Теория гравитации

УДК 524.827+531.51+530.12

Олейник В. П.

О ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЕ ГРАВИТАЦИИ

Институт высоких технологий
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко
ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина
e-mail: valoleinik@gmail.com

Согласно результатам исследований, выполненных в наших предыдущих работах, ускоренные движения частиц по инерции приводят к появлению силы притяжения между частицами. В данной работе из концепции ускоренных движений по инерции выведены обычные законы свободного падения небольшого пробного тела на поверхность массивного. Найдено, таким образом, простое физическое объяснение явления гравитации, не использующее гипотезу о существовании особого силового поля как свойства, внутренне присущего частицам вещества, а также не использующее понятие гравитационной массы и принцип эквивалентности инертной и гравитационной масс. Полученные результаты позволяют заключить, что **физическая природа гравитации раскрыта: причиной гравитации являются ускоренные движения частиц по инерции. Заложен фундамент теории тяготения как физической теории**.

Ньютоновская теория гравитации является приближенной, феноменологической теорией, справедливой лишь при выполнении определенных условий. Установлен физический смысл гравитационной постоянной γ. Численная оценка величины γ по полученной в работе формуле хорошо согласуется с данными наблюдений. Согласно результатам наблюдений, проведенных в разные годы, величина γ со временем изменяется. Это объясняется тем, что γ — не фундаментальная константа, а величина, зависящая от параметров движения небесных тел, которые с течением времени испытывают небольшие флуктуации.

Произвольное движение классической частицы является линейной комбинацией двух движений: ускоренного движения по инерции $D_{инерц}$, происходящего без каких-либо затрат энергии, и вынужденного движения $D_{вынужд}$, происходящего под действием внешней силы. Суперпозиция сил, порождаемых в многочастичных системах ускоренными движениями по инерции, приводит к появлению особого силового поля, которое играет роль физической среды, неотделимой от частиц. Знание механизма образования указанной среды позволяет описать ее физические свойства и исследовать ее поведение и взаимодействие с порождающими ее частицами.

Из несчетного множества движений, описываемых линейной комбинацией движений $D_{инерц}$ и $D_{вынужд}$, в механике Ньютона учитывается единственное движение — $D_{вынужд}$. Вне поля зрения механики лежит, таким образом, континуум движений — такова степень неполноты ньютоновской схемы механики как метода исследования природы.

Установлен вид уравнения движения, описывающего возмущение физической системы, находящейся в состоянии ускоренного движения по инерции, под действием внешней силы. Показано, что различные системы координат как анализаторы движения не вполне физически эквивалентны в отношении ускоренных движений по инерции. Это обусловлено тем, что физическое содержание понятия степени свободы частицы оказывается различным в различных координатных системах.

Ключевые слова: ускоренные движения частиц по инерции, законы свободного падения, физическая природа гравитации, физический смысл гравитационной постоянной, степень неполноты ньютоновской схемы механики, физическая неэквивалентность систем координат.

«Притягивание» представляет собой неподходящее выражение, правильнее сказать, что планеты сами стремятся к Солнцу ([1], с. 105).

Гегель

1. Введение

Ньютоновская теория гравитации основывается на гипотезе, что каждое тело (или частица, обладающая массой) порождает в окружающем пространстве особое силовое поле, называемое гравитационным полем, благодаря которому между любыми двумя телами действует сила притяжения, подчиняющаяся закону всемирного тяготения. Сущность этой гипотезы состоит в том, что способность порождать гравитационное поле рассматривается как свойство, внутренне присущее по самой природе вещей каждой частице, обладающей массой. Несмотря на усилия огромной армии исследователей, пытавшихся установить физическую природу гравитации, физическая причина тяготения остается неизвестной. Как отмечает Р. Фейнман, «… со времени Ньютона и до наших дней никто не мог описать механизм, скрытый за законом тяготения» [2].

Современной теорией гравитации является общая теория относительности (ОТО), которая представляет собой, в сущности, развитие ньютоновской теории и ее обобщение с учетом принципов релятивизма. Согласно ОТО, причиной гравитации является искривление 4-пространства-времени. К сожалению, ОТО носит формально-математический характер и не имеет надежного экспериментального обоснования. В частности, как подчеркивает А. З. Петров (см. предисловие редактора перевода в [3]), отсутствует экспериментальная проверка основного положения теории, согласно которому поле гравитации отождествляется с пространственно-временным континуумом, и не существует опытных измерений основных величин теории, например, энергии поля тяготения. Кроме того, не получил подтверждения ряд предсказаний ОТО. Так, кончились неудачей многочисленные попытки зарегистрировать опытным путем предсказанные ОТО гравитационные волны, несмотря на использование в экспериментах точнейшей измерительной техники. Поэтому вряд ли можно утверждать, что ОТО раскрывает тайну гравитации как физического явления. Вопрос о физической природе гравитации остается открытым.

В работе [4] на основе классической механики доказано существование особого вида движения — вращательного движения частиц по инерции. Его особенность состоит в том, что оно порождает силу взаимодействия между частицами, обладающими массой. Эти результаты обобщены в [5] на широкий класс ускоренных движений частиц. При выполнении определенных условий движения частиц по криволинейным траекториям происходят свободно, без принуждения со стороны внешних сил, в отсутствие каких-либо энергетических затрат, т. е. по инерции. Ускоренные движения по инерции выпали из поля зрения ньютоновской схемы механики [5,6], и, вследствие этого, классическая механика оказалась неспособной раскрыть физическую природу гравитации и объяснить многие физические явления и процессы [7].

В данной работе рассмотрены наиболее важные особенности ускоренных движений по инерции и показано, что указанные движения не только порождают силы притяжения между телами, но и вызывают свободное падение небольших пробных тел на поверхность массивных тел. Это значит, что **физическая природа гравитации установлена: причиной тяготения являются ускоренные движения тел по инерции.**

Установлен также физический смысл гравитационной постоянной γ: это сохраняющаяся величина — интеграл вращательного движения двух точечных частиц по инерции. Численная оценка величины γ по полученной нами формуле хорошо согласуется с данными наблюдений [8]. Согласно результатам наблюдений, проведенных в разные годы, величина γ со временем изменяется (изменения касаются уже пятой значащей цифры). Это объясняется тем, что γ — не фундаментальная константа, а величина, зависящая от параметров движения небесных тел, которые с течением времени испытывают небольшие флуктуации.

В развиваемой теории центральное место принадлежит ускоренным движениям по инерции. Чтобы уяснить, почему возникают такого рода движения и какова физическая природа силы, действующей на частицу при ее ускоренном движении по инерции, обратимся к принятому в классической механике определению силы [9,10] и покажем, что из него вытекает с необходимостью существование ускоренных движений по инерции.

Согласно этому определению, на точечную частицу массы m, положение которой на траектории движения характеризуется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, действует сила

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt\,, \tag{1}$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{p}$ — импульс частицы. В дальнейшем используется нерелятивистское выражение

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}\,, \tag{1a}$$

справедливое при условии, что скорость частицы v мала по сравнению со скоростью света в вакууме.

В механике Ньютона предполагается, что сила $\vec{F}$, определенная формулой (1а), — это сила, действующая на частицу со стороны окружения, т. е. внешняя сила (обозначим внешнюю силу через $\vec{F}_{ext}$). Следует подчеркнуть, что в общепринятой схеме механики не существует других сил, действующих на частицу, кроме внешних сил. Если в равенстве (1а) положить $\vec{F} = \vec{F}_{ext}$, то это равенство становится уравнением движения классической механики, определяющим движение частицы, подвергнутой действию внешней (вынуждающей) силы $\vec{F}_{ext}$. В таком подходе сила является причиной ускоренного движения частицы, она принуждает частицу двигаться определенным образом, т. е. движение является **вынужденным**.

Посмотрим, однако, на равенство (1а) с иной точки зрения. Поставим задачу: **найти такое движение частицы по криволинейной траектории, при котором действующая на частицу сила (1а) не совершает работы при любом перемещении частицы**. В такой постановке задачи сила $\vec{F}$, определенная формулой (1а), оказывается не причиной ускоренного движения частицы, как в уравнении движения, а его следствием. **Сила перестает быть вынуждающей, она не принуждает частицу двигаться, а сопутствует ее движению; частица движется свободно, без принуждения и без затрат энергии, т. е. по инерции**.

Возникает вопрос: Насколько корректна указанная постановка задачи, которая радикально изменяет принятую в механике Ньютона физическую трактовку движения? Возникают, однако, и встречные вопросы: Откуда следует, что если частица движется ускоренно, то такое движение должно быть обусловлено только действием внешней силы? Почему нужно запрещать движения, в которых не сила выступает причиной ускорения, а наоборот — ускоренное движение является причиной возникновения силы?

Как видно из результатов работ [4-7], сформулированная выше задача имеет нетривиальные решения, а именно: существует огромный класс движений, представляющих собой ускоренные движения частицы по инерции; в такого рода движениях сила не является причиной ускорения, она лишь сопутствует ускоренному движению. Это означает, что указанная выше постановка задачи вполне корректна и что какие-либо запреты на ускоренные движения по инерции не обоснованы.

На основании изложенного можно сделать вывод, что в природе возможны как движения частиц, в которых сила $\vec{F}$ в (1а) выступает в качестве внешней силы и служит причиной ускорения, так и движения, в которых сила порождается ускорением, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение. Следовательно, произвольное движение D тела (частицы) может быть представлено в виде суперпозиции ускоренного движения по инерции $D_{инерц}$, происходящего без каких-либо энергетических затрат, и вынужденного движения $D_{вынужд}$, происходящего под действием внешней силы, совершающей работу по перемещению частицы:

$$D = c_1 D_{инерц} + c_2 D_{вынужд}\,,$$

где c_1 и c_2 — произвольные коэффициенты, $c_1 + c_2 = 1$. Равномерное и прямолинейное движение по инерции можно рассматривать как предельный случай вынужденных движений при $\vec{F}_{ext} \to 0$ и поэтому это движение можно включить в множество движений $D_{вынужд}$. Если на числовой оси откладывать движения D, то ньютоновской схеме механики отвечает единственная точка числовой оси $D = D_{вынужд}$ ($c_1 = 0,\ c_2 = 1$). Значит, из несчетного множества движений, отвечающих области $0 \le c_1 \le 1$, при фиксированных движениях $D_{инерц}$ и $D_{вынужд}$, в механике Ньютона учитывается единственное движение с $c_1 = 0$. Отметим, что движения $D_{инерц}$ естественно назвать кинематическими, как движения, происходящие по инерции, а движения $D_{вынужд}$ — динамическими, как движения, происходящие с затратами энергии.

Какова же роль движений $D_{инерц}$, выпавших из поля зрения механики Ньютона, в физических процессах? Движения частиц $D_{инерц}$ сопровождаются появлением сил, которые, действуя на частицы, не производят работы по их перемещению. В многочастичной системе эти силы, порождаемые частицами, налагаются друг на друга, и возникает особое силовое поле, имеющее вихревой характер. Тем самым создается непрерывно изменяющаяся в пространстве и во времени физическая среда, неотделимая от породивших ее частиц. Эта среда порождается движущимися ускоренно по инерции частицами и, в свою очередь, оказывает влияние на частицы вследствие наличия обратной связи, возникающей из-за движения частиц. Таким образом, движения, исключенные из рассмотрения в ньютоновской схеме механики, порождают физическую среду, играющую двойственную роль — арены, на которой происходят физические процессы, и переносчика (носителя) взаимодействия между частицами. Аналогичную роль играет физический вакуум в квантовой электродинамике (см., напр. [11]) и эфир, широко обсуждавшийся физиками XIX века [12]. Однако физический вакуум и эфир вряд ли имеют какое-либо отношение к нашей среде, т. к. при построении и физического вакуума, и эфира никак не учитываются ускоренные движения частиц по инерции. Подчеркнем, что, зная физический механизм образования эфира, можно описать его физические свойства и исследовать его поведение и взаимодействие с частицами (с веществом).

Движения $D_{инерц}$ и $D_{вынужд}$ представляют собой, очевидно, диалектические составляющие движения D (диалектические противоположности). На основании законов диалектики можно утверждать, что теория движения материальных тел может быть адекватной физической реальности только при условии, что обе составляющие движения учитываются в теории на равных основаниях. Становится понятно, почему физическая природа гравитации не раскрыта до сих пор. Исключив из рассмотрения ускоренные движенияи тел по инерции, механика Ньютона и ОТО неспособны в принципе объяснить гравитацию как физическое явление.

Сущность ньютоновской схемы механики состоит в том, что она ограничивается описанием движений, происходящих под действием внешних (вынуждающих) сил и имеющих принудительный, насильственный характер. Производя работу по перемещению частиц, внешние силы искажают движение. Но мир невозможно объяснить, ограничиваясь лишь принудительным аспектом движения. Учитывая ускоренные движения по инерции, мы выходим за рамки механики Ньютона и вступаем в terra incognita — необъятный и неизвестный мир движений, порождающих особые силы взаимодействия между частицами, качественно отличающиеся от внешних сил. Эти силы сопутствуют порождающим их ускоренным движениям, не внося в них искажений; они ответственны за явление гравитации и способны создавать внутренние структуры в многочастичных системах, творя все разнообразие окружающего нас мира — атомы, молекулы, кристаллы, планетные системы, галактики (см.[6]).

Перечислим основные результаты, изложенные в последующих разделах работы.

В разделе 2 на простейших моделях обсуждаются особенности ускоренных движений по инерции. Получено общее выражение для силы взаимодействия между двумя частицами в произвольной замкнутой многочастичной системе. Установлен физический смысл гравитационной постоянной γ и получена формула, выражающая величину γ в виде функции энергии и момента импульса двухчастичной системы и масс частиц. Численная оценка величины гравитационной постоянной, полученная по упомянутой формуле с использованием известных астрофизических данных для Земли и Солнца, находится в хорошем согласии с недавними опытными данными.

Раздел 3 посвящен детальному рассмотрению особенностей ускоренного движения по инерции трехчастичной системы. Из множества ускоренных движений выбирается движение, в котором небольшое пробное тело массой m_1 движется вблизи массивного тела массой m_2 и одновременно тела m_1 и m_2 находятся в состоянии ускоренного движения по инерции относительно другого массивного тела массой m_3. Получены и исследованы условия ускоренного движения по инерции. Согласно полученным результатам, рассматриваемая задача распадается на две относительно независимые задачи: задачу о движении подсистемы a, состоящей из тел m_1 и m_2, и аналогичную задачу для подсистемы b, состоящей из тела m_3 и фиктивного тела массой $m_1 + m_2$, расположенной в центре масс подсистемы a. Особенность ускоренного движения по инерции рассматриваемой системы состоит в том, что результирующие кинетическая энергия и момент импульса системы могут быть представлены в виде суммы кинетических энергий и моментов импульса подсистем a и b, но величины, относящиеся к подсистемам a и b, должны вычисляться в системах отсчета, соответственно, S'' и S', где S'' и S' — системы центра масс подсистем a и b, соответственно.

В разделе 4 исследуется явление свободного падения тел на основе рассмотренной в предыдущем разделе трехчастичной системы, находящейся в состоянии ускоренного движения по инерции. Рассматривается задача о движении тела m_1 после того, как в некоторый момент времени ему сообщена с помощью внешней силы дополнительная скорость относительно тела m_2. Установлен вид уравнения движения ускоренно движущейся по инерции частицы, на которую действует, начиная с некоторого момента времени, возмущение в виде внешней силы, а также вид внешней силы, сообщающей частице в некоторый момент времени дополнительную скорость. Полученное в работе решение указанного выше уравнения движения очевидным образом описывает эффект свободного падения пробного тела в поле тяготения массивного тела. Отмечается, что подбрасывание малого пробного тела (m_1) над поверхностью массивного тела (m_2) приводит, вследствие эффекта отдачи, к искажениям движения массивного тела. Эти искажения, однако, весьма малы при выполнении условия $m_1 << m_2$.

Раздел 5 посвящен исследованию особенностей ускоренного движения по инерции в различных системах координат (СК) — декартовой, цилиндрической и сферической. Показано, что в декартовых координатах ускоренное движение частицы по инерции в сильном смысле не имеет места; возможными оказываются лишь движения по инерции в слабом смысле, в которых происходит перераспределение энергии между различными степенями свободы. В цилиндрических и сферических координатах ускоренные движения по инерции в сильном смысле могут происходить; необходимым условием таких движений является обращение в нуль одной или двух компонент вектора скорости частицы. Отмечается, что в цилиндрических координатах ускоренным движением по инерции в сильном смысле является движение частицы по винтовой линии. Однако в декартовой СК это же движение представляет собой движение по инерции в слабом смысле. Указанные особенности описания ускоренного движения по инерции в различных СК обусловлены тем, что понятие степени свободы частицы является весьма сложным понятием, его физическое содержание оказывается различным в различных СК. Вследствие этого, различные СК как анализаторы движения не вполне физически эквивалентны в отношении ускоренных движений по инерции.

В заключительном разделе формулируются основные результаты и выводы работы.

2. Сила взаимодействия между частицами и физический смысл гравитационной постоянной

Исследования по ускоренному движению частиц по инерции начаты в работе [4] с рассмотрения движения одной частицы по криволинейной траектории. Одночастичная модель вращательной инерции представляет интерес и с методической точки зрения — как модель, демонстрирующая саму возможность вращательного движения по инерции, и с точки зрения ее приложений к многочастичным системам.

