.

```

100=/ DIMENSION R1(25), C(25), FL1(25), DFL(25), TCK(25), DIF(25)
110=/ DIMENSION DIST(25), AREA(25), VCOM(25), VOLW(25), APLIF(25)
120=/ DIMENSION FLN(25), LPM(25), RFLW(25), PW(25), DC(25)
130=TITLE DIFFUSION AND MASS FLOW OF P TO A PLANT ROOT
140=TITLE FINE SAND
150=*
160=***** PARAMETERS *****
170=*
180=PARAM RDENS=5. , FN=10. , F=1.2 , RAD=.025
190=* RDENS= ROOT-DENSITY CM-2
200=* FN= NUMBER OF COMPARTMENTS
210=* F = GEOMETRICAL FACTOR
220=* RAD = RADIUS ROOT CM
230=*
240=PARAM GRW=1.E-3 , PI=3.14159 , PERP=.218 , DIF=1.
250=* GRW= GROWTH RATE CROP G.CM-2.DAY-1
260=* PERP = PERCENTAGE P IN PLANT
270=* DIF= DIFFUSION COEFFICIENT OF PHOSPHATE IN WATER CM2/DAY
280=*
290=PARAM EVAP=0.0 , HSC=10. , WC=0.4 , IL=3. , TORT=.67
300=* EVAP= EVAPOTRANSP. CM.DAY-1
310=* IN THIS VERSION MASS-FLOW IS NOT CONSIDERED, SO EVAP=0.
320=* HSC = HEIGHT SOIL CYLINDER CM
330=* WC= WATER-CONTENT ML.CM-3
340=* IL = DISPERSION LENGTH CM
350=* TORT = TORTUOSITY
360=*
370=PARAM ALPH=17.
380=* ROOT-DEMAND COEFFICIENT IN CM/DAY
390=*
400=PARAM B1=499. , B2=8.52 , AM1=.158 , AM2=.907
410=* PARAMETERS LANGMUIR-ISOTHERM
420=* B1, B2 IN ML/MG, A1, A2 IN MG/CM3
430=*
440=AFGEN PWTB= ...
450=0. , 0. , 2.12E-3, 2. , 4.23E-3, 4. , 6.33E-3, 6. , 8.4E-3, 8. , ...
460=.0105, 10. , .0125, 12. , .0145, 14. , .0166, 16. , .0186, 18. , ...
470=.0206, 20. , .0225, 22. , .0245, 24. , .0264, 26. , .0284, 28. , ...
480=.0303, 30.0, .0322, 32.0, .0341, 34.0, .036, 36.0, .0379, 38. , ...
490=.0397, 40. , .0416, 42. , .0434, 44. , .0453, 46. , .0471, 48. , ...
500=.0489, 50. , .0507, 52.
510=* PWTB GIVES PW (MG P2O5 PER LITER SOIL) AS FUNCTION OF
520=* MOBILE P (MG P PER CM3)
530=*
540=*****
550=*
560=SYSTEMSUBROUTINE FOOX=P(X1,X2,X3,X4,FX1,FX2,FX3,FX4,XX)
570=     FIX=(FX1*(X2-XX)-FX2*(X1-XX))/(X2-X1)
580=     F2X=(FX1*(X3-XX)-FX3*(X1-XX))/(X3-X1)
590=     F3X=(FX1*(X4-XX)-FX4*(X1-XX))/(X4-X1)
600=     FIXX=(FIX*(X3-XX)-F2X*(X2-XX))/(X3-X2)
610=     F2XX=(FIX*(X4-XX)-F3X*(X2-XX))/(X4-X2)
620=     FOOX=(FIXX*(X4-XX)-F2XX*(X3-XX))/(X4-X3)
630=ENDSUB
640=* SUBROUTINE P CALCULATES VALUE OF POLYNOMIAL THROUGH
650=* (X1,FX1), (X2,FX2), (X3,FX3), AND (X4,FX4) FOR POINT XX
660=* CALCULATION ACCORDING TO AITKENS ITERATION METHOD
670=* P IS USED TO CALCULATE CONCENTRATION AT ROOT-SURFACE FROM
680=* CONCENTRATIONS OF FIRST FOUR COMPARTMENTS
690=*

```



```

700=      BB=1.*PRDEL
710=      AAI=IMPUL(0.,BB)
720=* BB AND AAI : OUTPUT-CONTROL PARAMETERS
730=*
740=***** INITIALISATION *****
750=*
760=      R=SQRT(1./(PI*RDENS))
770=* R = RADIUS OF SOIL CYLINDER CM
780=*
790=      ARE=PI*R**2
800=* ARE = AREA OF SOIL CYLINDER CM2
810=      GRR=ARE*GRW
820=* GRR= GROWTH RATE OVER ARE G.DAY-1
830=      TRANS=ARE*EVAP
840=* TRANSPIRATION RATE OVER ARE ML.DAY-1
850=      FLOW=-TRANS
860=*
870=STOCK CI(1-24)=24*7.498E-4
880=* CI(1) INITIAL CONCENTRATION OF I-TH COMPARTMENT MG/ML
890=*
900=      AA=GRW*PERP*10.
