ICA 1292 augustus 1981

Instituut voor Cultuurtechniek en Waterhuishouding
Wageningen

OPTIMALISERING LIGGING KNIKPUNTEN VAN TE VEREFFENEN POLYGOON DOOR GETALLENPAREN

ir. D. Boels en J. Buitendijk

I N H O U D

1. INLEIDING

Bij de berekening van de vochtretentiecurve uit meetgegevens wordt een polygoon berekend door een aantal getallenparen (BOELS en andere, 1978).

Bij het simuleren van het vochtgehalte of vochtspanningsverloop met een electrisch analogen, wordt de relatie tussen onverzadigde doorlatendheid en vochtgehalte als polygoon ingevoerd (WIND, 1979). De polygoon wordt daartoe in principe door gegeven getallenparen vereffend.

In beide genoemde gevallen gaat het om het vinden van de best aansluitende polygoon, bij gegeven aantal knikpunten. Het vinden van de optimale ligging van knikpunten, wordt in deze nota beschreven.

2. REKENSCHEMA VEREFFENING POLYGOON

2.1. Algemene oplossing

De getallenparen (y_i, x_i) worden naar op- of aflopende waarden van x gerangschikt. Vervolgens worden een aantal knikpunten van de polygoon gedefinieerd. De x-waarde in het i-de knikpunt wordt aangeduid met X_i. De grootte van het i-de interval is:

$$\Delta x_i = X_{i+1} - X_i \qquad (1)$$

Het k-de element in het i-de interval wordt aangeduid met respectievelijk $y_{k,i}$ en $x_{k,i}$. Het aantal elementen in interval i is l_i.

De algemene gedaante van een polygoon wordt beschreven met:

$$Y_i = Y_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j \, \Delta x_j \qquad ,i = 2,\ldots,n \qquad (2)$$

Hierin is Y_i de y-waarde in knikpunt i en Y_1 de y-waarde in het eerste knikpunt. De waarde a_j is de helling van de polygoon in interval j.

Nu dienen de waarden van a_j en Y_1 zodanig te worden bepaald dat de som van het kwadraat van het verschil tussen gegeven y-waarden en de y-waarden volgens de polygoon in het zelfde punt x, minimaal is.

Deze kwadraat som van deze afwijkingen in n- intervallen is:

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{1_i} \{(y_{k.i})_{gemeten} - y(_{k.i})_{polygoon}\}^2 \tag{3}$$

Hierin is:

$$(y_{k,i})_{polyg.} = \begin{cases} Y_i + a_i(_{k,i} - X_i) \\ Y_1 + \sum^{i-1} a_j\, \Delta x_j + a_i(x_{k.i} - X_i) \end{cases} \tag{4}$$

dus

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{1_i} [(y_{k,i})_{gem.} - \{Y_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j \Delta x_j + a_i(n_{k,i} - X_i)]^2 \tag{5}$$

De kwadraat som, S^2, is minimaal indien alle afgeleiden er van naar a en Y_1 gelijk aan 0 zijn:

$$\frac{\partial S^2}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{1_i} [y_{k,i} - \{Y_1 + \sum_{j=1} a_j \Delta x_j + a_i\, (x_{k,i} - X_i)\}]^2 = 0 \tag{6}$$

$$(m=1,\ldots,n)\frac{\partial S^2}{\partial a_m} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{1_i} \{[y_{k,i} - \{Y_1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j \Delta x_j + a_i\, (x_{k,i} - X_i)\}]$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial a_m} (\ldots)\} = 0 \tag{7}$$

Nw is:

voor $i < m$: $\frac{\partial}{\partial a_m} (\ldots) = 0$ (8)

$$\text{voor } i = m : \frac{\partial}{\partial a_m} (\ldots) = x_{k,i} - X_i \tag{9}$$

$$\text{voor } i > m : \frac{\partial}{\partial a_m} (\ldots) = \Delta x_m \tag{10}$$

We krijgen dus:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l_i} y_{k,i} - Y_l \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{l_i} \sum_{j=1}^{i-1} a_j \Delta x_j - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{l_i} (x_{k,i} - X_i) = 0 \tag{11}$$

$$(m=1,\ldots,n) \quad \sum_{k=1}^{l_m} y_{k,m} (x_{k,m} - X_m) - Y_l \sum_{k=1}^{l_m} (x_{k,m} - X_m) - \Big(\sum_{j=1}^{m-1} a_j \Delta x_j\Big) \sum_{k=1}^{l_m} (x_{k,m} - X_m) - a_m \sum_{k=1}^{l_m} (x_{k,m} - X_m)^2 + \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=i}^{l_i} y_{k,i} - \Delta x_m Y_l \sum_{i=m+1}^{n} l_i - \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{l_i} \sum_{j=1}^{i-1} a_j \Delta x_j - \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} a_i \sum_{k=1}^{l_i} (x_{k,i} - X_i) = 0 \tag{12}$$

Hiermee zijn n+1 vergelijkingen verkregen met n+1 onbekenden.