В связи с тем, что идея ускоренного движения тел по инерции еще не привлекла к себе должного внимания, остановимся на ней детально, выделив на простейших моделях наиболее существенные аспекты проблемы движения по инерции. В качестве первого шага рассмотрим одночастичную модель: точечную частицу массы m, положение которой на траектории движения характеризуется радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и на которую действует сила (1а). Вновь обратимся к задаче, сформулированной во Введении: найти такое движение частицы, в котором действующая на частицу сила (1а) не совершает работы при перемещении частицы на любом участке криволинейной траектории. Ввиду того, что движения частиц, обладающие указанным свойством, не требуют для своей реализации каких-либо затрат энергии, они должны играть в природе фундаментальную роль, обеспечивая стабильность физических систем. Этим определяется значение сформулированной задачи.

Для ее решения вычислим работу dA, совершаемую силой (1а) над частицей при ее перемещении за время dt на вектор перемещения $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt$:

$$dA = \vec{F}d\vec{r} = dK, \quad K = m\vec{v}^2/2, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}, \tag{2}$$

а также составляющие работы dA, $dA = dA_{\|} + dA_{\perp}$, соответствующие поступательному $dA_{\|} = \vec{F}\vec{v}_{\|}dt$ и вращательному $dA_{\perp} = \vec{F}\vec{v}_{\perp}dt$ движениям. Ограничиваясь случаем плоского движения, используем полярные координаты r, φ. В этих координатах радиус-вектор $\vec{r}$ и составляющие вектора скорости $\vec{v}$ (поступательная и вращательная), $\vec{v} = \vec{v}_{\|} + \vec{v}_{\perp}$, даются формулами: $\vec{r} = r\vec{e}$, $\vec{v}_{\|} = \dot{r}\vec{e}$, $\vec{v}_{\perp} = [\vec{\omega}\vec{r}]$, где $\vec{e} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — орт радиуса-вектора $\vec{r}$, $\dot{\vec{e}} = \dot{\varphi}\vec{n}$, $\vec{n} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi}[\vec{e}\vec{n}]$ — вектор угловой скорости. Согласно [4],

$$dA_{\|} = m\dot{r}(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)dt, \quad dA_{\perp} = \vec{M}\vec{\omega}dt, \tag{3}$$

где

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}], \quad \vec{M} = d\vec{L}/dt, \quad \vec{L} = m[\vec{r}\vec{v}], \tag{4}$$

$\vec{M}$ и $\vec{L}$ — моменты силы $\vec{F}$ и импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ относительно начала координат.

Как видно из (2) и (3), требование, чтобы полная работа и ее составляющие обращались в нуль при перемещении частицы:

$$dA = 0, \quad dA_{\|} = 0, \quad dA_{\perp} = 0, \tag{5а}$$

приводит к равенствам:

$$K = const, \quad \vec{M}\vec{\omega} = 0. \tag{5б}$$

Если исключить из рассмотрения случай $\vec{L} = 0$, который описывает либо состояние покоя, либо состояние равномерного и прямолинейного движения частицы, а также случай $L = mr^2\dot{\varphi} = const \neq 0$, $\dot{r} \neq 0$, который также отвечает поступательному движению по инерции (см. [4]), то равенства (5б) описывают движение, в котором $r = r_0 = const \neq 0$, $L = L_0 = const \neq 0$, т. е. равномерное вращение частицы по окружности. Радиус-вектор $\vec{r}$ можно представить в виде:

$$\vec{r} = r_0(\cos\omega t, \sin\omega t), \quad \omega = \dot{\varphi} = const. \tag{6}$$

Радиус окружности r_0 и частота вращения ω определяются кинетической энергией $K = mv^2/2$ (т. е. скоростью v) и моментом импульса L:

$$r_0 = L/\sqrt{2mK}, \quad \omega = 2K/L, \quad (v = \sqrt{2K/m}). \tag{7}$$

Как следует из (6), компоненты скорости и ускорение частицы выражаются равенствами: $\vec{v}_{\|} = 0$, $\vec{v}_{\perp} = [\vec{\omega}\vec{r}] = \vec{v}$, $\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}$. На частицу действует сила

$$\vec{F} = -m\vec{\omega}^2\vec{r} = -m[\vec{v}\vec{\omega}], \tag{8}$$

которая не совершает работы по перемещению частицы вследствие того, что $K = const$ (либо вследствие того, что $\vec{F} \perp \vec{v}$). На этом основании рассматриваемое движение было названо в [4] **вращательным движением по инерции**. Сущность явления вращательной инерции состоит в том, что частица движется по криволинейной траектории свободно, без принуждения со стороны внешних сил, не расходуя своей энергии. Вращательная инерция представляет собой, очевидно, простейший пример движения, происходящего без отбрасывания реактивной массы, т. е. безопорного движения.

Условия вращательного движения частицы по инерции выражаются, таким образом, следующими соотношениями:

$$K = const, \quad \vec{L} = const \neq 0, \quad |\vec{r}| = const. \tag{9}$$

Характеристиками вращательного движения являются величины $r_0 = |\vec{r}\,|$ и $\omega = |\vec{\omega}\,|$, которые определяются интегралами движения K и $L = |\vec{L}\,|$ в соответствии с формулами (7).

Отметим, что частица, находящаяся в состоянии вращательной инерции, оказывается незамкнутой системой. В связи с этим возникает вопрос о физической природе силы, действующей на частицу, которая движется по криволинейной траектории по инерции. Ответ состоит в том, что указанная сила не является внешней силой, действующей на частицу со стороны окружающих тел из-за их явного отсутствия. Как разъяснялось во Введении, эта сила возникает вследствие ускоренного движения частицы по инерции, т. е. порождается ускорением, но не является причиной ускорения частицы. Значение одночастичной модели состоит в том, что она указывает на принципиальную возможность ускоренного движения частицы по криволинейной траектории по инерции. Как будет видно из дальнейшего, эта возможность определенно реализуется в многочастичных задачах, и поэтому явление ускоренного движения по инерции заслуживает тщательного изучения.

Механика Ньютона исходит из предположения, что действующая на частицу сила (1), может быть только внешней силой, характеризующей действие на частицу со стороны окружающих тел. Явление ускоренного движения частицы по инерции свидетельствует, однако, о том, что, помимо внешних сил, на частицу может действовать сила, которая не является причиной ускоренного движения, а лишь сопутствует ему. Таким образом, сила, определенная формулой (1а), может выступать в двух ипостасях — в качестве внешней силы, принуждающей частицу к изменению состояния движения, и в качестве силы, возникающей в ускоренных движениях по инерции, которые происходят свободно, без какого-либо принуждения со стороны окружения.

Заслуживает внимания то обстоятельство (отмечавшееся в [4]), что если массу m в выражении (8) заменить на электрический заряд q, а величину $-\vec{\omega}$ — на магнитную индукцию $\vec{B}$, то получим силу Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v}\vec{B}]$. В электродинамике эта сила рассматривается как внешняя сила, действующая на электрически заряженную частицу со стороны приложенного магнитного поля. Аналогия между силой (8), действующей на частицу при ее ускоренном движении по инерции, и силой Лоренца позволяет дать следующую физическую трактовку явления вращательной инерции. **Частица, движущаяся ускоренно по инерции, порождает в окружающем пространстве силовое поле**, характеризующееся вектором $\vec{\omega}$, которое действует на саму частицу при ее движении по траектории, не совершая над нею работы. Это силовое поле, очевидно, должно действовать и на соседние частицы, вызывая взаимодействие между ними и исходной частицей. То обстоятельство, что сила Лоренца играет в электромагнитных явлениях фундаментальную роль, наводит на мысль, что взаимодействие между ускоренно движущимися по инерции частицами может существенно влиять на поведение физических систем. Поэтому в качестве следующего шага в исследовании ускоренного движения по инерции необходимо исследовать двухчастичную модель вращательной инерции.

Но прежде чем сделать этот шаг, поставим вопрос, вытекающий по самой логике вещей из проведенного исследования: не являются ли ускоренные движения частиц по инерции физической причиной электромагнитных явлений и процессов? По-видимому, в пользу положительного ответа на этот вопрос говорит широкое разнообразие ускоренных движений по инерции [6], движений, выпавших из поля зрения в ньютоновской схеме механики [5].

Переходя к двухчастичной модели вращательной инерции, рассмотрим замкнутую систему двух частиц с массами m_1 и m_2, описываемую в некоторой системе отсчета S радиусами-векторами $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2$). По определению, принятому в механике, на частицы действуют силы

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i , \tag{10}$$

удовлетворяющие соотношению (условию замкнутости двухчастичной системы)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 . \tag{11}$$

В силу (10) и (11) имеет место равенство: $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_1 \left(m_1^{-1} + m_2^{-1} \right)$. Последнее равенство и условие (11) можно записать в виде:

$$\vec{F}_1 = \mu\ddot{\vec{r}}, \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_1, \tag{12}$$

где $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса частиц 1 и 2, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ — радиус-вектор частицы 1 относительно частицы 2. Если ввести обозначения $\vec{r}_i - \vec{r}_k = \vec{r}_{ik}$, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}_1$, то первое из соотношений (12) можно представить в следующей форме:

$$\vec{F}_{ik} = \frac{m_i m_k}{m_i + m_k}\ddot{\vec{r}}_{ik} \quad (i,k = 1,2). \tag{13}$$

Равенство (13) при $i = k$ является тривиальным тождеством $0 = 0$ (т. к. $\vec{r}_{ii} = 0$ влечет за собой $\vec{F}_{ii} = 0$). Величина $\vec{F}_{ik}$ имеет следующий физический смысл: это сила, действующая на частицу i со стороны частицы k; другими словами, $\vec{F}_{ik}$ - сила взаимодействия между частицами i и k.

Ввиду того, что первое из равенств (12) совершенно аналогично равенству (1а) (последнее получается из (12) заменой $\mu \to m$ и $\vec{F}_1 \to \vec{F}$), условия вращательной инерции двухчастичной системы можно записать немедленно, используя приведенный выше анализ одночастичной модели вращательной инерции. Выполняя замену, обратную к указанной выше, в выражениях (2) и (4), приходим к следующим выражениям для полной кинетической энергии K и результирующего момента импульса $\vec{L}$ двухчастичной системы:

$$K = \mu\vec{v}^2/2, \quad \vec{L} = \mu[\vec{r}\vec{v}], \tag{14}$$

где $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$. Чтобы убедиться в том, что величины K и $\vec{L}$ (14) имеют, действительно, тот физический смысл, какой нами указан, необходимо вычислить полную работу $d\tilde{A} = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2$, совершаемую силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ над частицами, и вращательную составляющую работы $d\tilde{A}_\perp = \vec{F}_1\vec{v}_{1\perp}dt + \vec{F}_2\vec{v}_{2\perp}dt.$ Учитывая равенства (12), легко проверить, что $d\tilde{A} = dK,$ $d\tilde{A}_\perp = \vec{M}\vec{\omega}dt,$ $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ (ср. с равенствами (2) и (3)), где величины K и $\vec{L}$ выражаются формулами (14), что и требовалось доказать. Условия вращательной инерции системы двух частиц выражаются соотношениями (9), в которых теперь кинетическая энергия K и момент импульса $\vec{L}$ определяются формулами (14).

Поведение многочастичных систем удобно исследовать в системе центра масс. Радиусы-векторы частиц $\vec{r}_i'$ в системе центра масс (назовем ее системой отсчета S') связаны с радиусами-векторами $\vec{r}_i$ исходной системы отсчета S формулой

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_C, \tag{15}$$

где $\vec{R}_C$ — радиус-вектор центра масс:

$$\vec{R}_C = \sum_i m_i\vec{r}_i \Big/ \sum_i m_i. \tag{16}$$

Для системы двух частиц формулы (15) и (16) приводят к следующим выражениям для $\vec{r}_i'$:

$$\vec{r}_1' = (\mu/m_1)\vec{r}, \quad \vec{r}_2' = -(\mu/m_2)\vec{r}, \tag{17}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. В силу условия замкнутости (11) выполняется равенство $\ddot{\vec{R}}_C = 0$. Поэтому силы, действующие на частицы в системе центра масс, имеют вид: $\vec{F}_i' = m_i\ddot{\vec{r}}_i' = \vec{F}_i$. Отсюда и из (17) выводим: $\vec{F}_1' = \mu\ddot{\vec{r}}$, $\vec{F}_2' = -\mu\ddot{\vec{r}}$.

В соответствии с соотношениями (14) и (17), при выполнении условий (9) двухчастичная система находится в состоянии вращательного движения по инерции: частицы движутся равномерно по концентрическим окружностям, центр которых совпадает с центром масс C, и действующие на частицы силы не совершают работы при перемещении частиц по траекториям. Радиусы r_1' и r_2' окружностей, по которым движутся первая и вторая частицы, составляют: $r_1' = m_2 r_0 / M$ и $r_2' = m_1 r_0 / M$, где r_0 — расстояние между частицами, $M = m_1 + m_2$. На частицы действуют равные по величине и противоположно направленные силы $\vec{F}_1 = -\mu\vec{\omega}^2\vec{r}$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ (см. (17)), $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости. Величины r_0 и ω определяются формулами (ср. с (7))

$$r_0 = L\big/\sqrt{2\mu K}\,, \quad \omega = 2K/L. \tag{18}$$

Если $m_2 \to \infty$, а масса m_1 остается конечной величиной, частица с массой m_2 приближается к центру масс C и $\mu \to m_1$. Заметим, что при $m_2 \to \infty$ величина $|\vec{r}_2'|$ становится бесконечно малой ($|\vec{r}_2'| \to 0$), так что величина $m_2\ddot{\vec{r}}_2'$ оказывается неопределенностью вида $\infty \cdot 0$. Расчет показывает, что в указанном пределе $m_2\ddot{\vec{r}}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \neq 0$, так что двухчастичная система остается замкнутой. Поэтому в рассматриваемом предельном случае физическая картина вращательного движения по инерции двухчастичной системы такова: частицы движутся равномерно по концентрическим окружностям с центром в точке C, причем радиусы окружностей составляют $r_1' = r_0 - \varepsilon$ и $r_2' = \varepsilon,\ \varepsilon \to 0$. Поскольку частица с массой m_2 при $m_2 \to \infty$ движется по окружности бесконечно малого радиуса, то при проведении расчетов можно считать ее неподвижным силовым центром, находящимся в точке C, на который действует сила $\vec{F}_2$. Таким образом, вращательное движение по инерции двухчастичной системы при $m_2 \to \infty$ и конечном значении m_1 аналогично вращательной инерции одной частицы с тем лишь отличием, что в первом случае происходит вращение частицы m_1 вокруг неподвижного силового центра, а во втором — частица вращается вокруг центра кривизны, в котором отсутствует силовой центр.

Перейдем к рассмотрению замкнутой системы трех частиц с массами m_i и радиусами-векторами $\vec{r}_i$ ($i = 1,2,3$). На частицы действуют силы $\vec{F}_i$ (10), которые удовлетворяют условию замкнутости

$$. \tag{19}$$

В системе центра масс радиусы-векторы частиц $\vec{r}_i'$ определяются формулами (15) и (16) (в (16) суммирование выполняется теперь по трем частицам). Отметим равенства

$$\sum_{i=1,2,3} m_i \vec{r}_i' = 0, \quad \sum_{i=1,2,3} m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0, \quad \sum_{i=1,2,3} m_i \ddot{\vec{r}}_i' = 0, \quad \ddot{\vec{R}}_C = 0\,, \tag{20}$$

вытекающие из (15), (16) и (19). В силу (16) и (20) в системе центра масс на частицы действуют силы

$$\vec{F}_i' = m_i \ddot{\vec{r}}_i' = \vec{F}_i \quad (i = 1,2,3)\,. \tag{21}$$

С помощью соотношений (15) и (16) нетрудно получить формулу

$$\vec{r}_i' = \frac{1}{M} \sum_{k=1,2,3} m_k \vec{r}_{ik}\,, \tag{22}$$

где $M = \sum\limits_{i=1,2,3} m_i$ — полная масса трехчастичной системы, $\vec{r}_{ik} = \vec{r}_i - \vec{r}_k$. Подстановка (22) в (21) приводит к следующему выражению: $\vec{F}_i' = \dfrac{m_i}{M} \sum\limits_{k=1,2,3} m_k \ddot{\vec{r}}_{ik}$. Физический смысл последнего равенства состоит в том, что сила $\vec{F}_i'$, действующая на частицу i, равна векторной сумме сил, действующих на эту частицу со стороны всех остальных частиц. Сила, действующая на частицу i со стороны частицы k, дается формулой:

$$\vec{F}_{ik}' = \frac{m_i m_k}{M} \ddot{\vec{r}}_{ik}\,. \tag{23}$$

При этом

$$\vec{F}_i' = \sum_{k=1,2,3} \vec{F}_{ik}', \quad \vec{F}_{ik}' = -\vec{F}_{ki}', \quad \vec{F}_{ii}' = 0\,. \tag{24}$$

Нетрудно убедиться в том, что формула (23), в которой M — полная масса всей системы, справедлива для замкнутой системы произвольного числа n частиц. Формула (13) является, очевидно, частным случаем формулы (23) для системы двух частиц. Подчеркнем, что выражение (23) является строгим следствием общего определения силы (1); это выражение учитывает в равной мере как поступательные, так и вращательные движения. Из (23) видно, что сила взаимодействия между двумя частицами определяется состоянием движения частиц.

Если система n частиц незамкнута, то, согласно определению радиуса-вектора центра масс $\vec{R}_C$, $\ddot{\vec{R}}_C = \vec{F}/M \neq 0$, где $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ — результирующая сил, действующих на частицы. Следовательно, центр масс рассматриваемой системы движется с ускорением относительно исходной системы отсчета S. Исследование такой системы частиц можно выполнить следующим образом. Расширим исходную систему, дополнив ее еще одной частицей. Массу новой частицы и ее радиус-вектор обозначим через m_{n+1} и $\vec{r}_{n+1}$ и будем считать, что на частицу действует сила $\vec{F}_{n+1}$, определяемая формулой $\vec{F}_{n+1} = -\vec{F}$. В результате получаем замкнутую $(n+1)$-частичную систему, которую можно исследовать, используя построенную выше теорию для замкнутых систем частиц.

