等円術(3)松山の算額(伊佐爾波神社・太山寺)

著者	米山 忠興
雑誌名	東洋大学紀要 自然科学篇
号	54
ページ	87-98
発行年	2010-03
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00004075/

等円術Ⅲ.
―松山の算額（伊佐爾波神社・太山寺）―

米 山 忠 興

Equi-radial Circles in Segmental Triangles Ⅲ.
― Mathematical Tablets Dedicated to Isaniwa Shrine and Taisanji Temple in Matsuyama ―

Tadaoki YONEYAMA

1. 松山の二つの算額

幕末の松山で、同一人が神社と寺に奉納した算額問題を採り上げる。

一つは道後温泉の近くにある道後八幡 伊佐爾波神社の算額、もう一つは、市街地の西の三津浜近くの太山寺の算額である。

もちろん、同じ人物の問題だから、この二問には共通点が多く、先の「等円術」の基本公式を用いれば、比較的かんたんに解決出来る問題である。

また、興味深い術文もあるので、ここに紹介する。

松山には他にもいろいろな算額があるので、本来は奉納者の名前で「花山金次郎の算額」というタイトルにしたかったが、私自身も初めて知った名前であり、一般には全く知られていないと思うので、ここでは已むを得ず、標記の「松山の算額」というタイトルにした。

1985年刊の『愛媛県史 』（注1）には、太山寺・伊佐爾波神社の両者の算額文面と問題図が載っている。『伊佐爾波神社の算額』（注2）には、伊佐爾波神社の算額の写真と算額文面が記載されている。

（注1）『愛媛県史』宗教・学問編　第五章　和算（1985年刊）

（注2）『道後八幡 伊佐爾波神社の算額』伊佐爾波神社 紀要第1集（2005年刊）

以下ではそれぞれ、『県史』、『算額』と略記する。

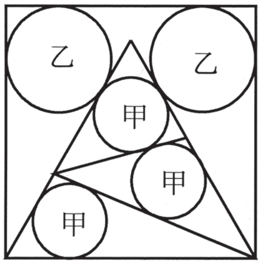
---

*この研究の資料収集・調査は、平成19～20年度の東洋大学特別研究（個人研究）の研究期間に行なわれた。

**東洋大学自然科学研究室　〒112-8606 東京都文京区白山5-28-20 Natural Science Laboratory, Toyo University 28-20, Hakusan 5, Bunkyo-ku, Tokyo, 112 Japan.

太山寺　算額

奉献



今有如圖平方内設二
斜容三角其内容甲圓
三箇與其外容乙圓二
個只云乙圓徑若干問
得甲圓徑如何

答曰　如左術

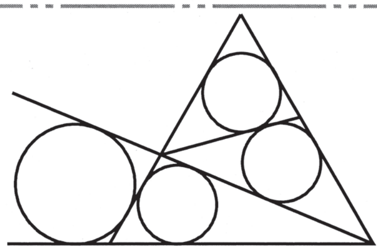
術曰立天元一為甲圓徑二十之以減九
十九箇餘乘甲圓徑内減一百七十一個
餘乘甲圓徑加一百一十七箇乘甲圓徑
與二十七箇相消得開方式三乘方開之
得商乘三角中鈎卒與五分和及乙圓徑
得甲圓徑合問

山崎昌龍門人

嘉永五子年　関流　花山金次郎

春三月　直孝　印

伊佐爾波神社　算額　第十



今有如圖直線上載三角其内設二
斜容内等員三箇延其下斜其傍挿
外異圓一個只云三角面二十寸問
外員涇如何

答曰　外圓涇九寸零零有奇

術曰立天元一為外員涇二十之以
減九十九箇餘乘外員涇内減一百七十一個餘乘外
圓涇加一百一十七個乘外員涇與二十七個相消得
開方式三乘方開之得商以減一個五分餘以除商乘
三角面及中鉤率得外員涇合問