De coëfficiënten van de onbekenden a_m, $c_{p,m}$, zijn voor $m=1,\ldots,n$ en $p=1,\ldots,n$:

$$p < m, \quad c_{p,m} = \Delta x_p \Big\{ \sum_{k=1}^{l_m} (x_{k,m} - X_m) + \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} l_i \Big\} \tag{13}$$

$$p = m, \quad c_{m,m} = \sum_{k=1}^{l_m} (x_{k,m} - X_{m-1})^2 + \Delta x_m^{\,2} \sum_{i=m+1}^{n} l_i \tag{14}$$

$$p > m, \quad c_{p,m} = \Delta x_m \Big\{ \sum_{k=1}^{l_p} (x_{k,p} - X_p) + \Delta x_p \sum_{i=m+1}^{n} l_i \Big\} \tag{15}$$

De coëfficiënten van de onbekende a_m, $c_{p,m}$, voor $p=n+1$ en $m=1,\ldots,n$

$$m < n \quad c_{n+1,m} = \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} l_i + \overset{1}{\sum_{k=1}^{m}} (x_{k,m} - X_{m-1}) \tag{16}$$

$$m = n \quad c_{n+1,n} = \overset{1}{\sum_{k=1}^{n}} (x_{k,n} - X_{n-1}) \tag{17}$$

De coëfficiënten van de onbekende Y_1 zijn:
voor $m=n+1$ en $p=1,\ldots,n+1$:

$$p < n+1, \quad c_{p,n+1} = \overset{1}{\sum_{k=1}^{p}} (x_{k,m} - X_{m+1}) + \Delta x_m \sum_{i=p+1}^{n} l_i \tag{18}$$

$$p = n+1, \quad c_{n+1,n+1} = \sum_{i=1}^{n} l_i \tag{19}$$

De rechter leden van de vergelijkingen zijn:
voor $m=1,\ldots,n+1$

$$m < n+1 \;, \quad R_m = \overset{1}{\sum_{k=1}^{m}} y_{k,m} (x_{k,m} - X_{m-1}) + \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n} \overset{1}{\sum_{k=1}^{i}} y_{k,i} \tag{20}$$

$$m = n+1 \;, \quad R_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \overset{1}{\sum_{k=1}^{i}} y_{k,i} \tag{21}$$

De set vergelijkingen zijn nu voor te stellen door:

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \cdots c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \cdots c_{2,n} \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot & \cdot \quad\quad \cdot \\ c_{n+1,1} & c_{n+1,2} \cdots c_{n+1,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ a_n \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{1,n+1} \\ c_{2,n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{n+1,n+1} \end{pmatrix} Y_1 = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{n+1} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Voor de oplossing van de vergelijkingen (23), kan de zogenaamde driehoeks eliminatie methode volgens Stanton (1961) worden toegepast. Deze methode houdt in dat eerst de grootste coëfficiënt wordt bepaald. Vervolgens wordt de rij waarin deze coëfficiënt zich bevindt verwisseld met de eerste rij. De kolom waarin zich de grootste coëfficiënt bevindt wordt vervolgens verwisseld met de eerste kolom. In de rijen, volgend op de eerste rij, worden de eerste elementen van de kolom geelimineerd. Bij de volgende stap wordt de tweede rij aangeduid als 'eerste rij' en de tweede kolom als 'eerste kolom'. In deze kleinere matrix wordt weer de voornoemde procedure toegepast. De procedure wordt zovaak herhaald tot één vergelijking met één ongekende overblijft. Deze onbekende wordt opgelost en in de voorgaande vergelijking gesubstitueerd, waarna de volgende onbekende wordt opgelost, etc.

2.2. Oplossing bij gegeven Y_1 en eventueel ook Y_n

Indien in vergelijking 5, Y_1 bekend is, vervalt vergelijking 6, vergelijking 11 en vergelijking 21. In vergelijking 12 en 20 moet echter voor $y_{k,m}$ worden gesubstitueerd: $(y_{k,m} - Y_1)$.

Er worden nu n vergelijkingen met n onbekenden verkregen. Indien bijvoorbeeld ook nog het laatste punt, Y_n van de polygoon bekend is, kan een variabele a worden geëlimineerd uit vergelijking 2 bijvoorbeeld:

$$a_n = (Y_n - Y_1) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i \Delta x_i \qquad (24)$$

Hiermee worden n-1 vergelijkingen verkregen waaruit de variabelen a_i worden opgelost. De coëfficiënten (13 tot en met 15) luiden nu:

$$p < m \ , \ c_{p,m} = \Delta x_p \left[\overset{1}{\sum}{}_{k=1}^{m} (x_{k,m} - X_m) + \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n-1} 1_i + \Delta x_m \overset{1}{\sum}{}_{k=1}^{n} \left\{1 - \frac{(x_{k,n} - X_n)}{\Delta x_n}\right\}^2 \right] \qquad (25)$$

$$p = m \ , \ c_{p,m} = \overset{1}{\sum}{}_{k=1}^{m} (x_{k,m} - X_m)^2 + \Delta x_m^{\ 2} \sum_{i=m+1}^{n-1} 1_i + \Delta x_m^{\ 2} \overset{1}{\sum}{}_{k=1}^{n} \left\{1 - \frac{x_{k,n} - X_n}{\Delta x_n}\right\} \qquad (26)$$

$$p > m\ ,\ c_{p,m} = \Delta x_m \left[\sum_{k=1}^{l_p} (x_{k,p} - X_p) + \Delta x_p \left\{ \sum_{i=m+1}^{n-1} l_i + \sum_{k=1}^{l_n} \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(1 - \frac{x_{k,n} - X_n}{\Delta x_n}\right)\right\}\right] \qquad (27)$$