Обратимся к ньютоновской теории гравитации и попытаемся установить физический смысл гравитационной постоянной γ.

Согласно закону всемирного тяготения, на частицы с массами m_1 и m_2 и радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, где

$$\vec{F}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r}, \;\; \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 . \tag{25}$$

Особенности гравитационного взаимодействия, описываемого силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, видны из выражений для полной работы dA этих сил при перемещениях частиц $d\vec{r}_1$ и $d\vec{r}_2$ и составляющих работы $dA_{\|}$ и $dA_{\perp}$:

$$dA = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 d\vec{r} = -dU, \quad U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad dA_{\|} = \vec{F}_1 \vec{v}_{\|} dt = dA, \quad dA_{\perp} = \vec{F}_1 \vec{v}_{\perp} dt = 0. \tag{26}$$

Из (26) следует, что эти особенности таковы:

1) частицы совершают лишь поступательное движение, которое сопровождается совершением работы $dA = dA_{\|}$; $dA = 0$ лишь при $r = const$;
2) энергия, расходуемая на совершение работы, черпается из запасов потенциальной энергии U, приписываемой системе двух частиц;
3) полная энергия двухчастичной системы сохраняется: $K + U = const, \quad K = \mu \dot{\vec{r}}^2 / 2$; т. е. в системе двух частиц непрерывно происходит преобразование кинетической энергии в потенциальную и обратный процесс.

Указанные особенности взаимодействия, описываемого законом всемирного тяготения, являются следствием гипотезы о том, что каждая частица, обладающая массой, порождает в окружающем пространстве силовое поле, которое является свойством, внутренне присущим частице по самой природе вещей, т. е. свойством неизвестного происхождения.

Согласно результатам, представленным в данной работе, если частицы m_1 и m_2 находятся в состоянии вращательного движения по инерции, то на эти частицы действуют силы $\vec{F}_1'$ и $\vec{F}_2' = -\vec{F}_1'$ (см. (17)), где

$$\vec{F}_1' = -\mu\omega^2 \vec{r} = -\frac{\mu v^2}{r^2}\vec{r}, \tag{27}$$

ω и $v = \omega r$ — угловая скорость и скорость относительного движения частиц, соответственно. Следует подчеркнуть, что формула (27) является точным выражением для силы, следующим из общепринятого определения силы (1) и условий (9) вращательного движения по инерции, относящихся к двухчастичной системе. При выводе выражения (27) не использовалась гипотеза о существовании особого силового поля, порождаемого частицей по неизвестной причине.

Принято считать, что закон всемирного тяготения (25) имеет фундаментальный характер и гравитационная постоянная γ относится к числу фундаментальных констант. Анализ проблемы гравитации, проведенный в работах [4, 5], свидетельствует о том, что ньютоновская теория гравитации является приближенной, феноменологической теорией, справедливой лишь при выполнении определенных условий. Физической причиной гравитации являются ускоренные движения частиц по инерции, порождающие силы вида (27), действующие на частицы. С другой стороны, как показывают исследования, закон всемирного тяготения хорошо описывает поведение небесных тел. Отсюда можно заключить, что при определенных условиях формулы (25) и (27) описывают одну и ту же силу, действующую на частицу. Следовательно, равенство $\vec{F}_1 = \vec{F}_1'$ позволяет выразить гравитационную постоянную в виде функции параметров, определяющих силу гравитационного притяжения частиц.

Из указанного равенства выводим:

$$\gamma = \frac{v^2 r}{M} = \frac{Lv}{m_1 m_2} \text{ (т. к. } L = \mu r v\text{)}. \tag{28}$$

Это равенство, справедливое в области применимости закона всемирного тяготения (25), и определяет физический смысл гравитационной постоянной: γ — это величина, которая выражается через параметры, определяемые из условия вращательного движения двух частиц по инерции, и инертные массы частиц. Можно сказать так: γ **— это сохраняющаяся величина, интеграл вращательного движения двух частиц по инерции.** Отметим, что величина γ выражается через интегралы движения, связанные с фундаментальными законами сохранения — законами сохранения энергии и момента импульса в двухчастичной системе, и инертные массы частиц. Границы применимости закона всемирного тяготения определяются условием: $|U| << K$, где U и K — потенциальная и кинетическая энергии взаимодействующих тел (см. (26)).

Подстановка (28) в (25) дает: $F_1 = \mu \frac{v^2}{r}$ (в правой части стоит приведенная масса двух частиц, умноженная на нормальное ускорение). Этот результат означает, что **ньютоновская теория тяготения как феноменологическая теория применима для двух тел, находящихся в состоянии вращательного движения по инерции друг относительно друга**. Тот факт, что механика Ньютона хорошо описывает движение небесных тел, объясняется, по-видимому, тем, что небесные тела находятся, преимущественно, в состоянии вращательной инерции, являющемся состоянием устойчивого равновесия небесных тел.

Из нашего исследования видно, что явление гравитации получает простое объяснение: **гравитация — это следствие ускоренного движения тел по инерции.** Тем самым отпадает необходимость в гипотезе о том, что существует особое силовое поле неизвестной природы, порождаемое частицей, имеющей массу, и, следовательно, теряет смысл понятие гравитационной массы. Отпадает очевидным образом необходимость и в принципе эквивалентности инертной и гравитационной масс, лежащем в основе ньютоновской теории тяготения и общей теории относительности.

В заключение раздела вычислим гравитационную постоянную по формуле (28), используя известные астрофизические данные для Земли и Солнца:

масса Земли $m_1 = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Солнца $m_2 = 1{,}9891 \cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Земли до Солнца $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ м, частота обращения Земли вокруг Солнца $\omega = 1{,}99096 \cdot 10^{-7}\ c^{-1}$. Учитывая, что $v = \omega r$, формулу (28) удобно записать в виде: $\gamma = \omega^2 r^3 / (m_1 + m_2)$. Вычисления приводят к следующей величине: $\gamma = 6{,}6721 \cdot 10^{-11}\ м^3\,кг^{-1}\,c^{-2}$. Для сравнения приведем последние данные (H. V. Parks, J. E. Faller, 2010, [8]): $\gamma = (6{,}67234 \pm 0{,}00014) \cdot 10^{-11}\ м^3\,кг^{-1}\,c^{-2}$.

Приведенные числа говорят, очевидно, в пользу представленной здесь теории.

3. Особенности ускоренного движения по инерции трехчастичной системы

До сих пор мы не касались явления свободного падения тела в гравитационном поле. Для доказательства того, что физической причиной гравитации являются ускоренные движения тел по инерции, необходимо вывести законы свободного падения тела, исходя из концепции ускоренного движения по инерции. Свободное падение тела в условиях ускоренного движения тел по инерции будет рассмотрено в следующем разделе на основе детального анализа поведения трехчастичной системы, выполненного в данном разделе. Для определенности, из множества ускоренных движений по инерции системы из трех частиц мы выбираем движение, которое на качественном уровне рассмотрено в [4]: небольшое пробное тело (частица) m_1 движется вблизи массивного тела m_2, причем одновременно тела m_1 и m_2 находятся в состоянии вращательного движения по инерции относительно некоторого другого массивного тела m_3; для простоты предполагается, что $m_1 << m_2 << m_3$.

Как и в предыдущем разделе, считаем, что на частицы действуют силы $\vec{F}_i$ (10), которые подчиняются условию замкнутости (19). Удобно ввести две подсистемы: подсистему a, состоящую из частиц m_1 и m_2, и подсистему b, состоящую из частицы m_3 и фиктивной точечной частицы с массой $m_1 + m_2 \equiv M_a$, расположенной в центре масс подсистемы a. Обозначим через C и C_a центры масс исходной трехчастичной системы и подсистемы a, соответственно. Их радиусы-векторы, $\vec{R}_C$ и $\vec{R}_{C_a}$, определяются формулами:

$$\vec{R}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1,2,3} m_i\vec{r}_i, \quad \vec{R}_{C_a} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M_a}, \quad M = \sum_{i=1,2,3} m_i, \tag{29}$$

Следствием условия замкнутости (19) являются равенства:

$$\ddot{\vec{R}}_C = 0, \quad M_a\ddot{\vec{R}}_{C_a} = -\vec{F}_3, \tag{30}$$

из которых следует, что в исходной системе отсчета S центр масс исходной системы частиц (т. е. точка C) покоится или движется равномерно и прямолинейно, а центр масс подсистемы a движется ускоренно: на введенную выше фиктивную частицу с массой M_a действует сила $-\vec{F}_3$. Подсистема b является, таким образом, замкнутой системой. Ее центр масс совпадает с точкой C — центром масс всей рассматриваемой системы, как это видно из равенства:

$$\frac{M_a\vec{r} + m_3\vec{r}_3}{M_a + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{M} \equiv \vec{R}_C,$$

где $\vec{r} = \vec{R}_{C_a}$ — радиус-вектор фиктивной частицы.

Перейдем в новую систему отсчета S', начало декартовых координат которой O' совпадает с центром масс C, а оси координат параллельны соответствующим осям декартовой системы координат, связанной с системой отсчета S. Радиусы-векторы частиц в штрихованной и нештрихованной системах отсчета связаны между собой равенствами:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_C + \vec{r}_i\,', \quad \vec{r} = \vec{R}_C + \vec{r}\,', \quad i = 1,2,3. \tag{31}$$

Ввиду (30), силы, действующие на частицы в системе отсчета S', можно записать в виде:

$$\vec{F}_i' = m_i\ddot{\vec{r}}_i', \quad \vec{F}_i' = \vec{F}_i, \quad i = 1,2,3, \quad \vec{F}' = M_a\ddot{\vec{r}}\,', \quad \vec{F}' = -\vec{F}_3. \tag{32}$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{r}_{nm} = \vec{r}_n - \vec{r}_m, \ (n,m = 1,2,3); \ \vec{R}_a \equiv \vec{r}_{12}, \ \vec{R}_b = \vec{r} - \vec{r}_3, \quad \mu_a = \frac{m_1m_2}{M_a}, \quad \mu_b = \frac{M_am_3}{M_a + m_3}. \tag{33}$$

Здесь μ_a и μ_b — приведенные массы частиц подсистем a и b, соответственно. Используя (31), вычислим радиусы-векторы частиц в системе отсчета S'. Указанные величины удобно выразить через $\vec{R}_a$ и $\vec{R}_b$. Простые преобразования дают:

$$\vec{r}_1' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{R}_b + \frac{\mu_a}{m_1}\vec{R}_a, \quad \vec{r}_2' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{R}_b - \frac{\mu_a}{m_2}\vec{R}_a, \quad \vec{r}_3' = -\frac{\mu_b}{m_3}\vec{R}_b, \quad \vec{r}\,' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{R}_b. \tag{34}$$

Дифференцируя по времени обе части соотношений (34), получаем следующие формулы для векторов скорости частиц $\vec{v}_i' = \dot{\vec{r}}_i'$, $\vec{v}\,' = \dot{\vec{r}}\,'$:

$$\vec{v}_1' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{V}_b + \frac{\mu_a}{m_1}\vec{V}_a, \quad \vec{v}_2' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{V}_b - \frac{\mu_a}{m_2}\vec{V}_a, \quad \vec{v}_3' = -\frac{\mu_b}{m_3}\vec{V}_b, \quad \vec{v}\,' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{V}_b, \tag{35}$$

где $\vec{V}_\alpha = \dot{\vec{R}}_\alpha$, $(\alpha = a, b)$. Определив импульсы частиц в системе отсчета S' по формулам $\vec{P}_i' = m_i \vec{v}_i'$ и $\vec{P}' = M_a \vec{v}'$, нетрудно убедиться в том, что полный импульс рассматриваемой системы частиц равен нулю: $\sum\limits_{i=1,2,3} \vec{P}_i' = 0$, причем $\vec{P}_1' + \vec{P}_2' = \mu_b \vec{V}_b$, $\vec{P}' + \vec{P}_3' = 0$.

Вычислим полную работу dA', совершаемую силами, действующими на частицы в системе отсчета S':

$$dA' = \sum_{i=1,2,3} dA_i', \quad dA_i' = \vec{F}_i' d\vec{r}_i' = dK_i', \quad K_i' = m_i \vec{v}_i'^2 \big/ 2, \quad dA' = dK', \quad K' = \sum_{i=1,2,3} K_i'. \tag{36}$$

Полную кинетическую энергию K' системы частиц легко вычислить, используя (35) и (36):

$$K' = \mu_b \vec{V}_b^2 \big/ 2 + \mu_a \vec{V}_a^2 \big/ 2. \tag{37}$$

Требование $dA' = 0$ приводит к сохранению полной кинетической энергии: $K' \equiv K_0' = const$.

Обратимся к вычислению работы dA_i', совершаемой силой $\vec{F}_i'$ над частицей при ее перемещении в пространстве. Величину dA_i' разложим на составляющие, отвечающие вращательному и поступательному движениям: $dA_i' = dA_{i\perp}' + dA_{i\parallel}'$, где

$$dA_{i\perp}' = \vec{F}_i' d\vec{r}_{i\perp}' = \vec{F}_i' \vec{v}_{i\perp}' dt, \quad dA_{i\parallel}' = \vec{F}_i' d\vec{r}_{i\parallel}' = \vec{F}_i' \vec{v}_{i\parallel}' dt, \tag{38}$$

$\vec{v}_{i\perp}'$ и $\vec{v}_{i\parallel}'$ — вращательная и поступательная компоненты векторов скорости $\vec{v}_i'$, определяемых формулами (35), $\vec{F}_i' = \dot{\vec{P}}_i'$.

Прежде всего, запишем векторы $\vec{R}_\alpha$ $(\alpha = a, b)$ в полярных координатах,

$$\vec{R}_\alpha = (R_\alpha, \varphi_\alpha) = R_\alpha \vec{e}_\alpha, \tag{39}$$

и введем тройку взаимно перпендикулярных ортов $\vec{e}_\alpha, \vec{n}_\alpha, \vec{\tilde{m}}_\alpha$ ($\alpha = a, b$):

$$\vec{e}_\alpha = (\cos\varphi_\alpha, \sin\varphi_\alpha), \quad \vec{n}_\alpha = \dot{\vec{e}}_\alpha / \dot{\varphi}_\alpha = (-\sin\varphi_\alpha, \cos\varphi_\alpha), \quad \vec{\tilde{m}}_\alpha \equiv [\vec{e}_\alpha \vec{n}_\alpha]. \tag{40}$$

Используя (39) и (40), вычислим векторы скорости и их поступательную и вращательную составляющие:

$$\begin{gathered} \vec{V}_\alpha = \dot{\vec{R}}_\alpha = \dot{R}_\alpha \vec{e}_\alpha + R_\alpha \dot{\varphi}_\alpha \vec{n}_\alpha, \quad \vec{V}_\alpha = \vec{V}_{\alpha\parallel} + \vec{V}_{\alpha\perp}, \\ \vec{V}_{\alpha\parallel} = \dot{R}_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad \vec{V}_{\alpha\perp} = R_\alpha \dot{\varphi}_\alpha \vec{n}_\alpha = R_\alpha \dot{\varphi}_\alpha [\vec{\tilde{m}}_\alpha \vec{e}_\alpha] = [\vec{\omega}_\alpha \vec{R}_\alpha], \quad \vec{\omega}_\alpha = \dot{\varphi}_\alpha \vec{\tilde{m}}_\alpha. \end{gathered} \tag{41}$$

Учитывая (35), (38) и (41), вычисляем величины $dA_{i\perp}'$ и $dA_{i\parallel}'$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\begin{gathered} dA_{1\perp}' = \frac{\mu_b}{M_a} (\vec{\omega}_b [\vec{R}_b \vec{F}_1']) dt + \frac{\mu_a}{m_1} (\vec{\omega}_a [\vec{R}_a \vec{F}_1']) dt, \quad dA_{1\parallel}' = \frac{\mu_b}{M_a} \vec{F}_1' \vec{V}_{b\parallel} dt + \frac{\mu_a}{m_1} \vec{F}_1' \vec{V}_{a\parallel} dt, \\ dA_{2\perp}' = \frac{\mu_b}{M_a} (\vec{\omega}_b [\vec{R}_b \vec{F}_2']) dt - \frac{\mu_a}{m_2} (\vec{\omega}_a [\vec{R}_a \vec{F}_2']) dt, \quad dA_{2\parallel}' = \frac{\mu_b}{M_a} \vec{F}_2' \vec{V}_{b\parallel} dt - \frac{\mu_a}{m_2} \vec{F}_2' \vec{V}_{a\parallel} dt, \\ dA_{3\perp}' = \frac{\mu_b}{m_3} (\vec{\omega}_b [\vec{R}_b, \vec{F}_1' + \vec{F}_2']) dt, \quad dA_{3\parallel}' = -\frac{\mu_b}{m_3} \vec{F}_3' \vec{V}_{b\parallel} dt. \end{gathered} \tag{42}$$

В силу (42) и (32) компоненты полной работы при вращательном и поступательном движениях $dA_\alpha' = \sum\limits_{i=1,2,3} dA_{i\alpha}'$ $(\alpha = \perp, \parallel)$ составляют:

$$\begin{gathered} dA_\perp' = (\vec{\omega}_b [\vec{R}_b, \vec{F}_1' + \vec{F}_2']) dt + M_a^{-1} (\vec{\omega}_a [\vec{R}_a, m_2 \vec{F}_1' - m_1 \vec{F}_2']) dt, \\ dA_\parallel' = M^{-1} \left(m_3 (\vec{F}_1' + \vec{F}_2') - M_a \vec{F}_3' \right) \vec{V}_{b\parallel} dt + M_a^{-1} \left(m_2 \vec{F}_1' - m_1 \vec{F}_2' \right) \vec{V}_{a\parallel} dt. \end{gathered} \tag{43}$$