山崎昌龍門人

嘉永三戌季　関　流　花山金次郎

夏五月吉日　直孝　印

写真 1　伊佐爾波神社 正面：寛文七年（1667 年）竣工。江戸初期らしい豪華な作りである。

写真 4　太山寺 山門（第三門）
門前町の入り口の一の門、寺域に入る階段上の二の門をくぐり、さいごの本堂・大師堂の手前の石の階段上にあるのが、この三の門である。

写真 2　松山 道後八幡 伊佐爾波神社の石段

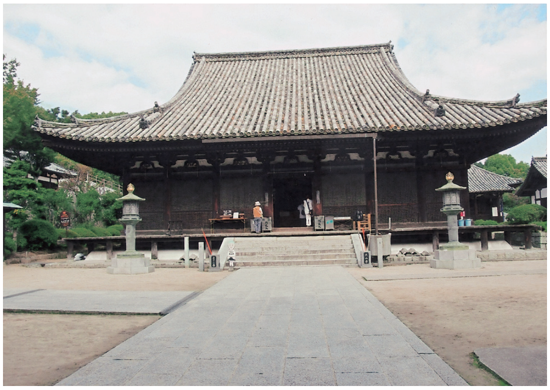


写真 3　太山寺本堂（鎌倉初期に建立され、現在は国宝）
算額は、この本堂の「結界」内にあった。一般には非公開らしいが、寺の許可があれば、中に入って見せてもらえる。

これらの算額等の写真については、伊佐爾波神社　及び太山寺から掲載の許可を頂いた。

写真 5　花山金次郎が伊佐爾波神社回廊に奉納した算額。（『算額』より）

写真 6　花山金次郎が太山寺本堂に奉納した算額。
なるべく接写して、文字を読み取ろうとしたので、外枠までは写らなかった。

太山寺は四国八十八カ所の札所の一つなので、お遍路の途次、必ず参拝している。そして算額は当初、本堂の「結界」の中の向かって左側の壁に懸けられていたが、寺務所・納経所の許可を得て中に入り、写真を撮ることが出来た。

一方、伊佐爾波神社は道後温泉近くのかなり長い石段の上の高台にある神社であり、ここは神社だから札所ではないけれども、やはりお遍路の途中で度々その長い石段を上がって参拝している。しかし算額は、今は倉庫に厳重に保管されているということで、見ることは出来なかった。その代わりに、『算額』には算額の写真と算額文面が載せられているので、およそのことを知ることが出来る。

嘉永三年（戌（いぬ）年）は西暦1850年である。伊佐爾波神社の算額の番号は『県史』の番号付けによった。（『算額』では、第十三となっている。）

太山寺算額の文字はかなり楷書に近く、伊佐爾波のは隷書のようである。

「径あるいは徑」の文字は、太山寺では「径」、伊佐爾波神社では「泾」のように書かれている。

伊佐爾波は、『算額』から「圓と員」、「箇と個」の２種の字が用いられていることが分かったので修正した。

両算額の術文の終わりの方で、太山寺については『県史』には「中鈎率」と記載されているが、実地に見た算額では明らかに「中鈎卒」と書かれている。

伊佐爾波は、『県史』、『算額』ともに記載されている文面は「中鈎率」となっているが、『算額』の写真からは「率」については、何と書かれているのか読み取れない。

その他にも、太山寺に関しては、『県史』にある文字を実地に算額を見ながらなるべくもとの文字に改めた。何回か大山寺に足をはこんだ甲斐があってか、手にとれるほどの位置で、懐中電灯の明かりを斜めから照らすことによって、風化して消えかかっている文字がほんの僅かに浮き上がって見えることから、すべての文字を読み取ることが出来た。

問題文１行目の「設」は設、術文１行目の「减」は減、問題文・術文中の４つの「得」は得の意であり、最後の行の号の「直」は直で左のタテ画がないが、いずれも異体字であろう。

また『県史』では、伊佐爾波神社の「花山金次郎」の号が「真季」となっていたが、同一人物なので、太山寺算額と『算額』の文面に従って、「直孝」とした。『算額』に掲載されている写真からは判読不能であった。

算額の内容についていうと、伊佐爾波の術文の中ほどで『県史』、『算額』の文面は、もとは「・・一百一十七個與二十七個相消」となっていて、傍点部分「乗外員徑」が脱落していたので修正した。たぶん、「（乗）外員徑」が何回も現れるので、誤って書き落としたものと思われる。