910=      CLIM=AA*(R/RAD)**2/(2.*HSC/RAD*ALPH)
920=* AA= UPTAKE OF CROP PER UNIT SOIL-AREA MG/(CM2.DAY)
930=* CLIM = LIMITING CONCENTRATION AT ROOT-SURFACE MG/ML
940=*
950=NOSORT
960=      IF(TIME.GT.0.)GO TO 500
970=*
980=***** GEOMETRY *****
990=*
1000=     N=FN $ NM1=N-1
1010=*
1020=     TOK(1)=(R-RAD)*(F-1.)/(F**N-1)
1030=     DØ 5 I=2,N
1040=     TOK(I)=F*TOK(I-1)
1050=5     CONTINUE
1060=* TOK(I)= THICKNESS I-TH COMPARTMENT CM
1070=*
1080=     DIFX(1)=TOK(1)*.5 $ DIST(1)=DIFX(1)
1090=     DØ 6 I=2,N
1100=     DIFX(I)=0.5*(TOK(I-1)+TOK(I))
1110=     DIST(I)=      DIST(I-1)+      DIFX(I)
1120=6     CONTINUE
1130=* DIFX(I) = DIFFUSION DISTANCE BETWEEN COMP. I-1 AND I
1140=* DIST(I) = DISTANCE MID-POINT COMP.I FROM ROOT-SURFACE CM
1150=*
1160=     AREA(1)=PI*RAD**2
1170=     DØ 7 I=2,N
1180=     AREA(I)=(DIST(I-1)+.5*TOK(I-1)+RAD)*2*PI*HSC
1190=     RFLOW(I)=TRANS/AREA(I)
1200=7     CONTINUE
1210=     AREA(N+1)=(DIST(N)+.5*TOK(N)+RAD)*2*PI*HSC
1220=* AREA(I) SURFACE BOUNDARY BETWEEN COMP I-1 AND I
1230=*
1240=     VCØM(1)=((TOK(1)+RAD)**2-RAD**2)*PI*HSC
1250=     VOLW(1)=VCØM(1)*WC
1260=     DØ 8 I=2,N
1270=     VCØM(I)=0.5*(AREA(I)+AREA(I+1))*TOK(I)
1280=8     VOLW(I)=WC*VCØM(I)
1290=* VCØM(I) = VOLUME I-TH COMPARTMENT CM3
1300=* VOLW(I) = AMOUNT OF WATER IN I-TH COMPARTMENT ML
1310=*
1320=     APDIF(1)=0.
1330=     DØ 9 I=2,N
1340=     APDIF(I)=(DIF*WC*TØRT+RFLOW(I)*IL)*AREA(I)/DIFX(I)
1350=9     CONTINUE
1360=*APDIF(I)= TRANSFER-COEFFICIENT BETWEEN COMP. I AND I-1

```

```

1380=      X1=ALOG(RAD+DIST(1)) $ X2=ALOG(RAD+DIST(2))
1390=      X3=ALOG(RAD+DIST(3)) $ X4=ALOG(RAD+DIST(4))
1400=* X1-X4: LOGARITHM OF RADIAL DISTANCE OF COMPARTMENTS FROM
1410=* ROOT-MIDPOINT. THESE ARE USED TO CALCULATE CONCENTRATION AT
1420=* ROOT-SURFACE.
1430=      X0=ALOG(RAD)
1440=*
1450=      PRINT 100
1460=100   FORMAT(///1H0,* GEOMETRY *)
1470=      PRINT 110,(TCK(I),DIST(I),DIFL(I),AREA(I),I=1,N)
1480=110   FORMAT(1H0,12X,*TCK*,11X,*DIST*,11X,*DIFL*,11X,*AREA*/
1490=      1(1X,1P4E15.5))
1500=      PRINT 120,(VCM(I),VLW(I),APDIF(I),RFLW(I),I=1,N)
1510=120   FORMAT(1H0,11X,*VCM*,11X,*VLW*,10X,*APDIF*,10X,*RFLW*/
1520=      1(1X,1P4E15.5))
1530=500   CONTINUE
1540=*
1550=*****
1560=*
1570=***** DYNAMICAL PART *****
1580=*
1590=INDEX C("1,24")=C"1,24"
1600=*
1610=      DO 1 I=1,24
1620=      PM(I)=B1*AM1*C(I)/(1.+B1*C(I)) + B2*AM2*C(I)/(1.+B2*C(I)) + WC*C(I)
1630=      1)
1640=      PMI=PM(I)
1650=      PW(I)=AFGEN(PWTE,PMI)
1660=1      CONTINUE
1670=* PM(I),PW(I): MOBILE P (MG/CM3) RESP. PW-VALUE OF ITH COMP.