Используя выражение для силы $\vec{F}_i' = \dot{\vec{P}}_i'$, легко вывести соотношения:

$$\begin{gathered} \vec{F}_1' + \vec{F}_2' = \mu_b \dot{\vec{V}}_b, \quad m_2 \vec{F}_1' - m_1 \vec{F}_2' = m_1 m_2 \dot{\vec{V}}_a, \quad m_3 (\vec{F}_1' + \vec{F}_2') - M_a \vec{F}_3' = m_3 M_a \dot{\vec{V}}_b, \\ [\vec{R}_b, \vec{F}_1' + \vec{F}_2'] = \mu_b [\vec{R}_b, \dot{\vec{V}}_b] \equiv \dot{\vec{\tilde{M}}}_b, \quad M_a^{-1} [\vec{R}_a, m_2 \vec{F}_1' - m_1 \vec{F}_2'] = \mu_a [\vec{R}_a, \dot{\vec{V}}_a] \equiv \dot{\vec{\tilde{M}}}_a, \\ (\dot{\vec{V}}_\alpha \vec{V}_{\alpha\parallel}) = (\ddot{R}_\alpha - R_\alpha \dot{\varphi}_\alpha^2) \dot{R}_\alpha. \end{gathered} \tag{44}$$

Здесь

$$\vec{\tilde{M}}_\alpha = \frac{d}{dt}\vec{\tilde{L}}_\alpha, \quad \vec{\tilde{L}}_\alpha = \mu_\alpha[\vec{R}_\alpha, \dot{\vec{R}}_\alpha] = \mu_\alpha R_\alpha^2 \dot{\varphi}_\alpha \vec{\tilde{m}}_\alpha, \quad \alpha = a, b. \tag{45}$$

С помощью (44) выражения (43) легко упрощаются. Приведем окончательные формулы для полной работы dA', совершаемой силами, действующими на частицы в системе отсчета S' (см. (36) и (37)), и составляющих работы $dA'_\perp$ и $dA'_\parallel$:

$$\begin{aligned} &dA' = dK', \quad K' = \frac{1}{2}\mu_b \vec{V}_b^2 + \frac{1}{2}\mu_a \vec{V}_a^2, \\ &dA'_\perp = (\vec{\tilde{M}}_b \vec{\omega}_b)dt + (\vec{\tilde{M}}_a \vec{\omega}_a)dt, \quad dA'_\parallel = \mu_b(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt + \mu_a(\ddot{R}_a - R_a\dot{\varphi}_a^2)\dot{R}_a dt. \end{aligned} \tag{46}$$

Используя равенства (44) и (45), легко проверить, что выполняется, как и должно быть, соотношение $dA'_\parallel + dA'_\perp = dK'$.

Из соотношений (46) видно, что при выполнении условий $K' = const$, $\vec{\tilde{L}}_\alpha = const$ ($\alpha = a, b$) полная работа сил, действующих на частицы, и ее вращательная и поступательная компоненты обращаются в нуль: $dA' = 0$, $dA'_\parallel = 0$, $dA'_\perp = 0$ (ср. с (5а)). Следовательно, рассматриваемая трехчастичная система находится в состоянии ускоренного движения по инерции.

Чтобы уточнить физический смысл величин $\vec{\tilde{M}}_b$ и $\vec{\tilde{M}}_a$, входящих в $dA'_\perp$, а также составляющих кинетической энергии K' (46), обратимся к подсистемам b и a.

Начнем с рассмотрения подсистемы b. На ее частицы действуют силы (см. равенства (32))

$$\vec{F}' = \dot{\vec{P}}', \quad \vec{F}'_3 = \dot{\vec{P}}'_3, \tag{47}$$

где $\vec{P}' = M_a \dot{\vec{r}}'$ и $\vec{P}'_3 = m_3 \dot{\vec{r}}'_3$ — импульсы частиц подсистемы b. Учитывая выражения для радиусов-векторов этих частиц (см. (34)), $\vec{r}' = \frac{\mu_b}{M_a}\vec{R}_b$, $\vec{r}'_3 = -\frac{\mu_b}{m_3}\vec{R}_b$, и для отвечающих им импульсов $\vec{P}' = \mu_b \vec{V}_b$, $\vec{P}'_3 = -\mu_b \vec{V}_b$, вычислим результирующий момент импульса частиц подсистемы b, $\vec{L}'_b$, и результирующий момент сил, $\vec{M}'_b$, действующих на эти частицы, в системе отсчета S':

$$\vec{L}'_b = [\vec{r}', \vec{P}'] + [\vec{r}'_3, \vec{P}'_3], \quad \vec{M}'_b = [\vec{r}', \vec{F}'] + [\vec{r}'_3, \vec{F}'_3], \quad \vec{M}'_b = \frac{d}{dt}\vec{L}'_b. \tag{48}$$

Поскольку $[\vec{r}', \vec{P}'] = \frac{\mu_b^2}{M_a}[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b]$, $[\vec{r}'_3, \vec{P}'_3] = \frac{\mu_b^2}{m_3}[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b]$, то

$$\vec{L}'_b = \mu_b[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b], \quad \vec{M}'_b = \mu_b[\vec{R}_b, \ddot{\vec{R}}_b]. \tag{49}$$

Из сравнения выражений (49) и (45) видно, что

$$\vec{L}'_b = \vec{\tilde{L}}_b, \quad \vec{M}'_b = \vec{\tilde{M}}_b, \tag{50}$$

т. е. величины $\vec{\tilde{L}}_b$ и $\vec{\tilde{M}}_b$, входящие в (44)-(46), имеют физический смысл результирующего момента импульса подсистемы b и результирующего момента сил, действующих на частицы этой подсистемы, соответственно, относительно начала координат в системе отсчета S'.

Работу dA'_b, совершаемую при перемещении частиц подсистемы b, и составляющие работы $dA'_{b\perp}$ и $dA'_{b\parallel}$, соответствующие вращательному и поступательному движениям, определяем по формулам:

$$dA'_b = \vec{F}'d\vec{r}' + \vec{F}'_3 d\vec{r}'_3, \quad dA'_{b\perp} = \vec{F}'d\vec{r}'_\perp + \vec{F}'_3 d\vec{r}'_{3\perp}, \quad dA'_{b\parallel} = \vec{F}'d\vec{r}'_\parallel + \vec{F}'_3 d\vec{r}'_{3\parallel}. \tag{51}$$

Используя выражения (47), а также полярные координаты вектора $\vec{R}_b$ (39), соотношения $d\vec{R}_b = \vec{V}_b dt$, $d\vec{R}_{b\alpha} = \vec{V}_{b\alpha} dt$ ($\alpha = \perp, \parallel$) и равенства (41) и (44), приходим к следующим формулам:

$$dA'_b = dK'_b, \quad dA'_{b\perp} = (\vec{M}'_b\vec{\omega}_b)dt, \quad dA'_{b\parallel} = \mu_b(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt,$$
$$K'_b = \mu_b\vec{V}_b'^2/2, \quad \vec{M}'_b = d\vec{L}'_b/dt, \quad \vec{L}'_b = \mu_b R_b^2\dot{\varphi}_b\vec{\tilde{m}}_b. \tag{52}$$

Здесь K'_b — полная кинетическая энергия подсистемы b. Легко убедиться в том, что величины $dA'_{b\perp}$ и $dA'_{b\parallel}$ представляют собой, соответственно, вращательную и поступательную компоненты работы, совершаемой частицами подсистемы b: $dA'_{b\parallel} + dA'_{b\perp} = dK'_b$.

Из сравнения (46) и (52) видно, что первое слагаемое правой части выражения для $dA'_\perp$ (46) представляет собой работу $dA'_{b\perp}$, совершаемую частицами подсистемы b при их вращательном движении, а первое слагаемое правой части выражения для K' (46) — это полная кинетическая энергия K'_b частиц подсистемы b. Согласно (52), при выполнении условий $K'_b = const$, $\vec{L}'_b = const$ подсистема b находится в состоянии вращательного движения по инерции.

Перейдем к рассмотрению подсистемы a. Физические величины, описывающие эту подсистему, вычислим в двух системах отсчета: во введенной ранее системе отсчета S' и в системе отсчета S'', начало координат которой совпадает с точкой C_a (центром масс подсистемы a), а оси координат параллельны координатным осям системы отсчета S. Радиусы-векторы частиц в системах отсчета S и S'', $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_i''$, связаны между собой равенством:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_{C_a} + \vec{r}_i'', \quad i = 1,2,3. \tag{53}$$

Из (53) и (29) получаем:

$$\vec{r}_1'' = \vec{r}_1 - \vec{R}_{C_a} = \frac{\mu_a}{m_1}\vec{R}_a, \quad \vec{r}_2'' = \vec{r}_2 - \vec{R}_{C_a} = -\frac{\mu_a}{m_2}\vec{R}_a, \quad \vec{r}_3'' = \vec{r}_3 - \vec{R}_{C_a}, \quad \vec{R}_a = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_1'' - \vec{r}_2''. \tag{54}$$

Из (54) видно, что $m_1\vec{r}_1'' + m_2\vec{r}_2'' = 0$, как и должно быть, т. к. начало координат системы отсчета S'' совпадает с центром масс подсистемы a. С помощью (31) и (53) получаем соотношение, связывающее между собой $\vec{r}_i''$ и $\vec{r}_i'$:

$$\vec{r}_i'' = \vec{r}_i' + \vec{R}_C - \vec{R}_{C_a}, \quad \vec{R}_C - \vec{R}_{C_a} = \frac{m_3}{M}(\vec{r}_3' - \vec{r}') = -\frac{m_3}{M}\vec{R}_b = \frac{m_3}{M_a}\vec{r}_3'. \tag{55}$$

Последнее равенство проще всего получить, используя формулы (29) и выражение $\sum_{i=1,2,3} m_i\vec{r}_i' = 0$.

В силу (55) импульсы $\vec{P}_i'' = m_i\dot{\vec{r}}_i''$ и $\vec{P}_i' = m_i\dot{\vec{r}}_i'$ и силы $\vec{F}_i'' = m_i\ddot{\vec{r}}_i''$ и $\vec{F}_i' = \vec{F}_i = m_i\ddot{\vec{r}}_i'$ связаны между собой равенствами (при вычислении сил можно воспользоваться выражениями (30)):

$$\vec{P}_i'' = \vec{P}_i' + \frac{m_i}{M_a}\vec{P}_3', \quad \vec{F}_i'' = \vec{F}_i + \frac{m_i}{M_a}\vec{F}_3. \tag{56}$$

Импульсы частиц в системе отсчета S'', а также полные моменты импульса и моменты сил в подсистеме a в системах отсчета S' и S'' выражаются формулами:

$$\vec{P}_1'' = \mu_a\dot{\vec{R}}_a, \quad \vec{P}_2'' = -\mu_a\dot{\vec{R}}_a,$$
$$\vec{L}_a' = \sum_{i=1,2}[\vec{r}_i', \vec{P}_i'], \quad \vec{L}_a'' = \sum_{i=1,2}[\vec{r}_i'', \vec{P}_i''], \tag{57}$$
$$\vec{M}_a' = \sum_{i=1,2}[\vec{r}_i', \vec{F}_i'], \quad \vec{M}_a'' = \sum_{i=1,2}[\vec{r}_i'', \vec{F}_i''].$$

Учитывая (55) — (57), получаем:

$$\vec{L}_a'' = \vec{L}_a' - \frac{m_3}{M_a}[\vec{r}_3', \vec{P}_3'], \quad \vec{L}_a' = \mu_a[\vec{R}_a, \dot{\vec{R}}_a] + \mu_b\frac{m_3}{M}[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b], \quad \vec{L}_a'' = \mu_a[\vec{R}_a, \dot{\vec{R}}_a],$$
$$\vec{M}_a'' = \vec{M}_a' - \frac{m_3}{M_a}[\vec{r}_3', \vec{F}_3], \quad \vec{M}_a' = \frac{d}{dt}\vec{L}_a', \quad \vec{M}_a'' = \frac{d}{dt}\vec{L}_a''. \tag{58}$$

Далее вычисляем полную работу, совершаемую частицами подсистемы a при их перемещении, и составляющую работы, соответствующую вращательному движению (в системах отсчета S' и S''):

$$dA'_a = \sum_{i=1,2} \vec{F}'_i d\vec{r}'_i, \quad dA'_{a\perp} = \sum_{i=1,2} \vec{F}'_i d\vec{r}'_{i\perp}, \quad dA''_a = \sum_{i=1,2} \vec{F}''_i d\vec{r}''_i, \quad dA''_{a\perp} = \sum_{i=1,2} \vec{F}''_i d\vec{r}''_{i\perp}. \tag{59}$$

Учитывая (34), (35), (42) и (44), получаем:

$$\begin{gathered} dA'_a = dK'_a, \quad K'_a = \sum_{i=1,2} \frac{\vec{P}'^2_i}{2m_i} = \frac{\mu_a}{2}\vec{V}_a^2 + \frac{m_3}{M}\frac{\mu_b}{2}\vec{V}_b^2, \\ dA'_{a\perp} = (m_3/M)(\vec{\omega}_b[\vec{R}_b, \vec{F}'_1 + \vec{F}'_2])dt + M_a^{-1}(\vec{\omega}_a[\vec{R}_a, m_2\vec{F}'_1 - m_1\vec{F}'_2])dt = \\ = (m_3/M)\left(\vec{M}'_b\vec{\omega}_b\right)dt + \left(\vec{M}''_a\vec{\omega}_a\right)dt. \end{gathered} \tag{60}$$

Здесь K'_a — кинетическая энергия подсистемы a в системе отсчета S', $\vec{M}'_b = \mu_b[\vec{R}_b, \ddot{\vec{R}}_b]$, $\vec{M}''_a = \mu_a[\vec{R}_a \dot{\vec{V}}_a]$. Аналогичным образом проводим вычисления в системе отсчета S'':

$$\begin{gathered} dA''_a = dK''_a, \quad K''_a = \sum_{i=1,2} \frac{\vec{P}''^2_i}{2m_i} = \frac{\mu_a}{2}\vec{V}_a^2, \\ dA''_{a\perp} = \mu_a(\vec{\omega}_a[\vec{R}_a, \ddot{\vec{R}}_a])dt = (\vec{M}''_a\vec{\omega}_a)dt, \quad \vec{M}''_a = d\vec{L}''_a/dt, \quad \vec{L}''_a = \mu_a[\vec{R}_a, \dot{\vec{R}}_a] = \mu_a R_a^2 \dot{\varphi}_a \vec{m}_a. \end{gathered} \tag{61}$$

Из сравнения (60) и (61) с (46) видно, что второе слагаемое правой части выражения для $dA'_\perp$ (46) представляет собой работу $dA''_{a\perp}$, совершаемую частицами подсистемы a при их вращательном движении, причем $\vec{\tilde{M}}_a = \vec{M}''_a$, а второе слагаемое правой части выражения для K' (46) — это кинетическая энергия K''_a частиц подсистемы a. Существенно, что величины $dA''_{a\perp}$ и K''_a относятся к системе отсчета S'', в которой покоится центр масс подсистемы a. Остается рассмотреть работу, совершаемую при поступательном движении частиц подсистемы a.

В системе отсчета S' указанная работа определяется формулой:

$$dA'_{a\parallel} = \sum_{i=1,2} \vec{F}'_i \vec{v}'_{i\parallel} dt = M^{-1} m_3 (\vec{F}'_1 + \vec{F}'_2)\vec{V}_{b\parallel} dt + M_a^{-1}(m_2\vec{F}'_1 - m_1\vec{F}'_2)\vec{V}_{a\parallel} dt.$$

Учитывая (44), после несложных преобразований получаем:

$$dA'_{a\parallel} = \mu_b \frac{m_3}{M}(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt + \mu_a(\ddot{R}_a - R_a\dot{\varphi}_a^2)\dot{R}_a dt. \tag{62}$$

Величины $dA'_{a\perp}$ (60) и $dA'_{a\parallel}$ (62) являются, соответственно, вращательной и поступательной компонентами работы частиц подсистемы a в системе отсчета S':

$$dA'_{a\parallel} + dA'_{a\perp} = dA'_a = dK'_a, \tag{63}$$

где K'_a — кинетическая энергия подсистемы a в системе отсчета S' (см.(60)).

Теперь определяем величину работы в системе отсчета S''. Согласно формулам (55), (56) и (59), имеет место следующее соотношение:

$$dA''_a = dA'_a - \frac{m_3}{M_a}\vec{F}'_3 d\vec{r}'_3. \tag{64}$$

Вычисления дают:

$$\begin{gathered} \vec{F}'_3 d\vec{r}'_3 = \frac{M_a}{M} d\left(\frac{1}{2}\mu_b\vec{V}_b^2\right), \quad \vec{F}'_3 d\vec{r}'_{3\parallel} = \mu_b \frac{M_a}{M}(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt, \\ \vec{F}'_3 d\vec{r}'_{3\perp} = \mu_b \frac{M_a}{M}(\vec{\omega}_b[\vec{R}_b \dot{\vec{V}}_b])dt = \frac{M_a}{M}(\vec{M}'_b\vec{\omega}_b)dt. \end{gathered} \tag{65}$$

Из (64) и (65) следуют соотношения

$$\begin{gathered} dA''_a = dA'_a - \frac{m_3}{M} d\left(\frac{1}{2}\mu_b\vec{V}_b^2\right), \\ dA''_{a\parallel} = dA'_{a\parallel} - \frac{m_3}{M}\mu_b(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt, \quad dA''_{a\perp} = dA'_{a\perp} - \frac{m_3}{M}(\vec{M}'_b\vec{\omega}_b)dt. \end{gathered} \tag{66}$$

Первое из соотношений (66) находится в полном соответствии с выражениями (60) и (61). Складывая почленно левые и правые части последних двух равенств (66), приходим к первому соотношению (66). Используя выражения для $dA'_{a\|}$ (62) и $dA'_{a\perp}$ (60), выводим:

$$dA''_{a\|} = \mu_a(\ddot{R}_a - R_a\dot{\varphi}_a^2)\dot{R}_a dt, \quad dA''_{a\perp} = (\vec{M}'_a\vec{\omega}_a)dt. \tag{67}$$

Отсюда полная работа частиц подсистемы a в системе отсчета S'' составляет:

$$dA''_a = dA''_{a\|} + dA''_{a\perp} = dK''_a, \quad K''_a = \frac{1}{2}\mu_a\vec{V}_a^2. \tag{68}$$

Из (46), (52) и (68) видно, что

$$dA' = dK', \quad K' = K'_b + K''_a. \tag{69}$$

При этом (см. (60)) $K'_a - K''_a = \dfrac{m_3}{M}\dfrac{\mu_b}{2}\vec{V}_b^2$.