Vergelijking 20 gaat nu over in:

$$R_m = \sum_{k=1}^{l_m} (y_{k,m} - Y_l)(x_{k,m} - X_m) + \Delta x_m \sum_{i=m+1}^{n-1} \sum_{k=1}^{l_i} (y_{k,i} - Y_l) + \Delta x_m$$

$$\sum_{k=1}^{l_n} \left[y_{k,n} - Y_n \cdot \frac{x_{k,n} - X_n}{\Delta x_n} - Y_l \left(1 - \frac{x_{k,n} - X_n}{\Delta x_n}\right)\right] \left[1 - \frac{x_{k,n} - X_n}{\Delta x_n}\right] \qquad (28)$$

3. OPTIMALISEREN LIGGING KNIKPUNTEN

De ligging van knikpunten van een polygoon dient zodanig te zijn dat daardoor de kleinste kwadraatsom wordt verkregen van afwijkingen tussen gegeven of gemeten y-waarden en y-waarden volgens de polygoon. Er wordt aangenomen dat het begin- en eindpunt van de polygoon vast ligt (gegeven x-waarden).

Bij een polygoon met 3 knikpunten, dus 2 lijnstukken en m mogelijke ligging van knikpunten, zijn er m-2 mogelijke posities voor de ligging van het middenste knikpunt. Immers het eerste en laatste knikpunt liggen vast.

In het algemeen geldt dat bij n-lijnstukken en m mogelijke posities voor knikpunten er

$$(m-n) \left\{\frac{m - (n-1)}{2}\right\}^{n-2}$$

[mogelijke combinaties van knikpunten zijn], de eerste en laatste niet inbegrepen.

Het algemeen probleem is nu die combinaties van knikpunten te vinden waarbij een nader te definieren optimaliseringsparameter minimaal is.

Loney (1972) heeft een oplossingsmethode ontwikkeld waarbij in elk denkbaar interval een optimaliseringsparameter wordt bepaald. Het voornoemd algemeen probleem is door hem getransformeerd in het vinden van die knikpunten waarbij de som van de optimaliseringsparameter in de afzonderlijke intervallen minimaal is. Voorwaarde voor de bruikbaarheid van de oplossingsmethode van Loney is echter dat de optimaliseringsparameters in elk interval onafhankelijk zijn van die in de overige intervallen. Hieraan is echter bij de vereffening van een polygoon niet voldaan, zodat deze oplossing voor dit probleem niet bruikbaar is.

Er is daarom gekozen voor het berekenen van de kwadraatsommen van de genoemde afwijkingen in y-waarden voor een aantal denkbare combinaties van posities van knikpunten.

Om te voorkomen dat de reken tijd te groot wordt, is het aantal mogelijke posities van knikpunten beperkt.

Bij een vastgesteld aantal mogelijke posities van de knikpunten, worden de interval grenzen zo gekozen dat in elk interval een nagenoeg gelijk aantal getallenparen (x, y) voorkomen.

Gedurende de rekenprocedure wordt een tabel bijgehouden waarin per rekenronde wordt bijgehouden: de positie van de knikpunten, de helling van de polygoon in de verschillende intervallen en de optimaliseringsparameter (kwadratensom van afwijkingen).

Na dat voor alle mogelijke combinaties de optimaliseringsparameter is berekend wordt de kleinste waarde gezocht. De bijbehorende ligging van knikpunten en hellingen van de polygoon, levert de gevraagde optimale oplossing.

4. VOORBEELD VAN PROGRAMMA EN REKENTIJDEN

Het nu operationele programma is specifiek gericht voor gebruik bij het model ELAN. Een van de invoergegevens van dit model is de relatie tussen het vochtgehalte (Θ) en de doorlatendheid (k). Dit verband moet eerst worden afgeleid uit de relaties tussen het vochtgehalte en de vochtspanning (Ψ) en tussen de doorlatendheid en de vochtspanning.

Deze procedure verloopt als volgt:

Het programma leest in een file een aantal getallenparen die het verband tussen Ψ en Θ aangeven.

Met op te geven intervallen van Θ wordt via interpolatie de bijbehorende Ψ-waarde berekend.

Met behulp van de functie

$$K = K_{\emptyset} \cdot e^{-\alpha\Psi} \qquad \text{Rijtema (1967)}$$

wordt de bij die Ψ behorende k-waarde berekend en in een tabel gezet. Deze tabel wordt elders in het programma gebruikt.

4.1. Gebruik van het programma

Na het aanroepen van het programma wordt via het beeldscherm verschillende gegevens gevraagd:

-1- De naam van de file waarop zich de gegevens van Ψ en Θ bevinden. Deze file bestaat uit een aantal records waarop per record eerst een waarde van Θ (in $^{o}/oo$) staat en daarachter de bijbehorende waarde van Ψ in cm w.k.
De waarden van Θ lopen van laag naar hoog. Het maximaal aantal records is momenteel 40, maar dat kan op eenvoudige wijze worden veranderd.