1680=*
1690=***** CALCULATION TIME-STEP *****
1700=*
1710=      IN1=(1.+B1*C(N))**2 $ IN2=(1.+B2*C(N))**2
1720=      FAC=B1*AM1/IN1 + B2*AM2/IN2
1730=      ESTAR=WC*DIF/(WC+FAC)
1740=      DELT=.3*TCK(1)**2/DSTAR
1750=      T=AM0X(TIME,PRDEL) $ TT=PRDEL-T
1760=      IF(TT.EQ.0.) GO TO 1262
1770=      IF(DEL T.GT.(PRDEL-T)) DELT=PRDEL-T
1780=1262   CONTINUE
1790=* DSTAR = EFFECTIVE DIFFUSION-COEFFICIENT IN LAST COMPARTMENT
1800=* DELT= TIME-STEP
1810=*
1820=***** CALCULATION OF FLUXES *****
1830=*
1840=      FLM(N+1)=DFL(N+1)=DFL(1)=0.
1850=*
1860=      FLM(1)= -GRR*PERP*10.
1870=* FLM(1) = UPTAKE-RATE OF ROOT MG/DAY
1880=*
1890=      DO 10 I=2,N
1900=      FLM(I)=FLW*C(I)
1910=      DFL(I)=APDIF(I)*(C(I-1)-C(I))
1920=10     CONTINUE
1930=* FLM(I) = MASS-FLOW OF PHOSPHATE MG/DAY
1940=* DFL = DIFFUSIVE FLOW OF PHOSPHATE MG/DAY
1950=*

```

```

1960= D0 11 I=1,N
1970= FLN(I)=DFL(I)-DFL(I+1)+FLM(I)-FLM(I+1)
1980= DPM(I)=FLN(I)/VCQM(I)
1990= IN1=(1.+B1*C(I))**2 $ IN2=(1.+B2*C(I))**2
2000= FACC=B1*AM1/IN1 + B2*AM2/IN2
2010= DC(I)=DPM(I)/(WC+FACC)
2020=11 CONTINUE
2030=* FLN(I)= NET-FLØW ØF PHØSPHATE TØ I-TH CØMPARTMENT
2040=* DPM(I) = RATE ØF CHANGE ØF MØBILE P MG/(CM3. DAY)
2050=* DC(I) = RATE ØF CHANGE ØF P IN SØLUTIØN MG/(ML. DAY)
2060=*
2070=***** CALCULATIØN CØNCENTRATIØN AT RØØT-SURFACE *****
2080=*
2090= CALL P(X1,X2,X3,X4,C1,C2,C3,C4,X0,C0)
2100=*
2110= IF(AA1*KEEP.L.T.0.5)GØ TØ 600
2120=*
2130=***** CALCULATIØN AVERAGE PM AND PW *****
2140=*
2150= SØMC=SUMV=SPW=0.
2160= D0 12 I=1,N
2170= SØMC=SØMC+VCQM(I)*PM(I)
2180= SUMV=SUMV+VCQM(I)
2190= SPW=SPW+VCQM(I)*PW(I)
2200=12 CONTINUE
2210= APM=SØMC/SUMV $ APW=SPW/SUMV
2220=*
2230=***** ØUTPUT *****
2240=*
2250= PRINT 150, TIME, APM, APW
2260=150 FØRMAT(IHØ,* TIME =*1PE15.5/
2270= 1, 1X,*APM=*1PE15.5, 2X,*APW=*1PE15.5)
2280= PRINT 160, (DFL(I), FLM(I), FLN(I), DPM(I), I=1, N)
2290=160 FØRMAT(///IHØ, 12X,*DFL*, 12X,*FLM*, 12X,*FLN*, 12X,*DPM*/
2300= 1(1X, 1P4E15.5))
2310= PRINT 170, (DIST(I), C(I), PM(I), PW(I), I=1, N)
2320=170 FØRMAT(//IHØ, 11X,*DIST*, 14X,*CØ*, 13X,*PM*, 13X,*PW*/
2330= 1(1X, 1P4E15.5))
2340=*
2350=600 CONTINUE
2360=INDEX DC"1, 10"=DC("1, 10")
2370=SORT
2380=*
2390=***** INTEGRATIØN *****
2400=*
2410=INDEX C"1, 10"=INTGR(CI"1, 10", DC"1, 10")
2420=*
2430=*****
2440=*
2450=***** FINI SH-CØNDI TI ØN, TIME-VARIABLES, AND METHØD ØF
2460=* INTEGRATIØN
2470=*
2480= TEST=CLIM-CØ
2490=FINI SH TEST=0.
2500=METHØD RECT
2510=TIMER FINTI=300. , PRDEL=5., DELT=.01
2520=PRINT DELT, CLIM
2530=END
2540=STØP
2550=ENLJØB

```