Отметим, что согласно (61) при $K''_a = const$, $\vec{L}''_a = const$ подсистема a находится в состоянии вращательного движения по инерции.

Приведем окончательные формулы для энергетических соотношений, характеризующих рассматриваемую трехчастичную систему в системе отсчета S' (учитываем равенства (46), (50), (61) и (67)):

$$\begin{aligned} &dA' = dA'_{\|} + dA'_{\perp} = dK', \quad K' = \frac{1}{2}\mu_a\vec{V}_a^2 + \frac{1}{2}\mu_b\vec{V}_b^2, \\ &dA'_{\|} = \mu_a(\ddot{R}_a - R_a\dot{\varphi}_a^2)\dot{R}_a dt + \mu_b(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt, \quad dA'_{\perp} = \left(\vec{M}'_a\vec{\omega}_a\right)dt + \left(\vec{M}'_b\vec{\omega}_b\right)dt. \end{aligned} \tag{70}$$

Результирующие момент импульса и момент сил, действующих на систему, определяются равенствами:

$$\vec{L}' = \sum_{i=1,2,3}\vec{L}'_i, \quad \vec{L}'_i = [\vec{r}'_i\vec{P}'_i], \quad \vec{M}' = \sum_{i=1,2,3}\vec{M}'_i, \quad \vec{M}'_i = [\vec{r}'_i\vec{F}'_i], \quad \vec{M}' = d\vec{L}'/dt.$$

Вычисления дают: $\vec{L}' = \mu_a[\vec{R}_a, \dot{\vec{R}}_a] + \mu_b[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b]$. Согласно (58) и (49), $\vec{L}''_a = \mu_a[\vec{R}_a, \dot{\vec{R}}_a] = \mu_a R_a^2\dot{\varphi}_a\vec{m}_a$ и $\vec{L}'_b = \mu_b[\vec{R}_b, \dot{\vec{R}}_b] = \mu_b R_b^2\dot{\varphi}_b\vec{m}_b$. Следовательно, имеют место равенства (см. (52) и (61)):

$$\vec{L}' = \vec{L}''_a + \vec{L}'_b, \quad \vec{L}''_a = \mu_a R_a^2\dot{\varphi}_a\vec{m}_a, \quad \vec{L}'_b = \mu_b R_b^2\dot{\varphi}_b\vec{m}_b. \tag{71}$$

Согласно (52), (67) — (69),

$$\begin{aligned} &dA''_{a\|} = \mu_a(\ddot{R}_a - R_a\dot{\varphi}_a^2)\dot{R}_a dt, \quad dA''_{a\perp} = (\vec{M}''_a\vec{\omega}_a)dt, \\ &dA'_{b\|} = \mu_b(\ddot{R}_b - R_b\dot{\varphi}_b^2)\dot{R}_b dt, \quad dA'_{b\perp} = (\vec{M}'_b\vec{\omega}_b)dt, \quad K''_a = \mu_a\vec{V}_a^2/2, \quad K'_b = \mu_b\vec{V}_b^2/2. \end{aligned} \tag{72}$$

Следовательно,

$$K' = K''_a + K'_b, \quad dA'_{\|} = dA''_{a\|} + dA'_{b\|}, \quad dA'_{\perp} = dA''_{a\perp} + dA'_{b\perp}. \tag{73}$$

Как видим, полная кинетическая энергия рассматриваемой системы K' может быть представлена в виде суммы кинетических энергий подсистем a и b. Но при этом кинетическая энергия подсистемы a вычисляется в системе отсчета S'' (т. е. в системе центра масс подсистемы a), а кинетическая энергия подсистемы b — в системе отсчета S' (т. е. в системе центра масс подсистемы b). Из (71) — (73) следует, что аналогичное представление справедливо и для величин $\vec{L}'$, $\vec{M}'$, $dA'_{\|}$ и $dA'_{\perp}$: каждая из них может быть представлена в виде суммы величин, относящихся к подсистемам a и b, но записанных в различных системах отсчета — S'' и S'.

Задача трех тел распадается, таким образом, на две относительно независимые задачи: задачу о движении подсистемы a и аналогичную задачу для подсистемы b. Строго говоря, движения подсистем a и b не являются независимыми: подсистемы a и b связаны между собой тем, что центр масс подсистемы a рассматривается как отдельная частица, входящая в подсистему b. Однако, в силу (46), как кинетическая энергия всей системы, так и составляющие работы, совершаемой частицами, распадаются на сумму двух не связанных между собой частей, каждая из которых определяется физическими величинами, относящимися только к этой части.

Приведем формулы для сил, действующих на частицы в исходной системе отсчета S

(эти формулы можно получить, используя равенства (32) и (35)):

$$\vec{F}_1 = \mu_a \ddot{\vec{R}}_a + \frac{m_1 m_3}{M}\ddot{\vec{R}}_b, \quad \vec{F}_2 = -\mu_a \ddot{\vec{R}}_a + \frac{m_2 m_3}{M}\ddot{\vec{R}}_b, \quad \vec{F}_3 = -\mu_b \ddot{\vec{R}}_b. \tag{74}$$

Если выполняются условия

$$R_\alpha = const \neq 0, \ \omega_\alpha = const \neq 0 \ \ (\alpha = a, b)\,, \tag{75}$$

то имеют место соотношения (см. (41), (52) и (61))

$$\vec{V}_\alpha = \dot{\vec{R}}_\alpha = [\vec{\omega}_\alpha, \vec{R}_\alpha], \quad \ddot{\vec{R}}_\alpha = -\vec{\omega}_\alpha^2 \vec{R}_\alpha = [\vec{\omega}_\alpha, \vec{V}_\alpha], \quad \vec{V}_\alpha^2 = const, \quad \vec{M}'_b = \vec{M}''_a = 0$$

и поэтому, в силу (70), $dA' = dA'_\perp = 0$. Следовательно, рассматриваемая трехчастичная система находится в состоянии ускоренного движения по инерции. Каждая из частиц движется по окружности. Частицы m_1 и m_2 движутся по концентрическим окружностям с центром в точке C_a с радиусами $\left|\vec{r}'_1 - \vec{R}_{C_a}\right| \equiv R_{a1}$ и $\left|\vec{r}'_2 - \vec{R}_{C_a}\right| \equiv R_{a2}$ и угловой скоростью $\vec{\omega}_a$, а частицы m_3 и фиктивная, лежащая в точке C_a, движутся по концентрическим окружностям с центром в точке C с радиусами $\left|\vec{r}'_3 - \vec{R}_C\right| \equiv R_{b3}$ и $\left|\vec{R}_C - \vec{R}_{C_a}\right| \equiv R_{b4}$ и угловой скоростью $\vec{\omega}_b$. Несложные вычисления дают: $R_{a1} = \dfrac{m_2}{M_a}R_a$, $R_{a2} = \dfrac{m_1}{M_a}R_a$, $R_{b3} = \dfrac{M_a}{M}R_b$, $R_{b4} = \dfrac{m_3}{M}R_b$. Расстояния между частицами составляют: R_a — между частицами m_1 и m_2, и R_b — между частицей m_3 и фиктивной частицей. Параметры, характеризующие ускоренное движение трехчастичной системы по инерции, т. е. величины $R_\alpha, \omega_\alpha, V_\alpha$, определяются кинетической энергией и моментом импульса подсистем a и b. Приведем соответствующие формулы (ср. с равенствами (7) и (18)):

$$R_\alpha = L_\alpha \big/ \sqrt{2\mu_\alpha K_\alpha}\,, \quad \omega_\alpha = 2K_\alpha / L_\alpha\,, \quad V_\alpha = \sqrt{2K_\alpha/\mu_\alpha}\,, \tag{76}$$

где $\alpha = a, b;$ $\quad L_a = L''_a,\ L_b = L'_b,\ K_a = K''_a,\ K_b = K'_b$.

Отметим еще один случай движения по инерции рассматриваемой трехчастичной системы (ср. с (75)): $R_a = const \neq 0,\ \omega_a = const \neq 0, \quad \dot{R}_b = const \neq 0, \quad \omega_b = 0$. В этом случае частицы m_1 и m_2 движутся, как и в предыдущем случае, по концентрическим окружностям, а частица m_3 движется равномерно и прямолинейно со скоростью $\dot{\vec{R}}_b = const$.

4. Явление свободного падения тел

Сформулируем следующую задачу. Имеется небольшое пробное тело (частица) m_1, которое движется ускоренно по инерции вместе с некоторым массивным телом m_2, образуя с ним единое целое, относительно другого массивного тела m_3. В некоторый момент времени $t = t_0$ телу m_1 сообщается дополнительная скорость, относительно тела m_2, в результате чего тело m_1 отделяется от m_2. Необходимо исследовать поведение тела m_1 после сообщения ему дополнительной скорости. Для простоты будем считать, что рассматриваемые тела — точечные массы, причем $m_1 << m_2 << m_3$.

Прежде чем перейти к решению указанной задачи, необходимо установить вид уравнения движения ускоренно движущейся по инерции частицы, на которую действует, начиная с некоторого момента времени, возмущение в виде внешней силы.

Пусть частица движется ускоренно по инерции по некоторой траектории. Если $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ — радиус-вектор частицы в момент времени t, то на частицу действует в этот момент сила $\vec{F}_0 = \vec{F}_0(t)$, определяемая равенством

$$\vec{F}_0 = m\ddot{\vec{r}}_0(t)\,. \tag{77}$$

В случае ускоренного движения по инерции сила (77) не совершает работы над частицей при ее перемещении. Эта сила не является внешней, она порождается частицей, движущейся ускоренно по инерции, т. е. имеет чисто кинематическое происхождение, будучи следствием ускорения. Посмотрим, однако, на равенство (77) как на уравнение движения, определяющее $\vec{r}_0(t)$ при заданной силе $\vec{F}_0 = \vec{F}_0(t)$. В качестве простейшего примера рассмотрим движение частицы по окружности радиуса r_0 с частотой ω_0:

$$\vec{r}_0(t) = r_0\,\vec{e}_t, \quad \vec{e}_t = (\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t), \quad r_0 = const, \quad \omega_0 = const\,. \tag{78}$$

Согласно (77) и (78), на частицу действует сила

$$\vec{F}_0(t) = -mr_0\omega_0^2\,\vec{e}_t\,. \tag{79}$$

В момент времени $t = 0$ радиус-вектор и вектор скорости принимают вид:

$$\vec{r}_0(0) = r_0\,(1,0), \quad \dot{\vec{r}}_0(0) = r_0\omega_0(0,1). \tag{80}$$

Прямым расчетом легко убедиться в том, что решение уравнения движения (77), в котором сила дается формулой (79), с начальными условиями (80) в точности совпадает с (78). Отсюда следует, что формально силу $\vec{F}_0(t)$, действующую на частицу при ее ускоренном движении по инерции, можно считать внешней. Нужно помнить, однако, что с физической точки зрения сила $\vec{F}_0(t)$ не является внешней, так как она порождается ускоренно движущейся по инерции частицей. Если представить себе систему классических частиц, движущихся ускоренно по инерции, то можно утверждать, что силы, порождаемые частицами при их движении, образуют особую физическую среду, которая неотделима от частиц и которая влияет на движение всей системы в частиц в целом (см. Введение).

Рассмотрим теперь частицу, которая движется ускоренно по инерции по закону $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ и на которую, начиная с момента $t = t_0 = 0$, действует внешняя сила $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ext}(\vec{r},\vec{p},t)$. Так как формально сила $\vec{F}_0(t)$ (79) не отличается от внешней, то движение частицы при $t \geq 0$ следует описывать уравнением

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_0(t) + \vec{F}_{ext}(\vec{r},\vec{p},t), \tag{81}$$

где векторы $\vec{r} = \vec{r}(t)$ и $\vec{p} = m\dot{\vec{r}}(t) = \vec{p}(t)$, в соответствии с указанной выше постановкой физической задачи, должны подчиняться начальному условию

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0(0), \quad \vec{p}(0) = m\dot{\vec{r}}_0(0)\,. \tag{82}$$

Подчеркнем, что при решении уравнения движения (81) входящие в его правую часть силы $\vec{F}_0$ и $\vec{F}_{ext}$ мы должны рассматривать на равных основаниях — как заданные, внешние силы.

Установив вид уравнения движения, описывающего возмущение физической системы, находящейся в состоянии ускоренного движения по инерции, под действием внешней силы $\vec{F}_{ext}$, мы должны, в качестве следующего шага, определить вид силы $\vec{F}_{ext}$, которая в некоторый момент времени сообщает частице дополнительную скорость. Вид искомой силы мы установим, используя известное решение задачи о свободном падении тела в гравитационном поле в традиционной (стандартной) формулировке.

Пусть небольшое тело массы m движется в однородном гравитационном поле, сообщающем телу ускорение свободного падения $\vec{g}$ ($\vec{g} = const$). Движение тела описывается уравнением $m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g}$, решение которого $\vec{r} = \vec{r}(t)$, подчиняющееся начальному условию $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(t_0) = \vec{v}_0$, имеет вид:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2\,. \tag{83}$$

Предположим, что до момента времени $t = t_0$ (т. е. при $t \leq t_0 - 0$) тело движется по закону (83). В момент $t = t_0$ на тело действует некоторая внешняя сила $\vec{F}_{ext}$, сообщающая ему дополнительную скорость $\vec{v}_1 = const$. Очевидно, что в этом случае состояние движения тела описывается следующими радиусом-вектором и вектором скорости:

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0(t-t_0)+\frac{1}{2}\vec{g}(t-t_0)^2+\vec{v}_1(t-t_0)\theta(t-t_0),$$
$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\vec{g}(t-t_0)+\vec{v}_1\theta(t-t_0), \tag{84}$$

где $\theta(t-t_0)$ — функция Хевисайда. Согласно (84), скорость изменения импульса $\vec{p}=m\vec{v}$ тела составляет:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{g}+m\vec{v}_1\delta(t-t_0)\,, \tag{85}$$

где $\delta(t-t_0)$ — δ-функция Дирака. Сравнивая (85) с уравнением движения тела во внешнем поле $\vec{F}_{ext}$, $\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{g}+\vec{F}_{ext}$, получаем следующее выражение для внешней силы, сообщающей телу дополнительную скорость $\vec{v}_1$ в момент времени $t=t_0$:

$$\vec{F}_{ext}=m\vec{v}_1\delta(t-t_0)\,. \tag{86}$$

Отметим, что, согласно (84), в момент времени $t=t_0$ в результате действия силы (86) кинетическая энергия тела претерпевает скачок, величина которого равна $m(\vec{v}_0+\vec{v}_1)^2/2-m\vec{v}_0^2/2\equiv\Delta K$.

Обратимся теперь к интересующей нас задаче об ускоренном движении по инерции замкнутой системы трех тел с массами m_1, m_2 и m_3. Как и в предыдущем разделе, выделим подсистему a, состоящую из тел m_1 и m_2, и подсистему b, состоящую из тела m_3 и фиктивного тела массой $m_1+m_2\equiv M_a$, помещенного в центре масс C_a подсистемы a. Предположим, что подсистемы a и b находятся в состоянии ускоренного движения по инерции. Это значит, что тела m_1 и m_2 движутся по окружностям, центр которых совпадает с точкой C_a, а тела m_3 и M_a движутся по окружностям с центром в точке C. Можно представить себе, что до момента t_0 подсистема a является шарообразным телом и тело m_1 движется ускоренно по инерции по его (воображаемой) поверхности.