-2- De $K_{\emptyset}$ (in cm.dag^{-1}) en α uit de "Rijtema" functie.

-3- Het maximale vochtgehalte van de grond (in $^{o}/oo$).

-4- Het vochtgehalte waarbij de doorlatendheid van de grond gelijk aan $\emptyset$ wordt gemaakt. (Door de exponentiele functie zal bij toenemende Ψ de waarde van k naar $\emptyset$ naderen. Om practische redenen wordt bij een bepaalde waarde van Θ de k aan $\emptyset$ gelijkgesteld.)

-5- Het interval van Θ (in $^{o}/oo$) waarmee de bijbehorende k wordt uitgerekend.

Als resultaat van de daaropvolgende berekening verschijnt op het beeldscherm de 4 punten van de polygoon.

1. het eerste gegeven punt ($K_{\emptyset}$ en het maximale vochtgehalte);
2. het eerste berekende punt en de eerste helling;

3. het tweede berekende punt en de tweede helling;
4. het tweede gegeven punt (K=0 en het minimale vochtgehalte en de derde helling).

4.2. Voorbeeld van een berekening

4.2.1. Invoergegevens

Figuur 1 geeft het verband tussen het vochtgehalte en de vochtspanning van een grond.

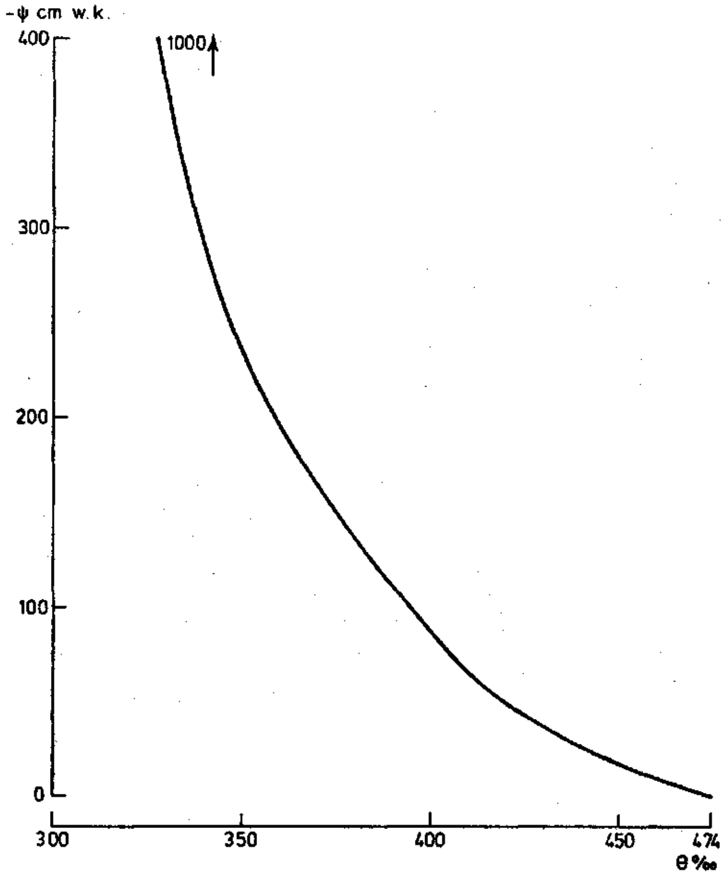

Fig. 1. Samenhang tussen vochtspanning (Ψ) en vochtgehalte (Θ)

Tabel 1 geeft de curve van fig. 1 weer in een gediskretiseerde vorm. In deze vorm worden de gegevens in het programma gebrukt.

Tabel 1. Verband tussen vochtspanning Ψ (cm H_2O) en vochtgehalte Θ ($^o/oo$)

Θ	Ψ	Θ	Ψ	Θ	Ψ
300	1000	380	138	430	37
330	375	385	124	435	32
335	335	390	112	440	27
340	287	395	99	445	22
345	260	400	88	450	18
350	234	405	76	455	14
355	215	410	66	460	10
360	195	415	57	465	6
365	180	420	49	470	3
370	166	425	43	474	0
375	152				

In dit voorbeeld is $K_{\emptyset}$: 0,495 $cm.dag^{-1}$ en α : 0,0107.

Het met behulp van deze gegevens verkregen verband tussen het vochtgehalte en doorlatendheid is weergegeven in fig. 2.

Het maximale vochtgehalte is volgens tabel 1 474^o/oo. Bij een vochtgehalte van 300^o/oo is de doorlatenheid 1,11 x 10^{-5} $cm.dag^{-1}$. Dit punt is aangehouden als het minimum vochtgehalte. Volgens figuur 1 is de bijbehorende vochtspanning 1000 cm w.k.

Het interval van Θ waarbij de k wordt berekend is gesteld op 3^o/oo.