また太山寺問題文については三行目の「與」と五行目の「得」は不要である。

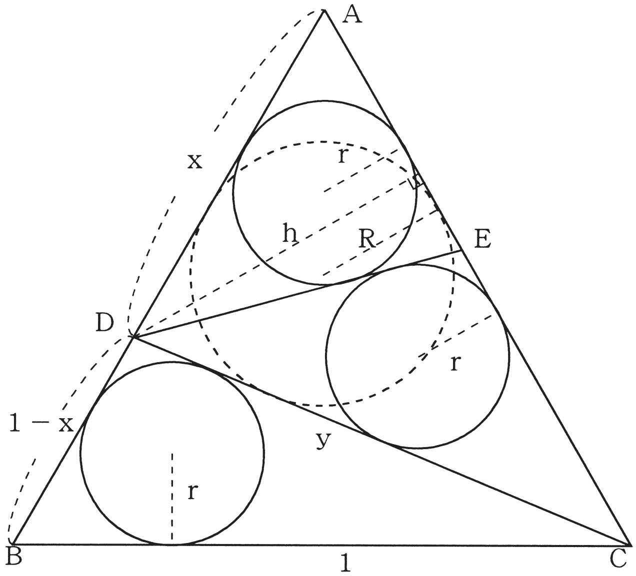
ただし「得」を残して、「甲圓径を得る術の如何を問う」という意味で「<u>問</u>得甲圓径<u>術</u>如何」とすることも可能だろう。

さらに「容三角其内」の位置が不審。正方形内に正三角形を容れ、さらにその内に二斜を設けて、甲圓三箇を容れ、（その三角形の）外に乙圓二個を容れる。乙圓径を与えたとき、甲圓径の如何を問う、ということだから、「容三角其内」を「設二斜」の前に出して、

問題文は「今有如圖平方内容三角其内設二斜容甲圓三箇□其外容乙圓二個只云乙圓徑若干問□甲圓徑如何」とするのが良さそうである（算額面は未修正)。

伊佐爾波は、正三角形の一辺を与えて外円径を求める問題だが、太山寺は、乙円径を与えて正方形の一辺（＝正三角形の一辺）→甲円径を求めよ、となっている。

2. ［等円径の解法］



まず、伊佐爾波神社第十算額と太山寺算額に共通する「正三角形に界斜を隔てて三つの等円が入っているとき、等円径を求める」問題を等円術の一般公式を用いて解く。

$$\left(1-\frac{2R}{h}\right)=\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)$$

はじめに、正三角形の一辺の長さを 1, 三つの等円径を $2r$ とし、等円術の一般公式をあてはめる。また、上の図のように、⊿ADC の高さ（中鉤）を h, 内接円の半径を $2R$ とし、AD = x, DC = y とおく。

$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ だから、一般公式から

$$1-\frac{2R}{\frac{\sqrt{3}}{2}x}=\left(1-\frac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right)^2$$

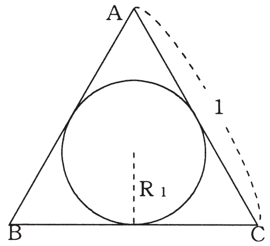
$$1-\frac{4R}{\sqrt{3}x}=\left(1-\frac{4r}{\sqrt{3}x}\right)^2 \qquad \cdots\cdots①$$

同じく、⊿ADC の面積について、

$$\frac{R}{2}(1+x+y)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x \qquad \cdots\cdots②$$

つぎに、正三角形：⊿ABC の内接円の半径を R_1 とし、三角形の面積を考える。

$\dfrac{R_1}{2}\times 3=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $R_1=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.



よって、⊿ABCの界斜CDを隔てて、半径が R と r の円が内接しているから、再び一般公式を用いて、

$$\left(1-\frac{2\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\left(1-\frac{2r}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\cdot\left(1-\frac{2R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$\frac{1}{3}=\left(1-\frac{4r}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1-\frac{4R}{\sqrt{3}}\right) \qquad \cdots\cdots③$$

また、⊿DBCの面積と、その内接円の半径 r について

$$\frac{r}{2}\left\{(1-x)+y+1\right\}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$r(2-x+y)=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x) \qquad \cdots\cdots④$$