В системе центра масс S'' подсистемы a радиусы-векторы тел m_1 и m_2 даются формулами (54), которые можно записать следующим образом:

$$\vec{r}_1''=\frac{\mu_a}{m_1}\vec{R}_a,\quad \vec{r}_2''=-\frac{\mu_a}{m_2}\vec{R}_a,\quad \vec{R}_a=\vec{r}_1''-\vec{r}_2''=R_a\vec{e}_a,\quad \vec{e}_a=(\cos\omega_a t,\sin\omega_a t). \tag{87}$$

Здесь $R_a=const$ — расстояние между телами m_1 и m_2, $\frac{\mu_a}{m_i}R_a\equiv R_i$ ($i=1,2$) — радиус окружности, по которой перемещается тело m_i, $\omega_a=const$. В силу (87) на рассматриваемые тела действуют силы $\vec{F}_1''=-\mu_a\omega_a^2\vec{R}_a$ и $\vec{F}_2''=\mu_a\omega_a^2\vec{R}_a$. В дальнейшем нас будет интересовать область изменения времен t, в которой $\omega_a t\ll 1$. В указанной области времен можно пренебречь зависимостью сил $\vec{F}_1''$ и $\vec{F}_2''$ от времени и записать их в виде:

$$\vec{F}_i''=m_i\vec{g}_i,\quad i=1,2,\quad \vec{g}_1=-(m_2/M_a)\omega_a^2(1,0),\quad \vec{g}_2=(m_1/M_a)\omega_a^2(1,0)\,. \tag{88}$$

Пусть в момент времени $t=t_0=0$ на тело m_1 подействовала внешняя сила $\vec{F}_{ext,1}$, которая сообщила ему дополнительную скорость $\vec{v}_1=const$. Вследствие явления отдачи, действие силы $\vec{F}_{ext,1}$ на тело m_1 приведет к появлению некоторой силы отдачи $\vec{F}_{ext,2}$, которая, действуя на тело m_2, сообщит ему некоторую дополнительную скорость $\vec{v}_2=const$. Учитывая равенство (86), эти силы можно записать в виде:

$$\vec{F}_{ext,i}=m_i\vec{v}_i\delta(t),\ i=1,2\,. \tag{89}$$

Поскольку силы $\vec{F}_1''$ и $\vec{F}_2''$ удовлетворяют условию $\vec{F}_1''+\vec{F}_2''=0$, то аналогичному условию естественно подчинить и силы $\vec{F}_{ext,1}$ и $\vec{F}_{ext,2}$: $\vec{F}_{ext,1}+\vec{F}_{ext,2}=0$. Используя последнее равенство и соотношения (89), определяем скорость отдачи тела m_2:

$$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1(m_1 / m_2). \tag{90}$$

Таким образом, уравнение движения тела m_1 при $t \geq 0$ принимает вид:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1'' = m_1\vec{g}_1 + m_1\vec{v}_1\delta(t). \tag{91}$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию $\vec{r}_1''(0) = \vec{r}_{10}$, $\dot{\vec{r}}_1''(0) = 0$, дается формулой (при $t \geq +0$)

$$\vec{r}_1'' = \vec{r}_{10} + \vec{v}_1 t + \frac{1}{2}\vec{g}_1 t^2 , \tag{92}$$

которая очевидным образом описывает эффект свободного падения пробного тела в поле тяготения массивного тела (ср. с формулами (84) стандартного подхода).

Отметим, что на основании приведенных результатов можно сделать следующий вывод. Подбрасывание малого пробного тела (m_1) над поверхностью массивного тела (m_2) приводит, вследствие эффекта отдачи, к искажениям движения массивного тела. Однако эти искажения весьма малы при выполнении условия $m_1 << m_2$, как это следует из соотношения (90).

Принято считать, что причиной взаимного притяжения тел, обладающих массой, как и причиной свободного падения на массивное тело малого пробного тела, подброшенного над поверхностью массивного, являются силы притяжения между любыми двумя телами, подчиняющиеся закону всемирного тяготения. Из представленных результатов видно, что причиной указанных явлений является ускоренное движение тел по инерции. Так, причиной притяжения Земли к Солнцу и причиной падения на поверхность Земли тел, подброшенных над ее поверхностью, является вращательное движение Земли по инерции, состоящее из двух компонент: вращения Земли вокруг Солнца и вращения Земли вокруг собственной оси. Любое тело, находящееся на поверхности Земли, движется ускоренно по инерции вместе с планетой, и это движение является причиной его притяжения к центру Земли. Вследствие этого движения, тело, подброшенное над поверхностью Земли (при достаточно малой скорости тела) неизбежно упадет на поверхность планеты.

5. Особенности ускоренного движения по инерции в различных системах координат

Исследование особенностей ускоренного движения частиц по инерции, проявляющихся в различных системах координат (СК), начнем с простейшей СК — **декартовой**.

5.1. Декартовы координаты

Вводя орты $\vec{e}_x = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_y = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ прямоугольных декартовых координат x, y, z, представим радиус-вектор $\vec{r}$, векторы скорости $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ и ускорения $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ классической точечной частицы в следующем виде: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Вектор $d\vec{r}$ элементарного перемещения частицы за время dt и его компоненты $d\vec{r}_i$, $(i = x, y, z)$, определяются формулами:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt = \sum_{i=x,y,z} d\vec{r}_i,\ d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt,\ \vec{v}_i = v_i\vec{e}_i,\ v_x = \dot{x},\ v_y = \dot{y},\ v_z = \dot{z} . \tag{93}$$

При движении частицы массой m по криволинейной траектории на частицу действует сила $\vec{F} = m\vec{a} = \sum_{i=x,y,z} F_i\vec{e}_i$, $F_i = m\dot{v}_i$, работа которой за время dt составляет:

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = \sum_{i=x,y,z} dA_i, \quad dA_i = \vec{F}\vec{v}_i dt = dK_i, \quad K_i = m\vec{v}_i^2 \big/ 2. \tag{94}$$

Здесь K_i — кинетическая энергия частицы при ее движении вдоль оси i. Условия

$$dA_i = 0, \quad i = x, y, z, \tag{95}$$

приводят к равномерному прямолинейному движению частицы, т. е. к поступательной инерции:

$$v_i = const,\ i = x, y, z .$$

Под **ускоренным движением частицы по инерции** естественно понимать такое движение, при котором на частицу действует сила $\vec{F}$ $(\vec{F} \neq 0),$ но эта сила не совершает работы:

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = dK = 0, \quad \vec{F} \neq 0, \tag{96}$$

где $K = m\vec{v}^2/2$ — полная кинетическая энергия частицы. Ускоренное движение по инерции мы называем **движением по инерции в сильном смысле**, если, помимо условий (96), выполняются условия (95), т. е. если обращается в нуль каждая из компонент работы, соответствующих независимым перемещениям частицы в пространстве.

Из соотношений (94) видно, что **в декартовых координатах ускоренное движение частицы по инерции в сильном смысле не имеет места**. Действительно, в силу (94) из условий (95) следует, что $v_i^2 = const$, т. е. $F_i = m\dot{v}_i = 0,\ i = x, y, z$. Значит, при выполнении условий (95) сила, действующая на частицу, обращается в нуль: $\vec{F} = 0$, т. е. движение частицы по инерции является равномерным и прямолинейным (такое движение естественно назвать **поступательной инерцией**).

В то же время **декартовы координаты позволяют описать ускоренное движение по инерции в слабом смысле**, когда соотношения (96) выполняются, но оказываются нарушенными хотя бы два из условий (95). При слабом движении частицы по инерции происходит перераспределение энергии частицы между ее степенями свободы, но сила, действующая на частицу, не совершает над нею работы. Таким образом, при слабой инерции перекачка энергии частицы из одних степеней свободы в другие происходит в отсутствие каких-либо энергетических затрат.

Простейшим примером **слабого движения по инерции** может служить движение частицы, вектор скорости которой имеет следующие компоненты:

$$v_x = -a\sin\omega t, \quad v_y = a\cos\omega t, \quad v_z = v_{0z}, \tag{97}$$

где $a = const,\ \omega = const,\ v_{0z} = const$. Действительно, в этом случае полная кинетическая энергия K частицы и ее компонента K_z составляют: $K = m(a^2 + v_{0z}^2)/2,\ K_z = mv_{0z}^2/2$. Следовательно, $dA = dK = 0,\ \ dA_z = dK_z = 0$, но $dA_x = -dA_y = (m\omega a^2/2)\sin(2\omega t)dt \neq 0$. Как видим, рассматриваемое движение характеризуется тем, что x - и y -компоненты силы, действующей на частицу, совершает над нею работу, но работа x -компоненты силы полностью компенсируется работой y -компоненты, так что полная кинетическая энергия частицы сохраняется. Происходит, таким образом, непрерывная перекачка энергии из одной степени свободы в другую и обратный процесс, компенсирующие друг друга. Из выражения для радиуса-вектора частицы, движущейся со скоростями (97),

$$\vec{r} = \left(a\cos\omega t,\ a\sin\omega t,\ v_{0z}\omega t\right)/\omega, \tag{98}$$

видно, что рассматриваемая частица движется с частотой ω по винтовой линии, ось которой совпадает с осью z декартовой СК; радиус поперечного сечения прямого кругового цилиндра, по поверхности которого движется частица, составляет a/ω; на частицу действует сила, направленная к оси z перпендикулярно к ней: $\vec{F} = -ma\omega(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$.

Приведем еще один пример **слабого движения по инерции**. Пусть частица движется по траектории, описываемой радиусом-вектором

$$\vec{r} = \vec{a}\cos\omega t + \vec{b}\sin\omega t, \tag{99}$$

где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — постоянные векторы, причем $\vec{a}\vec{b} = 0,\ \vec{a}^2 = \vec{b}^2,\ \omega = const$. Скорость и ускорение частицы составляют: $\vec{v} = -\omega\vec{a}\sin\omega t + \omega\vec{b}\cos\omega t,\ \vec{a} = -\omega^2\vec{r}.$ При этом $\vec{r}^2 = \vec{a}^2 \equiv r_0^2,\ \ \vec{v}^2 = \omega^2 r_0^2.$ Следовательно, частица движется ускоренно по инерции по сферической поверхности радиуса r_0 с постоянной по модулю скоростью; на частицу действует сила, направленная к центру сферы. Пусть для определенности $\vec{a} = (a, 0, 0),\ \ \vec{b} = (0, b_1, b_2),\ \ a^2 = b_1^2 + b_2^2$. Компоненты кинетической энергии выражаются формулами:

$$(K_x; K_y; K_z) = (m\omega^2/2)\left(a^2\sin^2\omega t;\quad b_1^2\cos^2\omega t;\quad b_2^2\cos^2\omega t\right).$$

Отсюда $(dA_x, dA_y, dA_z) = \dfrac{m}{2}\omega^3(a^2, -b_1^2, -b_2^2)\sin(2\omega t)dt \neq 0, \quad \sum_{i=x,y,z} dA_i = 0$. Как видим, движение (99) представляет собой движение по инерции в слабом смысле; **при движении частицы происходит перераспределение кинетической энергии частицы между всеми тремя степенями свободы**, но полная кинетическая энергия остается неизменной. Траекторией движения является окружность радиуса r_0, лежащая в плоскости, образуемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

5.2. Цилиндрические координаты

Обозначим через $\vec{\rho}$ вектор, лежащий в плоскости xy декартовой СК:

$$\vec{\rho} = (x, y, 0) = \rho\vec{e}_\rho.$$

Здесь $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$; ρ и φ — полярные координаты частицы, находящейся в плоскости xy; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vec{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ — орт вектора $\vec{\rho}$. Введем базисную тройку взаимно ортогональных векторов $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$, где $\vec{e}_\varphi = \dot{\vec{e}}_\rho/\dot{\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{e}_z = (0,0,1)$. Векторы $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ подчиняются условиям $(\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $[\vec{e}_\rho\vec{e}_\varphi] = \vec{e}_z$, $[\vec{e}_\varphi\vec{e}_z] = \vec{e}_\rho$, $[\vec{e}_z\vec{e}_\rho] = \vec{e}_\varphi$ и удовлетворяют соотношению

$$\dot{\vec{e}}_\alpha = [\vec{\omega}\vec{e}_\alpha], \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z. \tag{100}$$

Выше $\alpha, \beta = \rho, \varphi, z$; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Используя в качестве цилиндрических координат величины ρ, φ, z, радиус-вектор частицы представим в виде: $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$. Векторы скорости и ускорения и их компоненты выражаются формулами:

$$\begin{aligned} &\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{\alpha=\rho,\varphi,z}\vec{v}_\alpha, \quad \vec{v}_\alpha = v_\alpha\vec{e}_\alpha, \quad v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}, \\ &\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_{\alpha=\rho,\varphi,z}\vec{a}_\alpha, \quad \vec{a}_\alpha = a_\alpha\vec{e}_\alpha, \quad a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}, \quad a_z = \ddot{z}. \end{aligned} \tag{101}$$

Приведем выражение для квадрата вектора скорости: $\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$. Используя равенства (100), вектор ускорения $\vec{a}$ можно представить в виде:

$$\vec{a} = \dot{v}_\rho\vec{e}_\rho + \dot{v}_\varphi\vec{e}_\varphi + \dot{v}_z\vec{e}_z + [\vec{\omega}\vec{v}], \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z. \tag{102}$$

С помощью (101) и (102) нетрудно вывести следующее соотношение:

$$\vec{F}\vec{v} = m(\dot{v}_\rho v_\rho + \dot{v}_\varphi v_\varphi + \dot{v}_z v_z) = dK/dt, \quad K = m\vec{v}^2/2, \tag{103}$$

где $\vec{F} = m\vec{a}$. Отметим неравенство $\dfrac{d}{dt}\vec{v}_\alpha = \dot{v}_\alpha\vec{e}_\alpha + v_\alpha\dot{\vec{e}}_\alpha = \dot{v}_\alpha\vec{e}_\alpha + v_\alpha[\vec{\omega}\vec{e}_\alpha] \neq \vec{a}_\alpha, \quad (\alpha = \rho, \varphi)$, которое является следствием того, что орты $\vec{e}_\alpha$ цилиндрической СК при $\alpha = \rho, \varphi$ зависят от времени: $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha(t)$.

Анализ ускоренного движения по инерции в цилиндрических координатах существенно упрощается, если использовать выражение (102) для ускорения. Учитывая это выражение, а также равенство $[\vec{\omega}\vec{v}] = \dot{\varphi}(v_\rho\vec{e}_\varphi - v_\varphi\vec{e}_\rho)$, условия сильной инерции $dA_\alpha = \vec{F}\vec{v}_\alpha dt = 0,\ (\alpha = \rho, \varphi, z)$, $\vec{F} \neq 0$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} &v_\rho(\dot{v}_\rho - v_\varphi\dot{\varphi}) = 0; \quad v_\varphi(\dot{v}_\varphi + v_\rho\dot{\varphi}) = 0; \quad v_z\dot{v}_z = 0, \\ &\vec{a} = (\dot{v}_\rho - v_\varphi\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + (\dot{v}_\varphi + v_\rho\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \dot{v}_z\vec{e}_z \neq 0. \end{aligned} \tag{104}$$

Прежде всего, отметим, что из условий (104) вытекают интегралы движения:

$$v_\rho^2 + v_\varphi^2 = const, \quad v_z^2 = const, \quad v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2 \equiv v_0^2 = const. \tag{105}$$

Из последнего из равенств (105) следует, в силу (103), что $dA = \vec{F}\vec{v}dt = 0$, т. е. сила, действующая на частицу, не совершает работы при перемещении частицы. Помимо этого, согласно (104), если все компоненты вектора скорости частицы отличны от нуля, т. е. $v_\alpha \neq 0$ при $\alpha = \rho, \varphi, z$, то $\vec{a} = 0$, т. е. имеет место поступательная инерция. С другой стороны, если все три компоненты вектора скорости равны нулю, то это отвечает состоянию покоя частицы. Отсюда следует, что **необходимым условием ускоренного движения по инерции в сильном смысле является обращение в нуль одной или двух компонент вектора скорости частицы**. Рассмотрим подробнее имеющиеся варианты.

При $v_\rho = \dot{\rho} = 0$ получаем, в силу (105):

$$\rho = \rho_0 = const, \quad v_\varphi = \rho_0 \dot{\varphi} = const, \quad v_z = const. \tag{106}$$

Вводя обозначение $\dot{\varphi} = v_\varphi / \rho_0 \equiv \omega_0 = const,$ находим: $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \quad \varphi_0 = const$. Как видим, при $v_\rho = 0$ и $v_\varphi \neq 0, \; v_z \neq 0$ **ускоренное движение по инерции представляет собой движение по винтовой линии** с осью, направленной параллельно оси z, и с параметрами $\rho_0, \; v_\varphi = \omega_0 \rho_0 = const, \; v_z = const$. Частица движется с ускорением

$$\vec{a} = [\vec{\omega}\vec{v}] = -\rho_0 \omega_0^2 \vec{e}_\rho = -(v_\varphi^2 / \rho_0) \vec{e}_\rho, \quad \vec{\omega} = \omega_0 \vec{e}_z, \quad \vec{v} = v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z, \tag{107}$$

по траектории, описываемой радиусом-вектором

$$\vec{r} = \rho_0 \vec{e}_\rho + v_z t \vec{e}_z, \tag{108}$$

который при $\rho_0 = a/\omega, \; \omega_0 = \omega, \; \varphi_0 = 0$ совпадает с радиусом-вектором (98). При $v_z = 0$ винтовая линия вырождается в окружность. Заметим, что с точки зрения исследователя, использующего цилиндрические координаты, формула (108) описывает ускоренное движение по инерции в сильном смысле, а с точки зрения исследователя, работающего в декартовых координатах, это же движение является движением частицы по инерции в слабом смысле.

Если $v_\varphi = 0$, т. е. $\varphi = const$, то в силу (104) $v_\rho = \dot{\rho} = const$. Отсюда $\rho = at + \rho_0, \quad a = const,$ $\rho_0 = const.$ Следовательно, **частица движется поступательно по инерции**.

Осталось рассмотреть движение частицы при $v_\rho \neq 0$ и $v_\varphi \neq 0$. В этом случае, в силу (104), $\vec{a} = \dot{v}_z \vec{e}_z = 0$ (поскольку $v_z = const$, см. (105)).

Подводя итог, можно сформулировать следующее утверждение: в цилиндрических координатах ускоренное движение по инерции в сильном смысле имеет место лишь при $v_\rho = 0,$ $v_\varphi = const \neq 0$, причем **траекторией движения является винтовая линия** (при $v_z \neq 0$) **либо окружность** (при $v_z = 0$).

Сравнивая описание ускоренного движения частицы по инерции в декартовых координатах с описанием аналогичного движения в цилиндрических координатах, мы столкнулись с неожиданным обстоятельством: мы доказали, что **в декартовых координатах движение частицы по инерции в сильном смысле вообще не имеет места, но в цилиндрических координатах такое движение существует — им является движение частицы по винтовой линии**.