Het aantal Θ-K paren wordt nu ((474 - 300)/3) + 1 = 59. De uitvoer van het programma wordt als volgt:

Tabel 2. Uitvoer programma naar scherm

Knikpunt	Θ	K	Helling
1	474	0,495	
2	...	.....	
3	...	.....	
4	300	0,0	

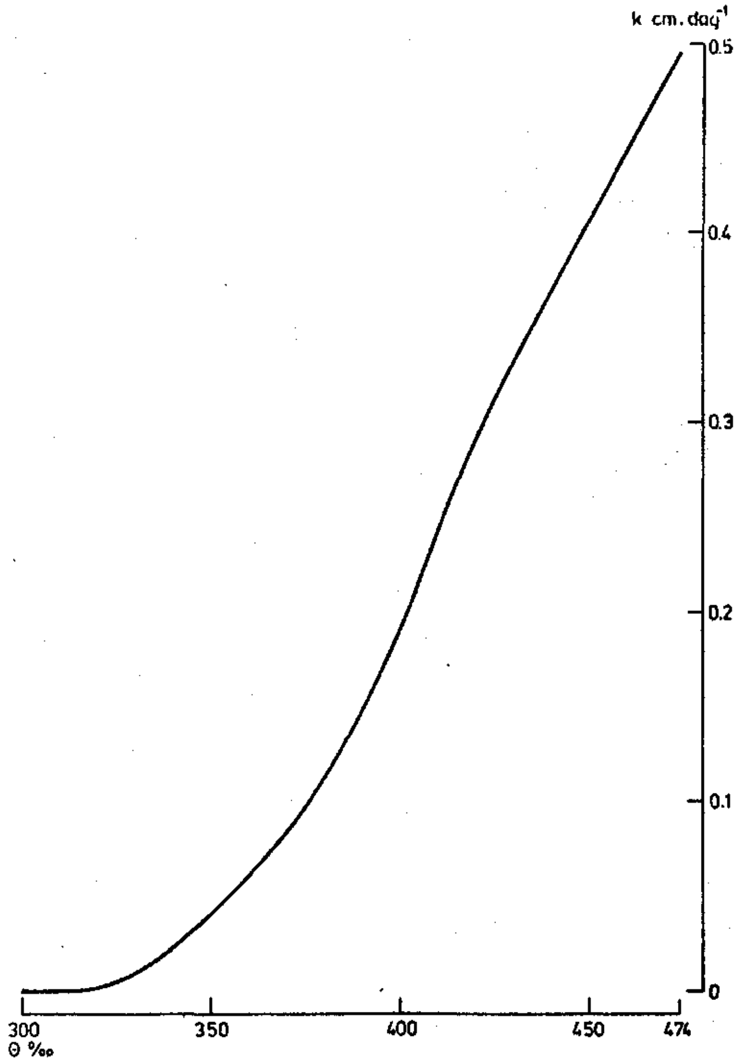

Fig. 2. Samenhang tussen vochtgehalte (Θ) en onverzadigde doorlatendheid (k)

Om de berekende curve te vergelijken met de oorspronkelijke zijn beide curven in een figuur weergegeven (fig. 3).

4.3. Benodigde rekentijd

De nauwkeurigheid van het uiteindelijke resultaat wordt beïnvloed door 2 factoren namelijk:

a- het aantal mogelijke liggingen van de knikpunt,
b- het aantal ingevoerde K.Θ paren.

Voor wijzigingen onder a moeten in het programma een aantal eenvoudige wijzigingen worden aangebracht.