この①～④は、4つの未知数：$r,\ R,\ x,\ y$ に関する方程式となっている。

これから計算によって、等円径 r のみの式に変形していく。

$$② \Rightarrow\quad 1+x+y=\frac{\sqrt{3}x}{2R} \qquad \cdots\cdots②'$$

$$④ \Rightarrow\quad 2-x+y=\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2r} \qquad \cdots\cdots④'$$

$$②'-④' \Rightarrow\quad 2x-1=\frac{\sqrt{3}x}{2R}-\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2r} \qquad \cdots\cdots⑤$$

$$③ \Rightarrow\quad \frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}-4r}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{4R}{\sqrt{3}}\right)$$

$$1-\frac{4R}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3-4\sqrt{3}r}$$

$$\frac{4R}{\sqrt{3}}=1-\frac{1}{3-4\sqrt{3}r}$$

$$\therefore\quad \frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{1-2\sqrt{3}r}{3-4\sqrt{3}r} \qquad \cdots\cdots③'$$

$$③'\cap⑤ \Rightarrow\quad 2x-1=\frac{3-4\sqrt{3}r}{1-2\sqrt{3}r}\cdot x-\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2r}$$

$$2r(1-2\sqrt{3}r)(2x-1)$$

$$=(3-4\sqrt{3}r)\cdot 2rx-\sqrt{3}(1-x)(1-2\sqrt{3}r)$$

$$x\left\{4r(1-2\sqrt{3}r)-2r(3-4\sqrt{3}r)-\sqrt{3}(1-2\sqrt{3}r)\right\}$$

$$=2r(1-2\sqrt{3}r)-\sqrt{3}(1-2\sqrt{3}r)$$

$$x\left\{4r-8\sqrt{3}r^2-6r+8\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}+6r\right\}$$
$$=2r-4\sqrt{3}r^2-\sqrt{3}+6r$$
$$x(4r-\sqrt{3})=(-4\sqrt{3}r^2+8r-\sqrt{3}) \quad \cdots\cdots ⑤'$$

①∩③'⇒ $1-\dfrac{2-4\sqrt{3}r}{(3-4\sqrt{3}r)x}=\dfrac{(\sqrt{3}x-4r)^2}{3x^2}$

$$3x^2(3-4\sqrt{3}r)-3x(2-4\sqrt{3}r)$$
$$=(3-4\sqrt{3}r)(3x^2-8\sqrt{3}rx+16r^2)$$
$$x\left\{-3(2-4\sqrt{3}r)+8\sqrt{3}r(3-4\sqrt{3}r)\right\}=16r^2(3-4\sqrt{3}r)$$

$\times\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$:

$$x\left\{\sqrt{3}(1-2\sqrt{3}r)-4r(3-4\sqrt{3}r)\right\}=8r^2(-\sqrt{3}+4r)$$
$$x\left\{16\sqrt{3}r^2-18r+\sqrt{3}\right\}=8r^2(4r-\sqrt{3}) \quad \cdots\cdots ①'$$

①'∩⑤'⇒ $8r^2(4r-\sqrt{3})^2=(-4\sqrt{3}r^2+8r-\sqrt{3})(16\sqrt{3}r^2-18r+\sqrt{3})$

$$8\times16r^4-64\sqrt{3}r^3+24r^2$$
$$=-64\times3r^4+(4\times18\sqrt{3}+8\times16\sqrt{3})r^3$$
$$-(12+8\times18+48)r^2+(8\sqrt{3}+18\sqrt{3})r-3$$
$$64(2+3)r^4-8\sqrt{3}(8+9+16)r^3$$
$$+12(2+1+12+4)r^2-26\sqrt{3}r+3=0$$
$$64\times5r^4-8\sqrt{3}\times33r^3+12\times19r^2-26\sqrt{3}r+3=0$$

$r=\dfrac{t}{2\sqrt{3}}$ とおくと、

$$\frac{20}{3^2}t^4-\frac{33\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}t^3+\frac{57}{3}t^2-\frac{13\sqrt{3}}{\sqrt{3}}t+3=0$$
$$20t^4-99t^3+171t^2-117t+27=0 \quad (\$)$$