Используя декартовы координаты, мы обнаружили, что движение частицы по винтовой линии представляет собой ускоренное движение по инерции в слабом смысле: это движение сопровождается непрерывным перераспределением кинетической энергии частицы между степенями свободы x и y, но полная кинетическая энергия сохраняется неизменной. С другой стороны, работая в цилиндрических координатах, мы установили, что при движении частицы по винтовой линии кинетическая энергия частицы сохраняется и перераспределения энергии не происходит.

На первый взгляд, приведенные выше результаты противоречат друг другу и, следовательно, указывают на наличие принципиальной ошибки в наших рассуждениях. Покажем, что в развиваемой нами теории не содержится ошибки. Суть дела состоит в том, что положение частицы в пространстве в рассматриваемых СК описывается разными переменными. Определяемое этими переменными **физическое содержание понятия степеней свободы частицы оказывается различным в различных СК**. Эти утверждения, ввиду их принципиального характера, заслуживают более подробного обсуждения.

Работу $dA = \vec{F}\vec{v}dt$, совершаемую силой $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$ над частицей при ее перемещении в указанных координатах, представим в виде суммы работ, совершаемых компонентами силы $\vec{F}$. Имеем:

$$dA = \sum_{\alpha=\rho,\varphi,z} dA_\alpha, \quad dA_\alpha = \vec{F}\vec{v}_\alpha dt \text{ —} \tag{109}$$

в цилиндрических координатах и

$$dA = \sum_{i=x,y,z} dA_i, \quad dA_i = \vec{F}\vec{v}_i dt \text{ —} \tag{110}$$

в декартовых координатах, где $\vec{v}_\alpha$ и $\vec{v}_i$ — компоненты вектора скорости частицы $\vec{v}$ в цилиндрических (см.(101)) и декартовых (см.(93)) координатах, соответственно. Векторы $\vec{v}_\alpha$ представим в виде суперпозиции векторов $\vec{v}_i$:

$$\vec{v}_\alpha = \sum_{i=x,y,z} c_{\alpha i}\vec{v}_i \quad \alpha = \rho,\varphi,z, \tag{111}$$

где $c_{\alpha i}$ — искомые коэффициенты разложения. Умножая обе части последнего равенства скалярно на орты декартовой системы координат $\vec{e}_i$, $i = x,y,z$, получаем следующую формулу:

$$c_{\alpha i} = (v_\alpha / v_i)(\vec{e}_i\vec{e}_\alpha). \tag{112}$$

Подстановка разложения (111) в последнюю из формул (109) дает:

$$dA_\alpha = \sum_{i=x,y,z} c_{\alpha i} dA_i . \tag{113}$$

Выше было показано, что при описании ускоренного движения по инерции в сильном смысле в цилиндрических координатах выполняется равенство $v_\rho = 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае матрица $c_{\alpha i}$ является вырожденной, т. е. $\det c_{\alpha i} = 0$. Отсюда следует, что равенства (113), рассматриваемые как уравнения относительно dA_i, не имеют решения вида: $dA_i = 0$ при $dA_\alpha = 0$. Это и означает, что движение частицы по инерции в сильном смысле, описываемое в цилиндрических координатах, является движением по инерции в слабом смысле в декартовых координатах. Формальная причина этого явления состоит, таким образом, в том, что при рассмотрении ускоренного движения частицы по инерции матрица $c_{\alpha i}$ (112), связывающая между собой компоненты работы в обеих СК (см.(113)), оказывается вырожденной.

В рассматриваемой здесь задаче этот вывод легко проверить, вычисляя коэффициенты $c_{\alpha i}$ по формуле (112) и используя равенство (113). Расчет показывает, что применительно к движению частицы по инерции в цилиндрических координатах из (113) вытекает равенство

$$dA_x + dA_y = 0. \tag{114}$$

С другой стороны, непосредственный расчет величин dA_x и dA_y дает (используем формулы (107) для ускорения $\vec{a}$ и скорости $\vec{v}$ и учитываем, что $\rho = \rho_0 = const$):

$$dA_x = -dA_y = (m\rho_0^2\omega_0^3/2)\sin(2\varphi)dt, \quad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0$$

в полном соответствии с равенством (114).

Таким образом, при движении частицы по инерции по винтовой линии происходит перераспределение энергии между поступательными степенями свободы x и y, принадлежащими к декартовым координатам. Но этот факт не противоречит тому обстоятельству, что между степенями свободы, описываемыми переменными ρ и φ в цилиндрических координатах, никакого перераспределения энергии не происходит.

5.3. Сферические координаты

В сферических координатах r,θ,φ радиус-вектор и вектор скорости точечной частицы можно записать в виде:

$$\vec{r} = r\vec{e}_{\vec{r}}, \quad \vec{v} = \sum_{\alpha=r,\theta,\varphi} \vec{v}_\alpha, \quad \vec{v}_\alpha = v_\alpha \vec{e}_\alpha, \quad v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta, \tag{115}$$

где векторы

$$\vec{e}_\alpha, \ (\alpha = r,\theta,\varphi): \quad \vec{e}_r = (\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta),$$

$$\vec{e}_\theta = (\cos\theta\cos\varphi, \ \cos\theta\sin\varphi, \ -\sin\theta), \quad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0),$$

образуют правовинтовую тройку взаимно ортогональных ортов, удовлетворяющих соотношениям: $(\vec{e}_\alpha\vec{e}_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, $[\vec{e}_r\vec{e}_\theta] = \vec{e}_\varphi$, $[\vec{e}_\theta\vec{e}_\varphi] = \vec{e}_r$, $[\vec{e}_\varphi\vec{e}_r] = \vec{e}_\theta$. Используя равенство

$$\dot{\vec{e}}_\alpha = [\vec{\tilde{\omega}}\vec{e}_\alpha], \quad \vec{\tilde{\omega}} = \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_r - \dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi, \quad \alpha = r,\theta,\varphi,$$

векторы скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ можно представить в следующей форме:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + [\vec{\tilde{\omega}}\vec{r}], \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \sum_{\alpha=r,\theta,\varphi} \dot{v}_\alpha\vec{e}_\alpha + [\vec{\tilde{\omega}}\vec{v}] = \sum_{\alpha=r,\theta,\varphi} (\dot{v}_\alpha + [\vec{\tilde{\omega}}\vec{v}]_\alpha)\vec{e}_\alpha. \tag{116}$$

Отметим, что орты $\vec{e}_\alpha$, $\alpha = r,\theta,\varphi$, можно определить равенствами

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{\alpha=r,\theta,\varphi} (\partial\vec{r}/\partial\alpha)\dot{\alpha}, \quad \partial\vec{r}/\partial\alpha = f_\alpha\vec{e}_\alpha, \quad f_\alpha\dot{\alpha} = v_\alpha,$$

где v_α — компоненты вектора скорости $\vec{v}$ (см.(115)), $f_r = 1$, $f_\theta = r$, $f_\varphi = r\sin\theta$.

Вычислим элементарную работу dA, совершаемую за время dt силой $\vec{F} = m\vec{a}$ над частицей при ее движении по траектории. С помощью соотношений (115) и (116) получаем следующее выражение:

$$dA = \vec{F}\vec{v}dt = m\sum_{\alpha=r,\theta,\varphi} v_\alpha\dot{v}_\alpha dt = dK, \quad K = m\vec{v}^2/2. \tag{117}$$

Частица движется по инерции, если $dA = 0$, т. е., в силу (115) и (117), при

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta = const.$$

Условия ускоренного движения частицы по инерции в сильном смысле $dA_\alpha = \vec{F}\vec{v}_\alpha dt = 0$ при $\alpha = r,\theta,\varphi$, $\vec{F} \neq 0$ удобно представить в следующем виде (ср. с аналогичными равенствами (104)):

$$v_r(\dot{v}_r - v_\theta\dot{\theta} - v_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta) = 0, \quad v_\theta(\dot{v}_\theta + v_r\dot{\theta} - v_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta) = 0,$$

$$v_\varphi(\dot{v}_\varphi + v_r\dot{\varphi}\sin\theta + v_\theta\dot{\varphi}\cos\theta) = 0, \tag{118}$$

$$\vec{a} = (\dot{v}_r - v_\theta\dot{\theta} - v_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_r + (\dot{v}_\theta + v_r\dot{\theta} - v_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e}_\theta + (\dot{v}_\varphi + v_r\dot{\varphi}\sin\theta + v_\theta\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{e}_\varphi \neq 0.$$

Согласно соотношениям (118), ускоренное движение по инерции возможно, как и в случае цилиндрических координат, лишь при условии, если одна или две компоненты вектора скорости частицы обращаются в нуль. Проанализируем имеющиеся возможности.

При $v_r = 0$ траектория частицы лежит на сферической поверхности радиуса $r \equiv r_0$ $(r_0 = const \neq 0)$. Второе и третье из уравнений (118) принимают вид:

$$v_\theta(\dot{v}_\theta - v_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta) = 0, \quad v_\varphi(\dot{v}_\varphi + v_\theta\dot{\varphi}\cos\theta) = 0, \tag{119}$$

Из (119) следует интеграл движения: $v_\varphi^2 + v_\theta^2 = r_0^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta) = const$. Из первого из соотношений (116) вытекает равенство $\vec{v} = [\vec{\omega}\vec{r}]$, где $\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\varphi$. Так как векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$ взаимно ортогональны, то $\vec{v}^2 = \omega^2 r^2$, где $\omega^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta$. Следовательно, приведенный выше интеграл движения можно записать в следующем виде:

$$v_\varphi^2 + v_\theta^2 = v^2 = r_0^2\omega^2, \quad \omega^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta = const. \tag{120}$$

Если $v_\varphi = 0$, $v_\theta = const \neq 0$, то $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \omega_0 t + \theta_0$, где $\varphi_0, \theta_0, \omega_0$ — постоянные. При этом $\vec{v} = v_\theta\vec{e}_\theta$, $v_\theta = r_0\omega_0$, $\vec{\tilde{\omega}} = \omega_0\vec{e}_\varphi$, $\vec{a} = -(v_\theta^2/r_0)\vec{e}_r$.

Если же $v_\theta = 0$, $v_\varphi = const \neq 0$, то $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, $\theta = \theta_0$. При этом $\vec{v} = v_\varphi\vec{e}_\varphi$, $v_\varphi = r_0\omega_0\sin\theta_0$ $\vec{\tilde{\omega}} = \omega_0(\cos\theta_0\vec{e}_r - \sin\theta_0\vec{e}_\theta)$, $\vec{a} = -r_0\omega_0^2\sin\theta_0(\cos\theta_0\vec{e}_\theta + \sin\theta_0\vec{e}_r) = -r_0\omega_0^2\sin\theta_0(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. **В каж-**

дом из этих случаев траекторией движения частицы является окружность, лежащая на поверхности шара радиуса r_0; в первом случае радиус окружности равен r_0, а вектор ускорения направлен к центру шара, а во втором — радиус окружности составляет $r_0 \sin\theta_0$, а вектор ускорения направлен к оси z перпендикулярно к ней.

Если $v_\varphi \neq 0,\ v_\theta \neq 0$, то из (119) получаем уравнения

$$\dot{v}_\theta - v_\varphi \dot{\varphi}\cos\theta = 0, \quad \dot{v}_\varphi + v_\theta \dot{\varphi}\cos\theta = 0. \tag{121}$$

Из-за наличия интеграла движения (120) достаточно рассмотреть лишь одно из уравнений (121). Рассматривая величину v_φ как сложную функцию времени ($v_\varphi = v_\varphi(\theta(t))$), можем записать: $\dot{v}_\varphi = \frac{dv_\varphi}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r_0}\frac{dv_\varphi}{d\theta}$. Поэтому второе из уравнений (121) можно преобразовать следующим образом: $\frac{v_\theta}{r_0}\frac{dv_\varphi}{d\theta} + v_\theta\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \quad \to \quad \frac{dv_\varphi}{d\theta} + v_\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0 \quad \to \quad \frac{dv_\varphi}{v_\varphi} = -\frac{d\sin\theta}{\sin\theta}$.

Интегрирование этого уравнения дает (c - постоянная интегрирования):

$$v_\varphi = c/\sin\theta. \tag{122}$$

Мы пришли, таким образом, к интегралу движения $\dot{\varphi} r^2 \sin^2\theta = c_1, \quad c_1 = const$ (при $r = r_0$), полученному и исследованному в работе [4]. Интегрирование уравнений (120) и (122) относительно угловых переменных $\theta = \theta(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ выполнено в [4]. Учитывая (115), (118) и (120), получаем **следующую формулу для ускорения частицы, движущейся по инерции по сферической поверхности радиуса** r_0:

$$\vec{a} = (\dot{v}_r - \dot{\theta}v_\theta - \dot{\varphi}\sin\theta v_\varphi)\vec{e}_r = -r_0(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r = -r_0\omega^2\vec{e}_r = -(v^2/r_0)\vec{e}_r.$$

В случае $v_\varphi = 0,\ v_\theta = 0,\ v_r \neq 0$ из (118) получаем, очевидно: $v_r = const \neq 0$, т. е. $r = v_r t + r_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0$. **Это отвечает поступательной инерции**.

Осталось рассмотреть еще два случая:

1. $v_\varphi = 0,\ v_r \neq 0,\ v_\theta \neq 0$ и 2. $v_\theta = 0,\ v_r \neq 0,\ v_\varphi \neq 0$.

В первом случае $\dot{\varphi} = 0$ и поэтому в силу (116) и (118) $\vec{a} = [\vec{\dot{\omega}}\vec{v}]_\varphi \vec{e}_\varphi = 0$. Следовательно, **имеет место поступательная инерция**.

Во втором случае $\dot{\theta} = 0$, т. е. $\theta = \theta_0$ ($\theta_0 \neq 0, \pi$) и поэтому $\vec{a} = [\vec{\dot{\omega}}\vec{v}]_\theta \vec{e}_\theta = -v_\varphi\dot{\varphi}\cos\theta_0\vec{e}_\theta = -\frac{v_\varphi^2}{r}\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\vec{e}_\theta$. Величины v_r и v_φ можно найти из системы уравнений (см. (118)): $\dot{v}_r - v_\varphi\dot{\varphi}\sin\theta_0 = 0$, $\dot{v}_\varphi + v_r\dot{\varphi}\sin\theta_0 = 0$, которую легко привести к виду:

$$\dot{v}_r - v_\varphi^2/r = 0, \quad \dot{v}_\varphi + v_r v_\varphi/r = 0. \tag{123}$$

Из (123) следует интеграл движения $v_r^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta_0 = \vec{v}^2 = const,$ где $\vec{v}$ — скорость частицы. Полагая величины v_r и v_φ сложными функциями времени вида $f(r(t))$, второе из уравнений (123) можно записать в следующей форме: $dv_\varphi/dr = -v_\varphi/r$. Отсюда $v_\varphi = c/r$, $c = const$. Следовательно, решение системы уравнений (123) имеет вид:

$$v_r^2 = v^2 - c^2/r^2, \quad v_\varphi = c/r. \tag{124}$$

Физический смысл постоянной c легко установить с помощью интеграла движения (см. [4]) $\vec{L}^2 = m^2 r^4 \vec{\omega}^2 = const, \quad \vec{\omega}^2 = \dot{\theta}^2 + (\dot{\varphi}\sin\theta)^2$, где $\vec{L}$ — вектор момента импульса. В рассматриваемом случае $\dot{\theta} = 0$ и поэтому $\vec{\omega}^2 = (\dot{\varphi}\sin\theta)^2$, т. е. $\vec{\omega}^2 = v_\varphi^2/r^2$. Следовательно, $v_\varphi^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2 r^2}$, т. е. $c^2 = \frac{\vec{L}^2}{m^2}$.

Явные зависимости $r = r(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$ несложно найти из уравнений: $\dot{r} = v_r$, $\dot{\varphi} = \dfrac{v_\varphi}{r\sin\theta_0}$, где v_r и v_φ даются формулами (124). Вначале рассмотрим первое из указанных уравнений, которое можно представить в виде:

$$\frac{dr}{dt} = \pm\frac{v}{r}\sqrt{r^2 - r_0^2}, \quad r_0 = \frac{c}{v} = \frac{|\vec{L}|}{mv}.$$

Дальнейшие преобразования дают:

$$d\sqrt{r^2 - r_0^2} = \pm v dt \quad \to \quad \sqrt{r^2 - r_0^2} = \pm v(t - t_0). \qquad (125)$$

Здесь использовано начальное условие: $r = r_0$ при $t = t_0$. Возводя в квадрат обе части последнего из равенств (125), после несложных преобразований приходим к следующему окончательному выражению:

$$r = r_0\sqrt{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}, \quad \omega_0 = v/r_0.$$

Перейдем теперь ко второму из уравнений (124), которое запишем в виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2\sin\theta_0} = \frac{1}{\sin\theta_0}\frac{\omega_0}{1 + \omega_0^2(t - t_0)^2}.$$

Решение этого уравнения, подчиняющееся условию $\varphi = 0$ при $t = t_0$, дается формулой:

$$\varphi = \frac{1}{\sin\theta_0} arctg[\omega_0(t - t_0)].$$

Приведем окончательное выражение для вектора ускорения частицы: $\vec{a} = -c^2/r^3\, ctg\theta_0\vec{e}_\theta$. Из этой формулы видно, что при $\theta_0 = \pi/2$ частица движется по инерции поступательно, а при $\theta_0 \neq \pi/2$ ее движение по инерции является ускоренным. **Траекторией частицы в последнем случае служит расходящаяся спираль**, проходящая по поверхности конуса, ось которого направлена вдоль оси z, а образующая составляет угол θ_0 с осью z [5].