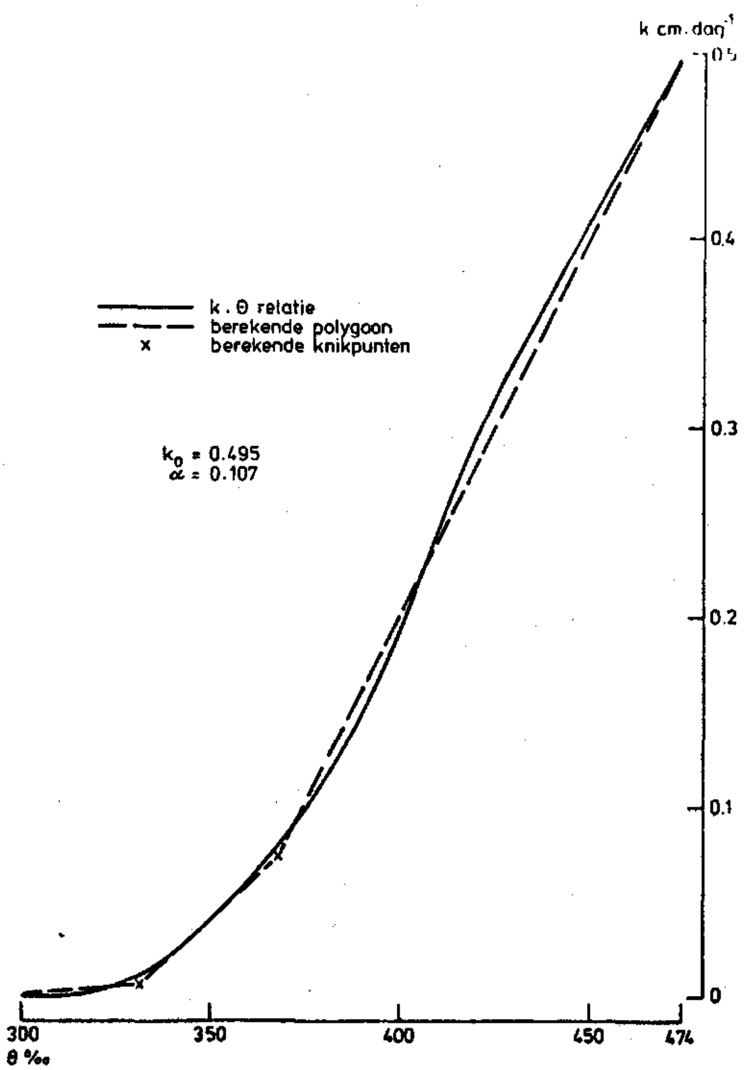

Fig. 3. Berekende polygoon door k-Θ relatie. *- berekend knikpunt

Uitbreiding van het aantal K.Θ paren is mogelijk door verkleining van het interval (vraag 5).

De twee feactoren beïnvloeden de rekentijd niet in gelijke mate. Vergroting van het aantal K.Θ paren heeft een rechtevenredig verband met de rekentijd. Bij vergroting van het aantal mogelijke liggingen van de knikpunten is dit verband kwadratisch (fig. 4).

Aangezien de berekening op een kleine computer plaats vindt is het zinvol om te onderzoeken of een veel tijd vragende berekening ook in een nauwkeuriger berekening resulteerd.

Daarvoor zijn een aantal berekeningen uitgevoerd met 59, 88 en 117 K.Θ paren bij 10 en 20 mogelijke liggingen van de knikpunten.

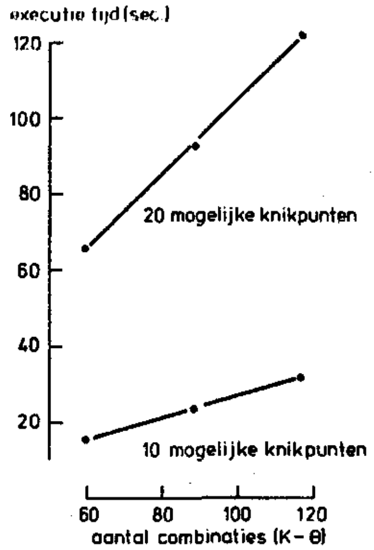

Fig. 4. Invloed aantal knikpunten en aantal combinaties K-θ op rekentijd

Tabel 3. Berekende coördinaten van knikpunten en van een polygoon (begin- en eindpunten liggen vast)

Aantal getallenparen k-Θ	59		88		117	
aantal mogelijke knikpunten	10	20	10	20	10	20
knikpunt 1 Θ	300	300	300	300	300	300
k	0	0	0	0	0	0
knikpunt 2 Θ	331,5	331,5	331,0	331,0	332,3	331
k	0,006	0,006	0,006	0,004	0,007	0,006
knikpunt 3 Θ	367,5	367,5	367	371,0	367	367
k	0,073	0,073	0,071	0,085	0,07	0,070
knikpunt 4 Θ	474	474	474	474	474	474
k	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495

Tabel 3 geeft het resultaat van deze vergelijkingen. Uit deze tabel blijkt dat de verschillen die optreden zo klein zijn dat niet nodig is veel mogelijke liggingen van de knikpunten te verlangen. Berekening A2 geeft nagenoeg hetzelfde resultaat als B3, terwijl de rekentijd respectievelijk 24 en 122 seconden is.

LITERATUUR

BOELS, D., J.B.H.M. VAN GILS, G.J. VEERMAN AND K.E. WIT, 1978. Theory and system of automatic determination of soil moisture characteristics and unsaturated hydraulic conductivities. Soil Sci. 126,4:191-199

LONEY, S.T., 1972. A dynamic programming algorithm for load duration curve futting. In: Lootsma F.A. (ed.) Numerical methods for non linear optimization (439 p.) Academic Press London/New York

RIJTEMA, P.E., 1965. An analysis of actual evapotranspiration. Agr. Res. Rep. 659, 1-107 Pudoc, Wageningen

STANTON, R.G., 1961. Numerical Methods for Science and Engineering (266 p.). Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, New Yersey