	20	−99	171	−117	27
$\frac{3}{4}$)		15	−63	81	−27
	20	−84	108	−36	0

$$(4t-3)(5t^3-21t^2+27t-9)=0$$
$$4t-3=0 \quad \Rightarrow \quad 8\sqrt{3}r=3$$
$$2r=\frac{\sqrt{3}}{4}\fallingdotseq\frac{1.732}{4}\fallingdotseq 0.433$$

これは大きすぎるので、不適。

$\therefore \quad 5t^3-21t^2+27t-9=0.$

$t=\dfrac{s+7}{5}$ とおくと、

$$\frac{(s+7)^3}{5^2} - 21\frac{(s+7)^2}{5^2} + 27\frac{(s+7)}{5} - 9 = 0$$

$$(s^3 + 3\cdot 7s^2 + 3\cdot 7^2 s + 7^3) - 7\cdot 3\,(s^2 + 2\cdot 7s + 7^2) + 5\cdot 3\cdot 9\,(s+7) - 5^2\cdot 3^2 = 0$$

$$s^3 + (3\cdot 7^2 - 6\cdot 7^2 + 5\cdot 3\cdot 9)\,s + (7^3 - 3\cdot 7^3 + 5\cdot 3\cdot 9\cdot 7 - 5^2\cdot 3^2) = 0$$

$$s^3 = 12s - 34$$

ところで、一般に３次方程式：$s^3 = ps + q$ の解は、$s = u_o + v_o$ とおいたとき、以下のように表わせる（※）ので、上の式の $p = 12,\ q = -34$ を代入して、

$$u_o, v_o = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4^3}}$$

$$= \sqrt[3]{-17 \pm \sqrt{225}} = \sqrt[3]{-17 \pm 15}$$

$$= -\sqrt[3]{2},\ -\sqrt[3]{32} = -\sqrt[3]{2},\ -2\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$$

ここで、$a^3 \equiv 2$ とすると、$a = \sqrt[3]{2}$.

（図形だから、ここでは当然、ω, ω^2 は考えない。）

$$\therefore\quad s = -a - 2a^2$$

$r = \dfrac{t}{2\sqrt{3}}$, $t = \dfrac{s+7}{5}$ だから、

$$\therefore\quad 2r = \frac{t}{\sqrt{3}} = \frac{s+7}{5\sqrt{3}} = \frac{7 - a - 2a^2}{5\sqrt{3}}\quad (\fallingdotseq 0.2962127).$$

これが等円径であるが、計算が面倒なだけで、答えもあまりきれいではなく、
これだけでは、あまり面白い問題ではない。

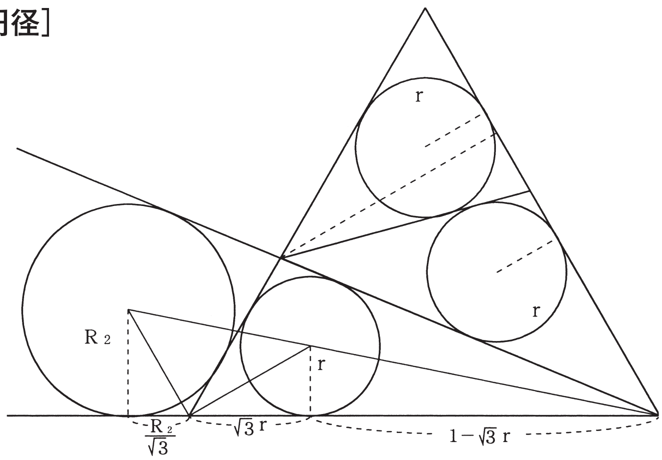
（※）３次方程式の解については、『算額（その９）—木島平 天然寺—』米山忠興、東洋大学紀要自然科学篇 第47号、pp.49-59，2003.