На основании проведенного анализа движения частицы по инерции можно сделать вывод, что в сферических координатах ускоренное движение частицы по инерции в сильном смысле имеет место в следующих случаях (в каждом случае для сравнения приводим выражение для вектора ускорения частицы):

1. $v_r = 0, \quad v_\varphi = 0, \quad v_\theta = const \neq 0; \quad \vec{a} = -v^2\vec{e}_r / r_0;$
2. $v_r = 0, \quad v_\theta = 0, \quad v_\varphi = const \neq 0; \quad \vec{a} = -v^2(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)/r_0\sin\theta_0, \quad \varphi = \omega_0 t + \varphi_0;$
3. $v_r = 0, \quad v_\theta \neq 0, \quad v_\varphi \neq 0; \quad \vec{a} = -v^2\vec{e}_r / r_0;$
4. $v_r \neq 0, \; v_\varphi \neq 0, \; v_\theta = 0; \quad \vec{a} = -c^2 ctg\theta_0\vec{e}_\theta / r^3.$

В первых трех случаях движение частицы происходит на сферической поверхности радиуса r_0, т. е. движение частицы финитно; в последнем же случае движение является инфинитным, траектория частицы представляет собой расходящуюся спираль, лежащую на поверхности конуса.

Из полученных результатов видно, что необходимым условием сильной инерции в сферических координатах является обращение в нуль одной или двух компонент вектора скорости частицы. Указанное условие означает, что матрица $c_{\alpha i}$ в выражении типа (113), связывающем между собой компоненты работы в сферических координатах с компонентами работы в декартовых (или цилиндрических) координатах, оказывается вырожденной. Это обстоятельство приводит к следующей особенности ускоренного движения по инерции: **движение по инерции в сильном смысле, происходящее в сферической СК, оказывается слабым движением по инерции с точки зрения любой другой ортогональной координатной системы.**

5.4. Физическая неэквивалентность различных систем координат

Принято считать, что выбор СК, используемой для описания поведения физической системы, не имеет принципиального значения, поскольку различные СК совершенно равноправны, эквивалентны в отношении любых физических явлений и процессов. Их выбор в конкретной задаче определяется исключительно соображениями удобства, типом симметрии задачи и вкусами исследователя. Если, например, рассматриваемая физическая система обладает аксиальной симметрией, то кажется более естественным работать в цилиндрической СК, так как выкладки в ней могут быть более простыми. Как видно из полученных здесь результатов, эти соображения верны лишь при поверхностном взгляде на проблему. Анализ ускоренного движения частицы по инерции, проведенный нами в декартовых и ортогональных криволинейных (цилиндрических и сферических) координатах, показывает, что эти СК не вполне эквивалентны в отношении ускоренного движения по инерции.

Вопрос о физической неэквивалентности СК имеет принципиальный характер и заслуживает того, чтобы остановиться на нем более подробно. Представим себе, что предметом нашего исследования является движение частицы по криволинейной траектории в системах координат S и S', базисные векторы которых обозначим через $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{\tilde{e}}_{\alpha'}$, где α и α' — параметры, описывающие независимые перемещения частицы в системах координат S и S', соответственно. Обозначим через dA элементарную работу, которую совершает над частицей действующая на нее сила. Величину dA разложим на компоненты dA_α и $d\tilde{A}_{\alpha'}$, отвечающие независимым перемещениям частицы в рассматриваемых СК: $dA = \sum\limits_\alpha dA_\alpha = \sum\limits_{\alpha'} d\tilde{A}_{\alpha'}$. Компоненты dA_α и $d\tilde{A}_{\alpha'}$ связаны между собой равенством (ср. с равенством (113))

$$dA_\alpha = \sum_{\alpha'} c_{\alpha\alpha'} d\tilde{A}_{\alpha'}\,, \tag{126}$$

где $c_{\alpha\alpha'}$ — постоянные коэффициенты.

Суть дела состоит в том, что если в системе координат S частица движется ускоренно по инерции в сильном смысле, т. е. $dA = 0$, $dA_\alpha = 0$ при всех значениях α, то матрица $c_{\alpha\alpha'}$ оказывается вырожденной и по этой причине компоненты работы $d\tilde{A}_{\alpha'}$, вообще говоря, отличны от нуля, т. е. в системе координат S' движение частицы предстает как движение по инерции в слабом смысле, т. е. такое движение по инерции, которое сопровождается перераспределением энергии между различными степенями свободы.

Как видим, **с чисто математической точки зрения физическая неэквивалентность различных** СК **обусловлена вырождением матрицы** $c_{\alpha\alpha'}$, связывающей между собой величины dA_α и $d\tilde{A}_{\alpha'}$ работ, совершаемых над частицей при ее перемещениях в трех взаимно перпендикулярных направлениях в пространстве.

С физический же точки зрения установленная нами особенность движений по инерции объясняется тем, что физическое содержание понятия степени свободы частицы существенно зависит от конкретного выбора системы координат, в которой описывается движение. Напомним, что понятие степени свободы частицы выражает собой способность частицы перемещаться в пространстве определенным образом. В различных координатных системах в роли координат выступают величины, отличающиеся друг от друга по своей природе. Так, декартовыми координатами являются величины x, y, z, имеющие размерность длины; цилиндрическими координатами служат величины ρ, z, имеющие размерность длины, и угловая переменная φ; только одна из сферических координат (r) имеет размерность длины, а две другие (θ, φ) являются угловыми переменными. Выбор координат определяет выбор базисных векторов $\vec{e}_\alpha$ пространства, в котором описывается движение частицы. В то же время выбор базисных векторов определяет те направления в пространстве, которые ассоциируются с понятием степени свободы частицы. Указанные различия между СК (кажущиеся чисто формальными и физически не существенными) и проявляются при описании ускоренных движений по инерции.

Выбирая для описания движения частицы ту или иную СК, наблюдатель фиксирует точку зрения, с которой он описывает движение и оценивает поведение системы. При переходе от одной СК к другой точка зрения наблюдателя изменяется: поскольку изменяются переменные, выступающие в роли координат, то **изменяется само понятие степени свободы части-**

цы, приобретая оттенки, отличающие одну СК от другой. **Физический смысл полученных результатов состоит в том, что различные СК оказываются не вполне физически эквивалентными; явление ускоренного движения частицы по инерции оказывается чувствительным к выбору координатной системы**, относительно которой рассматривается движение.

Как видно из приведенного анализа, от выбора СК весьма существенно зависит характер ускоренного движения частицы по инерции в сильном смысле. Действительно, в декартовых координатах вообще не существует ускоренного движения по инерции в сильном смысле, хотя и имеется обширный спектр ускоренных движений по инерции в слабом смысле. В цилиндрических координатах траекториями движения по инерции являются спираль и окружность, а в сферических координатах — окружность и расходящаяся спираль. Можно показать, что в параболических координатах траектории движения по инерции — окружность и кривые, лежащие на параболоиде вращения.

Принято считать, что точечная частица имеет три поступательные степени свободы, так как частица может перемещаться вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, а вращение точечной частицы вокруг оси, проходящей через частицу, не имеет физического смысла. По-видимому, существование ускоренного движения частицы по инерции означает, что классическая частица может выступать как физическая система, имеющая, наряду с поступательными, и вращательные степени свободы. Так, при ускоренном движении частицы по инерции (в сильном смысле) с траекторией в виде окружности частица ведет себя подобно физической системе, имеющей вращательную степень свободы. Не означает ли это, что спин частицы является следствием ускоренного движения частицы по инерции? Возможно, дальнейшие исследования прольют свет на эту проблему.

Далее, если частица движется по инерции по винтовой линии, то это означает, что частица обладает как поступательной, так и вращательной степенями свободы. Точно так же, при движении частицы по инерции по расходящейся спирали (в сферических координатах) проявляются одновременно вращательная и поступательная степени свободы. Заметим, что если в некоторой криволинейной СК удалось обнаружить ускоренное движение частицы по инерции в сильном смысле, то это состояние движения можно исследовать также, используя и декартовы координаты, ходя в последних движение по инерции будет заведомо слабым.

На основании изложенных результатов можно сделать вывод, что понятие степени свободы частицы является весьма сложным понятием, физическое содержание которого оказывается различным в различных СК. Это обстоятельство нужно учитывать при исследовании ускоренного движения частицы по инерции.

6. Основные результаты и выводы

Как показано в работах [4,5], ускоренные движения частиц по инерции приводят к появлению силы притяжения между частицами. В данной работе из концепции ускоренных движений по инерции выведены обычные законы свободного падения небольшого пробного тела на поверхность массивного. Это значит, что **в указанных работах физическая природа гравитации раскрыта: причиной гравитации являются ускоренные движения частиц по инерции**. **Заложен фундамент теории гравитации как физической теории**.

Явление гравитации находит, таким образом, простое физическое объяснение без привлечения гипотезы о существовании особого силового поля как свойства, внутренне присущего частице, обладающей массой. Отпадает также необходимость во введении понятия гравитационной массы и принципа эквивалентности инертной и гравитационной масс.

Ньютоновская теория гравитации является приближенной, феноменологической теорией, справедливой лишь при выполнении определенных условий. Границы применимости закона всемирного тяготения определяются неравенством: $|U| << K$, где U и K — потенциальная и кинетическая энергии взаимодействующих тел. Установлен физический смысл гравитационной постоянной γ: это интеграл вращательного движения двух точечных частиц по инерции. В области применимости ньютоновской теории гравитации величина γ выражается через инертные массы частиц и интегралы движения, отвечающие фундаментальным физическим законам сохранения — законам сохранения энергии и момента импульса двухчастичной системы.

Получена общая формула для силы взаимодействия между двумя частицами в произвольной многочастичной системе. Показано, что эта сила определяется относительным ускорением частиц. Это значит, что сила взаимодействия между двумя частицами зависит от состояния движения частиц (от их положения в пространстве и скорости).

Показано, что произвольное движение D частицы является линейной комбинацией двух движений: ускоренного движения по инерции $D_{инерц}$ и вынужденного движения $D_{вынужд}$, происходящего под действием внешней силы. Ускоренные движения по инерции ответственны за появление сил чисто кинематического происхождения, которые, в отличие от внешних сил, выступают не в качестве причины ускоренных движений, а в качестве их следствия. Суперпозиция сил, порождаемых в многочастичных системах ускоренными движениями по инерции, приводит к появлению особого силового поля, которое играет роль физической среды, неотделимой от частиц. Эта среда является ареной, на которой происходит движение частиц, и переносчиком взаимодействия между частицами. Зная механизм образования указанной среды, можно описать ее физические свойства и исследовать ее поведение и взаимодействие с порождающими ее частицами.

Из несчетного множества движений, описываемых линейной комбинацией движений $D_{инерц}$ и движений $D_{вынужд}$, в механике Ньютона учитывается единственное движение — $D_{вынужд}$. Вне поля зрения механики лежит, таким образом, континуум движений — такова степень неполноты ньютоновской схемы механики как метода исследования природы. Степень неполноты специальной и общей теорий относительности, очевидно, такова же, как и механики Ньютона, поскольку во всех трех разновидностях механики не принимаются во внимание ускоренные движения по инерции. Ввиду того, что движения $D_{инерц}$ и $D_{вынужд}$ представляют собой диалектические составляющие (диалектические противоположности) движения D, из законов диалектики вытекает следующий вывод: **теория движения материальных тел может быть адекватной физической реальности только при условии, что обе составляющие движения учитываются в теории на равных основаниях** [1,13-15].

Согласно астрофизическим исследованиям, 72% материи Вселенной приходится на невидимую темную энергию и 24% — на столь же незаметную для средств наблюдения темную материю. Таким образом, окружающий нас мир на 96% заполнен материей неизвестной физической природы, и только 4% Вселенной человечество «видит», т. е. может описать и объяснить поведение космических объектов на основе существующих представлений. Приведенные данные свидетельствуют о глубоком кризисе естествознания. Исключив из рассмотрения ускоренные движения по инерции, современная физическая наука оказалась неспособной дать картину мира, адекватную реальности. Полученные нами результаты указывают на то, что **единственным реальным путем разрешения трудностей современного естествознания является пересмотр на основе законов диалектики центральной проблемы физики — проблемы движения**. Ускоренное движение может быть не только вынужденным, принудительным, насильственным, как принимается в механике Ньютона и в ее релятивистских обобщениях, но и свободным, происходящим без принуждения со стороны внешних сил, по инерции. Метод исследования природы должен учитывать обе указанные диалектические составляющие движения, которые ответственны за все разнообразие окружающего нас мира.

Автор благодарит Третяка О. В. за интерес к работе и дискуссии, стимулировавшие исследование проблемы свободного падения тела при учете вращательной инерции, а также Арепьева Ю. Д. и Прокофьева В. П. за интерес к работе и многочисленные дискуссии.

Литература:

1. *Гегель Г.* Философия природы. Энциклопедия философских наук. Т. 2. — М.: Мысль, 1975.
2. *Фейнман Р.* Характер физических законов. — М.: Наука, 1987. — С. 33–34.
3. *Бриллюэн Л.* Новый взгляд на теорию относительности. — М.: Мир, 1972.
4. *Олейник В. П., Прокофьев В. П.* Вращательная инерция и ее физические следствия. Что такое гравитация? // Физика сознания и жизни, космология и астрофизика. — 2008. — Т. 8. — №2 (30). — С.23–56.
5. *Олейник В. П.* Новый подход к проблеме движения: ускоренные движения по инерции // Физика соз-

нания и жизни, космология и астрофизика. — 2009. — Т. 9. — №3 (35). — С.24–56.
6. *Арепьев Ю. Д., Олейник В. П.* Траектории ускоренного (криволинейного) движения классической частицы по инерции // Вестник МАЭН. Вып.7. / Под ред. Д. Н. Жданова. — Барнаул: ООО «Статика», 2010. — С. 13–20.
7. *Олейник В. П.* Ускоренные движения по инерции: гравитация и аномальные явления // Биоинформационные и энергоинформационные технологии развития человека. / Под ред. Д. Н. Жданова. Т.1. — Барнаул: ООО «Статика», 2009.— С. 9–16.
8. *Parks H.V., Faller J.E.* A simple pendulum determination of the gravitational constant. arXiv:1008.3203v3 [physics.class-ph].
9. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т 1. Современная наука о природе. Законы механики. — М.: Мир, 1967.
10. *Астахов А. В.* Курс физики. Т.1. Механика. Кинетическая теория материи. — М.: Физматлит, 1977.
11. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. — М.: Физматлит, 1976.
12. *Лорентц Г. А.* Теории и модели эфира. — М.; Л.: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.
13. *Гегель Г.* Об орбитах планет. Философская диссертация. // Гегель. Работы разных лет. — М.: Мысль, 1970.
14. *Головнев А.* Конечная Вселенная. Книга вторая. Физика конечной Вселенной. Альтернативная физическая концепция. — К.: Издательский Дом Д. Бураго, 2003.
15. Федулаев Л. Е. Физическая форма гравитации: диалектика природы. — М.: КомКнига, 2006.

Статья поступила в редакцию 24.09.2010 г.

Oleinik V. P.

On the physical nature of gravitation

Institute of High Technologies,
Kyiv National Taras Shevchenko University64, Volodymirska Street, 01601, Kyiv, Ukraine
e-mail: valoleinik@gmail.com

According to the results of our previous research, the accelerated motions of particles by inertia give rise to the attractive force between particles. In this article the usual free-fall laws of a small trial body on surface of the large one are inferred from the accelerated inertial motions concept. Thus, the simple physical explanation for gravitation phenomenon is found, without using the hypothesis that a special force field exists as a property intrinsically inherent to substance particles, and also without using the concept of gravitational mass and the principle of equivalence of inertial and gravitational masses. The results obtained allow one to conclude that **the physical nature of gravitation is uncovered: the reason of gravitation is the accelerated motions of particles by inertia**. **The foundation is laid for the theory of gravitation as a physical one**.

The Newtonian theory of gravitation is an approximate, phenomenological theory, which is valid only on certain conditions. The physical meaning of gravitation constant γ is elucidated. The numerical estimate of the magnitude of γ made with the formula obtained in the paper is in good agreement with observational data. According to the results of observations performed at different years, the value of γ varies with time. This is due to the fact that γ is not a fundamental constant, but a quantity that depends on parameters which define the celestial bodies motion and undergo small fluctuations in the course of time.

An arbitrary motion of classical particle is a linear combination of two motions: the accelerated motion by inertia $D_{inertial}$, taking place without any expenditures of energy, and the forced motion D_{forced}, taking place under the influence of an external force. Superposition of the forces, generated by accelerated motions by inertia in multiparticle systems, leads to appearance of a special force field which plays the role of a physical medium inseparable from paticles. The knowledge of the mechanism of formation of the medium allows one to describe its physical properties and to explore its behaviour and interaction with the particles generating it.

Out of the non-enumerable set of motions being described by linear combination of motions $D_{inertial}$ and D_{forced}, a single motion D_{forced} is taken into account in Newtonian mechanics. Thus, the continuum of motions drops out of the field of view of mechanics — such is the degree of incompleteness of the Newtonian scheme of mechanics as the research technique of nature.

The type of the equation of motion describing the perturbation of physical system, being in a state of accelerated motion by inertia, under the action of external force is established. It is shown that various co-ordinate systems as the analysers of motion are physically noncompletely equivalent in respect to the accelerated motions by inertia. It is due to the fact that the physical content of the concept of degree of freedom of particle appears to be different in various co-ordinate systems.

Keywords: accelerated motions of particles by inertia, free-fall laws, physical nature of gravitation, physical meaning of gravitation constant, the degree of incompleteness of the Newtonian scheme of mechanics, physical nonequivalence of various co-ordinate systems.