WIND, G.P., 1979. Analog modelling of transient moisture flow in unsaturated soil. Centre for Agricultural Publishing and Documentation (Pudoc), Wageningen

```
      PROGRAM POLYGN
C
C
      DOUBLE PRECISION OPTPAR,PAR1,PAR2
      DIMENSION TEKNIK(11),COKNIK(11),VOCHT(11)
      INTEGER ELEM(10)
C
      COMMON OPTPAR(10,10),TETA(200),COND(200),PSI(200),TETA1,
     *TETA2,TETA3,Y0,DELT1,DELT2,DELT3,HELL1(10,10),HELL2(10,10),
     *HELL3(10,10),L1,L2,L3,NUMCOM
C
      DATA INTVAL/10/
C
      CALL KTETA
C
      TYPE *,' NUMCOM=',NUMCOM
      Y0=COND(1)
    5 NUM=NUMCOM/INTVAL
      IF(NUM.GE.2) GO TO 10
      INTVAL=INTVAL-1
      IF(INTVAL.LT.3) STOP ' INTVAL KLEINER DAN 3 !'
      GO TO 5
   10 IDELT=NUMCOM-INTVAL*NUM
      I1=1
      I2=IDELT
      NUM=NUM+1
   15 DO 20 I=I1,I2
      ELEM(I)=NUM
   20 CONTINUE
      NUM=NUM-1
      I1=I2+1
      I2=INTVAL
      IF(I1.LE.INTVAL) GO TO 15
C
      TEKNIK(1)=TETA(1)
      TEKNIK(INTVAL+1)=TETA(NUMCOM)
C
      I1=2
      I2=INTVAL
      ISUM=0
      DO 25 I=I1,I2
      ISUM=ISUM+ELEM(I-1)
      TEKNIK(I)=(TETA(ISUM)+TETA(ISUM+1))/2.
   25 CONTINUE
C
C
C
C
      TETA1=TETA(1)
      I1=2
      I2=INTVAL-1
      J2=INTVAL
      DO 50 I=I1,I2
      DELT1=TEKNIK(I)-TEKNIK(1)
```

```
      TETA2=TEKNIK(I)
      L1=0
      I3=I-1
      DO 30 K=1,I3
      L1=L1+ELEM(K)
   30 CONTINUE
      J1=I+1
      DO 45 J=J1,J2
      DELT2=TEKNIK(J)-TEKNIK(I)
      DELT3=TEKNIK(INTVAL+1)-TEKNIK(J)
      I4=J-1
      TETA3=TEKNIK(J)
      L2=L1
      DO 35 K=I,I4
      L2=L2+ELEM(K)
   35 CONTINUE
      L3=L2
      DO 40 K=J,INTVAL
      L3=L3+ELEM(K)
   40 CONTINUE
C
      CALL LOONEY(I,J)
   45 CONTINUE
   50 CONTINUE
C
C
      I1=2
      I2=INTVAL-1
      J2=INTVAL
      IE=I1
      JE=J2
      PAR1=OPTPAR(IE,JE)
C
      DO 60 I=I1,I2
      J1=I+1
      DO 55 J=J1,J2
      PAR2=OPTPAR(I,J)
      IF(PAR1.LE.PAR2) GO TO 55
      PAR1=PAR2
      IE=I
      JE=J
   55 CONTINUE
   60 CONTINUE
C
      COKNIK(1)=COND(1)
      VOCHT(1) =TETA(1)
      COKNIK(2)=COKNIK(1)+HELL1(IE,JE)*(TEKNIK(IE)-VOCHT(1))
      VOCHT(2) =TEKNIK(IE)
      VOCHT(3) =TEKNIK(JE)
      VOCHT(4) =TETA(NUMCOM)
      COKNIK(3)=COKNIK(2)+HELL2(IE,JE)*(TEKNIK(JE)-VOCHT(2))
      COKNIK(4)=COND(NUMCOM)
C
      TYPE 100
```

```
  100 FORMAT(' NR. KNIKPUNT VOCHTGEH.(%) DOORL.HEID HELLING')
      DO 65 I=1,4
      TYPE 101, I,VOCHT(I)/10.,COKNIK(I)
  101 FORMAT(8X,I2,F13.1,4X,F8.4)
      GO TO (1,2,3) I
      GO TO 65
    1 TYPE 102,HELL1(IE,JE)*10.
      GO TO 65
    2 TYPE 102,HELL2(IE,JE)*10.
      GO TO 65
    3 TYPE 102,HELL3(IE,JE)*10.
   65 CONTINUE
  102 FORMAT(' ',T38,F12.10)
C
      CALL EXIT
      END
```

```
      SUBROUTINE KTETA
C
C
C
C
C
      BYTE FILNAM(14)
      DOUBLE PRECISION OPTPAR
      DIMENSION THETAT(40),FPSIT(40)
      COMMON OPTPAR(10,10),TETA(200),COND(200),PSI(200),TETA1,
     *TETA2,TETA3,Y0,DELT1,DELT2,DELT3,HELL1(10,10),HELL2(10,10),
     *HELL3(10,10),L1,L2,L3,NUMCOM
C
      CALL CLEAR
C
    1 TYPE 100
  100 FORMAT(' FILENAAM MET PSI - THETA GEGEVENS ? ',$)
      ACCEPT 200, FILNAM
  200 FORMAT(14A1)
C
      OPEN(UNIT=10,NAME=FILNAM,TYPE='OLD',ACCESS='SEQUENTIAL',ERR=1)
      DO 2 ITEL = 1,40
    2 READ (10,*,END=3) THETAT(ITEL),FPSIT(ITEL)
    3 MAXT=ITEL-1
      CLOSE (UNIT=10)
C
      TYPE 101
  101 FORMAT('OKO (CM.) EN ALPHA UIT  "RYTEMA" FUNCTIE ? ',$)
      ACCEPT *, FKO, ALPHA
      TYPE 102
  102 FORMAT('OMAXIMAAL VOCHTGEHALTE (PROMILLE) VAN DEZE GROND ? ',$)
      ACCEPT *, MMAX
      TYPE 103