次に、伊佐爾波の傍接する「外円」径を求めてみる。

3. ［伊佐爾波神社・外円径］

もとの三角形が正三角形だから、それぞれの長さは、右の図のようになる。

あとは比例関係から、



$$\frac{R_2}{1+\frac{R_2}{\sqrt{3}}}=\frac{r}{1-\sqrt{3}r}$$

$$R_2(1-\sqrt{3}r)=r\left(1+\frac{R_2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$R_2\left(1-\sqrt{3}r-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)=r$$

$$R_2\cdot\frac{\sqrt{3}-4r}{\sqrt{3}}=r$$

$$\therefore\quad R_2=\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}-4r}=\frac{\sqrt{3}\,\frac{7-a-2a^2}{10\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-4\cdot\frac{7-a-2a^2}{10\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}(7-a-2a^2)}{30-28+4a+8a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{7-a-2a^2}{1+2a+4a^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(7-a-2a^2)(2a-1)}{2(1+2a+4a^2)(2a-1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-4a^3+15a-7}{8a^3-1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-8+15a-7}{16-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{15a-15}{15}=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)$$

$$\therefore\quad 2R_2=\sqrt{3}(\sqrt[3]{2}-1).$$

伊佐爾波は、三角面を 20 寸としているから、

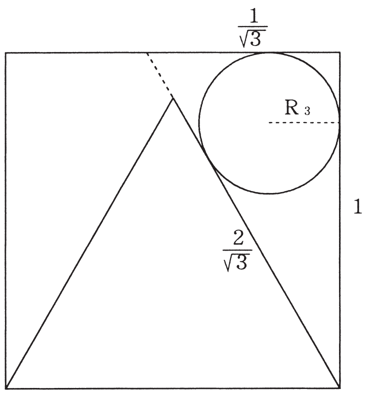
$$2R_2=\sqrt{3}(\sqrt[3]{2}-1)\times 20=9.0039\text{ 寸}.$$

これは、「答に曰く、外円径九寸零零奇有り」に合っている。

4. ［太山寺・乙円径］

太山寺の問題には、初めに、右の図の円径：R_3 と正方形（及び正三角形）の一辺の長さの比を求めよ、という問いがあることになる。

これは、30° の直角三角形の面積と内接円の関係だけで解ける簡単な問題である。



$$\frac{R_3}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{R_3}{2}(1+\sqrt{3})=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$R_3=\frac{1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$$

5. ［甲円径の術文］

ところで、太山寺算額の術文のはじめは「立天元一為甲圓徑」(天元の一を立てて甲円径と為す）であり、伊佐爾波もほとんど同じで「立天元一為外員徑」となっているが、いずれも、円径を求めるための方程式の変数（未知数）を（tと）定めて式に表わすということであって、必ずしも甲圓徑・外員徑そのものを直接に求めると言うことではない。術文の「商を得る」所までを具体的に式で表わすと、以下のようになる。

$$(((99-t\times 20)\,t-171)\,t+117)\,t=27$$
$$((99t-20t^2-171)\,t+117)\,t=27$$
$$(99t^2-20t^3-171t+117)\,t=27$$
$$20t^4-99t^3+171t^2-117t+27=0$$

となって、（$）と一致している。

太山寺術文はさらに、甲円径は、上の式から得られたtから

$t\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)\times$乙円径で得られるという。乙円径をさいごに掛けるということは、

結局のところ、一辺の長さを1としているのと同じことになる。

$$\text{甲円径}=t\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}=\frac{t}{\sqrt{3}}=2r\ .$$

6. ［外円径の術文］

また、伊佐爾波の外員徑を求める術文は、

$$t=\frac{s+7}{5}=\frac{7-a-2a^2}{5}\ \text{を用いると、}$$

$$\text{外員徑}=2R_2=\frac{t}{\left(\frac{3}{2}-t\right)}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

ここで $t=2\sqrt{3}r$ だから、

$$2R_2=\frac{2\sqrt{3}r}{\left(\frac{3}{2}-2\sqrt{3}r\right)}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{3}-4r}=\sqrt{3}\,(\sqrt[3]{2}-1)$$

となって、先の外円径と一致する。

7. おわりに

太山寺算額は、等円術の一般公式を利用すれば解けるが、かなり面倒な問題で、答えもあまり美しくない。

しかし、伊佐爾波神社第十算額まで解くと、かなり簡潔な答えが出てくる。とくにさいごのところは、$(x-1)(x^2+x+1)=(x^3-1)$ を用いた「分母の有理化」をすると、きれいな答えが出てきて意外性があり面白かった。

著者は、2006〜7年頃に、この分母の有理化からヒントを得て、大学文系の数学入試問題として出題したことがあった。