  103 FORMAT('OVOCHTGEHALTE (PROMILLE) WAARBIJ K=0 WORDT VERONDERSTEL
     * ? ',$)
      ACCEPT *, MMIN
      TYPE 104
  104 FORMAT('OINTERVAL (PROMILLE) WAARMEE DE BIJ HET VOCHTGEHALTE'/'
     * BEHORENDE K-WAARDE MOET WORDEN UITGEREKEND ? ',$)
      ACCEPT *, ISTEP
C
      L=0
      DO 35 KK=MMAX,MMIN,-ISTEP
      L=L+1
        DO 10 J=1,MAXT
          J2=J+1
          T=KK
          IF(T.LT.0)         GO TO 25
          IF(T.GE.THETAT(MAXT)) GO TO 20
          IF(THETAT(J).LE.T.AND.
     *       THETAT(J2).GT.T) GO TO 15
   10   CONTINUE
C
   15   T=((T-THETAT(J))/(THETAT(J2)-THETAT(J)))*
```

```
0001          SUBROUTINE LODNEY(I,J)
        C
        C
        C
0002          DOUBLE PRECISION OPTPAR,T1,T2,T3,T4,T5,T6,T7,T8
             *,A11,A12,RHS1,A21,A22,RHS2
0003          COMMON OPTPAR(10,10),TETA(200),COND(200),PSI(200),TETA1,
             *TETA2,TETA3,Y0,DELT1,DELT2,DELT3,HELL1(10,10),HELL2(10,10),
             *HELL3(10,10),L1,L2,L3,NUMCOM
        C
0004          T1=0D0
0005          T2=0D0
0006          T3=0D0
0007          T4=0D0
0008          T5=0D0
0009          T6=0D0
0010          T7=0D0
0011          T8=0D0
        C
0012          I1=1
0013          I2=L1
        C
0014          DO 10 K=I1,I2
0015          TET=TETA(K)-TETA1
0016          YDEL=COND(K)-Y0
0017          T1=T1+TET*YDEL
0018          T2=T2+TET**2
0019       10 CONTINUE
        C
0020          I1=I2+1
0021          I2=L2
        C
0022          DO 20 K=I1,I2
0023          TET=TETA(K)-TETA2
0024          YDEL=COND(K)-Y0
0025          T3=T3+YDEL
0026          T4=T4+TET
0027          T5=T5+TET*YDEL
0028          T6=T6+TET**2
0029       20 CONTINUE
        C
0030          I1=I2+1
0031          I2=NUMCOM
        C
0032          DO 30 K=I1,I2
0033          TET=1.-(TETA(K)-TETA3)/DELT3
0034          T7=T7+TET**2
0035          T8=T8+COND(K)*TET
0036       30 CONTINUE
        C
0037          A11=T2+(L2-L1+T7)*DELT1**2
0038          A12=DELT1*T4+DELT1*DELT2*T7
0039          RHS1=T1+DELT1*(T3+T8-Y0*T7)
0040          A21=A12
```

```
             1    (FPSIT(J2)-FPSIT(J))+FPSIT(J)
0042              IPSI=T+0.5
0043              GO TO 30
0044        20    IPSI=FPSIT(MAXT)
0045              GO TO 30
0046        25    IPSI=FPSIT(1)
0047        30 COND(L)=FKO*EXP(-ALPHA*IPSI)
0048           PSI(L)=IPSI
0049           TETA(L)=KK
0050        35 CONTINUE
      C
0051           NUMCOM=((MMAX-MMIN)/ISTEP)+1
      C
0052           RETURN
0053           END
```

```
0041          A22=T6+(DELT2**2)*T7
0042          RHS2=T5+DELT2*(T8-Y0*T7)
0043          HELL2(I,J)=(RHS1/A11-RHS2/A12)/(A12/A11-A22/A21)
0044          HELL1(I,J)=(RHS1-A12*HELL2(I,J))/A11
0045          HELL3(I,J)=(-Y0-HELL1(I,J)*DELT1-HELL2(I,J)*DELT2)/DELT3
0046          OPTPAR(I,J)=0.
0047          I1=1
0048          I2=L1
        C
0049          DO 50 K=1,3
0050          IF(K.EQ.1) VERSCH=TETA1
0052          IF(K.EQ.2) VERSCH=TETA2
0054          IF(K.EQ.3) VERSCH=TETA3
0056          IF(K.EQ.1) Y1=Y0
0058          IF(K.EQ.2) Y1=Y1+HELL1(I,J)*DELT1
0060          IF(K.EQ.3) Y1=Y1+HELL2(I,J)*DELT2
0062          IF(K.EQ.1) HELL=HELL1(I,J)
0064          IF(K.EQ.2) HELL=HELL2(I,J)
0066          IF(K.EQ.3) HELL=HELL3(I,J)
0068          IF(K.EQ.2) I1=I2+1
0070          IF(K.EQ.2) I2=L2
0072          IF(K.EQ.3) I1=I2+1
0074          IF(K.EQ.3) I2=NUMCOM
        C
0076          DO 40 L=I1,I2
0077          YDEL=COND(L)-(TETA(L)-VERSCH)*HELL-Y1
0078          OPTPAR(I,J)=OPTPAR(I,J)+YDEL**2
0079       40 CONTINUE
0080       50 CONTINUE
0081          RETURN
0082          END
```